

Ariel Starke Buzetti

**Projeto de Controle Robusto Chaveado com Falhas  
nos Sensores**

Ilha Solteira - SP  
2017





Ariel Starke Buzetti

# Projeto de Controle Robusto Chaveado com Falhas nos Sensores

Dissertação de Mestrado apresentada à  
Faculdade de Engenharia - UNESP -  
Campus de Ilha Solteira, para obtenção  
do título de Mestre em Engenharia  
Elétrica.

Especialidade: Automação.

Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira  
Orientador

Ilha Solteira - SP  
2017

FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

B992p Buzetti, Ariel Starke.  
Projeto de controle robusto chaveado com falhas nos sensores / Ariel Starke Buzetti. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2017  
87 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Automação, 2017

Orientador: Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira  
Inclui bibliografia

1. Falha do sensor. 2. Controle confiável. 3. Controle chaveado. 4. Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs). 5. Controle robusto.



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Câmpus de Ilha Solteira

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Projeto de Controle Robusto Chaveado com Falhas nos Sensores

**AUTOR: ARIEL STARKE BUZETTI**

**ORIENTADOR: MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA**

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em ENGENHARIA ELÉTRICA, área: AUTOMAÇÃO pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA  
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. JEAN MARCOS DE SOUZA RIBEIRO  
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. EDSON ITALO MAINARDI JUNIOR  
Departamento de Eletrotécnica / Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia

Ilha Solteira, 17 de janeiro de 2017

## **AGRADECIMENTOS**

Meus agradecimentos a todos os familiares, amigos, professores e funcionários da FEIS-UNESP, que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho. Em especial, dedico meus agradecimentos:

- Ao Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira, por todo ensinamento, incentivo, confiança e orientação;
- Aos meus pais Salatiér e Wilma e ao meu irmão Bruno pelo carinho, apoio e incentivo;
- Aos meus amigos e colegas do Laboratório de Pesquisa em Controle (LPC) que de forma direta ou indireta me ajudaram, em especial ao Diogo Ramalho de Oliveira, pela ajuda nas implementações em bancada;
- À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela oportunidade e apoio financeiro.

## RESUMO

Este trabalho aborda um tema recorrente em implementações práticas de sistemas de controle automático, que é a falha de medição dos sensores. Considerou-se que o vetor de estado disponível para a realimentação, denominado  $x_M(t)$ , apresenta incertezas politópicas, relacionadas às falhas nos sensores. Uma das contribuições desse trabalho é a representação adequada em espaço de estados de um sistema linear e invariante no tempo utilizando  $x_M(t)$  e supondo as incertezas de medição invariantes no tempo. Com esta descrição, é proposto um procedimento de projeto de controle chaveado que garante a estabilidade do sistema controlado, com uma taxa de decaimento ( $\beta$ ) mínima previamente especificada. É apresentado um teorema que diminui a norma do controlador, para assim evitar problemas de saturação e uma forma de escolher outros vértices do politopo para diminuir o conservadorismo do sistema. Resultados teóricos e de simulações comprovam que o controlador chaveado proposto é menos conservativo do que o controlador tradicional com apenas um único ganho. Esse trabalho aborda também uma proposta para o projeto de um controlador que garante a estabilidade e uma taxa de decaimento mínima para o sistema controlado, mesmo que as falhas nos sensores variem no tempo. Ambos os projetos de controle são baseados em desigualdades matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities - LMIs*) e utilizam uma função de Lyapunov do tipo quadrática. Análises teóricas, resultados de simulações e implementações práticas no controle de um sistema *2D ball balancer* confirmam a eficiência dos dois métodos propostos.

**Palavras-chave:** Falha do sensor. Controle confiável. Controle chaveado. Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs). Controle robusto.

## ABSTRACT

This work addresses a recurring subject in practical implementations of automatic control systems, which is the sensor measurement failure. Thus, the state vector available for feedback, denominated  $x_M(t)$ , presents polytopic uncertainties. One of the contributions of this work is an adequate state space representation of a linear time-invariant system using  $x_M(t)$ , considering that the measurement uncertainties are time-invariant. Then, using this representation, is proposed a design procedure of a switched control that ensures the stability with a given minimum decay rate ( $\beta$ ) of the controlled system. It is also shown a theorem that decreases the controller's norm to avoid saturation problems and it is demonstrated how to choose the polytope's vertices to decrease the system's conservativeness. A theoretical analysis and simulation results show that the proposed switched control procedure offers less conservative conditions than that provided by using the classical controller with only one gain. This work also presents a controller design that ensures the stability, with a given minimum decay rate, of the controlled system, even if the sensor failure varies in time. Both control designs are based on linear matrix inequalities (LMIs) and use a quadratic Lyapunov function. A practical implementation for controlling a *2D ball balancer* system confirms the efficiency of both proposed methods.

**Keywords:** Sensor fault. Reliable control. Switched control. Linear Matrix Inequalities (LMIs). Robust control.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Equipamento <i>2D ball balancer</i> , pertencente ao DEE-FEIS-LPC. . . . .	26
Figura 2	Planta esquemática do <i>2D ball balancer</i> na direção $x$ . . . . .	26
Figura 3	Resultados de simulação: posição $r$ , ângulo $\theta$ , sinal de controle $u_\sigma$ e a regra de chaveamento $\sigma$ do <i>2D ball balancer</i> utilizando o controlador chaveado (19), (48) e (49). . . . .	33
Figura 4	Resultados práticos da direção $x$ : posição $r_x$ , ângulo $\theta_x$ , sinal de controle $u_{\sigma_x}$ e a regra de chaveamento $\sigma_x$ do <i>2D ball balancer</i> utilizando o controlador chaveado (19), (48) e (49). . . . .	34
Figura 5	Resultados práticos da direção $y$ : posição $r_y$ , ângulo $\theta_y$ , sinal de controle $u_{\sigma_y}$ e a regra de chaveamento $\sigma_y$ do <i>2D ball balancer</i> utilizando o controlador chaveado (19), (48) e (49). . . . .	34
Figura 6	Resultados de simulação: posição $r$ , ângulo $\theta$ , sinal de controle $u_\sigma$ e a regra de chaveamento $\sigma$ do <i>2D ball balancer</i> utilizando o controlador chaveado (19), (50) e (51). . . . .	35
Figura 7	Resultados práticos da direção $x$ : posição $r_x$ , ângulo $\theta_x$ , sinal de controle $u_{\sigma_x}$ e a regra de chaveamento $\sigma_x$ do <i>2D ball balancer</i> utilizando o controlador chaveado (19), (50) e (51). . . . .	36
Figura 8	Resultados práticos da direção $y$ : posição $r_y$ , ângulo $\theta_y$ , sinal de controle $u_{\sigma_y}$ e a regra de chaveamento $\sigma_y$ do <i>2D ball balancer</i> utilizando o controlador chaveado (19), (50) e (51). . . . .	36
Figura 9	<i>Falha</i> $\times \eta$ do controlador chaveado (em azul) e do controlador com ganho constante (em vermelho), para falhas entre 0% (sem falha) e $-70\%$ . . . . .	38
Figura 10	<i>Falha</i> $\times \eta$ do controlador chaveado (em azul) e do controlador com ganho constante (em vermelho), para falhas entre $-70\%$ e $-90\%$ . . . . .	38
Figura 11	Posição dos vértices do controlador com 4 chaves, para o caso em que $0,5 \leq \gamma_3(a_3) \leq 1$ e $1 \leq \gamma_3(b_3)^{-1} \leq 2$ , em relação à curva $\gamma_3(b_3)^{-1} = \gamma_3(a_3)^{-1}$ (em azul). . . . .	40

Figura 12	Posição dos vértices do controlador sem o vértice 4, em relação à curva $\gamma_3(b_3)^{-1} = \gamma_3(a_3)^{-1}$ (em azul). . . . .	41
Figura 13	Posição dos vértices do controlador com 3 chaves, para o caso em que $0,5 \leq \gamma_3(a_3) \leq 1$ e $1 \leq \gamma_3(b_3)^{-1} \leq 2$ , em relação à curva $\gamma_3(a_3)^{-1} = \gamma_3(b_3)^{-1}$ (em azul). . . . .	43
Figura 14	Resultados de simulação: posição $r$ , ângulo $\theta$ , sinal de controle $u_\sigma$ e a regra de chaveamento $\sigma$ do <i>2D ball balancer</i> utilizando o controlador chaveado (19), (67) e (68). . . . .	48
Figura 15	Resultados práticos da direção x: posição $r_x$ , ângulo $\theta_x$ , sinal de controle $u_{\sigma_x}$ e a regra de chaveamento $\sigma_x$ do <i>2D ball balancer</i> utilizando o controlador chaveado (19), (67) e (68). . . . .	48
Figura 16	Resultados práticos da direção y: posição $r_y$ , ângulo $\theta_y$ , sinal de controle $u_{\sigma_y}$ e a regra de chaveamento $\sigma_y$ do <i>2D ball balancer</i> utilizando o controlador chaveado (19), (67) e (68). . . . .	49
Figura 17	Resultados de simulação: posição $r$ , ângulo $\theta$ , sinal de controle $u_\sigma$ e a regra de chaveamento $\sigma$ do <i>2D ball balancer</i> utilizando o controlador chaveado (19), (69) e (70). . . . .	50
Figura 18	Resultados práticos da direção x: posição $r_x$ , ângulo $\theta_x$ , sinal de controle $u_{\sigma_x}$ e a regra de chaveamento $\sigma_x$ do <i>2D ball balancer</i> utilizando o controlador chaveado (19), (69) e (70). . . . .	50
Figura 19	Resultados práticos da direção y: posição $r_y$ , ângulo $\theta_y$ , sinal de controle $u_{\sigma_y}$ e a regra de chaveamento $\sigma_y$ do <i>2D ball balancer</i> utilizando o controlador chaveado (19), (69) e (70). . . . .	51
Figura 20	<i>Falha</i> $\times$ $\eta$ dos controladores chaveados de 3 e 4 vértices (em amarelo e azul, respectivamente) e do controlador com ganho constante de 4 vértices (em vermelho), para falhas entre 0% (sem falha) e $-70\%$ . . . . .	52
Figura 21	<i>Falha</i> $\times$ $\eta$ dos controladores chaveados de 3 e 4 vértices (em amarelo e azul, respectivamente) e do controlador com ganho constante de 4 vértices (em vermelho), para falhas entre $-70\%$ e $-90\%$ . . . . .	53
Figura 22	Resultados de simulação: posição $r$ , ângulo $\theta$ , sinal de controle $u_\sigma$ e a falha $\gamma_3$ do <i>2D ball balancer</i> utilizando o controlador descrito por (71) e (92). . . . .	61

Figura 23	Resultados práticos do eixo $x$ : posição $r_x$ , ângulo $\theta_x$ , sinal de controle $u_{\sigma_x}$ e a falha $\gamma_3$ do <i>2D ball balancer</i> utilizando o controlador descrito por (71) e (92). . . . .	61
Figura 24	Resultados práticos do eixo $y$ : posição $r_y$ , ângulo $\theta_y$ , sinal de controle $u_y$ e a falha $\gamma_3$ do <i>2D ball balancer</i> utilizando o controlador descrito por (71) e (92). . . . .	62
Figura 25	Resultados de simulação: posição $r_x$ , ângulo $\theta_x$ , sinal de controle $u_{\sigma_x}$ e a falha $\gamma_3$ do <i>2D ball balancer</i> utilizando o controlador descrito por (71) e (96). . . . .	63
Figura 26	Resultados práticos do eixo $x$ : posição $r_x$ , ângulo $\theta_x$ , sinal de controle $u_{\sigma_x}$ e a falha $\gamma_3$ do <i>2D ball balancer</i> utilizando o controlador descrito por (71) e (96). . . . .	63
Figura 27	Resultados práticos do eixo $y$ : posição $r_y$ , ângulo $\theta_y$ , sinal de controle $u_y$ e a falha $\gamma_3$ do <i>2D ball balancer</i> utilizando o controlador descrito por (71) e (96). . . . .	64
Figura 28	Resultados de simulação: posição $r$ , ângulo $\theta$ , sinal de controle $u_{\sigma}$ e a falha $\gamma_3$ do <i>2D ball balancer</i> utilizando o controlador descrito por (71) e (102). . . . .	67
Figura 29	Resultados práticos do eixo $x$ : posição $r_x$ , ângulo $\theta_x$ , sinal de controle $u_{\sigma_x}$ e a falha $\gamma_3$ do <i>2D ball balancer</i> utilizando o controlador descrito por (71) e (102). . . . .	68
Figura 30	Resultados práticos do eixo $y$ : posição $r_y$ , ângulo $\theta_y$ , sinal de controle $u_y$ e a falha $\gamma_3$ do <i>2D ball balancer</i> utilizando o controlador descrito por (71) e (102). . . . .	68
Figura 31	Resultados de simulação: posição $r_x$ , ângulo $\theta_x$ , sinal de controle $u_{\sigma_x}$ e a falha $\gamma_3$ do <i>2D ball balancer</i> utilizando o controlador descrito por (71) e (106). . . . .	69
Figura 32	Resultados práticos do eixo $x$ : posição $r_x$ , ângulo $\theta_x$ , sinal de controle $u_{\sigma_x}$ e a falha $\gamma_3$ do <i>2D ball balancer</i> utilizando o controlador descrito por (71) e (106). . . . .	70

Figura 33	Resultados práticos do eixo y: posição $r_y$ , ângulo $\theta_y$ , sinal de controle $u_y$ e a falha $\gamma_3$ do <i>2D ball balancer</i> utilizando o controlador descrito por (71) e (106). . . . .	70
-----------	--	----

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>15</b>
1.1	Definição do Problema	17
<b>2</b>	<b>Projeto de Controle Robusto Chaveado com Falhas Invariantes no Tempo nos Sensores</b>	<b>20</b>
2.1	Representação em espaço de estados utilizando $x_M(t)$	20
2.2	Controle Chaveado	21
2.3	O Sistema <i>2D Ball Balancer</i> Quanser <sup>®</sup>	26
2.4	Projeto do Sistema de Controle	28
2.5	Simulações e Resultados Práticos	32
2.6	Factibilidade dos Controladores Chaveado e de Ganho Constante	37
2.7	Conclusões Parciais	39
<b>3</b>	<b>Escolhendo as Chaves do Controlador</b>	<b>40</b>
3.1	Projeto de Controle	44
3.2	Simulações e Resultados Práticos	47
3.3	Factibilidade dos Controladores Chaveados (com 3 e 4 Vértices) e de Ganho Constante	51
3.4	Conclusões Parciais	54
<b>4</b>	<b>Controle Robusto para Sistemas com Sensores que Apresentam Falhas Variantes no Tempo</b>	<b>55</b>
4.1	Projeto de Controle	58
<b>4.1.1</b>	<b>Simulações e Resultados Práticos</b>	<b>60</b>
4.2	Projeto de Controle Levando em Consideração a Derivada da Falha	64
<b>4.2.1</b>	<b>Simulações e Resultados Práticos</b>	<b>66</b>

4.3	Conclusões parciais	71
5	Conclusões e Perspectivas Futuras	72
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>73</b>
	<b>APÊNDICE A - Artigos Apresentados em Congresso como Primeiro Autor</b>	<b>76</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O projeto de controle tolerante a falhas é uma área importante de pesquisa relacionada ao projeto de controle com realimentação, pois tem o propósito de garantir segurança e confiabilidade ao sistema realimentado, apesar da ocorrência de falhas. Um sistema de controle consiste de sensores, compensadores e atuadores, além de um objeto a ser controlado. Em geral, os sensores são propensos a apresentar falhas mais frequentemente do que atuadores ou compensadores (YANG; YE, 2008). As características dos sensores podem mudar ao longo do tempo de modo que pode haver uma falha parcial ou total (LIU; CAO; SHI, 2013), o que pode degradar o desempenho ou até mesmo destruir a estabilidade dos sistemas controlados.

Portanto, é necessário considerar as possíveis falhas nos sensores e/ou atuadores para aumentar a confiabilidade do sistema. Um sistema de controle projetado para tolerar falhas de atuadores ou sensores, dentro de um subconjunto pré-especificado de todos os atuadores ou sensores, mantendo as propriedades desejadas do sistema de controle, será chamado de sistema de controle confiável (MINQING, 2009; VEILLETTE; MEDANIC; PERKINS, 1992).

Em diversos trabalhos foram desenvolvidas técnicas de controle confiável, modelando as incertezas dos sensores como funções incertas parametrizáveis (DONG; YANG, 2015; MINQING, 2009; WANG; JIN; WANG, 2011; YANG; WANG; SOH, 2000, 2001; ZHU et al., 2015), ou como uma entrada exógena, minimizada por norma  $\mathcal{H}_\infty$  (BOUATTOUR et al., 2009; FENG; SHUO; MIN, 2015; YANG; YE, 2008). Há também métodos que garantem a confiabilidade do sistema utilizando um sensor auxiliar para verificar se há falha no sensor principal e compensando essa falha utilizando técnicas baseadas em lógica fuzzy (QIU et al., 2010; OUDGHIRI et al., 2007).

Uma das contribuições desse trabalho foi propor uma representação adequada em espaço de estados do sistema linear, que descreve a dinâmica do vetor de estado medido, denominado  $x_M(t)$ . Considerou-se que os sensores apresentam erros de medição incertos, mas invariantes no tempo. Utilizando essa representação, foi proposto um novo procedimento para projetar um controlador chaveado que garante a estabilidade do sistema controlado, e ainda uma taxa de decaimento mínima. O projeto foi baseado em desigual-

dades matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities - LMIs*) e uma função de Lyapunov do tipo quadrática.

Optou-se em realizar o projeto de controle chaveado através da realimentação de estado  $x_M(t)$ , pois como visto em Souza et al. (2013, 2014a), Oliveira et al. (2014), as LMIs utilizadas no controle chaveado para encontrar os ganhos são menos conservadoras do que as clássicas que utilizam apenas um ganho de realimentação do vetor de estado (BOYD et al., 1994). A representação e o projeto desse sistema de controle chaveado foram apresentados em Buzetti et al. (2015). Resultados teóricos e de simulações comprovam que o controlador chaveado proposto é menos conservativo do que o controlador tradicional com apenas um único ganho.

Um problema da representação do sistema em função de  $x_M$  é o fato de levar em consideração que a falha não varia no tempo, assim o controlador projetado utilizando essa representação não garante a estabilidade do sistema no caso em que a falha varia no tempo. É possível projetar controladores com distúrbios nos sensores (aditivos) variantes no tempo estimando o valor dos estados (BOUATTOUR et al., 2010; BRAHIM et al., 2016; FARKOUS; TISSIR, 2016; LI; ZHU, 2015), ou considerando esse distúrbio como uma entrada exógena minimizada por norma  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ .

Esse trabalho apresenta um projeto de controle que garante a estabilidade do sistema para o caso em que houverem falhas multiplicativas variantes no tempo nos sensores, assegurando uma taxa de decaimento mínima. As condições de estabilidade são encontradas em função de  $x_M(t)$ . As condições de projeto são descritas através de LMIs e uma função de Lyapunov do tipo quadrática. Esses resultados foram publicados na forma de um artigo (BUZETTI et al., 2016).

O trabalho ainda apresenta uma aplicação em bancada, no controle de um sistema *2D ball balancer* (QUANSER, 2008), utilizando os controladores projetados com dois métodos propostos, considerando falha na leitura do ângulo  $\theta(t)$ , e conseqüentemente na estimação de  $\dot{\theta}(t)$ , para demonstrar a eficácia do método. Utilizou-se o *software* MatLab/Simulink<sup>®</sup> para a aplicação da lei de controle durante a implementação prática e a linguagem do YALMIP, com o solver LMILab, para resolver as LMIs.

Ao longo desse trabalho foram utilizadas as seguintes notações:  $(\cdot)^T$  indica a transposição de um vetor ou matriz. O símbolo  $(*)$  denota genericamente cada bloco simétrico de uma LMI. O conjunto  $\mathbb{K}_r$  é composto pelos  $r$  primeiros números inteiros positivos,  $\{1, 2, \dots, r\}$ . Para facilitar a leitura deste artigo, considere que os elementos incertos  $\rho(t)$ ,



$\lambda(t)$  e  $\alpha(t)$  são representados por  $\rho$ ,  $\lambda$  e  $\alpha$ , e pertencem aos conjuntos

$$\Lambda_\rho = \left\{ \rho \in \mathbb{R}^r : \rho_k \geq 0, \sum_{k=1}^r \rho_k = 1 \right\}, \quad (1)$$

$$\Lambda_\lambda = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^r : \lambda_l \geq 0, \sum_{l=1}^r \lambda_l = 1 \right\}, \quad (2)$$

$$\Lambda_\alpha = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^s : \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^s \alpha_i = 1 \right\}, \quad (3)$$

respectivamente, para  $r$  vértices do politopo,  $s = r^2$ ,  $k, l \in \mathbb{K}_r$  e  $i \in \mathbb{K}_s$ , sendo que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^s \alpha_i &= \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r \rho_k \lambda_l = 1, \\ \alpha_1 &= \rho_1 \lambda_1, \alpha_2 = \rho_1 \lambda_2, \dots, \alpha_r = \rho_1 \lambda_r, \\ \alpha_{r+1} &= \rho_2 \lambda_1, \alpha_{r+2} = \rho_2 \lambda_2, \dots, \alpha_{2r} = \rho_2 \lambda_r, \\ &\vdots \\ \alpha_{r^2} &= \rho_r \lambda_1, \dots, \alpha_s = \rho_r \lambda_r. \end{aligned} \quad (4)$$

## 1.1 Definição do Problema

Considere o sistema linear descrito por:

$$\dot{x}(t) = \mathbb{A}x(t) + \mathbb{B}u(t) \quad (5)$$

sendo  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  o vetor de estado,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  a entrada de controle,  $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $\mathbb{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ .

Suponha a possibilidade de existir uma falha na medição das variáveis de estado  $x_M(t)$ . Esta falha no sensor pode se manifestar como um efeito multiplicativo ou aditivo, que podem ocorrer simultaneamente ou não (ACKERMANN, 1984).

Esse trabalho aborda apenas o caso em que a falha do sensor se manifesta através do efeito multiplicativo, ou seja, o sinal de cada sensor possui um ganho  $\gamma(t)$ , que por simplicidade é representado por  $\gamma$ , sendo que  $\gamma \in \mathbb{R}^n$ . Esse ganho  $\gamma$  é variante no tempo e pertence ao conjunto

$$\Delta_1 = \left\{ \gamma = [\gamma_1 \ \gamma_2 \ \dots \ \gamma_n]^T \in \mathbb{R}^n : 0 < \gamma_p(0) \leq \gamma_p \leq \gamma_p(1), \ \gamma_p(1) \geq 1, \ p \in \mathbb{K}^n \right\}, \quad (6)$$

sendo que  $\gamma_p(0)$  e  $\gamma_p(1)$  representam, respectivamente, os valores mínimos e máximos dos ganhos dos sensores.

Note que, o vetor de estado  $x(t)$  não está disponível para a realimentação. No entanto,

tem-se acesso ao vetor de estado medido, denominado  $x_M(t)$ , sendo seus elementos  $x_{p_M}(t) = \gamma_p x_p(t)$ ,  $p \in \mathbb{K}_n$ .

Dessa forma, a partir de (1), considere uma matriz diagonal que relaciona o vetor de estado  $x(t)$  com o vetor de estado medido  $x_M(t)$ , dada por:

$$\Gamma_z = \sum_{k=1}^r \rho_k \Gamma_{ak} = \sum_{k=1}^r \rho_k \text{diag}[\gamma_1(a_1) \dots \gamma_n(a_n)], \quad (7)$$

sendo  $r = 2^f$ ,  $f$  é o número de termos independentes que possuem incertezas,  $\gamma_j(a_j) = \gamma_j(0) = \gamma_j(1) = 1$  para todas variáveis de estado que não possuem incertezas,  $(a_1, \dots, a_n) = \text{dec2bin}(j-1)$ ,  $j \in \mathbb{K}_r$ ,  $a_p \in \{0, 1\}$  e  $p \in \mathbb{K}_n$ , tal que

$$x_M(t) = \Gamma_z x(t). \quad (8)$$

A função dec2bin representa a mudança da base decimal para binária. A Tabela 1 exemplifica o uso da função dec2bin para  $f = 2$ . Note que de (6), os valores máximos e mínimos dos parâmetros incertos  $\gamma_p$ ,  $p \in \mathbb{K}_n$ , formam a diagonal da matriz  $\Gamma_j$ ,  $j \in \mathbb{K}_r$ . Por sua vez a matriz  $\Gamma_j$  representa cada um dos vértices do politopo, formados através de todas as combinação possíveis dos valores máximos e mínimos de  $\gamma_p$ ,  $p \in \mathbb{K}_n$ .

Tabela 1 - Exemplo da Função dec2bin:  $(a_1, a_2) = \text{dec2bin}(j-1)$ .

$j$	$j-1$	dec2bin( $j-1$ )	$a_1$	$a_2$	$\gamma_1(a_1)$	$\gamma_2(a_2)$
1	0	00	0	0	min	min
2	1	01	0	1	min	max
3	2	10	1	0	max	min
4	3	11	1	1	max	max

Fonte: Elaboração do autor.

A partir de (3), considere a seguinte matriz diagonal

$$\Gamma_z^{-1} = \sum_{l=1}^r \lambda_l \Gamma_{bl}^{-1} = \sum_{l=1}^r \lambda_l \text{diag}[\gamma_1^{-1}(b_1) \dots \gamma_n^{-1}(b_n)], \quad (9)$$

sendo  $r = 2^f$ ,  $(b_1, \dots, b_n) = \text{dec2bin}(i-1)$ ,  $i \in \mathbb{K}_r$ ,  $b_p \in \{0, 1\}$  e  $p \in \mathbb{K}_n$ . A partir de (6), note que  $\gamma^{-1}$  pertence ao conjunto

$$\Delta_2 = \{\gamma^{-1} \in \mathbb{R}^n : 0 < \gamma_p(1)^{-1} \leq \gamma_p^{-1} \leq \gamma_p(0)^{-1}, \quad \gamma_p(0)^{-1} \geq 1, \quad p \in \mathbb{K}_n\}.$$

**Observação 1.** No modelo de falha de sensores considerado, quando  $\gamma_p(0) = \gamma_p(1) = 1$ , para todo  $p \in \mathbb{K}_n$ , então  $x_M(t) = x(t)$  o que corresponde ao caso normal, sem possibilidade de falhas. Quando  $\gamma_p(0) \neq \gamma_p(1)$ , pode-se ter uma falha parcial no sensor que mede a variável de estado  $x_p(t)$ , também considerado como a degradação do sensor (YANG; WANG; SOH, 2000).

Para o restante do desenvolvimento do trabalho, é necessário fazer uma última definição, considerando (3), (7) e (9):

$$\begin{aligned} A_z &= \sum_{i=1}^s \alpha_i A_i = \sum_{i=1}^s \alpha_i \Gamma_{ai} \mathbb{A} \Gamma_{bi}^{-1} = \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r \rho_k \lambda_l \Gamma_{ak} \mathbb{A} \Gamma_{bl}^{-1}, \\ B_z &= \sum_{i=1}^s \alpha_i B_i = \sum_{i=1}^s \alpha_i \Gamma_{ai} \mathbb{B} = \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r \rho_k \lambda_l \Gamma_{ak} \mathbb{B}, \end{aligned} \quad (10)$$

sendo  $s = 2^{2f}$ .

**Observação 2.** Nas equações (7), (9) e (10) utilizou-se o índice  $a$  em  $\Gamma_{ak}$  e  $\Gamma_{ai}$ , e o índice  $b$  em  $\Gamma_{bl}^{-1}$  e  $\Gamma_{bi}^{-1}$ , porque em alguns vértices do politopo  $\Gamma_{bi}^{-1} \neq \Gamma_{ai}^{-1}$ .

Nos capítulos seguintes serão apresentados projetos de controle para sistemas com incertezas no vetor de estado medido  $x_M(t)$ .

## 2 PROJETO DE CONTROLE ROBUSTO CHAVEADO COM FALHAS INVARIANTES NO TEMPO NOS SENSORES

Nesse Capítulo será demonstrado como projetar o controle chaveado em um sistema com incertezas invariantes no tempo no vetor de estado medido  $x_M$ , descrito em (7) e (8). Para projetar o controlador é necessário primeiro descrever o sistema em função de  $x_M$ .

### 2.1 Representação em espaço de estados utilizando $x_M(t)$

A lei de controle chaveada utilizada é dada por:

$$u(t) = -K_\sigma x_M(t), \quad (11)$$

sendo que o ganho  $K_\sigma(t)$  será definido posteriormente. Então o sistema realimentado dado em (5) e (11) pode ser representado por:

$$\dot{x}(t) = \mathbb{A}x(t) - \mathbb{B}K_\sigma x_M(t). \quad (12)$$

Observe que o sistema dado em (12) representa  $\dot{x}(t)$  em função de  $x(t)$  e  $x_M(t)$  e que no projeto do sistema de controle seria conveniente se essa representação fosse em função de  $\dot{x}(t)$  e  $x(t)$  ou de  $\dot{x}_M(t)$  e  $x_M(t)$ . Esse problema motivou a elaboração de um estudo para obter uma nova descrição de (12) e uma solução é apresentada no Teorema 1 .

**Teorema 1.** *O sistema linear e invariante no tempo descrito em (5), com a lei de controle dada em (11) considerando (8), sendo que  $\Gamma_z$  é uma matriz diagonal incerta definida em (7), mas invariante no tempo, pode ser representado por:*

$$\dot{x}_M(t) = (A_z - B_z K_\sigma) x_M(t), \quad (13)$$

sendo que  $A_z$  e  $B_z$  foram definidas em (10).

**Prova:** Considere o sistema dado em (5), a lei de controle dada em (11) e a matriz com os parâmetros constantes mas incertos  $\Gamma_z$ , tal que

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \mathbb{A}x(t) + \mathbb{B}u(t) \\ &= \mathbb{A}\Gamma_z^{-1}\Gamma_zx(t) - \mathbb{B}K_\sigma x_M(t) \\ &= (\mathbb{A}\Gamma_z^{-1} - \mathbb{B}K_\sigma)x_M(t),\end{aligned}\tag{14}$$

pois  $x_M(t) = \Gamma_zx(t)$ .

Multiplicando (14) por  $\Gamma_z$  à esquerda, tem-se que

$$\Gamma_z\dot{x}(t) = (\Gamma_z\mathbb{A}\Gamma_z^{-1} - \Gamma_z\mathbb{B}K_\sigma)x_M(t),\tag{15}$$

então a partir de (7) e (9), para  $x_M(t) = \Gamma_zx(t)$  e sendo  $\Gamma_z$  constante, o sistema (15) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}\dot{x}_M(t) &= (\Gamma_z\mathbb{A}\Gamma_z^{-1} - \Gamma_z\mathbb{B}K_\sigma)x_M(t), \\ &= \left( \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r \rho_k \lambda_l \Gamma_{ak} \mathbb{A} \Gamma_{bl}^{-1} - \sum_{k=1}^r \rho_k \Gamma_{ak} \mathbb{B} K_\sigma \right) x_M(t).\end{aligned}\tag{16}$$

Considerando que  $\sum_{l=1}^r \lambda_l = 1$  e (10), então a equação (16) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\dot{x}_M(t) &= \left\{ \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r \rho_k \lambda_l (\Gamma_{ak} \mathbb{A} \Gamma_{bl}^{-1}) - \left( \sum_{l=1}^r \lambda_l \right) \left( \sum_{k=1}^r \rho_k \Gamma_{ak} \mathbb{B} K_\sigma \right) \right\} x_M(t), \\ &= \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r \rho_k \lambda_l (\Gamma_{ak} \mathbb{A} \Gamma_{bl}^{-1} - \Gamma_{ak} \mathbb{B} K_\sigma) x_M(t) \\ &= \sum_{i=1}^s \alpha_i (A_i - B_i K_\sigma) x_M(t) \\ &= (A_z - B_z K_\sigma) x_M(t)\end{aligned}\tag{17}$$

então a prova está concluída.  $\square$

## 2.2 Controle Chaveado

Nesta seção, baseado em Souza et al. (2014a), é proposto o projeto de um controlador chaveado para o sistema linear e invariante no tempo com incertezas no vetor de estado medido  $x_M(t)$ . A função de Lyapunov do tipo quadrática é dada por

$$V(x_M(t)) = x_M(t)^T P x_M(t),\tag{18}$$

sendo que  $P = P^T > 0$ .

A ideia básica da lei de controle chaveada é a minimização da derivada temporal da função de Lyapunov, por meio da seleção do ganho do controlador, que pertence ao conjunto de ganhos  $K_j$ ,  $j \in \mathbb{K}_s$ . Essa lei de chaveamento utiliza matrizes simétricas auxiliares  $\bar{Q}_j$ ,  $j \in \mathbb{K}_s$ , que serão definidas posteriormente, e escolhe um índice  $\sigma(t)$ . Portanto, define-se o controlador chaveado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u(t) &= -K_{\sigma}x_M(t), \\ \sigma(t) &= \arg \min_{j \in \mathbb{K}_s}^* \{x_M^T(t)\bar{Q}_jx_M(t)\}, \end{aligned} \quad (19)$$

ou seja,  $\sigma(t) \in \mathbb{K}_s$  possui o valor do índice  $j$  que resulta no menor valor de  $x_M^T(t)\bar{Q}_jx_M(t)$ . Caso dois ou mais  $\bar{Q}_j$  produzirem o menor valor de  $x_M^T(t)\bar{Q}_jx_M(t)$ , então  $\sigma$  assumirá o valor do menor índice  $j$  dentre eles.

**Teorema 2.** (SOUZA et al., 2014a) *Suponha a existência de uma matriz simétrica positiva definida  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , matrizes simétricas  $Z_i, Q_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , matrizes  $M_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e um escalar  $\beta \geq 0$ , para todo  $i, j \in \mathbb{K}_s$ , tais que:*

$$-B_iM_j - M_j^TB_i^T - Z_i - Q_j \prec 0, \quad (20)$$

$$XA_i^T + A_iX + Z_i + Q_i + 2\beta X \prec 0. \quad (21)$$

Então a lei de controle chaveada (19) torna o ponto de equilíbrio  $x_M = 0$  do sistema (13) (e  $x = 0$  de (12)) globalmente assintoticamente estável com uma taxa de decaimento maior ou igual  $\beta$ , sendo  $P = X^{-1}$ ,  $\bar{Q}_j = X^{-1}Q_jX^{-1}$  e os ganhos do controlador dados por  $K_j = M_jX^{-1}$ .

**Prova:** Como em Boyd et al. (1994), pode-se usar uma função de Lyapunov quadrática (18) para estabelecer um limite inferior para a taxa de decaimento do sistema (13). A condição  $\dot{V}(x_M(t)) \leq -2\beta V(x_M(t))$ , para todas as trajetórias  $x_M(t)$ , é equivalente à especificação de uma taxa de decaimento maior ou igual a  $\beta$ . Dessa forma tem-se:

$$\dot{V}(x_M(t)) + 2\beta V(x_M(t)) = x_M^T(t)(A_z^T P + PA_z + 2\beta P - K_{\sigma}^T B_z^T P - PB_z K_{\sigma})x_M(t). \quad (22)$$

Agora, considere que existam matrizes simétricas  $\bar{Z}_i, \bar{Q}_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tais que (SOUZA et al., 2014a):

$$-(PB_iK_j + K_j^TB_i^TP) \prec \bar{Z}_i + \bar{Q}_j, \quad \forall i, j \in \mathbb{K}_s. \quad (23)$$

Então, multiplicando-se (23) por  $\alpha_i$ , pré multiplicando por  $x_M^T(t)$  e pós multiplicando por  $x_M(t)$ , tomando a somatória de  $i = 1$  a  $s$ , considerando a definição de  $B_z$  em (10) e trocando-se  $j$  por  $\sigma$ , tem-se que:

$$\begin{aligned} -x_M^T(PB_zK_\sigma + K_\sigma^TB_z^TP)x_M &= -\sum_{i=1}^s \alpha_i x_M^T(PB_iK_\sigma + K_\sigma^TB_i^TP)x_M \\ &\leq \sum_{i=1}^s \alpha_i x_M^T \bar{Z}_i x_M + x_M^T \bar{Q}_\sigma x_M. \end{aligned} \quad (24)$$

Um resultado importante que será usado a seguir é que o mínimo de um conjunto de número reais é menor ou igual a toda combinação convexa dos elementos deste conjunto. A partir de (3) e (19), observe que  $x_M^T \bar{Q}_\sigma x_M = \min_{j \in \mathbb{K}_s} (x_M^T \bar{Q}_j x_M) \leq \sum_{i=1}^s \alpha_i x_M^T \bar{Q}_i x_M$ . Então, de (24) tem-se:

$$-x_M^T(PB_zK_\sigma + K_\sigma^TB_z^TP)x_M \leq \sum_{i=1}^s \alpha_i x_M^T (\bar{Z}_i + \bar{Q}_i) x_M. \quad (25)$$

Lembrando que  $\alpha_i \geq 0$  e  $\sum_{i=1}^s \alpha_i = 1$ , de (22) e (25), para  $x_M \neq 0$ , tem-se que:

$$\dot{V}(x_M(t)) + 2\beta V(x_M(t)) < 0 \quad (26)$$

se

$$A_i^T P + PA_i + \bar{Z}_i + \bar{Q}_i + 2\beta P < 0. \quad (27)$$

Agora, defina  $X = P^{-1}$ ,  $Z_i = X\bar{Z}_iX$ ,  $Q_i = X\bar{Q}_iX$  e  $M_j = K_jX$ . Pré e pós-multiplicando (23) e (27) por  $X$ , as LMIs (20) e (21) são obtidas, respectivamente.  $\square$

Alguns trabalhos, como por exemplo ALVES et al. (2016), consideram a presença de saturação no sinal de controle do atuador durante o projeto. Nesse trabalho optou-se em abordar o problema da saturação reduzindo a norma de controle utilizando o Teorema 3 (ASSUNÇÃO et al., 2007).

**Teorema 3.** *Dada uma constante  $\mu_0 > 0$ , então a norma dos controladores  $K_j$ ,  $j \in \mathbb{K}_s$ , pode ser descrita utilizando a minimização de  $\eta$ ,  $\eta > 0$ , tal que  $K_j K_j^T < \eta I / \mu_0^2$ . O valor ótimo de  $\eta$  pode ser obtido solucionando o seguinte problema de otimização:*

$$\begin{aligned} &\min(\eta) \\ &\begin{bmatrix} \eta I & M_j \\ M_j^T & I \end{bmatrix} > 0, \end{aligned} \quad (28)$$

$$X > \mu_0 I. \quad (29)$$

**Prova:** Utilizando complemento de Schur na LMI (28), obtém-se

$$M_j M_j^T < \eta I. \quad (30)$$

Pré e pós multiplicando (29) por  $\sqrt{X}$  observe que

$$\sqrt{X} \mu_0 I \sqrt{X} < \sqrt{X} X \sqrt{X} \Rightarrow \mu_0 X < X X \Rightarrow X < \frac{X X}{\mu_0}. \quad (31)$$

Agora pré e pós multiplicando (29) por  $K_j$  e  $K_j^T$ , respectivamente, observe que

$$K_j \mu_0 I K_j^T < K_j X K_j^T. \quad (32)$$

A partir de (29)-(32) e  $M_j = K_j X$ , segue que

$$K_j \mu_0 I K_j^T < K_j X K_j^T < \frac{K_j X X K_j^T}{\mu_0} = \frac{M_j M_j^T}{\mu_0} < \frac{\eta I}{\mu_0}. \quad (33)$$

Então  $K_j K_j^T < \eta I / \mu_0^2$  e a prova está concluída.

**Observação 3.** O teorema encontrado em Assunção et al. 2007 foi criado para um controlador sem chaveamento, o Teorema 3 é uma adaptação para o controle chaveado.

A vantagem do controlador chaveado é que ele é menos conservador que o controlador com ganho constante. O Teorema 4 mostra que se um sistema pode ser controlado com um ganho constante, então ele também pode ser controlado de forma chaveada.

**Teorema 4.** Suponha a existência de  $P = P^T > 0$  e  $K$  constante, tais que

$$P(A_i - B_i K) + (A_i - B_i K)^T P + 2\beta P < 0, \quad (34)$$

$\min(\eta)$

$$\begin{bmatrix} \eta_0 I & M \\ M^T & I \end{bmatrix} > 0, \quad (35)$$

$$X > \mu_0 I, \quad (36)$$

isto é, para  $u = -Kx$ , o sistema  $\dot{x}_M = (A_z - B_z K)x_M$  tem o ponto de equilíbrio  $x_M = 0$



globalmente assintoticamente estável com taxa de decaimento maior ou igual a  $\beta$ . Então existem  $K_j$ ,  $j \in \mathbb{K}_s$ , tais que, para  $M_j = K_j P$  e  $X = P^{-1}$ , as LMIs (20) e (21) são satisfeitas.

**Prova:** Como visto no Teorema 2, as desigualdades (20) e (21) equivalem às desigualdades (23) e (27) respectivamente:

$$\begin{aligned} -(PB_i K_j + K_j^T B_i^T P) &< \bar{Z}_i + \bar{Q}_j, \\ A_i^T P + PA_i + \bar{Z}_i + \bar{Q}_i + 2\beta P &< 0. \end{aligned}$$

Isto implica que a lei de controle (11) e (19) torna o ponto de equilíbrio  $x_M = 0$  do sistema  $\dot{x}_M = (A_z - B_z K_\sigma)x_M$  globalmente assintoticamente estável com taxa de decaimento maior ou igual a  $\beta$ .

Para mostrar que (34) implica em (23) e (27) impõe-se que  $K_j = K$ ,  $\bar{Q}_j = \bar{Q}$  e  $\bar{Z}_i = 0$ . Então de (34) nota-se que existe  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno tal que:

$$PA_i + A_i^T P + (-PB_i K - K^T B_i^T P + \varepsilon I) + 2\beta P < 0. \quad (37)$$

Definindo  $\bar{Q}_i = -PB_i K - K^T B_i^T P + 2\beta P + \varepsilon I$ , então (37) implica na factibilidade da expressão  $A_i^T P + PA_i + \bar{Q}_i + 2\beta P < 0$  descrita em (27).

Note que a LMI em (23) também é satisfeita:

$$\begin{aligned} -PB_i K_j - K_j^T B_i^T P - \bar{Z}_i - \bar{Q}_j \\ = -PB_i K_j - K_j^T B_i^T P - 0 - (-PB_i K_j - K_j^T B_i^T P + \varepsilon I) = -\varepsilon I < 0. \end{aligned} \quad (38)$$

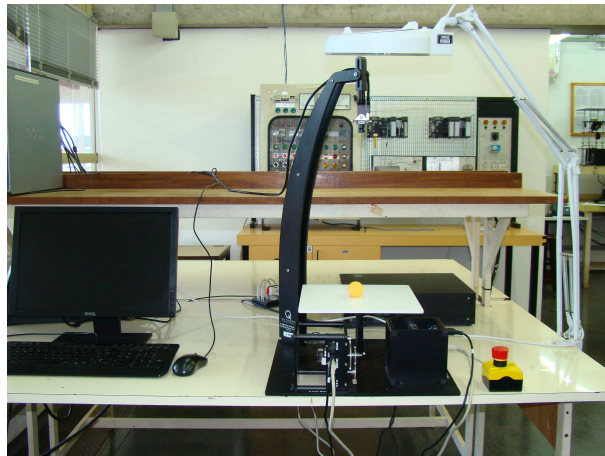
Como  $K_j = K$ , então  $M_j = M$ , logo (35) e (36) são equivalentes a (28) e (29) com  $\eta_0 = \eta$ . Assim, se existir factibilidade para  $u = -Kx_M$ , existe também factibilidade para  $u = -K_\sigma x_M$  dado em (19) e  $\eta = \eta_0$ , projetado com as LMIs (20), (21), (28) e (29).  $\square$

Um exemplo que demonstra que o controlador chaveado é menos conservativo que o controlador com ganho constante pode ser verificado na Seção 3.3 Factibilidade dos Controladores Chaveado e de Ganho Constante.

## 2.3 O Sistema 2D Ball Balancer Quanser®

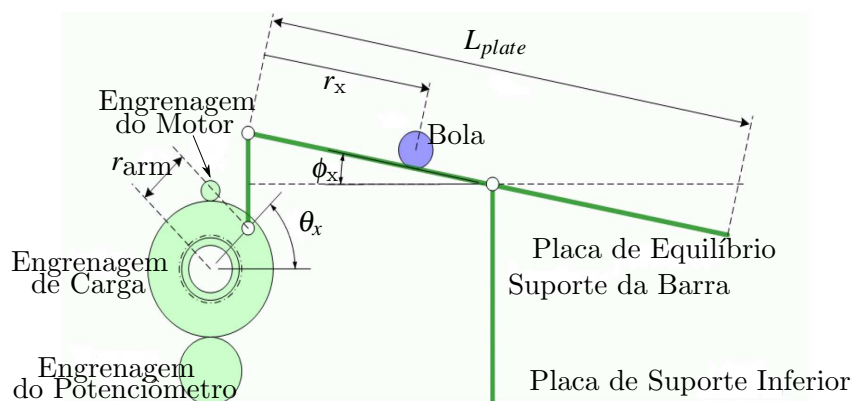
Considere o sistema *2D ball balancer*, fabricado pela Quanser®, mostrado na Figura 1. Seu modelo esquemático referente à direção  $x$  da placa é mostrado na Figura 2, e a direção  $y$  pode ser representada da mesma forma (QUANSER, 2008).

Figura 1 - Equipamento *2D ball balancer*, pertencente ao DEE-FEIS-LPC.



Fonte: Souza et al. (2014b).

Figura 2 - Planta esquemática do *2D ball balancer* na direção  $x$ .



Fonte: Quanser, (2008).

O sistema consiste de uma placa quadrada sobre a qual uma bola é colocada e se move livremente. A bola pode ser posicionada em um ponto de referência fixo ou pode rastrear uma rota determinada. Uma câmera superior é utilizada para medir a posição da bola. Existem dois servomotores, sendo que cada um deles está ligado a um dos eixos da placa.

Ao controlar a posição das engrenagens de carga do servomotor, o ângulo de inclinação da placa pode ser ajustado para equilibrar a bola em uma posição plana desejada.

O modelo matemático linearizado do sistema *2D ball balancer* (QUANSER, 2008) é dado por:

$$\ddot{r}(t) = K_{bb}\theta(t), \quad \tau\ddot{\theta}(t) + \dot{\theta}(t) = CV_m(t), \quad (39)$$

sendo:

$r(t)$  a posição da bola, com  $r(t) = r_x$  para o eixo x e  $r(t) = r_y$  para o eixo y;

$\theta(t)$  o ângulo de carga, com  $\theta(t) = \theta_x$  para o eixo x e  $\theta(t) = \theta_y$  para o eixo y;

$V_m(t) = u(t)$  o sinal de controle, com  $u(t) = u_x$  para o eixo x e  $u(t) = u_y$  para o eixo y;

$\tau$  e  $C$  são parâmetros do fabricante, e

$$K_{bb} = \frac{2m_b g r_{arm} r_b^2}{L_{plate}(m_b r_b^2 + J_b)}.$$

As descrições e os valores das constantes citadas são dados na Tabela 2.

Tabela 2 - Parâmetros do sistema *2D ball balancer*.

Parâmetros	Símbolo	Valor
Massa da bola (kg)	$m_b$	0,003
Distância do eixo do motor ao ponto de fixação da barra (cm)	$r_{arm}$	2,54
Raio da bola (cm)	$r_b$	1,96
Comprimento da mesa (cm)	$L_{plate}$	27,5
Parâmetro do fabricante (rad/sV)	$C$	1,76
Parâmetro do fabricante (s)	$\tau$	0,00285
Momento de inércia de uma esfera sólida (bolinha) (kgm <sup>2</sup> )	$J_b$	0,0046
Parâmetro do sistema (m/s <sup>2</sup> rad)	$K_{bb}$	1,3
Gravidade (m/s <sup>2</sup> )	$g$	9,8

Fonte: Quanser, (2008).

O sistema (39) pode ser representado de forma similar ao sistema (5), sendo que:

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix}, \mathbb{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{K}{\tau} \end{bmatrix}, x(t) = \begin{bmatrix} r(t) \\ \dot{r}(t) \\ \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix}. \quad (40)$$

Durante a implementação prática apenas os sinais medidos  $r_M$  e  $\theta_M$  estão disponíveis, e  $\dot{r}_M$  e  $\dot{\theta}_M$  são estimados por meio de filtros derivativos  $G_f(s) = 20s/(s+20)$ , como sugerido pela fabricante (QUANSER, 2008).

## 2.4 Projeto do Sistema de Controle

Foi projetado o controlador do sistema *2D ball balancer* descrito na Seção 2.3 considerando uma falha de até  $-50\%$  na leitura do ângulo medido, acarretando uma falha simultânea na derivada do ângulo. Neste exemplo não foram consideradas falhas na leitura da posição e na estimação da velocidade da bola.

A partir dessas considerações, de (7), (8) e (9), as matrizes  $\Gamma_{ak}$  e  $\Gamma_{bl}^{-1}$  para o sistema *2D ball balancer* apresentado em (39) e (40) são dadas por:

$$\Gamma_{ak} = \text{diag}[1 \ 1 \ \gamma_3(a_3) \ \gamma_3(a_3)], \quad (41)$$

$$\Gamma_{bl}^{-1} = \text{diag}[1 \ 1 \ \gamma_3(b_3)^{-1} \ \gamma_3(b_3)^{-1}], \quad (42)$$

$$0,5 \leq \gamma_3 \leq 1, \quad (43)$$

$$1 \leq \gamma_3^{-1} \leq 2. \quad (44)$$

Sendo que  $\gamma_3(a_3)$  representa o valor mínimo ou máximo de  $\gamma_3$  e  $\gamma_3(b_3)^{-1}$  representa o valor mínimo ou máximo de  $\gamma_3^{-1}$ . Essa diferenciação foi feita porque em alguns vértices do politopo  $\gamma_3(a_3)^{-1} \neq \gamma_3(b_3)^{-1}$ , pois serão consideradas os vértices compostos por todas as combinações dos valores máximos e mínimos de  $\gamma_3(a_3)$  e  $\gamma_3(b_3)^{-1}$ . Os valores de  $\gamma_3(a_3)$  e  $\gamma_3(b_3)^{-1}$  em cada vértice do politopo podem ser observados na Tabela 3.

Utilizando o Teorema 1, o sistema linear e invariante no tempo descrito em (5) e (40) pode ser representado por (13), (7) e (9), sendo que utilizando os valores das matrizes diagonais  $\Gamma_{ak}$  e  $\Gamma_{bl}^{-1}$  em (16) obtemos

$$\begin{aligned} \dot{x}_M = & \left( \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3(a_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_3(a_3) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3(b_3)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_3(b_3)^{-1} \end{array} \right] \\ - \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3(a_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_3(a_3) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{K}{\tau} \end{array} \right] K_{\sigma} \end{array} \right) x_M, \quad (45) \end{aligned}$$

$$\dot{x}_M = \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{K_{bb}}{\gamma_3(b_3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_3(a_3)\gamma_3(b_3)^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\gamma_3(a_3)\gamma_3(b_3)^{-1}}{\tau} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{K\gamma_3(a_3)}{\tau} \end{bmatrix} K_\sigma \right) x_M.$$

**Observação 4.** Embora para encontrar os vértices do politopo as equações (16) e (17) tenham utilizado as matrizes  $\Gamma_{ak}$  e  $\Gamma_{bl}^{-1}$  de forma independente, neste caso particular elas são dependentes da mesma falha, assim  $\gamma_3(a_3)\gamma_3(b_3)^{-1} = 1$ , portanto

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{K_{bb}}{\gamma_3(b_3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix}, B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{K\gamma_3(a_3)}{\tau} \end{bmatrix}. \quad (46)$$

Nesse caso em particular, observe que as matrizes  $\Gamma_{ak}$ ,  $\Gamma_{bl}^{-1}$ ,  $A_i$  e  $B_i$  dependem somente dos valores máximos e mínimos de  $\gamma_3$ . Dessa forma, a partir de (7) e (9) e para  $k, l \in \{1, 2\}$  e  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  a combinação dos valores máximo e mínimo de  $\gamma_3$  é apresentada na Tabela 3.

A abordagem apresentada é um pouco conservativa, mas considera com rigor que dado um  $\gamma_3$  então a sua representação como a combinação convexa do seu máximo e mínimo não é sempre igual à mesma representação da combinação convexa entre o máximo e mínimo de  $\gamma_3^{-1}$ .

Tabela 3 - Valores de  $\gamma_3(a_3)$  e  $\gamma_3(b_3)^{-1}$ .

$\rho_k$	$a_3$	$\lambda_l$	$b_3$	$i$	$\alpha_i$	$\gamma_3(a_3)$	$\gamma_3(b_3)^{-1}$
$\rho_1$	0	$\lambda_1$	0	1	$\alpha_1$	min	min
$\rho_1$	0	$\lambda_2$	1	2	$\alpha_2$	min	max
$\rho_2$	1	$\lambda_l$	0	3	$\alpha_3$	max	min
$\rho_2$	1	$\lambda_2$	1	4	$\alpha_4$	max	max

Fonte: Elaboração do autor.

Portanto, no projeto de controle foram utilizados os seguintes vértices do politopo, para ambos os eixos:

$$\begin{aligned}
[A_1|A_2] &= \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{bb} & 0 & 0 & 0 & 2K_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{array} \right], \\
[A_3|A_4] &= \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{bb} & 0 & 0 & 0 & 2K_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{array} \right], \\
B_1 = B_2 &= \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & \frac{0,5K}{\tau} \end{array} \right]^T, \\
B_3 = B_4 &= \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & \frac{K}{\tau} \end{array} \right]^T.
\end{aligned} \tag{47}$$

Utilizando as LMIs do Teorema 2 e considerando os vértices do politopo (47) para  $\beta = 1, 2$  foram obtidos os seguintes ganhos, a seguinte matriz simétrica positiva definida e as seguintes matrizes simétricas através do software MatLab e a linguagem YALMIP, com o solver LMILab:

$$\begin{aligned}
K_1 &= [347,5371 \quad 312,9124 \quad 152,3109 \quad 11,0776], \\
K_2 &= [194,1869 \quad 174,7910 \quad 85,0528 \quad 6,0826], \\
K_3 &= [276,1922 \quad 248,9504 \quad 121,5403 \quad 8,6934], \\
K_4 &= [96,4644 \quad 87,0700 \quad 42,6981 \quad 2,8057], \\
P &= \begin{bmatrix} 1331,6 & 1189,2 & 572,8 & 44,3 \\ 1189,2 & 1067,4 & 515,3 & 39,9 \\ 572,8 & 515,3 & 250,2 & 19,4 \\ 44,3 & 39,9 & 19,4 & 1,5 \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_1=10^{13} & \begin{bmatrix} 5,7193843897355 & 5,1173136402699 & 2,4665136336853 & 0,1908091174889 \\ 5,1173136402699 & 4,5786280255412 & 2,2068667147106 & 0,1707227338919 \\ 2,4665136336853 & 2,2068667147106 & 1,0636916808724 & 0,0822868471052 \\ 0,1908091174889 & 0,1707227338919 & 0,0822868471052 & 0,0063656793075 \end{bmatrix}, \\
\bar{Q}_2=10^{13} & \begin{bmatrix} 5,7193844554161 & 5,1173136994360 & 2,4665136625018 & 0,1908091196930 \\ 5,1173136994360 & 4,5786280788391 & 2,2068667406690 & 0,1707227358774 \\ 2,4665136625018 & 2,2068667406690 & 1,0636916935153 & 0,0822868480722 \\ 0,1908091196930 & 0,1707227358774 & 0,0822868480722 & 0,0063656793813 \end{bmatrix}, \\
\bar{Q}_3=10^{13} & \begin{bmatrix} 5,7193844099455 & 5,1173136584394 & 2,4665136424221 & 0,1908091181829 \\ 5,1173136584394 & 4,5786280418761 & 2,2068667225652 & 0,1707227345158 \\ 2,4665136424221 & 2,2068667225652 & 1,0636916846492 & 0,0822868474052 \\ 0,1908091181829 & 0,1707227345158 & 0,0822868474052 & 0,0063656793313 \end{bmatrix}, \\
\bar{Q}_4=10^{13} & \begin{bmatrix} 5,7193844811865 & 5,1173137226115 & 2,4665136736746 & 0,1908091205733 \\ 5,1173137226115 & 4,5786280996808 & 2,2068667507168 & 0,1707227366690 \\ 2,4665136736746 & 2,2068667507168 & 1,0636916983594 & 0,0822868484539 \\ 0,1908091205733 & 0,1707227366690 & 0,0822868484539 & 0,0063656794114 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{49}$$

Utilizando as LMIs do Teorema 2 em conjunto com as do Teorema 3 , considerando os vértices do politopo (47),  $\beta = 1,2$  e  $\mu_0 = 0,8$ , obteve-se

$$\begin{aligned}
\eta &= 3,9222 * 10^3, \\
K_1 &= [9,7969 \quad 10,9248 \quad 5,9000 \quad 0,1533], \\
K_2 &= [9,2478 \quad 9,9836 \quad 5,4618 \quad 0,1420], \\
K_3 &= [23,9216 \quad 23,8668 \quad 10,1587 \quad 0,2588], \\
K_4 &= [16,6029 \quad 16,7228 \quad 7,6858 \quad 0,1971], \\
P &= \begin{bmatrix} 0,7570 & 0,5483 & 0,1762 & 0,0043 \\ 0,5483 & 0,5111 & 0,1793 & 0,0045 \\ 0,1762 & 0,1793 & 0,0953 & 0,0025 \\ 0,0043 & 0,0045 & 0,0025 & 0,0001 \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{50}$$

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_1 &= \begin{bmatrix} 24704,825940494 & 22131,282009668 & 7625,967733678 & 189,822982199 \\ 22131,282009668 & 19455,999777202 & 6664,341049430 & 165,716845006 \\ 7625,967733678 & 6664,341049430 & 2280,664660602 & 56,699169349 \\ 189,822982199 & 165,716845006 & 56,699169349 & 1,409559728 \end{bmatrix}, \\
\bar{Q}_2 &= \begin{bmatrix} 24706,070160883 & 22132,604922092 & 7626,679265842 & 189,839784400 \\ 22132,604922092 & 19457,403283527 & 6665,096327762 & 165,734677785 \\ 7626,679265842 & 6665,096327762 & 2281,070822991 & 56,708725961 \\ 189,839784400 & 165,734677785 & 56,708725961 & 1,409779837 \end{bmatrix}, \\
\bar{Q}_3 &= \begin{bmatrix} 24702,687284018 & 22129,197536470 & 7624,660767623 & 189,798185663 \\ 22129,197536470 & 19453,975446488 & 6663,100310377 & 165,693185009 \\ 7624,660767623 & 6663,100310377 & 2280,052821205 & 56,686476762 \\ 189,798185663 & 165,693185009 & 56,686476762 & 1,409307755 \end{bmatrix}, \\
\bar{Q}_4 &= \begin{bmatrix} 24704,810774130 & 22131,377605597 & 7625,815576989 & 189,825463522 \\ 22131,377605597 & 19456,211436732 & 6664,277052130 & 165,720986972 \\ 7625,815576989 & 6664,277052130 & 2280,644768176 & 56,700489971 \\ 189,825463522 & 165,720986972 & 56,700489971 & 1,409633769 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{51}$$

Nota-se que os ganhos obtidos em (50) são significativamente menores que os encontrados em (48). Espera-se assim que o sinal de controle  $u(t)$  seja também menor. Os resultados de simulação e da implementação prática serão apresentados a seguir.

## 2.5 Simulações e Resultados Práticos

O objetivo das simulações e das implementações é fazer com que a bola siga a referência de um quadrado de  $10 \text{ cm}$  de lado. Após 40 segundos do início da simulação foi inserida uma falha de  $-50\%$  na leitura dos ângulos dos servomotores das direções  $x$  e  $y$  da placa (isto é,  $\theta_{M_x} = 0,5\theta_x$ ,  $\dot{\theta}_{M_x} = 0,5\dot{\theta}_x$ ,  $\theta_{M_y} = 0,5\theta_y$ ,  $\dot{\theta}_{M_y} = 0,5\dot{\theta}_y$ ). A entrada de controle  $u(t)$  é limitada em  $\pm 5V$  através de um saturador, inserido via *Simulink*<sup>®</sup>, para não danificar o atuador.

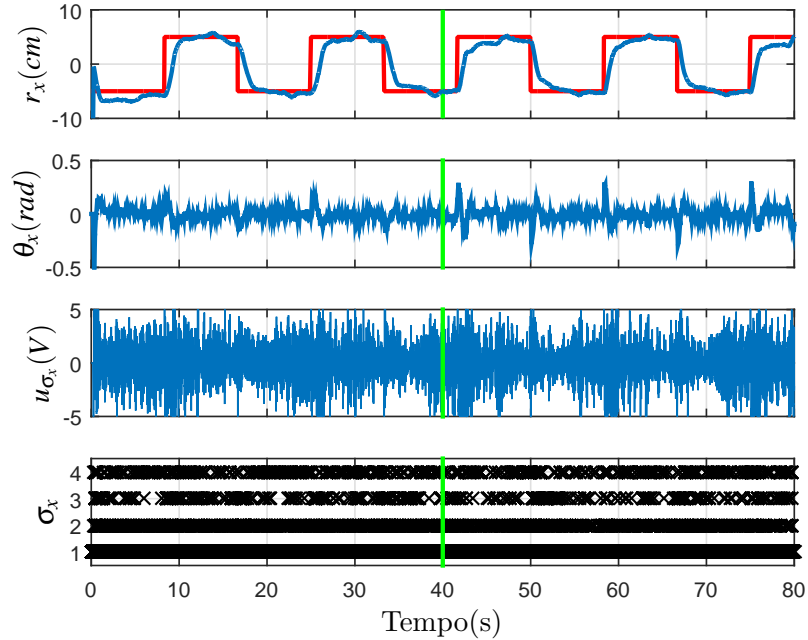
O Teorema 2 não garante a estabilidade do sistema no momento em que ocorre a falha, já que supõe que a falha é invariante no tempo, mas optou-se por manter os resultados do sistema sem e com falha em um único gráfico para facilitar a visualização.

No sistema real o sensor apresenta apenas o ângulo medido ( $\theta_M$ ), mas como a implementação em laboratório utilizou uma falha induzida via software, então tem-se acesso



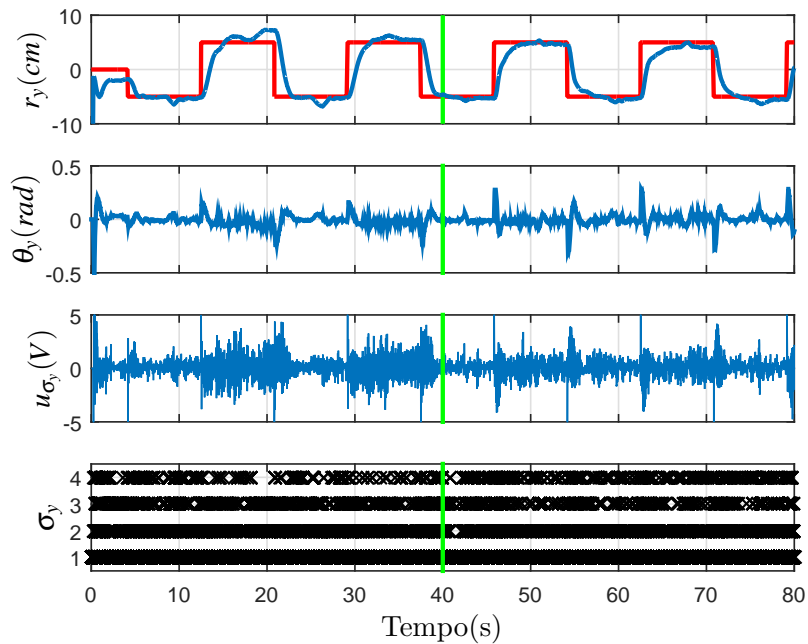


Figura 4 - Resultados práticos da direção x: posição  $r_x$ , ângulo  $\theta_x$ , sinal de controle  $u_{\sigma_x}$  e a regra de chaveamento  $\sigma_x$  do  $2D$  ball balancer utilizando o controlador chaveado (19), (48) e (49).



Fonte: Elaboração do autor.

Figura 5 - Resultados práticos da direção y: posição  $r_y$ , ângulo  $\theta_y$ , sinal de controle  $u_{\sigma_y}$  e a regra de chaveamento  $\sigma_y$  do  $2D$  ball balancer utilizando o controlador chaveado (19), (48) e (49).

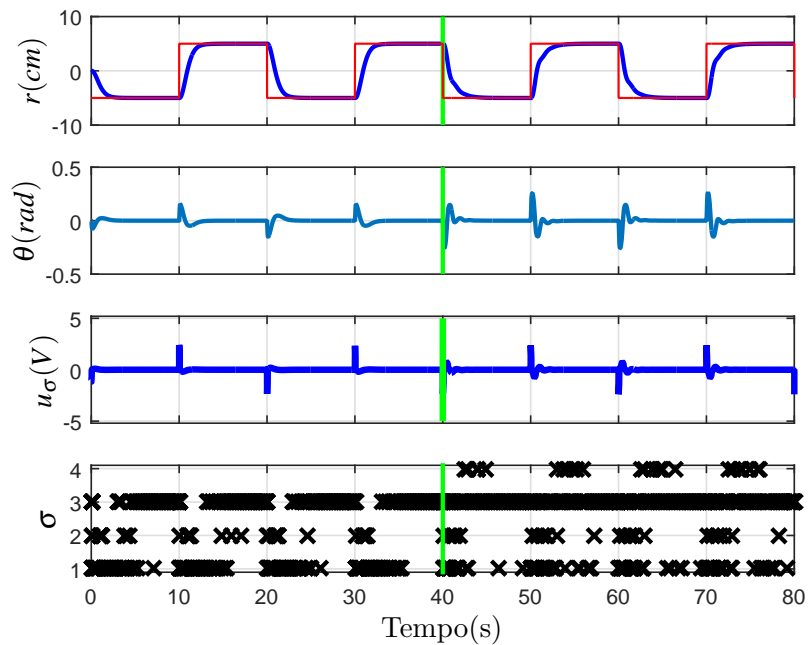


Fonte: Elaboração do autor.

Nota-se que utilizando o controlador chaveado (19) com os ganhos (48), o sistema seguiu a posição desejada  $x = \pm 5 \text{ cm}$ ,  $y = \pm 5 \text{ cm}$ , manteve os ângulos das direções  $x$  e  $y$  próximo de zero e houve alternância entre os quatro controladores. Observa-se também que o sistema saturou em alguns momentos, principalmente no eixo  $x$ .

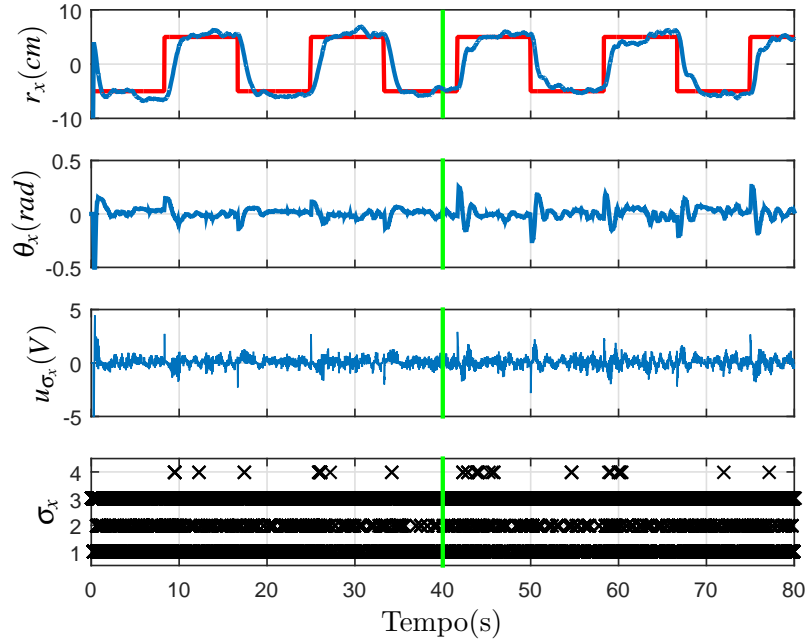
A seguir estão os resultados de simulação e implementação prática do controlador chaveado (19) com os ganhos (50) (obtidos utilizando o Teorema 3 que reduz a norma de controle).

Figura 6 - Resultados de simulação: posição  $r$ , ângulo  $\theta$ , sinal de controle  $u_\sigma$  e a regra de chaveamento  $\sigma$  do  $2D \text{ ball balancer}$  utilizando o controlador chaveado (19), (50) e (51).



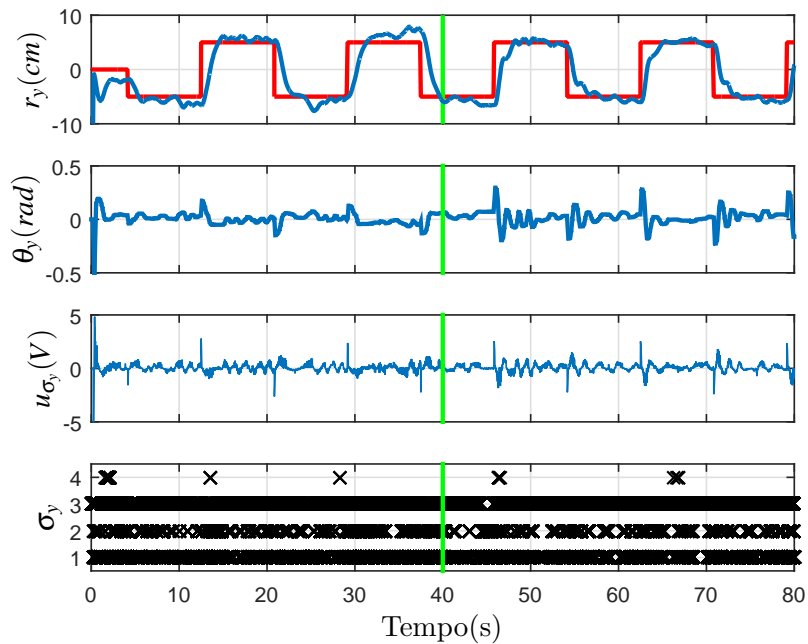
Fonte: Elaboração do autor.

Figura 7 - Resultados práticos da direção x: posição  $r_x$ , ângulo  $\theta_x$ , sinal de controle  $u_{\sigma_x}$  e a regra de chaveamento  $\sigma_x$  do 2D ball balancer utilizando o controlador chaveado (19), (50) e (51).



Fonte: Elaboração do autor.

Figura 8 - Resultados práticos da direção y: posição  $r_y$ , ângulo  $\theta_y$ , sinal de controle  $u_{\sigma_y}$  e a regra de chaveamento  $\sigma_y$  do 2D ball balancer utilizando o controlador chaveado (19), (50) e (51).



Fonte: Elaboração do autor.

Como se pode observar, o sinal de controle  $u(t)$  do controlador chaveado (19) foi significativamente menor com os ganhos dados em (50), de forma que os sistema não teve problemas de saturação, sem que seu desempenho fosse prejudicado.

## 2.6 Factibilidade dos Controladores Chaveado e de Ganho Constante

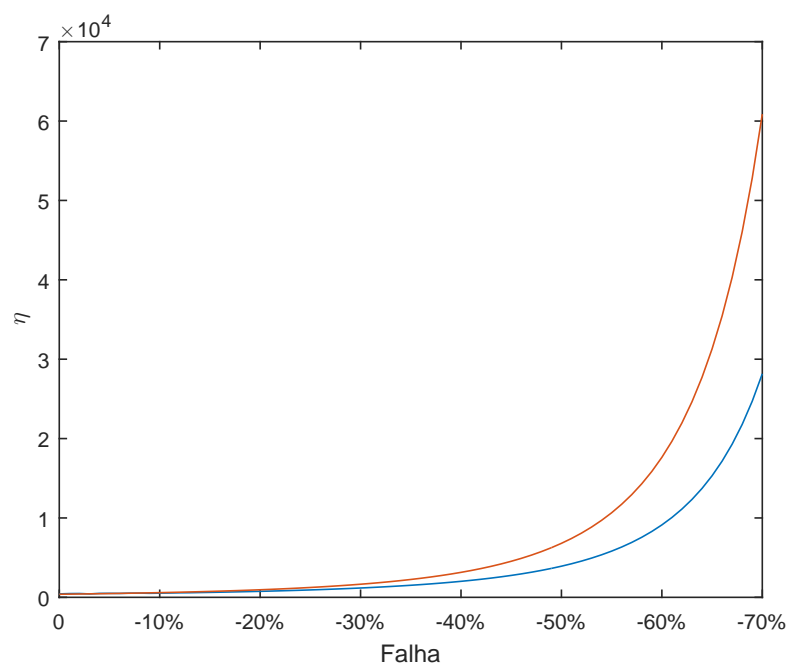
O Teorema 4 comprova que o controlador chaveado apresenta uma região de factibilidade maior ou igual do que a região referente ao controlador com ganho constante. Nessa seção serão apresentados os resultados que comprovam que o controlador chaveado pode apresentar uma área factível maior do que a obtida com um ganho constante, utilizando o sistema *2D ball balancer* como exemplo.

As Figuras 9 e 10 demonstram graficamente as restrições  $\eta$  mínimas encontradas para cada valor de falha de projeto em  $\theta_M$  e  $\dot{\theta}_M$  no sistema *2D ball balancer*, descrito em (46), controlado de forma chaveada ou com ganho constante.

Ambos os controladores foram projetados utilizando taxa de decaimento  $\beta = 1,2$  e as LMIs (28) e (29) do Teorema 3, com  $\mu_0 = 0,8$  e minimizando  $\eta$  para restringir a norma dos controladores. O controlador chaveado foi projetado utilizando as LMIs (20) e (21) e o controlador com ganho constante foi projetado utilizando a LMI (29).

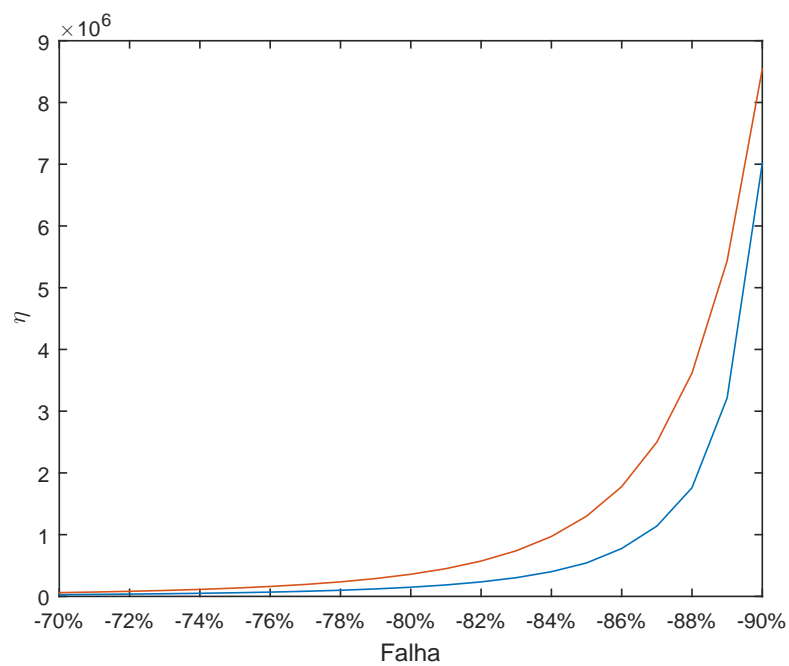
Note que o sistema será factível para valores de  $\eta$  iguais ou superiores aos encontrados nos gráficos. Portanto a área de factibilidade será maior no controlador que apresentar menor  $\eta$ .

Figura 9 -  $Falha \times \eta$  do controlador chaveado (em azul) e do controlador com ganho constante (em vermelho), para falhas entre 0% (sem falha) e -70%.



Fonte: Elaboração do autor.

Figura 10 -  $Falha \times \eta$  do controlador chaveado (em azul) e do controlador com ganho constante (em vermelho), para falhas entre -70% e -90%.



Fonte: Elaboração do autor.

**Observação 5.** Lembrando de (6) que  $0 < \gamma_p(0) \leq \gamma_p \leq \gamma_p(1)$  e  $x_{pM}(t) = \gamma_p x_p(t)$ , e considerando  $\gamma_p = 1 + falha_p$ , então observa-se que o sensor mede um valor inferior ao real quando  $falha_p < 0$ , um valor superior ao real quando  $falha_p > 0$  e o valor real quando  $falha_p = 0$ . Nas Figuras 9 e 10 foram demonstrados os valores de  $\eta$  para os projetos com falha negativa (quando a leitura do sensor indica um valor inferior ao real, já que  $\gamma = 1 + falha$ ), mas é possível projetar considerando também falhas positivas (quando a leitura do sensor indica um valor superior ao real).

Como se pode observar,  $\eta$  mínimo do controlador chaveado foi menor ou igual ao do controlador com ganho constante para todas as falhas de projeto, comprovando assim que a área de factibilidade do controlador chaveado pode ser maior e portanto menos conservador.

## 2.7 Conclusões Parciais

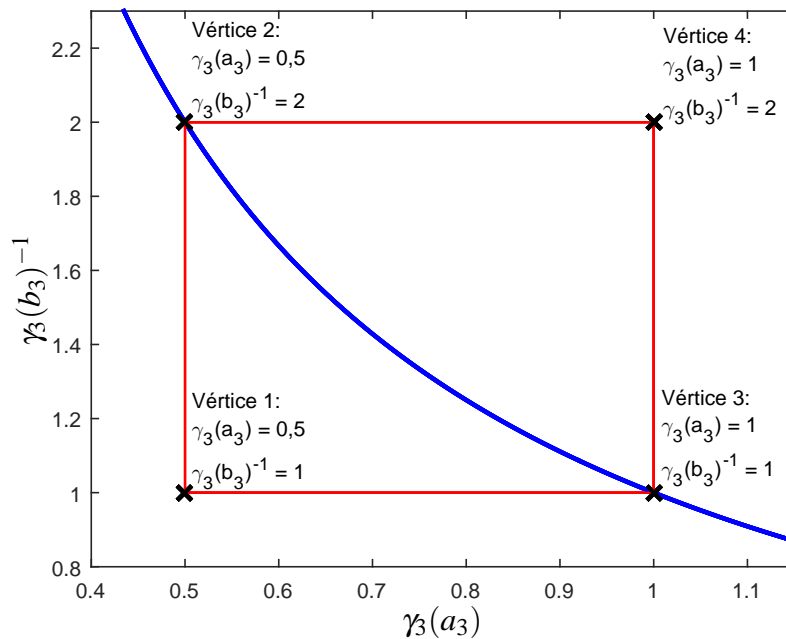
Nesse capítulo foi considerado que o vetor de estado disponível  $x_M(t)$  para a realimentação possui incertezas politópicas. Na busca de resolver esse problema recorrente em implementações práticas, um teorema que permite representar adequadamente esse sistema em espaço de estados descrevendo a dinâmica de  $x_M(t)$  foi proposto. O controle chaveado, utilizando essa nova representação, foi projetado para garantir a estabilidade do sistema com taxa de decaimento maior ou igual a  $\beta$ . Optou-se em utilizar o controlador chaveado porque é menos conservador que o controlador com ganho constante, sendo que este fato foi demonstrado na forma de um teorema e graficamente com um exemplo. Utilizou-se também um teorema que reduz a norma de controle para evitar problemas de saturação. Os resultados das implementações práticas em um sistema *2D ball balancer* confirmaram a eficiência dos sistemas de controle propostos.

### 3 ESCOLHENDO AS CHAVES DO CONTROLADOR

No Capítulo 2 foi apresentado um controlador chaveado utilizando a representação do sistema com incertezas no vetor de estado, demonstrado no Teorema 1, e a teoria de controle chaveado do Teorema 2. Nesse capítulo também será abordado um controle chaveado com -50% de falha conforme (43) e (44) e utilizando os Teoremas 1 e 2, mas inspirado em Yang, Hak-Keung e Wu (2016), serão escolhidos outros vértices do politopo para diminuir a área da combinação convexa, assim diminuindo o conservadorismo do controlador.

O controlador apresentado no Capítulo 2 foi projetado tomando como base a representação das falhas através de 4 vértices, referentes a quando  $\gamma_3(a_3)$  e  $\gamma_3(b_3)^{-1}$  são respectivamente mínimo e mínimo, mínimo e máximo, máximo e mínimo e máximo e máximo. Na Figura 11 são apresentados detalhes sobre estes vértices.

Figura 11 - Posição dos vértices do controlador com 4 chaves, para o caso em que  $0,5 \leq \gamma_3(a_3) \leq 1$  e  $1 \leq \gamma_3(b_3)^{-1} \leq 2$ , em relação à curva  $\gamma_3(b_3)^{-1} = \gamma_3(a_3)^{-1}$  (em azul).



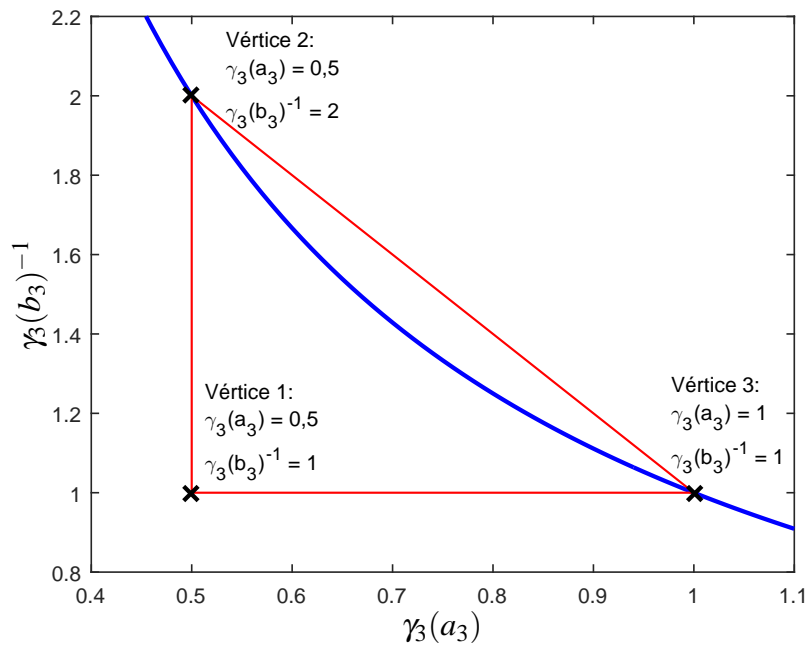
Fonte: Elaboração do autor.



O sistema garante a estabilidade para qualquer incerteza dentro da área retangular entre os 4 vértices, mas o sistema real apresenta apenas as incertezas correspondentes à curva  $\gamma_3(b_3)^{-1} = \gamma_3(a_3)^{-1}$ . Uma maneira de deixar o sistema menos conservativo é diminuir a área da combinação convexa dos vértices do politopo de uma forma em que continue abrangendo toda a curva  $\gamma_3(b_3)^{-1} = \gamma_3(a_3)^{-1}$ .

Note que o Vértice 4 não é necessário, já que a área entre as outras 3 chaves já abrigam toda a curva  $\gamma_3(b_3)^{-1} = \gamma_3(a_3)^{-1}$ , como pode ser visto na Figura 12.

Figura 12 - Posição dos vértices do controlador sem o vértice 4, em relação à curva  $\gamma_3(b_3)^{-1} = \gamma_3(a_3)^{-1}$  (em azul).



Fonte: Elaboração do autor.

É possível diminuir ainda mais essa área entre os vértices do politopo deslocando o Vértice 1 para mais próximo da curva  $\gamma_3(b_3)^{-1} = \gamma_3(a_3)^{-1}$ . O ponto mais próximo que mantém a área entre os vértices abrangendo toda a curva pode ser encontrado traçando duas retas que a tangenciam a curva nos pontos que estão os Vértices 2 e 3 e encontrando o ponto de intersecção. O Vértice 1 pode ser encontrado utilizando o Teorema 5.

**Teorema 5.** Considerando que  $0 \leq \gamma_{3\min} \leq \gamma \leq \gamma_{3\max}$ , o Vértice 1 pode ser encontrado pelas equações (52) e (53):

$$\gamma_3(a_3) = \frac{2(\gamma_{3\min}^{-1} - \gamma_{3\max}^{-1})}{\gamma_{3\min}^{-2} - \gamma_{3\max}^{-2}}, \quad (52)$$

$$\gamma_3(b_3)^{-1} = 2\gamma_{3\min}^{-1} - \gamma_{3\min}^{-2} \gamma_3(a_3) = 2\gamma_{3\max}^{-1} - \gamma_{3\max}^{-2} \gamma_3(a_3). \quad (53)$$

**Prova:** Para encontrar o Vértice 1 é necessário encontrar as retas que tangenciam a curva  $\gamma_3(b_3)^{-1} = \gamma_3^{-1}$  nos pontos em que  $\gamma_3$  é mínimo e máximo.

As retas podem ser representadas por:

$$\gamma_3(b_3)^{-1} = C + \frac{d(\gamma_3(b_3)^{-1})}{d\gamma_3} \gamma_3(a_3), \quad (54)$$

sendo C uma constante e

$$\frac{d(\gamma_3(b_3)^{-1})}{d\gamma_3} = -\gamma_3^{-2}. \quad (55)$$

A partir de (54) e (55) e considerando que nos pontos da curva,  $\gamma_3(b_3)^{-1} = \gamma_3(a_3)^{-1} = \gamma_3^{-1}$ , então:

$$C = \gamma_3(b_3)^{-1} + \gamma_3^{-2} \gamma_3(a_3) = 2\gamma_3^{-1}, \quad (56)$$

assim, a partir de (54) a (56):

$$\gamma_3(b_3)^{-1} = 2\gamma_3^{-1} - \gamma_3^{-2} \gamma_3(a_3), \quad (57)$$

de forma que as retas que tangencia a curva onde  $\gamma_3 = \gamma_{3\min}$  e  $\gamma_3 = \gamma_{3\max}$  são respectivamente:

$$\gamma_3(b_3)^{-1} = 2\gamma_{3\min}^{-1} - \gamma_{3\min}^{-2} \gamma_3(a_3), \quad (58)$$

$$\gamma_3(b_3)^{-1} = 2\gamma_{3\max}^{-1} - \gamma_{3\max}^{-2} \gamma_3(a_3). \quad (59)$$

Assim o ponto de intersecção entre as retas (58) e (59) é:

$$2\gamma_{3\min}^{-1} - \gamma_{3\min}^{-2} \gamma_3(a_3) = 2\gamma_{3\max}^{-1} - \gamma_{3\max}^{-2} \gamma_3(a_3), \quad (60)$$

$$\gamma_3(a_3) = \frac{2\gamma_{3\min}^{-1} - 2\gamma_{3\max}^{-1}}{\gamma_{3\min}^{-2} - \gamma_{3\max}^{-2}}, \quad (61)$$

obtendo assim a equação (52). Utilizando  $\gamma_3(a_3)$  encontrado em (61) na reta (58) ou na reta (59), é possível encontrar  $\gamma_3(b_3)^{-1}$ . Note que as retas (58) e (59) são as mesmas

apresentadas em (53).  $\square$

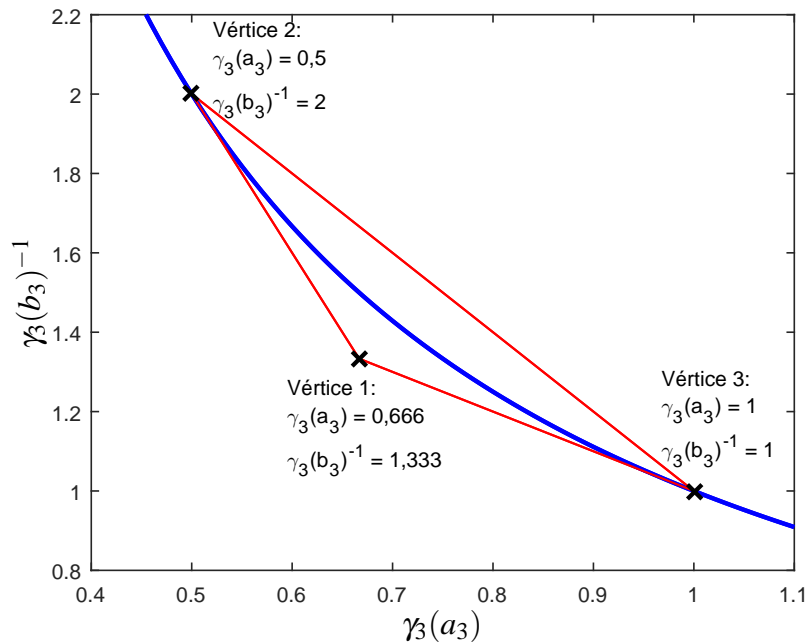
No exemplo estudado, considerando  $0,5 \leq \gamma_3 \leq 1$ , o Vértice 1 pode ser encontrado utilizando as equações (52) e (53):

$$\gamma_3(a_3) = \frac{2(2-1)}{4-1} = \frac{2}{3}, \quad (62)$$

$$\gamma_3(b_3)^{-1} = 4 - 4\frac{2}{3} = \frac{4}{3}. \quad (63)$$

Assim o Vértice 1 está em  $\gamma_3(a_3) = \frac{2}{3}$  e  $\gamma_3(b_3)^{-1} = \frac{4}{3}$ , o Vértice 2 está na posição em que  $\gamma_3$  é mínimo, ou seja,  $\gamma_3(a_3) = 0,5$  e  $\gamma_3(b_3)^{-1} = 2$  e o Vértice 3 fica na posição em que  $\gamma_3$  é máximo,  $\gamma_3(a_3) = 1$  e  $\gamma_3(b_3)^{-1} = 1$ . A Figura 13 mostra a posição dos 3 vértices do politopo.

Figura 13 - Posição dos vértices do controlador com 3 chaves, para o caso em que  $0,5 \leq \gamma_3(a_3) \leq 1$  e  $1 \leq \gamma_3(b_3)^{-1} \leq 2$ , em relação à curva  $\gamma_3(a_3)^{-1} = \gamma_3(b_3)^{-1}$  (em azul).



Fonte: Elaboração do autor.

Nota-se que a área entre os vértices do politopo descrito na Figura 13 é significativamente menor que a área encontrada na Figura 11, portanto o sistema é menos conservativo.

### 3.1 Projeto de Controle

Assim como no Capítulo 2, foi projetado o controlador do sistema *2D ball balancer* descrito na Seção 2.3 considerando uma falha de até  $-50\%$  na leitura do ângulo medido, acarretando uma falha simultânea na derivada do ângulo. Neste exemplo também não foi considerado falhas na leitura da posição e na estimação da velocidade da bola.

A partir de (7) a (9), (41) a (44) e utilizando os vértices apresentados na Figura 13, então as matrizes  $\Gamma_{ak}$  e  $\Gamma_{bl}^{-1}$ , para o sistema *2D ball balancer* apresentado em (39) e (40) são:

$$\begin{aligned}\Gamma_{a1} &= \text{diag} \left[ 1 \quad 1 \quad \gamma_3(a_3) = \frac{2}{3} \quad \gamma_3(a_3) = \frac{2}{3} \right] \\ \Gamma_{a2} &= \text{diag} [1 \quad 1 \quad \gamma_3(a_3) = 0,5 \quad \gamma_3(a_3) = 0,5] \\ \Gamma_{a3} &= \text{diag} [1 \quad 1 \quad \gamma_3(a_3) = 1 \quad \gamma_3(a_3) = 1]\end{aligned}\tag{64}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{b1}^{-1} &= \text{diag} \left[ 1 \quad 1 \quad \gamma_3(b_3)^{-1} = \frac{4}{3} \quad \gamma_3(b_3)^{-1} = \frac{4}{3} \right] \\ \Gamma_{b2}^{-1} &= \text{diag} [1 \quad 1 \quad \gamma_3(b_3)^{-1} = 2 \quad \gamma_3(b_3)^{-1} = 2] \\ \Gamma_{b3}^{-1} &= \text{diag} [1 \quad 1 \quad \gamma_3(b_3)^{-1} = 1 \quad \gamma_3(b_3)^{-1} = 1]\end{aligned}\tag{65}$$

**Observação 6.** Note que nesse caso  $\Gamma_{b1}^{-1}$  não é a inversa de  $\Gamma_{a1}$ , pois como pode ser visto na Figura 13, o Vértice 1 não pertence à curva  $\gamma_3(b_3)^{-1} = \gamma_3(a_3)^{-1}$ . Apesar de existirem vértices em que  $\gamma_{bp}^{-1} \neq \gamma_{ap}^{-1}$ , no sistema real  $\gamma_{bp}^{-1} = \gamma_{ap}^{-1}$ , portanto na planta do sistema sempre será  $\gamma_{ap}\gamma_{bp}^{-1} = 1$ . Então, para obter as matrizes  $A_i$  e  $B_i$ ,  $i=1,2,3$ , correspondentes aos três vértices mencionados, basta substituir os respectivos valores de  $\gamma_3(b_3)^{-1}$  e de  $\gamma_3(a_3)$  dos vértices, nas matrizes do sistema, dadas em (46).

Considerando (46), (64) e (65), foram utilizados os seguintes vértices do politopo, para ambos os eixos:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}K_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix}, \\
 A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2K_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix}, \\
 A_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix}, \\
 B_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3}\frac{K}{\tau} \end{bmatrix}^T, \\
 B_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{0,5K}{\tau} \end{bmatrix}^T, \\
 B_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{K}{\tau} \end{bmatrix}^T.
 \end{aligned} \tag{66}$$

Utilizando as LMIs do Teorema 2 e considerando os vértices do politopo (66) para  $\beta = 1, 2$ , foram obtidos através do software MatLab e a linguagem YALMIP, com o solver LMILab:

$$\begin{aligned}
 K_1 &= [125,7893 \quad 117,2781 \quad 60,3148 \quad 4,4329], \\
 K_2 &= [44,4498 \quad 41,6327 \quad 21,5713 \quad 1,4419], \\
 K_3 &= [143,4333 \quad 133,8494 \quad 69,0257 \quad 5,1321], \\
 P &= \begin{bmatrix} 17,4087 & 15,9956 & 8,0746 & 0,6890 \\ 15,9956 & 14,8346 & 7,5205 & 0,6436 \\ 8,0746 & 7,5205 & 3,8513 & 0,3317 \\ 0,6890 & 0,6436 & 0,3317 & 0,0297 \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{67}$$

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_1 &= \begin{bmatrix} -1891496391,2183 & -1746881631,7915 & -884062782,2616 & -75567307,5798 \\ -1746881631,7915 & -1613235642,8193 & -816402874,8558 & -69782491,6570 \\ -884062782,2616 & -816402874,8558 & -413146911,1941 & -35313581,0929 \\ -75567307,5798 & -69782491,6570 & -35313581,0929 & -3018392,6704 \end{bmatrix}, \\
\bar{Q}_2 &= \begin{bmatrix} -1891492109,7461 & -1746877639,2490 & -884060726,4868 & -75567137,3690 \\ -1746877639,2490 & -1613231919,7130 & -816400957,8311 & -69782332,9535 \\ -884060726,4868 & -816400957,8311 & -413145924,1596 & -35313499,3880 \\ -7556713,73690 & -69782332,9535 & -35313499,3880 & -3018385,9520 \end{bmatrix}, \\
\bar{Q}_3 &= \begin{bmatrix} -1891497577,4201 & -1746882742,2104 & -884063364,2698 & -75567355,6887 \\ -1746882742,2104 & -1613236682,2871 & -816403419,6137 & -69782536,6972 \\ -884063364,2698 & -816403419,6137 & -413147196,5148 & -35313604,7079 \\ -75567355,6887 & -69782536,6972 & -35313604,7079 & -3018394,6135 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{68}$$

Utilizando as LMIs do Teorema 2 em conjunto com as do Teorema 3 , considerando os vértices do politopo (66),  $\beta = 1, 2$  e  $\mu_0 = 0, 8$ , obteve-se

$$\begin{aligned}
\eta &= 3,9208 * 10^3, \\
K_1 &= [12,3530 \quad 13,0781 \quad 6,5115 \quad 0,1681], \\
K_2 &= [8,7987 \quad 9,5310 \quad 5,1906 \quad 0,1349], \\
K_3 &= [23,9147 \quad 23,8563 \quad 10,1474 \quad 0,2584], \\
P &= \begin{bmatrix} 0,7573 & 0,5483 & 0,1760 & 0,0043 \\ 0,5483 & 0,5110 & 0,1791 & 0,0045 \\ 0,1760 & 0,1791 & 0,0952 & 0,0025 \\ 0,0043 & 0,0045 & 0,0025 & 0,0001 \end{bmatrix}, \\
\bar{Q}_1 &= \begin{bmatrix} -45052,360199232 & -35334,810260211 & -11292,107505373 & -277,712108045 \\ -35334,810260211 & -26959,042980889 & -8458,921208214 & -207,408603597 \\ -11292,107505373 & -8458,921208214 & -2619,771354206 & -64,096684895 \\ -277,712108045 & -207,408603597 & -64,096684895 & -1,567624433 \end{bmatrix}, \\
\bar{Q}_2 &= \begin{bmatrix} -45056,963892752 & -35339,445068448 & -11294,621038452 & -277,769562534 \\ -35339,445068448 & -26963,703977877 & -8461,413703186 & -207,465989377 \\ -11294,621038452 & -8461,413703186 & -2620,981508404 & -64,125328757 \\ -277,769562534 & -207,465989377 & -64,125328757 & -1,568300323 \end{bmatrix}, \\
\bar{Q}_3 &= \begin{bmatrix} -45054,274311320 & -35336,765401144 & -11293,156893298 & -277,736748196 \\ -35336,765401144 & -26961,039341278 & -8459,982275296 & -207,433697955 \\ -11293,156893299 & -8459,982275296 & -2620,299294720 & -64,109403545 \\ -277,736748196 & -207,433697955 & -64,109403545 & -1,567930963 \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{69}$$

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_1 &= \begin{bmatrix} -45052,360199232 & -35334,810260211 & -11292,107505373 & -277,712108045 \\ -35334,810260211 & -26959,042980889 & -8458,921208214 & -207,408603597 \\ -11292,107505373 & -8458,921208214 & -2619,771354206 & -64,096684895 \\ -277,712108045 & -207,408603597 & -64,096684895 & -1,567624433 \end{bmatrix}, \\
\bar{Q}_2 &= \begin{bmatrix} -45056,963892752 & -35339,445068448 & -11294,621038452 & -277,769562534 \\ -35339,445068448 & -26963,703977877 & -8461,413703186 & -207,465989377 \\ -11294,621038452 & -8461,413703186 & -2620,981508404 & -64,125328757 \\ -277,769562534 & -207,465989377 & -64,125328757 & -1,568300323 \end{bmatrix}, \\
\bar{Q}_3 &= \begin{bmatrix} -45054,274311320 & -35336,765401144 & -11293,156893298 & -277,736748196 \\ -35336,765401144 & -26961,039341278 & -8459,982275296 & -207,433697955 \\ -11293,156893299 & -8459,982275296 & -2620,299294720 & -64,109403545 \\ -277,736748196 & -207,433697955 & -64,109403545 & -1,567930963 \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{70}$$

Nota-se que os ganhos obtidos em (69) são significativamente menores que os encontrados em (67). Espera-se assim que o sinal de controle  $u(t)$  seja também menor. Os resultados de simulação e da implementação prática serão apresentados a seguir.

### 3.2 Simulações e Resultados Práticos

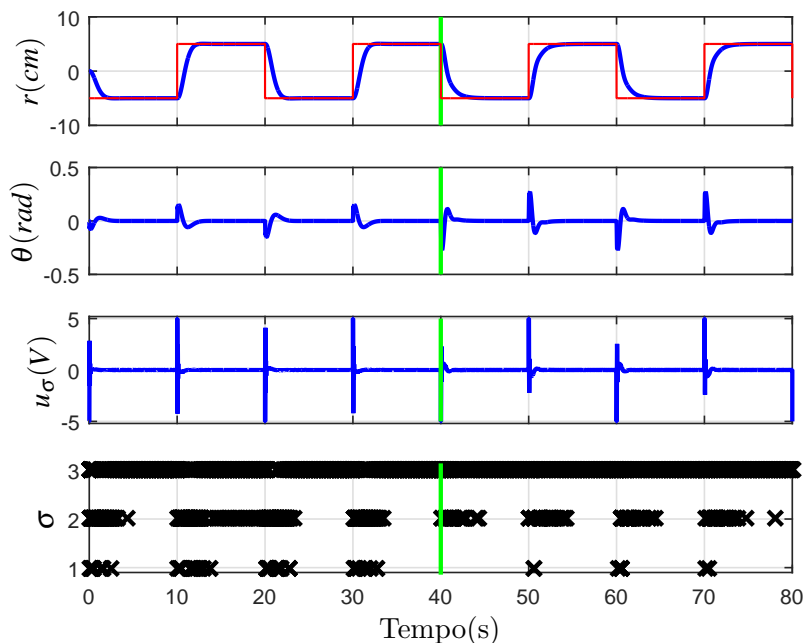
Assim como no Capítulo 2, o objetivo das simulações e das implementações é fazer com que a bola siga a referência de um quadrado de 10 *cm* de lado. Após 40 segundos do início da simulação foi inserida uma falha de  $-50\%$  na leitura dos ângulos dos servomotores das direções  $x$  e  $y$  da placa. A entrada de controle  $u(t)$  é limitada em  $\pm 5V$  através de um saturador, inserido via *Simulink*<sup>®</sup>, para não danificar o atuador.

O Teorema 2 não garante a estabilidade do sistema no momento em que ocorre a falha, já que supõe que a falha é invariante no tempo, mas optou-se por manter os resultados do sistema sem e com falha em um único gráfico para facilitar a visualização.

No sistema real o sensor apresenta apenas o ângulo medido ( $\theta_M$ ), mas como a implementação em laboratório utilizou uma falha induzida via software, então tem-se acesso ao ângulo real ( $\theta$ ) e ao ângulo medido ( $\theta_M$ ). Para demonstrar o comportamento real do sistema as Figuras 14 a 19 apresentam  $\theta$  ao invés de  $\theta_M$ .

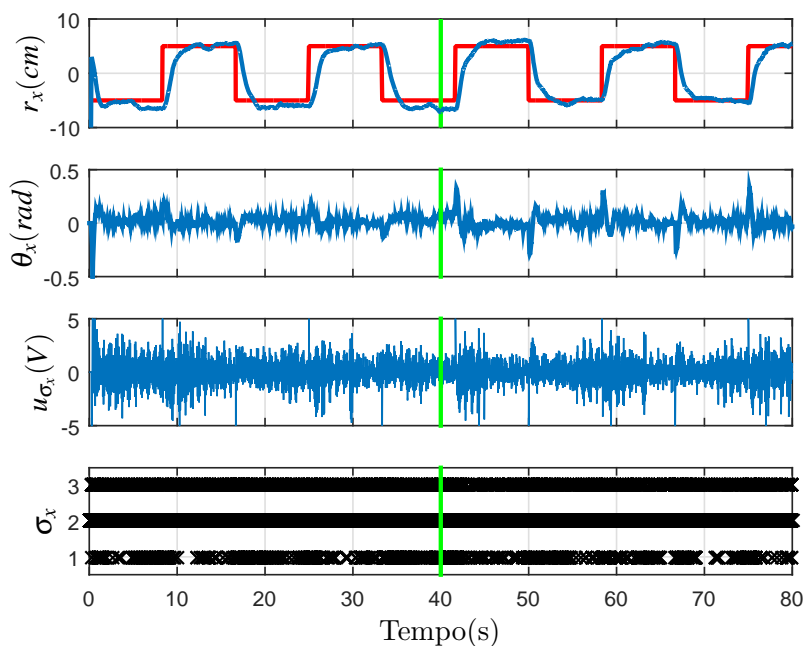
A simulação do controlador chaveado (19), com os ganhos dados em (67) é apresentado na Figura 14 e os resultados práticos nas Figuras 15 e 16.

Figura 14 - Resultados de simulação: posição  $r$ , ângulo  $\theta$ , sinal de controle  $u_\sigma$  e a regra de chaveamento  $\sigma$  do  $2D$  ball balancer utilizando o controlador chaveado (19), (67) e (68).



Fonte: Elaboração do autor.

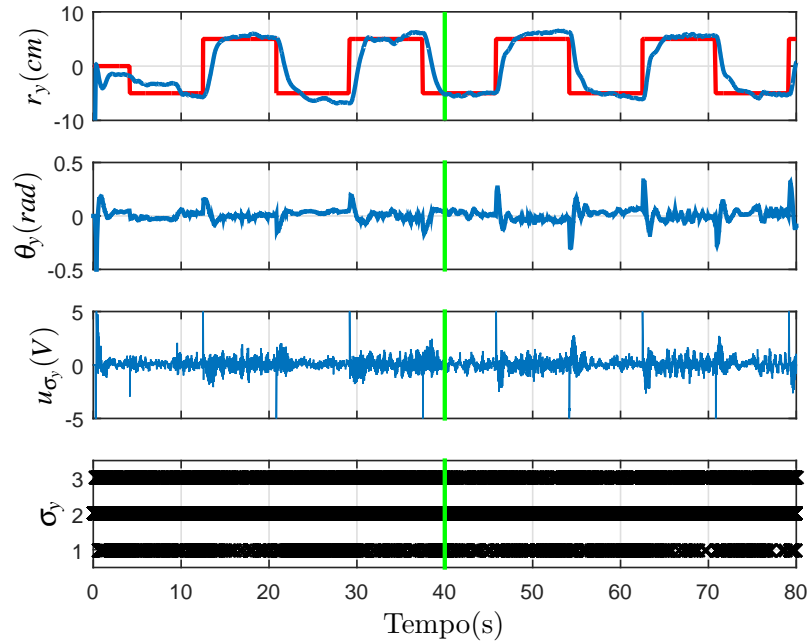
Figura 15 - Resultados práticos da direção  $x$ : posição  $r_x$ , ângulo  $\theta_x$ , sinal de controle  $u_{\sigma_x}$  e a regra de chaveamento  $\sigma_x$  de  $2D$  ball balancer utilizando o controlador chaveado (19), (67) e (68).



Fonte: Elaboração do autor.



Figura 16 - Resultados práticos da direção  $y$ : posição  $r_y$ , ângulo  $\theta_y$ , sinal de controle  $u_{\sigma_y}$  e a regra de chaveamento  $\sigma_y$  do  $2D$  ball balancer utilizando o controlador chaveado (19), (67) e (68).

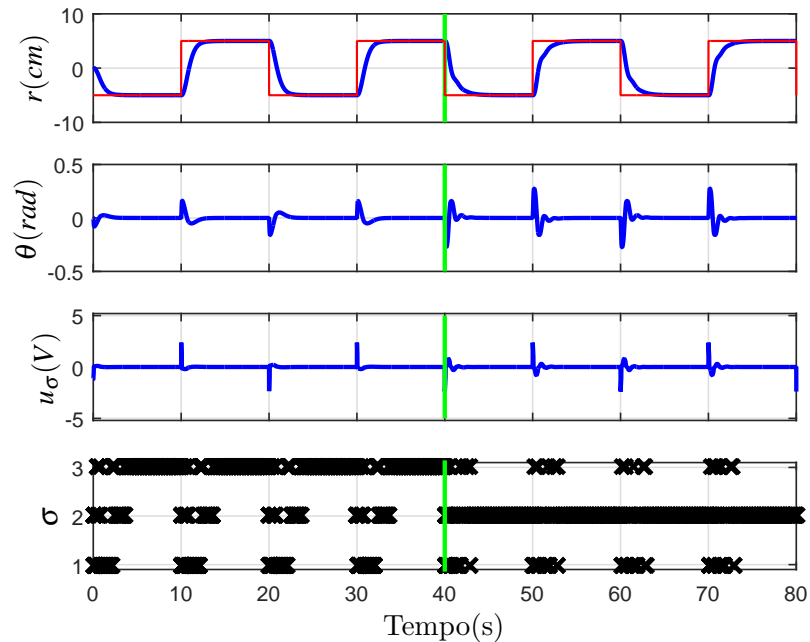


Fonte: Elaboração do autor.

Nota-se que o controlador chaveado (19) com 3 vértices (67) obteve bom desempenho com o sinal de controle  $u(t)$  menor que no controlador com 4 vértices (48), de forma que o sistema apenas atinge a saturação em alguns pontos no eixo  $x$ .

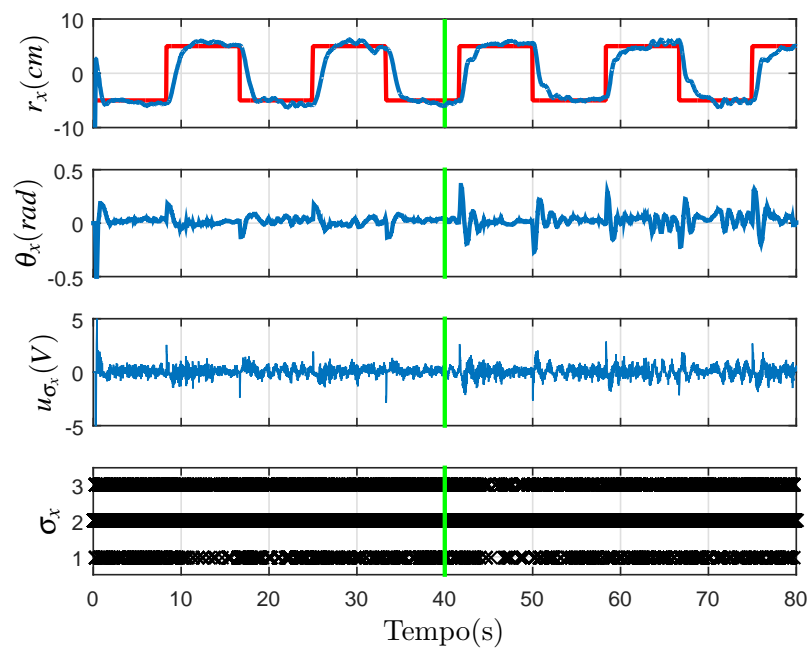
A seguir estão os resultados de simulação e implementação prática do controlador chaveado (19) com os ganhos (69) (obtidos utilizando o Teorema 3 que reduz a norma de controle).

Figura 17 - Resultados de simulação: posição  $r$ , ângulo  $\theta$ , sinal de controle  $u_\sigma$  e a regra de chaveamento  $\sigma$  do  $2D$  ball balancer utilizando o controlador chaveado (19), (69) e (70).



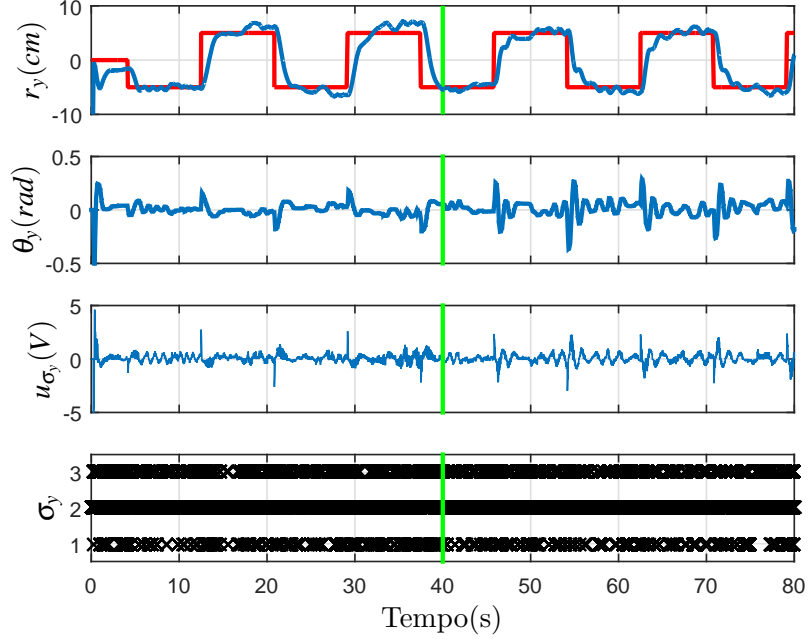
Fonte: Elaboração do autor.

Figura 18 - Resultados práticos da direção  $x$ : posição  $r_x$ , ângulo  $\theta_x$ , sinal de controle  $u_{\sigma_x}$  e a regra de chaveamento  $\sigma_x$  de  $2D$  ball balancer utilizando o controlador chaveado (19), (69) e (70).



Fonte: Elaboração do autor.

Figura 19 - Resultados práticos da direção  $y$ : posição  $r_y$ , ângulo  $\theta_y$ , sinal de controle  $u_{\sigma_y}$  e a regra de chaveamento  $\sigma_y$  do  $2D$  ball balancer utilizando o controlador chaveado (19), (69) e (70).



Fonte: Elaboração do autor.

Como se pode observar, o sinal de controle  $u(t)$  do controlador chaveado (19) foi significativamente menor com os ganhos dados em (69), de forma que os sistema não teve problemas de saturação, sem que seu desempenho fosse prejudicado.

### 3.3 Factibilidade dos Controladores Chaveados (com 3 e 4 Vértices) e de Ganho Constante

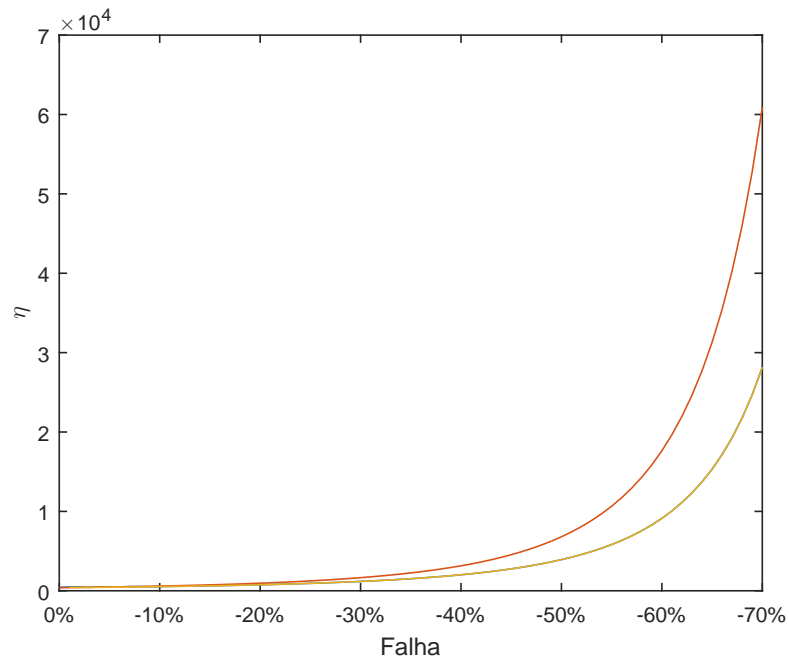
O intuito de escolher outros vértices do politopo de modo a diminuir a área da combinação convexa é diminuir o conservadorismo do projeto. Nessa seção será comparada a área de factibilidade do controlador chaveado de 3 e 4 vértices e do controlador com ganho constante (que possui 4 vértices).

As Figuras 20 e 21 demonstram graficamente as restrições  $\eta$  mínimas encontradas para cada valor de falha de projeto em  $\theta_M$  e  $\dot{\theta}_M$  no sistema  $2D$  ball balancer, descrita em (46), para cada projeto de controle.

Todos os controladores foram projetados utilizando as LMIs (28) e (29) do Teorema 3, com  $\mu_0 = 0,8$  e minimizando  $\eta$  para restringir a norma dos controladores. Os controladores chaveados (de 3 e 4 vértices) foram projetados utilizando as LMIs (20) e (21) e o controlador com ganho constante foi projetado utilizando a LMI (29).

Note que o sistema será factível para valores de  $\eta$  iguais ou superiores aos encontrados nos gráficos, portanto a área de factibilidade será maior no controlador que apresentar menor  $\eta$ .

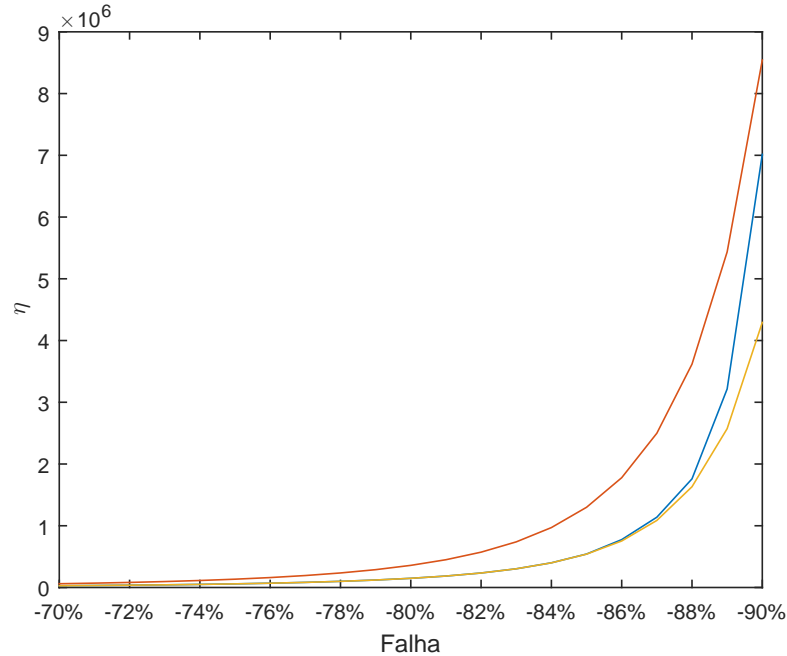
Figura 20 -  $Falha \times \eta$  dos controladores chaveados de 3 e 4 vértices (em amarelo e azul, respectivamente) e do controlador com ganho constante de 4 vértices (em vermelho), para falhas entre 0% (sem falha) e -70%.



Fonte: Elaboração do autor.

**Observação 7.** O gráfico da Figura 20 foi criado com o controlador chaveado de 4 vértices em azul, mas como  $\eta$  dos controladores chaveados com 3 e 4 vértices são aproximadamente iguais para falhas de projeto entre 0% e -70%, o gráfico amarelo sobrepôs o azul.

Figura 21 -  $Falha \times \eta$  dos controladores chaveados de 3 e 4 vértices (em amarelo e azul, respectivamente) e do controlador com ganho constante de 4 vértices (em vermelho), para falhas entre  $-70\%$  e  $-90\%$ .



Fonte: Elaboração do autor.

**Observação 8.** O projeto de controle demonstrado nesse capítulo e as Figuras 20 e 21 utilizam  $\gamma_{3_{max}} = 1$ , mas o Teorema 5 permite utilizar  $\gamma_{3_{max}} \geq 1$ .

Como se pode observar,  $\eta$  mínimo dos controladores chaveados foram menores ou iguais ao do controlador com ganho constante para todas as falhas de projeto. O  $\eta$  mínimo do controlador chaveado de 3 vértices foi menor que o de 4 vértices nos casos em que as falhas de projeto afetam mais o sistema (a partir de  $-85\%$ ) e aproximadamente igual quando as falhas eram menores.

Ambos os controladores chaveados são menos conservadores que o controlador com ganho constante. A vantagem da escolha de vértices com menor área da combinação convexa é notável quando o sistema está estressado.

### 3.4 Conclusões Parciais

Nesse capítulo foi apresentado um controlador para o sistema *2D ball balancer* utilizando os teoremas encontrados no Capítulo 2, mas escolhendo outros vértices do politopo para reduzir a área da combinação convexa, com a intenção de diminuir o conservadorismo do controlador. Observou-se que os resultados encontrados, utilizando os novos vértices, obtiveram bom desempenho e sinal de controle  $u(t)$  menor que o do controlador com 4 vértices, contribuindo para evitar o problema de saturação. As Figuras 20 e 21 demonstram que a escolha de vértices que reduzem a área da combinação convexa apresenta resultados mais significantes quando o sistema está estressado.

#### 4 CONTROLE ROBUSTO PARA SISTEMAS COM SENSORES QUE APRESENTAM FALHAS VARIANTES NO TEMPO

No Capítulo 2 foi projetado um sistema de controle chaveado, considerando falhas, lineares e invariantes no tempo, nos sensores. Nesse capítulo, um novo sistema de controle foi concebido com o objetivo de permitir a existência de falhas que variam no tempo. Para atingir este objetivo, evitou-se na análise as derivadas com respeito ao tempo dos parâmetros que definem as incertezas, descritos em (1)-(3).

A lei de controle utilizada é dada por:

$$u(t) = -Kx_M(t). \quad (71)$$

Logo, o sistema (5) pode ser reescrito como

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BKx_M(t). \quad (72)$$

Então, considere a candidata a função de Lyapunov dada por

$$V(x(t)) = x(t)^T Px(t), \quad (73)$$

sendo que  $P = P^T > 0$ .

Dada uma constante real  $\beta > 0$ , pode-se impor uma restrição para uma taxa de decaimento maior ou igual a  $\beta$  se a condição

$$\dot{V}(x(t)) \leq -2\beta V(x(t)), \quad (74)$$

for satisfeita, para toda a trajetória  $x(t)$  do sistema (BOYD et al., 1994).

O principal resultado desse capítulo é o Teorema 6 apresentado a seguir.

**Teorema 6.** *Defina as matrizes diagonais  $G_l = \Gamma_{bl}^{-1}$ ,  $G_l \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $l \in \mathbb{K}_r$ , e considere um escalar  $\beta \geq 0$  dado. Suponha a existência de uma matriz simétrica definida positiva  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , de uma matriz  $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e de uma matriz  $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , tais que:*

$$\begin{bmatrix} \mathbb{A}G_l Y^T - \mathbb{B}M + YG_l \mathbb{A}^T - M^T \mathbb{B}^T & * & * \\ G_l Y^T + \mathbb{A}G_l Y^T - \mathbb{B}M - X & -2X & * \\ G_l Y^T & 0 & \frac{-X}{2\beta} \end{bmatrix} \prec 0. \quad (75)$$

Então a lei de controle (71), considerando (8), torna o ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema (72) globalmente assintoticamente estável, com uma taxa de decaimento maior ou igual  $\beta$ , sendo  $P = X^{-1}$  e o ganho do controlador dado por  $K = MY^{-T}$ .

**Prova:** A partir de (2), lembrando que  $\sum_{i=1}^r \lambda_l = 1$  e  $\lambda_l \geq 0$ ,  $l \in \mathbb{K}_r$ , defina  $G_l = \Gamma_l^{-1}$ . Multiplicando (75) por  $\lambda_l$  e realizando o somatório de  $l = 1$  até  $l = r$ , lembrando-se da definição de  $\Gamma_z^{-1}$  em (9), tem se:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{A}\Gamma_z^{-1} Y^T - \mathbb{B}M + Y\Gamma_z^{-1} \mathbb{A}^T - M^T \mathbb{B}^T & * & * \\ \Gamma_z^{-1} Y^T + \mathbb{A}\Gamma_z^{-1} Y^T - \mathbb{B}M - X & -2X & * \\ \Gamma_z^{-1} Y^T & 0 & \frac{-X}{2\beta} \end{bmatrix} \prec 0. \quad (76)$$

Aplicando o complemento de Schur em (76), com  $X = P^{-1}$ , obtém-se a seguinte desigualdade

$$\begin{bmatrix} \mathbb{A}\Gamma_z^{-1} Y^T - \mathbb{B}M + Y\Gamma_z^{-1} \mathbb{A}^T - M^T \mathbb{B}^T & * \\ \Gamma_z^{-1} Y^T + \mathbb{A}\Gamma_z^{-1} Y^T - \mathbb{B}M - X & -2X \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Y\Gamma_z^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} (-2\beta P) \begin{bmatrix} \Gamma_z^{-1} Y^T & 0 \end{bmatrix} \prec 0, \quad (77)$$

que pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} 2\beta Y\Gamma_z^{-1} P\Gamma_z^{-1} Y^T + \mathbb{A}\Gamma_z^{-1} Y^T - \mathbb{B}M + Y\Gamma_z^{-1} \mathbb{A}^T - M^T \mathbb{B}^T & * \\ \Gamma_z^{-1} Y^T + \mathbb{A}\Gamma_z^{-1} Y^T - \mathbb{B}M - X & -2X \end{bmatrix} \prec 0. \quad (78)$$

Note que em (77)  $\beta > 0$ ,  $\Gamma_z^{-1} > 0$  e  $P > 0$ . Então,

$$- \begin{bmatrix} Y\Gamma_z^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} (-2\beta P) \begin{bmatrix} \Gamma_z^{-1} Y^T & 0 \end{bmatrix} \succeq 0. \quad (79)$$

Assim, de (77) e (79),

$$\begin{bmatrix} \mathbb{A}\Gamma_z^{-1} Y^T - \mathbb{B}M + Y\Gamma_z^{-1} \mathbb{A}^T - M^T \mathbb{B}^T & * \\ \Gamma_z^{-1} Y^T + \mathbb{A}\Gamma_z^{-1} Y^T - \mathbb{B}M - X & -2X \end{bmatrix} \prec 0. \quad (80)$$



Portanto, observe que

$$\begin{bmatrix} I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{A}\Gamma_z^{-1}Y^T - \mathbb{B}M + Y\Gamma_z^{-1}\mathbb{A}^T - M^T\mathbb{B}^T & * \\ \Gamma_z^{-1}Y^T + \mathbb{A}\Gamma_z^{-1}Y^T - \mathbb{B}M - X & -2X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ -I \end{bmatrix} \prec 0, \quad (81)$$

que equivale a

$$-\Gamma_z^{-1}Y^T - Y\Gamma_z^{-1} \prec 0. \quad (82)$$

Logo,  $-\Gamma_z^{-1}Y^T \prec 0$  e  $\det(Y) \neq 0$ . Portanto pode-se definir  $Z_1 = Y^{-1}$  e  $M = KZ_1^{-T}$ . Assim, tem-se de (78) que

$$\begin{bmatrix} 2\beta Z_1^{-1}\Gamma_z^{-1}P\Gamma_z^{-1}Z_1^{-T} + \mathbb{A}\Gamma_z^{-1}Z_1^{-T} - \mathbb{B}KZ_1^{-T} + Z_1^{-1}\Gamma_z^{-1}\mathbb{A}^T - Z_1^{-1}K^T\mathbb{B}^T & * \\ \Gamma_z^{-1}Z_1^{-T} + \mathbb{A}\Gamma_z^{-1}Z_1^{-T} - \mathbb{B}KZ_1^{-T} - X & -2X \end{bmatrix} \prec 0. \quad (83)$$

Como  $X$  é uma matriz simétrica definida positiva, então  $\det(X) \neq 0$ . Assim, pode-se definir  $Z_2 = Z_2^T = X^{-1}$  e reescrever a desigualdade (83), tal que

$$\begin{bmatrix} 2\beta Z_1^{-1}\Gamma_z^{-1}P\Gamma_z^{-1}Z_1^{-T} + \mathbb{A}\Gamma_z^{-1}Z_1^{-T} - \mathbb{B}KZ_1^{-T} + Z_1^{-1}\Gamma_z^{-1}\mathbb{A}^T - Z_1^{-1}K^T\mathbb{B}^T & * \\ Z_2^{-1}P\Gamma_z^{-1}Z_1^{-T} + \mathbb{A}\Gamma_z^{-1}Z_1^{-T} - \mathbb{B}KZ_1^{-T} - Z_2^{-1} & -Z_2^{-T} - Z_2^{-1} \end{bmatrix} \prec 0. \quad (84)$$

Pré e pós-multiplicando (84) por  $\begin{bmatrix} Z_1 & 0 \\ 0 & Z_2 \end{bmatrix}$  e  $\begin{bmatrix} Z_1^T & 0 \\ 0 & Z_2^T \end{bmatrix}$ , respectivamente, obtém-se

$$\begin{bmatrix} 2\beta\Gamma_z^{-1}P\Gamma_z^{-1} + Z_1\mathbb{A}\Gamma_z^{-1} - Z_1\mathbb{B}K + \Gamma_z^{-1}\mathbb{A}^TZ_1^T - K^T\mathbb{B}^TZ_1^T & * \\ P\Gamma_z^{-1} + Z_2\mathbb{A}\Gamma_z^{-1} - Z_2\mathbb{B}K - Z_1^T & -Z_2 - Z_2^T \end{bmatrix} \prec 0. \quad (85)$$

Para  $x \neq 0$ , note que  $x_M = \Gamma_z x \neq 0$ , pois  $\det(\Gamma_z) \neq 0$ . Assim, observe que se  $x \neq 0$  então  $[x_M^T \ \dot{x}^T]^T \neq [0 \ 0]^T$  e portanto (85) é equivalente a

$$\begin{bmatrix} x_M^T & \dot{x}^T \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 2\beta\Gamma_z^{-1}P\Gamma_z^{-1} & * \\ P\Gamma_z^{-1} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbb{A}\Gamma_z^{-1} - \mathbb{B}K) & -I \\ (\mathbb{A}\Gamma_z^{-1} - \mathbb{B}K)^T & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1^T & Z_2^T \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x_M \\ \dot{x} \end{bmatrix} < 0. \quad (86)$$

A partir de (8), observe que o sistema (72) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \mathbb{A}\Gamma_z^{-1}\Gamma_z x(t) - \mathbb{B}Kx_M(t), \\ \dot{x}(t) &= (\mathbb{A}\Gamma_z^{-1} - \mathbb{B}K)x_M(t), \\ 0 &= (\mathbb{A}\Gamma_z^{-1} - \mathbb{B}K)x_M(t) - \dot{x}(t).\end{aligned}\tag{87}$$

Como  $(\mathbb{A}\Gamma_z^{-1} - \mathbb{B}K)x_M - \dot{x} = 0$  e  $x_M^T(\mathbb{A}\Gamma_z^{-1} - \mathbb{B}K)^T - \dot{x}^T = 0$ , então (86) equivale a

$$\begin{aligned}2\beta x_M^T \Gamma_z^{-1} P \Gamma_z^{-1} x_M + \dot{x}^T P \Gamma_z^{-1} x_M + x_M^T \Gamma_z^{-1} P \dot{x} \\ = 2\beta x^T P x + \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\ = \dot{V} + 2\beta x^T P x < 0.\end{aligned}\tag{88}$$

Portanto,

$$\dot{V} = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} < -2\beta x^T P x,\tag{89}$$

e assim a demonstração está concluída.  $\square$

**Observação 9.** Note que o Teorema 6 não utiliza a derivada do vetor de estado medido,  $x_M(t)$ . Isso representa uma vantagem, pois a partir de (1), (6), (7) e (8), observe que  $x_M(t)$  depende de parâmetros incertos variantes no tempo relacionados à  $\Gamma_z$ . Ou seja, o método proposto garante a estabilidade do sistema realimentado (72), com sensores que apresentam falhas variantes no tempo. Assim, as variações de tais falhas não interferem no projeto desse sistema de controle.

#### 4.1 Projeto de Controle

Foi projetado o controlador do sistema *2D ball balancer* descrito na Seção 2.3 considerando uma falha de até  $-50\%$  na leitura do ângulo medido, acarretando uma falha simultânea na derivada do ângulo. Já nas leituras das posições da bola ( $r_x$  e  $r_y$ ) foi suposto que não ocorreram erros de leitura. Então, as variáveis de estado podem ser reescritas como:

$$\begin{aligned}x_{1M}(t) &= x_1(t) = r(t); \\ x_{2M}(t) &= \frac{dx_1(t)}{dt} = \dot{r}(t); \\ x_{3M}(t) &= \gamma_3(t)x_3(t) = \gamma_3(t)\theta(t); \\ x_{4M}(t) &= \frac{dx_3(t)}{dt} = \frac{d(\gamma_3(t)x_3(t))}{dt} = \dot{\gamma}_3(t)\theta(t) + \gamma_3(t)\dot{\theta}(t).\end{aligned}\tag{90}$$

**Observação 10.** No caso particular do sistema 2D ball balancer em que o controle foi implementado, observe que, a partir de (90), tem-se  $\dot{\theta}_M(t) = x_{4M}(t) = \frac{dx_3(t)}{dt} = \dot{\gamma}_3(t)\theta(t) + \gamma_3(t)\dot{\theta}(t)$ , pois a variável de estado  $x_{4M}$  é obtida por meio de um filtro derivativo. Nessa seção foi projetado o controlador considerando a falha  $\gamma_3(t)$  descrita como uma onda quadrada, como pode ser visto na Subseção 4.1.1. A derivada de  $\gamma_3(t)$  será diferente de zero apenas quando o valor de  $\gamma_3(t)$  for alterado. Então, de forma simplificada, considerou-se que  $\dot{\theta}_M(t) = \gamma_3(t)\dot{\theta}(t)$ . Na Seção 4.2 será apresentado o projeto de controle considerando uma falha  $\gamma_3(t)$  descrita por uma onda senoidal, de forma que  $\dot{\gamma}_3(t)$  será levado em consideração em  $x_{4M}(t) = \dot{\gamma}_3(t)\theta(t) + \gamma_3(t)\dot{\theta}(t)$ .

A partir das considerações anteriores, de (7), (8) e (9), têm-se as matrizes  $\Gamma_{ak} = \text{diag}[1 \ 1 \ \gamma_3 \ \gamma_3]$  e  $\Gamma_{bl}^{-1} = \text{diag}[1 \ 1 \ \gamma_3^{-1} \ \gamma_3^{-1}]$ . Como visto no Teorema 6,  $G_l = \Gamma_{bl}^{-1}$ . Considerando  $0,5 \leq \gamma_3 \leq 1$ , obtêm-se as matrizes:

$$[G_1|G_2] = \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right]. \quad (91)$$

Do Teorema 6 com  $\beta = 1,2$  obtêm-se:

$$K = \begin{bmatrix} 118,0412 & 118,0268 & 55,1525 & 3,4714 \end{bmatrix}, \quad (92)$$

$$P = \begin{bmatrix} 2962,76 & 1574,04 & 193,66 & 1,40 \\ 1574,04 & 1206,43 & 166,87 & 1,31 \\ 193,66 & 166,87 & 38,91 & 0,45 \\ 1,40 & 1,31 & 0,44 & 0,02 \end{bmatrix}, \quad (93)$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0,0005 & -0,0007 & 0,0004 & -0,0000 \\ -0,0007 & 0,0014 & -0,0020 & 0,0056 \\ 0,0004 & -0,0020 & 0,0072 & -0,0528 \\ -0,0000 & 0,0056 & -0,0528 & 0,7341 \end{bmatrix}. \quad (94)$$

Para reduzir a norma do controlador utilizou-se o Teorema 3.

**Observação 11.** Como  $M = KY^T$  no controlador proposto pelo Teorema 6, então no Teorema 3 foi necessário utilizar  $Y$  simétrico e  $Y > \mu_0 I$  (ao invés de  $X > \mu_0 I$ ).

Os resultados obtidos utilizando o Teorema 6 em conjunto com o Teorema 3, para  $\beta = 1,2$  e  $\mu_0 = 0,8$ , são apresentados a seguir.

$$\eta = 6,3705 * 10^6, \quad (95)$$

$$K = \begin{bmatrix} 63,4164 & 66,0939 & 32,5700 & 1,6221 \end{bmatrix}, \quad (96)$$

$$P = \begin{bmatrix} 0,1473036 & 0,0795197 & 0,0093295 & 0,0001073 \\ 0,0795197 & 0,0620453 & 0,0083086 & 0,0001035 \\ 0,0093295 & 0,0083086 & 0,0021549 & 0,0000372 \\ 0,0001072 & 0,0001035 & 0,0000372 & 0,0000017 \end{bmatrix}, \quad (97)$$

$$Y = \begin{bmatrix} 10 & -13 & 8 & 1 \\ -13 & 27 & -35 & 80 \\ 8 & -35 & 114 & -963 \\ 1 & 80 & -963 & 17576 \end{bmatrix}. \quad (98)$$

Nota-se que os ganhos obtidos em (96) são menores que os encontrados em (92). Espera-se assim que o sinal de controle  $u(t)$  seja também menor. Os resultados de simulação e da implementação prática serão apresentados a seguir.

#### 4.1.1 Simulações e Resultados Práticos

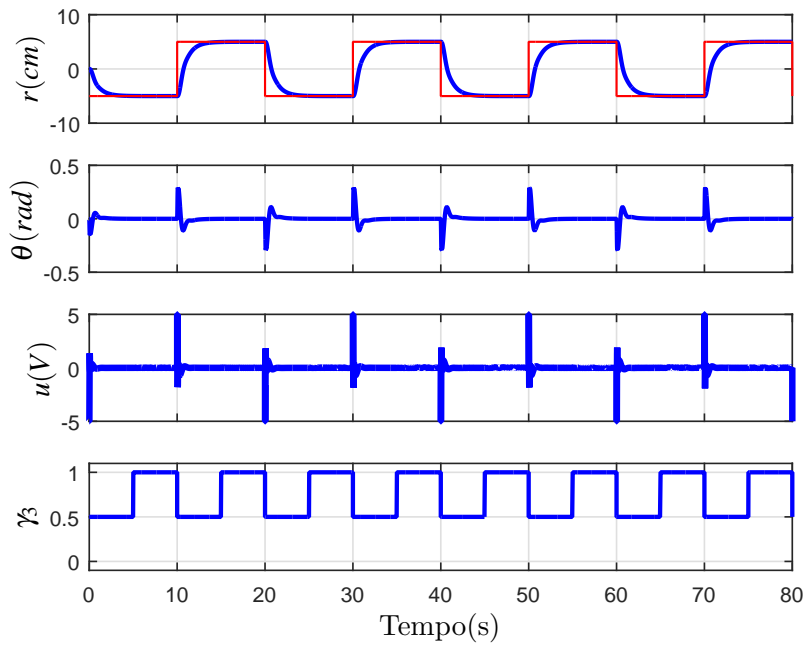
O sistema implementado visa fazer a bolinha percorrer uma trajetória quadrada de 10 cm de lado. Em cada eixo, há uma falha que atua como uma onda quadrada, podendo estar em  $\gamma_3 = 0,5$  (falha de 50% no sistema) ou  $\gamma_3 = 1$  (não há falha); as ondas quadradas possuem período de 10 segundos (5 segundos com  $\gamma_3 = 0,5$  e 5 segundos com  $\gamma_3 = 1$ ) e estão defasadas em 2,5 segundos entre si, de forma que é possível observar o sistema funcionando quando há falha em apenas um eixo, nos dois eixos ou em nenhum eixo.

Para não danificar o atuador, foi inserido um saturador, via *Simulink*<sup>®</sup>, que limita a entrada do sinal de controle  $u(t)$  em  $\pm 5V$ .

No sistema real o sensor apresenta apenas o ângulo medido ( $\theta_M$ ), mas como a implementação em laboratório utilizou uma falha induzida via software, então tem-se acesso ao ângulo real ( $\theta$ ) e ao ângulo medido ( $\theta_M$ ). Para demonstrar o comportamento real do sistema as Figuras 23 e 24 apresentam  $\theta$  ao invés de  $\theta_M$ .

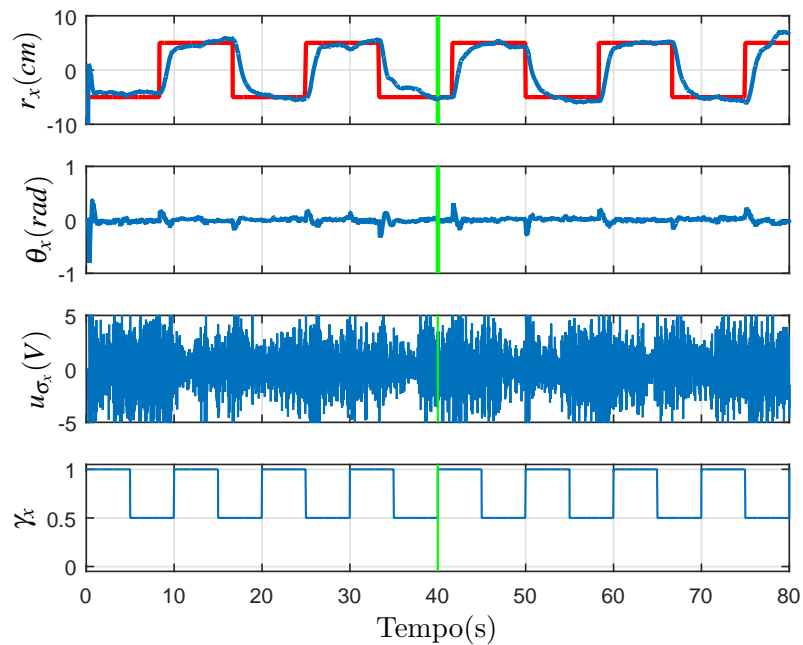
A simulação do controlador (71), com os ganhos dados em (92) é apresentada na Figura 22 e os resultados práticos nas Figuras 23 e 24.

Figura 22 - Resultados de simulação: posição  $r$ , ângulo  $\theta$ , sinal de controle  $u_\sigma$  e a falha  $\gamma_3$  do  $2D$  ball balancer utilizando o controlador descrito por (71) e (92).



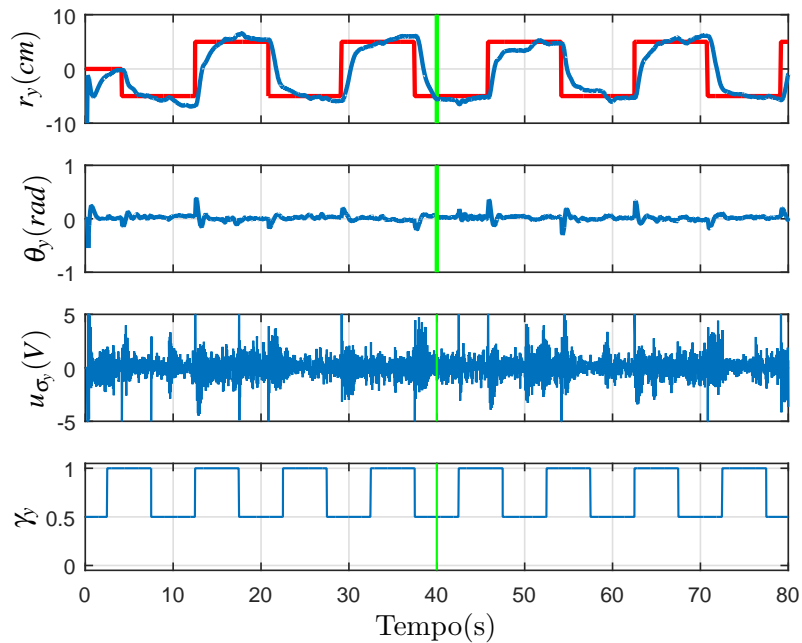
Fonte: Elaboração do autor.

Figura 23 - Resultados práticos do eixo  $x$ : posição  $r_x$ , ângulo  $\theta_x$ , sinal de controle  $u_{\sigma_x}$  e a falha  $\gamma_x$  do  $2D$  ball balancer utilizando o controlador descrito por (71) e (92).



Fonte: Elaboração do autor.

Figura 24 - Resultados práticos do eixo y: posição  $r_y$ , ângulo  $\theta_y$ , sinal de controle  $u_y$  e a falha  $\gamma_3$  do *2D ball balancer* utilizando o controlador descrito por (71) e (92).

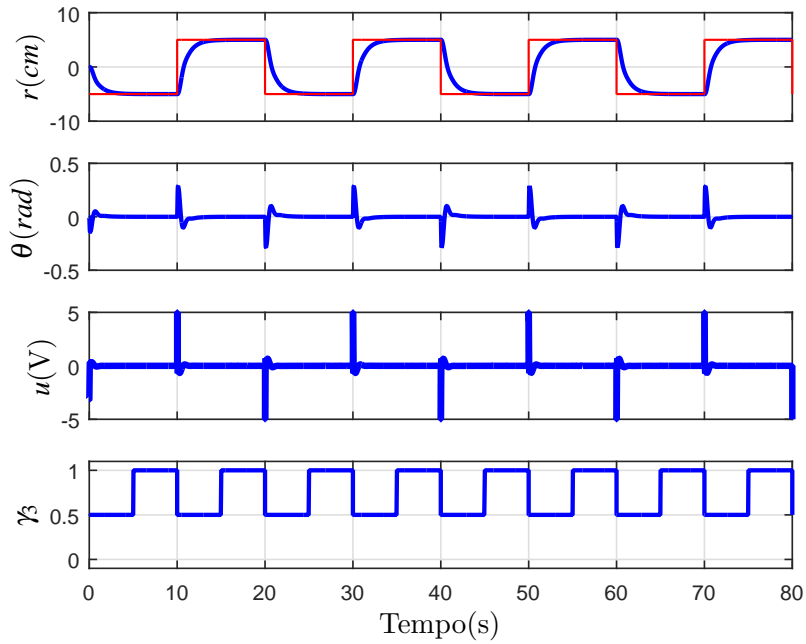


Fonte: Elaboração do autor.

Nota-se que utilizando o controlador (71) com os ganhos (92), o sistema seguiu a posição desejada  $x = \pm 5 \text{ cm}$ ,  $y = \pm 5 \text{ cm}$  e manteve os ângulos das direções  $x$  e  $y$  próximo de zero. Observa-se também que o sistema saturou em alguns momentos, principalmente no eixo  $x$ .

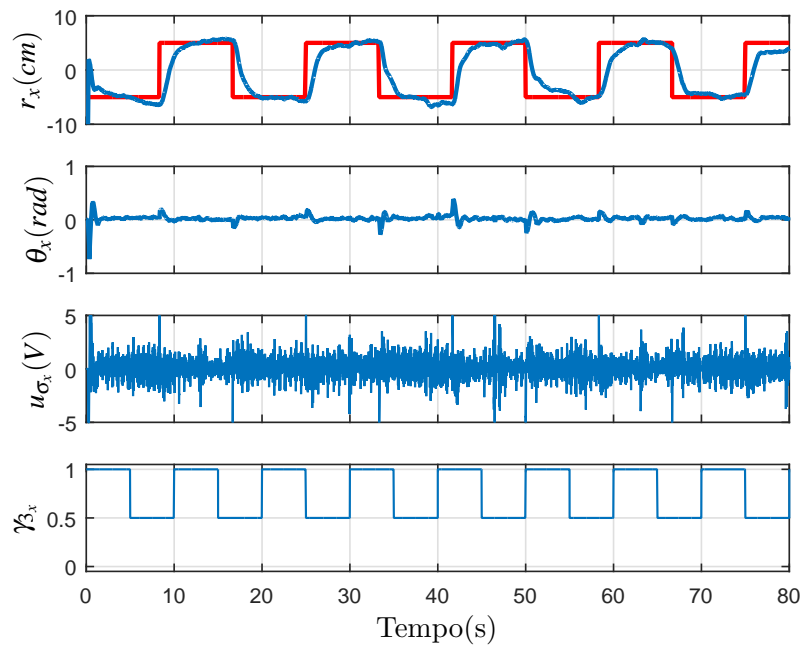
A seguir estão os resultados de simulação e implementação prática do controlador chaveado (71) com os ganhos (96) (obtidos utilizando o Teorema 3 que reduz a norma de controle).

Figura 25 - Resultados de simulação: posição  $r_x$ , ângulo  $\theta_x$ , sinal de controle  $u_{\sigma_x}$  e a falha  $\gamma_3$  do *2D ball balancer* utilizando o controlador descrito por (71) e (96).



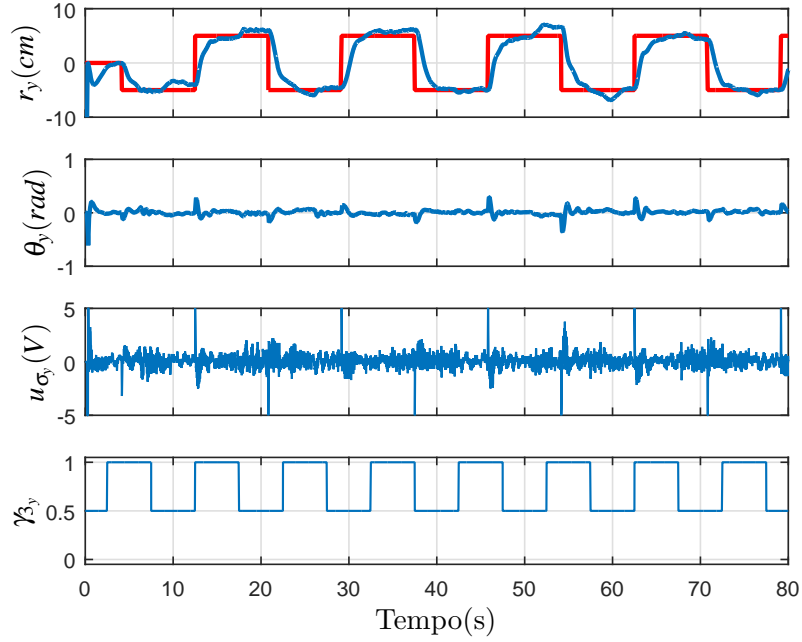
Fonte: Elaboração do autor.

Figura 26 - Resultados práticos do eixo  $x$ : posição  $r_x$ , ângulo  $\theta_x$ , sinal de controle  $u_{\sigma_x}$  e a falha  $\gamma_x$  do *2D ball balancer* utilizando o controlador descrito por (71) e (96).



Fonte: Elaboração do autor.

Figura 27 - Resultados práticos do eixo y: posição  $r_y$ , ângulo  $\theta_y$ , sinal de controle  $u_y$  e a falha  $\gamma_3$  do *2D ball balancer* utilizando o controlador descrito por (71) e (96).



Fonte: Elaboração do autor.

Como se pode observar, o sinal de controle  $u(t)$  do controlador (71) foi significativamente menor com os ganhos dados em (96), de forma que o sistema saturou apenas em alguns momentos no eixo x.

#### 4.2 Projeto de Controle Levando em Consideração a Derivada da Falha

Quando a falha na medição de uma variável de estado  $x_{pM} = \gamma_p x_p$  ocorre e ainda precisamos estimar  $\dot{x}_{pM} = \frac{dx_p}{dt} = \frac{d(\gamma_p x_p)}{dt}$ , então note que  $\frac{d(\gamma_p x_p)}{dt} = \gamma_p \dot{x}_p + \dot{\gamma}_p x_p$ . A Seção 4.1 considerou  $\dot{\gamma}_p = 0$ , essa seção abordará o problema para os casos em que  $\dot{\gamma}_p \neq 0$ .

Nessa seção foi novamente projetado o sistema *2D ball balancer* descrito na Seção 2.3 com falha na leitura do ângulo medido  $\theta_M$  e portanto com falha também na velocidade angular medida  $\dot{\theta}_M$ . As variáveis de estados podem ser escritas conforme (90). Note que  $\dot{\theta}_M = \dot{\gamma}_3 \theta + \gamma_3 \dot{\theta}$ , assim como  $\theta_M$  está em função de  $\theta$  e  $\dot{\theta}$ , então as matrizes  $\Gamma_{ak}$  deixaram de ser diagonais, tendo em vista (8) e (40), como pode ser visto a seguir.



$$\Gamma_{ak} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\gamma}_3 & \gamma_3 \end{bmatrix}, \quad (99)$$

O controle foi projetado supondo falha de até -50% na leitura do ângulo medido  $\theta_M$  e com a variação da falha  $\dot{\theta}_M$  entre  $-0,05\pi$  e  $0,05\pi$ , assim:

$$\begin{aligned} 0,5 &\leq \gamma_3 \leq 1, \\ -0,05\pi &\leq \dot{\gamma}_3 \leq 0,05\pi. \end{aligned} \quad (100)$$

A partir de (99) e (100) e lembrando do Teorema 6 que  $G_i = \Gamma_i^{-1}$ , obtêm-se:

$$[G_1|G_2] = \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6283 & 2 & 0 & 0 & -0,6283 & 2 \end{array} \right], \quad (101)$$

$$[G_3|G_4] = \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1571 & 1 & 0 & 0 & -0,1571 & 1 \end{array} \right],$$

Do Teorema 6 com  $\beta = 1,2$  obtêm-se:

$$K = \begin{bmatrix} 132,7281 & 132,3025 & 61,3486 & 3,7206 \end{bmatrix}, \quad (102)$$

$$P = \begin{bmatrix} 119863,15 & 62416,00 & 7309,24 & 49,93 \\ 62416,00 & 47612,54 & 6273,36 & 46,64 \\ 7309,24 & 6273,36 & 1405,62 & 15,81 \\ 49,93 & 46,64 & 15,81 & 0,81 \end{bmatrix}, \quad (103)$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0,0000112 & -0,00001591 & 0,0000103 & -0,0000030 \\ -0,0000159 & 0,00003397 & -0,0000498 & 0,0001538 \\ 0,0000103 & -0,00004980 & 0,0001863 & -0,0014771 \\ -0,0000030 & 0,00015385 & -0,0014771 & 0,0215937 \end{bmatrix}. \quad (104)$$

Para reduzir a norma do controlador utilizou-se o Teorema 3. Os resultados obtidos utilizando o Teorema 6 em conjunto com o Teorema 3, com  $\beta = 1,2$  e  $\mu_0 = 0,8$ , são apresentados a seguir.

$$\eta = 4,6426 * 10^7, \quad (105)$$

$$K = \begin{bmatrix} 79,6256 & 82,4983 & 40,3418 & 2,1073 \end{bmatrix}, \quad (106)$$

$$P = \begin{bmatrix} 0,1502539 & 0,0799788 & 0,0090366 & 0,0000880 \\ 0,0799788 & 0,0619282 & 0,0079543 & 0,0000840 \\ 0,0090366 & 0,0079543 & 0,0019391 & 0,0000293 \\ 0,0000880 & 0,0000840 & 0,0000293 & 0,0000013 \end{bmatrix}, \quad (107)$$

$$Y = \begin{bmatrix} 9,416 & -12,968 & 8,026 & -0,404 \\ -12,968 & 26,773 & -35,364 & 93,370 \\ 8,026 & -35,364 & 121,555 & -1047,934 \\ -0,404 & 93,370 & -1047,935 & 18694,177 \end{bmatrix}. \quad (108)$$

Nota-se que os ganhos obtidos em (106) são menores que os encontrados em (102), espera-se assim que o sinal de controle  $u(t)$  seja também menor. Os resultados de simulação e da implementação prática serão apresentados a seguir.

#### 4.2.1 Simulações e Resultados Práticos

O objetivo do sistema implementado é fazer a bolinha percorrer uma trajetória quadrada de 10cm de lado. Em cada eixo há uma falha que varia entre 0,5 a 1 de forma senoidal com 0,1Hz de frequência e 2,5 segundos de defasagem entre os eixos. Foi utilizada essa defasagem para demonstrar que o sistema continua tendo bom desempenho mesmo quando os eixos apresentam falhas diferentes. A falha utilizada pode ser representada matematicamente por:

$$\gamma_3 = 0,75 + 0,25\text{sen}(0,2\pi t), \quad (109)$$

$$\dot{\gamma}_3 = 0,05\pi \cos(0,2\pi t). \quad (110)$$

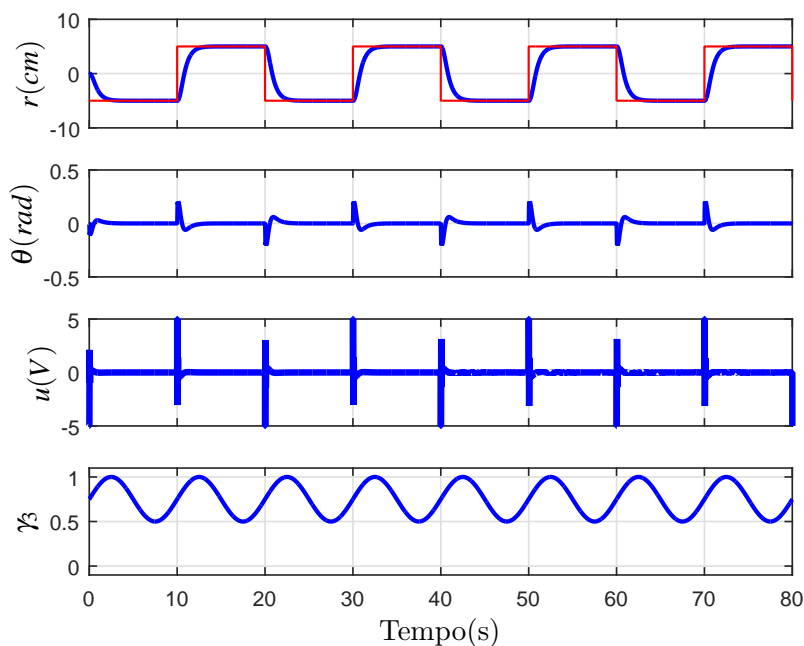
Como se pode observar  $-0,05\pi \leq \dot{\gamma}_3 \leq 0,05\pi$ , que é o previsto no projeto.

Para não danificar o atuador, foi inserido um saturador, via *Simulink*<sup>®</sup>, que limita a entrada do sinal de controle  $u(t)$  em  $\pm 5V$ .

No sistema real o sensor apresenta apenas o ângulo medido ( $\theta_M$ ), mas como a implementação em laboratório utilizou uma falha induzida via software, então tem-se acesso ao ângulo real ( $\theta$ ) e ao ângulo medido ( $\theta_M$ ). Para demonstrar o comportamento real do sistema as Figuras 28 a 33 apresentam  $\theta$  ao invés de  $\theta_M$ .

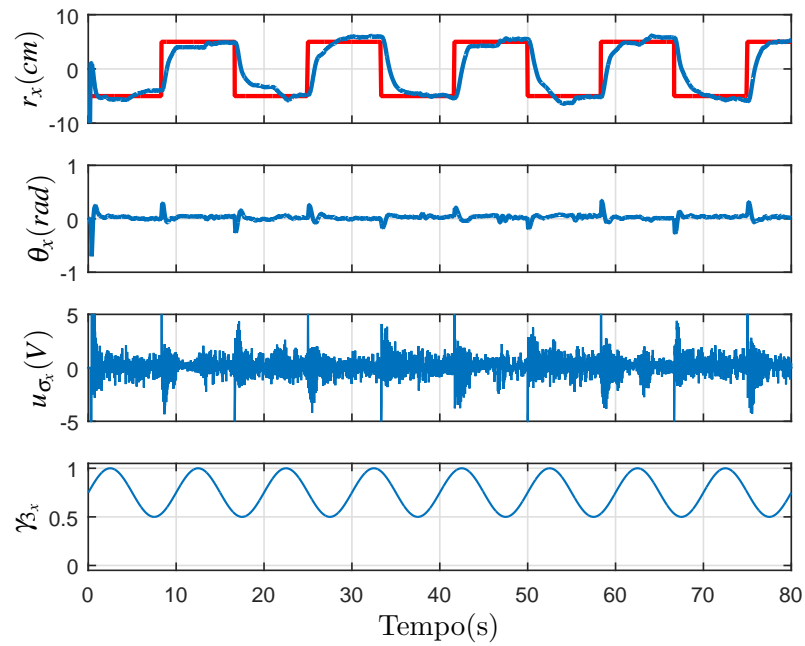
A simulação do controlador (71), com os ganhos dados em (102) é apresentado na Figura 28 e os resultados práticos nas Figuras 29 e 30.

Figura 28 - Resultados de simulação: posição  $r$ , ângulo  $\theta$ , sinal de controle  $u_\sigma$  e a falha  $\gamma_3$  do *2D ball balancer* utilizando o controlador descrito por (71) e (102).



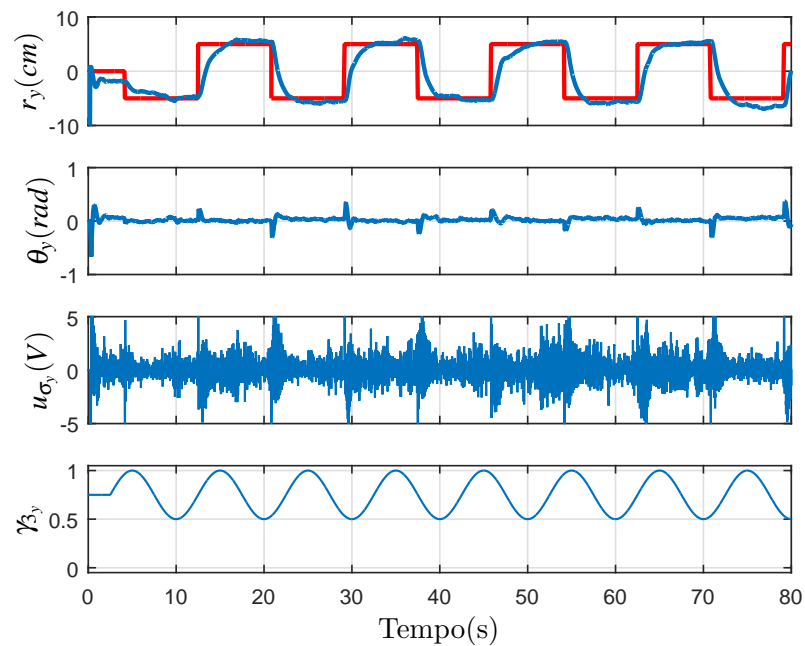
Fonte: Elaboração do autor.

Figura 29 - Resultados práticos do eixo  $x$ : posição  $r_x$ , ângulo  $\theta_x$ , sinal de controle  $u_{\sigma_x}$  e a falha  $\gamma_x$  do  $2D$  ball balancer utilizando o controlador descrito por (71) e (102).



Fonte: Elaboração do autor.

Figura 30 - Resultados práticos do eixo  $y$ : posição  $r_y$ , ângulo  $\theta_y$ , sinal de controle  $u_y$  e a falha  $\gamma_y$  do  $2D$  ball balancer utilizando o controlador descrito por (71) e (102).



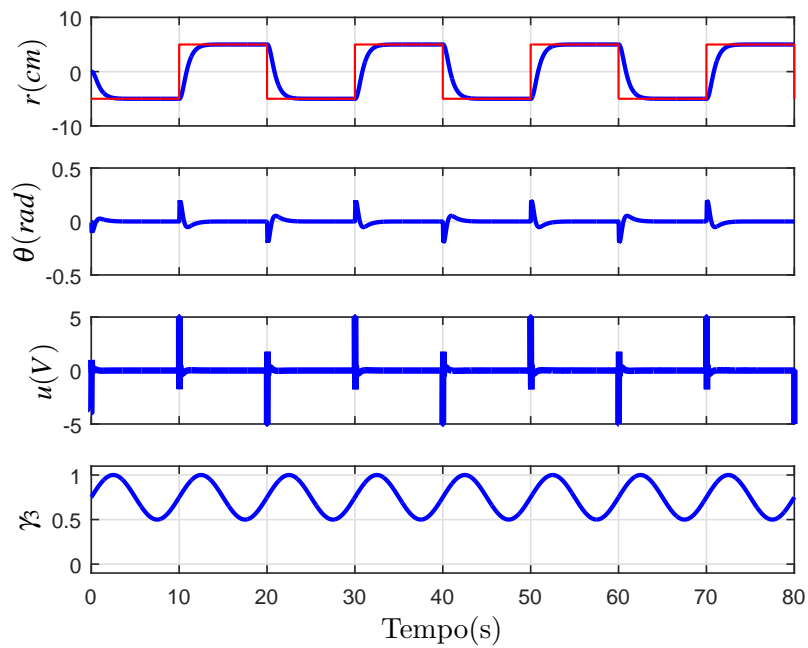
Fonte: Elaboração do autor.

Nota-se que utilizando o controlador (71) com os ganhos (102), o sistema seguiu a

posição desejada  $x = \pm 5 \text{ cm}$ ,  $y = \pm 5 \text{ cm}$  e manteve os ângulos das direções  $x$  e  $y$  próximo de zero, mas apresentou problemas de sturação.

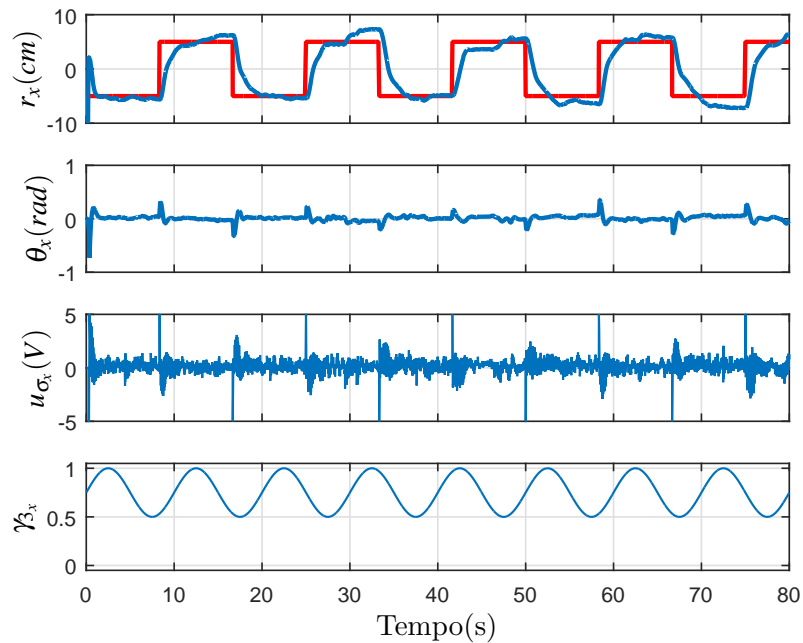
A seguir estão os resultados de simulação e implementação prática do controlador (71) com os ganhos (106) (obtidos utilizando o Teorema 3 que reduz a norma de controle).

Figura 31 - Resultados de simulação: posição  $r_x$ , ângulo  $\theta_x$ , sinal de controle  $u_{\sigma_x}$  e a falha  $\gamma_3$  do *2D ball balancer* utilizando o controlador descrito por (71) e (106).



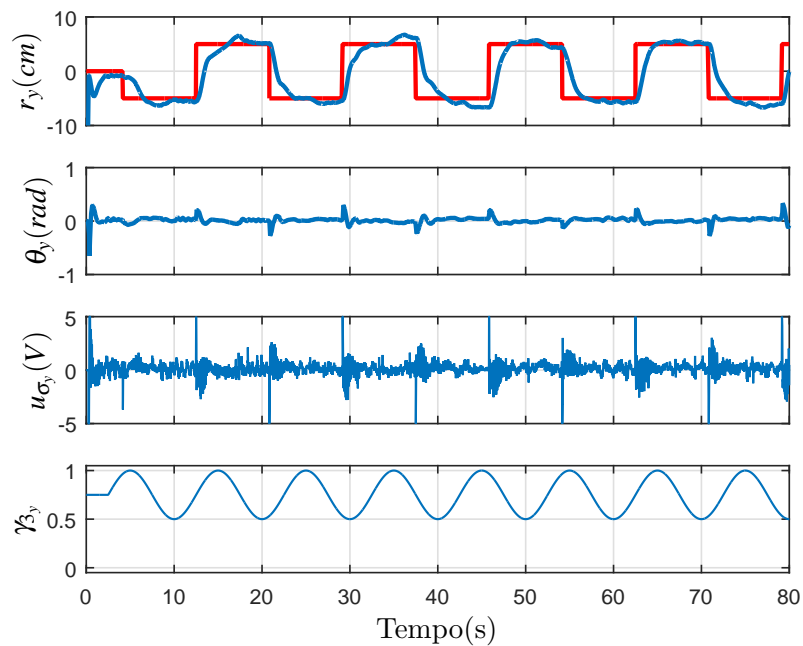
Fonte: Elaboração do autor.

Figura 32 - Resultados práticos do eixo  $x$ : posição  $r_x$ , ângulo  $\theta_x$ , sinal de controle  $u_{\sigma_x}$  e a falha  $\gamma_x$  do  $2D$  ball balancer utilizando o controlador descrito por (71) e (106).



Fonte: Elaboração do autor.

Figura 33 - Resultados práticos do eixo  $y$ : posição  $r_y$ , ângulo  $\theta_y$ , sinal de controle  $u_y$  e a falha  $\gamma_y$  do  $2D$  ball balancer utilizando o controlador descrito por (71) e (106).



Fonte: Elaboração do autor.

Nota-se que a redução da norma utilizando o Teorema 3 reduziu significativamente o

sinal de controle, de forma que o problema de saturação foi quase eliminado.

### 4.3 Conclusões parciais

Nesse capítulo foi proposta uma nova metodologia de projeto de controle robusto para sistemas lineares, considerando que os sensores apresentam falhas de medição variantes no tempo. O vetor de estado medido,  $x_M(t) = \Gamma_z x(t)$ , apresenta incertezas politópicas, como mostra a definição de  $\Gamma_z$  em (7). O método proposto nesse capítulo apresenta condições que garantem a estabilidade do sistema realimentado, bem como uma taxa de decaimento mínima, que independem das variações dos elementos da matriz  $\Gamma_z$ . O teorema foi utilizado para projetar o controlador empregado na implementação prática, em um sistema *2D ball balancer*, para confirmar a sua eficácia.

## 5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Nesse trabalho inicialmente foi apresentado um procedimento para representar uma planta linear e invariante no tempo em função de um vetor de estado medido com incertezas  $x_M$ . Utilizando essa representação foi demonstrado como projetar um controlador chaveado que garante estabilidade do sistema controlado, com uma taxa de decaimento  $\beta$  mínima previamente especificada. Foi evidenciado que o controlador chaveado é menos conservativo que o controlador com um único ganho através de um teorema e graficamente com um exemplo. Essa representação e o projeto de controle foram publicados em Buzetti et al. (2015).

Foi proposta uma forma de escolher os vértices do politopo de forma que o controlador chaveado fique ainda menos conservativo.

Um teorema que restringe a norma dos controladores foi apresentado com o intuito de diminuir o sinal de controle do sistema para assim evitar problemas de saturação.

Foi proposto também o projeto de um controlador que garante a estabilidade do sistema controlado, com uma taxa de decaimento  $\beta$  mínima previamente especificada, mesmo que a falha varie no tempo. Esse projeto de controle foi publicado em Buzetti et al. (2016).

Todos os projetos de controle foram implementados em bancada no sistema *2D ball balancer*, com e sem o teorema que restringe a norma dos controladores, de forma que foi possível verificar que todos os controladores apresentaram bom desempenho e os controladores que tiveram sua norma restringida tiveram significativa diminuição do sinal de controle, de forma que o problema de saturação pôde ser evitado.

Planos de pesquisas futuras incluem um estudo aprofundado de saturação, projetos para sistemas não lineares, aplicações dos métodos em outros equipamentos do LPC, controladores digitais e outras técnicas de controle.



## REFERÊNCIAS

- ACKERMANN, J. Robustness against sensor failures. *Automatica*, Kidlington, v. 20, n. 2, p. 211 – 215, 1984. ISSN 0005-1098.
- ALVES, U. N. L. T.; TEIXEIRA, M. C. M.; OLIVEIRA, D. R. de; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E.; SOUZA, W. A. de. Smoothing switched control laws for uncertain nonlinear systems subject to actuator saturation. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, West Sussex, v. 30, n. 8-10, 2016. ISSN 08906327.
- ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; FARIA, F. A.; SILVA, N. A. P. D.; CARDIM, R. Robust state-derivative feedback LMI-based designs for multivariable linear systems. *International Journal of Control*, Abingdon, v. 80, n. 8, p. 1260–1270, 2007. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1080/00207170701283899>>. Acesso em: 25 aug. 2016.
- BOUATTOUR, M.; CHADLI, M.; HAJJAJI, A. E.; CHAABANE, M.  $\mathcal{H}_\infty$  sensor faults estimation for T-S models using descriptor techniques: application to fault diagnosis. In: FUZZ-IEEE 2009, Korea. *Proceedings...* Korea: [s.n.], 2009. p. 251–255.
- BOUATTOUR, M.; CHADLI, M.; HAJJAJI, A. E.; CHAABANE, M. Estimation of state, actuator and sensor faults for t-s models. In: CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 49., 2010, Atlanta. *Proceedings...* Atlanta: [s.n.], 2010. p. 1613–1618.
- BOYD, S.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. Philadelphia, PA: SIAM - Soc. Ind. Appl. Math., 1994. (Studies in Applied Mathematics, v. 15).
- BRAHIM, I. H.; CHAABANE, M.; HASHIM, G.; MEHDI, D. Sensor fault and state estimation for continuous-time descriptor linear system: an lmi approach. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON SYSTEMS AND CONTROL, 5., 2016, Marrakesh. *Proceedings...* Marrakesh, Morocco: [s.n.], 2016. p. 400–406.
- BUZETTI, A. S.; OLIVEIRA, D. R.; TEIXEIRA, M. C. M.; SOUZA, W. A.; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R. Projeto de controle robusto chaveado com falhas nos sensores. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO INTELIGENTE - SBAI, 12., 2015, Natal. *Anais...* Natal, RN: [s.n.], 2015. p. 748–753.
- BUZETTI, A. S.; TEIXEIRA, M. C. M.; OLIVEIRA, D. R.; LAZARINI, A. Z. N.; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R. Projeto de controle robusto para sistemas com sensores que apresentam falhas variantes no tempo. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA - CBA, 21., 2016, Vitória. *Anais...* Vitória, ES: [s.n.], 2016. p. 2061–2066. ISSN 2525-8311.
- DONG, J.; YANG, G.-H. Reliable state feedback control of T-S fuzzy systems with sensor faults. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, Piscataway, v. 23, n. 2, p. 421–433,

April 2015.

FARKOUS, R.; TISSIR, E. H.  $\mathcal{H}_\infty$  finite time state and sensor faults estimation for T-S fuzzy systems using descriptor technique. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON SYSTEMS AND CONTROL, 5., 2016, Marrakesh. *Proceedings...* Marrakesh, Morocco: [s.n.], 2016. p. 288–293.

FENG, H.; SHUO, T.; MIN, Y. S. C.  $\mathcal{H}_\infty$  finite time state and sensor faults estimation for T-S fuzzy systems using descriptor technique. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON SYSTEMS AND CONTROL, 5., 2016, Marrakesh. *Proceedings...* Marrakesh, Morocco: [s.n.], 2015. p. 6.

LI, X.; ZHU, F. Simultaneous actuator and sensor fault estimation for descriptor lpv system based on  $\mathcal{H}_\infty$  reduced order observer. *Optimal Control Applications And Methods*, Chichester, v. 37, n. 6, Dec 2015. ISSN 1122-1138.

LIU, M.; CAO, X.; SHI, P. Fuzzy-model-based fault-tolerant design for nonlinear stochastic systems against simultaneous sensor and actuator faults. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, Piscataway, v. 21, n. 5, p. 789–799, Oct 2013.

MINQING, X. Reliable robust guaranteed cost control of delta operator linear uncertain systems with sensor failure. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON INTELLIGENT COMPUTATION TECHNOLOGY AND AUTOMATION - ICICTA, 2., 2009, [S. l.]. *Proceedings...* [S.l.: s.n.], 2009. v. 1, p. 834–837.

OLIVEIRA, D. R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; SOUZA, W. A.; MOREIRA, M. R.; SILVA, J. H. P. Projeto de controle robusto  $\mathcal{H}_\infty$  chaveado: Implementação prática em um sistema de suspensão ativa. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA - CBA, 20., 2014, Belo Horizonte. *Anais...* Belo Horizonte, MG: [s.n.], 2014. p. 2194–2201.

ODUGHIRI, M.; IEEE, S. M.; CHADLI, M.; HAJJAJI, A. E. A fuzzy approach for sensor fault-tolerant control of vehicle lateral dynamics. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON CONTROL APPLICATIONS, 16., 2007, Singapore. *Proceedings...* Singapore: [s.n.], 2007. p. 1221–1226.

QIU, J.-Q.; REN, M.-F.; XI, D.-M.; ZHAO, Y.-C.; GUO, Y.-M.; ZHU, X.-D. Fault-tolerant control design for a class of T-S fuzzy systems with time delays and sensor faults. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON MACHINE LEARNING AND CYBERNETICS, 9., 2010, Qingdao. *Proceedings...* Qingdao: [s.n.], 2010. p. 624–629.

QUANSER. *2D ball balancer control using QUARC: instructor manual*. Canadá, 2008. 87 p.

SOUZA, W. A.; OLIVEIRA, D. R.; TEIXEIRA, M. C. M.; SILVA, L. S. C.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. Projeto e implementação de um controlador robusto chaveado utilizando modelos fuzzy Takagi-Sugeno. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA - CBA, 2014, Belo Horizonte. *Anais...* Belo Horizonte, MG: [s.n.], 2014. p. 2238–2244.

SOUZA, W. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. On switched

- regulator design of uncertain nonlinear systems using Takagi-Sugeno fuzzy models. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, Piscataway, v. 22, n. 6, p. 1720–1727, Dec 2014a.
- SOUZA, W. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; SANTIM, M. P. A.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. On switched control design of linear time-invariant systems with polytopic uncertainties. *Mathematical Problems in Engineering*, New York, v. 2013, p. 10, 2013.
- VEILLETTE, R.; MEDANIC, J.; PERKINS, W. R. Design of reliable control systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, Piscataway, v. 37, n. 3, p. 290–304, Mar 1992.
- WANG, Z.; JIN, X.; WANG, Z. Adaptive controller design for linear time-invariant systems with sensor failures. In: CONTROL AND DECISION CONFERENCE - CCDC, 2011, Chinese. *Proceedings...* [S.l.: s.n.], 2011. p. 2459–2462.
- YANG, G.-H.; WANG, J.; SOH, Y. Reliable LQG control with sensor failures. *Control Theory and Applications, IEE Proceedings*, Piscataway, v. 147, n. 4, p. 433–439, Jul 2000. ISSN 1350-2379.
- YANG, G.-H.; WANG, J. L.; SOH, Y. C. Reliable  $\mathcal{H}_\infty$  controller design for linear systems. *Automatica*, Kidlington, v. 37, n. 5, p. 717 – 725, 2001. ISSN 0005-1098.
- YANG, G.-H.; YE, D. Adaptive fault-tolerant  $\mathcal{H}_\infty$  control against sensor failures. *IET Control Theory and Applications*, v. 2, n. 2, p. 95–107, Feb 2008. ISSN 1751-8644.
- YANG, X.; HAK-KEUNG; WU, L. Novel membership-function-dependent stability condition for t-s fuzzy systems. In: INTERNATIONAL CONFERENCE OF FUZZY SYSTEMS - FUZZ, 2016, Vancouver. *Proceedings...* Vancouver, Canada: [s.n.], 2016.
- ZHU, Q.; LU, K.; XIE, G.; ZHU, Y. Guaranteed cost fault-tolerant control for networked control systems with sensor faults. *Mathematical Problems in Engeneering*, New York,, v. 2015, p. 9, 2015.

**APÊNDICE A - ARTIGOS APRESENTADOS EM CONGRESSO COMO  
PRIMEIRO AUTOR**



## PROJETO DE CONTROLE ROBUSTO CHAVEADO COM FALHAS NOS SENSORES

ARIEL STARKE BUZZETTI\*, DIOGO RAMALHO DE OLIVEIRA\*, MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA\*, WALLYSONN ALVES DE SOUZA†, EDVALDO ASSUNÇÃO\*, RODRIGO CARDIM†

\*UNESP - Univ Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira  
Departamento de Engenharia Elétrica, Lab. de Pesquisa em Controle  
Av. José Carlos Rossi, 1370, 15385-000, Ilha Solteira, São Paulo, Brasil

†IFTO - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins  
Coordenação de Ciências Matemáticas e Naturais, 77.021-090, Palmas, Tocantins, Brasil.

Emails: arielsb@hotmail.com, diogo\_oliveira6@hotmail.com, marcelo@dee.feis.unesp.br, wallysonn@yahoo.com.br, edvaldo@dee.feis.unesp.br, rcardim@dee.feis.unesp.br

**Abstract**— This paper addresses a recurrent subject in practical implementations which is the sensor measurement failure. Thus, the state vector available for feedback, denominated  $x_M(t)$ , presents polytopic uncertainties. The contribution of this work is the state space representation of a linear time-invariant system using  $x_M(t)$  and the switched control project that ensures the stability of the system. The switched control design is based on Linear Matrix Inequalities (LMIs) and uses a quadratic Lyapunov function. A practical implementation of a *2D ball balancer* system confirms the efficiency of the method.

**Keywords**— Sensor Fault; Reliable Control; Switched Control; Linear Matrix Inequalities.

**Resumo**— Este trabalho aborda um tema recorrente em implementações práticas que é a falha de medição do sensor. Considerou-se que o vetor de estado disponível para a realimentação, denominado  $x_M(t)$ , apresenta incertezas politópicas. A contribuição do trabalho é a representação em espaço de estados de um sistema linear e invariante no tempo utilizando  $x_M(t)$  e o projeto de controle chaveado que garante a estabilidade desse sistema. O projeto de controle chaveado é baseado em desigualdades matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities - LMIs*) e utiliza uma função de Lyapunov do tipo quadrática. Uma implementação prática de um sistema *2D ball balancer* confirmam a eficiência do método.

**Keywords**— Falha do Sensor; Controle Confiável; Controle Chaveado; Desigualdades Matriciais Lineares.

### 1 Introdução

Em muitas aplicações em engenharia, o sistema de controle é obrigado a ter uma alta confiabilidade, especialmente em sistemas críticos para a segurança humana, tais como sistemas de aeronaves e sistemas médicos (Dong and Yang, 2015). Em geral, o controle de qualquer sistema depende da disponibilidade e qualidade das medições dos sensores. Em algumas aplicações de controle com realimentação, condições ambientais desfavoráveis, comunicação ruim ou mau funcionamento de algum *hardware* ou *software*, muitas vezes prejudicam as medições dos sensores. Dessa forma, as características dos sensores podem mudar ao longo do tempo de modo que possa haver uma falha parcial ou total (Liu et al., 2013), o que pode degradar o desempenho ou até mesmo destruir a estabilidade dos sistemas controlados.

Portanto, para aumentar a confiabilidade do sistema de controle, é preciso considerar possíveis falhas nos sensores e/ou atuadores. Um sistema de controle projetado para tolerar falhas de atuadores ou sensores dentro de um subconjunto pré-especificado de todos os atuadores ou sensores, mantendo as propriedades do sistema de controle desejadas, será chamado de sistema de controle confiável (Veillette et al., 1992; Mingqing, 2009).

Uma revisão bibliográfica recente sobre sistemas de controle tolerantes à falhas é apresentada em (Zhang and Jiang, 2008).

Em diversos trabalhos foram desenvolvidas técnicas de controle confiável, modelando as incertezas dos sensores como funções incertas parametrizáveis (Yang et al., 2000; Yang et al., 2001; Mingqing, 2009; Wang et al., 2011; Dong and Yang, 2015). Nesses trabalhos é realizada a realimentação do vetor de estado ou da saída da planta, sendo que este vetor possui incertezas. A representação do sistema realimentado é o ponto de destaque desses trabalhos, pois é feita através de espaço de estados, utilizando a dinâmica do vetor de estado que não possui incertezas,  $x(t)$ . Por esse motivo, diversas manipulações algébricas são necessárias para propor condições que estabilizem o sistema realimentado.

Motivado por esse problema, o trabalho tem como objetivo propor uma representação em espaço de estados do sistema linear e invariante no tempo que descreva a dinâmica do vetor de estado medido, denominado  $x_M(t)$ . Então, o sistema resultante será representado como um sistema com incertezas politópicas. Dessa forma, LMIs bastante estudadas na literatura podem ser utilizadas para garantir a estabilidade do sistema realimentado e projetar o sistema de controle.

Nesse trabalho optou-se em realizar o projeto de controle chaveado através da realimentação de  $x_M(t)$ . Pois, como visto em (Souza et al., 2013; Oliveira et al., 2014; Souza et al., 2014a), as LMIs utilizadas no controle chaveado para encontrar os ganhos são menos conservadoras do que as clássicas.

cas que utilizam apenas um ganho de realimentação do vetor de estado (Boyd et al., 1994).

O trabalho ainda apresenta uma aplicação em bancada, do controle de um sistema *2D ball balancer* (Quanser, 2008), considerando falha na leitura do ângulo  $\theta(t)$ , e conseqüentemente na estimação de  $\dot{\theta}(t)$ , para demonstrar a eficácia do método. Utilizou-se o *software* MatLab/Simulink® para a aplicação da lei de controle durante a implementação prática e a linguagem do YALMIP, com o solver SeDuMi, para resolver as LMIs.

Por conveniência, serão estabelecidas algumas notações que serão utilizadas no trabalho:

$$\mathbb{K}_r = \{1, 2, \dots, r\}, \quad r \in \mathbb{N}, \quad x(t) = x, \quad V(x) = V,$$

$$i, j \in \mathbb{K}_s, \quad k, l \in \mathbb{K}_r, \quad p \in \mathbb{K}_n,$$

$$\begin{aligned} \rho_k &\geq 0, \quad \sum_{k=1}^r \rho_k = 1 \text{ e } \rho^T = [\rho_1 \quad \rho_2 \dots \rho_r], \\ \lambda_l &\geq 0, \quad \sum_{l=1}^r \lambda_l = 1 \text{ e } \lambda^T = [\lambda_1 \quad \lambda_2 \dots \lambda_r], \\ \alpha_i &\geq 0, \quad \sum_{i=1}^s \alpha_i = 1 \text{ e } \alpha^T = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \dots \alpha_s], \\ \alpha_1 &= \rho_1 \lambda_1, \quad \alpha_2 = \rho_1 \lambda_2, \quad \dots, \quad \alpha_r = \rho_1 \lambda_r, \\ \alpha_{r+1} &= \rho_2 \lambda_1, \quad \alpha_{r+2} = \rho_2 \lambda_2, \quad \dots, \quad \alpha_{2r} = \rho_2 \lambda_r, \\ \alpha_{r(r-1)+1} &= \rho_r \lambda_1, \quad \dots, \quad \alpha_s = \rho_r \lambda_r, \\ \Gamma_z &= \sum_{k=1}^r \rho_k \Gamma_k \\ &= \sum_{k=1}^r \rho_k \text{diag} [\gamma_1(a_1) \quad \gamma_2(a_2) \dots \gamma_n(a_n)], \\ \Gamma_z^{-1} &= \sum_{l=1}^r \lambda_l \Gamma_l^{-1} \\ &= \sum_{l=1}^r \lambda_l \text{diag} [\gamma_1(b_1)^{-1} \quad \gamma_2(b_2)^{-1} \dots \gamma_n(b_n)^{-1}], \\ (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n) &= \text{dec2bin}(k-1), \quad a_p \in \{0, 1\}, \\ (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n) &= \text{dec2bin}(l-1), \quad b_p \in \{0, 1\}, \\ 0 &< \gamma_p(0) \leq \gamma_p \leq \gamma_p(1), \\ \gamma_p(0) &\leq 1 \text{ e } \gamma_p(1) \geq 1, \\ A_z &= \sum_{i=1}^s \alpha_i A_i = \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r \rho_k \lambda_l \Gamma_k \mathbb{A} \Gamma_l^{-1}, \\ B_z &= \sum_{i=1}^s \alpha_i B_i = \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r \rho_k \lambda_l \Gamma_k \mathbb{B}, \end{aligned} \quad (1)$$

sendo  $r = 2^n$ ,  $s = 2^{2n}$  e  $n$  é a dimensão do vetor de estado  $x(t)$ . Os elementos  $\rho_k$  e  $\lambda_l$  são constantes e incertos. A função *dec2bin* representa a mudança da base decimal para binária. A Tabela 1 exemplifica o uso da função *dec2bin* para  $n = 2$ . Note que de (1), os valores máximos e mínimos dos parâmetros incertos  $\gamma_p$ ,  $p \in \mathbb{K}_n$ , formam a diagonal da matriz  $\Gamma_k$ ,  $k \in \mathbb{K}_r$ . Por sua vez a matriz  $\Gamma_k$  representa cada um dos vértices do politopo, formados através de todas as combinação possíveis dos valores máximos e mínimos de  $\gamma_p$ ,  $p \in \mathbb{K}_n$ .

Tabela 1: Exemplo da Função *dec2bin*.

$k$	$k-1$	<i>dec2bin</i> ( $k-1$ )	$a_1$	$a_2$	$\gamma_1(a_1)$	$\gamma_2(a_2)$
1	0	00	0	0	min	min
2	1	01	0	1	min	max
3	2	10	1	0	max	min
4	3	11	1	1	max	max

**Definição 1** Considere o conjunto  $\Omega_H(t)$  definido abaixo:

$$\begin{aligned} \Omega_H(t) &= \arg \min_{i \in \mathbb{K}_s} x_M^T(t) H_i x_M(t) \\ &= \{j \in \mathbb{K}_s : x_M^T(t) H_j x_M(t) = \min_{i \in \mathbb{K}_s} x_M^T(t) H_i x_M(t)\}, \end{aligned}$$

sendo  $H_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i \in \mathbb{K}_s$ , e  $x_M(t) \in \mathbb{R}^n$ . O menor índice  $j \in \Omega_H(t)$  será denotado por

$$\arg \min_{i \in \mathbb{K}_s}^* \{x_M(t)^T H_i x_M(t)\} = \min_{j \in \Omega_H(t)} j.$$

## 2 Definição do Problema

Considere o sistema linear e invariante no tempo descrito por:

$$\dot{x}(t) = \mathbb{A}x(t) + \mathbb{B}u(t) \quad (2)$$

sendo  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  o vetor de estado,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  a entrada de controle,  $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $\mathbb{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ .

Suponha que exista uma falha na medição das variáveis de estado  $x(t)$ , sendo que uma falha do sensor pode se manifestar na forma de dois efeitos, de modo mútuo ou independente (Ackermann, 1984):

- um efeito multiplicativo. O ganho do sensor pode ser reduzido, variando a partir do seu valor nominal até zero;
- um efeito aditivo. A saída do sensor pode conter um desequilíbrio ou ruído após a falha.

Nesse trabalho será considerada apenas a existência do efeito multiplicativo, com o ganho do sensor incerto, porém maior do que zero.

Dessa forma, o vetor de estado  $x(t)$  não está disponível para a realimentação. Então, o vetor de estado medido será denominado  $x_M(t)$ , sendo que  $x_M(t)$  possui incertezas politópicas representadas através da matriz  $\Gamma_z$ , definida em (1), tal que

$$x_M(t) = \Gamma_z x(t). \quad (3)$$

**Observação 1** No modelo de falha de sensores considerado, quando  $\gamma_p(0) = \gamma_p(1) = 1$ , para todo  $p \in \mathbb{K}_n$ , então  $x_M(t) = x(t)$  o que corresponde ao caso normal, sem possibilidade de falhas. Quando  $\gamma_p(0) < \gamma_p(1)$ , pode-se ter uma falha parcial no sensor que mede a variável de estado  $x_p(t)$ , também considerado como a degradação do sensor (Yang et al., 2000).

A lei de controle chaveada utilizada é dada por:

$$u(t) = -K_\sigma x_M(t), \quad (4)$$

sendo que o ganho  $K_\sigma$  será definido posteriormente. Então o sistema realimentado dado em (2)-(4) pode ser representado por:

$$\dot{x}(t) = \mathbb{A}x(t) - \mathbb{B}K_\sigma x_M(t). \quad (5)$$

Observe que o sistema dado em (5) representa  $\dot{x}(t)$  em função de  $x(t)$  e  $x_M(t)$ . Esse problema motivou a elaboração desse trabalho e uma solução é apresentada no Teorema 1.

**Teorema 1** *O sistema linear e invariante no tempo descrito em (2), com a lei de controle dada em (4), pode ser representado por:*

$$\dot{x}_M(t) = (A_z - B_z K_\sigma) x_M(t). \quad (6)$$

**Prova:** Considere o sistema dado em (2), a lei de controle dada em (4) e a matriz de incerteza  $\Gamma_z$ , tal que

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathbb{A}x(t) + \mathbb{B}u(t) \\ &= \mathbb{A}\Gamma_z^{-1}\Gamma_z x(t) - \mathbb{B}K_\sigma x_M(t) \\ &= (\mathbb{A}\Gamma_z^{-1} - \mathbb{B}K_\sigma) x_M(t), \end{aligned} \quad (7)$$

pois  $x_M(t) = \Gamma_z x(t)$

Multiplicando (7) por  $\Gamma_z$  à esquerda, temos

$$\Gamma_z \dot{x}(t) = (\Gamma_z \mathbb{A}\Gamma_z^{-1} - \Gamma_z \mathbb{B}K_\sigma) x_M(t), \quad (8)$$

então a partir de (1), para  $x_M(t) = \Gamma_z x(t)$  e sendo  $\Gamma_z$  constante, o sistema (8) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \dot{x}_M(t) &= (\Gamma_z \mathbb{A}\Gamma_z^{-1} - \Gamma_z \mathbb{B}K_\sigma) x_M(t), \\ &= \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r \rho_k \lambda_l (\Gamma_k \mathbb{A}\Gamma_l^{-1} - \Gamma_k \mathbb{B}K_\sigma) x_M(t) \\ &= \sum_{i=1}^s \alpha_i (A_i - B_i K_\sigma) x_M(t) \\ &= (A_z - B_z K_\sigma) x_M(t) \end{aligned} \quad (9)$$

então a prova está concluída.

### 3 Controle Chaveado

Nesta seção, baseado em (Souza et al., 2014a), é proposto o projeto de um controlador chaveado para o sistema linear e invariante no tempo com incertezas no vetor de estado medido  $x_M(t)$ . A função de Lyapunov do tipo quadrática é dada por

$$V(x_M(t)) = x_M^T P x_M. \quad (10)$$

A ideia básica da lei de controle chaveada é a minimização da derivada temporal da função de Lyapunov, por meio da seleção do ganho do controlador, que pertence ao conjunto de ganhos

$K_j$ ,  $j \in \mathbb{K}_s$ . Essa lei de chaveamento utiliza matrizes simétricas auxiliares  $\bar{Q}_j$ ,  $j \in \mathbb{K}_s$  e escolhe um índice  $\sigma$ . Portanto, considerando os índices  $\sigma$  obtidos utilizando a Definição 1, define-se o controlador chaveado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u(t) &= -K_\sigma x_M(t), \\ \sigma &= \arg \min_{j \in \mathbb{K}_s}^* \{x_M^T(t) \bar{Q}_j x_M(t)\}. \end{aligned} \quad (11)$$

**Teorema 2** *Suponha a existência de uma matriz simétrica positiva definida  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , matrizes simétricas  $Z_i, Q_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , matrizes  $M_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e um escalar  $\beta \geq 0$ , para todo  $i, j \in \mathbb{K}_s$ , tais que:*

$$-B_i M_j - M_j^T B_i^T - Z_i - Q_j \prec 0, \quad (12)$$

$$X A_i^T + A_i X + Z_i + Q_i + 2\beta X \prec 0. \quad (13)$$

Então a lei de controle chaveada (11) torna o ponto de equilíbrio  $x_M = 0$  do sistema (6) (e  $x = 0$  de (5)) globalmente assintoticamente estável com uma taxa de decaimento maior ou igual  $\beta$ , sendo  $P = X^{-1}$ ,  $\bar{Q}_j = X^{-1} Q_j X^{-1}$  e os ganhos do controlador dados por  $K_j = M_j X^{-1}$ .

**Prova:** Como em (Boyd et al., 1994), pode-se usar uma função de Lyapunov quadrática (10) para estabelecer um limite inferior para a taxa de decaimento do sistema (6). A condição  $\dot{V}(x_M(t)) \leq -2\beta V(x_M(t))$ , para todas as trajetórias  $x_M(t)$ , é equivalente à especificação de uma taxa de decaimento maior ou igual a  $\beta$ . Dessa forma tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_M(t)) + 2\beta V(x_M(t)) &= \\ &= x_M^T (A_z^T P + P A_z + 2\beta P \\ &\quad - K_\sigma^T B_z^T P - P B_z K_\sigma) x_M. \end{aligned} \quad (14)$$

Agora, considere que existam matrizes simétricas  $\bar{Z}_i, \bar{Q}_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tais que:

$$-(P B_i K_j + K_j^T B_i^T P) \prec \bar{Z}_i + \bar{Q}_j, \quad \forall i, j \in \mathbb{K}_s. \quad (15)$$

Então, de (15) tem-se:

$$\begin{aligned} &-x_M^T (P B_z K_\sigma + K_\sigma^T B_z^T P) x_M \\ &= -\sum_{i=1}^s \alpha_i x_M^T (P B_i K_\sigma + K_\sigma^T B_i^T P) x_M \\ &\leq \sum_{i=1}^s \alpha_i x_M^T \bar{Z}_i x_M + x_M^T \bar{Q}_\sigma x_M. \end{aligned} \quad (16)$$

A partir de (1) e (11), observe que  $x_M^T \bar{Q}_\sigma x_M = \min_{j \in \mathbb{K}_s} (x_M^T \bar{Q}_j x_M) \leq \sum_{i=1}^s \alpha_i x_M^T \bar{Q}_i x_M$ .

Então, de (16) tem-se:

$$\begin{aligned} &-x_M^T (P B_z K_\sigma + K_\sigma^T B_z^T P) x_M \\ &\leq \sum_{i=1}^s \alpha_i x_M^T (\bar{Z}_i + \bar{Q}_i) x_M. \end{aligned} \quad (17)$$

Lembrando que  $\alpha_i \geq 0$  e  $\sum_{i=1}^s \alpha_i = 1$ , de (14) e (17), para  $x_M \neq 0$ , tem-se que:

$$\dot{V}(x_M(t)) + 2\beta V(x_M(t)) < 0 \quad (18)$$

se

$$A_i^T P + P A_i + \bar{Z}_i + \bar{Q}_i + 2\beta P < 0. \quad (19)$$

Agora, defina  $X = P^{-1}$ ,  $Z_i = X \bar{Z}_i X$ ,  $Q_i = X \bar{Q}_i X$  e  $M_j = K_j X$ . Pré- e pós-multiplicando (15) e (19) por  $X$ , as LMIs (12) (13) são obtidas, respectivamente.

#### 4 O Sistema 2D ball balancer Quanser®

Considere o sistema 2D ball balancer, fabricado pela Quanser®, mostrado na Figura 1. Seu modelo esquemático referente à direção  $x$  da placa é mostrado na Figura 2, e a direção  $y$  pode ser representado da mesma forma (Quanser, 2008).



Figura 1: Equipamento 2D ball balancer, pertencente ao DEE-FEIS-LPC (Souza et al., 2014b)

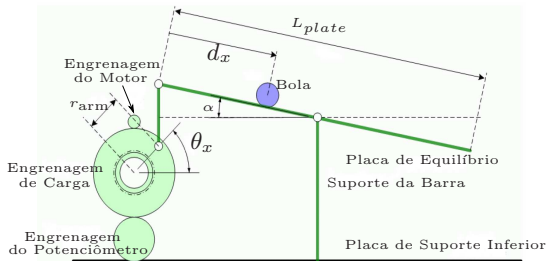


Figura 2: Planta esquemática do 2D ball balancer na direção  $x$  (Quanser, 2008).

O sistema consiste de uma placa quadrada sobre a qual uma bola é colocada e se move livremente. A bola pode ser posicionada em um ponto de referência fixo ou pode rastrear uma rota determinada. Uma câmera superior é utilizada para medir a posição da bola. Existem dois servomotores, cada um deles está ligado a um dos eixos da placa. Ao controlar a posição das engrenagens

de carga do servomotor, o ângulo de inclinação da placa pode ser ajustado para equilibrar a bola em uma posição plana desejada.

O modelo matemático linearizado do sistema 2D ball balancer (Quanser, 2008) é dado por:

$$\ddot{d}(t) = K_{bb}\theta(t), \quad \tau\ddot{\theta}(t) + \dot{\theta}(t) = K V_m(t), \quad (20)$$

sendo:

$d(t)$  a posição da bola;

$\theta(t)$  o ângulo de carga;

$V_m(t) = u(t)$  o sinal de controle;

$\tau$  e  $K$  são parâmetros do fabricante;

$$\text{e } K_{bb} = \frac{2m_b g r_{arm} r_b^2}{L_{plate}(m_b r_b^2 + J_b)}.$$

A descrição e os valores das constantes são dados na Tabela 2.

Tabela 2: Parâmetros do sistema 2D ball balancer.

Parâmetros	Símbolo	Valor
Massa da bola (kg)	$m_b$	0,003
Distância do eixo do motor ao ponto de fixação da barra (cm)	$r_{arm}$	2,54
Raio da bola (cm)	$r_b$	1,96
Comprimento da mesa (cm)	$L_{plate}$	27,5
Parâmetro do fabricante (rad/sV)	$K$	1,76
Parâmetro do fabricante (s)	$\tau$	0,00285
Momento de inércia de uma esfera sólida ( $\text{kgm}^2$ )	$J_b$	0,0046
Parâmetro do sistema ( $\text{m/s}^2\text{rad}$ )	$K_{bb}$	1,3

O sistema (20) pode ser representado de forma similar ao sistema (2), sendo que:

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{K}{\tau} \end{bmatrix}, \quad x(t) = \begin{bmatrix} d(t) \\ \dot{d}(t) \\ \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Durante a implementação prática apenas as variáveis de estado  $d_M$  e  $\theta_M$  estão disponíveis, e  $\dot{d}_M$  e  $\dot{\theta}_M$  são estimadas por meio de filtros derivativos  $G_f(s) = 20s/(s+20)$ , como sugerido pela fabricante (Quanser, 2008). Dessa forma, foi considerada uma falha de até  $-50\%$  na leitura do ângulo medido, acarretando uma falha simultânea na derivada do ângulo. Já a leitura da posição da bola não possui nenhuma erro de leitura.

A partir dessas considerações, de (1) e (3), as matrizes  $\Gamma_k$  e  $\Gamma_l^{-1}$  são dadas por:

$$\begin{aligned} \Gamma_k &= \text{diag}[1 \quad 1 \quad \gamma_3(a_3) \quad \gamma_3(a_3)] \\ \Gamma_l^{-1} &= \text{diag}[1 \quad 1 \quad \gamma_3(b_3)^{-1} \quad \gamma_3(b_3)^{-1}] \\ &0, 5 \leq \gamma_3 \leq 1 \end{aligned}$$

Utilizando o Teorema 1, o sistema linear e invariante no tempo descrito em (2) e (21) pode ser representado por (6) e (1), sendo que

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{K_{bb}}{\gamma_3(b_3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{K\gamma_3(a_3)}{\tau} \end{bmatrix}. \quad (22)$$



Nesse caso em particular, observe que as matrizes  $\Gamma_k$ ,  $\Gamma_l^{-1}$ ,  $A_i$  e  $B_i$  dependem somente dos valores máximos e mínimos de  $\gamma_3$ . Dessa forma, a partir de (1) e para  $k, l \in \{1, 2\}$  e  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  a combinação dos valores máximo e mínimo de  $\gamma_3$  é apresentada na Tabela 3.

Tabela 3: Valores de  $\gamma_3(a_3)$  e  $\gamma_3(b_3)^{-1}$ .

$\rho_k$	$a_3$	$\lambda_l$	$b_3$	$i$	$\alpha_i$	$\gamma_3(a_3)$	$\gamma_3(b_3)^{-1}$
$\rho_1$	0	$\lambda_1$	0	1	$\alpha_1$	min	min
$\rho_1$	0	$\lambda_2$	1	2	$\alpha_2$	min	max
$\rho_2$	1	$\lambda_l$	0	3	$\alpha_3$	max	min
$\rho_2$	1	$\lambda_2$	1	4	$\alpha_4$	max	max

Portanto, no projeto de controle foram utilizados os seguintes vértices do politopo, para ambos os eixos:

$$\begin{aligned}
 [A_1|A_2] &= \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{bb} & 0 & 0 & 0 & 2K_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{array} \right], \\
 [A_3|A_4] &= \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{bb} & 0 & 0 & 0 & 2K_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{array} \right], \\
 B_1 = B_2 &= \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & \frac{0,5K}{\tau} \end{array} \right]^T, \\
 B_3 = B_4 &= \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & \frac{K}{\tau} \end{array} \right]^T.
 \end{aligned} \tag{23}$$

Utilizando as LMIs do Teorema 2 e considerando os vértices do politopo (23) para  $\beta = 1, 4$  foram obtidos os seguintes ganhos, a seguinte matriz simétrica positiva definida e as seguintes matrizes simétricas:

$$\begin{aligned}
 K_1 &= [214,7664 \quad 170,2068 \quad 73,5017 \quad 4,4394], \\
 K_2 &= [161,6260 \quad 128,5165 \quad 55,9968 \quad 3,2109], \\
 K_3 &= [120,4055 \quad 95,3642 \quad 41,1394 \quad 2,3784], \\
 K_4 &= [53,5823 \quad 42,8023 \quad 18,9139 \quad 0,8285], \\
 P &= 10^4 \begin{bmatrix} 3,7000 & 2,8705 & 1,2064 & 0,0840 \\ 2,8705 & 2,2576 & 0,9543 & 0,0667 \\ 1,2064 & 0,9543 & 0,4095 & 0,0288 \\ 0,0840 & 0,0667 & 0,0288 & 0,0021 \end{bmatrix}, \\
 \bar{Q}_1 &= 10^7 \begin{bmatrix} -1,3125 & -1,0434 & -0,4536 & -0,0295 \\ -1,0434 & -0,8295 & -0,3605 & -0,0235 \\ -0,4536 & -0,3605 & -0,1567 & -0,0102 \\ -0,0295 & -0,0235 & -0,0102 & -0,0006 \end{bmatrix}, \\
 \bar{Q}_2 &= 10^7 \begin{bmatrix} -1,0215 & -0,8136 & -0,3570 & -0,0223 \\ -0,8136 & -0,6480 & -0,2843 & -0,0178 \\ -0,3570 & -0,2843 & -0,1246 & -0,0078 \\ -0,0223 & -0,0178 & -0,0078 & -0,0005 \end{bmatrix}, \\
 \bar{Q}_3 &= 10^6 \begin{bmatrix} -5,2632 & -4,1962 & -1,8373 & -0,1104 \\ -4,1962 & -3,3451 & -1,4643 & -0,0880 \\ -1,8373 & -1,4643 & -0,6406 & -0,0386 \\ -0,1104 & -0,0880 & -0,0386 & -0,0022 \end{bmatrix}, \\
 \bar{Q}_4 &= 10^6 \begin{bmatrix} -1,9186 & -1,5535 & -0,7231 & -0,0292 \\ -1,5535 & -1,2571 & -0,5840 & -0,0239 \\ -0,7231 & -0,5840 & -0,2694 & -0,0115 \\ -0,0292 & -0,0239 & -0,0115 & -0,0002 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{Q}_1 &= 10^7 \begin{bmatrix} -1,3125 & -1,0434 & -0,4536 & -0,0295 \\ -1,0434 & -0,8295 & -0,3605 & -0,0235 \\ -0,4536 & -0,3605 & -0,1567 & -0,0102 \\ -0,0295 & -0,0235 & -0,0102 & -0,0006 \end{bmatrix}, \\
 \bar{Q}_2 &= 10^7 \begin{bmatrix} -1,0215 & -0,8136 & -0,3570 & -0,0223 \\ -0,8136 & -0,6480 & -0,2843 & -0,0178 \\ -0,3570 & -0,2843 & -0,1246 & -0,0078 \\ -0,0223 & -0,0178 & -0,0078 & -0,0005 \end{bmatrix}, \\
 \bar{Q}_3 &= 10^6 \begin{bmatrix} -5,2632 & -4,1962 & -1,8373 & -0,1104 \\ -4,1962 & -3,3451 & -1,4643 & -0,0880 \\ -1,8373 & -1,4643 & -0,6406 & -0,0386 \\ -0,1104 & -0,0880 & -0,0386 & -0,0022 \end{bmatrix}, \\
 \bar{Q}_4 &= 10^6 \begin{bmatrix} -1,9186 & -1,5535 & -0,7231 & -0,0292 \\ -1,5535 & -1,2571 & -0,5840 & -0,0239 \\ -0,7231 & -0,5840 & -0,2694 & -0,0115 \\ -0,0292 & -0,0239 & -0,0115 & -0,0002 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{25}$$

Os resultados numéricos obtidos, foram utilizados para realizar a implementação prática que serão apresentadas a seguir.

#### 4.1 Resultados Práticos

O objetivo da implementação é fazer com que a bola siga a referência de um quadrado de 10 cm de lado. Após 40 segundos do início da simulação foi inserida uma falha de  $-50\%$  na leitura dos ângulos dos servomotores das direções  $x$  e  $y$  da placa. A entrada de controle  $u(t)$  é limitada em  $\pm 5V$  através de um saturador, inserido via *Simulink*<sup>®</sup>, para não danificar o atuador. As respostas obtidas são apresentadas nas Figuras 3 e 4, utilizando o controlador chaveado dado em (11), com os ganhos dados em (24).

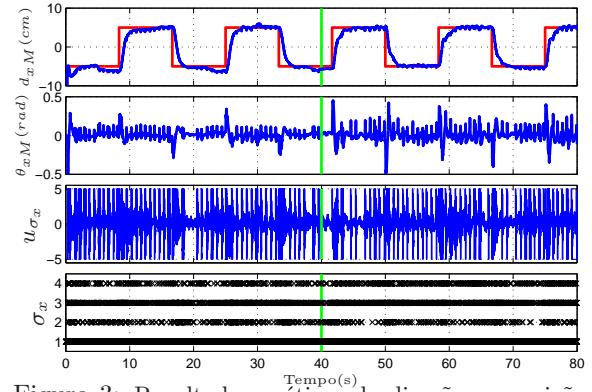


Figura 3: Resultados práticos da direção  $x$ : posição  $d_{xM} = d_x$ , ângulo  $\theta_{xM} = \gamma_3\theta_x$ , sinal de controle  $u_{\sigma_x}$  e a regra de chaveamento  $\sigma_x$  do 2D ball balancer utilizando o controlador chaveado (11), (24) e (25).

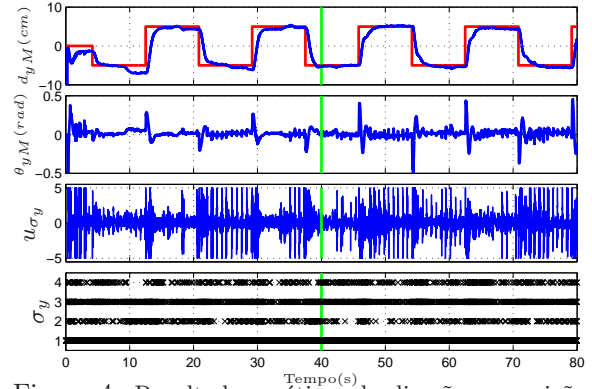


Figura 4: Resultados práticos da direção  $y$ : posição  $d_{yM} = d_y$ , ângulo  $\theta_{yM} = \gamma_3\theta_y$ , sinal de controle  $u_{\sigma_y}$  e a regra de chaveamento  $\sigma_y$  do 2D ball balancer utilizando o controlador chaveado (11), (24) e (25).

Nas Figuras 3 e 4, pode-se notar que utilizando o controlador chaveado (11), o sistema seguiu a posição desejada  $x = \pm 5$  cm,  $y = \pm 5$  cm e manteve os ângulos das direções  $x$  e  $y$  próximo de zero. Observa-se também que houve alternância entre os quatro controladores ativos para cada instante de tempo.

Por fim, a trajetória da bola representada na Figura 5 confirma a eficiência da metodologia proposta.

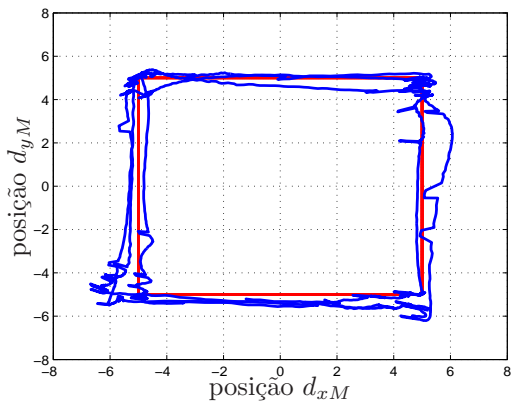


Figura 5: Resultados práticos da posição  $x \times y$  do  $2D$  ball balancer utilizando o controlador chaveado (11), (24) e (25).

## 5 Conclusões

Nesse trabalho foi considerado que o vetor de estado disponível para a realimentação possui incertezas politópicas. Na busca de resolver esse problema recorrente em implementações práticas, um teorema que permite representar esse sistema em espaço de estados descrevendo a dinâmica de  $x_M(t)$  foi proposto. O projeto de controle chaveado, utilizando essa nova representação, foi utilizado para garantir estabilidade ao sistema. Os resultados da implementação prática em um sistema  $2D$  ball balancer confirmaram a eficiência do método.

## Agradecimentos

Os autores agradecem a CAPES, ao CNPq e a FAPESP (2011/17610-0) pelo apoio financeiro.

## Referências

- Ackermann, J. (1984). Robustness against sensor failures, *Automatica* **20**(2): 211 – 215.
- Boyd, S., Ghaoui, L. E., Feron, E. and Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, Vol. 15 of *Studies in Applied Mathematics*, SIAM - Soc. Ind. Appl. Math., Philadelphia, PA.
- Dong, J. and Yang, G.-H. (2015). Reliable state feedback control of T-S fuzzy systems with sensor faults, *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on* **23**(2): 421–433.
- Liu, M., Cao, X. and Shi, P. (2013). Fuzzy-model-based fault-tolerant design for nonlinear stochastic systems against simultaneous sensor and actuator faults, *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on* **21**(5): 789–799.
- Minqing, X. (2009). Reliable robust guaranteed cost control of delta operator linear uncertain systems with sensor failure, *Intelligent Computation Technology and Automation, 2009. ICICTA '09. Second International Conference on*, Vol. 1, pp. 834–837.
- Oliveira, D. R., Teixeira, M. C. M., Assunção, E., Souza, W. A., Moreira, M. R. and Silva, J. H. P. (2014). Projeto de controle robusto  $\mathcal{H}_\infty$  chaveado: Implementação prática em um sistema de suspensão ativa, *XX Congresso Brasileiro de Automática - CBA*, Belo Horizonte, MG.
- Quanser (2008). *2D Ball Balancer Control using QUARC: Instructor Manual*, Quanser Inc., Canadá.
- Souza, W. A., Oliveira, D. R., Teixeira, M. C. M., Silva, L. S. C., Cardim, R. and Assunção, E. (2014b). Projeto e implementação de um controlador robusto chaveado utilizando modelos fuzzy Takagi-Sugeno, *XX Congresso Brasileiro de Automática - CBA*, Belo Horizonte, MG.
- Souza, W. A., Teixeira, M. C. M., Santim, M. P. A., Cardim, R. and Assunção, E. (2013). On switched control design of linear time-invariant systems with polytopic uncertainties, *Mathematical Problems in Engineering* **2013**: 10.
- Souza, W., Teixeira, M. C. M., Cardim, R. and Assunção, E. (2014a). On switched regulator design of uncertain nonlinear systems using Takagi-Sugeno fuzzy models, *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on* **22**(6): 1720–1727.
- Veillette, R., Medanic, J. and Perkins, W. R. (1992). Design of reliable control systems, *Automatic Control, IEEE Transactions on* **37**(3): 290–304.
- Wang, Z., Jin, X. and Wang, Z. (2011). Adaptive controller design for linear time-invariant systems with sensor failures, *Control and Decision Conference (CCDC), 2011 Chinese*, pp. 2459–2462.
- Yang, G.-H., Wang, J. L. and Soh, Y. C. (2001). Reliable  $\mathcal{H}_\infty$  controller design for linear systems, *Automatica* **37**(5): 717 – 725.
- Yang, G., Wang, J. and Soh, Y. (2000). Reliable LQG control with sensor failures, *Control Theory and Applications, IEE Proceedings -* **147**(4): 433–439.
- Zhang, Y. and Jiang, J. (2008). Bibliographical review on reconfigurable fault-tolerant control systems, *Annual Reviews in Control* **32**(2): 229 – 252.

## PROJETO DE CONTROLE ROBUSTO PARA SISTEMAS COM SENSORES QUE APRESENTAM FALHAS VARIANTES NO TEMPO

ARIEL STARKE BUZZETTI\*, MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA\*, DIOGO RAMALHO DE OLIVEIRA\*, ADALBERTO ZANATTA NEDER LAZARINI\*, EDVALDO ASSUNÇÃO\*, RODRIGO CARDIM\*

\*UNESP - Univ Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira  
Departamento de Engenharia Elétrica, Lab. de Pesquisa em Controle  
Av. José Carlos Rossi, 1370, 15385-000, Ilha Solteira, São Paulo, Brasil

Emails: arielsb@hotmail.com, marcelo@dee.feis.unesp.br, diogo\_oliveira6@hotmail.com, adalberto.lazarini@yahoo.com, edvaldo@dee.feis.unesp.br, rcardim@dee.feis.unesp.br

**Abstract**— This paper presents a method to ensure the stability for a linear system with sensor failure. It is considered that the sensor failure varies with time and it is mathematically represented by polytopic uncertainties in the measured state vector, called  $x_M(t)$ . Based on a quadratic Lyapunov function, the design conditions are presented through linear matrix inequalities. The sensor measurement failure is a recurring problem in real applications, for this reason a practical implementation was performed in a 2D ball balancer system to prove the efficacy of the proposed method.

**Keywords**— Sensor Fault; Reliable Control; Robust Control; Linear Matrix Inequalities (LMIs).

**Resumo**— Este trabalho apresenta um método para garantir a estabilidade de um sistema linear com falha no sensor. Considera-se que a falha no sensor varia com o tempo e ela é matematicamente representada por incertezas politópicas no vetor de estado medido, chamado  $x_M(t)$ . Baseadas em uma função quadrática de Lyapunov, as condições de projeto são apresentadas através de desigualdades matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* -LMIs). A falha de medição no sensor é um problema recorrente em aplicações reais, por esse motivo foi realizada uma implementação prática em um sistema *2D ball balancer* para comprovar a eficácia do método proposto.

**Palavras-chave**— Falha do Sensor; Controle Confiável; Controle Robusto; Desigualdades Matriciais Lineares(LMIs).

### 1 Introdução

Controle tolerante a falhas é uma área importante de pesquisa relacionada ao projeto de controle com realimentação, pois tem o propósito de garantir segurança e confiabilidade ao sistema realimentado, apesar da ocorrência de falhas. Um sistema de controle consiste em sensores, compensadores e atuadores, além de um objeto controlado. Em geral, os sensores são propensos a apresentar falhas mais frequentemente do que atuadores ou compensadores (Yang and Ye, 2008). As características dos sensores podem mudar ao longo do tempo de modo que possa haver uma falha parcial ou total (Liu et al., 2013), o que pode degradar o desempenho ou até mesmo destruir a estabilidade dos sistemas controlados.

Portanto, é necessário considerar as possíveis falhas nos sensores e/ou atuadores para aumentar a confiabilidade do sistema. Um sistema de controle projetado para tolerar falhas de atuadores ou sensores, dentro de um subconjunto pré-especificado de todos os atuadores ou sensores, mantendo as propriedades do sistema de controle desejadas, será chamado de sistema de controle confiável (Veillette et al., 1992; Mingqing, 2009).

Em diversos trabalhos foram desenvolvidas técnicas de controle confiável, modelando as incertezas dos sensores como funções incertas parametrizáveis (Yang et al., 2000; Yang et al., 2001; Mingqing, 2009; Wang et al., 2011; Dong and Yang, 2015), ou como uma entrada exógena, mini-

mizada por norma  $\mathcal{H}_\infty$  (Yang and Ye, 2008; Bouattour et al., 2009). Há também métodos que garantem a confiabilidade do sistema utilizando um sensor auxiliar para verificar se há falha no sensor principal e compensando essa falha utilizando técnicas fuzzy (Oudghiri et al., 2007; Qiu et al., 2010).

Em (Buzzetti et al., 2015) foi proposta uma representação em espaço de estados do sistema linear, que descreve a dinâmica do vetor de estado medido, denominado  $x_M(t)$ . Considerou-se que os sensores apresentam erros de medição incertos, mas invariantes no tempo.

Ao contrário de (Buzzetti et al., 2015), esse trabalho apresenta condições que garantem a estabilidade do sistema linear com sensores que apresentam falhas variantes no tempo. As condições de estabilidade são encontradas em função de  $x_M(t)$  e da derivada do vetor de estado ( $\dot{x}(t)$ ), sendo necessário conhecer somente os valores máximos e mínimos da variação do erro de medição. As condições de projeto são descritas através de desigualdades matriciais lineares (LMIs).

O trabalho ainda apresenta uma aplicação em bancada, do controle de um sistema *2D ball balancer* (Quanser, 2008), considerando falha na leitura do ângulo  $\theta(t)$ , e consequentemente na estimação de  $\dot{\theta}(t)$ , para demonstrar a eficácia do método. Utilizou-se o *software* MatLab/Simulink® para a aplicação da lei de controle durante a implementação prática e a linguagem do YALMIP, com o solver LMILab, para resolver as LMIs.

Ao longo desse trabalho foram utilizadas as seguintes notações:  $(\cdot)^T$  indica a transposição de um vetor ou matriz. O símbolo  $(*)$  denota genericamente cada bloco simétrico de uma LMI. O conjunto  $\mathbb{K}_r$  é composto pelos  $r$  primeiros números inteiros positivos,  $\{1, 2, \dots, r\}$ . Para facilitar a leitura deste artigo, considere que os elementos incertos e variantes no tempo  $\rho(t)$  e  $\alpha(t)$  são representados por  $\rho$  e  $\alpha$ , e pertencem aos conjuntos

$$\Lambda_\rho = \left\{ \rho \in \mathbb{R}^r : \rho_j \geq 0, \sum_{j=1}^r \rho_j = 1 \right\}, \quad (1)$$

$$\Lambda_\alpha = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^r : \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^r \alpha_i = 1 \right\}, \quad (2)$$

respectivamente, para  $i, j \in \mathbb{K}_r$ .

## 2 Definição do Problema

Considere o sistema linear descrito por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3)$$

sendo  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  o vetor de estado,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  a entrada de controle,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ .

Suponha a possibilidade de existir uma falha na medição das variáveis de estado  $x(t)$ . Esta falha no sensor pode se manifestar como um efeito multiplicativo ou aditivo, que podem ocorrer simultaneamente ou não (Ackermann, 1984).

Esse trabalho aborda apenas o caso em que a falha do sensor se manifesta através do efeito multiplicativo, ou seja, o sinal de cada sensor possui um ganho  $\gamma(t)$ , que por simplicidade é representado por  $\gamma$ , sendo que  $\gamma \in \mathbb{R}^n$ . Esse ganho  $\gamma$  é variante no tempo e pertence ao conjunto

$$\Delta_1 = \{ \gamma \in \mathbb{R}^n : 0 < \gamma_p(0) \leq \gamma_p \leq 1 \leq \gamma_p(1) \}, \quad (4)$$

para  $p \in \mathbb{K}_n$ , sendo que  $\gamma_p(0)$  e  $\gamma_p(1)$  representam, respectivamente, os valores mínimos e máximos dos ganhos dos sensores.

Note que, o vetor de estado  $x(t)$  não está disponível para a realimentação. No entanto, tem-se acesso ao vetor de estado medido, denominado  $x_M(t)$ , sendo que  $x_{p_M}(t) = \gamma_p x_p(t)$ ,  $p \in \mathbb{K}_n$ .

Dessa forma, a partir de (1), considere uma matriz diagonal que relaciona o vetor de estado  $x(t)$  com o vetor de estado medido  $x_M(t)$ , dada por:

$$\Gamma_z = \sum_{j=1}^r \rho_j \Gamma_j = \sum_{j=1}^r \rho_j \text{diag} [\gamma_1(a_1) \dots \gamma_n(a_n)], \quad (5)$$

sendo  $r = 2^n$ ,  $(a_1, \dots, a_n) = \text{dec2bin}(j-1)$ ,  $j \in \mathbb{K}_r$ ,  $a_p \in \{0, 1\}$  e  $p \in \mathbb{K}_n$ , tal que

$$x_M(t) = \Gamma_z x(t). \quad (6)$$

A função  $\text{dec2bin}$  representa a mudança da base decimal para binária. A Tabela 1 exemplifica o uso da função  $\text{dec2bin}$  para  $n = 2$ . Note

que de (4), os valores máximos e mínimos dos parâmetros incertos  $\gamma_p$ ,  $p \in \mathbb{K}_n$ , formam a diagonal da matriz  $\Gamma_j$ ,  $j \in \mathbb{K}_r$ . Por sua vez a matriz  $\Gamma_j$  representa cada um dos vértices do politopo, formados através de todas as combinação possíveis dos valores máximos e mínimos de  $\gamma_p$ ,  $p \in \mathbb{K}_n$ .

Tabela 1: Exemplo da Função  $\text{dec2bin}$ :  $(a_1, a_2) = \text{dec2bin}(j-1)$ .

$j$	$j-1$	$\text{dec2bin}(j-1)$	$a_1$	$a_2$	$\gamma_1(a_1)$	$\gamma_2(a_2)$
1	0	00	0	0	min	min
2	1	01	0	1	min	max
3	2	10	1	0	max	min
4	3	11	1	1	max	max

Para o restante do desenvolvimento do trabalho, é necessário fazer uma última definição. A partir de (2), considere a seguinte matriz diagonal

$$\Gamma_z^{-1} = \sum_{i=1}^r \alpha_i \Gamma_i^{-1} = \sum_{i=1}^r \alpha_i \text{diag} [\gamma_1^{-1}(b_1) \dots \gamma_n^{-1}(b_n)], \quad (7)$$

sendo  $r = 2^n$ ,  $(b_1, \dots, b_n) = \text{dec2bin}(i-1)$ ,  $i \in \mathbb{K}_r$ ,  $b_p \in \{0, 1\}$  e  $p \in \mathbb{K}_n$ . A partir de (4), note que  $\gamma^{-1}$  pertence ao conjunto

$$\Delta_2 = \{ \gamma^{-1} \in \mathbb{R}^n : 0 < \gamma_p(1)^{-1} \leq \gamma_p^{-1} \leq 1 \leq \gamma_p(0)^{-1} \}.$$

**Observação 1** No modelo de falha de sensores considerado, quando  $\gamma_p(0) = \gamma_p(1) = 1$ , para todo  $p \in \mathbb{K}_n$ , então  $x_M(t) = x(t)$  o que corresponde ao caso normal, sem possibilidade de falhas. Quando  $\gamma_p(0) < \gamma_p(1)$ , pode-se ter uma falha parcial no sensor que mede a variável de estado  $x_p(t)$ , também considerado como a degradação do sensor (Yang et al., 2000).

### 2.1 Projeto de Controle

A lei de controle utilizada é dada por:

$$u(t) = -Kx_M(t). \quad (8)$$

Logo, o sistema (3) pode ser reescrito como

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BKx_M(t). \quad (9)$$

Observe que o sistema dado em (9) representa  $\dot{x}(t)$  em função de  $x(t)$  e  $x_M(t)$ .

O projeto de controle proposto tem o objetivo de assegurar a estabilidade do sistema controlado (9) e também garantir uma taxa de decaimento mínima. Então, considere a candidata a função de Lyapunov dada por

$$V(x(t)) = x(t)^T P x(t) > 0. \quad (10)$$

Dada uma constante real  $\beta > 0$ , pode-se impor uma restrição para uma taxa de decaimento maior ou igual a  $\beta$  se a condição

$$\dot{V}(x(t)) \leq -2\beta V(x(t)), \quad (11)$$

for satisfeita para toda a trajetória  $x(t)$  do sistema (Boyd et al., 1994). O principal resultado desse artigo é o Teorema 1 apresentado a seguir.

**Teorema 1** Defina as matrizes diagonais  $G_i = \Gamma_i^{-1}$ ,  $i \in \mathbb{K}_r$ , e considere um escalar  $\beta > 0$  dado. Suponha a existência de uma matriz simétrica definida positiva  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , de uma matriz  $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e de uma matriz  $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , tais que:

$$\begin{bmatrix} AG_i Y^T - BM + YG_i A^T - M^T B^T & * & * \\ G_i Y^T + AG_i Y^T - BM - X & -2X & * \\ G_i Y^T & 0 & \frac{-X}{2\beta} \end{bmatrix} \prec 0, \quad (12a)$$

$$Y + Y^T > 0. \quad (12b)$$

Então a lei de controle (8) torna o ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema (9) globalmente assintoticamente estável, com uma taxa de decaimento maior ou igual  $\beta$ , sendo  $P = X^{-1}$  e o ganho do controlador dado por  $K = MY^{-T}$ .

**Prova:** A partir de (2), lembrando que  $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$  e  $\alpha_i \geq 0$ ,  $i \in \mathbb{K}_r$ , defina  $G_i = \Gamma_i^{-1}$ . Multiplicando (12a) por  $\alpha_i$  e realizando o somatório de  $i = 1$  até  $i = r$ , tem-se que, lembrando-se da definição de  $\Gamma_z^{-1}$  em (7):

$$\begin{bmatrix} A\Gamma_z^{-1}Y^T - BM + Y\Gamma_z^{-1}A^T - M^T B^T & * & * \\ \Gamma_z^{-1}Y^T + A\Gamma_z^{-1}Y^T - BM - X & -2X & * \\ \Gamma_z^{-1}Y^T & 0 & \frac{-X}{2\beta} \end{bmatrix} \prec 0. \quad (13)$$

Aplicando o complemento de Schur em (13), com  $X = P^{-1}$ , obtém-se a seguinte desigualdade

$$\begin{bmatrix} A\Gamma_z^{-1}Y^T - BM + Y\Gamma_z^{-1}A^T - M^T B^T & * \\ \Gamma_z^{-1}Y^T + A\Gamma_z^{-1}Y^T - BM - X & -2X \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Y\Gamma_z^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} (-2\beta P) \begin{bmatrix} \Gamma_z^{-1}Y^T & 0 \end{bmatrix} \prec 0, \quad (14)$$

que pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} \psi_{11} & * \\ \psi_{21} & \psi_{22} \end{bmatrix} \prec 0, \quad (15)$$

sendo que

$$\begin{aligned} \psi_{11} &= 2\beta Y\Gamma_z^{-1}P\Gamma_z^{-1}Y^T + A\Gamma_z^{-1}Y^T - BM \\ &\quad + Y\Gamma_z^{-1}A^T - M^T B^T, \\ \psi_{21} &= \Gamma_z^{-1}Y^T + A\Gamma_z^{-1}Y^T - BM - X, \\ \psi_{22} &= -2X. \end{aligned} \quad (16)$$

Observe que, como de (12b)  $Y + Y^T > 0$ , então  $\det(Y) \neq 0$  e assim pode-se definir  $Z_1 = Y^{-1}$  e  $M = KZ_1^{-T}$ . Logo, tem-se que

$$\begin{bmatrix} \phi_{11} & * \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \prec 0, \quad (17)$$

sendo que

$$\begin{aligned} \phi_{11} &= 2\beta Z_1^{-1}\Gamma_z^{-1}P\Gamma_z^{-1}Z_1^{-T} + A\Gamma_z^{-1}Z_1^{-T} \\ &\quad - BKZ_1^{-T} + Z_1^{-1}\Gamma_z^{-1}A^T - Z_1^{-1}K^T B^T, \\ \phi_{21} &= \Gamma_z^{-1}Z_1^{-T} - A\Gamma_z^{-1}Z_1^{-T} - BKZ_1^{-T} - X, \\ \phi_{22} &= -2X. \end{aligned} \quad (18)$$

Como  $X$  é uma matriz simétrica definida positiva, então  $\det(X) \neq 0$ . Assim, pode-se definir  $Z_2 = X^{-1}$  e reescrever as desigualdades (17)-(18), tal que

$$\begin{bmatrix} \eta_{11} & * \\ \eta_{21} & \eta_{22} \end{bmatrix} \prec 0, \quad (19)$$

sendo que

$$\begin{aligned} \eta_{11} &= 2\beta Z_1^{-1}\Gamma_z^{-1}P\Gamma_z^{-1}Z_1^{-T} + A\Gamma_z^{-1}Z_1^{-T} \\ &\quad - BKZ_1^{-T} + Z_1^{-1}\Gamma_z^{-1}A^T - Z_1^{-1}K^T B^T, \\ \eta_{21} &= Z_2^{-1}P\Gamma_z^{-1}Z_1^{-T} - A\Gamma_z^{-1}Z_1^{-T} \\ &\quad - BKZ_1^{-T} - Z_2^{-1}, \\ \eta_{22} &= -Z_2^{-T} - Z_2^{-1}. \end{aligned} \quad (20)$$

Pré e pós-multiplicando (19) por  $\begin{bmatrix} Z_1 & 0 \\ 0 & Z_2 \end{bmatrix}$  e

$\begin{bmatrix} Z_1^T & 0 \\ 0 & Z_2^T \end{bmatrix}$ , respectivamente, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \omega_{11} & * \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{bmatrix} \prec 0, \quad (21)$$

sendo que

$$\begin{aligned} \omega_{11} &= 2\beta\Gamma_z^{-1}P\Gamma_z^{-1} + Z_1A\Gamma_z^{-1} - Z_1BK \\ &\quad + \Gamma_z^{-1}A^T Z_1^T - K^T B^T Z_1^T, \\ \omega_{21} &= P\Gamma_z^{-1} + Z_2A\Gamma_z^{-1} - Z_2BK - Z_1^T, \\ \omega_{22} &= -Z_2 - Z_2^T, \end{aligned} \quad (22)$$

Para  $x \neq 0$ , note que  $x_M = \Gamma_z x \neq 0$ , pois  $\det(\Gamma_z) \neq 0$ . Assim, observe que se  $x \neq 0$  então  $[x_M^T \ \dot{x}^T]^T \neq [0 \ 0]^T$  e portanto (21) é equivalente a

$$\begin{aligned} [x_M^T \ \dot{x}^T] &\left\{ \begin{bmatrix} 2\beta\Gamma_z^{-1}P\Gamma_z^{-1} & * \\ P\Gamma_z^{-1} & 0 \end{bmatrix} \right. \\ &\quad + \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} [(A\Gamma_z^{-1} - BK) \ -I] \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} (A\Gamma_z^{-1} - BK)^T \\ -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1^T & Z_2^T \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x_M \\ \dot{x} \end{bmatrix} \prec 0. \end{aligned} \quad (23)$$

A partir de (6), observe que o sistema (9) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A\Gamma_z^{-1}\Gamma_z x(t) - BKx_M(t) \\ \dot{x}(t) &= (A\Gamma_z^{-1} - BK)x_M(t) \\ 0 &= (A\Gamma_z^{-1} - BK)x_M(t) - \dot{x}(t). \end{aligned} \quad (24)$$

Como  $(A\Gamma_z^{-1} - BK)x_M - \dot{x} = 0$  e  $x_M^T(A\Gamma_z^{-1} - BK)^T - \dot{x}^T = 0$ , então (23) equivale a

$$\begin{aligned} 2\beta x_M^T \Gamma_z^{-1} P \Gamma_z^{-1} x_M + \dot{x}^T P \Gamma_z^{-1} x_M + x_M^T \Gamma_z^{-1} P \dot{x} \\ = 2\beta x^T P x + \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\ = \dot{V} + 2\beta x^T P x < 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Portanto,

$$\dot{V} = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} < -2\beta x^T P x, \quad (26)$$

e assim a demonstração está concluída.  $\square$

**Observação 2** Note que o Teorema 1 não utiliza a derivada do vetor de estado medido,  $x_M(t)$ . Isso representa uma vantagem, pois a partir de (1), (4), (5) e (6), observe que  $x_M(t)$  depende de parâmetros incertos variantes no tempo relacionados à  $\Gamma_z$ . Ou seja, o método proposto garante a estabilidade do sistema realimentado (9), com sensores que apresentam falhas variantes no tempo. Assim, as variações de tais falhas não interferem no projeto de controle.

### 3 O Sistema 2D ball balancer Quanser®

Considere o sistema 2D ball balancer, fabricado pela Quanser®, mostrado na Figura 1. Seu modelo esquemático referente à direção x da placa é mostrado na Figura 2, e a direção y pode ser representado da mesma forma (Quanser, 2008).

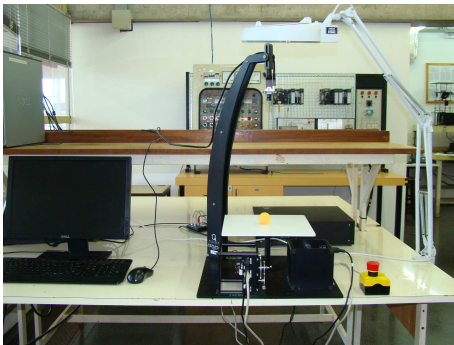


Figura 1: Equipamento 2D ball balancer.

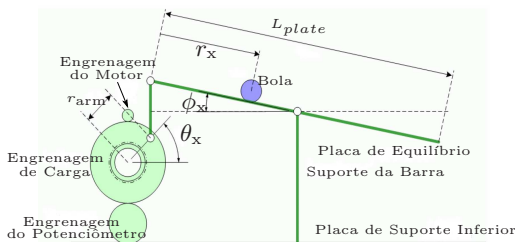


Figura 2: Planta esquemática do 2D ball balancer na direção x (Quanser, 2008).

O sistema consiste de uma placa quadrada sobre a qual uma bola é colocada e se move livremente. A bola pode ser posicionada em um ponto de referência fixo ou pode rastrear uma rota determinada. Uma câmera superior é utilizada para medir a posição da bola. Existem dois servomotores, sendo que cada um deles está ligado a um dos eixos da placa. Ao controlar a posição das

engrenagens de carga do servomotor, o ângulo de inclinação da placa pode ser ajustado para equilibrar a bola em uma posição plana desejada.

O modelo matemático linearizado do sistema 2D ball balancer (Quanser, 2008) é dado por:

$$\ddot{r}(t) = K_{bb}\theta(t), \quad \tau\ddot{\theta}(t) + \dot{\theta}(t) = K V_m(t), \quad (27)$$

sendo:

$r(t)$  a posição da bola, sendo  $r(t) = r_x$  para o eixo x e  $r(t) = r_y$  para o eixo y;

$\theta(t)$  o ângulo de carga, sendo  $\theta(t) = \theta_x$  para o eixo x e  $\theta(t) = \theta_y$  para o eixo y;

$V_m(t) = u(t)$  o sinal de controle;

$\tau$  e  $K$  são parâmetros do fabricante;

$$e K_{bb} = \frac{2m_b g r_{arm} r_b^2}{L_{plate}(m_b r_b^2 + J_b)}.$$

A descrição e os valores das constantes são dados na Tabela 2.

Tabela 2: Parâmetros do sistema 2D ball balancer.

Parâmetros	Símbolo	Valor
Massa da bola (kg)	$m_b$	0,003
Distância do eixo do motor ao ponto de fixação da barra (cm)	$r_{arm}$	2,54
Raio da bola (cm)	$r_b$	1,96
Comprimento da mesa (cm)	$L_{plate}$	27,5
Parâmetro do fabricante (rad/sV)	$K$	1,76
Parâmetro do fabricante (s)	$\tau$	0,00285
Momento de inércia de uma esfera sólida (kgm <sup>2</sup> )	$J_b$	0,0046
Parâmetro do sistema (m/s <sup>2</sup> rad)	$K_{bb}$	1,3

O sistema (27) pode ser representado de forma similar ao sistema (3), sendo que:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{K}{\tau} \end{bmatrix}, x(t) = \begin{bmatrix} r(t) \\ \dot{r}(t) \\ \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix}. \quad (28)$$

Durante a implementação prática apenas as variáveis de estado  $r_M$  ( $r_{x_M}$  e  $r_{y_M}$ ) e  $\theta_M$  ( $\theta_{x_M}$  e  $\theta_{y_M}$ ) estão disponíveis, e  $\dot{r}_M$  e  $\dot{\theta}_M$  são estimadas por meio de filtros derivativos  $G_f(s) = 20s/(s+20)$ , como sugerido pela fabricante (Quanser, 2008). Dessa forma, foi considerada uma falha de até -50% na leitura do ângulo medido, acarretando uma falha simultânea na derivada do ângulo. Já nas leituras das posições da bola ( $r_x$  e  $r_y$ ) foi suposto que não ocorreram erros de leitura. Então, as variáveis de estado podem ser reescritas como:  $x_{1_M}(t) = x_1(t) = r(t)$ ;  $x_{2_M}(t) = \frac{dx_1(t)}{dt} = \dot{r}(t)$ ;  $x_{3_M}(t) = \gamma_3(t)x_3(t) = \gamma_3(t)\theta(t)$  e

$$x_{4_M}(t) = \frac{dx_3(t)}{dt} = \frac{d(\gamma_3(t)x_3(t))}{dt} = \dot{\gamma}_3(t)\theta(t) + \gamma_3(t)\dot{\theta}(t). \quad (29)$$

**Observação 3** No caso particular do sistema 2D ball balancer em que o controle foi implementado, observe que, a partir de (29), tem-se  $\dot{\theta}_M(t) = x_{4_M}(t) = \frac{dx_3(t)}{dt} = \dot{\gamma}_3(t)\theta(t) + \gamma_3(t)\dot{\theta}(t)$ , pois a

variável de estado  $x_{4M}$  é obtida por meio de um filtro derivativo. Durante a implementação,  $\gamma_3(t)$  é descrita como uma onda quadrada. A derivada de  $\gamma_3(t)$  será diferente de zero apenas quando o valor de  $\gamma_3(t)$  for alterado. Então, de forma simplificada, considerou-se que  $\dot{\theta}_M(t) = \gamma_3(t)\dot{\theta}(t)$ .

**Observação 4** O projeto de controle considerou que todos os sensores responsáveis pelas leituras das variáveis de estado apresentam falhas, tal que  $i, j \in \mathbb{K}_r$ , para  $r \in 2^n$ . No entanto, nessa implementação prática é possível simplificar essa notação, pois somente um sensor apresenta falha. Logo, tem-se que  $r \in 2^1$  e consequentemente  $i, j \in \mathbb{K}_2$

A partir das considerações anteriores, de (5), (6) e (7), têm-se as matrizes  $\Gamma_i = \text{diag}[1 \ 1 \ \gamma_3 \ \gamma_3]$  e  $\Gamma_i^{-1} = \text{diag}[1 \ 1 \ \gamma_3^{-1} \ \gamma_3^{-1}]$ . Como visto no Teorema 1,  $G_i = \Gamma_i^{-1}$ . Considerando  $0,5 \leq \gamma_3 \leq 1$ , obtêm-se as matrizes:

$$[G_1|G_2]= \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right]. \quad (30)$$

Do Teorema 1 com  $\beta = 1, 4$  obtêm-se:

$$K=[247,9923 \quad 210,8674 \quad 81,0489 \quad 4,0684], \quad (31)$$

$$P= \begin{bmatrix} 4220,844 & 1839,562 & 177,079 & 1,139 \\ 1839,562 & 1178,378 & 126,709 & 0,888 \\ 177,0794 & 126,709 & 22,700 & 0,246 \\ 1,139 & 0,888 & 0,246 & 0,010 \end{bmatrix}, \quad (32)$$

$$Y= \begin{bmatrix} 0,0003 & -0,0005 & 0,0004 & -0,0001 \\ -0,0005 & 0,0012 & -0,0022 & 0,0090 \\ 0,0004 & -0,0022 & 0,0103 & -0,1041 \\ -0,0001 & 0,0090 & -0,1041 & 1,8168 \end{bmatrix}. \quad (33)$$

O ganho K obtido e descrito em (31) foi utilizado para implementar a lei de controle (8). Os resultados obtidos na implementação prática são apresentadas a seguir.

### 3.1 Resultados Práticos

O sistema implementado visa fazer a bolinha percorrer uma trajetória quadrada de 10 cm de lado. Em cada eixo, há uma falha que atua como uma onda quadrada, podendo estar em  $\gamma_3 = 0,5$  (falha de 50% no sistema) ou  $\gamma_3 = 1$  (não há falha); as ondas quadradas possuem período de 10 segundos (5 segundos com  $\gamma_3 = 0,5$  e 5 segundos com  $\gamma_3 = 1$ ) e estão defasadas em 2,5 segundos entre si, de forma que é possível observar o sistema funcionando quando há falha em apenas um eixo, nos dois eixos ou em nenhum eixo.

Para não danificar o atuador, foi inserido um saturador, via *Simulink*<sup>®</sup>, que limita a entrada do sinal de controle  $u(t)$  em  $\pm 5V$ . Alguns trabalhos, como por exemplo (Alves et al., 2016), consideram a presença de saturação no sinal de controle do atuador durante o projeto. Já o projeto

de controle proposto nesse trabalho não considera o efeito da saturação. Entretanto, os resultados apresentados a seguir comprovam que o desempenho do sistema não foi prejudicado de forma significativa. As respostas obtidas são apresentadas nas Figuras 3 e 4, utilizando o controlador com o ganho dado em (31).

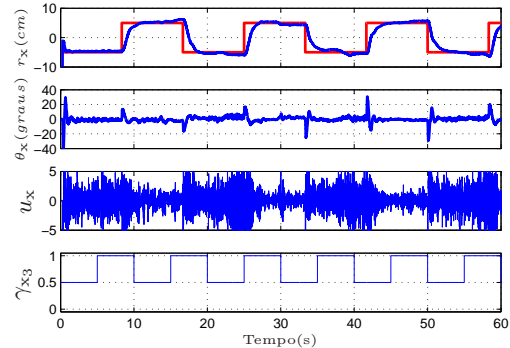


Figura 3: Resultados práticos do eixo x: posição  $r_x$ , ângulo  $\theta_x$ , sinal de controle  $u_{\sigma_x}$  e a falha  $\gamma_{3_x}$  do 2D ball balancer utilizando o controlador (31).

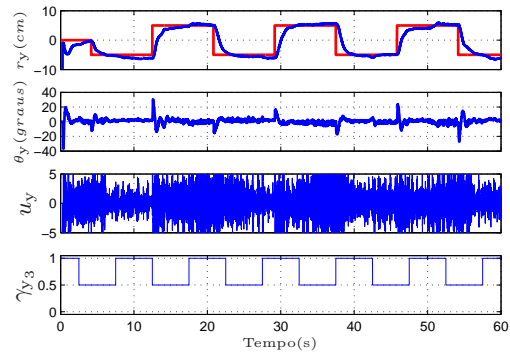


Figura 4: Resultados práticos do eixo y: posição  $r_y$ , ângulo  $\theta_y$ , sinal de controle  $u_{\sigma_y}$  e a falha  $\gamma_{3_y}$  do 2D ball balancer utilizando o controlador (31).

Nas Figuras 3 e 4, pode-se notar que o sistema seguiu a posição desejada  $x = \pm 5 \text{ cm}$ ,  $y = \pm 5 \text{ cm}$  e manteve os ângulos das direções x e y próximo de zero. Por fim, a trajetória da bola representada na Figura 5 confirma a eficiência da metodologia proposta.

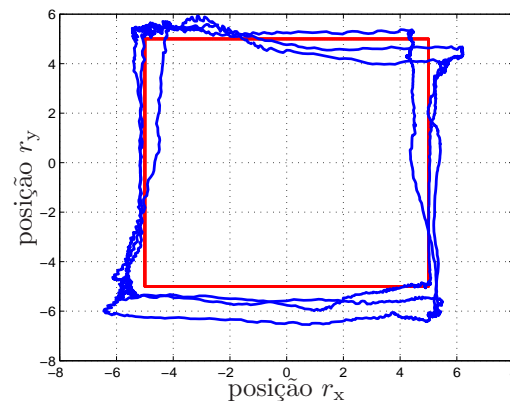


Figura 5: Resultados práticos da posição  $x \times y$  do 2D ball balancer utilizando o controlador (31).

#### 4 Conclusões

Esse trabalho propôs um projeto de controle robusto para sistemas lineares, considerando que os sensores apresentam falhas de medição variantes no tempo. O vetor de estado medido,  $x_M(t) = \Gamma_z x(t)$ , apresenta incertezas politópicas, como mostra a definição de  $\Gamma_z$  em (5). Em (Buzetti et al., 2015) um problema semelhante foi abordado, porém as falhas nos sensores foram consideradas constantes, tal que  $\dot{x}_M(t) = \Gamma_z \dot{x}(t)$ . O método proposto nesse trabalho apresenta condições que garantem a estabilidade do sistema realimentado e tais condições independem das variações dos elementos da matriz  $\Gamma_z$ . Por fim, o teorema foi utilizado para projetar o controlador empregado na implementação prática, em um sistema *2D ball balancer*, para confirmar a sua eficácia.

#### Agradecimentos

Os autores agradecem a CAPES, ao CNPq e a FAPESP (2011/17610-0) pelo apoio financeiro.

#### Referências

- Ackermann, J. (1984). Robustness against sensor failures, *Automatica* **20**(2): 211 – 215.
- Alves, U. N. L. T., Teixeira, M. C. M., de Oliveira, D. R., Cardim, R., Assunção, E. and de Souza, W. A. (2016). Smoothing switched control laws for uncertain nonlinear systems subject to actuator saturation, *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing* (28): n/a–n/a.
- Bouattour, M., Chadli, M., Hajjaji, A. E. and Chaabane, M. (2009).  $\mathcal{H}_\infty$  sensor faults estimation for T-S models using descriptor techniques: Application to fault diagnosis, *Fuzz-IEEE 2009*, Korea.
- Boyd, S., Ghaoui, L. E., Feron, E. and Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, Vol. 15 of *Studies in Applied Mathematics*, SIAM - Soc. Ind. Appl. Math., Philadelphia, PA.
- Buzetti, A. S., Oliveira, D. R., Teixeira, M. C. M., Souza, W. A., Assunção, E. and Cardim, R. (2015). Projeto de controle robusto chaveado com falhas no sensores, *XII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente - SBAI*, Natal, RN.
- Dong, J. and Yang, G.-H. (2015). Reliable state feedback control of T-S fuzzy systems with sensor faults, *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on* **23**(2): 421–433.
- Liu, M., Cao, X. and Shi, P. (2013). Fuzzy-model-based fault-tolerant design for nonlinear stochastic systems against simultaneous sensor and actuator faults, *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on* **21**(5): 789–799.
- Minqing, X. (2009). Reliable robust guaranteed cost control of delta operator linear uncertain systems with sensor failure, *Intelligent Computation Technology and Automation, 2009. ICICTA '09. Second International Conference on*, Vol. 1, pp. 834–837.
- Oudghiri, M., IEEE, S. M., CHADLI, M. and HAJJAJI, A. E. (2007). A fuzzy approach for sensor fault-tolerant control of vehicle lateral dynamics, *16th IEEE International Conference on Control Applications*, Singapore.
- Qiu, J.-Q., Ren, M.-F., Xi, D.-M., Zhao, Y.-C., Guo, Y.-M. and Zhu, X.-D. (2010). Fault-tolerant control design for a class of T-S fuzzy systems with time delays and sensor faults, *Proceedings of the Ninth International Conference on Machine Learning and Cybernetics*, Qingdao.
- Quanser (2008). *2D Ball Balancer Control using QUARC: Instructor Manual*, Quanser Inc., Canadá.
- Souza, W. A., Oliveira, D. R., Teixeira, M. C. M., Silva, L. S. C., Cardim, R. and Assunção, E. (2014). Projeto e implementação de um controlador robusto chaveado utilizando modelos fuzzy Takagi-Sugeno, *XX Congresso Brasileiro de Automática - CBA*, Belo Horizonte, MG.
- Veillette, R., Medanic, J. and Perkins, W. R. (1992). Design of reliable control systems, *Automatic Control, IEEE Transactions on* **37**(3): 290–304.
- Wang, Z., Jin, X. and Wang, Z. (2011). Adaptive controller design for linear time-invariant systems with sensor failures, *Control and Decision Conference (CCDC), 2011 Chinese*, pp. 2459–2462.
- Yang, G.-H., Wang, J. L. and Soh, Y. C. (2001). Reliable  $\mathcal{H}_\infty$  controller design for linear systems, *Automatica* **37**(5): 717 – 725.
- Yang, G.-H., Wang, J. and Soh, Y. (2000). Reliable LQG control with sensor failures, *Control Theory and Applications, IEE Proceedings -* **147**(4): 433–439.
- Yang, G.-H. and Ye, D. (2008). Adaptive fault-tolerant  $\mathcal{H}_\infty$  control against sensor failures, *IET Control Theory and Applications* **2**(2): 95–107.