



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

Otávio Henrique Perez

Bifurcações genéricas e relações de equivalência em campos e
vetores suaves por partes

São José do Rio Preto
2017

Otávio Henrique Perez

Bifurcações genéricas e relações de equivalência em campos de
vetores suaves por partes

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Financiadora: FAPESP - Processo
2014/18707-6

Orientador: Prof. Dr. Tiago de Carvalho

São José do Rio Preto
2017

Perez, Otávio Henrique.

Bifurcações genéricas e relações de equivalência em campos de vetores suaves por partes / Otávio Henrique Perez. -- São José do Rio Preto, 2017

124 f. : il.

Orientador: Tiago de Carvalho

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Teoria dos sistemas dinâmicos. 3. Teoria da bifurcação. 4. Campos vetoriais. 5. Filippov, Sistemas de. 6. Perturbação singular (Matemática) I. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. II. Título.

CDU – 517.93

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

TERMO DE APROVAÇÃO

Otávio Henrique Perez

BIFURCAÇÕES GENÉRICAS E RELAÇÕES DE EQUIVALÊNCIA EM
CAMPOS DE VETORES SUAVES POR PARTES

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Tiago de Carvalho
Orientador

Prof. Dr. Paulo Ricardo da Silva
IBILCE - UNESP

Prof. Dr. Durval José Tonon
IME - UFG

São José do Rio Preto, 23 de Fevereiro de 2017

*Às pessoas mais especiais
para mim: Gilmar, Conceição
Guilherme e Ana Maria.*

Agradecimentos

Gostaria de poder deixar registrado o nome de cada pessoa que me ajudou e apoiou para que este momento se concretizasse. Sei que isto é impossível, entretanto seria injusto não mencionar ou fazer referência à elas.

Aos meus pais, Gilmar e Conceição, e ao meu irmão Guilherme por todo o apoio e carinho desde sempre. À Ana Maria por todo o amor, paciência e compreensão durante os momentos em que me fiz ausente.

Ao meu orientador, Tiago de Carvalho, pelos conselhos, críticas construtivas, conhecimentos passados desde a Iniciação Científica e por ter me abrido tantas portas. À banca examinadora pelas correções e sugestões.

Aos meus professores de graduação e pós-graduação, por terem sido um exemplo pra mim dentro e fora da sala de aula, por todo o conhecimento transmitido e por todos os conselhos passados.

Aos amigos do Mestrado e do Doutorado em Matemática do Ibilce, pela ajuda nos momentos em que tive dificuldades com as disciplinas, pelos momentos de descontração e pelo futebol aos finais de semana. Aos amigos que a Unesp Bauru me deu, a qual sempre me lembrarei com muito carinho. Aos amigos da minha terra natal, Jaú, que mesmo distantes se fizeram presentes ao longo destes dois anos.

À FAPESP pelo apoio financeiro durante o Mestrado (processo 2014/18707-6) e também durante a Iniciação Científica.

*Assim como a água faz mais falta no deserto
e os remédios na doença, os livros são
indispensáveis onde ninguém lê.*

David Toscana

Resumo

Neste trabalho iremos abordar aspectos qualitativos e geométricos a respeito de campos de vetores suaves por partes. Nosso foco será estudar bifurcações locais e globais de codimensão um e dois e também algumas relações de equivalência para campos vetoriais suaves por partes definidos no plano. Classificaremos e caracterizaremos bifurcações genéricas por meio do retrato de fase e do diagrama de bifurcação dos campos envolvidos. Também faremos uma breve introdução sobre Sistemas Slow-Fast.

Palavras-chave: Bifurcações. Campos de vetores descontínuos. Sistemas dinâmicos descontínuos. Campos de vetores suaves por partes. Filippov.

Abstract

In this work we study qualitative and geometric aspects of piecewise smooth vector fields. Our focus is to study local and global bifurcations of codimension one and two and some equivalence relations for piecewise smooth vector fields defined on the plane. We will classify and characterize generic bifurcations using the phase portrait and the bifurcation diagram of the vector fields involved. We also incorporate a brief introduction about Slow-Fast Systems.

Keywords: Bifurcations. Discontinuous vector fields. Discontinuous dynamical systems. Piecewise smooth vector fields. Filippov.

Lista de Figuras

2.1	Regiões em Σ	24
2.2	Tangência quadrática (à esquerda) e tangência cúbica (à direita).	24
2.3	Campo Deslizante Z^s	25
2.4	Pseudo-sela repulsora (à esquerda) e atratora (à direita).	27
2.5	Região de costura e tangência cúbica em p	29
2.6	Região de costura e tangência quadrática em p	29
2.7	Região de deslize e tangência cúbica em p	30
2.8	Regiões de deslize e escape e tangência quadrática em p	31
2.9	Tangência Singular.	31
2.10	Separatriz instável (à esquerda) e Conexão de Separatrizes (à direita).	32
2.11	Ciclo (à esquerda) e Pseudo-ciclo (à direita).	32
3.1	Campos C^r -conjugados.	34
3.2	Campos Z (à esquerda) e \tilde{Z} (à direita).	36
4.1	Forma canônica da Proposição 4.1.1.	38
4.2	Forma canônica da Proposição 4.1.2.	39
4.3	Forma canônica da Proposição 4.1.3.	39
4.4	Forma canônica da Proposição 4.2.1, quando a dobra é invisível.	41
4.5	Forma canônica da Proposição 4.2.1, quando a dobra é visível.	41
4.6	Forma canônica da Proposição 4.2.2.	43
5.1	forma canônica da Proposição 5.2.1 e seus desdobramentos.	48
5.2	Forma canônica da Proposição 5.3.1 com $a = b = 1$ e $c = -1$	49
5.3	Forma canônica da Proposição 5.3.1 $a = b = c = 1$	50
5.4	Forma canônica da Proposição 5.4.1.	51
5.5	Forma canônica da Proposição 5.4.2.	51
5.6	Forma canônica da Proposição 5.4.3.	52
5.7	Forma canônica da Proposição 5.4.4.	52
5.8	Forma canônica da Proposição 5.4.5.	53
5.9	Aplicações de primeiro retorno de X , Y e Z	53
5.10	Casos genéricos quando $\pi_1(X(0,0))\pi_1(Y(0,0)) < 0$	54
5.11	Forma canônica da Proposição 5.4.6.	54
5.12	Forma canônica da Proposição 5.4.7 para o caso atrator.	55
5.13	Desdobramentos dos campos Z_α e \tilde{Z}_α	57
5.14	Desdobramento do campo Z_α quando $\alpha > 0$	57
5.15	Desdobramentos do campo Z_α^1 para a singularidade Sela- Σ	58
5.16	Desdobramentos do campo Z_α^2 para a singularidade Sela- Σ	58
5.17	Desdobramentos do campo Z_α^3 para a singularidade Sela- Σ	59

5.18	Desdobramentos do campo Z_α^4 para a singularidade Sela- Σ	59
5.19	Desdobramentos dos campos Z_α e \tilde{Z}_β	60
5.20	Desdobramentos do campo Z_α e ligação heteroclínica para $\alpha > 0$	61
5.21	Desdobramentos do campo Z_α^1 para a singularidade Nó- Σ	61
5.22	Desdobramentos do campo Z_α^2 para a singularidade Nó- Σ	62
5.23	Possibilidades para $\gamma_{X_\alpha} \cap \Sigma$	63
5.24	Desdobramentos do campo Z_α^1 para a singularidade Foco- Σ	63
5.25	Desdobramentos do campo Z_α^2 para a singularidade Foco- Σ	64
5.26	Desdobramentos do campo Z_α^3 para a singularidade Foco- Σ	64
5.27	Desdobramentos do campo Z_α^4 para a singularidade Foco- Σ	64
5.28	Desdobramentos do campo Z_α^5 para a singularidade Foco- Σ	65
6.1	Desdobramentos do campo Z_α para a singularidade Nó- Σ no Caso 1.	68
6.2	Desdobramentos do campo Z_α para a singularidade Nó- Σ no Caso 2.	68
7.1	Ligação homoclínica envolvendo a dobra T_0 a partir de um ciclo atrator.	70
7.2	Ligação homoclínica envolvendo a dobra T_0 a partir de um ciclo repulsor.	70
7.3	Ligação homoclínica envolvendo a dobra T_0	70
7.4	Ligação heteroclínica envolvendo T_0 e \tilde{T}_0	71
7.5	Ligação heteroclínica envolvendo T_0 e \tilde{T}_0	71
7.6	Ligação heteroclínica envolvendo T_0 e \tilde{T}_0	72
7.7	Ligação heteroclínica envolvendo T_0 e \tilde{T}_0	72
7.8	Ligação heteroclínica envolvendo T_0 e \tilde{T}_0	72
7.9	Tangência cúbica e ciclo deslizante.	73
7.10	Ligação pseudo-homoclínica envolvendo uma sela-nó.	73
7.11	Ligação pseudo-homoclínica envolvendo uma pseudo-sela.	73
7.12	Ligação envolvendo uma dobra e uma sela do campo X_0	74
7.13	Ligação pseudo-heteroclínica envolvendo pseudo-selas.	74
7.14	Ligação heteroclínica envolvendo uma pseudo-sela e uma sela do campo X_0	75
7.15	Ligação heteroclínica envolvendo selas dos campos X_0 e Y_0	75
8.1	Nó não-diagonalizável para X	78
8.2	Desdobramentos do campo $Z_{\varepsilon\mu}$ nas curvas $\varepsilon = 0$ e $\mu = 0$	79
8.3	Desdobramentos do campo $Z_{\varepsilon\mu}$	80
8.4	Regiões A e B	80
8.5	Retrato de fase de Z para a Singularidade Nó- Σ quando $Z^\Sigma(x, y) = (\beta x^2 + \mathcal{O}(x^3), 0)$	82
8.6	Desdobramentos do campo $Z_{\varepsilon\mu}$	83
8.7	Retrato de fase do campo Z para a singularidade Foco-Dobra.	84
8.8	Desdobramentos do campo $Z_{\varepsilon\mu}$ nas curvas $\varepsilon = 0$ e $\mu = 0$	84
8.9	Desdobramentos do campo $Z_{\varepsilon\mu}$ e regiões R_1 , R_2 e R_3	85
8.10	Desdobramentos do campo $Z_{\varepsilon\mu}$ no segundo quadrante.	86
8.11	Retrato de fase do campo Z para a singularidade Sela-Dobra.	87
8.12	Desdobramentos do campo $Z_{\varepsilon\mu}$ nas curvas $\varepsilon = 0$ e $\mu = 0$	88
8.13	Desdobramentos do campo $Z_{\varepsilon\mu}$ na região R_1	89
8.14	Desdobramentos do campo $Z_{\varepsilon\mu}$ na região R_3	90
8.15	Desdobramento do campo $Z_{\varepsilon\mu}$ na região R_2	91
8.16	Retrato de fase do campo Z para a singularidade Cúspide-Dobra.	91

8.17	Curvas ξ_1 e ξ_2 e regiões do plano $\varepsilon\mu$	92
8.18	Ciclos deslizantes sobre a curva ξ_1	93
8.19	Desdobramentos do campo $Z_{\varepsilon\mu}$ sobre as curvas $\varepsilon = 0$, $\mu = 0$, ξ_1 e ξ_2 . . .	94
8.20	Desdobramentos do campo $Z_{\varepsilon\mu}$ na região R_4	95
8.21	Desdobramentos do campo $Z_{\varepsilon\mu}$ na região R_3	97
8.22	Retrato de fase do campo Z para a singularidade Hopf- Σ	98
8.23	Desdobramentos de $Z_{\varepsilon\mu}^\sigma$ no caso Supercrítico.	99
8.24	Desdobramentos de $Z_{\varepsilon\mu}^\sigma$ no caso Subcrítico.	100
9.1	Σ -Centro não-degenerado.	103
10.1	Retrato de fase de (10.5).	113
10.2	Retrato de fase do Sistema (10.13).	116
10.3	Retrato de fase do Sistema (10.14).	117
10.4	Retrato de fase do Sistema (10.15).	118
10.5	Retrato de fase de (10.16).	119
10.6	Retrato de fase do Sistema (10.8).	120
10.7	Variedade S_0^a em azul.	120

Sumário

1	Introdução	19
2	Conceitos Iniciais sobre Campos de Filippov	23
2.1	Órbitas e Singularidades	23
2.2	Separatrizes, Órbitas Periódicas e Ciclos	31
3	Relações de Equivalência em Campos de Filippov	33
4	Campos Estruturalmente Estáveis	37
4.1	Pontos Regulares de Z	37
4.2	Singularidades Genéricas de Z	40
4.3	Estabilidade Local de Campos de Filippov	43
5	Bifurcações Locais a Um Parâmetro	47
5.1	Conceitos Preliminares	47
5.2	Bifurcação Sela-Nó	48
5.3	Cúspide Regular	48
5.4	Dobra-Dobra	50
5.4.1	Dobra-Dobra Visível-Visível	50
5.4.2	Dobra-Dobra Visível-Invisível	51
5.4.3	Dobra-Dobra Invisível-Invisível	53
5.5	Ponto de Equilíbrio Hiperbólico de X sobre Σ	56
5.5.1	Bifurcação Sela- Σ Genérica	56
5.5.2	Bifurcação Nó- Σ Genérica	59
5.5.3	Bifurcação Foco- Σ Genérica	62
6	Bifurcação Nó-Σ: Casos Extras	67
7	Bifurcações Genéricas Globais a Um Parâmetro	69
7.1	Conexões de Separatrizes entre Dobras Regulares	69
7.1.1	Conexões Homoclínicas	69
7.1.2	Conexões Heteroclínicas	70
7.2	Bifurcações Envolvendo Pontos Críticos de Z	73
7.2.1	Conexões Homoclínicas	73
7.2.2	Conexões Heteroclínicas	74
8	Bifurcações Locais a Dois Parâmetros	77
8.1	Nó Não Diagonalizável	77
8.2	Singularidade Nó- Σ com $Z^\Sigma(x, y) = (\beta x^2 + \mathcal{O}(x^3), 0)$	81

8.3	Singularidade Foco-Dobra	82
8.4	Singularidade Sela-Dobra	86
8.5	Singularidade Cúspide-Dobra	91
8.6	Singularidade Hopf- Σ	97
9	Dobra-Dobra Invisível-Invisível: Bifurcação de Codimensão k	103
10	Sistemas Slow-Fast e Perturbação Singular	111
10.1	Preliminares	111
10.2	Análise de Modelos	112
10.2.1	Batimentos cardíacos	112
10.2.2	Impulsos nervosos	112
10.3	Dessingularização de equações com impasse	113
10.4	Dobras, sela dobrada e cúspides em equações com impasse com dois parâmetros	115
10.5	Singularidades do Sistema (10.8)	116
10.6	Retorno global singular para o Sistema (10.8)	117
	Referências	121
	Índice Remissivo	123

1 Introdução

Sistemas Dinâmicos fazem parte de uma área da Matemática que tem tido um notório avanço nos últimos anos e busca compreender o comportamento futuro e passado de fenômenos. Geralmente, podemos modelar tais fenômenos a partir de Equações Diferenciais e este estudo pode ajudar a resolver problemas das mais diversas áreas do conhecimento, tais como Economia, Física, Biologia, Engenharias, etc.

Entretanto, nem sempre é possível resolver tais equações diferenciais por métodos algébricos e portanto temos que recorrer ao estudo qualitativo e geométrico de suas soluções. Os famosos livros [17] e [19] tratam justamente desta teoria clássica envolvendo campos de vetores suaves.

Recentemente uma nova classe de campos tem ganhado grande destaque, que são os Campos de Vetores Suaves por Partes (ou Campos de Filippov). A grosso modo, um Campo Planar de Filippov é um campo cujo domínio de definição é dividido em regiões, sendo que em cada uma destas regiões atua um campo vetorial distinto. A fronteira destas regiões é limitada por curvas, suaves ou não. Especificamente ao longo desta dissertação trabalharemos com apenas dois campos distintos separados por uma curva suave.

Essa classe de campo possui um comportamento muito rico e tem chamado a atenção de pesquisadores por sua complexidade, vasta aplicabilidade em outras áreas da ciência e pela beleza dos problemas que surgem a partir de sua análise. Dentre tais problemas, podemos citar o estudo bifurcações, que é o escopo deste trabalho. Em poucas palavras, abordaremos o que ocorre com um campo de vetores suaves por partes quando aplicamos pequenas perturbações.

Iremos abordar bifurcações a um e dois parâmetros a partir do diagrama de bifurcação dos campos envolvidos, além de estudarmos relações de equivalência entre Campos de Filippov, a saber, Σ -equivalência e equivalência topológica. Para tal, teremos como principal referência o artigo [10]. Este é um trabalho recente que trata desde conceitos introdutórios (tais como trajetória e órbitas) até conceitos mais sofisticados, como bifurcações a dois parâmetros. Estudaremos também o artigo [14], que faz uma análise sistemática de bifurcações locais e globais a um parâmetro.

Devido à curva de descontinuidade, não podemos generalizar diretamente conceitos de campos suaves para campos suaves por partes. Assim, no Capítulo 2 estabeleceremos algumas notações e introduziremos algumas definições relacionadas a campos de Filippov, tais como órbitas, trajetórias, singularidades, dobras, separatrizes, etc. Todos os conceitos apresentados serão ilustrados com exemplos para justificar nossas escolhas. A maioria destas definições estão presentes em [10]. Em caso contrário, explicitaremos em qual referência a definição se encontra.

Já no Capítulo 3, introduziremos as noções de Σ -equivalência e equivalência topoló-

gica. É a partir destes conceitos que poderemos discutir a estabilidade estrutural de um campo suave por partes, conteúdo abordado no Capítulo 4. Como veremos, um campo estruturalmente estável é um campo que não é sensível à pequenas perturbações, isto é, um campo que não altera seu comportamento quando o perturbamos. Iremos caracterizar o conjunto dos campos estruturalmente estáveis, e para cada tipo de campo apresentamos uma forma canônica. Os conceitos e resultados apresentados em ambas as seções também podem ser encontrados em [10].

O estudo de bifurcações se inicia no Capítulo 5. Aqui, introduziremos as noções de bifurcação e codimensão, além de apresentar alguns tipos de campos que possuem bifurcações que dependem de um parâmetro. As formas canônicas apresentadas neste Capítulo podem ser encontradas em [14] e as singularidades estudadas aqui variam desde dobras até pontos críticos-hiperbólicos.

No Capítulo 6, apresentamos dois casos da Bifurcação Nó- Σ que não estão presentes em [14]. Estes casos foram estudadas recentemente em [11] a partir de uma análise mais aprofundada de [8]. Neste Capítulo também é apresentada uma forma canônica que pode ser usada para estudar bifurcações envolvendo outros pontos críticos hiperbólicos, a saber, pontos de Sela e de Foco.

Já no Capítulo 7 analisamos bifurcações globais de dependem de um parâmetro. Estas bifurcações, que podem ser encontradas em [14], podem ser conexões entre dobras ou conexões entre pontos críticos. Em ambos os casos, analisaremos o diagrama de bifurcação dos campos quando temos uma conexão homoclínica ou heteroclínica, isto é, quando a conexão envolve apenas um ponto ou quando envolve dois pontos distintos.

Após analisarmos as bifurcações globais, estaremos aptos a finalmente fazer um estudo das bifurcações locais a dois parâmetros, as quais serão apresentadas no Capítulo 8. Isso se deve pelo fato de que, ao analisar os desdobramentos de campos com bifurcações que dependem de dois parâmetros, iremos nos deparar com bifurcações globais, tais como surgimento de ciclos. Em alguns casos, veremos a existência de infinitas curvas de bifurcação. Todas as bifurcações locais que dependem de dois parâmetros estudadas aqui estão presentes em [10]. Vale destacar que a lista de bifurcações deste tipo é extensa, portanto abordaremos apenas os casos que apresentam um comportamento mais rico, tais como as bifurcações Sela-Dobra e Cúspide-Dobra.

Ao estudar campos de vetores suaves por partes, um dos problemas mais difíceis de serem resolvidos é determinar a real codimensão de determinada singularidade. No Capítulo 9 iremos enunciar e demonstrar um resultado provado recentemente em [4], que diz que um Σ -centro não degenerado (um caso particular da singularidade dobra-dobra invisível-invisível) apresenta uma bifurcação de codimensão k , para todo k inteiro positivo. Como consequência, teremos que a codimensão desta singularidade é infinita.

A estabilidade estrutural de um campo de vetores suaves por partes também pode ser estudada a partir da regularização de tal campo. O processo de regularização foi introduzido em [20] e consiste em analisar o campo de vetores regularizado, uma aproximação do campo suave por partes e que é um campo de vetores suave. Entretanto, a partir de um problema regularizado podemos nos deparar com um problema de perturbação singular, conteúdo abordado no Capítulo 10, onde faremos um estudo introdutório a respeito de Sistemas “Slow-Fast” e da teoria de perturbações singulares. Sistemas “Slow-Fast” é um sistema especial que também tem ganhado grande destaque no meio acadêmico. Este sistema envolve dois tipos de dinâmicas distintas (sistema lento e sistema rápido). O sistema rápido é obtido a partir de um reescalonamento de tempo do sistema lento. Faremos este estudo introdutório a partir da análise de

modelos, cujos sistemas podem estar definidos tanto no plano como no espaço. Todos os exemplos e definições apresentadas neste Capítulo podem ser encontradas ao longo das duas primeiras seções de [2].

2 Conceitos Iniciais sobre Campos de Filippov

As noções básicas sobre campos suaves, tais como trajetória, órbita e singularidades, não podem ser diretamente extendidas à Campos de Filippov devido à presença de descontinuidades. Entretanto, essas noções podem ser reformuladas para esse tipo de campo. Neste Capítulo, vamos definir esses conceitos e apresentar exemplos para justificar as escolhas de nossas definições.

A maioria destas definições podem ser encontradas no artigo [10]. Em caso contrário, iremos indicar qual artigo a definição pode ser encontrada. Neste trabalho vamos considerar Campos de Filippov com apenas uma curva de descontinuidade de codimensão 1.

2.1 Órbitas e Singularidades

Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ vizinhança aberta de $(0,0)$ e $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^r tal que $(0,0)$ é valor regular de f , isto é, $\nabla f(0,0) \neq 0$. Defina os conjuntos:

$$\Sigma = f^{-1}(0) \cap U, \Sigma^+ = \{(x,y) \in U \mid f(x,y) \geq 0\}, \text{ e } \Sigma^- = \{(x,y) \in U \mid f(x,y) \leq 0\}.$$

Definição 2.1.1. Nas condições acima, um **Campo de Vetores Suave por Partes** (ou **Campo de Filippov**) é um campo $Z : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$Z(x,y) = \begin{cases} X(x,y), & \text{se } (x,y) \in \Sigma^+, \\ Y(x,y), & \text{se } (x,y) \in \Sigma^-, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde X e Y são campos de vetores suaves.

Observação 2.1.1. 1. Por simplicidade, consideraremos apenas campos definidos em uma vizinhança de $(0,0)$.

2. Denotaremos $Z = (X, Y)$ para indicar a dependência de Z em relação aos campos X e Y . Quando necessário, denotaremos $Z = (X, Y, f)$ para indicar a dependência em relação à f .

3. Denotaremos por Ω o conjunto de todos os campos de Filippov.

Nosso objetivo agora é definir a trajetória $\varphi_Z(t, p)$, que é a solução do campo (2.1) passando por um ponto $p \in U$. Para analisar as trajetórias quando $p \in \Sigma$, devemos estudar algumas definições.

Definição 2.1.2. A **Derivada de Lie** de f em relação ao campo vetorial X é dada por $Xf(p) = \langle X(p), \nabla f(p) \rangle$ e $X^i f(p) = \langle X(p), \nabla X^{i-1} f(p) \rangle$ para $i \geq 2$ inteiro.

Definição 2.1.3. Considere o campo (2.1). Definimos as seguintes regiões em Σ :

1. **Região de Costura:** $\Sigma^c = \{p \in \Sigma \mid (Xf(p)) \cdot (Yf(p)) > 0\}$,
2. **Região de Deslize:** $\Sigma^s = \{p \in \Sigma \mid (Xf(p)) < 0 \text{ e } (Yf(p)) > 0\}$,
3. **Região de Escape:** $\Sigma^e = \{p \in \Sigma \mid (Xf(p)) > 0 \text{ e } (Yf(p)) < 0\}$.

Veja a Figura 2.1.

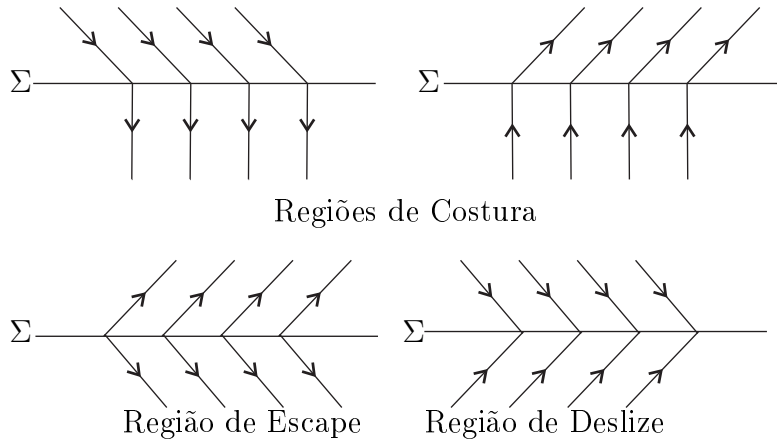


Figura 2.1: Regiões em Σ .

Observação 2.1.2. 1. As três regiões definidas acima são abertas em Σ . De fato, como $Xf : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, se $Xf(p)$ é positivo (ou negativo) então Xf continuará assumindo valores positivos (ou negativos) numa vizinhança suficientemente pequena de p . Além disso, essas regiões podem ter algumas componentes conexas.

2. Temos que $Xf(p) = \langle X(p), \nabla f(p) \rangle = \|X(p)\| \|\nabla f(p)\| \cos \theta$, onde θ é o ângulo entre os vetores $X(p)$ e $\nabla f(p)$. Assim, o sinal de Xf depende desse ângulo.

Definição 2.1.4. Um ponto $p \in \Sigma$ é **ponto de tangência** se $Xf(p) = 0$ ou $Yf(p) = 0$. Dizemos que $p \in \Sigma$ é **ponto de dobra de X** (ou que X tem **tangência quadrática** com Σ) se $Xf(p) = 0$ e $X^2 f(p) \neq 0$. Dizemos que X tem **tangência cúbica** com Σ no ponto p se $Xf(p) = 0$, $X^2 f(p) = 0$ e $X^3 f(p) \neq 0$. Veja a Figura 2.2.

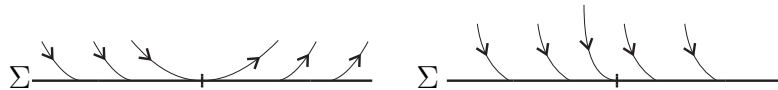


Figura 2.2: Tangência quadrática (à esquerda) e tangência cúbica (à direita).

Observação 2.1.3. Iremos assumir que os pontos de tangência são isolados. Isto acontece quando estudamos bifurcações de codimensão baixa. Em outros casos, podemos ter um segmento formado por pontos de tangência.

Definição 2.1.5. Seja $p \in \Sigma$ ponto de tangência. Se existe uma órbita γ do campo X (respectivamente Y) que passa por p após um tempo finito t_0 de tal forma que γ permanece em Σ^+ (respectivamente Σ^-) para $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, esta tangência é chamada de **tangência visível de X** (respectivamente de Y). Analogamente, se $\gamma \subset \Sigma^-$ (respectivamente $\gamma \subset \Sigma^+$) para $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, dizemos que p é **tangência invisível de X** (respectivamente de Y).

Definição 2.1.6. Seja $p \in \Sigma$ um ponto de tangência. Dizemos que p é **tangência singular** se p é tangência invisível de X e Y simultaneamente. Se p não é singular, dizemos que $p \in \Sigma$ é de **tangência regular**.

A seguir, iremos encontrar a expressão do Campo Deslizante, que é o campo que atua sobre a região Σ^s . Tal demonstração também pode ser encontrada em [3].

Este campo é dado por $Z^s = q - p$, onde q é um ponto que pertence ao segmento que contém os pontos $p + X(p)$ e $p + Y(p)$, de tal forma que o segmento que contém p e q seja tangente à região de deslize Σ^s no ponto p . Veja a Figura 2.3.

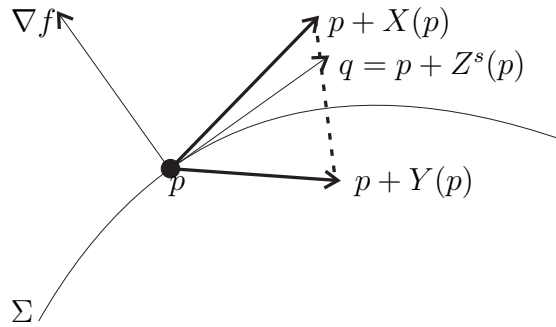


Figura 2.3: Campo Deslizante Z^s .

Sabemos que o vetor ∇f é ortogonal à curva de nível $f(x, y) = 0$. Assim, o campo Z^s é ortogonal à ∇f em p , isto é, $\langle Z^s(p), \nabla f(p) \rangle = 0$.

Além disso, a equação vetorial da reta que passa pelos pontos $p + X(p)$ e $p + Y(p)$ é dada por $r(\lambda) = (p + X(p)) + \lambda(X(p) - Y(p))$. Portanto, como $q \in r$ e $\langle q - p, \nabla f(p) \rangle = 0$, temos

$$\begin{aligned} \langle (p + X(p)) + \lambda(X(p) - Y(p)) - p, \nabla f(p) \rangle &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \langle X(p), \nabla f(p) \rangle + \lambda \langle X(p), \nabla f(p) \rangle - \lambda \langle Y(p), \nabla f(p) \rangle &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow Xf(p) + \lambda(Xf(p) - Yf(p)) = 0 \Rightarrow \lambda &= \frac{Xf(p)}{Yf(p) - Xf(p)}. \end{aligned}$$

Logo, como $Z^s = q - p$, obtemos a expressão do seguinte campo.

Definição 2.1.7. O campo $Z^s : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por

$$Z^s(p) = \frac{1}{Yf(p) - Xf(p)} F_Z(p) = \frac{1}{Yf(p) - Xf(p)} (Yf(p)X(p) - Xf(p)Y(p)),$$

é chamado de **Campo Deslizante**. O **Campo Normalizado** é o campo dado por $F_Z(p) = (Yf(p)X(p) - Xf(p)Y(p))$.

Note que, se $p \in \Sigma^s$, então $p \in \Sigma^e$ para o campo $(-Z)$. Assim, definimos o **Campo de Escape** $Z^e : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^2$ por $Z^e(p) = -(-Z)^s(p)$. Denotaremos por Z^Σ tanto o campo deslizando quanto o campo de escape.

Observe também que em uma região de deslize temos $Yf(p) > 0$ e $Xf(p) < 0$. Portanto, nesta região o Campo Deslizando possui a mesma orientação que o Campo Normalizado. Já numa região de escape, o Campo de Escape e o Campo Normalizado possuem orientações opostas. Além disso, o campo normalizado pode ser estendido de maneira suave até a fronteira da região de deslize.

Definição 2.1.8. Seja X um campo vetorial suave. A **trajetória** $\varphi_X(t, p)$ que passa pelo ponto p é tal que

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\varphi_X(t, p) &= X(\varphi_X(t, p)), \\ \varphi_X(0, p) &= p. \end{cases}$$

Agora, podemos definir trajetória local para Campos de Filippov.

Definição 2.1.9. A **trajetória local** $\varphi_Z(t, p)$ de um Campo de Filippov como em (2.1) passando pelo ponto p é definido por:

- se $p \in \Sigma^+$ (respectivamente Σ^-), a trajetória é dada por $\varphi_Z(t, p) = \varphi_X(t, p)$ (respectivamente $\varphi_Z(t, p) = \varphi_Y(t, p)$).
- se $p \in \Sigma^e$ tal que $Xf(p), Yf(p) > 0$ e supondo que as trajetórias passam por p quando $t = 0$, a trajetória é dada por

$$\varphi_Z(t, p) = \begin{cases} \varphi_X(t, p), & t \in I, t \geq 0, \\ \varphi_Y(t, p), & t \in I, t \leq 0. \end{cases}$$

Se $Xf(p), Yf(p) < 0$, a definição é a mesma, porém invertendo o tempo.

- se $p \in \Sigma^e$ então

$$\varphi_Z(t, p) = \begin{cases} \varphi_{Z^\Sigma}(t, p), & t \in I, t \leq 0, \\ \varphi_X(t, p) \text{ ou } \varphi_Y(t, p) \text{ ou } \varphi_{Z^\Sigma}(t, p), & t \in I, t \geq 0. \end{cases}$$

Se $p \in \Sigma^s$, a definição é a mesma, porém revertendo o tempo.

- se $p \in \Sigma$ é um ponto de tangência regular, então

$$\varphi_Z(t, p) = \begin{cases} \varphi_X(t, p) \text{ ou } \varphi_Y(t, p) \text{ ou } \varphi_{Z^\Sigma}(t, p), & t \in I, t \leq 0, \\ \varphi_X(t, p) \text{ ou } \varphi_Y(t, p) \text{ ou } \varphi_{Z^\Sigma}(t, p), & t \in I, t \geq 0. \end{cases}$$

- se $p \in \Sigma$ é ponto de tangência singular, $\varphi_Z(t, p) = p, \forall t \in I$.

Definição 2.1.10. A **órbita local** de um ponto $p \in U$ é o conjunto $\gamma(p) = \{\varphi_Z(t, p) \mid t \in I\}$.

Observação 2.1.4. A definição de trajetória local que será usada neste trabalho é um pouco diferente da definição usada no artigo [10]. Escolhemos esta definição (que está presente em [3]) pois, apesar dela não garantir a unicidade das trajetórias, com ela garantimos que, por exemplo, as trajetórias na região de escape possam se afastar da descontinuidade ou não. Isso ficará mais claro nos exemplos que virão.

Definição 2.1.11. Seja $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$. Se $Z^\Sigma(p) = 0$, dizemos que p é ponto de **pseudo-equilíbrio** de Z .

Note que, em um ponto de pseudo-equilíbrio, os campos X e Y são colineares. De fato, se $Z^s(p) = 0$, então

$$\frac{1}{Yf(p) - Xf(p)}(Yf(p)X(p) - Xf(p)Y(p)) = 0,$$

donde $(Yf(p)X(p) - Xf(p)Y(p)) = 0$ e portanto $X(p) = \frac{Xf(p)}{Yf(p)}Y(p)$. Lembre que como $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$, então $Xf(p), Yf(p) \neq 0$.

Definição 2.1.12. Seja $p \in \Sigma^s$. Então p é **pseudo-nó atrator** se $Z^s(p) = 0$ e $(Z^s)'(p) < 0$. Se $p \in \Sigma^e$, então p é **pseudo-nó repulsor** se $Z^e(p) = 0$ e $(Z^e)'(p) > 0$.

Definição 2.1.13. Dizemos que $p \in \Sigma$ é um ponto de **pseudo-sela** se

- $p \in \Sigma^s$ tal que $Z^s(p) = 0$ e $(Z^s)'(p) > 0$,
- $p \in \Sigma^e$ tal que $Z^e(p) = 0$ e $(Z^e)'(p) < 0$.

Veja a Figura 2.4.

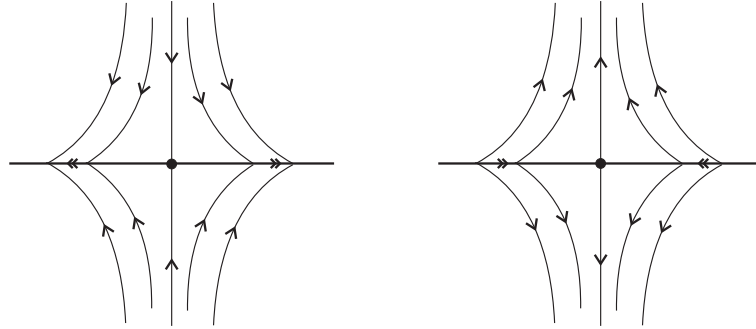


Figura 2.4: Pseudo-sela repulsora (à esquerda) e atratora (à direita).

Definição 2.1.14. As **singularidades** de um Campo de Filippov (2.1) são:

- Todo $p \in \Sigma^\pm$ tal que $X(p) = 0$ ou $Y(p) = 0$,
- Todo $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$ tal que p é de pseudo-equilíbrio, isto é, $Z^\Sigma(p) = 0$,
- Pontos de tangência regular ou singular.

Em campos suaves, as singularidades são os pontos críticos do sistema e portanto a trajetória passando por esses pontos é o próprio ponto. Entretanto, em Campos Suaves Por Partes existem singularidades (pontos de tangência regular) tais que $\gamma(p) \neq \{p\}$. Por esta razão, vamos classificar as singularidades em

- **Singularidades distinguidas:** Pontos tais que $\gamma(p) = \{p\}$,
- **Singularidades não-distinguidas:** Pontos $p \in \Sigma$ que são de tangência regular. Mesmo não sendo pontos regulares, a órbita local nesses pontos é homeomorfa à \mathbb{R} .

Definição 2.1.15. Uma **singularidade distinguida** é um ponto p tal que $\gamma(p) = \{p\}$. Eles podem ser:

- Todo $p \in \Sigma^\pm$ tal que $X(p) = 0$ ou $Y(p) = 0$,
- Todo $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$ tal que p é de pseudo-equilíbrio, isto é, $Z^\Sigma(p) = 0$,
- Pontos de tangência singular.

Os campos suaves X e Y que compõem o campo $Z = (X, Y, f)$ estão definidos numa vizinhança aberta da origem que contém $\overline{\Sigma^+}$ e $\overline{\Sigma^-}$, respectivamente. Porém, o campo X pode possuir pontos críticos pertencentes à Σ^- (respectivamente, o campo Y pode possuir pontos críticos em Σ^+). Chamaremos esses pontos de **pontos de equilíbrio virtuais**. Os pontos críticos do campo X que estão em $\overline{\Sigma^+}$ (respectivamente, pontos críticos do campo Y que estão em $\overline{\Sigma^-}$) são chamados de **pontos de equilíbrio reais**.

Definição 2.1.16. Considere a trajetória $\varphi_Z(t, q)$ do campo Z e seja $p \in \Sigma$.

- Dizemos que p é **ponto de partida** se existe $t_0 < 0$ tal que $\lim_{t \rightarrow t_0^+} \varphi_Z(t, q) = p$,
- Dizemos que p é **ponto de chegada** se existe $t_0 > 0$ tal que $\lim_{t \rightarrow t_0^-} \varphi_Z(t, q) = p$.

Segue da definição de trajetória na região de costura que p é ponto de partida de todo $q \in \gamma^+ = \{\varphi_Z(t, p) \mid t \geq 0\}$. Analogamente, p é ponto de chegada de todo $q \in \gamma^- = \{\varphi_Z(t, p) \mid t \leq 0\}$. Assim, a órbita passando por um ponto $p \in \Sigma^c$ é dada por $\gamma = \gamma^+ \cup \gamma^-$.

A seguir veremos alguns exemplos de campos suaves por partes e vamos analisar suas trajetórias. Nesses exemplos, tomaremos $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = y$. Assim, temos que $p = (0, 0)$ é valor regular de f e nossa descontinuidade será dada por $\Sigma = \{(x, y) \in U \mid y = 0\}$.

Exemplo 2.1.1. Considere o campo

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y) &= (1, x^2), & y \geq 0, \\ Y(x, y) &= (1, 1), & y \leq 0. \end{cases}$$

Temos que

- $Xf(x, y) = \langle X(x, y), \nabla f(x, y) \rangle = \langle (1, x^2), (0, 1) \rangle = x^2$,
- $X^2f(x, y) = \langle X(x, y), \nabla Xf(x, y) \rangle = \langle (1, x^2), (2x, 0) \rangle = 2x$,
- $X^3f(x, y) = \langle X(x, y), \nabla X^2f(x, y) \rangle = \langle (1, x^2), (2, 0) \rangle = 2$,
- $Yf(x, y) = \langle Y(x, y), \nabla f(x, y) \rangle = \langle (1, 1), (0, 1) \rangle = 1$.

Assim, segue que $p = (0, 0)$ é um ponto de tangência cúbica de X e que $\Sigma^c = \Sigma \setminus \{p\}$. Logo, pela Definição 2.1.9 segue que para $q \in \Sigma$, temos que a trajetória $\varphi_Z(t, q)$ é a concatenação das trajetórias $\varphi_X(t, q)$ e $\varphi_Y(t, q)$. Veja a Figura 2.5.

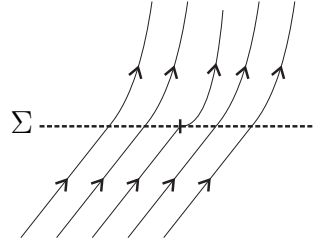


Figura 2.5: Região de costura e tangência cúbica em p .

Exemplo 2.1.2. Considere o campo

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y) = (1, 2x), & y \geq 0, \\ Y(x, y) = (2, 7x), & y \leq 0. \end{cases}$$

Temos que

- $Xf(x, y) = \langle X(x, y), \nabla f(x, y) \rangle = \langle (1, 2x), (0, 1) \rangle = 2x,$
- $X^2f(x, y) = \langle X(x, y), \nabla Xf(x, y) \rangle = \langle (1, 2x), (2, 0) \rangle = 2,$
- $Yf(x, y) = \langle Y(x, y), \nabla f(x, y) \rangle = \langle (2, 7x), (0, 1) \rangle = 7x.$

Assim, segue que $p = (0, 0)$ é uma dobra de X e Y e que $\Sigma^c = \Sigma \setminus \{p\}$. Pela Definição 2.1.9, para $q \in \Sigma^c$ temos que a trajetória $\varphi_Z(t, q)$ é a concatenação das trajetórias $\varphi_X(t, q)$ e $\varphi_Y(t, q)$. Veja a Figura 2.6.

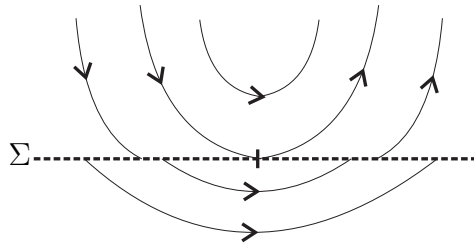


Figura 2.6: Região de costura e tangência quadrática em p .

Exemplo 2.1.3. Considere o campo

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y) = (1, -x^2), & y \geq 0, \\ Y(x, y) = (1, 1), & y \leq 0. \end{cases}$$

Temos que

- $Xf(x, y) = \langle X(x, y), \nabla f(x, y) \rangle = \langle (1, -x^2), (0, 1) \rangle = -x^2,$
- $X^2f(x, y) = \langle X(x, y), \nabla Xf(x, y) \rangle = \langle (1, -x^2), (-2x, 0) \rangle = -2x,$
- $X^3f(x, y) = \langle X(x, y), \nabla X^2f(x, y) \rangle = \langle (1, -x^2), (-2, 0) \rangle = -2,$

$$\bullet Yf(x, y) = \langle Y(x, y), \nabla f(x, y) \rangle = \langle (1, 1), (0, 1) \rangle = 1.$$

Assim, segue que $p = (0, 0)$ é um ponto de tangência cúbica de X e que $\Sigma^s = \Sigma \setminus \{p\}$. Logo, pela Definição 2.1.9 temos que

$$\varphi_Z(t, q) = \begin{cases} \varphi_{Z^s}(t, q) \text{ ou } \varphi_X(t, q) \text{ ou } \varphi_Y(t, q), & \text{se } t \leq 0, \\ \varphi_{Z^s}(t, q) & \text{se } t \geq 0, \end{cases}$$

para todo $q \in \Sigma$. Veja a Figura 2.7.

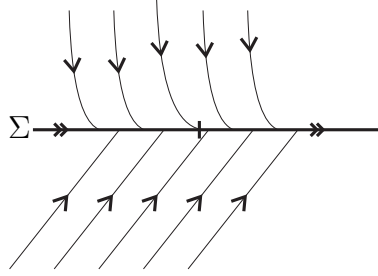


Figura 2.7: Região de deslize e tangência cúbica em p .

Exemplo 2.1.4. Considere o campo

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y) = (1, 2x), & y \geq 0, \\ Y(x, y) = (-2, -7x), & y \leq 0. \end{cases}$$

Temos que

- $Xf(x, y) = \langle X(x, y), \nabla f(x, y) \rangle = \langle (1, 2x), (0, 1) \rangle = 2x,$
- $X^2f(x, y) = \langle X(x, y), \nabla Xf(x, y) \rangle = \langle (1, 2x), (2, 0) \rangle = 2,$
- $Yf(x, y) = \langle Y(x, y), \nabla f(x, y) \rangle = \langle (-2, -7x), (0, 1) \rangle = -7x.$

Assim, segue que $p = (0, 0)$ é uma dobra de X e Y . Além disso, $\Sigma^s = \{q \in \Sigma \mid x < 0\}$ e $\Sigma^e = \{q \in \Sigma \mid x > 0\}$. Logo, pela Definição 2.1.9 segue que para $p \in \Sigma$ temos

$$\varphi_Z(t, p) = \begin{cases} \varphi_{Z^s}(t, p) \text{ ou } \varphi_X(t, p) \text{ ou } \varphi_Y(t, p), & \text{se } t \leq 0, \\ \varphi_{Z^s}(t, p) \text{ ou } \varphi_X(t, p) \text{ ou } \varphi_Y(t, p), & \text{se } t \geq 0. \end{cases}$$

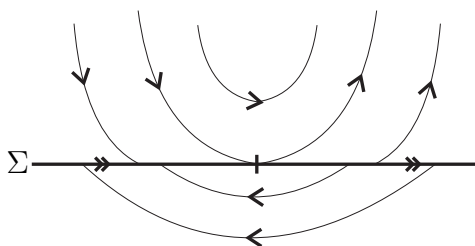
Note também que o campo que atua sobre Σ é dado por $Z^\Sigma(x, y) = \left(\frac{1}{3}, 0\right)$. Veja a Figura 2.8.

Exemplo 2.1.5. Considere o campo

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y) = (1, -x), & y \geq 0, \\ Y(x, y) = (-1, x^2 - x), & y \leq 0. \end{cases}$$

Temos que

$$\bullet Xf(x, y) = \langle X(x, y), \nabla f(x, y) \rangle = \langle (1, -x), (0, 1) \rangle = -2x,$$


 Figura 2.8: Regiões de deslize e escape e tangência quadrática em p .

$$\bullet Yf(x, y) = \langle Y(x, y), \nabla f(x, y) \rangle = \langle (-1, x^2 - x), (0, 1) \rangle = x^2 - x.$$

Assim, segue que $p = (0, 0)$ é ponto de tangência invisível de ambos os campos, logo p é uma tangência singular. Dessa forma, $\varphi_Z(t, p) = p$, para todo $t \in I$. Se $q \neq (0, 0)$, então $q \in \Sigma^c$ e portanto $\varphi_Z(t, q)$ é a concatenação das trajetórias de X e de Y . Veja a Figura 2.9.

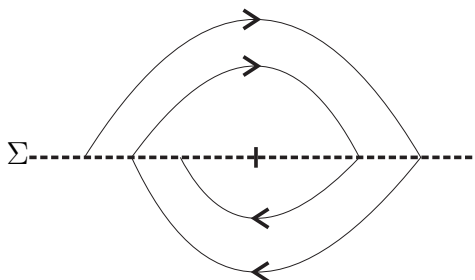


Figura 2.9: Tangência Singular.

Um fato importante a ser destacado é que uma trajetória só sai da região de deslize por tangências. De fato, se $p \in \Sigma^s$, então por definição $Xf(p) < 0$ e $Yf(p) > 0$. Para que uma trajetória vá para uma região de costura (ou até mesmo escape), é preciso que Xf ou Yf mudem de sinal. Como ambas as funções são contínuas, obrigatoriamente teremos $Xf(q) = 0$ ou $Yf(q) = 0$ para algum $q = \varphi_Z(t_0, p)$, o que implica que q é ponto de tangência.

2.2 Separatrizes, Órbitas Periódicas e Ciclos

Nesta seção, iremos generalizar o conceito de separatriz e órbita periódica para Campos Suaves por Partes.

Definição 2.2.1. Uma **separatriz instável** é:

- Se $p \in \Sigma^\pm$ é um ponto de sela para X em $\overline{\Sigma^+}$ ou para Y em $\overline{\Sigma^-}$, então a separatriz instável de p é a variedade instável invariante $W^u(p)$ dada por

$$W^u(p) = \{q \in U \mid \varphi_Z(t, q) \text{ é bem definido em } t \in (-\infty, 0) \text{ e } \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_Z(t, q) = p\}.$$

- Se $p \in \Sigma$ é uma singularidade distinguida, então a separatriz instável é a órbita regular que tem p como ponto de partida. Denotaremos essa separatriz por W_{\pm}^u , onde o subscrito \pm significa que a órbita está contida em Σ^{\pm} .

Analogamente, podemos definir separatriz estável. Se uma separatriz é simultaneamente estável e instável, então ela é uma **conexão de separatrizes**. Veja a Figura 2.10.

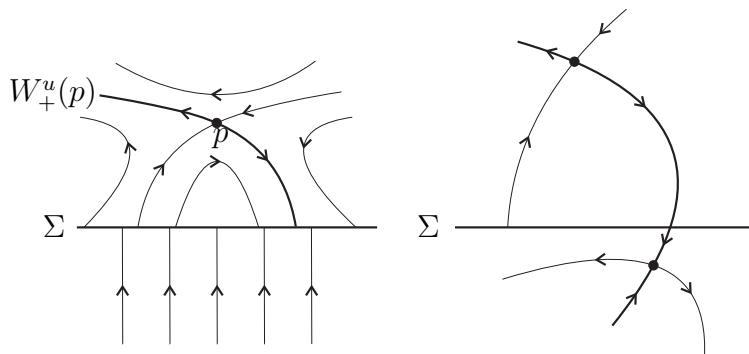


Figura 2.10: Separatriz instável (à esquerda) e Conexão de Separatrizes (à direita).

Um pseudo-nó estável $p \in \Sigma^s$ possui separatrizes que são dadas pelas duas órbitas regulares em Σ^+ e Σ^- , que tem p como ponto de chegada.

Definição 2.2.2. Uma **órbita periódica regular** é uma órbita $\gamma = \{\varphi_Z(t, p) \mid t \in \mathbb{R}\}$ que pertence à $\Sigma^+ \cup \Sigma^- \cup \overline{\Sigma^c}$ tal que $\varphi_Z(t + T, p) = \varphi_Z(t, p)$, para algum $T > 0$.

Definição 2.2.3. Um **ciclo periódico** é o fecho de um conjunto finito e ordenado de órbitas $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ tal que γ_{2k} é um pedaço de uma órbita deslizante (órbita do campo deslizante), γ_{2k+1} é uma órbita regular e os pontos de partida e chegada de γ_{2k+1} pertencem à $\overline{\gamma_{2k}}$ e $\overline{\gamma_{2k+2}}$, respectivamente. Veja a Figura 2.11.

Definição 2.2.4. O **período de um ciclo** é a soma dos tempos que são gastos para percorrer cada uma das órbitas γ_i , com $i = 1, \dots, n$.

Definição 2.2.5. Um **pseudo-ciclo** é o conjunto finito de órbitas regulares $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ tais que os extremos de γ_i coincidem com um extremo de γ_{i-1} e um extremo de γ_{i+1} , formando uma curva homeomorfa à um círculo de tal modo que coincidem dois pontos de partida e dois pontos de chegada. Veja a Figura 2.11.

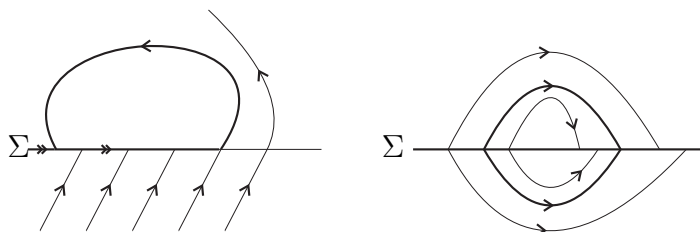


Figura 2.11: Ciclo (à esquerda) e Pseudo-ciclo (à direita).

3 Relações de Equivalência em Campos de Filippov

Neste Capítulo introduziremos duas noções de equivalência para Campos de Filippov, que nos levarão ao estudo de bifurcações de codimensões 1 e 2. Todas as definições e exemplos apresentados aqui podem ser encontrados em [10].

Definição 3.0.1. Sejam $Z : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\tilde{Z} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$ Campos de Filippov, onde $U, \tilde{U} \subset \mathbb{R}^2$ são abertos e $\Sigma \subset U$ e $\tilde{\Sigma} \subset \tilde{U}$ são as curvas de descontinuidade. Dizemos que Z e \tilde{Z} são Σ -**equivalentes** se existe um homeomorfismo $h : U \rightarrow \tilde{U}$ que preserva orientação, leva órbitas de Z em órbitas de \tilde{Z} e leva Σ em $\tilde{\Sigma}$.

Segue da definição que toda Σ -equivalência leva órbitas regulares em órbitas regulares e singularidades distinguidas em singularidades distinguidas. Mais ainda: leva ponto de partida em ponto de partida e leva ponto de chegada em ponto de chegada (pois preserva orientação). Além disso, as regiões Σ^c , Σ^s e Σ^e também são preservadas, logo os campos deslizante e de escape também são preservados. Também são preservadas as separatrizes, conexões de separatrizes, órbitas periódicas, ciclos e pseudo-ciclos.

A definição acima é natural pois em algumas aplicações é necessário que a curva de descontinuidade Σ seja preservada. Entretanto, em alguns casos ela se torna uma definição muito restrita. Por exemplo, não é necessário que a região de costura seja preservada. Do ponto de vista topológico, o comportamento de uma trajetória numa vizinhança da região de costura é o mesmo comportamento de uma trajetória que passa por um ponto $p \in \Sigma^\pm$, onde o campo Z é suave.

Dessa forma, neste trabalho consideraremos, quando conveniente, a definição de equivalência topológica.

Definição 3.0.2. Sejam $Z : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\tilde{Z} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$ Campos de Filippov, onde $U, \tilde{U} \subset \mathbb{R}^2$ são abertos e $\Sigma \subset U$ e $\tilde{\Sigma} \subset \tilde{U}$ são as curvas de descontinuidade. Dizemos que Z e \tilde{Z} são **topologicamente equivalentes** se existe um homeomorfismo $h : U \rightarrow \tilde{U}$ que preserva orientação e leva órbitas de Z em órbitas de \tilde{Z} .

É fácil ver que toda Σ -equivalência é uma equivalência topológica, entretanto a recíproca não é verdadeira (ver Exemplo 3.0.1 e Proposições 8.1.1 e 8.1.2). Vale destacar também que o conceito de Σ -equivalência é mais utilizado na literatura.

Outras noções de equivalência entre campos de vetores suaves por partes podem ser encontradas na literatura. Dentre elas, podemos citar a **mild-equivalência** e a Σ^s -**equivalência** (ver [12] e [6]).

Definição 3.0.3. Sejam X, \tilde{X} campos suaves e $\varphi_X(t, p), \varphi_{\tilde{X}}(t, p)$ suas respectivas trajetórias. Dizemos que os campos X e \tilde{X} são C^r -**conjugados** se existe um homeomorfismo h de classe C^r tal que $h(\varphi_X(t, p)) = \varphi_{\tilde{X}}(t, h(p))$. Veja a Figura 3.1.

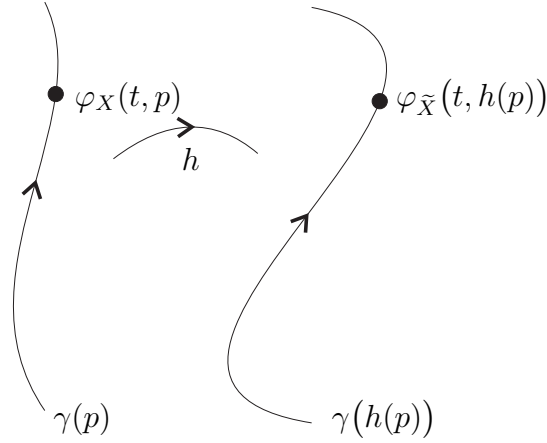


Figura 3.1: Campos C^r -conjugados.

Como o homeomorfismo h é diferenciável, segue de $h(\varphi_X(t, p)) = \varphi_{\tilde{X}}(t, h(p))$ que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(h(\varphi_X(t, p)) \right) &= \frac{d}{dt} \left(\varphi_{\tilde{X}}(t, h(p)) \right), \\ Dh(\varphi_X(t, p)) \frac{d}{dt} (\varphi_X(t, p)) &= \frac{d}{dt} \left(\varphi_{\tilde{X}}(t, h(p)) \right), \\ Dh(\varphi_X(t, p)) X(\varphi_X(t, p)) &= \tilde{X} \left(\varphi_{\tilde{X}}(t, h(p)) \right), \end{aligned}$$

onde Dh é a diferencial de h . Tomando $t = 0$, temos

$$Dh(p)X(p) = \tilde{X}(h(p)).$$

Como h é bijetora, existe um ponto \tilde{p} no contra domínio tal que $h^{-1}(\tilde{p}) = p$. Assim, temos

$$Dh(h^{-1}(\tilde{p}))X(h^{-1}(\tilde{p})) = \tilde{X}(\tilde{p}).$$

Escrevendo $h_*X = \tilde{X}$, temos $Dh(h^{-1}(\tilde{p}))X(h^{-1}(\tilde{p})) = h_*X(\tilde{p})$. Isso quer dizer que o homeomorfismo h é uma mudança de coordenadas. Se F é uma função tal que $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, tomaremos $h_*F = F \circ h^{-1}$.

Neste trabalho não iremos usar um conceito análogo de conjugação topológica para sistemas não-suaves. Entretanto, vamos usar conjugações aplicadas para as componentes suaves X e Y de $Z = (X, Y)$.

Proposição 3.0.1. Sejam os campos de Filippov $Z = (X, Y, f)$ e $\tilde{Z} = (\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{f})$ e suas respectivas curvas de descontinuidade $\Sigma \subset U$ e $\tilde{\Sigma} \subset \tilde{U}$. Suponha que existe um difeomorfismo $h: U \rightarrow \tilde{U}$ de classe C^r que conjugua simultaneamente X e \tilde{X} por um lado e Y e \tilde{Y} por outro lado. Então h conjugua os campos Z^Σ e $\tilde{Z}^{\tilde{\Sigma}}$ e portanto h é uma Σ -equivalência entre Z e \tilde{Z} .

Demonstração. Por hipótese, temos que h é um difeomorfismo de classe C^r que conjugua X com \tilde{X} e Y com \tilde{Y} . Note que $h(\Sigma) = \{\tilde{p} \in \tilde{U} \mid \exists p \in \Sigma \text{ onde } h(p) = \tilde{p}\} = \{\tilde{p} \in \tilde{U} \mid h(p) = \tilde{p} \text{ e } f(p) = 0\}$, portanto

$$h(\Sigma) = \{\tilde{p} \in \tilde{U} \mid f(h^{-1}(\tilde{p})) = 0\} = \tilde{\Sigma}.$$

Pelo o que foi discutido anteriormente temos $h_*X = \tilde{X}$ e $h_*Y = \tilde{Y}$. Além disso, $f(p) = \tilde{f} \circ h(p)$, já que $h(\Sigma) = \tilde{\Sigma}$. Para provar que h conjuga os campos deslizantes, é suficiente mostrar que $Dh(p)Z^s(p) = \tilde{Z}^s(h(p))$.

Dado $p \in \Sigma$, temos $f(p) = (\tilde{f} \circ h)(p)$, donde

$$\begin{aligned} \nabla f(p) &= \nabla \tilde{f}(h(p)) Dh(p) = \left(\tilde{f}_x(h(p)), \tilde{f}_y(h(p)) \right) \begin{pmatrix} h_x^1(p) & h_y^1(p) \\ h_x^2(p) & h_y^2(p) \end{pmatrix} = \\ &= \left(\tilde{f}_x(h(p))h_x^1(p) + \tilde{f}_y(h(p))h_x^2(p), \tilde{f}_x(h(p))h_y^1(p) + \tilde{f}_y(h(p))h_y^2(p) \right). \end{aligned}$$

Assim, segue que

$$\begin{aligned} Xf(p) &= \langle X(p), \nabla f(p) \rangle = \\ &= X_1(p) \left(\tilde{f}_x(h(p))h_x^1(p) + \tilde{f}_y(h(p))h_x^2(p) \right) + X_2(p) \left(\tilde{f}_x(h(p))h_y^1(p) + \tilde{f}_y(h(p))h_y^2(p) \right) = \\ &= \tilde{f}_x(h(p)) \left(X_1(p)h_x^1(p) + X_2(p)h_y^1(p) \right) + \tilde{f}_y(h(p)) \left(X_1(p)h_x^2(p) + X_2(p)h_y^2(p) \right) = \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} h_x^1(p) & h_y^1(p) \\ h_x^2(p) & h_y^2(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(p) \\ X_2(p) \end{pmatrix}, \nabla \tilde{f}(h(p)) \right\rangle = \langle Dh(p)X(p), \nabla \tilde{f}(h(p)) \rangle = \\ &= \langle \tilde{X}(h(p)), \nabla \tilde{f}(h(p)) \rangle = \tilde{X}\tilde{f}(h(p)). \end{aligned}$$

De forma análoga, temos que $Yf(p) = \tilde{Y}\tilde{f}(h(p))$. Assim, segue que

$$\begin{aligned} Dh(p)Z^s(p) &= \frac{Yf(p)}{Yf(p) - Xf(p)} Dh(p)X(p) - \frac{Xf(p)}{Yf(p) - Xf(p)} Dh(p)Y(p) = \\ &= \frac{\tilde{Y}\tilde{f}(h(p))}{\tilde{Y}\tilde{f}(h(p)) - \tilde{X}\tilde{f}(h(p))} \tilde{X}(h(p)) - \frac{\tilde{X}\tilde{f}(h(p))}{\tilde{Y}\tilde{f}(h(p)) - \tilde{X}\tilde{f}(h(p))} \tilde{Y}(h(p)) = \tilde{Z}^s(h(p)). \end{aligned}$$

Logo h conjuga os campos deslizantes e portanto conjuga os campos Z e \tilde{Z} . \square

A hipótese de que h é um difeomorfismo é crucial para a demonstração da proposição anterior. Se h for apenas um homeomorfismo, há contra-exemplo.

Exemplo 3.0.1. Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um aberto contendo a origem. Considere $\Sigma = \{(x, y) \in U \mid y = 0\}$ e defina os campos descontínuos $Z, \tilde{Z} : U \rightarrow U$ por

$$\begin{aligned} Z(x, y) &= \begin{cases} X(x, y) &= (0, -1), & y \geq 0, \\ Y(x, y) &= (0, 1), & y \leq 0, \end{cases} \\ \tilde{Z}(x, y) &= \begin{cases} \tilde{X}(x, y) &= (-1, -1), & y \geq 0, \\ \tilde{Y}(x, y) &= (-1, 1), & y \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Note que $Xf(x, y) = \tilde{X}f(x, y) = -1$ e $Yf(x, y) = \tilde{Y}f(x, y) = 1$. Além disso, $\Sigma^s = \Sigma = \tilde{\Sigma} = \tilde{\Sigma}^s$. Assim, temos que o homeomorfismo $h : U \rightarrow U$ dado por

$$h(x, y) = \begin{cases} (x - y, y), & y \geq 0, \\ (x, y), & y = 0, \\ (x + y, y), & y \leq 0; \end{cases}$$

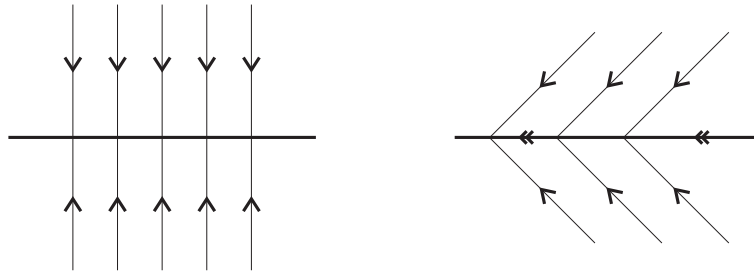


Figura 3.2: Campos Z (à esquerda) e \tilde{Z} (à direita).

leva Σ^+ em $\tilde{\Sigma}^+$ e leva Σ^- em $\tilde{\Sigma}^-$. Observe que h não é de classe C^1 .

Agora, note que $Z^s(x, y) = (0, 0)$ e que $\tilde{Z}^s(x, y) = (-1, 0)$. Isso quer dizer que todos os pontos de Σ são pontos críticos de Z^s , enquanto \tilde{Z}^s não possui nenhum ponto crítico. Logo h não conjuga os campos Z^s e \tilde{Z}^s e portanto não é uma Σ -equivalência.

Definição 3.0.4. Um campo suave por partes $Z_0 : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ é **localmente estruturalmente estável** se existe uma vizinhança $V \subset \Omega$ de Z_0 tal que todo campo $Z \in V$ é topologicamente equivalente à Z_0 .

De maneira análoga, definimos o conceito de Σ -estabilidade estrutural local.

Definição 3.0.5. Uma **forma canônica de um campo de Filippov** Z é um campo de Filippov cuja expressão é suficientemente simples e que é localmente equivalente à Z .

4 Campos Estruturalmente Estáveis

Neste Capítulo estudaremos campos suaves por partes que são estruturalmente estáveis. Em cada caso estudado, exibiremos a forma canônica de um campo Z e construiremos o homeomorfismo que nos dará uma Σ -equivalência. Assim, iremos caracterizar o conjunto $\Omega_0 \subset \Omega$ dos campos estruturalmente estáveis. Veremos também que estabilidade estrutural é uma propriedade genérica, isto é, o conjunto Ω_0 é aberto e denso em Ω .

Uma vez estabelecidas as Σ -equivalências, poderemos dividir o conjunto Ω_0 em classes de equivalência. Assim, uma forma canônica para cada classe é o representante mais simples possível dessa classe.

Todas as proposições que determinam as formas canônicas a seguir podem ser encontradas no artigo [10].

4.1 Pontos Regulares de Z

Primeiramente, estudaremos pontos regulares. Para pontos regulares que não pertencem à Σ , podemos aplicar o Teorema do Fluxo Tubular (cuja demonstração pode ser encontrada em [19]), pois X e Y são campos suaves em Σ^+ e Σ^- , respectivamente. Assim, vamos considerar apenas pontos regulares que pertencem à Σ .

Teorema 4.1.1. (Teorema da Função Implícita) Seja $f : \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função de classe C^1 . Se $x_0 \in \mathbb{R}^k$ e $y_0 \in \mathbb{R}^m$, suponha que $f(x_0, y_0) = 0$ e $\det \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right] \neq 0$. Então existe um aberto $W \in \mathbb{R}^k$ e $\phi : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^1 tal que

- $x_0 \in W$ e $\phi(x_0) = y_0$,
- $f(x, \phi(x)) = 0$, para todo $x \in W$.

O Teorema anterior pode ser encontrado na página 161 de [16].

Proposição 4.1.1. Seja $Z = (X, Y, f)$ um campo de Filippov, Σ sua descontinuidade e suponha $(0, 0) \in \Sigma^c$. Então em uma vizinhança U de $(0, 0)$ o campo Z é Σ -equivalente à forma canônica

$$\tilde{Z}(x, y) = \begin{cases} \tilde{X}(x, y) &= (0, 1), & y \geq 0, \\ \tilde{Y}(x, y) &= (0, 1), & y \leq 0, \end{cases}$$

definido em uma vizinhança \tilde{U} de $(0, 0)$. Além disso, é topologicamente equivalente à forma canônica $\tilde{Z}_1 = (0, 1)$, que é um campo suave.

Demonstração. Denote por $\varphi_X, \varphi_{\tilde{X}}, \varphi_Y$ e $\varphi_{\tilde{Y}}$ os fluxos de X, \tilde{X}, Y e \tilde{Y} respectivamente. Como $(0, 0) \in \Sigma^c$, segue que os campos Z e \tilde{Z} são transversais às descontinuidades Σ e $\tilde{\Sigma}$, respectivamente.

Note que $f(\varphi_X(0, (0, 0))) = 0$ pois $\varphi_X(0, (0, 0)) = (0, 0) \in \Sigma$. Como $\nabla f(0, 0) \neq 0$ e $\frac{d}{dt}(\varphi_X(0, (0, 0))) = X(0, 0) \neq (0, 0)$ pois $(0, 0) \in \Sigma^c$, segue do Teorema da Função Implícita que existe uma vizinhança W de $(0, 0)$ e uma função $t : W \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(\varphi_X(t(p), p)) = 0$ para todo $p \in W$, isto é, $\varphi_X(t(p), p) \in \Sigma$. Analogamente, existe uma vizinhança V de $(0, 0)$ tal que $\varphi_Y(t(p), p) \in \Sigma$, para todo $p \in V$.

Tomando $U = W \cap V$, definimos a aplicação $h : U \rightarrow h(U)$ por

$$h(p) = \begin{cases} \varphi_{\tilde{X}}(-t(p), \varphi_X(t(p), p)), & p \in \Sigma^+, \\ p, & p \in \Sigma, \\ \varphi_{\tilde{Y}}(-t(p), \varphi_Y(t(p), p)), & p \in \Sigma^-. \end{cases}$$

Esta aplicação é contínua pois as aplicações que definem h são contínuas e coincidem em Σ . Além disso, pela forma como foi definida, h é um homeomorfismo que leva Σ em $\tilde{\Sigma}$, leva órbitas de Z em órbitas de \tilde{Z} e preserva orientação. Assim, os campos Z e \tilde{Z} são Σ -equivalentes. Como Z é Σ -equivalente à \tilde{Z} , segue que Z é topologicamente equivalente ao campo \tilde{Z}_1 . \square

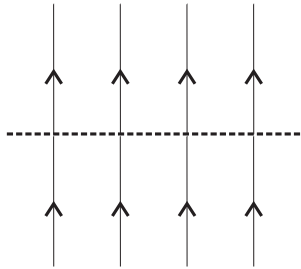


Figura 4.1: Forma canônica da Proposição 4.1.1.

Proposição 4.1.2. Seja $Z = (X, Y, f)$ um campo de Filippov com $(0, 0) \in \Sigma^s$ tal que o vetor $X(0, 0)$ não é paralelo à $Y(0, 0)$. Então existe uma vizinhança U de $(0, 0)$ tal que o campo Z é Σ -equivalente à forma canônica

$$\tilde{Z}(x, y) = \begin{cases} \tilde{X}(x, y) = (1, -1), & y \geq 0, \\ \tilde{Y}(x, y) = (1, 1), & y \leq 0. \end{cases}$$

Demonstração. Como o vetor $X(0, 0)$ não é paralelo à $Y(0, 0)$, temos que $Z^s(0, 0) \neq (0, 0)$, isto é, a origem é ponto regular de Z^s . De forma análoga, temos que a origem é ponto regular do campo \tilde{Z}^s .

Note que

$$\tilde{Z}^s(x, y) = \left(\frac{1}{\tilde{Y}f(x, y) - \tilde{X}f(x, y)} \right) \left(\tilde{Y}f(x, y)\tilde{X}(x, y) - \tilde{X}f(x, y)\tilde{Y}(x, y) \right) =$$

$$= \frac{1}{1+1} \left(\tilde{X}(x, y) + \tilde{Y}(x, y) \right) = (1, 0).$$

Como $(0, 0)$ não é ponto crítico de \tilde{Z}^s , segue do Teorema do Fluxo Tubular que existe um homeomorfismo $g : \Sigma \rightarrow \tilde{\Sigma}$ que conjuga os campos Z^s e \tilde{Z}^s (que são suaves).

Agora, de forma análoga ao que foi feito na Proposição 4.1.1, pelo Teorema da Função Implícita existe uma vizinhança U de $(0, 0)$ e uma função contínua $t : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $p \in U$ temos $\varphi_X(t(p), p) \in \Sigma$ e $\varphi_Y(t(p), p) \in \Sigma$.

Assim, defina a aplicação $h : U \rightarrow h(U)$ por

$$h(p) = \begin{cases} \varphi_{\tilde{X}} \left(-t(p), g(\varphi_X(t(p), p)) \right), & p \in \Sigma^+ \cap U, \\ g(p), & p \in \Sigma \cap U, \\ \varphi_{\tilde{Y}} \left(-t(p), g(\varphi_Y(t(p), p)) \right), & p \in \Sigma^- \cap U. \end{cases}$$

Esta aplicação é contínua pois as aplicações que definem h são contínuas e coincidem em Σ . Além disso, pela forma como foi definida, h é um homeomorfismo que leva Σ em $\tilde{\Sigma}$, leva órbitas de Z em órbitas de \tilde{Z} e preserva orientação. Assim, os campos Z e \tilde{Z} são Σ -equivalentes. \square

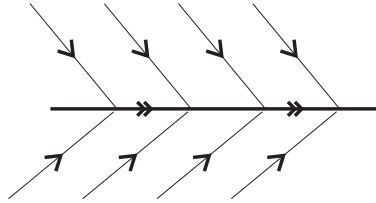


Figura 4.2: Forma canônica da Proposição 4.1.2.

Proposição 4.1.3. Seja $Z = (X, Y, f)$ campo de Filippov com $(0, 0) \in \Sigma^e$. Então existe uma vizinhança U da origem tal que o campo Z é Σ -equivalente à forma canônica

$$\tilde{Z}(x, y) = \begin{cases} \tilde{X}(x, y) = (1, 1), & y \geq 0, \\ \tilde{Y}(x, y) = (1, -1), & y \leq 0. \end{cases}$$

Demonstração. Basta proceder de forma análoga à Proposição 4.1.2. \square

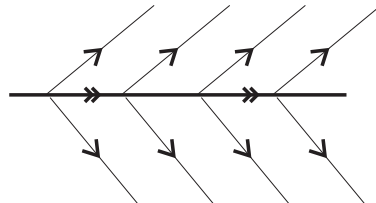


Figura 4.3: Forma canônica da Proposição 4.1.3.

4.2 Singularidades Genéricas de Z

Agora que já estudamos o comportamento do campo descontínuo Z em torno de um ponto regular, vamos estudar o comportamento de Z em torno de uma singularidade genérica.

Definição 4.2.1. Uma **singularidade hiperbólica** é um ponto de equilíbrio x_0 tal que os autovalores da matriz $Df(x_0)$ não possuem parte real nula, onde $f(x) = \dot{x}$.

O primeiro tipo a ser estudado são os pontos críticos hiperbólicos de X em Σ^+ e os pontos críticos hiperbólicos de Y em Σ^- . Como X e Y são campos suaves, podemos aplicar o Teorema de Grobman-Hartman (cuja demonstração pode ser encontrada em [17]). Assim, estudaremos as singularidades genéricas que pertencem à Σ .

Definição 4.2.2. Dizemos que $p \in \Sigma$ é **ponto de dobra regular de $Z = (X, Y, f)$** se $Xf(p) = 0$, $X^2f(p) \neq 0$ e $Yf(p) \neq 0$; ou se $Yf(p) = 0$, $Y^2f(p) \neq 0$ e $Xf(p) \neq 0$.

1. No primeiro caso, dizemos que a dobra regular é **visível** se $X^2f(p) > 0$ e **invisível** se $X^2f(p) < 0$. Se $Yf(p) > 0$, então $p \in \partial\Sigma^s$ e dizemos que p é **dobra de deslize**. Se $Yf(p) < 0$, então $p \in \partial\Sigma^e$ e dizemos que p é **dobra de escape**.
2. No segundo caso, dizemos que a dobra regular é **visível** se $Y^2f(p) < 0$ e **invisível** se $Y^2f(p) > 0$. Se $Xf(p) < 0$, então $p \in \partial\Sigma^s$ e dizemos que p é **dobra de deslize**. Se $Xf(p) > 0$, então $p \in \partial\Sigma^e$ e dizemos que p é **dobra de escape**.

Definição 4.2.3. Uma **singularidade hiperbólica de Z^Σ** é um ponto $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$ tal que $Z^\Sigma(p) = 0$ (isto é, $X(p)$ é paralelo à $Y(p)$) e $(Z^\Sigma)'(p) \neq 0$.

Definição 4.2.4. Seja $Z = (X, Y, f)$ um campo de Filippov. Um ponto $p \in \Sigma$ é uma **singularidade genérica** se p é um ponto de dobra regular ou se p é uma singularidade hiperbólica do campo deslizante.

As próximas proposições nos darão as formas canônicas de um campo descontínuo Z numa vizinhança de uma singularidade genérica.

Proposição 4.2.1. Seja $(0, 0) \in \Sigma$ um ponto de dobra regular do campo descontínuo $Z = (X, Y, f)$. Então existe uma vizinhança U de $(0, 0)$ tal que Z é Σ -equivalente à forma canônica

$$\tilde{Z}(x, y) = \begin{cases} \tilde{X}(x, y) &= (b, ax), & y \geq 0, \\ \tilde{Y}(x, y) &= (0, c), & y \leq 0, \end{cases}$$

onde $a = \text{sgn}(X^2f(0, 0))$, $b = \text{sgn}(\pi_1(X(0, 0)))$, $c = \text{sgn}(Yf(0, 0))$ e π_1 é a projeção na primeira coordenada.

Demonstração. Primeiramente, note que $a > 0$ indica que a origem é dobra visível, enquanto $a < 0$ indica que a origem é dobra invisível. Já os sinais de b e c indicam a direção do fluxo dos campos X e Y , respectivamente.

Considere sem perda de generalidade que $b = c = 1$. Assim, dividiremos a demonstração em dois casos.

Se $a < 0$, podemos descrever a curva de descontinuidade por $\Sigma = \bar{\Sigma}^e \cup \bar{\Sigma}^s$, e portanto o campo Z^s está bem definido em Σ^s .

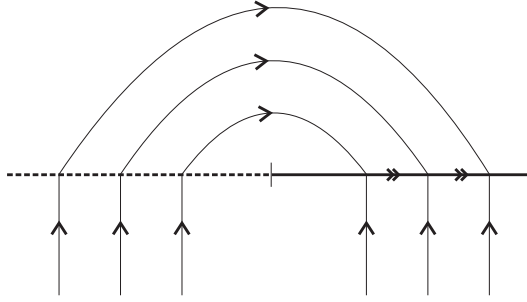


Figura 4.4: Forma canônica da Proposição 4.2.1, quando a dobra é invisível.

Agora, note que $\tilde{Z}^s(x, y) = (1, 0)$, logo pelo Teorema do Fluxo Tubular existe um homeomorfismo $\tilde{h} : \Sigma^s \rightarrow \tilde{\Sigma}^s$ que conjuga os campos Z^s e \tilde{Z}^s .

Observe também que Σ^s atua como uma espécie de “atrator global”. Logo, utilizando um raciocínio análogo ao feito na demonstração da Proposição 4.1.1, segue do Teorema da Função Implícita que existe uma vizinhança U de $(0, 0)$ e uma aplicação contínua $t : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi_Z(t(p), p) \in \Sigma^s$, para todo $p \in U$. Assim, defina a aplicação $h : U \rightarrow h(U)$ por

$$h(p) = \begin{cases} \varphi_{\tilde{Z}}\left(-t(p), \tilde{h}(\varphi_Z(t(p), p))\right), & p \in (\Sigma^+ \cup \Sigma^- \cup \bar{\Sigma}^c) \cap U, \\ \tilde{h}(p), & p \in \Sigma^s \cap U. \end{cases}$$

Esta aplicação é contínua pois as aplicações que definem h são contínuas e coincidem em Σ . Além disso, pela forma como foi definida, h é um homeomorfismo que leva Σ em $\tilde{\Sigma}$, leva órbitas de Z em órbitas de \tilde{Z} e preserva orientação. Assim, os campos Z e \tilde{Z} são Σ -equivalentes.

Agora, suponha que $a > 0$, isto é, que $(0, 0)$ é uma dobra regular visível. Não podemos usar os mesmos argumentos do caso anterior pois a região delimitada pelas separatrizes $W_+^s(0, 0)$ e $W_+^u(0, 0)$ possui trajetórias que não interceptam a descontinuidade Σ (lembre-se que $a = b = c = 1$).

Para resolver este problema, considere π e $\tilde{\pi}$ seções transversais às curvas de descontinuidade Σ e $\tilde{\Sigma}$ em $(0, 0)$, respectivamente. Como estas seções transversais são homeomorfas à \mathbb{R} , logo π e $\tilde{\pi}$ são homeomorfos. Assim, considere $g : \pi \rightarrow \tilde{\pi}$ homeomorfismo tal que $g(0) = 0$.

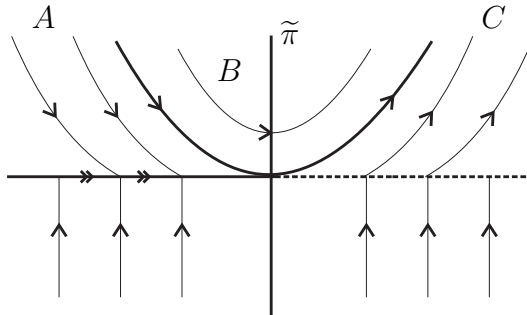


Figura 4.5: Forma canônica da Proposição 4.2.1, quando a dobra é visível.

Defina A como sendo a região à esquerda de $W_+^s(0, 0) \cup W_-^s(0, 0)$, B como sendo a região acima de $W_+^s(0, 0) \cup W_+^u(0, 0)$ e C como sendo a região à direita de $W_+^u(0, 0) \cup W_-^s(0, 0)$. Denote $U = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$.

Note que o campo Z^s está bem definido pois há região de deslize (já que $a = b = c = 1$). Como $\tilde{Z}^s(x, y) = (1, 0)$, pelo Teorema do Fluxo Tubular existe um homeomorfismo $\tilde{h} : \Sigma^s \rightarrow \tilde{\Sigma}^s$ que conjuga os campos Z^s e \tilde{Z}^s .

Dado $p \in A$, segue do Teorema da Função Implícita que existe um único tempo $t(p)$ tal que $\varphi_X(t(p), p) \in \Sigma^s$ (ou $\varphi_Y(t(p), p) \in \Sigma^s$). Portanto tome

$$h(p) = \begin{cases} \varphi_{\tilde{X}}\left(-t(p), \tilde{h}(\varphi_X(t(p), p))\right), & p \in \Sigma^+ \cap A, \\ \tilde{h}(p), & p \in \Sigma \cap A, \\ \varphi_{\tilde{Y}}\left(-t(p), \tilde{h}(\varphi_Y(t(p), p))\right), & p \in \Sigma^- \cap A. \end{cases}$$

Para $p \in \bar{B}$, existe um único tempo $t(p)$ tal que $\varphi_X(t(p), p) \in \pi$. Defina

$$h(p) = \varphi_{\tilde{X}}\left(-t(p), g(\varphi_X(t(p), p))\right), p \in \Sigma^+ \cap \bar{B}.$$

Por fim, para $p \in C$, existe um único tempo $t(p)$ tal que $\varphi_X(t(p), p) \in \Sigma^c$ (ou $\varphi_Y(t(p), p) \in \Sigma^c$). Assim, tome

$$h(p) = \begin{cases} \varphi_{\tilde{X}}\left(-t(p), \varphi_X(t(p), p)\right), & p \in \Sigma^+ \cap C, \\ p, & p \in \Sigma \cap C, \\ \varphi_{\tilde{Y}}\left(-t(p), \varphi_Y(t(p), p)\right), & p \in \Sigma^- \cap C. \end{cases}$$

A aplicação h é contínua pois as aplicações que definem h são contínuas e coincidem em Σ . Além disso, pela forma como foi definida, h é um homeomorfismo que leva Σ em $\tilde{\Sigma}$, leva órbitas de Z em órbitas de \tilde{Z} e preserva orientação. Assim, os campos Z e \tilde{Z} são Σ -equivalentes. \square

Proposição 4.2.2. Seja $(0, 0) \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$ um ponto crítico hiperbólico do campo Z^Σ onde $Z = (X, Y, f)$. Então Z é Σ -equivalente à forma canônica

$$\tilde{Z}(x, y) = \begin{cases} \tilde{X}(x, y) = (ax, b), & y \geq 0, \\ \tilde{Y}(x, y) = (ax, -b), & y \leq 0, \end{cases}$$

onde $a = \text{sgn}\left((Z^\Sigma)'(0, 0)\right)$ e $b = \text{sgn}(Xf(0, 0))$.

Demonstração. Como estamos estudando o campo \tilde{Z}^Σ , analisaremos sua dinâmica na primeira coordenada. Note que $\tilde{Z}^\Sigma(x, y) = (ax, 0)$, logo $(\tilde{Z}^\Sigma)'(0, 0) = a$. Assim, a origem é um ponto crítico hiperbólico de \tilde{Z}^Σ e sua estabilidade depende do sinal de a .

Pelo Teorema de Grobman-Hartman, existe um homeomorfismo $\tilde{h} : \Sigma^s \rightarrow \tilde{\Sigma}^s$ que conjuga os campos Z^s e \tilde{Z}^s .

Temos que para $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$, os campos X e Y são transversais à Σ numa vizinhança de $(0, 0)$. Assim, dado p dessa vizinhança, existe um único tempo $t(p)$ tal que $\varphi_X(t(p), p) \in \Sigma$ (ou $\varphi_Y(t(p), p) \in \Sigma$). Dessa forma, definimos

$$h(p) = \begin{cases} \varphi_{\tilde{X}}\left(-t(p), \tilde{h}(\varphi_X(t(p), p))\right), & p \in \Sigma^+, \\ \tilde{h}(p), & p \in \Sigma, \\ \varphi_{\tilde{Y}}\left(-t(p), \tilde{h}(\varphi_Y(t(p), p))\right), & p \in \Sigma^-. \end{cases}$$

A aplicação h é contínua pois as aplicações que definem h são contínuas e coincidem em Σ . Além disso, pela forma como foi definida, h é um homeomorfismo que leva Σ em $\tilde{\Sigma}$, leva órbitas de Z em órbitas de \tilde{Z} e preserva orientação. Assim, os campos Z e \tilde{Z} são Σ -equivalentes. \square

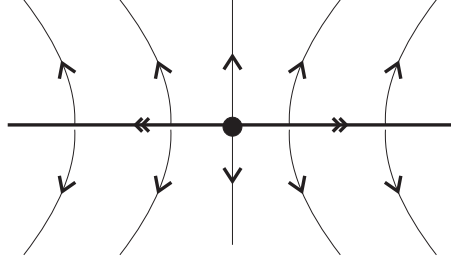


Figura 4.6: Forma canônica da Proposição 4.2.2.

4.3 Estabilidade Local de Campos de Filippov

Definição 4.3.1. Seja C um espaço topológico. Uma propriedade P é **propriedade genérica de C** se o conjunto $A = \{x \in C \mid x \text{ satisfaz } P\}$ é aberto e denso em C .

O Teorema a seguir pode ser encontrado na página 16 de [10] e caracteriza os Campos de Filippov que são Σ -estruturalmente estáveis.

Teorema 4.3.1. Seja $Z_0 = (X_0, Y_0, f) \in \Omega$ definido em uma vizinhança da origem e seja $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$ a curva de descontinuidade. Se $(0, 0) \in \Sigma$ é um ponto regular ou uma singularidade genérica de Z_0 , então Z_0 é Σ -estruturalmente estável.

Demonstração. Para cada tipo de ponto regular e de singularidade genérica, devemos mostrar que existe uma vizinhança $V \in \Omega$ de Z_0 tal que todo $Z \in V$ é Σ -equivalente ao campo Z_0 . Assim, dividiremos nossa demonstração em quatro casos.

1. Suponha que $(0, 0) \in \Sigma^c$. Defina a aplicação $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\phi(Z) = Xf(0, 0)Yf(0, 0).$$

Como Xf e Yf são funções contínuas, segue que ϕ também é uma função contínua.

Como $(0, 0) \in \Sigma^c$, segue que $\phi(Z_0) > 0$ e pela continuidade de ϕ existe uma vizinhança V de Z_0 tal que $\phi(Z) > 0$, para todo $Z \in V$. Isso quer dizer que para todo $Z \in V$ temos que $(0, 0) \in \Sigma^c$.

Pela Proposição 4.1.1, temos que todo $Z \in V$ é Σ -equivalente ao campo \tilde{Z} . Assim, Z_0 é Σ -equivalente à todo $Z \in V$, donde Z_0 é Σ -estruturalmente estável.

2. Suponha agora que $(0, 0) \in \Sigma^s$ e que $(0, 0)$ é ponto regular do campo deslizante Z_0^s , isto é, $Z_0^s(0, 0) \neq (0, 0)$. Podemos supor sem perda de generalidade que $Z_0^s(0, 0) = (a_1, 0)$, com $a_1 \neq 0$.

Defina a aplicação $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ por $\xi(Z) = \pi_1(Z^s(0,0))$, onde π_1 é a projeção na primeira coordenada. Temos que ξ é uma aplicação contínua pois a projeção é uma aplicação contínua. Além disso $\xi(Z_0) = a_1 \neq 0$ e pela continuidade de ξ existe uma vizinhança $V \in \Omega$ de Z_0 tal que $\xi(Z) \neq 0$, para todo $Z \in V$.

Assim, temos que $(0,0)$ é ponto regular de Z^s , para todo $Z \in V$. Pela Proposição 4.1.2, segue que todo $Z \in V$ é Σ -equivalente ao campo \tilde{Z} . Logo Z_0 é Σ -equivalente à todo $Z \in V$, donde Z_0 é Σ -estruturalmente estável.

Se $(0,0) \in \Sigma^e$ usamos um argumento análogo para provar que Z_0 é Σ -estruturalmente estável.

3. Suponha que $(0,0) \in \Sigma$ é um ponto de dobra regular de Z_0 . Podemos supor sem perda de generalidade que $X_0f(0,0) = 0$, $X_0^2f(0,0) \neq 0$ e $Y_0f(0,0) \neq 0$.

Defina a aplicação $\psi : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $\psi(Z, x) = Xf(x, 0)$. Temos que ψ é aplicação contínua (pois Xf é contínua) e $\psi(Z_0, 0) = X_0f(0,0) = 0$. Além disso,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \psi}{\partial x}(Z, x) \right|_{(Z_0, 0)} &= \left. \frac{\partial}{\partial x}(Xf(x, 0)) \right|_{(Z_0, 0)} = \left. \frac{\partial}{\partial x}(\langle X(x, 0), (0, 1) \rangle) \right|_{(Z_0, 0)} = \\ &= \left. \left\langle \frac{d}{dx}X(x, 0), (0, 1) \right\rangle \right|_{(Z_0, 0)} = \left. \left\langle \left(\frac{\partial X_1}{\partial x}(x, 0), \frac{\partial X_2}{\partial x}(x, 0) \right), (0, 1) \right\rangle \right|_{(Z_0, 0)} = \\ &= \left. \frac{\partial X_2}{\partial x}(x, 0) \right|_{(Z_0, 0)} \neq 0, \end{aligned}$$

pois por hipótese $X_0f(0,0) = 0$ e $X_0^2f(0,0) \neq 0$.

Como ψ é de classe C^1 e $\det \left[\frac{\partial \psi}{\partial x}(Z_0, 0) \right] \neq 0$, podemos aplicar o Teorema da Função Implícita. Assim, existe uma vizinhança $V_0 \subset \Omega$ de Z_0 e uma aplicação contínua $g : V_0 \rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon)$ tal que $g(Z_0) = 0$ e $\psi(Z, g(Z)) = 0$, para todo $Z \in V_0$. Em outras palavras, o ponto $(g(Z), 0)$ é ponto de tangência para X .

Além disso, como a função X_0^2f é contínua e $X_0^2f(g(Z_0), 0) \neq 0$, existe uma vizinhança $V_1 \subset \Omega$ de Z_0 tal que $X_1^2f(g(Z_1), 0) \neq 0$, para todo $Z_1 \in V_1$. Analogamente, existe uma vizinhança $V_2 \subset \Omega$ de Z_0 tal que $Y_2f(g(Z_2), 0) \neq 0$, para todo $Z_2 \in V_2$.

Tomando $V = V_0 \cap V_1 \cap V_2$, temos que $(g(Z), 0)$ é ponto de dobra regular de Z , para todo $Z \in V$. Como todo $Z \in V$ é Σ -equivalente ao campo \tilde{Z} da Proposição 4.2.1, segue que Z_0 é Σ -estruturalmente estável.

4. Por fim, suponha agora que $(0,0) \in \Sigma$ seja um ponto crítico hiperbólico do campo deslizante Z_0^s . Como Z_0^s é um campo de dimensão 1 definido na descontinuidade Σ , podemos supor sem perda de generalidade que $Z_0^s(x) = \alpha x + \mathcal{O}(x^2)$, onde $\alpha \neq 0$.

Defina a aplicação $\rho : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $\rho(Z, x) = Z^s(x)$, que é a projeção na primeira coordenada de Z^s . Assim, temos que $\rho(Z_0, 0) = Z_0^s(0) = 0$ e que

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial x}(Z, x) \right|_{(Z_0, 0)} = \left. \frac{\partial}{\partial x}Z^s(x) \right|_{(Z_0, 0)} = \left. \frac{\partial}{\partial x}(\alpha x + \mathcal{O}(x^2)) \right|_{(Z_0, 0)} = \alpha,$$

donde $\alpha \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Assim, novamente aplicaremos o Teorema da Função Implícita: existe uma vizinhança $W_0 \subset \Omega$ de Z_0 e uma aplicação contínua $g : W_0 \rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon)$ tal que $g(Z_0) = 0$ e $\rho(Z, g(Z)) = Z^s(g(Z)) = 0$, para todo $Z \in W_0$. Em outras palavras, $g(Z)$ é ponto crítico de Z^s , para todo $Z \in W_0$.

Como $(Z_0^s)'(g(Z_0))$ possui autovalores com parte real não nula, pela continuidade da função determinante existe uma vizinhança $W_1 \subset \Omega$ de Z_0 tal que $(Z^s)'(g(Z))$ possui autovalores com parte real não nula, para todo $Z \in W_1$.

Tomando $W = W_0 \cap W_1$, dado $Z \in W$ temos que $Z(g(Z)) = 0$ e $(Z^s)'(g(Z))$ possui autovalores com parte real não nula, logo $g(Z)$ é ponto crítico hiperbólico de Z . Pela Proposição 4.2.2, todo $Z \in W$ é Σ -equivalente ao campo \tilde{Z} , donde obtemos a Σ -estabilidade estrutural de Z_0 .

□

Denotaremos por $\Omega_0 \subset \Omega$ o conjunto dos campos suaves por partes tal que $(0, 0)$ é ponto regular ou uma singularidade genérica. É fácil ver que este conjunto é aberto em Ω . Além disso, para todo $Z_0 \in \Omega_0$ é possível construir uma sequência de campos em Ω que converge para Z_0 . Assim, a Σ -estabilidade estrutural é uma propriedade genérica.

Nos próximos capítulos, estudaremos o conjunto $\Omega_1 = \Omega - \Omega_0$, que é o conjunto das Bifurcações.

5 Bifurcações Locais a Um Parâmetro

Para podermos fazer um estudo sistemático de bifurcações, inicialmente estabeleceremos algumas notações. As definições apresentadas a seguir podem ser encontradas no Apêndice A de [4] e são generalizações diretas das definições envolvendo campos suaves encontradas em [1].

5.1 Conceitos Preliminares

Definição 5.1.1. Seja Z_ε uma família de campos suaves por partes que depende do parâmetro $\varepsilon \in \mathbb{R}^m$. Dizemos que a família Z_ε tem uma **bifurcação em** ε_0 se para toda vizinhança $U \subset \mathbb{R}^m$ de ε_0 existe um $\varepsilon \in U$ tal que Z_{ε_0} e Z_ε não são topologicamente equivalentes.

Definição 5.1.2. Qualquer família Z_ε de perturbações de Z_0 , é dita **desdobramento** do campo suave por partes Z_0 .

Definição 5.1.3. Duas famílias Z_ε e \tilde{Z}_ε de campos suaves por partes são **equivalentes** se para cada ε existe um homeomorfismo h_ε que é uma equivalência topológica entre Z_ε e \tilde{Z}_ε .

Definição 5.1.4. A família Z_ε é **induzida** pela família \tilde{Z}_ε se existe uma aplicação contínua $\xi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ com $\xi(0) = 0$ e $Z_\mu = \tilde{Z}_{\xi(\mu)}$.

Definição 5.1.5. Seja Z_ε uma família de campos suaves por partes. O desdobramento induzido Z_ε de Z_0 é dito **desdobramento versal** se todo desdobramento de Z_0 é equivalente à Z_ε . O **desdobramento mini-versal** de Z_0 é o desdobramento versal que depende do menor número de parâmetros, isto é, Z_ε tal que $\varepsilon \in \mathbb{R}^m$ com m sendo o menor inteiro possível.

Definição 5.1.6. A **codimensão** de uma bifurcação é o número de parâmetros do desdobramento mini-versal.

Seja $\Omega_0 \subset \Omega$ o conjunto dos campos suaves por partes cujos pontos são todos regulares ou singularidades genéricas. Vimos no Capítulo anterior que os campos pertencentes a esse conjunto são estruturalmente estáveis.

Denote agora $\Omega_1 = \Omega - \Omega_0$ e $\Sigma_1 = \{Z \in \Omega_1 \mid Z \text{ é estruturalmente estável em } \Omega_1\}$. O conjunto Σ_1 será chamado de Conjunto das Bifurcações de Codimensão 1.

Neste Capítulo iremos estudar bifurcações locais que dependem de apenas um parâmetro. Para os pontos do tipo dobra-dobra e crítico-hiperbólico, precisaremos impor algumas condições para que as bifurcações não dependam de dois ou mais parâmetros.

As bifurcações locais que dependem de um parâmetro estudadas aqui também são analisadas em [14]. As demonstrações para encontrar as formas canônicas dos campos são feitas utilizando técnicas semelhantes às que usamos no Capítulo anterior, portanto omitiremos as provas.

5.2 Bifurcação Sela-Nó

Seja $Z \in \Omega$ tal que $Xf(0,0) \neq 0$, $Yf(0,0) \neq 0$, $Z^\Sigma(0,0) = (Z^\Sigma)'(0,0) = 0$ e $(Z^\Sigma)''(0,0) \neq 0$. Dessa forma, numa vizinhança suficientemente pequena da origem não temos tangências e $(0,0) \in \Sigma$ é uma sela-nó para o campo Z^Σ .

Além disso, com as hipóteses adotadas, temos que nessa vizinhança da origem a descontinuidade Σ será uma região de escape ou de deslize. Todavia, em ambos os casos os campos apresentam comportamentos semelhantes.

Proposição 5.2.1. Seja $Z = (X, Y)$ um campo de Filippov tal que a origem satisfaz $Xf(0,0) \neq 0$, $Yf(0,0) \neq 0$, $Z^\Sigma(0,0) = (Z^\Sigma)'(0,0) = 0$ e $(Z^\Sigma)''(0,0) \neq 0$. Então o desdobramento de Z que depende de apenas um parâmetro é Σ -equivalente ao desdobramento do campo Z_α , onde

$$Z_\alpha(x, y) = \begin{cases} X_\alpha(x, y) = (ax^2 + \alpha, b), & \text{se } y \geq 0, \\ Y(x, y) = (0, -b), & \text{se } y \leq 0; \end{cases}$$

com $a = \text{sgn}((Z^\Sigma)''(0))$ e $b = \text{sgn}(Xf(0,0))$.

Na Figura 5.1, adotamos $a = b = 1$. O campo de escape é dado por $Z_\alpha^e(x, y) = \left(\frac{x^2 + \alpha}{2}, 0\right)$, portanto para valores negativos de α temos o aparecimento de dois pontos críticos, dados por $P_1 = (-\sqrt{-\alpha}, 0)$ e $P_2 = (\sqrt{-\alpha}, 0)$. Para valores positivos de α , temos o desaparecimento dos pontos críticos.

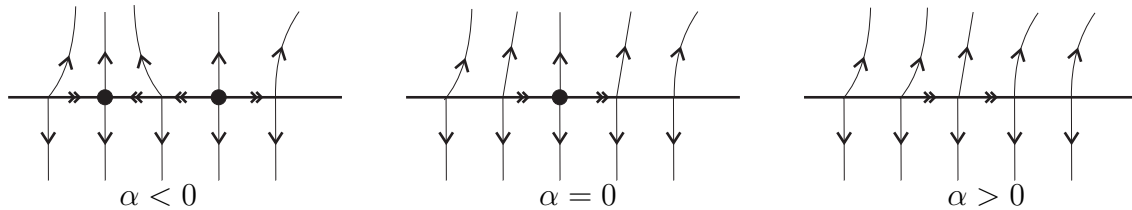


Figura 5.1: forma canônica da Proposição 5.2.1 e seus desdobramentos.

5.3 Cúspide Regular

Seja $Z = (X, Y) \in \Omega$ e suponha que $(0,0) \in \Sigma$ é uma tangência cúbica para o campo X e que Y é transversal à Σ em $(0,0)$ (isto é, $Yf(0,0) \neq 0$). Assim, temos que $Xf(0,0) = X^2f(0,0) = 0$ e $X^3f(0,0) \neq 0$. Como $Yf(0,0) \neq 0$, iremos supor sem perda de generalidade que $Y(x, y) = (0, c)$, onde $c = \pm 1$.

Considere a Expansão de Taylor do campo X até ordem k :

$$X(x, y) = \sum_{i+j \leq k} (a_{ij}, b_{ij})x^i y^j.$$

Utilizando as hipóteses que fazem com que $(0, 0)$ seja uma tangência cúbica, temos que:

1. $Xf(x, y) = \left\langle \sum_{i+j \leq k} (a_{ij}, b_{ij})x^i y^j, \nabla f(x, y) \right\rangle = \sum_{i+j \leq k} \left\langle (a_{ij}, b_{ij})x^i y^j, (0, 1) \right\rangle = \sum_{i+j \leq k} b_{ij}x^i y^j \Rightarrow b_{00} = 0;$
2. $X^2f(0, 0) = a_{00}b_{10} = 0;$
3. $X^3f(0, 0) = a_{00}b_{20} \neq 0.$

Assim, concluímos que $b_{00} = b_{10} = 0$, $a_{00} \neq 0$ e $b_{20} \neq 0$. Além disso, podemos escrever o campo X como

$$X(x, y) = (a_{00}, b_{20}x^2) + \mathcal{O}(|(x, y)|^3);$$

e portanto o campo $Z = (X, Y)$ é dado por

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y) = (a, bx^2) + \mathcal{O}(|(x, y)|^3), & \text{se } y \geq 0, \\ Y(x, y) = (0, c) + \mathcal{O}(|(x, y)|^3), & \text{se } y \leq 0; \end{cases}$$

com $a, c = \pm 1$ e $b \neq 0$.

Proposição 5.3.1. Seja $Z = (X, Y) \in \Omega$ tal que $Xf(0, 0) = X^2f(0, 0) = 0$, $X^3f(0, 0) \neq 0$ e $Yf(0, 0) \neq 0$. Então o desdobramento de Z que depende de apenas um parâmetro é Σ -equivalente ao desdobramento de Z_α , onde

$$Z_\alpha(x, y) = \begin{cases} X_\alpha(x, y) = (a, bx^2 + \alpha), & \text{se } y \geq 0, \\ Y(x, y) = (0, c), & \text{se } y \leq 0; \end{cases}$$

com $a = \text{sgn}(a_{00})$, $b = \text{sgn}(b_{20})$ e $c = \text{sgn}(Yf(0, 0))$.

Vamos analisar dois casos distintos a partir da Proposição 5.3.1. No primeiro deles, adotaremos $a = b = 1$ e $c = -1$. Neste caso, temos que se $\alpha = 0$ então $\Sigma - \{(0, 0)\} = \Sigma^e$. Se $\alpha < 0$, temos o aparecimento de duas dobras separadas por uma região de costura. Para $\alpha > 0$, as tangências desaparecem e $\Sigma = \Sigma^e$. Veja a Figura 5.2.

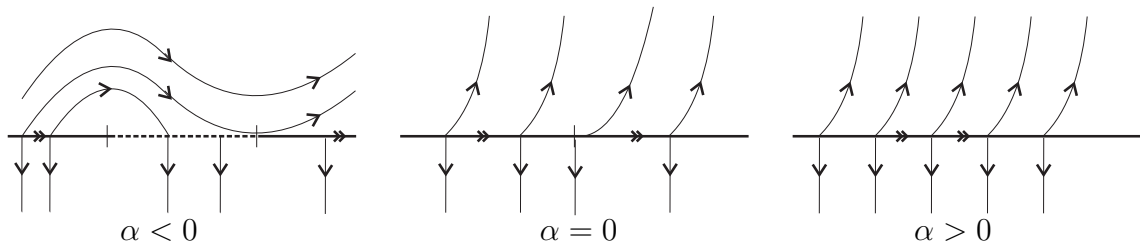


Figura 5.2: Forma canônica da Proposição 5.3.1 com $a = b = 1$ e $c = -1$.

No segundo caso genérico a ser analisado, tomemos $a = b = c = 1$. Para $\alpha = 0$, temos que $\Sigma - \{(0, 0)\} = \Sigma^c$. Para $\alpha < 0$ novamente temos o aparecimento de duas dobras, porém desta vez elas estão separadas por uma região de deslize. Para $\alpha > 0$, temos o desaparecimento das tangências. Veja a Figura 5.3.

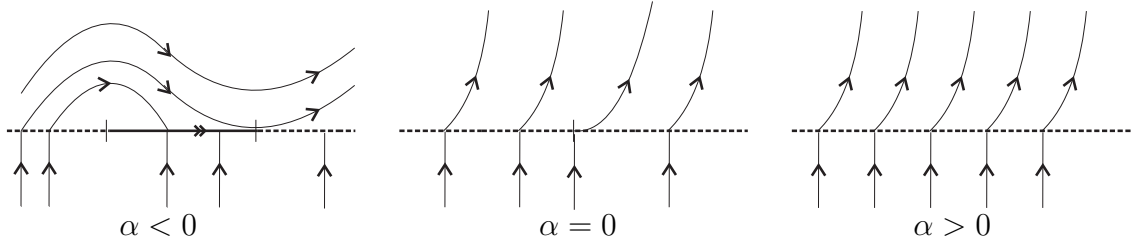


Figura 5.3: Forma canônica da Proposição 5.3.1 $a = b = c = 1$.

5.4 Dobra-Dobra

Iremos analisar agora o caso onde $(0,0) \in \Sigma$ é uma tangência quadrática para X e Y simultaneamente, isto é, quando $Xf(0,0) = Yf(0,0) = 0$, $X^2f(0,0) \neq 0$ e $Y^2f(0,0) \neq 0$. Lembre que podemos ter tangências visíveis (quando $X^2f(0,0) > 0$ ou $Y^2f(0,0) < 0$) ou tangências invisíveis (quando $X^2f(0,0) < 0$ ou $Y^2f(0,0) > 0$).

Sendo assim, teremos três casos para analisar, a depender da visibilidade das dobras. Todos os casos analisados aqui também são estudados em [14].

5.4.1 Dobra-Dobra Visível-Visível

Suponha que $(0,0) \in \Sigma$ é uma dobra visível para X e Y simultaneamente, onde $Z = (X, Y)$ é um campo suave por partes. Teremos dois casos genéricos a considerar: quando os vetores $X(0,0)$ e $Y(0,0)$ possuem a mesma orientação e quando $X(0,0)$ e $Y(0,0)$ possuem orientações opostas. Em outras palavras, os dois casos a serem considerados serão $\pi_1(X(0,0))\pi_1(Y(0,0)) > 0$ e $\pi_1(X(0,0))\pi_1(Y(0,0)) < 0$, onde π_1 é a projeção na primeira coordenada.

Proposição 5.4.1. Seja $Z = (X, Y) \in \Omega$. Suponha que $(0,0)$ é uma dobra visível para X e Y simultaneamente e que $\pi_1(X(0,0))\pi_1(Y(0,0)) > 0$. Então o desdobramento de Z que depende de apenas um parâmetro é Σ -equivalente ao desdobramento de Z_α , onde

$$Z_\alpha(x, y) = \begin{cases} X_\alpha(x, y) &= (a, ax + \alpha), & \text{se } y \geq 0, \\ Y(x, y) &= (a, -ax), & \text{se } y \leq 0; \end{cases}$$

onde $a = \text{sgn}(\pi_1(X(0,0)))$.

Vamos esboçar o diagrama de bifurcação para o caso onde $a = 1$. Neste caso, $(-\alpha, 0)$ será uma tangência visível de X e $(0,0)$ será uma tangência visível de Y , e essas duas dobras estão separadas por uma região de costura. Assim, para $\alpha < 0$ temos duas tangências, quando $\alpha = 0$ essas dobras colidem e quando $\alpha > 0$ as duas tangências voltam a aparecer. Vale destacar que o campo $Z^\Sigma(x, y) = (1, 0)$ não possui nenhum ponto crítico. Veja a Figura 5.4.

Proposição 5.4.2. Seja $Z = (X, Y) \in \Omega$. Suponha que $(0,0)$ é uma dobra visível para X e Y simultaneamente e que $\pi_1(X(0,0))\pi_1(Y(0,0)) < 0$. Então o desdobramento de Z que depende de apenas um parâmetro é Σ -equivalente ao desdobramento de Z_0 , onde

$$Z_\alpha(x, y) = \begin{cases} X_\alpha(x, y) &= (a, ax + \alpha), & \text{se } y \geq 0, \\ Y(x, y) &= (-a, ax), & \text{se } y \leq 0; \end{cases}$$

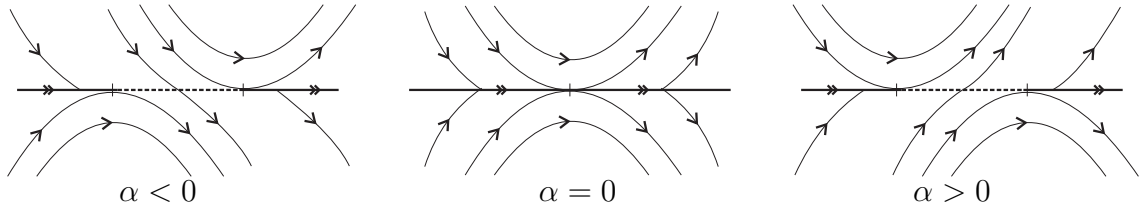


Figura 5.4: Forma canônica da Proposição 5.4.1.

onde $a = \text{sgn}(\pi_1(X(0,0)))$.

Novamente, vamos esboçar o diagrama de bifurcação para o caso onde $a = 1$. Neste caso, $(-\alpha, 0)$ será uma tangência visível de X e $(0, 0)$ será uma tangência visível de Y , e essas duas dobras estarão separadas por uma região de deslize (quando $\alpha < 0$) ou de escape (quando $\alpha > 0$). Assim, para $\alpha < 0$ temos duas tangências, quando $\alpha = 0$ essas dobras colidem e quando $\alpha > 0$ as duas tangências voltam a aparecer.

O campo $Z^\Sigma(x, y) = \left(-\frac{2x + \alpha}{\alpha}, 0\right)$ terá $\left(-\frac{\alpha}{2}, 0\right)$ como ponto crítico. Esse ponto é repulsor quando $\alpha < 0$ e atrator quando $\alpha > 0$. Veja a Figura 5.5.

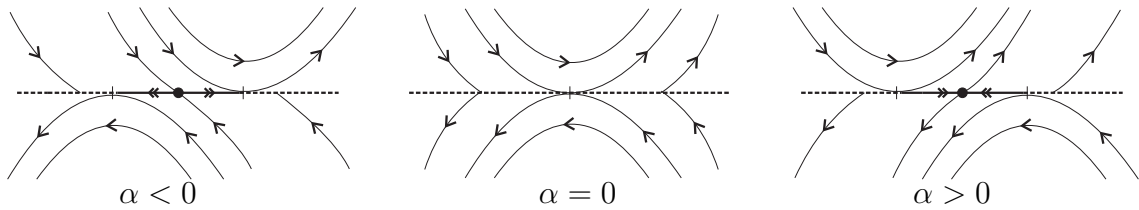


Figura 5.5: Forma canônica da Proposição 5.4.2.

5.4.2 Dobra-Dobra Visível-Invisível

Agora, iremos considerar o caso onde $(0, 0) \in \Sigma$ é uma dobra visível para X e invisível para Y . O caso onde $(0, 0) \in \Sigma$ é uma dobra invisível para X e visível para Y é estudado de forma análoga.

Aqui, teremos três casos a considerar: o primeiro quando $\pi_1(X(0,0))\pi_1(Y(0,0)) > 0$ e os outros dois quando $\pi_1(X(0,0))\pi_1(Y(0,0)) < 0$. A orientação do campo Z^Σ irá diferenciar os dois últimos casos.

Proposição 5.4.3. Seja $Z = (X, Y) \in \Omega$. Suponha que $(0, 0) \in \Sigma$ é uma dobra visível para X e invisível para Y . Suponha também que $\pi_1(X(0,0))\pi_1(Y(0,0)) > 0$. Então o desdobramento de Z que depende de apenas um parâmetro é Σ -equivalente ao desdobramento de Z_α , onde

$$Z_\alpha(x, y) = \begin{cases} X_\alpha(x, y) = (1, x + \alpha), & \text{se } y \geq 0, \\ Y(x, y) = (1, 2x), & \text{se } y \leq 0. \end{cases}$$

Vamos esboçar agora o diagrama de bifurcação do campo Z_α . Temos que $(-\alpha, 0)$ é uma tangência visível de X e $(0, 0)$ é uma tangência invisível de Y . Entre essas duas dobras, teremos uma região de deslize (quando $\alpha < 0$) ou de escape (quando $\alpha > 0$).

Além disso, as tangências colidem quando $\alpha = 0$ e o campo $Z_\alpha^\Sigma(x, y) = (1, 0)$ não tem pontos críticos. Veja a Figura 5.6.

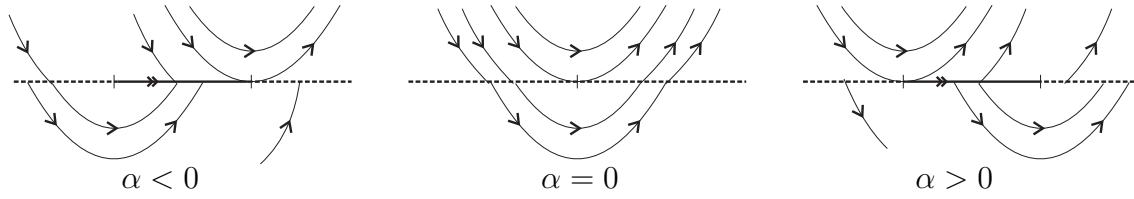


Figura 5.6: Forma canônica da Proposição 5.4.3.

Suponhamos agora que $\pi_1(X(0, 0))\pi_1(Y(0, 0)) < 0$. Conforme dito anteriormente, temos dois casos para analisar que serão diferenciados pelo comportamento do campo Z^Σ .

Proposição 5.4.4. Seja $Z = (X, Y) \in \Omega$. Suponha que $(0, 0) \in \Sigma$ é uma dobra visível de X e invisível de Y e que $\pi_1(X(0, 0))\pi_1(Y(0, 0)) < 0$. Suponha também que Z^Σ tenha sua trajetória orientada da esquerda para a direita. Então o desdobramento de Z que depende de um parâmetro é Σ -equivalente ao desdobramento de Z_α , onde

$$Z_\alpha(x, y) = \begin{cases} X_\alpha(x, y) = (-1, -\alpha - 2x), & \text{se } y \geq 0, \\ Y(x, y) = (1, x), & \text{se } y \leq 0. \end{cases}$$

Vamos esboçar o retrato de fase de Z_0 e de seus desdobramentos. Temos que $(-\frac{\alpha}{2}, 0)$ é uma dobra visível de X e $(0, 0)$ é dobra invisível de Y . Além disso, essas dobras delimitam uma região de costura em Σ . Segue também que $(-\alpha, 0) \in \Sigma$ é ponto crítico de $Z_\alpha^\Sigma(x, y) = (\frac{x + \alpha}{3x + \alpha}, 0)$. Tal ponto é atrator para $\alpha > 0$ e repulsor para $\alpha < 0$. Veja a Figura 5.7.

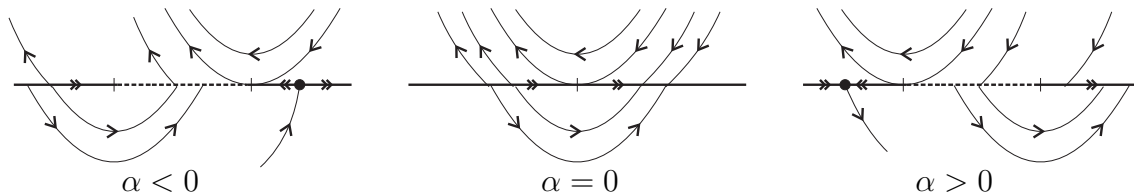


Figura 5.7: Forma canônica da Proposição 5.4.4.

Proposição 5.4.5. Seja $Z = (X, Y) \in \Omega$. Suponha que $(0, 0) \in \Sigma$ é uma dobra visível de X e invisível de Y e que $\pi_1(X(0, 0))\pi_1(Y(0, 0)) < 0$. Suponha também que Z^Σ tenha sua trajetória orientada da direita para a esquerda. Então o desdobramento de Z que depende de um parâmetro é Σ -equivalente ao desdobramento de Z_α , onde

$$Z_\alpha(x, y) = \begin{cases} X_\alpha(x, y) = (-1, -\alpha - x), & \text{se } y \geq 0, \\ Y(x, y) = (1, 2x), & \text{se } y \leq 0. \end{cases}$$

Vamos esboçar o retrato de fase de Z_0 e de seus desdobramentos. Temos que $(-\alpha, 0)$ é uma dobra visível de X e $(0, 0)$ é dobra invisível de Y . Além disso, essas tangências delimitam uma região de costura em Σ . Por fim, obtemos que $(\alpha, 0) \in \Sigma$ é ponto crítico de $Z_\alpha^\Sigma(x, y) = (\frac{-x + \alpha}{3x + \alpha}, 0)$. Veja a Figura 5.8.

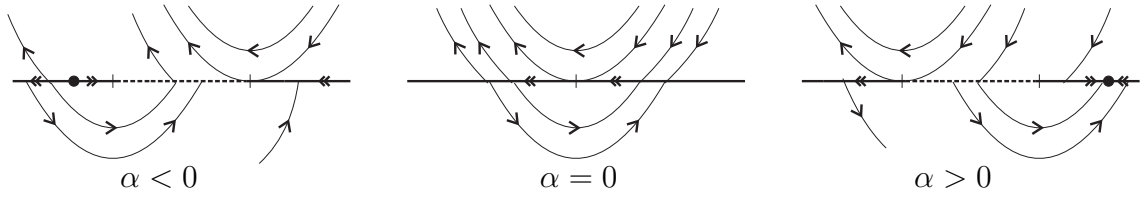


Figura 5.8: Forma canônica da Proposição 5.4.5.

5.4.3 Dobra-Dobra Invisível-Invisível

Seja $Z = (X, Y) \in \Omega$ tal que $Xf(0, 0) = Yf(0, 0) = 0$, $X^2f(0, 0) < 0$ e $Y^2f(0, 0) > 0$. Isto é, a origem é uma dobra invisível para X e Y simultaneamente. Aqui, teremos três casos genéricos para analisar: um caso quando $\pi_1(X(0, 0))\pi_1(Y(0, 0)) > 0$ e dois casos quando $\pi_1(X(0, 0))\pi_1(Y(0, 0)) < 0$. Os dois últimos casos serão diferenciados quando a origem atua como uma espécie foco atrator ou repulsor.

Para analisar esses casos genéricos, primeiramente devemos definir a Aplicação de Primeiro Retorno para Z .

Suponha sem perda de generalidade que $\pi_1(X(0, 0)) > 0$ e $\pi_1(Y(0, 0)) < 0$ (o caso oposto é estudado de maneira análoga). Seja φ_X o fluxo do campo X e $p_0 = (x_0, 0) \in \Sigma$. Então existe um tempo $t_0 \neq 0$ tal que $\varphi_X(t_0, p_0) \in \Sigma$ e $Xf(\varphi_X(t_0, p_0)) \neq 0$, pois estamos assumindo que $(0, 0) \in \Sigma$ é uma dobra isolada de X .

Seja θ a projeção na segunda coordenada e defina a aplicação $\psi : \mathbb{R}^* \times \Sigma^c \rightarrow \Sigma^c$ por $\psi(t, p) = \theta(\varphi_X(t, p))$. Assim, temos que $\psi(t_0, p_0) = 0$ e

$$\frac{\partial}{\partial x}(\psi(t_0, p_0)) = \theta(X(\varphi_X(t_0, p_0))) \neq 0.$$

Pelo Teorema da Função Implícita, existem vizinhanças U_{p_0} e V_{t_0} e uma aplicação diferenciável $t : U_{p_0} \rightarrow V_{t_0}$ tal que $\psi(t(p), p) = 0$, isto é, $\varphi_X(t(p), p) \in \Sigma$. Em outras palavras, dado $p \in \Sigma$ sempre irá existir um tempo $t(p)$ não nulo tal que $\varphi_X(t(p), p) \in \Sigma$.

Defina agora a aplicação $\phi_X : \Sigma^c \rightarrow \Sigma^c$ por $\phi_X(p) = \pi_1(\varphi_X(t(p), p))$. Chamaremos ϕ_X de **aplicação de primeiro retorno**. Note que φ_X é diferenciável e $\varphi_X^2 = Id$.

Podemos escrever $\phi_X(x) = -x + a_1x^2 - a_2x^3 + \mathcal{O}(x^4)$. Analogamente, definimos a aplicação de primeiro retorno ϕ_Y para o campo Y e podemos escrever $\phi_Y(x) = -x + b_1x^2 - b_2x^3 + \mathcal{O}(x^4)$. Dado o conjunto $\Sigma_- = \{(x, 0) \in \Sigma \mid x < 0\}$, definimos a aplicação de primeiro retorno ϕ para o campo Z e escrevemos $\phi(x) = \varphi_Y \circ \varphi_X(x) = x + (b_1 - a_1)x^2 + \mathcal{O}(x^3)$.

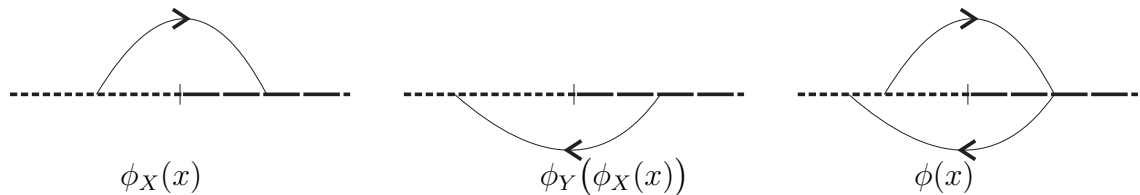
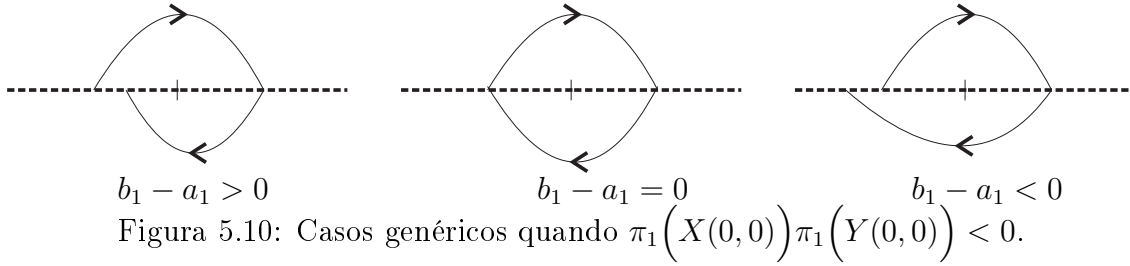


Figura 5.9: Aplicações de primeiro retorno de X , Y e Z .

Se $\phi = Id$, a origem é uma espécie de centro para o campo Z . Caso $b_1 - a_1 = 0$, teremos uma bifurcação que depende de mais de um parâmetro, a qual estudaremos no

Capítulo 9. Se $b_1 - a_1 \neq 0$, dizemos que a origem é uma dobra-dobra atratora genérica se $b_1 - a_1 > 0$ e uma dobra-dobra repulsora genérica se $b_1 - a_1 < 0$.



Feitas estas observações, podemos estudar os casos genéricos.

Proposição 5.4.6. Seja $Z = (X, Y) \in \Omega$. Suponha que $(0, 0) \in \Sigma$ é uma dobra invisível de X e Y simultaneamente e que $\pi_1(X(0,0))\pi_1(Y(0,0)) > 0$. Então o desdobramento de Z que depende de um parâmetro é Σ -equivalente ao desdobramento de Z_α , onde

$$Z_\alpha(x, y) = \begin{cases} X_\alpha(x, y) = (a, -ax + \alpha), & \text{se } y \geq 0, \\ Y(x, y) = (a, ax), & \text{se } y \leq 0, \end{cases}$$

onde $a = \text{sgn}(\pi_1(X(0,0)))$.

Vamos esboçar o retrato de fase de Z_0 e de seus desdobramentos para $a = 1$. Temos que $(\alpha, 0)$ é uma dobra invisível de X e $(0, 0)$ é dobra invisível de Y . Além disso, essas tangências delimitam uma região de costura em Σ . Temos também que o campo $Z_\alpha^\Sigma(x, y) = (1, 0)$ não possui pontos críticos. Veja a Figura 5.11.

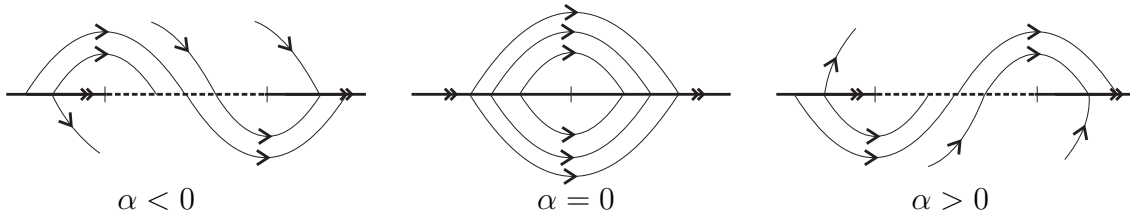


Figura 5.11: Forma canônica da Proposição 5.4.6.

Proposição 5.4.7. Seja $Z = (X, Y) \in \Omega$. Suponha que $(0, 0) \in \Sigma$ é uma dobra invisível de X e Y simultaneamente e que $\pi_1(X(0,0))\pi_1(Y(0,0)) < 0$. Então, numa vizinhança próxima de $(0, 0)$, vale:

- a) Se a origem é uma dobra-dobra repulsora genérica, então o desdobramento de Z que depende de um parâmetro é Σ -equivalente ao desdobramento de Z_α , onde

$$Z_\alpha(x, y) = \begin{cases} X_\alpha(x, y) = (-1, x + \alpha), & \text{se } y \geq 0, \\ Y(x, y) = (1, x - x^2), & \text{se } y \leq 0, \end{cases}$$

- b) Se a origem é uma dobra-dobra atratora genérica, então o desdobramento de Z que depende de um parâmetro é Σ -equivalente ao desdobramento de Z_α , onde

$$Z_\alpha(x, y) = \begin{cases} X_\alpha(x, y) = (1, -x + \alpha), & \text{se } y \geq 0, \\ Y(x, y) = (-1, -x + x^2), & \text{se } y \leq 0. \end{cases}$$

A seguir, esboçaremos o diagrama de bifurcação de Z_α para o caso onde a origem é uma dobra-dobra atratora genérica.

Primeiramente, note que X_α possui uma dobra invisível $T_\alpha = (\alpha, 0)$ e o campo Y possui duas dobras: uma invisível $T_1 = (0, 0)$ e outra visível $T_2 = (1, 0)$. Vamos analisar o comportamento do campo apenas numa vizinhança da origem.

Para $\alpha = 0$, temos que $\Sigma^c = \Sigma - \{(0, 0)\}$. Se $\alpha < 0$ temos o surgimento de uma região de deslize entre T_α e T_1 e se $\alpha > 0$ temos o surgimento de uma região de escape entre T_1 e T_α .

Note também que $Z_\alpha^\Sigma(x, y) = \left(\frac{x^2 - 2x + \alpha}{x^2 - \alpha}, 0\right)$, cujo ponto crítico é um pseudo-nó dado por $P_\alpha = (1 - \sqrt{1 - \alpha}, 0)$. Para $\alpha < 0$, este ponto é atrator e para $\alpha > 0$ este ponto é repulsor.

Resolvendo os seguintes sistemas de equações diferenciais

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 1, \\ \dot{y}(t) = -x + \alpha \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = -1, \\ \dot{y}(t) = -x + x^2, \end{cases}$$

obtemos que as aplicações de primeiro retorno de X_α e Y são dadas por

$$\phi_{X_\alpha}(x) = 2\alpha - x \quad \text{e} \quad \phi_Y(x) = \left(\frac{1}{4}\right)\left(3 - 2x - \sqrt{9 + 12x - 12x^2}\right).$$

Daí, segue que a aplicação de primeiro retorno do campo Z_α é dada pela expressão

$$\phi(x) = \phi_{X_\alpha} \circ \phi_Y(x) = 2\alpha + \left(\frac{1}{4}\right)\left(2x - 3 + \sqrt{9 + 12x - 12x^2}\right).$$

Calculando a expansão de Taylor da função acima em torno de $(0, 0)$, temos que

$$\phi(x) = 2\alpha + x - \frac{2x^2}{3} + \mathcal{O}(x^3),$$

e portanto a origem atua como uma espécie de foco atrator.

Resolvendo a equação $\phi(x) = x$, concluímos que para $\alpha > 0$ existe uma órbita periódica passando pelos pontos $C_1 = (\alpha - \sqrt{3\alpha(1 - \alpha)}, 0)$ e $C_2 = (\alpha + \sqrt{3\alpha(1 - \alpha)}, 0)$. Por conta disso, esta bifurcação também é chamada de Pseudo-Hopf. Veja a Figura 5.12.

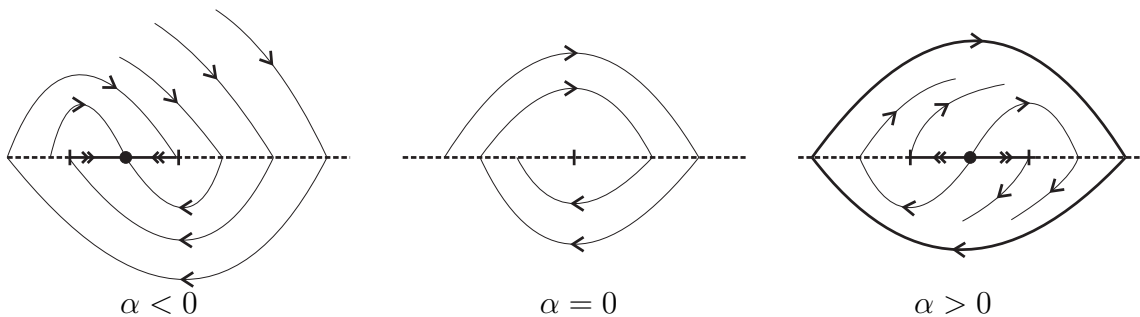


Figura 5.12: Forma canônica da Proposição 5.4.7 para o caso atrator.

5.5 Ponto de Equilíbrio Hiperbólico de X sobre Σ

Suponha que $(0, 0)$ é um ponto de equilíbrio hiperbólico de X (o estudo para o caso onde a origem é ponto crítico hiperbólico de Y é análogo). Assim, os autovalores da matriz $DX(0, 0)$ possuem parte real não nula e a origem pode ser um nó, uma sela ou um foco de X . Vamos analisar esses três casos. Em todos eles, iremos supor que Y é transversal à Σ numa vizinhança da origem.

5.5.1 Bifurcação Sela- Σ Genérica

Considere o campo $Z = (X, Y) \in \Omega$. Suponha que $X(0, 0) = (0, 0)$ e que a matriz $DX(0, 0)$ possua dois autovalores reais λ_1 e λ_2 tais que $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Dessa forma, a origem é uma sela para o campo X . Iremos estabelecer condições para que este tipo de bifurcação não dependa de dois ou mais parâmetros.

Sejam $W_{\pm}^{u,s}(0, 0)$ as variedades estáveis e instáveis passando por $(0, 0)$ e contidas em Σ^{\pm} , respectivamente. Veremos por meio de um exemplo que a primeira condição a ser satisfeita é que $W_{+}^{u,s}(0, 0)$ seja transversal à Σ .

Exemplo 5.5.1. Considere o campo

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y) = (x, -y + x^2), & y \geq 0, \\ Y(x, y) = (0, 1), & y \leq 0. \end{cases}$$

Os autovalores de $DX(0, 0)$ são 1 e -1 , logo a origem é uma sela para X . Além disso, a variedade instável $W_{+}^{u}(0, 0)$ é tangente à Σ em $(0, 0)$.

Considere agora os campos

$$Z_{\alpha}(x, y) = \begin{cases} X_{\alpha}(x, y) = (x, -y + x^2 + \alpha x), & y \geq 0, \\ Y(x, y) = (0, 1), & y \leq 0, \end{cases} \quad e$$

$$\tilde{Z}_{\alpha}(x, y) = \begin{cases} \tilde{X}_{\alpha}(x, y) = (x, -y + x^2 + \alpha), & y \geq 0, \\ Y(x, y) = (0, 1), & y \leq 0. \end{cases}$$

É fácil ver que $Z = Z_0 = \tilde{Z}_0$ e portanto Z_{α} e \tilde{Z}_{α} são desdobramentos de Z . Para o campo Z_{α} , o parâmetro α rotaciona as variedades estáveis e instáveis, enquanto que para o campo \tilde{Z}_{α} o parâmetro α controla a sela $S_{\alpha} = (0, \alpha)$.

Se $\alpha > 0$, note que $W_{+}^{u,s}(0, 0)$ são transversais à Σ para o campo Z_{α} , e para o campo \tilde{Z}_{α} o ponto de sela pertence à Σ^{+} . Por estas razões, temos uma bifurcação que depende de mais de um parâmetro. Veja a Figura 5.13.

Também é possível construir exemplos onde a variedade estável $W_{+}^s(0, 0)$ é tangente à Σ e obter bifurcações que dependam de mais de um parâmetro. Assim, a primeira condição que devemos impor é que $W_{+}^{u,s}(0, 0)$ seja transversal à Σ .

Se o campo Y possuir trajetórias que tangenciem Σ também teremos bifurcações que dependem de mais de um parâmetro. Por outro lado, exigir apenas que $Yf(0, 0) \neq 0$ (Y transversal à Σ) não é suficiente para garantir que a bifurcação dependa de apenas um parâmetro. Isto ficará mais claro no exemplo a seguir.

Exemplo 5.5.2. Considere a família

$$Z_{\alpha}(x, y) = \begin{cases} X_{\alpha}(x, y) = (x, 2x - y + \alpha), & y \geq 0, \\ Y(x, y) = (1, 1), & y \leq 0, \end{cases}$$

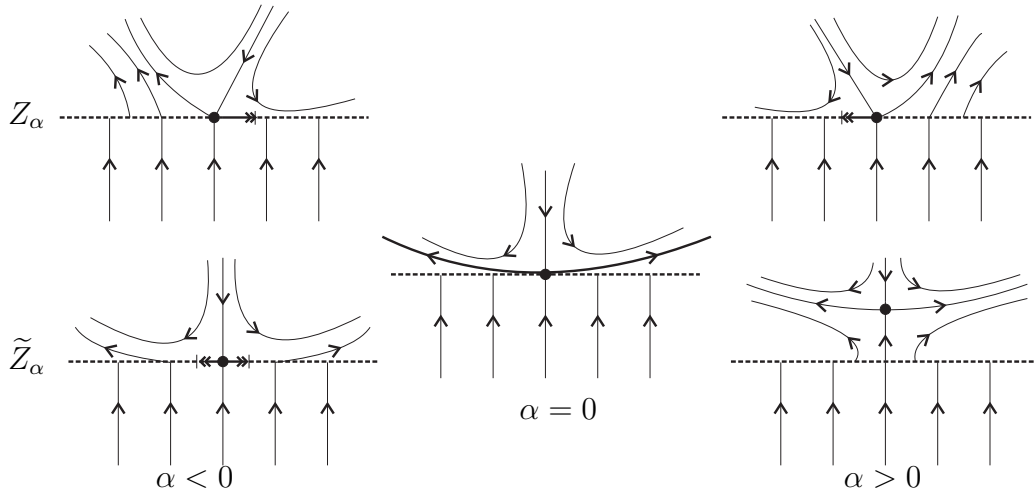


Figura 5.13: Desdobramentos dos campos Z_α e \tilde{Z}_α .

Temos que os autovalores da sela são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 1$, cujo autovetor associado à λ_2 é $v_2 = (1, 1)$. Assim, quando $\alpha = 0$ temos que $Y(0, 0)$ é paralelo à variedade instável $W_+^u(0, 0)$. Para $\alpha > 0$, temos uma sela $(0, \alpha) \in \Sigma^+$ e um ponto crítico $(-\alpha, 0) \in \Sigma$ de Z_α^s ligados por uma conexão heteroclínica. Essa conexão pode ser quebrada, donde obtemos bifurcações que dependem de mais de um parâmetro. Veja a Figura 5.14

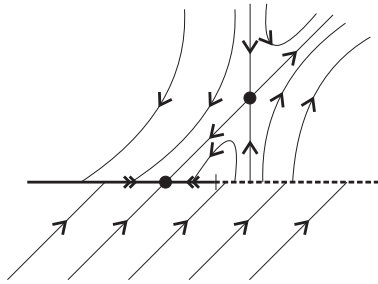


Figura 5.14: Desdobramento do campo Z_α quando $\alpha > 0$.

Portanto, a segunda condição que devemos impor é que $Y(0, 0)$ seja transversal à Σ e às variedades estáveis e instáveis de X que passam por $(0, 0)$.

Note que, com as duas condições estabelecidas acima, sempre teremos um campo Z^Σ bem definido numa vizinhança de $(0, 0)$. Podemos escrever esse campo da forma $Z^\Sigma(x, y) = (\beta x + \mathcal{O}(x^2), 0)$. Para evitar bifurcações que dependam de mais de um parâmetro, a última condição que devemos exigir é que a origem seja um ponto crítico hiperbólico de Z^Σ , isto é, que $\beta \neq 0$.

Com estas três condições impostas, podemos estudar os diagramas de bifurcação para este tipo de singularidade. Teremos quatro casos a serem analisados, e estes serão diferenciados pelas posições das **retas isóclinas**.

As retas isóclinas são dadas pelas equações $\dot{x} = 0$ e $\dot{y} = 0$. A intersecção da reta $\dot{x} = 0$ com Σ nos dá o ponto crítico de Z^Σ , enquanto a intersecção de $\dot{y} = 0$ com Σ nos dá o ponto onde X tangencia Σ .

Caso 1:

$$Z_\alpha^1(x, y) = \begin{cases} X_\alpha^1(x, y) &= (-x + 3y + 3\alpha, 3x - y - \alpha), & y \geq 0, \\ Y(x, y) &= (0, 1), & y \leq 0. \end{cases}$$

Neste caso, a sela é dada por $S_\alpha = (0, -\alpha)$. Os autovalores da matriz $DX(S_\alpha)$ são $\lambda_1 = -4$ e $\lambda_2 = 2$, donde seus respectivos autovetores são $v_1 = (1, -1)$ e $v_2 = (1, 1)$. Temos uma tangência entre X_α^1 e Σ no ponto $T_\alpha = \left(\frac{\alpha}{3}, 0\right)$ e analisando a derivada do campo $(Z_\alpha^1)^\Sigma = \left(\frac{-x + 3\alpha}{1 - 3x + \alpha}, 0\right)$ segue que o ponto pseudo-crítico $P_\alpha = (3\alpha, 0)$ é atrator. Note que os pontos de intersecção da variedade estável e instável com Σ são respectivamente $(-\alpha, 0)$ e $(\alpha, 0)$. Veja a Figura 5.15.

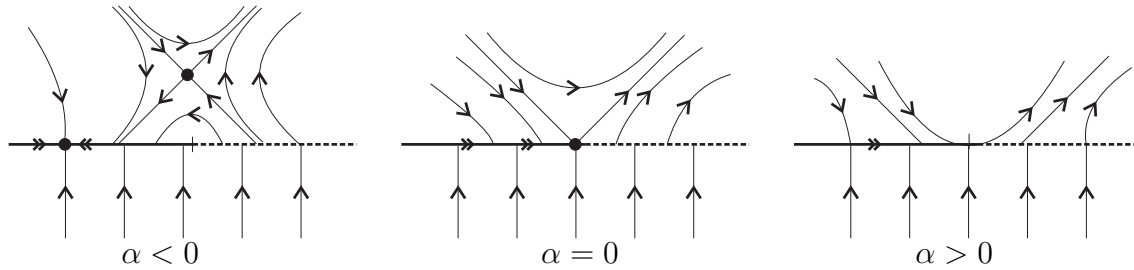


Figura 5.15: Desdobramentos do campo Z_α^1 para a singularidade Sela- Σ .

Caso 2:

$$Z_\alpha^2(x, y) = \begin{cases} X_\alpha^2(x, y) &= (x + 3y + 3\alpha, 3x + y + \alpha), & y \geq 0, \\ Y(x, y) &= (0, 1), & y \leq 0. \end{cases}$$

Aqui, temos que $S_\alpha = (0, -\alpha)$, $(Z_\alpha^2)^\Sigma = \left(\frac{x + 3\alpha}{1 - 3x - \alpha}, 0\right)$, $P_\alpha = (-3\alpha, 0)$ é um ponto repulsor e $T_\alpha = \left(-\frac{\alpha}{3}, 0\right)$. Os autovalores da matriz $DX(S_\alpha)$ são $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 4$ e seus respectivos autovetores são $v_1 = (1, -1)$ e $v_2 = (1, 1)$. Veja a Figura 5.16.

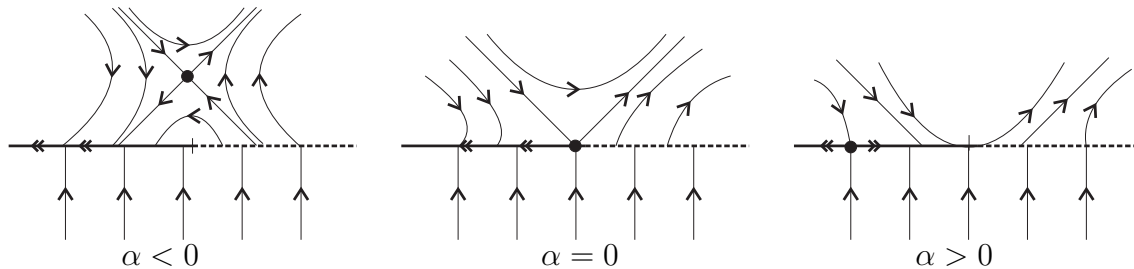


Figura 5.16: Desdobramentos do campo Z_α^2 para a singularidade Sela- Σ .

Caso 3:

$$Z_\alpha^3(x, y) = \begin{cases} X_\alpha^3(x, y) &= (-2x - y + \alpha, x + y - \alpha), & y \geq 0, \\ Y(x, y) &= (0, 1), & y \leq 0. \end{cases}$$

Para este campo, segue que $S_\alpha = (0, \alpha)$, $(Z_\alpha^3)^\Sigma = \left(\frac{-2x + \alpha}{1 - x + \alpha}, 0\right)$, $P_\alpha = \left(\frac{\alpha}{2}, 0\right)$ é atrator e $T_\alpha = (\alpha, 0)$. Neste caso, os autovalores são $\lambda_{1,2} = \frac{-1 \mp \sqrt{5}}{2}$ e seus

autovetores associados são $v_{1,2} = (1, \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2})$. Aqui, os pontos de intersecção de Σ com as variedades estáveis e instáveis são $(\frac{\alpha(3+\sqrt{5})}{2}, 0)$ e $(\frac{\alpha(3-\sqrt{5})}{2}, 0)$. Veja a Figura 5.17.

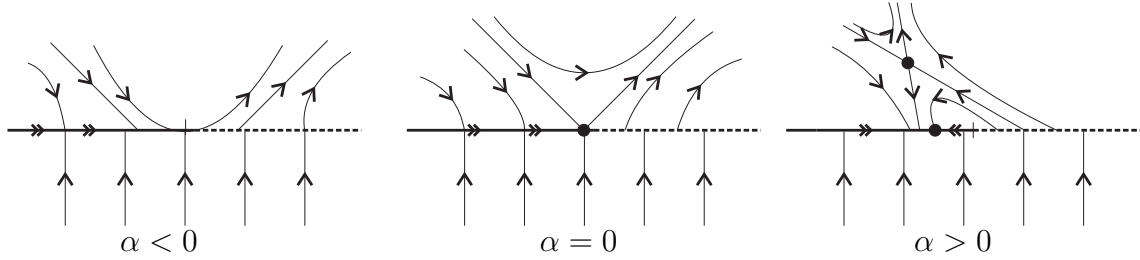


Figura 5.17: Desdobramentos do campo Z_α^3 para a singularidade Sela- Σ .

Caso 4:

$$Z_\alpha^4(x, y) = \begin{cases} X_\alpha^4(x, y) = (2x - y + \frac{\alpha}{2}, x - 2y + \alpha), & y \geq 0, \\ Y(x, y) = (0, 1), & y \leq 0. \end{cases}$$

Por fim, para este campo temos $S_\alpha = (0, \frac{\alpha}{2})$, $(Z_\alpha^4)^\Sigma = (\frac{2x + \frac{\alpha}{2}}{1 - x - \alpha}, 0)$, $P_\alpha = (-\frac{\alpha}{4}, 0)$ é repulsor e $T_\alpha = (-\alpha, 0)$. Os autovalores são dados por $\lambda_{1,2} = \mp\sqrt{3}$ e seus respectivos autovetores são $v_{1,2} = (1, 2 \pm \sqrt{3})$. Assim, os pontos de intersecção de Σ com as variedades estáveis e instáveis são $(-\frac{\alpha(2-\sqrt{3})}{2}, 0)$ e $(-\frac{\alpha(2+\sqrt{3})}{2}, 0)$ respectivamente. Veja a Figura 5.18.

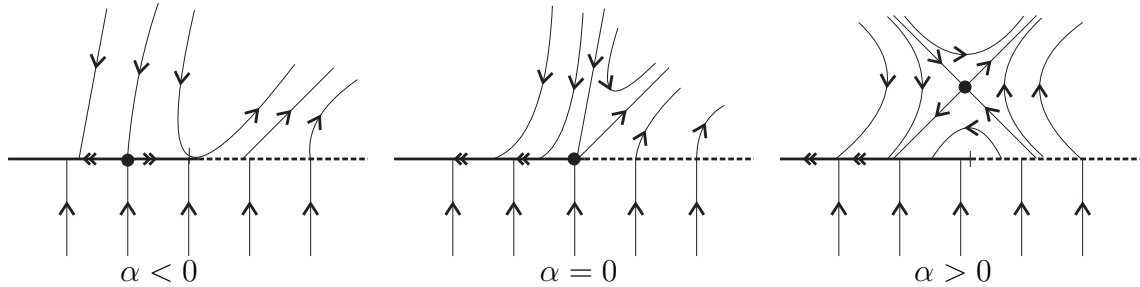


Figura 5.18: Desdobramentos do campo Z_α^4 para a singularidade Sela- Σ .

Os casos 1, 3 e 4 estudados acima podem ser encontrados em [14] e o caso 2 é equivalente ao caso SB4 de [15].

5.5.2 Bifurcação Nó- Σ Genérica

Considere o campo $Z = (X, Y) \in \Omega$. Suponha que a matriz $DX(0, 0)$ possua dois autovalores reais λ_1 e λ_2 de mesmo sinal. Dessa forma, a origem é um nó para o campo X . Iremos estabelecer condições para que este tipo de bifurcação não dependa de dois ou mais parâmetros.

Vamos supor que o campo Y seja transversal à Σ numa vizinhança da origem. Assim, note que sempre teremos um campo Z^Σ bem definido e podemos escrever

$Z^\Sigma(x, y) = (\beta x + \mathcal{O}(x^2), 0)$. Portanto, a primeira condição que iremos exigir é que $\beta \neq 0$, isto é, que a origem seja um ponto crítico hiperbólico de Z^Σ .

A segunda condição que iremos adotar é que a matriz $DX(0, 0)$ possua dois autovalores distintos. Caso contrário, teremos bifurcações que dependem de mais um parâmetro, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 5.5.3. Seja $Z = (X, Y) \in \Omega$ com $X(x, y) = (x, x + y)$ e $Y(x, y) = (1, 2)$. Note que os autovalores de $DX(0, 0)$ são $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Considere os seguintes desdobramentos de Z :

$$Z_\alpha(x, y) = \begin{cases} X_\alpha(x, y) = ((1 + \alpha)x, x + y), & y \geq 0, \\ Y(x, y) = (1, 2), & y \leq 0, \end{cases} \text{ e}$$

$$\tilde{Z}_\beta(x, y) = \begin{cases} \tilde{X}_\beta(x, y) = (x, x + y - \beta), & y \geq 0, \\ Y(x, y) = (1, 2), & y \leq 0, \end{cases}$$

com, $\alpha \neq -1$ suficientemente pequeno.

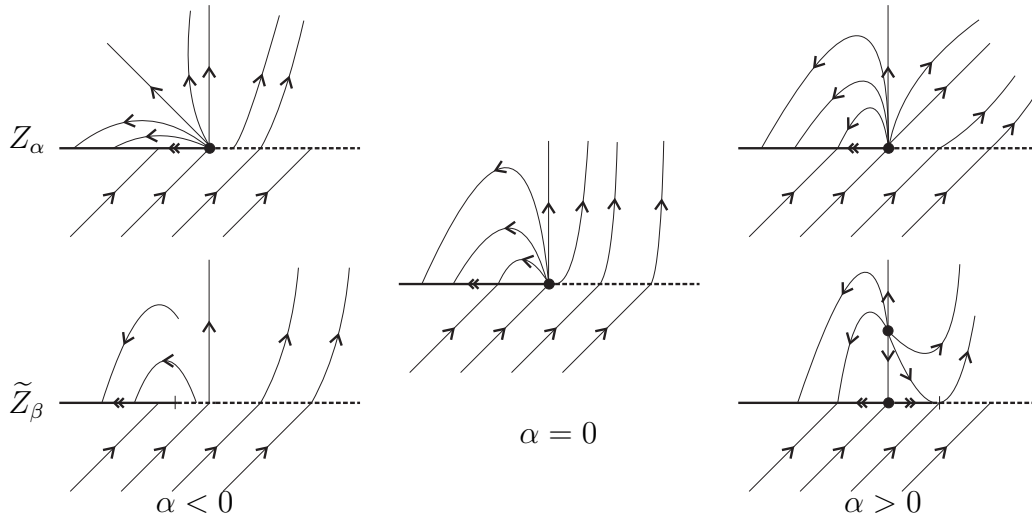


Figura 5.19: Desdobramentos dos campos Z_α e \tilde{Z}_β .

Para $\alpha \neq 0$ temos que o nó $(0, 0) \in \Sigma$ de X_α possui dois auto-espacos. Já o parâmetro β controla o nó de \tilde{X}_β , que pode pertencer à Σ^+ ou Σ^- . Assim, esta bifurcação depende de mais de um parâmetro. Portanto, a segunda condição que iremos adotar é que a matriz $DX(0, 0)$ possua dois autovalores distintos.

Como estamos exigindo que $DX(0, 0)$ tenha dois autovalores distintos de mesmo sinal, então o nó terá dois autoespacos. A terceira condição que iremos impor é que o campo $Y(0, 0)$ não deve ser paralelo a nenhum desses auto-espacos, pois isso pode acarretar numa bifurcação que depende de mais de um parâmetro. Ilustremos esta situação com um exemplo.

Exemplo 5.5.4. Considere o campo

$$Z_\alpha(x, y) = \begin{cases} X_\alpha(x, y) = (x, -x + 4y - 4\alpha), & y \geq 0, \\ Y(x, y) = (0, 1), & y \leq 0. \end{cases}$$

Para $\alpha = 0$, a origem é um nó repulsor do campo X_α e $Y(0, 0)$ é paralelo ao autoespaco associado ao autovalor $\lambda = 4$.

Para $\alpha > 0$, temos que a origem é uma pseudo-sela para o campo Z_α^s conectada com o nó repulsor $(0, \alpha)$ de X_α por meio de uma trajetória contida em um dos autoespaços. Assim, obtemos uma bifurcação que depende de mais de um parâmetro. Portanto, a terceira condição que iremos exigir é que Y seja transversal aos autoespaços do nó de X_α .

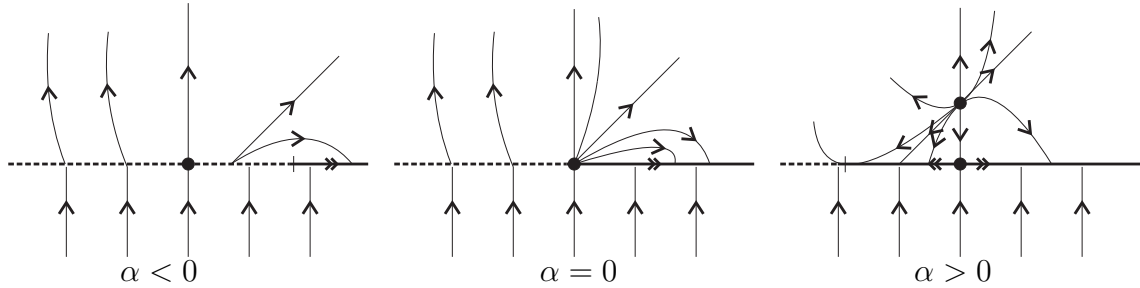


Figura 5.20: Desdobramentos do campo Z_α e ligação heteroclínica para $\alpha > 0$.

A última condição que iremos impor é que as variedades estáveis e instáveis $W_+^{u,s}$ sejam transversais a descontinuidade Σ . Lembre-se que as retas isóclinas $\dot{x} = 0$ e $\dot{y} = 0$ determinam, respectivamente, os pontos críticos de Z^Σ e as tangências do campo X em relação à descontinuidade Σ .

Iremos estudar dois casos genéricos que também são analisados em [14]. Eles se diferem pela orientação das trajetórias do campo Y . Em ambos os casos vamos supor que $(0, -\alpha)$ é um nó atrator de X , cujos autovalores são $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = -4$.

Os casos onde a origem é um nó repulsor podem ser estudados de forma análoga.

Caso 1:

$$Z_\alpha^1(x, y) = \begin{cases} X_\alpha^1(x, y) = (-3x + y + \alpha, x - 3y - 3\alpha), & y \geq 0, \\ Y(x, y) = (0, 1), & y \leq 0. \end{cases}$$

Aqui, é possível notar que o ponto crítico de $(Z_\alpha^1)^s = \left(\frac{-3x + \alpha}{1 - x + 3\alpha}, 0\right)$ é $\left(\frac{\alpha}{3}, 0\right)$ e que X_α^1 tangencia Σ no ponto $(3\alpha, 0)$. A região à direita da tangência é uma região de costura e a região à esquerda da tangência é uma região de deslize.

Para $\alpha < 0$ a dobra é visível e para $\alpha > 0$ a dobra é invisível. Note que o ponto crítico de Z_α^s só aparece quando $\alpha > 0$. Veja a Figura 5.21

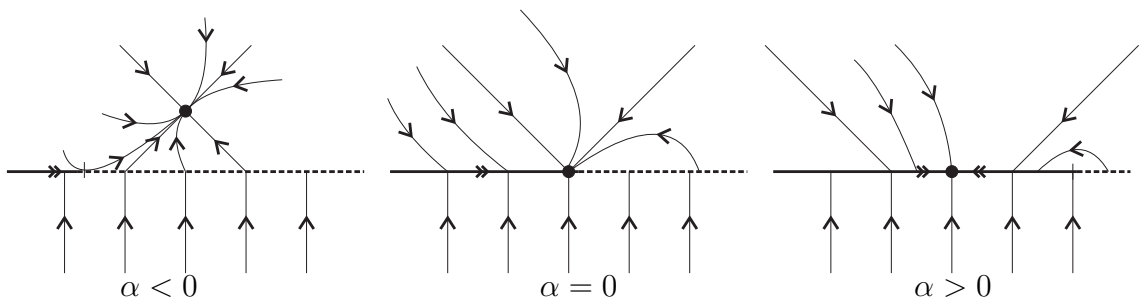


Figura 5.21: Desdobramentos do campo Z_α^1 para a singularidade Nó- Σ .

Caso 2:

$$Z_\alpha^2(x, y) = \begin{cases} X_\alpha^2(x, y) = (-3x + y + \alpha, x - 3y - 3\alpha), & y \geq 0, \\ Y(x, y) = (0, -1), & y \leq 0. \end{cases}$$

As singularidades deste campo possuem as mesmas expressões das singularidades do Caso 1. Note que ponto crítico de $(Z_\alpha^2)^e = \left(\frac{3x - \alpha}{-1 - x + 3\alpha}, 0\right)$ só aparece quando $\alpha < 0$. Veja a Figura 5.22

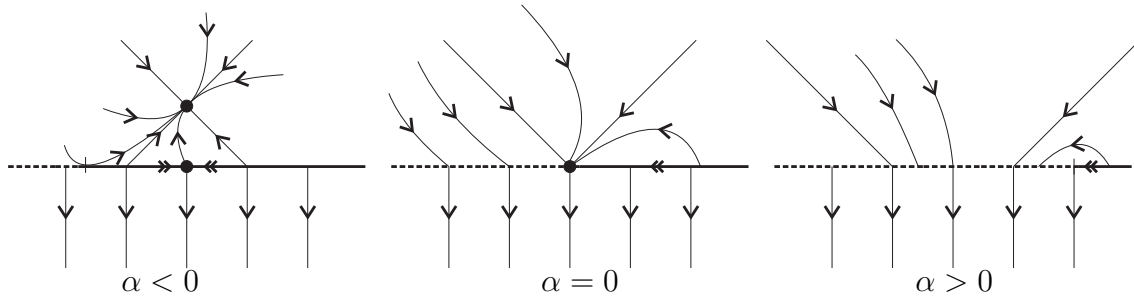


Figura 5.22: Desdobramentos do campo Z_α^2 para a singularidade Nó- Σ .

5.5.3 Bifurcação Foco- Σ Genérica

Seja $Z = (X, Y) \in \Omega$ tal que a origem seja um foco para o campo X . Novamente iremos estabelecer condições para que não tenhamos bifurcações que dependam de mais de um parâmetro.

Iremos supor que o campo Y seja transversal à Σ numa vizinhança da origem e que o campo Z^Σ possa ser escrito da forma $Z^\Sigma(x, y) = (\beta x + \mathcal{O}(x^2), 0)$ com $\beta \neq 0$, isto é, a origem é um ponto crítico hiperbólico de Z^Σ . Além disso, devemos nos atentar a mais um fato.

Tome $Z = (X, Y) \in \Omega$ satisfazendo as duas condições acima e seja $Z_\alpha = (X_\alpha, Y) \in \Omega$ desdobramento de Z . Suponha que para $\alpha > 0$ temos um foco $S_\alpha \in \Sigma^+$ de X_α . Temos também uma tangência T_α obtida a partir da intersecção da reta $\dot{y} = 0$ com a descontinuidade Σ e o ponto crítico P_α de Z_α^Σ obtido a partir da intersecção da reta $\dot{x} = 0$ com a descontinuidade Σ .

Considere $\gamma_{X_\alpha} = \{\varphi_{X_\alpha}(t, T_\alpha) \mid 0 < t \leq t_0\}$ a trajetória de X_α passando pelo ponto T_α , onde t_0 é o primeiro tempo positivo na qual $\varphi_{X_\alpha}(t, T_\alpha)$ intercepta Σ .

Se $\gamma_{X_\alpha} \cap \Sigma \neq \{P_\alpha\}$, teremos bifurcações cujo comportamento será estudado a seguir. Neste caso, temos duas possibilidades: a trajetória intercepta Σ à direita ou à esquerda de P_α .

Se $\gamma_{X_\alpha} \cap \Sigma = \{P_\alpha\}$, então teremos uma bifurcação que depende de mais de um parâmetro, chamada Foco Degenerado. Aqui, temos o surgimento de um ciclo L_α contendo P_α e T_α .

Portanto, a última condição que deve ser imposta é $\gamma_{X_\alpha} \cap \Sigma \neq \{P_\alpha\}$.

Vamos analisar agora alguns comportamentos genéricos. Em todos eles, estamos supondo que a origem é um foco atrator de X_α cujas trajetórias giram no sentido anti-horário. Os outros casos podem ser obtidos invertendo a orientação das trajetórias ou com a reflexão das figuras em relação ao eixo y .

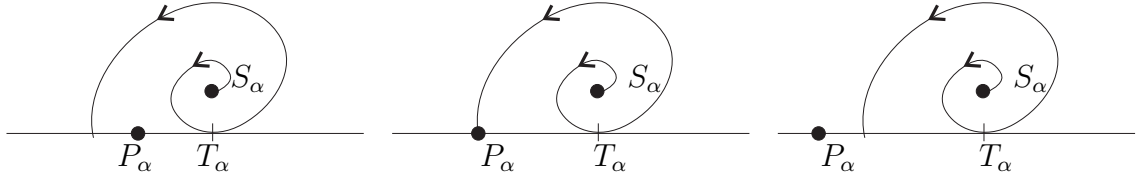


Figura 5.23: Possibilidades para $\gamma_{X_\alpha} \cap \Sigma$.

Os cinco casos que analisaremos a seguir também são estudados em [14]. Eles são diferenciados pelas posições das retas $\dot{x} = 0$ e $\dot{y} = 0$ e pelo comportamento da órbita γ_{X_α} . Em todos eles, T_α é uma tangência invisível para $\alpha < 0$ e visível para $\alpha > 0$. Os casos 4 e 5 são obtidos a partir da mudança de orientação das trajetórias de Y nos casos 2 e 3, respectivamente.

Caso 1:

$$Z_\alpha^1(x, y) = \begin{cases} X_\alpha^1(x, y) = (x - 2y + \alpha, 4x), & y \geq 0, \\ Y(x, y) = (0, 1), & y \leq 0. \end{cases}$$

Temos que a tangência de X_α^1 é dada por $T_\alpha = (0, 0)$ e que $P_\alpha = (-\alpha, 0)$. Assim, o ponto crítico de $(Z_\alpha^1)^\Sigma = \left(\frac{x + \alpha}{1 - 4x}, 0\right)$ não aparece para $\alpha < 0$ e esse ponto crítico é uma pseudo-sela para $\alpha > 0$. Além disso, γ_{X_α} intercepta Σ à direita de P_α , de modo que temos o surgimento de um ciclo deslizante. Veja a Figura 5.24.

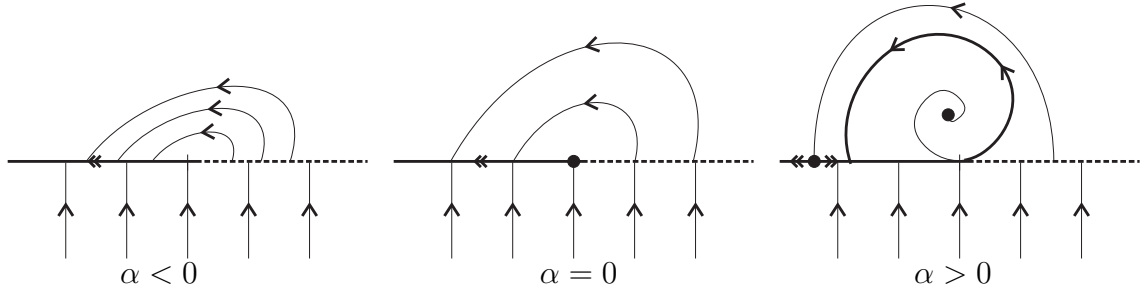


Figura 5.24: Desdobramentos do campo Z_α^1 para a singularidade Foco- Σ .

Caso 2:

$$Z_\alpha^2(x, y) = \begin{cases} X_\alpha^2(x, y) = (x - 2y + \alpha, 3x), & y \geq 0, \\ Y(x, y) = (0, 1), & y \leq 0. \end{cases}$$

A única diferença entre este caso e o Caso 1 é que a órbita γ_{X_α} intercepta Σ à esquerda de P_α e portanto não temos órbitas periódicas. Veja a Figura 5.25.

Caso 3:

$$Z_\alpha^3(x, y) = \begin{cases} X_\alpha^3(x, y) = (-x - 2y + 2\alpha, 4x + 2y - 2\alpha), & y \geq 0, \\ Y(x, y) = (0, 1), & y \leq 0. \end{cases}$$

Temos que a dobra de X_α^3 é dada por $T_\alpha = \left(\frac{\alpha}{2}, 0\right)$ e que $P_\alpha = (2\alpha, 0)$. Assim, o ponto crítico de $(Z_\alpha^3)^\Sigma = \left(\frac{-x + 2\alpha}{1 - 4x + 2\alpha}, 0\right)$ não aparece para $\alpha > 0$ e esse ponto crítico é atrator para $\alpha < 0$. Novamente temos o surgimento de um ciclo deslizante. Veja a Figura 5.26.

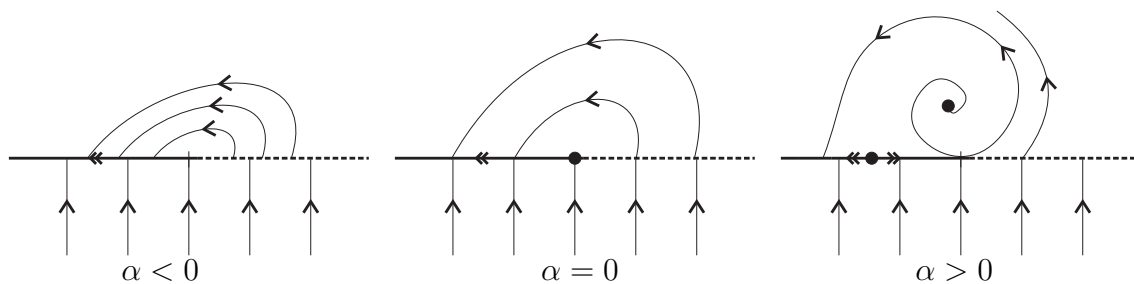


Figura 5.25: Desdobramentos do campo Z_α^2 para a singularidade Foco- Σ .

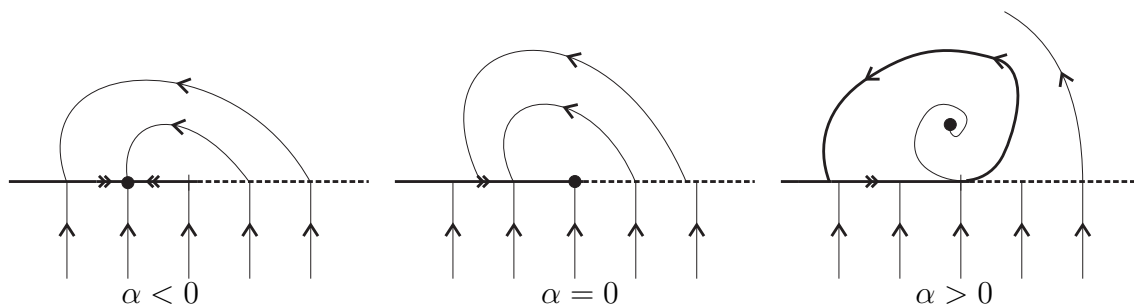


Figura 5.26: Desdobramentos do campo Z_α^3 para a singularidade Foco- Σ .

Caso 4:

$$Z_\alpha^4(x, y) = \begin{cases} X_\alpha^4(x, y) = (x - 2y + \alpha, 3x), & y \geq 0, \\ Y(x, y) = (0, -1), & y \leq 0. \end{cases}$$

Analogamente ao Caso 2, temos que $T_\alpha = (0, 0)$ e que $P_\alpha = (-\alpha, 0)$. Assim, o ponto crítico de $(Z_\alpha^4)^\Sigma = \left(\frac{x + \alpha}{1 + 3x}, 0\right)$ não aparece para $\alpha > 0$ e esse ponto crítico é repulsor para $\alpha < 0$. Veja a Figura 5.27.

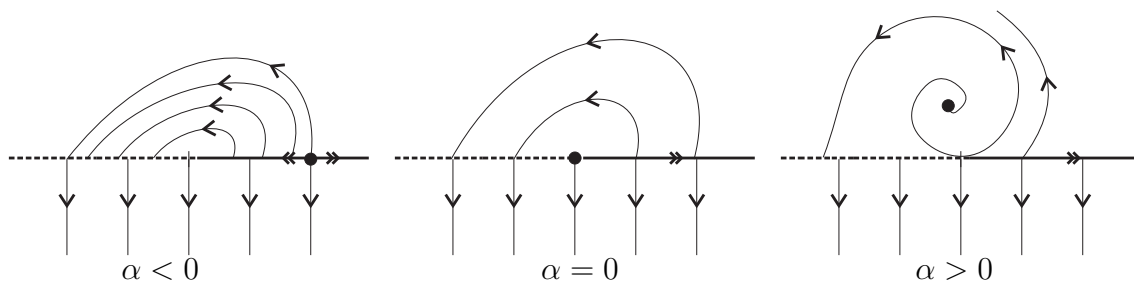


Figura 5.27: Desdobramentos do campo Z_α^4 para a singularidade Foco- Σ .

Caso 5:

$$Z_\alpha^5(x, y) = \begin{cases} X_\alpha^5(x, y) = (-x - 2y + 2\alpha, 4x + 2y - 2\alpha), & y \geq 0, \\ Y(x, y) = (0, -1), & y \leq 0. \end{cases}$$

Analogamente ao Caso 3, temos que $T_\alpha = \left(\frac{\alpha}{2}, 0\right)$ e que $P_\alpha = (2\alpha, 0)$. Para $\alpha < 0$, o campo $(Z_\alpha^5)^\Sigma = \left(\frac{x - 2\alpha}{-1 - 4x + 2\alpha}, 0\right)$ não possui pontos críticos. Para $\alpha > 0$, P_α é uma pseudo-sela. Veja a Figura 5.28.

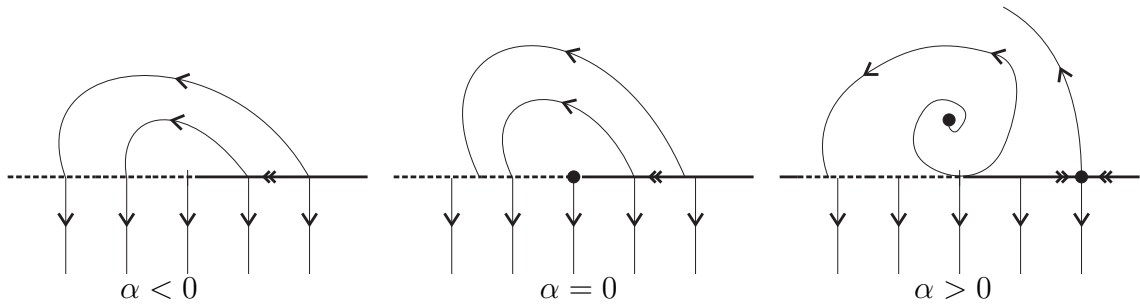


Figura 5.28: Desdobramentos do campo Z_α^5 para a singularidade Foco- Σ .

Vale ressaltar que nos dois últimos casos a órbita γ_{X_α} intercepta Σ numa região de costura. Assim, P_α e T_α não pertencem à mesma órbita.

Observação 5.5.1. Em todas as bifurcações envolvendo pontos críticos hiperbólicos do campo X , é interessante observarmos o seguinte fato. Quando o ponto crítico está em Σ^+ (ou Σ^-), temos duas possibilidades ao variar o parâmetro α : este ponto crítico colide com a descontinuidade quando $\alpha = 0$ e se torna um ponto pseudo-crítico, ou ele colide com um ponto pseudo-crítico quando $\alpha = 0$ e em seguida não temos mais pontos críticos ou pseudo-críticos. Tal comportamento é estudado em [18].

6 Bifurcação Nó- Σ : Casos Extras

A partir de uma leitura mais aprofundada de [8], em [11] foram apresentados dois casos genéricos da Bifurcação Nó- Σ que não estão presentes em [14]. Como veremos a seguir, estes casos se diferem dos casos apresentados no Capítulo 5 pelo fato do ponto de pseudo-equilíbrio ser repulsor.

Considere o campo

$$Z_\alpha(x, y) = \begin{cases} X_\alpha(x, y) &= (a(y - \alpha) - x, abx - y + \alpha), & y \geq 0, \\ Y(x, y) &= (\text{sen } c, \text{cos } c), & y \leq 0, \end{cases}$$

onde $a \neq 0$, $b = \pm 1$ e $c \in \left([0, 2\pi) - \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}\right)$ são constantes. É fácil ver que o ponto crítico de X_α é dado por $P_\alpha = (0, \alpha)$.

Analisando a matriz jacobiana deste campo, temos

$$DX_\alpha(0, \alpha) = \begin{pmatrix} -1 & a \\ ab & -1 \end{pmatrix},$$

cujo determinante é dado por $\Delta = 1 - a^2b$ e seu traço é $\sigma = -2$. Agora, note que

- $\Delta < 0 \Leftrightarrow a^2b > 1$, donde obtemos uma sela.
- $\Delta > 0$ e $\sigma^2 - 4\Delta > 0 \Leftrightarrow a^2b < 1$ e $b = 1$, donde obtemos um nó.
- $\Delta > 0$ e $\sigma^2 - 4\Delta < 0 \Leftrightarrow a^2b < 1$ e $b = -1$, donde obtemos um foco.
- Os autovalores da matriz $DX(0, \alpha)$ são dados por $\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{a^2b}$ e os autovetores são $v_{1,2} = (\pm 1, \sqrt{b})$. As intersecções dos autoespaços com Σ ocorrem nos pontos $x_{1,2} = \mp \frac{\alpha}{\sqrt{b}}$.

Temos também que

$$Z_\alpha^\Sigma(x, y) = \left(\frac{\cos c(a\alpha + x) + \text{sen } c(abx + \alpha)}{abx + \alpha - \cos c}, 0 \right),$$

cujo ponto crítico é dado por $Q_\alpha = \left(-\alpha \frac{a \cos c + \text{sen } c}{\cos c + ab \text{sen } c}, 0 \right)$.

A partir da análise feita acima, podemos obter os comportamentos genéricos das bifurcações Sela- Σ ou Foco- Σ que estão em [14]. A seguir vamos estudar dois casos genéricos da bifurcação Nó- Σ que não se encontram nessa referência. Para isso, tomemos $a = -\frac{1}{2}$ e $b = 1$.

Caso 1: Suponha $c = \frac{7\pi}{5}$, donde temos $\cos c < 0$ e $\sin c < 0$. Aqui, as intersecções dos autoespaços com Σ ocorrem em $\pm\alpha$ e temos uma dobra $T_\alpha = (2\alpha, 0)$. O ponto pseudo-crítico Q_α é repulsor e está à esquerda da dobra para $\alpha < 0$. Veja a Figura 6.1.

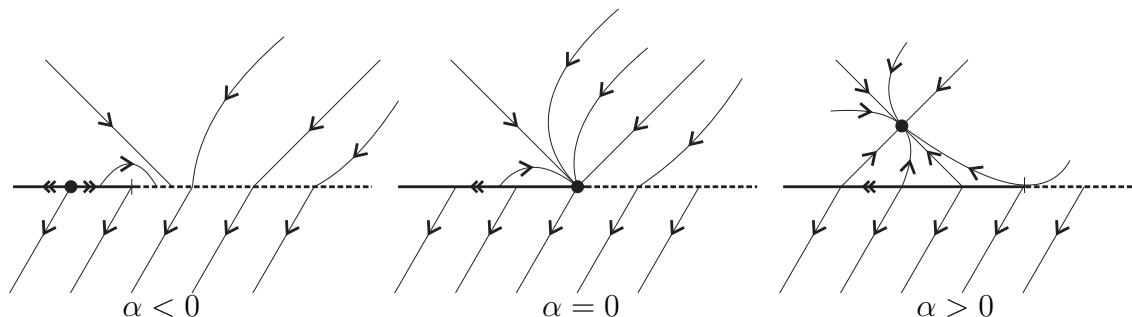


Figura 6.1: Desdobramentos do campo Z_α para a singularidade Nó- Σ no Caso 1.

Caso 2: Suponha $c = \frac{2\pi}{5}$, logo $\cos c > 0$ e $\sin c > 0$. Assim, este caso se diferencia do caso anterior pela mudança de orientação das trajetórias do campo Y . Veja a Figura 6.2.

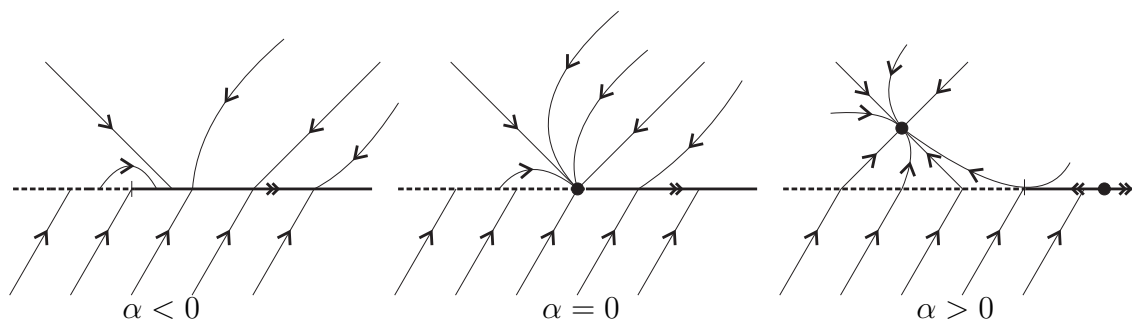


Figura 6.2: Desdobramentos do campo Z_α para a singularidade Nó- Σ no Caso 2.

7 Bifurcações Genéricas Globais a Um Parâmetro

Vamos estudar algumas bifurcações genéricas globais que dependem de um parâmetro. Este estudo é importante pois ao analisar bifurcações que dependem de dois parâmetros podemos encontrar bifurcações globais.

Estas bifurcações podem ocorrer em $\Sigma^+ \cup \Sigma^-$, como por exemplo bifurcações envolvendo conexões de separatrizes de sela, ciclos, etc. Também podemos ter bifurcações globais envolvendo ciclos deslizantes e ciclos de costura em Σ . Vale destacar que a maior parte das bifurcações globais podem ser vistas como conexões entre dobras. As bifurcações estudadas neste Capítulo também são analisadas em [14] e [13].

7.1 Conexões de Separatrizes entre Dobras Regulares

Primeiramente, estudaremos bifurcações que envolvem uma conexão entre pontos de dobra. Como veremos a seguir, estas conexões podem ser homoclínicas ou heteroclínicas.

7.1.1 Conexões Homoclínicas

Seja $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \Omega$ e seja T_0 uma dobra de X_0 . Suponha que $W_+^u(T_0) = W_+^s(T_0)$, de modo que a órbita de X_0 passando pela dobra seja fechada hiperbólica. Suponha também que Y_0 seja transversal à Σ . Vamos analisar dois casos distintos. No primeiro deles, o ciclo é atrator e no segundo o ciclo é repulsor.

Caso 1: Suponha que a órbita periódica L_0 é um ciclo limite atrator. Para $\alpha < 0$, alguma órbita no interior de L_0 tangencia Σ em T_α e temos o surgimento de um ciclo deslizante.

Para $\alpha > 0$, uma órbita exterior ao ciclo tangencia Σ em T_α e assim temos um ciclo limite $L_\alpha \subset \Sigma^+$ estável. Aqui, não temos o surgimento de ciclo deslizante. Para $\alpha \neq 0$, a conexão homoclínica é quebrada. Veja a Figura 7.1.

Caso 2: Considere que a órbita periódica L_0 é um ciclo limite repulsor. Para $\alpha < 0$, alguma órbita no interior de L_0 tangencia Σ em T_α e não temos o surgimento de um ciclo deslizante.

Para $\alpha > 0$, uma órbita exterior ao ciclo tangencia Σ em T_α e assim temos um ciclo limite $L_\alpha \subset \Sigma^+$ repulsor e o surgimento de um ciclo deslizante. Para $\alpha \neq 0$, a conexão homoclínica é quebrada. Veja a Figura 7.2.

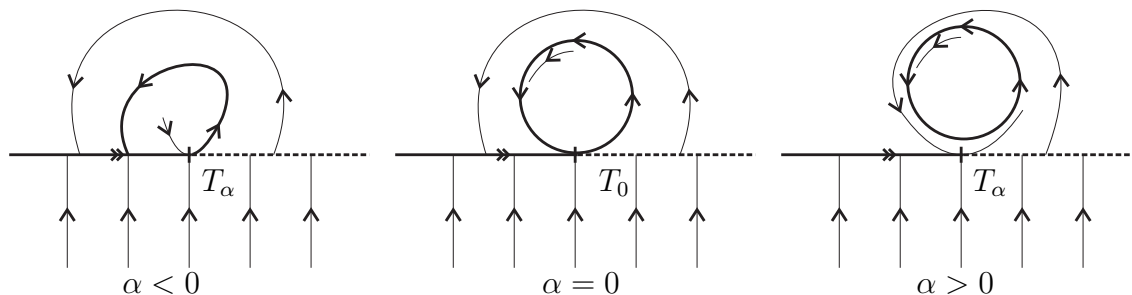


Figura 7.1: Ligação homoclínica envolvendo a dobra T_0 a partir de um ciclo atrator.

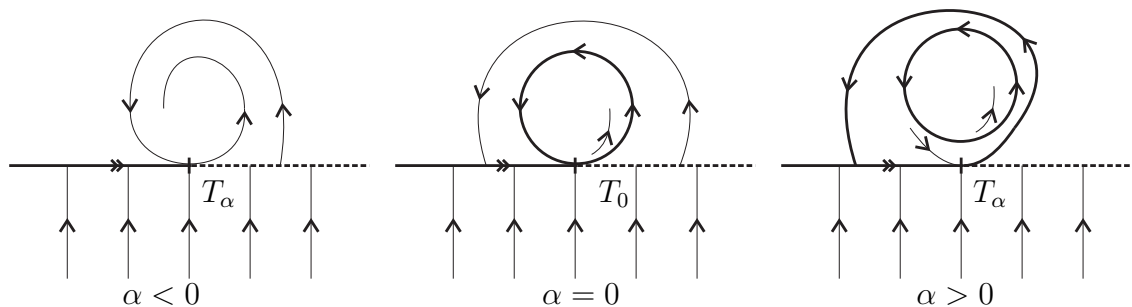


Figura 7.2: Ligação homoclínica envolvendo a dobra T_0 a partir de um ciclo repulsor.

Agora, vamos analisar outra situação. Suponha que $W_+^u(T_0) \cup W_-^s(T_0)$ forme uma conexão homoclínica de T_0 . Quando $\alpha \neq 0$, esta conexão é quebrada. Se $\alpha < 0$, temos o surgimento de uma órbita atratora periódica de costura. Para $\alpha > 0$, temos o surgimento de um ciclo deslizando. Veja a Figura 7.3.

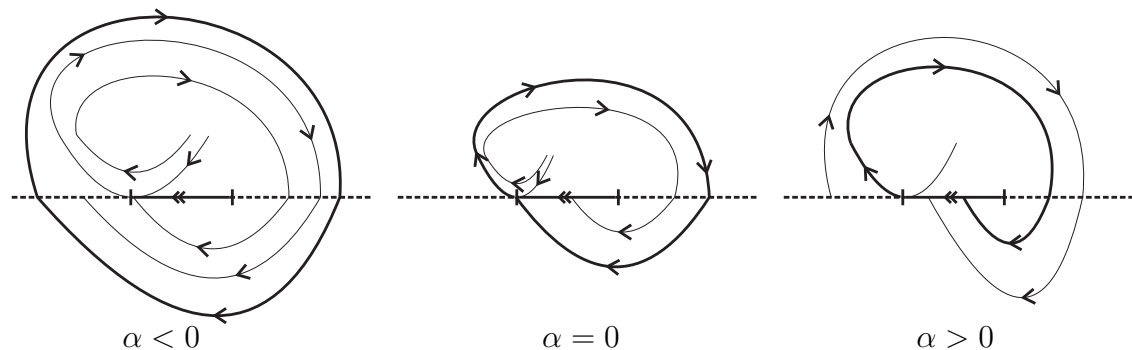


Figura 7.3: Ligação homoclínica envolvendo a dobra T_0 .

7.1.2 Conexões Heteroclínicas

Iremos estudar agora conexões heteroclínicas entre pontos de dobra. Todos os casos aqui estudados dependem da visibilidade das tangências. Analisaremos situações envolvendo conexões entre dobras dos campos X_0 e Y_0 e conexões envolvendo dobras de um mesmo campo.

Caso 1: Suponha que T_0 é dobra visível de X_0 e \tilde{T}_0 é dobra invisível de Y_0 . Suponha também que \tilde{T}_0 está à esquerda de T_0 e que essas tangências delimitam uma região de deslize, com $W_+^s(\tilde{T}_0) = W_+^u(T_0)$ onde exista um ciclo deslizando L_0 .

Quando $\alpha \neq 0$, a conexão heteroclínica é quebrada. Se $\alpha < 0$, $W_+^u(T_0)$ intercepta Σ à direita de \tilde{T}_0 e ainda temos um ciclo deslizante L_α . Para $\alpha > 0$, $W_+^u(T_0)$ intercepta Σ à esquerda de \tilde{T}_0 , dando origem à uma órbita periódica de costura que contém um segmento deslizante. Veja a Figura 7.4.

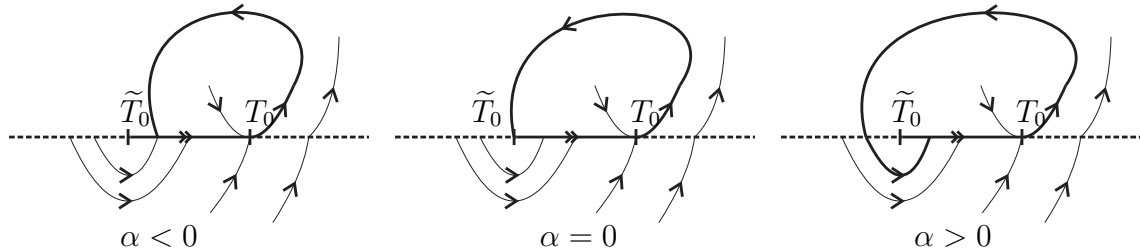


Figura 7.4: Ligação heteroclínica envolvendo T_0 e \tilde{T}_0 .

Caso 2: Considere que T_0 é dobra visível de X_0 e \tilde{T}_0 é dobra visível de Y_0 . Suponha também que \tilde{T}_0 está à direita de T_0 e que $W_+^s(\tilde{T}_0) = W_+^s(T_0)$, onde existe um ciclo deslizante L_0 .

Quando $\alpha \neq 0$, a conexão heteroclínica é quebrada. Se $\alpha < 0$, $W_+^u(T_0)$ intercepta Σ à esquerda de \tilde{T}_0 e ainda temos um ciclo L_α que contém segmento deslizante. Para $\alpha > 0$, $W_+^u(T_0)$ intercepta Σ à direita de \tilde{T}_0 , dando origem à uma órbita periódica de costura que contém um segmento deslizante. Veja a Figura 7.5.

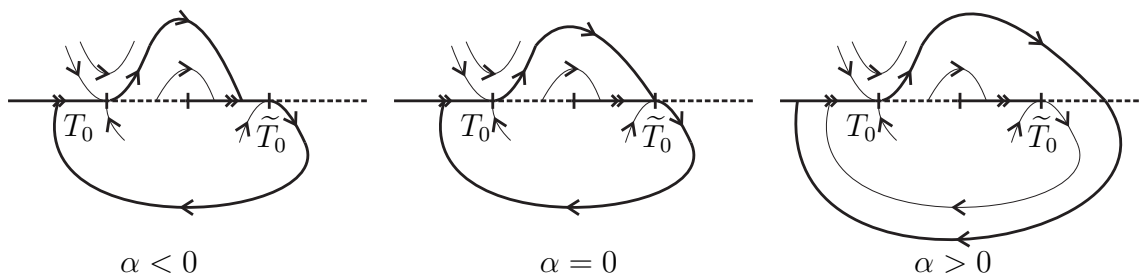


Figura 7.5: Ligação heteroclínica envolvendo T_0 e \tilde{T}_0 .

Caso 3: Suponha que T_0 e \tilde{T}_0 são dobras visíveis de X_0 e que Y_0 é transversal à Σ . Suponha também que $W_+^s(\tilde{T}_0) = W_+^s(T_0)$ e que $W_+^u(\tilde{T}_0)$ intercepte Σ à esquerda de T_0 , numa região de deslize.

Quando $\alpha \neq 0$, a conexão heteroclínica é quebrada. Se $\alpha < 0$, temos que L_α é um ciclo que contém dois segmentos deslizantes. Para $\alpha > 0$, L_α é um ciclo que contém um segmento deslizante. Veja a Figura 7.6.

Vamos analisar outra situação. Seja $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \Omega$ e sejam T_0 e \tilde{T}_0 dobras visíveis de X_0 . Suponha que entre essas duas dobras de X_0 exista uma dobra invisível de Y_0 . Seja $L = W_+^s(\tilde{T}_0) = W_+^s(T_0)$ a ligação heteroclínica entre as dobras de X_0 .

Temos dois casos para estudar. Eles se diferem pela posição relativa entre T_0 e o ponto de intersecção entre $W_+^u(\tilde{T}_0)$ e Σ . Em ambos os casos é possível notar uma espécie de anel de órbitas periódicas que contém L . Também temos que para $\alpha \neq 0$ a ligação heteroclínica é quebrada.

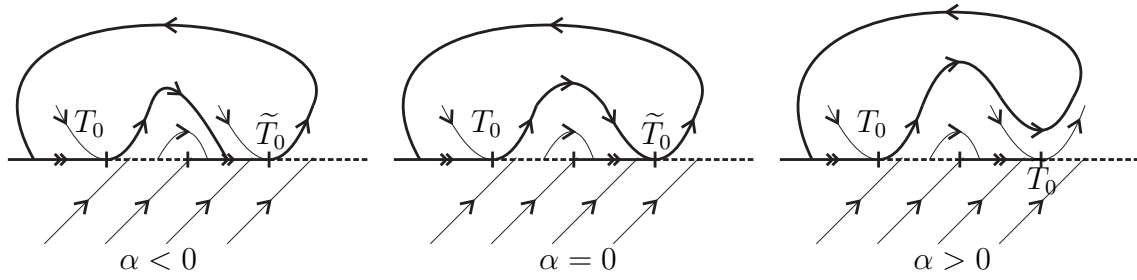


Figura 7.6: Ligação heteroclínica envolvendo T_0 e \tilde{T}_0 .

Caso 1: Suponha que $W_+^u(\tilde{T}_0)$ intercepta Σ à esquerda de T_0 . Para $\alpha < 0$, $W_+^u(T_0)$ intercepta Σ à esquerda de \tilde{T}_0 dando origem a um ciclo de costura L_α que contém segmento deslizante. Para $\alpha > 0$, não temos ciclos deslizantes. Veja a Figura 7.7.

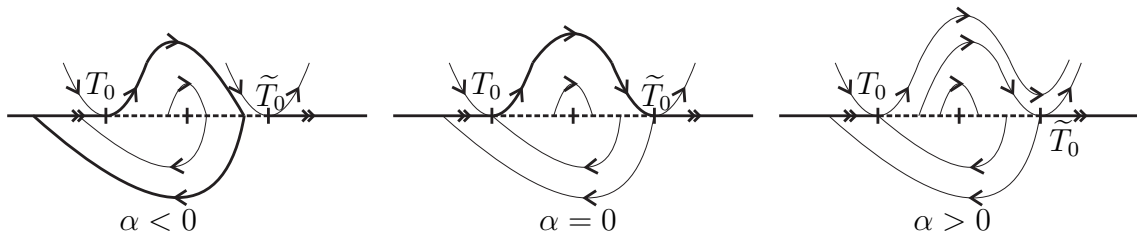


Figura 7.7: Ligação heteroclínica envolvendo T_0 e \tilde{T}_0 .

Caso 2: Considere que $W_+^u(\tilde{T}_0)$ intercepta Σ à direita de T_0 . Se $\alpha > 0$ temos o surgimento de um ciclo de costura e se $\alpha < 0$ não temos ciclos deslizantes. Veja a Figura 7.8.

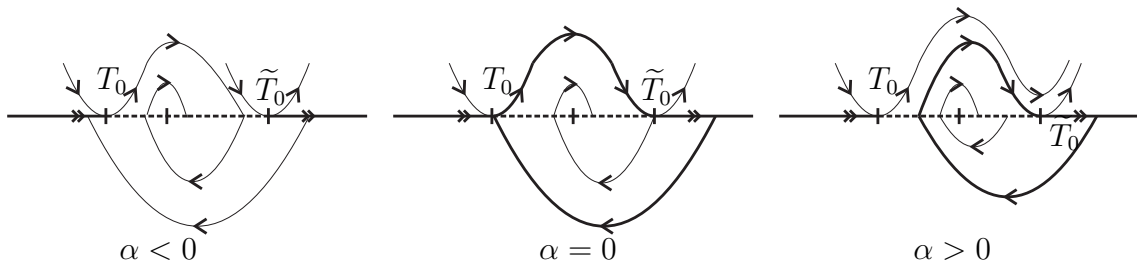


Figura 7.8: Ligação heteroclínica envolvendo T_0 e \tilde{T}_0 .

Por fim, vamos analisar um caso que não envolve conexões entre dobras. Seja $Z_0 = (X_0, Y_0)$, T_0 tangência cúbica de X_0 e suponha que Y_0 é transversal à Σ . Seja L_0 um ciclo deslizante contendo T_0 .

No interior de L_0 temos um comportamento semelhante ao estudado na Proposição 5.3.1. Para $\alpha < 0$, no interior do ciclo temos o surgimento de duas dobras e consequentemente uma região de costura. Assim, temos um ciclo deslizante com dois segmentos de deslize. Para $\alpha > 0$, não temos tangências e o ciclo L_α persiste. Veja a Figura 7.9.

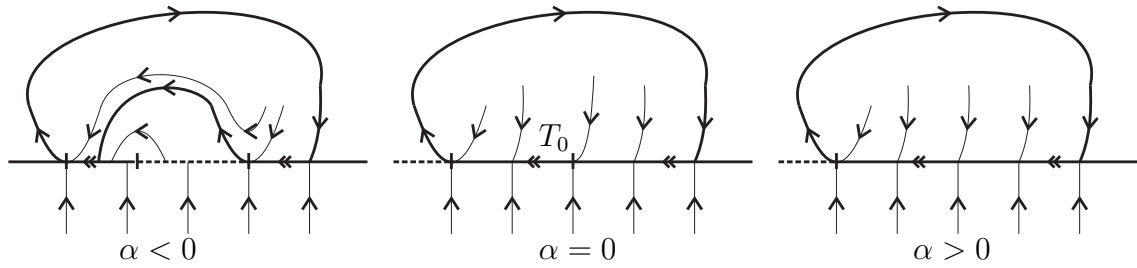


Figura 7.9: Tangência cúbica e ciclo deslizante.

7.2 Bifurcações Envolvendo Pontos Críticos de Z

Definição 7.2.1. Uma conexão **pseudo-homoclínica** é uma conexão homoclínica para um ponto de equilíbrio de Z^Σ . De forma análoga, definimos conexão **pseudo-heteroclínica**.

7.2.1 Conexões Homoclínicas

Seja P_0 uma sela-nó que possua uma conexão pseudo-homoclínica formando um ciclo deslizante. Por se tratar de uma bifurcação local, numa vizinhança de P_0 o campo Z_0 possuirá um comportamento semelhante ao apresentado na Proposição 5.2.1.

Para $\alpha < 0$, temos o surgimento de dois pontos de equilíbrio de Z_α^s , donde o ciclo é quebrado. Se $\alpha > 0$, os pontos críticos de Z_α^s desaparecem e o ciclo persiste. Veja a Figura 7.10.

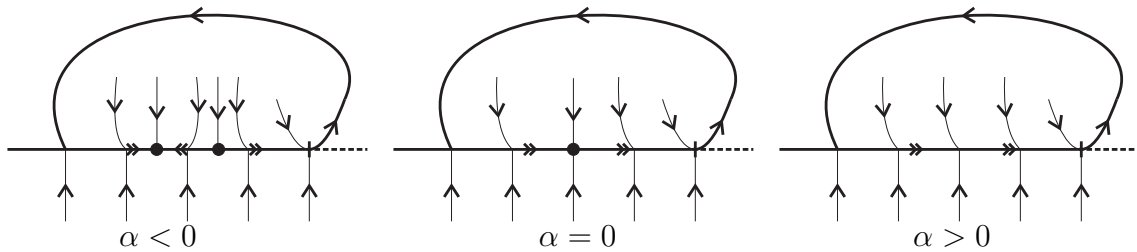


Figura 7.10: Ligação pseudo-homoclínica envolvendo uma sela-nó.

Suponha agora que P_0 é uma pseudo-sela que possua uma ligação pseudo-homoclínica, formando um ciclo L_0 . Para $\alpha \neq 0$, esta ligação é destruída. Se $\alpha < 0$, temos o desaparecimento do ciclo. Para $\alpha > 0$ o ciclo permanece, porém ele não contém a pseudo-sela. Veja a Figura 7.11.

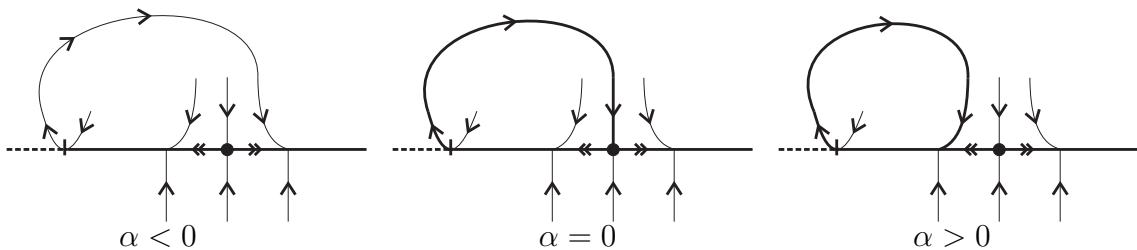


Figura 7.11: Ligação pseudo-homoclínica envolvendo uma pseudo-sela.

Seja $S_0 \in \Sigma^+$ uma sela para o campo X_0 de tal modo que $W_+^s(S_0)$ tangencia Σ no ponto T_0 e que $W_+^u(S_0)$ intersecta Σ transversalmente, formando assim uma ligação homoclínica para S_0 e um ciclo deslizante contendo S_0 e T_0 .

Para $\alpha \neq 0$, $W_+^s(S_0)$ deixa de tangenciar Σ e a ligação homoclínica é quebrada. Para $\alpha < 0$ o ciclo deslizante desaparece e para $\alpha > 0$, temos o surgimento de um ciclo na região delimitada por $W_+^s(S_0)$, $W_+^u(S_0)$ e Σ . Veja a Figura 7.12.

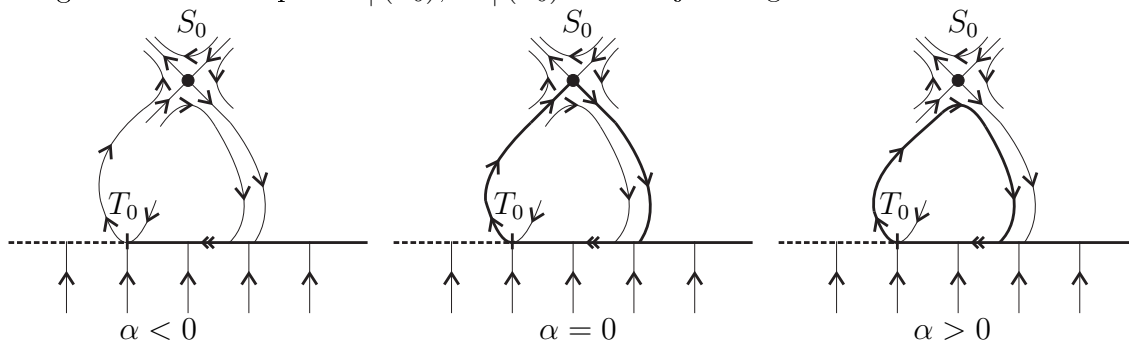


Figura 7.12: Ligação envolvendo uma dobra e uma sela do campo X_0 .

7.2.2 Conexões Heteroclínicas

Por fim, estudaremos conexões heteroclínicas. Primeiramente, considere P_0 e \tilde{P}_0 duas pseudo-selas de Z_0 e suponha que exista uma ligação pseudo-heteroclínica entre elas. Neste caso, para $\alpha = 0$ e $\alpha \neq 0$ não temos ciclos. Para $\alpha \neq 0$, entretanto, a ligação pseudo-heteroclínica é quebrada, conforme mostra a Figura 7.13.

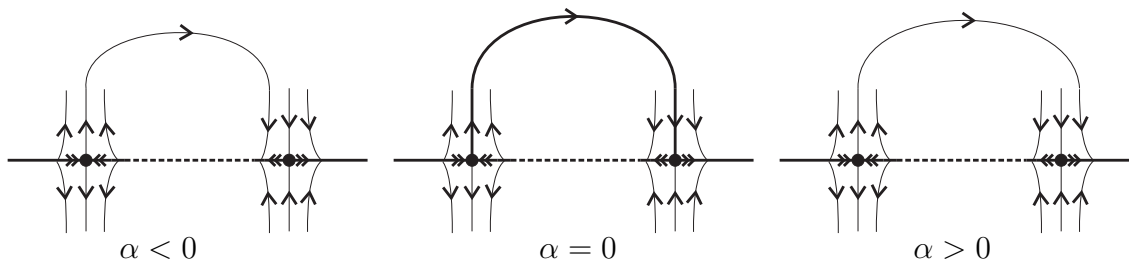


Figura 7.13: Ligação pseudo-heteroclínica envolvendo pseudo-selas.

Agora, seja P_0 uma pseudo-sela de Z_0 e $S_0 \in \Sigma^+$ uma sela de X_0 . Novamente, para $\alpha = 0$ e $\alpha \neq 0$ não temos ciclos, mas para $\alpha \neq 0$ a ligação heteroclínica é quebrada. Veja a Figura 7.14.

O último caso a ser analisado é quando temos uma ligação heteroclínica envolvendo $S_0 \in \Sigma^+$ e $\tilde{S}_0 \in \Sigma^-$ selas de X_0 e Y_0 respectivamente. Analogamente aos dois casos anteriores, não temos o surgimento de ciclos e para $\alpha \neq 0$ a ligação heteroclínica é quebrada. Veja a Figura 7.15.

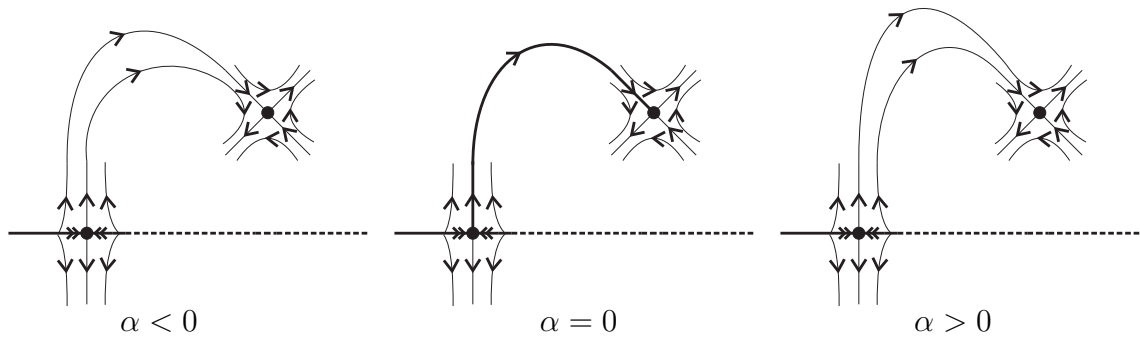


Figura 7.14: Ligação heteroclínica envolvendo uma pseudo-sela e uma sela do campo X_0 .

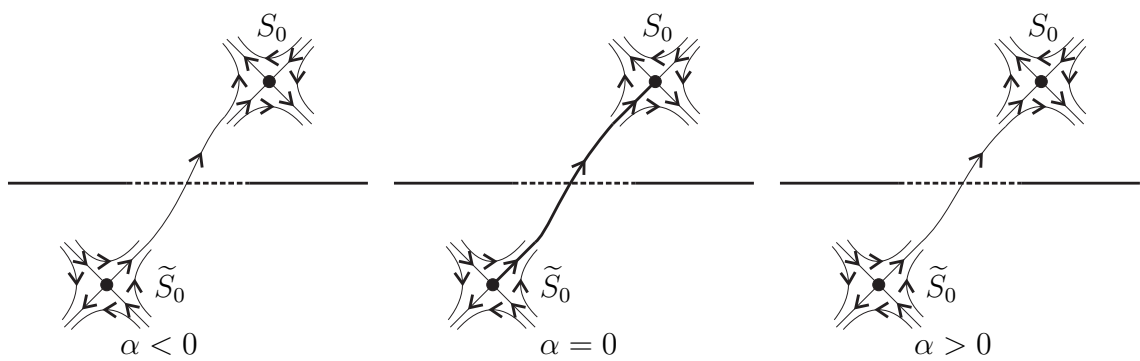


Figura 7.15: Ligação heteroclínica envolvendo selas dos campos X_0 e Y_0 .

8 Bifurcações Locais a Dois Parâmetros

Neste Capítulo iremos estudar algumas bifurcações locais que dependem de dois parâmetros, que também são analisadas em [10]. A lista de bifurcações deste tipo é extensa, portanto nos focaremos nas bifurcações que apresentam um comportamento mais interessante em seus desdobramentos, tais como bifurcações globais, surgimento de ciclos, etc.

No Capítulo 5, tivemos que impor algumas condições para que as bifurcações dependessem de apenas um parâmetro. Aqui, nós iremos violar algumas dessas condições de modo a obter bifurcações que dependam de dois parâmetros.

Vamos supor $Z = (X, Y) \in \Omega$ tal que $(0, 0) \in \Sigma$ é a singularidade. Em alguns casos devemos impor condições para que a bifurcação não seja de codimensão maior que dois.

8.1 Nó Não Diagonalizável

Seja $Z = (X, Y)$ tal que numa vizinhança de $(0, 0)$ o campo Y seja transversal à Σ e a origem seja um nó para X de forma que a matriz $DX(0, 0)$ possua apenas um autovalor λ e seja não diagonalizável. Suponhamos também que o autoespaço associado à λ seja transversal à Σ .

Ao exigir que o nó possua apenas um autovalor, estaremos violando uma das condições impostas no Capítulo 5 para que a bifurcação Nó- Σ dependa de apenas um parâmetro.

Para esta singularidade, notaremos uma característica que não está presente em nenhuma das bifurcações estudadas até aqui: Em seus desdobramentos, veremos curvas de bifurcação que dependem do fato de estarmos trabalhando com Σ -equivalência ou equivalência topológica.

Iremos estudar o caso onde $(0, 0)$ é um nó hiperbólico não-diagonalizável, possuindo apenas um autovalor negativo e um autovetor associado. Como estamos supondo Y transversal à Σ , a origem também é um ponto crítico hiperbólico de $Z^\Sigma(x, y) = (\alpha x + \mathcal{O}(x^2), 0)$. Aqui, vamos tomar $\alpha < 0$.

Uma forma canônica para este tipo de campo é

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y) &= (-x, x - y), & y \geq 0, \\ Y(x, y) &= (1, 1), & y \leq 0, \end{cases}$$

e seu desdobramento genérico é dado por

$$Z_{\varepsilon\mu}(x, y) = \begin{cases} X_{\varepsilon\mu}(x, y) &= (-x + \varepsilon y - \varepsilon\mu, x - y + \mu), & y \geq 0, \\ Y(x, y) &= (1, 1), & y \leq 0. \end{cases}$$

Veja a Figura 8.1.

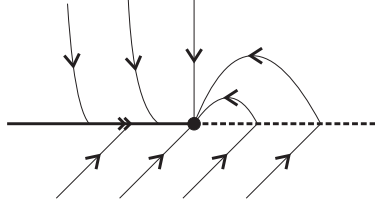


Figura 8.1: Nó não-diagonalizável para X .

O parâmetro μ controla o ponto crítico $P_\mu = (0, \mu)$ de $X_{\varepsilon\mu}$ e o parâmetro ε controla a deformação dos autovalores, que são dados por $\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{\varepsilon}$. Temos também uma dobra $F_\mu = (0, -\mu)$ do campo $X_{\varepsilon\mu}$, que é visível para $\mu > 0$ e invisível para $\mu < 0$.

O campo deslizante é dado por

$$Z_{\varepsilon\mu}^s(x, y) = \left(\frac{2x + \mu + \varepsilon\mu}{x + \mu - 1}, 0 \right),$$

cujo ponto crítico é um pseudo-nó $N_{\varepsilon\mu} = \left(-\frac{(\mu + \varepsilon\mu)}{2}, 0 \right)$ que aparece quando $\mu < 0$.

Agora, vamos analisar os desdobramentos sobre as curvas $\mu = 0$ e $\varepsilon = 0$.

Para $\mu = 0$, variando o parâmetro ε o ponto crítico P_μ se torna um foco atrator quando $\varepsilon < 0$ (dando origem ao Caso 4 com tempo invertido da Bifurcação Foco- Σ). Se $\varepsilon > 0$, temos o surgimento de um nó que possui dois autovalores (dando origem ao Caso 1 da Bifurcação Nó- Σ).

Já para $\varepsilon = 0$, variando o parâmetro μ temos que o ponto crítico pode se tornar admissível ($\mu > 0$) ou não admissível ($\mu < 0$). Veja a Figura 8.2.

Estudaremos agora possíveis bifurcações globais. Primeiro, vamos considerar Σ -equivalências. Se $\mu \cdot \mu' > 0$ e $\varepsilon \cdot \varepsilon' > 0$, é fácil ver que os campos $Z_{\varepsilon\mu}$ e $Z_{\varepsilon'\mu'}$ são Σ -equivalentes. Veja a Figura 8.3.

Agora, suponha que $\mu \cdot \mu' > 0$, $\varepsilon' > 0$ e $\varepsilon < 0$. Dessa forma, P_μ é um foco atrator para $Z_{\varepsilon\mu}$ e $P_{\mu'}$ é um nó para $Z_{\varepsilon'\mu'}$. Pelo Teorema de Grobman-Hartman, os campos $X_{\varepsilon\mu}$ e $X_{\varepsilon'\mu'}$ são equivalentes numa vizinhança dos pontos críticos. Entretanto, a proposição a seguir nos mostra que $Z_{\varepsilon'\mu'}$ e $Z_{\varepsilon\mu}$ não são Σ -equivalentes.

Proposição 8.1.1. Considere os campos $Z_{\varepsilon\mu}$ e $Z_{\varepsilon'\mu'}$, onde $\mu \cdot \mu' > 0$, $\varepsilon' > 0$ e $\varepsilon < 0$. Então os campos $Z_{\varepsilon\mu}$ e $Z_{\varepsilon'\mu'}$ não são Σ -equivalentes.

Demonstração. Suponha que μ e μ' são positivos. Dessa forma, as dobras F_μ e $F_{\mu'}$ são dobras visíveis.

Considere as separatrizes $W_+^s(F_\mu)$ e $W_+^s(F_{\mu'})$. Note que a primeira intersecta Σ^c e a segunda não. Mais ainda, este fato pode ser observado para todo ponto em Σ^s . Se existisse uma Σ -equivalência entre $Z_{\varepsilon\mu}$ e $Z_{\varepsilon'\mu'}$, ela preservaria as separatrizes, a descontinuidade Σ e também as intersecções entre as separatrizes e a descontinuidade,

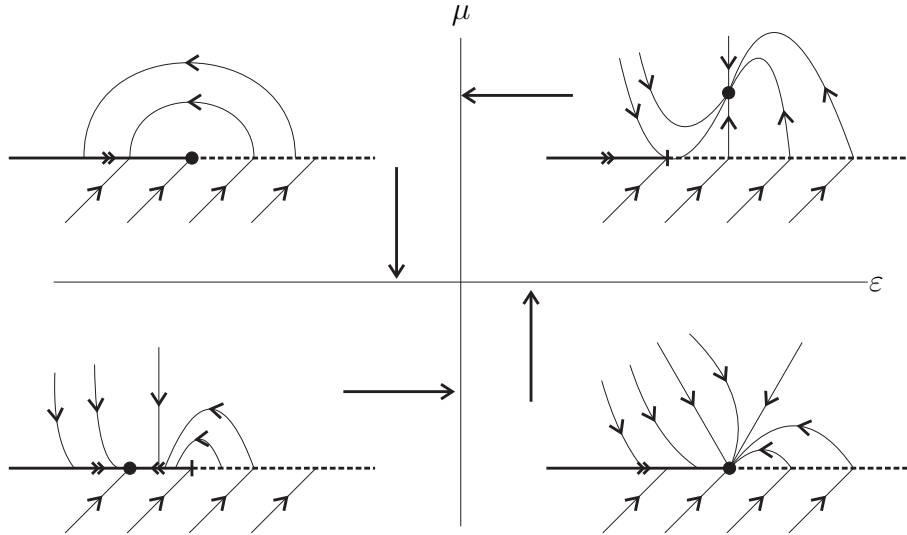


Figura 8.2: Desdobramentos do campo $Z_{\epsilon\mu}$ nas curvas $\epsilon = 0$ e $\mu = 0$.

o que é um absurdo. Logo, não existe Σ -equivalência entre esses campos quando μ e μ' são positivos.

Suponha agora μ e μ' negativos. Para $Z_{\epsilon\mu}$, todas as trajetórias em Σ^+ que intersectam Σ^s também intersectam Σ^c para algum tempo negativo. Entretanto, para $Z_{\epsilon'\mu'}$ existem trajetórias em Σ^+ que intersectam Σ^s e que continuam em Σ^+ para tempo negativo. Assim, utilizando a mesma argumentação do caso anterior, temos que $Z_{\epsilon\mu}$ e $Z_{\epsilon'\mu'}$ não são Σ -equivalentes quando μ e μ' são negativos. \square

Portanto, se trabalharmos com Σ -equivalências os desdobramentos terão quatro comportamentos genéricos distintos, dependendo dos sinais de ϵ e μ . Além disso, bifurcações que dependem de um parâmetro ocorrem sobre as curvas $\epsilon = 0$ e $\mu = 0$.

Por outro lado, se considerarmos equivalências topológicas, a proposição a seguir nos mostra que os desdobramentos apresentam apenas dois comportamentos genéricos distintos.

Proposição 8.1.2. Considere os campos $Z_{\epsilon\mu}$ e $Z_{\epsilon'\mu'}$, onde $\mu \cdot \mu' > 0$. Então os campos $Z_{\epsilon\mu}$ e $Z_{\epsilon'\mu'}$ são topologicamente equivalentes para quaisquer μ, μ', ϵ e ϵ' suficientemente pequenos.

Demonstração. Sejam os campos $Z_{\epsilon\mu}$ e $Z_{\epsilon'\mu'}$ tal que $\mu \cdot \mu' > 0$, $\epsilon' > 0$ e $\epsilon < 0$. Considere $U \subset \Sigma^+$ e $U' \subset \Sigma^+$ vizinhanças de P_μ e $P_{\mu'}$, respectivamente. Vamos construir uma equivalência topológica para $Z_{\epsilon\mu}$ e $Z_{\epsilon'\mu'}$.

Primeiramente, suponha μ e μ' positivos. Como P_μ é um foco hiperbólico e $P_{\mu'}$ é um nó hiperbólico, podemos tomar as vizinhanças U e U' de tal forma que suas respectivas fronteiras intersectam as trajetórias transversalmente (ver [19]). Além disso, pelo Teorema de Grobman-Hartman sabemos que nessas vizinhanças os campos $X_{\epsilon\mu}$ e $X_{\epsilon'\mu'}$ são equivalentes. Seja $h : U \rightarrow U'$ o homeomorfismo que nos dá essa equivalência.

As separatrizes $W_+^u(F_\mu)$ e $W_+^u(F_{\mu'})$ tendem à P_μ e $P_{\mu'}$, respectivamente. Assim, existem pontos $Q = W_+^u(F_\mu) \cap \partial U$ e $Q' = W_+^u(F_{\mu'}) \cap \partial U'$ e podemos estender o homeomorfismo h de tal forma que $h(Q) = Q'$ e consequentemente $h(W_+^u(F_\mu) \cap U) = W_+^u(F_{\mu'}) \cap U'$. A partir disso também é possível estender o homeomorfismo h para ∂U e $\partial U'$.

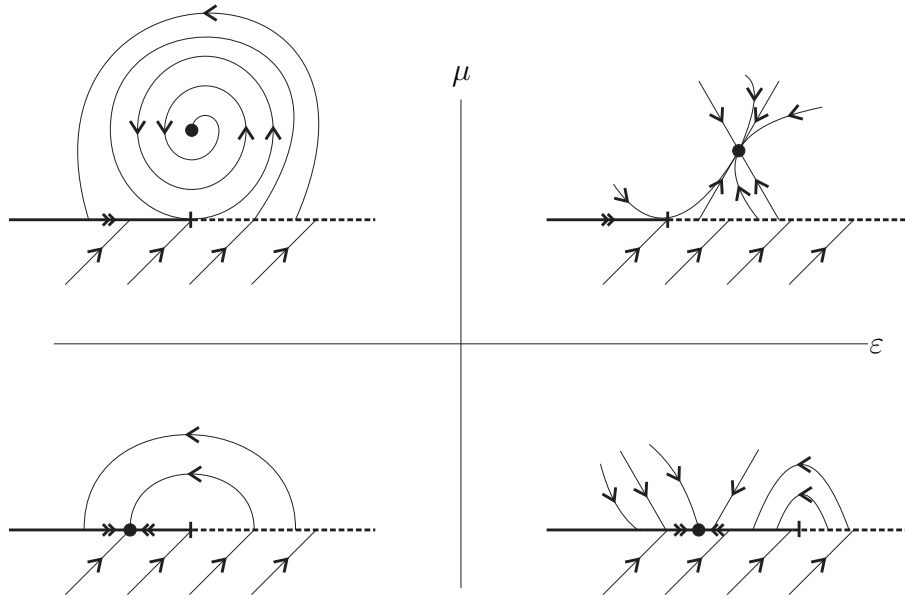


Figura 8.3: Desdobramentos do campo $Z_{\epsilon\mu}$.

Agora, defina as seguintes regiões, conforme a Figura 8.4:

- Região A : Interior da região delimitada por $W_-^s(F_\mu)$ e $W_+^s(F_\mu)$.
- Região B : Exterior da região delimitada por $W_-^s(F_\mu)$ e $W_+^s(F_\mu)$.

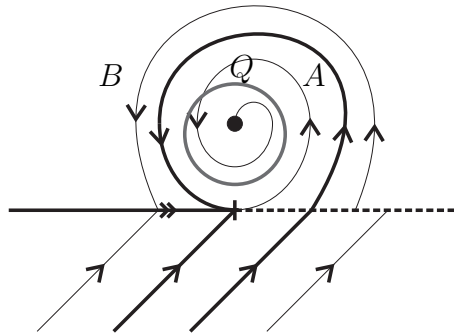


Figura 8.4: Regiões A e B .

Tomemos a vizinhança U suficientemente pequena de modo que $U \subset A$. Iremos estender o homeomorfismo h para um homeomorfismo \tilde{h} de modo a cobrir a região A . Pelo Teorema da Função Implícita, existe um tempo t_{F_μ} tal que $\varphi_{Z_{\epsilon\mu}}(t_{F_\mu}, F_\mu) = Q$. Assim, definimos

$$\tilde{h}(F_\mu) = \left(-t_{F_\mu}, h(Q) \right),$$

e portanto temos $\tilde{h}(F_\mu) = F_{\mu'}$. Como \tilde{h} é contínua, segue que $\tilde{h}(W_+^u(F_\mu)) = W_+^u(F_{\mu'})$.

Dado $p_A \in A$, existe um tempo t_{p_A} tal que $\varphi_{Z_{\epsilon\mu}}(t_{p_A}, p_A) \in \partial U$. Logo, temos

$$\tilde{h}(p_A) = \left(-t_{p_A}, h(\varphi_{Z_{\epsilon\mu}}(t_{p_A}, p_A)) \right).$$

Como estendemos o homeomorfismo à região A , pelo fato de \tilde{h} ser contínua podemos estender esta aplicação para ∂A .

Por fim, vamos estender o homeomorfismo \tilde{h} para a região B . Usando o Teorema de Grobman-Hartman, é possível definir um homeomorfismo $\tilde{h} : \overline{\Sigma^s} \rightarrow (\overline{\Sigma^s})'$ que preserva orientação e $\tilde{h}(F_\mu) = F_{\mu'}$. Além disso, dado $p_B \in B$, existe um tempo t_{p_B} tal que $\varphi_{Z_{\varepsilon\mu}}(t_{p_B}, p_B) \in \Sigma^s$. Assim, definimos

$$\tilde{h}(p_B) = \left(-t_{p_B}, \tilde{h}(\varphi_{Z_{\varepsilon\mu}}(t_{p_B}, p_B)) \right).$$

Agora, vamos supor μ e μ' negativos. Este caso é mais simples, e usaremos uma estratégia similar a que usamos no caso anterior para definir um homeomorfismo na região B .

Seja $h : \overline{\Sigma^s} \rightarrow (\overline{\Sigma^s})'$ tal que preserva orientação, $h(F_\mu) = F_{\mu'}$ e $h(N_\mu) = N_{\mu'}$. Dado $p \in \Sigma^+ \cup \Sigma^-$, existe um tempo t_s tal que $\varphi_{Z_{\varepsilon\mu}}(t_s, p) \in \Sigma^s$. Assim, definimos

$$\tilde{h}(p) = \left(-t_s, h(\varphi_{Z_{\varepsilon\mu}}(t_s, p)) \right).$$

Note que com esta construção obtemos $\tilde{h}(W_-^s(F_\mu)) = W_-^s(F_{\mu'})$, $\tilde{h}(W_-^s(N_{\varepsilon\mu})) = W_-^s(N_{\varepsilon'\mu'})$ e $\tilde{h}(W_+^s(N_{\varepsilon\mu})) = W_+^s(N_{\varepsilon'\mu'})$. \square

8.2 Singularidade Nó- Σ com $Z^\Sigma(x, y) = (\beta x^2 + \mathcal{O}(x^3), 0)$

No Capítulo 5, ao estudar bifurcações envolvendo pontos críticos hiperbólicos, sempre assumimos que em uma vizinhança da origem o campo que atua sobre Σ é dado por $Z^\Sigma(x, y) = (\alpha x + \mathcal{O}(x^2), 0)$ com $\alpha \neq 0$. Essa condição era necessária para garantirmos que a bifurcação não dependesse de mais de um parâmetro.

Nesta seção, veremos o que acontece ao supormos $Z^\Sigma(x, y) = (\beta x^2 + \mathcal{O}(x^3), 0)$, com $\beta \neq 0$. Vamos estudar o caso onde a origem é um nó hiperbólico de X , já que os outros casos (Sela e Foco) não dão origem a comportamentos tão interessantes quanto este.

Aqui, vamos tomar um campo $Z = (X, Y)$ tal que a origem é um nó atrator de X e que o campo Y é transversal à Σ . Iremos supor também que os autovalores da matriz $DX(0, 0)$ possuem módulos distintos e que os autoespaços são transversais à descontinuidade.

Considere o campo

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y) = (-3x + y + x^2, x - 3y), & y \geq 0, \\ Y(x, y) = (-3, 1), & y \leq 0. \end{cases}$$

Note que $(0, 0)$ é ponto crítico do sistema. A matriz $DX(0, 0)$ possui $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = -4$ como autovalores e seus respectivos autovetores são $v_1 = (1, 1)$ e $v_2 = (-1, 1)$.

Temos também que $Z^\Sigma(x, y) = \left(\frac{x^2}{1-x}, 0 \right) = (x^2 + \mathcal{O}(x^3), 0)$. Veja a Figura 8.5.

Um desdobramento do campo acima pode ser

$$Z_{\varepsilon\mu}(x, y) = \begin{cases} X_\mu(x, y) = (-3x + y + x^2 + \mu, x - 3y - \mu), & y \geq 0, \\ Y_\varepsilon(x, y) = (-3 - \varepsilon, 1 + \varepsilon), & y \leq 0, \end{cases}$$

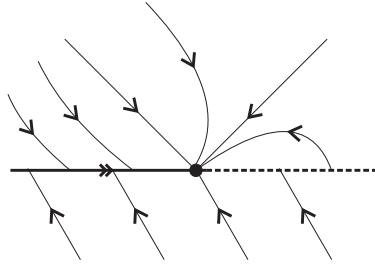


Figura 8.5: Retrato de fase de Z para a Singularidade Nó- Σ quando $Z^\Sigma(x, y) = (\beta x^2 + \mathcal{O}(x^3), 0)$.

que tangencia Σ em $T_\mu = (\mu, 0)$ e cujo nó é dado por

$$N_\mu = \left(\frac{4 - \sqrt{16 - 6\mu}}{3}, \frac{4 - 3\mu - \sqrt{16 - 6\mu}}{9} \right).$$

O campo que atua sobre a descontinuidade é dado pela expressão

$$Z_{\varepsilon\mu}^\Sigma(x, y) = \left(\frac{(1 + \varepsilon)x^2 - 2\varepsilon x - 2\mu}{1 + \varepsilon + \mu - x}, 0 \right),$$

cujos pontos críticos são

$$P_{\varepsilon\mu}^\pm = \left(\frac{\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 + 2\mu(1 + \varepsilon)}}{1 + \varepsilon}, 0 \right).$$

Vamos estudar os desdobramentos de $Z_{\varepsilon\mu}$. Sobre a curva $\varepsilon = 0$, variando μ o nó pode ser admissível ($\mu < 0$) ou não admissível ($\mu > 0$). Neste último caso, o campo $Z_{\varepsilon\mu}^\Sigma$ possui um ponto crítico atrator $(-\sqrt{2\mu}, 0)$. Sobre a curva $\mu = 0$, variando o parâmetro ε temos que N_μ pertence à Σ e quando $\varepsilon < 0$ o campo deslizante possui um ponto crítico atrator. Além disso, sobre a curva

$$\eta = \left\{ (\varepsilon, \mu) \mid \mu = -\frac{\varepsilon^2}{2(1 + \varepsilon)} \right\},$$

o campo $Z_{\varepsilon\mu}^\Sigma$ possui apenas um ponto crítico. Analisando sua derivada, vemos que sobre essa curva o ponto crítico é uma sela-nó. É fácil ver que para valores acima dessa curva o campo $Z_{\varepsilon\mu}^\Sigma$ possui dois pontos críticos e que para valores abaixo dessa curva não possui pontos críticos.

Note também que não temos bifurcações globais e assim quaisquer campos suficientemente próximos nas regiões delimitadas pelas curvas são Σ -equivalentes. Veja a Figura 8.6.

8.3 Singularidade Foco-Dobra

Seja $Z = (X, Y) \in \Omega$ tal que a origem seja um foco hiperbólico para X e uma dobra para Y . Nos desdobramentos deste campo, iremos nos deparar com algumas bifurcações globais e surgimento de ciclos.

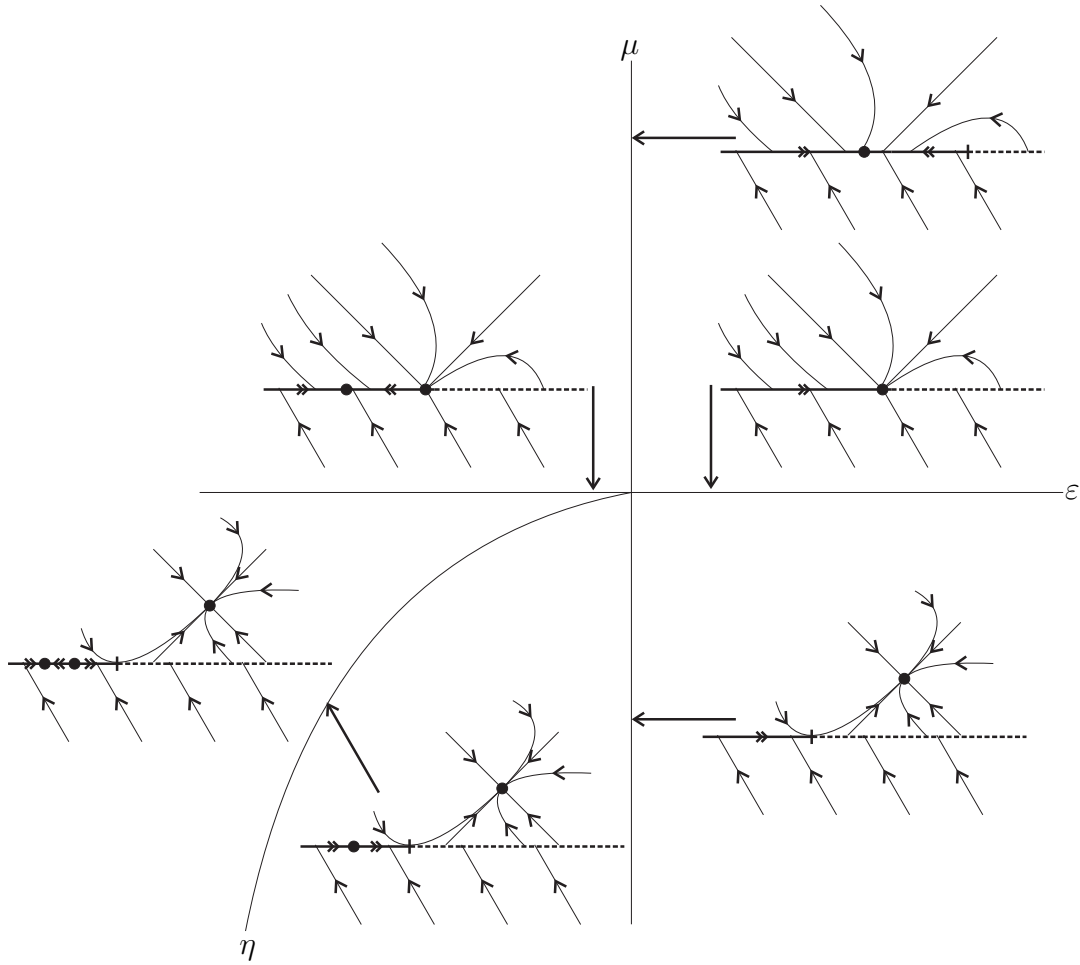


Figura 8.6: Desdobramentos do campo $Z_{\epsilon\mu}$.

O comportamento dos desdobramentos irá depender da estabilidade do foco, da visibilidade da dobra, da orientação das órbitas, etc. Aqui, analisaremos o caso onde $(0,0)$ é um foco repulsor de X e uma dobra invisível de Y , de modo que $\Sigma = \bar{\Sigma}^c$.

Uma forma canônica para este campo é

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y) = (x - y, x + y), & y \geq 0 \\ Y(x, y) = (1, x), & y \leq 0, \end{cases}$$

e seu desdobramento é dado por

$$Z_{\epsilon\mu}(x, y) = \begin{cases} X_{\mu}(x, y) = (x - y + 2\mu, x + y), & y \geq 0 \\ Y_{\epsilon}(x, y) = (1, x - \epsilon), & y \leq 0. \end{cases}$$

Veja a Figura 8.7.

Aqui, o parâmetro μ controla o foco $P_{\mu} = (-\mu, \mu)$ de X_{μ} e o parâmetro ϵ controla a dobra $T_{\epsilon} = (\epsilon, 0)$ de Y_{ϵ} . Note que os autovalores da matriz $DX_{\mu}(0,0)$ são $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$ e portanto o foco é repulsor. Além disso, $T_{\mu} = (0,0)$ sempre será uma dobra para X_{μ} .

O campo que atua sobre a descontinuidade é dado por

$$Z_{\epsilon\mu}^{\Sigma}(x, y) = \left(\frac{-x^2 + (1 + \epsilon - 2\mu)x + 2\epsilon\mu}{\epsilon}, 0 \right).$$

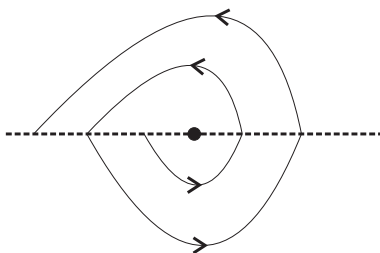


Figura 8.7: Retrato de fase do campo Z para a singularidade Foco-Dobra.

Analisando a derivada da expressão acima, vemos que o ponto crítico

$$N_{\varepsilon\mu} = \left(\frac{(1 + \varepsilon - 2\mu) - \sqrt{(1 + \varepsilon - 2\mu)^2 + 8\varepsilon\mu}}{2}, 0 \right)$$

é um pseudo-nó atrator para $\varepsilon < 0$ e repulsor para $\varepsilon > 0$. Para $\mu > 0$, o campo $Z_{\varepsilon\mu}^{\Sigma}$ não possui pontos críticos.

Vamos analisar os desdobramentos sobre a curva $\varepsilon = 0$. Variando o parâmetro μ , quando $\mu > 0$ o foco é admissível e T_{μ} é uma dobra visível de X_{μ} . Assim, temos o aparecimento de uma bifurcação Dobra-Dobra Visível-Invisível. Já para $\mu < 0$, o foco é não admissível e T_{μ} é uma dobra invisível para X_{μ} , dando origem a uma espécie de foco repulsor.

Sobre a curva $\mu = 0$, temos o surgimento de uma região de deslize quando $\varepsilon < 0$ e conseqüentemente ocorre o Caso 3 da Bifurcação Foco- Σ estudada no Capítulo 5, além do surgimento de uma órbita periódica. Quando $\varepsilon > 0$, temos o surgimento de uma região de escape e assim ocorre o Caso 4 da Bifurcação Foco- Σ . Veja a Figura 8.8.

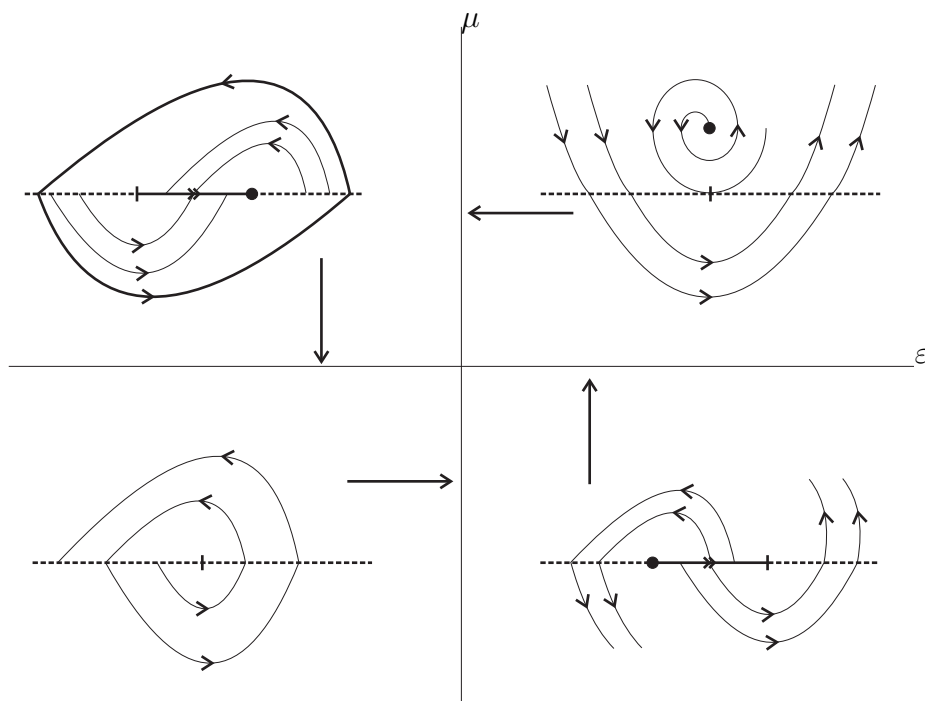


Figura 8.8: Desdobramentos do campo $Z_{\varepsilon\mu}$ nas curvas $\varepsilon = 0$ e $\mu = 0$.

Pela análise acima, podemos ver que quaisquer dois campos suficientemente próximos e que estão no primeiro, terceiro ou quarto quadrantes são Σ -equivalentes. Veja a Figura 8.9.

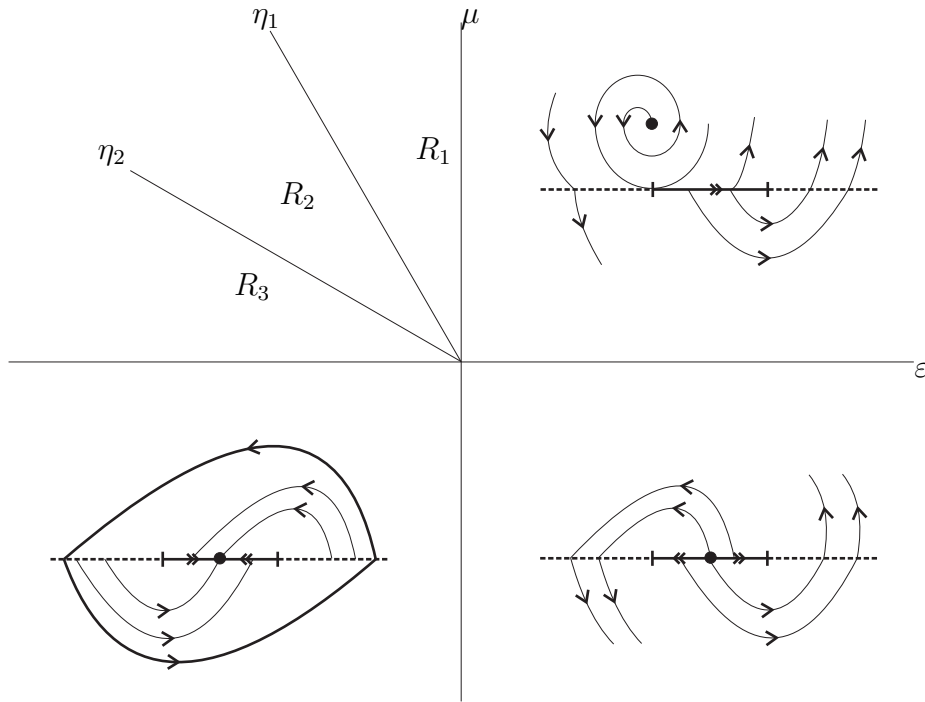


Figura 8.9: Desdobramentos do campo $Z_{\epsilon\mu}$ e regiões R_1 , R_2 e R_3 .

Entretanto, no segundo quadrante temos um comportamento mais interessante, como mostra a proposição a seguir.

Proposição 8.3.1. No segundo quadrante existem curvas η_1 e η_2 tais que ocorrem as seguintes bifurcações para o campo $Z_{\epsilon\mu}$:

- Se $(\epsilon, \mu) \in \eta_1$, então $W_+^u(T_\mu) = W_-^s(T_\mu)$.
- Se $(\epsilon, \mu) \in \eta_2$, então $W_+^u(T_\mu) = W_+^s(T_\epsilon)$.

Demonstração. Vimos que para $\mu > 0$, T_μ é dobra visível de X_μ e T_ϵ é dobra invisível de Y_ϵ . Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + 2\mu, \\ \dot{y} = x + y, \end{cases}$$

e em seguida expandindo em Taylor as soluções $x(t)$ e $y(t)$ para calcular a aplicação de primeiro retorno de X_μ , obtemos que $\phi_{X_\mu}(0) = -\frac{3}{4}\mu$. Também é fácil ver que $\phi_{Y_\epsilon}(x) = 2\epsilon - x$ e portanto $\phi_{Y_\epsilon}(0) = 2\epsilon$.

Para que $W_+^u(T_\mu) = W_-^s(T_\mu)$, precisamos resolver a equação $\phi_{X_\mu}(0) = \phi_{Y_\epsilon}(0)$, donde obtemos a curva $\eta_1 = \left\{ (\epsilon, \mu) \mid \mu = -\frac{8}{3}\epsilon \right\}$.

De forma análoga, para que $W_+^u(T_\mu) = W_+^s(T_\epsilon)$ devemos resolver a equação $\phi_{X_\mu}(0) = \epsilon$. Assim, temos $\eta_2 = \left\{ (\epsilon, \mu) \mid \mu = -\frac{4}{3}\epsilon \right\}$. \square

Dividindo o segundo quadrante em três regiões (como na Figura 8.10), observamos que tanto na região R_2 quanto na região R_3 temos a presença de um ciclo deslizante.

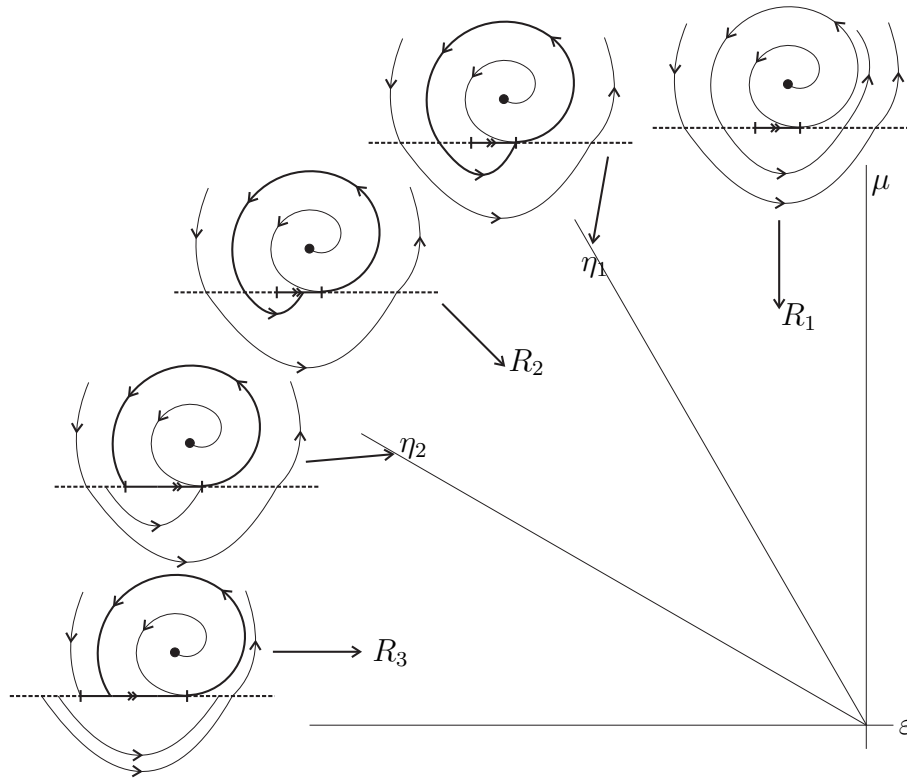


Figura 8.10: Desdobramentos do campo $Z_{\epsilon\mu}$ no segundo quadrante.

8.4 Singularidade Sela-Dobra

Seja $Z = (X, Y) \in \Omega$ tal que a origem é uma sela de X e uma dobra para Y . Para que esta bifurcação dependa de apenas dois parâmetros, devemos impor algumas condições.

Aqui, a sela deve ser um ponto crítico hiperbólico de X de modo que as variedades estáveis e instáveis não sejam tangentes à Σ . Além disso, iremos impor que os autovalores da matriz $DX(0, 0)$ possuam módulos distintos. Sem esta condição, pode ocorrer uma bifurcação dobra-dobra invisível-invisível que dependa de mais um parâmetro, o que resultaria numa bifurcação Sela-Dobra que dependa de mais de dois parâmetros.

Iremos estudar o caso onde o autovalor negativo possui maior módulo e $(0, 0)$ é uma dobra invisível de Y , de modo que $\bar{\Sigma}^c = \Sigma$. Os outros casos podem ser estudados de forma análoga.

Uma forma canônica para este caso é dada por

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y) = (-x + 3y, 3x - y), & y \geq 0, \\ Y(x, y) = (1, x), & y \leq 0; \end{cases}$$

cujo retrato de fase é dado pela Figura 8.11. Note que os autovalores da Sela são -4 e 2 .

Um desdobramento para este caso é dado por

$$Z_{\epsilon\mu}(x, y) = \begin{cases} X_{\mu}(x, y) = (-x + 3y - 4\mu, 3x - y), & y \geq 0, \\ Y_{\epsilon}(x, y) = (1, x - \epsilon), & y \leq 0. \end{cases}$$

Para este desdobramento, o parâmetro μ controla a sela $S_{\mu} = \left(\frac{\mu}{2}, \frac{3\mu}{2}\right)$. Ela é

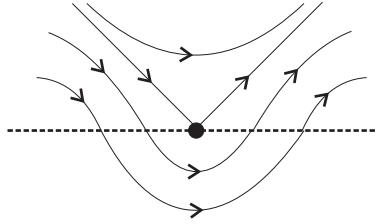


Figura 8.11: Retrato de fase do campo Z para a singularidade Sela-Dobra.

admissível para $\mu > 0$ e não admissível para $\mu < 0$. Já o parâmetro ε controla a dobra invisível $T_\varepsilon = (\varepsilon, 0)$. Note que $(0, 0)$ será uma dobra de X_μ quando $\mu \neq 0$. Para $\mu > 0$ a dobra é invisível e para $\mu < 0$ a dobra é visível.

Outro ponto importante a ser observado é que a variedade instável da sela intersecta Σ no ponto $P_1 = (-\mu, 0)$ e a variedade estável intersecta Σ no ponto $P_2 = (2\mu, 0)$.

Temos também que o campo deslizante é dado por

$$Z_{\varepsilon\mu}^s = \left(\frac{x^2 + (4\mu + 3 - \varepsilon)x - 4\varepsilon\mu}{2x + \varepsilon}, 0 \right),$$

e este campo possui um ponto crítico dado pela expressão

$$P_{\varepsilon\mu} = \left(\frac{(\varepsilon - 4\mu - 3) + \sqrt{(3 - \varepsilon + 4\mu)^2 + 16\varepsilon\mu}}{2}, 0 \right).$$

Tal ponto só é visível quando $\mu > 0$. Além disso, $P_{\varepsilon\mu}$ é atrator se $\varepsilon < 0$ e repulsor se $\varepsilon > 0$.

Agora, estudemos os desdobramentos que ocorrem sobre as retas $\varepsilon = 0$ e $\mu = 0$. Quando $\mu = 0$, variando o parâmetro ε temos o surgimento de uma região de deslize ou de escape. Quando $\varepsilon = 0$, variando o parâmetro μ a sela pode se tornar admissível ou não admissível. No primeiro caso, temos o surgimento de uma dobra invisível para X_μ e no segundo caso uma dobra visível para X_μ . Vale destacar que quando a dobra de X_μ é invisível, temos o surgimento de uma bifurcação dobra-dobra invisível-invisível, onde a origem atua como uma espécie de foco atrator.

Vamos analisar possíveis bifurcações globais nos desdobramentos. Observe que nos 3º e 4º quadrantes temos bifurcação do tipo dobra-dobra visível-invisível, logo dois campos suficientemente próximos são Σ -equivalentes. Sendo assim, veremos o que ocorre quando $\mu > 0$. Para isto, utilizaremos as aplicações de primeiro retorno dos campos X_μ e Y_ε , que são dadas por

$$\phi_{X_\mu}(x) = \frac{(3\mu - x) + \sqrt{9\mu^2 + 6\mu x - 3x^2}}{2} \text{ e } \phi_{Y_\varepsilon} = -x + 2\varepsilon.$$

Primeiramente, note que ocorre uma ligação homoclínica envolvendo S_μ quando $\phi_{Y_\varepsilon}(P_1) = P_2$. Resolvendo esta equação, vemos que tal ligação ocorre na curva $\xi = \{(\varepsilon, \mu) \mid \mu = 2\varepsilon, \varepsilon > 0\}$. Assim, podemos dividir os dois primeiros quadrantes em três regiões: R_1 (abaixo de ξ), R_2 (acima de ξ) e R_3 (no segundo quadrante). Iremos estudar o comportamento de cada região a partir das seguintes proposições.

Proposição 8.4.1. Seja $(\varepsilon, \mu) \in R_1$ suficientemente pequeno. Então existe uma família de curvas de bifurcação $\{\eta_n\}_{n \geq 1}$ passando pela origem do plano $\varepsilon\mu$ e que se acumulam na reta ξ . Nestas curvas, temos o seguinte comportamento para $k \geq 0$:

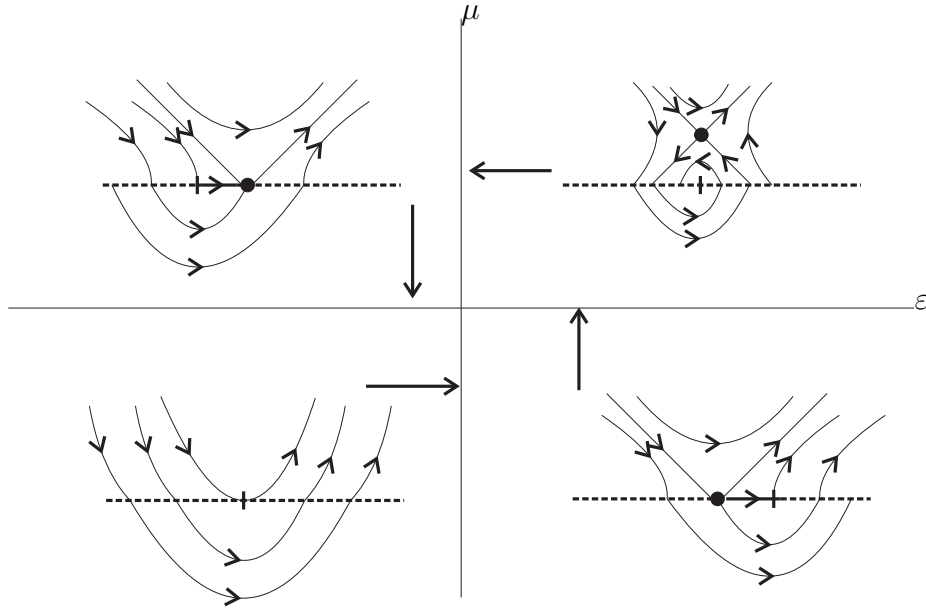


Figura 8.12: Desdobramentos do campo $Z_{\epsilon\mu}$ nas curvas $\epsilon = 0$ e $\mu = 0$.

1. $n = 4k + 1 \Rightarrow W_+^s(S_\mu) = W_+^u(T_\epsilon)$
2. $n = 4k + 2 \Rightarrow W_+^s(S_\mu) = W_-^u(P_{\epsilon\mu})$
3. $n = 4k + 3 \Rightarrow W_+^s(S_\mu) = W_-^u(T_\mu)$
4. $n = 4k + 4 \Rightarrow W_+^s(S_\mu) = W_+^u(P_{\epsilon\mu})$

Demonstração. A curva η_1 ocorre quando $P_2 = T_\epsilon$. Resolvendo esta equação, segue que

$$\eta_1 = \left\{ (\epsilon, \mu) \mid \mu = \frac{\epsilon}{2} \right\}.$$

Para encontrar a curva η_2 , basta resolver a equação $\phi_{Y_\epsilon}(P_2) = P_{\epsilon\mu}$. Isolando o parâmetro μ e expandindo em Taylor em torno da origem, obtemos

$$\eta_2 = \left\{ (\epsilon, \mu) \mid \mu = \epsilon - \frac{2\epsilon^2}{3} + \mathcal{O}(\epsilon^3) \right\}.$$

Também é possível encontrar uma trajetória ligando $T_\mu = (0, 0)$ e S_μ resolvendo a equação $\phi_{Y_\epsilon}(P_2) = T_\mu$, donde

$$\eta_3 = \{(\epsilon, \mu) \mid \mu = \epsilon\}.$$

Por fim, para encontrar uma ligação heteroclínica envolvendo S_μ e $P_{\epsilon\mu}$, basta isolarmos o parâmetro μ na equação $\phi_{X_\mu}(P_{\epsilon\mu}) = \phi_{Y_\epsilon}(P_2)$ que obtemos

$$\eta_4 = \left\{ (\epsilon, \mu) \mid \mu = \epsilon + \frac{2}{3}\epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3) \right\}.$$

Procedendo de forma análoga, encontramos a família de curvas de bifurcação $\{\eta_n\}_{n \geq 1}$. Para verificar que essa família se acumula na curva ξ , basta ver que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow \frac{\mu}{2}} \phi_{Y_\epsilon}(P_2) = \lim_{\epsilon \rightarrow \frac{\mu}{2}} (-2\mu + 2\epsilon) = -\mu.$$

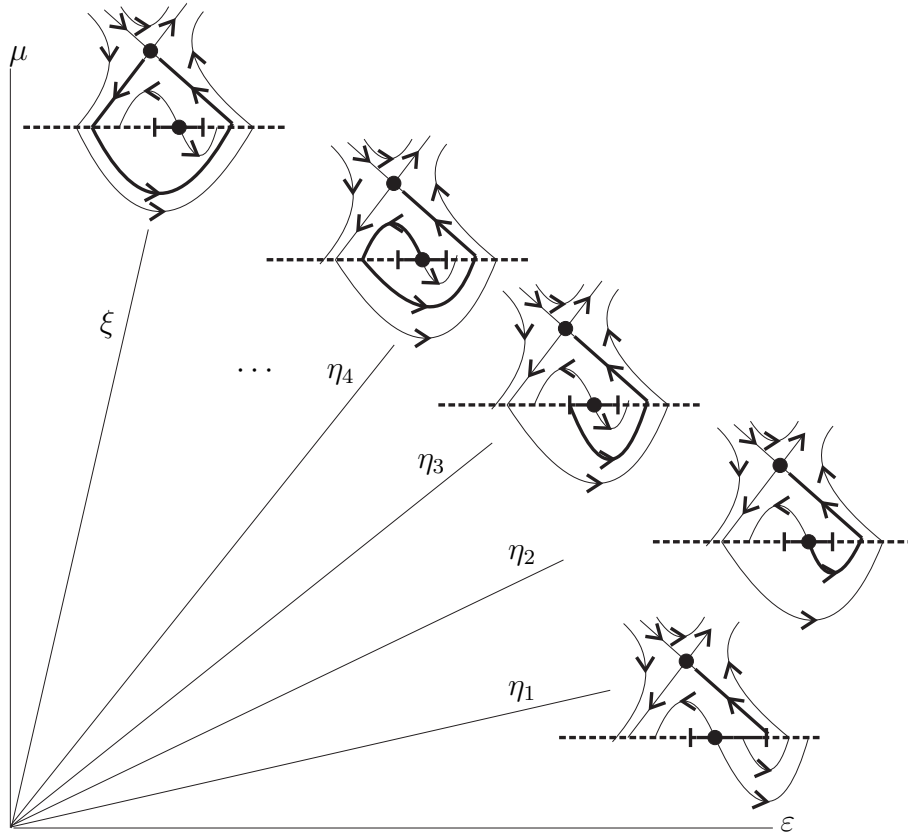


Figura 8.13: Desdobramentos do campo $Z_{\epsilon\mu}$ na região R_1 .

Note também que, se levarmos em conta as trajetórias do campo $Z_{\epsilon\mu}^s$, o ponto $P_{\epsilon\mu}$ sempre estará ligado ao ponto S_μ . Veja a Figura 8.13. □

Proposição 8.4.2. Seja $(\epsilon, \mu) \in R_3$ suficientemente pequeno. Então existe uma família de curvas de bifurcação $\{\gamma_n\}_{n \geq 1}$ passando pela origem do plano $\epsilon\mu$ e que se acumulam no eixo vertical. Nestas curvas, temos o seguinte comportamento para $k \geq 0$:

1. $n = 4k + 1 \Rightarrow W_+^u(S_\mu) = W_+^s(T_\epsilon)$
2. $n = 4k + 2 \Rightarrow W_+^u(S_\mu) = W_-^s(P_{\epsilon\mu})$
3. $n = 4k + 3 \Rightarrow W_+^u(S_\mu) = W_-^s(T_\mu)$
4. $n = 4k + 4 \Rightarrow W_+^u(S_\mu) = W_+^s(P_{\epsilon\mu})$

Demonstração. Para que $W_+^u(S_\mu) = W_+^s(T_\epsilon)$, é necessário resolver a equação $P_1 = T_\epsilon$, donde

$$\gamma_1 = \{(\epsilon, \mu) \mid \mu = -\epsilon\}.$$

Já para $W_+^u(S_\mu) = W_-^s(P_{\epsilon\mu})$, é preciso resolver $\phi_{Y_\epsilon}(P_1) = P_{\epsilon\mu}$. Isolando o parâmetro μ e expandindo em Taylor em torno da origem, obtemos

$$\gamma_2 = \left\{ (\epsilon, \mu) \mid \mu = -2\epsilon - \frac{8\epsilon^2}{3} + \mathcal{O}(\epsilon^3) \right\}.$$

Calculando $\phi_{Y_\varepsilon}(P_1) = T_\mu$, é possível ver que $W_+^u(S_\mu) = W_-^s(T_\mu)$ ocorre na curva

$$\gamma_3 = \{(\varepsilon, \mu) \mid \mu = -2\varepsilon\}.$$

Por fim, para que $W_+^u(S_\mu) = W_+^s(P_{\varepsilon\mu})$ basta resolvermos $\phi_{Y_\varepsilon}(P_1) = \phi_{X_\mu}(P_{\varepsilon\mu})$. Expandindo a solução em Taylor em torno da origem, temos

$$\gamma_4 = \left\{(\varepsilon, \mu) \mid \mu = -2\varepsilon + \frac{8\varepsilon^2}{3} + \mathcal{O}(\varepsilon^3)\right\}.$$

Procedendo de forma análoga, encontramos uma família de curvas de bifurcação $\{\gamma_n\}_{n \geq 1}$. Para verificar que elas se acumulam no eixo μ , basta ver que quando $\varepsilon \rightarrow 0$ temos $T_\mu = T_\varepsilon$. Veja a Figura 8.14.

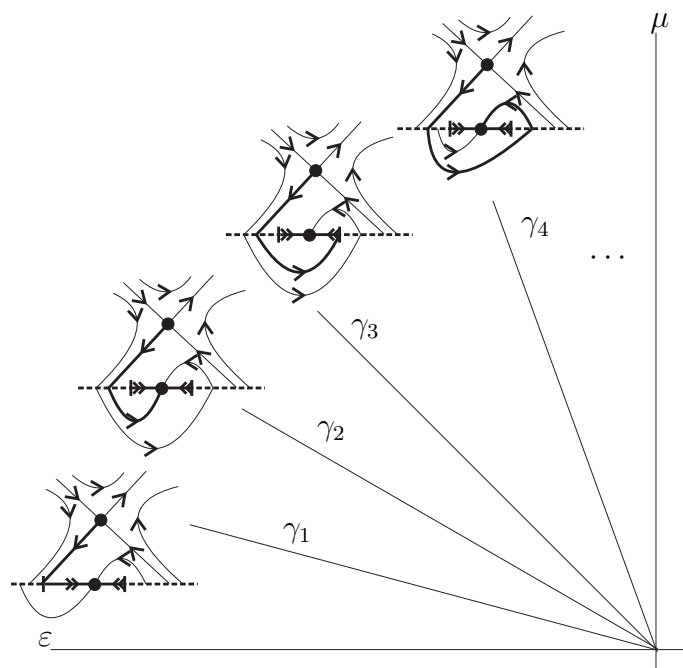


Figura 8.14: Desdobramentos do campo $Z_{\varepsilon\mu}$ na região R_3 .

□

Proposição 8.4.3. Seja $(\varepsilon, \mu) \in R_2$ suficientemente pequeno. Então existe uma órbita periódica passando pelos pontos $x_1 = (\varepsilon - \sqrt{3\varepsilon(2\mu - \varepsilon)}, 0)$ e $x_2 = (\varepsilon + \sqrt{3\varepsilon(2\mu - \varepsilon)}, 0)$.

Demonstração. Basta resolvermos a equação

$$\phi_{X_\mu} \circ \phi_{Y_\varepsilon}(x) = x.$$

Observe que quando $\varepsilon \rightarrow \frac{\mu}{2}$ (isto é, quando os parâmetros se aproximam da curva ξ), temos que $x_1 = (-\mu, 0)$ e $x_2 = (2\mu, 0)$. Isso quer dizer que o ciclo cresce até se tornar uma ligação homoclínica envolvendo S_μ . Por outro lado, quando $\varepsilon \rightarrow 0$ (quando os parâmetros se aproximam do eixo μ), o ciclo vai diminuindo seu tamanho até desaparecer quando $\varepsilon = 0$. Veja a Figura 8.15. □

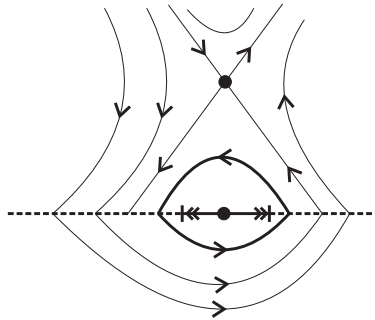


Figura 8.15: Desdobramento do campo $Z_{\epsilon\mu}$ na região R_2 .

8.5 Singularidade Cúspide-Dobra

Seja $Z = (X, Y)$ tal que a origem é uma tangência cúbica para X e uma dobra para Y . Assim como nos casos anteriores, ao perturbar este tipo de campo podemos obter bifurcações globais.

É claro que podemos ter diferentes comportamentos a depender da visibilidade da dobra e da orientação das órbitas. Aqui, vamos estudar o caso onde $(0, 0)$ é dobra invisível de Y e $X^3 f(0, 0) < 0$. Os outros casos podem ser estudados de forma análoga.

Uma forma canônica para este tipo de campo é dada por

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y) = (-1, -x^2), & y \geq 0, \\ Y(x, y) = (1, x), & y \leq 0. \end{cases}$$

Aqui, temos uma região de deslize para $x > 0$ e uma região de costura para $x < 0$. Note que $Z^s(x, y) = \left(\frac{x-1}{x+1}, 0\right)$. Veja a Figura 8.16.

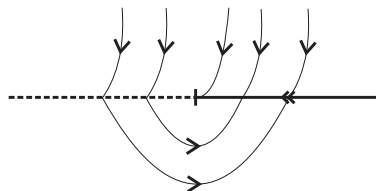


Figura 8.16: Retrato de fase do campo Z para a singularidade Cúspide-Dobra.

Um desdobramento deste campo pode ser dado por

$$Z_{\epsilon\mu}(x, y) = \begin{cases} X_{\epsilon}(x, y) = (-1, -x^2 + \epsilon), & y \geq 0, \\ Y_{\mu}(x, y) = (1, x - \mu), & y \leq 0, \end{cases}$$

onde o parâmetro ϵ nos dá o desdobramento da cúspide, como visto no Capítulo 5. Para $\epsilon > 0$, temos o surgimento de duas dobras $T_{\epsilon} = (-\sqrt{\epsilon}, 0)$ e $\tilde{T}_{\epsilon} = (\sqrt{\epsilon}, 0)$. Note que T_{ϵ} é invisível e \tilde{T}_{ϵ} é visível. Já para $\epsilon < 0$ não temos tangências para X_{ϵ} . Por fim, o parâmetro μ movimentava a dobra $T_{\mu} = (\mu, 0)$ de Y_{μ} ao longo da descontinuidade.

Observe que $T_{\mu} = \tilde{T}_{\epsilon}$ na curva $\xi_1 = \{(\epsilon, \mu) \mid \mu = \sqrt{\epsilon}\}$ e $T_{\mu} = T_{\epsilon}$ na curva $\xi_2 = \{(\epsilon, \mu) \mid \mu = -\sqrt{\epsilon}\}$. Assim, podemos definir as seguintes regiões no plano $\epsilon\mu$, conforme mostra a Figura 8.17:

- $R_1 = \{(\varepsilon, \mu) \mid \varepsilon < 0\}$.
- $R_2 = \{(\varepsilon, \mu) \mid \varepsilon > 0 \text{ e } \mu > \sqrt{\varepsilon}\}$.
- $R_3 = \{(\varepsilon, \mu) \mid \varepsilon > 0 \text{ e } -\sqrt{\varepsilon} < \mu < \sqrt{\varepsilon}\}$.
- $R_4 = \{(\varepsilon, \mu) \mid \varepsilon > 0 \text{ e } \mu < -\sqrt{\varepsilon}\}$.

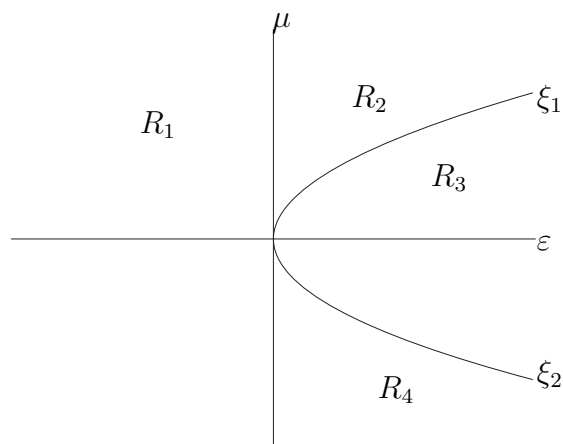


Figura 8.17: Curvas ξ_1 e ξ_2 e regiões do plano $\varepsilon\mu$.

A proposição a seguir nos diz o que ocorre em Σ quando variamos os parâmetros ε e μ .

Proposição 8.5.1. Para ε e μ suficientemente pequenos, o campo $Z_{\varepsilon\mu}$ possui as seguintes propriedades:

1. Para $\varepsilon < 0$, temos apenas uma dobra invisível $T_\mu = (\mu, 0)$. Para $\varepsilon > 0$, temos três dobras $T_\mu = (\mu, 0)$, $T_\varepsilon = (-\sqrt{\varepsilon}, 0)$ e $\tilde{T}_\varepsilon = (\sqrt{\varepsilon}, 0)$, onde as duas primeiras são invisíveis e a terceira é visível.
2.
 - Em R_1 não existe Σ^e e $\Sigma^s = \{x \in \Sigma \mid x > \mu\}$.
 - Em R_2 temos $\Sigma^e = \{x \in \Sigma \mid -\sqrt{\varepsilon} < x < \sqrt{\varepsilon}\}$ e $\Sigma^s = \{x \in \Sigma \mid x > \mu\}$.
 - Em R_3 temos $\Sigma^e = \{x \in \Sigma \mid -\sqrt{\varepsilon} < x < \mu\}$ e $\Sigma^s = \{x \in \Sigma \mid x > \sqrt{\varepsilon}\}$.
 - Em R_4 não existe Σ^e e $\Sigma^s = \{x \in \Sigma \mid x > \sqrt{\varepsilon}\} \cup \{x \in \Sigma \mid \mu < x < -\sqrt{\varepsilon}\}$.
3. O campo que atua sobre Σ é dado por

$$Z_{\varepsilon\mu}^\Sigma(x, y) = \left(\frac{x^2 - x + (\mu - \varepsilon)}{x^2 + x - (\mu + \varepsilon)}, 0 \right),$$

cujos pontos críticos são dados por

$$P_{\varepsilon\mu} = \left(\frac{1 - \sqrt{1 + 4(\varepsilon - \mu)}}{2}, 0 \right).$$

4. Em R_3 , $P_{\varepsilon\mu} \in \Sigma^e$ é repulsor. Nas outras três regiões o ponto $P_{\varepsilon\mu} \in \Sigma^s$ é atrator.

5. As tangências e os pontos críticos estão dispostos da seguinte forma em Σ :

- R_1 : $T_\mu < P_{\varepsilon\mu}$.
- R_2 : $T_\varepsilon < \tilde{T}_\varepsilon < T_\mu < P_{\varepsilon\mu}$.
- R_3 : $T_\varepsilon < P_{\varepsilon\mu} < T_\mu < \tilde{T}_\varepsilon$.
- R_4 : $T_\mu < P_{\varepsilon\mu} < T_\varepsilon < \tilde{T}_\varepsilon$.

A proposição acima pode ser demonstrada facilmente, bastando fazer cálculos similares aos que fizemos em casos anteriores.

Vamos descrever o comportamento do campo $Z_{\varepsilon\mu}$ sobre as curvas $\mu = 0$, $\varepsilon = 0$, ξ_1 e ξ_2 .

Quando $\mu = 0$ e variamos o parâmetro ε , temos a destruição da cúspide. Podemos ter o desaparecimento de tangências ($\varepsilon < 0$) ou o aparecimento de duas dobras ($\varepsilon > 0$). Se $\varepsilon = 0$, variando o parâmetro μ fazemos a dobra T_μ percorrer Σ , de modo a obter uma região de deslize.

Para a curva ξ_1 , temos $T_\mu = \tilde{T}_\varepsilon$ dando origem a uma bifurcação do tipo dobra-dobra visível-invisível. Aqui, temos o surgimento de infinitos ciclos deslizantes, como mostra a Figura 8.18 à esquerda. Temos também a existência de um ciclo deslizante $\Gamma_{\varepsilon\mu}$, que é formado por $W_+^u(T_\mu)$ e um segmento de deslize, como mostra a Figura 8.18 à direita. Este ciclo persiste para parâmetros abaixo da curva ξ_1 . Para parâmetros acima de ξ_1 , todos os ciclos são desfeitos.

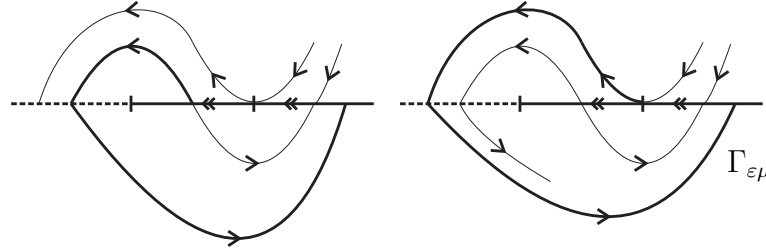


Figura 8.18: Ciclos deslizantes sobre a curva ξ_1 .

Já para a curva ξ_2 , temos $T_\mu = T_\varepsilon$ dando origem a uma bifurcação do tipo dobra-dobra invisível-invisível. Note que as aplicações de primeiro retorno dos campos X_ε e Y_μ são dadas por

$$\phi_{X_\varepsilon}(x) = \frac{-x - \sqrt{12\varepsilon - 3x^2}}{2} \text{ e } \phi_{Y_\mu} = -x + 2\mu.$$

Expandindo ϕ_{X_ε} em Taylor em torno de $x = -\sqrt{\varepsilon}$, obtemos

$$\phi_{X_\varepsilon}(x) = -\sqrt{\varepsilon} - (x + \sqrt{\varepsilon}) + \frac{1}{3\sqrt{\varepsilon}}(x + \sqrt{\varepsilon})^2 + \mathcal{O}\left((x + \sqrt{\varepsilon})^3\right),$$

donde

$$\phi_{Z_{\varepsilon\mu}}(x) = \phi_{X_\varepsilon} \circ \phi_{Y_\mu}(x) = -\sqrt{\varepsilon} + (x + \sqrt{\varepsilon}) + \frac{1}{3\sqrt{\varepsilon}}(x + \sqrt{\varepsilon})^2 + \mathcal{O}\left((x + \sqrt{\varepsilon})^3\right),$$

com $\mu = \sqrt{\varepsilon}$. Logo T_ε atua como uma espécie de foco atrator pois estamos tomando $x < -\sqrt{\varepsilon}$ e nesta vizinhança a aplicação de primeiro retorno é crescente. Veja a Figura 8.19.

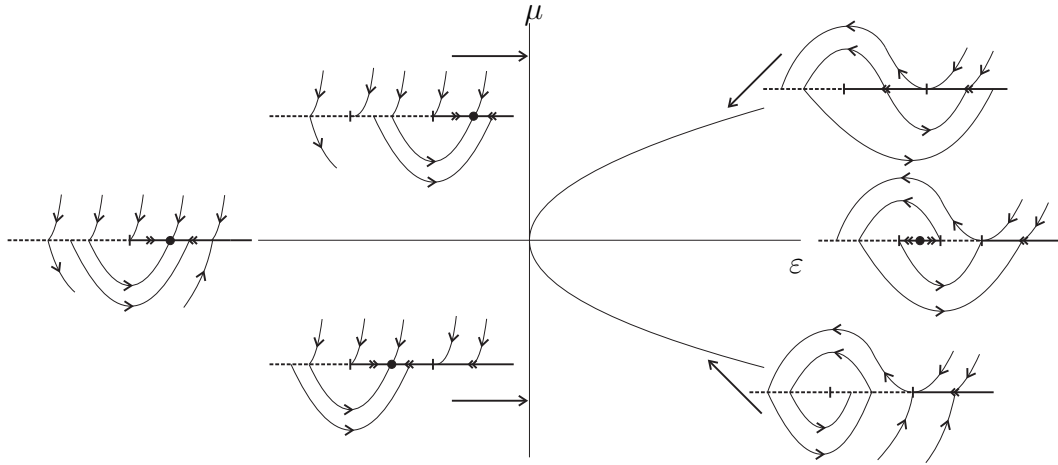


Figura 8.19: Desdobramentos do campo $Z_{\epsilon\mu}$ sobre as curvas $\epsilon = 0$, $\mu = 0$, ξ_1 e ξ_2 .

Agora, vamos analisar as regiões R_i , $i = 1, \dots, 4$ com o intuito de encontrar possíveis bifurcações globais.

Começemos pela região R_1 . Aqui, temos apenas uma dobra T_μ , de tal forma que o campo X_ϵ é transversal à Σ e temos a presença de um pseudo-nó $P_{\epsilon\mu} \in \Sigma^s$. Desta forma, quaisquer campos suficientemente próximos em R_1 são Σ -equivalentes.

Analisemos agora a região R_4 . Aqui, teremos uma família de curvas de bifurcação que se acumulam em ξ_2 , como mostra a Proposição a seguir.

Proposição 8.5.2. Seja $(\epsilon, \mu) \in R_4$ com ϵ e μ suficientemente pequenos. Então existe uma família de curvas de bifurcação $\{\eta_n\}_{n \geq 1}$ passando pela origem do plano $\epsilon\mu$ e que se acumulam em ξ_2 . Além disso, as curvas possuem as seguintes propriedades para $k \geq 0$:

- Se $n = 4k + 1$, então $W_+^u(\tilde{T}_\epsilon) = W_+^s(P_{\epsilon\mu})$.
- Se $n = 4k + 2$, então $W_+^u(\tilde{T}_\epsilon) = W_+^s(T_\mu)$.
- Se $n = 4k + 3$, então $W_+^u(\tilde{T}_\epsilon) = W_-^s(P_{\epsilon\mu})$.
- Se $n = 4k + 4$, então $W_+^u(\tilde{T}_\epsilon) = W_-^s(T_\epsilon)$.

Demonstração. Primeiramente, lembre-se que nesta região as tangências e os pontos críticos estão dispostos na seguinte ordem: $T_\mu < P_{\epsilon\mu} < T_\epsilon < \tilde{T}_\epsilon$.

Para que $W_+^u(\tilde{T}_\epsilon) = W_+^s(P_{\epsilon\mu})$, basta resolvermos a equação $\phi_{X_\epsilon}(\tilde{T}_\epsilon) = P_{\epsilon\mu}$ em relação à μ , donde obtemos a curva

$$\eta_1 = \{(\epsilon, \mu) \mid \mu = -2\sqrt{\epsilon} - 3\epsilon\}.$$

De forma análoga, resolvendo $\phi_{X_\epsilon}(\tilde{T}_\epsilon) = T_\mu$ encontramos a curva

$$\eta_2 = \{(\epsilon, \mu) \mid \mu = -2\sqrt{\epsilon}\},$$

que é onde ocorre $W_+^u(\tilde{T}_\epsilon) = W_+^s(T_\epsilon)$.

A partir daqui, note que $\phi_{X_\varepsilon}(\tilde{T}_\varepsilon) \in \Sigma^c$. Sendo assim, também devemos analisar as trajetórias de Y_μ . Para que $W_+^u(\tilde{T}_\varepsilon) = W_-^s(P_{\varepsilon\mu})$, resolvemos a equação $\phi_{Y_\mu} \circ \phi_{X_\varepsilon}(\tilde{T}_\varepsilon) = P_{\varepsilon\mu}$, donde obtemos

$$\mu = \frac{(1 - 8\sqrt{\varepsilon}) - \sqrt{1 + 16\sqrt{\varepsilon} + 16\varepsilon}}{8}.$$

Expandindo a curva acima em Taylor em torno da origem, obtemos

$$\eta_3 = \{(\varepsilon, \mu) \mid \mu = -2\sqrt{\varepsilon} + 3\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{3}{2}})\}.$$

Por fim, resolvendo $\phi_{Y_\mu} \circ \phi_{X_\varepsilon}(\tilde{T}_\varepsilon) = T_\varepsilon$, obtemos

$$\eta_4 = \left\{(\varepsilon, \mu) \mid \mu = -\frac{3}{2}\sqrt{\varepsilon}\right\},$$

que é onde ocorre $W_+^u(\tilde{T}_\varepsilon) = W_-^s(T_\varepsilon)$.

Prosseguindo de forma análoga, obtemos a família $\{\eta_n\}_{n \geq 1}$. Note que essas curvas se acumulam em ξ_2 . Veja a Figura 8.20. \square

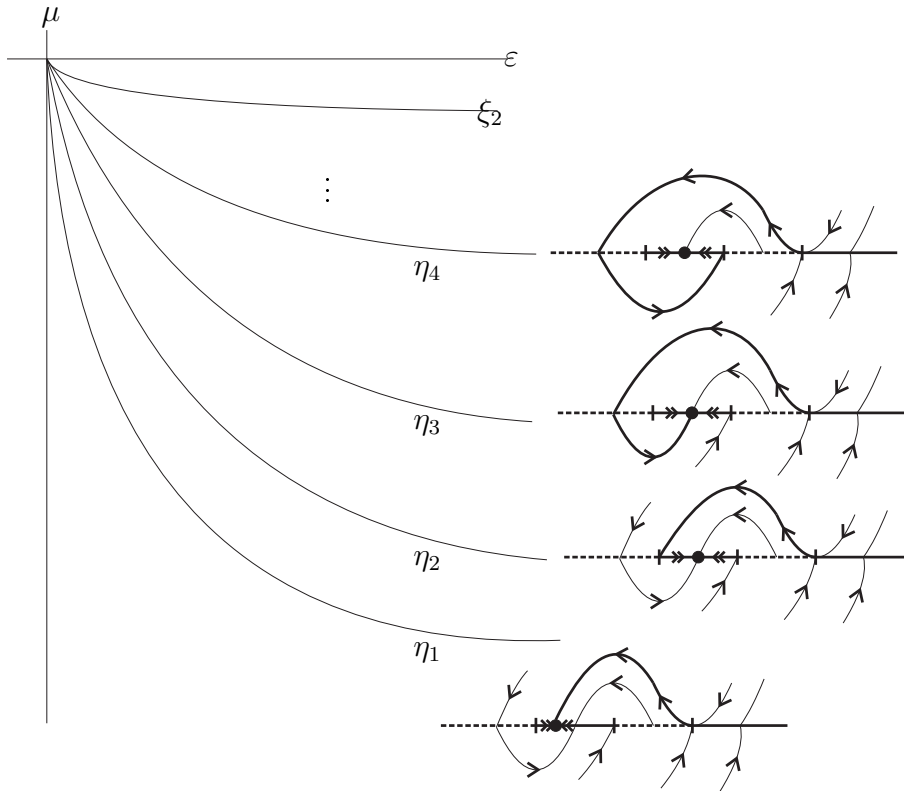


Figura 8.20: Desdobramentos do campo $Z_{\varepsilon\mu}$ na região R_4 .

Finalmente, iremos analisar a região R_3 . Lembre-se que aqui as tangências e pontos críticos estão dispostos da seguinte forma em Σ : $T_\varepsilon < P_{\varepsilon\mu} < T_\mu < \tilde{T}_\varepsilon$.

Proposição 8.5.3. Seja $(\varepsilon, \mu) \in R_3$ com ε e μ suficientemente pequenos. Então:

1. Existe uma curva ν_∞ passando pela origem onde ocorre $W_+^u(\tilde{T}_\varepsilon) = W_-^s(\tilde{T}_\varepsilon)$.

2. Existe uma família de curvas de bifurcação $\{\nu_n\}_{n \geq 1}$ passando pela origem do plano $\varepsilon\mu$ e que se acumulam em ν_∞ . Além disso, as curvas possuem as seguintes propriedades para $k \geq 0$:

- Se $n = 4k + 1$, então $W_-^s(\tilde{T}_\varepsilon) = W_-^u(P_{\varepsilon\mu})$.
- Se $n = 4k + 2$, então $W_-^s(\tilde{T}_\varepsilon) = W_-^u(T_\varepsilon)$.
- Se $n = 4k + 3$, então $W_-^s(\tilde{T}_\varepsilon) = W_+^u(P_{\varepsilon\mu})$.
- Se $n = 4k + 4$, então $W_-^s(\tilde{T}_\varepsilon) = W_+^u(T_\mu)$.

Demonstração. Recorde que sobre a curva ξ_2 temos $T_\varepsilon = T_\mu$, dando origem a uma bifurcação do tipo dobra-dobra invisível-invisível que atua como uma espécie de foco atrator.

1. Resolvendo a equação $\phi_{Y_\mu} \circ \phi_{X_\varepsilon}(x) = x$, concluímos que existe um ciclo $\Gamma_{\varepsilon\mu}$ passando pelos pontos $x_\pm = (\mu \pm \sqrt{3(\varepsilon - \mu^2)}, 0)$. Temos também que os pontos estão dispostos da seguinte forma em Σ : $x_- < T_\varepsilon < P_{\varepsilon\mu} < T_\mu < x_+$.

Conforme tomamos valores acima de ξ_2 , a órbita periódica cresce até o ponto x_+ coincidir com \tilde{T}_ε . Isso acontece na curva

$$\nu_\infty = \left\{ (\varepsilon, \mu) \mid \mu = -\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \right\},$$

de modo que $W_+^u(\tilde{T}_\varepsilon) = W_-^s(\tilde{T}_\varepsilon)$. Para parâmetros acima de ν_∞ o ciclo é quebrado.

2. Agora, vamos determinar a família de curvas. Para que tenhamos $W_-^s(\tilde{T}_\varepsilon) = W_-^u(P_{\varepsilon\mu})$, primeiramente expandimos em Taylor em torno da origem a expressão do ponto $P_{\varepsilon\mu}$ e em seguida resolvemos a equação $\phi_{Y_\mu}(P_{\varepsilon\mu}) = \tilde{T}_\varepsilon$. Depois, expandimos em Taylor em torno da origem a solução obtida e encontramos

$$\nu_1 = \left\{ (\varepsilon, \mu) \mid \mu = \sqrt{\varepsilon} - 2\varepsilon^{\frac{3}{2}} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right\}.$$

Já para encontrar ν_2 , resolvemos $\phi_{Y_\mu}(T_\varepsilon) = \tilde{T}_\varepsilon$ em relação à μ e assim

$$\nu_2 = \{(\varepsilon, \mu) \mid \mu = 0, \varepsilon > 0\},$$

donde obtemos $W_-^s(\tilde{T}_\varepsilon) = W_-^u(T_\varepsilon)$.

Para que aconteça $W_-^s(\tilde{T}_\varepsilon) = W_+^u(P_{\varepsilon\mu})$, resolvemos a equação $\phi_{Y_\mu} \circ \phi_{X_\varepsilon}(P_{\varepsilon\mu}) = \tilde{T}_\varepsilon$ para μ e em seguida expandimos a solução em Taylor em torno da origem, obtendo

$$\nu_3 = \left\{ (\varepsilon, \mu) \mid \mu = -\frac{2}{7}\sqrt{\varepsilon} + \frac{75}{343}\varepsilon + \mathcal{O}\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\right) \right\}.$$

Por fim, resolvemos $\phi_{Y_\mu} \circ \phi_{X_\varepsilon}(T_\mu) = \tilde{T}_\varepsilon$ e assim temos

$$\nu_4 = \left\{ (\varepsilon, \mu) \mid \mu = -\frac{2}{7}\sqrt{\varepsilon} \right\},$$

que é a curva de bifurcação onde ocorre $W_-^s(\tilde{T}_\varepsilon) = W_+^u(T_\mu)$.

Procedendo de forma análoga, obtemos a família $\{\nu_n\}_{n \geq 1}$. Note que estas curvas se acumulam em ν_∞ . Veja a Figura 8.21.

□

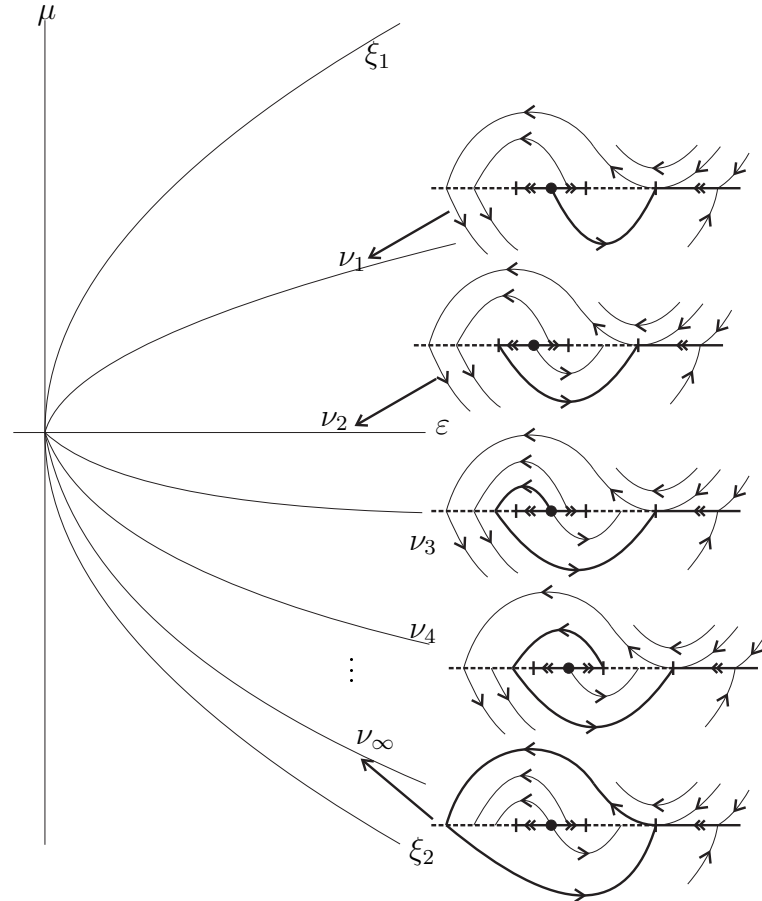


Figura 8.21: Desdobramentos do campo $Z_{\epsilon\mu}$ na região R_3 .

8.6 Singularidade Hopf- Σ

Seja $Z = (X, Y) \in \Omega$ tal que $(0, 0)$ é uma Bifurcação de Hopf para X e o campo Y seja transversal à Σ . Este tipo de bifurcação ocorre quando uma órbita periódica ou ciclo limite em torno de um ponto de equilíbrio aparece ou desaparece quando variamos os parâmetros do campo.

Quando um ciclo limite atrator está em torno de um ponto crítico repulsor, a bifurcação é chamada **Bifurcação de Hopf Supercrítica**. Quando um ciclo limite repulsor está em torno de um ponto crítico atrator, a bifurcação é chamada **Bifurcação de Hopf Subcrítica**.

Como estamos supondo que Y é transversal à Σ , iremos considerar também que $(0, 0)$ é um ponto crítico hiperbólico do campo $Z^s(x, y) = (\beta x + \mathcal{O}(x^2), 0)$.

Dependendo se $(0, 0) \in \partial\Sigma^s \cap \partial\Sigma^c$ ou $(0, 0) \in \partial\Sigma^e \cap \partial\Sigma^c$, se a bifurcação é supercrítica ou subcrítica, se $\beta > 0$ ou $\beta < 0$, teremos comportamentos diferentes. Entretanto, os desdobramentos genéricos serão bastante semelhantes. Aqui, tomaremos $(0, 0) \in \partial\Sigma^s \cap \partial\Sigma^c$, $\beta < 0$ e analisaremos os casos subcrítico e supercrítico.

Uma forma canônica para este campo é dada por

$$Z^\sigma(x, y) = \begin{cases} X^\sigma(x, y) = \begin{pmatrix} -y + \sigma x(x^2 + y^2) \\ x + \sigma y(x^2 + y^2) \end{pmatrix}, & y \geq 0, \\ Y(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & y \leq 0, \end{cases}$$

onde $\sigma = -1$ corresponde ao caso supercrítico e $\sigma = 1$ ao subcrítico. Veja a Figura 8.22.

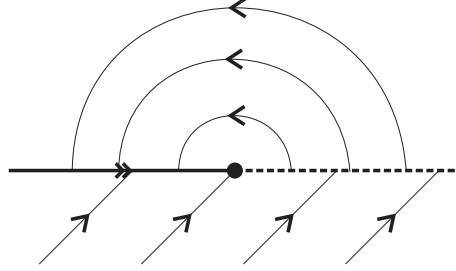


Figura 8.22: Retrato de fase do campo Z para a singularidade Hopf- Σ .

Um desdobramento genérico para o campo acima é dado por

$$Z_{\varepsilon\mu}^\sigma(x, y) = \begin{cases} X_{\varepsilon\mu}^\sigma(x, y) = \begin{pmatrix} \varepsilon x - (y - \mu) + \sigma x(x^2 + (y - \mu)^2) \\ x + \varepsilon(y - \mu) + \sigma(y - \mu)(x^2 + (y - \mu)^2) \end{pmatrix}, & y \geq 0, \\ Y(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & y \leq 0, \end{cases}$$

onde o parâmetro μ controla o ponto crítico $P_\mu = (0, \mu)$, que é admissível para $\mu > 0$ e não admissível para $\mu < 0$. Já o parâmetro ε controla os desdobramentos da Bifurcação de Hopf.

Para $\mu \neq 0$, temos uma dobra de $X_{\varepsilon\mu}^\sigma$ dada por

$$F_{\varepsilon\mu} = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4\mu^2\sigma(\varepsilon + \sigma\mu^2)}}{2\sigma\mu}, 0 \right),$$

que é visível para $\mu > 0$ e invisível para $\mu < 0$. Já o campo deslizante é dado por

$$Z_{\varepsilon\mu}^{\sigma,s}(x, y) = \left(\frac{\sigma x^3 + \sigma\mu x^2 + (\sigma\mu^2 + \varepsilon - 1)x + \mu(1 + \varepsilon + \sigma\mu^2)}{\sigma x^3 + \sigma\mu x^2 - x + \varepsilon\mu + 1}, 0 \right).$$

Assim, quando $\mu < 0$ obtemos um pseudo-nó $N_{\varepsilon\mu}$ tal que $N_{\varepsilon\mu} < F_{\varepsilon\mu}$.

Agora, vamos analisar os desdobramentos de $Z_{\varepsilon\mu}^\sigma$ a partir da proposição a seguir.

Proposição 8.6.1. Para ε e μ suficientemente pequenos, o campo $Z_{\varepsilon\mu}^\sigma$ possui o seguinte comportamento:

- Há uma Bifurcação Foco- Σ (Caso 3) em $\{(\varepsilon, \mu) \mid \mu = 0 \text{ e } \varepsilon > 0\}$;

- Há uma Bifurcação Foco- Σ (Caso 4 com tempo invertido) em $\{(\varepsilon, \mu) \mid \mu = 0 \text{ e } \varepsilon < 0\}$;
- Há uma Bifurcação de Hopf em $\{(\varepsilon, \mu) \mid \mu > 0 \text{ e } \varepsilon = 0\}$;
- Para $\sigma = -1$, temos um ciclo atrator que tangencia Σ em $\{(\varepsilon, \mu) \mid \mu = \sqrt{\varepsilon} \text{ e } \varepsilon > 0\}$;
- Para $\sigma = 1$, temos um ciclo repulsor que tangencia Σ em $\{(\varepsilon, \mu) \mid \mu = \sqrt{-\varepsilon} \text{ e } \varepsilon < 0\}$.

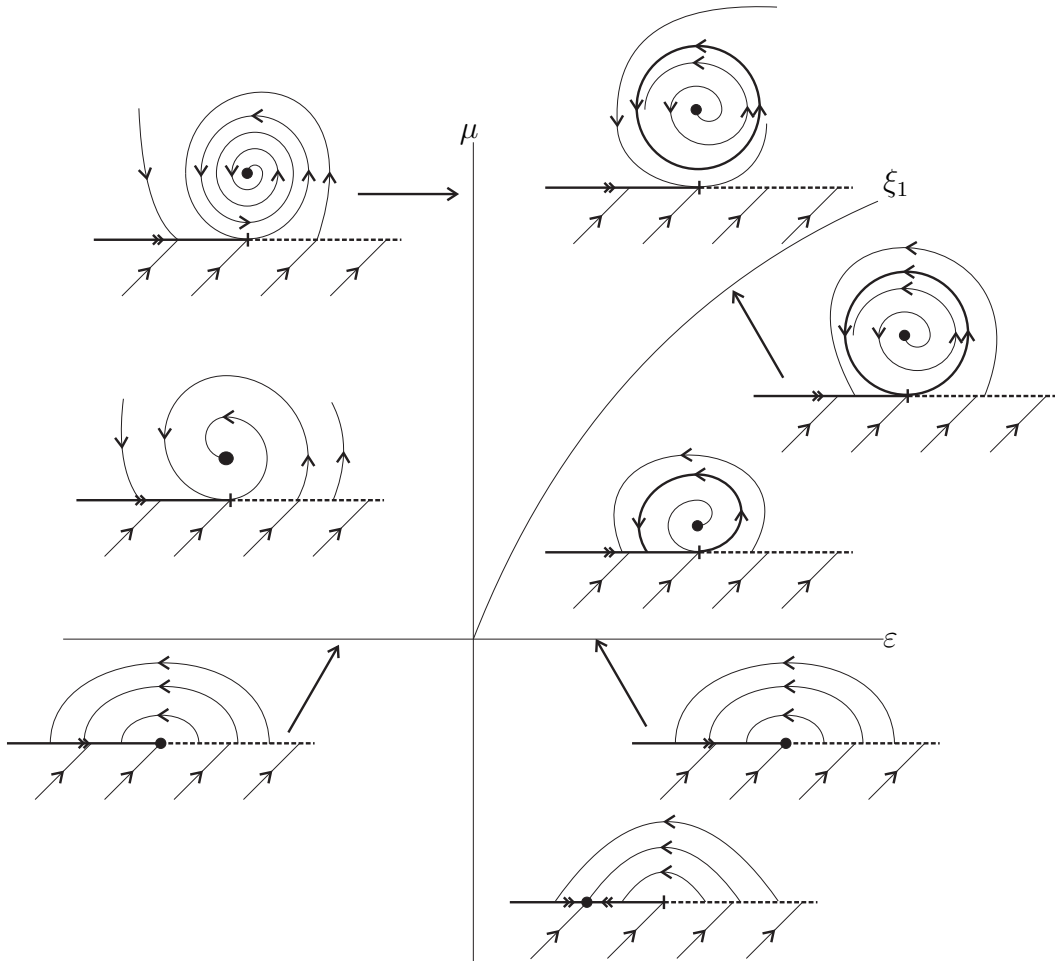


Figura 8.23: Desdobramentos de $Z_{\varepsilon\mu}^{\sigma}$ no caso Supercrítico.

Demonstração. As bifurcações locais para os casos Supercrítico e Subcrítico são as mesmas. O campo $X_{\varepsilon\mu}^{\sigma}$ possui um ponto crítico $P_{\mu} = (0, \mu)$, que é um foco hiperbólico quando $\varepsilon \neq 0$. Quando $\varepsilon > 0$ o foco é repulsor e quando $\varepsilon < 0$ o foco é atrator.

Se $\mu = 0$, temos que $P_{\mu} \in \Sigma$, dando origem a uma bifurcação Foco- Σ (Caso 3 em $\{(\varepsilon, \mu) \mid \mu = 0 \text{ e } \varepsilon > 0\}$ e Caso 4 com tempo invertido em $\{(\varepsilon, \mu) \mid \mu = 0 \text{ e } \varepsilon < 0\}$). Analisando a matriz $DX_{\varepsilon\mu}^{\sigma}(P_{\mu})$, vemos que os autovalores são dados por $\lambda_{1,2} = \varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$. Assim, quando $\varepsilon = 0$ o ponto crítico perde a hiperbolicidade e se torna uma Bifurcação de Hopf.

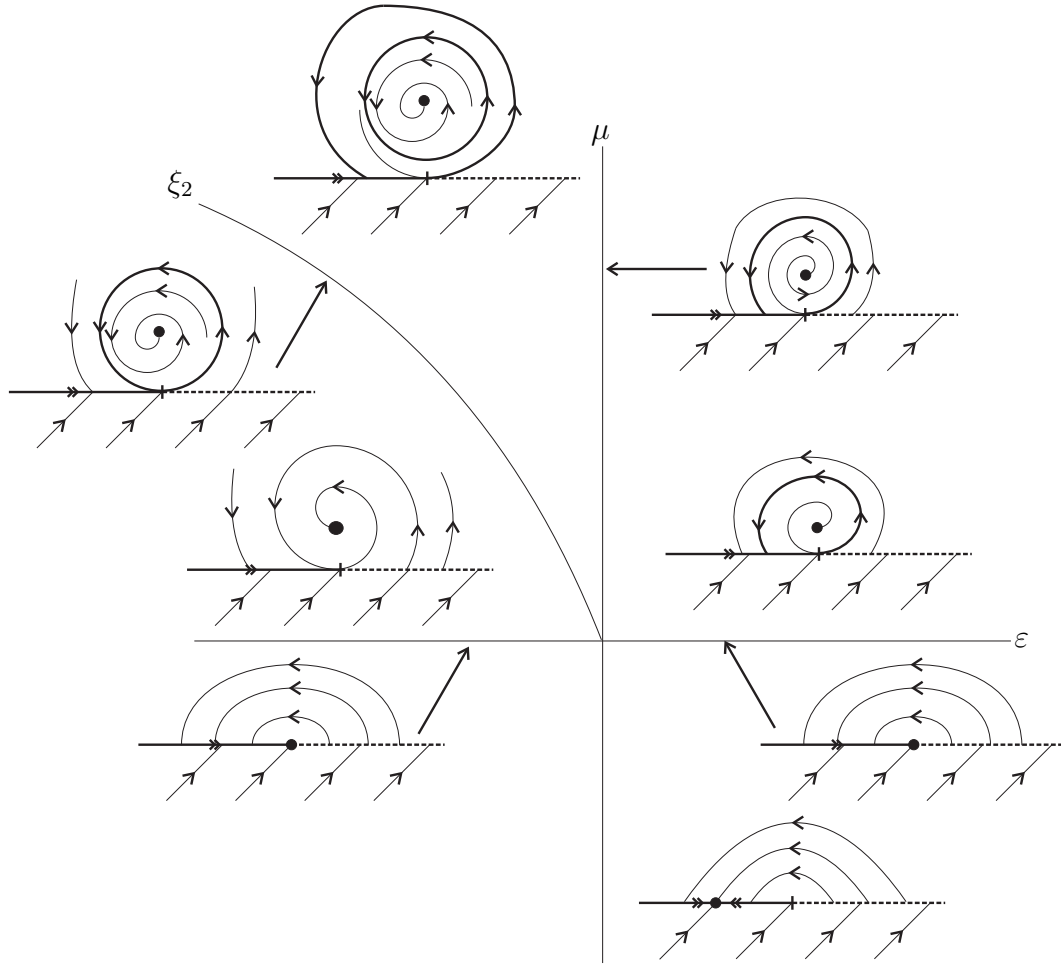


Figura 8.24: Desdobramentos de $Z_{\epsilon\mu}^{\sigma}$ no caso Subcrítico.

Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \epsilon x - (y - \mu) + \sigma x(x^2 + (y - \mu)^2), \\ \dot{y} = x + \epsilon(y - \mu) + \sigma(y - \mu)(x^2 + (y - \mu)^2). \end{cases} \quad (8.1)$$

Introduziremos a seguinte mudança de coordenadas: $x = r \cos \theta$ e $y - \mu = r \sin \theta$. Substituindo no Sistema (8.1) e derivando em relação à r , segue que

$$\begin{cases} \dot{r} \cos \theta = \epsilon r \cos \theta - r \sin \theta + \sigma r \cos \theta (r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta), \\ \dot{r} \sin \theta = r \cos \theta + \epsilon r \sin \theta + \sigma r \sin \theta (r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta). \end{cases} \quad (8.2)$$

Multiplicando a primeira equação do Sistema (8.2) por $\cos \theta$ e a segunda por $\sin \theta$, e em seguida somando as duas equações obtidas, temos

$$\dot{r} = r(\epsilon + \sigma r^2).$$

Voltando ao Sistema (8.1), fazendo a mesma mudança de coordenadas e derivando o sistema em relação à θ , segue que

$$\begin{cases} -r \sin \theta \dot{\theta} = \epsilon r \cos \theta - r \sin \theta + \sigma r^3 \cos \theta, \\ r \cos \theta \dot{\theta} = r \cos \theta + \epsilon r \sin \theta + \sigma r^3 \sin \theta. \end{cases} \quad (8.3)$$

Multiplicando a primeira equação do Sistema (8.3) por $-\sin \theta$ e a segunda por $\cos \theta$, e em seguida somando as duas equações obtidas, temos

$$\dot{\theta} = 1.$$

Portanto, o Sistema (8.1) em coordenadas polares é dado por

$$\begin{cases} \dot{r} &= r(\varepsilon + \sigma r^2), \\ \dot{\theta} &= 1. \end{cases} \quad (8.4)$$

A partir do Sistema (8.4) ficará muito mais simples analisarmos o comportamento dos ciclos que aparecerão nos desdobramentos de $Z_{\varepsilon\mu}^{\sigma}$ quando tomamos ε e μ pertencentes ao primeiro ou ao segundo quadrante.

Primeiramente, considere o caso Supercrítico ($\sigma = -1$). É fácil ver que quaisquer dois campos suficientemente próximos no terceiro ou quarto quadrante são Σ -equivalentes. Por outro lado, no primeiro quadrante temos o seguinte comportamento:

- Se $r = \sqrt{\varepsilon}$, o fluxo não repele e nem atrai. Portanto o ciclo é dado pela equação $x^2 + (y - \mu)^2 = \varepsilon$.
- Temos que se $r > \sqrt{\varepsilon}$ então $\dot{r} < 0$, e que se $r < \sqrt{\varepsilon}$ então $\dot{r} > 0$. Logo, o ciclo é atrator.
- Se $\mu > \sqrt{\varepsilon}$, o ciclo está inteiramente contido em Σ^+ e se $\mu < \sqrt{\varepsilon}$ o ciclo intersecta Σ dando origem a um ciclo deslizante. Temos também que o ciclo tangencia Σ sobre a curva $\xi_1 = \{(\varepsilon, \mu) \mid \mu = \sqrt{\varepsilon}\}$.

No segundo quadrante, temos a presença de um foco atrator sem a presença de ciclos. Veja a Figura 8.23.

Agora, vamos analisar o caso Subcrítico ($\sigma = 1$). Novamente, é fácil ver que quaisquer dois campos suficientemente próximos no terceiro ou quarto quadrante são Σ -equivalentes. Por outro lado, no segundo quadrante temos o seguinte comportamento:

- Se $r = \sqrt{-\varepsilon}$, o fluxo não repele e nem atrai. Portanto o ciclo é dado pela equação $x^2 + (y - \mu)^2 = -\varepsilon$.
- Temos que se $r > \sqrt{-\varepsilon}$ então $\dot{r} > 0$, e que se $r < \sqrt{-\varepsilon}$ então $\dot{r} < 0$. Logo o ciclo é repulsor.
- Se $\mu > \sqrt{-\varepsilon}$, o ciclo está inteiramente contido em Σ^+ coexistindo com um ciclo deslizante e se $\mu < \sqrt{-\varepsilon}$ não existem ciclos e nem ciclos deslizantes. Além disso, o ciclo tangencia Σ sobre a curva $\xi_2 = \{(\varepsilon, \mu) \mid \mu = \sqrt{-\varepsilon}\}$,

No primeiro quadrante, temos a presença de um foco repulsor dando origem a um ciclo deslizante. Note que tanto no caso Supercrítico como no caso Subcrítico as trajetórias giram no sentido anti-horário pois $\dot{\theta} = 1$. Veja a Figura 8.24. \square

9 Dobra-Dobra Invisível-Invisível: Bifurcação de Codimensão k

Um dos problemas mais difíceis que encontramos ao estudar bifurcações em campos de vetores suaves por partes é determinar a codimensão das singularidades. No Capítulo 5, impomos algumas condições para que a bifurcação dobra-dobra invisível-invisível não dependesse de mais de um parâmetro. Uma dessas condições era que a singularidade não poderia se comportar como uma espécie de centro. Este caso é estudado no artigo [4], onde este ponto é chamado de Σ -centro não degenerado.

Neste Capítulo iremos estudar uma série de resultados e definições com a finalidade de mostrar que esta singularidade é de codimensão k . Todas as definições e demonstrações aqui expostas podem ser encontradas em [4].

Definição 9.0.1. Seja $Z = (X, Y) \in \Omega$ de tal forma que a origem é uma dobra invisível para X e Y simultaneamente. Dizemos que $(0, 0) \in \Sigma$ é um Σ -centro não degenerado se existe uma vizinhança $V \subset \mathbb{R}^2$ contendo uma família γ_s de órbitas fechadas de Z de tal maneira que a orientação é preservada. Veja a Figura 9.1.

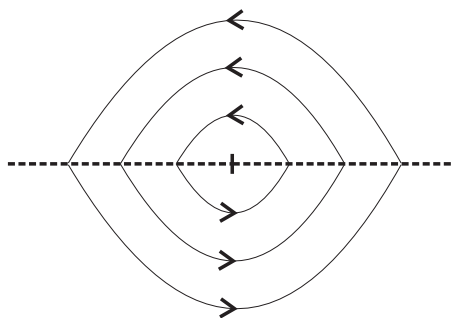


Figura 9.1: Σ -Centro não-degenerado.

Iremos denotar por ϕ_X , ϕ_Y e ϕ_Z as aplicações de primeiro retorno dos campos X , Y e Z respectivamente.

Proposição 9.0.1. Seja $Z = (X, Y) \in \Omega$ tal que a origem é um Σ -centro não degenerado de Z . Então Z é Σ -equivalente à Z_0 , onde

$$Z_0(x, y) = \begin{cases} X_0(x, y) &= (-1, 2x), & y \geq 0, \\ Y_0(x, y) &= (1, 2x), & y \leq 0. \end{cases} \quad (9.1)$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponha que as órbitas de Z estejam orientadas no sentido anti-horário. Defina os conjuntos

$$\Sigma(+) = \{x \in \Sigma \mid x > 0\},$$

$$\Sigma(-) = \{x \in \Sigma \mid x < 0\}.$$

Vamos construir um homeomorfismo que leva órbitas de Z em órbitas de Z_0 , preservando o Σ -centro não degenerado. Primeiramente, vamos supor que tal homeomorfismo satisfaça $h(0, 0) = (0, 0)$. Por parametrização por comprimento de arco, também podemos tomar $h(\Sigma(+)) = \Sigma_0(+)$.

Considere $p \in \Sigma(+)$. Pelo Teorema da Função Implícita, existe um tempo $t(p) > 0$ tal que $\varphi_X(t(p), p) = p_1 \in \Sigma(-)$. Analogamente, tomando $q = h(p)$ existe $t(q) > 0$ tal que $\varphi_{X_0}(t(q), q) = q_1 \in \Sigma_0(-)$. Dessa forma, identificamos a órbita $\gamma_p^{p_1}(X)$ de X partindo de p e chegando em p_1 com a órbita $\gamma_q^{q_1}(X_0)$ de X_0 partindo de q e chegando em q_1 .

Tome novamente $p_1 = \varphi_X(t(p), p)$. Então existe um tempo $t(p_1) > 0$ tal que $\varphi_Y(t(p_1), p_1) = p \in \Sigma(+)$. De forma análoga, tomando $q_1 = \varphi_{X_0}(t(q), q)$ existe um tempo $t(q_1) > 0$ tal que $\varphi_{Y_0}(t(q_1), q_1) = q \in \Sigma_0(+)$. Dessa forma podemos identificar a órbita $\gamma_{p_1}^p(Y)$ de Y com a órbita $\gamma_{q_1}^q(Y_0)$ de Y_0 .

Repita o processo para todos os pontos de $\Sigma(+)$ e teremos $h(\Sigma(-)) = \Sigma_0(-)$, $h(\Sigma^+) = \Sigma_0^+$, $h(\Sigma^-) = \Sigma_0^-$ e que o homeomorfismo preserva Σ e leva órbitas de Z em órbitas de Z_0 . \square

Observe que os campos X_0 e Y_0 da forma canônica (9.1) podem ser escritos da forma $W(x, y) = (\pm 1, g(x))$ (em particular, $g(x) = 2x$). O Lema a seguir nos diz como são as trajetórias de tais sistemas.

Lema 9.0.1. As trajetórias de um campo suave $W(x, y) = (1, g(x))$ é obtido por translações verticais do gráfico de $G(x)$, onde $G(x)$ é a primitiva de $g(x)$.

Demonstração. Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 1, \\ \dot{y} = g(x), \end{cases}$$

obtido a partir do campo W , obtemos

$$x(t) = t + c \text{ e } y(t) = \int g(t + c) dt = G(t + c) + K,$$

onde $c, K \in \mathbb{R}$ e G é a primitiva de g . Tomando $u = t + c$, segue que as trajetórias de $W(x, y)$ são dadas por $(u, G(u) + K)$, que são translações verticais do gráfico de $G(u)$. \square

A seguir, iremos introduzir algumas definições e resultados que podem ser encontrados no Apêndice A do artigo [4].

Definição 9.0.2. Sejam f_1 e f_2 duas aplicações definidas nos abertos V_1 e V_2 respectivamente. Uma **conjugação topológica** entre f_1 e f_2 é um homeomorfismo $g : V_1 \rightarrow V_2$ tal que $g \circ f_1 = f_2 \circ g$.

Se considerarmos uma família f_ε de aplicações dependendo do parâmetro $\varepsilon \in \mathbb{R}^m$, podemos definir de forma análoga como foi feito no início do Capítulo 5 os conceitos de conjugação topológica de famílias de aplicações, aplicações induzidas e desdobramentos (mini) versais de aplicações.

Definição 9.0.3. Sejam $\dot{x} = f_1(x)$ e $\dot{x} = f_2(x)$ dois campos de vetores suaves definidos nas vizinhanças V_1 e V_2 respectivamente. Uma **conjugação topológica entre os campos** f_1 e f_2 é um homeomorfismo $g : V_1 \rightarrow V_2$ tal que $g \circ \varphi_1 = \varphi_2 \circ g$, onde φ_1 e φ_2 são as trajetórias de f_1 e f_2 respectivamente.

Proposição 9.0.2. Sejam $Z_1 = (X_1, Y_1)$ e $Z_2 = (X_2, Y_2)$ campos de vetores suaves por partes. Então Z_1 e Z_2 são Σ -equivalentes se, e somente se, as aplicações de primeiro retorno ϕ_{Z_1} e ϕ_{Z_2} são topologicamente conjugadas.

Demonstração. (\Rightarrow) Seja H a Σ -equivalência entre Z_1 e Z_2 . Vamos mostrar que $H|_\Sigma$ é uma conjugação topológica entre ϕ_{Z_1} e ϕ_{Z_2} .

Seja $\rho \in \Sigma$ em uma vizinhança onde ϕ_{Z_1} está bem definida. Como H é uma Σ -equivalência, então $H(\rho) \in \Sigma$.

Agora, denote por Γ_{X_1} (respectivamente Γ_{X_2}) a órbita de X_1 (respectivamente X_2) passando por ρ (respectivamente $H(\rho)$). Novamente, como H é uma Σ -equivalência temos $H(\Gamma_{X_1}) = \Gamma_{X_2}$. Note que o ponto na qual Γ_{X_1} (respectivamente Γ_{X_2}) intercepta Σ é $\phi_{X_1}(\rho)$ (respectivamente $\phi_{X_2}(H(\rho))$).

Usando mais uma vez o fato de H ser Σ -equivalência, temos $H(\phi_{X_1}(\rho)) = \phi_{X_2}(H(\rho))$. Como ρ é um ponto arbitrário de Σ , segue que $H \circ \phi_{X_1} = \phi_{X_2} \circ H$. Com um raciocínio análogo, obtemos $H \circ \phi_{Y_1} = \phi_{Y_2} \circ H$.

Agora, observe que

$$\phi_{Z_2} \circ H = (\phi_{Y_2} \circ \phi_{X_2}) \circ H = (\phi_{Y_2} \circ H) \circ \phi_{X_1} = H \circ (\phi_{Y_1} \circ \phi_{X_1}) = H \circ \phi_{Z_1},$$

e portanto $H|_\Sigma$ é uma conjugação topológica entre as aplicações de primeiro retorno de Z_1 e Z_2 .

(\Leftarrow) Seja $g : V_1 \rightarrow V_2$ um homeomorfismo que conjuga ϕ_{Z_1} e ϕ_{Z_2} . Usando técnicas similares as usadas na Proposição 9.0.1, podemos estender g a um homeomorfismo H que nos dá a Σ -equivalência entre Z_1 e Z_2 . \square

Proposição 9.0.3. A família

$$Z_\varepsilon(x, y, \varepsilon) = \begin{cases} X_\varepsilon(x, y, \varepsilon), & y \geq 0, \\ Y_\varepsilon(x, y, \varepsilon), & y \leq 0; \end{cases}$$

é um desdobramento versal de Z_0 se, e somente se, ϕ_{Z_ε} é desdobramento versal de ϕ_{Z_0} .

Demonstração. (\Rightarrow) Seja Z_ε desdobramento versal de Z_0 . Por definição, todo desdobramento de Z_0 é Σ -equivalente ao desdobramento induzido de Z_ε .

Para cada ε , seja ϕ_{Z_ε} associado à Z_ε . Logo, temos que ϕ_{Z_ε} é desdobramento de ϕ_{Z_0} . Seja ϕ_μ um desdobramento arbitrário de ϕ_{Z_0} . Podemos construir uma família Z_μ de campos suaves por partes tal que $\phi_{Z_\mu} = \phi_\mu$.

Como Z_ε é desdobramento versal, Z_μ é equivalente ao desdobramento induzido de Z_ε . Assim, pela Proposição 9.0.2, ϕ_{Z_μ} é topologicamente conjugado ao desdobramento induzido de ϕ_{Z_ε} . Portanto todo desdobramento ϕ_μ é topologicamente conjugado ao desdobramento induzido por ϕ_{Z_ε} , donde ϕ_{Z_ε} é desdobramento versal de ϕ_{Z_0} .

(\Leftarrow) Seja ϕ_{Z_ε} desdobramento versal de ϕ_{Z_0} . Por definição, qualquer outro desdobramento ϕ_{Z_μ} de ϕ_{Z_0} é topologicamente conjugado ao desdobramento induzido de ϕ_{Z_ε} .

Para cada ε , considere Z_ε desdobramento de Z_0 . Agora, seja Z_μ um desdobramento arbitrário de Z_0 . Então ϕ_{Z_μ} é desdobramento arbitrário de ϕ_{Z_0} . Por hipótese, temos que ϕ_{Z_μ} é topologicamente conjugado ao desdobramento induzido de ϕ_{Z_ε} .

Novamente aplicando a Proposição 9.0.2, temos que Z_μ é equivalente ao desdobramento induzido de Z_ε e portanto Z_ε é desdobramento versal de Z_0 . \square

Corolário 9.0.1. A codimensão de Z_0 é igual a codimensão de ϕ_{Z_0} . Em outras palavras, Z_ε é desdobramento mini-versal de Z_0 se, e somente se, ϕ_{Z_ε} é desdobramento mini-versal de ϕ_{Z_0} .

Demonstração. Seja m a codimensão de Z_0 e seja Z_ε desdobramento mini-versal de Z_0 , com $\varepsilon \in \mathbb{R}^m$. Por definição, não existe desdobramento versal Z_μ de Z_0 com $\mu \in \mathbb{R}^n$ e $n < m$. Pela Proposição 9.0.3, ϕ_{Z_ε} é desdobramento versal de ϕ_{Z_0} com m parâmetros e portanto a codimensão de ϕ_{Z_0} é menor ou igual que m .

Suponha por absurdo que existe um desdobramento versal ϕ_μ de ϕ_{Z_0} com $\mu \in \mathbb{R}^n$ e $n < m$. Pela Proposição 9.0.3, é possível obter um desdobramento versal Z_μ de Z_0 com $\mu \in \mathbb{R}^n$, o que é um absurdo. Assim, ϕ_{Z_0} não possui um desdobramento versal que dependa de menos de m parâmetros e portanto a codimensão de Z_0 é igual a codimensão de ϕ_{Z_0} . \square

Nos resultados a seguir, $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave dada por

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0, \\ e^{-\frac{1}{x}}, & \text{se } x > 0; \end{cases}$$

Além disso, defina também $\xi_\varepsilon^k(x) = \varepsilon h(x)(x - \varepsilon)^{k+1}$.

Lema 9.0.2. Para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}$ positivo, defina o campo suave por partes

$$Z_\varepsilon^k(x, y) = \begin{cases} X_0(x, y) = (-1, 2x), & y \geq 0, \\ Y_\varepsilon^k(x, y) = \left(1, 2x + \frac{\partial \xi_\varepsilon^k}{\partial x}(x)\right), & y \leq 0. \end{cases}$$

Então a aplicação de primeiro retorno $\phi_{Z_\varepsilon^k}$ associada a Z_ε^k é dada por

$$\phi_{Z_\varepsilon^k}(x) = x - \frac{h(\varepsilon)}{2}(x - \varepsilon)^{k+1} + \mathcal{O}\left((x - \varepsilon)^{k+2}\right).$$

Demonstração. Sabemos que $\phi_{Z_\varepsilon^k}(x) = \phi_{Y_\varepsilon^k} \circ \phi_{X_0}(x)$. Com um cálculo simples, vemos que $\phi_{X_0}(x) = -x$. Assim, para demonstrar este Lema basta encontrar $\phi_{Y_\varepsilon^k}$.

Pelo Lema 9.0.1 temos que as trajetórias de $\phi_{Y_\varepsilon^k}$ são dadas por

$$\left(z, z^2 + \xi_\varepsilon^k(z) + K\right),$$

que são translações verticais do gráfico de $F(z, \varepsilon) = z^2 + \xi_\varepsilon^k(z)$. Para $x > 0$, note que $F_K(z, \varepsilon) = z^2 + \xi_\varepsilon^k(z) + K$ tem $-x$ como raiz se $K = -(-x)^2 - \xi_\varepsilon^k(-x)$. Assim, a trajetória de $\phi_{Y_\varepsilon^k}$ passando por $(-x, 0)$ é dada por

$$\left(t, t^2 + \xi_\varepsilon^k(t) - x^2\right),$$

já que $\xi_\varepsilon^k(z) = 0$ para $z \leq 0$. Logo, $\phi_{Z_\varepsilon^k}$ é dado implicitamente como solução em z de

$$G(z, \varepsilon) = z^2 + \xi_\varepsilon^k(z) - x^2 = 0. \quad (9.2)$$

Observe que se $x = \varepsilon$, então $z = \varepsilon$ e portanto $\phi_{Z_\varepsilon^k}(\varepsilon) = \varepsilon$ é solução da equação acima. Além disso, é fácil ver que

$$\xi_\varepsilon^k(\varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x} \xi_\varepsilon^k(\varepsilon) = \dots = \frac{\partial^k}{\partial x^k} \xi_\varepsilon^k(\varepsilon) = 0 \text{ e } \frac{\partial^{k+1}}{\partial x^{k+1}} \xi_\varepsilon^k(\varepsilon) = \varepsilon h(\varepsilon)(k+1)!.$$

Expandindo ξ_ε^k em Taylor em torno de ε , temos

$$\xi_\varepsilon^k(z) = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{(\xi_\varepsilon^k)^{(n)}(\varepsilon)(z-\varepsilon)^n}{n!} = \left(\frac{\partial^{k+1}}{\partial x^{k+1}} \xi_\varepsilon^k(\varepsilon)\right) \frac{(z-\varepsilon)^{k+1}}{(k+1)!} + \sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{(\xi_\varepsilon^k)^{(n)}(\varepsilon)(z-\varepsilon)^n}{n!},$$

donde

$$G(z, \varepsilon) = z^2 + \varepsilon h(\varepsilon)(z-\varepsilon)^{k+1} - x^2 + \mathcal{O}((z-\varepsilon)^{k+2}),$$

e portanto

$$\frac{\partial}{\partial z} G(z, \varepsilon) = 2z + \varepsilon h(\varepsilon)(k+1)(z-\varepsilon)^k + \mathcal{O}((z-\varepsilon)^{k+1}) > 0,$$

para todo z suficientemente próximo de $\varepsilon > 0$. Isso quer dizer que numa vizinhança suficientemente próxima de ε a aplicação $G(z, \varepsilon)$ é estritamente crescente. Assim, $\phi_{Z_\varepsilon^k}(x)$ é um zero isolado de $G(z, \varepsilon)$ quando $x > 0$.

Voltando para a Equação (9.2), podemos escrever

$$z^2 + \varepsilon h(\varepsilon)(z-\varepsilon)^{k+1} + \mathcal{O}((z-\varepsilon)^{k+2}) = x^2. \quad (9.3)$$

Agora, tome $\tilde{z} = z - \varepsilon$ e $\tilde{x} = x - \varepsilon$. Note que

$$\begin{cases} \tilde{z}^2 &= z^2 - 2\varepsilon z + \varepsilon^2, \\ 2\varepsilon\tilde{z} &= 2\varepsilon z - 2\varepsilon^2, \end{cases} \text{ e } \begin{cases} \tilde{x}^2 &= x^2 - 2\varepsilon x + \varepsilon^2, \\ 2\varepsilon\tilde{x} &= 2\varepsilon x - 2\varepsilon^2, \end{cases}$$

donde $\tilde{z}^2 + 2\varepsilon\tilde{z} = z^2 - \varepsilon^2$ e $\tilde{x}^2 + 2\varepsilon\tilde{x} = x^2 - \varepsilon^2$. Assim, a Equação (9.3) fica

$$2\varepsilon\tilde{z} + \tilde{z}^2 + \varepsilon h(\varepsilon)\tilde{z}^{k+1} + \mathcal{O}(\tilde{z}^{k+2}) = 2\varepsilon\tilde{x} + \tilde{x}^2. \quad (9.4)$$

Impondo $\tilde{z} = a_1\tilde{x} + \dots + a_{k+1}\tilde{x}^{k+1} + \mathcal{O}(\tilde{x}^{k+2})$ e substituindo em (9.4), obtemos $a_1 = 1$, $a_2 = \dots = a_k = 0$ e $a_{k+1} = -\frac{h(\varepsilon)}{2}$. Logo, a solução de (9.2) é

$$\phi_{Z_\varepsilon^k}(x) = x - \frac{h(\varepsilon)}{2}(x-\varepsilon)^{k+1} + \mathcal{O}((x-\varepsilon)^{k+2}).$$

□

Observe que, como $h \in C^\infty$, então $\xi_\varepsilon^k \in C^\infty$. Portanto $Z_\varepsilon^k \in \Omega$ é uma perturbação C^∞ de Z_0 . Temos também que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Z_\varepsilon^k = Z_0$.

Antes de enunciar e demonstrar o Teorema 9.0.3 devemos introduzir alguns resultados. O Teorema 9.0.1, devido à Malgrange, pode ser encontrado em [5] e [9]. Já o Lema 9.0.3 pode ser encontrado na página 20 de [1].

Teorema 9.0.1. Seja $F(\mu, x)$ com $\mu \in \mathbb{R}^m$ uma função real e suave definida numa vizinhança da origem de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$. Suponha que $F(0, x) = x^{k+1}g(x)$, onde $g(x)$ é uma função suave tal que $g(0) \neq 0$. Então existe uma função $q(\mu, x)$ suave e uma coleção de funções suaves $s_i(\mu)$, $i = 0, \dots, k+1$ tal que

$$q(\mu, x)F(\mu, x) = x^{k+1} + \sum_{i=1}^{k+1} s_i(\mu)x^{i-1}.$$

Lema 9.0.3. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ um difeomorfismo local tal que $Df(x) > 0$ para algum $x \in \mathbb{R}$. Seja $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a trajetória dada pela equação $\dot{x} = f(x) - x$. Então f é topologicamente conjugado à φ .

Agora, podemos enunciar e demonstrar o seguinte Lema.

Lema 9.0.4. Se $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, possui um número finito de singularidades e é topologicamente equivalente à $\dot{x} = g(x)$, então os dois campos de vetores são topologicamente conjugados.

Demonstração. Tome φ como o fluxo de $\dot{x} = f(x)$ e ψ como o fluxo de $\dot{x} = g(x)$. Devemos provar que existe \tilde{h} que seja uma conjugação topológica entre φ e ψ .

Seja p_1, \dots, p_n as singularidades de $\dot{x} = f(x)$ e suponha sem perda de generalidade que $p_1 < \dots < p_n$. Seja também h o homeomorfismo que dê a equivalência topológica entre $\dot{x} = f(x)$ e $\dot{x} = g(x)$. Logo as singularidades de $\dot{x} = g(x)$ são dadas por $q_i = h(p_i)$, $i = 1, \dots, n$.

Como h é bijetora e definida em \mathbb{R} , então h é estritamente crescente ou decrescente. Suponha sem perda de generalidade que h é crescente. Assim, temos $q_1 < \dots < q_n$. Se considerarmos a restrição $h_i = h|_{[p_i, p_{i+1}]}$, então $h_i : [p_i, p_{i+1}] \rightarrow [q_i, q_{i+1}]$ é um homeomorfismo.

Agora, vamos construir um homeomorfismo $\tilde{h}_i : [p_i, p_{i+1}] \rightarrow [q_i, q_{i+1}]$ que é uma conjugação topológica entre $\dot{x} = f(x)$ restrito à $[p_i, p_{i+1}]$ e $\dot{x} = g(x)$ restrito à $[q_i, q_{i+1}]$.

Tome $x_1 \in (p_i, p_{i+1})$ e $y_1 \in (q_i, q_{i+1})$. Vamos mostrar que existe uma única conjugação $\tilde{h}_i(x)$ tal que $\tilde{h}_i(x_1) = y_1$. Para cada x existe um único tempo $t(x) \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(t(x), x_1) = x$. Observe que se $f(x) > 0$ em $[p_i, p_{i+1}]$ então $t(x)$ é uma função estritamente crescente. O fato de $t(x)$ ser diferenciável segue da diferenciabilidade de φ e do Teorema da Função Implícita.

Se existe uma conjugação tal que $\tilde{h}_i(x_1) = y_1$, então ela deve satisfazer

$$\tilde{h}_i(x) = \tilde{h}_i(\varphi(t(x), x_1)) = \psi(t(x), \tilde{h}_i(x_1)) = \psi(t(x), y_1),$$

e isso nos mostra que $\tilde{h}_i(x)$ é única. Mais ainda, como $t(x) \rightarrow \infty$ quando $x \rightarrow p_{i+1}$, segue que \tilde{h}_i possui uma extensão contínua tomando $\tilde{h}_i(p_{i+1}) = q_{i+1}$. De maneira análoga, fazendo $\tilde{h}_i(p_i) = q_i$ temos uma aplicação estritamente crescente entre $[p_i, p_{i+1}]$

e $[q_i, q_{i+1}]$. A inversa de uma aplicação contínua estritamente crescente também é uma função contínua estritamente crescente, donde \tilde{h}_i é um homeomorfismo.

Por fim, nos resta mostrar que \tilde{h}_i conjuga φ e ψ . Se $x_1 \in \partial[p_i, p_{i+1}]$, então é fácil ver que para todo t vale

$$\tilde{h}_i(\varphi(t, x_1)) = \psi(t, \tilde{h}_i(x_1)).$$

Se x não pertence à fronteira de $[p_i, p_{i+1}]$, escreva $x = \varphi(t(x), x_1)$, donde $\varphi(t, x) = \varphi(t + t(x), x_1)$. Tomando $\tilde{h}_i(x_1) = y_1$, segue que

$$\begin{aligned} \tilde{h}_i(\varphi(t, x)) &= \tilde{h}_i(\varphi(t + t(x), x_1)) = \psi(t + t(x), y_1) = \\ &= \psi(t, \psi(t(x), y_1)) = \psi(t, \tilde{h}_i(\varphi(t(x), x_1))), \end{aligned}$$

e portanto $\tilde{h}_i(\varphi(t, x)) = \psi(t, \tilde{h}_i(x))$.

Colando as conjugações \tilde{h}_i com domínios adjacentes, temos a conjugação \tilde{h} . \square

Proposição 9.0.4. A aplicação de primeiro retorno $\phi_{Z_\varepsilon^k}$ dada no Lema 9.0.2 possui codimensão k e um desdobramento (mini) versal desta aplicação é dado por

$$\phi_{Z_\varepsilon^k}^\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 x + \cdots + \lambda_k x^{k-1} + x - x^{k+1}.$$

Demonstração. Seja $f(\mu, x)$ um desdobramento arbitrário de $\phi_{Z_\varepsilon^k}$, com $\mu \in \mathbb{R}^m$ e $x \in \mathbb{R}$. Devemos encontrar um desdobramento versal $h(\lambda, x)$, isto é, queremos que $f(\mu, x)$ seja equivalente ao desdobramento induzido de $h(\lambda, x)$.

Tome $F(\mu, x) = f(\mu, x) - x$. Considere o campo $\dot{x} = F(\mu, x)$ e denote seu fluxo por φ_1 . Deixando μ fixo, temos que $f(\mu, x)$ é uma função em \mathbb{R} . Além disso, como $f(\mu, x)$ é desdobramento de $\phi_{Z_\varepsilon^k}$ temos que $f(\mu, x)$ é difeomorfismo local com $Df(\mu, x) > 0$ para algum x . Pelo Lema 9.0.3, segue que $f(\mu, x)$ é topologicamente conjugado à φ_1 .

Pelo Lema 9.0.2, temos que $F(\mu, x)$ satisfaz as hipóteses do Teorema 9.0.1. Portanto existe uma função $q(\mu, x)$ suave e uma coleção de funções suaves $s_i(\mu)$, $i = 0, \dots, k+1$ tal que

$$F(\mu, x) = \frac{1}{q(\mu, x)} \left(-x^{k+1} + \sum_{i=1}^{k+1} s_i(\mu) x^{i-1} \right).$$

Observe que $-x^{k+1}$ vem do fato de termos tomado $g(x) = -\frac{h(\varepsilon)}{2}$ no Teorema 9.0.1. Em relação aos termos x^{i-1} , o sinal negativo faz parte dos $s_i(\mu)$.

Tomando

$$\tilde{G}(\mu, x) = -x^{k+1} + \sum_{i=1}^{k+1} s_i(\mu) x^{i-1},$$

temos que o campo $\dot{x} = F(\mu, x)$ é topologicamente equivalente ao campo $\dot{x} = \tilde{G}(\mu, x)$, considerando a aplicação identidade.

Lembre agora que as $s_i(\mu)$ são suaves. Fazendo $s_i(\mu) = \lambda_i$, segue que $\tilde{G}(\mu, x)$ é induzida de

$$\tilde{H}(\lambda, x) = -x^{k+1} + \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x^{i-1},$$

com $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1}$.

Da referência [7], um desdobramento mini-versal de $\dot{x} = -x^{k+1}$ é dado por

$$\dot{x} = H(\lambda, x) = -x^{k+1} + \sum_{i=1}^k \lambda_i x^{i-1}.$$

Por definição de desdobramento versal, todo desdobramento de $\dot{x} = -x^{k+1}$ é equivalente ao desdobramento induzido de $\dot{x} = H(\lambda, x)$. Assim, existe $\dot{x} = G(\mu, x)$ desdobramento induzido de $\dot{x} = H(\lambda, x)$ que é topologicamente equivalente à $\dot{x} = F(\mu, x)$.

Seja $\tilde{\varphi}_1$ o fluxo de $\dot{x} = G(\mu, x)$. Como $\dot{x} = G(\mu, x)$ é topologicamente equivalente à $\dot{x} = F(\mu, x)$, segue do Lema 9.0.4 que $\dot{x} = G(\mu, x)$ e $\dot{x} = F(\mu, x)$ são topologicamente conjugados. Como consequência, $\tilde{\varphi}_1$ e φ_1 são topologicamente conjugados.

Agora, tome $g(\mu, x) = G(\mu, x) + x$. Pelo Lema 9.0.3, $g(\mu, x)$ é topologicamente conjugado ao fluxo $\tilde{\varphi}_1$ do campo $\dot{x} = g(\mu, x) - x = G(\mu, x)$. Logo, temos que $g(\mu, x)$ é induzido de

$$h(\lambda, x) = x + H(\lambda, x),$$

pois $G(\mu, x)$ é induzido de $H(\lambda, x)$.

Como $f(\mu, x)$ é topologicamente conjugado de φ_1 , que por sua vez é topologicamente conjugado de $\tilde{\varphi}_1$, segue que $f(\mu, x)$ e $g(\mu, x)$ são topologicamente conjugados. Assim, um desdobramento arbitrário $f(\mu, x)$ de $\phi_{Z_\varepsilon^k}$ é topologicamente conjugado a um desdobramento induzido de $h(\lambda, x)$. Em outras palavras, $h(\lambda, x)$ é desdobramento versal de $\phi_{Z_\varepsilon^k}$. O fato de $h(\lambda, x)$ ser desdobramento mini-versal segue do fato de $H(\lambda, x)$ ser desdobramento mini-versal de $\dot{x} = -x^{k+1}$.

Portanto $\phi_{Z_\varepsilon^k}$ possui codimensão k e um desdobramento mini-versal é dado por

$$h(\lambda, x) = x - x^{k+1} + \sum_{i=1}^k \lambda_i x^{i-1}$$

□

Teorema 9.0.2. Para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}$ positivos, o campo Z_ε^k dado no Lema 9.0.2 possui codimensão k .

Demonstração. Pela Proposição 9.0.4, temos que $\phi_{Z_\varepsilon^k}$ tem codimensão k . Já pela Proposição 9.0.3 e seu Corolário, a codimensão de $\phi_{Z_\varepsilon^k}$ é igual a codimensão de Z_ε^k . □

Teorema 9.0.3. Seja Z_0 dado em (9.1). Para toda vizinhança $W \subset \Omega$ de Z_0 e para todo $k \in \mathbb{Z}$ positivo existe um campo $Z_\varepsilon^k \in W$ de codimensão k .

Demonstração. Seja Z_ε^k dado pelo Lema 9.0.2. Como $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Z_\varepsilon^k = Z_0$, dado $W \in \Omega$ vizinhança de Z_0 existe um $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $Z_\varepsilon^k \in W$, que possui codimensão k . □

O resultado abaixo é uma consequência imediata do último Teorema.

Teorema 9.0.4. O campo Z_0 dado em (9.1) possui codimensão infinita.

10 Sistemas Slow-Fast e Perturbação Singular

A estabilidade estrutural de um campo de vetores suaves por partes também pode ser estudada a partir da regularização de tal campo. O processo de regularização foi introduzido em [20] e consiste em analisar o campo de vetores regularizado. Entretanto, a partir de um problema regularizado podemos nos deparar com um problema de perturbação singular, conteúdo abordado neste Capítulo. Aqui, faremos um breve estudo a respeito de Sistemas Slow-Fast e da teoria de Perturbação Singular. Esta análise é feita seguindo [2] e nosso foco é abordar alguns exemplos.

10.1 Preliminares

Considere um sistema singularmente perturbado da forma

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \varepsilon \dot{y} = g(x, y), \end{cases} \quad (10.1)$$

com $x \in \mathbb{R}^k$, $y \in \mathbb{R}^m$ e $\varepsilon > 0$ pequeno. O parâmetro ε mede a taxa relativa de variação de x e y , e quanto mais ε diminui, mais rapidamente y cresce em relação à x se $g(x, y) \neq 0$. Quando $\varepsilon = 0$, o Sistema (10.1) se reduz ao sistema diferencial-algébrico

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ 0 = g(x, y), \end{cases} \quad (10.2)$$

na qual x cresce lentamente enquanto a variável rápida y se ajusta instantaneamente para satisfazer o impasse tal que $g(x, y) = 0$. O Sistema (10.2) também é conhecido na literatura como **Equação com Impasse**, **Sistema Reduzido** ou **Equação Lenta**.

Fazendo um reescalonamento de tempo em (10.1) da forma $t = \varepsilon\tau$, temos

$$\begin{cases} x' = \varepsilon f(x, y), \\ y' = g(x, y), \end{cases} \quad (10.3)$$

onde $'$ denota a derivada em relação à τ . Fazendo $\varepsilon = 0$, nós obtemos a chamada **Equação Rápida**, onde o sistema é reduzido à m equações diferenciais para a variável rápida y que depende da variável lenta x como parâmetro.

Equações com Impasse são equivalentes a equações sem impasse nos pontos onde $D_y g$ é invertível. Próximo a esses pontos, o impasse $g(x, y) = 0$ pode ser eliminado resolvendo esta equação para y como função de x . Assim, pontos onde $D_y g$ não são invertíveis são chamados singularidades.

O conjunto $S_0 = \{g(x, y) = 0\}$ é o espaço de fase de (10.2) e é conhecido na literatura como **Varietade Crítica** ou **Varietade Lenta**. Note que S_0 é o conjunto dos pontos de equilíbrio de (10.3) quando $\varepsilon = 0$.

Podemos definir o sistema híbrido usando as dinâmicas de (10.2) e (10.3) da seguinte maneira. Um ponto fora de S_0 se move rapidamente ao longo de uma fibra estável rápida, de acordo com as dinâmicas de (10.3) quando $\varepsilon = 0$, até alcançar um ramo estável de S_0 . Aqui, a dinâmica muda para (10.2). Se a solução correspondente alcança uma singularidade ou um ponto de bifurcação (onde S_0 perde a estabilidade), então as dinâmicas voltam para (10.3).

A seguir, iremos analisar modelos matemáticos que descrevem batimentos cardíacos e impulsos nervosos. Modelos matemáticos mais realistas que os que serão apresentados aqui podem ser encontrados na literatura, entretanto não os abordaremos pois nosso propósito é introduzir sistemas slow-fast e sistemas com impasse.

10.2 Análise de Modelos

10.2.1 Batimentos cardíacos

Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y - y_0, \\ \varepsilon \dot{y} = -(y^3 - y + x), \end{cases} \quad (10.4)$$

onde, $y_0 > \frac{1}{\sqrt{3}}$ é constante. Este modelo mostra a dinâmica da atividade elétrica do coração. Zeeman construiu este modelo de tal forma que o ponto de equilíbrio estável possui uma pequena bacia de atração.

Fazendo $\varepsilon = 0$ em (10.4), obtemos o sistema com impasse

$$\begin{cases} \dot{x} = y - y_0, \\ 0 = y^3 - y + x. \end{cases} \quad (10.5)$$

Assim, a variedade lenta S_0 é dada pela equação $y^3 - y + x = 0$. Esta curva tem dois pontos de dobra $(x, y) = \left(\pm \frac{2\sqrt{3}}{9}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Também podemos enxergar S_0 como o gráfico de $x = y - y^3$. Derivando ambos os lados da equação em relação à t , obtemos $\dot{x} = (1 - 3y^2)\dot{y}$. Substituindo em (10.5), chegamos à equação reduzida

$$\dot{y} = \frac{y - y_0}{1 - 3y^2}. \quad (10.6)$$

A equação (10.6) possui singularidades para $y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, onde $D_y g = -3y^2 + 1$ não é invertível. Já o ponto $p_a = y_0$ é o ponto crítico do sistema. Veja a Figura 10.1.

10.2.2 Impulsos nervosos

O seguinte sistema é um modelo matemático para a voltagem transmembrana de uma célula nervosa:

$$\begin{cases} \dot{x} = -1 - y, \\ \dot{y} = -2(y + z), \\ \varepsilon \dot{z} = -(x + yz + z^3). \end{cases} \quad (10.7)$$

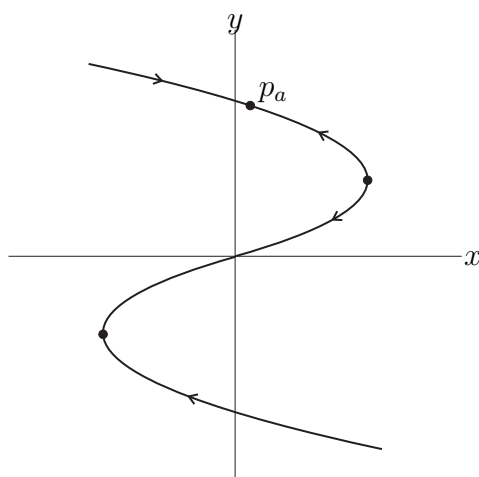


Figura 10.1: Retrato de fase de (10.5).

Uma importante característica deste sistema é a possibilidade de um retorno suave, isto é, depois que a trajetória se afasta do ponto do equilíbrio ela retorna para a variedade lenta, permanecendo lá o tempo todo. Aqui, estudaremos o sistema com impasse de (10.7) dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = -1 - y, \\ \dot{y} = -2(y + z), \\ 0 = x + yz + z^3. \end{cases} \quad (10.8)$$

A principal característica da superfície $x + yz + z^3 = 0$ é que a origem é uma cúspide, dando origem a duas linhas de dobra, como mostra a Figura 10.6. Além disso, uma dessas linhas de dobra contém uma singularidade do tipo sela dobrada (ver Definição 10.3.1). Antes de analisarmos o comportamento de (10.8) em detalhes, iremos enunciar alguns resultados.

10.3 Dessingularização de equações com impasse

Consideremos equações com impasse da forma

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y, z), \\ \dot{y} = f_2(x, y, z), \\ 0 = g(x, y, z). \end{cases} \quad (10.9)$$

Iremos supor que as trajetórias de (10.9) próximas do ponto $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ satisfaçam as seguintes condições não-degeneradas:

- (A) $g(p_0) = 0$,
- (B) $g_z(p_0) = 0$,
- (C) $g_{(x,y)}(p_0) \neq 0$,

onde $g_{(x,y)}$ é a derivada de g em relação às variáveis x e y e g_z é derivada de g em relação à variável z .

Lema 10.3.1. Suponha que vale (A) e (C). Então o Sistema (10.9) pode ser escrito da forma

$$\begin{cases} \dot{y} = f_2(\varphi(y, z), y, z), \\ -g_z(\varphi(y, z), y, z)\dot{z} = \langle f(\varphi(y, z), y, z), g_{(x,y)}(\varphi(y, z), y, z) \rangle, \end{cases} \quad (10.10)$$

onde $x = \varphi(y, z)$ é solução de $g(x, y, z) = 0$ e $f = (f_1, f_2)$.

Demonstração. Pela hipótese (C), temos que $g_x(p_0) \neq 0$ ou $g_y(p_0) \neq 0$. Suponha sem perda de generalidade que $g_x(p_0) \neq 0$. Pela hipótese (A), temos $g(p_0) = 0$. Assim, pelo Teorema da Função Implícita existe W vizinhança de (y_0, z_0) e uma função $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi(y_0, z_0) = x_0$ e $g(\varphi(y, z), y, z) = 0$, para todo $(y, z) \in W$. Em outras palavras, a solução de $g(x, y, z) = 0$ é dada por $x = \varphi(y, z)$.

Derivando a equação $x = \varphi(y, z)$ em relação à t , obtemos

$$\dot{x} = \varphi_y \dot{y} + \varphi_z \dot{z}. \quad (10.11)$$

Da equação acima, usando diferenciação implícita temos

$$\varphi_z = -\frac{g_z}{g_x}; \quad \varphi_y = -\frac{g_y}{g_x}.$$

Substituindo em (10.11), obtemos

$$-\frac{g_z}{g_x}\dot{z} = f_1 + \frac{g_y}{g_x}f_2.$$

Escrevendo $f = (f_1, f_2)$, $g_{(x,y)} = (g_x, g_y)$ e multiplicando a equação anterior por g_x , temos

$$-g_z\dot{z} = \langle f, g_{(x,y)} \rangle,$$

donde segue o Sistema (10.10). \square

Suponha agora que a hipótese (B) seja falsa. Podemos reescrever o Sistema (10.10) da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -g_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2 \\ g_{(x,y)}f \end{pmatrix}.$$

Assim, usando a Regra de Cramer para resolver o sistema acima para (\dot{y}, \dot{z}) , obtemos

$$\begin{cases} \dot{y} = \left(-\frac{1}{g_z}\right)(-g_z f_2), \\ \dot{z} = \left(-\frac{1}{g_z}\right)\langle g_{(x,y)}, f \rangle. \end{cases}$$

Cancelando o fator $(-1/g_z)$, obtemos o sistema dessingularizado

$$\begin{cases} \dot{y} = (-g_z f_2), \\ \dot{z} = \langle g_{(x,y)}, f \rangle, \end{cases} \quad (10.12)$$

com x determinado pela equação $x = \varphi(y, z)$. Fora da linha de dobra, as trajetórias de (10.10) e (10.12) se diferem apenas por uma parametrização do tempo. A direção do tempo é revertida nas regiões onde $-g_z < 0$.

Introduziremos agora mais algumas condições não-degeneradas, tomando $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$:

$$(D) \quad \langle g_{(x,y)}(p_0), f(p_0) \rangle \neq 0,$$

$$(E) \quad g_{zz}(p_0) \neq 0,$$

$$(F) \quad g_{zzz}(p_0) \neq 0$$

Assim, podemos definir os pontos singulares:

Definição 10.3.1. Um ponto de **dobra simples** é um ponto tal que valem as condições (D) e (E). Um ponto de **equilíbrio dobrado** (sela dobrada, foco dobrado, nó dobrado) é um ponto que satisfaz (E) e não satisfaz (D). Um ponto de **cúspide** é um ponto que satisfaz (D) e (F) mas não satisfaz (E).

É importante destacar que pontos de equilíbrio dobrado ocorrem em pontos isolados da linha de dobra. Além disso, os pontos definidos acima também devem satisfazer as condições (A), (B) e (C). Outras condições não-degeneradas podem ser exigidas, mas não as discutiremos aqui.

10.4 Dobras, sela dobrada e cúspides em equações com impasse com dois parâmetros

A seguir, iremos exibir formas canônicas para três casos relevantes para estudarmos o Sistema (10.7), referente ao modelo de impulsos nervosos. As formas canônicas que estudaremos aqui apresentam uma dobra, sela dobrada e uma cúspide.

Exemplo 10.4.1. A forma canônica para uma dobra é dada por

$$\begin{cases} \dot{x} = \pm 1, \\ \dot{y} = 0, \\ 0 = -(z^2 + x). \end{cases} \quad (10.13)$$

É fácil ver que o Sistema (10.13) satisfaz as condições (D) e (E). Note que $f_1(x, y, z) = \pm 1$, $f_2(x, y, z) = 0$ e $g(x, y, z) = -(z^2 + x)$, donde $g_{(x,y)} \cdot f = \pm 1$ e $g_{zz} = -2$. Podemos escrever (10.13) da forma

$$\begin{cases} \dot{x} = 1, \\ \dot{z} = -\frac{1}{2z}. \end{cases}$$

O retrato de fase na Figura 10.2 foi esboçado tomando $\dot{x} = 1$.

Exemplo 10.4.2. A forma canônica para uma sela dobrada é dada por

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = 1, \\ 0 = z^2 + x. \end{cases} \quad (10.14)$$

Temos que $f_1(x, y, z) = -y$, $f_2(x, y, z) = 1$ e $g(x, y, z) = z^2 + x$, donde $g_{(x,y)} \cdot f = -y$ e $g_{zz} = 2$. Assim, vale a condição (E) mas não vale a condição (D) quando olhamos para a origem. Podemos escrever (10.14) da forma

$$\begin{cases} \dot{y} = 1, \\ \dot{z} = -\frac{y}{2z}. \end{cases}$$

Veja a Figura 10.3.

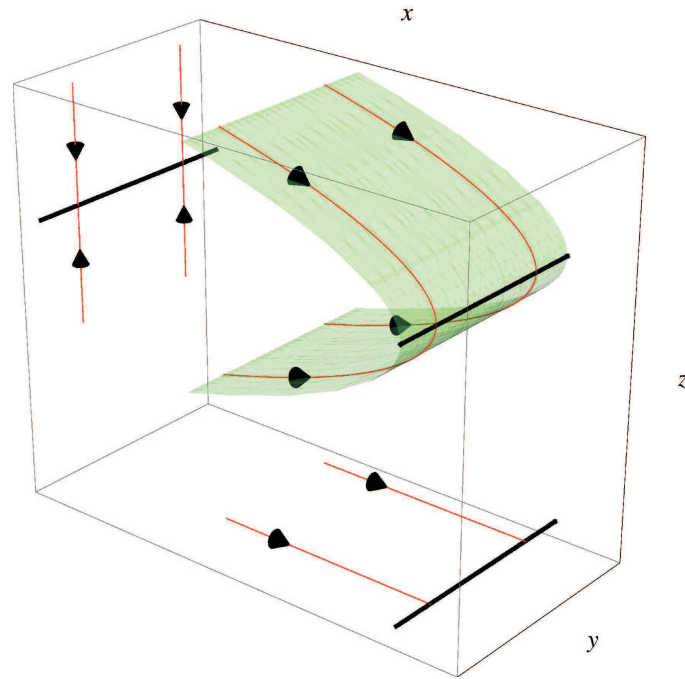


Figura 10.2: Retrato de fase do Sistema (10.13).

Exemplo 10.4.3. A forma canônica para uma cúspide é dada por

$$\begin{cases} \dot{x} = 1, \\ \dot{y} = 0, \\ 0 = \pm(z^3 + yz + x). \end{cases} \quad (10.15)$$

A escolha do sinal em (10.15) determina a estabilidade das folhas de $g(x, y, z) = 0$ para as dinâmicas nas folheações rápidas. As folhas tais que $g_z < 0$ são estáveis e as que satisfazem $g_z > 0$ são instáveis. A superfície é dada pelo gráfico de $x = -z^3 - yz$. Também é fácil ver que as condições (D) e (F) são satisfeitas, porém a condição (E) não. O retrato de fase da Figura 10.4 foi esboçado tomando $g(x, y, z) = +(z^3 + yz + x)$.

10.5 Singularidades do Sistema (10.8)

Agora, podemos retornar ao Sistema (10.8) e analisarmos seu comportamento. Note que a variedade lenta é dada pelo gráfico de $x = -z^3 - yz$. Derivando ambos os lados da equação em relação à t e tomando $\dot{x} = -1 - y$, segue que

$$(3z^2 + y)\dot{z} + \dot{y}z = 1 + y.$$

Como $\dot{y} = -2(y + z)$, temos

$$(3z^2 + y)\dot{z} = (1 + y) + 2(y + z)z.$$

Assim, obtemos o sistema reduzido

$$\begin{cases} \dot{y} = -2(y + z), \\ (3z^2 + y)\dot{z} = (y + 1) + 2(y + z)z, \end{cases} \quad (10.16)$$

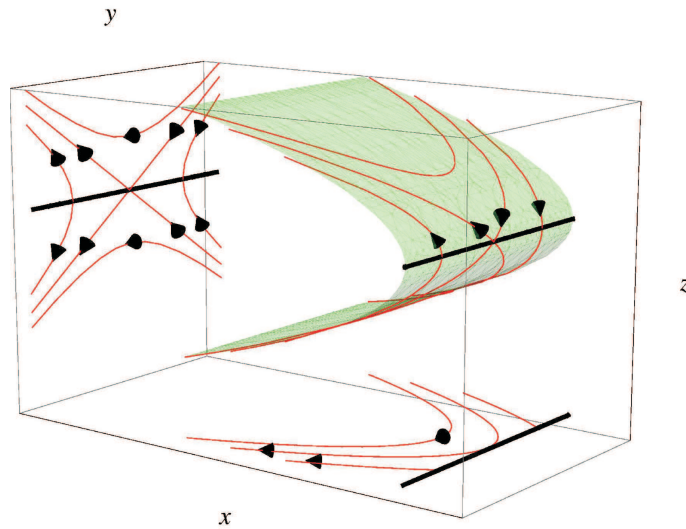


Figura 10.3: Retrato de fase do Sistema (10.14).

cujo ponto crítico é dado por $p_a = (-1, 1)$. Pelo Teorema de Grobman-Hartman, obtemos que este ponto é um foco hiperbólico atrator.

Reescrevendo o Sistema (10.16) na forma do Sistema (10.12), obtemos o sistema dessingularizado

$$\begin{cases} \dot{y} = -2(y+z)(3z^2+y), \\ \dot{z} = (y+1) + 2(y+z)z. \end{cases} \quad (10.17)$$

Note agora que a linha de dobra é dada pela parábola $y = -3z^2$. As singularidades dobradas são os pontos críticos de (10.17) sob a linha de dobra, isto é, a solução de

$$\begin{cases} 0 = y + 3z^2, \\ 0 = (y+1) + 2(y+z)z, \end{cases}$$

que é dada pelo ponto $p_f = \left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

Temos também que a matriz jacobiana do Sistema (10.17) é dada por

$$A(y, z) = \begin{pmatrix} -2(3z^2 + 2y + z) & -2(6yz + 9z^2 + y) \\ 2z + 1 & 2y + 4z \end{pmatrix},$$

donde

$$A(p_f) = \begin{pmatrix} \frac{2}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Observe que $\det(A(p_f)) = -\frac{11}{4} < 0$, donde p_f é uma sela dobrada. Veja as Figuras 10.5 e 10.6.

10.6 Retorno global singular para o Sistema (10.8)

A linha de dobra da variedade lenta do Sistema (10.8) pode ser parametrizada da forma

$$F = \{(x, y, z) = (2\sigma^3, -3\sigma^2, \sigma) \mid \sigma \in \mathbb{R}\}.$$

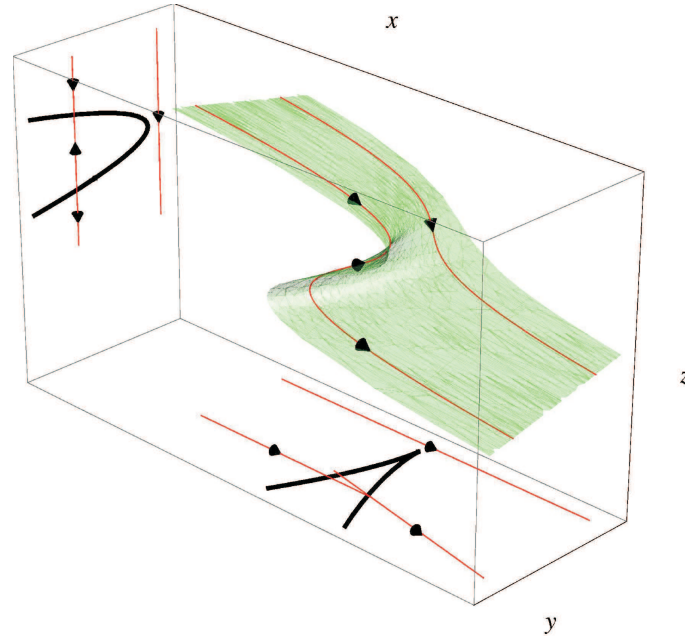


Figura 10.4: Retrato de fase do Sistema (10.15).

Também podemos definir o ramo superior de F e o ramo inferior de F , respectivamente, da seguinte forma

$$F_+ = \{(x, y, z) = (2\sigma^3, -3\sigma^2, \sigma) \mid \sigma > 0\}, F_- = \{(x, y, z) = (2\sigma^3, -3\sigma^2, \sigma) \mid \sigma < 0\}.$$

Nosso objetivo agora é estudar a projeção de F_+ em F_- . Esta curva pode ser encontrada projetando F_+ em S_0 de tal forma que as coordenadas x e y permaneçam sem alteração, isto é, $x = 2\sigma^3$ e $y = -3\sigma^2$. Assim, essa curva pode ser parametrizada por

$$PF_+ = \{(x, y, z) = (2\sigma^3, -3\sigma^2, -2\sigma) \mid \sigma > 0\}.$$

Note que as coordenadas y e z de PF_+ satisfazem $y = -\frac{3}{4}z^2$.

O retorno singular é obtido pelas trajetórias de (10.17) que partem de PF_+ . Algumas trajetórias passam por F e podem não permanecer em S_0 . Outras passam à direita da cúspide fazendo um retorno suave. Também é importante analisar as trajetórias que partem de $q_f = (-\frac{3}{4}, -1)$, que é o ponto obtido a partir da projeção de p_f usando a expressão de PF_+ .

Vamos estudar as dinâmicas do Sistema (10.17). Em particular, veremos que a trajetória de q_f passa por F_- e não corresponde a um retorno suave.

Proposição 10.6.1. Existe um ponto $q_* = (y_*, z_*)$ com $z_* < -1$ tal que sua trajetória positiva do Sistema (10.17) passa pela origem. Se $q \in \{(y, z) \in PF_+ \mid z < -1\}$ e $q \neq q_*$, então um dos seguintes casos acontecem:

- Se $z_* < z < -1$, a trajetória de (10.17) passando por q passa por F_- ;
- Se $z < z_*$, a trajetória de (10.17) passando por q passa à direita da origem e entra no segundo quadrante pelo eixo z .

A prova da Proposição acima pode ser encontrada em [2].

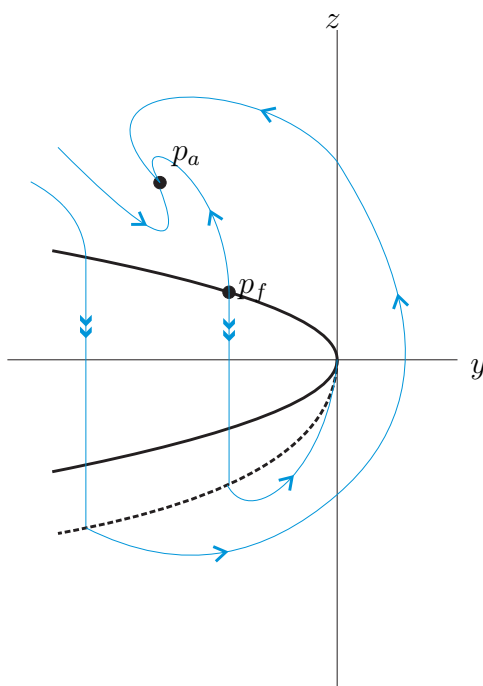


Figura 10.5: Retrato de fase de (10.16).

Defina os conjuntos S_0^a , S_{0+}^a e S_{0-}^a por:

$$\begin{aligned} S_0^a &= \left\{ (x, y, z) \in S_0 \mid \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) < 0 \right\}; \\ S_{0+}^a &= \left\{ (x, y, z) \in S_0^a \mid z \geq 0 \right\}; \\ S_{0-}^a &= \left\{ (x, y, z) \in S_0^a \mid z < 0 \right\}. \end{aligned}$$

O seguinte Teorema é uma consequência da Proposição anterior.

Teorema 10.6.1. Existem conjuntos V_0^1 , V_0^2 e V_0^3 contidos em S_{0+}^a que possuem as seguintes propriedades:

- (i) Todas as trajetórias de (10.16) partindo de V_0^1 permanecem em V_0^1 e são atraídas para o ponto de equilíbrio p_a .
- (ii) Todas as trajetórias de (10.16) partindo de V_0^2 alcançam F_+ , pulam para PF_+ , continuam em F_- e pulam para V_0^1 .
- (iii) Todas as trajetórias de (10.16) partindo de V_0^3 alcançam F_+ , pulam para PF_+ e vão para V_0^1 .

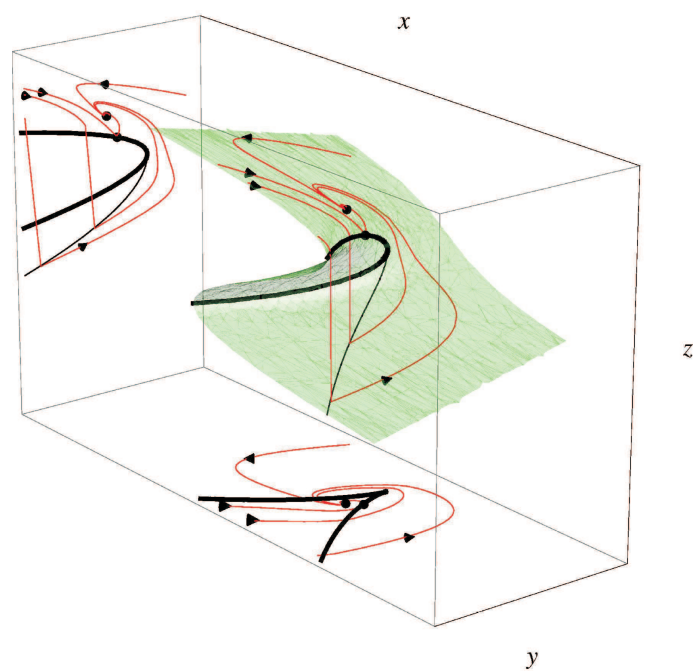
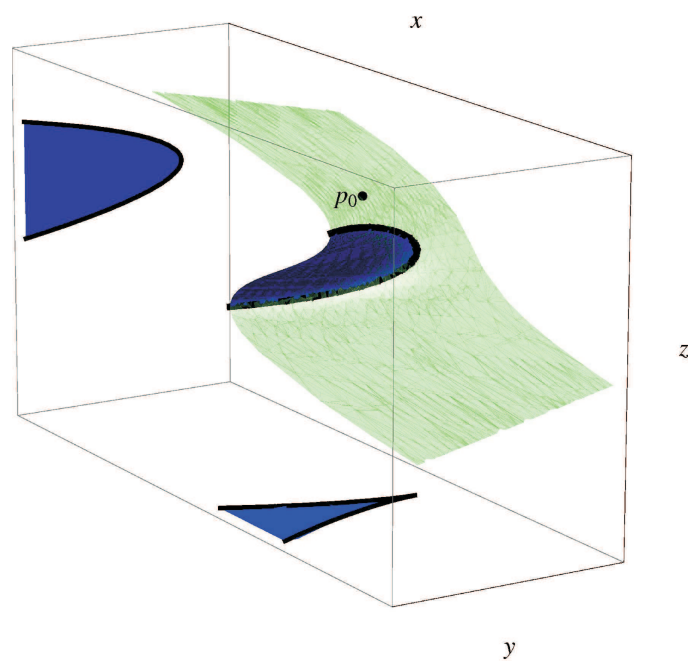


Figura 10.6: Retrato de fase do Sistema (10.8).

Figura 10.7: Variedade S_0^α em azul.

Referências

- [1] ARROWSMITH, D. K., AND PLACE, C. M. *An Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 1990.
- [2] BROER, H. W., KAPER, T. J., AND KRUPA, M. J. Geometric desingularization of a cusp singularity in slow-fast systems with applications to zeeman's examples. *Journal of Dynamics and Differential Equations* 25 (2013), 925–958.
- [3] BUZZI, C. A., DE CARVALHO, T., AND EUZÉBIO, R. D. Chaotic planar piecewise smooth vector fields with non-trivial minimal sets. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 36 (2016), 458–469.
- [4] BUZZI, C. A., DE CARVALHO, T., AND TEIXEIRA, M. A. Birth of limit cycles bifurcating from a nonsmooth center. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* 102 (2014), 36–47.
- [5] CHOW, S. N., AND HALE, J. K. *Methods of Bifurcation Theory*. Springer-Verlag, 1982.
- [6] COLOMBO, A., DI BERNARDO, M., HOGAN, S. J., AND JEFFREY, M. R. Bifurcations of piecewise smooth flows: Perspectives, methodologies and open problems. *Physica D* 241 (2012), 1845–1860.
- [7] DUMORTIER, F. *Singularities of Vector Fields*, 32 ed. Monografias Matemáticas, IMPA, Rio de Janeiro, 1978.
- [8] FILIPPOV, A. F. *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*. Mathematics and its Applications (Soviet Series), Kluwer Academic Publishers-Dordrecht., 1988.
- [9] GOLUBITSKI, M., AND GUILLEMIN, V. *Stable Mappings and Their Singularities*. Springer-Verlag, 1973.
- [10] GUARDIA, M., SEARA, T. M., AND TEIXEIRA, M. A. Generic bifurcations of low codimension of planar filippov systems. *Journal of Differential Equations* 250 (2011), 1967–2063.
- [11] HOGAN, S. J., HOMER, M. E., JEFFREY, M. R., AND SZALAI, R. Piecewise smooth dynamical systems theory: the case of the missing boundary equilibrium bifurcations. *Journal of Nonlinear Science* 26 (2016), 1161–1173.
- [12] JACQUEMARD, A., PEREIRA, W. F., AND TEIXEIRA, M. A. Generic singularities of relay systems. *Journal of Dynamical and Control Systems* 13 (2007), 503–530.

- [13] JEFFREY, M. R., AND HOGAN, S. J. The geometry of generic sliding bifurcations. *Siam Review* 53 (2011), 505–525.
- [14] KUZNETSOV, Y. A., RINALDI, S., AND GRAGNANI, A. One-parameter bifurcations in planar filippov systems. *Int. Journal of Bifurcation and Chaos* 13 (2003), 2157–2188.
- [15] LARROSA, J. L. *Sistemas Planares de Filippov e Bifurcações Genéricas de Baixa Codimensão*, (dissertação de mestrado) ed. UNICAMP-IMECC, Campinas-SP, 2012.
- [16] LIMA, E. L. *Curso de Análise vol. 2*, 11 ed. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2014.
- [17] PERKO, L. *Differential Equations and Dynamical Systems*, 7 ed. Texts in Applied Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [18] ROSSA, F. D., AND DERCOLE, F. Generalized boundary equilibria in n-dimensional filippov systems: The transition between persistence and nonsmooth-fold scenarios. *Physica D* 241 (2012), 1903–1910.
- [19] SOTOMAYOR, J. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.
- [20] SOTOMAYOR, J., AND TEIXEIRA, M. A. Regularization of discontinuous vector fields. *Proceedings of the International Conference on Differential Equations, Lisboa* (1996), 207–223.

Índice Remissivo

- Σ -centro não-degenerado, 103
- Σ -equivalência, 33
- Σ -estabilidade estrutural, 36
- Σ^s -equivalência, 33
- Órbita
 - local, 26
 - periódica regular, 32
- Aplicação de primeiro retorno, 53
- Bifurcação, 47
 - de Hopf, 97
 - de Hopf Subcrítica, 97
 - de Hopf Supercrítica, 97
- Campo
 - de escape, 26
 - de Filippov, 23
 - de Vetores Suave por Partes, 23
 - deslizante, 25
 - normalizado, 25
- Ciclo
 - periódico, 32
- Codimensão, 47
- Conexão
 - de separatrizes, 32
 - pseudo-heteroclínica, 73
 - pseudo-homoclínica, 73
- Conjugação Topológica, 105
- Derivada de Lie, 24
- Desdobramento, 47
 - mini-versal, 47
 - versal, 47
- Dobra
 - de deslize, 40
 - de escape, 40
 - invisível, 40
 - regular, 40
 - visível, 40
- Equação
 - com impasse, 111
 - lenta, 111
 - rápida, 111
 - reduzida, 111
- Equivalência Topológica, 33
- Estabilidade estrutural, 36
- Família induzida, 47
- Forma canônica, 36
- Mild-equivalência, 33
- Período de um ciclo, 32
- Ponto
 - de cúspide, 115
 - de chegada, 28
 - de dobra, 24
 - de dobra simples, 115
 - de equilíbrio dobrado, 115
 - de equilíbrio real, 28
 - de equilíbrio virtual, 28
 - de partida, 28
 - de tangência, 24
 - Singular, 115
- Propriedade genérica, 43
- Pseudo
 - ciclo, 32
 - equilíbrio, 27
 - nó, 27
 - sela, 27
- Região
 - de Costura, 24
 - de Deslize, 24
 - de Escape, 24
- Retas isóclinas, 57
- Separatriz
 - estável, 32
 - instável, 31
- Singularidade, 27
 - distinguidas, 27

- genérica, 40
- hiperbólcia de Z^Σ , 40
- hiperbólica, 40
- não-distinguidas, 27
- Sistema
 - dessingularizado, 114
 - diferencial-algébrico, 111
 - singularmente perturbado, 111
- Tangência
 - cúbica, 24
 - invisível, 25
 - quadrática, 24
 - regular, 25
 - singular, 25
 - visível, 25
- Teorema
 - da Função Implícita, 37
 - de Grobman-Hartman, 40
 - do Fluxo Tubular, 37
- Trajetória
 - de um campo suave, 26
 - local de um campo de Filippov, 26
- Variedade
 - crítica, 112
 - lenta, 112