



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

Alex Melges Barbosa

Classes de Stiefel-Whitney e de Euler

São José do Rio Preto
2017

Alex Melges Barbosa

Classes de Stiefel-Whitney e de Euler

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. João Peres Vieira

São José do Rio Preto
2017

Barbosa, Alex Melges.

Classes de Stiefel-Whitney e de Euler / Alex Melges Barbosa. --
São José do Rio Preto, 2017

109 f. : il.

Orientador: João Peres Vieira

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista “Júlio
de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências
Exatas

1. Matemática. 2. Topologia algébrica. 3. Teoria de homologia.
4. Grupo de classes (Matemática) 5. Espaços fibrados (Matemática)
I. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto
de Biociências, Letras e Ciências Exatas. II. Título.

CDU – 513.831

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Alex Melges Barbosa

Classes de Stiefel-Whitney e de Euler

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. João Peres Vieira
Orientador

Prof. Dr. Daniel Vandrúscolo
UFSCar - São Carlos

Profa. Dra. Maria Gorete Carreira Andrade
UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto
22 de fevereiro de 2017

RESUMO

Neste trabalho, apresentaremos uma descrição axiomática das classes de Stiefel-Whitney e, assumindo válidos estes axiomas, mostraremos algumas de suas aplicações. Posteriormente, definiremos as classes de Stiefel-Whitney e mostraremos que esta definição satisfaz os axiomas, além de garantir a unicidade das classes de Stiefel-Whitney. Por fim, definiremos a classe de Euler e mostraremos algumas de suas aplicações, bem como sua relação com as classes de Stiefel-Whitney.

Palavras-chave: Variedades C^∞ , Fibrados Vetoriais, Classes de Stiefel-Whitney, Fibrados Orientados, Classe de Euler.

ABSTRACT

In this work, we will present an axiomatic description of the Stiefel-Whitney classes and, taking these axioms true, we will show some of their applications. After that, we will define the Stiefel-Whitney classes and we will show this definition meets the axioms, besides it ensures the unity of the Stiefel-Whitney classes. Lastly, we will define the Euler class and we will show some of its application as well as its relationship with the Stiefel-Whitney classes.

Keywords: C^∞ Manifolds, Vector Bundles, Stiefel-Whitney Classes, Oriented Bundles, Euler Class.

*Aos meus pais
Antonio Carlos e Edith*

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por tudo que vivi e aprendi até agora, pelas oportunidades oferecidas e principalmente por ter concedido ser criado numa família como a minha. Agradeço também por me consolar e guiar meus passos quando mais precisei.

Não sabendo o que e como dizer, só tenho a agradecer meus pais, Antonio Carlos e Edith, por todo o amor e carinho com os quais fui criado e educado. Se cheguei até aqui é porque vocês se dedicaram além do máximo nos ensinamentos dados a mim e meus irmãos de como ser humano. Obrigado.

Não poderia esquecer meus grandes irmãos, Andre e Ana Carolina, pelos momentos de grande euforia dentro de casa com nossas brincadeiras e pela paciência que tiveram por mim, já que sou o caçula. Não foram e nem serão nossos desentendimentos que irão nos separar ou diminuir nossas amizades uns pelos outros, pois somos uma família, nesta vida ou em outras.

Agradeço com muito carinho minha melhor amiga, companheira e namorada, Mayumi, pelos seus conselhos e cuidados quando estava desmotivado ou deprimido. Sua presença sempre me alegrou os dias. Não poderia esquecer de agradecer sua paciência comigo, pelas horas ausente, seja estudando, digitando ou passando o dia com meu orientador. Ter vocês do meu lado foi um dos meus melhores presentes durante esse mestrado, e sempre será.

Agradeço também meus amigos do Ensino Médio e da UNESP, os quais não citarei nomes. Não por medo de esquecer alguém, mas porque realmente foram poucos os que me acompanharam dia a dia e fizeram parte da minha vida como irmãos. Estes não precisam ser citados, apenas lembrados.

Agradeço meus professores do Ensino Médio e da UNESP pelos esforços em ensinar e passar seus conhecimentos a nós, alunos, sempre com boa vontade e entusiasmo. Esta profissão não é fácil e pouco reconhecida, mas ninguém pode negar que para obtermos sucesso na vida pessoal e profissional, sempre precisaremos de vocês.

Agradeço meu orientador Professor João pela sua dedicação, atenção e muita paciência comigo. Fico muito admirado com seu entusiasmo pela Matemática, a forma como trata os problemas na sala de aula e sempre que obtém sucesso na resolução diz: "Fiquei até arrepiado!". Confesso que nas primeiras vezes me assustava, mas com tempo aprendi o que é ter gosto pela nossa profissão. Obrigado João, pois nestes seis

anos, entre graduação e mestrado, o senhor me ensinou o que é ser um professor e um admirador da mãe das ciências.

Por fim, agradeço a todos que, direta ou indiretamente, tiveram participação ou influência no desenvolvimento deste trabalho e à CAPES, pelo auxílio financeiro.

*Para bem conhecer uma coisa
é preciso tudo ver, tudo aprofundar,
comparar todas as opiniões, ouvir os prós e os contras.*
Allan Kardec

Lista de Figuras

6.1	Variedade compacta com bordo	68
7.1	Homeomorfismo entre $\mathbb{R}P^2 - int(D^2)$ e uma faixa de Möebius	79
B.1	Resumo do produto entre Quaternions	104
B.2	Resumo do produto entre números de Cayley	105

Lista de Tabelas

6.1	Classes de Stiefel-Whitney de alguns espaços Projetivos	57
B.1	Produto entre Quaternions imaginários unitários	103
B.2	Produto entre números de Cayley imaginários unitários	105

Sumário

1	Introdução	12
2	Conceitos e Resultados Preliminares	14
2.1	Preliminares para o Capítulo 3	15
3	Variedades C^∞ e seus Espaços Tangentes	17
4	Fibrados Vetoriais	22
5	Construção de Fibrados a Partir de Fibrados Dados	33
5.1	Fibrado Restrição	33
5.2	Fibrado Induzido	33
5.3	Produto Cartesiano	37
5.4	Soma de Whitney	38
5.5	Fibrados Vetoriais Euclidianos e Complementos Ortogonais	40
5.5.1	Fibrados Vetoriais Euclidianos	40
5.5.2	Complementos Ortogonais	42
5.6	Fibrado Hom	45
6	Classes de Stiefel-Whitney	49
6.1	Classes de Stiefel-Whitney	49
6.2	Imersões	63
6.3	Números de Stiefel-Whitney	66
7	Existência das Classes de Stiefel-Whitney	71
7.1	Quadrado de Steenrod	74
7.2	Verificação do Axioma 1	76
7.3	Verificação do Axioma 2	76
7.4	Verificação do Axioma 3	77
7.5	Verificação do Axioma 4	78
8	Unicidade das Classes de Stiefel-Whitney	81
8.1	Variedades de Grassmann	81
8.2	Prova da Unicidade	82
9	Fibrados Orientados e Classe de Euler	84
9.1	Fibrados Orientados	85
9.2	Classe de Euler	89

10 Conclusão	95
Referências	97
A Cohomologia Singular	98
B Números Complexos, Quaternions e de Cayley	102
B.1 Números Complexos	102
B.2 Quaternions	103
B.3 Números de Cayley	104
C Coeficientes Binomiais Módulo 2	107

1 Introdução

Os estudos sobre classes características começaram em 1935 quando Eduard Stiefel definiu certas classes de homologia para fibrados tangentes de variedades C^∞ . Simultaneamente, Hassler Whitney tratou do caso para qualquer fibrado esfera ¹. Posteriormente, Whitney contribuiu no desenvolvimento da linguagem da Teoria de Cohomologia e, assim, surgiram os conceitos das classes de cohomologia. Com isso, Whitney provou o resultado que seria chamado mais tarde de Teorema do Produto de Whitney.

O objetivo deste trabalho será o de estudar as classes de Stiefel-Whitney e a classe de Euler, sendo esta última um "caso particular" das classes de Stiefel-Whitney. Veremos como estas classes são construídas e suas aplicações. Para isto, organizaremos este trabalho do seguinte modo:

No capítulo 2, fixaremos algumas notações que serão usadas no decorrer do trabalho e mostraremos as definições e os resultados necessários para o desenvolvimento do capítulo 3.

No capítulo 3, definiremos as variedades C^∞ e seus respectivos espaços tangentes. Com isso, poderemos definir a variedade tangente de uma variedade C^∞ e provaremos alguns resultados importantes envolvendo estes três objetos, que serão necessários para o entendimento dos exemplos 4.2 e 4.3, sendo que estes exemplos serão utilizados com frequência neste trabalho.

Como as classes de Stiefel-Whitney e de Euler estão sempre associadas a um objeto chamado fibrado, o capítulo 4 servirá como base para o restante do trabalho, pois nele definiremos os chamados fibrados vetoriais, que por comodidade chamaremos apenas de fibrados. Os exemplos de fibrados e os resultados deste capítulo serão utilizados em todos os capítulos posteriores.

No capítulo 5, encontraremos fibrados que são obtidos através de outros fibrados, por meio de construções específicas, como por exemplo o fibrado restrição, que é construído simplesmente pela restrição do seu espaço base a algum do seus subespaços.

O capítulo 6 conterá o primeiro tópico principal deste trabalho, as classes de Stiefel-Whitney. Nele, descreveremos as classes de Stiefel-Whitney associadas a um fibrado

¹Um fibrado esfera é obtido de um fibrado vetorial Euclidiano considerando somente os vetores de seu espaço total com norma igual a um.

por meio de quatro axiomas e, assim, veremos que estas classes encontram-se na cohomologia do espaço base deste fibrado com coeficientes em \mathbb{Z}_2 . Assumindo válidos esses quatro axiomas, veremos algumas de suas consequências e calcularemos as classes de Stiefel-Whitney das esferas e dos espaços projetivos reais. Também veremos importantes aplicações destas classes, tais como resultados sobre imersões de variedades C^∞ em espaços euclidianos e quando duas variedades C^∞ pertencem a mesma classe de cobordismo.

No capítulo 7, daremos a definição formal das classes de Stiefel-Whitney por meio do isomorfismo de Thom e dos quadrados de Steenrod. Assim, provaremos que esta definição satisfaz os quatro axiomas propostos no capítulo 6.

No capítulo 8, provaremos que as classes de Stiefel-Whitney são unicamente determinadas quando seu espaço base é paracompacto. Para tanto, definiremos as variedades de Grassmann e as variedades de Grassmann infinitas e veremos alguns resultados envolvendo estas variedades.

Por fim, veremos no capítulo 9 o segundo e último tópico principal deste trabalho, a classe de Euler. Entretanto, esta classe não está associada a qualquer fibrado, mas aos fibrados orientados. Deste modo, definiremos o que é a orientação de um espaço vetorial real qualquer com dimensão $n > 0$ e, assim, definiremos os fibrados orientados por meio da orientação da fibra. Este será o único capítulo em que trabalharemos com a cohomologia do espaço base de um fibrado com coeficientes em \mathbb{Z} , pois a orientação do fibrado interferirá no sinal da classe de Euler, como veremos na propriedade 9.5. Também veremos como a classe de Euler está relacionada com as classes de Stiefel-Whitney e mostraremos suas consequências e aplicações, sendo algumas destas consequências similares com as da classe de Stiefel-Whitney.

Este trabalho tem como base o livro *Characteristic Classes* de John W. Milnor e James D. Stasheff ([8]).

2 Conceitos e Resultados Preliminares

Inicialmente, fixemos algumas notações que serão utilizadas em todo o trabalho.

Sejam X e Y conjuntos quaisquer e $f : X \rightarrow Y$ uma função. Denotaremos por $f^{-1}(B)$ a imagem inversa do subconjunto $B \subset Y$ pela função f . Caso exista $f^{-1} : Y \rightarrow X$, o conjunto $f^{-1}(B)$ denotará a imagem direta de $B \subset Y$ pela função f^{-1} . Ainda, $1_X : X \rightarrow X$ denotará a função identidade de X .

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto qualquer. Sempre que dissermos que $U \subset \mathbb{R}^n$ é aberto estaremos nos referindo a U como um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n . Caso contrário, explicitaremos em qual conjunto U é aberto.

Dados dois espaços vetoriais V_1 e V_2 de mesma dimensão finita, indicaremos $V_1 \cong V_2$ quando V_1 e V_2 forem isomorfos.

Agora, considere dois espaços topológicos X e Y . Se X e Y forem homeomorfos, denotaremos $X \approx Y$. Por outro lado, se X e Y tiverem o mesmo tipo de homotopia, denotaremos $X \simeq Y$. Também, dado $A \subset X$ qualquer, denotaremos por \bar{A} e $\text{int}(A)$ o fecho e o interior de A em X , respectivamente.

Considere G um grupo e $a \in G$ qualquer. Denotaremos por $\langle a \rangle$ o subgrupo de G gerado pelo elemento $a \in G$.

Ainda, denotaremos por $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ e $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ o disco e a esfera de \mathbb{R}^n . Também, dada uma variedade M , denotaremos seu bordo por ∂M .

Agora, diremos que um espaço topológico X é paracompacto se:

- X é um espaço de Hausdorff;
- para toda cobertura aberta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de X , existe um refinamento $\{V_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ que é localmente finito em X , isto é, para todo $\alpha \in \Lambda$, $V_\alpha \subset U_{\alpha'}$ para algum $\alpha' \in \Lambda$ e qualquer ponto $x \in X$ admite um aberto $W \subset X$ contendo $x \in X$ que intercepta um número finito de elementos de $\{V_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$.

Por fim, provemos o resultado abaixo, que será utilizado no Capítulo 4.

Teorema 2.1. *Sejam X, Y, Z espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ funções. Se $g \circ f : X \rightarrow Z$ é contínua e f é um homeomorfismo (respect. g), então g também é contínua (respect. f).*

Demonstração. Inicialmente, considere o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g \circ f} & Z \\ & \searrow f & \nearrow g \\ & & Y \end{array}$$

Suponha o caso em que $g \circ f$ é contínua e f é um homeomorfismo. Como $g = (g \circ f) \circ f^{-1}$, então g é contínua.

Analogamente, suponha que $g \circ f$ é contínua e g é um homeomorfismo. Como $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$, então f é contínua. \square

Agora, vejamos algumas definições e resultados que são fundamentais para o desenvolvimento do capítulo 3.

2.1 Preliminares para o Capítulo 3

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f = (f_1, \dots, f_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função. Dizemos que f é de classe C^∞ se as derivadas parciais de todas as ordens de cada componente $f_i, i = 1, \dots, m$, de f , existem e são contínuas.

Agora, se considerarmos $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função, onde $X \subset \mathbb{R}^n$ é qualquer, diremos que f é de classe C^∞ se, para todo $x \in X$, existirem um aberto $V \subset \mathbb{R}^n$ contendo $x \in X$ e uma função $F : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^∞ tal que $F|_{V \cap X} = f|_{V \cap X}$.

Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$ quaisquer e $f : X \rightarrow Y$ uma função. Diremos que f é de classe C^∞ se a composta $i \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ for de classe C^∞ , onde $i : Y \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ é a função inclusão. Ainda, diremos que f é um difeomorfismo se f for uma bijeção de classe C^∞ com inversa também de classe C^∞ .

Por comodidade, quando uma função $f : X \rightarrow Y$ for de classe C^∞ diremos apenas que f é C^∞ .

Agora, vejamos alguns resultados já conhecidos da Análise que nos auxiliarão na construção dos Espaços Tangentes das Variedades e na demonstração de resultados sobre estes.

As provas dos resultados abaixo podem ser encontradas em [7].

Sejam $U \subset \mathbb{R}^k$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função. Para cada $x \in U$ e qualquer $h \in \mathbb{R}^k$, a derivada da função f no ponto $x \in U$ aplicada ao vetor $h \in \mathbb{R}^k$ é definida por

$$d_x f(h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t}$$

Observemos que, para cada $x \in U$, temos que $d_x f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma função bem definida. Com isso, temos o:

Teorema 2.2. *Se $U \subset \mathbb{R}^k$ é um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ é C^∞ , então, para cada $x \in U$, $d_x f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma transformação linear.*

Nas condições do Teorema acima, temos, relativamente às bases canônicas de \mathbb{R}^k e \mathbb{R}^m , que a matriz da transformação linear $d_x f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ é dada por:

$$J_x f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_k} \end{pmatrix}_{m \times k}$$

A matriz $J_x f$ é chamada de matriz Jacobiana da função f em $x \in U$.

Ainda, se $f : U \rightarrow V$ é um difeomorfismo C^∞ , onde $U \subset \mathbb{R}^k$ e $V \subset \mathbb{R}^k$ são abertos, então $d_x f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ é um isomorfismo linear, para cada $x \in U$.

Se $U \subset \mathbb{R}^k$ é um aberto, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma função com $k \leq m$ e $x_0 \in U$ é tal que $J_{x_0} f$ tem rank máximo, ou seja, $rank(J_{x_0} f) = k \leq m$, então existe um aberto $V \subset U$ de \mathbb{R}^k , com $x_0 \in V$, tal que $rank(J_y f) = k$, para todo $y \in V$.

Considere $U \subset \mathbb{R}^k$, $V \subset \mathbb{R}^m$ abertos e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ funções C^∞ tais que $Im(f) \subset V$. Assim, para qualquer $x \in U$, temos que $d_x(g \circ f) = d_{f(x)}g \circ d_x f$.

3 Variedades C^∞ e seus Espaços Tangentes

Veremos neste capítulo uma breve introdução à Teoria das Variedades diferenciáveis de classe C^∞ e alguns resultados envolvendo seus respectivos espaços tangentes.

Definição 3.1. Diremos que um subconjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade C^∞ de dimensão $k \geq 0$, também chamada de k -variedade C^∞ , se para todo $x \in M$, existirem um aberto $V \subset M$ contendo $x \in M$, um aberto $U \subset \mathbb{R}^k$ e uma função $\varphi : U \rightarrow V$ tal que φ é um difeomorfismo.

Nestas condições, diremos que $\varphi : U \rightarrow V$ é uma parametrização local de M em torno de $x \in M$ e $\varphi^{-1} : V \rightarrow U$ é chamada de sistema de coordenadas locais.

Exemplo 3.1. Como exemplo mais simples de uma variedade C^∞ , considere $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Então, $U \subset \mathbb{R}^n$ é uma n -variedade C^∞ .

De fato, pois se considerarmos a função identidade $1_U : U \rightarrow U$, teremos que, para todo $x \in U$, $1_U : U \rightarrow U$ será uma parametrização local de U em torno de $x \in U$.

Observação 3.1. Se $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma k -variedade C^∞ e $\varphi : U \rightarrow V$ é uma parametrização local de M em torno de $x \in M$, com $\varphi(u) = x$ para algum $u \in U$, então $\varphi|_W : W \rightarrow \varphi(W)$ é uma parametrização local de M em torno de $x \in M$, para qualquer $W \subset U$ aberto de \mathbb{R}^k , com $u \in W$.

Observação 3.2. Se $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma k -variedade C^∞ , é possível construir, para todo $x \in M$, uma parametrização local $\psi : U \rightarrow V$ de M em torno de $x \in M$ tal que $\psi(0) = x$, onde $U \subset \mathbb{R}^k$ é um aberto contendo a origem. De fato, seja $\varphi : U \rightarrow V$ uma parametrização local de M em torno de $x \in M$ com $\varphi(u) = x$. Considere $T : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ a translação dada por $T(v) = v - u$, para todo $v \in \mathbb{R}^k$. Note que $\tilde{U} = T(U) \subset \mathbb{R}^k$ é um aberto contendo a origem e que toda translação é um difeomorfismo, pois a inversa de uma translação será outra translação e $d_v T = 1_{\mathbb{R}^k} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$, para todo $v \in \mathbb{R}^k$.

Assim, $\psi = \varphi \circ (T|_U)^{-1} : \tilde{U} \rightarrow V$ será uma parametrização local de M em torno de $x \in M$ tal que $\psi(0) = x$.

No que segue, sempre que nos referirmos a uma parametrização local $\varphi : U \rightarrow V$ de M em torno de $x \in M$, estaremos considerando que $\varphi(0) = x$.

Agora, suponha $M \subset \mathbb{R}^n$ uma k -variedade C^∞ e $\varphi : U \rightarrow V$ uma parametrização local de M em torno de $x \in M$.

Definição 3.2. Definimos o espaço tangente da variedade M em $x \in M$ como sendo o conjunto $T_x M = d_0 \varphi(\mathbb{R}^k)$.

Exemplo 3.2. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Como vimos no Exemplo 3.1, temos que $U \subset \mathbb{R}^n$ é uma n -variedade C^∞ e $1_U : U \rightarrow U$ é uma parametrização local de U em torno de qualquer ponto $u \in U$. Entretanto, conforme visto na Observação 3.2, temos que $\psi = 1_U \circ (T_U)^{-1} : \tilde{U} \rightarrow U$ será uma parametrização local de U em torno de $u \in U$ tal que $\psi(0) = u$, onde $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a translação dada por $T(x) = x - u$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $\tilde{U} = T(U)$.

Portanto:

$$\begin{aligned} T_u U &= d_0 \psi(\mathbb{R}^n) \\ &= d_0(1_U \circ (T|_U)^{-1})(\mathbb{R}^n) \\ &= d_u 1_U \circ d_0(T|_U)^{-1}(\mathbb{R}^n) \\ &= 1_{\mathbb{R}^n} \circ 1_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{R}^n) \\ &= \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

para qualquer $u \in U$.

Lema 3.1. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma k -variedade C^∞ . Então, para todo $x \in M$, o espaço tangente $T_x M$ não depende da parametrização escolhida.

Demonstração. Sejam $\varphi_1 : U_1 \rightarrow V$ e $\varphi_2 : U_2 \rightarrow V$ parametrizações locais de M em torno de $x \in M$. Note que podemos assumir $Im(\varphi_1) = V = Im(\varphi_2)$, pois caso contrário, basta tomar $V = Im(\varphi_1) \cap Im(\varphi_2)$.

Como φ_2 é um difeomorfismo, então $h = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : U_1 \rightarrow U_2$ é um difeomorfismo e $\varphi_2 \circ h = \varphi_1$. Logo, $d_0 \varphi_1 = d_0 \varphi_2 \circ d_0 h$.

Como h é um difeomorfismo, então $d_0 h : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ é um isomorfismo linear. Assim, $d_0 \varphi_1(\mathbb{R}^k) = d_0 \varphi_2 \circ d_0 h(\mathbb{R}^k) = d_0 \varphi_2(\mathbb{R}^k)$, ou seja, $T_x M$ independe da parametrização escolhida. \square

Portanto, $T_x M$ está bem definido.

Lema 3.2. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma k -variedade C^∞ . Então, $dim(T_x M) = k$, para todo $x \in M$.

Demonstração. Seja $\varphi : U \rightarrow V$ uma parametrização local de M em torno de $x \in M$. Como $\varphi^{-1} \circ \varphi = 1_U$, então $d_x \varphi^{-1} \circ d_0 \varphi = 1_{\mathbb{R}^k}$. Portanto, $d_0 \varphi : \mathbb{R}^k \rightarrow T_x M$ é injetora e, conseqüentemente, um isomorfismo, isto é, $\mathbb{R}^k \cong d_0 \varphi(\mathbb{R}^k) = T_x M$.

Logo, $dim(T_x M) = k$. \square

Agora, dadas $M \subset \mathbb{R}^n$ e $N \subset \mathbb{R}^m$ duas variedades C^∞ e $f : M \rightarrow N$ uma função C^∞ , queremos definir $d_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ de forma que se M, N, P são variedades C^∞ , $f : M \rightarrow N$ e $g : N \rightarrow P$ são funções C^∞ (e assim, $g \circ f$ é C^∞), então $d_x(g \circ f) = d_{f(x)}g \circ d_x f$.

De fato, primeiramente, considere $M \subset \mathbb{R}^n$ uma k -variedade e $N \subset \mathbb{R}^m$ uma r -variedade, ambas C^∞ e $f : M \rightarrow N$ uma função C^∞ . Também, considere $\varphi : U_1 \rightarrow V_1$ e $\psi : U_2 \rightarrow V_2$ parametrizações locais de M e N em torno de $x \in M$ e $f(x) \in N$, respectivamente, com $f(V_1) \subset V_2$.

Desta forma, podemos definir $h : U_1 \rightarrow U_2$ por $h(u) = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi(u)$, para todo $u \in U_1$. Assim, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{f} & V_2 \\ \varphi \uparrow & & \downarrow \psi^{-1} \\ U_1 & \xrightarrow{h} & U_2 \end{array}$$

Logo, h é C^∞ .

Agora, olhando para as transformações lineares $d_0 \varphi : \mathbb{R}^k \rightarrow T_x M$, $d_0 h : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^r$ e $d_0 \psi : \mathbb{R}^r \rightarrow T_{f(x)} N$, temos que $d_0 \varphi$ e $d_0 \psi$ são isomorfismos, ou seja, podemos definir $d_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ por $d_x f(v) = d_0 \psi \circ d_0 h \circ (d_0 \varphi)^{-1}(v)$, para todo $v \in T_x M$, conforme o diagrama comutativo abaixo:

$$\begin{array}{ccc} T_x M & \xrightarrow{d_x f} & T_{f(x)} N \\ (d_0 \varphi)^{-1} \downarrow & & \uparrow d_0 \psi \\ \mathbb{R}^k & \xrightarrow{d_0 h} & \mathbb{R}^r \end{array}$$

Por outro lado, sejam $M \subset \mathbb{R}^n$ uma k -variedade, $N \subset \mathbb{R}^m$ uma r -variedade e $P \subset \mathbb{R}^l$ uma s -variedade, ambas C^∞ e $f : M \rightarrow N$, $g : N \rightarrow P$ funções C^∞ . Considere $\varphi : U_1 \rightarrow V_1$, $\psi : U_2 \rightarrow V_2$ e $\theta : U_3 \rightarrow V_3$ parametrizações locais de M, N e P em torno de $x \in M$, $f(x) \in N$ e $g \circ f(x) \in P$, respectivamente, com $f(V_1) \subset V_2$ e $g(V_2) \subset V_3$, conforme o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} V_1 & \xrightarrow{f} & V_2 & \xrightarrow{g} & V_3 \\ \varphi \uparrow & & \psi \uparrow & & \theta \uparrow \\ U_1 & \xrightarrow{h} & U_2 & \xrightarrow{h'} & U_3 \end{array}$$

onde $h = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ e $h' = \theta^{-1} \circ g \circ \psi$ são funções C^∞ .

De acordo com a definição dada acima, temos que:

$$\begin{aligned} d_{f(x)}g \circ d_x f &= (d_0 \theta \circ d_0 h' \circ (d_0 \psi)^{-1}) \circ (d_0 \psi \circ d_0 h \circ (d_0 \varphi)^{-1}) \\ &= d_0 \theta \circ d_0 h' \circ d_0 h \circ (d_0 \varphi)^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= d_0\theta \circ d_0(h' \circ h) \circ (d_0\varphi)^{-1} \\
&= d_x(g \circ f)
\end{aligned}$$

Portanto, conseguimos definir $d_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ nas condições que gostaríamos.

Prosseguindo, seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma k -variedade C^∞ .

Definição 3.3. Definimos a variedade tangente de M como sendo o seguinte subconjunto:

$$TM = \{(x, v) \in M \times \mathbb{R}^n : v \in T_x M\} \subset \mathbb{R}^{2n}$$

Exemplo 3.3. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Como vimos no exemplo 3.2, temos que $T_u U = \mathbb{R}^n$ para todo $u \in U$.

Deste modo, temos que $TU = U \times \mathbb{R}^n$.

Por fim, dadas $M \subset \mathbb{R}^n$, $N \subset \mathbb{R}^m$ variedades C^∞ e $f : M \rightarrow N$ uma função C^∞ , definimos $df : TM \rightarrow TN$ por $df(x, v) = (f(x), d_x f(v))$, para todo $(x, v) \in TM$.

Lema 3.3. Sejam $M \subset \mathbb{R}^n$, $N \subset \mathbb{R}^m$ variedades C^∞ e $f : M \rightarrow N$ uma função C^∞ . Então, $df : TM \rightarrow TN$ é C^∞ .

Demonstração. Inicialmente, suponha $M \subset \mathbb{R}^n$ uma k -variedade C^∞ . Para provar que $df : TM \rightarrow TN$ é C^∞ , é suficiente mostrar que $i \circ df : TM \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ é C^∞ , onde $i : TN \hookrightarrow \mathbb{R}^{2m}$ é a inclusão. Sendo assim, devemos provar que para todo $(x, v) \in TM$, existe um aberto $W \subset \mathbb{R}^{2n}$ contendo $(x, v) \in TM$ e existe $dF : W \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ uma função C^∞ tal que $dF|_{W \cap TM} = i \circ df|_{W \cap TM}$.

Para tanto, considere $\varphi : U \rightarrow V$ uma parametrização local de M em torno de $x \in M$. Como $i' \circ f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ é C^∞ , pois $f : M \rightarrow N$ é C^∞ , onde $i' : N \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ é a inclusão, então existe um aberto $\widetilde{W} \subset \mathbb{R}^n$ contendo $x \in M$ e existe $F : \widetilde{W} \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função C^∞ tal que $F|_{\widetilde{W} \cap M} = i' \circ f|_{\widetilde{W} \cap M}$.

Então, $dF : \widetilde{W} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ é definida por $dF(x, v) = (F(x), d_x F(v)) = (\underline{F} \circ \pi_1(x, v), d_x F \circ \pi_2(x, v))$, para todo $(x, v) \in \widetilde{W} \times \mathbb{R}^n$, onde $\pi_1 : \widetilde{W} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \widetilde{W}$ e $\pi_2 : \widetilde{W} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ são as projeções canônicas dadas por $\pi_1(x, v) = x$ e $\pi_2(x, v) = v$, respectivamente, para todo $(x, v) \in \widetilde{W} \times \mathbb{R}^n$.

Logo, dF é uma função C^∞ , pois suas componentes são C^∞ . Ainda, $dF|_{W \cap TM} = i \circ df|_{W \cap TM}$, onde $W = \widetilde{W} \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$ é aberto.

Portanto, $df : TM \rightarrow TN$ é C^∞ . □

Teorema 3.1. Se $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma k -variedade C^∞ , então $TM \subset \mathbb{R}^{2n}$ é uma $2k$ -variedade C^∞ .

Demonstração. Tomemos, para qualquer $x \in M$, uma parametrização local $\varphi : U \rightarrow V$ de M em torno de $x \in M$.

Assim, para todo $(x, v) \in TM$, tome $\tilde{U} = U \times \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^{2k}$ e $\tilde{V} = V \times T_x M \subset \mathbb{R}^{2n}$ abertos, com $(x, v) \in \tilde{V}$. Considere também, a função $d\varphi : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$, definida por $d\varphi(y, u) = (\varphi(y), d_0\varphi(u))$, para todo $(y, u) \in \tilde{U}$, que é sobrejetora e, pelo Lema anterior, é C^∞ .

Como $\varphi : U \rightarrow V$ é um difeomorfismo, então $d_0\varphi : \mathbb{R}^k \rightarrow T_x M$ é um isomorfismo.

Agora, provemos que $d\varphi : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ é injetora. Para tanto, sejam $(y_1, u_1), (y_2, u_2) \in \tilde{U}$ tais que $d\varphi(y_1, u_1) = d\varphi(y_2, u_2)$. Então:

$$\begin{aligned} d\varphi(y_1, u_1) &= d\varphi(y_2, u_2) \\ \Rightarrow (\varphi(y_1), d_0\varphi(u_1)) &= (\varphi(y_2), d_0\varphi(u_2)) \\ \Rightarrow \varphi(y_1) = \varphi(y_2) \text{ e } d_0\varphi(u_1) &= d_0\varphi(u_2) \\ \Rightarrow y_1 = y_2 \text{ e } u_1 = u_2 \end{aligned}$$

Logo, $d\varphi$ é injetora.

Por fim, defina $(d\varphi)^{-1} : \tilde{V} \rightarrow \tilde{U}$ por $(d\varphi)^{-1}(y, u) = (\varphi^{-1}(y), (d_0\varphi)^{-1}(u))$. Analogamente, como φ^{-1} é C^∞ , então $(d\varphi)^{-1}$ também é C^∞ .

Assim, concluímos que $d\varphi : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ é uma parametrização local de TM em torno de $(x, v) \in TM$, isto é, TM é uma $2k$ -variedade C^∞ . \square

Como último resultado deste capítulo, temos:

Exemplo 3.4. Sejam $M_1 \subset \mathbb{R}^n$ uma k -variedade C^∞ e $M_2 \subset \mathbb{R}^m$ uma r -variedade C^∞ . Então, $M = M_1 \times M_2 \subset \mathbb{R}^{n+m}$ é uma $(k+r)$ -variedade C^∞ . Ainda, $T_{(x_1, x_2)}M = T_{x_1}M_1 \times T_{x_2}M_2$ para todo $(x_1, x_2) \in M$.

Para tanto, considere $\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ e $\varphi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ parametrizações locais de M_1 e M_2 em torno de $x_1 \in M_1$ e $x_2 \in M_2$ quaisquer, respectivamente. Note que $U = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^{k+r}$ é um aberto, $V = V_1 \times V_2 \subset M$ é um aberto contendo $(x_1, x_2) \in M$ e $\varphi = \varphi_1 \times \varphi_2 : U \rightarrow V$ é um difeomorfismo, uma vez que φ_1 e φ_2 o são.

Então, $\varphi : U \rightarrow V$ é uma parametrização local de M em torno de $(x_1, x_2) \in M$ qualquer, ou seja, $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$ é uma $(k+r)$ -variedade C^∞ .

Por fim, temos que:

$$\begin{aligned} T_{(x_1, x_2)}M &= d_{(0,0)}\varphi(\mathbb{R}^{k+r}) \\ &= d_0\varphi_1(\mathbb{R}^k) \times d_0\varphi_2(\mathbb{R}^r) \\ &= T_{x_1}M_1 \times T_{x_2}M_2. \end{aligned}$$

4 Fibrados Vetoriais

Neste capítulo, apresentaremos um estudo sobre fibrados vetoriais, além de exemplos destes que serão utilizados no decorrer deste trabalho.

Um fibrado vetorial ξ consiste do seguinte: um espaço topológico $E = E(\xi)$ chamado espaço total, um espaço topológico $B = B(\xi)$ chamado espaço base, uma função contínua $\pi = \pi_\xi : E(\xi) \rightarrow B(\xi)$ sobrejetora, chamada projeção, de forma que para todo $b \in B(\xi)$, o conjunto $\pi^{-1}(b)$ tem "estrutura" de espaço vetorial real.

Quando não houver confusão sobre qual fibrado vetorial estaremos falando, denotaremos apenas por E e B seus respectivos espaços total e base.

Ainda, exigimos a trivialidade local, isto é: para qualquer $b \in B$, existe um aberto $U \subset B$, com $b \in U$, existe um inteiro $n \geq 0$ e existe um homeomorfismo $h : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U)$ comutando o diagrama

$$\begin{array}{ccc} U \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{h} & \pi^{-1}(U) \\ & \searrow p_1 & \swarrow \pi \\ & U & \end{array}$$

tal que $h(b, _) : \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(b)$ é um isomorfismo de espaço vetorial, onde $p_1 : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow U$ é a projeção no primeiro fator. Nestas condições, dizemos que ξ é um \mathbb{R}^n -fibrado vetorial.

As operações $+$: $\pi^{-1}(b) \times \pi^{-1}(b) \rightarrow \pi^{-1}(b)$ e \cdot : $\mathbb{R} \times \pi^{-1}(b) \rightarrow \pi^{-1}(b)$ que tornam $\pi^{-1}(b)$ um espaço vetorial real são definidas da seguinte maneira: considere $e, e_1, e_2 \in \pi^{-1}(b)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ quaisquer e tome $x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ tais que $h(b, x) = e$, $h(b, x_1) = e_1$ e $h(b, x_2) = e_2$. Sendo assim, definamos:

$$e_1 + e_2 = h(b, x_1 + x_2)$$

$$\alpha e = h(b, \alpha x)$$

Note que estas operações estão bem definidas, pois $e_1 + e_2 \in \pi^{-1}(b)$ e $\alpha e \in \pi^{-1}(b)$. Com efeito, pois $\pi(e_1 + e_2) = \pi \circ h(b, x_1 + x_2) = p_1(b, x_1 + x_2) = b$ e $\pi(\alpha e) = \pi \circ h(b, \alpha x) = p_1(b, \alpha x) = b$.

O par (U, h) é chamado de sistema de coordenadas locais para ξ sobre $b \in B$. O espaço vetorial $\pi^+(b)$ é chamado de fibra sobre $b \in B$ e será denotado por $F_b = F_b(\xi)$.

Por comodidade, chamaremos um fibrado vetorial apenas por fibrado.

Exemplo 4.1. Seja B um espaço topológico. Consideremos ε_B^n o fibrado onde $E(\varepsilon_B^n) = B \times \mathbb{R}^n$, $B(\varepsilon_B^n) = B$ e $\pi = p_1 : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow B$ é a projeção do primeiro fator. Então π é contínua e sobrejetora. Ainda, como para qualquer $b \in B$, B é uma vizinhança de $b \in B$ em B , então $h = 1_{B \times \mathbb{R}^n} : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^+(B) = B \times \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo tal que $\pi \circ h = p_1$ e $h(b, _) : \mathbb{R}^n \rightarrow \{b\} \times \mathbb{R}^n$, dado por $h(b, x) = (b, x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, é um isomorfismo de espaços vetoriais, onde a estrutura de espaço vetorial de $\{b\} \times \mathbb{R}^n$ é dada por:

$$(b, x) + (b, y) = (b, x + y)$$

$$\alpha(b, x) = (b, \alpha x)$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Definição 4.1. Dizemos que dois fibrados ξ e η são isomorfos, denotado por $\xi \cong \eta$, quando $B(\xi) = B = B(\eta)$ e existir um homeomorfismo $f : E(\xi) \rightarrow E(\eta)$ tal que $f(F_b(\xi)) \subset F_b(\eta)$ e $f|_{F_b(\xi)} : F_b(\xi) \rightarrow F_b(\eta)$ é um isomorfismo, para todo $b \in B$.

Da definição acima, obtemos que $\pi_\eta \circ f = \pi_\xi$, ou seja, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} E(\xi) & \xrightarrow{f} & E(\eta) \\ & \searrow \pi_\xi & \swarrow \pi_\eta \\ & & B \end{array}$$

De fato, considere $x \in E(\xi)$ arbitrário. Assim, $x \in F_{\pi_\xi(x)}(\xi)$ e, conseqüentemente, $f(x) \in F_{\pi_\xi(x)}(\eta)$, isto é, $\pi_\eta(f(x)) = \pi_\xi(x)$. Portanto, $\pi_\eta \circ f = \pi_\xi$.

Definição 4.2. Dizemos que um fibrado ξ é trivial se $\xi \cong \varepsilon_{B(\xi)}^n$, para algum inteiro $n \geq 0$.

Exemplo 4.2. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma k -variedade C^∞ . Consideremos τ_M o fibrado onde $E(\tau_M) = TM$, $B(\tau_M) = M$ e $\pi : TM \rightarrow M$ é dada por $\pi(z, w) = z$, para todo $(z, w) \in TM$. Então, π é contínua e sobrejetora. Ainda, para qualquer $x \in M$, considere $\varphi : U \rightarrow V$ uma parametrização local de M em torno de $x \in M$ e defina $h : V \times \mathbb{R}^k \rightarrow \pi^+(V)$ por $h(b, v) = d\varphi \circ (\varphi^{-1} \times 1_{\mathbb{R}^k})(b, v)$, para todo $(b, v) \in V \times \mathbb{R}^k$, conforme o diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccc} & U \times \mathbb{R}^k & \\ \varphi^{-1} \times 1_{\mathbb{R}^k} \nearrow & & \searrow d\varphi \\ V \times \mathbb{R}^k & \xrightarrow{h} & \pi^+(V) \end{array}$$

Assim, h é um homeomorfismo tal que $\pi \circ h = p_1$. Com efeito, para todo $(y, v) \in V \times \mathbb{R}^k$ temos que:

$$\pi \circ h(b, v) = \pi \circ d\varphi(\varphi^{-1}(b), v)$$

$$\begin{aligned}
&= \pi(b, d_{\varphi^{-1}(b)}\varphi(v)) \\
&= b \\
&= p_1(b, v)
\end{aligned}$$

Por fim, $h(b, _): \mathbb{R}^k \rightarrow \{b\} \times T_b M$ dada por $h(b, v) = (b, d_{\varphi^{-1}(b)}\varphi(v))$, para todo $v \in \mathbb{R}^k$, é um isomorfismo de espaços vetoriais, pois $d_{\varphi^{-1}(b)}\varphi: \mathbb{R}^k \rightarrow T_b M$ é um isomorfismo.

O fibrado τ_M é chamado de fibrado tangente da variedade M .

Exemplo 4.3. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma k -variedade C^∞ . Consideremos ν_M o fibrado onde $E(\nu_M) = \{(x, v) \in M \times \mathbb{R}^n : v \in (T_x M)^\perp\}$, $B(\nu_M) = M$ e $\pi: E(\nu_M) \rightarrow M$ é dada por $\pi(x, v) = x$, para todo $(x, v) \in E(\nu_M)$. Então, π é contínua e sobrejetora. Ainda, cada fibra $F_x(\nu_M) = \{x\} \times (T_x M)^\perp$ tem a seguinte estrutura de espaço vetorial:

$$\begin{aligned}
(x, v_1) + (x, v_2) &= (x, v_1 + v_2) \\
\alpha(x, v) &= (x, \alpha v)
\end{aligned}$$

para quaisquer $(x, v_1), (x, v_2), (x, v) \in F_x(\nu_M)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

A trivialidade local será demonstrada posteriormente. O fibrado ν_M é chamado de fibrado normal da variedade M .

Para o próximo exemplo, seja $\mathbb{R}P^n = \frac{S^n}{a \sim -a}$ o espaço projetivo real n -dimensional munido da topologia quociente que tem a seguinte propriedade: "se $\rho: S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ é a projeção canônica e X é um espaço topológico qualquer, então $f: \mathbb{R}P^n \rightarrow X$ é contínua se, e somente se, $f \circ \rho: S^n \rightarrow X$ é contínua".

Exemplo 4.4. Considere γ_n^1 o fibrado denominado linha canônico onde $E(\gamma_n^1) = \{(\bar{x}, v) \in \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1} : v = \lambda x, \lambda \in \mathbb{R}\}$, $B(\gamma_n^1) = \mathbb{R}P^n$ e $\pi: E(\gamma_n^1) \rightarrow \mathbb{R}P^n$ é dada por $\pi(\bar{x}, v) = \bar{x}$, para todo $(\bar{x}, v) \in \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1}$. Então, π é contínua e sobrejetora. Ainda, cada fibra $F_{\bar{x}}(\gamma_n^1)$ pode ser identificada com a reta, passando pela origem em \mathbb{R}^{n+1} , cujo vetor diretor é $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, e a esta reta podemos dar sua estrutura usual como subespaço vetorial de \mathbb{R}^{n+1} .

Provemos a trivialidade local. Temos que exibir, para cada $\bar{x} \in \mathbb{R}P^n$, um subconjunto $U \subset \mathbb{R}P^n$ aberto contendo $\bar{x} \in \mathbb{R}P^n$ e um homeomorfismo $h: U \times \mathbb{R} \rightarrow \pi^{-1}(U)$ tal que $h(b, _): \mathbb{R} \rightarrow \pi^{-1}(b)$ é um isomorfismo e comuta o diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
U \times \mathbb{R} & \xrightarrow{h} & \pi^{-1}(U) \\
& \searrow p_1 & \swarrow \pi \\
& & U
\end{array}$$

Para isto, tomemos $V \subset S^n$ um aberto contendo $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ e que não contenha um par de pontos antípodos. Sendo π uma aplicação aberta, considere $U = \pi(V) \subset \mathbb{R}P^n$ um aberto contendo $\bar{x} \in \mathbb{R}P^n$.

Assim, defina $h : U \times \mathbb{R} \rightarrow \pi^+(U)$ por $h(\bar{y}, t) = (\bar{y}, ty)$, para todo $(\bar{y}, t) \in U \times \mathbb{R}$. Note que $h = (h_1, h_2)$, onde $h_1 : U \times \mathbb{R} \rightarrow U$ é a projeção do primeiro fator e $h_2 : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é dada por $h_2(\bar{y}, t) = ty$, para todo $(\bar{y}, t) \in U \times \mathbb{R}$, em que $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ é o único representante de $\bar{y} \in U$ em V . Por outro lado, $h_2 = g \circ ((\rho|_V)^{-1} \times 1_{\mathbb{R}})$, onde $\rho|_V : V \rightarrow U$ é um homeomorfismo e $(\rho|_V)^{-1} \times 1_{\mathbb{R}} : U \times \mathbb{R} \rightarrow V \times \mathbb{R}$, $g : V \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ dadas por $(\rho|_V)^{-1} \times 1_{\mathbb{R}}(\bar{y}, t) = (y, t)$ e $g(y, t) = ty$, para todo $(\bar{y}, t) \in U \times \mathbb{R}$ e $(y, t) \in V \times \mathbb{R}$, respectivamente, são contínuas. Logo, h_1 e h_2 são contínuas, ou seja, h é contínua.

Ainda, h é uma bijeção. De fato, h é injetora, pois se $h(\bar{y}_1, t_1) = h(\bar{y}_2, t_2)$, então $(\bar{y}_1, t_1 y_1) = (\bar{y}_2, t_2 y_2)$, isto é, $\bar{y}_1 = \bar{y}_2$ e $t_1 y_1 = t_2 y_2$. Agora, note que da forma como tomamos V , $y_1 = y_2$. Logo, $t_1 y_1 = t_2 y_1$, ou seja, $(t_1 - t_2)y_1 = 0$. Como $y_1 \in S^n$, então $y_1 \neq 0$, isto é, $t_1 - t_2 = 0$, ou seja, $t_1 = t_2$.

Por outro lado, h é sobrejetora, pois se $(\bar{y}, v) \in \pi^+(U)$, então $v = ty$, para algum $t \in \mathbb{R}$. Tomando $(\bar{y}, t) \in U \times \mathbb{R}$, temos $h(\bar{y}, t) = (\bar{y}, ty) = (\bar{y}, v)$.

Agora, defina $f : \pi^+(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}$ por $f(\bar{y}, w) = \langle (\rho|_V)^{-1}(\bar{y}), w \rangle$, para todo $(\bar{y}, w) \in \pi^+(U)$. Como $\rho|_V : U \rightarrow V$ é um homeomorfismo e a aplicação produto interno $\langle _, _ \rangle : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então f é contínua.

Deste modo, $h^{-1} : \pi^+(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}$ definida por $h^{-1}(\bar{y}, w) = (\bar{y}, f(\bar{y}, w))$, para todo $(\bar{y}, w) \in \pi^+(U)$, é contínua e é a inversa de h . Portanto, h é um homeomorfismo.

Ainda, $h(\bar{x}, _) : \mathbb{R} \rightarrow \pi^+(\bar{x})$ dada por $h(\bar{x}, t) = (\bar{x}, tx)$, para todo $t \in \mathbb{R}$, é um isomorfismo linear.

Por fim, $\pi \circ h(\bar{x}, t) = \pi(\bar{x}, tx) = \bar{x} = p_1(\bar{x}, t)$, para todo $(\bar{x}, t) \in U \times \mathbb{R}$, ou seja, $\pi \circ h = p_1$.

Com isso, provamos a trivialidade local do fibrado linha canônico γ_n^1 .

Definição 4.3. *Uma seção de um fibrado ξ é uma função contínua $s : B(\xi) \rightarrow E(\xi)$ tal que $\pi \circ s = 1_{B(\xi)}$. Dizemos que a função s é uma seção não nula se $s(b) \in E(\xi)$ é um vetor não nulo da fibra $F_b(\xi)$, para todo $b \in B(\xi)$.*

Definição 4.4. *Um campo de vetores de uma variedade C^∞ M é uma seção do fibrado τ_M .*

Lema 4.1. *Se ξ for um fibrado trivial, então ξ admite uma seção não nula.*

Demonstração. Como ξ é um fibrado trivial, então $\xi \cong \varepsilon_{B(\xi)}^n$, para algum inteiro $n \geq 0$, ou seja, existe um homeomorfismo $h : B(\xi) \times \mathbb{R}^n \rightarrow E(\xi)$ tal que $h(F_b(\varepsilon_{B(\xi)}^n)) \subset F_b(\xi)$ e $h|_{F_b(\varepsilon_{B(\xi)}^n)} : F_b(\varepsilon_{B(\xi)}^n) \rightarrow F_b(\xi)$ é um isomorfismo linear, para todo $b \in B(\xi)$.

Deste modo, defina $s : B(\xi) \rightarrow E(\xi)$ por $s(b) = h(b, e)$, para todo $b \in B(\xi)$, com $0 \neq e \in \mathbb{R}^n$. Assim, s é contínua. Ainda, como $p_1(b, e) = b$, para todo $b \in B(\xi)$, então $(b, e) \in F_b(\varepsilon_{B(\xi)}^n)$. Sendo $h|_{F_b(\varepsilon_{B(\xi)}^n)}$ um isomorfismo linear, $h(b, e) \in F_b(\xi)$, isto é, $\pi(h(b, e)) = b$. Logo, temos para todo $b \in B(\xi)$ que $\pi \circ s(b) = \pi \circ h(b, e) = b$, ou seja, $\pi \circ s = 1_{B(\xi)}$. Portanto, s é uma seção do fibrado ξ .

Por fim, sendo $e \neq 0$, segue que (b, e) é um vetor não nulo da fibra $F_b(\varepsilon_B^n)$. Novamente, como $h|_{F_b(\varepsilon_B^n)}$ é um isomorfismo linear, segue que $h(b, e)$ é um vetor não nulo da fibra $F_b(\xi)$, para todo $b \in B(\xi)$.

Portanto, s é uma seção não nula do fibrado ξ . □

Como motivação para o próximo Teorema, vejamos que γ_1^1 não é um fibrado trivial. Neste caso, cada ponto $(\bar{x}, v) \in E(\gamma_1^1)$ pode ser escrito como:

$$(\overline{(\cos(\theta), \sin(\theta))}, t(\cos(\theta), \sin(\theta))), \text{ onde } t \in \mathbb{R} \text{ e } \theta \in [0, \pi]$$

Esta representação é única exceto nos pontos:

$$(\overline{(\cos(0), \sin(0))}, t(\cos(0), \sin(0))) = (\overline{(\cos(\pi), \sin(\pi))}, t(\cos(\pi), \sin(\pi))), \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Logo, podemos obter o espaço total do fibrado linha canônico γ_1^1 pelo quociente $E(\gamma_1^1) = \frac{[0, \pi] \times \mathbb{R}}{(0, t) \sim (\pi, -t)}$, isto é, $E(\gamma_1^1)$ é uma faixa de Möbius aberta.

Assim, como a faixa de Möbius não é homeomorfa ao cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$, então γ_1^1 não é um fibrado trivial.

O próximo Teorema nos diz que este resultado é mais geral:

Teorema 4.1. *O fibrado linha canônico γ_n^1 não é trivial, para $n \geq 1$.*

Demonstração. Pelo Lema 4.1, basta mostrar que γ_n^1 não admite seção não nula, para $n \geq 1$.

Para tanto, considere $s : \mathbb{R}P^n \rightarrow E(\gamma_n^1)$ uma seção qualquer do fibrado γ_n^1 . Da definição de $E(\gamma_n^1)$, segue que a função s deve ser definida por $s(\bar{x}) = (\bar{x}, t(x)x)$, para todo $x \in S^n$, onde $t : S^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função. Por outro lado, sendo s contínua, segue da topologia de $\mathbb{R}P^n$ que $s \circ \rho(x) = s(\bar{x})$ é contínua, ou seja, $t(x)x$ é contínua, isto é, dados $x_0 \in S^n$ e $\varepsilon > 0$ quaisquer, existe $\delta_1 > 0$ tal que:

$$x \in S^n, \|x - x_0\| < \delta_1 \Rightarrow \|t(x)x - t(x_0)x_0\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Nestas condições, temos que $t : S^n \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua. De fato, considere $x_0 \in S^n$ e $\varepsilon > 0$ quaisquer. Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \frac{\varepsilon}{2(|t(x_0)|+1)}\}$, obtemos que se $x \in S^n$ é tal que $\|x - x_0\| < \delta$, então:

$$\begin{aligned} |t(x) - t(x_0)| &= \|(t(x) - t(x_0))x\| \\ &= \|t(x)x - t(x_0)x\| \\ &= \|t(x)x - t(x_0)x_0 + t(x_0)x_0 - t(x_0)x\| \\ &\leq \|t(x)x - t(x_0)x_0\| + \|t(x_0)x_0 - t(x_0)x\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \leq \|t(x)x - t(x_0)x_0\| + \|t(x_0)(x_0 - x)\| \\
& \leq \|t(x)x - t(x_0)x_0\| + |t(x_0)|\|x - x_0\| \\
& < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Agora, note que para qualquer $x \in S^n$, temos:

$$(\bar{x}, t(x)x) = s(\bar{x}) = s(\overline{-x}) = (\overline{-x}, t(-x)(-x)) = (\bar{x}, -t(-x)x)$$

Logo, t é uma função ímpar, contínua e para $n \geq 1$, S^n é conexo, isto é, segue do Teorema do Valor Intermediário que existe $x_0 \in S^n$ tal que $t(x_0) = 0$. Assim, $s(\overline{x_0}) = (\overline{x_0}, 0)$ é o vetor nulo da fibra $F_{\overline{x_0}}(\gamma_n^1)$, para $n \geq 1$, ou seja, a função s não é uma seção não nula.

Portanto, o fibrado γ_n^1 não é trivial, para $n \geq 1$. □

Definição 4.5. Um conjunto de seções $\{s_1, \dots, s_n\}$ sobre um fibrado ξ é linearmente independente se, para qualquer $b \in B(\xi)$, o conjunto $\{s_1(b), \dots, s_n(b)\}$ for linearmente independente na fibra $F_b(\xi)$.

Lema 4.2. Sejam ξ e η \mathbb{R}^n -fibrados sobre o mesmo espaço base B . Se $f : E(\xi) \rightarrow E(\eta)$ é contínua, $f(F_b(\xi)) \subset F_b(\eta)$ e $f|_{F_b(\xi)} : F_b(\xi) \rightarrow F_b(\eta)$ é um isomorfismo linear, para qualquer $b \in B$, então f é um homeomorfismo, ou seja, $\xi \cong \eta$.

Demonstração. Primeiramente, provemos que f é bijetora.

Sejam $e_1, e_2 \in E(\xi)$ tais que $e_1 \neq e_2$. Temos dois casos a analisar:

- (i) $e_1 \in F_{b_1}(\xi)$ e $e_2 \in F_{b_2}(\xi)$, para $b_1, b_2 \in B$ e $b_1 \neq b_2$
- (ii) $e_1, e_2 \in F_b(\xi)$, para $b \in B$

Para o caso (i), $f(e_1) \in F_{b_1}(\eta)$ e $f(e_2) \in F_{b_2}(\eta)$, com $b_1 \neq b_2$. Deste modo, $f(e_1) \neq f(e_2)$, pois caso contrário, teríamos que

$$b_1 = \pi_\eta(f(e_1)) = \pi_\eta(f(e_2)) = b_2$$

o que é um absurdo.

No caso (ii), como $f|_{F_b(\xi)}$ é um isomorfismo, então $f(e_1) \neq f(e_2)$ em $F_b(\eta)$.

Agora, provemos que f é sobrejetora. Para isto, tome $e \in E(\eta)$ qualquer. Então, $e \in F_{\pi_\eta(e)}(\eta)$. Como $f|_{F_{\pi_\eta(e)}(\xi)}$ é um isomorfismo, existe $v \in F_{\pi_\eta(e)}(\xi)$ tal que $f|_{F_{\pi_\eta(e)}(\xi)}(v) = e$, isto é, $f(v) = e$.

Por fim, mostremos que $f^{-1} : E(\eta) \rightarrow E(\xi)$ é contínua. Para tanto, considere (U, h) e (V, g) sistemas de coordenadas locais para ξ e η , respectivamente, em torno de $b_0 \in U \cap V \subset B$.

Considere $g^{-1} \circ f \circ h : (U \cap V) \times \mathbb{R}^n \rightarrow (U \cap V) \times \mathbb{R}^n$ definida por $g^{-1} \circ f \circ h(b, x) = (b, [f_{ij}(b)]_{n \times n}(x))$, para todo $(b, x) \in (U \cap V) \times \mathbb{R}^n$, onde $[f_{ij}(b)]_{n \times n}$ é a matriz do isomorfismo linear $(g(b, _))^{-1} \circ f|_{F_b(\xi)} \circ h(b, _) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, para qualquer $b \in U \cap V$.

Tomando $[F_{ij}(b)]_{n \times n} = [f_{ij}(b)]_{n \times n}^{-1}$, obtemos que $h^{-1} \circ f^{-1} \circ g : (U \cap V) \times \mathbb{R}^n \rightarrow (U \cap V) \times \mathbb{R}^n$, definida por $h^{-1} \circ f^{-1} \circ g(b, y) = (b, [F_{ij}(b)]_{n \times n}(y))$ para todo $(b, y) \in (U \cap V) \times \mathbb{R}^n$, é contínua, donde segue pelo Teorema 2.1 que f^{-1} é contínua, uma vez que h e g são homeomorfismos.

Portanto, f é um homeomorfismo, ou seja, $\xi \cong \eta$. \square

Teorema 4.2. *Um \mathbb{R}^n -fibrado ξ é trivial se, e somente se, admite n seções linearmente independentes.*

Demonstração. Inicialmente, suponha ξ um \mathbb{R}^n -fibrado trivial, ou seja, $\xi \cong \varepsilon_{B(\xi)}^n$. Assim, existe $f : B(\xi) \times \mathbb{R}^n \rightarrow E(\xi)$ um homeomorfismo tal que $f(\{b\} \times \mathbb{R}^n) \subset F_b(\xi)$ e $f|_{\{b\} \times \mathbb{R}^n} : \{b\} \times \mathbb{R}^n \rightarrow F_b(\xi)$ é um isomorfismo linear, para todo $b \in B(\xi)$. Ainda, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} E(\xi) & \xleftarrow{f} & B(\xi) \times \mathbb{R}^n \\ & \searrow \pi_\xi & \swarrow p_1 \\ & & B(\xi) \end{array}$$

Primeiramente, observemos que $\varepsilon_{B(\xi)}^n$ admite n seções linearmente independentes, a saber: " $s'_i : B(\xi) \rightarrow B(\xi) \times \mathbb{R}^n$ definida por $s'_i(b) = (b, e_i)$, para quaisquer $b \in B(\xi)$ e $i = 1, \dots, n$, onde $\{e_1, \dots, e_n\}$ é a base canônica de \mathbb{R}^n ".

Agora, defina $s_i : B(\xi) \rightarrow E(\xi)$ por $s_i(b) = f \circ s'_i(b)$, para quaisquer $b \in B(\xi)$ e $i = 1, \dots, n$.

Então, s_i é contínua e $\pi_\xi \circ s_i = \pi_\xi \circ f \circ s'_i = p_1 \circ s'_i = 1_{B(\xi)}$, para qualquer $i = 1, \dots, n$, ou seja, s_i são seções de ξ , para $i = 1, \dots, n$.

Ainda, desde que $\{s'_1(b), \dots, s'_n(b)\}$ é linearmente independente e $f|_{\{b\} \times \mathbb{R}^n}$ é um isomorfismo linear, para qualquer $b \in B(\xi)$, então $\{s_1(b), \dots, s_n(b)\}$ é linearmente independente.

Portanto, obtemos um conjunto $\{s_1, \dots, s_n\}$ de n seções linearmente independentes de ξ .

Reciprocamente, considere $s_1, \dots, s_n : B(\xi) \rightarrow E(\xi)$ n seções linearmente independentes de ξ . Defina $f : B(\xi) \times \mathbb{R}^n \rightarrow E(\xi)$ por $f(b, (x_1, \dots, x_n)) = \sum_{i=1}^n x_i s_i(b)$ para qualquer $(b, (x_1, \dots, x_n)) \in B(\xi) \times \mathbb{R}^n$.

Deste modo, $f|_{\{b\} \times \mathbb{R}^n} : \{b\} \times \mathbb{R}^n \rightarrow F_b(\xi)$ é um isomorfismo linear, pois:

- (i) $f|_{\{b\} \times \mathbb{R}^n}$ é uma aplicação linear. De fato, para quaisquer $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{aligned}
& f|_{\{b\} \times \mathbb{R}^n}(\alpha(b, (x_1, \dots, x_n)) + (b, (y_1, \dots, y_n))) \\
&= f|_{\{b\} \times \mathbb{R}^n}(b, \alpha(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)) \\
&= f|_{\{b\} \times \mathbb{R}^n}(b, (\alpha x_1 + y_1, \dots, \alpha x_n + y_n)) \\
&= f(b, (\alpha x_1 + y_1, \dots, \alpha x_n + y_n)) \\
&= \sum_{i=1}^n (\alpha x_i + y_i) s_i(b) \\
&= \alpha \sum_{i=1}^n x_i s_i(b) + \sum_{i=1}^n y_i s_i(b) \\
&= \alpha f(b, (x_1, \dots, x_n)) + f(b, (y_1, \dots, y_n)) \\
&= \alpha f|_{\{b\} \times \mathbb{R}^n}(b, (x_1, \dots, x_n)) + f|_{\{b\} \times \mathbb{R}^n}(b, (y_1, \dots, y_n))
\end{aligned}$$

- (ii) $f|_{\{b\} \times \mathbb{R}^n}$ é sobrejetora. Com efeito, consideremos $e \in F_b(\xi)$ qualquer. Como $\{s_1(b), \dots, s_n(b)\}$ é linearmente independente e $\dim(F_b(\xi)) = n$, obtemos que $\{s_1(b), \dots, s_n(b)\}$ é uma base para $F_b(\xi)$. Assim, existem únicos $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ tais que $e = \sum_{i=1}^n x_i s_i(b)$.

Assim, tomando $(b, (x_1, \dots, x_n)) \in \{b\} \times \mathbb{R}^n$, segue que $f|_{\{b\} \times \mathbb{R}^n}(b, (x_1, \dots, x_n)) = e$.

Ainda, f é contínua, pois $f = i \circ f|_{\{b\} \times \mathbb{R}^n} \circ p_2$, onde $i : F_b(\xi) \hookrightarrow E(\xi)$ é a inclusão (contínua), $f|_{\{b\} \times \mathbb{R}^n} : \{b\} \times \mathbb{R}^n \rightarrow F_b(\xi)$ é um isomorfismo linear (contínua) e $p_2 : B(\xi) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a projeção no segundo fator (contínua).

Portanto, o Lema anterior nos garante que $\xi \cong \varepsilon_{B(\xi)}^n$, isto é, ξ é um \mathbb{R}^n -fibrado trivial. \square

Para ilustrarmos o Teorema 4.2, precisaremos da:

Definição 4.6. Dizemos que $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma k -variedade C^∞ paralelizável se $\tau_M \cong \varepsilon_M^k$.

Vejam alguns exemplos de variedades paralelizáveis. Para tanto, necessitaremos de algumas noções sobre números complexos, quatérnions e números de Cayley que são encontradas no Apêndice B.

Exemplo 4.5. $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ é uma 1-variedade C^∞ paralelizável, pois $\tau_{S^1} \cong \varepsilon_{S^1}^1$.

De fato, uma vez que $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, onde \mathbb{C} denota o conjunto dos números complexos, podemos considerar $S^1 \subset \mathbb{C}$, isto é, $S^1 = \{x = x_0 + x_1 i \in \mathbb{C} : |x| = 1\}$. Deste modo,

mostremos que τ_{S^1} admite uma seção não nula. Para tanto, defina $s : S^1 \rightarrow TS^1$ por $s(x) = (x, xi) = ((x_0, x_1), (-x_1, x_0))$ para todo $x = (x_0, x_1) \in S^1$.

Note que s está bem definida, pois $\langle x, xi \rangle = 0$. Ainda, s é contínua, $\pi_{\tau_{S^1}} \circ s = 1_{S^1}$ e $s(x) \neq 0 \in F_x(\tau_{S^1})$, pois $xi \neq 0$ para qualquer $x \in S^1$.

Logo, s é uma seção não nula de τ_{S^1} , ou seja, segue do Teorema 4.2 que $\tau_{S^1} \cong \varepsilon_{S^1}^1$.

Exemplo 4.6. $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ é uma 3-variedade C^∞ paralelizável, pois $\tau_{S^3} \cong \varepsilon_{S^3}^3$.

De fato, uma vez que $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{H}$, onde \mathbb{H} denota o conjunto dos quaternions, podemos considerar $S^3 \subset \mathbb{H}$, isto é, $S^3 = \{x = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k \in \mathbb{H} : |x| = 1\}$. Deste modo, mostremos que τ_{S^3} admite três seções linearmente independentes. Para tanto, defina $s_1, s_2, s_3 : S^3 \rightarrow TS^3$ respectivamente por:

- $s_1(x) = (x, xi) = ((x_0, x_1, x_2, x_3), (-x_1, x_0, x_3, -x_2))$, para todo $x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in S^3$
- $s_2(x) = (x, xj) = ((x_0, x_1, x_2, x_3), (-x_2, -x_3, x_0, x_1))$, para todo $x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in S^3$
- $s_3(x) = (x, xk) = ((x_0, x_1, x_2, x_3), (-x_3, x_2, -x_1, x_0))$, para todo $x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in S^3$

Como $\langle x, xi \rangle = \langle x, xj \rangle = \langle x, xk \rangle = 0$, então s_l está bem definida, para todo $l = 1, 2, 3$. Ainda, para todo $l = 1, 2, 3$, s_l é contínua e $\pi_{\tau_{S^3}} \circ s_l = 1_{S^3}$.

Por fim, para quaisquer $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ e $x \in S^3$ tais que $\sum_{l=1}^3 \alpha_l s_l(x) = (x, 0)$, temos:

$$\sum_{l=1}^3 \alpha_l s_l(x) = (x, 0)$$

$$\Leftrightarrow (x, \alpha_1 xi) + (x, \alpha_2 xj) + (x, \alpha_3 xk) = (x, 0)$$

$$\Leftrightarrow (x, \alpha_1 xi + \alpha_2 xj + \alpha_3 xk) = (x, 0)$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 xi + \alpha_2 xj + \alpha_3 xk = 0$$

Em particular, para $x = 1 \in S^3$, temos $\alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k = 0$, ou seja, $\alpha_l = 0$ para todo $l = 1, 2, 3$.

Logo, s_1, s_2, s_3 são seções linearmente independentes de τ_{S^3} , ou seja, segue do Teorema 4.2 que $\tau_{S^3} \cong \varepsilon_{S^3}^3$.

Exemplo 4.7. $S^7 \subset \mathbb{R}^8$ é uma 7-variedade C^∞ paralelizável, pois $\tau_{S^7} \cong \varepsilon_{S^7}^7$.

De fato, uma vez que $\mathbb{R}^8 \cong \mathbb{O}$, onde \mathbb{O} denota o conjunto dos números de Cayley, podemos considerar $S^7 \subset \mathbb{O}$, isto é, $S^7 = \{x = x_0 + x_1 e_1 + \dots + x_7 e_7 \in \mathbb{O} : |x| = 1\}$. Deste modo, mostremos que τ_{S^7} admite sete seções linearmente independentes. Para tanto, defina, para todo $x = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) \in S^7$, $s_1, \dots, s_7 : S^7 \rightarrow TS^7$ respectivamente por:

- $s_1(x) = (x, xe_1)$
 $= ((x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7), (-x_1, x_0, x_4, x_7, -x_2, x_6, -x_5, -x_3))$
- $s_2(x) = (x, xe_2)$
 $= ((x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7), (-x_2, -x_4, x_0, x_5, x_1, -x_3, x_7, -x_6))$
- $s_3(x) = (x, xe_3)$
 $= ((x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7), (-x_3, -x_7, -x_5, x_0, x_6, x_2, -x_4, x_1))$
- $s_4(x) = (x, xe_4)$
 $= ((x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7), (-x_4, x_2, -x_1, -x_6, x_0, x_7, x_3, -x_5))$
- $s_5(x) = (x, xe_5)$
 $= ((x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7), (-x_5, -x_6, x_3, -x_2, -x_7, x_0, x_1, x_4))$
- $s_6(x) = (x, xe_6)$
 $= ((x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7), (-x_6, x_5, -x_7, x_4, -x_3, -x_1, x_0, x_2))$
- $s_7(x) = (x, xe_7)$
 $= ((x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7), (-x_7, x_3, x_6, -x_1, x_5, -x_4, -x_2, x_0))$

Como $\langle x, xe_i \rangle = 0$ para todo $i = 1, \dots, 7$, então s_i está bem definida, para todo $i = 1, \dots, 7$. Ainda, para todo $i = 1, \dots, 7$, s_i é contínua e $\pi_{\tau_{S^7}} \circ s_i = 1_{S^7}$.

Por fim, para quaisquer $\alpha_1, \dots, \alpha_7 \in \mathbb{R}$ e $x \in S^7$ tais que $\sum_{i=1}^7 \alpha_i s_i(x) = (x, 0)$, temos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^7 \alpha_i s_i(x) &= (x, 0) \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^7 (x, \alpha_i x e_i) &= (x, 0) \\ \Leftrightarrow (x, \sum_{i=1}^7 \alpha_i x e_i) &= (x, 0) \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^7 \alpha_i x e_i &= 0 \end{aligned}$$

Em particular, para $x = 1 \in S^7$, temos $\sum_{i=1}^7 \alpha_i e_i = 0$, ou seja, $\alpha_i = 0$ para todo $i = 1, \dots, 7$.

Logo, s_1, \dots, s_7 são seções linearmente independentes de τ_{S^7} , ou seja, segue do Teorema 4.2 que $\tau_{S^7} \cong \varepsilon_{S^7}^7$.

5 Construção de Fibrados a Partir de Fibrados Dados

Neste capítulo, faremos a construção de novos fibrados a partir de fibrados dados.

5.1 Fibrado Restrição

Sejam ξ um \mathbb{R}^n -fibrado e $B_0 \subset B(\xi)$ um subespaço topológico de $B(\xi)$. Consideremos $\xi|_{B_0}$ o fibrado vetorial onde $E(\xi|_{B_0}) = \pi_\xi^\perp(B_0)$, $B(\xi|_{B_0}) = B_0$ e $\pi = \pi_\xi|_{\pi_\xi^\perp(B_0)} : \pi_\xi^\perp(B_0) \rightarrow B_0$. Então, π é contínua e sobrejetora. Ainda, para cada $b \in B_0$, temos que:

$$F_b(\xi|_{B_0}) = \pi^\perp(b) = \pi_\xi^\perp(b) \cap \pi_\xi^\perp(B_0) = \pi_\xi^\perp(b) = F_b(\xi)$$

Agora, provemos a trivialidade local.

Seja $b \in B_0$ qualquer. Como ξ é um \mathbb{R}^n -fibrado, então existem $U \subset B(\xi)$ um aberto contendo $b \in B_0$ e um homeomorfismo $h : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi_\xi^\perp(U)$ tais que $h(b, _) : \mathbb{R}^n \rightarrow F_b(\xi)$ é um isomorfismo linear e comuta o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} U \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{h} & \pi_\xi^\perp(U) \\ & \searrow p_1 & \swarrow \pi_\xi \\ & & U \end{array}$$

Tomando $U_0 = U \cap B_0$, temos que $U_0 \subset B_0$ é um aberto contendo $b \in B_0$. Ainda, defina $h_0 = h|_{U_0 \times \mathbb{R}^n} : U_0 \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi_\xi^\perp(U_0) = \pi^\perp(U_0)$.

Deste modo, h_0 é um homeomorfismo, pois h é um homeomorfismo, $h_0(b, _) = h(b, _) : \mathbb{R}^n \rightarrow F_b(\xi|_{B_0}) = F_b(\xi)$ é um isomorfismo linear, pois $h(b, _)$ é um isomorfismo linear e por fim, $\pi \circ h_0 = \pi|_{\pi_\xi^\perp(U_0)} \circ h|_{U_0 \times \mathbb{R}^n} = \pi_\xi|_{\pi_\xi^\perp(U_0)} \circ h|_{U_0 \times \mathbb{R}^n} = p_1|_{U_0 \times \mathbb{R}^n}$.

Portanto, $\xi|_{B_0}$ é, de fato, um fibrado trivialmente localmente trivial.

5.2 Fibrado Induzido

Sejam ξ um \mathbb{R}^n -fibrado e B_1 um espaço topológico qualquer. Para qualquer função contínua $f : B_1 \rightarrow B(\xi)$, consideremos $f^*\xi$ o fibrado vetorial onde $E(f^*\xi) = \{(x, y) \in B_1 \times E(\xi) : f(x) = \pi_\xi(y)\}$, $B(f^*\xi) = B_1$ e $\pi_1 : E(f^*\xi) \rightarrow B_1$ é dada por $\pi_1(x, y) = x$, para qualquer $(x, y) \in E(f^*\xi)$. Então, π_1 é contínua e sobrejetora.

Ainda, temos o diagrama

$$\begin{array}{ccc} E(f^*\xi) & \xrightarrow{\widehat{f}} & E(\xi) \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_\xi \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B(\xi) \end{array}$$

comutativo, onde $\widehat{f} : E(f^*\xi) \rightarrow E(\xi)$ é definida por $\widehat{f}(x, y) = y$, para qualquer $(x, y) \in E(f^*\xi)$.

Note que, para qualquer $b \in B_1$, temos:

$$\begin{aligned} F_b(f^*\xi) &= \pi_1^+(b) = \{(x, y) \in E(f^*\xi) : \pi_1(x, y) = b\} \\ &= \{(x, y) \in E(f^*\xi) : x = b\} \\ &= \{(b, y) \in E(f^*\xi)\} \\ &= \{(b, y) \in B_1 \times E(\xi) : f(b) = \pi_\xi(y)\} \\ &= \{b\} \times F_{f(b)}(\xi) \\ &\cong F_{f(b)}(\xi) \end{aligned}$$

onde o isomorfismo acima é dado por $\widehat{f}|_{F_b(f^*\xi)} : F_b(f^*\xi) \rightarrow F_{f(b)}(\xi)$.

Agora, provemos a trivialidade local.

Seja $b \in B_1$ qualquer. Como $f(b) \in B(\xi)$ e ξ é um \mathbb{R}^n -fibrado, então existem $U \subset B(\xi)$ aberto contendo $f(b) \in B(\xi)$ e $h : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi_\xi^+(U)$ um homeomorfismo tal que $h(f(b), _) : \mathbb{R}^n \rightarrow F_{f(b)}(\xi)$ é um isomorfismo linear e comuta o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} U \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{h} & \pi_\xi^+(U) \\ & \searrow p_1 & \swarrow \pi_\xi \\ & & U \end{array}$$

Tomando $U_1 = f^+(U) \subset B_1$ um aberto contendo $b \in B_1$, defina $h_1 : U_1 \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi_1^+(U_1)$ por $h_1(x, \alpha) = (x, h(f(x), \alpha))$, para todo $(x, \alpha) \in U_1 \times \mathbb{R}^n$. Note que h_1 está bem definida, pois se $(x, \alpha) \in U_1 \times \mathbb{R}^n$, então $(x, h(f(x), \alpha)) \in \pi_1^+(U_1)$, desde que $\pi_1(x, h(f(x), \alpha)) = x \in U_1$. Ainda, h é contínua, pois h e f o são.

Agora, defina $g : \pi_1^+(U_1) \rightarrow U_1 \times \mathbb{R}^n$ por $g(x, y) = (x, p_2 \circ h^{-1}(y))$, para todo $(x, y) \in \pi_1^+(U_1)$, onde $p_2 : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a projeção do segundo fator. Uma vez que

$x \in U_1$, temos que g é bem definida. Ainda, g é contínua, pois p_2 e h^{-1} o são.

Por outro lado, para quaisquer $(x, \alpha) \in U_1 \times \mathbb{R}^n$ e $(x, y) \in \pi_1^+(U_1)$ temos:

- $g \circ h_1(x, \alpha) = g(x, h(f(x), \alpha))$

$$= (x, p_2 \circ h^{-1}(h(f(x), \alpha)))$$

$$= (x, p_2(f(x), \alpha))$$

$$= (x, \alpha) = 1_{U_1 \times \mathbb{R}^n}(x, \alpha)$$
- $h_1 \circ g(x, y) = h_1(x, p_2 \circ h^{-1}(y))$

$$= (x, h(f(x), p_2 \circ h^{-1}(y)))$$

$$= (x, h(\pi_\xi(y), p_2 \circ h^{-1}(y)))$$

$$= (x, h \circ (\pi_\xi, p_2 \circ h^{-1})(y))$$

$$= (x, h \circ (p_1 \circ h^{-1}, p_2 \circ h^{-1})(y))$$

$$= (x, h \circ h^{-1}(y))$$

$$= (x, y) = 1_{\pi_1^+(U_1)}(x, y)$$

Logo, h_1 é bijetora, contínua e com inversa g também contínua, isto é, h_1 é um homeomorfismo. Além disso, para qualquer $(x, \alpha) \in U_1 \times \mathbb{R}^n$, temos que $\pi_1 \circ h_1(x, \alpha) = \pi_1(x, h(f(x), \alpha)) = x = p_1(x, \alpha)$ e $h_1(b, _): \mathbb{R}^n \rightarrow F_b(f^*\xi) = \{b\} \times F_{f(b)}(\xi)$ dada por $h_1(b, _)(\alpha) = (b, h(f(b), _)(\alpha))$ é um isomorfismo linear, pois $h(f(b), _)$ o é.

Portanto, $f^*\xi$ é, de fato, um fibrado vetorial localmente trivial.

Lema 5.1. *Se ξ é um \mathbb{R}^n -fibrado trivial, então $f^*\xi$ é um \mathbb{R}^n -fibrado trivial.*

Demonstração. Se ξ é um \mathbb{R}^n -fibrado trivial, segue do Teorema 4.2 que existem n seções linearmente independentes $s_1, \dots, s_n: B(\xi) \rightarrow E(\xi)$. Assim, defina $S_i: B_1 \rightarrow E(f^*\xi)$ por $S_i(x) = (x, s_i(f(x)))$, para quaisquer $x \in B_1$ e $i = 1, \dots, n$.

Note que, para qualquer $i = 1, \dots, n$, S_i está bem definida, pois $\pi_\xi(s_i(f(x))) = \pi_\xi \circ s_i(f(x)) = f(x)$, para qualquer $x \in B_1$.

Ainda, para qualquer $i = 1, \dots, n$, S_i é contínua, pois s_i e f o são e o conjunto $\{S_1, \dots, S_n\}$ é linearmente independente, uma vez que para quaisquer $b \in B_1$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que $\sum_{i=1}^n \alpha_i S_i(b) = 0 \in F_b(f^*\xi)$, temos:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \alpha_i S_i(b) = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i(b, s_i(f(b))) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (b, \alpha_i s_i(f(b))) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (b, \sum_{i=1}^n \alpha_i s_i(f(b))) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i s_i(f(b)) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \alpha_i = 0, \text{ para todo } i = 1, \dots, n
 \end{aligned}$$

Por fim, para qualquer $x \in B_1$, $\pi_1 \circ S_i(x) = \pi_1(x, s_i(f(x))) = x = 1_{B_1}(x)$, para todo $i = 1, \dots, n$.

Portanto, $f^*\xi$ admite n seções linearmente independentes, ou seja, segue novamente do Teorema 4.2 que $f^*\xi$ é um \mathbb{R}^n -fibrado trivial. \square

O fibrado induzido nos sugere uma definição mais geral do que a definição de isomorfismo entre fibrados vetoriais, como segue:

Definição 5.1. *Sejam ξ e η fibrados. Dizemos que uma função contínua $g : E(\xi) \rightarrow E(\eta)$ é uma aplicação fibrada de ξ em η se leva cada fibra $F_b(\xi)$ isomorficamente em alguma fibra $F_{b'}(\eta)$.*

Agora, mostremos que dada qualquer aplicação fibrada g de ξ em η , existe uma única função contínua $\bar{g} : B(\xi) \rightarrow B(\eta)$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 E(\xi) & \xrightarrow{g} & E(\eta) \\
 \pi_\xi \downarrow & & \downarrow \pi_\eta \\
 B(\xi) & \xrightarrow{\bar{g}} & B(\eta)
 \end{array}$$

comuta.

Para tanto, defina $\bar{g} : B(\xi) \rightarrow B(\eta)$ por $\bar{g}(b) = b'$, para todo $b \in B(\xi)$, onde $g(F_b(\xi)) = F_{b'}(\eta)$.

Para provarmos a continuidade de \bar{g} , devemos mostrar, inicialmente, que para qualquer fibrado ξ , a projeção $\pi_\xi : E(\xi) \rightarrow B(\xi)$ é uma aplicação aberta. De fato, considere (U, h) um sistema de coordenadas locais para ξ sobre $b \in B(\xi)$. É suficiente mostrar que $\pi_\xi|_{\pi_\xi^{-1}(U)} : \pi_\xi^{-1}(U) \rightarrow U$ é uma aplicação aberta.

Se $A \subset \pi_\xi^{-1}(U)$ é um aberto, então $h^+(A) \subset U \times \mathbb{R}^n$ e $p_1(h^+(A)) \subset U$ são abertos, pois h é contínua e p_1 é uma aplicação aberta. Como o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 U \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{h} & \pi_\xi^{-1}(U) \\
 p_1 \searrow & & \swarrow \pi_\xi \\
 & & U
 \end{array}$$

comuta, então $\pi_\xi(A) = p_1(h^+(A)) \subset U$ é um aberto, isto é, π_ξ é uma aplicação aberta.

Agora, note que para qualquer $A \subset B(\eta)$ aberto, temos que $\bar{g}^+(A) = \pi_\xi(g^+(\pi_\eta^+(A))) \subset B(\xi)$ é um aberto, ou seja, \bar{g} é contínua.

Ainda, dado $x \in E(\xi)$ qualquer, temos que $x \in F_{\pi_\xi(x)}(\xi)$ e $g(F_{\pi_\xi(x)}(\xi)) = F_{b'}(\eta)$, para algum $b' \in B(\eta)$. Então, $\bar{g} \circ \pi_\xi(x) = \bar{g}(\pi_\xi(x)) = b'$. Por outro lado, $\pi_\eta \circ g(x) = b'$, pois $g(x) \in F_{b'}(\eta)$. Portanto, $\bar{g} \circ \pi_\xi = \pi_\eta \circ g$.

Por fim, mostremos a unicidade de \bar{g} . Suponha que exista $\tilde{g} : B(\xi) \rightarrow B(\eta)$ contínua tal que $\tilde{g} \circ \pi_\xi = \pi_\eta \circ g$. Então, dados $b \in B(\xi)$ qualquer e $0 \in F_b(\xi)$, temos que $\tilde{g}(b) = \tilde{g}(\pi_\xi(0)) = \pi_\eta(g(0)) = \bar{g}(\pi_\xi(0)) = \bar{g}(b)$. Logo, $\tilde{g} = \bar{g}$.

Com isso, podemos enunciar o seguinte:

Lema 5.2. *Sejam ξ e η fibrados. Se $g : E(\xi) \rightarrow E(\eta)$ é uma aplicação fibrada de ξ em η e $\bar{g} : B(\xi) \rightarrow B(\eta)$ é sua aplicação correspondente nos espaços bases, então $\xi \cong \bar{g}^*\eta$.*

Demonstração. Defina $f : E(\xi) \rightarrow E(\bar{g}^*\eta)$ por $f(x) = (\pi_\xi(x), g(x))$, para todo $x \in E(\xi)$. Desde que $\pi_\eta(g(x)) = \bar{g}(\pi_\xi(x))$ para todo $x \in E(\xi)$, então f está bem definida. Ainda, f é contínua, pois π_ξ e g o são.

Agora, se $x \in F_b(\xi)$, então $f(x) = (\pi_\xi(x), g(x)) = (b, g(x)) \in \{b\} \times F_{\bar{g}(b)}(\eta) = F_b(\bar{g}^*\eta)$, pois $\pi_\eta(g(x)) = \bar{g}(\pi_\xi(x)) = \bar{g}(b)$. Deste modo, $f(F_b(\xi)) \subset F_b(\bar{g}^*\eta)$.

Ainda, como $g|_{F_b(\xi)} : F_b(\xi) \rightarrow F_{\bar{g}(b)}(\eta)$ é um isomorfismo linear, então $f|_{F_b(\xi)} : F_b(\xi) \rightarrow F_b(\bar{g}^*\eta) = \{b\} \times F_{\bar{g}(b)}(\eta)$ dada por $f|_{F_b(\xi)}(x) = (b, g|_{F_b(\xi)}(x))$ também é um isomorfismo linear.

Portanto, segue do Lema 4.2 que f é um homeomorfismo, ou seja, $\xi \cong \bar{g}^*\eta$. \square

5.3 Produto Cartesiano

Sejam ξ e η fibrados. Considere $\xi \times \eta$ o fibrado vetorial onde $E(\xi \times \eta) = E(\xi) \times E(\eta)$, $B(\xi \times \eta) = B(\xi) \times B(\eta)$ e $\pi = \pi_\xi \times \pi_\eta : E(\xi \times \eta) \rightarrow B(\xi \times \eta)$. Assim, π é contínua e sobrejetora. Ainda, $F_{(b_1, b_2)}(\xi \times \eta) = F_{b_1}(\xi) \times F_{b_2}(\eta)$, para qualquer $(b_1, b_2) \in B(\xi \times \eta)$.

Agora, provemos a trivialidade local.

Seja $(b_1, b_2) \in B(\xi \times \eta)$ qualquer. Como ξ e η são fibrados, então existem $U_1 \subset B(\xi)$ e $U_2 \subset B(\eta)$ abertos contendo $b_1 \in B(\xi)$ e $b_2 \in B(\eta)$, respectivamente, e existem $h_1 : U_1 \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi_\xi^+(U_1)$ e $h_2 : U_2 \times \mathbb{R}^m \rightarrow \pi_\eta^+(U_2)$ homeomorfismos tais que $h_1(b_1, _) : \mathbb{R}^n \rightarrow F_{b_1}(\xi)$ e $h_2(b_2, _) : \mathbb{R}^m \rightarrow F_{b_2}(\eta)$ são isomorfismos lineares e comutam os diagramas:

$$\begin{array}{ccc}
 U_1 \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{h_1} & \pi_\xi^+(U_1) \\
 \searrow p_1 & & \swarrow \pi_\xi \\
 & & U_1
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 U_2 \times \mathbb{R}^m & \xrightarrow{h_2} & \pi_\eta^+(U_2) \\
 \searrow p_1 & & \swarrow \pi_\eta \\
 & & U_2
 \end{array}$$

Então, $U = U_1 \times U_2 \subset B(\xi \times \eta)$ é um aberto contendo $(b_1, b_2) \in B(\xi \times \eta)$ e $h : U \times \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \pi^{-1}(U)$ definida por $h((x, y), (\alpha, \beta)) = (h_1(x, \alpha), h_2(y, \beta))$, para todo $((x, y), (\alpha, \beta)) \in U \times \mathbb{R}^{n+m}$, é um homeomorfismo, uma vez que h_1 e h_2 o são.

Ainda, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} U \times \mathbb{R}^{n+m} & \xrightarrow{h} & \pi^{-1}(U) \\ & \searrow p_1 & \swarrow \pi \\ & & U \end{array}$$

comuta e $h((b_1, b_2), _) : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow F_{(b_1, b_2)}(\xi \times \eta)$ dada por $h((b_1, b_2), _)(\alpha, \beta) = (h_1(b_1, _)(\alpha), h_2(b_2, _)(\beta))$, para todo $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{n+m}$, é um isomorfismo linear, desde que $h_1(b_1, _)$ e $h_2(b_2, _)$ o são.

Portanto, $\xi \times \eta$ é, de fato, um fibrado vetorial localmente trivial.

Exemplo 5.1. Sejam $M_1 \subset \mathbb{R}^n$ e $M_2 \subset \mathbb{R}^m$ variedades C^∞ . Se $M = M_1 \times M_2$, então $\tau_M \cong \tau_{M_1} \times \tau_{M_2}$.

Com efeito, lembrando que $TM = \{((x_1, x_2), (v_1, v_2)) \in M \times \mathbb{R}^{n+m} : (v_1, v_2) \in T_{(x_1, x_2)}M = T_{x_1}M_1 \times T_{x_2}M_2\}$, defina $f : TM \rightarrow TM_1 \times TM_2$ por $f((x_1, x_2), (v_1, v_2)) = ((x_1, v_1), (x_2, v_2))$ para todo $((x_1, x_2), (v_1, v_2)) \in TM$.

Deste modo, f está bem definida e é contínua. Ainda, $f|_{F_{(x_1, x_2)}(\tau_M)} : F_{(x_1, x_2)}(\tau_M) \rightarrow F_{x_1}(\tau_{M_1}) \times F_{x_2}(\tau_{M_2})$ dada por $f|_{F_{(x_1, x_2)}(\tau_M)}((x_1, x_2), (v_1, v_2)) = ((x_1, v_1), (x_2, v_2))$ para todo $((x_1, x_2), (v_1, v_2)) \in F_{(x_1, x_2)}(\tau_M)$ é um isomorfismo linear.

Portanto, segue do Lema 4.2 que f é um homeomorfismo, ou seja, $\tau_M \cong \tau_{M_1} \times \tau_{M_2}$.

5.4 Soma de Whitney

Sejam ξ e η fibrados sobre o mesmo espaço base B . Definimos a soma de Whitney entre ξ e η , denotada por $\xi \oplus \eta$, como sendo o fibrado induzido $d^*\xi \times \eta$, onde $d : B \rightarrow B \times B$ é a aplicação diagonal dada por $d(b) = (b, b)$, para todo $b \in B$.

Note que, para qualquer $b \in B$, temos que:

$$\begin{aligned} F_b(\xi \oplus \eta) &= F_b(d^*(\xi \times \eta)) \\ &= \{b\} \times F_{d(b)}(\xi \times \eta) \\ &= \{b\} \times F_{(b, b)}(\xi \times \eta) \\ &= \{b\} \times F_b(\xi) \times F_b(\eta) \\ &\cong \{b\} \times F_b(\xi) \oplus F_b(\eta) \end{aligned}$$

onde o isomorfismo $T : \{b\} \times F_b(\xi) \times F_b(\eta) \rightarrow \{b\} \times F_b(\xi) \oplus F_b(\eta)$ é definido por $T(b, x, y) = (b, x + y)$ para todo $(b, x, y) \in \{b\} \times F_b(\xi) \times F_b(\eta)$.

Definição 5.2. *Sejam ξ e η fibrados sobre o mesmo espaço base B tais que $E(\xi) \subset E(\eta)$. Dizemos que ξ é um subfibrado de η , denotado por $\xi \subset \eta$, quando $F_b(\xi)$ for um subespaço vetorial de $F_b(\eta)$, para qualquer $b \in B$.*

Lema 5.3. *Sejam ξ_1 e ξ_2 subfibrados de um fibrado η . Se $F_b(\eta) = F_b(\xi_1) \oplus F_b(\xi_2)$, para qualquer $b \in B(\eta)$, então $\eta \cong \xi_1 \oplus \xi_2$.*

Demonstração. Defina $f : E(\xi_1 \oplus \xi_2) \rightarrow E(\eta)$ por $f(b, (e_1, e_2)) = e_1 + e_2$, para todo $(b, e_1, e_2) \in E(\xi_1 \oplus \xi_2)$. Veja que f está bem definida, pois para qualquer $(b, (e_1, e_2)) \in E(\xi_1 \oplus \xi_2)$, temos que $d(b) = \pi_{\xi_1} \times \pi_{\xi_2}(e_1, e_2)$, isto é, $(b, b) = (\pi_{\xi_1}(e_1), \pi_{\xi_2}(e_2))$, ou seja, $e_i \in F_b(\xi_i)$ para $i = 1, 2$. Assim, $e_1 + e_2 \in F_b(\xi_1) \oplus F_b(\xi_2) = F_b(\eta) \subset E(\eta)$.

Ainda, f é contínua, pois $f = i \circ s \circ \widehat{d}$, onde $\widehat{d} : E(\xi_1 \oplus \xi_2) \rightarrow \text{Im}(\widehat{d}) = F_b(\xi_1) \oplus F_b(\xi_2)$ é a aplicação contínua definida por $\widehat{d}(b, (e_1, e_2)) = (e_1, e_2)$ para todo $(b, (e_1, e_2)) \in E(\xi_1 \oplus \xi_2)$, $s : F_b(\xi_1) \oplus F_b(\xi_2) \rightarrow F_b(\eta)$ é a soma do espaço vetorial $F_b(\eta)$ dada por $s(e_1, e_2) = e_1 + e_2$ para todo $(e_1, e_2) \in F_b(\xi_1) \oplus F_b(\xi_2)$ e $i : F_b(\eta) \hookrightarrow E(\eta)$ é a inclusão.

Por fim, $f|_{F_b(\xi_1 \oplus \xi_2)} : F_b(\xi_1 \oplus F_b(\xi_2)) \rightarrow F_b(\eta)$ é um isomorfismo linear. De fato:

- $f|_{F_b(\xi_1 \oplus \xi_2)}$ é linear, uma vez que para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e $(b, (x, y)), (b, (w, z)) \in F_b(\xi_1 \oplus \xi_2)$, temos que

$$f|_{F_b(\xi_1 \oplus \xi_2)}(\alpha(b, (x, y)) + (b, (w, z))) = f|_{F_b(\xi_1 \oplus \xi_2)}(b, (\alpha x + w, \alpha y + z))$$

$$= \alpha x + w + \alpha y + z$$

$$= \alpha(x + y) + w + z$$

$$= \alpha f|_{F_b(\xi_1 \oplus \xi_2)}(b, (x, y)) + f|_{F_b(\xi_1 \oplus \xi_2)}(b, (w, z))$$

- $f|_{F_b(\xi_1 \oplus \xi_2)}$ é bijetora, pois para qualquer $w \in F_b(\eta) = F_b(\xi_1) \oplus F_b(\xi_2)$, temos que existem únicos $x \in F_b(\xi_1)$ e $y \in F_b(\xi_2)$ tais que $w = x + y$. Deste modo, $f|_{F_b(\xi_1 \oplus \xi_2)}(b, (x, y)) = x + y = w$.

Portanto, segue do Lema 4.2 que f é um homeomorfismo, ou seja, $\eta \cong \xi_1 \oplus \xi_2$. \square

Exemplo 5.2. Para qualquer espaço topológico B e para qualquer $n > 0$ inteiro, temos que $\varepsilon_B^n \cong \underbrace{\varepsilon_B^1 \oplus \dots \oplus \varepsilon_B^1}_{n\text{-vezes}}$. De fato, provemos por indução sobre $n > 0$.

Para $n = 2$, defina $f : B \times \mathbb{R}^2 \rightarrow E(\varepsilon_B^1 \oplus \varepsilon_B^1)$ por $f(b, (\alpha, \beta)) = (b, ((b, \alpha), (b, \beta)))$ para todo $(b, (\alpha, \beta)) \in B \times \mathbb{R}^2$. Veja que, da definição de $E(\varepsilon_B^1 \oplus \varepsilon_B^1)$, f está bem definida. Ainda, f , é contínua.

Por fim, $f|_{\{b\} \times \mathbb{R}^2} : \{b\} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \{b\} \times (\{b\} \times \mathbb{R}) \times (\{b\} \times \mathbb{R})$ dada por $f|_{\{b\} \times \mathbb{R}^2}(b, (\alpha, \beta)) = (b, ((b, \alpha), (b, \beta)))$ para todo $(b, (\alpha, \beta)) \in \{b\} \times \mathbb{R}^2$ é um isomorfismo linear. Portanto,

segue do Lema 4.2 que f é um homeomorfismo, isto é, $\varepsilon_B^2 \cong \varepsilon_B^1 \oplus \varepsilon_B^1$.

Agora, suponha que $\varepsilon_B^{n-1} \cong \underbrace{\varepsilon_B^1 \oplus \dots \oplus \varepsilon_B^1}_{(n-1)\text{-vezes}}$. De modo análogo à construção feita para o caso $n = 2$, obtemos que $\varepsilon_B^n \cong \varepsilon_B^1 \oplus \varepsilon_B^{n-1}$.

Utilizando nossa hipótese de indução, concluímos que $\varepsilon_B^n \cong \underbrace{\varepsilon_B^1 \oplus \dots \oplus \varepsilon_B^1}_{n\text{-vezes}}$.

5.5 Fibrados Vetoriais Euclidianos e Complementos Ortogonais

Para a construção do próximo fibrado vetorial, precisamos introduzir a noção de Fibrados Vetoriais Euclidianos.

5.5.1 Fibrados Vetoriais Euclidianos

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Lembremos que $\mu : V \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de forma quadrática definida positiva se pode ser expressa como $\mu(v) = \sum_{i=1}^n l_i(v)l'_i(v)$, para todo $v \in V$, onde $l_i, l'_i : V \rightarrow \mathbb{R}$ é uma transformação linear, para $i = 1, \dots, n$ e $\mu(v) \neq 0$ para qualquer $v \neq 0$.

Assim, μ determina uma aplicação bilinear e simétrica $\langle _, _ \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\langle v, w \rangle = \frac{1}{2}(\mu(v+w) - \mu(v) - \mu(w))$, para todo $(v, w) \in V \times V$. Note que $\langle v, v \rangle = \mu(v)$. De fato:

$$\begin{aligned} \langle v, v \rangle &= \frac{1}{2}(\mu(v+v) - \mu(v) - \mu(v)) \\ &= \frac{1}{2}(\mu(2v) - 2\mu(v)) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^n l_i(2v)l'_i(2v) - 2\mu(v)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(4\sum_{i=1}^n l_i(v)l'_i(v) - 2\mu(v)\right) \\ &= \frac{1}{2}(4\mu(v) - 2\mu(v)) \\ &= \mu(v) \end{aligned}$$

Definição 5.3. Um espaço vetorial Euclidiano V é um espaço vetorial de dimensão finita com uma forma quadrática definida positiva $\mu : V \rightarrow \mathbb{R}$. O número real $\langle v, w \rangle$ será chamado de produto interno entre $v \in V$ e $w \in V$ e denotaremos $\|v\|^2 = \mu(v) = \langle v, v \rangle$.

Definição 5.4. Um fibrado vetorial Euclidiano ξ é um fibrado vetorial com uma função contínua $\mu : E(\xi) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mu|_{F_b(\xi)} : F_b(\xi) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma forma quadrática definida positiva, para qualquer $b \in B(\xi)$. A função μ será chamada de métrica Euclidiana do fibrado ξ .

No caso do fibrado tangente τ_M de uma variedade C^∞ $M \subset \mathbb{R}^n$, uma métrica Euclidiana $\mu : TM \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de métrica Riemanniana e o par (M, μ) é chamado de variedade Riemanniana.

Lema 5.4. Sejam ξ um \mathbb{R}^n -fibrado trivial e $\mu : E(\xi) \rightarrow \mathbb{R}$ uma métrica Euclidiana qualquer de ξ . Então, existem n seções $s_1, \dots, s_n : B(\xi) \rightarrow E(\xi)$ de ξ que são ortonormais, no sentido que $\langle s_i(b), s_j(b) \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$, para qualquer $b \in B(\xi)$.

Demonstração. Como ξ é um \mathbb{R}^n -fibrado trivial, segue do Teorema 4.2 que existem n seções linearmente independentes $s'_1, \dots, s'_n : B(\xi) \rightarrow E(\xi)$ de ξ . Aplicando o processo de Gram-Schmidt para $s'_1(b), \dots, s'_n(b)$, obtemos uma base ortonormal $\{s_1(b), \dots, s_n(b)\}$ para $F_b(\xi)$, para todo $b \in B(\xi)$.

Como as funções resultantes s_i são contínuas, para todo $i = 1, \dots, n$, segue que s_1, \dots, s_n são n seções ortonormais de ξ . \square

Agora, vejamos alguns exemplos de fibrados vetoriais Euclidianos.

Exemplo 5.3. Para qualquer espaço topológico B e para qualquer $n > 0$ inteiro, temos que ε_B^n é um fibrado Euclidiano.

De fato, defina, para todo $(b, (x_1, \dots, x_n)) \in B \times \mathbb{R}^n$, $\mu : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ por $\mu(b, (x_1, \dots, x_n)) = \sum_{i=1}^n x_i^2$. Note que da própria definição, μ é contínua e, para qualquer $b \in B$, $\mu|_{F_b(\varepsilon_B^n)} : F_b(\varepsilon_B^n) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\mu|_{F_b(\varepsilon_B^n)}(b, (x_1, \dots, x_n)) = \sum_{i=1}^n x_i^2$ para todo $(b, (x_1, \dots, x_n)) \in F_b(\varepsilon_B^n)$ é uma forma quadrática definida positiva.

Portanto, ε_B^n é um fibrado Euclidiano.

Exemplo 5.4. Para qualquer $M \subset \mathbb{R}^n$ variedade C^∞ , temos que τ_M é um fibrado Euclidiano.

De fato, defina $\mu : TM \rightarrow \mathbb{R}$ por $\mu(x, (v_1, \dots, v_n)) = \sum_{i=1}^n v_i^2$ para todo $(x, (v_1, \dots, v_n)) \in TM$. Note que da própria definição, μ é contínua e, para qualquer $x \in M$, $\mu|_{F_x(\tau_M)} : F_x(\tau_M) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\mu|_{F_x(\tau_M)}(x, (v_1, \dots, v_n)) = \sum_{i=1}^n v_i^2$ para todo $(x, (v_1, \dots, v_n)) \in F_x(\tau_M)$ é uma forma quadrática definida positiva.

Portanto, τ_M é um fibrado Euclidiano.

Exemplo 5.5. O fibrado linha canônico γ_n^1 é um fibrado Euclidiano.

Inicialmente, note que para qualquer $(\bar{x}, v) \in E(\gamma_n^1)$, temos que $v = \lambda x$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Utilizando o produto interno canônico de \mathbb{R}^{n+1} , obtemos que $\lambda = \langle x, v \rangle$, pois $x \in S^n$. Deste modo, defina $\mu : E(\gamma_n^1) \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$\mu(\bar{x}, v) = \begin{cases} \langle x, v \rangle & , \text{ se } v = \lambda x \text{ com } \lambda \geq 0 \\ -\langle x, v \rangle & , \text{ se } v = \lambda x \text{ com } \lambda \leq 0 \end{cases}$$

para todo $(\bar{x}, v) \in E(\gamma_n^1)$. Assim, μ está bem definida e é contínua.

Ainda, segue da própria definição do produto interno canônico de \mathbb{R}^{n+1} que $\mu|_{F_{\bar{x}}(\gamma_n^1)} : F_{\bar{x}}(\gamma_n^1)$ dada por $\mu(\bar{x}, v) = \begin{cases} \langle x, v \rangle & , \text{ se } v = \lambda x \text{ com } \lambda \geq 0 \\ -\langle x, v \rangle & , \text{ se } v = \lambda x \text{ com } \lambda \leq 0 \end{cases}$ para todo $(\bar{x}, v) \in F_{\bar{x}}(\gamma_n^1)$ é uma forma quadrática definida positiva.

Portanto, γ_n^1 é um fibrado Euclidiano.

Com estas noções sobre fibrados Euclidianos, já podemos construir o próximo fibrado, os Complementos Ortogonais.

5.5.2 Complementos Ortogonais

Sejam η um fibrado Euclidiano sobre um espaço base B e $\xi \subset \eta$, isto é, $F_b(\xi)$ é um subespaço vetorial de $F_b(\eta)$, para qualquer $b \in B$. Para cada $b \in B$, defina $F_b(\xi^\perp) = (F_b(\xi))^\perp = \{v \in F_b(\eta) : \langle v, w \rangle = 0, \forall w \in F_b(\xi)\}$. Consideremos ξ^\perp o fibrado vetorial onde $E(\xi^\perp) = \bigcup_{b \in B} F_b(\xi^\perp)$, $B(\xi^\perp) = B$ e $\pi = \pi_\eta|_{E(\xi^\perp)} : E(\xi^\perp) \rightarrow B$.

Então, π é contínua e sobrejetora. Ainda, para qualquer $b \in B$, temos:

$$\begin{aligned} \pi^\dagger(b) &= (\pi_\eta|_{E(\xi^\perp)})^\dagger(b) \\ &= \pi_\eta^\dagger(b) \cap E(\xi^\perp) \\ &= F_b(\eta) \cap \bigcup_{x \in B} F_x(\xi^\perp) \\ &= \bigcup_{x \in B} (F_b(\eta) \cap F_x(\xi^\perp)) \\ &= F_b(\eta) \cap F_b(\xi^\perp) \\ &= F_b(\xi^\perp) \end{aligned}$$

Agora, provemos a trivialidade local.

Suponha η um \mathbb{R}^n -fibrado e ξ um \mathbb{R}^m -fibrado com $m \leq n$ e sejam $b_0 \in B$ qualquer e $U \subset B$ um aberto contendo $b_0 \in B$ que fornece trivialidade local para ξ e η . Deste modo, existem homeomorfismos $h_1 : U \times \mathbb{R}^m \rightarrow \pi_\xi^\dagger(U)$ e $h_2 : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi_\eta^\dagger(U)$ tais que

$h_1(b_0, _) : \mathbb{R}^m \rightarrow F_{b_0}(\xi)$ e $h_2(b_0, _) : \mathbb{R}^n \rightarrow F_{b_0}(\eta)$ são isomorfismos lineares e comuta o diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 U \times \mathbb{R}^m & \xrightarrow{h_1} & \pi_\xi^\perp(U) & \subset & \pi_\eta^\perp(U) & \xleftarrow{h_2} & U \times \mathbb{R}^n \\
 & \searrow & \downarrow \pi_\xi & & \downarrow \pi_\eta & \swarrow & \\
 & & U & & U & & \\
 & \searrow p_1 & & & & \swarrow p_1 & \\
 & & U & & & &
 \end{array}$$

Note que, realmente, temos $\pi_\xi^\perp(U) \subset \pi_\eta^\perp(U)$. De fato, como $F_b(\xi) \subset F_b(\eta)$, para qualquer $b \in B$, então se $x \in F_{\pi_\xi(x)}(\xi)$, obtemos que $\pi_\eta(x) = \pi_\xi(x)$. Ainda, se $x \in \pi_\xi^\perp(U)$, então $\pi_\eta(x) = \pi_\xi(x) \in U$, isto é, $x \in \pi_\eta^\perp(U)$.

Por outro lado, segue do Lema 5.4 que existem $s_1, \dots, s_m : B \rightarrow E(\xi)$ seções ortonormais de $\xi|_U$ e $s'_1, \dots, s'_n : B \rightarrow E(\eta)$ seções ortonormais de $\eta|_U$. Portanto, a matriz $A = (\langle s_i(b_0), s'_j(b_0) \rangle)_{m \times n}$ tem posto m . Para isto, basta verificar que as m -linhas da matriz A são linearmente independentes. De fato, para quaisquer $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$, temos que:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^m \alpha_i (\langle s_i(b_0), s'_1(b_0) \rangle, \dots, \langle s_i(b_0), s'_n(b_0) \rangle) = (0, \dots, 0) \\
 \Leftrightarrow & (\langle \sum_{i=1}^m \alpha_i s_i(b_0), s'_1(b_0) \rangle, \dots, \langle \sum_{i=1}^m \alpha_i s_i(b_0), s'_n(b_0) \rangle) = (0, \dots, 0) \\
 \Leftrightarrow & \langle \sum_{i=1}^m \alpha_i s_i(b_0), s'_j(b_0) \rangle = 0, \quad \forall j = 1, \dots, n \\
 \Leftrightarrow & \sum_{i=1}^m \alpha_i s_i(b_0) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \alpha_i = 0, \quad \forall i = 1, \dots, m
 \end{aligned}$$

Se necessário, podemos reenumerar as seções s'_1, \dots, s'_n de modo que as m -primeiras colunas da matriz A formam um determinante diferente de zero. Assim, existe $V \subset U$ aberto contendo $b_0 \in U$ tal que para qualquer $b \in V$, $\text{rank}(\langle s_i(b), s'_j(b) \rangle)_{m \times n} = m$.

Então, para qualquer $b \in V$, $\{s_1(b), \dots, s_m(b), s'_{m+1}(b), \dots, s'_n(b)\}$ é linearmente independente em $F_b(\eta)$. Por Gram-Schmidt temos, para qualquer $b \in V$, que $\{s_1(b), \dots, s_m(b), s_{m+1}(b), \dots, s_n(b)\}$ é uma base ortonormal de $F_b(\eta)$.

Logo, $h : V \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \pi^\perp(V)$ definida por $h(b, (x_1, \dots, x_{n-m})) = \sum_{i=1}^{n-m} x_i s_{i+m}(b)$, para todo $(b, (x_1, \dots, x_{n-m}))$, é contínua e com inversa $h^{-1} : \pi^\perp(V) \rightarrow V \times \mathbb{R}^{n-m}$ definida por $h^{-1}(e) = (\pi(e), (\langle e, s_{m+1}(\pi(e)) \rangle, \dots, \langle e, s_n(\pi(e)) \rangle))$, para todo $e \in \pi^\perp(V)$, que também é contínua, ou seja, h é um homeomorfismo.

Note que, de fato, h^{-1} é a inversa de h . Com efeito, para quaisquer $e \in \pi^\perp(V)$ e $(b, (x_1, \dots, x_{n-m})) \in V \times \mathbb{R}^{n-m}$, temos:

- $h \circ h^{-1}(e) = h(\pi(e), (\langle e, s_{m+1}(\pi(e)) \rangle, \dots, \langle e, s_n(\pi(e)) \rangle))$

$$= \sum_{i=1}^{n-m} \langle e, s_{i+m}(\pi(e)) \rangle s_{i+m}(\pi(e))$$

$$= e$$

$$= 1_{\pi^+(V)}(e),$$

pois $e \in \pi^+(V) \subset E(\xi^\perp) = \bigcup_{b \in B} F_b(\xi^\perp)$, isto é, $e \in F_{\pi(e)}(\xi^\perp) = (F_{\pi(e)}(\xi))^\perp$, ou seja, $\langle e, s_i(\pi(e)) \rangle = 0$, para todo $i = 1, \dots, m$.

- $h^{-1} \circ h(b, (x_1, \dots, x_{n-m})) = h^{-1}(\sum_{i=1}^{n-m} x_i s_{i+m}(b))$

$$= (b, (x_1, \dots, x_{n-m}))$$

$$= 1_{V \times \mathbb{R}^{n-m}}(b, (x_1, \dots, x_{n-m})),$$

pois como $\sum_{i=1}^{n-m} x_i s_{i+m}(b) \in F_b(\xi^\perp) = (F_b(\xi))^\perp$, então $\pi(\sum_{i=1}^{n-m} x_i s_{i+m}(b)) = b$.

Ainda, $\langle \sum_{i=1}^{n-m} x_i s_{i+m}(b), s_{j+m}(b) \rangle = x_j$, para todo $j = 1, \dots, n - m$.

Por fim, $h(b_0, _) : \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow F_{b_0}(\xi^\perp)$ dada por $h(b_0, _)(x_1, \dots, x_{n-m}) = \sum_{i=1}^{n-m} x_i s_{i+m}(b_0)$

é um isomorfismo linear e temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} V \times \mathbb{R}^{n-m} & \xrightarrow{h} & \pi^+(V) \\ & \searrow p_1 & \swarrow \pi \\ & & V \end{array}$$

Portanto, ξ^\perp é, de fato, um fibrado vetorial localmente trivial.

Proposição 5.1. *Se ξ é um subfibrado de um fibrado Euclidiano η sobre um espaço base B , então $\eta \cong \xi \oplus \xi^\perp$.*

Demonstração. Como $F_b(\eta) = F_b(\xi) \oplus F_b(\xi^\perp)$, pois $F_b(\xi^\perp) = (F_b(\xi))^\perp$, para qualquer $b \in B$, então segue do Lema 5.3 que $\eta \cong \xi \oplus \xi^\perp$. □

Definição 5.5. *O fibrado ξ^\perp será chamado de complemento ortogonal de ξ em η .*

Exemplo 5.6. Suponha $N \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade Riemanniana e $M \subset N$ uma subvariedade C^∞ . Então, $\tau_M \subset \tau_N|_M$.

De fato:

- i) $E(\tau_M) \subset E(\tau_N|_M)$. Com efeito, considere $(x, v) \in E(\tau_M) = TM$ qualquer. Então, $x \in M$ e $v \in T_xM$. Como $M \subset N$ é uma subvariedade, então T_xM é um subespaço vetorial de T_xN . Assim, $x \in N$ e $v \in T_xN$, isto é, $(x, v) \in TN = E(\tau_N)$. Como $(x, v) \in \pi_{\tau_N}^{-1}(M)$, pois $x \in M$, então $(x, v) \in E(\tau_N|_M)$.
- ii) $F_b(\tau_M)$ é um subespaço vetorial de $F_b(\tau_N|_M)$, para qualquer $b \in M$. Com efeito, como T_bM é um subespaço vetorial de T_bN , para todo $b \in M$, então $F_b(\tau_M) = \{b\} \times T_bM$ é um subespaço vetorial de $\{b\} \times T_bN = F_b(\tau_N) = F_b(\tau_N|_M)$.

Definição 5.6. Chamaremos de *fibrado normal de uma variedade M em uma variedade Riemanniana N* o complemento ortogonal $\tau_M^\perp \subset \tau_N|_M$.

Assim, segue a trivialidade local do exemplo 4.3, desde que $\nu_M = \tau_M^\perp$.

Nestas condições, temos:

Corolário 5.1. $\tau_N|_M \cong \tau_M \oplus \tau_M^\perp = \tau_M \oplus \nu_M$.

Como último resultado desta seção, temos o:

Exemplo 5.7. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade C^∞ . Da própria definição do fibrado tangente τ_M , temos que $\tau_M \subset \varepsilon_M^n$.

Então, $\varepsilon_M^n \cong \tau_M \oplus \nu_M$.

5.6 Fibrado Hom

Inicialmente, consideremos V_1 e V_2 espaços vetoriais de dimensão finita e denotemos $Hom(V_1, V_2) = \{T : V_1 \rightarrow V_2 : T \text{ linear}\}$. Ainda, se $dim(V_1) = n$ e $dim(V_2) = m$, então existe um isomorfismo linear $T : \mathbb{R}^{nm} \rightarrow Hom(V_1, V_2)$.

Sejam ξ um \mathbb{R}^n -fibrado e η um \mathbb{R}^m -fibrado, ambos sobre o mesmo espaço base B . Consideremos $Hom(\xi, \eta)$ o fibrado vetorial onde $E(Hom(\xi, \eta)) = \bigcup_{b \in B} Hom(F_b(\xi), F_b(\eta))$, $B(Hom(\xi, \eta)) = B$ e $\pi : E(Hom(\xi, \eta)) \rightarrow B$ é definida por $\pi(T) = b$ para cada $T \in Hom(F_b(\xi), F_b(\eta)) \subset E(Hom(\xi, \eta))$ e para todo $b \in B$.

A topologia que tomaremos em $E(Hom(\xi, \eta))$ é a que torna π contínua, isto é, $U \subset E(Hom(\xi, \eta))$ é um aberto se, e somente se, $U = \pi^{-1}(A)$ para algum aberto $A \subset B$.

Deste modo, π é contínua e sobrejetora, desde que para qualquer $b_0 \in B$, $\pi(0_{b_0}) = b_0$, onde $0_{b_0} : F_{b_0}(\xi) \rightarrow F_{b_0}(\eta)$ é a transformação linear nula. Ainda, $F_b(Hom(\xi, \eta)) = Hom(F_b(\xi), F_b(\eta))$, para todo $b \in B$.

Agora, provemos a trivialidade local.

Seja $b_0 \in B$ qualquer. Tome $U \subset B$ um aberto contendo $b_0 \in B$ que fornece trivialidade local para ξ e η em $b_0 \in B$. Uma vez que existem isomorfismos $T_b : \mathbb{R}^{nm} \rightarrow Hom(F_b(\xi), F_b(\eta))$ para todo $b \in B$, defina $h : U \times \mathbb{R}^{nm} \rightarrow \pi^{-1}(U) =$

$\bigcup_{b \in U} \text{Hom}(F_b(\xi), F_b(\eta))$ por $h(b, \alpha) = T_b(\alpha)$ para todo $(b, \alpha) \in U \times \mathbb{R}^{nm}$. Como o diagrama

$$\begin{array}{ccc} U \times \mathbb{R}^{nm} & \xrightarrow{h} & \pi^+(U) \\ & \searrow p_1 & \swarrow \pi \\ & & U \end{array}$$

comuta, então h é contínua. De fato, se $O \subset \pi^+(U)$ é um aberto, então $O = A \cap \pi^+(U)$, onde $A \subset E(\text{Hom}(\xi, \eta))$ é um aberto. Deste modo, $A = \pi^+(V)$ para algum aberto $V \subset B$. Como p_1 é contínua, então $p_1^+(V \cap U) \subset U \times \mathbb{R}^{nm}$ é aberto. Portanto:

$$\begin{aligned} h^+(O) &= h^+(A \cap \pi^+(U)) \\ &= h^+(\pi^+(V) \cap \pi^+(U)) \\ &= h^+(\pi^+(V \cap U)) \\ &= p_1^+(V \cap U) \subset U \times \mathbb{R}^{nm} \text{ é aberto.} \end{aligned}$$

Defina $g : \pi^+(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^{nm}$ por $g(T) = (b, T_b^{-1}(T))$, onde $T \in \text{Hom}(F_b(\xi), F_b(\eta))$ para um único $b \in U$. Então, $g = h^{-1}$ e g é contínua. Com efeito, provemos que g é contínua em $T \in \pi^+(U)$ arbitrário.

Considere $O = A \times V \subset U \times \mathbb{R}^{nm}$ um aberto sub-básico contendo $g(T)$, onde $A \subset U$ e $V \subset \mathbb{R}^{nm}$ são abertos. Assim, como $T \in \text{Hom}(F_b(\xi), F_b(\eta))$ para um único $b \in U$ e $g(T) \in O$, então $b \in A$ e $T_b^{-1}(T) \in V$. Por outro lado, como $T_b^{-1} : \text{Hom}(F_b(\xi), F_b(\eta)) \rightarrow \mathbb{R}^{nm}$ é contínua, em particular em T , então existe $W \subset \text{Hom}(F_b(\xi), F_b(\eta))$ um aberto tal que $T \in W$ e $T_b^{-1}(W) \subset V$. Portanto, $g(W) \subset A \times T_b^{-1}(W) \subset A \times V = O$.

Por fim, como T_b é um isomorfismo linear para todo $b \in B$, em particular para $b_0 \in B$, então $h(b_0, _) : \mathbb{R}^{nm} \rightarrow F_{b_0}(\text{Hom}(\xi, \eta))$ dada por $h(b_0, _)(\alpha) = T_{b_0}(\alpha)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}^{nm}$, é um isomorfismo linear.

Portanto, $\text{Hom}(\xi, \eta)$ é, de fato, um fibrado vetorial localmente trivial.

A prova de que h é contínua nos motiva a enunciar um resultado mais geral, como segue:

Proposição 5.2. *Sejam ξ e η fibrados sobre o mesmo espaço base B , X um espaço topológico e $g : X \rightarrow B$ uma função contínua. Então, toda função $f : X \rightarrow E(\text{Hom}(\xi, \eta))$, tal que $\pi \circ f = g$, é contínua, onde $\pi : E(\text{Hom}(\xi, \eta)) \rightarrow B$ é a projeção do fibrado $\text{Hom}(\xi, \eta)$.*

Demonstração. Considere $O \subset E(\text{Hom}(\xi, \eta))$ um aberto arbitrário. Da topologia de $E(\text{Hom}(\xi, \eta))$, segue que $O = \pi^+(A)$ para algum $A \subset B$ aberto. Como g é contínua, então $g^+(A) \subset X$ é aberto. Logo, $f^+(O) = f^+(\pi^+(A)) = g^+(A) \subset X$ é aberto.

Portanto, f é contínua. □

Proposição 5.3. *Sejam ξ um \mathbb{R}^n -fibrado, η_1 um \mathbb{R}^{m_1} -fibrado e η_2 um \mathbb{R}^{m_2} -fibrado, ambos sobre o mesmo espaço base B . Então, $\text{Hom}(\xi, \eta_1) \oplus \text{Hom}(\xi, \eta_2) \cong \text{Hom}(\xi, \eta_1 \oplus \eta_2)$.*

Demonstração. Inicialmente, note que se $(b, (T_1, T_2)) \in E(\text{Hom}(\xi, \eta_1) \oplus \text{Hom}(\xi, \eta_2))$, então $T_1 : F_b(\xi) \rightarrow F_b(\eta_1)$ e $T_2 : F_b(\xi) \rightarrow F_b(\eta_2)$. Deste modo, defina $f : E(\text{Hom}(\xi, \eta_1) \oplus \text{Hom}(\xi, \eta_2)) \rightarrow E(\text{Hom}(\xi, \eta_1 \oplus \eta_2))$ por $f(b, (T_1, T_2)) = T$ para todo $(b, (T_1, T_2)) \in E(\text{Hom}(\xi, \eta_1) \oplus \text{Hom}(\xi, \eta_2))$, onde $T : F_b(\xi) \rightarrow F_b(\eta_1 \oplus \eta_2) = \{b\} \times F_b(\eta_1) \times F_b(\eta_2)$ é definida por $T(x) = (x, T_1(x), T_2(x))$ para todo $x \in F_b(\xi)$.

Note que f está bem definida, pois T é linear, uma vez que T_1 e T_2 o são. Logo, segue da Proposição anterior que f é contínua, pois $\pi \circ f = \pi_1$, onde π e π_1 são as projeções dos fibrados $\text{Hom}(\xi, \eta_1 \oplus \eta_2)$ e $\text{Hom}(\xi, \eta_1) \oplus \text{Hom}(\xi, \eta_2)$, respectivamente.

Como $F_b(\eta_1 \oplus \eta_2) = \{b\} \times F_b(\eta_1) \times F_b(\eta_2)$, então $f|_{\{b\} \times \text{Hom}(F_b(\xi), F_b(\eta_1)) \times \text{Hom}(F_b(\xi), F_b(\eta_2))} : \{b\} \times \text{Hom}(F_b(\xi), F_b(\eta_1)) \times \text{Hom}(F_b(\xi), F_b(\eta_2)) \rightarrow \text{Hom}(F_b(\xi), F_b(\eta_1 \oplus \eta_2))$ dada por $f|_{\{b\} \times \text{Hom}(F_b(\xi), F_b(\eta_1)) \times \text{Hom}(F_b(\xi), F_b(\eta_2))}(b, T_1, T_2) = T$, onde $T : F_b(\xi) \rightarrow \{b\} \times F_b(\eta_1) \times F_b(\eta_2)$ é dada por $T(x) = (b, T_1(x), T_2(x))$, é um isomorfismo linear. De fato:

- $f|_{\{b\} \times \text{Hom}(F_b(\xi), F_b(\eta_1)) \times \text{Hom}(F_b(\xi), F_b(\eta_2))}$ é linear, desde que T_1 e T_2 o são;
- se $f|_{\{b\} \times \text{Hom}(F_b(\xi), F_b(\eta_1)) \times \text{Hom}(F_b(\xi), F_b(\eta_2))}(b, T_1, T_2) = 0$, então $T = 0$.
Assim $(b, T_1(x), T_2(x)) = (b, 0, 0)$ para todo $x \in F_b(\xi)$, ou seja, $T_1 = 0 = T_2$ isto é, $\text{Ker}(f|_{\{b\} \times \text{Hom}(F_b(\xi), F_b(\eta_1)) \times \text{Hom}(F_b(\xi), F_b(\eta_2))}) = 0$;
- como $\dim(\{b\} \times \text{Hom}(F_b(\xi), F_b(\eta_1)) \times \text{Hom}(F_b(\xi), F_b(\eta_2))) = nm_1 + nm_2 = n(m_1 + m_2) = \dim(\text{Hom}(F_b(\xi), F_b(\eta_1 \oplus \eta_2)))$, então segue do Teorema do Núcleo e da Imagem que $f|_{\{b\} \times \text{Hom}(F_b(\xi), F_b(\eta_1)) \times \text{Hom}(F_b(\xi), F_b(\eta_2))}$ é bijetora.

Portanto, o Lema 4.2 nos garante que f é um homeomorfismo, ou seja, $\text{Hom}(\xi, \eta_1) \oplus \text{Hom}(\xi, \eta_2) \cong \text{Hom}(\xi, \eta_1 \oplus \eta_2)$. \square

Proposição 5.4. *Sejam ξ um \mathbb{R}^n -fibrado e η um \mathbb{R}^m -fibrado, ambos sobre o mesmo espaço base B . Se $\eta \cong \varepsilon_B^m$, então $\text{Hom}(\xi, \eta) \cong \text{Hom}(\xi, \varepsilon_B^m)$.*

Demonstração. Como $\eta \cong \varepsilon_B^m$, então existe um homeomorfismo $h : E(\eta) \rightarrow B \times \mathbb{R}^m$ tal que $h|_{F_b(\eta)} : F_b(\eta) \rightarrow \{b\} \times \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo linear. Assim, defina $f : E(\text{Hom}(\xi, \eta)) \rightarrow E(\text{Hom}(\xi, \varepsilon_B^m))$ por $f(T) = T'$, onde $T \in \text{Hom}(F_b(\xi), F_b(\eta))$ para um único $b \in B$ e $T' : F_b(\xi) \rightarrow \{b\} \times \mathbb{R}^m$ é definido por $T'(x) = (b, h|_{F_b(\xi)}(x))$ para qualquer $x \in F_b(\xi)$.

Note que f está bem definida pois $h|_{F_b(\eta)}$ é linear. Ainda, segue da Proposição 5.2 que f é contínua, uma vez que $\pi \circ f = \pi_1$, onde π e π_1 são as projeções dos fibrados $\text{Hom}(\xi, \varepsilon_B^m)$ e $\text{Hom}(\xi, \eta)$, respectivamente.

Por fim, $f|_{\text{Hom}(F_b(\xi), F_b(\eta))} : \text{Hom}(F_b(\xi), F_b(\eta)) \rightarrow \text{Hom}(F_b(\xi), B \times \mathbb{R}^m)$ dado por $f|_{\text{Hom}(F_b(\xi), F_b(\eta))}(T) = T'$, onde $T' : F_b(\xi) \rightarrow \{b\} \times \mathbb{R}^m$ é dado por $T'(x) = (b, h|_{F_b(\xi)}(x))$ para qualquer $x \in F_b(\xi)$, é um isomorfismo linear, pois $h|_{F_b(\xi)}$ o é.

Portanto, segue do Lema 4.2 que f é um homeomorfismo, isto é, $\text{Hom}(\xi, \eta) \cong \text{Hom}(\xi, \varepsilon_B^m)$. \square

Proposição 5.5. *Se ξ é um fibrado Euclidiano, então $\xi \cong Hom(\xi, \varepsilon_{B(\xi)}^1)$.*

Demonstração. Inicialmente, defina $f : E(\xi) \rightarrow E(Hom(\xi, \varepsilon_{B(\xi)}^1))$ por $f(x) = T$ para todo $x \in E(\xi)$, onde $T : F_{\pi_\xi(x)}(\xi) \rightarrow \{\pi_\xi(x)\} \times \mathbb{R}$ é definido por $T(v) = (\pi_\xi(x), \langle v, x \rangle)$ para qualquer $v \in F_{\pi_\xi(x)}(\xi)$.

Note que f está bem definido, uma vez que o produto interno é bilinear. Ainda, segue da Proposição 5.2 que f é contínua, pois $\pi \circ f = \pi_\xi$, onde π é a projeção do fibrado $Hom(\xi, \varepsilon_{B(\xi)}^1)$.

Por fim, $f|_{F_b(\xi)} : F_b(\xi) \rightarrow Hom(F_b(\xi), \{b\} \times \mathbb{R})$ dado por $f(x) = T$ para todo $x \in F_b(\xi)$, onde $T : F_b(\xi) \rightarrow \{b\} \times \mathbb{R}$ é dado por $T(v) = (\pi_\xi(x), \langle v, x \rangle)$ para qualquer $v \in F_b(\xi)$, é um isomorfismo linear, pois:

- $f|_{F_b(\xi)}$ é linear, desde que o produto interno é bilinear;
- se $f|_{F_b(\xi)}(x) = 0$, então $T = 0$, ou seja, $(\pi_\xi(x), \langle v, x \rangle) = (\pi_\xi(x), 0)$ para todo $v \in F_b(\xi)$, isto é, $x = 0$. Então, $Ker(f|_{F_b(\xi)}) = 0$;
- como $dim(F_b(\xi)) = dim(Hom(F_b(\xi), \{b\} \times \mathbb{R}))$, então segue do Teorema do Núcleo e da Imagem que $f|_{F_b(\xi)}$ é bijeção.

Portanto, segue do Lema 4.2 que f é um homeomorfismo, ou seja, $\xi \cong Hom(\xi, \varepsilon_{B(\xi)}^1)$. □

6 Classes de Stiefel-Whitney

Neste capítulo, iniciaremos o estudo de classes características introduzindo quatro axiomas que caracterizam as classes de cohomologia de Stiefel-Whitney de um fibrado vetorial. A existência e unicidade destas classes de cohomologia satisfazendo estes quatro axiomas será provada nos capítulos 7 e 8, respectivamente.

As definições e resultados sobre cohomologia singular, que serão utilizadas em sua maior parte neste capítulo, são apresentadas no Apêndice A. Também usaremos algumas propriedades envolvendo os coeficientes binomiais módulo dois que são encontradas no Apêndice C.

6.1 Classes de Stiefel-Whitney

Inicialmente, veremos uma descrição axiomática das classes de Stiefel-Whitney.

Os axiomas são:

Axioma 1: A cada \mathbb{R}^n -fibrado vetorial ξ , existe uma sequência de classes de cohomologia singular $w_i(\xi) \in H^i(B(\xi); \mathbb{Z}_2)$, $i = 0, 1, \dots$, chamadas de classes de Stiefel-Whitney de ξ , que satisfazem:

i) $w_0(\xi) = 1 \in H^0(B(\xi); \mathbb{Z}_2)$;

ii) $w_i(\xi) = 0$, para $i > n$.

Axioma 2 (Naturalidade) Se ξ e η são fibrados vetoriais tais que $\xi \cong \bar{f}^* \eta$, para alguma aplicação fibrada $f : E(\xi) \rightarrow E(\eta)$, então $w_i(\xi) = \bar{f}_i^*(w_i(\eta))$, para qualquer $i \geq 0$.

Axioma 3 (Teorema do Produto de Whitney) Se ξ e η são fibrados vetoriais sobre o mesmo espaço base, então $w_k(\xi \oplus \eta) = \sum_{i=0}^k w_i(\xi) \smile w_{k-i}(\eta)$, para qualquer $k \geq 0$.

Axioma 4: Para o fibrado linha canônico γ_1^1 sobre $\mathbb{R}P^1$, temos $w_1(\gamma_1^1) = b \neq 0$, onde $\langle b \rangle = H^1(\mathbb{R}P^1; \mathbb{Z}_2)$.

Para que determinadas classes de cohomologia singular sejam classes de Stiefel-Whitney, é necessário que elas satisfaçam estes quatro axiomas, entretanto, não é trivial definir classes de cohomologia singular os satisfazendo.

Neste momento, assumiremos válidos os quatro axiomas e veremos algumas de suas consequências e aplicações.

Proposição 6.1. *Se ξ e η são fibrados sobre o mesmo espaço base B tais que $\xi \cong \eta$, então $w_i(\xi) = w_i(\eta)$, para qualquer $i \geq 0$.*

Demonstração. Como $\xi \cong \eta$, então existe um homeomorfismo $f : E(\xi) \rightarrow E(\eta)$ tal que, para todo $b \in B$, temos $f(F_b(\xi)) \subset F_b(\eta)$, $f|_{F_b(\xi)} : F_b(\xi) \rightarrow F_b(\eta)$ é um isomorfismo linear e o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} E(\xi) & \xrightarrow{f} & E(\eta) \\ & \searrow \pi_\xi & \swarrow \pi_\eta \\ & & B \end{array}$$

Como f é uma aplicação fibrada de ξ em η , então a aplicação correspondente de f nos espaços bases deve ser necessariamente a identidade $1_B : B \rightarrow B$.

Assim, segue do Lema 5.2 que $\xi \cong 1_B^* \eta$. Deste modo, segue do Axioma 2 que $w_i(\xi) = (1_B)_i^*(w_i(\eta)) = w_i(\eta)$, para qualquer $i \geq 0$. \square

Proposição 6.2. *Se ξ é um fibrado trivial, então $w_i(\xi) = 0$, para $i > 0$.*

Demonstração. Como ξ é um fibrado trivial, então $\xi \cong \varepsilon_{B(\xi)}^n$, para algum inteiro $n \geq 0$. Assim, mostremos que $w_i(\varepsilon_{B(\xi)}^n) = 0$, para $i > 0$.

Para tanto, fixado $*$ em $B(\xi)$ qualquer, defina $f : B(\xi) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \{*\} \times \mathbb{R}^n$ por $f(b, \alpha) = (*, \alpha)$, para todo $(b, \alpha) \in B(\xi) \times \mathbb{R}^n$. Então, f é contínua e $f|_{\{b\} \times \mathbb{R}^n} : \{b\} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \{*\} \times \mathbb{R}^n$ dada por $f|_{\{b\} \times \mathbb{R}^n}(b, \alpha) = (*, \alpha)$, para todo $(b, \alpha) \in \{b\} \times \mathbb{R}^n$, é um isomorfismo linear para todo $b \in B(\xi)$.

Logo, f é uma aplicação fibrada de $\varepsilon_{B(\xi)}^n$ em $\varepsilon_{\{*\}}^n$ e a aplicação constante $c : B(\xi) \rightarrow \{*\}$ é a aplicação correspondente de f nos espaços bases. Então, $\varepsilon_{B(\xi)}^n \cong c^* \varepsilon_{\{*\}}^n$.

Deste modo, segue do Axioma 2 que $w_i(\varepsilon_{B(\xi)}^n) = c_i^*(w_i(\varepsilon_{\{*\}}^n))$. Por outro lado, $c_i^* : H^i(\{*\}; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^i(B(\xi); \mathbb{Z}_2)$ é a aplicação nula para $i > 0$, uma vez que $H^i(\{*\}; \mathbb{Z}_2) = 0$ para $i > 0$. Assim, $c_i^*(w_i(\varepsilon_{\{*\}}^n)) = 0$

Logo, como $\xi \cong \varepsilon_{B(\xi)}^n$, segue da Proposição anterior que $w_i(\xi) = w_i(\varepsilon_{B(\xi)}^n) = c_i^*(w_i(\varepsilon_{\{*\}}^n)) = 0$ para $i > 0$. \square

Em particular, se $\xi \oplus \eta$ é trivial, então $w_k(\xi \oplus \eta) = \sum_{i=0}^k w_i(\xi) \smile w_{k-i}(\eta) = 0$, para $k > 0$, ou seja, as relações

$$w_1(\xi) + w_1(\eta) = 0$$

$$w_2(\xi) + w_1(\xi) \smile w_1(\eta) + w_2(\eta) = 0$$

$$w_3(\xi) + w_2(\xi) \smile w_1(\eta) + w_1(\xi) \smile w_2(\eta) + w_3(\eta) = 0, \text{ etc}$$

podem ser resolvidas indutivamente, sendo assim, $w_i(\eta)$ pode ser expresso como um polinômio nas classes de Stiefel-Whitney de ξ .

Proposição 6.3. *Se ξ e η são fibrados sobre o mesmo espaço base B tais que ξ é trivial, então $w_k(\xi \oplus \eta) = w_k(\eta)$, para qualquer $k \geq 0$.*

Demonstração. Primeiramente, veja que:

$$w_0(\xi \oplus \eta) = w_0(\xi) \smile w_0(\eta) = 1 \smile w_0(\eta) = w_0(\eta).$$

Agora, para $k > 0$ temos:

$$\begin{aligned} w_k(\xi \oplus \eta) &= \sum_{i=0}^k w_i(\xi) \smile w_{k-i}(\eta) \\ &= 1 \smile w_k(\eta) + \sum_{i=1}^k w_i(\xi) \smile w_{k-i}(\eta) \\ &= w_k(\eta) + 0 \\ &= w_k(\eta) \end{aligned}$$

Portanto, $w_k(\xi \oplus \eta) = w_k(\eta)$, para qualquer $k \geq 0$. □

Proposição 6.4. *Se ξ é um \mathbb{R}^n -fibrado Euclidiano e possui k seções linearmente independentes, com $1 \leq k \leq n$, então:*

$$w_{n-k+1}(\xi) = w_{n-k+2}(\xi) = \dots = w_n(\xi) = 0$$

Em particular, se ξ possui uma seção não nula, então $w_n(\xi) = 0$.

Demonstração. Se ξ admite k seções linearmente independentes, segue do Teorema 4.2 que existe um \mathbb{R}^k -subfibrado trivial de ξ , digamos ε .

Deste modo, como ξ é um \mathbb{R}^n -fibrado Euclidiano, então $\xi \cong \varepsilon \oplus \varepsilon^\perp$, onde ε^\perp é um \mathbb{R}^{n-k} -fibrado. Assim, temos que $w_i(\xi) = w_i(\varepsilon \oplus \varepsilon^\perp) = w_i(\varepsilon^\perp)$, para qualquer $i \geq 0$.

Sendo ε^\perp um \mathbb{R}^{n-k} -fibrado, concluímos que $w_i(\xi) = w_i(\varepsilon^\perp) = 0$, para $i > n-k$. □

Proposição 6.5. *Sejam ξ e η fibrados. Então, $w_k(\xi \times \eta) = \sum_{i=0}^k w_i(\xi) \times w_{k-i}(\eta)$.*

Demonstração. Considere as projeções canônicas $p_1 : B(\xi) \times B(\eta) \rightarrow B(\xi)$ e $p_2 : B(\xi) \times B(\eta) \rightarrow B(\eta)$. Mostremos primeiramente que $\xi \times \eta \cong p_1^*\xi \oplus p_2^*\eta$. Para isto, considere os seguintes diagramas comutativos:

$$\begin{array}{ccc} E(p_1^*\xi) & \longrightarrow & E(\xi) \\ \downarrow & & \downarrow \pi_\xi \\ B(\xi) \times B(\eta) & \xrightarrow{p_1} & B(\xi) \end{array}$$

onde $E(p_1^*\xi) = \{((b_1, b_2), x) \in (B(\xi) \times B(\eta)) \times E(\xi) : \pi_\xi(x) = b_1\}$;

$$\begin{array}{ccc} E(p_2^*\eta) & \longrightarrow & E(\eta) \\ \downarrow & & \downarrow \pi_\eta \\ B(\xi) \times B(\eta) & \xrightarrow{p_2} & B(\eta) \end{array}$$

onde $E(p_2^*\eta) = \{((b_1, b_2), y) \in (B(\xi) \times B(\eta)) \times E(\eta) : \pi_\eta(y) = b_2\}$;

$$\begin{array}{ccc} E(p_1^*\xi \oplus p_2^*\eta) & \longrightarrow & E(p_1^*\xi) \times E(p_2^*\eta) \\ \downarrow & & \downarrow \pi_{p_1^*\xi \times p_2^*\eta} \\ B(\xi) \times B(\eta) & \xrightarrow{d} & (B(\xi) \times B(\eta)) \times (B(\xi) \times B(\eta)) \end{array}$$

onde $E(p_1^*\xi \oplus p_2^*\eta) = \{((b_1, b_2), (b_3, b_4, x), (b_5, b_6, y)) \in (B(\xi) \times B(\eta)) \times E(p_1^*\xi) \times E(p_2^*\eta) : b_1 = b_3 = b_5 \text{ e } b_2 = b_4 = b_6\}$.

Lembrando que $E(\xi \times \eta) = E(\xi) \times E(\eta)$, defina $f : E(\xi \times \eta) \rightarrow E(p_1^*\xi \oplus p_2^*\eta)$ por $f(x, y) = ((\pi_\xi(x), \pi_\eta(y)), (\pi_\xi(x), \pi_\eta(y), x), (\pi_\xi(x), \pi_\eta(y), y))$ para qualquer $(x, y) \in E(\xi \times \eta)$.

Deste modo, f está bem definida pela própria definição de $E(p_1^*\xi \oplus p_2^*\eta)$ e é contínua. Ainda, como $F_{(b_1, b_2)}(\xi \times \eta) = F_{b_1}(\xi) \times F_{b_2}(\eta)$ e $F_{(b_1, b_2)}(p_1^*\xi \oplus p_2^*\eta) = \{(b_1, b_2)\} \times F_{(b_1, b_2)}(p_1^*\xi) \times F_{(b_1, b_2)}(p_2^*\eta) = \{(b_1, b_2)\} \times (\{(b_1, b_2)\} \times F_{b_1}(\xi)) \times (\{(b_1, b_2)\} \times F_{b_2}(\eta))$ para todo $(b_1, b_2) \in B(\xi \times \eta)$, então $f|_{F_{(b_1, b_2)}(\xi \times \eta)} : F_{(b_1, b_2)}(\xi \times \eta) \rightarrow F_{(b_1, b_2)}(p_1^*\xi \oplus p_2^*\eta)$ dada por $f|_{F_{(b_1, b_2)}(\xi \times \eta)}(x, y) = ((b_1, b_2), (b_1, b_2, x), (b_1, b_2, y))$, para todo $(x, y) \in F_{(b_1, b_2)}(\xi \times \eta)$, é um isomorfismo linear.

Logo, segue do Lema 4.2 que f é um homeomorfismo, ou seja, $\xi \times \eta \cong p_1^*\xi \oplus p_2^*\eta$. Por fim, os Axiomas 2,3 e a Proposição 6.1 nos garante para qualquer $k \geq 0$ que:

$$w_k(\xi \times \eta) = w_k(p_1^*\xi \oplus p_2^*\eta)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^k w_i(p_1^*\xi) \smile w_{k-i}(p_2^*\eta) \\
&= \sum_{i=0}^k (p_1)_i^*(w_i(\xi)) \smile (p_2)_{k-i}^*(w_{k-i}(\eta)) \\
&= \sum_{i=0}^k (w_i(\xi) \times 1) \smile (1 \times w_{k-i}(\eta)) \\
&= \sum_{i=0}^k (w_i(\xi) \smile 1) \times (1 \smile w_{k-i}(\eta)) \\
&= \sum_{i=0}^k w_i(\xi) \times w_{k-i}(\eta). \quad \square
\end{aligned}$$

Definição 6.1. Denotaremos por $H^*(B(\xi); \mathbb{Z}_2)$ o anel das séries infinitas formais $a = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$, onde $a_i \in H^i(B(\xi); \mathbb{Z}_2)$ para cada $i = 0, 1, 2, \dots$. A operação soma deste anel é dada por $(a_0 + a_1 + a_2 + \dots) + (b_0 + b_1 + b_2 + \dots) = c_0 + c_1 + c_2 + \dots$, onde $c_k = a_k + b_k$ para cada $k = 0, 1, 2, \dots$. Ainda, a operação produto deste anel é dada por $(a_0 + a_1 + a_2 + \dots)(b_0 + b_1 + b_2 + \dots) = c_0 + c_1 + c_2 + \dots$, onde $c_k = \sum_{i=0}^k a_i \smile b_{k-i}$ para cada $k = 0, 1, 2, \dots$.

Note que o produto definido acima é associativo e comutativo.

Definição 6.2. A classe de Stiefel-Whitney total de um \mathbb{R}^n -fibrado ξ é o elemento $W(\xi) = 1 + w_1(\xi) + w_2(\xi) + \dots + w_n(\xi) + 0 + 0 + \dots \in H^*(B(\xi); \mathbb{Z}_2)$.

Deste modo, o Axioma 3 pode ser reescrito como $W(\xi \oplus \eta) = W(\xi)W(\eta)$.

Lema 6.1. O subconjunto $\{w = w_0 + w_1 + w_2 + \dots \in H^*(B(\xi); \mathbb{Z}_2) : w_0 = 1\} \subset H^*(B(\xi); \mathbb{Z}_2)$ é um grupo abeliano com a operação produto definida acima (este grupo é exatamente o grupo das unidades do anel $H^*(B(\xi); \mathbb{Z}_2)$).

Demonstração. Basta provarmos a existência do elemento inverso de $w = 1 + w_1 + w_2 + \dots \in H^*(B(\xi); \mathbb{Z}_2)$ qualquer, pois já sabemos que esta operação produto é associativa, comutativa e com elemento neutro $1 + 0 + 0 + \dots \in H^*(B(\xi); \mathbb{Z}_2)$.

Para tanto, defina $\bar{w} = \bar{w}_0 + \bar{w}_1 + \bar{w}_2 + \dots$, onde $\bar{w}_0 = 1$ e $\bar{w}_k = \sum_{i=1}^k w_i \smile \bar{w}_{k-i}$ para cada $k \geq 1$.

$$\text{Então, } w\bar{w} = c_0 + c_1 + c_2 + \dots, \text{ onde } c_k = \sum_{i=0}^k w_i \smile \bar{w}_{k-i} = \begin{cases} 1 & , k = 0 \\ 0 & , k \geq 1 \end{cases}$$

De fato:

- para $k = 0$, temos que:
 $c_0 = w_0 \smile \bar{w}_0 = 1 \smile 1 = 1$

- para $k \geq 1$, temos que:

$$c_k = \sum_{i=0}^k w_i \smile \bar{w}_{k-i}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 \smile \bar{w}_k + \sum_{i=1}^k w_i \smile \bar{w}_{k-i} \\
&= \bar{w}_k + \sum_{i=1}^k w_i \smile \bar{w}_{k-i} \\
&= \sum_{i=1}^k w_i \smile \bar{w}_{k-i} + \sum_{i=1}^k w_i \smile \bar{w}_{k-i} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Logo, \bar{w} é, de fato, o elemento inverso de w em $H^*(B(\xi); \mathbb{Z}_2)$, isto é, $\{w = w_0 + w_1 + w_2 + \dots \in H^*(B(\xi); \mathbb{Z}_2) : w_0 = 1\}$ é um grupo abeliano com a operação produto. \square

Agora, a igualdade $W(\xi \oplus \eta) = W(\xi)W(\eta)$ pode ser reescrita como $W(\eta) = \bar{W}(\xi)W(\xi \oplus \eta)$, onde $\bar{W}(\xi) = 1 + \bar{w}_1(\xi) + \bar{w}_2(\xi) + \dots + \bar{w}_n(\xi) + 0 + 0 + \dots$, com \bar{w}_i definido como na demonstração do Lema anterior.

Nestas condições, podemos garantir o seguinte:

Corolário 6.1. *Se $\xi \oplus \eta$ for um fibrado trivial, então $W(\eta) = \bar{W}(\xi)$.*

Teorema 6.1. (Teorema da Dualidade de Whitney) *Se $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma k -variedade C^∞ , então $w_i(\tau_M) = \bar{w}_i(\nu_M)$ para todo $i \geq 0$.*

Demonstração. Como visto no exemplo 5.7, temos que $\varepsilon_M^n \cong \tau_M \oplus \nu_M$. Então, $\tau_M \oplus \nu_M$ é um fibrado trivial, ou seja, $W(\tau_M) = \bar{W}(\nu_M)$, isto é, $w_i(\tau_M) = \bar{w}_i(\nu_M)$ para todo $i \geq 0$. \square

Agora, calcularemos as classes de Stiefel-Whitney de alguns casos especiais.

Quando $M \subset \mathbb{R}^n$ for uma variedade C^∞ , denotaremos $w_i(M) = w_i(\tau_M)$ para todo $i \geq 0$ e $W(M) = W(\tau_M)$.

Exemplo 6.1. $W(S^n) = 1$

Como $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma n -variedade C^∞ , então $\tau_{S^n} \oplus \nu_{S^n} \cong \varepsilon_{S^n}^{n+1}$. Deste modo, $w_i(S^n) = \bar{w}_i(\nu_{S^n})$ para todo $i \geq 0$.

Mostremos que ν_{S^n} é um fibrado trivial. Primeiramente, como $\dim(T_x S^n)^\perp = 1$ e $x \in S^n$ é um vetor normal de $T_x S^n$ para todo $x \in S^n$, então $x \in (T_x S^n)^\perp$ para todo $x \in S^n$.

Deste modo, defina $s : S^n \rightarrow E(\nu_{S^n})$ por $s(x) = (x, x)$ para todo $x \in S^n$. Observe que s está bem definida, é contínua e é uma seção não nula de ν_{S^n} , desde que $x \neq 0$ para todo $x \in S^n$. Logo, segue do Teorema 4.2 que ν_{S^n} é um fibrado trivial.

Logo, $w_0(\nu_{S^n}) = 1$ e $w_i(\nu_{S^n}) = 0$ para todo $i \geq 1$. Como $\bar{w}_0(\nu_{S^n}) = 1$ e $\bar{w}_k(\nu_{S^n}) = \sum_{i=1}^k w_i(\nu_{S^n}) \smile \bar{w}_{k-i}(\nu_{S^n}) = 0$ para todo $k \geq 1$, então $w_0(S^n) = 1$ e $w_i(S^n) = 0$ para todo $i \geq 1$, isto é, $W(S^n) = 1$.

Exemplo 6.2. $W(\gamma_n^1) = 1 + a$, para $n \geq 1$, onde $\langle a \rangle = H^1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$.

Considere a inclusão $i : E(\gamma_1^1) \hookrightarrow E(\gamma_n^1)$, que é uma aplicação fibrada de γ_1^1 em γ_n^1 e a inclusão $j : \mathbb{R}P^1 \hookrightarrow \mathbb{R}P^n$ que a aplicação correspondente da aplicação i nos espaços bases.

Deste modo, $\gamma_1^1 \cong j^* \gamma_n^1$. Segue do Axioma 2 que $w_k(\gamma_1^1) = j_k^*(w_k(\gamma_n^1))$. Como γ_n^1 é um \mathbb{R} -fibrado, então $w_k(\gamma_n^1) = 0$ para todo $k > 1$.

Por outro lado, segue do Axioma 4 que $w_1(\gamma_1^1) = b \neq 0$, onde $\langle b \rangle = H^1(\mathbb{R}P^1; \mathbb{Z}_2)$, ou seja, $j_1^*(w_1(\gamma_n^1)) = b \neq 0$. Como j_1^* é linear e $w_1(\gamma_n^1) \in H^1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) = \langle a \rangle$, então $w_1(\gamma_n^1) = a$, isto é, $W(\gamma_n^1) = 1 + a$.

Exemplo 6.3. Inicialmente, note que, por definição, temos que $\gamma_n^1 \subset \varepsilon_{\mathbb{R}P^n}^{n+1}$. Deste modo, podemos considerar γ^\perp o complemento ortogonal de γ_n^1 em $\varepsilon_{\mathbb{R}P^n}^{n+1}$.

Então, $W(\gamma^\perp) = 1 + a + a^2 + \dots + a^n$.

De fato, como $\gamma_n^1 \oplus \gamma^\perp \cong \varepsilon_{\mathbb{R}P^n}^{n+1}$, então $\gamma_n^1 \oplus \gamma^\perp$ é um fibrado trivial, ou seja, $W(\gamma^\perp) = \overline{W}(\gamma_n^1)$. Sendo γ^\perp um \mathbb{R}^n -fibrado, devemos calcular apenas $w_i(\gamma^\perp)$ para $i = 1, \dots, n$.

Lembrando que $W(\gamma_n^1) = 1 + a$, temos que:

$$\begin{aligned} \overline{w}_k(\gamma_n^1) &= \sum_{i=1}^k w_i(\gamma_n^1) \smile \overline{w}_{k-i}(\gamma_n^1) \\ &= w_1(\gamma_n^1) \smile \overline{w}_{k-1}(\gamma_n^1). \end{aligned}$$

Mostremos, por indução sobre $k > 0$, que $\overline{w}_k(\gamma_n^1) = a^k$. Com efeito, veja que $\overline{w}_1(\gamma_n^1) = w_1(\gamma_n^1) \smile \overline{w}_0(\gamma_n^1) = w_1(\gamma_n^1) \smile 1 = w_1(\gamma_n^1) = a$. Agora, supondo que $\overline{w}_k(\gamma_n^1) = a^k$, obtemos que $\overline{w}_{k+1}(\gamma_n^1) = w_1(\gamma_n^1) \smile \overline{w}_k(\gamma_n^1) = a \smile a^k = a^{k+1}$.

Como $w_k(\gamma^\perp) = \overline{w}_k(\gamma_n^1) = a^k$ e o Axioma 1 nos garante que $w_k(\gamma^\perp) = 0$ para todo $k > n$, então $W(\gamma^\perp) = 1 + a + a^2 + \dots + a^n$.

Lema 6.2. $\tau_{\mathbb{R}P^n} \cong \text{Hom}(\gamma_n^1, \gamma^\perp)$.

Demonstração. Considere $\rho : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ a projeção canônica. Como $\rho(x) = \rho(-x)$ para todo $x \in S^n$, então os pontos $(x, v), (-x, -v) \in TS^n$ possuem a mesma imagem pela função $d\rho : TS^n \rightarrow T\mathbb{R}P^n$. De fato, como

$$\begin{aligned} d_{-x}\rho(-v) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\rho(-x + t(-v)) - \rho(-x)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\rho(-(x + tv)) - \rho(-x)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\rho(x + tv) - \rho(x)}{t} \end{aligned}$$

$$= d_x \rho(v),$$

então $d\rho(-x, -v) = (\rho(-x), d_{-x}\rho(-v)) = (\rho(x), d_x\rho(v)) = d\rho(x, v)$.

Assim, $d\rho$ induz um homeomorfismo $\overline{d\rho} : \frac{TS^n}{\sim} \rightarrow T\mathbb{R}P^n$ dada por $\overline{d\rho}(\overline{(x, v)}) = d\rho(x, v)$ para todo $\overline{(x, v)} \in \frac{TS^n}{\sim}$, onde \sim é a relação que identifica (x, v) com $(-x, -v)$. Logo:

$$\begin{aligned} T\mathbb{R}P^n &\equiv \{\overline{(x, v)} : (x, v) \in TS^n\} \\ &= \{\{(x, v), (-x, -v)\} : \langle x, x \rangle = 1 \text{ e } \langle x, v \rangle = 0\} \end{aligned}$$

Denotando por L_x a reta, passando pela origem de \mathbb{R}^{n+1} , cujo vetor diretor é $x \in S^n$, temos que cada elemento $\{(x, v), (-x, -v)\} \in T\mathbb{R}P^n$ determina e é determinado pela transformação linear $l_{x,v} : L_x \rightarrow (L_x)^\perp$ definida por $l_{x,v}(y) = \langle y, x \rangle v$ para todo $y \in L_x$.

Como $L_x = F_{\overline{x}}(\gamma_n^1)$ e $(L_x)^\perp = F_{\overline{x}}(\gamma_n^\perp)$, então $l_{x,v} \in \text{Hom}(F_{\overline{x}}(\gamma_n^1), F_{\overline{x}}(\gamma_n^\perp))$. deste modo, defina $f : T\mathbb{R}P^n \rightarrow E(\text{Hom}(\gamma_n^1, \gamma_n^\perp))$ por $f(\overline{(x, v)}) = l_{x,v}$ para todo $\overline{(x, v)} \in T\mathbb{R}P^n$. Note que f está bem definida e o diagrama

$$\begin{array}{ccc} T\mathbb{R}P^n & \xrightarrow{f} & E(\text{Hom}(\gamma_n^1, \gamma_n^\perp)) \\ & \searrow \pi_{T\mathbb{R}P^n} & \swarrow \pi \\ & \mathbb{R}P^n & \end{array}$$

comuta, onde π é a projeção do fibrado $\text{Hom}(\gamma_n^1, \gamma_n^\perp)$. Deste modo, segue da Proposição 5.2 que f é contínua.

Ainda, $f|_{F_{\overline{x}}(\tau_{\mathbb{R}P^n})} : F_{\overline{x}}(\tau_{\mathbb{R}P^n}) \rightarrow \text{Hom}(F_{\overline{x}}(\gamma_n^1), F_{\overline{x}}(\gamma_n^\perp))$ dada por $f|_{F_{\overline{x}}(\tau_{\mathbb{R}P^n})}(\overline{(x, v)}) = f(\overline{(x, v)}) = l_{x,v}$ para todo $\overline{(x, v)} \in F_{\overline{x}}(\tau_{\mathbb{R}P^n}) = \{\overline{x}\} \times T_{\overline{x}}\mathbb{R}P^n$ é um isomorfismo linear. De fato:

- $f|_{F_{\overline{x}}(\tau_{\mathbb{R}P^n})}$ é linear, uma vez que $l_{x,v}$ o é.
- desde que $\dim(F_{\overline{x}}(\tau_{\mathbb{R}P^n})) = n = \dim(\text{Hom}(F_{\overline{x}}(\gamma_n^1), F_{\overline{x}}(\gamma_n^\perp)))$, precisamos verificar apenas que $f|_{F_{\overline{x}}(\tau_{\mathbb{R}P^n})}$ é injetora ou sobrejetora para mostrarmos que $f|_{F_{\overline{x}}(\tau_{\mathbb{R}P^n})}$ é um isomorfismo linear. Com efeito, veja que:

$$\begin{aligned} \text{Ker}(f|_{F_{\overline{x}}(\tau_{\mathbb{R}P^n})}) &= \{\overline{(x, v)} \in F_{\overline{x}}(\tau_{\mathbb{R}P^n}) : l_{x,v} = 0\} \\ &= \{\overline{(x, v)} \in F_{\overline{x}}(\tau_{\mathbb{R}P^n}) : \langle y, x \rangle v = 0, \forall y \in L_x\} \end{aligned}$$

Mas, se $\langle y, x \rangle v = 0$ para qualquer $y \in L_x$, obtemos, em particular para $y = x$, que $0 = \langle x, x \rangle v = v$, isto é, $\text{Ker}(f|_{F_{\overline{x}}(\tau_{\mathbb{R}P^n})}) = \{\overline{(x, 0)} \in F_{\overline{x}}(\tau_{\mathbb{R}P^n})\} = 0$.

Logo, segue do Lema 4.2 que f é um homeomorfismo, ou seja, $\tau_{\mathbb{R}P^n} \cong \text{Hom}(\gamma_n^1, \gamma_n^\perp)$. \square

Com o Lema acima, podemos calcular a classe de Stiefel-Whitney total do espaço mais utilizado neste trabalho, o espaço projetivo $\mathbb{R}P^n$.

Teorema 6.2. $\tau_{\mathbb{R}P^n} \oplus \varepsilon_{\mathbb{R}P^n}^1 \cong \underbrace{\gamma_n^1 \oplus \dots \oplus \gamma_n^1}_{(n+1)\text{-vezes}}$. Assim, a classe de Stiefel-Whitney total

de $\mathbb{R}P^n$ é $W(\mathbb{R}P^n) = (1 + a)^{n+1} = 1 + \binom{n+1}{1}a + \binom{n+1}{2}a^2 + \dots + \binom{n+1}{n}a^n$.

Demonstração. Inicialmente, note que $s : \mathbb{R}P^n \rightarrow E(\text{Hom}(\gamma_n^1, \gamma_n^1))$ dada por $s(\bar{x}) = 1_{F_{\bar{x}}(\gamma_n^1)}$ para todo $\bar{x} \in \mathbb{R}P^n$ é uma seção não nula do \mathbb{R} -fibrado $\text{Hom}(\gamma_n^1, \gamma_n^1)$, ou seja, segue do Teorema 4.2 que $\text{Hom}(\gamma_n^1, \gamma_n^1) \cong \varepsilon_{\mathbb{R}P^n}^1$.

Deste modo:

$$\begin{aligned} \tau_{\mathbb{R}P^n} \oplus \varepsilon_{\mathbb{R}P^n}^1 &\cong \text{Hom}(\gamma_n^1, \gamma^\perp) \oplus \text{Hom}(\gamma_n^1, \gamma_n^1) \\ &\cong \text{Hom}(\gamma_n^1, \gamma^\perp \oplus \gamma_n^1) \\ &\cong \text{Hom}(\gamma_n^1, \varepsilon_{\mathbb{R}P^n}^{n+1}) \\ &\cong \text{Hom}(\gamma_n^1, \underbrace{\varepsilon_{\mathbb{R}P^n}^1 \oplus \dots \oplus \varepsilon_{\mathbb{R}P^n}^1}_{(n+1)\text{-vezes}}) \\ &\cong \underbrace{\text{Hom}(\gamma_n^1, \varepsilon_{\mathbb{R}P^n}^1) \oplus \dots \oplus \text{Hom}(\gamma_n^1, \varepsilon_{\mathbb{R}P^n}^1)}_{(n+1)\text{-vezes}} \\ &\cong \underbrace{\gamma_n^1 \oplus \dots \oplus \gamma_n^1}_{(n+1)\text{-vezes}}. \end{aligned}$$

Por fim, $W(\mathbb{R}P^n) = W(\tau_{\mathbb{R}P^n} \oplus \varepsilon_{\mathbb{R}P^n}^1) = (1 + a)^{n+1} = 1 + \binom{n+1}{1}a + \binom{n+1}{2}a^2 + \dots + \binom{n+1}{n}a^n$. \square

Para facilitar o cálculo da classe de Stiefel-Whitney total de $\mathbb{R}P^n$, a Tabela 6.1 mostra os coeficientes binomiais $\binom{n+1}{i}$ módulo 2 para $n \leq 10$ e $0 \leq i \leq n$:

$\mathbb{R}P^1$	1	0									
$\mathbb{R}P^2$	1	1	1								
$\mathbb{R}P^3$	1	0	0	0							
$\mathbb{R}P^4$	1	1	0	0	1						
$\mathbb{R}P^5$	1	0	1	0	1	0					
$\mathbb{R}P^6$	1	1	1	1	1	1	1				
$\mathbb{R}P^7$	1	0	0	0	0	0	0	0			
$\mathbb{R}P^8$	1	1	0	0	0	0	0	0	1		
$\mathbb{R}P^9$	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	
$\mathbb{R}P^{10}$	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1
	w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}

Tabela 6.1: Classes de Stiefel-Whitney de alguns espaços Projetivos

Para exemplificar o Teorema anterior junto com a Tabela 6.1, temos:

$$W(\mathbb{R}P^1) = 1$$

$$W(\mathbb{R}P^2) = 1 + a + a^2$$

$$W(\mathbb{R}P^3) = 1$$

$$W(\mathbb{R}P^4) = 1 + a + a^4$$

$$W(\mathbb{R}P^5) = 1 + a^2 + a^4.$$

Exemplo 6.4. Se $n + 1 = 2^r m$, para algum inteiro $r \geq 1$ e algum ímpar $m \geq 1$, então $\mathbb{R}P^n$ não admite 2^r campo de vetores linearmente independentes, ou seja, o fibrado $\tau_{\mathbb{R}P^n}$ não admite 2^r seções linearmente independentes.

Com efeito, suponha que existam 2^r seções linearmente independentes de $\tau_{\mathbb{R}P^n}$. Então, segue do Teorema 4.2 que existe um \mathbb{R}^{2^r} -subfibrado trivial de $\tau_{\mathbb{R}P^n}$. Então, $\tau_{\mathbb{R}P^n} \cong \varepsilon_{\mathbb{R}P^n}^{2^r} \oplus (\varepsilon_{\mathbb{R}P^n}^{2^r})^\perp$, ou seja, $W(\mathbb{R}P^n) = W((\varepsilon_{\mathbb{R}P^n}^{2^r})^\perp)$. Deste modo, segue do Axioma 1 que $w_i(\mathbb{R}P^n) = 0$ para todo $i > n - 2^r = 2^r m - 1 - 2^r = 2^r(m - 1) - 1$.

Em particular, $w_{2^r(m-1)}(\mathbb{R}P^n) = 0$. Mas, por outro lado temos:

$$\begin{aligned} w_{2^r(m-1)}(\mathbb{R}P^n) &= \binom{n+1}{2^r(m-1)} a^{2^r(m-1)} = \binom{2^r m}{2^r(m-1)} a^{2^r(m-1)} = \binom{2^r m}{2^r m - 2^r} a^{2^r(m-1)} \\ &= \binom{2^r m}{2^r} a^{2^r(m-1)} = m a^{2^r(m-1)} = a^{2^r(m-1)} \neq 0, \end{aligned}$$

desde que $1 \leq 2^r$, pois com isso obtemos $2^r(m - 1) = 2^r m - 2^r \leq 2^r m - 1 = n$, ou seja, $\langle a^{2^r(m-1)} \rangle = H^{2^r(m-1)}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$. Logo, chegamos em um absurdo.

Portanto, $\mathbb{R}P^n$ não admite 2^r campo de vetores linearmente independentes, desde que $n + 1 = 2^r m$, para algum inteiro $r \geq 1$ e algum ímpar $m \geq 1$.

Nos próximos dois resultados, veremos quais condições são necessárias para que os espaços projetivos reais sejam paralelizáveis, conforme a Definição 4.6.

Corolário 6.2. $W(\mathbb{R}P^n) = 1$ se, e somente se, $n + 1$ é potência de 2. Assim, os possíveis espaços projetivos paralelizáveis são: $\mathbb{R}P^1, \mathbb{R}P^3, \mathbb{R}P^7, \mathbb{R}P^{15}, \dots$.

Demonstração. Inicialmente, suponha que $n + 1$ não seja potência de 2, isto é, $n + 1 = 2^r m$, para algum inteiro $r \geq 0$ e $m > 1$ ímpar.

Deste modo:

$$\begin{aligned} W(\mathbb{R}P^n) &= (1 + a)^{n+1} = (1 + a)^{2^r m} \\ &= [1 + \binom{2^r}{1} a + \binom{2^r}{2} a^2 + \dots + \binom{2^r}{2^r-1} a^{2^r-1} + a^{2^r}]^m \\ &= (1 + a^{2^r})^m \end{aligned}$$

$$= 1 + ma^{2^r} + \binom{m}{2}(a^{2^r})^2 + \dots + \binom{m}{m-1}(a^{2^r})^{m-1} + (a^{2^r})^m \neq 1,$$

desde que $m > 1$ é ímpar e $2^r < n + 1$, pois se $1 < m$, então $2^r < 2^r m = n + 1$. Logo, $W(\mathbb{R}P^n) \neq 1$, o que é um absurdo por hipótese.

Portanto, $n + 1$ deve ser uma potência de 2.

Reciprocamente, suponha que $n + 1$ seja uma potência de 2, isto é, $n + 1 = 2^r$ para algum inteiro $r \geq 1$. Então:

$$W(\mathbb{R}P^n) = (1 + a)^{n+1} = (1 + a)^{2^r} = 1 + a^{2^r} = 1 + a^{n+1} = 1, \text{ pois } a^{n+1} \in H^{n+1}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) = 0. \quad \square$$

Teorema 6.3. (Teorema de Stiefel): *Suponha que exista uma operação produto bilinear $p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sem divisores de zero. Então, o espaço projetivo $\mathbb{R}P^{n-1}$ é paralelizável, desde que n seja uma potência de 2.*

Demonstração. Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ a base canônica de \mathbb{R}^n . Definindo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $f(x) = p(x, e_n)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, temos que f é um isomorfismo linear, desde que p é bilinear e sem divisores de zero.

Agora, para todo $i = 1, \dots, n$, defina $v_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $v_i(p(x, e_n)) = p(x, e_i)$ para todo $p(x, e_n) \in \mathbb{R}^n$. Então, v_i é linear para todo $i = 1, \dots, n$. De fato, para quaisquer $p(x, e_n), p(y, e_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{aligned} v_i(p(x, e_n) + \alpha p(y, e_n)) &= v_i(p(x + \alpha y, e_n)) \\ &= p(x + \alpha y, e_i) \\ &= p(x, e_i) + \alpha p(y, e_i) \\ &= v_i(p(x, e_n)) + \alpha v_i(p(y, e_n)), \end{aligned}$$

para qualquer $i = 1, \dots, n$.

Agora, note que $\{v_1(x), \dots, v_n(x)\}$ é um conjunto linearmente independente para todo $x \neq 0$ e $v_n(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. De fato:

- como para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$, $x = p(y, e_n)$ para um único $y \in \mathbb{R}^n$, então $v_n(x) = v_n(p(y, e_n)) = p(y, e_n) = x$.
- como $\{e_1, \dots, e_n\}$ é um conjunto linearmente independente e p não possui divisores de zero, então $\{p(y, e_1), \dots, p(y, e_n)\}$ é um conjunto linearmente independente para todo $y \neq 0$, ou seja, $\{v_1(x), \dots, v_n(x)\}$ é um conjunto linearmente independente para todo $x \neq 0$.

Assim, as transformações lineares v_1, \dots, v_{n-1} podem ser identificadas a $(n-1)$ -seções linearmente independentes do \mathbb{R}^{n-1} -fibrado $Hom(\gamma_{n-1}^1, \gamma^\perp)$.

Com efeito, para cada $\bar{x} \in \mathbb{R}P^{n-1}$, denote por L_x a reta, passando pela origem de \mathbb{R}^n , cujo vetor diretor é $x \in \mathbb{R}^n$ e defina, para cada $i = 1, \dots, n-1$, $s_i : \mathbb{R}P^{n-1} \rightarrow E(\text{Hom}(\gamma_{n-1}^1, \gamma^\perp))$ dada por $s_i(\bar{x}) = \bar{v}_i$, onde $\bar{v}_i : L_x \rightarrow (L_x)^\perp$ é a função que associa a cada $z \in L_x$ a projeção ortogonal de $v_i(z)$ em $(L_x)^\perp$. Note que s_i está bem definida, pois a projeção ortogonal $\bar{v}_i : L_x \rightarrow (L_x)^\perp$ é uma transformação linear para todo $i = 1, \dots, n-1$.

Ainda, $\pi \circ s_i = 1_{\mathbb{R}P^{n-1}}$ para todo $i = 1, \dots, n-1$. Deste modo, sendo a identidade $1_{\mathbb{R}P^{n-1}} : \mathbb{R}P^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$ contínua, segue da Proposição 5.2 que s_i é contínua para todo $i = 1, \dots, n-1$. Com isso, obtemos que s_1, \dots, s_{n-1} são seções de $\text{Hom}(\gamma_{n-1}^1, \gamma^\perp)$.

Por fim, como $\{v_1(z), \dots, v_{n-1}(z)\}$ é um conjunto linearmente independente para todo $z \neq 0$, então $\{\bar{v}_1(z), \dots, \bar{v}_{n-1}(z)\}$ é um conjunto linearmente independente para todo $z \neq 0$, pois se $\{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ é uma base ortonormal de $(L_x)^\perp$, então $\bar{v}_i(z) = \sum_{j=1}^{n-1} \langle v_i(z), a_j \rangle a_j > a_j$ para todo $i = 1, \dots, n-1$. Com isso, se $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$ são tais que $\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \bar{v}_i(z) = 0$, então:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \bar{v}_i(z) \\ \Leftrightarrow 0 &= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \sum_{j=1}^{n-1} \langle v_i(z), a_j \rangle a_j \\ \Leftrightarrow 0 &= \sum_{j=1}^{n-1} \langle \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i(z), a_j \rangle a_j \\ \Leftrightarrow 0 &= \langle \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i(z), a_j \rangle, \text{ para todo } j = 1, \dots, n-1 \\ \Leftrightarrow 0 &= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i(z) \\ \Leftrightarrow 0 &= \alpha_i, \text{ para todo } i = 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Logo, segue do Teorema 4.2 que $\text{Hom}(\gamma_{n-1}^1, \gamma^\perp)$ é um fibrado trivial. Mas, pelo Lema 6.2, $\tau_{\mathbb{R}P^{n-1}} \cong \text{Hom}(\gamma_{n-1}^1, \gamma^\perp)$, isto é, $\tau_{\mathbb{R}P^{n-1}}$ é um fibrado trivial.

Portanto, $\mathbb{R}P^{n-1}$ é paralelizável e pelo Corolário anterior, n deve ser uma potência de 2. \square

Assim, nos casos $n = 2, 4, 8$ temos, respectivamente, que $\mathbb{R}P^1$, $\mathbb{R}P^3$ e $\mathbb{R}P^7$ são paralelizáveis, desde que nestes casos existem, respectivamente, os produtos de números complexos, de quaternions e de Cayley.

Para os próximos três exemplos, precisaremos da seguinte:

Definição 6.3. Dizemos que uma n -variedade M C^∞ admite uma campo de k -planos tangentes se o fibrado τ_M admite um \mathbb{R}^k -subfibrado.

Exemplo 6.5. Se $\mathbb{R}P^n$ admite um campo de 1-planos tangentes, então n é ímpar.

De fato, suponha n par e que $\mathbb{R}P^n$ admita um campo de 1-planos tangentes, isto é, o fibrado $\tau_{\mathbb{R}P^n}$ admite um \mathbb{R} -subfibrado, digamos η . Então, $\tau_{\mathbb{R}P^n} \cong \eta \oplus \eta^\perp$.

Lembrando que $w_k(\mathbb{R}P^n) = \sum_{i=0}^k w_i(\eta) \smile w_{k-i}(\eta^\perp)$, então, em particular, temos:

$$a = w_1(\mathbb{R}P^n)$$

$$= w_0(\eta) \smile w_1(\eta^\perp) + w_1(\eta) \smile w_0(\eta^\perp)$$

$$= w_1(\eta^\perp) + w_1(\eta), \text{ ou seja, obtemos os seguintes casos:}$$

$$\begin{cases} w_1(\eta^\perp) = 0 \text{ e } w_1(\eta) = a \\ w_1(\eta^\perp) = a \text{ e } w_1(\eta) = 0 \end{cases}$$

Suponha o caso em que $w_1(\eta^\perp) = a$ e $w_1(\eta) = 0$. Então, $W(\eta) = 1$, pois η é um \mathbb{R} -fibrado e $w_1(\eta) = 0$. Ainda, $W(\mathbb{R}P^n) = W(\eta^\perp)$.

Assim, $w_n(\eta^\perp) = 0$, pois η^\perp é um \mathbb{R}^{n-1} -fibrado, o que é um absurdo, desde que $w_n(\mathbb{R}P^n) = \binom{n+1}{n}a^n = (n+1)a^n = a^n \neq 0$, uma vez que n é par.

Agora, suponha o caso em que $w_1(\eta^\perp) = 0$ e $w_1(\eta) = a$. Então, $W(\eta) = 1 + a$, pois η é um \mathbb{R} -fibrado. Ainda, $(1+a)^{n+1} = W(\mathbb{R}P^n) = W(\eta)W(\eta^\perp) = (1+a)W(\eta^\perp)$, ou seja, $W(\eta^\perp) = (1+a)^n$.

Deste modo, $w_{n-1}(\eta^\perp) = \binom{n}{n-1}a^{n-1} = na^{n-1} = 0$, desde que n é par. Por outro lado, $w_n(\mathbb{R}P^n) = w_1(\eta) \smile w_{n-1}(\eta^\perp) = 0$, o que é um absurdo, pois $w_n(\mathbb{R}P^n) = \binom{n+1}{n}a^n = (n+1)a^n = a^n \neq 0$.

Portanto, n deve ser ímpar.

Exemplo 6.6. $\mathbb{R}P^4$ não admite um campo de 2-planos tangentes.

Suponha que $\mathbb{R}P^4$ possua um campo de 2-planos tangentes, isto é, o fibrado $\tau_{\mathbb{R}P^4}$ admite um \mathbb{R}^2 -subfibrado, digamos η . Então, $\tau_{\mathbb{R}P^4} \cong \eta \oplus \eta^\perp$.

Lembremos que $W(\mathbb{R}P^4) = 1+a+a^4$. Por outro lado, como $w_k(\mathbb{R}P^4) = \sum_{i=0}^k w_i(\eta) \smile w_{k-i}(\eta^\perp)$, temos:

$a = w_1(\mathbb{R}P^4) = w_0(\eta) \smile w_1(\eta^\perp) + w_1(\eta) \smile w_0(\eta^\perp) = w_1(\eta^\perp) + w_1(\eta)$, ou seja, obtemos os seguintes casos:

$$\begin{cases} w_1(\eta^\perp) = 0 \text{ e } w_1(\eta) = a \\ w_1(\eta^\perp) = a \text{ e } w_1(\eta) = 0 \end{cases}$$

Suponha o caso em que $w_1(\eta^\perp) = a$ e $w_1(\eta) = 0$. O outro caso seguirá de modo análogo. Então:

- $0 = w_2(\mathbb{R}P^4)$

$$= w_0(\eta) \smile w_2(\eta^\perp) + w_1(\eta) \smile w_1(\eta^\perp) + w_2(\eta) \smile w_0(\eta^\perp)$$

$$= w_2(\eta^\perp) + w_2(\eta), \text{ isto é, } w_2(\eta^\perp) = w_2(\eta)$$

- $0 = w_3(\mathbb{R}P^4)$

$$= w_1(\eta) \smile w_2(\eta^\perp) + w_2(\eta) \smile w_1(\eta^\perp)$$

$$= w_2(\eta) \smile w_1(\eta^\perp)$$

$$= w_2(\eta) \smile a, \text{ isto é, } w_2(\eta) = 0 = w_2(\eta^\perp)$$

- $w_4(\mathbb{R}P^4) = w_2(\eta) \smile w_2(\eta^\perp) = 0$, o que é um absurdo, pois $w_4(\mathbb{R}P^4) = a^4 \neq 0$.

Portanto, $\mathbb{R}P^4$ não possui um campo de 2-planos tangentes.

Exemplo 6.7. $\mathbb{R}P^6$ não admite um campo de 2-planos tangentes.

Suponha que $\mathbb{R}P^6$ possua um campo de 2-planos tangentes, isto é, o fibrado $\tau_{\mathbb{R}P^6}$ admite um \mathbb{R}^2 -subfibrado, digamos η . Então, $\tau_{\mathbb{R}P^6} \cong \eta \oplus \eta^\perp$.

Lembremos que $W(\mathbb{R}P^6) = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6$. Por outro lado, como $w_k(\mathbb{R}P^6) = \sum_{i=0}^k w_i(\eta) \smile w_{k-i}(\eta^\perp)$, temos:

$$a = w_1(\mathbb{R}P^6)$$

$$= w_0(\eta) \smile w_1(\eta^\perp) + w_1(\eta) \smile w_0(\eta^\perp)$$

$$= w_1(\eta^\perp) + w_1(\eta), \text{ ou seja, obtemos os seguintes casos:}$$

$$\begin{cases} w_1(\eta^\perp) = 0 \text{ e } w_1(\eta) = a \\ w_1(\eta^\perp) = a \text{ e } w_1(\eta) = 0 \end{cases}$$

Suponha o caso em que $w_1(\eta^\perp) = a$ e $w_1(\eta) = 0$. Então:

$$a^2 = w_2(\mathbb{R}P^6)$$

$$= w_0(\eta) \smile w_2(\eta^\perp) + w_1(\eta) \smile w_1(\eta^\perp) + w_2(\eta) \smile w_0(\eta^\perp)$$

$$= w_2(\eta^\perp) + w_2(\eta), \text{ isto é, também temos os seguintes casos:}$$

$$\begin{cases} w_2(\eta^\perp) = 0 \text{ e } w_2(\eta) = a^2 \\ w_2(\eta^\perp) = a^2 \text{ e } w_2(\eta) = 0 \end{cases}$$

Agora, suponha o caso em que $w_2(\eta^\perp) = a^2$ e $w_2(\eta) = 0$. O outro caso seguirá de modo análogo. Então:

- $a^3 = w_3(\mathbb{R}P^6)$

$$= w_0(\eta) \smile w_3(\eta^\perp) + w_1(\eta) \smile w_2(\eta^\perp) + w_2(\eta) \smile w_1(\eta^\perp)$$

$$= w_0(\eta) \smile w_3(\eta^\perp), \text{ ou seja, } w_3(\eta^\perp) = a^3$$
- $a^4 = w_4(\mathbb{R}P^6)$

$$= w_0(\eta) \smile w_4(\eta^\perp) + w_1(\eta) \smile w_3(\eta^\perp) + w_2(\eta) \smile w_2(\eta^\perp)$$

$$= w_0(\eta) \smile w_4(\eta^\perp), \text{ ou seja, } w_4(\eta^\perp) = a^4$$
- $w_5(\mathbb{R}P^6) = w_1(\eta) \smile w_4(\eta^\perp) + w_2(\eta) \smile w_3(\eta^\perp) = 0$, o que é um absurdo, pois $w_5(\mathbb{R}P^6) = a^5 \neq 0$

Para o caso em que $w_1(\eta^\perp) = 0$ e $w_1(\eta) = a$, o resultado segue de modo análogo, isto é, encontraremos mais dois casos para $w_2(\eta^\perp)$ e $w_2(\eta)$, porém o absurdo ocorrerá quando chegarmos que $w_6(\mathbb{R}P^6) = 0$, diferente do caso anterior em que o absurdo foi $w_5(\mathbb{R}P^6) = 0$.

Portanto, $\mathbb{R}P^6$ não possui um campo de 2-planos tangentes.

6.2 Imersões

Como aplicação do Teorema 6.2, veremos quais espaços projetivos podem ser imersos em um espaço Euclidiano de dimensão dada. Para isto, precisamos da seguinte:

Definição 6.4. *Uma função $f : M \rightarrow N$ entre duas variedades C^∞ é dita uma imersão se f é C^∞ e $d_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ é injetora para todo $x \in M$. Neste caso, dizemos que M pode ser imersa em N .*

Deste modo, podemos reenunciar o Teorema da Dualidade de Whitney como: "Se M é uma k -variedade C^∞ que pode ser imersa em \mathbb{R}^{k+m} , então $W(\nu_M) = \overline{W}(M)$ ". Com isso, obtemos que $\overline{w}_i(M) = 0$ para todo $i > m$.

Equivalentemente, para mostrar que uma k -variedade C^∞ M não pode ser imersa em \mathbb{R}^{k+m} , basta mostrar que $\overline{w}_i(M) \neq 0$ para algum $i > m$.

Agora, suponha $f : M \rightarrow N$ uma imersão. Então, para todo $x \in M$, temos que $T_{f(x)} N \cong d_x f(T_x M) \oplus (d_x f(T_x M))^\perp$. Correspondentemente, temos o seguinte:

Proposição 6.6. *Para qualquer imersão $f : M \rightarrow N$, o fibrado induzido $f^* \tau_N$ se escreve como soma de Whitney entre um subfibrado isomorfo a τ_M e seu complemento ortogonal ν_f , isto é, $f^* \tau_N \cong \tau_M \oplus \nu_f$.*

Demonstração. Como $f : M \rightarrow N$ é uma imersão, então $d_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ é injetora para todo $x \in M$. Assim, podemos ver $F_x(\tau_M) = \{x\} \times T_x M$ isomorfo ao subespaço vetorial $\{x\} \times \{f(x)\} \times d_x f(T_x M)$ de $F_x(f^* \tau_N) = \{x\} \times F_{f(x)}(\tau_N) =$

$\{x\} \times \{f(x)\} \times T_{f(x)}N$, ou seja, podemos ver τ_M isomorfo ao subfibrado ξ de $f^*\tau_N$, onde $E(\xi) = \{(x, (f(x), v)) \in M \times TN : v \in d_x f(T_x M)\}$, $B(\xi) = M$ e $\pi_\xi = \pi_{f^*\tau_N}|_{E(\xi)} : E(\xi) \rightarrow M$.

Denotando ν_f o complemento ortogonal de ξ em $f^*\tau_N$, temos que $f^*\tau_N \cong \xi \oplus \nu_f \cong \tau_M \oplus \nu_f$. \square

Exemplo 6.8. Considerando o espaço projetivo $\mathbb{R}P^9$, temos que $W(\mathbb{R}P^9) = 1 + a^2 + a^8$. Lembrando que $\bar{w}_k(\mathbb{R}P^9) = \sum_{i=1}^k w_i(\mathbb{R}P^9) \smile \bar{w}_{k-i}(\mathbb{R}P^9)$, então $\bar{w}_k(\mathbb{R}P^9) =$

$$\begin{cases} w_1(\mathbb{R}P^9) \smile \bar{w}_0(\mathbb{R}P^9) & , k = 1 \\ w_2(\mathbb{R}P^9) \smile \bar{w}_{k-2}(\mathbb{R}P^9) & , 2 \leq k \leq 7 \\ w_2(\mathbb{R}P^9) \smile \bar{w}_{k-2}(\mathbb{R}P^9) + w_8(\mathbb{R}P^9) \smile \bar{w}_{k-8}(\mathbb{R}P^9) & , k \geq 8 \end{cases}$$

Assim, temos que:

$$\bar{w}_1(\mathbb{R}P^9) = 0 \smile 1 = 0$$

$$\bar{w}_2(\mathbb{R}P^9) = a^2 \smile 1 = a^2$$

$$\bar{w}_3(\mathbb{R}P^9) = a^2 \smile 0 = 0$$

$$\bar{w}_4(\mathbb{R}P^9) = a^2 \smile a^2 = a^4$$

$$\bar{w}_5(\mathbb{R}P^9) = a^2 \smile 0 = 0$$

$$\bar{w}_6(\mathbb{R}P^9) = a^2 \smile a^4 = a^6$$

$$\bar{w}_7(\mathbb{R}P^9) = a^2 \smile 0 = 0$$

$$\bar{w}_8(\mathbb{R}P^9) = a^2 \smile a^6 + a^8 \smile 1 = a^8 + a^8 = 0$$

$$\bar{w}_9(\mathbb{R}P^9) = a^2 \smile 0 + a^8 \smile 0 = 0 + 0 = 0$$

Por outro lado, para $k > 9$, temos $\bar{w}_k(\mathbb{R}P^9) = w_2(\mathbb{R}P^9) \smile \bar{w}_{k-2}(\mathbb{R}P^9) + w_8(\mathbb{R}P^9) \smile \bar{w}_{k-8}(\mathbb{R}P^9) = 0$, pois $w_2(\mathbb{R}P^9) \smile \bar{w}_{k-2}(\mathbb{R}P^9), w_8(\mathbb{R}P^9) \smile \bar{w}_{k-8}(\mathbb{R}P^9) \in H^k(\mathbb{R}P^9; \mathbb{Z}_2) = 0$, uma vez que $k > 9$.

Portanto, $\bar{W}(\mathbb{R}P^9) = 1 + a^2 + a^4 + a^6$, ou seja, se $\mathbb{R}P^9$ pode ser imerso em \mathbb{R}^{9+m} , então $m \geq 6$.

Exemplo 6.9. Se M é uma n -variedade C^∞ que pode ser imersa em \mathbb{R}^{n+1} , então $w_i(M) = w_1^i(M)$ para todo $i = 1, \dots, n$.

De fato, como ν_M é um \mathbb{R} -fibrado, segue do Teorema da Dualidade de Whitney que $\bar{w}_i(M) = 0$ para todo $i > 1$. Então, $\bar{W}(M) = 1 + \bar{w}_1(M) = 1 + w_1(M)$.

Assim, provemos por indução sobre $i > 0$ que $w_i(M) = w_1^i(M)$. Lembrando que

$\bar{w}_k(M) = \sum_{i=1}^k w_i(M) \smile \bar{w}_{k-i}(M)$, temos:

$$0 = \bar{w}_2(M) = w_1(M) \smile \bar{w}_1(M) + w_2(M) \smile \bar{w}_0(M) = w_1^2(M) + w_2(M)$$

ou seja, $w_2(M) = w_1^2(M)$. Agora, suponha que $w_k(M) = w_1^k(M)$. Então:

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{w}_{k+1}(M) = \sum_{i=1}^{k+1} w_i(M) \smile \bar{w}_{k+1-i}(M) \\ &= w_k(M) \smile \bar{w}_1(M) + w_{k+1}(M) \smile \bar{w}_0(M) \\ &= w_k(M) \smile w_1(M) + w_{k+1}(M) \\ &= w_1^k(M) \smile w_1(M) + w_{k+1}(M) \\ &= w_1^{k+1}(M) + w_{k+1}(M) \end{aligned}$$

isto é, $w_{k+1}(M) = w_1^{k+1}(M)$.

Como τ_M é um \mathbb{R}^n -fibrado, então $w_i(M) = 0$ para todo $i > n$ e portanto, $w_i(M) = w_1^i(M)$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Exemplo 6.10. Se $\mathbb{R}P^n$ pode ser imerso em \mathbb{R}^{n+1} , então $n = 2^r - 1$ ou $n = 2^r - 2$, para algum $r \geq 1$.

De fato, veja inicialmente que do Exemplo anterior segue $w_i(\mathbb{R}P^n) = w_1^i(\mathbb{R}P^n)$ para todo $i = 1, \dots, n$. Também, lembremos que $w_i(\mathbb{R}P^n) = \binom{n+1}{i} a^i$ e $w_1^i(\mathbb{R}P^n) = \underbrace{\binom{n+1}{1} a \smile \binom{n+1}{1} a}_{i\text{-vezes}} = \binom{n+1}{1}^i a^i = (n+1)^i a^i$.

Como $n+1$ deve ser um número par ou um número ímpar, então $n+1 = 2^r m$ ou $n+2 = 2^r m$, para algum inteiro $r \geq 1$ e algum ímpar $m \geq 1$. Agora, analisemos os seguintes casos:

- Supondo $n+1 = 2^r m$, com $m > 1$ ímpar, note que:

$$w_{2^r}(\mathbb{R}P^n) = \binom{n+1}{2^r} a^{2^r} = \binom{2^r m}{2^r} a^{2^r} = m a^{2^r} = a^{2^r} \neq 0, \text{ uma vez que } 2^r < 2^r m = n+1, \text{ ou seja, } \langle a^{2^r} \rangle = H^{2^r}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2). \text{ Ainda:}$$

$$w_1^{2^r}(\mathbb{R}P^n) = (n+1)^{2^r} a^{2^r} = 0, \text{ desde que } n+1 \text{ é par.}$$

Assim, $w_{2^r}(\mathbb{R}P^n) \neq w_1^{2^r}(\mathbb{R}P^n)$, o que é um absurdo pelo Exemplo anterior. Logo, $m = 1$, isto é, $n+1 = 2^r$.

- Supondo $n+2 = 2^r m$, com $m > 1$ ímpar, note que:

$w_{2^r}(\mathbb{R}P^{n+1}) = \binom{n+2}{2^r} a^{2^r} = \binom{2^r m}{2^r} a^{2^r} = m a^{2^r} = a^{2^r} \neq 0$, uma vez que $2^r \leq n$, pois $2^r < 2^r m = n + 2$ e $2^r \neq n + 1$ (já que $n + 1$ é ímpar), ou seja, $\langle a^{2^r} \rangle = H^{2^r}(\mathbb{R}P^{n+1}; \mathbb{Z}_2)$. Ainda:

$$w_1^{2^r}(\mathbb{R}P^{n+1}) = (n + 2)^{2^r} a^{2^r} = 0, \text{ desde que } n + 2 \text{ é par.}$$

Assim, $w_{2^r}(\mathbb{R}P^{n+1}) \neq w_1^{2^r}(\mathbb{R}P^{n+1})$, o que é um absurdo pelo Exemplo anterior. Logo, $m = 1$, isto é, $n + 2 = 2^r$.

Portanto, $n = 2^r - 1$ ou $n = 2^r - 2$ para algum inteiro $r \geq 1$.

Teorema 6.4. *Se $\mathbb{R}P^{2^r}$, $r \geq 1$, pode ser imerso em \mathbb{R}^{2^r+m} , então $m \geq 2^r - 1$.*

Demonstração. Lembrando que $W(\mathbb{R}P^{2^r}) = (1+a)^{2^r+1} = (1+a)^{2^r}(1+a) = (1+a^{2^r})(1+a) = 1 + a + a^{2^r}$ e que $\bar{w}_k(\mathbb{R}P^{2^r}) = \sum_{i=1}^k w_i(\mathbb{R}P^{2^r}) \smile \bar{w}_{k-i}(\mathbb{R}P^{2^r})$, então $\bar{w}_k(\mathbb{R}P^{2^r}) = \begin{cases} w_1(\mathbb{R}P^{2^r}) \smile \bar{w}_{k-1}(\mathbb{R}P^{2^r}) & , 1 \leq k \leq 2^r - 1 \\ w_1(\mathbb{R}P^{2^r}) \smile \bar{w}_{k-1}(\mathbb{R}P^{2^r}) + w_{2^r}(\mathbb{R}P^{2^r}) \smile \bar{w}_{k-2^r}(\mathbb{R}P^{2^r}) & , k \geq 2^r \end{cases}$.

Deste modo, temos que:

$$\bar{w}_1(\mathbb{R}P^{2^r}) = a \smile 1 = a$$

$$\bar{w}_2(\mathbb{R}P^{2^r}) = a \smile a = a^2$$

$$\bar{w}_3(\mathbb{R}P^{2^r}) = a \smile a^2 = a^3$$

Por recorrência, obtemos $\bar{w}_{2^r-1}(\mathbb{R}P^{2^r}) = a \smile a^{2^r-1} = a^{2^r-1}$. Ainda:

$$\bar{w}_{2^r}(\mathbb{R}P^{2^r}) = a \smile a^{2^r-1} + a^{2^r} \smile 1 = a^{2^r} + a^{2^r} = 0.$$

Por outro lado, para $k > 2^r$, temos $\bar{w}_k(\mathbb{R}P^{2^r}) = w_1(\mathbb{R}P^{2^r}) \smile \bar{w}_{k-1}(\mathbb{R}P^{2^r}) + w_{2^r}(\mathbb{R}P^{2^r}) \smile \bar{w}_{k-2^r}(\mathbb{R}P^{2^r}) = 0$, uma vez que $w_1(\mathbb{R}P^{2^r}) \smile \bar{w}_{k-1}(\mathbb{R}P^{2^r}) \smile w_{2^r}(\mathbb{R}P^{2^r}) \smile \bar{w}_{k-2^r}(\mathbb{R}P^{2^r}) \in H^k(\mathbb{R}P^{2^r}; \mathbb{Z}_2) = 0$, desde que $k > 2^r$.

Portanto, $\bar{W}(\mathbb{R}P^{2^r}) = 1 + a + a^2 + \dots + a^{2^r-1}$, ou seja, se $\mathbb{R}P^{2^r}$ pode ser imerso em \mathbb{R}^{2^r+m} , então $m \geq 2^r - 1$. \square

6.3 Números de Stiefel-Whitney

Nosso objetivo agora é o de comparar duas variedades diferentes utilizando a ferramenta básica deste trabalho, as classes de Stiefel-Whitney. Para isto, vamos introduzir os chamados números de Stiefel-Whitney.

Seja M uma n -variedade C^∞ fechada ¹. Então, existe uma única classe fundamental ² de homologia $[M] \in H_n(M; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$. Assim, para qualquer classe de cohomologia

¹Uma variedade fechada é uma variedade compacta e sem bordo.

²Para mais detalhes sobre a classe fundamental de homologia, ver ([8], página 273, Teorema A.8).

$v \in H^n(M; \mathbb{Z}_2)$, o índice de Kronecker $\langle v, [M] \rangle \in \mathbb{Z}_2$ é definido da seguinte forma: como $H^n(M; \mathbb{Z}_2) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}_2}(H_n(M; \mathbb{Z}_2), \mathbb{Z}_2)$, então $\langle v, [M] \rangle = v[M] \in \mathbb{Z}_2$.

Agora, considere $r_1, \dots, r_n \geq 0$ inteiros tais que $r_1 + 2r_2 + \dots + nr_n = n$. Então, para qualquer \mathbb{R}^n -fibrado ξ , podemos formar o monômio $w_1^{r_1}(\xi) \smile \dots \smile w_n^{r_n}(\xi) \in H^n(B(\xi); \mathbb{Z}_2)$.

Definição 6.5. Dada M uma n -variedade C^∞ fechada, o inteiro módulo dois $\langle w_1^{r_1}(M) \smile \dots \smile w_n^{r_n}(M), [M] \rangle = w_1^{r_1}(M) \smile \dots \smile w_n^{r_n}(M)[M]$ será chamado de número de Stiefel-Whitney de M associado ao monômio $w_1^{r_1} \smile \dots \smile w_n^{r_n}$.

Deste modo, diremos que duas n -variedades C^∞ fechadas M e M' tem o mesmo número de Stiefel-Whitney se $w_1^{r_1}(M) \smile \dots \smile w_n^{r_n}(M)[M] = w_1^{r_1}(M') \smile \dots \smile w_n^{r_n}(M')[M']$ para todo monômio $w_1^{r_1} \smile \dots \smile w_n^{r_n}$.

No próximo exemplo, examinaremos alguns números de Stiefel-Whitney dos espaços projetivos $\mathbb{R}P^n$.

Exemplo 6.11. Faremos o cálculo dos números de Stiefel-Whitney de $\mathbb{R}P^n$ em quatro casos:

- **n par**

Como $w_1(\mathbb{R}P^n) = \binom{n+1}{1}a = (n+1)a = a \neq 0$ e $w_n(\mathbb{R}P^n) = \binom{n+1}{n}a^n = (n+1)a^n = a^n \neq 0$, então $a^n[\mathbb{R}P^n] \neq 0$ é o número de Stiefel-Whitney de $\mathbb{R}P^n$ que pode ser associado aos monômios $w_1^n \smile w_2^0 \smile \dots \smile w_n^0$ e $w_1^0 \smile \dots \smile w_{n-1}^0 \smile w_n^1$, respectivamente.

- **n é potência de 2**

Como $W(\mathbb{R}P^n) = (1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) = (1+a^n)(1+a) = 1+a+a^n$, então o único número de Stiefel-Whitney não nulo de $\mathbb{R}P^n$ está associado aos monômios $w_1^n \smile w_2^0 \smile \dots \smile w_n^0$ e $w_1^0 \smile \dots \smile w_{n-1}^0 \smile w_n^1$. De fato, pois dados quaisquer outros inteiros $r_1, \dots, r_n \geq 0$ tais que $r_1 + 2r_2 + \dots + nr_n = n$, então existirá algum $i_0 \in \{2, \dots, n-1\}$ tal que $r_{i_0} \neq 0$.

Mas como $w_i(\mathbb{R}P^n) = 0$ para todo $i = 2, \dots, n-1$, então $w_1^{r_1}(\mathbb{R}P^n) \smile \dots \smile w_{i_0}^{r_{i_0}}(\mathbb{R}P^n) \smile \dots \smile w_n^{r_n}(\mathbb{R}P^n) = 0$, ou seja, $w_1^{r_1}(\mathbb{R}P^n) \smile \dots \smile w_{i_0}^{r_{i_0}}(\mathbb{R}P^n) \smile \dots \smile w_n^{r_n}(\mathbb{R}P^n)[\mathbb{R}P^n] = 0$.

- **n ímpar da forma $2k-1$, $k \geq 1$**

Note que $W(\mathbb{R}P^n) = (1+a)^{n+1} = (1+a)^{2k} = 1 + \binom{2k}{1}a + \binom{2k}{2}a^2 + \dots + \binom{2k}{2k-1}a^{2k-1}$ e $\binom{2k}{j} \equiv 0 \pmod{2}$ para todo j ímpar. Deste modo, todos os números de Stiefel-Whitney de $\mathbb{R}P^n$ são zero, uma vez que todo monômio $w_1^{r_1} \smile \dots \smile w_n^{r_n}$ deve conter ao menos uma classe w_j com j ímpar, desde que n seja ímpar.

- **n não é potência de 2**

Para os demais casos, quando n é par e não é potência de 2, os números de Stiefel-Whitney de $\mathbb{R}P^n$ podem ser computados como produto de coeficientes binomiais.

A fim de podermos agrupar variedades fechadas de mesma dimensão em classes de cobordismo, que serão definidas mais adiante, precisaremos de dois Teoremas muito importantes, conhecidos como Teorema de Pontrjagin e Teorema de Thom, sendo um a recíproca do outro. Faremos apenas a prova do Teorema de Pontrjagin.

Teorema 6.5. (Teorema de Pontrjagin) *Se W é uma $(n + 1)$ -variedade C^∞ compacta tendo como bordo uma n -variedade M C^∞ fechada, então todos os números de Stiefel-Whitney de M são zero.*

Demonstração. Considere $[W, M] \in H_{n+1}(W, M; \mathbb{Z}_2)$ a classe fundamental de homologia do par (W, M) e os homomorfismos $\partial_{n+1} : H_{n+1}(W, M; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_n(M; \mathbb{Z}_2)$ onde $\partial_{n+1}[W, M] = [M]$ e $\delta^n : H^n(M; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^{n+1}(W, M; \mathbb{Z}_2)$ onde, para cada $v \in H^n(M; \mathbb{Z}_2)$, $\delta^n(v) : H_{n+1}(W, M; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ é definida por $\delta^n(v)[W, M] = v(\partial_{n+1}[W, M]) = v[M]$.

Escolhendo uma métrica Euclidiana em τ_M , existe um único campo de vetores normais ao longo de M , gerando um fibrado trivial ε_M^1 , pois como W é uma $(n + 1)$ -variedade C^∞ compacta tendo como bordo uma n -variedade C^∞ M fechada, segue que existe $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um aberto contendo M tal que $U \approx M \times]-1, 1[\approx M \times \mathbb{R}$, conforme podemos observar na figura abaixo.

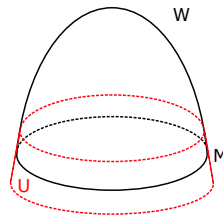


Figura 6.1: Variedade compacta com bordo

Então, considerando a inclusão $i : M \hookrightarrow W$, segue da Proposição 6.6 que $i^* \tau_W \cong \tau_M \oplus \nu_i \cong \tau_M \oplus \varepsilon_M^1$. Assim, $W(i^* \tau_W) = W(M)$, isto é, $w_k(M) = w_k(i^* \tau_W) = i_k^*(w_k(W))$, para todo $k \geq 0$.

Agora, considere $r_1, \dots, r_n \geq 0$ inteiros quaisquer tais que $r_1 + 2r_2 + \dots + nr_n = n$. Então:

$$\begin{aligned} w_1^{r_1}(M) \smile \dots \smile w_n^{r_n}(M)[M] &= i_{r_1}^*(w_1^{r_1}(W)) \smile \dots \smile i_{nr_n}^*(w_n^{r_n}(W))[M] \\ &= i_n^*(w_1^{r_1}(W) \smile \dots \smile w_n^{r_n}(W))[M] \\ &= w_1^{r_1}(W) \smile \dots \smile w_n^{r_n}(W)(i_{*n}[M]) \\ &= w_1^{r_1}(W) \smile \dots \smile w_n^{r_n}(W)(i_{*n}(\partial_{n+1}[W, M])) \end{aligned}$$

Da exatidão da sequência de homologia do par (W, M)

$$\dots \rightarrow H_{n+1}(W, M; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(M; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{i_{*n}} H_n(W; \mathbb{Z}_2) \dots$$

segue que $i_{*n} \circ \partial_{n+1} = 0$. Logo, $w_1^{r_1}(M) \smile \dots \smile w_n^{r_n}(M)[M] = 0$, ou seja, todos os números de Stiefel-Whitney de M são zero. \square

Teorema 6.6. (Teorema de Thom) *Se todos os números de Stiefel-Whitney de uma n -variedade C^∞ M são zero, então M pode ser realizada como bordo de alguma $(n + 1)$ -variedade C^∞ compacta.*

A demonstração do Teorema de Thom pode ser encontrada em ([13], p. 18-23).

Exemplo 6.12. Conforme o exemplo 6.11, segue dos Teoremas de Pontrjagin e de Thom que $\mathbb{R}P^{2n-1}$ é bordo de alguma $2n$ -variedade C^∞ e $\mathbb{R}P^{2n}$ não é bordo de nenhuma $(2n + 1)$ -variedade C^∞ .

Definição 6.6. *Duas n -variedades M_1 e M_2 C^∞ fechadas pertencem à mesma classe de cobordismo se sua união disjunta $M_1 \dot{\cup} M_2$ é bordo de uma $(n + 1)$ -variedade C^∞ compacta.*

Corolário 6.3. *Duas n -variedades C^∞ fechadas pertencem à mesma classe de cobordismo se, e somente se, todos os seus correspondentes números de Stiefel-Whitney são iguais.*

Demonstração. Sejam M_1 e M_2 duas n -variedades C^∞ fechadas.

Suponha M_1 e M_2 pertencentes à mesma classe de cobordismo, ou seja, $M_1 \dot{\cup} M_2$ é bordo de alguma $(n + 1)$ -variedade C^∞ compacta. Então, segue do Teorema de Pontrjagin que todos os números de Stiefel-Whitney de $M_1 \dot{\cup} M_2$ são zero. Assim, para quaisquer inteiros $r_1, \dots, r_n \geq 0$ tais que $r_1 + 2r_2 + \dots + nr_n = n$, temos que:

$$\begin{aligned} w_1^{r_1}(M_1 \dot{\cup} M_2) \smile \dots \smile w_n^{r_n}(M_1 \dot{\cup} M_2)[M_1 \dot{\cup} M_2] &= 0 \\ \Leftrightarrow w_1^{r_1}(M_1) \smile \dots \smile w_n^{r_n}(M_1)[M_1] + w_1^{r_1}(M_2) \smile \dots \smile w_n^{r_n}(M_2)[M_2] &= 0 \\ \Leftrightarrow w_1^{r_1}(M_1) \smile \dots \smile w_n^{r_n}(M_1)[M_1] = w_1^{r_1}(M_2) \smile \dots \smile w_n^{r_n}(M_2)[M_2], &\text{ desde que } \\ M_1 \dot{\cup} M_2 \text{ seja uma união disjunta.} \end{aligned}$$

Logo, todos os correspondentes números de Stiefel-Whitney de M_1 e M_2 são iguais.

Reciprocamente, suponha que todos os correspondentes números de Stiefel-Whitney de M_1 e M_2 sejam iguais. Assim, utilizando as equivalências acima, obtemos que $w_1^{r_1}(M_1 \dot{\cup} M_2) \smile \dots \smile w_n^{r_n}(M_1 \dot{\cup} M_2)[M_1 \dot{\cup} M_2] = 0$ para quaisquer inteiros $r_1, \dots, r_n \geq 0$ tais que $r_1 + 2r_2 + \dots + nr_n = n$, isto é, todos os números de Stiefel-Whitney de $M_1 \dot{\cup} M_2$ são zero.

Assim, segue do Teorema de Thom que $M_1 \dot{\cup} M_2$ pode ser realizada como bordo de uma $(n + 1)$ -variedade C^∞ compacta, ou seja, M_1 e M_2 pertencem à mesma classe de cobordismo. \square

Exemplo 6.13. Para qualquer n par, S^n e $\mathbb{R}P^n$ não pertencem à mesma classe de cobordismo.

De fato, como o Exemplo 6.1 nos diz que $w_i(S^n) = 0$ para qualquer $i > 0$, então todos os números de Stiefel-Whitney de S^n são zero. Por outro lado, encontramos no Exemplo 6.11 números de Stiefel-Whitney não nulos de $\mathbb{R}P^n$, no caso de n par.

Logo, segue do Corolário anterior que S^n e $\mathbb{R}P^n$ não pertencem à mesma classe de cobordismo, quando n é par.

7 Existência das Classes de Stiefel-Whitney

Neste capítulo, construiremos as classes de Stiefel-Whitney com o auxílio do Isomorfismo de Thom e dos quadrados de Steenrod, provando assim a existência das classes de Stiefel-Whitney. Mas antes, precisaremos fixar algumas notações.

Em todo esse capítulo, para ξ um \mathbb{R}^n -fibrado, denotaremos, por comodidade, $E(\xi) = E$, $B(\xi) = B$ e $F_b(\xi) = F$, para qualquer $b \in B$. Ainda, considere $s : B \rightarrow E$ a seção nula de ξ , isto é, $s(b) = 0_b \in F$ para todo $b \in B$, onde $0_b \in F$ denota o elemento neutro da fibra F , para cada $b \in B$. Deste modo, se denotarmos $E_0 = E - \text{Im}(s)$ e $F_0 = F - \{0_b\}$, para todo $b \in B$, então $F_0 = E_0 \cap F$, para todo $b \in B$.

Agora, como $F \cong \mathbb{R}^n$ e $F_0 \cong \mathbb{R}^n - \{0\} \simeq S^{n-1}$, então utilizando a sequência exata longa de cohomologia do par $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$, obtemos que

$$H^i(F, F_0; \mathbb{Z}_2) \cong H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}; \mathbb{Z}_2) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & , i = n \\ 0 & , i \neq n \end{cases}$$

Por outro lado, temos o:

Teorema 7.1. $H^i(E, E_0; \mathbb{Z}_2) \cong \begin{cases} H^{i-n}(B; \mathbb{Z}_2) & , i \geq n \\ 0 & , i < n \end{cases}$

Uma prova intuitiva do Teorema 7.1 pode ser dada do seguinte modo:

"Inicialmente, veja que $D^n \simeq \mathbb{R}^n$ e $S^{n-1} \simeq \mathbb{R}^n - \{0\}$. Assim, se considerarmos ξ um \mathbb{R}^n -fibrado Euclidiano, então

$$E' = \{x \in E : \|x\| \leq 1\} \simeq E$$

$$E'' = \{x \in E : \|x\| = 1\} \simeq E_0$$

Assim, $H^i(E, E_0; \mathbb{Z}_2) \cong H^i(E', E''; \mathbb{Z}_2)$, para todo $i \geq 0$. Agora, suponha que B é um CW-complexo, onde $B = \bigcup_{k \geq 0} C^k$ e C^k são células k -dimensionais tais que o

fibrado restrição $\xi|_{C^k} \cong \varepsilon_{C^k}^n$, para todo $k \geq 0$.

Então, $E' \supset \pi_\xi^{-1}(C^k) \approx C^k \times \mathbb{R}^n \cong C^{k+n}$. Portanto, $E' = E'' \cup \left(\bigcup_{k \geq 0} C^{k+n} \right)$.

Logo, $H^i(E', E''; \mathbb{Z}_2) = 0$ para todo $i < n$ e $H^{n+k}(E', E''; \mathbb{Z}_2) \cong H^k(B; \mathbb{Z}_2)$ para todo $k \geq 0$.

Rigorosamente, e mais explicitadamente, o Teorema 7.1 pode ser encontrado em ([8], p. 105-114).

O Teorema 7.1 pode ser reenunciado do seguinte modo:

Teorema 7.2. *Se ξ é um \mathbb{R}^n -fibrado com espaço total E , então o grupo $H^i(E, E_0; \mathbb{Z}_2)$ é zero para $i < n$ e o grupo $H^n(E, E_0; \mathbb{Z}_2)$ contém uma única classe u tal que, para cada fibra F de ξ , a restrição $u|_{(F, F_0)}$ é a única classe que gera $H^n(F, F_0; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ tal que se $i : (F, F_0) \hookrightarrow (E, E_0)$ é a inclusão, então $i_n^*(u) = u|_{(F, F_0)}$. Além disso, o produto cup relativo $\smile u : H^k(E; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^{k+n}(E, E_0; \mathbb{Z}_2)$ define, para todo $k \geq 0$, um isomorfismo dado por $(\smile u)(x) = x \smile u$, para todo $x \in H^k(E; \mathbb{Z}_2)$.*

Definição 7.1. *A classe $u \in H^n(E, E_0; \mathbb{Z}_2)$ é chamada classe fundamental de cohomologia do par (E, E_0) .*

Observação 7.1. Note que $B \simeq E$. De fato, se $s : B \rightarrow E$ é a seção nula de ξ , então $\pi_\xi \circ s = 1_B$. Por outro lado, $s \circ \pi_\xi \simeq 1_E$, onde a homotopia $H : E \times [0, 1] \rightarrow E$ é dada por $H(x, t) = tx$, para todo $(x, t) \in E \times [0, 1]$. Logo, $(\pi_\xi)_k^* : H^k(B; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^k(E; \mathbb{Z}_2)$ é um isomorfismo para todo $k \geq 0$.

Definição 7.2. *O isomorfismo de Thom $\phi_k : H^k(B; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^{k+n}(E, E_0; \mathbb{Z}_2)$ associado ao fibrado ξ é definido, para todo $k \geq 0$, pela composição dos isomorfismos*

$$H^k(B; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{(\pi_\xi)_k^*} H^k(E; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\smile u} H^{k+n}(E, E_0; \mathbb{Z}_2)$$

Note que $\phi_0(1) = (\smile u) \circ (\pi_\xi)_0^*(1) = (\smile u)(1) = 1 \smile u = u$.

Para o entendimento dos Lemas 7.1 e 7.2, serão necessárias as seguintes considerações: sejam ξ e ξ' \mathbb{R}^n -fibrados com espaços totais E e E' , espaços bases B e B' , projeções π e π' e fibras F e F' , respectivamente; sejam $f : E \rightarrow E'$ uma aplicação fibrada de ξ em ξ' , $\bar{f} : B \rightarrow B'$ a aplicação correspondente de f nos espaços bases e $g : (E, E_0) \rightarrow (E', E'_0)$ a induzida de f a nível de pares; sejam $u \in H^n(E, E_0; \mathbb{Z}_2)$ e $u' \in H^n(E', E'_0; \mathbb{Z}_2)$ as classes fundamentais de cohomologia dos pares (E, E_0) e (E', E'_0) , respectivamente. Então:

Lema 7.1. $g_n^*(u') = u$.

Demonstração. Sendo $i : (F, F_0) \hookrightarrow (E, E_0)$ e $i' : (F', F'_0) \hookrightarrow (E', E'_0)$ as inclusões, temos que $i_n^*(u) = u|_{(F, F_0)}$ e $i_n'^*(u') = u'|_{(F', F'_0)}$. Ainda, defina $\tilde{f} : (F, F_0) \rightarrow (F', F'_0)$ de modo que $i' \circ \tilde{f} = g \circ i$. Então, o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
H^n(E, E_0; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{i_n^*} & H^n(F, F_0; \mathbb{Z}_2) \\
\uparrow g_n^* & & \uparrow \tilde{f}_n^* \\
H^n(E', E'_0; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{i_n'^*} & H^n(F', F'_0; \mathbb{Z}_2)
\end{array}$$

comuta.

Como f aplica cada fibra F de ξ isomorficamente em alguma fibra F' de ξ' , então \tilde{f} é um homeomorfismo. Assim, \tilde{f}_n^* é um isomorfismo, isto é, $\tilde{f}_n^*(u'|_{(F', F'_0)}) = u|_{(F, F_0)}$.

Logo, $i_n^* \circ g_n^*(u') = \tilde{f}_n^* \circ i_n'^*(u') = \tilde{f}_n^*(u'|_{(F', F'_0)}) = u|_{(F, F_0)}$. Deste modo, $i_n^*(g_n^*(u')) = u|_{(F, F_0)}$.

Por outro lado, u é a única classe tal que $i_n^*(u) = u|_{(F, F_0)}$, então $g_n^*(u') = u$. \square

Lema 7.2. *O isomorfismo de Thom é natural com relação às aplicações fibradas, isto é, o diagrama*

$$\begin{array}{ccc}
H^i(B'; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\phi'_i} & H^{i+n}(E', E'_0; \mathbb{Z}_2) \\
\downarrow \bar{f}_i^* & & \downarrow g_{i+n}^* \\
H^i(B; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\phi_i} & H^{i+n}(E, E_0; \mathbb{Z}_2)
\end{array}$$

comuta, onde ϕ_i e ϕ'_i são os isomorfismos de Thom associados aos fibrados ξ e ξ' , respectivamente, para todo $i \geq 0$.

Demonstração. Para qualquer $x' \in H^i(B'; \mathbb{Z}_2)$ temos:

$$\begin{aligned}
\phi_i \circ \bar{f}_i^*(x') &= \pi_i^*(\bar{f}_i^*(x')) \smile u \\
&= (\bar{f} \circ \pi)_i^*(x') \smile u \\
&= (\pi' \circ f)_i^*(x') \smile u \\
&= f_i^*(\pi_i'^*(x')) \smile u \\
&= f_i^*(\pi_i'^*(x')) \smile g_n^*(u') \\
&= g_{i+n}^*(\pi_i'^*(x')) \smile u' \\
&= g_{i+n}^* \circ \phi'_i(x')
\end{aligned}$$

Portanto, $\phi_i \circ \bar{f}_i^* = g_{i+n}^* \circ \phi'_i$. □

7.1 Quadrado de Steenrod

Agora, vamos introduzir quatro propriedades básicas que caracterizam as operações do quadrado de Steenrod ¹ e, posteriormente, veremos algumas propriedades envolvendo estas operações.

Propriedade 7.1. Para cada par de espaços topológicos (X, Y) com $Y \subset X$ e para cada inteiros $i, n \geq 0$, existe um homomorfismo aditivo que denotaremos por $Sq^i : H^n(X, Y; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^{n+i}(X, Y; \mathbb{Z}_2)$.

Propriedade 7.2. Se $f : (X, Y) \rightarrow (X', Y')$ é uma aplicação de pares, então o diagrama

$$\begin{array}{ccc} H^n(X', Y'; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{Sq^i} & H^{n+i}(X', Y'; \mathbb{Z}_2) \\ \downarrow f_n^* & & \downarrow f_{n+i}^* \\ H^n(X, Y; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{Sq^i} & H^{n+i}(X, Y; \mathbb{Z}_2) \end{array}$$

comuta, isto é, $f_{n+i}^* \circ Sq^i = Sq^i \circ f_n^*$.

Propriedade 7.3. Se $a \in H^n(X, Y; \mathbb{Z}_2)$, então:

- $Sq^0(a) = a$;
- $Sq^n(a) = a \smile a$;
- $Sq^i(a) = 0$, quando $i > n$.

Propriedade 7.4. Se $a \in H^n(X, Y; \mathbb{Z}_2)$ e $b \in H^m(X, Y; \mathbb{Z}_2)$, então $Sq^k(a \smile b) = \sum_{i=0}^k Sq^i(a) \smile Sq^{k-i}(b)$.

Ainda, se $a \in H^n(X, Y; \mathbb{Z}_2)$, $b \in H^m(X', Y'; \mathbb{Z}_2)$ e $p_1 : (X \times X', Y \times Y') \rightarrow (X, Y)$, $p_2 : (X \times X', X \times Y') \rightarrow (X', Y')$ são as projeções canônicas, segue da Propriedade 7.4 que:

$$\begin{aligned} Sq^k(a \times b) &= Sq^k((p_1)_n^*(a) \smile (p_2)_m^*(b)) \\ &= \sum_{i=0}^k Sq^i((p_1)_n^*(a)) \smile Sq^{k-i}((p_2)_m^*(b)) \end{aligned}$$

¹Para mais detalhes sobre o quadrado de Steenrod, ver ([12], p. 1-15).

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=0}^k (p_1)_{n+i}^* (Sq^i(a)) \smile (p_2)_{m+k-i}^* (Sq^{k-i}(b)) \\
 &= \sum_{i=0}^k (Sq^i(a) \times 1) \smile (1 \times Sq^{k-i}(b)) \\
 &= \sum_{i=0}^k (Sq^i(a) \smile 1) \times (1 \smile Sq^{k-i}(b)) \\
 &= \sum_{i=0}^k Sq^i(a) \times Sq^{k-i}(b)
 \end{aligned}$$

Agora, podemos introduzir a operação quadrado total, dada por:

$$Sq(a) = a + Sq^1(a) + Sq^2(a) + \dots + Sq^n(a), \quad \forall a \in H^n(X, Y; \mathbb{Z}_2)$$

Com isso, podemos obter que $Sq(a \times b) = Sq(a) \times Sq(b)$. De fato, para quaisquer $a \in H^n(X, Y; \mathbb{Z}_2)$ e $b \in H^m(X', Y'; \mathbb{Z}_2)$, temos:

$$\begin{aligned}
 Sq(a) \times Sq(b) &= (a + Sq^1(a) + Sq^2(a) + \dots + Sq^n(a)) \times (b + Sq^1(b) + Sq^2(b) + \dots + Sq^m(b)) \\
 &= (Sq^0(a) + Sq^1(a) + Sq^2(a) + \dots + Sq^n(a)) \times (Sq^0(b) + Sq^1(b) + Sq^2(b) + \dots + Sq^m(b)) \\
 &= (Sq^0(a) \times Sq^0(b) + Sq^0(a) \times Sq^1(b) + Sq^0(a) \times Sq^2(b) + \dots + Sq^0(a) \times Sq^m(b)) \\
 &\quad + (Sq^1(a) \times Sq^0(b) + Sq^1(a) \times Sq^1(b) + Sq^1(a) \times Sq^2(b) + \dots + Sq^1(a) \times Sq^m(b)) \\
 &\quad + (Sq^2(a) \times Sq^0(b) + Sq^2(a) \times Sq^1(b) + Sq^2(a) \times Sq^2(b) + \dots + Sq^2(a) \times Sq^m(b)) \\
 &\quad + \dots \\
 &\quad + (Sq^n(a) \times Sq^0(b) + Sq^n(a) \times Sq^1(b) + Sq^n(a) \times Sq^2(b) + \dots + Sq^n(a) \times Sq^m(b)) \\
 &= (Sq^0(a) \times Sq^0(b)) + (Sq^0(a) \times Sq^1(b) + Sq^1(a) \times Sq^0(b)) + (Sq^0(a) \times Sq^2(b) + \\
 &\quad Sq^1(a) \times Sq^1(b) + Sq^2(a) \times Sq^0(b)) + \sum_{i=0}^3 Sq^i(a) \times Sq^{k-i}(b) + \dots + \sum_{i=0}^{n+m} Sq^i(a) \times Sq^{k-i}(b) \\
 &= Sq^0(a \times b) + Sq^1(a \times b) + Sq^2(a \times b) + Sq^3(a \times b) + \dots + Sq^{n+m}(a \times b) \\
 &= Sq(a \times b)
 \end{aligned}$$

Analogamente, obtemos que $Sq(a \smile b) = Sq(a) \smile Sq(b)$.

Com o auxílio destas propriedades sobre o quadrado de Steenrod e do Isomorfismo de Thom, podemos definir as classes de Stiefel-Whitney de um \mathbb{R}^n -fibrado ξ do seguinte modo: se E é o espaço total de ξ , $u \in H^n(E, E_0; \mathbb{Z}_2)$ é a classe fundamental de

cohomologia do par (E, E_0) e $\phi_i : H^i(B; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^{i+n}(E, E_0; \mathbb{Z}_2)$ são os isomorfismos de Thom associados ao fibrado ξ , para qualquer $i \geq 0$, então:

Definição 7.3. *Seja ξ um \mathbb{R}^n -fibrado. Então, as classes de Stiefel-Whitney de ξ são definidas por $w_i(\xi) = \phi_i^{-1} \circ Sq^i(u)$, para qualquer $i \geq 0$, onde $\phi_0(1) = u$.*

Nestas condições, podemos escrever a classe de Stiefel-Whitney total de ξ como:

$$\begin{aligned} W(\xi) &= \phi^{-1}(Sq(u)) \\ &= \phi^{-1}(Sq^0(u) + Sq^1(u) + Sq^2(u) + \dots + Sq^n(u)) \\ &= \phi_0^{-1} \circ Sq^0(u) + \phi_1^{-1} \circ Sq^1(u) + \phi_2^{-1} \circ Sq^2(u) + \dots + \phi_n^{-1} \circ Sq^n(u) \\ &= w_0(\xi) + w_1(\xi) + w_2(\xi) + \dots + w_n(\xi) \end{aligned}$$

Deste modo, estamos preparados para mostrar que as classes de Stiefel-Whitney, assim definidas, satisfazem os Axiomas 1,2,3 e 4 enunciados no Capítulo 6.

7.2 Verificação do Axioma 1

Verifiquemos que: "A cada \mathbb{R}^n -fibrado vetorial ξ , existe uma sequência de classes de cohomologia singular $w_i(\xi) \in H^i(B(\xi); \mathbb{Z}_2)$, $i = 0, 1, \dots$, chamadas de classes de Stiefel-Whitney de ξ , que satisfazem:

- i) $w_0(\xi) = 1 \in H^0(B(\xi); \mathbb{Z}_2)$;
- ii) $w_i(\xi) = 0$, para $i > n$."

De fato, sejam ξ um \mathbb{R}^n -fibrado com espaços total e base E e B , respectivamente, $u \in H^n(E, E_0; \mathbb{Z}_2)$ a classe fundamental de cohomologia do par (E, E_0) e $\phi_i : H^i(B; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^{i+n}(E, E_0; \mathbb{Z}_2)$ os isomorfismos de Thom associados a este fibrado, para qualquer $i \geq 0$. Então, por definição, $w_i(\xi) \in H^i(B; \mathbb{Z}_2)$, para qualquer $i \geq 0$. Ainda:

- i) $w_0(\xi) = \phi_0^{-1} \circ Sq^0(u) = \phi_0^{-1}(u) = 1$;
- ii) para $i > n$, $w_i(\xi) = \phi_i^{-1} \circ Sq^i(u) = \phi_i^{-1}(0) = 0$.

7.3 Verificação do Axioma 2

Verifiquemos que: "Se ξ e η são fibrados vetoriais tais que $\xi \cong \bar{f}^* \eta$, para alguma aplicação fibrada $f : E(\xi) \rightarrow E(\eta)$, então $w_i(\xi) = \bar{f}_i^*(w_i(\eta))$, para qualquer $i \geq 0$."

De fato, sejam ξ e η \mathbb{R}^n -fibrados com espaços totais E e E' e espaços bases B e B' , respectivamente. Considere também $u \in H^n(E, E_0; \mathbb{Z}_2)$ e $u' \in H^n(E', E'_0; \mathbb{Z}_2)$ as classes fundamentais de cohomologia dos pares (E, E_0) e (E', E'_0) , respectivamente. Ainda, denotemos por $\phi_i : H^i(B; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^{i+n}(E, E_0; \mathbb{Z}_2)$ e $\phi'_i : H^i(B'; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^{i+n}(E', E'_0; \mathbb{Z}_2)$

os isomorfismos de Thom associados, respectivamente, aos fibrados ξ e η .

Agora, considere $f : E \rightarrow E'$ uma aplicação fibrada qualquer de ξ em η e $g : (E, E_0) \rightarrow (E', E'_0)$ a induzida de f a nível de pares. Então, os Lemas 7.1 e 7.2 garantem que $g_n^*(u') = u$ e $g_{i+n}^* \circ \phi'_i = \phi_i \circ \bar{f}_i^*$, para qualquer $i \geq 0$.

Portanto, para todo $i \geq 0$ temos:

$$\begin{aligned} \bar{f}_i^*(w_i(\eta)) &= \bar{f}_i^*(\phi_i'^{-1} \circ Sq^i(u')) \\ &= \bar{f}_i^* \circ \phi_i'^{-1} \circ Sq^i(u') \\ &= \phi_i^{-1} \circ g_{i+n}^* \circ Sq^i(u') \\ &= \phi_i^{-1} \circ Sq^i \circ g_n^*(u') \\ &= \phi_i^{-1} \circ Sq^i(u) \\ &= w_i(\xi). \end{aligned}$$

7.4 Verificação do Axioma 3

Verifiquemos que: "Se ξ e η são fibrados vetoriais sobre o mesmo espaço base, então $w_k(\xi \oplus \eta) = \sum_{i=0}^k w_i(\xi) \smile w_{k-i}(\eta)$, para qualquer $k \geq 0$."

De fato, sejam ξ' um \mathbb{R}^n -fibrado e ξ'' um \mathbb{R}^m -fibrado com espaços totais E' e E'' , espaços bases B' e B'' e fibras F' e F'' , respectivamente. Considere também $u' \in H^n(E', E'_0; \mathbb{Z}_2)$ e $u'' \in H^m(E'', E''_0; \mathbb{Z}_2)$ as classes fundamentais de cohomologia dos pares (E', E'_0) e (E'', E''_0) , respectivamente. Ainda, denotemos por $\phi'_i : H^i(B'; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^{i+n}(E', E'_0; \mathbb{Z}_2)$ e $\phi''_i : H^i(B''; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^{i+m}(E'', E''_0; \mathbb{Z}_2)$ os isomorfismos de Thom associados, respectivamente, aos fibrados ξ' e ξ'' .

Agora, considere $\xi = \xi' \times \xi''$, onde os espaços total, base e a fibra de ξ são $E = E' \times E''$, $B = B' \times B''$ e $F = F' \times F''$, respectivamente. Como $E'_0 \subset E'$ e $E''_0 \subset E''$ são abertos, então o produto cross $u' \times u'' \in H^{n+m}(E' \times E'', (E' \times E'_0) \cup (E'_0 \times E''); \mathbb{Z}_2)$ está bem definido.

Ainda, como $(E' \times E''_0) \cup (E'_0 \times E'') = E_0$, então $u' \times u'' = u$, onde $u \in H^{n+m}(E, E_0; \mathbb{Z}_2)$ é a classe fundamental de cohomologia do par (E, E_0) . Com efeito, considere $F = F' \times F''$ uma fibra qualquer de ξ . Desde que $u'|_{(F', F'_0)}$ e $u''|_{(F'', F''_0)}$ são as únicas classes que geram $H^n(F', F'_0; \mathbb{Z}_2)$ e $H^m(F'', F''_0; \mathbb{Z}_2)$, respectivamente, então $(u' \times u'')|_{(F, F_0)}$ gera $H^{n+m}(F, F_0; \mathbb{Z}_2)$. Mas, $u|_{(F, F_0)}$ é a única classe que gera $H^{n+m}(F, F_0; \mathbb{Z}_2)$, então $(u' \times u'')|_{(F, F_0)} = u|_{(F, F_0)}$. Por outro lado, segue da unicidade da classe u que $u' \times u'' = u$.

Agora, sendo $\phi_k : H^k(B; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^{k+n+m}(E, E_0; \mathbb{Z}_2)$ os isomorfismos de Thom associados ao fibrado ξ para todo $k \geq 0$, note que para quaisquer $a \in H^i(B'; \mathbb{Z}_2)$ e

$b \in H^{k-i}(B''; \mathbb{Z}_2)$ temos:

$$\begin{aligned}
\phi_k(a \times b) &= (\pi_\xi)_k^*(a \times b) \smile u \\
&= ((\pi_{\xi'})_i^*(a) \times (\pi_{\xi''})_{k-i}^*(b)) \smile (u' \times u'') \\
&= ((\pi_{\xi'})_i^*(a) \smile u') \times ((\pi_{\xi''})_{k-i}^*(b) \smile u'') \\
&= \phi'_i(a) \times \phi''_{k-i}(b)
\end{aligned}$$

Logo, para qualquer $k \geq 0$, temos:

$$\begin{aligned}
w_k(\xi) &= \phi_k^{-1} \circ Sq^k(u) \\
&= \phi_k^{-1} \circ Sq^k(u' \times u'') \\
&= \phi_k^{-1} \left(\sum_{i=0}^k Sq^i(u') \times Sq^{k-i}(u'') \right) \\
&= \sum_{i=0}^k \phi_k^{-1} (Sq^i(u') \times Sq^{k-i}(u'')) \\
&= \sum_{i=0}^k (\phi'_i{}^{-1}(Sq^i(u'))) \times (\phi''_{k-i}{}^{-1}(Sq^{k-i}(u''))) \\
&= \sum_{i=0}^k w_i(\xi') \times w_{k-i}(\xi'')
\end{aligned}$$

Por fim, supondo ξ' e ξ'' sobre o mesmo espaço base B e $d : B \rightarrow B \times B$ a aplicação diagonal, então $\xi' \oplus \xi'' \cong d^*(\xi' \times \xi'')$. Deste modo, segue do Axioma 2 que para qualquer $k \geq 0$ temos:

$$\begin{aligned}
w_k(\xi' \oplus \xi'') &= d_k^*(w_k(\xi' \times \xi'')) \\
&= d_k^* \left(\sum_{i=0}^k w_i(\xi') \times w_{k-i}(\xi'') \right) \\
&= \sum_{i=0}^k d_k^*(w_i(\xi') \times w_{k-i}(\xi'')) \\
&= \sum_{i=0}^k w_i(\xi') \smile w_{k-i}(\xi'').
\end{aligned}$$

7.5 Verificação do Axioma 4

Verifiquemos que: "Para o fibrado linha canônico γ_1^1 sobre $\mathbb{R}P^1$, temos $w_1(\gamma_1^1) = b \neq 0$, onde $\langle b \rangle = H^1(\mathbb{R}P^1; \mathbb{Z}_2)$."

Seja γ_1^1 o fibrado linha canônico com espaços total e base E e $\mathbb{R}P^1$, respectivamente. Então

$$M = \{(\bar{x}, v) \in E : \|(\bar{x}, v)\| \leq 1\}$$

$$= \{(\bar{x}, \lambda x) \in E : |\lambda| \leq 1\}$$

é homeomorfo a uma faixa de Möebius. O homeomorfismo pode ser visto do seguinte modo: "Para cada $(\bar{x}, \lambda x) \in M$, temos que $\bar{x} \in \mathbb{R}P^1$, isto é, $\bar{x} = \overline{-x}$. Deste modo, temos em M a seguinte relação de equivalência:

para qualquer $\lambda \in [-1, 1]$, $(\bar{x}, \lambda x) \sim (\bar{y}, \lambda y)$ se, e somente se, $y = x$ ou $y = -x$.

Por outro lado, como $\mathbb{R}P^1 \approx S^1 \approx \frac{[0,1]}{0 \sim 1}$, então M pode ser visto como o conjunto $\{(\bar{x}, \lambda) \in \frac{[0,1]}{0 \sim 1} \times [-1, 1]\}$, ou seja, $M = \frac{[0,1]}{0 \sim 1} \times [-1, 1]$. Assim, podemos reescrever a relação de equivalência em M como sendo:

$(\bar{x}, \lambda) \sim (\bar{y}, \delta)$ se, e somente se, $y = x$ e $\delta = \lambda$ ou $x = 0$, $y = 1$ e $\delta = -\lambda$.

Portanto, $M \approx \frac{[0,1] \times [-1,1]}{(0,\lambda) \sim (1,-\lambda)}$, isto é, M é homeomorfo a uma faixa de Möebius."

Agora, como M e ∂M tem o mesmo tipo de homotopia de E e E_0 , respectivamente, então $H^i(E, E_0; \mathbb{Z}_2) \cong H^i(M, \partial M; \mathbb{Z}_2)$ para todo $i \geq 0$.

Por outro lado, mergulhando D^2 em $\mathbb{R}P^2$, temos que $\mathbb{R}P^2 - \text{int}(D^2) \approx M$. Esse homeomorfismo pode ser visto do seguinte modo:

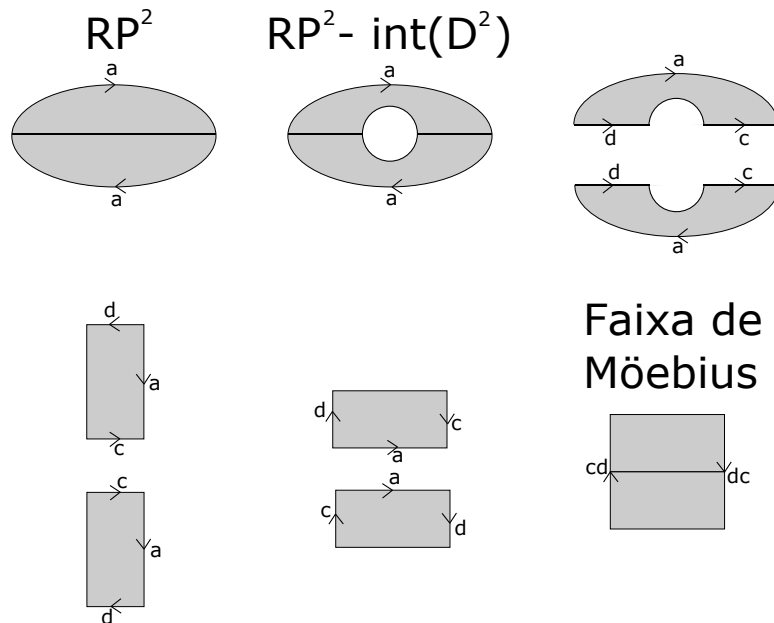


Figura 7.1: Homeomorfismo entre $\mathbb{R}P^2 - \text{int}(D^2)$ e uma faixa de Möebius

Ainda, considerando $U = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < \frac{1}{2}\}$, temos que $\bar{U} \subset \text{int}(D^2)$. Então, segue do Teorema da Excisão que $H^i(\mathbb{R}P^2, D^2; \mathbb{Z}_2) \cong H^i(\mathbb{R}P^2 - U, D^2 - U; \mathbb{Z}_2)$ para todo $i \geq 0$.

Também, como $\mathbb{R}P^2 - U$ e $D^2 - U$ tem o mesmo tipo de homotopia de M e ∂M , respectivamente, então $H^i(\mathbb{R}P^2 - U, D^2 - U; \mathbb{Z}_2) \cong H^i(M, \partial M; \mathbb{Z}_2)$ para todo $i \geq 0$.

Por outro lado, segue da exatidão da sequência longa de cohomologia do par $(\mathbb{R}P^2, D^2)$ que $H^1(\mathbb{R}P^2, D^2; \mathbb{Z}_2) \cong H^1(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}_2)$. Ainda, como $H^1(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ e $H^1(\mathbb{R}P^1; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$, então $H^1(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}_2) \cong H^1(\mathbb{R}P^1; \mathbb{Z}_2)$.

Sendo $u \in H^1(E, E_0; \mathbb{Z}_2)$ a classe fundamental de cohomologia do par (E, E_0) , então u deve se corresponder com $b \in H^1(\mathbb{R}P^1; \mathbb{Z}_2)$, onde $\langle b \rangle = H^1(\mathbb{R}P^1; \mathbb{Z}_2)$, devido aos isomorfismos

$$\begin{aligned} H^1(E, E_0; \mathbb{Z}_2) &\cong H^1(M, \partial M; \mathbb{Z}_2) \\ &\cong H^1(\mathbb{R}P^2 - U, D^2 - U; \mathbb{Z}_2) \\ &\cong H^1(\mathbb{R}P^2, D^2; \mathbb{Z}_2) \\ &\cong H^1(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}_2) \\ &\cong H^1(\mathbb{R}P^1; \mathbb{Z}_2) \end{aligned}$$

Então, $(\pi_{\gamma_1^1})_1^*(b) = u$. Portanto, sendo $\phi_1 : H^1(\mathbb{R}P^1; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^2(E, E_0; \mathbb{Z}_2)$ o isomorfismo de Thom associado ao fibrado γ_1^1 dado por $\phi_1(x) = (\pi_{\gamma_1^1})_1^*(x) \smile u$, para todo $x \in H^1(\mathbb{R}P^1; \mathbb{Z}_2)$, então:

$$w_1(\gamma_1^1) = \phi_1^{-1} \circ Sq^1(u) = \phi_1^{-1}(u \smile u) = b \neq 0.$$

8 Unicidade das Classes de Stiefel-Whitney

Com o auxílio das Variedades de Grassmann, provaremos neste capítulo a unicidade das Classes de Stiefel-Whitney.

8.1 Variedades de Grassmann

Nesta seção, enunciaremos as definições e os resultados sobre as Variedades de Grassmann ¹ que serão necessários para a prova da unicidade das Classes de Stiefel-Whitney.

Definição 8.1. *A variedade de Grassmann $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ é o conjunto de todos os subespaços vetoriais n -dimensionais de \mathbb{R}^{n+k} .*

Exemplo 8.1. A variedade de Grassmann $G_1(\mathbb{R}^{1+k})$ é o conjunto de todas as retas que passam pela origem de \mathbb{R}^{1+k} . Por outro lado, como cada reta que passa pela origem de \mathbb{R}^{1+k} intercepta um único par de pontos antípodas da esfera S^k , então podemos identificar $G_1(\mathbb{R}^{1+k})$ com o quociente $\frac{S^k}{a \sim -a}$, ou seja, podemos identificar $G_1(\mathbb{R}^{1+k})$ com o espaço projetivo $\mathbb{R}P^k$.

Agora, denotemos por $\mathbb{R}^\infty = \bigcup_{k \geq 1} \mathbb{R}^k$ o espaço munido da seguinte topologia: $U \subset \mathbb{R}^\infty$ é aberto se, e somente se, $U \cap \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^k$ é aberto para todo $k \geq 1$.

Definição 8.2. *A variedade de Grassmann infinita $G_n = G_n(\mathbb{R}^\infty) = \bigcup_{k \geq 0} G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ é o conjunto de todos os subespaços vetoriais n -dimensionais de \mathbb{R}^∞ munido da seguinte topologia: $U \subset G_n$ é aberto se, e somente se, $U \cap G_n(\mathbb{R}^{n+k}) \subset G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ é aberto para todo $k \geq 0$.*

Em particular, o espaço projetivo infinito $\mathbb{R}P^\infty = G_1 = \bigcup_{k \geq 0} \mathbb{R}P^k$ é munido da seguinte topologia: $U \subset \mathbb{R}P^\infty$ é aberto se, e somente se, $U \cap \mathbb{R}P^k \subset \mathbb{R}P^k$ é aberto para todo $k \geq 0$.

¹Para mais detalhes sobre Variedades de Grassmann, ver ([8], p. 55-71).

Lema 8.1. *A variedade de Grassmann infinita G_n é um espaço topológico paracompacto.*

A demonstração do Lema 8.1 pode ser encontrada em ([8], p. 66, Corolário).

Considere também o fibrado universal γ^n , onde $E(\gamma^n) = \{(X, x) \in G_n \times \mathbb{R}^\infty : x \in X\}$, $B(\gamma^n) = G_n$ e $\pi : E(\gamma^n) \rightarrow G_n$ é definida por $\pi(X, x) = X$, para todo $(X, x) \in G_n \times \mathbb{R}^\infty$. Note que γ^n é um \mathbb{R}^n -fibrado, pois para qualquer $X \in G_n$, temos que $F_X(\gamma^n) = \{X\} \times X$. A prova de que γ^n satisfaz a condição de trivialidade local pode ser encontrada em ([8], p. 64, Lema 5.4).

Lema 8.2. *Para qualquer \mathbb{R}^n -fibrado ξ sobre um espaço base paracompacto existe uma aplicação fibrada $f : E(\xi) \rightarrow E(\gamma^n)$ de ξ em γ^n .*

A demonstração do Lema 8.2 pode ser encontrada em ([8], p. 65, Teorema 5.6).

8.2 Prova da Unicidade

Agora, feitas as considerações necessárias sobre as Variedades de Grassmann, provemos que as Classes de Stiefel-Whitney são unicamente determinadas.

Teorema 8.1. *Existe, no máximo, uma correspondência $\xi \mapsto W(\xi)$ que associa a cada fibrado ξ sobre um espaço base paracompacto uma seqüência de classes de cohomologia satisfazendo os quatro axiomas que caracterizam as classes de Stiefel-Whitney.*

Demonstração. Suponha que existem duas correspondências $\xi \mapsto W(\xi)$ e $\xi \mapsto \widetilde{W}(\xi)$ que satisfazem os quatro axiomas que caracterizam as classes de Stiefel-Whitney.

Então, segue dos Axiomas 1 e 4 que $W(\xi) = \widetilde{W}(\xi) = 1 + b$, onde $\langle b \rangle = H^1(\mathbb{R}P^1; \mathbb{Z}_2)$.

Agora, considere a inclusão $i : E(\gamma_1^1) \hookrightarrow E(\gamma^1)$ que é uma aplicação fibrada de γ_1^1 em γ^1 e a inclusão $j : \mathbb{R}P^1 \hookrightarrow \mathbb{R}P^\infty$ que é a aplicação correspondente da aplicação i nos espaços bases. Deste modo, $\gamma_1^1 \cong j^*\gamma^1$. Assim, segue do Axioma 2 que

$$w_k(\gamma_1^1) = j_k^*(w_k(\gamma^1)) \text{ e } \widetilde{w}_k(\gamma_1^1) = j_k^*(\widetilde{w}_k(\gamma^1)), \text{ para todo } k \geq 0.$$

Ainda, como γ^1 é um \mathbb{R} -fibrado, então $w_k(\gamma^1) = \widetilde{w}_k(\gamma^1) = 0$ para qualquer $k \geq 2$. Por outro lado, $j_1^*(w_1(\gamma^1)) = b \neq 0$ e $j_1^*(\widetilde{w}_1(\gamma^1)) = b \neq 0$. Agora, como j_1^* é linear e $w_1(\gamma^1), \widetilde{w}_1(\gamma^1) \in H^1(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2) = \langle a \rangle$, então $w_1(\gamma^1) = \widetilde{w}_1(\gamma^1) = a$, ou seja, $W(\gamma^1) = \widetilde{W}(\gamma^1) = 1 + a$.

Agora, fixando um inteiro $n \geq 0$, considere $p_1, \dots, p_n : \underbrace{\mathbb{R}P^\infty \times \dots \times \mathbb{R}P^\infty}_{n\text{-vezes}} \rightarrow \mathbb{R}P^\infty$ as projeções canônicas e $a_i = (p_i)_1^*(a)$ para qualquer $i = 1, \dots, n$.

Como $\underbrace{\gamma^1 \times \dots \times \gamma^1}_{n\text{-vezes}} \cong (p_1)^* \gamma^1 \oplus \dots \oplus (p_n)^* \gamma^1$, então

$$W(\underbrace{\gamma^1 \times \dots \times \gamma^1}_{n\text{-vezes}}) = \widetilde{W}(\underbrace{\gamma^1 \times \dots \times \gamma^1}_{n\text{-vezes}}) = (1 + a_1) \smile \dots \smile (1 + a_n).$$

Como $\underbrace{\gamma^1 \times \dots \times \gamma^1}_{n\text{-vezes}}$ é um \mathbb{R}^n -fibrado sobre o espaço base $\underbrace{G_1 \times \dots \times G_1}_{n\text{-vezes}}$, que é paracompacto, então segue do Lema 8.2 que existe uma aplicação fibrada de $\underbrace{\gamma^1 \times \dots \times \gamma^1}_{n\text{-vezes}}$ em γ^n , que denotaremos por $g : E(\underbrace{\gamma^1 \times \dots \times \gamma^1}_{n\text{-vezes}}) \rightarrow E(\gamma^n)$.

Mas, em ([8], p. 85) obtemos que $\bar{g}_k^* : H^k(G_n; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^k(\underbrace{\mathbb{R}P^\infty \times \dots \times \mathbb{R}P^\infty}_{n\text{-vezes}}; \mathbb{Z}_2)$ é um isomorfismo sobre a imagem, isto é, \bar{g}_k^* é um monomorfismo para todo $k \geq 0$. Logo, como

$$\bar{g}_k^*(w_k(\gamma^n)) = w_k(\underbrace{\gamma^1 \times \dots \times \gamma^1}_{n\text{-vezes}}) = \tilde{w}_k(\underbrace{\gamma^1 \times \dots \times \gamma^1}_{n\text{-vezes}}) = \bar{g}_k^*(\tilde{w}_k(\gamma^n))$$

para todo $k \geq 0$, então $w_k(\gamma^n) = \tilde{w}_k(\gamma^n)$ para todo $k \geq 0$.

Por fim, seja ξ um \mathbb{R}^n -fibrado qualquer sobre um espaço base paracompacto. Segue do Lema 8.2 que existe uma aplicação fibrada $f : E(\xi) \rightarrow E(\gamma^n)$ de ξ em γ^n . Logo, para qualquer $k \geq 0$ temos:

$$w_k(\xi) = \bar{f}_k^*(w_k(\gamma^n)) = \bar{f}_k^*(\tilde{w}_k(\gamma^n)) = \tilde{w}_k(\xi).$$

Portanto, $W(\xi) = \widetilde{W}(\xi)$, isto é, as classes de Stiefel-Whitney são unicamente determinadas. \square

9 Fibrados Orientados e Classe de Euler

Neste último capítulo, definiremos a classe de Euler associada a um fibrado diferente do que trabalhamos até agora, o fibrado orientado. Para isto, precisaremos definir o que é uma orientação de um espaço vetorial e o que esta orientação nos garante em termos de cohomologia.

Tomemos o cuidado de que, apenas neste capítulo, trabalharemos com cohomologia com coeficientes sobre \mathbb{Z} , diferentemente do que trabalhamos até agora, onde a cohomologia sempre foi com coeficientes sobre \mathbb{Z}_2 , pois a orientação do fibrado orientado irá interferir na classe de Euler associada a este fibrado, como veremos na propriedade 9.5.

Definição 9.1. *Uma orientação em um espaço vetorial real V de dimensão $n > 0$ é uma escolha de uma classe de equivalência das bases de V , onde duas bases ordenadas B e B' de V são ditas equivalentes se, e somente se, $\det(M_B^{B'}) > 0$, onde $M_B^{B'}$ denota a matriz mudança de base de B para B' .*

Evidentemente, todo espaço vetorial V tem precisamente duas orientações distintas.

Na topologia algébrica, para especificar a orientação de um simplexo, é habitual escolher alguma orientação dos seus vértices, como segue:

Seja Σ^n um n -simplexo mergulhado linearmente em um espaço vetorial de dimensão $n > 0$ com vértices ordenados A_0, A_1, \dots, A_n . Então, escolhendo a base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V , onde $v_i = \overrightarrow{A_{i-1}A_i}$, para qualquer $i = 1, \dots, n$, obtemos uma orientação de V .

Note que a orientação de V corresponde com a escolha de um dos possíveis geradores de $H_n(V, V_0; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, onde $V_0 = V - \{0\}$. De fato, considere Δ^n o n -simplexo padrão, com vértices ordenados canonicamente. Escolha alguma orientação de V preservando o mergulho linear $\sigma : \Delta^n \rightarrow V$ tal que $\sigma(b) = 0$, onde $b \in \Delta^n$ é o baricentro de Δ^n . Como $\sigma(\partial\Delta^n) \subset V_0$, então $\sigma \in Z_n(V, V_0; \mathbb{Z})$. Logo, $[\sigma] = \mu_V \in H_n(V, V_0; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} = \langle \mu_V \rangle$. Analogamente, $H^n(V, V_0; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} = \langle u_V \rangle$, onde $u_V(\mu_V) = 1$.

9.1 Fibrados Orientados

De modo análogo ao que foi feito no início do capítulo 7, fixaremos algumas notações. Para ξ um \mathbb{R}^n -fibrado, denotaremos, por comodidade, $E(\xi) = E$, $B(\xi) = B$ e $F_b(\xi) = F$, para qualquer $b \in B$. Ainda, considere $s : B \rightarrow E$ a seção nula de ξ , isto é, $s(b) = 0_b \in F$ para todo $b \in B$, onde $0_b \in F$ denota o elemento neutro da fibra F , para cada $b \in B$. Deste modo, se denotarmos $E_0 = E - \text{Im}(s)$ e $F_0 = F - \{0_b\}$, para todo $b \in B$, então $F_0 = E_0 \cap F$, para todo $b \in B$.

Definição 9.2. Dizemos que um \mathbb{R}^n -fibrado ξ , com espaço base B e $n > 0$, está orientado se cada fibra $F = \pi_\xi^\perp(b)$ possui uma orientação (isto quer dizer que existe um elemento preestabelecido $u_F \in H^n(F, F_0; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$) satisfazendo a seguinte condição de compatibilidade local: "para qualquer $b_0 \in B$, existe um sistema de coordenadas locais (N, h) de ξ sobre $b_0 \in B$ tal que para cada fibra $F = \pi_\xi^\perp(b)$, com $b \in N$, o isomorfismo linear $h(b, _): \mathbb{R}^n \rightarrow F$ preserva orientação, isto é, se $O \in H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_0^n; \mathbb{Z})$ representa a orientação fixada de \mathbb{R}^n , então $(h(b, _))_n^*(u_F) = O$ ".

A condição de compatibilidade local de um \mathbb{R}^n -fibrado orientado ξ , com espaços total e base E e B , respectivamente, nos garante que:

Lema 9.1. Para qualquer $b_0 \in B$, existe um aberto $N \subset B$ contendo $b_0 \in B$ e existe uma única classe de cohomologia $u_N \in H^n(\pi_\xi^\perp(N), \pi_\xi^\perp(N)_0; \mathbb{Z})$ tal que $i_n^*(u_N) = u_F$, onde $\pi_\xi^\perp(N)_0 = \pi_\xi^\perp(N) \cap E_0$, $F = \pi_\xi^\perp(b_0)$ e $i : F \hookrightarrow \pi_\xi^\perp(N)$ é a inclusão.

Demonstração. Inicialmente, segue da condição de compatibilidade local que para qualquer $b_0 \in B$, existe um sistema de coordenadas locais (N, h) de ξ sobre $b_0 \in B$ tal que para cada fibra $F = \pi_\xi^\perp(b)$, com $b \in N$, o isomorfismo linear $h(b, _): \mathbb{R}^n \rightarrow F$ preserva orientação, isto é, se $O \in H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_0^n; \mathbb{Z})$ representa a orientação fixada de \mathbb{R}^n , então $(h(b, _))_n^*(u_F) = O$. Agora, considere o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \{b_0\} \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n & \xrightarrow{j} & N \times \mathbb{R}^n \\ \downarrow h(b_0, _) & & \downarrow h \\ F & \xrightarrow{i} & \pi_\xi^\perp(N) \end{array}$$

comutativo, onde $i : F \hookrightarrow \pi_\xi^\perp(N)$ e $j : \{b_0\} \hookrightarrow \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \rightarrow N \times \mathbb{R}^n$ são inclusões. Assim, obtemos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_0^n; \mathbb{Z}) & \xleftarrow{j_n^*} & H^n(N \times \mathbb{R}^n, N \times \mathbb{R}_0^n; \mathbb{Z}) \\ \uparrow (h(b, _))_n^* \cong & & \uparrow \cong h_n^* \\ H^n(F, F_0; \mathbb{Z}) & \xleftarrow{i_n^*} & H^n(\pi_\xi^\perp(N), \pi_\xi^\perp(N)_0; \mathbb{Z}) \end{array}$$

Por outro lado, considerando as sequências exatas longas de cohomologia dos pares $(N \times \mathbb{R}^n, N \times \mathbb{R}_0^n)$ e $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_0^n)$, obtemos o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 H^{n-1}(N \times \mathbb{R}^n; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^{n-1}(N \times \mathbb{R}_0^n; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\delta} & H^n(N \times \mathbb{R}^n, N \times \mathbb{R}_0^n; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^n(N \times \mathbb{R}^n; \mathbb{Z}) \\
 \downarrow j_{n-1}^* & & \downarrow (j|_{\mathbb{R}_0^n})_{n-1}^* & & \downarrow j_n^* & & \downarrow j_n^* \\
 H^{n-1}(\mathbb{R}^n; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^{n-1}(\mathbb{R}_0^n; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\sigma} & H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_0^n; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^n(\mathbb{R}^n; \mathbb{Z})
 \end{array}$$

que é comutativo em cada quadrado.

Quando $n > 1$, obtemos que

$$\begin{array}{ccccccc}
 H^{n-1}(N \times \mathbb{R}^n; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^{n-1}(N \times \mathbb{R}_0^n; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\delta} & H^n(N \times \mathbb{R}^n, N \times \mathbb{R}_0^n; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^n(N \times \mathbb{R}^n; \mathbb{Z}) \\
 \downarrow j_{n-1}^* & & \downarrow (j|_{\mathbb{R}_0^n})_{n-1}^* & & \downarrow j_n^* & & \downarrow j_n^* \\
 0 & \longrightarrow & H^{n-1}(\mathbb{R}_0^n; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\sigma} & H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_0^n; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Como σ é um isomorfismo, segue que existe um único $\alpha \in H^{n-1}(\mathbb{R}_0^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ tal que $\sigma(\alpha) = O$. Deste modo, como caso particular da fórmula de Künneth, que pode ser encontrada em ([11], p. 249, Teorema 1), obtemos:

$$\begin{aligned}
 H^{n-1}(N \times \mathbb{R}_0^n; \mathbb{Z}) &= \left(\bigoplus_{i+j=n-1} H^i(N; \mathbb{Z}) \otimes H^j(\mathbb{R}_0^n; \mathbb{Z}) \right) \oplus Tor \\
 &= H^{n-1}(N; \mathbb{Z}) \oplus H^{n-1}(\mathbb{R}_0^n; \mathbb{Z}) \oplus Tor^1
 \end{aligned}$$

Como $H^{n-1}(\mathbb{R}_0^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} = \langle \alpha \rangle$, então $(j|_{\mathbb{R}_0^n})_{n-1}^* : H^{n-1}(N \times \mathbb{R}_0^n; \mathbb{Z}) \rightarrow H^{n-1}(\mathbb{R}_0^n; \mathbb{Z})$ é definido por $(j|_{\mathbb{R}_0^n})_{n-1}^*(x, m\alpha, t) = m\alpha$, para todo $(x, m\alpha, t) \in H^{n-1}(N \times \mathbb{R}_0^n; \mathbb{Z})$. Assim, $(j|_{\mathbb{R}_0^n})_{n-1}^*(0, \alpha, 0) = \alpha$.

Considerando $\tilde{u}_N = \delta(0, \alpha, 0)$, temos que $\tilde{u}_N \in H^n(N \times \mathbb{R}^n, N \times \mathbb{R}_0^n; \mathbb{Z})$ é unicamente determinado, pois α é unicamente determinado. Ainda, $j_n^*(\tilde{u}_N) = j_n^* \circ \delta(0, \alpha, 0) = \sigma \circ (j|_{\mathbb{R}_0^n})_{n-1}^*(0, \alpha, 0) = \sigma(\alpha) = O$.

Definindo $u_N = (h_n^*)^{-1}(\tilde{u}_N)$, temos que $u_N \in H^n(\pi_\xi^+(N), \pi_\xi^+(N)_0; \mathbb{Z})$ é unicamente determinado e

¹Por comodidade, denotaremos a torsão de $H^{n-1}(N \times \mathbb{R}_0^n; \mathbb{Z})$ apenas por Tor .

$$i_n^*(u_N) = i_n^* \circ (h_n^*)^{-1}(\tilde{u}_N) = ((h(b, _))_n^*)^{-1} \circ j_n^*(\tilde{u}_N) = ((h(b, _))_n^*)^{-1}(O) = u_F$$

Agora, para o caso $n = 1$, obtemos o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} H^0(N \times \mathbb{R}; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^0(N \times \mathbb{R}_0; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\delta} & H^1(N \times \mathbb{R}, N \times \mathbb{R}_0; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^1(N \times \mathbb{R}; \mathbb{Z}) \\ \downarrow j_0^* & & \downarrow (j|_{\mathbb{R}_0})_0^* & & \downarrow j_1^* & & \downarrow j_1^* \\ H^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}_0; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^0(\mathbb{R}; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^0(\mathbb{R}_0; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\sigma} & H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_0; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^1(\mathbb{R}; \mathbb{Z}) \end{array}$$

que é comutativo em cada quadrado, ou seja, o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} H^0(N \times \mathbb{R}; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^0(N \times \mathbb{R}_0; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\delta} & H^1(N \times \mathbb{R}, N \times \mathbb{R}_0; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^1(N \times \mathbb{R}; \mathbb{Z}) \\ \downarrow j_0^* & & \downarrow (j|_{\mathbb{R}_0})_0^* & & \downarrow j_1^* & & \downarrow j_1^* \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\rho} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

é comutativo em cada quadrado. Sendo a seqüência inferior do diagrama acima uma seqüência exata, então $\rho : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e $\sigma : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ são definidos por $\rho(x) = (x, 0)$ e $\sigma(y, z) = z$, para todo $x \in \mathbb{Z}$ e para todo $(y, z) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, respectivamente. Deste modo, se $\langle \alpha \rangle = \mathbb{Z} \cong H^0(\mathbb{R}; \mathbb{Z})$ e $\langle O \rangle = \mathbb{Z} \cong H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_0; \mathbb{Z})$, então $\sigma(\alpha, O) = O$.

Assim, segue novamente da fórmula de Künneth, que pode ser encontrada em ([11], p. 249, Teorema 1), que:

$$H^0(N \times \mathbb{R}_0; \mathbb{Z}) = \left(\bigoplus_{i+j=0} H^i(N; \mathbb{Z}) \otimes H^j(\mathbb{R}_0; \mathbb{Z}) \right) \oplus Tor = H^0(N; \mathbb{Z}) \oplus H^0(\mathbb{R}_0; \mathbb{Z}) \oplus Tor^2$$

Como $H^0(\mathbb{R}_0; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \langle (\alpha, 0), (0, O) \rangle$, então $(j|_{\mathbb{R}_0})_0^* : H^0(N \times \mathbb{R}_0; \mathbb{Z}) \rightarrow H^0(\mathbb{R}_0; \mathbb{Z})$ é definido por $(j|_{\mathbb{R}_0})_0^*(x, (a\alpha, bO), t) = (a\alpha, bO)$, para todo $(x, (a\alpha, bO), t) \in H^0(N \times \mathbb{R}_0; \mathbb{Z})$. Logo, $(j|_{\mathbb{R}_0})_0^*(0, (\alpha, O), 0) = (\alpha, O)$.

Considerando $\tilde{u}_N = \delta(0, (\alpha, O), 0)$, temos que $\tilde{u}_N \in H^1(N \times \mathbb{R}, N \times \mathbb{R}_0; \mathbb{Z})$ é unicamente determinado, pois α e O são fixados. Ainda, $j_1^*(\tilde{u}_N) = j_1^* \circ \delta(0, (\alpha, O), 0) =$

²Novamente por comodidade, denotaremos a torsão de $H^0(N \times \mathbb{R}_0^n; \mathbb{Z})$ apenas por Tor .

$$\sigma \circ (j|_{\mathbb{R}_0})_0^*(0, (\alpha, O), 0) = \sigma(\alpha, O) = O.$$

Definindo $u_N = (h_1^*)^{-1}(\tilde{u}_N)$, temos que $u_N \in H^1(\pi_\xi^+(N), \pi_\xi^+(N)_0; \mathbb{Z})$ é unicamente determinado e

$$i_1^*(u_N) = i_1^* \circ (h_1^*)^{-1}(\tilde{u}_N) = ((h(b, _))_1^*)^{-1} \circ j_1^*(\tilde{u}_N) = ((h(b, _))_1^*)^{-1}(O) = u_F$$

Portanto, concluímos que para qualquer $b_0 \in B$, existe um aberto $N \subset B$ contendo $b_0 \in B$ e existe uma única classe de cohomologia $u_N \in H^n(\pi_\xi^+(N), \pi_\xi^+(N)_0; \mathbb{Z})$ tal que $i_n^*(u_N) = u_F$. \square

Note que o Lema 9.1 nos dá uma condição local. Entretanto, podemos enunciar sua forma geral como segue:

Teorema 9.1. *Se ξ é um \mathbb{R}^n -fibrado orientado com espaço total E , então o grupo $H^i(E, E_0; \mathbb{Z})$ é zero para $i < n$ e o grupo $H^n(E, E_0; \mathbb{Z})$ contém uma única classe u tal que, para cada fibra F de ξ , a restrição $u|_{(F, F_0)} \in H^n(F, F_0; \mathbb{Z})$ é igual ao gerador preestabelecido $u_F \in H^n(F, F_0; \mathbb{Z})$, isto é, se $i : (F, F_0) \hookrightarrow (E, E_0)$ é a inclusão, então $i_n^*(u) = u|_{(F, F_0)} = u_F$. Além disso, o produto cup relativo $\smile u : H^k(E; \mathbb{Z}) \rightarrow H^{k+n}(E, E_0; \mathbb{Z})$ define, para todo $k \geq 0$, um isomorfismo dado por $(\smile u)(x) = x \smile u$, para todo $x \in H^k(E; \mathbb{Z})$.*

A demonstração do Teorema 9.1 é encontrada em ([8], p. 105-114).

Definição 9.3. *A classe $u \in H^n(E, E_0; \mathbb{Z})$ é chamada classe fundamental de cohomologia do par (E, E_0) .*

Ainda, analogamente ao que foi feito na Observação 7.1, obtemos que $(\pi_\xi)_k^* : H^k(B; \mathbb{Z}) \rightarrow H^k(E; \mathbb{Z})$ é um isomorfismo para qualquer $k \geq 0$.

Definição 9.4. *O isomorfismo de Thom $\psi_k : H^k(B; \mathbb{Z}) \rightarrow H^{k+n}(E, E_0; \mathbb{Z})$ associado ao fibrado ξ é definido, para qualquer $k \geq 0$, pela composição*

$$H^k(B; \mathbb{Z}) \xrightarrow{(\pi_\xi)_k^*} H^k(E; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\smile u} H^{k+n}(E, E_0; \mathbb{Z})$$

Note que $\psi_0(1) = (\pi_\xi)_0^*(1) \smile u = 1 \smile u = u$

Para o entendimento dos Lemas 9.2 e 9.3, serão necessárias as seguintes considerações: sejam ξ e ξ' \mathbb{R}^n -fibrados com espaços totais E e E' , espaços bases B e B' , projeções π e π' e fibras F e F' , respectivamente; sejam $f : E \rightarrow E'$ uma aplicação fibrada de ξ em ξ' , $\bar{f} : B \rightarrow B'$ a aplicação correspondente de f nos espaços bases e $g : (E, E_0) \rightarrow (E', E'_0)$ a induzida de f a nível de pares; sejam $u \in H^n(E, E_0; \mathbb{Z})$ e $u' \in H^n(E', E'_0; \mathbb{Z})$ as classes fundamentais de cohomologia dos pares (E, E_0) e (E', E'_0) , respectivamente. Então:

Lema 9.2. $g_n^*(u') = u$.

Lema 9.3. *O isomorfismo de Thom é natural com relação à aplicações fibradas, isto é, o diagrama*

$$\begin{array}{ccc}
 H^i(B'; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\psi'_i} & H^{i+n}(E', E'_0; \mathbb{Z}) \\
 \bar{f}_i^* \downarrow & & \downarrow g_{i+n}^* \\
 H^i(B; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\psi_i} & H^{i+n}(E, E_0; \mathbb{Z})
 \end{array}$$

comuta, onde ψ_i e ψ'_i são os isomorfismos de Thom associados aos fibrados ξ e ξ' , respectivamente, para todo $i \geq 0$.

As demonstrações dos Lemas 9.2 e 9.3 são análogas às demonstrações dos Lemas 7.1 e 7.2, respectivamente.

9.2 Classe de Euler

Agora, estamos prontos para definir a classe de Euler de um fibrado orientado.

Definição 9.5. *A classe de Euler de um \mathbb{R}^n -fibrado orientado ξ , com espaço total E , é a classe de cohomologia $e(\xi) = ((\pi_\xi)_n^*)^{-1} \circ i_n^*(u)$, onde $i : E \hookrightarrow (E, E_0)$ é a inclusão e $u \in H^n(E, E_0; \mathbb{Z})$ é a classe fundamental de cohomologia do par (E, E_0) .*

Definição 9.6. *Se M é uma n -variedade C^∞ compacta tal que τ_M é um \mathbb{R}^n -fibrado orientado, então definimos $e(M) = e(\tau_M)$.*

Por fim, vejamos alguns resultados que podemos obter da classe de Euler.

Propriedade 9.1. *Sejam ξ um \mathbb{R}^n -fibrado orientado com espaços total e base E e B , respectivamente, $\psi_n : H^n(B; \mathbb{Z}) \rightarrow H^{2n}(E, E_0; \mathbb{Z})$ o isomorfismo de Thom associado ao fibrado ξ e $u \in H^n(E, E_0; \mathbb{Z})$ a classe fundamental de cohomologia do par (E, E_0) . Então, $e(\xi) = \psi_n^{-1}(u \smile u)$.*

Demonstração. Inicialmente, considerando $i : E \hookrightarrow (E, E_0)$ a inclusão, então $i_n^* : H^n(E, E_0; \mathbb{Z}) \rightarrow H^n(E; \mathbb{Z})$ é o homomorfismo definido por $i_n^*(u) = u|_E$, onde $u|_E = [\sigma] = u$, com $\sigma \in C_n(E)$ e $\partial(\sigma) \in C_{n-1}(E_0)$. Então, $i_n^*(u) \smile u = u|_E \smile u = u \smile u$.

Por outro lado:

$$\begin{aligned}
 \psi_n(e(\xi)) &= (\pi_\xi)_n^*(e(\xi)) \smile u \\
 &= (\pi_\xi)_n^*((\pi_\xi)_n^*)^{-1} \circ i_n^*(u) \smile u \\
 &= i_n^*(u) \smile u \\
 &= u \smile u
 \end{aligned}$$

Portanto, $e(\xi) = \psi_n^{-1}(u \smile u)$. □

Propriedade 9.2. Sejam ξ e ξ' \mathbb{R}^n -fibrados orientados com espaços totais E e E' , respectivamente. Se $f : E \rightarrow E'$ é uma aplicação fibrada de ξ em ξ' que preserva orientação, então $e(\xi) = \bar{f}_n^*(e(\xi'))$.

Demonstração. Consideremos B e B' os espaços bases de ξ e ξ' , $\psi_n : H^n(B; \mathbb{Z}) \rightarrow H^{2n}(E, E_0; \mathbb{Z})$ e $\psi'_n : H^n(B'; \mathbb{Z}) \rightarrow H^{2n}(E', E'_0; \mathbb{Z})$ os isomorfismos de Thom associados aos fibrados ξ e ξ' , respectivamente, $u \in H^n(E, E_0; \mathbb{Z})$ e $u' \in H^n(E', E'_0; \mathbb{Z})$ as classes de cohomologia dos pares (E, E_0) e (E', E'_0) , respectivamente e $g : (E, E_0) \rightarrow (E', E'_0)$ a induzida de f a nível de pares. Então:

$$\begin{aligned} \bar{f}_n^*(e(\xi')) &= \bar{f}_n^*(\psi_n'^{-1}(u' \smile u')) \\ &= \psi_n^{-1} \circ g_{2n}^*(u' \smile u') \\ &= \psi_n^{-1}(g_n^*(u') \smile g_n^*(u')) \\ &= \psi_n^{-1}(u \smile u) \\ &= e(\xi) \end{aligned} \quad \square$$

Propriedade 9.3. Se ξ e ξ' são \mathbb{R}^n -fibrados orientados sobre o mesmo espaços base B tais que $\xi \cong \xi'$, então $e(\xi) = e(\xi')$.

Demonstração. Consideremos E e E' os espaços totais de ξ e ξ' , respectivamente. Como $\xi \cong \xi'$, então existe um homeomorfismo $f : E \rightarrow E'$ tal que $f|_{F_b(\xi)} : F_b(\xi) \rightarrow F_b(\xi')$ é um isomorfismo linear para todo $b \in B$. Deste modo, f é uma aplicação fibrada de ξ em ξ' e $1_B : B \rightarrow B$ é a aplicação correspondente de f nos espaços bases. Então, $\xi \cong 1_B^* \xi'$.

$$\text{Logo, } e(\xi) = (1_B)_n^*(e(\xi')) = e(\xi'). \quad \square$$

Propriedade 9.4. Se ξ é um \mathbb{R}^n -fibrado orientado trivial, com $n > 0$, então $e(\xi) = 0$.

Demonstração. Considere B o espaço base de ξ . Como ξ é trivial, então $\xi \cong \varepsilon_B^n$. Por outro lado, fixado $*$ $\in B$, defina $f : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow \{*\} \times \mathbb{R}^n$ por $f(b, \alpha) = (*, \alpha)$, para todo $(b, \alpha) \in B \times \mathbb{R}^n$. Então, f é contínua e $f|_{\{b\} \times \mathbb{R}^n} : \{b\} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \{*\} \times \mathbb{R}^n$ dada por $f|_{\{b\} \times \mathbb{R}^n}(b, \alpha) = (*, \alpha)$, para todo $(b, \alpha) \in \{b\} \times \mathbb{R}^n$, é um isomorfismo linear para todo $b \in B$.

Logo, f é uma aplicação fibrada de ε_B^n em $\varepsilon_{\{*\}}^n$ e a aplicação constante $c : B \rightarrow \{*\}$ é a aplicação correspondente de f nos espaços bases. Então, $\varepsilon_B^n \cong c^* \varepsilon_{\{*\}}^n$.

Portanto, $e(\xi) = e(\varepsilon_B^n) = c_n^*(e(\varepsilon_{\{*\}}^n))$. Como $e(\varepsilon_{\{*\}}^n) \in H^n(\{*\}; \mathbb{Z})$ e para $n > 0$ temos $H^n(\{*\}; \mathbb{Z}) = 0$, segue que $e(\varepsilon_{\{*\}}^n) = 0$. Logo, $e(\xi) = c_n^*(0) = 0$. \square

Na propriedade 9.5, podemos ver como a orientação do fibrado orientado pode interferir na classe de Euler.

Propriedade 9.5. Se a orientação de um \mathbb{R}^n -fibrado orientado ξ for invertida, então $e(\xi)$ muda de sinal.

Demonstração. Considere E o espaço total de ξ e $u \in H^n(E, E_0; \mathbb{Z})$ a classe fundamental de cohomologia do par (E, E_0) para ξ . Então, $e(\xi) = ((\pi_\xi)_n^*)^{-1} \circ i_n^*(u)$, onde $i : E \hookrightarrow (E, E_0)$ é a inclusão.

Agora, considerando ξ' o mesmo fibrado ξ , porém com a orientação invertida, então $e(\xi') = ((\pi_{\xi'})_n^*)^{-1} \circ i_n^*(-u)$. De fato, sendo $j : (F, F_0) \hookrightarrow (E, E_0)$ a inclusão, temos $j_n^*(u) = u_F$, onde $u_F \in H^n(F, F_0; \mathbb{Z})$ corresponde com a orientação de ξ .

Por outro lado, $j_n^*(-u) = -u_F$, sendo que $-u_F \in H^n(F, F_0; \mathbb{Z})$ corresponde com a orientação de ξ' . Devido a unicidade da classe fundamental de cohomologia do par (E, E_0) para ξ' , obtemos que $-u \in H^n(E, E_0; \mathbb{Z})$ é a classe fundamental de cohomologia do par (E, E_0) para ξ' .

Portanto, $e(\xi') = -e(\xi)$, ou seja, se a orientação de ξ for invertida, então $e(\xi)$ muda de sinal. \square

Propriedade 9.6. Se ξ é um \mathbb{R}^n -fibrado orientado, com n ímpar, então $2e(\xi) = 0$.

Demonstração. Considere E o espaço total de ξ , $u \in H^n(E, E_0; \mathbb{Z})$ a classe fundamental de cohomologia do par (E, E_0) e $\psi_n : H^n(B; \mathbb{Z}) \rightarrow H^{2n}(E, E_0; \mathbb{Z})$ o isomorfismo de Thom associado ao fibrado ξ . Como n é ímpar, então $u \smile u = (-1)^{n^2} u \smile u = -u \smile u$, isto é, $2(u \smile u) = 0$.

Logo, $2e(\xi) = 2\psi_n^{-1}(u \smile u) = \psi_n^{-1}(2(u \smile u)) = \psi_n^{-1}(0) = 0$. \square

Para o entendimento da Propriedade 9.7, precisaremos das notações utilizadas no Teorema A.2. Nesta propriedade, veremos a relação da classe de Euler com as classes de Stiefel-Whitney.

Propriedade 9.7. Seja ξ um \mathbb{R}^n -fibrado orientado com espaço base B . Então, o homomorfismo natural $(\rho_2)_n : H^n(B; \mathbb{Z}) \rightarrow H^n(B; \mathbb{Z}_2)$ é tal que $(\rho_2)_n(e(\xi)) = w_n(\xi)$.

Demonstração. Sejam E o espaço total de ξ , $u \in H^n(E, E_0; \mathbb{Z})$ e $u_2 \in H^n(E, E_0; \mathbb{Z}_2)$ as classes fundamentais de cohomologia do par (E, E_0) e, para todo $k \geq 0$, $\psi_k : H^k(B; \mathbb{Z}) \rightarrow H^{k+n}(E, E_0; \mathbb{Z})$ e $\phi_k : H^k(B; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^{k+n}(E, E_0; \mathbb{Z}_2)$ os isomorfismos de Thom associados ao fibrado ξ .

Agora, considerando os complexos de cadeias livres $C(B) = (C_k(B), \partial_k)$ e $C(E, E_0) = (C_k(E, E_0), \bar{\partial}_k)$, obtemos, por meio do Teorema A.2, o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & H^k(B; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^k(B; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{(\rho_2)_k} & H^k(B; \mathbb{Z}_2) & \longrightarrow & H^{k+1}(B; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow \psi_k & & \downarrow \psi_k & & \downarrow \phi_k & & \downarrow \psi_{k+1} & & \\
 \dots & \longrightarrow & H^{k+n}(E, E_0; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^{k+n}(E, E_0; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{(\rho_2)_{k+n}} & H^{k+n}(E, E_0; \mathbb{Z}_2) & \longrightarrow & H^{k+1+n}(E, E_0; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

que é comutativo em cada quadrado.

Em particular, se considerarmos o diagrama

$$\begin{array}{ccc} H^0(B; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{(\rho_2)_0} & H^0(B; \mathbb{Z}_2) \\ \downarrow \psi_0 & & \downarrow \phi_0 \\ H^n(E, E_0; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{(\overline{\rho_2})_n} & H^n(E, E_0; \mathbb{Z}_2) \end{array}$$

comutativo, obtemos que:

$$(\overline{\rho_2})_n(u) = (\overline{\rho_2})_n(\psi_0(1)) = \phi_0((\rho_2)_0(1)) = \phi_0(1) = u_2.$$

Por outro lado, se também considerarmos o diagrama

$$\begin{array}{ccc} H^n(B; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{(\rho_2)_n} & H^n(B; \mathbb{Z}_2) \\ \downarrow \psi_n & & \downarrow \phi_n \\ H^{2n}(E, E_0; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{(\overline{\rho_2})_{2n}} & H^{2n}(E, E_0; \mathbb{Z}_2) \end{array}$$

comutativo, concluímos que:

$$\begin{aligned} \phi_n \circ (\rho_2)_n(e(\xi)) &= (\overline{\rho_2})_{2n} \circ \psi_n(e(\xi)) \\ &= (\overline{\rho_2})_{2n}(u \smile u) \\ &= (\overline{\rho_2})_n(u) \smile (\overline{\rho_2})_n(u) \\ &= u_2 \smile u_2 \\ &= Sq^n(u_2) \end{aligned}$$

Portanto, $(\rho_2)_n(e(\xi)) = \phi_n^{-1} \circ Sq^n(u_2) = w_n(\xi)$. □

Deste modo, podemos concluir que a classe de Euler é um "caso particular" das classes de Stiefel-Whitney. Com isso, é natural percebermos semelhanças entre algumas das consequências das classes de Stiefel-Whitney e da classe de Euler.

Propriedade 9.8. Sejam ξ' um \mathbb{R}^n -fibrado e ξ'' um \mathbb{R}^m -fibrado, ambos orientados. Então, $e(\xi' \times \xi'') = e(\xi') \times e(\xi'')$. Em particular, se ξ' e ξ'' possuem o mesmo espaço base, então $e(\xi' \oplus \xi'') = e(\xi') \smile e(\xi'')$.

Demonstração. Considere ξ' e ξ'' fibrados com espaços totais E' e E'' , espaços bases B' e B'' e projeções π' e π'' , respectivamente. Considere também $u' \in H^n(E', E'_0; \mathbb{Z})$ e $u'' \in H^m(E'', E''_0; \mathbb{Z})$ as classes fundamentais de cohomologia dos pares (E', E'_0) e (E'', E''_0) , respectivamente e $i' : E' \hookrightarrow (E', E'_0)$ e $i'' : E'' \hookrightarrow (E'', E''_0)$ as inclusões.

Por outro lado, considere o fibrado $\xi = \xi' \times \xi''$ com espaços total e base $E = E' \times E''$ e $B = B' \times B''$, respectivamente, projeção $\pi = \pi' \times \pi''$, $E_0 = E'_0 \times E''_0 \cup E' \times E''_0$ e $i = i' \times i'' : E \hookrightarrow (E, E_0)$ a inclusão.

Se $u \in H^{n+m}(E, E_0; \mathbb{Z})$ é a classe fundamental de cohomologia do par (E, E_0) , então segue de ([8], p. 100) que $u = (-1)^{nm} u' \times u''$. Assim:

$$\begin{aligned} e(\xi' \times \xi'') &= e(\xi) = (\pi_{n+m}^*)^{-1} \circ i_{n+m}^*(u) \\ &= (\pi_{n+m}^*)^{-1} \circ i_{n+m}^*((-1)^{nm} u' \times u'') \\ &= (-1)^{nm} (\pi_{n+m}^*)^{-1} \circ i_{n+m}^*(u' \times u'') \\ &= (-1)^{nm} ((\pi_n^*)^{-1} \circ i_n^*(u')) \times ((\pi_m^*)^{-1} \circ i_m^*(u'')) \\ &= (-1)^{nm} e(\xi') \times e(\xi'') \end{aligned}$$

Se n ou m for par, então nm é par, isto é, $e(\xi' \times \xi'') = e(\xi') \times e(\xi'')$. Se n e m forem ímpares, então nm é ímpar, ou seja, $2e(\xi' \times \xi'') = 0$, isto é, $e(\xi' \times \xi'') + (-e(\xi') \times e(\xi'')) = 0$.

Portanto, $e(\xi' \times \xi'') = e(\xi') \times e(\xi'')$.

Em particular, se ξ' e ξ'' possuem o mesmo espaço base B e $d : B \rightarrow B \times B$ é a aplicação diagonal, então $\xi' \oplus \xi'' = d^*(\xi' \times \xi'')$. Portanto:

$$e(\xi' \oplus \xi'') = d_{n+m}^*(e(\xi' \times \xi'')) = d_{n+m}^*(e(\xi') \times e(\xi'')) = e(\xi') \smile e(\xi'').$$

□

Corolário 9.1. *Se ξ é um fibrado orientado tal que $2e(\xi) \neq 0$, então ξ nunca se escreve como $\xi' \oplus \xi''$, onde ξ' é um \mathbb{R}^n -fibrado e ξ'' é um \mathbb{R}^m -fibrado, com n e m ímpares.*

Demonstração. Suponha que $\xi = \xi' \oplus \xi''$, onde ξ' é um \mathbb{R}^n -fibrado e ξ'' é um \mathbb{R}^m -fibrado, com n e m ímpares e $2e(\xi) \neq 0$. Deste modo, ξ é um \mathbb{R}^{nm} -fibrado, onde nm é ímpar. Assim, $2e(\xi) = 0$, o que é um absurdo por hipótese.

Portanto, ξ nunca se escreve como $\xi' \oplus \xi''$, onde ξ' é um \mathbb{R}^n -fibrado e ξ'' é um \mathbb{R}^m -fibrado, com n e m ímpares. □

Corolário 9.2. *Seja M uma n -variedade C^∞ compacta. Se τ_M é um \mathbb{R}^n -fibrado orientado tal que $e(M) \neq 0$, então τ_M não admite qualquer \mathbb{R}^m -subfibrado orientado ξ , com m ímpar.*

Demonstração. Inicialmente, como $e(M) \in H^n(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ e $e(M) \neq 0$, então $2e(M) \neq 0$. Agora, suponha que exista um \mathbb{R}^m -subfibrado $\xi \subset \tau_M$, com m ímpar. Então,

$$2e(\xi) = 0 \text{ e } \tau_M \cong \xi \oplus \xi^\perp.$$

Assim, $2e(M) = 2(e(\xi) \smile e(\xi^\perp)) = (2e(\xi)) \smile e(\xi^\perp) = 0 \smile e(\xi^\perp) = 0$, o que é um absurdo por hipótese. Logo, τ_M não admite qualquer \mathbb{R}^m -subfibrado orientado ξ , com m ímpar. \square

Corolário 9.3. *Seja M uma n -variedade C^∞ compacta tal que τ_M é um \mathbb{R}^n -fibrado orientado com n ímpar. Então, $e(M) = 0$.*

Demonstração. Como τ_M é um \mathbb{R}^n -fibrado orientado com n ímpar, então $2e(M) = 0$. Por outro lado, $e(M) \in H^n(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Assim, $2e(M) = 0 \in \mathbb{Z}$, isto é, $e(M) = 0$. \square

Propriedade 9.9. Se ξ é um \mathbb{R}^n -fibrado orientado e possui uma seção não nula, então $e(\xi) = 0$.

Demonstração. Considere E e B os espaços total e base de ξ , respectivamente, $i : E \hookrightarrow (E, E_0)$ a inclusão e $u \in H^n(E, E_0; \mathbb{Z})$ a classe fundamental de cohomologia do par (E, E_0) . Seja $s : B \rightarrow E$ uma seção não nula de ξ , isto é, $Im(s) \subset E_0$. Como $\pi_\xi \circ s = 1_B$, então $s_n^* \circ (\pi_\xi)_n^* = 1_{H^n(B; \mathbb{Z})}$. Assim:

$$\begin{aligned} e(\xi) &= s_n^* \circ (\pi_\xi)_n^*(e(\xi)) \\ &= s_n^* \circ (\pi_\xi)_n^*(((\pi_\xi)_n^*)^{-1} \circ i_n^*(u)) \\ &= s_n^* \circ i_n^*(u). \end{aligned}$$

Por outro lado, como o diagrama

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{i} & (E, E_0) \\ \uparrow s & \nearrow i \circ s & \uparrow j \\ B & \xrightarrow{s} E_0 \xrightarrow{i|_{E_0}} & (E_0, E_0) \end{array}$$

é comutativo, onde $j : (E_0, E_0) \hookrightarrow (E, E_0)$ é a inclusão, então $s_n^* \circ i_n^* = s_n^* \circ (i|_{E_0})_n^* \circ j_n^*$. Entretanto, $j_n^* : H^n(E, E_0; \mathbb{Z}) \rightarrow H^n(E_0, E_0; \mathbb{Z})$ é o homomorfismo nulo, pois $H^n(E_0, E_0; \mathbb{Z}) = 0$. Deste modo, $s_n^* \circ i_n^* = s_n^* \circ (i|_{E_0})_n^* \circ j_n^* = 0$.

Portanto, $e(\xi) = s_n^* \circ i_n^*(u) = 0$. \square

10 Conclusão

Com o intuito de definirmos as classes de Stiefel-Whitney e a classe de Euler, bem como mostrarmos algumas de suas consequências e aplicações, estudamos, primeiramente, um pouco as variedades C^∞ , os espaços tangentes e as variedades tangentes destas variedades C^∞ .

Posteriormente, estudamos fibrados vetoriais, que por comodidade chamamos apenas de fibrados. Definimos o que são esses fibrados e vimos alguns dos seus exemplos. Ainda, construímos fibrados por meio de outros, utilizando técnicas específicas para cada construção.

Feitas todas essas considerações necessárias para o desenvolvimento deste trabalho, chegamos no nosso primeiro objetivo, as classes de Stiefel-Whitney. Inicialmente, descrevemos as classes de Stiefel-Whitney por meio de quatro axiomas e vimos algumas de suas consequências. Calculamos as classes de Stiefel-Whitney das esferas e dos espaços projetivos reais. Também vimos algumas de suas aplicações, como resultados sobre imersões de variedades C^∞ em espaços Euclidianos e quando duas variedades C^∞ pertencem a mesma classe de cobordismo.

Mais tarde, com o auxílio do isomorfismo de Thom e dos quadrados de Steenrod, definimos formalmente as classes de Stiefel-Whitney e verificamos a validade dos quatro axiomas propostos anteriormente. Também vimos que, quando o espaço base de um fibrado é paracompacto, as classes de Stiefel-Whitney associadas a este fibrado são unicamente determinadas. Para isto, definimos as variedades de Grassmann e as variedades de Grassmann infinitas e vimos apenas os resultados necessários, envolvendo estas variedades, para a prova da unicidade.

Por fim, estudamos a classe de Euler, nosso segundo e último objetivo. Entretanto, utilizamos ferramentas um pouco diferentes das utilizadas na definição das classes de Stiefel-Whitney. Começamos definindo o que são fibrados orientados e as cohomologias dos espaços bases desses fibrados foram com coeficientes sobre \mathbb{Z} , diferentemente do que foi trabalhado até agora, onde as cohomologias tinham coeficientes sobre \mathbb{Z}_2 , quando tratamos das classes de Stiefel-Whitney. Assim, definimos a classe de Euler de um fibrado orientado e vimos algumas de suas consequências e a relação da classe de Euler com as classes de Stiefel-Whitney.

Deste modo, vimos a importância dos estudos sobre as classes características, em

particular, as classes de Stiefel-Whitney e de Euler e que, para isto, foram necessários o conhecimento de outras teorias muito importantes na Matemática, como a Teoria de Variedades diferenciáveis de classe C^∞ e a Teoria de Fibrados Vetoriais, concluindo, assim, nossos estudos.

Referências

- [1] BAEZ, J. C. The octonions. *Bulletin American Mathematical Society*, v. 39, p. 145–205, 2002.
- [2] D'ALASCIO, M. J. *Imersões de Variedades em Espaços Euclidianos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 1982.
- [3] GREENBERG, M. *Lectures on Algebraic Topology*. New York: W. A. Benjamin, Inc., 1967.
- [4] HATCHER, A. *Algebraic Topology*. New York: Cambridge University Press, 2001.
- [5] IEZZI, G.; HAZZAN, S. *Fundamentos da Matemática Elementar - volume 5*. 3. ed. São Paulo: Editora Atual, 1977.
- [6] INFORZATO, C. C. *Fibrados, Classes de Stiefel-Whitney e Resultados de não Imersão*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de São Carlos, 2012.
- [7] LIMA, E. L. *Curso de Análise - volume 2*. 11. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.
- [8] MILNOR, J. W.; STASHEFF, J. D. *Characteristic Classes*. 1. ed. New Jersey: Princeton University Press and University of Tokyo Press, 1974.
- [9] MUNKRES, J. R. *Topology*. 2. ed. New Jersey: Prentice Hall, 2000.
- [10] SANTOS, M. V. dos. *Números Complexos, Quatérnions e Rotações*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2012.
- [11] SPANIER, E. H. *Algebraic Topology*. New York: McGraw-Hill Book Co., 1966.
- [12] STEENROD, N. E.; EPSTEIN, D. B. A. *Cohomology Operations*. Princeton: Annals Math. Studies 50, Princeton University Press, 1962.
- [13] STONG, R. E. *Notes on Cobordism Theory*. Princeton: Princeton Math. Notes, Princeton University Press, 1958.

A Cohomologia Singular

Neste primeiro apêndice, veremos os conceitos básicos sobre os grupos de cohomologia singular ¹ e os resultados necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Em seguida, assumiremos a existência do produto cup ² e do produto cross ³ e veremos algumas de suas propriedades.

Dados um espaço topológico X e um anel comutativo com unidade R (neste trabalho tomaremos $R = \mathbb{Z}_2$ e $R = \mathbb{Z}$), existe uma sequência de R -módulos, que denotaremos por $H^0(X; R)$, $H^1(X; R)$, $H^2(X; R)$, ..., com as seguintes propriedades:

- Se $f : X \rightarrow Y$ for uma função contínua, podemos obter, para cada $i \geq 0$, homomorfismos $f_i^* : H^i(Y; R) \rightarrow H^i(X; R)$.

Como $H^i(X; R) \cong \text{Hom}_R(H_i(X; R), R)$ para qualquer espaço topológico X , o homomorfismo $f_i^* : H^i(Y; R) \rightarrow H^i(X; R)$ é definido da seguinte forma: se $f_{*i} : H_i(X; R) \rightarrow H_i(Y; R)$ é a induzida de f no i -ésimo nível de homologia, então para todo $v \in H^i(Y; R)$, definimos $f_i^*(v) : H_i(X; R) \rightarrow R$ por $f_i^*(v)[u] = v(f_{*i}[u])$, para qualquer $[u] \in H_i(X; R)$;

- Se $1_X : X \rightarrow X$ é a função identidade, então $(1_X)_i^* = 1_{H^i(X; R)} : H^i(X; R) \rightarrow H^i(X; R)$ para qualquer $i \geq 0$.

Ainda, para cada espaço topológico X e para quaisquer inteiros $i, j \geq 0$, existe um produto chamado cup $H^i(X, A; R) \otimes H^j(X, B; R) \rightarrow H^{i+j}(X, A \cup B; R)$ que associa cada elemento $x \otimes y \in H^i(X, A; R) \otimes H^j(X, B; R)$ com um elemento $x \smile y \in H^{i+j}(X, A \cup B; R)$.

Considerando $x \in H^i(X, A; R)$ e $y \in H^j(X, B; R)$ quaisquer, temos as seguintes propriedades sobre o produto cup:

- $0 \smile y = 0 = x \smile 0$;
- $1 \smile y = y$ e $x \smile 1 = x$;
- $x \smile y = (-1)^{ij} y \smile x$;

¹Para mais detalhes sobre cohomologia singular, ver ([8], p. 257-280) e ([11], p. 236-241).

²Para mais detalhes sobre produto cup, ver ([11], p. 251).

³Para mais detalhes sobre produto cross, ver ([11], p. 249).

- $\alpha x \smile \beta y = (\alpha\beta)(x \smile y)$, para quaisquer $\alpha, \beta \in R$;
- Se $y \neq 0$, então $0 = x \smile y$ se, e somente se, $x = 0$.

Agora, considere $f : X \rightarrow Y$ contínua, $A_1, A_2 \subset X$ e $B_1, B_2 \subset Y$ tais que $f(A_1) \subset B_1$ e $f(A_2) \subset B_2$. Se $f_1 : (X, A_1) \rightarrow (Y, B_1)$, $f_2 : (X, A_2) \rightarrow (Y, B_2)$ e $g : (X, A_1 \cup A_2) \rightarrow (Y, B_1 \cup B_2)$ são as induzidas de f a nível de pares, então, para quaisquer $x \in H^i(Y, B_1; R)$ e $y \in H^j(Y, B_2; R)$, temos que

$$g_{i+j}^*(x \smile y) = (f_1)_i^*(x) \smile (f_2)_j^*(y).$$

Por outro lado, para quaisquer espaços topológicos X e Y , se $A \subset X$ e $B \subset Y$ são abertos, então existe, para quaisquer inteiros $i, j \geq 0$, um produto chamado cross $H^i(X, A; R) \otimes H^j(Y, B; R) \rightarrow H^{i+j}(X \times Y, X \times B \cup A \times Y; R)$ que associa cada elemento $x \otimes y \in H^i(X, A; R) \otimes H^j(X, B; R)$ com um elemento $x \times y \in H^{i+j}(X \times Y, X \times B \cup A \times Y; R)$.

A partir do produto cross, podemos definir as induzidas das projeções como segue:

- se $p_1 : (X \times Y, A \times Y) \rightarrow (X, A)$ é a projeção canônica, com $A \subset X$ aberto, então $(p_1)_n^* : H^n(X, A; R) \rightarrow H^n(X \times Y, A \times Y; R)$ é definida por $(p_1)_n^*(a) = a \times 1$ para todo $a \in H^n(X, A; R)$, onde $1 \in H^0(Y; R)$;
- se $p_2 : (X \times Y, X \times B) \rightarrow (Y, B)$ é a projeção canônica, com $B \subset Y$ aberto, então $(p_2)_n^* : H^n(Y, B; R) \rightarrow H^n(X \times Y, X \times B; R)$ é definida por $(p_2)_n^*(b) = 1 \times b$ para todo $b \in H^n(Y, B; R)$, onde $1 \in H^0(X; R)$.

Ainda, se $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ e $g : (X', A') \rightarrow (Y', B')$ são aplicações de pares, então para quaisquer $x \in H^i(Y, B; R)$ e $y \in H^j(Y', B'; R)$, temos que

$$(f \times g)_{i+j}^*(x \times y) = f_i^*(x) \times g_j^*(y).$$

Uma importante propriedade envolvendo os produtos cup e cross é a seguinte: se $a_1 \in H^{n_1}(X, A_1; R)$, $a_2 \in H^{n_2}(X, A_2; R)$, $b_1 \in H^{m_1}(Y, B_1; R)$ e $b_2 \in H^{m_2}(Y, B_2; R)$, então

$$(a_1 \times b_1) \smile (a_2 \times b_2) = (-1)^{n_2 m_1} (a_1 \smile a_2) \times (b_1 \smile b_2).$$

Também, se $p_1 : (X \times Y, A \times Y) \rightarrow (X, A)$ e $p_2 : (X \times Y, X \times B) \rightarrow (Y, B)$ são as projeções canônicas, com $A \subset X$ e $B \subset Y$ abertos, então para quaisquer $a \in H^n(X, A; R)$ e $b \in H^m(Y, B; R)$, obtemos que

$$\begin{aligned}
(p_1)_n^*(a) \smile (p_2)_m^*(b) &= (a \times 1) \smile (1 \times b) \\
&= (-1)^{0+0}(a \smile 1) \times (1 \smile b) \\
&= a \times b.
\end{aligned}$$

Agora, note que se considerarmos $a \in H^n(X; R)$, $b \in H^m(X; R)$, $d : X \rightarrow X \times X$ a aplicação diagonal e $p_1, p_2 : X \times X \rightarrow X$ as projeções canônicas, então:

$$\begin{aligned}
d_{n+m}^*(a \times b) &= d_{n+m}^*((p_1)_n^*(a) \smile (p_2)_m^*(b)) \\
&= d_n^*((p_1)_n^*(a)) \smile d_m^*((p_2)_m^*(b)) \\
&= a \smile b,
\end{aligned}$$

uma vez que $p_1 \circ d = 1_X = p_2 \circ d$.

Os próximos três teoremas são resultados muito importantes na Teoria de Cohomologia que serão utilizados nesse trabalho.

Teorema A.1. (Teorema da Excisão) *Sejam X um espaço topológico qualquer, $A \subset X$ e $U \subset X$ subespaços quaisquer, com $U \subset X$ um aberto, tais que $\bar{U} \subset \text{int}(A)$. Então, a inclusão $i : (X - U, A - U) \hookrightarrow (X, A)$ induz isomorfismos $i_i^* : H^i(X, A; R) \rightarrow H^i(X - U, A - U; R)$ para quaisquer $i \geq 0$.*

O Teorema da Excisão é um dos axiomas que caracterizam a Teoria de Cohomologia, como podemos ver em ([11], p. 240).

Teorema A.2. *Sendo $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\rho_2} \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0$ uma seqüência exata curta, onde $\times 2 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ e $\rho_2 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ são definidos, respectivamente, por $(\times 2)(x) = 2x$ e $\rho_2(y) = \bar{y}$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{Z}$, então a seqüência*

$$\dots \rightarrow H^k(C; \mathbb{Z}) \rightarrow H^k(C; \mathbb{Z}) \xrightarrow{(\rho_2)_k} H^k(C; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^{k+1}(C; \mathbb{Z}) \rightarrow \dots$$

*é uma seqüência exata longa para qualquer complexo de cadeias livres*⁴ $C = (C_k, \partial_k)$.

O teorema A.2 é um caso particular de ([11], p. 239, Teorema 11).

Por fim, vejamos os grupos de cohomologia singular de alguns espaços especiais que serão utilizados neste trabalho:

- $H^i(\{*\}; R) = \begin{cases} R, & i = 0 \\ 0, & i > 0 \end{cases}$
- $H^i(S^0; R) = \begin{cases} R \oplus R, & i = 0 \\ 0, & i > 0 \end{cases}$

⁴Um complexo de cadeias $C = (C_k, \partial_k)$ é dito um complexo de cadeias livres se C_k é livre para todo $k \in \mathbb{Z}$.

- Se $n \geq 1$, então $H^i(S^n; R) = \begin{cases} R, & i = 0 \text{ ou } i = n \\ 0, & i \neq 0 \text{ e } i \neq n \end{cases}$
- Se $n \geq 1$, então $H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}; R) = \begin{cases} R, & i = n \\ 0, & i \neq n \end{cases}$
- Se $n \geq 1$, então $H^i(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 = \langle a^i \rangle, & 0 \leq i \leq n \\ 0, & i > n \end{cases}$, onde $\langle a \rangle = H^1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$, $a^0 = 1$ e $a^i = \underbrace{a \smile a \smile \dots \smile a}_{i\text{-vezes}}$
- Se $\mathbb{R}P^\infty = \bigcup_{k \geq 0} \mathbb{R}P^k$, então $H^1(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$

B Números Complexos, Quaternions e de Cayley

Neste apêndice, veremos as definições e operações básicas envolvendo os números complexos¹, quaternions² e os números de Cayley³ que serão utilizadas especialmente nos Exemplos 4.5, 4.6 e 4.7, respectivamente.

Os números complexos, denotados por \mathbb{C} , surgiram com a necessidade de resolver as equações de terceiro grau. Posteriormente, em 1833, o matemático irlandês Sr. William Rowan Hamilton publicou um artigo em que apresentou uma álgebra formal dos números complexos, que é utilizada até hoje.

Com o intuito de generalizar os números complexos, Hamilton tentou criar uma álgebra parecida em um espaço vetorial real tri-dimensional. Sem êxito, Hamilton abandonou a lei da comutatividade para a multiplicação e, assim, surgia a álgebra não-comutativa dos quaternions. Em homenagem à Hamilton, o conjunto dos quaternions foram denotados por \mathbb{H} .

Após o surgimento dos quaternions, Arthur Cayley apresentou uma generalização destes definindo uma álgebra não-comutativa e não-associativa num espaço vetorial real de dimensão oito. Este conjunto ficou conhecido como os Octoniões, também chamados de números de Cayley e denotados por \mathbb{O} .

B.1 Números Complexos

Definição B.1. *O conjunto dos números complexos é definido como:*

$$\mathbb{C} = \{x = x_0 + x_1i : x_l \in \mathbb{R}, l = 0, 1 \text{ e } i^2 = -1\}$$

Dado um número complexo $x = x_0 + x_1i$, definimos seu conjugado e seu módulo, respectivamente, por:

- $\bar{x} = x_0 - x_1i$

¹Para mais detalhes sobre números complexos, ver ([10], p. 9-12).

²Para mais detalhes sobre quaternions, ver ([10], p. 40-42).

³Para mais detalhes sobre números de Cayley, ver [1].

- $|x| = \sqrt{x_0^2 + x_1^2}$

As operações soma, produto e produto escalar entre dois números complexos $x = x_0 + x_1i$ e $y = y_0 + y_1i$ são definidas, respectivamente, por:

- $x + y = (x_0 + y_0) + (x_1 + y_1)i$
- $xy = (x_0y_0 - x_1y_1) + (x_0y_1 + x_1y_0)i$
- $\langle x, y \rangle = x_0y_0 + x_1y_1$

Assim, \mathbb{C} é um espaço vetorial real bi-dimensional cuja base é $\{1, i\}$. Deste modo, $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, ou seja, podemos associar um número complexo $x = x_0 + x_1i$ com um par ordenado (x_0, x_1) , respeitando ainda as operações estabelecidas acima.

B.2 Quaternions

Definição B.2. *O Conjunto dos quaternions é definido como:*

$$\mathbb{H} = \{x = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k : x_l \in \mathbb{R}, l = 0, 1, 2, 3 \text{ e } i^2 = j^2 = k^2 = -1\}$$

Dado um quaternion $x = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k$, definimos seu conjugado e seu módulo, respectivamente, por:

- $\bar{x} = x_0 - x_1i - x_2j - x_3k$
- $|x| = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

As operações soma e produto escalar entre dois quaternions $x = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k$ e $y = y_0 + y_1i + y_2j + y_3k$ são definidas, respectivamente, por:

- $x + y = (x_0 + y_0) + (x_1 + y_1)i + (x_2 + y_2)j + (x_3 + y_3)k$
- $\langle x, y \rangle = x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$

Agora, para podermos definir a operação produto entre quaternions, precisamos estabelecer as relações desta operação entre os imaginários unitários $i, j, k \in \mathbb{H}$, que são:

.	i	j	k
i	-1	k	$-j$
j	$-k$	-1	i
k	j	$-i$	-1

Tabela B.1: Produto entre Quaternions imaginários unitários

Assim, a operação produto entre dois quaternions $x = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k$ e $y = y_0 + y_1i + y_2j + y_3k$ é definida por:

- $xy = (x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3) +$
 $(x_0y_1 + x_1y_0 + x_2y_3 - x_3y_2)i +$
 $(x_0y_2 - x_1y_3 + x_2y_0 + x_3y_1)j +$
 $(x_0y_3 + x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_0)k$

Podemos resumir a tabela B.1 na seguinte figura:

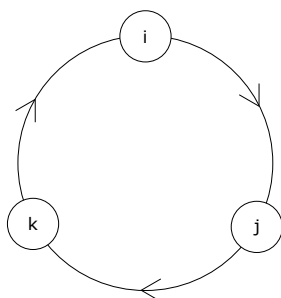


Figura B.1: Resumo do produto entre Quaternions

Quando multiplicamos dois elementos no sentido horário do círculo, o resultado será o próximo elemento. Por exemplo, $ij = k$. Por outro lado, se multiplicarmos dois elementos no sentido antihorário do círculo, o resultado será o próximo elemento, porém com o sinal invertido. Por exemplo, $ji = -k$.

Deste modo, \mathbb{H} é um espaço vetorial real 4-dimensional cuja base é $\{1, i, j, k\}$. Logo, $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$, ou seja, podemos associar um quaternion $x = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k$ com uma 4-upla (x_0, x_1, x_2, x_3) , respeitando ainda as operações estabelecidas acima.

B.3 Números de Cayley

Definição B.3. O Conjunto dos números de Cayley é definido como:

$$\mathbb{O} = \{x = x_0 + x_1e_1 + \dots + x_7e_7 : x_l \in \mathbb{R}, l = 0, 1, \dots, 7 \text{ e } e_l^2 = -1, l = 1, \dots, 7\}$$

Dado um número de Cayley $x = x_0 + x_1e_1 + \dots + x_7e_7$, definimos seu conjugado e seu módulo, respectivamente, por:

- $\bar{x} = x_0 - x_1e_1 - \dots - x_7e_7$
- $|x| = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_7^2}$

As operações soma e produto escalar entre dois números de Cayley $x = x_0 + x_1e_1 + \dots + x_7e_7$ e $y = y_0 + y_1e_1 + \dots + y_7e_7$ são definidas, respectivamente, por:

- $x + y = (x_0 + y_0) + (x_1 + y_1)e_1 + \dots + (x_7 + y_7)e_7$
- $\langle x, y \rangle = x_0y_0 + x_1y_1 + \dots + x_7y_7$

Agora, para podermos definir a operação produto entre números de Cayley, precisamos estabelecer as relações desta operação entre os imaginários unitários $e_1, \dots, e_7 \in \mathbb{O}$, que são:

\cdot	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	-1	e_4	e_7	$-e_2$	e_6	$-e_5$	$-e_3$
e_2	$-e_4$	-1	e_5	e_1	$-e_3$	e_7	$-e_6$
e_3	$-e_7$	$-e_5$	-1	e_6	e_2	$-e_4$	e_1
e_4	e_2	$-e_1$	$-e_6$	-1	e_7	e_3	$-e_5$
e_5	$-e_6$	e_3	$-e_2$	$-e_7$	-1	e_1	e_4
e_6	e_5	$-e_7$	e_4	$-e_3$	$-e_1$	-1	e_2
e_7	e_3	e_6	$-e_1$	e_5	$-e_4$	$-e_2$	-1

Tabela B.2: Produto entre números de Cayley imaginários unitários

Podemos resumir a tabela B.2 na seguinte figura:

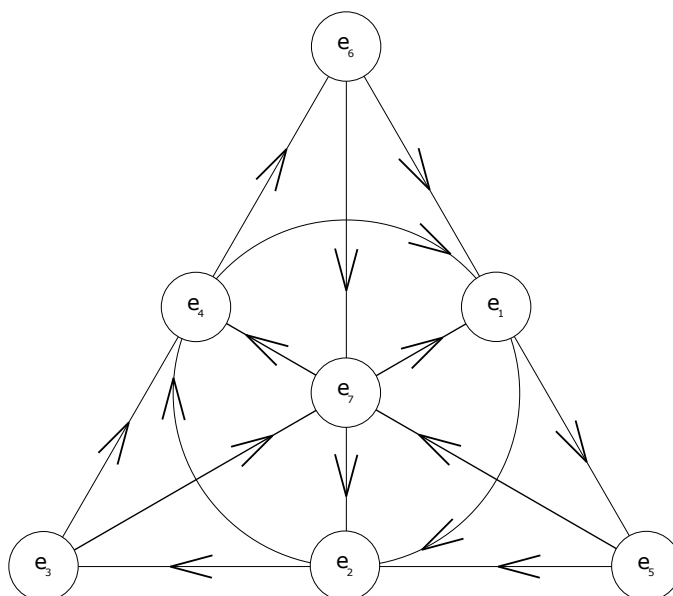


Figura B.2: Resumo do produto entre números de Cayley

A figura B.2 é conhecida como Plano de Fano, que consiste de sete linhas e sete pontos. As "linhas" são os lados e as alturas do triângulo e o círculo contendo os pontos médios de cada lado do triângulo. Com isso, cada linha possui exatamente três pontos distintos. Deste modo, se considerarmos uma linha e seus pontos e_i, e_j e e_k , com o sentido $e_i \rightarrow e_j \rightarrow e_k$, obtemos, por exemplo, as multiplicações:

$$e_i e_j = e_k \quad e \quad e_j e_i = -e_k$$

Assim, a operação produto entre dois números de Cayley $x = x_0 + x_1e_1 + \dots + x_7e_7$ e $y = y_0 + y_1e_1 + \dots + y_7e_7$ é definida por:

$$\begin{aligned} \bullet \quad xy &= (x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 - x_4y_4 - x_5y_5 - x_6y_6 - x_7y_7) + \\ &\quad (x_0y_1 + x_1y_0 + x_2y_4 + x_3y_7 - x_4y_2 + x_5y_6 - x_6y_5 - x_7y_3)e_1 + \\ &\quad (x_0y_2 - x_1y_4 + x_2y_0 + x_3y_5 + x_4y_1 - x_5y_3 + x_6y_7 - x_7y_6)e_2 + \\ &\quad (x_0y_3 - x_1y_7 - x_2y_5 + x_3y_0 + x_4y_6 + x_5y_2 - x_6y_4 + x_7y_1)e_3 + \\ &\quad (x_0y_4 + x_1y_2 - x_2y_1 - x_3y_6 + x_4y_0 + x_5y_7 + x_6y_3 - x_7y_5)e_4 + \\ &\quad (x_0y_5 - x_1y_6 + x_2y_3 - x_3y_2 - x_4y_7 + x_5y_0 + x_6y_1 + x_7y_4)e_5 + \\ &\quad (x_0y_6 + x_1y_5 - x_2y_7 + x_3y_4 - x_4y_3 - x_5y_1 + x_6y_0 + x_7y_2)e_6 + \\ &\quad (x_0y_7 + x_1y_3 + x_2y_6 - x_3y_1 + x_4y_5 - x_5y_4 - x_6y_2 + x_7y_0)e_7 \end{aligned}$$

Deste modo, \mathbb{O} é um espaço vetorial real 8-dimensional cuja base é $\{1, e_1, \dots, e_7\}$. Logo, $\mathbb{O} \cong \mathbb{R}^8$, ou seja, podemos associar um número de Cayley $x = x_0 + x_1e_1 + \dots + x_7e_7$ com uma 8-upla (x_0, x_1, \dots, x_7) , respeitando ainda as operações estabelecidas acima.

C Coeficientes Binomiais Módulo 2

Neste apêndice, veremos uma breve introdução aos coeficientes binomiais ¹ para que possamos enunciar os resultados que serão utilizados neste trabalho sobre coeficientes binomiais módulo dois.

Inicialmente, lembremos que dados $n, k \geq 0$ dois inteiros quaisquer, definimos o coeficiente binomial de n na classe k como sendo o número de combinações de n termos k a k , ou seja, podemos escrever este coeficiente binomial como:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

A seguir, temos algumas das propriedades dos coeficientes binomiais:

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$

Com isso, lembrando que $0! = 1$, podemos obter que $\binom{0}{1} = 0$. De fato, pois como $\binom{0}{0} + \binom{0}{1} = \binom{1}{1}$, então $1 + \binom{0}{1} = 1$, isto é, $\binom{0}{1} = 0$.

Um dos resultados mais importantes envolvendo os coeficientes binomiais é o famoso Teorema Binomial:

Teorema C.1. *Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ e para qualquer inteiro $n \geq 0$, temos a seguinte identidade:*

$$(x + y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$$

Em particular, temos que $(1 + x)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i$. Assim, o coeficiente de x^i na expansão $(1 + x)^n$ é $\binom{n}{i}$, para todo $i = 0, \dots, n$.

¹Para mais detalhes sobre coeficientes binomiais, ver ([5], p. 47-67).

Feitas as condições necessárias sobre coeficientes binomiais, podemos ver os resultados que serão utilizados neste trabalho sobre coeficientes binomiais módulo 2.

Para isto, começaremos com o seguinte:

Proposição C.1. *Em $\mathbb{Z}_2[x]$, temos que $(1+x)^{2^r} = 1+x^{2^r}$, para qualquer inteiro $r \geq 1$.*

Demonstração. Provaremos por indução sobre $r \geq 1$. Primeiramente, quando $r = 1$ temos:

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 = 1 + x^2 \text{ em } \mathbb{Z}_2[x].$$

Agora, suponha que $(1+x)^{2^{r-1}} = 1+x^{2^{r-1}}$. Então:

$$(1+x)^{2^r} = [(1+x)^2]^{2^{r-1}} = (1+x^2)^{2^{r-1}} = 1+(x^2)^{2^{r-1}} = 1+x^{2^r} \text{ em } \mathbb{Z}_2[x].$$

Portanto, $(1+x)^{2^r} = 1+x^{2^r}$ em $\mathbb{Z}_2[x]$, para qualquer inteiro $r \geq 1$. \square

Para os próximos resultados, precisaremos das decomposições 2-ádicas de um inteiro $a \geq 0$ qualquer.

Uma decomposição 2-ádica de $a \geq 0$ é a única decomposição do tipo $a = \sum_{i=0}^k a_i 2^i$ para algum inteiro $k \geq 0$, onde $0 \leq a_i < 2$ para todo $i = 0, \dots, k$. Note que podemos considerar o mesmo índice k na decomposição 2-ádica de dois inteiros não negativos quaisquer, pois basta tomar a_i e/ou b_i iguais a zero quando o termo 2^i não aparecer na decomposição 2-ádica de a e b , respectivamente. Por exemplo:

$$9 = 1.2^0 + 0.2^1 + 0.2^2 + 1.2^3$$

$$8 = 0.2^0 + 0.2^1 + 0.2^2 + 1.2^3$$

$$7 = 1.2^0 + 1.2^1 + 1.2^2 + 0.2^3$$

Observe que o termo a_0 é sempre o resto da divisão de a por 2, ou seja, se a é par, então $a_0 = 0$ e se a é ímpar, então $a_0 = 1$.

Com isso, obtemos os seguintes resultados:

Teorema C.2. *Sejam $a, b \geq 0$ inteiros quaisquer tais que $b \leq a$. Se $a = \sum_{i=0}^k a_i 2^i$ e $b = \sum_{i=0}^k b_i 2^i$ são suas decomposições 2-ádicas, então, $\binom{a}{b} \equiv \prod_{i=0}^k \binom{a_i}{b_i} \pmod{2}$.*

Demonstração. Inicialmente, observe que o coeficiente de x^b na expansão $(1+x)^a$ é $\binom{a}{b}$.

Por outro lado, em $\mathbb{Z}_2[x]$ temos que:

$$\begin{aligned}
(1+x)^a &= (1+x)^{\sum_{i=0}^k a_i 2^i} \\
&= \prod_{i=0}^k (1+x)^{2^i a_i} \\
&= \prod_{i=0}^k (1+x^{2^i})^{a_i} \\
&= \prod_{i=0}^k \sum_{s=0}^{a_i} \binom{a_i}{s} x^{s 2^i} \\
&= \prod_{i=0}^k \left(1 + \binom{a_i}{1} x^{2^i} + \dots + \binom{a_i}{b_i} x^{b_i 2^i} + \dots + x^{a_i 2^i} \right)
\end{aligned}$$

Deste modo, como $x^b = x^{\sum_{i=0}^k b_i 2^i}$, então também obtemos que o coeficiente de x^b na expansão $(1+x)^a$ é $\prod_{i=0}^k \binom{a_i}{b_i}$.

Portanto, em $\mathbb{Z}_2[x]$ concluímos que $\binom{a}{b} \equiv \prod_{i=0}^k \binom{a_i}{b_i} \pmod{2}$. \square

Corolário C.1. *Sejam r, m inteiros tais que $r \geq 1$ e m é relativamente primo com 2. Então, $\binom{2^r m}{2^r} \equiv m \pmod{2}$.*

Demonstração. Considere $m = \sum_{i=0}^k m_i 2^i$ a expansão 2-ádica de m , onde m_0 é o resto da divisão de m por 2. Então:

$$\begin{aligned}
2^r m &= m_0 2^r + m_1 2^{r+1} + \dots + m_k 2^{r+k} \\
2^r &= 2^r + 0 \cdot 2^{r+1} + \dots + 0 \cdot 2^{r+k}
\end{aligned}$$

Então, segue do Teorema anterior que $\binom{2^r m}{2^r} = \binom{m_0}{1} \binom{m_1}{0} \dots \binom{m_k}{0} = \binom{m_0}{1} = m_0 \equiv m \pmod{2}$. \square

Corolário C.2. *Sejam $a, b \geq 0$ inteiros tais que a é par e b é ímpar. Então, $\binom{a}{b} \equiv 0 \pmod{2}$.*

Demonstração. Sejam $a = \sum_{i=0}^k a_i 2^i$ e $b = \sum_{i=0}^k b_i 2^i$ as decomposições 2-ádicas de a e b , onde $a_0 = 0$ e $b_0 = 1$, uma vez que a é par e b é ímpar.

Então, segue do Teorema anterior que $\binom{a}{b} = \prod_{i=0}^k \binom{a_i}{b_i} = \binom{0}{1} \prod_{i=1}^k \binom{a_i}{b_i} \equiv 0 \pmod{2}$, pois $\binom{0}{1} = 0$. \square

TERMO DE REPRODUÇÃO XEROGRÁFICA

Autorizo a reprodução xerográfica do presente Trabalho de Conclusão, na íntegra ou em partes, para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, 09 / 03 / 2017

Alex Melges Barbosa

Assinatura do autor