UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JULIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

PROFMAT

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

ENTRE O FASCÍNIO E A REALIDADE DA RAZÃO ÁUREA

SAMUEL VILELA DE LIMA FRANCISCO

Orientador

Prof. Dr. Suetônio de Almeida Meira

São José do Rio Preto

2017

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JULIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

PROFMAT

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

ENTRE O FASCÍNIO E A REALIDADE DA RAZÃO ÁUREA

SAMUEL VILELA DE LIMA FRANCISCO

Dissertação apresentada como parte dos resquisitos para obtenção de título de Mestre, junto ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Orientador
Prof. Dr. Suetônio de Almeida Meira

São José do Rio Preto

2017

Francisco, Samuel Vilela de Lima.
Entre o fascínio e a realidade da razão áurea / Samuel Vilela de Lima Francisco. -- São José do Rio Preto, 2017
119 f. : il., tabs.

Orientador: Suetônio de Almeida Meira
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática (Ensino fundamental) - Estudo e ensino. 2. Geometria - Estudo e ensino. 3. Números de Fibonacci. 4. Segmento áureo. 5. Matemática – Metodologia. I. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. II. Título.

CDU – 51(07)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

TERMO DE APROVAÇÃO

Samuel Vilela de Lima Francisco

ENTRE O FASCÍNIO E A REALIDADE DA RAZÃO ÁUREA

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Suetônio de Almeida Meira
FCT/UNESP - Campus de Pres. Prudente
Orientador

Prof^{a}. Dr^{a}. Marluce da Cruz Scarabello
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais
(INPE) - São José dos Campos

Prof. Dr. José Roberto de Nogueira
FCT/UNESP - Campus de Pres. Prudente

Presidente Prudente, 03 de fevereiro de 2017

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus pela força e sabedoria.

Aos meus pais por terem me criado com todo amor e carinho.

Agradeço imensamente a minha namorada Adriana Reis pelo apoio, motivação e muita compreensão durante estes anos de estudos.

A todos os professores do curso, pela dedicação e paciência, o meu aprendizado foi além dos conteúdos.

Não poderia esquecer dos amigos e amigas de turma que durante todo o curso nos tornamos grandes companheiros, dedicados a ajudar uns aos outros que ao longo destes anos percebemos que dividir o conhecimento só nos engrandece.

Agradeço a professora Angélica da Escola Estadual Professora Maria Luiza Formozinho Ribeiro por ter apoiado e dado a oportunidade de trabalhar com seus alunos o projeto proposto por este trabalho durante as suas aulas.

Em especial ao meu orientador Suetônio de Almeida pelo apoio, conselhos e orientação para à realização desse trabalho.

Resumo

Apresentamos, neste trabalho, um estudo sobre um número que tem fascinado muitos estudiosos ao longo da história da humanidade, o Número de Ouro. Este número é representado pela letra grega ϕ (lê-se: "Fi") no qual alguns estudiosos atribuem-se que foi escolhido em homenagem ao grande escultor grego Fídias. Mostramos um pouco do contexto histórico, algumas de suas propriedades e a sua relação intrínseca com a sequência de Fibonacci. Desenvolvemos neste trabalho uma metodologia de natureza teórica e prática, na qual realizamos algumas construções geométricas relacionando-as com a Razão Áurea, retratando assim, como o conteúdo de construções geométricas e a geométrica em que foi perdendo espaço no ensino fundamental ao longo do tempo, e buscamos o resgate deste conteúdo no panorama atual da educação. Tendo como objetivo principal o de promover a reflexão da importância desse número através do projeto desenvolvido paralelamente às aulas de matemática para alunos do ensino fundamental.

Palavras-chave: Número de Ouro, Geometria, Matemática, Sequência de Fibonacci, Retângulo Áureo, Espiral logarítmica.

Abstract

We present, in this work, a study on a number that has fascinated many scholars throughout the history of humanity, the Gonden Number. This number is represented by the Greek letter *phi* (reads: "Fi") in which some scholars are attributed that it was chosen in honor of the great Greek sculptor Fídias. We show some of the historical context, some of its properties and its intrinsic relation with the Fibonacci Sequence. In this work we develop a methodology of theoretical and practical nature, in which we perform some geometric constructions relating them to the Golden Ratio, thus portraying, as the content of geometric constructions and the geometric in which it lost space in elementary education over time, And we seek the rescue of this content in the current panorama of education. Its main objective is to promote the reflection of the importance of this number through the project developed parallel to the mathematics classes for elementary school students.

Keywords: Golden Number, Geometry, Mathematics, Fibonacci sequences, Golden rectangle, Logarithmic spiral.

Lista de Tabelas

Lista de Figuras

Sumário

INTRODUÇÃO

Este trabalho é sobre um número, um número muito especial. Você encontrará este número, $1,61803...$, em conferências sobre História da Arte e em lista de "números favoritos"compilados por matemáticos. A atratividade deste número origina-se, antes de mais nada, do fato que tem um jeito quase sobrenatural de surgir onde menos se espera. Logo como a intenção de despertar nos alunos de ensino fundamental a curiosidade para fazer a associação da matemática com a realidade fora da sala de aula, vendo assim a aplicação dos conteúdos estudados, escolhemos trabalhar com um este interessante número - o Número de Ouro. Esse número possui propriedades bastante interessantes que iremos mostrar no desenvolvimento deste trabalho. Utilizaremos o Número de Ouro para trabalhar alguns conceitos elementares de construções geométricas, o que se justifica por ser um conteúdo pouco trabalhado no ensino básico e por acreditarmos que, através das construções, o aluno desenvolve melhor os conceitos de geometria plana. Os conceitos de construções geométricas que foram trabalhados nas atividades desenvolvidas com a turma envolveram construção de retas perpendiculares, mediatriz, circunferência, quadrado, retângulo, pentágono e divisão de segmento.

Nosso objetivo é reforçado por textos oficiais, como o que encontramos nos Parâmetros Curriculares Nacionais [4] que sugere o trabalho com "Resolução de situações-problema que envolvam a obtenção da mediatriz de um segmento, da bissetriz de um ângulo, de retas paralelas e perpendiculares e de alguns ângulos notáveis, fazendo uso de instrumentos como régua, compasso, esquadro e transferidor".

Este trabalho apresenta seis capítulos no seu desenvolvimento organizados da seguinte maneira: no primeiro capítulo, contamos um pouco da história desse número que possui vários nomes como "Número Áureo", "Número de Ouro", entre outros e mostramos algumas propriedades dele; no segundo capítulo, são mostrados alguns aspectos geométricos deste fascinante número; o terceiro capítulo é feita uma explanação dos ambientes, objetos e seres nos quais se costuma afirmar que o Número de Ouro aparece; no quarto capítulo, apresentamos algumas sugestões de atividades para ser aplicadas em sala de aula; no quarto capítulo, apresentamos algumas sugestões de como desenvolver algumas atividades didáticas para serem aplicadas em sala de aula; quinto capítulos descrevemos como foi a aplicação de algumas destas atividades; no sexto capítulo fazemos uma análise dessa aplicação e fazemos as considerações finais deste trabalho .

1 CONTEXTO HISTÓRICO DO NÚMERO DE OURO

> "A geometria possui dois grandes tesouros: um é o teorema de pitágoras; o outro, a divisão de uma linha em extrema e média razões. O primeiro, podemos comparar a um medida do áureo; o segundo, podemos chamar de jóia preciosa."Kepler (1571 - 1630) [9]

Na história da humanidade nenhum outro número tem intrigado tanto os homens, seja pelas propriedades matemáticas que possui como pela beleza e harmonia que sucinta, como o Número de Ouro. Conhecido desde a antiguidade, o número que recebeu no século XIX o título honorífico de "Número Áureo", "Razão Áurea" e "Secção Áurea" segundo Lívio [10].

Esse número é também chamado de "Proporção Divina"ou "Divina Proporção", devido ao seu caráter místico, pois se acreditou (ou se acredita) ser esse número é um dos alicerces com o qual deus ou os deuses construíram o universo.

1.1 Os pitagóricos e o pentagrama

Algumas das referências mais antiga aos prazeres da matemática estão ligadas ao nome do filósofo grego Pitágoras (569 − 500 a.C.) que observou a ocorrência, na Natureza, de certas combinações e relações entre números. Pitágoras era um profeta e um místico, nascido em Samos, uma das ilhas do Dodecaneso. Durante suas peregrinações ele evidentemente absorveu não só informação matemática e astronômica como também muitas ideias religiosas. Após ter viajado pelo Egito e Babilônia (possivelmente indo até a Índia), quando voltou ao mundo grego, Pitágoras estabeleceu-se em Crotona na costa sudeste do que agora é a Itália, mas era chamada Magna Grécia [3]. Lá ele fundou uma sociedade secreta que se assemelhava um pouco a um culto órfico, exceto por suas bases matemáticas e filosóficas. A figura de Pitágoras permanece muito obscura, isto se deve em parte à perda de documentos daquela época. Como o conhecimento e propriedade eram comuns, por isso a atribuição de descobertas não era feita a um membro específico da escola. É melhor, por isso, não falar na obra de Pitágoras, mas antes das contribuições dos pitagóricos. Segundo Huntley [9], para os pitagóricos, a explicação da ordem e da harmonia da Natureza iria ser encontrada na ciência dos números.

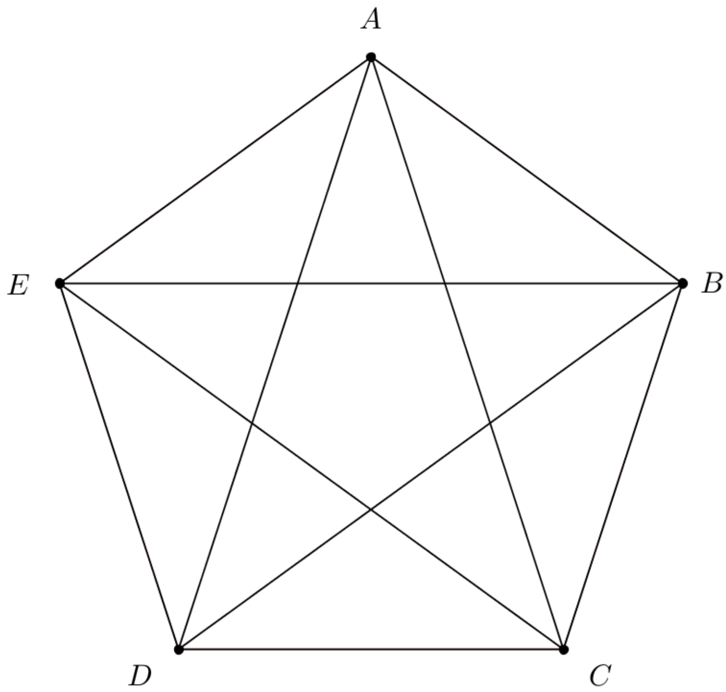
A importância dos pitagóricos deve-se ao fato, principalmente, de que naquela época o papel da aritmética e da geometria era apenas o de resolver problemas práticos e específicos como: medição de terra, construção de pirâmides e repartição de colheita. Foram eles que começaram a discutir a matemática, mais pela beleza e menos pela sua aplicabilidade.

Umas das questões tantalizantes quanto à geometria pitagórica diz respeito à construção do pentagrama ou pentágono estrelado. Aparentemente, os pitagóricos usavam o pentagrama como o símbolo de sua irmandade e o chamavam de "Saúde". O pentagrama tem relação estreita com o pentágono regular. Conectando-se todos os vértices do pentágono por diagonais, obtém-se um pentagrama (Figura 1). Além disso, o pentagrama e pentágono regular estão repletos de relações com o Número de Ouro, algumas destas relações serão mostradas adiante. Por isso, muitos pesquisadores sugerem que os pitagóricos foram os primeiros a descobrir a "Razão Áurea" e a incomensurabilidade [1], talvez Hipaso de Metaponto. Embora seja possível que a incomensurabilidade e os números irracionais tenham sido descobertos através da Razão Áurea, segundo Lívio [10] a versão mais tradicional é que essa descoberta tenha surgido da razão entre a diagonal e o lado do quadrado.

Platão (428/427 a.C. – 348/347 a.C.) e Theaetetus (417 a.C. – 369 a.C.) se dedicaram ao estudo dos poliedros. Platão tentou explicar a estrutura da matéria usando os cincos sólidos regulares (ou poliedros), que já tinham sido investigados até certo ponto pelos pitagóricos e inteiramente por Theaetetus. Esses sólidos estão ligados à Razão Áurea, como, por exemplo, no fato de os 12 vértices de um icosaedro regular e os 12 centros das faces de um dodecaedro regular poderem ser divididos em três grupos de quatro pontos, sendo que os quatro pontos de cada grupo formam um retângulo áureo.

[1]Que não se pode nem se consegue medir; cuja medida não pode ser comparada

Figura 1: Pentágono e Pentagrama



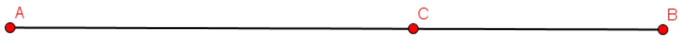
1.2 A definição do Número de Ouro e o Phi (Φ)

> Ptolomeu uma vez perguntou a Euclides se havia um caminho mais curto, para geometria, que o estudo de Os elementos, e Euclides lhe respondeu que não havia estrada real para a geometria
>
> Proclo Diadoco

A primeira definição clara da Razão Áurea foi dada por volta de 300 a.C. por Euclides de Alexandria. Euclides definiu uma proporção derivada da simples divisão de uma linha no que chamou de sua "razão extrema e média". Nas palavras de Euclides: Diz-se que uma linha reta é cortada na razão extrema e média quando, assim como a linha toda será está para o maior segmento, o maior segmento está para o menor" (Figura 2). Para os gregos antigos esse tipo de subdivisão logo se tornou tão familiar que não se achava necessário ter um nome em especial para ela, por isso a designação "divisão de um segmento em média e extrema razão" em geral é substituído simplesmente pela palavra "secção".

Até o inicio do século XX, usava-se a letra grega tau (τ) , que em grego significa "o

Figura 2: Segmento Áureo



corte", para representar o Número de Ouro. Entretanto, em 1899, o matemático americano Mark Barr, sugeriu-se a começar utilizar a letra grega Phi (Φ)(lê-se fi) , em homenagem a Fídias (Phídias) que foi um dos maiores escultores e arquitetos da Grécia que viveu aproximadamente entre 490 e 460 a.C.. Mark Barr decidiu homenagear Fídias porque alguns historiadores da arte sustentavam que ele utilizava a Razão Áurea nas esculturas como detalharemos em outro tópico. As maiores realizações desse escultor foram o "Partenon de Atenas" e o "Zeus" no templo de Olímpia. Após Euclides, outros matemáticos continuaram a produzir resultados geométricos envolvendo a Razão Áurea. Dentre esses matemáticos, podemos citar Hipsicles de Alexandria (que viveu por volta do século II a.C), Hero (século I d.C), Ptolomeu (século II d.C) e Pappus de Alexandria (século IV d.C). De acordo com Lívio [10], Pappus foi o último geômetra grego que desenvolveu teoremas relacionados à Razão Áurea apresentando um novo método de construção do dodecaedro e do icosaedro, e também, comparações entre os volumes de todos os sólidos platônicos, em *Coleção* (*Synagoge*, 340 A.C). Após Pappus, o estudo da Razão Áurea ficou, por alguns anos, praticamente estagnado e sem nenhum resultado importante. Já nos séculos IX e X, matemáticos árabes e indianos produziram resultados aritméticos adicionais, mas sem grandes proporções, relativos ao Número de Ouro. Como acontece com frêquencia nas ciências, esses períodos preparatórios de progresso lento são necessários para a geração da próxima grande ideia, no caso da Razão Áurea, o salto quântico teve de esperar o aparecimento do mais ilustre matemático europeu da Idade Média, Leonardo de Pisa.

1.2.1 Valor Numérico de Φ

Na figura (2), tomemos o comprimento do segmento menor, CB, como 1 unidade e o comprimento do maior, AC, como x unidades. Se a razão entre x e 1 é a mesma que entre x+1 (comprimento da linha AB) e x, então a linha terá sido dividida na razão extrema e média, em outras palavras, o ponto C divide o segmento de modo que, assim como o segmento todo está para maior parte, a maior parte está para a menor parte. Logo obtemos equação (1.1) da definição de razão extrema e média que podemos facilmente resolver e achar o valor de x, a Razão Áurea.

$$\frac{x}{1} = \frac{x+1}{x} \tag{1.1}$$

Multiplicando os dois lados da equação (1.1) por x, obtemos $x^2 = x + 1$, que equivale à simples equação quadrática

$$x^2 - x - 1 = 0 \tag{1.2}$$

Observe que obtemos uma equação de 2º grau de coeficientes $a = 1$, $b = -1$ e $c = 1$. Logo temos que o discriminante da equação 1.2 é dado por:

$$\Delta = b^2 - 4.a.c = (-1)^2 - 4.(1).(-1) = 1 + 4 = 5$$

Aplicando o discriminante na fórmula de Baskara temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Portanto, da resolução da equação (1.2) obtemos as duas soluções (1.3) e (1.4).

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \tag{1.3}$$

$$x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \tag{1.4}$$

A solução positiva $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180339887...$ dá o valor da Razão Áurea. Vemos claramente que Φ é irracional, sendo simplesmente metade da soma de 1 com a raiz quadrada de 5. Denotemos a solução negativa por Φ'.

1.2.2 Outras maneiras álgebricas de encontrar o Número de Ouro

Para determinar o valor numérico Φ, precisamos obter uma equação algébrica (Equação 1.2) na qual, após resolve-la, nós forneceu através da solução o valor $1,6180339887...$. Outra forma de encontramos o valor do *Número de Ouro*, além da forma apresentada anteriormente, é através da seguinte expressão matemática:

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}}}$$

Para obtermos o valor desta expresão faremos da seguinte maneira: Suponha que indiquemos o valor que procuramos com x. Então temos:

$$x = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}}} \tag{1.5}$$

Agora vamos elevar os dois lado da equação 1.5 ao quadrado. Logo temos:

$$x^2 = \left(\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}}}\right)^2 \tag{1.6}$$

$$\Rightarrow \ x^2 = 1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}} \tag{1.7}$$

Observe que, como a segunda expressão do lado direito da equação 1.7 continua indefinidamente, é, na verdade igual ao nosso x da equação 1.5. Loga basta substituir $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}}}$ por x na equação 1.7, e temos:

$$x^2 = 1 + x \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \tag{1.8}$$

Observe que se trata da mesma equação encontrada na definição do valor numérico do Número de Ouro. Logo, para $x > 0$ temos que:

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$$

Outra forma de definir o Número de Ouro é observando um tipo bem diferente de expressão que nunca termina, desta vez envolvendo frações:

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+...}}}}$$

Segundo Lívio [10], este é um caso especial de entetidade matemática conhecida como fração contínua, bastante usado em Teoria dos Números. Tomando como base nossa experiência anterior, podemos começar denotando o valor por x. Assim temos a seguinte equação:

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + ...}}}} \tag{1.9}$$

Note que, como a fração contínua se estende indefinidamente, o denominador do segundo termo do lado direito da equação (1.9) é, de fato, idêntico ao valor de x. Portanto, temos a equação:

$$x = 1 + \frac{1}{x} \tag{1.10}$$

Multiplicando os dois lados da equação 1.10 por x, obtemos:

$$x^2 = 1 + x \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \tag{1.11}$$

Que é de novo a equação que defini a Razão Áurea. Logo, essa notável fração contínua também é igual a Φ. Como a fração contínua corresponente à Razão Áurea é composta somente de uns, ela converge muito lentamente. A Razão Áurea é, nesse sentido, mais "difícil" de expressar como uma fração do que qualquer outro número irracional (é o "mais irracional" dos irracionais) [10].

1.2.3 Algumas Propriedades de Φ

Analisando a equação $x^2 - x - 1 = 0$ (1.2) podemos obter algumas relações a respeito de Φ e Φ'.

i. O recíproco negativo de Φ é Φ'.

Demonstração: De fato, como $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, temos:

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{1}{\Phi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\Phi} = \frac{2}{(1+\sqrt{5})}.\frac{(1-\sqrt{5})}{(1-\sqrt{5})}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\Phi} = \frac{(2-2\sqrt{5})}{-4}$$

Obtemos assim:

$$\frac{1}{\Phi} = \frac{-1+1\sqrt{5}}{2} \tag{1.12}$$

Multiplicando os dois lados da equação (1.12) por -1, obtemos:

$$-\frac{1}{\Phi} = \frac{1-1\sqrt{5}}{2} = \Phi' \tag{1.13}$$

■

Portanto, Φ' pode ser escrito como o recíproco negativo de Φ. Da mesma forma, o recíproco negativo de Φ' é Φ.

ii. O produto das raízes da equação (1.2) é igual a -1.

Demonstração: De fato, segue da equação (1.13) que:

$$\Phi.\Phi' = \Phi.\left(-\frac{1}{\Phi}\right) = -1$$

Portanto:

$$\Phi.\Phi' = -1 \tag{1.14}$$

■

iii. A soma das raízes da equação (1.2) é igual a 1.

Demonstração: Observe que:

$$\Phi + \Phi' = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}+1-\sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{2}{2} = 1$$

Como Φ e Φ' são raízes da equação (1.2), então, de fato, a soma de suas raízes é igual a 1.

■

iv. O número Φ é um número real positivo que subtraído de uma unidade torna-se o seu inverso.

Demonstração: De fato, pelo item anterior tem-se $\Phi + \Phi' = 1$. Ao reorganizar os os termos obtemos que:

$$\Phi - 1 = -\Phi' = \frac{1}{\Phi} \tag{1.15}$$

Portanto, como Φ' é o inverso de Φ conclue-se que Φ subtraído de uma unidade é igual ao seu inverso.

■

Segundo Livio [10], podemos verificar algumas destas propriedades interessantes usando uma simples calculadora científica de bolso. Digite o número $1,6180339887$ e aperte $[x^2]$. Você vê alguma coisa surpreendente? Agora digite o número de novo, e desta vez aperte o botão $[1/x]$. Enquanto o quadrado do número $1,6180339887...$ dá $2,6180339887...$, seu inverso ("um sobre") dá $0,6180339887...$, todos tendo exatamente os mesmo dígitos depois da vírgula! A Razão Áurea tem as propriedades únicas de produzir seu quadrado simplesmente somando 1, e seu recíproco subtraindo 1, como já demonstramos. O fato de que agora temos uma expressão algébrica (1.2) para a Razão Áurea nos permite, em princípio, calculá-la com grandes precisão.

1.3 Leonardo Fibonacci na história da Razão Áurea

Na Idade Média juntamente com a queda do domínio árabe na Espanha, veio o Renascimento. E este movimento trouxe de volta toda a sabedoria das escolas gregas, da Biblioteca e da Casa da Sabedoria. Com Leonardo de Pisa (em latim Leonardus Pisanus) novos capítulos interessantes surgem na história do Número de Ouro [10].

> O papel de Fibonacci na história da Razão Áurea é realmente fascinante. Por um lado, nos problemas em que usava conscientemente a Razão Áurea, foi responsável por um progresso significativo mas não espetacular. Por outro, simplesmente formulando um problema que, em princípio, nada tinha a ver

> com a Razão Áurea, ele expandiu drasticamente o escopo da Razão Áurea e de suas aplicações. [10]

Leonardo de Pisa, também conhecido como Leonardo Fibonacci (do latim filius Bonacci, filho da família Bonacci, ou "filho da boa natureza") - Figura 3, nasceu na década de 1170, na cidade de Pisa, na região da Toscana (Itália), filho de um homem de um comerciante e funcionário do governo italiano, chamado Guglielmo [10]. Leonardo Fibonacci ou Leonardo Bigollo ("Bigollo" significa "viajante" nos dialetos toscano) ficou conhecido pelo seu papel na introdução dos algarismos indo-arábicos na Europa e pela famosa sequência numérica que o matemático francês Edouard Lucas no século XIX chamou de sequência de Fibonacci.

Figura 3: Leonardo Fibonacci

Fonte: Clube de Exatas

Segundo Boyer [3], o pai de Fibonacci, tinha negócios no norte da África, em Bugia (atualmente na Argélia), e o filho estudou com um professor muçulmano e viajou para outros países mediterrâneos (entre eles: Grécia, Egito e Síria). Ele teve a oportunidade de estudar e comparar diferentes sistemas numéricos e métodos de operações aritméticas. Após concluir que os numerais indo-arábicos (que incluíam o princípio do valor de lugar) eram muito superiores a todos os outros métodos, ele dedicou os primeiros sete capítulos de seu livro primeiro e mais conhecido livro, Liber abaci (livro do ábaco - 1202), a explicações sobre a notação indo-arábica e suas aplicações práticas. Boyer [3] chama o título desse livro de "título enganador" por não tratar sobre o ábaco e sim sobre problemas algébricos em que o uso de numerais indo-arábicos é fortemente recomendado.

O papel de Fibonacci na história da Razão Áurea é realmente fascinante. Por outro lado, nos problemas em que usava conscientemente a Razão Áurea, foi responsável por um progresso significativo mas não espetacular. Por outro, simplesmente formulando um problema que, em princípio, nada tinha a ver com a Razão Áurea, ele expandiu drasticamente o escopo da Razão Áurea e de sua aplicações.

Livio [10] cita que a contribuição mais importante de Fibonacci para a Razão Áurea (e a que mais trouxe fama para ele) foi um problema encontrado no Capítulo XII do Liber abaci.

1.3.1 O problema do coelho de Fibonacci

O problema encontrado no Capítulo XII do Liber abaci. dizia o seguinte:

> Um homem pôs um par de filhotes de coelhos num lugar cercado de muro por todos os lados. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par em um ano se, supostamente, todo mês cada par dá a luz a um novo par, que é fértil a partir do segundo mês?

A solução é o seguinte:

Vamos acompanhanar o que acontece nos cinco primeiros meses:

- No 1º mês, temos apenas um par de coelhos (ainda filhotes);
- No 2º mês, continuamos com um par de coelhos (agora adultos);
- No 3º mês, nasce um par de filhotes. Logo, temos dois pares de coelhos (um par de adultos 28 e um par de filhotes);
- No 4º mês, o par inicial gera o seu segundo par de filhotes, ficando um total de três pares de coelhos (o par inicial, o primeiro par de filhotes, agora adultos, e o segundo par de filhotes);
- No 5º mês, o par inicial gera o seu terceiro par de filhotes; já tem-se o par de filhotes gerado no mês anterior, agora adulto e o par de filhotes gerado no 3º mês que agora é adulto e fértil gera o seu primeiro par de filhotes. Logo, temos cinco pares de coelhos (três pares de adultos mais dois pares de filhotes);

$$\vdots$$

Nota-se, que no próximo mês, o sexto, o número de pares de coelhos será a soma do número de pares de coelhos do mês atual mais o número de pares de coelhos adultos do mês anterior, pois serão estes que irão contribuir com o acréscimo do número de coelhos para o próximo mês, já que quando chegar o sexto mês estarão aptos a procriar. Logo, no sexto mês haverá oito pares de coelhos: os cinco pares presentes no quinto mês mais três pares de filhotes, gerados pelos pares adultos do 5º mês. Com isso, podemos encontrar mais facilmente a quantidade de pares de coelhos em um ano. Pois os números de casais de coelhos, a cada mês, seguindo a observação acima, formam a sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144. Portanto, teremos 144 pares de coelhos ao final de um ano. Oberserve na tabela 1 o número de coelhos em cada mês.

Tabela 1: Problema dos Coelhos

Mês	Nº de pares adultos	Nº de pares de filhotes	Total
1º	0	1	1
2º	1	0	1
3º	1	1	2
4º	2	1	3
5º	3	2	5
6º	5	3	8
7º	8	5	13
8º	13	8	21
9º	21	13	34
10º	34	21	55
11º	55	34	89
12º	89	55	144

Fonte: Ramos [11]

Considerando, no problema anterior, que o número de coelhos existentes no n-ésimo mês seja denotado por F_n, temos então que:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad F_1 = F_2 = 1$$

Essas relações definem, por recorrência, uma sequência de números naturais, chamada de sequência de Fibonacci e seus elementos, chamados de números de Fibonacci. Uma recorrência [2] do tipo

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \tag{1.16}$$

só permite determinar o elemento x_n se conhecermos os elementos anteriores x_{n-1} e x_{n-2}, que, para serem calculados, necessitam do conhecimento dos dois elementos anteriores, etc. Fica, portanto, univocamente definida a sequência quando são dados x_1 e x_2 . A sequência de Fibonacci corresponde à recorrência (1.16), onde $x_1 = x_2 = 1$

[2]Uma recorrência é uma fórmula define um elemento de uma sequência a partir de elementos anteriores

É interessante ver como essa sequência se relaciona com o Número de Ouro. Como exemplo, temos uma fórmula que nos permite calcular o n-ésimo termo da sequência sem precisar dos dois termos anteriores. O que é algo importante, quando se trata de recorrência. A fórmula é a seguinte:

Para todo $n \in \mathbb{N}^*$, tem-se que:

$$F_n = \frac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} \tag{1.17}$$

A fórmula (1.17) é chamada de fórmula de Binet, pois segundo Lívio [10]

> Em meados do século XIX, o matemático francês Jacques Phillipe Marie Binet (1786 a 1856) redescobriu uma fórmula que, aparentemente, era conhecida no século XVIII pelo mais prolífico matemático da história, Leonard Euler (1707 a 1783), e pelo matemático francês Abraham de Moivre (1667 a 1754).

Outro fato que chama atenção na expressão acima é que, apesar de ser formada por potências de Φ, que é um número irracional, ela forma uma sequência de números naturais.

Para verificar a fórmula (1.17), devemos mostrar que, de fato, a fórmula de Binet nos permite encontrar todos os termos das sequência de Fibonacci. Para isso, devemos ter $F_1 = F_2 = 1$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, para $n \geq 3$. Assim usaremos o Princípio de Indução Matemática, mas antes iremos enunciá-lo.

Princípio de Indução Matemática: Seja $a \in \mathbb{N}$ e seja $p(n)$ uma setença aberta em n. Sepunha que:

i. $p(a)$ é verdade, e que

ii. $\forall\ n \geq a$, $p(n) \Rightarrow p(n+1)$ é verdade, então $p(n)$ é verdade para todo $n \geq a$.

Vamos verificar que a sentença aberta (1.17) satisfaz as condições iniciais, ou seja, $F_1 = 1$ e $F_2 = 1$.

De fato, para $n = 1$ temos:

$$F_1 = \frac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1}{\sqrt{5}} = \frac{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = 1$$

Para $n = 2$ temos:

$$F_2 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} - \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\frac{1+2\sqrt{5}+5-1+2\sqrt{5}-5}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{4\sqrt{5}}{4}}{\sqrt{5}} = 1$$

Portanto, as condições iniciais são válidas. Agora vamos mostrar pelo Princípio de Indução Matemática que a sentença aberta (1.17) é verdadeira, para todo número natural $n \geq 3$.

Para $n = 3$ temos:

$$F_3 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1+3\sqrt{5}+15+5\sqrt{5}}{8} - \frac{1-3\sqrt{5}+15+5\sqrt{5}}{8}}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\frac{1+3\sqrt{5}+15+5\sqrt{5}-1+3\sqrt{5}-15+5\sqrt{5}}{8}}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{16\sqrt{5}}{8}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2$$

Suponha que a sentença aberta (1.17) vale para $n > 3$, $n \in \mathbb{N}$. Vamos verificar que a sentença aberta também é verdadeira para $n+1$:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} + \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{6-\sqrt{5}}{4}\right)}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1+2\sqrt{5}+5}{2^2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1-2\sqrt{5}+5}{2^2}\right)}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}$$

Logo, verificamos que a fórmula vale para $n+1$. Portanto, pelo Princípio de Indução Matemática, a fórmula vale para todo $n > 3$. Em Contador [5] , encontramos outro exemplo da relação da sequência de Fibonacci e Φ: ele mostra que quanto maiores forem os termos da sequência de Fibonacci, maior será a aproximação ao valor do Número Áureo ao se realizar a divisão entre dois termos consecutivos da sequência. Esta descoberta, segundo Livio (2011, p. 121), é atribuída a Kepler.

Vejamos alguns resultados dessa divisão na tabela (2)

Tabela 2: Razão entre Números de Fibonacci Consecutivos

Razão	Resultado
1/1	1
2/1	2
3/2	$1,5$
5/3	$1,666$
8/5	$1,600$
13/8	1625
21/13	$1,6153$
34/21	$1,6190$
55/34	$1,6176$
89/55	$1,6181$
144/89	$1,6179$

Fonte: Ramos [11]

Provaremos que realmente esta razão se aproxima de Φ

Demonstração: Calculando o limite como segue abaixo a partir da fórmula de Binet (1.17) temos:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{F_n}{F_{n-1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}}{\dfrac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{5}}.\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]}{\dfrac{1}{\sqrt{5}}.\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right]}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}\right]}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left[1 - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}\right]}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}}{1 - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{1 - \left(\frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)^{n-1}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n-1}}$$

Observe que $-1 < \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n-1} < 0$, logo:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n-1} = 0$$

Portanto:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{F_n}{F_{n-1}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n-1}\cdot\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{1-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n-1}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{1} = \Phi$$

■

Notamos ainda pela Tabela (2) que a sequência,

$$\frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{8}{5},\ \frac{13}{8},\ \frac{21}{13},\ \frac{34}{21},\ \frac{55}{34},\ \ldots$$

possui as seguinte propriedades.

- Os termos de ordem par são decrescentes: $2 > 1,666 > 1,625 > 1,6190 > \ldots$;
- Os termos de ordem ímpar são crescentes: $1 < 1,5 < 1,600 < 1,6153 < \ldots$;
- Os termos consecutivos aparecem em ordem alternada.

Segundo Lívio [10] , esta conexão foi descoberta em 1611 (embora possivelmente um anônimo italiano o tenha feito antes) pelo famoso astrônomo alemão Johannes Kepler. Porém, mais de cem anos se passaram antes que esta conexão fosse provada (e, mesmo assim, não totalmente) pelo matemático escocês Robert Simson (1687–1768). Kepler, aliás, ao que tudo indica, topou com a Sequência de Fibonacci por conta própria e não lendo o Liber Abaci.

Como se não bastasse a surpresa que esse resultado nos proporciona, ele na verdade está presente em qualquer sequência de Fibonacci, como bem elucida Huntley [9]:

> [...] o fi, em conformidade com sua característica de aparecer inesperadamente em locais estranhos, está relacionado com qualquer sequência de inteiros formada de acordo com a lei segundo a qual cada termo é soma dos dois termos

anteriores, quaisquer que sejam os dois primeiros termos: $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$. A razão de termos sucessivos, u_{n+1}/u_n, aproxima-se cada vez de fi à medida que n aumenta.

Tomemos como exemplo a sequência de Fibonacci de termos iniciais 5 e 8:

$$6,\ 9,\ 15,\ 24,\ 39,\ 63,\ 102,\ 165,\ ...$$

cujas as razões dos termos consecutivos com aproximação de 4 casas decimais se aproximam rapidamente de Φ (Tabela 3).

Tabela 3: Razão entre valor consecutivos de uma sequência arbitrária

Razão	Resultado
9/6	$1,5$
15/9	$1,6667$
24/15	$1,6$
39/24	$1,625$
63/39	$1,6153$
102/63	$1,6190$
165/102	$1,6179$
267/165	$1,6182$

Fonte: Huntley [9]

1.4 Conclusões

Neste capítulo, conhecemos um pouco do conceito histórico do Número de Ouro que é representado pela letra grega Φ e sua relação com os pitagóricos. Mostramos como obter o seu valor numérico através de cálculos algébricos concluído assim que $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1,6180339887...$ .Evidenciamos a relação intrínseca que há entre o Número de Ouro e a sequência de Fibonacci que através de um problema matemática expandiu drasticamente o escopo da Razão Áurea e de suas aplicações. Além de problemas algébricos e suas propriedades que foram demostradas neste capítulo, o Número do Ouro está relacionado a problemas geométricos que veremos no próximo capítulo embasado nos resultados que provamos anteriormente.

2 A GEOMETRIA DO NÚMERO DE OURO

Além do segmento áureo descrito no capítulo anterior, existem outros elementos geométricos que apresentam a Razão Áurea. Elementos esses que estão relacionados ao Número de Ouro tanto em figuras geométricas quanto na natureza.

Nas figuras geométricas temos a presença da razão áurea no triângulo áureo, no retângulo áureo, no pentagrama, em algumas espirais e em outros problemas geométricos cuja solução depende de Φ. Todos os elementos descritos auxiliam na compreensão dos elementos da natureza. Por exemplo, a quantidade de folhas e o ângulo ideal para distribuição dos ramos de plantas podem estar relacionados ao Número de Ouro. A seguir temos construções geométricas áureas detalhadas e justificadas.

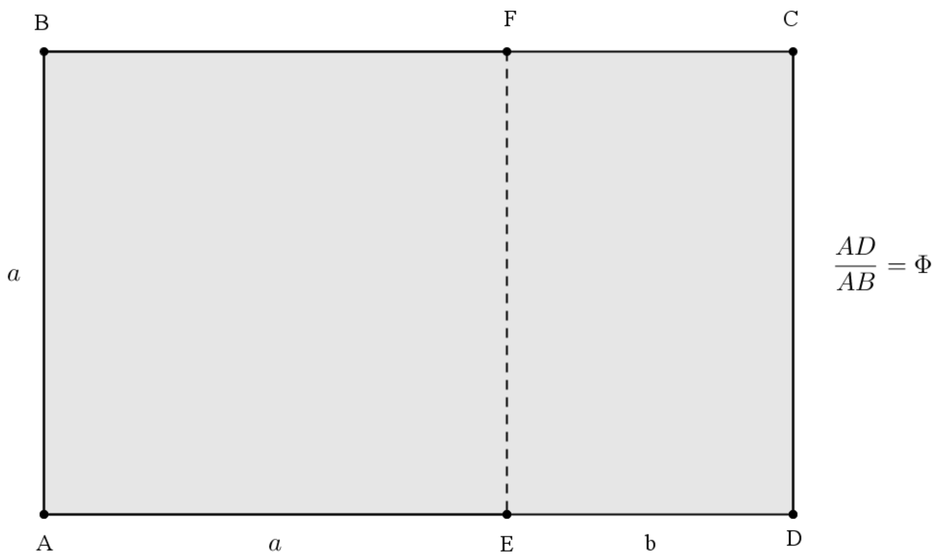
2.1 O Retângulo do Ouro

Se observarmos ao nosso redor, podemos ver que somos cercados de muitas figuras retangulares e que alguns retângulos de certas proporções nos atraem mais que outros. O matemático grego Endoxus estudou a teoria das proporções e constatou que a razão áurea era uma importante fonte para a estética, considerando o retângulo cujos lados apresentavam essa relação de notável harmonia. Endoxus chamou-o, então, de retângulo áureo [7]. Durante milênios, a arquitetura clássica grega prevaleceu. O retângulo de ouro era padrão, mas depois de muito tempo veio a construção gótica com formas arredondadas, que não utilizavam retângulo de ouro grego.

Definição 2.1.1 *Chama-se retângulo áureo a qualquer retângulo no qual as suas medidas estão na Razão Áurea.*

Isto significa que, se no retângulo áureo da Figura 4 , destacarmos o quadrado $ABFE$, o retângulo restante, $CDEF$, será semelhante ao retângulo original, isto é, $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{CD}{DE}$.

Figura 4: Retângulo Áureo



Provaresmos este fato a seguir:

Demonstração: Devemos provar que os restângulos $ABFE$ e $CDEF$ são semelhantes, isto é, $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{CD}{DE}$.

De fato, seja $AB = AE = a$ e $DE = b$. Pela definição acima, temos que:

$$\Phi = \frac{AD}{AB}$$

Logo:

$$\Phi = \frac{a+b}{a} \ \Rightarrow \ \Phi = 1 + \frac{b}{a} \ \Rightarrow \ \frac{b}{a} = \Phi - 1 \ \Rightarrow \ \frac{a}{b} = \frac{1}{\Phi - 1}$$

Pela equação (1.15) segue que:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{-\Phi'}$$

E pela equação (1.13), temos que:

$$\frac{a}{b} = \Phi \ \Rightarrow \ \frac{CD}{DE} = \Phi$$

Portanto:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{CD}{DE}$$

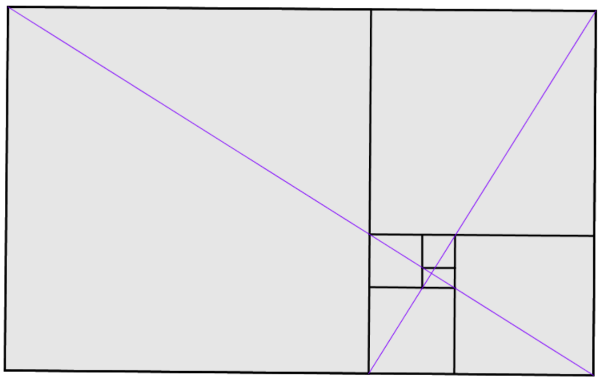
■

Concluímos assim que se o retângulo de lados a + b e a é um retângulo áureo, então também será áureo o retângulo de lados a e b.

Continuando nessa tarefa, ou seja, destacamos agora um quadrado do retângulo áureo $CDEF$, obtemos outro retângulo interior a este, o qual também obedece às proporções áureas, e, assim, de maneira infinita, construiremos infinitos retângulos, todos eles guardando as proporções áureas. O Retângulo Áureo é o único retângulo com a propriedade de que, ao se cortar um quadrado, forma-se outro retângulo similar.

Segundo Lívio [10], tal sequência de retângulos continuamente decrescentes converge para um ponto inalcançável que, devido às propriedades "divinas" atribuídas à Razão Áurea, o matemático Clifford A. Pickover sugeriu que deveríamos nos referir a esse ponto como "O Olho de Deus". Tal ponto é chamado, na literatura matemática, de foco ou polo. Se desenharmos duas diagonais em qualquer par de retângulos pai-filho da série, como na Figura 5, e todas irão se cruzar no mesmo ponto, assim obtemos o ponto denominado como o "Olho de Deus".

Figura 5: O Olho de Deus



Considerando a sua reivindicação de mérito estético, muitos estudiosos afirmaram que o retângulo áureo é o retângulo mais esteticamente agradável. Tendo exercido, ao longo de séculos, muita influência na pintura e na arquitetura (como veremos posteriormente), atualmente, o mesmo é muito utilizado, também, no formato de capas de livros e cadernos, cartões de crédito, cartas de baralho, carteira de identidade, janelas, etc. A obra mais concisa dedicada a este assunto, *Der goldene Schnitt* (1884), é de um alemão, Adolf Zeisng

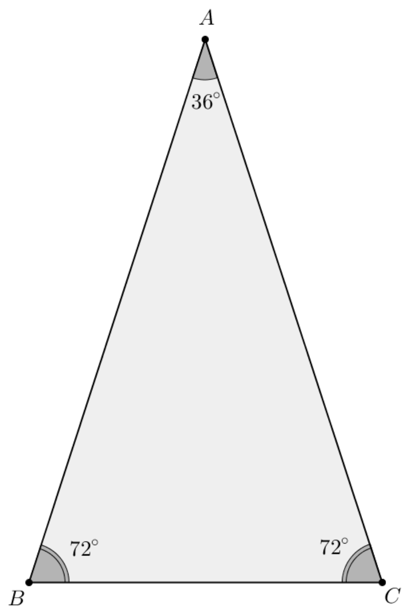
([9]). Ela parece ter encorajado o famoso psicólogo alemão, Gustav Fechner, a iniciar a primeira pesquisa séria sobre as pretensões do retângulo áureo de possuir um interesse estético especial. Se desenharmos uma linha reta do polo até qualquer ponto da curva, ela cortará a curva formando exatamente o mesmo ângulo.

Gustav T. Fechner (1801–1887), realizou na década de 1860 experiências cujo objetivo era o de mostrar qual tipo de retângulo era o preferido pela maioria das pessoas. Tais experiências consistiam em mostrar a vários voluntários dez retângulos onde o quociente entre comprimento e largura variavam de 1,00 (no caso de um quadrado) à 2,5 (o que seria um retângulo alongado). Era pedido aos voluntários que escolhessem o retângulo mais agradável, elegante e harmônico. Fechner constatou que 76% das escolhas se concentraram em três retângulos que tinham as razões 1,50, 1,62 e 1,75, com pico no retângulo áureo (1,62). Cada um dos demais retângulos foi escolhido por menos de 10% dos voluntários ([10]).

2.2 Triângulo Áureo

Definição 2.2.1 *Chama-se triângulo áureo a todo triângulo isósceles cujos ângulos internos são* $36^o, 72^o$ *e* 72^o *(Figura 6)* ([9]*).*

Figura 6: Triângulo Áureo

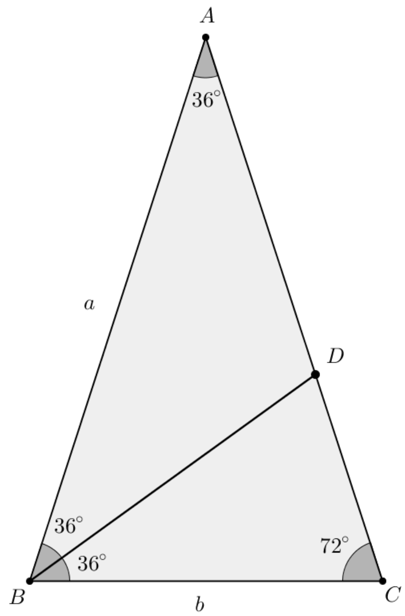


Proposição 1 *Em um triângulo áureo, a bissetriz interna de um dos ângulos da base divide o lado oposto em média e extrema razão.*

Demonstração:

Considere o triângulo ABC de modo que $\widehat{B} = \widehat{C} = 72°$. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é $180°$, segue que o ângulo $\widehat{A} = 36°$. Seja D a interseção da bissetriz $\widehat{B}$ com o lado $\overline{AC}$, com $\overline{AB} = \overline{AC} = a$ e $\overline{BC} = b$ (Figura 7).

Figura 7: Triângulo ABC e bissetriz interna do ângulo $A\widehat{B}C$



Do fato $\overline{BD}$ ser bissetriz ângulo $A\widehat{B}C$, temos que o triângulo ABC é dividido em dois triângulos também isósceles, o triângulo ABD de base $\overline{AB}$ e o triângulo BDC de base $\overline{DC}$. Logo temos que:

$$\begin{cases} \overline{AD} = \overline{BD} \\ \quad e \\ \overline{BD} = \overline{BC} = b \end{cases}$$

Portanto por transitividade, $\overline{AD} = b$

Por outro lado, como $D \in \overline{AC}$, então $\overline{AD} + \overline{DC} = \overline{AC} = a$. Segue que $\overline{DC} = a - b$. Usando o fato de que, em qualquer triângulo, o maior lado opõe-se ao maior ângulo, concluímos que $\overline{BC} > \overline{DC}$, pois no triângulo BDC, $\overline{BC}$ é o oposto a um ângulo de $36°$ (Figura 8)

Figura 8: Triângulo ABC, bissetriz interna do ângulo $A\widehat{B}C$ e ângulos internos

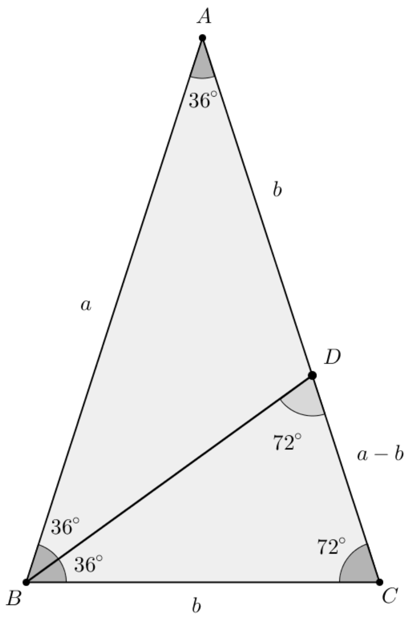
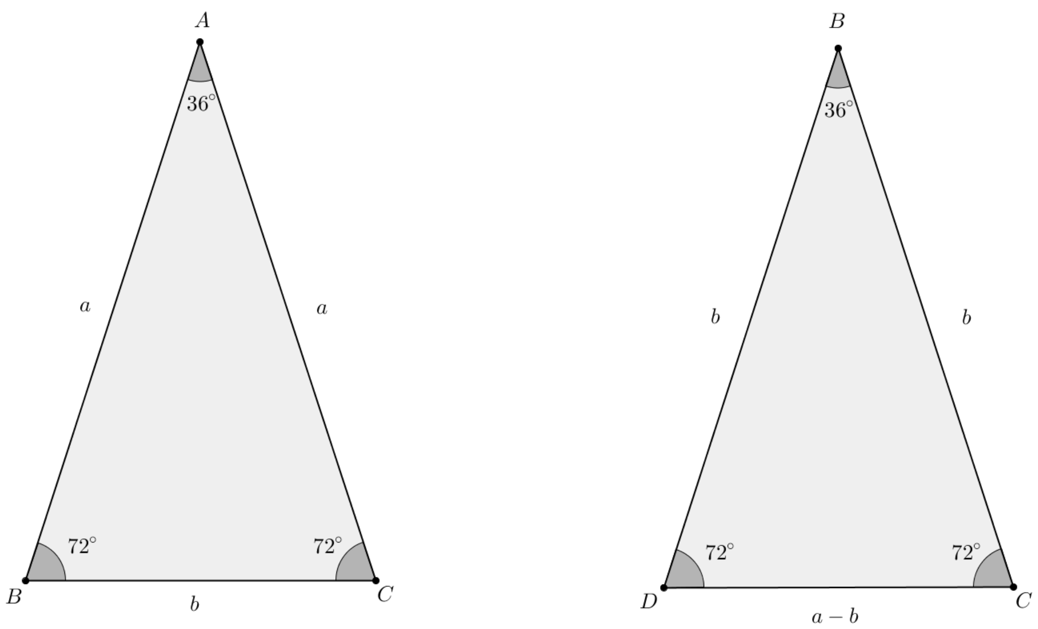


Figura 9: Triângulos Semelhantes



Observando a Figura 8 podemos ver que os triângulos ABC e BDC são semelhantes pelo caso AAA. Daí segue que:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DC}}$$

Mas $\overline{BC} = \overline{AD}$, então temos que:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DC}} \text{ , com } \overline{AD} > \overline{DC}$$

Isto implica que:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$$

Então, pela definição de segmento áureo, D divide o lado AC na Razão Áurea. Observamos também que $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \Phi$, isto significa que os lados congruentes do triângulo estão na Razão Áurea com a base que também pode ser usado como definição para triângulo áureo.

■

2.3 A Espiral Logarítmica

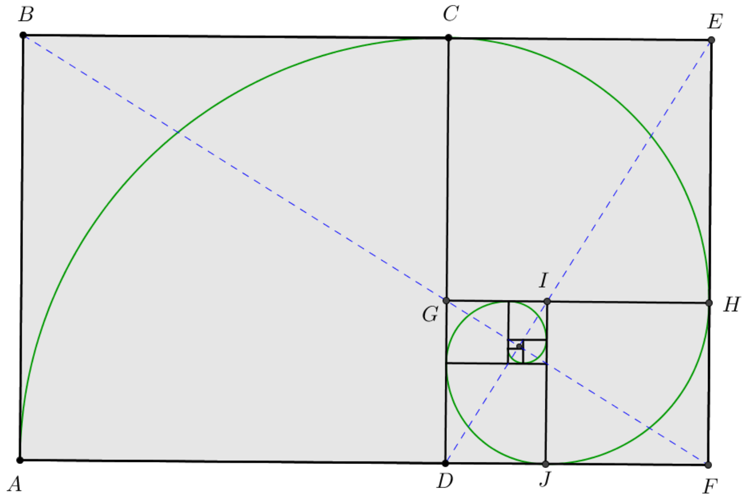
A partir da sequência infinita de retângulos áureos, podemos desenhar uma *espiral áurea* traçando o quarto de circunferência de cada um dos quadrados, obtendo assim a Figura 10.

Dada como uma das mais belas curvas matemáticas também é conhecida como *espiral logarítima* e *espiral equiangular*. Esta última denotação foi cunhada em 1638 pelo matemático e filósofo francês René Descartes (1596-1650), em cuja homenagem batizamos os números usados para localizar um ponto no plano (coordenadas cartesianas)[10].O nome "equiangular" reflete outra propriedade única da espiral logarítmica.

Deve ser notada, ao observar a Figura 10, algumas características interessantes [9]:

1. O ponto limite O é chamado de pólo da espiral equiangular que passa pelas secções áureas A, C, H, ..., e assim por diante. Este ponto é localizado na interseção entre os segmentos BF e ED.

Figura 10: Espiral Logarítima



2. Situam-se secções áureas alternadas da espiral *retangular* $BEFDG$... nas diagonias BF e ED. O que sugere um método conveniente para se construir a figura.

3. As diagonais BF e ED são perpendiculares entre si.

4. Os pontos C, O são colineares, assim como também o são os pontos H, O e A.

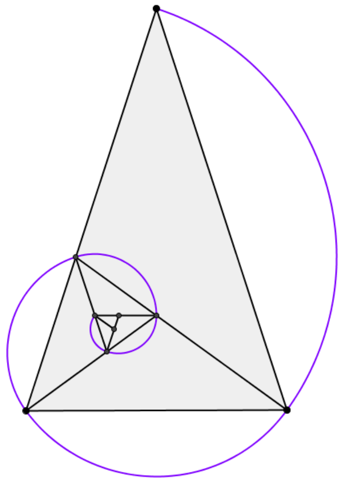
5. Os quatros ângulos retos do ponto O têm CJ e AH como suas bissetrizes, de modo que essas linhas são perpendiculares entre si.

6. $BO/OE = OE/OF = OF/OD =$ ... Existe um número infinito de triângulos semelhantes, cada um igual a metade de um retângulo áureo.

Outra propriedade interessante da espiral logarítmica é que por mais diferentes que dois segmentos da curva possam ser em tamanho, eles não são diferentes em formato. Suponhamos que, com a ajuda de um microscópio, fosse tirada uma fotografia da convolução, próximos ao pólo O, pequenas demais para serem vistas a olho nu. Se fosse adequadamente ampliada, essa cópia poderia ser encaixada exatamente em uma espiral do tamanho da Figura 10. Além disso, a espiral não possui ponto terminal: ela pode crescer para fora (ou para dentro) indefinidamente, mas seu formato não se altera [9].

A espiral logarítma pode também ser obtida a partir de um Triângulo Áureo. Vimos seção anterior que, começando de um Triângulo Áureo e bissecando um ângulo da base, obtemos um Triângulo Áureo Menor. Continuando o processo de bissecar o ângulo da base *ad infinitum*, iremos gerar uma série de triângulos rodopiantes. Ligando os vértices de um Triângulo Áureo progressivamente, obteremos uma espiral logarítma (Figura 11).

Figura 11: Espiral Logarítima a partir de um Triângulo Áureo



2.4 Pentágono Regular e o Pentragrama

O número de polígonos regulares que se podem construir em espaço bidimensional é ilimitado . Entendemos por polígono regular segundo a seguinte definição:

Definição 2.4.1 *Um polígono convexo é regular se, e somente se, tem todos os seus lados congruentes e todos os seus ângulos internos congruentes.*

Porém, o número de poliedros convexos regulares, em espaço de três dimensões, é cinco. Fica a pergunta: quantas figuras regulares de quatro dimensões são possíveis?

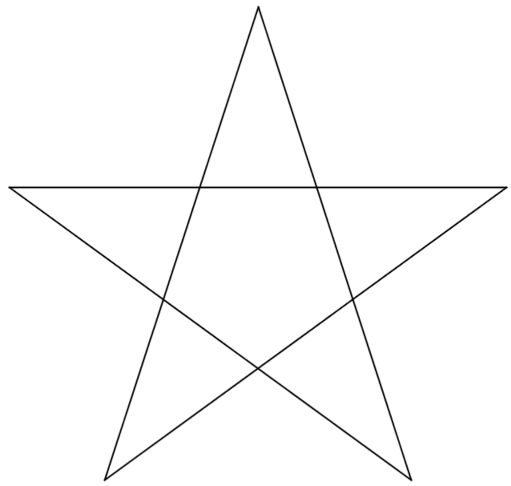
Segundo Hungley [9], os pitagóricos que se interessavam por tais assuntos, consideravam o dodecaedro regular (poliedro de 12 faces) digno de respeito especial. O dodecaedro regular é formado por faces pentagonais regulares.

Definição 2.4.2 *Em geometria, pentágono é um polígono com cinco lados.*

Trançando todas as diagonias de uma face do dodecaedro (um pentágono), obtemos a forma de um estrela, que os pitagóricos chamavam de pentagrama ou triângulo triplo (Figura 12). Eles utilizavam como um símbolo e emblema da Sociedade de Pitágoras (como falamos no capítulo anterior). O pentagrama era também considerado, pelos membros da antiga sociedade de Pitágoras, um símbolo de boa saúde.

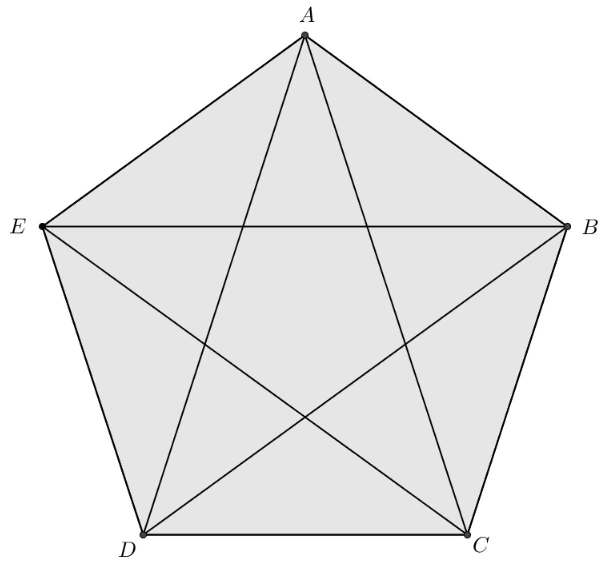
Observamos que após obter o pentagrama através do pentágono regular, em seu centro, obtemos outro pentágono regular (Figura 13). Traçando, agora, as diagonais do novo

Figura 12: Pentagrama ou Triângulo Triplo



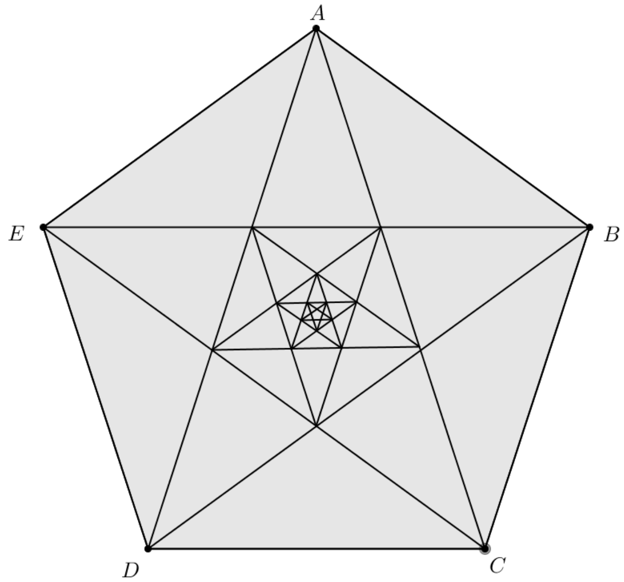
pentágono, teremos mais um pentágono e um pentagrama. Esse processo pode ser continuado, infinitamente, obtendo pentágonos e pentagramas cada vez menores, conforme Figura 14. Esse processo é conhecido como autopropagação (Figura 14).

Figura 13: Propriedade da Autopropagação



Existem várias relações entre o pentágono regular e a razão áurea. Segundo Lívio [10], a construção do pentágono foi o principal motivo do interesse dos gregos pela Razão Áurea. Provaremos a seguir que a diagonal e o lado de um pentágono regular estão na Razão Áurea e, como o Φ é um número irracional, esse seria o motivo do processo descrito acima não ter fim.

Figura 14: Pentágono e Pentagrama

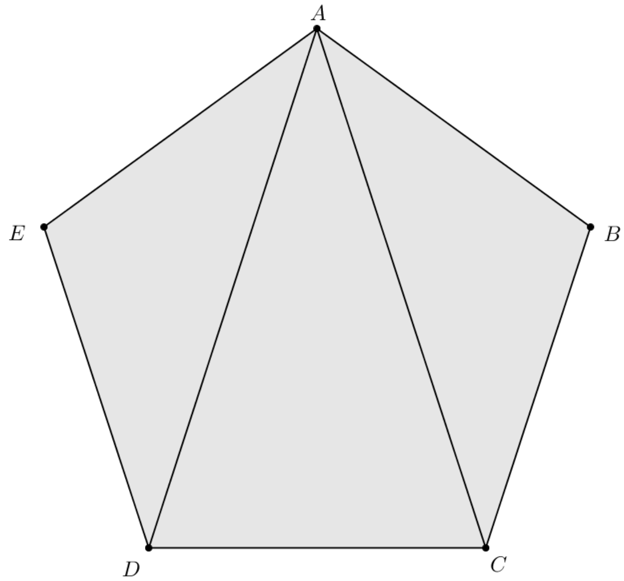


Proposição 2 *A razão entre a diagonal e o lado do pentágono é* Φ

Demonstração:

Dado um pentágono regular $ABCDE$. Trançando as diagonais $\overline{AD}$ e $\overline{AC}$, obtemos três triângulos isósceles: ABC, ACD e ADE (Figura 15).

Figura 15: Pentágono regular com duas diagonias



A soma dos ângulos internos de um polígono convenxo de n lados ($n \geq 3$) é dado pela seguinte fórmula matemática [8]:

$$S_n = (n-2).180° \tag{2.1}$$

Logo, utilizando a fórmula 2.1, a soma dos ângulos internos de um pentágono é:

$$S_5 = (5-2).180° = (3).180° = 540°$$

Como ângulos internos de um polígono regular são todos congruentes, então podemos concluir que cada ângulo interno do pentâgono regular mede 108°. Por outro lado sabendo que a soma dos ângulos interno de um triângulo é:

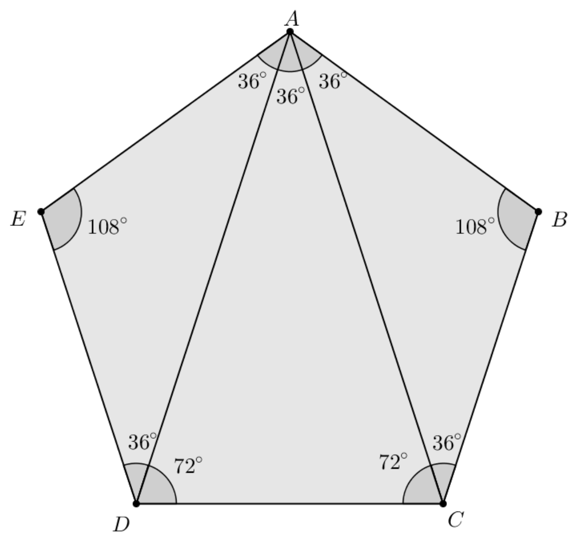
$$S_3 = (3-2).180° = (1).180°$$

E usando o fato que o triângulo ABC é isóceles, logo temos que:

$$A\widehat{C}B = C\widehat{A}B = \frac{180-108}{2} = 36°$$

O triângulo ADE na figura 16 também é isósceles. Então, pela análise feita acima, $E\widehat{A}D = A\widehat{D}E = 36°$. Assim, as medidas dos ângulos internos do triângulo ACD são:

Figura 16: Pentágono com duas diagonais e seus ângulos internos



$$D\widehat{A}C = 108 - 36 - 36 = 36°$$

e

$$A\widehat{D}C = 108 - 36 = 72^\circ$$

Portanto, o triângulo ACD é um triângulo áureo, logo segue que:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} = \Phi$$

Ou seja, a razão entre a. diagonal e o lado do pentágono é Φ.

■

Note que na figura 16, temos um trângulo do meio, com uma razão de Φ, entre o lado e a base (Preposição 2), que é um *Triângulo Áureo* e os outros dois triângulos laterais, com uma razão de $\frac{1}{\Phi}$ entre o lado e a base, são às vezes chamados de *Gnômons Áureos*. Na Figura 8 demonstra um propriedade única dos Triângulos Áureos e dos Gnômos Áureos, eles podem ser bissectados em triângulos menores que também são Triângulos Áureos e Gnômons Áureos.

Proposição 3 *O ponto de intersecção de duas diagonais quaisquer de um pentágono regular divide ambas na Razão Áurea.*

Demonstração:

Considere o pentágono regular da figura 15. Traçando a diagonal $\overline{CD}$, obtemos o ponto P, ponto de intersecção das diagonais $\overline{CE}$ e $\overline{AD}$, figura 17. Temos que o triângulo EDC é isósceles e:

$$C\widehat{E}D = E\widehat{C}D = \frac{180 - 108}{2} = 36^\circ$$

Logo, $\overline{EC}$ é bissetriz de $D\widehat{C}A$, o que pela **preposição 1** resulta:

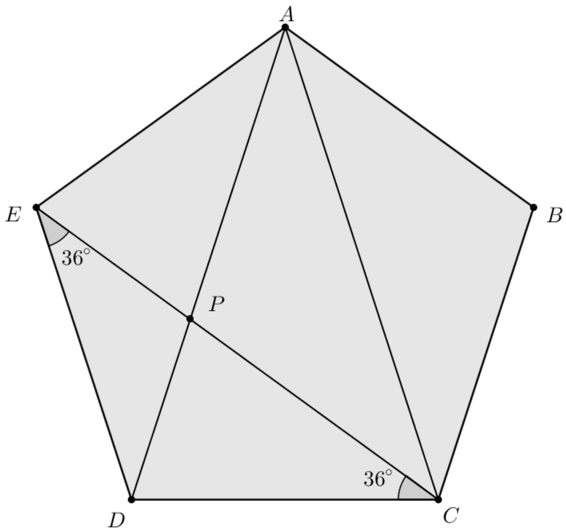
$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PD}} = \Phi$$

Do triângulo ACE, que é um triângulo áureo, obtemos que $\frac{\overline{CP}}{\overline{PE}} = \Phi$ usando processo análogo ao mostrado acima.

■

A associação da Razão Áurea com o pentágono, a simetria quíntupla e os sólidos platônicos é interessante por si mesma e, de fato, foi mais do que suficiente para instigar a

Figura 17: Pentágono com três diagonais



curiosidade nos antigo gregos. A fascinação pitagórica pelo pentágono e pelo pentagrama, somada ao interesse de Platão pelos sólidos regulares e sua crença de que estes representavam entidades cósmicas fundamentais incitaram gerações de matemáticos a trabalhar na formulação de numerosos teoremas referentes a Φ.

2.5 O Ângulo de Ouro

Dado uma circunferência de centro O, se dividirmos em dois arcos tal que a razão entre o comprimento do arco ACB (o arco maior) e o comprimento do arco ADB (o arco menor) for é igual a Φ, então chamaremos o ângulo θ de o *Ângulo de Ouro* (Figura 18).

Proposição 4 *Se um ângulo θ é um ângulo de ouro então ele vale $3.\pi - \pi\sqrt{5}$ (em radianos) e aproximandamente $137,5^o$ (em graus).*

Demonstração:

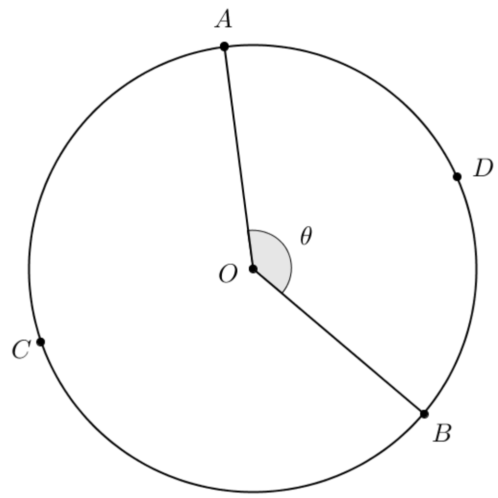
Seja o comprimento da circunfêrencia na figura 18 igual a. Como o comprimento C de uma circunferência de raio r é dado pelo a seguinte fórmula matemática:

$$C = 2\pi.r \tag{2.2}$$

Segue da equação 2.2 que:

$$a = 2.\pi.r \tag{2.3}$$

Figura 18: Cincunferência de Centro O



Tomemos agora, por b, o comprimento do arco ADB. Logo temos que a relação entre um ângulo α e o comprimento l de um arco é dado pela seguinte fórmula matemática:

$$\alpha = \frac{l}{r} \tag{2.4}$$

Segue da equação 2.4 que:

$$\theta = \frac{b}{r} \Rightarrow b = \theta.r \tag{2.5}$$

Por outro lado, segue da definição da Razão Áurea que:

$$\text{Se } \frac{a}{a-b} = \Phi \text{ ,então: } \frac{a}{a-b} = \frac{a-b}{b} \tag{2.6}$$

Substituindo os valores obtidos nas equações 2.3 e 2.5 na equação 2.6, temos:

$$\frac{2.\pi.r}{2.\pi.r - \theta.r} = \frac{2.\pi.r - \theta.r}{\theta.r} \Rightarrow 2.\pi.\theta.r^2 = (2.\pi.r - \theta.r)^2$$

$$\Rightarrow 2.\pi.\theta.r^2 = 4.\pi^2.r^2 - 4.\pi.r^2.\theta + \theta^2.r^2 \tag{2.7}$$

Dividindo em ambos os lados da equação 2.7 por r^2, obtemos a seguinte equação:

$$2.\pi.\theta = 4.\pi^2 - 4.\pi.\theta + \theta^2 \;\Rightarrow\; \theta^2 - 6.\pi.\theta + 4.\pi^2 \tag{2.8}$$

Note que equação 2.8 pode ser tomada como equação de 2º grau de variável θ. Logo resolveremos a equação 2.8 pela fórmula de Baskara. Temos que:

$$\Delta = (-6.\pi)^2 - 4.1.(4.\pi^2) = 36.\pi^2 - 16.\pi^2 = 20.\pi^2$$

Logo pela fórmula de de Báskara temos:

$$\theta = \frac{-(-6.\pi) \pm \sqrt{20.\pi^2}}{2.1} = \frac{6.\pi \pm 2\pi\sqrt{5}}{2} = 3.\pi \pm \pi\sqrt{5}$$

Logo obtemos as duas soluções:

$$\theta_1 = 3.\pi + \pi\sqrt{5} \tag{2.9}$$

$$\theta_2 = 3.\pi - \pi\sqrt{5} \tag{2.10}$$

Portanto, encontramos que o ângulo θ vale $3.\pi - \pi\sqrt{5}$ (ângulo do ouro) e seu ângulo replementar vale $3.\pi + \pi\sqrt{5}$. Note que em graus θ_2 vale aproximandamente $137,5^o$.

■

2.6 Conclusões

Neste capítulo mostramos que a Razão Áurea está presente em figuras geométricas e definimos os nomes destas figuras que envolvem o Número do Ouro, que são: o Triângulo Áureo, o Retângulo de Ouro, a Espiral Logarítmica, o Pentágono, o Pentagrama e o Ângulo de Ouro. Para cada figura geométrica que definimos, fizemos as demonstrações que envolvem nos seus resultados a Razão Áurea. Todos os elementos descritos e justificados neste capítulo auxiliam na compreensão dos elementos da natureza que envolvem o Número de Ouro que veremos no próximo capítulo.

3 A UBIQUIDADE DO NÚMERO DE OURO

Ubiquidade é a propriedade de estar presente em diversos lugares. O Φ possui essa propriedade. A ubiquidade desse número fica evidente não apenas por ter sido usada pelo Pitagóricos, Euclides, Fibonacci e outros matemáticos, mas sim por ser estudada e usada por biólogos, arquitetos, artistas em geral e profissionais das mais diversas áreas que buscam nesse número a fonte de toda beleza e harmonia como por exemplo:

- no mundo da natureza, associado com filotaxia, com os padrões de inflorescência das flores da família das compostas, tais como girassol, com o formato da concha náutilo e com outros objetos naturais.
- nas artes: nas obras de Leonardo da Vinci.
- na arquitetura: nas obras do arquiteto Lê Corbusier.
- etc.

Detalharemos neste capítulo alguns desses âmbitos que envolvem e a Proporção Divina.

3.1 A Proporção Divina na Arte

O Renascimento produziu uma importante mudança na direção na história da Razão Áurea. A partir de então, esse conceito deixou de ficar restrito à matemática e encontrava seu caminho nas explicações naturais e nas artes.

No âmbito das arte, podemos notar que muitas das afirmações relativos da utilização da Razão Áurea na pintura estão diretamente associadas às supostas propriedades estéticas do Retângulo Áureo (Figura 4). Lívio [10] levata o seguinte questionamento:

> [...], "será que algum pintor renascentista ou pré-renascentista realmente baseou sua composição artística no Retângulo Áureo?", [...]

Um nome invariavelmente aparece em quase todas as afirmações sobre o aparecimento da Razão Áurea é de Leonardo Da Vinci. Leonardo Di Ser Piero Da Vinci nasceu em 15 de abril de 1452, no vilarejo de Anchiano, na comuna de Vinci, subordinada ao governo de Florença. Leonardo nasceu no penúltimo ano da Idade Média (oficialmente tal período terminou em maio de 1453), numa época que a Europa vivenciava mudanças culturais, políticas, sociais, ideológicas, etc. Por esta época na Itália, a qual estava dividida em cidades-estados e um reino (o Reino e Nápoles), o Renascimento já havia se iniciado, se encontrava em sua Segunda Fase (as fases da Renascença são divididas em: Trecentos, Quattrocentos e Cincocentos). Alguns autores atribuem até mesmo a inveção do nome *Proporção Divina* ao famoso pintor.

A discussão se concentra geralemente em cinco obras do italiano: "Virgem dos Rochedo", "São jerônimo", o "Homem Vitruviano", o desenho de "uma cabeça de ancião"e a famosa "Mona Lisa". Leonardo foi o ilustrador da livro *A Proporção Divina* de Pacioli (1445) na qual forneceu sessenta ilustrações de sólidos, representados tanto na forma de estrutura básica como na forma sólida.

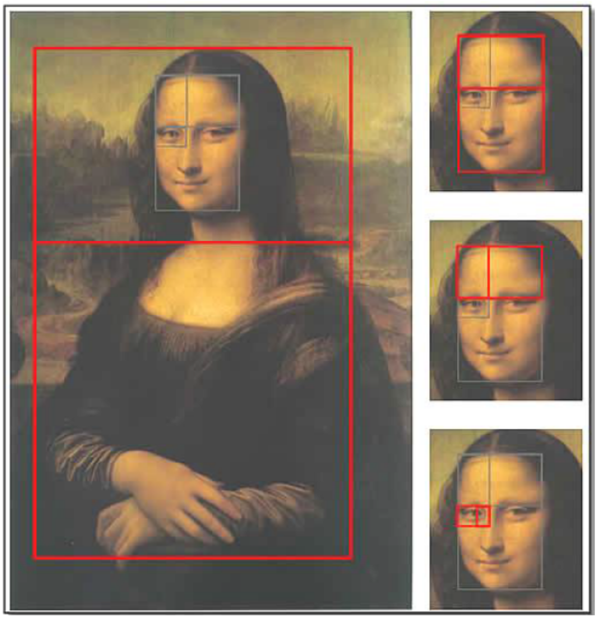
No quadro de Mona Lisa, suponha-se que seja possível verificar várias referências à razão áurea. Se desenharmos um retângulo em torno do rosto da personagem, a altura dividida pela largura dará aproximadamente 1,618. Mas falta qualquer indicação clara (e documentada) do lugar exato onde esse retângulo deveria ser desenhado (Figura 19).

No caso das duas versões da "Virgem dos Rochedos"(uma atualmente no Louvre, em Paris, a imagem da esquerda na Figura 20, e a outra na National Gallery, em Lodres, a imagem da direita na Figura 20). De acordo com Lívio [10], a razão entre a altura e a largura da pintura que se pensa que foi executada primeiro (imagem da esquerda da Figura 20) é de cerca de $1,64$ e da outra, de $1,58$, ambas aproximadamente de Φ, porém mais próximas da razão simples de $1,60$.

Em o seu famoso desenho do *Homem Vitruviano* de 1940 (Figura 21), foi uma pretensão de Leonardo de esboçar as proporções perfeitas do corpo humano. O desenho foi proposto por Marcus Vitruvius Pollio em sua obra Os Dez Livros da Arquitetura no século I a. C. A proposta era um modelo ideal do corpo humano em que parte de suas medidas baseavam-se na Razão Áurea. Segundo Vitruvius:

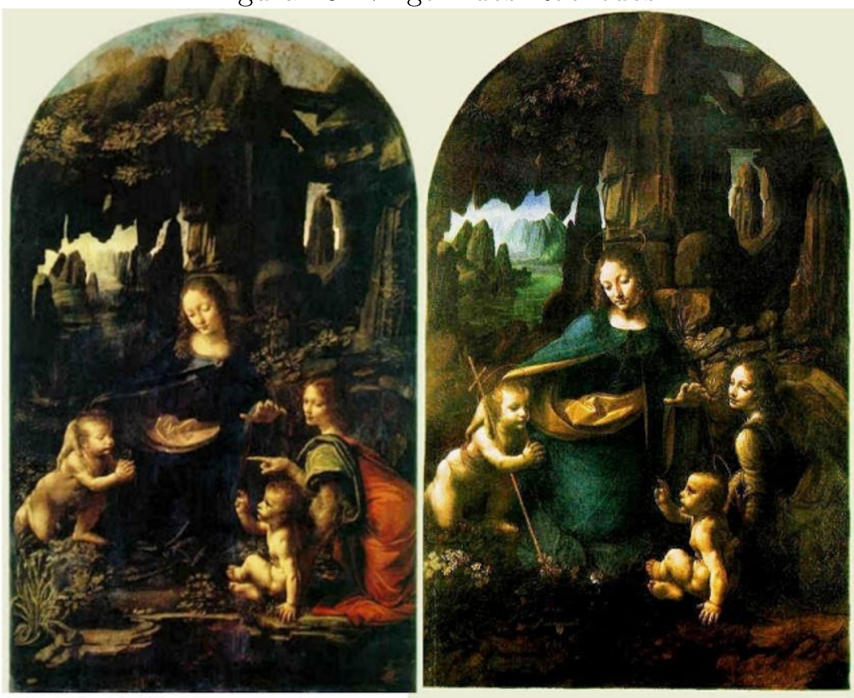
> ... no corpo humano, o ponto central naturalmente é o umbigo. Porque se um

Figura 19: Mona lisa e o Retângulo Áureo



Fonte: Liliane [1]

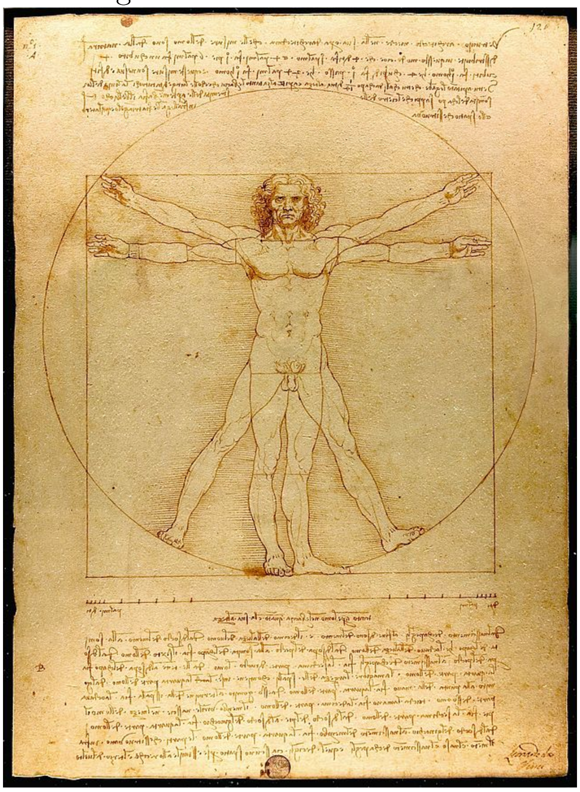
Figura 20: Virgem dos Rochedos



Fonte: Liliane [1]

homem for colocado deitado de costas, com as mãos e os pés estendidos e um compasso for centrado no seu umbigo, os dedos de suas mãos e de seus pés irão tocar a circuferência do círculo descrito a partir desse ponto. E assim como o corpo humano produz um contorno circular, uma figura quadrada também pode ser encontrada a partir dele. Pois se medirmos a distância das solas dos pés até o toppo da cabeça e depois aplicarmos essa medida aos braços esticados, veremos que a largura será a mesma que a altura como no caso de superfícies planas que são perfeitamente quadradas.

Figura 21: Homem Vitruviano



Fonte: Blog História da Matemática

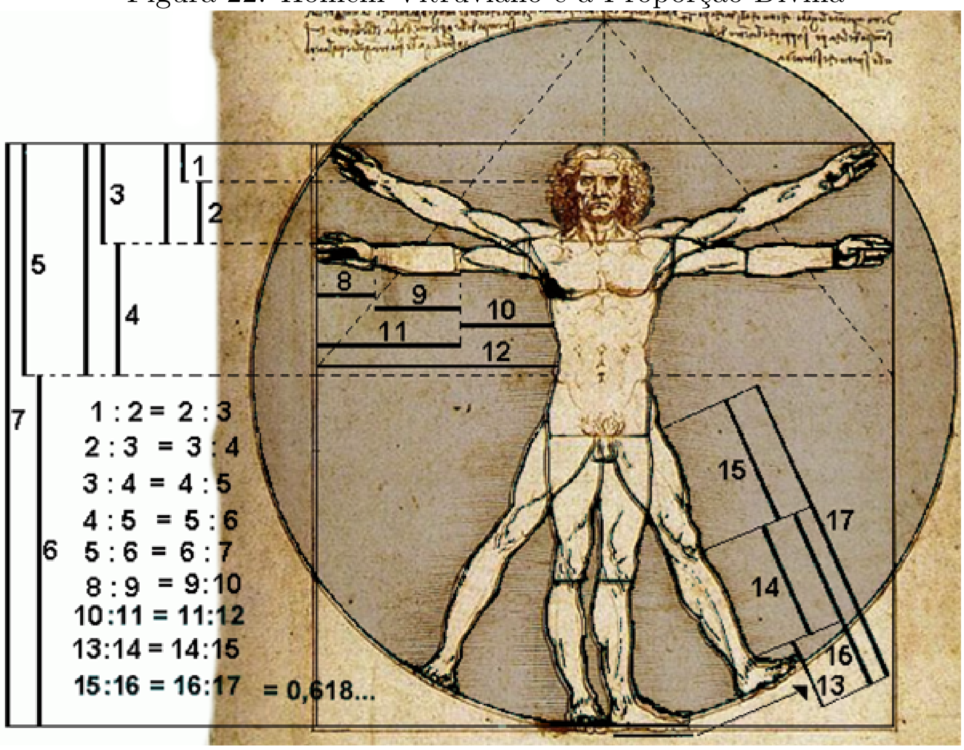
O Homem Vitruviano de Leonardo Da Vinci é usado como referência estética de simetria e proporção em todo o mundo. Mas não pode ser qualquer homem, ele deverá ter proporções bem específicas:

- Face - do queixo ao topo da testa = 1/10 da altura do corpo.
- Palma da mão - do pulso ao topo do dedo médio = 1/10 da altura do corpo.
- Cabeça - do queixo ao topo = 1/8 da altura do corpo.
- Base do pescoço às raízes do cabelo = 1/6 da altura do corpo.

- Meio do peito ao topo da cabeça = 1/4 da altura do corpo.
- Pé = 1/6 da altura do corpo.
- Largura do peito = 1/4 da altura do corpo.
- Largura da palma da mão = quatro dedos.
- Largura dos braços abertos = altura do corpo.
- Umbigo = centro exacto do corpo.
- Base do queixo à base das narinas = 1/3 da face.
- Nariz - da base às sobrancelhas = 1/3 da face.
- Orelha = 1/3 da face.
- Testa = 1/3 da face.

Segundo o modelo perfeito descrito por Vitrúvio e desenhado por Da Vinci, as medidas obedecem a divina proporção (Figura 22). O desenho original do Homem Vitruviano faz parte da "Gallerie dell'Accademia" em Veneza, Itália.

Figura 22: Homem Vitruviano e a Proporção Divina



Fonte: Blog AMC - Design

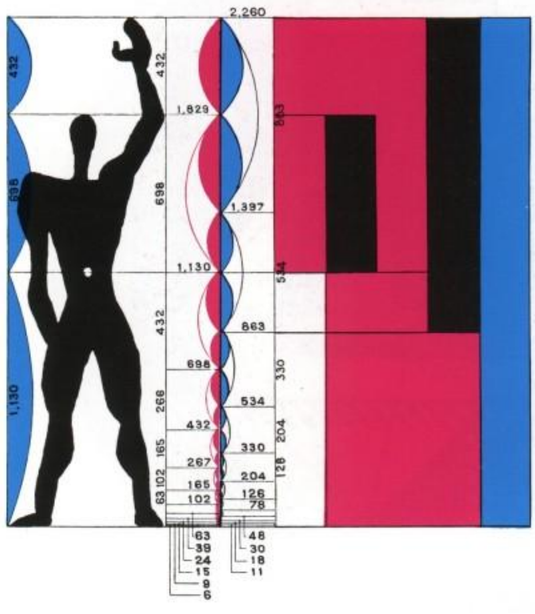
Além de Leonardo da Vinci, supõe-se que muitos outros pintores renancentistas e pré-renascentistas tenham utilizado a Razão Áurea em seus trabalhos. Segundo Lívio [10], o primeiro artista proeminente e teórico da arte a utilizar a Razão Áurea provavelmente foi Paul Sérusier (1984-1927. Embora o interesse de Sérusier pela Razão Áurea pareça ter sido mais filosófico do que prático, ele realmente usou essa proporção em algumas de suas obras, principalmente para "verificar, e ocasionalmente checar, suas invenções de formas e suas composições". Após Sérusier, muitos artistas utilizaram comprovadamente a Razão Áurea em seus trabalhos, como escultor James Lipchitz (1891-1973), e os pintores Juan Gris (1887-1927), Gino Severino (1883-1966), Salvador Dalí e outros.

3.2 A Proporção Divida na Arquitetura

A proposta arquitetônica é de projetar e organizar espaços internos e externos, de acordo com critérios de estética, conforto e funcionalidade. Uma vez que não se pode falar em harmonia sem citar a Razão Áurea. Logo podemos citar um dos mais vigorosos defensores da aplicação da Razão Áurea na arte e na Arquitetura foi o famoso arquiteto e pintor suíço-francês Le Corbusier (Charles-Édouard Jeanneret, 1887-1965).

Le Corbusier criou um novo sistema proporcional chamado "Modulor" (**Figura 23**) que, segundo ele, foneceria uma medida harmônica para a escala humana, universalmente aplicável na arquitetura e na mecânica.

Figura 23: Modular de Le Corbusier



Um homem medindo seis pés, parecendo um pouco com o familiar logotipo do "Homem do Michelin", com seu braço erguido, foi inserido em um quadrado. A razão entre a altura do homem (183 cm) e altura de seu umbigo (no ponto médio de 113 cm) foi escolhido precisamente em uma Razão Áurea.

A criação do Modulor foi de suma importância nos períodos pós-guerra, já que na época havia uma grande necessidade de abrigar um número considerável de pessoas no menor espaço possível, e a existência do Modulor tornou viável a construção de grandes blocos habitacionais na Europa. O sistema Modulor pode ser observado em muitos dos edifícios projetados por Le Corbusier, especialmente na Chapel de Notre Dame du Haut, santuário para a Igreja Católica Romana em Ronchamp.

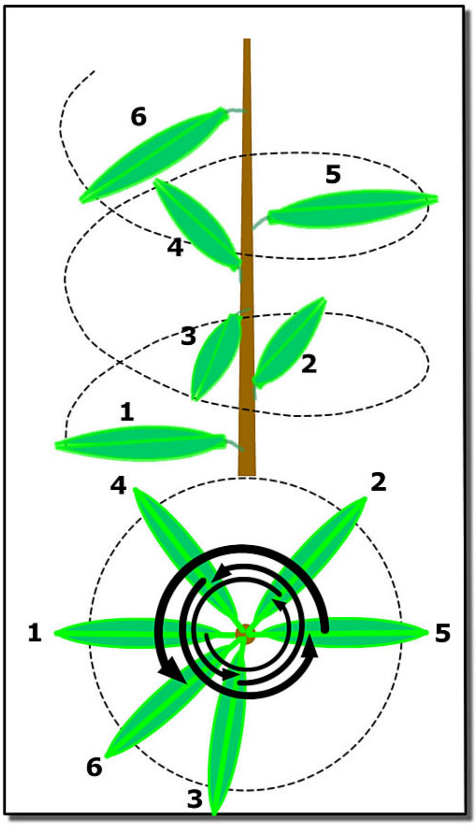
Mesmo em projetos arquitetônicos mais recentes, ainda se encontram artistas e arquitetos que utilizam o retângulo áureo. Por exemplo, o edifício-sede da Organização das Nações Unidas (ONU), em Nova Iorque, na qual há três retângulos áureos dispostos horizontalmente.

3.3 A Proporção Divina na Natureza

Na natureza em inúmeras situações podemos observar a presença deste número. Como por exemplo: nas plantas, em vários animais e em muitas outras situações somos confrontados com a presença deste enigmático número. A sua presença pode ser direta ou encontrar se camuflada ou ainda associada à sucessão de Fibonacci.

Na botânica podemos notar uma aplicação interessante do Número de Ouro, onde usa o termo filotaxia (phyllotaxis "arranjo de folhas", em grego) para referir ao modo como as folhas crescem ao longo de um galho ou os talos ao longo de um ramo. Observando a forma como um talo vertical cresce, pode-se perceber que ele produz folhas com um espaço regular entre elas [10]. Porém, as folhas não crescem diretamente uma sobre a outra: elas crescem em forma de uma espiral(**Figura 24**) ; e segundo Contador [5]: "É fácil entender porque as folhas ao longo de um ramo de uma planta ou os galhos em torno do caule tendem a crescer de forma espiralada.. Acontece que esta forma propicia um melhor aproveitamento de sua exposição ao sol, à chuva e ao ar."

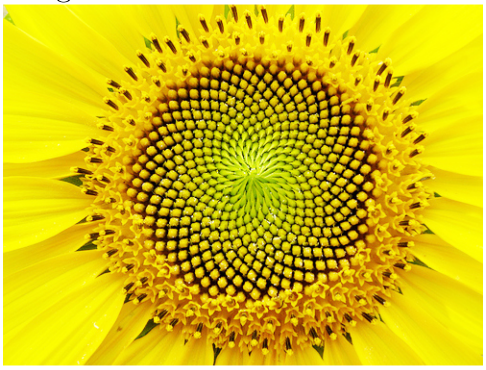
Figura 24: Filotoxia



De acordo com Livio [10], o que caracteriza a distribuição das folhas é o ângulo entre as linhas que ligam o centro do caule às folhas sucessivas. Em 1837, os irmãos Bravais descobriram que o ângulo entre as folhas é de aproximadamente $137,50^o$, este ângulo é conhecido como Ângulo Áureo.

Analisando agora um girassol , verificamos que suas sementes estão distribuídas em várias espirais, tanto no sentido horário quanto no sentido anti-horário. E a quantidade dessas espirais está relacionada com os números de Fibonacci, pois dependendo do tamanho do girassol, ele possui 21 espirais em um sentido e 34 no outro sentido, 34 espirais em um sentido e 55 em outro sentido, 55 e 89 ou 89 e 144, que são números de Fibonacci adjacentes [5].

Figura 25: Sementes do Girassol



Encontramos em outros exemplos de flores, como é o caso da Margarida, que segue o mesmo padrão do Girassol.

3.4 Conclusões

Vimos neste capítulo como o Número do Ouro está presente em diversas áreas como nas obras de Artes de grandes pintores e na arquitetura em obras, por exemplo, do arquiteto Lê Corbusier. Detalhamos que o Número do Ouro também está presente na natureza, associado com filotaxia, em vários animas e em muitas outras situações confrontados com a presença deste número relacionando com conceitos que vimos nos capítulos anteriores. Assim fornecemos ao leitor um embasamento teórico, assim como qualquer outro, que é construído historicamente para mostrar a importância dos resultados obtidos e aonde foram utilizados para podermos a partir do próximo capítulo desenvolver atividades didáticas para serem aplicadas na sala de aula.

4 ATIVIDADES DIDÁTICAS

Neste capítulo, descreveremos as atividades práticas propostas para este trabalho e daremos o embasamento teórico para o professor que queria desenvolver estas atividades em sala de aula e deve ter conhecimento e que o aluno terá que ter para desenvolvelas. Mostraremos os pré requisitos e o desenvolvimento passo a passo de cada atividade. Propomos as seguintes atividades:

1. Divisão de um segmento em média e extrema razão
2. Desenhando um Retângulo Áureo e uma Espiral Áurea
3. Desenhar figuras e imagens utilizando a regra do terço com a estrutura da Proporção Áurea
4. Aplicação da Proporção Áurea no desing gráfico de uma marca
5. Construir através de dobraduras a Razão Áurea e um Pentágono Regular

Segue a seguir o desenvolvimento de cada atividade.

4.1 Divisão de um segmento em média e extrema razão

4.1.1 Objetivo geral

- Trabalhar um tópico que geralmente não é abordado no âmbito da Educação Básica;
- Realizar trabalhos em equipe, utilizando interação de respostas obtidas por outros grupos;
- Mostrar que os assuntos matemáticos desenvolvidos neste tópico podem ser tratados até mesmo por alunos que apresentam dificuldades matemáticas;

- Permitir o desenvolvimento e aprimoramento de habilidades artísticas e criativas na formação, gerando uma atuação diferenciada e inovadora.
- Mostrar que a matemática também pode contribuir para que as crianças desenvolvam a habilidade de comunicar suas ideais, pois é nos momentos de trabalhos em equipe e de apresentação dos mesmos que essa habilidade se desenvolve.

4.1.2 Objetivo específico

Obter o Número de Ouro por meio de construções geométricas dividindo um segmento qualquer em média e extrema razão.

4.1.3 Conteúdos desenvolvidos na atividade

- Razão e proporção;
- Razão áurea;
- Ponto médio de um segmento;
- Retas perpendiculares.

4.1.4 Materiais necessários

Serão necessários os seguintes materiais: lápis, borracha, folha sulfite A4, régua e compasso.

4.1.5 Pré-requisitos

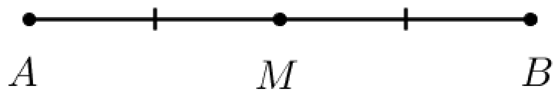
4.1.5.1 Construção geométrica do ponto médio

Definição 4.1.1 (Ponto Médio) *Um ponto M é ponto médio do segmento $\overline{AB}$ se, somente se, M está entre A e B e $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$.*

Construção geométrica: Traçar a mediatriz de um segmento $\overline{AB}$ e obter assim o ponto médio.

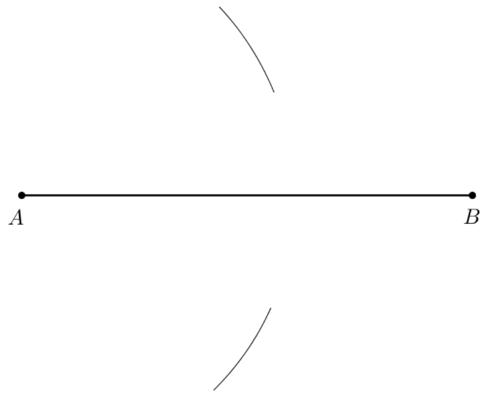
1º Passo: com o centro em A e um raio maior que a metade da medida AB, traçamos dois arcos (**Figura 27**).

Figura 26: Ponto médio de um segmento $\overline{AB}$



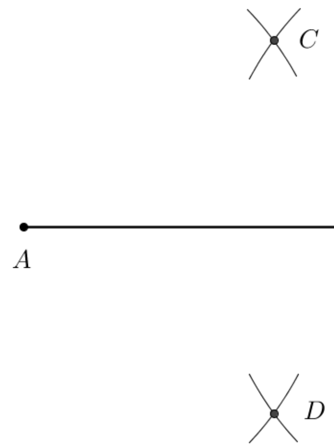
$$M \in \overline{AB} \text{ e } \overline{AM} \equiv \overline{MB}$$

Figura 27: 1º Passo: Desenhando a mediatriz de um segmento



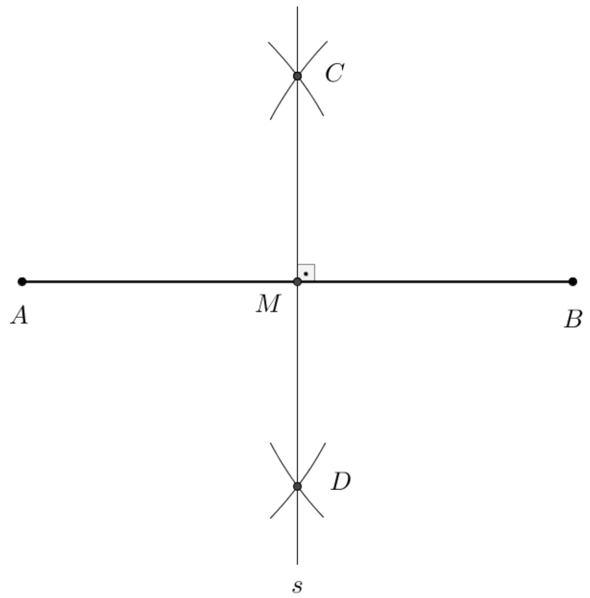
2 º Passo: Com o centro no ponto B e o mesmo raio, traçamos arcos que cortam os anteriores nos pontos C e D (**Figura 28**).

Figura 28: 2º Passo: Desenhando a mediatriz de um segmento



3 º Passo: A retas, determinada pelos pontos C e D, é a mediatriz procurada. O ponto M, intersecção de s com $\overline{AB}$, é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ (**Figura 29**).

Figura 29: 3º Passo: Desenhando a mediatriz de um segmento

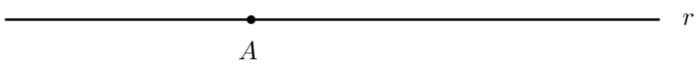


4.1.5.2 Traçar uma reta perpendicular por um ponto dado de uma reta.

Definição 4.1.2 (Retas Perpendiculares) *Dizemos que duas restas são perpendiculares (símbolo: $\perp$) se, somente se, são concorrentes e formam ângulos adjacentes suplementares congruentes.*

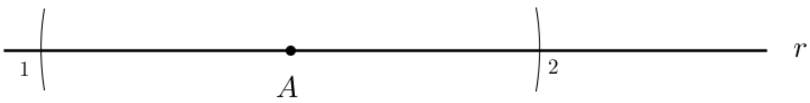
Construção geométrica: traçar uma reta perpendicular à reta r, por um ponto A da reta (**Figura 30**).

Figura 30: Reta r e um ponto A



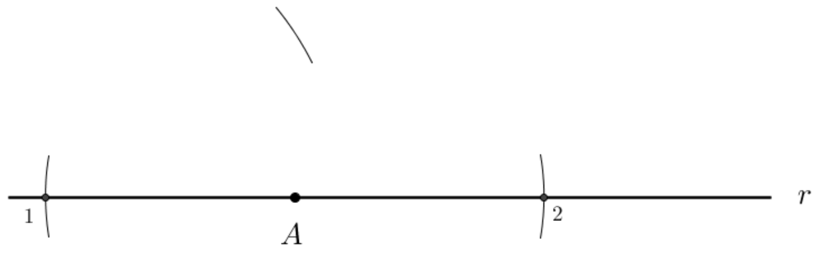
1º passo: com o centro no ponto A e um raio qualquer, traçamos arcos que cortam a reta r em 1 e 2 (**Figura 31**).

Figura 31: 1º Passo: Desenhando uma reta perpendicular a outra reta por um ponto dado



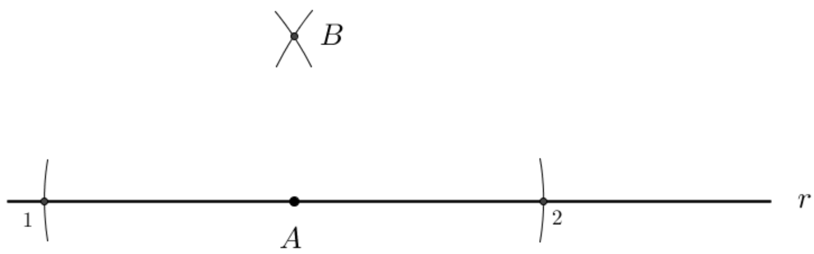
2º passo: com o centro em 1 e um raio conveniente, traçamos um arco (Figura **32**).

Figura 32: 2º Passo: Desenhando uma reta perpendicular a outra reta por um ponto dado



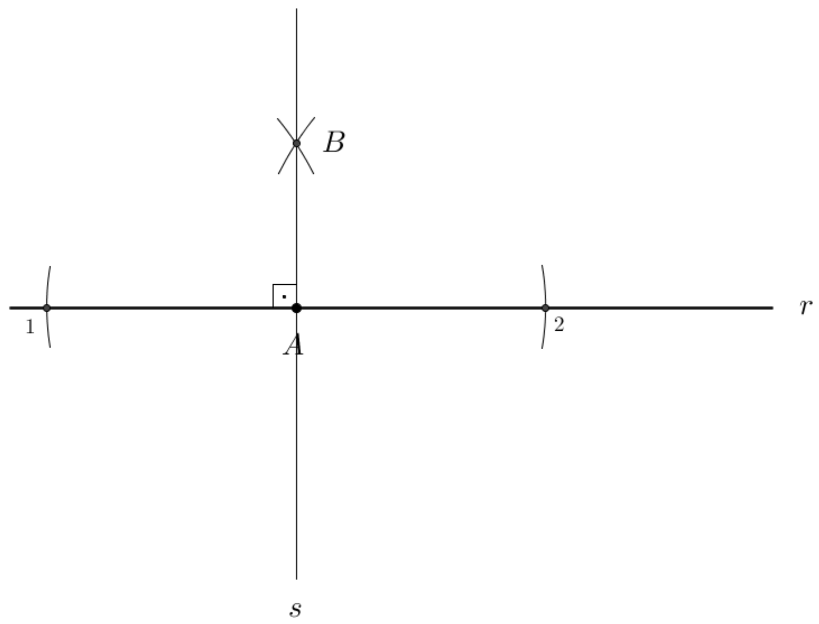
3º passo: com o centro em 2 e o mesmo raio, traçamos outro arco, que corta o anterior no ponto B(Figura **33**).

Figura 33: 3º Passo: Desenhando uma reta perpendicular a outra reta por um ponto dado



$4^{\underline{o}}$ passo: a reta s, determinada pelos pontos A e B, é a reta procurada(Figura **34**).

Figura 34: $4^{\underline{o}}$ Passo: Desenhando uma reta perpendicular a outra reta por um ponto dado



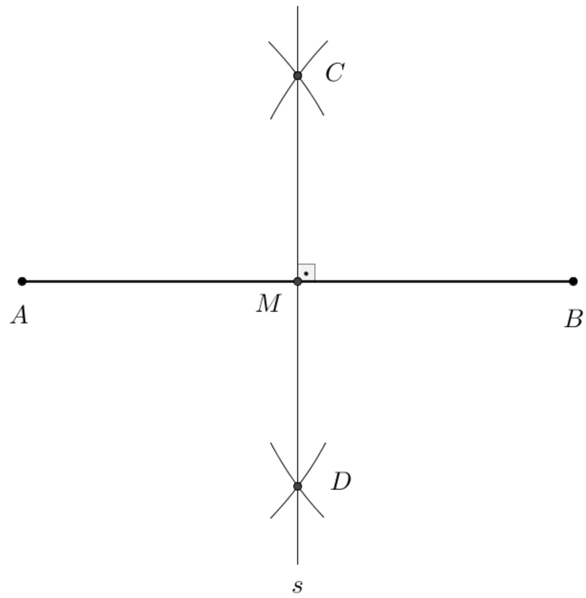
4.1.6 Desenvolvimento da Atividade

A atividade a seguir é desenvolvida com instrumentos geométricos como o compasso e a régua mas também é possível desenvolver-la utilizando o software Geogebra.

Inicialmento o aluno deverá, a partir do segmento AB, qualquer, seguir os passos abaixo para localizar o "ponto áureo", ou seja, o ponto que dividirá AB em média e extrema razão.

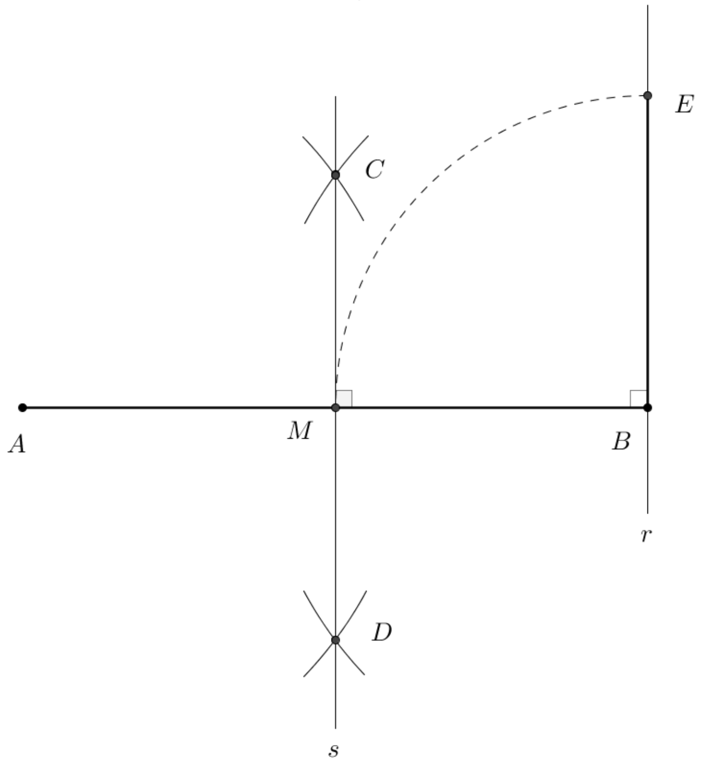
1º Passo: Marque o ponto médio M do segmento AB. Conforme a construção da seção 5.1.5 (**Figura 35**).

Figura 35: 1º Passo: Divisão de um segmento em média e extrema razão



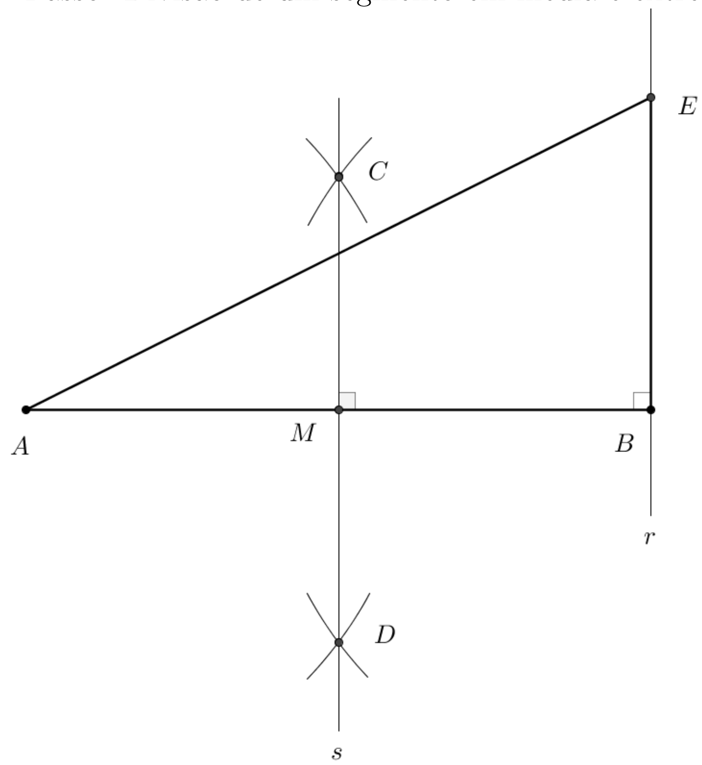
2º Passo: Pelo ponto B, trace uma reta r perpendicular a AB, com o centro do compasso em B e raio BM, marque sobre a reta r o segmento BE (**Figura 36**).

Figura 36: 2º Passo: Divisão de um segmento em média e extrema razão



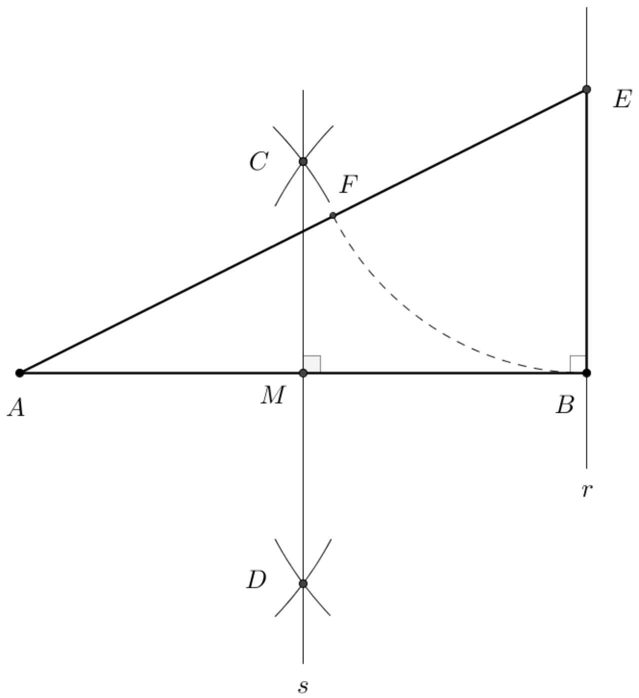
3º Passo: Marque o segmento AE , formando o triângulo retângulo ABE (**Figura 37**).

Figura 37: 3º Passo: Divisão de um segmento em média e extrema razão



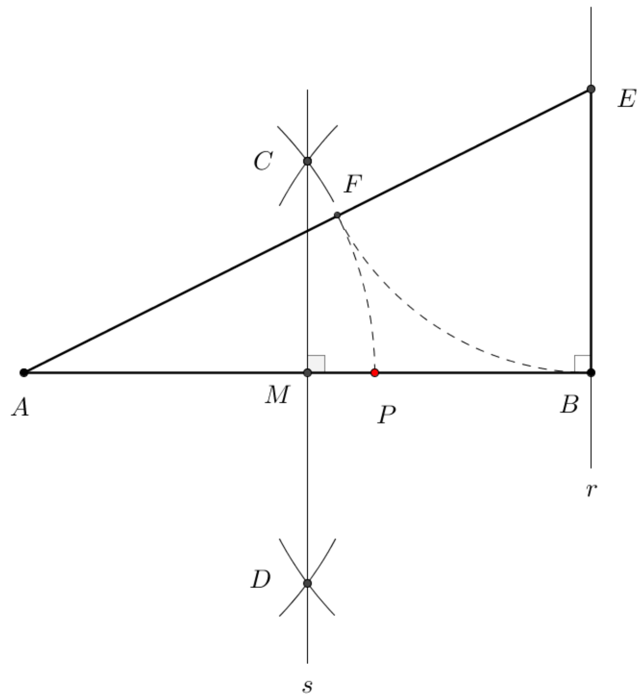
4º Passo: Com o centro do compasso em E e raio EB, trace o arco de circunferência para obter o ponto F sobre a hipotenusa AE. O ponto F é tal que $EF = EB$ (**Figura 38**).

Figura 38: 4º Passo: Divisão de um segmento em média e extrema razão



5º Passo: Com o centro do compasso em A e raio AF, trace o arco de circunferência para obter o ponto P sobre AB. O ponto P é tal que $AP = AF$. O ponto P obtido, é o ponto que divide AB na Razão Áurea (**Figura 39**).

Figura 39: 5º Passo: Divisão de um segmento em média e extrema razão



4.2 Desenhando um Retângulo Áureo e uma Espiral Áurea.

4.2.1 Objetivo geral

- Trabalhar um tópico que geralmente não é abordado no âmbito da Educação Básica;
- Realizar trabalhos em equipe, utilizando interação de respostas obtidas por outros grupos;
- Mostrar que os assuntos matemáticos desenvolvidos neste tópico podem ser tratados até mesmo por alunos que apresentam dificuldades matemáticas.
- Mostrar que a matemática também pode contribuir para que as crianças desenvolvam a habilidade de comunicar suas ideais, pois é nos momentos de trabalhos em equipe e de apresentação dos mesmos que essa habilidade se desenvolve.
- Mostrar que o retângulo áureo é uma figura geométrica que parece proporcionar uma maior satisfação visual para um maior número de pessoas que os retângulos de proporções diferentes.

4.2.2 Objetivo específico

Construir um retângulo áureo e através dele obter uma espiral áurea.

4.2.3 Conteúdos desenvolvidos na atividade

- Quadriláteros;
- Semelhança de figuras;
- Razão áurea.

4.2.4 Materiais necessários

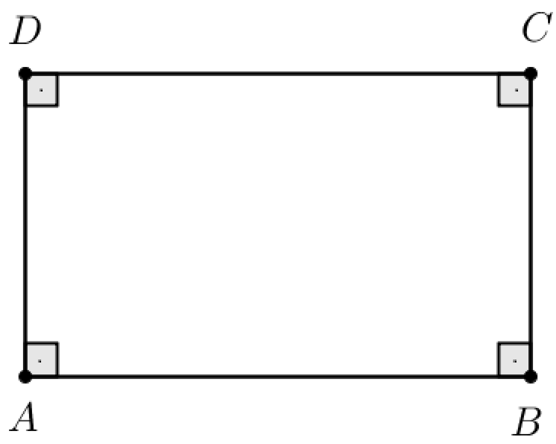
Serão necessários os seguintes materiais: lápis, borracha, folha sulfite A4, régua e compasso.

4.2.5 Pré-requisitos

4.2.5.1 Noções de geometria plana

Definição 4.2.1 *Um quadrilátero plano convexo é um retângulo se, somente se, possui os quatro ângulos congruentes (Figura 40).*

Figura 40: Retângulo



$$ABCD \text{ é retângulo } \Leftrightarrow \widehat{A} \equiv \widehat{B} \equiv \widehat{C} \equiv \widehat{D}$$

Definição 4.2.2 *Um quadrilátero plano convexo é um quadrado se, somente se, possui os quatro ângulos congruentes e os quatro lados congruentes (Figura 41).*

4.2.6 Desenvolvimento da Atividade

O aluno deverá construir um quadrado ABCD de lado 12 cm como o da figura 42 (está medida é arbitrária), seguir os seguintes passos para construir um Retângulo Áureo.

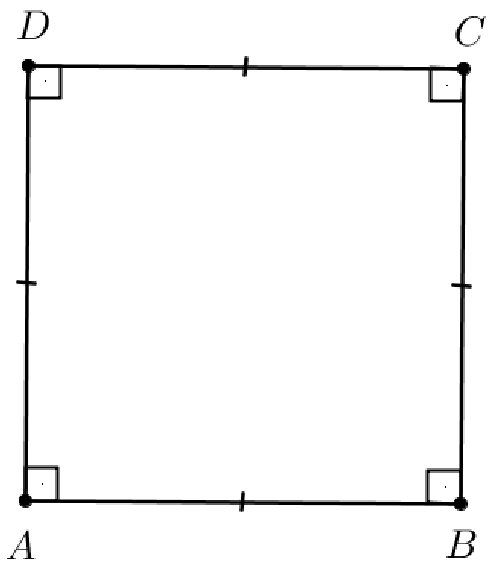
1º Passo: marque o ponto médio M do lado AD (Figura 43).

2º Passo: com o centro do compasso em M e raio MC, trace o arco de circunferência CF onde F é o ponto de intersecção do arco com a reta suporte de AD (Figura 44).

3 º Passo: prolongue BC e pelo ponto F trace o segmento FE perpendicular a AD com E na reta suporte de BC.

4 º Passo: Trace o retângulo $ABEF$ (Figura 46).

Figura 41: Quadrado



$$ABCD \text{ é quadrado } \Leftrightarrow (\widehat{A} \equiv \widehat{B} \equiv \widehat{C} \equiv \widehat{D} \text{ e } \overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DA})$$

Figura 42: Quadrado com 12 cm de lado

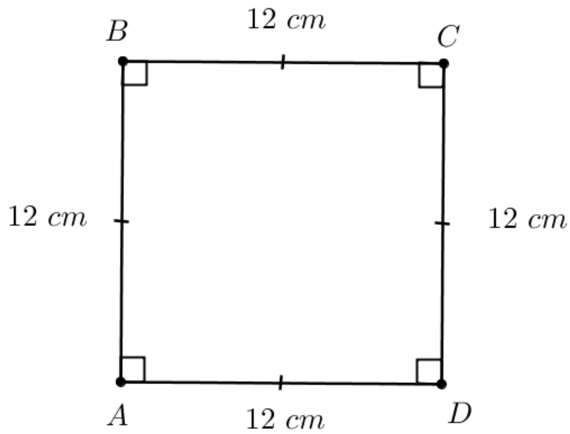


Figura 43: 1º Passo: Como desenhar o Retângulo Áureo

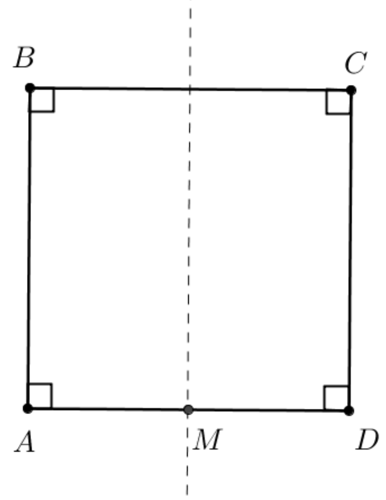


Figura 44: 2º Passo: Como desenhar o Retângulo Áureo

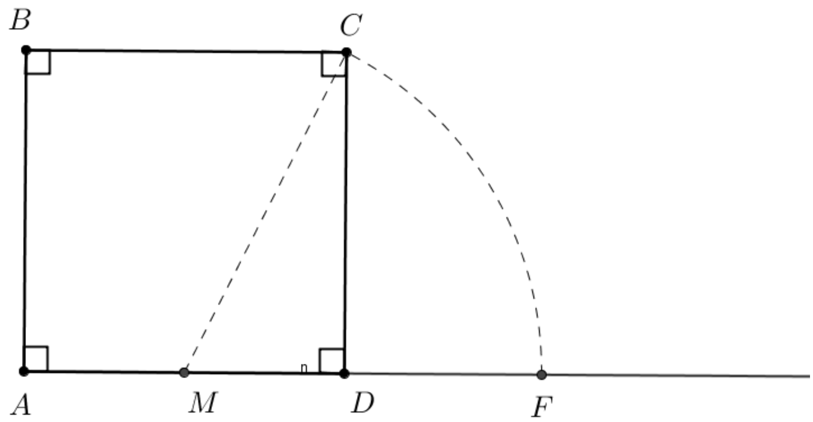


Figura 45: 3º Passo: Como desenhar o Retângulo Áureo

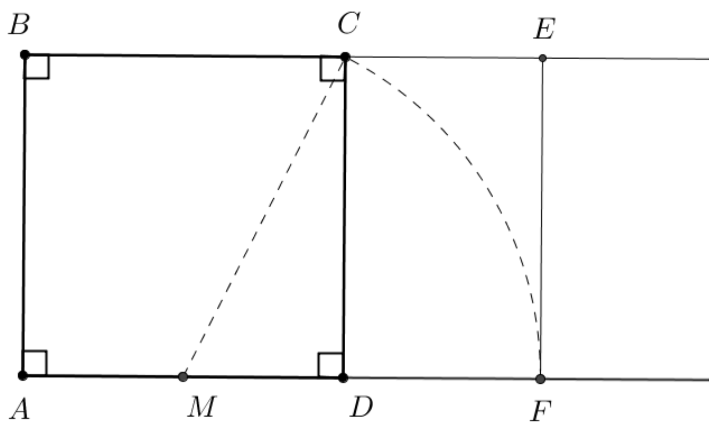
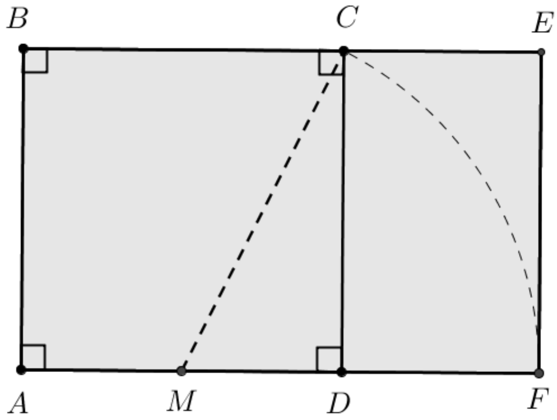


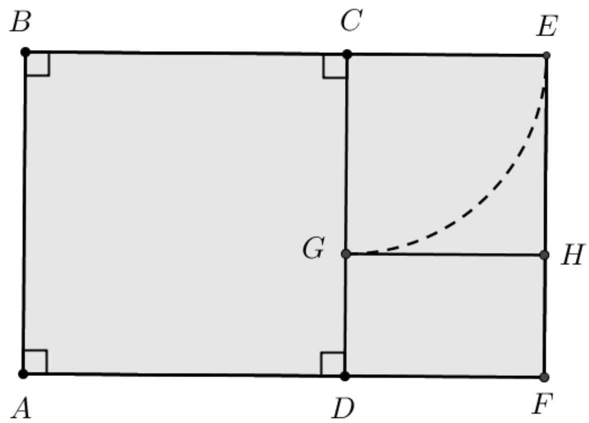
Figura 46: 4º Passo: Como desenhar o Retângulo Áureo



O retângulo $ABEF$ obtido é áureo .

5 º Passo: a partir do Retângulo Áureo obtido, com o centro do compasso em C e raio CE marque o ponto G em CD, com $CG = CE$, e trace GH perpendicular a CD, com H em EF e obtenha o quadrado $GCEH$ (Figura 47).

Figura 47: 5º Passo: Como desenhar o Retângulo Áureo



6 º Passo: de forma análoga, construa um novo quadrado a partir de HF, lado menor do retângulo áureo $GHFD$ e, assim, construa ao todo um total de uns 5 quadrados (Figura 48).

7 º Passo: Com o centro do compasso em D e raio DA, trace o quarto de circunferência interno ao quadrado $ABCD$. De modo análogo, trace o quarto de circunferência de cada um dos quadrados construídos, de forma que a curva apresente o aspecto de uma espiral (Figura 49) .

A curva obtida é uma Espiral Áurea.

Figura 48: 6º Passo: Como desenhar o Retângulo Áureo

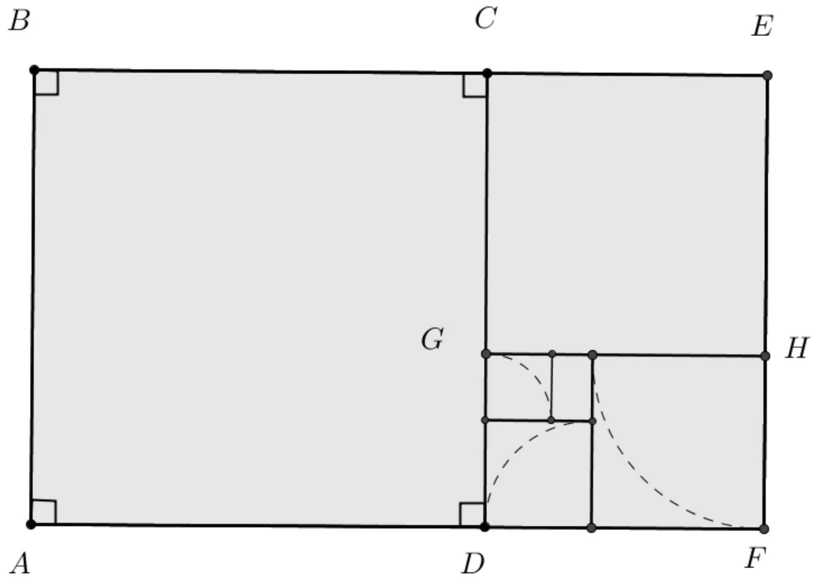
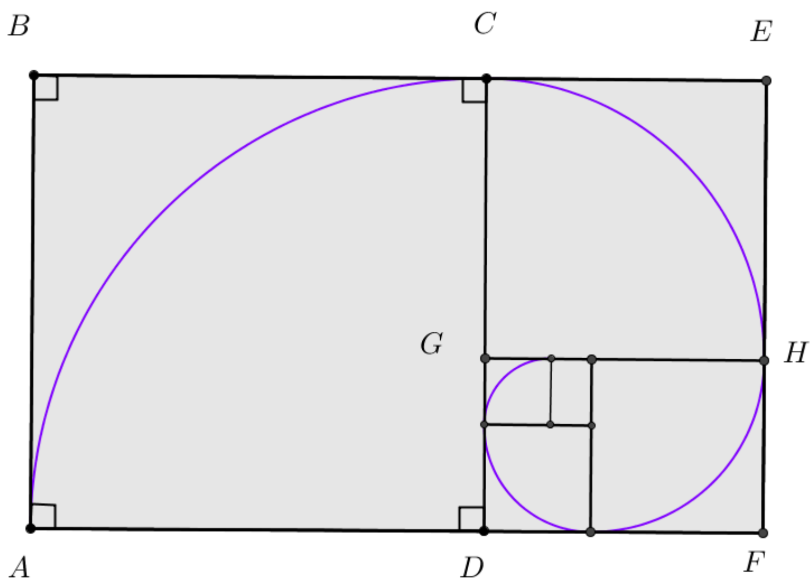


Figura 49: 7º Passo: Como desenhar o Retângulo Áureo



4.3 Desenhar figuras e imagens utilizando a regra do terço com a estrutura da proporção áurea.

4.3.1 Objetivo geral

- Trabalhar um tópico que geralmente não é abordado no âmbito da Educação Básica;
- Realizar trabalhos em equipe, utilizando interação de respostas obtidas por outros grupos;
- Mostrar que os assuntos matemáticos desenvolvidos neste tópico podem ser tratados até mesmo por alunos que apresentam dificuldades matemáticas.
- Permitir o desenvolvimento e aprimoramento de habilidades artísticas e criativas na formação, gerando uma atuação diferenciada e inovadora.
- Mostrar que a matemática também pode contribuir para que as crianças desenvolvam a habilidade de comunicar suas ideais, pois é nos momentos de trabalhos em equipe e de apresentação dos mesmos que essa habilidade se desenvolve.

4.3.2 Objetivo específico

Mostrar como aplicar a proporção áurea para compor um desenho com uma figura que fique em maior evidência.

4.3.3 Conteúdos desenvolvidos na atividade

- Razão e proporção;
- Razão áurea;
- Ângulos;
- Construção geométrica;

4.3.4 Materiais necessários

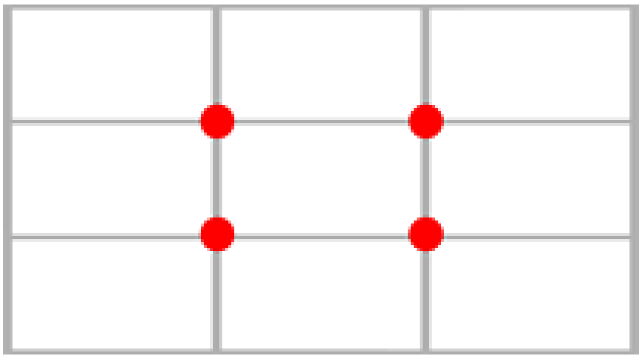
Serão necessários os seguintes materiais: lápis, borracha, folha sulfite A4, régua e compasso.

4.3.5 Pré-requisitos

4.3.5.1 A Regra do Terço

A regra do terço é uma técnica de composição frequentemente utilizada por pintores e fotógrafos. Ela é uma teoria utilizada na hora de compor uma imagem. Se caracteriza em dividir uma imagem em duas linhas horizontais e duas linhas verticais, em que os pontos de interseção dessas 4 linhas são os pontos onde nossos olhos têm maior atenção. Em alguns casos, manter o assunto principal da foto em algum desses pontos chamará mais a atenção, ou seja, um assunto centralizado não significa uma foto mais equilibrada. Na figura 50, nos pontos vermelhos, você vê aonde enquadrar os itens preferenciais da foto.

Figura 50: Quadriculado da Regra do Terço



Fonte: Dicas de fotografia [12]

O segredo é que cada foto tem suas características próprias e nem sempre é fácil definir o que vai nas bolinhas. O importante é que antes de tirar a foto ou desenhar alguma imagem, você defina o que deve estar em evidência, e faça a composição de acordo com este item. Vejamos como exemplo da aplicação desta técnica em duas fotografia (Figura 51 e Figura 52).

A famosa "regra do terço" é uma simplificação da proporção áurea. Muitos confundem achando que é a mesma coisa, mas não é. A proporção áurea é $1,618...$ e a proporção do terço é $1,666$. A regra dos terços não passa de uma derivação proporção áurea.

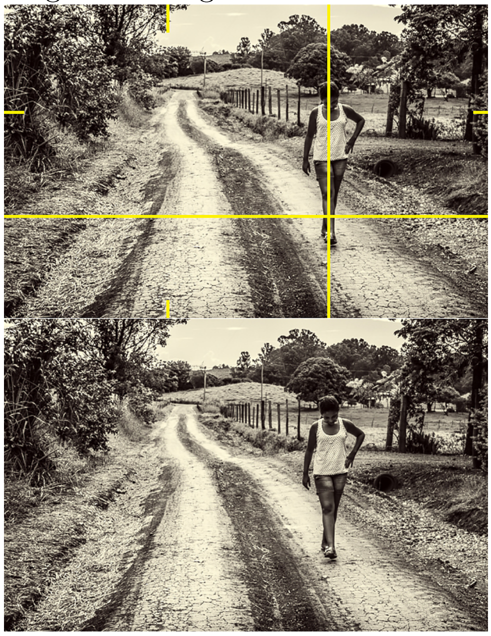
4.3.6 Desenvolvimento da Atividade

Essa atividade será aplicada após a aplicação da atividade onde desenhamos um retângulo áureo e uma espiral áurea, pois estas atividades serviram de pré-requisito para o desenvolvimento desta atividade em que desenharemos imagens utilizando a regra do

Figura 51: Fotografia de uma casa

Fonte: Photopro - Grupo Profissional de Photoshop [6]

Figura 52: Figura de uma mulher



Fonte: Photopro - Grupo Profissional de Photoshop [6]

terço com a estrutura da proporção áurea.

Inicialmente, devemos determinar quatros pontos áureos para poder dividir um retângulo em duas linhas horizontais e duas linhas verticais. Está será estrutura básica para que possamos desenhar imagens como certos itens com maior evidência.

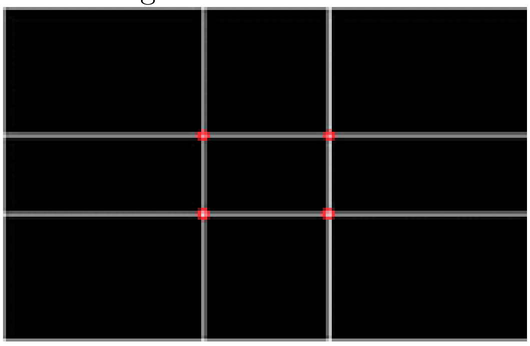
Para começar a atividade devemos instruir o aluno a desenhar em uma folha de papel A4 um retângulo áureo conforme foi desenvolvido na atividade 2. O nosso primeiro ponto áureo será o ponto G obtido no desenho do retângulo áureo.

Para determinar os outros pontos, o aluno precisar pegar uma outra folha de papel A4, sobrepor o desenho do retângulo áureo e desenhar nesta nova folha somente o retângulo áureo e o ponto G. Girando a folha sobreposta, o aluno deverá marcar os outros três pontos com base no ponto G do retângulo áureo.

Assim obtemos os quatros pontos de destaque e basta o aluno traçar duas retas verticais passando por dois pontos e duas retas horizontais passando por dois pontos. Logo obtemos uma grade com linhas para dividir os volumes da imagem em proporções harmônicas e pontos áureos onde podemos posicionar o assunto principal.

Em seguida será proposto que cada aluno faça um desenho dentro deste retângulo

Figura 53: Grade Áurea



Fonte: Entre Culturas [13]

lembrado que a imagem que ele queira que tenha maior destaque tem que estar sobre um dos quatro pontos áureos.

4.4 Aplicação da proporção áurea no design gráfico de uma marca

Arte e matemática são ferramentas fundamentais do design moderno, o uso do número Φ se torna fundamental para a criação de artefatos visuais cada vez mais orgânicos e esteticamente admiráveis. Mesmo quando não feito propositalmente, o seres humanos tende a buscar esse número ou uma aproximação do mesmo.

De acordo com Araújo [2], para que um projeto gráfico seja bem estruturado, não basta o desenvolvimento de suas proporções, porque se trata de uma composição informada para comunicar um conjunto de ideias que, ao serem graficamente reunidas e expressas, fortalecem a proposta do produto final com atributos estético-funcionais. Porém, o planejamento da proporcionalidade dos formatos e figuras participa necessariamente da qualidade da informação e da eficiência comunicativa do produto gráfico.

Propomos desenvolver um desing gráfico utilizando como base a Razão Áurea pra obtermos uma imagem esteticamente mais bela. Escolhemos a logomarca de uma bebida de refrigeralmente e descreveremos um roteiro para que possa obter está logomarca. Como uma expansão desta atividade o professor pode propor para seus alunos que eles criem sua própria marca, desde que, utilize a Razão Áurea para obte-la,incentivando a criatividade e imaginação de seus alunos.

4.4.1 Objetivo geral

- Trabalhar um tópico que geralmente não é abordado no âmbito da Educação Básica;
- Realizar trabalhos em equipe, utilizando interação de respostas obtidas por outros grupos;
- Mostrar que os assuntos matemáticos desenvolvidos neste tópico podem ser tratados até mesmo por alunos que apresentam dificuldades matemáticas.
- Mostrar que a matemática também pode contribuir para que as crianças desenvolvam a habilidade de comunicar suas ideais, pois é nos momentos de trabalhos em equipe e de apresentação dos mesmos que essa habilidade se desenvolve.
- A intenção é não apenas que o aluno siga as instruções e execute-as, mas que experimente e reflita e, sempre que possível, chegue às suas próprias conclusões verbalizando-as para os seus colegas.

4.4.2 Objetivo específico

Situar os elementos e os recursos geométricos relacionados à proporção áurea e descrever a possibilidade da construção de uma logomarca com a razão áurea.

4.4.3 Conteúdos desenvolvidos na atividade

- Razão e proporção;
- Razão áurea;
- Ângulos;
- Construção geométrica;
- Posição relativa entre duas circunferências;
- Posição relativa entre duas restas.

4.4.4 Materiais necessários

Serão necessários os seguintes materiais: folha sulfite A4, régua, lápis, lápis de cor, compasso e transferidor.

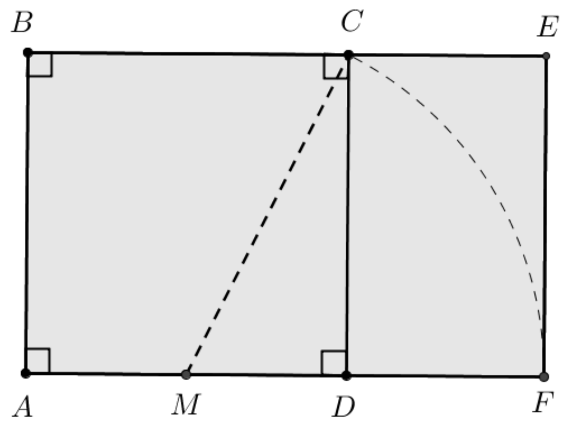
4.4.5 Desenvolvimento da Atividade

O roteiro a seguir foi elabora pelo próprio autor deste trabalho tento como base uma imagem obtida na internet.

Com uma folha A4 em mãos, o aluno deverá seguir as seguintes instruções:

1º Passo: o aluno deve desenhar um rentângulo áureo conforme foi desenvolvido na atividade da seção 4.2 (**Figura 54**)

Figura 54: 1º Passo: Como desenhar o logotipo de uma marca com a razão áurea



Tomemos $AF = a$ e $DF = b$. Como o retângulo obtido é áureo temos que $\dfrac{a}{b} = \Phi$

2º Passo: Construiremos uma circunferência λ_1 de diâmetro **a** e centro O e uma circuferência λ_2 de diâmetro **b** centro P tal que λ_2 é tangente interna a λ_1 no ponto A (**Figura 55**)

3º Passo: Traçamos um diâmetro na circunferência λ_1 (**Figura 56**).

Figura 55: 2º Passo: Como desenhar o logotipo de uma marca com a razão áurea

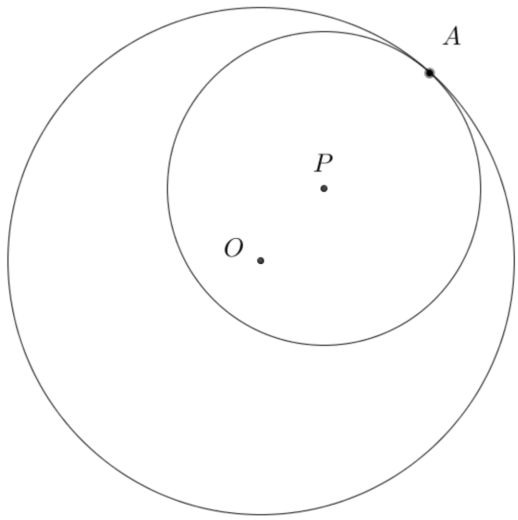
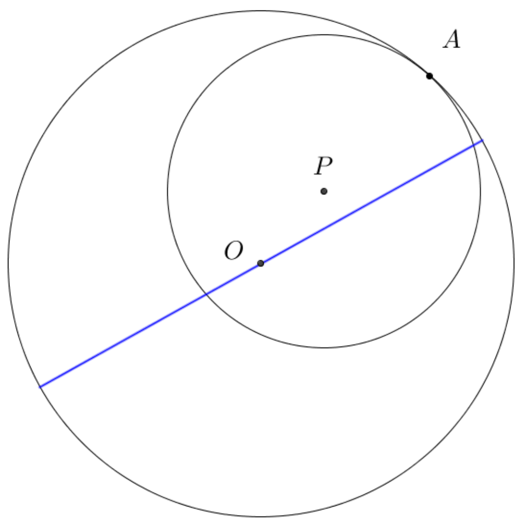
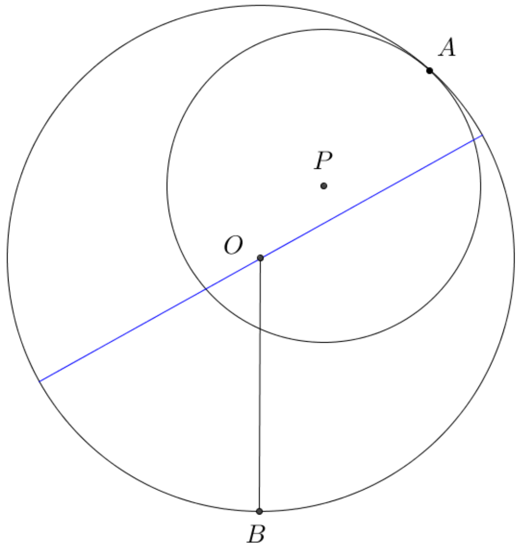


Figura 56: 3º Passo: Como desenhar o logotipo de uma marca com a razão áurea



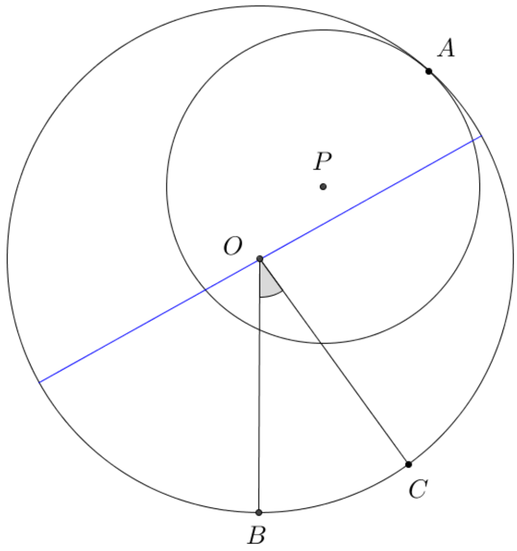
4º Passo: Traçamos raio OB na circunferência λ_1 (**Figura 57**).

Figura 57: 4º Passo: Como desenhar o logotipo de uma marca com a razão áurea



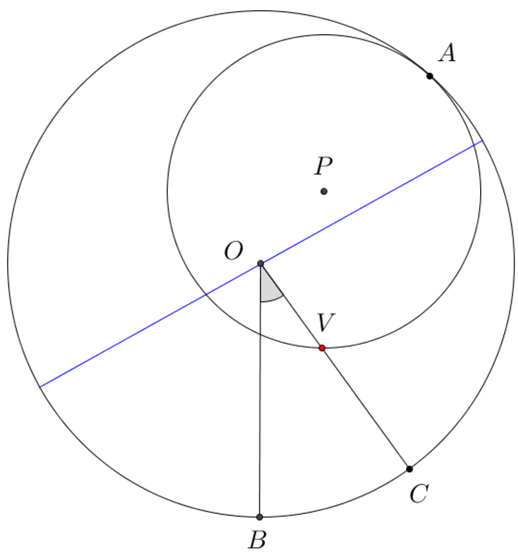
5º Passo: Usando um transferidor, traçamos o raio OC na circunferência λ_1 tal que o ângulo $B\widehat{O}C$ seja igual a 36^o (**Figura 58**).

Figura 58: 5º Passo: Como desenhar o logotipo de uma marca com a razão áurea



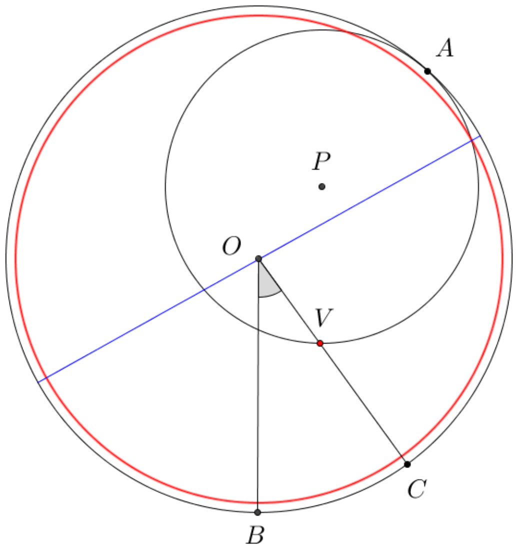
6º Passo: Marcamos o ponto V que é o ponto de intersecção da circunferência λ_2 com o raio OC da circunferência λ_1 (**Figura 59**).

Figura 59: 6º Passo: Como desenhar o logotipo de uma marca com a razão áurea



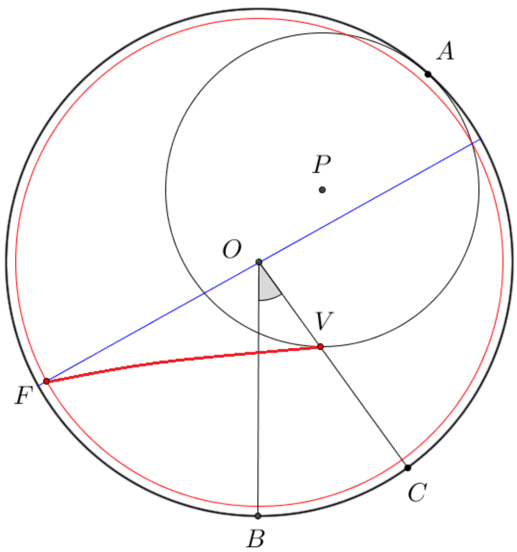
7º Passo: Traçamos uma circunferência λ_3 interior a circunferência λ_1 (**Figura 60**).

Figura 60: 7º Passo: Como desenhar o logotipo de uma marca com a razão áurea



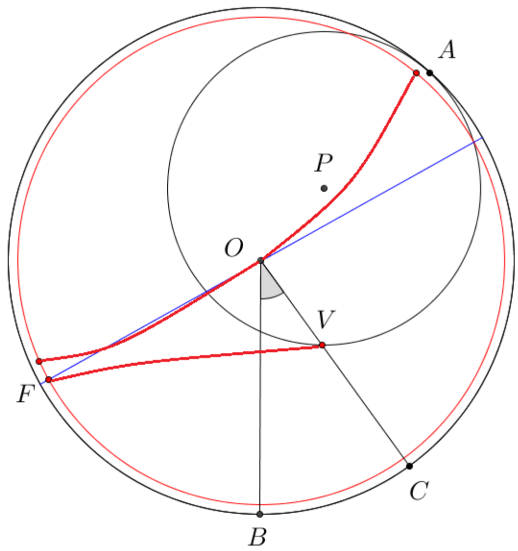
8º Passo: Seja o ponto F a intersecção do diâmetro da circunferência λ_1 com a circunferência λ_3. A partir do ponto F até o ponto V, traçamos uma curva (**Figura 61**).

Figura 61: 8º Passo: Como desenhar o logotipo de uma marca com a razão áurea



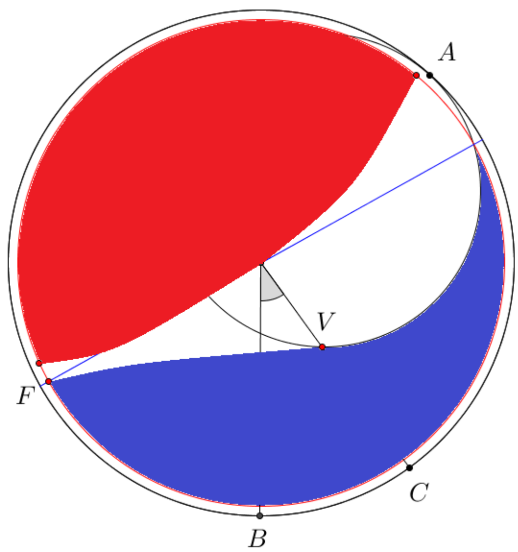
9º Passo: A partir de um ponto sobre a circunferência λ_3 traçamos uma curva tangenciando o diâmetro da circunferência λ_1 até um ponto da circunferência λ_3 próximo do ponto A (**Figura 62**).

Figura 62: 9º Passo: Como desenhar o logotipo de uma marca com a razão áurea



10º Passo: Agora basta pintar de vermelho uma das regiões interior a circunferência λ_3 e de azul um outro região da interior a mesma circunferência. Obtemos assim um logotipo de uma marca de refrigerante a partir da razão áurea (**Figura 63**).

Figura 63: 10º Passo: Como desenhar o logotipo de uma marca com a razão áurea



4.5 Construir através de dobraduras a razão áurea e um pentágono regular

Origami é a tradicional arte japonesa de confeccionar figuras por meio de dobras. O origami tradicional, ou dobradura, como nós, brasileiros, a conhecemos, sempre facionou pelo simples fato de transformar uma folha de papel em algo completamente novo e diferente.

O nome origami surgiu pela fusão do verbo *oru* (dobrar) e a palavra *kami* (papel), mas antigamente chamava-se *origata* (forma dobrada). O uso de dobraduras no ensino de geometria está tornando-se cada vez mais reconhecido como um instrumento pedagógico interessante e muitas vezes eficaz, tanto pelo seu caráter lúdico quanto pela sensação de descoberta que muitas vezes provoca.

A atividade de dobradura a ser desenvolvida é organizada através de instruções de dobragem do papel numa série de orientações e figura do "antes" e "depois". Cada passo está numerado para que seja clara a sequência de dobras.

4.5.1 Objetivo geral

- Trabalhar um tópico que geralmente não é abordado no âmbito da Educação Básica;
- Realizar trabalhos em equipe, utilizando interação de respostas obtidas por outros grupos;
- Mostrar que os assuntos matemáticos desenvolvidos neste tópico podem ser tratados até mesmo por alunos que apresentam dificuldades matemáticas.
- Permitir o desenvolvimento e aprimoramento de habilidades artísticas e criativas na formação, gerando uma atuação diferenciada e inovadora.
- Mostrar que a matemática também pode contribuir para que as crianças desenvolvam a habilidade de comunicar suas ideais, pois é nos momentos de trabalhos em equipe e de apresentação dos mesmos que essa habilidade se desenvolve.
- A intenção é não apenas que o aluno siga as instruções e execute-as, mas que experimente e reflita e, sempre que possível, chegue às suas próprias conclusões verbalizando-as para os seus colegas.

4.5.2 Objetivo específico

Construir um pentágono regular através de dobradura e analisar qual a sua relação com a razão áurea.

4.5.3 Conteúdos desenvolvidos na atividade

- Razão e proporção;
- Razão áurea;
- Pentágono Regular.

4.5.4 Materiais necessários

Serão necessários os seguintes materiais para desenvolvimento da atividade didática: folha sulfite A4, régua, lápis, canetinha colorida e o roteiro impresso com os passos e imagens das dobraduras.

4.5.5 Pré-requisitos

4.5.5.1 Vincar um folha

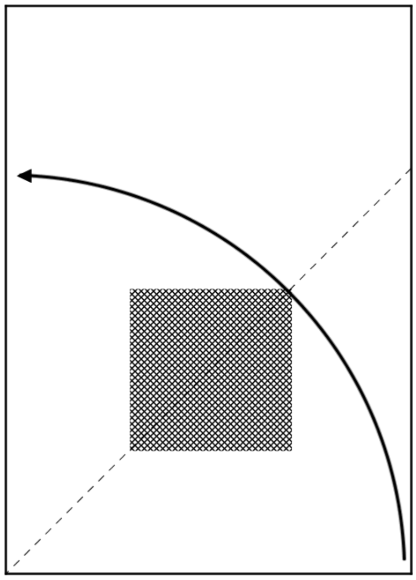
Vincar é o ato de marcar o papel pra facilitar quando for dobrá-lo.

4.5.5.2 Construir um quadrado através de dobradura.

Com uma folha A4 em mãos, o aluno deverá seguir as seguintes instruções:

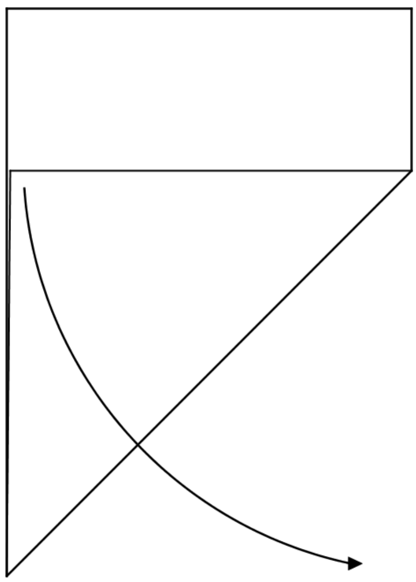
1º Passo: dobre a folha A4 conforme a **figura 64**, tente não vincar o papel dentro da área sombreada.

Figura 64: 1º passo da dobradura de um quadrado



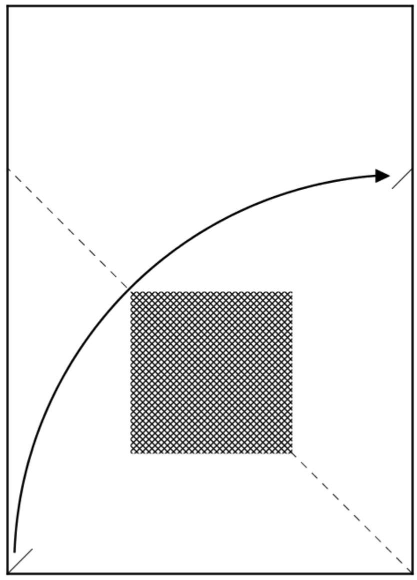
2º Passo: desdobre (**Figura 65**).

Figura 65: 2º passo da dobradura de um quadrado



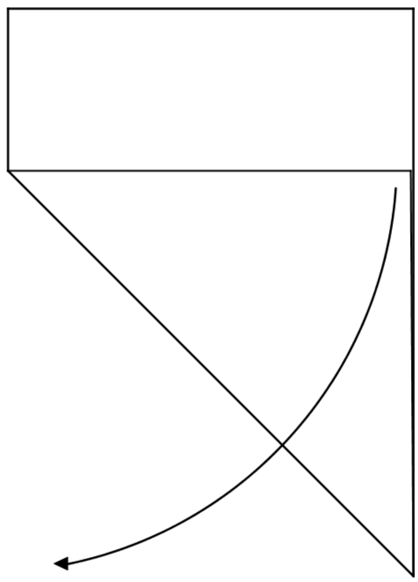
3º Passo: Doble no sentido contrário ao do primeiro passo (**Figura 66**).

Figura 66: 3º passo da dobradura de um quadrado



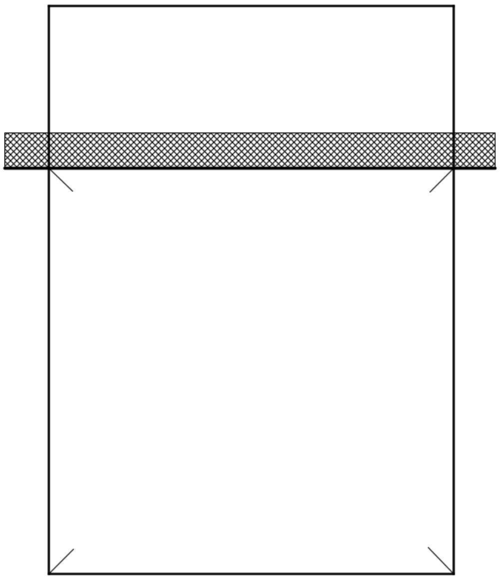
4º Passo: desdobre no sentido da seta (**Figura 67**).

Figura 67: 4º passo da dobradura de um quadrado



5º Passo: Corte a folha com uma régua (**Figura 68**).

Figura 68: 5º passo da dobradura de um quadrado

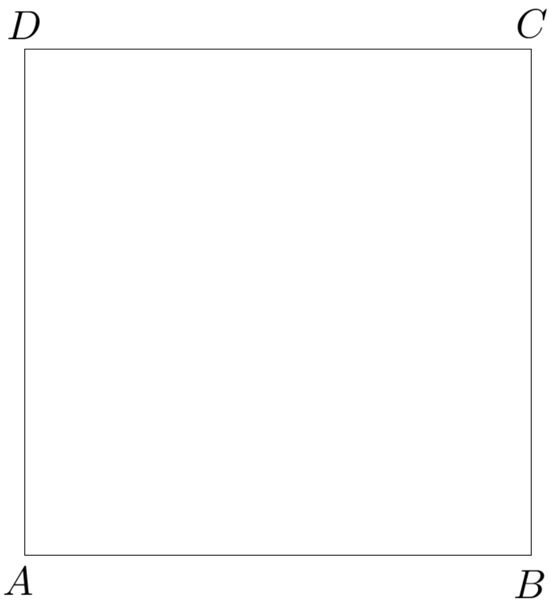


4.5.6 Desenvolvimento da Atividade

Construiremos primeiro a razão áurea sobre um segmento AB em uma folha quadrada.

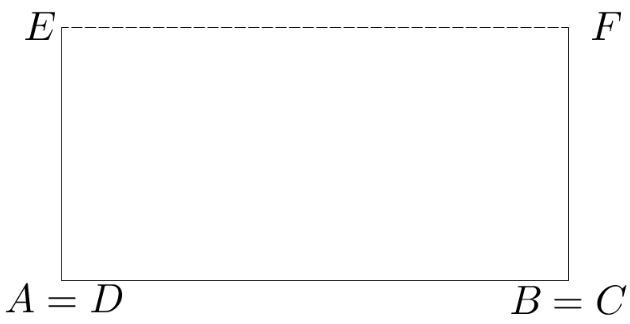
1º Passo: em uma folha de papel quadrada marque os quatros vértices do quadrado (A, B, C, D) (**Figura 69**).

Figura 69: 1 º passo da dobradura para obter a razão áurea



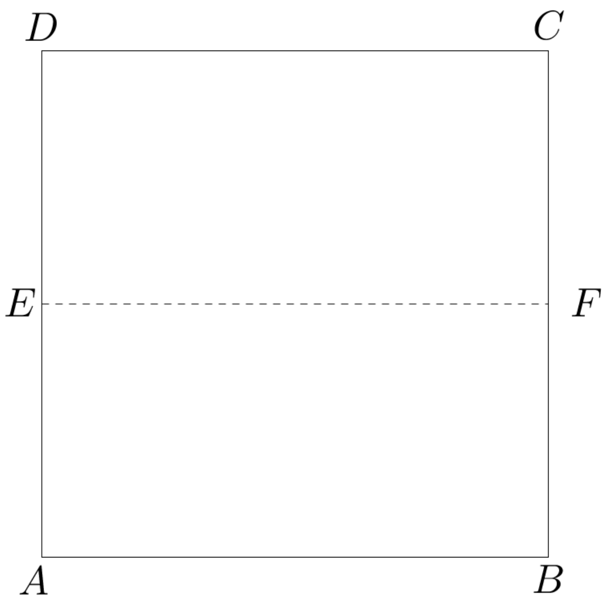
2º Passo: Dobre o segmento AB sobre DC, dividindo assim a folha de papel quadrada ao meio, e marque os pontos médios E e F (**Figura70**).

Figura 70: 2 º passo da dobradura para obter a razão áurea



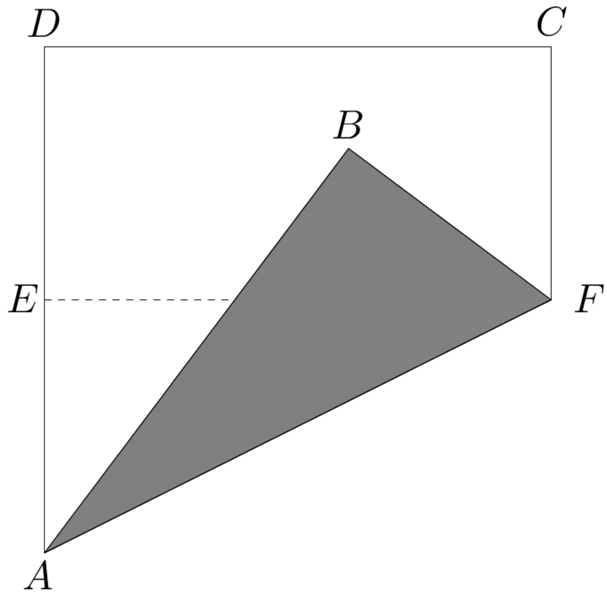
3º Passo: Desdobre a folha de papel quadrada (**Figura 71**).

Figura 71: 3 º passo da dobradura para obter a razão áurea



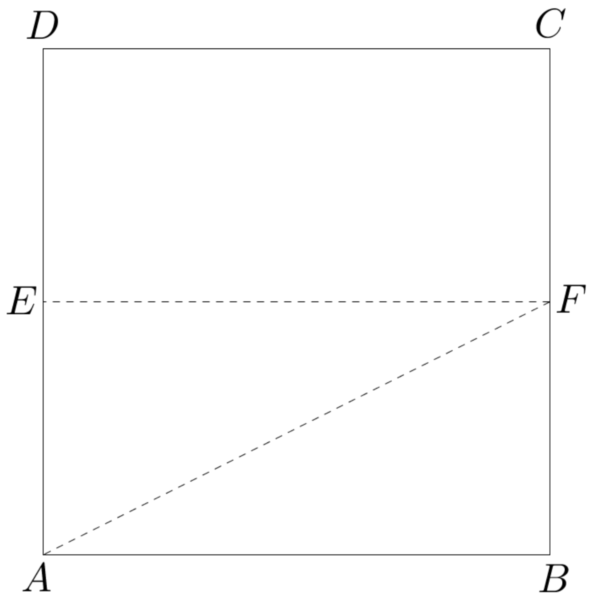
4º Passo: Faça uma dobradura ao longo de um segmento AF que liga um vértice A da folha ao ponto F, extremidade direita do segmento médio que se encontra sobre a reta vertical oposta (**Figura 72**).

Figura 72: 4 º passo da dobradura para obter a razão áurea



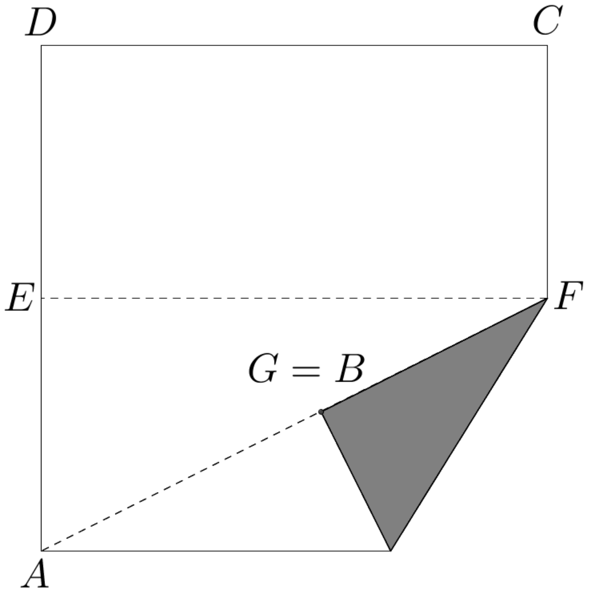
5º Passo: Desdobre a folha de papel quadrada (**Figura 73**).

Figura 73: 5 º passo da dobradura para obter a razão áurea



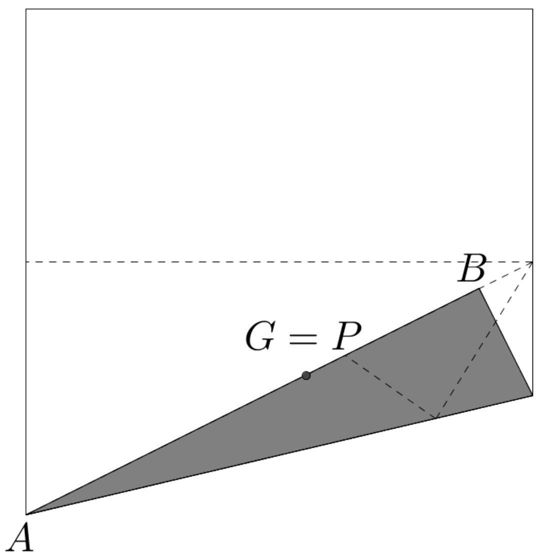
6º Passo: Use uma dobradura com dobra contendo F, para levar o vértice B até o segmento AF. Marque esse ponto como G (**Figura 74**).

Figura 74: 6 º passo da dobradura para obter a razão áurea



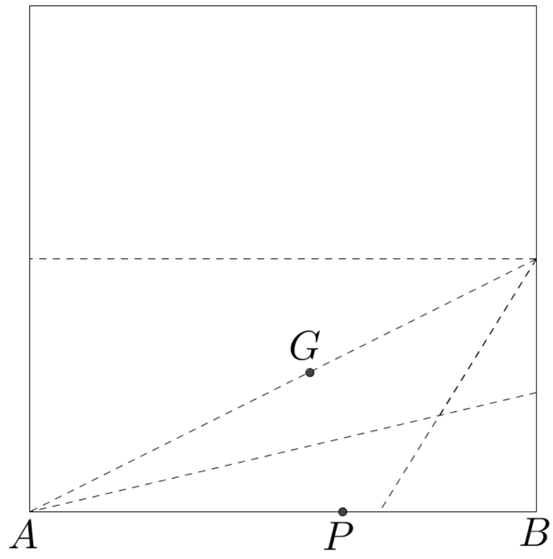
7º Passo: Use uma dobradura com dobra contendo A, para levar o ponto G até o segmento AB. Marque o ponto P (**Figura 75**).

Figura 75: 7 º passo da dobradura para obter a razão áurea



8º Passo: Desdobre a folha de papel quadrada (**Figura 76**).

Figura 76: 8 º passo da dobradura para obter a razão áurea

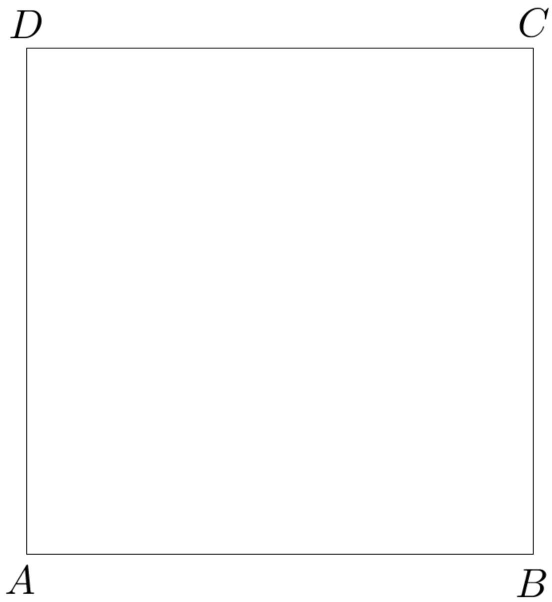


A razão ente AB e AP é igual à razão entre AP e PB que é igual ao Número de Ouro. Obtemos assim um ponto P, tal que $AB/AP = \Phi$.

A partir dos seguintes passos construiremos uma dobradura de um pentágono regular.

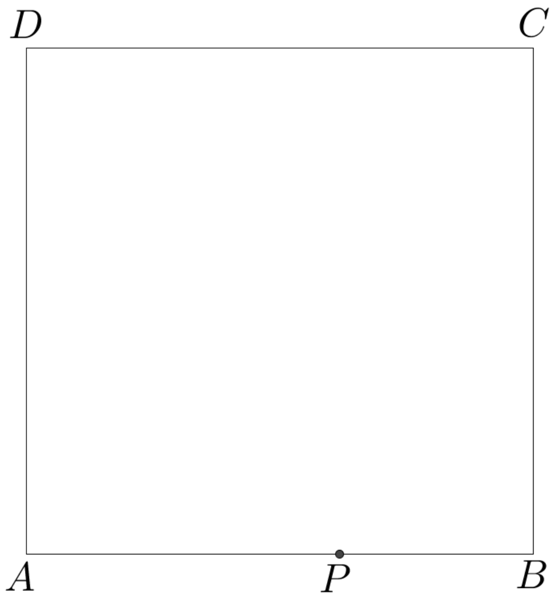
1º Passo: em uma outra folha de papel quadrada marque os quatros vértices do quadrado (A, B, C, D) (**Figura 77**).

Figura 77: 1 º passo da dobradura para obter uma Pentágono Regular



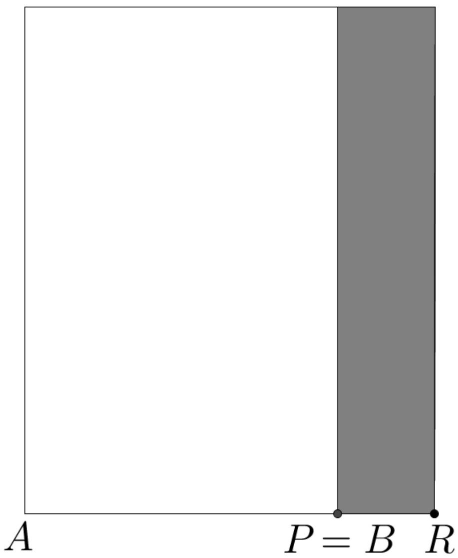
2 º Passo: sobreponha a folha papel quadrada que construímos anteriormente uma razão áurea sobre a nova folha de papel quadrada e marque o ponto P (**Figura 78**).

Figura 78: 2 º passo da dobradura para obter uma Pentágono Regular



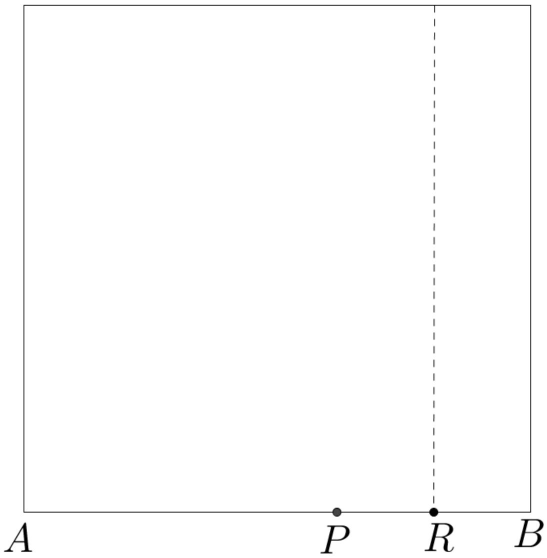
3º Passo: divida o segmento PB ao meio e marque o ponto médio R(**Figura 79**).

Figura 79: 3 º passo da dobradura para obter uma Pentágono Regular



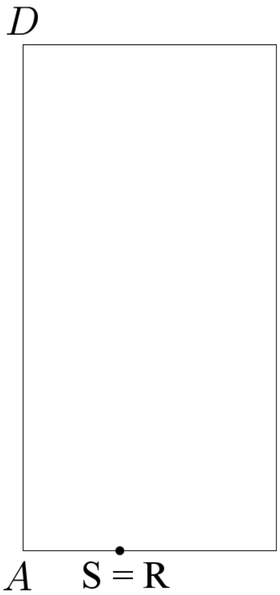
4 º Passo: Desdobre a folha de papel (**Figura 80**).

Figura 80: 4 º passo da dobradura para obter uma Pentágono Regular



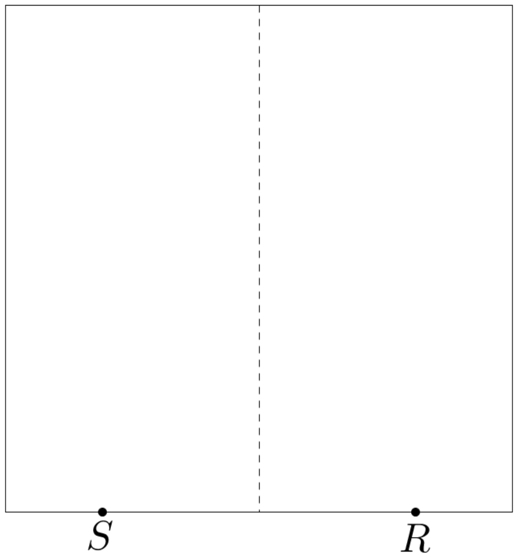
5 º Passo: dobre a folha ao meio e marque a refletido de R igual a S(**Figura 81**).

Figura 81: 5 º passo da dobradura para obter uma Pentágono Regular



6º Passo: Desdobre a folha (**Figura 82**).

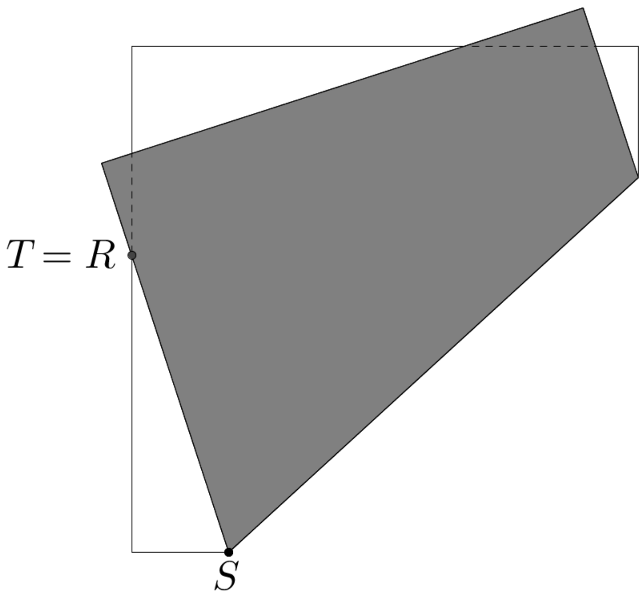
Figura 82: 5 º passo da dobradura para obter uma Pentágono Regular



O segmento SR é o lado do pentágono regular e os próximos passos servem para obter os outros vértices.

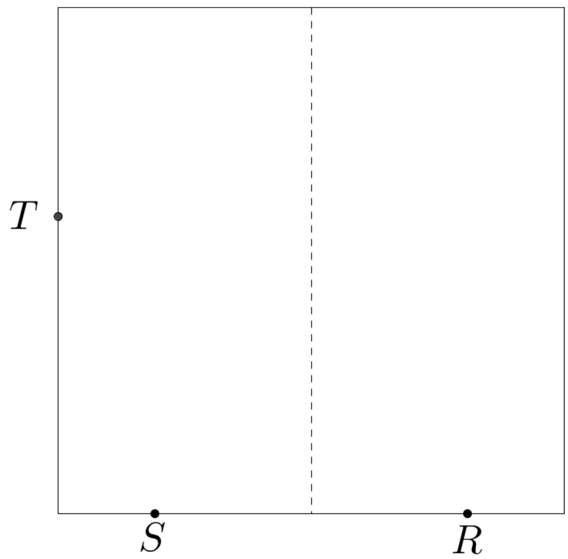
7º Passo: usando uma dobra que passa em S, reflita o ponto R sobre o lado esquerdo da folha determinando o ponto T (**Figura 83**).

Figura 83: 7 º passo da dobradura para obter uma Pentágono Regular



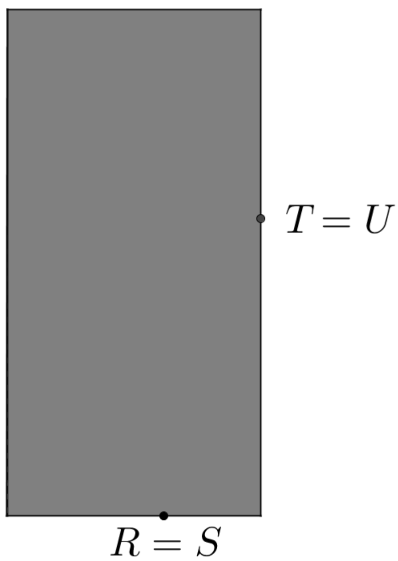
8ºPasso: Desdobre a folha de papel quadrado (**Figura 84**).

Figura 84: 8 º passo da dobradura para obter uma Pentágono Regular



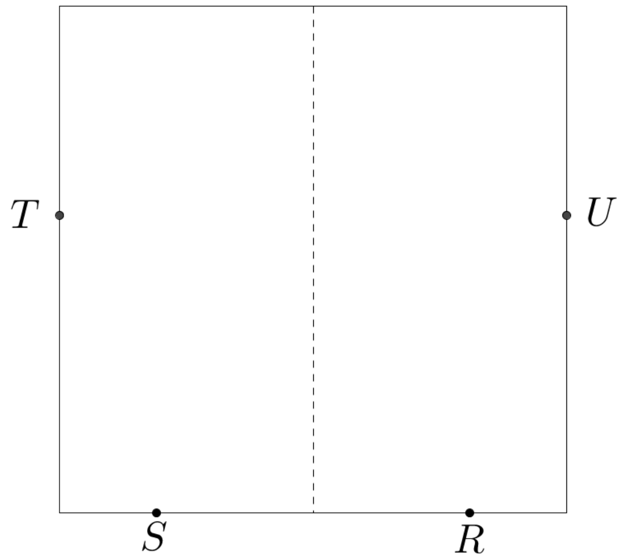
9º Passo: proceda analogamente com o lado direito da folha refletindo o vértice T sobre um ponto U. Este ponto pode ser obtido também usando a mediatriz do segmento AB como dobra e refletindo T sobre o lado direito da folha (**Figura 85**).

Figura 85: 9 º passo da dobradura para obter uma Pentágono Regular



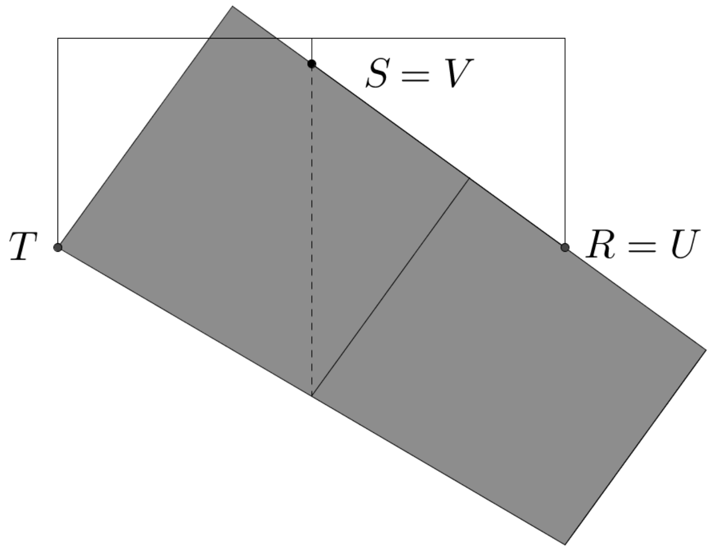
10 º Passo: Desdobre a folha para fazer o próximo passo (**Figura 86**).

Figura 86: 10 º passo da dobradura para obter uma Pentágono Regular



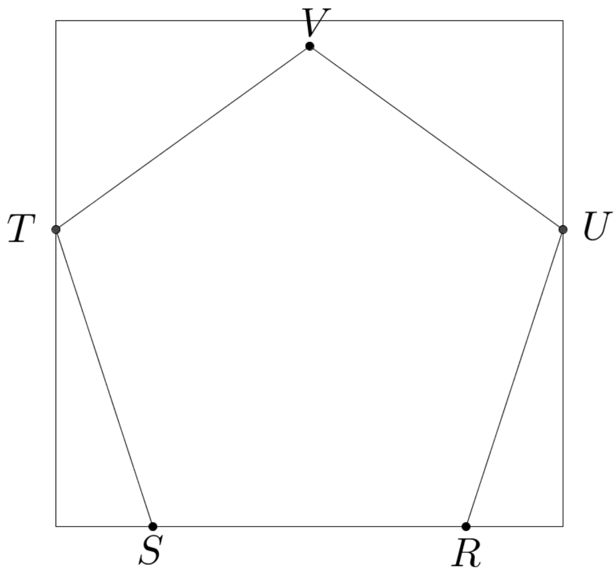
11º Passo: Finalmente, usando uma dobra que contém o ponto T reflita o ponto U sobre um ponto V na mediatriz de AB (**Figura 87**)..

Figura 87: 11 º passo da dobradura para obter uma Pentágono Regular



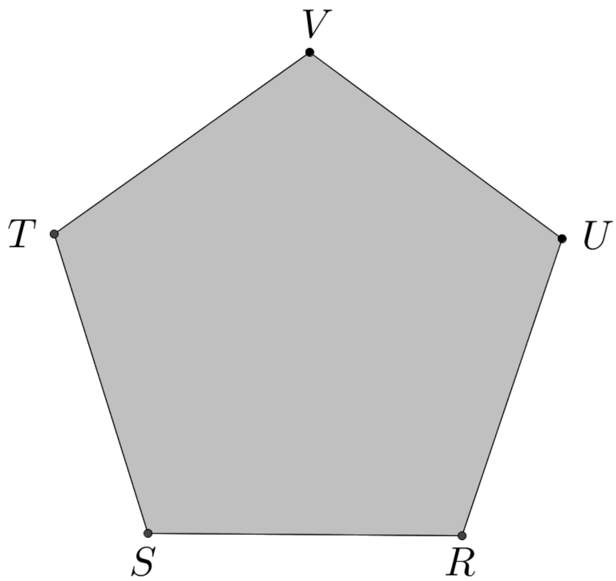
12º Passo: Desdobre. Assim obtemos os cinco vértices do pentágono regular que respectivamente são SRUVT (**Figura 88**).

Figura 88: 12 º passo da dobradura para obter uma Pentágono Regular



13º Passo: Dobre os segmentos que passa pelos respectivos vértices ST, TV, VU, UR obtendo assim o pentágono regular (**Figura 89**).

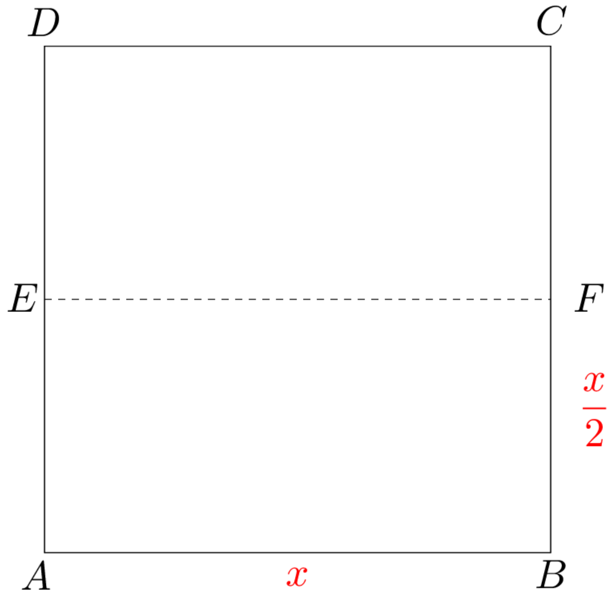
Figura 89: 14 º passo da dobradura para obter uma Pentágono Regular



Provaremos algebricamente através de cada passagem da dobradura a seguir o fato que afirmamos no inicio dessa atividade que o segmento AB em um folha quadrada está dividido em Extrema e Média Razão através de dobradura (**Figura 76**).

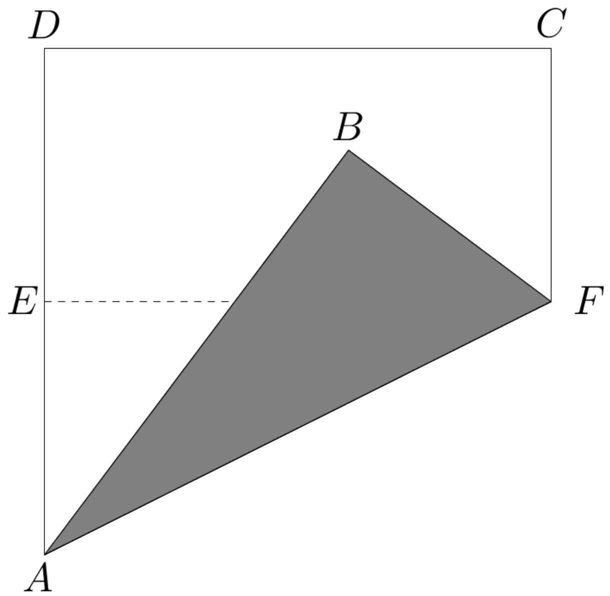
Seja $AB = x \Rightarrow FB = \dfrac{x}{2}$ (**Figura 90**).

Figura 90: Demonstração da primeira parte da Atividade 5



Depois é feito uma dobradura sobre a diagonal AF do retângulo $EABF$ (**Figura 91**)

Figura 91: Demonstração da primeira parte da Atividade 5



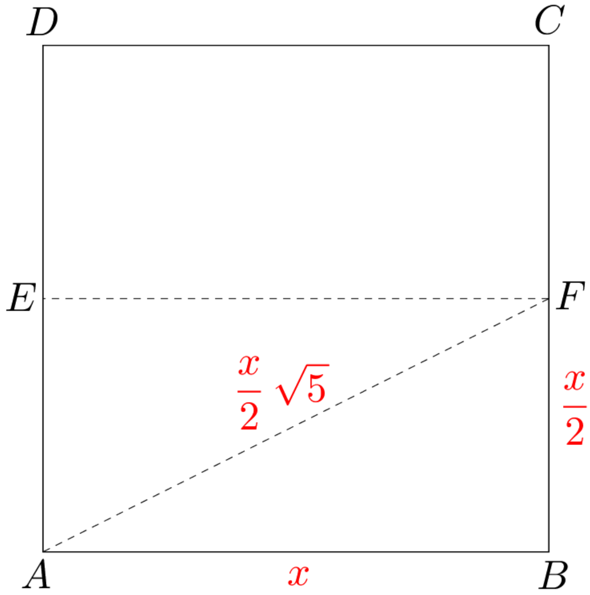
Assim obtemos um ΔAFB retângulo, logo pelo Teorema de Pitágoras temos que:

$$AF^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + x^2$$

$$\Rightarrow AF = \sqrt{\frac{x^2}{4} + x^2} = \sqrt{\frac{5x^2}{4}} = \frac{x}{2}\sqrt{5}$$

Portanto concluímos (**Figura 92**):

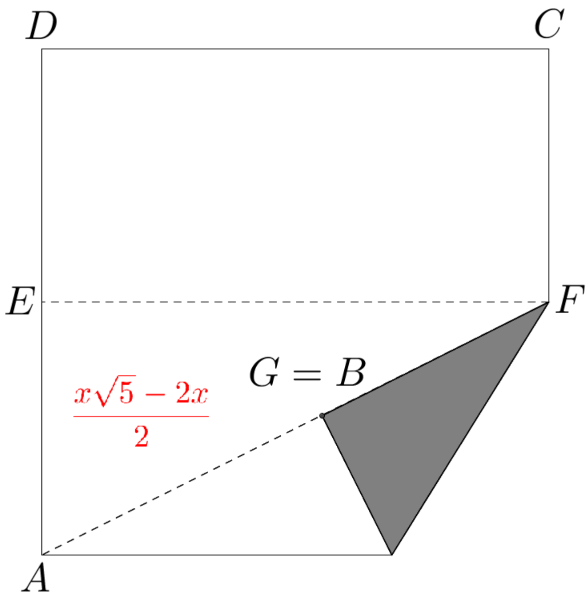
Figura 92: Demonstração da primeira parte da Atividade 5



$$AF = \frac{x\sqrt{5}}{2}$$

Após o próximo passo da dobradura, obtemos o ponto $G = B$ (**Figura 93**), tal que:

Figura 93: Demonstração da primeira parte da Atividade 5

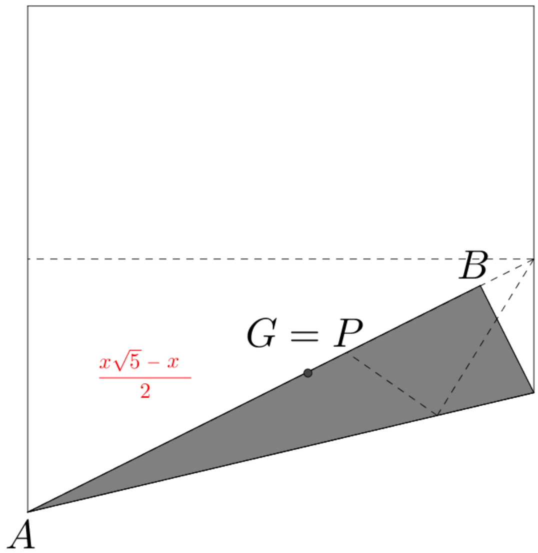


$$AG = \frac{x\sqrt{5}}{2} - \frac{x}{2} = \frac{x\sqrt{5} - x}{2}$$

A próxima passagem da dobradura gera o ponto P talque $AP = AG$ (**Figura 94**), logo:

$$AP = \frac{x\sqrt{5} - x}{2}$$

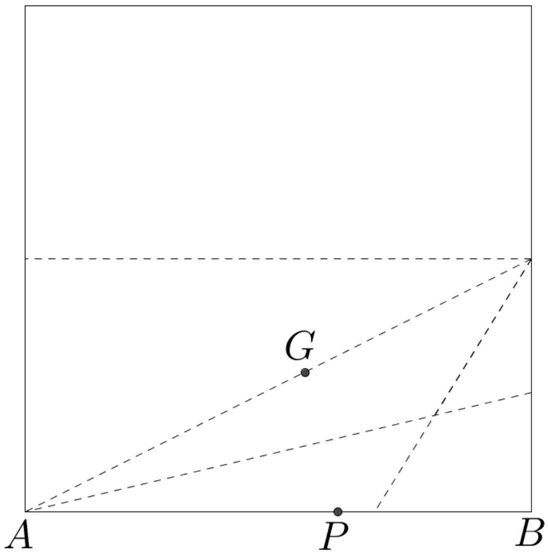
Figura 94: Demonstração da primeira parte da Atividade 5



Devemos mostrar que o ponto P obtido através das dobraduras (**Figura 95**) divide o segmento AB em média e extrema razão, logo pela definição, isto é:

$$\frac{AB}{AP} = \Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Figura 95: Demonstração da primeira parte da Atividade 5



De fato:

$$\frac{AB}{AP} = \frac{x}{\dfrac{x\sqrt{5}-x}{2}} = \frac{2x}{x\sqrt{5}-x} = \frac{2x}{x\left(\sqrt{5}-1\right)} = \frac{2}{\sqrt{5}-1}$$

Racionalizando o denominador, obtemos que:

$$\frac{AB}{AP} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} . \frac{\left(\sqrt{5}+1\right)}{\left(\sqrt{5}+1\right)} = \frac{2\left(\sqrt{5}+1\right)}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Portanto:

$$\frac{AB}{AP} = \Phi$$

Assim fica provado que através de dobradura é possível obter a Razão Áurea.

4.6 Conclusões

Definimos uma proposta didática e detalhamos como o professor deve desenvolve-las em sala de aula cada uma das atividades envolvendo a Razão Áurea na qual mostraremos no próximo capitulo como foi desenvolvida duas destas atividades em uma escola pública na cidade de Presidente Prudente do estado de São Paulo.

5 APLICAÇÃO NA SALA DE AULA

A pesquisa foi realizada na Escola Estadual Professora Maria Luiza Formozinho Ribeiro, no município de Presidente Prudente - SP. Participaram da pesquisa 40 alunos do turno vespertino durante o período de abril a junho de 2016. Estes alunos fazem parte da turma do 9º ano B do ensino fundamental. A aplicação das atividades contou com o apoio da professora Angélica que junto com os coordenadores pedagógicos da escola permitiram usar as aulas de matemática para que fosse possível desenvolver a proposta deste projeto.

A análise das atividades foi feita através de observações durante a aplicação, do material produzido e dos relatórios feitos pelos alunos duração os dias que foram desenvolvidos o projeto. O sigilo das informações será preservado através de adequada codificação dos instrumentos de coleta de dados, logo os alunos desta turma serão identificados pelos códigos de B1 a B40.

5.1 1º dia de Aplicação do Projeto

No primeiro dia de aplicação do projeto na turma do 9º ano B, houve um diálogo com os alunos apresentando o projeto que seria desenvolvido com eles durante o período de 2 meses em algumas aulas e cada semana. Durante a apresentação foi informado que seriam propostas algumas atividades didáticas para eles fazerem e que precisaria de total colaboram e seriedade pois os resultados desta atividades seriam utilizados como base de uma pesquisa do mestrado profissional de matemática sobre novos métodos didáticos para aplicação em turmas do ensino fundamental ou médio no qual o tema desta pesquisa é o Número de Ouro. Logo um dos alunos fez uma velha indagação que todo professor já deve ter se deparado durante alguma momento da sua carreira: "vale nota professor?". Neste momento da discussão, foi informado que não valeria uma nota e que o objetivo seria verificar se estes novos métodos didáticos realmente abrangeriam a todos os alunos e até aqueles que apresentam maiores dificuldades com a disciplina de matemática, se conseguiriam desenvolvê-las tranquilamente. Após a breve apresentação foi entregue para turma responder um questionário que foi desenvolvido para diagnosticar o conhecimento prévio sobre o Número de Ouro, razão e proporção, e outros temas correlatos as atividades que seriam propostas. Foi dado 15 minutos para eles respondessem o questionário.

Após aplicação do questionário foi discutido com os alunos que durante a aplicação do projeto e seu desenvolvimento, faríamos a todo momento uma reflexão sobre tudo que foi abordado no questioário e qual a sua relação com o tema do projeto: o Número de Ouro.

Logo foi apresentado o contexto histórico do Número de Ouro e algumas das suas aplicações. Isso foi feito com uma apresentação em data show na sala de aula. O data show foi fornecido pela escola.Após a apresentação, os alunos assistiram a três vídeos que tratam sobre o Número de Ouro para que os alunos se familiarizassem melhor sobre o assunto abordado. Os três vídeos encontram-se disponível na internet, o primeiro vídeo chama-se "Donald no País da Matemágica" e tem a duração de 27 minutos mas foi passado somente o trecho no qual abordava o pentagrama e o retângulo de ouro; o segundo vídeo é o décimo segundo episódio da terceira temporada da série "Isto é Matemática", que é promovido pela Sociedade Portuguesa de Matemática e transmitido na SIC Notícias e SIC Internacional, com o apoio da Fundação Vodafone Portugal, e o terceiro vídeo é o décimo terceiro episódio deste mesma série. Os dois últimos vídeos tem a duração de aproximadamente 7 minutos cada. Essa parte inicial foi feita em duas aulas de 50 minutos de duração cada.

Durante a apresentação dos vídeos, os alunos a maioria dos alunos prestaram bastante atenção e os que estavam mais dispersos ficaram em silêncio e não ficaram com conversas paralelas. Após a apresentação, iniciou-se um momento de discussão sobre o assunto objetivando ver o que os alunos haviam compreendido acerca do conteúdo.

No final da aula foi informado que para realização das atividades de construção geométrica, os alunos precisariam levar para as aulas alguns instrumentos para realização das atividades. Os instrumentos eram: régua, compasso, esquadro e transferidor. Além do material citado, também foi pedido que levassem calculadora que poderia ser a do celular. Porém se deparamos com uma poblema, a maioria dos alunos informou que não tinham compasso e nem régua. Um dos alunos ainda questionou que não tinha pois o "governo na forneceu para ele". Assim após término da aula procurei a coordenação para me informar se a escola possui algum destes materias para emprestar e me foi informado que as réguas eles ainda possuim e que estavam em bom estado porém os compassos estavam a maioria quebrado pois muitas vezes quando eles emprestam para os alunos e eles acabam não tem zelo pelo material e acaba os danificando.

No dia seguinte busquei levantar quantos compasso seriam precisos conseguir para que pudesse voltar a aplicar as atividades na sala de aula. Busquei uma parceria com um papelaria da cidade que conseguiu fornecer os compassos com um preço abaixo da tabela num total de 35 compassos para que fosse possível desenvolver as atividades com os alunos.

5.2 2º dia de Aplicação do Projeto

A primeira atividade de construção geométrica desenvolvida foi divisão de um segmento em Média e Extrema Razão. Os alunos receberam uma régua, uma folha de sulfite A4 e um compasso para faze-la. Os alunos foram orientados a seguir passo a passo o desenvolvimento das ativadade conforme o professor fosse fazendo na lousa.

Inicialmente foi aberta uma discussão para verificar os conhecimentos dos alunos acerca dos conceitos de ponto médio e reta perpendicular. Alguns alunos tinham noção dos conceitos, mas não sabiam como construir utilizando os instrumentos: régua e compasso. Muitos alunos afirmaram que não sabiam manusear um compasso pois quase não era utilizado nas aulas de matemática.

Nesta atividade, os passos foram feitos no quadro e os alunos observavam para realizá-los logo após cada passo que foi explica e feito. Para o primeiro passo, foi explicado o que é ponto médio e foi feita, então, a construção com régua e compasso. O procedimento para a construção do ponto médio de um segmento e sua justificativa encontram-se na seção 5.1.5.1. Nesse momento, foi observado que os alunos apresentaram bastante dificuldade em manusear o compasso. Para construir uma reta perpendicular, que é o segundo passo da atividade, os alunos apresentaram um pouco mais de facilidade pois era parecido com a construção do ponto médio. Estas duas construções tiveram que ser repetidas 2 vezes para que eles se familiarizassem com os processos de construções geométricas. Durante toda a atividade, o processo foi muito desgastante porque por muitas vezes tive que parar as explicações para poder chamar atenção daqueles alunos desinteressados que não acompanhavam por estarem conversando e em outros momentos tive que parar e voltar a explicar alguns passos novamente para que os mesmos pudessem acompanhar.

Para verificar se o ponto realmente dividia o segmento em Razão Áurea, ao final da atividade seria pedido que os alunos medissem os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AP}$ e $\overline{PB}$ com a régua, e realizassem a divisão dos segmentos $\overline{AB}/\overline{AP}$ e $\overline{AP}/\ \overline{PB}$. Após as divisões, alguns alunos não encontraram os valores próximos ao número esperado, o que gerou uma nova discussão acerca dos motivos. A primeira resposta apontada por eles foi a falta de habilidade no uso do compasso; alguns afirmaram que era muito complicado utilizar o compasso e que era melhor tentar fazer tudo com a régua.

Escolhemos colocar neste trabalho as imagens de dois trabalhos desenvolvido pelos alunos desta atividade que apresentaram os melhores resultado. (**Figura 96** e **Figura 97**)

Figura 96: Atividade - Aluno B9

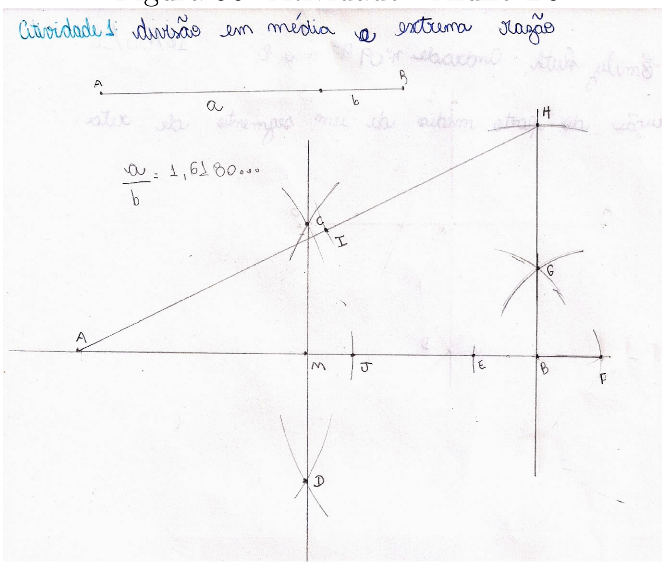
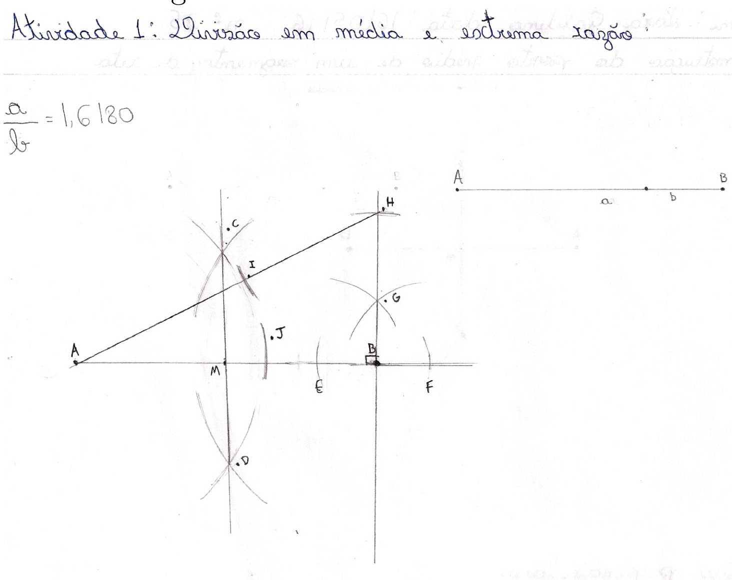


Figura 97: Atividade - Aluno B25



5.3 3º dia de Aplicação do Projeto

No terceiro dia de aplicação do projeto foi desenvolvido a segunda atividade de construção geométrica que consistia em construir retângulo áureo e uma espiral áurea. Foi feita uma retomada da apresentação dos vídeos para relembrar a relação entre o Retângulo Áureo e o Número de Ouro. Em seguida, iniciou-se uma breve discussão a respeito do assunto abordado em duas questões da avaliação diagnóstica que tratava sobre a definição do quadrado e do retângulo e além disso pedia para verificar a veracidade das seguintes afirmações:

i. "Todo quadrado é um retângulo".

ii. "Todo retângulo é um quadrado".

Algumas respostas para o que é um quadrado foram: "É uma forma geométrica"; "É uma figura de quatro lados iguais". Partindo dessa discussão ficamos com o seguinte conceito para quadrado: "É um quadrilátero com quatro lados iguais e quatro ângulos retos". Para o retângulo, tivemos as seguintes respostas: ”É um quadrado esticado"; "É como um quadrado só que não tem todos os lados iguais". Então ficamos com o seguinte conceito "É um quadrilátero com todos os ângulos retos". Assim pudemos concluir juntos que a primeira afirmação era verdadeira e a segunda afirmação era falsa.

A partir daí deu-se início à construção de um quadrado conforme era pedido no primeiro passo da atividade. Para essa atividade, foi necessária a construção de uma perpendicular por um ponto pertencente à reta suporte, na qual foi construída a base do quadrado. Tomamos como base a seção 5.1.5.2 para construção da perpendicular. A construção do retângulo encontra-se na seção 5.2.6. Com os alunos, a comprovação foi que o retângulo obtido era um retângulo áureo foi feita atráves da divisão da medida do maior lado pelo menor lado do retângulo. Nem todos conseguiram encontrar um valor próximo ao valor do Número de Ouro, pelos mesmos motivos citados na atividades anterior. Dentre todas as atividades, essa foi a que os alunos tiveram maior dificuldade. Alguns acharam muito extensa e demonstraram estar entendiados após um certo tempo da execução, por isso foi necessário um tempo maior do que o que havia sido planejado. Para concluir todos os passos, foram utilizadas 2 aulas de 50 minutos cada. Outro agravante neste dia foi que a professor efetiva da sala não estava presente por motivos médicos, logo alguns alunos ficaram mais dispersos e houve uma falta de interesse maior pra quererem participar das atividades proposta na aula do que apresentada nos outros dias com a professora titular na sala. Um reflexo desta situação foi que os resultados obtidos foi muito inferior aos resultados das outras atividades.

As atividades que apresentaram melhores resultado feito pelos alunos neste terceiro dia foram as da (**Figura 98**) e a da (**Figura 99**).

Figura 98: Atividade - Aluno B22

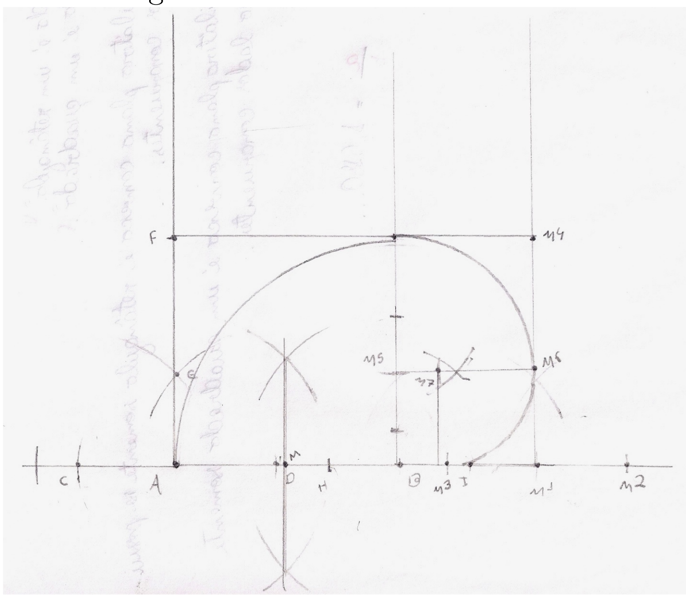
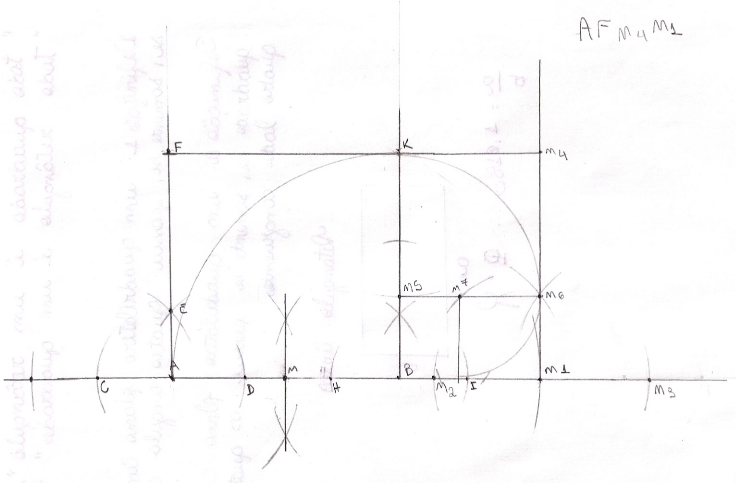


Figura 99: Atividade - Aluno B9



6 CONCLUSÃO FINAL

Vimos ao longo desse trabalho a beleza e as diversas curiosidades do número de ouro. Inicialmente falamos do contexto histórico, destacando seus aspectos e vários nomes que foram atribuídos ao decorrer do tempo. Destacamos alguns propriedades e evidenciamos o retângulo e a espiral áurea, obtendo sua construção. Obsevamos que ele pode ser aplicado nas mais diversas áreas das ciências e nas mais inusitadas situações. Logo podemos notar que a importância do seu estudo no ensino da matemática vem do fato de ele ser um excelente instrumento de contextualizaçõao de diversos conteúdos matemáticos. Ele proporciona ao aluno uma oportunidade de investigação do conhecimento e de desenvolvimento e construção de novas ideias.

Diante de tantas possibilidades de relacionar o Número de Ouro com os conteúdos matemáticos, escolhemos trabalhar com as construções geométricas e dobraduras para poder observar a relação que os alunos fariam com a realidade e a matemática. De acordo com o que foi vivenciado durante a aplicação das atividades e o material produzidos pelos alunos, podemos dizer que foram satisfatórios os resultados obtidos tanto quanto à observação da aplicação da matemática no dia a dia feita pelos alunos, quanto aos resultados dos trabalhos de construção geométrica, levando em consideração todos os contra-tempos que tivemos durante este processo. Claro que os resultados poderiam ser bem melhores se todos os alunos tivessem o mesmo interesse e concentação e menos conversas paralelas por parte de alguns alunos. Observa-se que nos dias que cujo os alunos se mostraram mais concentrados resultados foram melhores. Logo na lista dos grandes desafios a serem encarados hoje dentro da escola constam que além das dificuldades de aprendizagem os problemas de indisciplina e comportamentais influenciam diretamente na aprendizagem de todos os alunos.

Um ponto positivo foi a persistência e a vontade de realizar a atividade o mais perfeito possível por alguns alunos, o que nem sempre ocorre com outros conteúdos onde eles já querem desistir na primeira tentativa.

Ao desenvolver este trabalho pudemos perceber que o estudo da Razão Áurea se mostra como uma excelente ferramenta para o estudo dos Números Irracionais, além de permitir a relação com outros conhecimentos. Este trabalho foi realizado em uma turma do 9º ano, entretanto chamamos a atenção para a utilização do Número de Ouro em outras séries, bastando, para isso, fazer a adaptação das atividades.

Dessa forma, por tudo que foi exposto, podemos concluir que este trabalho é de extrema relevância, pois possibilitou um conhecimento muito rico sobre o Número de Ouro, bem como sua relação e propriedades, mostrando várias aplicações interessantes no mundo material, além de sugerir algumas que os professores podem desenvolver em sala de aula.

Finalizando, podemos dizer que o estudo sobre o tema foi bastante prazeroso e aprendemos grandemente sobre o mesmo. Ele é um tema muito amplo e é claro que ficou muitos pontos dos quais não falamos. No entanto, pelo que escrevemos, esperamos que ele seja uma relevante fonte de pesquisa para muitas pessoas que queiram conhecer tais assuntos e que as atividades propostas venham de fato a serem aplicadas em sala de aula pelos professores de ensino fundametal ou médio, devido ao fato de acreditarmos que as mesmas são munidas de uma vasta riqueza e possibilidade de aproximação da Matemática com o mundo concreto. Esperamos também inspirar outros trabalhos com este tema, dessa vez com aplicações das atividades propostas em sala de aula e os resultados obtidos com as mesmas.

Anexo I

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JULIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

Avaliação de Aprendizagem

Nome: Série:

Questionário:

1. Descreva o que você entendi pelo conceito de razão matemática?

2. Você já ouviu falar sobre o Número do Ouro? Defina o que você sabe sobre o Número do Ouro.

3. Você sabe qual é o valor numérico do Número do Ouro? Descreva este valor.

4. Caso você conheça o Número do Ouro, descreva quais outros nomes é atribuído a este número na matemática.

5. Você já utilizou o instrumento matemático chamado compasso? Descreva para qual finalidade se usa este instrumento?

6. Você sabe dizer o que é Geometria Descritiva e o que se aprende neste ramo da matemática?

7. Responda se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas:

a. Todo quadrado é um retângulo.

b. Todo retângulo é um quadrado.

8. Dê a definição de um quadrado e de um retângulo?

9. O que é um pentagrama? O que você já ouviu falar sobre está figura geométrica?

Referências

[1] Anastácio, L. R. ***Razão Áurea um Rico Tesouro de Surpresas***. Tese (Mestrado Profissional de Matemática) - Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ, 2015.

[2] Araújo, S. M. M. ***Estudo da proporção áurea aplicada a elementos de sistema de identidade visual***. *CIDAG - Conferência Internacional em Design e Artes Gráficas*, vol. 1. Lisboa, Portugal, 2010.

[3] Boyer, C. B. ***História da Matemática.****Tradução: Elza F. Gomide*, 3 ed. São Paulo: Blucher, 2010.

[4] BRASIL. *Secretaria de Educação Fundamental.* ***Parâmetros curriculares nacionais : Matemática.*** Brasília: MEC, 1998.

[5] Contador, P. R. M. ***A matemática na arte e na vida***. São Paulo: Livraria da Física, 2011.

[6] dal Bello, E. **O que é a Regra dos Terços na Fotografia?** Disponível: em <`http://www.photopro.com.br/tutoriais-gratis/regra-dos-tercos-fotografia/`>. Acesso em: 20/02/2016.

[7] de Oliveira Kfouri, V. ***ϕ: O número de ouro***. Tese (Mestrado Profissional de Matemática) - Universidade Federal de Goiás - Instituto de Matemática e Estatística, 2013.

[8] Dolce, O. ***Fundamentos da Matemática Elementar****: Geometria Plana / Osvaldo Dolce, José Nicolau Pompeo*, 7 ed., vol. 9. São Paulo: Atual, 1995.

[9] Huntley, H. E. ***A Divina Proporção: Um Ensaio sobre a Beleza na Matemática***. Editora da UnB, 1985, p. 35.

[10] Lívio, M. ***Razão Áurea:a história de Fi, um número surpreendente***, 6 ed. Rio de Janeiro: Record, 2011, p. 13.

[11] Ramos, M. G. O. **A Sequência de Fibonacci e o Número do Ouro**, 2013.

[12] Regina, C. **O guia definitivo da regra dos terços na fotografia**. Disponível: em <`http://www.photopro.com.br/imagens/raiz/ERICA/191_TERCOS/191_tercos_05.jpg`>. Acesso em: 02/02/2016.

[13] Rotelli, L. **Curso de Fotografia: Aula 4 – A Proporção Áurea**. Disponível: em <`http://www.entreculturas.com.br/wp-content/uploads/2011/03/grade_aurea.jpg`>. Acesso em: 16/02/2016.