

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
FACULDADE DE ENGENHARIA DE BAURU  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**JOÃO RAFAEL ALVES**

**ANÁLISE DINÂMICA DE UM SISTEMA DE ISOLAMENTO DE VIBRAÇÕES POR  
DISPOSITIVOS ELETROMECAÑICOS**

**BAURU**

**2017**

**JOÃO RAFAEL ALVES**

**ANÁLISE DINÂMICA DE UM SISTEMA DE ISOLAMENTO DE VIBRAÇÕES POR  
DISPOSITIVOS ELETROMECCÂNICOS**

Dissertação de mestrado apresentada ao programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Estadual Paulista como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Bento Rodrigues de Pontes Junior

**BAURU**

**2017**

Alves, João Rafael.

Análise dinâmica de um sistema de isolamento de vibrações por dispositivos eletromecânicos / João Rafael Alves, 2017

127 f. : il.

Orientador: Bento Rodrigues de Pontes Junior

Dissertação (Mestrado)-Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia, Bauru, 2017

1. Amortecimento eletromecânico. 2. Sistema não linear. 3. Caos. I. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia. II. Título.

**ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE Mestrado de JOÃO RAFAEL ALVES, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA, DA FACULDADE DE ENGENHARIA.**

Aos 31 dias do mês de janeiro do ano de 2017, às 14:30 horas, no(a) Anfiteatro da Seção Técnica de Pós-graduação da FEB, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Prof. Dr. BENTO RODRIGUES DE PONTES JUNIOR - Orientador(a) do(a) Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Bauru, Prof. Dr. MARCIO ANTONIO BAZANI do(a) Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Prof. Dr. ANDRE LUIZ ANDREOLI do(a) Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Bauru/UNESP, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da DISSERTAÇÃO DE Mestrado de JOÃO RAFAEL ALVES, intitulada **ANÁLISE DINÂMICA DE UM SISTEMA DE ISOLAMENTO DE VIBRAÇÕES POR DISPOSITIVOS ELETRÔMECÂNICOS**. Após a exposição, o discente foi arguido oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: Aprovado. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.

  
Prof. Dr. BENTO RODRIGUES DE PONTES JUNIOR

  
Prof. Dr. MARCIO ANTONIO BAZANI

  
Prof. Dr. ANDRE LUIZ ANDREOLI

## DEDICATÓRIA

A minha esposa, Laura, que me viu dividir o nosso tempo de lazer para o cumprimento dessa fase, e que sempre me apoiou em todas as decisões.

A meus pais, João Carlos e Rosemeire, que nunca pouparam esforços para que eu pudesse seguir em frente nos meus estudos.

Ao restante de minha família e amigos, que sempre me incentivaram na busca de meus sonhos.

E, por fim, especialmente a minha filha, Helena, que ainda não sabe de toda a minha dedicação nesse período, mas que seguramente se espelhará neste trabalho em seu futuro.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a toda a minha família, em especial a minha esposa Laura, pelo incentivo e compreensão no cumprimento de mais essa fase acadêmica.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Bento Rodrigues de Pontes Junior, pelo direcionamento e ajuda em todo o processo de construção deste trabalho.

Aos demais professores do programa, pelos ensinamentos passados durante as aulas e debates.

Aos colegas participantes do programa de Pós-Graduação, pelos conhecimentos compartilhados durante o período de convívio e estudo.

E, finalmente, a todos que contribuíram de maneira direta ou indireta na concepção desta dissertação.

“Duvidar de tudo ou acreditar em tudo são atitudes preguiçosas. Dispensam-nos de refletir.”

Henri Poincaré

## RESUMO

ALVES, J. R., ANÁLISE DINÂMICA DE UM SISTEMA DE ISOLAMENTO DE VIBRAÇÕES POR DISPOSITIVOS ELETROMECÂNICOS, Bauru: Faculdade de Engenharia, UNESP – Universidade Estadual Paulista, 2016, 125 p., Dissertação (Mestrado).

Quatro configurações de circuito elétrico são estudadas como opções de ligação em dispositivos eletromecânicos: puramente resistivo, RL em série, RLC em série e RLC em série com indutância de variação não linear. Respostas em frequência, diagramas de bifurcação, históricos no tempo, planos de fase, mapas de Poincaré e espectros de frequência são utilizados nas análises. Os três circuitos lineares explorados na dissertação revelam algumas diferenças em termos da transmissibilidade de deslocamento. O sistema com circuito puramente resistivo tem as mesmas características de um sistema puramente mecânico e viscosamente amortecido, mas a resistência elétrica e o fator de amortecimento viscoso se relacionam de forma inversamente proporcional. As respostas dos circuitos RL e RLC, ambos em série, apresentam aspectos mais comportados. A principal diferença entre os sistemas com circuitos RL e RLC em série está principalmente na transmissibilidade para baixas frequências. Embora com uma pequena diferença, a transmissibilidade do sistema com circuito RLC é menor do que a do sistema com circuito RL, para baixas frequências. Para o sistema não linear, nas respostas em frequência e diagramas de bifurcação percebem-se regiões de resposta desordenada para valores baixos de resistência elétrica em determinadas faixas de frequência. Com a análise das respostas, notam-se as presenças dos comportamentos dinâmicos periódico, quasi-periódico e caótico. Para valores baixos de resistência elétrica, a escolha do valor da capacitância é de suma importância para a classificação do tipo de comportamento dinâmico do sistema. Pequenas variações do valor da capacitância representam saltos enormes da dinâmica do sistema. Muitas vezes, mesmo dentro do campo de tolerância especificado pelos fornecedores de componentes elétricos, o valor da capacitância pode resultar em comportamentos caóticos indesejados.

**Palavras-chave:** Amortecedor eletromecânico, sistema não linear, caos.



## ABSTRACT

ALVES, J. R., DYNAMIC ANALYSIS OF A VIBRATION ISOLATION SYSTEM FROM ELECTROMECHANICAL DEVICES, Bauru: Engineering College, UNESP – São Paulo State University, 2016, 125 p., Dissertation (Master's degree).

Four configurations of electrical circuit are studied as options of electromechanical devices: purely resistive, RL in series, RLC in series and RLC in series with nonlinear inductance. Frequency responses, bifurcation diagrams, time series, phase plane, Poincaré maps and frequency spectrum are used in analysis. The three linear circuits explored in this dissertation reveal some differences in terms of displacement transmissibility. The system with purely resistive circuit has the same characteristics of a purely viscous damped, but the electrical resistance and the damping factor are inversely proportional. Responses of circuits RL and RLC, both in series, present behaving aspects. The main difference between the systems with RL and RLC circuits is related to the transmissibility for low frequencies. Although with a small difference, the transmissibility of RLC circuit system is smaller than the RL circuit system, for low frequencies. For the nonlinear system, it is possible to perceive disordered response regions for small values of electrical resistance on certain frequency bands. After response analysis, it is noted the presence of periodic, quasi-periodic and chaotic behaviors. For small values of electrical resistance, the choice of capacitance value is very important to determine the type of the dynamic behavior. Small differences of the capacitance values mean significant changes in the system dynamics. It is not rare that even inside the tolerance of electrical components, the capacitance value can result in chaotic behaviors.

**Keywords:** Electromechanical damper, nonlinear system, chaos.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 –	Modelo de um quarto de veículo com suspensão eletromagnética (ZUO; ZHANG, 2013).....	28
Figura 2.2 –	Modelo discreto de uma atuador eletromagnético idealizado excitado pela base (ELLIOTT; ZILLETTI, 2013).....	29
Figura 2.3 –	Diagrama esquemático de um modelo simplificado de um condutor sujeito à ação eletromagnética (HO; WOO, 2010)...	30
Figura 2.4 –	Típica configuração de um amortecedor eletromagnético (ZHU; SHEN; XU, 2012).....	30
Figura 2.5 –	Modelo simplificado do amortecedor eletromagnético com dois tipos de circuito elétrico (SHEN; ZHU; XU, 2012).....	31
Figura 2.6 –	Modelo discreto de um oscilador do tipo massa-mola-amortecedor acoplado a um amortecedor eletromagnético (BEHRENS; FLEMING; MOHEIMANI, 2003).....	31
Figura 2.7 –	Dispositivo de amortecimento eletromecânico (YAMAPI, 2006).....	32
Figura 2.8 –	Modelo do sistema elétrico de vibro-impacto estudado por Ho, Nguyen e Woo (2010).....	33
Figura 2.9 –	Variação da indutância do solenoide aproximada pelas formas Gaussiana e cossenoidal obtida por Ho, Nguyen e Woo (2010).....	33
Figura 3.1 –	Sistema mecânico viscosamente amortecido com excitação harmônica da base.....	35
Figura 3.2 –	Variação da transmissibilidade de deslocamento, $T_d$ , com a razão de frequências, $r$ , para alguns valores de fator de amortecimento, $\xi$ (Rao, 2008).....	39
Figura 3.3 –	Modelo físico do sistema acoplado a um amortecedor eletromecânico.....	40
Figura 3.4 –	Modelo esquemático do transdutor eletromagnético.....	41
Figura 3.5 –	(a) Modelo do transdutor de bobina móvel; (b) Grandezas físicas e direções (PREUMONT, 2006).....	42

Figura 3.6 –	Modelo físico do sistema acoplado ao transdutor magnético ligado a um circuito elétrico RLC em série.....	48
Figura 3.7 –	Modelo físico do sistema acoplado ao transdutor magnético ligado a um circuito elétrico RLC em série, onde $L$ é não linear.....	54
Figura 5.1 –	Transmissibilidade, $T_d$ , em função da razão de frequências, $r$ , para diversos valores de resistência elétrica, $R$ . Eixos logarítmicos. Circuito elétrico puramente resistivo. (a) $R = 0,3 \Omega$ ; (b) $R = 10 \Omega$ ; (c) $R = 20 \Omega$ ; (d) $R = 40 \Omega$ .....	61
Figura 5.2 –	Transmissibilidade, $T_d$ , em função da razão de frequências, $r$ , para diversos valores de indutância, $L$ . Eixos logarítmicos. Circuito elétrico RL em série. (a) $L = 0,1 \text{ H}$ ; (b) $L = 0,5 \Omega$ ; (c) $L = 1 \Omega$ ; (d) $L = 2 \Omega$ .....	64
Figura 5.3 –	Transmissibilidade, $T_d$ , em função da razão de frequências, $r$ , para diversos valores de resistência elétrica, $R$ , e indutância, $L$ , constante em $0,1 \text{ H}$ . Eixos logarítmicos. Circuito elétrico RL em série. (a) $R = 0,3 \Omega$ ; (b) $R = 10 \Omega$ ; (c) $R = 20 \Omega$ ; (d) $R = 40 \Omega$ .....	66
Figura 5.4 –	Transmissibilidade, $T_d$ , em função da razão de frequências, $r$ , para diversos valores de resistência elétrica, $R$ , e indutância, $L$ , constante em $2 \text{ H}$ . Eixos logarítmicos. Circuito elétrico RL em série. (a) $R = 0,3 \Omega$ ; (b) $R = 10 \Omega$ ; (c) $R = 20 \Omega$ ; (d) $R = 40 \Omega$ .....	68
Figura 5.5 –	Transmissibilidade, $T_d$ , em função da razão de frequências, $r$ , para diversos valores de capacitância, $C$ . Foram adotados os valores de $0,1 \text{ H}$ para $L$ e $10 \Omega$ para $R$ . Eixos logarítmicos. Circuito elétrico RLC em série. (a) $C = 0,005 \text{ F}$ ; (b) $C = 0,01 \text{ F}$ ; (c) $C = 0,05 \text{ F}$ ; (d) $C = 0,15 \text{ F}$ .....	70
Figura 5.6 –	Transmissibilidade, $T_d$ , em função da razão de frequências, $r$ , para diversos valores de resistência elétrica, $R$ . Foram adotados os valores de $0,1 \text{ H}$ para $L$ e $0,05 \text{ F}$ para $C$ . Eixos logarítmicos. Circuito elétrico RLC em série. (a) $R = 0,3 \Omega$ ; (b) $R = 10 \Omega$ ; (c) $R = 20 \Omega$ ; (d) $R = 40 \Omega$ .....	72

Figura 5.7 –	Curva característica da indutância variável na forma Gaussiana, $L(x)$ , em função do deslocamento do corpo ou posição da bobina, $x$ .....	74
Figura 5.8 –	Transmissibilidade, $T_d$ , em função da razão de frequências, $r$ , para diversos valores de resistência elétrica, $R$ . Eixos logarítmicos. Foi adotado o valor de 0,03 F para $C$ . Circuito elétrico RLC em série com indutância não linear. (a) $R = 0,3 \Omega$ ; (b) $R = 10 \Omega$ ; (c) $R = 20 \Omega$ ; (d) $R = 40 \Omega$ .....	76
Figura 5.9 –	Diagramas de bifurcação para a capacitância, $C$ , como parâmetro de controle: $R = 0,3 \Omega$ . (a) $r = 0,5$ ; (b) $r = 1$ ; (c) $r = 4$ ; (d) $r = 10$ .....	78
Figura 5.10 –	Diagramas de bifurcação para a capacitância, $C$ , como parâmetro de controle: $R = 0,3 \Omega$ e $r = 0,5$ .....	79
Figura 5.11 –	Resposta do sistema com circuito elétrico RLC em série com indutância não linear: $C = 0,01315 \text{ F}$ , $R = 0,3 \Omega$ e $r = 0,5$ . (a) Histórico no tempo do deslocamento $x$ ; (b) Plano de fase no regime permanente; (c) Mapa de Poincaré; (d) FFT (espectro de frequências).....	80
Figura 5.12 –	Resposta do sistema com circuito elétrico RLC em série com indutância não linear: $C = 0,01436 \text{ F}$ , $R = 0,3 \Omega$ e $r = 0,5$ . (a) Histórico no tempo do deslocamento $x$ ; (b) Plano de fase no regime permanente; (c) Mapa de Poincaré; (d) FFT (espectro de frequências).....	81
Figura 5.13 –	Resposta do sistema com circuito elétrico RLC em série com indutância não linear: $C = 0,0154 \text{ F}$ , $R = 0,3 \Omega$ e $r = 0,5$ . (a) Histórico no tempo do deslocamento $x$ ; (b) Plano de fase no regime permanente; (c) Mapa de Poincaré; (d) FFT (espectro de frequências).....	82
Figura 5.14 –	Resposta do sistema com circuito elétrico RLC em série com indutância não linear: $C = 0,01657 \text{ F}$ , $R = 0,3 \Omega$ e $r = 0,5$ . (a) Histórico no tempo do deslocamento $x$ ; (b) Plano de fase no regime permanente; (c) Mapa de Poincaré; (d) FFT (espectro de frequências).....	83

Figura 5.15 – Resposta do sistema com circuito elétrico RLC em série com indutância não linear: $C = 0,01725 \text{ F}$ , $R = 0,3 \Omega$ e $r = 0,5$ . (a) Histórico no tempo do deslocamento $x$ ; (b) Plano de fase no regime permanente; (c) Mapa de Poincaré; (d) FFT (espectro de frequências).....	84
Figura 5.16 – Resposta do sistema com circuito elétrico RLC em série com indutância não linear: $C = 0,01828 \text{ F}$ , $R = 0,3 \Omega$ e $r = 0,5$ . (a) Histórico no tempo do deslocamento $x$ ; (b) Plano de fase no regime permanente; (c) Mapa de Poincaré; (d) FFT (espectro de frequências).....	85
Figura 5.17 – Resposta do sistema com circuito elétrico RLC em série com indutância não linear: $C = 0,028 \text{ F}$ , $R = 0,3 \Omega$ e $r = 0,5$ . (a) Histórico no tempo do deslocamento $x$ ; (b) Plano de fase no regime permanente; (c) Mapa de Poincaré; (d) FFT (espectro de frequências).....	86
Figura 5.18 – Diagramas de bifurcação para a capacitância, $C$ , como parâmetro de controle: $R = 0,3 \Omega$ e $r = 1$ .....	87
Figura 5.19 – Resposta do sistema com circuito elétrico RLC em série com indutância não linear: $C = 0,01302 \text{ F}$ , $R = 0,3 \Omega$ e $r = 1$ . (a) Histórico no tempo do deslocamento $x$ ; (b) Plano de fase no regime permanente; (c) Mapa de Poincaré; (d) FFT (espectro de frequências).....	88
Figura 5.20 – Resposta do sistema com circuito elétrico RLC em série com indutância não linear: $C = 0,01707 \text{ F}$ , $R = 0,3 \Omega$ e $r = 1$ . (a) Histórico no tempo do deslocamento $x$ ; (b) Plano de fase no regime permanente; (c) Mapa de Poincaré; (d) FFT (espectro de frequências).....	89
Figura 5.21 – Resposta do sistema com circuito elétrico RLC em série com indutância não linear: $C = 0,0204 \text{ F}$ , $R = 0,3 \Omega$ e $r = 1$ . (a) Histórico no tempo do deslocamento $x$ ; (b) Plano de fase no regime permanente; (c) Mapa de Poincaré; (d) FFT (espectro de frequências).....	90

Figura 5.22 – Resposta do sistema com circuito elétrico RLC em série com indutância não linear: $C = 0,02161 \text{ F}$ , $R = 0,3 \Omega$ e $r = 1$ . (a) Histórico no tempo do deslocamento $x$ ; (b) Plano de fase no regime permanente; (c) Mapa de Poincaré; (d) FFT (espectro de frequências).....	91
Figura 5.23 – Resposta do sistema com circuito elétrico RLC em série com indutância não linear: $C = 0,024 \text{ F}$ , $R = 0,3 \Omega$ e $r = 1$ . (a) Histórico no tempo do deslocamento $x$ ; (b) Plano de fase no regime permanente; (c) Mapa de Poincaré; (d) FFT (espectro de frequências).....	92
Figura 5.24 – Resposta do sistema com circuito elétrico RLC em série com indutância não linear: $C = 0,02606 \text{ F}$ , $R = 0,3 \Omega$ e $r = 1$ . (a) Histórico no tempo do deslocamento $x$ ; (b) Plano de fase no regime permanente; (c) Mapa de Poincaré; (d) FFT (espectro de frequências).....	93
Figura 5.25 – Diagramas de bifurcação para a capacitância, $C$ , como parâmetro de controle: $R = 0,3 \Omega$ e $r = 4$ .....	94
Figura 5.26 – Resposta do sistema com circuito elétrico RLC em série com indutância não linear: $C = 0,01315 \text{ F}$ , $R = 0,3 \Omega$ e $r = 4$ . (a) Histórico no tempo do deslocamento $x$ ; (b) Plano de fase no regime permanente; (c) Mapa de Poincaré; (d) FFT (espectro de frequências).....	95
Figura 5.27 – Resposta do sistema com circuito elétrico RLC em série com indutância não linear: $C = 0,02 \text{ F}$ , $R = 0,3 \Omega$ e $r = 4$ . (a) Histórico no tempo do deslocamento $x$ ; (b) Plano de fase no regime permanente; (c) Mapa de Poincaré; (d) FFT (espectro de frequências).....	96
Figura 5.28 – Resposta do sistema com circuito elétrico RLC em série com indutância não linear: $C = 0,02436 \text{ F}$ , $R = 0,3 \Omega$ e $r = 4$ . (a) Histórico no tempo do deslocamento $x$ ; (b) Plano de fase no regime permanente; (c) Mapa de Poincaré; (d) FFT (espectro de frequências).....	97

Figura 5.29 – Resposta do sistema com circuito elétrico RLC em série com indutância não linear: $C = 0,026 \text{ F}$ , $R = 0,3 \Omega$ e $r = 4$ . (a) Histórico no tempo do deslocamento $x$ ; (b) Plano de fase no regime permanente; (c) Mapa de Poincaré; (d) FFT (espectro de frequências).....	98
Figura 5.30 – Resposta do sistema com circuito elétrico RLC em série com indutância não linear: $C = 0,0298 \text{ F}$ , $R = 0,3 \Omega$ e $r = 4$ . (a) Histórico no tempo do deslocamento $x$ ; (b) Plano de fase no regime permanente; (c) Mapa de Poincaré; (d) FFT (espectro de frequências).....	99
Figura 5.31 – Diagrama de bifurcação para a capacitância, $C$ , como parâmetro de controle: $R = 0,3 \Omega$ e $r = 10$ .....	100
Figura 5.32 – Resposta do sistema com circuito elétrico RLC em série com indutância não linear: $C = 0,02 \text{ F}$ , $R = 0,3 \Omega$ e $r = 10$ . (a) Histórico no tempo do deslocamento $x$ ; (b) Plano de fase no regime permanente; (c) Mapa de Poincaré; (d) FFT (espectro de frequências).....	101
Figura 5.33 – Diagramas de bifurcação para a capacitância, $C$ , como parâmetro de controle: $R = 10 \Omega$ . (a) $r = 0,5$ ; (b) $r = 1$ ; (c) $r = 4$ ; (d) $r = 10$ .....	102
Figura 5.34 – Diagrama de bifurcação para a capacitância, $C$ , como parâmetro de controle: $R = 10 \Omega$ e $r = 0,5$ .....	103
Figura 5.35 – Resposta do sistema com circuito elétrico RLC em série com indutância não linear: $C = 0,025 \text{ F}$ , $R = 10 \Omega$ e $r = 0,5$ . (a) Histórico no tempo do deslocamento $x$ ; (b) Plano de fase no regime permanente; (c) Mapa de Poincaré; (d) FFT (espectro de frequências).....	104
Figura 5.36 – Diagrama de bifurcação para a capacitância, $C$ , como parâmetro de controle: $R = 10 \Omega$ e $r = 1$ .....	105

Figura 5.37 – Resposta do sistema com circuito elétrico RLC em série com indutância não linear: $C = 0,025 \text{ F}$ , $R = 10 \Omega$ e $r = 1$ . (a) Histórico no tempo do deslocamento $x$ ; (b) Plano de fase no regime permanente; (c) Mapa de Poincaré; (d) FFT (espectro de frequências).....	106
Figura 5.38 – Diagrama de bifurcação para a capacitância, $C$ , como parâmetro de controle: $R = 10 \Omega$ e $r = 4$ .....	107
Figura 5.39 – Resposta do sistema com circuito elétrico RLC em série com indutância não linear: $C = 0,01513 \text{ F}$ , $R = 10 \Omega$ e $r = 4$ . (a) Histórico no tempo do deslocamento $x$ ; (b) Plano de fase no regime permanente; (c) Mapa de Poincaré; (d) FFT (espectro de frequências).....	108
Figura 5.40 – Resposta do sistema com circuito elétrico RLC em série com indutância não linear: $C = 0,01549 \text{ F}$ , $R = 10 \Omega$ e $r = 4$ . (a) Histórico no tempo do deslocamento $x$ ; (b) Plano de fase no regime permanente; (c) Mapa de Poincaré; (d) FFT (espectro de frequências).....	109
Figura 5.41 – Resposta do sistema com circuito elétrico RLC em série com indutância não linear: $C = 0,02454 \text{ F}$ , $R = 10 \Omega$ e $r = 4$ . (a) Histórico no tempo do deslocamento $x$ ; (b) Plano de fase no regime permanente; (c) Mapa de Poincaré; (d) FFT (espectro de frequências).....	110
Figura 5.42 – Resposta do sistema com circuito elétrico RLC em série com indutância não linear: $C = 0,02791 \text{ F}$ , $R = 10 \Omega$ e $r = 4$ . (a) Histórico no tempo do deslocamento $x$ ; (b) Plano de fase no regime permanente; (c) Mapa de Poincaré; (d) FFT (espectro de frequências).....	111
Figura 5.43 – Diagrama de bifurcação para a capacitância, $C$ , como parâmetro de controle: $R = 10 \Omega$ e $r = 10$ .....	112



<p>Figura 5.44 – Resposta do sistema com circuito elétrico RLC em série com indutância não linear: <math>C = 0,025 \text{ F}</math>, <math>R = 10 \Omega</math> e <math>r = 10</math>.  (a) Histórico no tempo do deslocamento <math>x</math>; (b) Plano de fase no regime permanente; (c) Mapa de Poincaré; (d) FFT (espectro de frequências).....</p>	113
<p>Figura 5.45 – Diagramas de bifurcação para a capacitância, <math>C</math>, como parâmetro de controle: <math>R = 20 \Omega</math>. (a) <math>r = 0,5</math>; (b) <math>r = 1</math>; (c) <math>r = 4</math>; (d) <math>r = 10</math>.....</p>	114

## LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 –	Parâmetros mantidos constantes na integração numérica para a resposta da figura 5.1. Circuito elétrico puramente resistivo.....	61
Tabela 5.2 –	Frequências naturais do sistema para os parâmetros usados na figura 5.1. Circuito puramente resistivo.....	62
Tabela 5.3 –	Parâmetros mantidos constantes na integração numérica para as respostas da figura 5.2. Circuito elétrico RL em série.....	63
Tabela 5.4 –	Frequências naturais do sistema para os parâmetros usados na figura 5.2. Foi utilizado o valor de resistência elétrica, R, de 10 $\Omega$ . Circuito elétrico RL em série.....	65
Tabela 5.5 –	Parâmetros mantidos constantes na integração numérica para as respostas da figura 5.3. Circuito elétrico RL em série.....	65
Tabela 5.6 –	Frequências naturais do sistema para os parâmetros usados na figura 5.3. Foi utilizado o valor de indutância, L, de 0,1 H. Circuito elétrico RL em série.....	66
Tabela 5.7 –	Parâmetros mantidos constantes na integração numérica para as respostas da figura 5.4. Circuito elétrico RL em série.....	67
Tabela 5.8 –	Frequências naturais do sistema para os parâmetros usados na figura 5.4. Foi utilizado o valor de indutância, L, de 2 H. Circuito elétrico RL em série.....	67
Tabela 5.9 –	Parâmetros mantidos constantes na integração numérica para a construção da figura 5.5. Circuito elétrico RLC em série.....	69
Tabela 5.10 –	Frequências naturais do sistema para os parâmetros usados na figura 5.5. Foi utilizado o valor de resistência elétrica, R, de 10 $\Omega$ , e de indutância, L, de 0,1 H. Circuito elétrico RLC em série.....	69

Tabela 5.11 –	Parâmetros mantidos constantes na integração numérica para a construção da figura 5.6. Circuito elétrico RLC em série.....	71
Tabela 5.12 –	Frequências naturais do sistema para os parâmetros usados na figura 5.6. Foi utilizado o valor de capacitância, C, de 0,05 F, e de indutância, L, de 0,1 H. Circuito elétrico RLC em série.....	71
Tabela 5.13 –	Parâmetros utilizados na construção da curva característica da indutância não linear pela posição da figura 5.7.....	74
Tabela 5.14 –	Parâmetros mantidos constantes na integração numérica para a construção da figura 5.8. Circuito elétrico RLC em série com indutância não linear.....	75
Tabela 5.15 –	Parâmetros mantidos constantes na integração numérica para a construção das figuras de 5.9 a 5.45. Circuito elétrico RLC em série com indutância não linear.....	77

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Letras latinas

Símbolo	Descrição	Unidade
$a_0$	Coeficiente da equação característica	-
$a_1$	Coeficiente da equação característica	-
$a_2$	Coeficiente da equação característica	-
$a_3$	Coeficiente da equação característica	-
$a_4$	Coeficiente da equação característica	-
$A$	Coeficiente da função Gaussiana	H.m
$B$	Módulo do campo magnético	T
$c$	Coeficiente de amortecimento	N.s/m
$C$	Capacitância do sistema	F
$D$	Matriz característica do sistema	-
$e$	Força eletromotriz induzida na espira	V
$f$	Força eletromagnética total produzida pela bobina	N
$f_4$	Equação da derivada da variável de estado $\dot{u}_4$ utilizada na linearização	-
$f_4'$	Equação linearizada da derivada da variável de estado $\dot{u}_4$ pela série de Taylor	-
$i$	Corrente elétrica induzida na bobina	A
$j$	Unidade imaginária	-
$k$	Rigidez da mola	N/m
$l$	Comprimento do fio da bobina	m
$L$	Indutância total do sistema	H
$L(x)$	Indutância com variação não linear em função da posição	H
$L_a$	Constante criada para facilitar os cálculos	H
$L_b$	Indutância da bobina	H
$L_c$	Indutância do circuito	H
$L_0$	Indutância do solenoide na posição inicial	H
$L_1$	Lagrangeano do sistema mecânico	J
$L_2$	Lagrangeano do sistema elétrico	J
$m$	Massa do corpo suspenso	kg

$q$	Carga elétrica	C
$\dot{q}$	Corrente elétrica	A
$\ddot{q}$	Derivada da corrente elétrica	A/s
$Q$	Carga elétrica no domínio de Laplace	-
$Q_1$	Forças não conservativas do sistema mecânico	N
$Q_2$	Tensões elétricas não conservativas	V
$r$	Razão entre a frequência de excitação e a frequência natural mecânica	-
$R$	Resistência elétrica total do sistema	$\Omega$
$R_b$	Resistência elétrica intrínseca da bobina	$\Omega$
$R_c$	Resistência elétrica do circuito	$\Omega$
$s$	Variável complexa no domínio de Laplace	-
$t$	Tempo	s
$T$	Energia cinética	J
$T_d$	Transmissibilidade de deslocamento	-
$T_v$	Constante do transdutor	N/A
$u$	Vetor de estados	-
$u_1$	Variável de estado	-
$u_2$	Variável de estado	-
$u_3$	Variável de estado	-
$u_4$	Variável de estado	-
$\dot{u}$	Derivada do vetor de estados	-
$\dot{u}_1$	Derivada da variável de estado	-
$\dot{u}_2$	Derivada da variável de estado	-
$\dot{u}_3$	Derivada da variável de estado	-
$\dot{u}_4$	Derivada da variável de estado	-
$\dot{u}'$	Derivada do vetor de estados na forma linearizada	-
$\bar{u}$	Ponto de equilíbrio estático	-
$\bar{u}_1$	Variável do ponto de equilíbrio estático	-
$\bar{u}_2$	Variável do ponto de equilíbrio estático	-
$\bar{u}_3$	Variável do ponto de equilíbrio estático	-
$\bar{u}_4$	Variável do ponto de equilíbrio estático	-
$U_e$	Energia elétrica armazenada no campo elétrico do capacitor	J

$U_m$	Energia magnética do indutor	J
$v$	Velocidade da bobina	m/s
$V$	Energia potencial	J
$x$	Deslocamento vertical do corpo	m
$\dot{x}$	Velocidade do corpo suspenso na direção vertical	m/s
$\ddot{x}$	Aceleração do corpo suspenso na direção vertical	m/s <sup>2</sup>
$X$	Amplitude do deslocamento da massa	m
$\mathbf{X}$	Deslocamento do corpo no domínio de Laplace	-
$y$	Deslocamento vertical da base	m
$\dot{y}$	Velocidade da base na direção vertical	m/s
$Y$	Amplitude do deslocamento da base	m
$\mathbf{Y}$	Deslocamento da base no domínio de Laplace	-
$Z_e$	Impedância elétrica no domínio de Laplace	-
$Z_m$	Impedância mecânica no domínio de Laplace	-

Letras gregas

<b>Símbolo</b>	<b>Descrição</b>	<b>Unidade</b>
$\Delta_1$	Determinante do método de Routh-Hurwitz (MEIROVITCH, 1970)	-
$\Delta_2$	Determinante do método de Routh-Hurwitz (MEIROVITCH, 1970)	-
$\Delta_3$	Determinante do método de Routh-Hurwitz (MEIROVITCH, 1970)	-
$\Delta_4$	Determinante do método de Routh-Hurwitz (MEIROVITCH, 1970)	-
$\lambda$	Autovalores da matriz característica ou raízes da equação característica	-
$\xi$	Fator de amortecimento adimensional	-
$\pi$	Constante pi $\approx 3,1415$	-
$\sigma$	Desvio padrão	m
$\omega$	Frequência de excitação da base	rad/s
$\omega_c$	Frequência natural do sistema	rad/s
$\omega_n$	Frequência natural do sistema mecânico	rad/s

## SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	25
1.1 MOTIVAÇÃO E JUSTIFICATIVA	26
1.2 OBJETIVOS	26
1.3 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO	27
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	28
2.1 DISPOSITIVOS ELETROMECÂNICOS	28
2.2 INDUTÂNCIA COM VARIAÇÃO NÃO LINEAR	33
3 DEFINIÇÃO E MODELAGEM	35
3.1 SISTEMA VISCOSAMENTE AMORTECIDO	35
3.2 TRANSMISSIBILIDADE DE DESLOCAMENTO	37
3.3 MODELAGEM FÍSICA	40
3.4 MODELAGEM MATEMÁTICA DO TRANSDUTOR ELETROMAGNÉTICO	41
3.5 MODELAGEM MATEMÁTICA DO SISTEMA MECÂNICO	43
3.6 MODELAGEM MATEMÁTICA DO SISTEMA ELÉTRICO	45
3.7 EQUAÇÕES DO MODELO LINEAR	47
3.8 EQUAÇÕES NO ESPAÇO DE ESTADOS DO MODELO LINEAR	49
3.9 FUNÇÃO TRANSFERÊNCIA DO MODELO LINEAR	51
3.10 EQUAÇÕES DO MODELO NÃO LINEAR	54
3.11 EQUAÇÕES NO ESPAÇO DE ESTADOS DO MODELO NÃO LINEAR	56
4 METODOLOGIA	58
5 RESULTADOS E DISCUSSÕES	60
5.1 RESPOSTAS DO SISTEMA LINEAR	60
5.1.1 CIRCUITO ELÉTRICO PURAMENTE RESISTIVO	60
5.1.2 CIRCUITO ELÉTRICO RL EM SÉRIE	63
5.1.3 CIRCUITO ELÉTRICO RLC EM SÉRIE	69



5.2 RESPOSTAS DO SISTEMA NÃO LINEAR	73
6 ANÁLISE DE ESTABILIDADE DO SISTEMA NÃO LINEAR	115
7 CONCLUSÕES	122
8 TRABALHOS FUTUROS	125
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	126

# 1 INTRODUÇÃO

Vibração é um termo que descreve a oscilação em um sistema mecânico e pode ser definida em termos de sua frequência e amplitude (HARRIS e PIERSOL, 2002). Por exemplo, ouvimos porque nossos tímpanos vibram, e vemos porque as ondas de luz sofrem vibração. Os primeiros estudiosos da área de vibração concentraram seus esforços no entendimento dos fenômenos naturais e no desenvolvimento de teorias matemáticas para descrever a vibração de sistemas físicos. Mais recentemente, devido ao efeito devastador que as vibrações podem causar às máquinas e estruturas, o estudo de vibrações tornou-se um procedimento-padrão no projeto e desenvolvimento da maioria dos sistemas de engenharia, como projeto de máquinas, fundações, estruturas, motores, turbinas e sistemas de controle (RAO, 2008).

A necessidade de controle das vibrações excessivas motivou pesquisadores a encontrar novas soluções para esse problema de controle. Conforme Rao (2008), os níveis de vibração podem ser controlados de quatro formas:

- 1) Controlando as frequências naturais do sistema, de modo a evitar a ressonância sob excitações externas;
- 2) Evitando resposta excessiva do sistema, mesmo em ressonância, utilizando um dispositivo de amortecimento;
- 3) Reduzindo a transmissão das forças de excitação de uma parte da máquina para outra, com o uso de isoladores de vibração;
- 4) Reduzindo a resposta do sistema mediante a adição de um absorvedor de vibração.

Se um sistema sofre vibração forçada, sua amplitude tende a ficar maior em valores de frequência de excitação externa próximos ao valor de frequências naturais do sistema, se não houver nenhum amortecimento. A presença de amortecimento sempre limita a amplitude de vibração. Em casos em que uma máquina ou sistema funcionam em uma faixa de velocidades, talvez não seja possível evitar a ressonância em todas as condições de funcionamento. Nesses casos, torna-se viável a introdução de amortecimento. São várias as possibilidades, desde a utilização de materiais estruturais de elevado amortecimento, como o ferro fundido, materiais laminados ou sanduíches, introdução de juntas aparafusadas ou

rebitadas (RAO, 2008). Outras opções são os amortecedores viscosos e os amortecedores eletromecânicos.

Os dispositivos eletromecânicos, além de serem utilizados no controle de movimentos indesejados, podem ser aplicados em situações em que se busca o reaproveitamento das energias provenientes das vibrações. Nesse caso, o mecanismo estudado é o de colheita de energia.

## **1.1 MOTIVAÇÃO E JUSTIFICATIVA**

A necessidade de encontrar formas mais eficazes no controle de vibrações indesejadas levou os pesquisadores a estudar diversos tipos diferentes de amortecedores. Os dispositivos amortecedores eletromecânicos, especificamente, apresentam vantagens se comparados aos dispositivos puramente mecânicos, relacionadas principalmente à facilidade de emprego de técnicas de controle, aplicação em faixas de frequência maiores e facilidade de ajustes de parâmetros. Esses argumentos servem de motivação para este trabalho de dissertação.

Portanto, a justificativa deste trabalho é o estudo de um amortecedor eletromecânico para o controle de vibrações indesejadas que pode ser relacionado a sistemas mecânicos de vários tipos, como veículos, assentos, máquinas, estruturas, dentre outros.

## **1.2 OBJETIVOS**

O objetivo principal dessa dissertação de mestrado é o estudo sobre a dinâmica, controle e estabilidade de amortecedores eletromecânicos aplicados em vários ramos da engenharia, relacionando as variáveis do domínio físico elétrico com o amortecimento mecânico que pode ser obtido no sistema.

Portanto, no desenvolvimento dessa pesquisa, pretende-se considerar as seguintes atividades:

- 1) Determinação dos parâmetros ótimos (resistência elétrica, indutância e capacitância) e comparação das diferentes configurações de amortecedores eletromecânicos, através de procedimentos de investigação numéricos;

- 2) Determinação das amplitudes do comportamento harmônico desses dispositivos eletromecânicos;
- 3) Determinação dos limites (fronteiras) de estabilidade do comportamento harmônico desses dispositivos eletromecânicos, através de procedimentos de investigação analíticos;
- 4) Determinação da eficiência na redução de vibrações dos modelos de dispositivos eletromecânicos estudados, tendo em vista, as aplicações dos denominados dispositivos eletromecânicos absorvedores de energia e vibração;
- 5) Determinação de estados regulares e estados caóticos desses dispositivos eletromecânicos, através de simulação numérica na resolução das equações de estado.

### **1.3 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO**

Após este capítulo introdutório, a dissertação está estruturada de acordo com a descrição a seguir:

- 1) O capítulo 1 apresenta a introdução do tema objeto da dissertação;
- 2) O capítulo 2 traz a revisão bibliográfica para mostrar o estado da arte do assunto que está sendo estudado, como forma de motivação;
- 3) No capítulo 3, apresentam-se algumas definições e a modelagem matemática dos sistemas dinâmicos estudados, obtendo-se as equações dinâmicas;
- 4) O capítulo 4 apresenta a metodologia empregada para a obtenção dos resultados e discussões;
- 5) Dentro do capítulo 5, analisam-se os resultados obtidos através de simulação numérica e as devidas discussões;
- 6) O capítulo 6 apresenta a análise de estabilidade do modelo não linear;
- 7) O capítulo 7 mostra as conclusões obtidas a partir dos resultados e da análise de estabilidade;
- 8) E, por fim, o capítulo 8 apresenta os assuntos de possível presença em trabalhos futuros.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A seguir, é exposta a revisão bibliográfica de trabalhos relacionados ao tema de amortecedores eletromecânicos. Em muitos casos, os mesmos dispositivos são aplicados também para armazenar ou colher a energia gerada por estruturas, veículos, assentos e outros tipos de osciladores mecânicos.

Os símbolos das figuras retiradas das referências não serão explicados nesta dissertação, pois o objetivo principal é mostrar a tendência de pesquisa do assunto abordado.

### 2.1 DISPOSITIVOS ELETROMECÂNICOS

Zuo e Zhang (2013) estudaram uma suspensão veicular eletromagnética para suprimir a vibração causada pela excitação proveniente das irregularidades da estrada e para colher a energia gerada. Para o modelo de um quarto de veículo, mostrado na figura 2.1, a solução analítica foi comparada com os resultados experimentais. Segundo eles, os resultados sugerem que a rugosidade da estrada, a rigidez do pneu e a velocidade do veículo têm grande influência no potencial de energia a ser aproveitada, enquanto que a rigidez da suspensão, o amortecimento eletromecânico e a massa do veículo têm influência insignificante para o sistema.

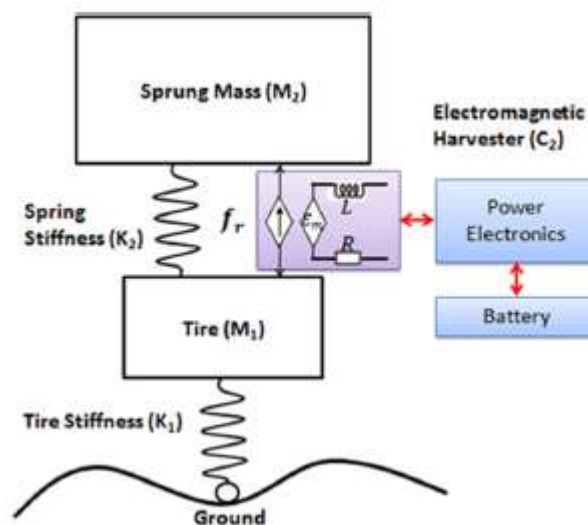


Figura 2.1 – Modelo de um quarto de veículo com suspensão eletromagnética (ZUO; ZHANG, 2013)

Com o objetivo de se comportar tanto como um amortecedor eletromagnético, quanto como um dispositivo para colheita de energia, Elliott e Zilletti (2013) determinaram que um transdutor eletromagnético deve possuir um bom acoplamento eletromecânico. Portanto, o maior valor que o parâmetro de acoplamento ou constante do transdutor assume é, aproximadamente, igual ao quadrado do produto entre a densidade de fluxo magnético e o comprimento do fio da bobina sujeito ao campo magnético, dividido pelo produto do amortecimento mecânico pela resistência elétrica. Ainda segundo os autores, uma grande eficiência pode ser obtida com grandes dispositivos, como, por exemplo, os utilizados no controle de estruturas de engenharia civil. O modelo estudado por Elliot e Zilletti (2013) é mostrado na figura 2.2.

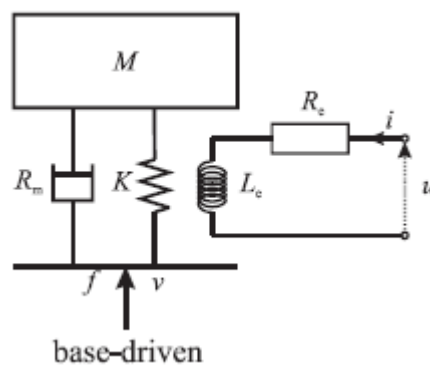


Figura 2.2 – Modelo discreto de um atuador eletromagnético idealizado excitado pela base (ELLIOTT; ZILLETTI, 2013)

Ho e Woo (2010) analisaram, analiticamente, o comportamento de um condutor em um campo magnético. O sistema envolve o uso de um solenoide ligado a um circuito RLC, e acoplado a um relé no estado sólido, para gerar maiores forças eletromagnéticas atuando no condutor, o qual oscila dentro do próprio solenoide. A figura 2.3 ilustra o sistema proposto por Ho e Woo (2010).

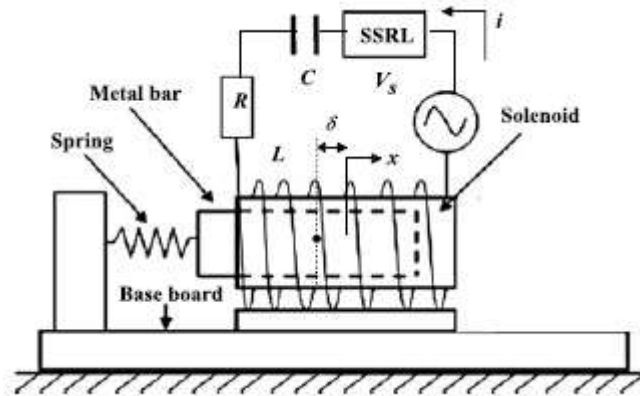


Figura 2.3 – Diagrama esquemático de um modelo simplificado de um condutor sujeito à ação eletromagnética (HO; WOO, 2010)

De acordo com Zhu, Shen e Xu (2012), com o passar das décadas, a pesquisa em controle de vibrações de estruturas tem focado principalmente em dissipação de energia, utilizando vários tipos de amortecedores. Eles propuseram um amortecedor eletromagnético linear, tanto para o amortecimento das vibrações, quanto para a colheita de energia. A energia cinética causada por terremotos, ventos ou tráfego de carros não é somente dissipada pelo amortecedor eletromecânico, mas também armazenada pelo dispositivo de colheita de energia. O modelo estudado por Zhu, Shen e Xu (2012) é mostrado na figura 2.4.

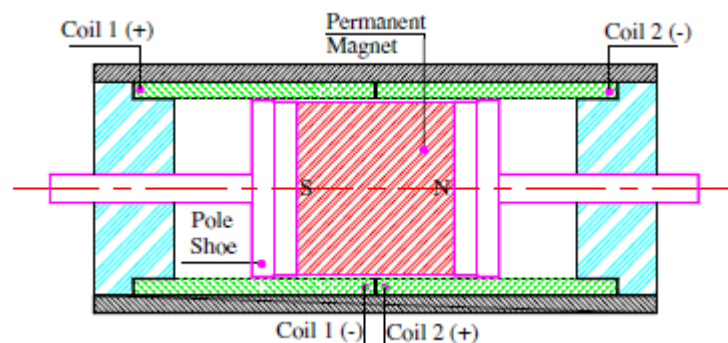


Figura 2.4 – Típica configuração de um transdutor eletromagnético (ZHU; SHEN; XU, 2012)

Shen, Zhu e Xu (2012) propuseram e validaram um sistema de controle de vibrações e monitoramento que é composto, dentre outros elementos, por um transdutor eletromagnético e um circuito para colheita de energia. Como elemento chave do sistema, o amortecedor eletromagnético regenerativo é capaz de converter a energia proveniente de estruturas mecânicas em energia elétrica, tendo, assim, duas funções essenciais: mitigação da vibração e colheita de energia. A figura 2.5

mostra o modelo simplificado utilizado pelos autores para duas opções de circuito elétrico. Enquanto o circuito A resume-se a um dissipador de energia, o circuito B tem a função de coletar e reaproveitar a energia (colheita de energia).

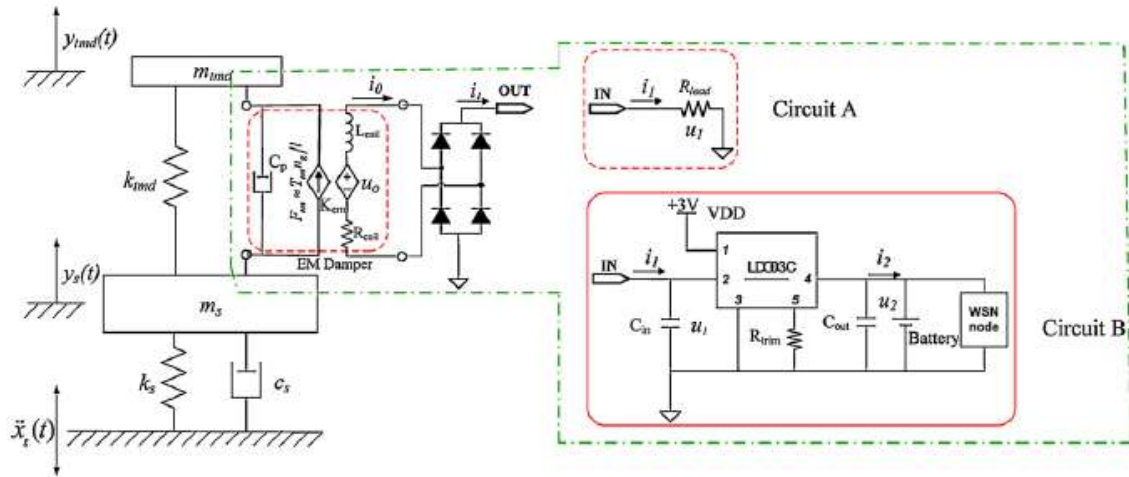


Figura 2.5 – Modelo simplificado do amortecedor eletromagnético com dois tipos de circuito elétrico (SHEN; ZHU; XU, 2012)

Um método de amortecimento eletromagnético foi apresentado por Behrens, Fleming e Moheimani (2003). Segundo eles, quando comparado ao dispositivo piezelétrico, o amortecedor eletromagnético apresenta diversos benefícios, como, por exemplo, pequenas tensões elétricas, grandes deslocamentos e a aplicação em sistemas mecânicos de maiores dimensões. A figura 2.6 mostra o modelo proposto por Behrens, Fleming e Moheimani (2003).

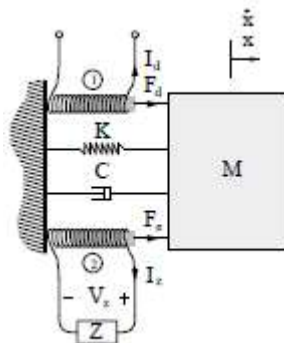


Figura 2.6 – Modelo discreto de um oscilador do tipo massa-mola-amortecedor acoplado a um amortecedor eletromagnético (BEHRENS; FLEMING; MOHEIMANI, 2003)



Yamapi (2006) analisou a dinâmica de um dispositivo linear de amortecimento eletromecânico acoplado através de um transdutor eletromagnético a um oscilador mecânico não-linear, que segue a equação de Duffing, como mostrado na figura 2.7. Ele avaliou a influência do parâmetro de acoplamento entre os sistemas mecânico e elétrico em termos da redução da amplitude do movimento da massa. Analisou, também, as bifurcações presentes no comportamento dinâmico do sistema com a variação do parâmetro de acoplamento.

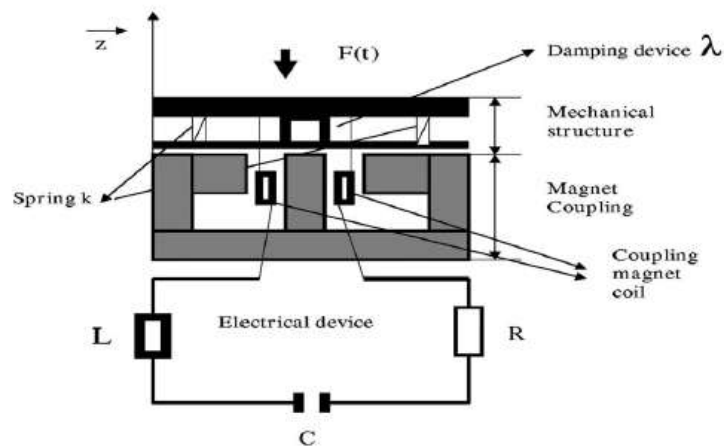


Figura 2.7 – Dispositivo de amortecimento eletromecânico (YAMAPI, 2006)

As publicações apresentadas acima mostram a importância do tema dentro do contexto de Engenharia Mecânica. A busca incessante por novas tecnologias que garantam a Ergonomia para ocupantes de veículos, o controle de movimentos ou comportamentos indesejados em máquinas ou estruturas, e o aproveitamento de novas fontes de energia fazem com que este assunto cada vez mais seja abordado por pesquisadores.

## 2.2 INDUTÂNCIA COM VARIAÇÃO NÃO LINEAR

Ho, Nguyen e Woo (2010) estudaram a dinâmica de um sistema elétrico de vibro-impacto com indutância de variação não linear, idealmente tratado como um atuador. A figura 2.8 ilustra o modelo adotado.

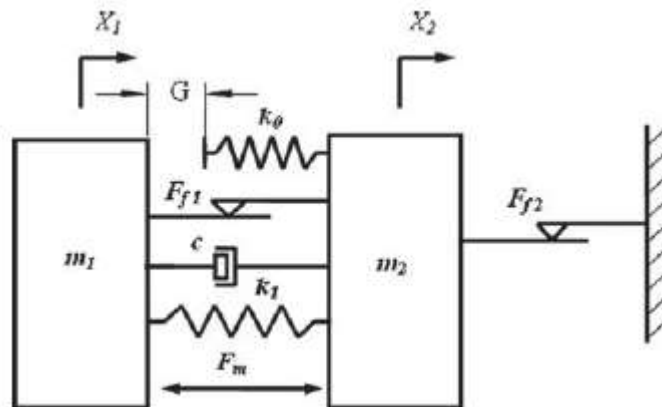


Figura 2.8 – Modelo do sistema elétrico de vibro-impacto estudado por Ho, Nguyen e Woo (2010)

Dois modelos matemáticos de interpolação do comportamento não linear da indutância foram analisados pelos autores. O primeiro diz respeito à forma Gaussiana. O segundo modelo é da forma cossenoidal, proposto inicialmente por Mendrela e Pudlowski (1992).

No trabalho, a forma Gaussiana foi admitida pelo fato de sua resposta se aproximar mais da resposta experimental do que a forma cossenoidal. A figura 2.9 ilustra esse comportamento.

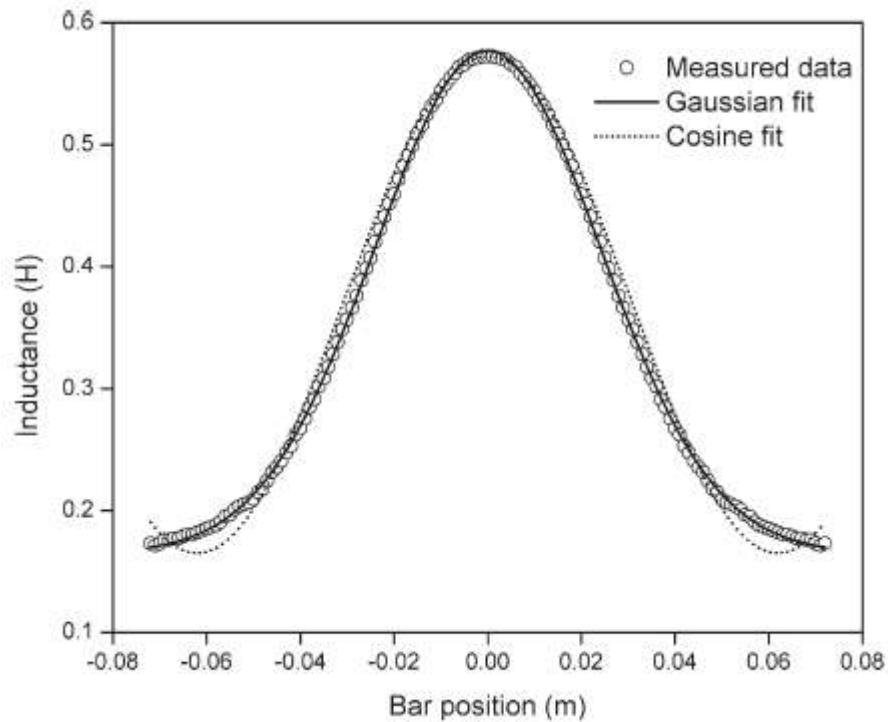


Figura 2.9 – Variação da indutância do solenoide aproximada pelas formas Gaussiana e cossenoidal obtida por Ho, Nguyen e Woo (2010)

Na sequência do trabalho, os autores compararam os resultados das simulações com os resultados experimentais e avaliam os comportamentos dinâmicos.

A partir da conclusão de Ho, Nguyen e Woo (2010), será utilizado neste trabalho o modelo Gaussiano, por representar melhor a curva da indutância obtida experimentalmente. Uma abordagem mais ampla será dada no capítulo 3, de modelagem dos sistemas.

### 3 DEFINIÇÃO E MODELAGEM

Este capítulo aborda as definições utilizadas e a modelagem dos sistemas estudados em suas várias configurações. Inicialmente, o modelo fundamental de um sistema oscilatório massa-mola-amortecedor é apresentado. Na sequência, o conceito de transmissibilidade de deslocamento, amplamente utilizado neste trabalho, é resumido para discussões futuras.

Por último, os modelos físicos do sistema magneticamente acoplado a um amortecedor eletromecânico, objeto deste trabalho, são definidos e sua modelagem matemática é efetuada. No total, são quatro configurações diferentes analisadas: circuito elétrico puramente resistivo, circuito elétrico RL em série, circuito elétrico RLC em série e circuito elétrico RLC em série com indutância não linear.

#### 3.1 SISTEMA VISCOSAMENTE AMORTECIDO

O sistema mecânico apresentado na figura 3.1 é composto por uma massa  $m$  ligada a uma base móvel por uma mola de rigidez  $k$  e um amortecedor viscoso de constante de amortecimento  $c$ . O deslocamento da base é um movimento harmônico conforme mostrado na equação 3.1.

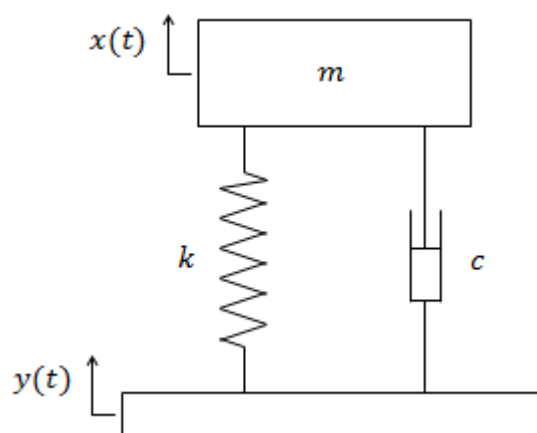


Figura 3.1 – Sistema mecânico viscosamente amortecido com excitação harmônica da base

$$y(t) = Y \sin \omega t \quad (3.1)$$

Assim:

$m$  é a massa do corpo suspenso (kg);

$k$  é a rigidez da mola (N/m);

$c$  é constante de amortecimento (N.s/m);

$x$  é o deslocamento vertical do corpo (m);

$\dot{x}$  é a velocidade do corpo suspenso na direção vertical (m/s);

$y$  é o deslocamento vertical da base (m);

$\dot{y}$  é a velocidade da base na direção vertical (m/s);

$Y$  representa a amplitude do deslocamento da base (m);

$\omega$  representa a frequência do movimento da base (rad/s);

$t$  representa o tempo (s).

Esse sistema, por ser clássico e amplamente estudado na teoria de vibrações, será utilizado como referência para algumas análises comparativas com os sistemas objetos de estudo deste trabalho.

A equação 3.2 é denominada como equação do movimento da massa  $m$  da figura 3.1.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{y} + ky \quad (3.2)$$

A frequência natural do sistema é definida como  $\omega_n$  na equação 3.3, e é dada em rad/s.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.3)$$

O fator de amortecimento adimensional,  $\xi$ , é dado pela equação 3.4.

$$\xi = \frac{c}{2m\omega_n} \quad (3.4)$$

A razão de frequências,  $r$ , é definida pela razão entre a frequência de excitação e a frequência natural do sistema mecânico mostrada na equação 3.5. Nota-se que também se trata de uma variável adimensional.

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} \quad (3.5)$$

### 3.2 TRANSMISSIBILIDADE DE DESLOCAMENTO

A razão entre a amplitude da resposta  $x(t)$  no regime permanente e a do movimento da base  $y(t)$  é denominada transmissibilidade de deslocamento. A equação 3.3 mostra a relação entre as grandezas citadas.

$$T_d = \left| \frac{X}{Y} \right| \quad (3.6)$$

onde:

$T_d$  representa a transmissibilidade de deslocamento (adimensional);

$X$  representa a amplitude do deslocamento da massa (m) no regime permanente;

$Y$  representa a amplitude do deslocamento da base (m).

Valores de transmissibilidade maiores que 1 representam uma amplificação do movimento. Em contrapartida, valores de transmissibilidade menores que 1 indicam isolamento do movimento.

Com o uso da transformada de Laplace, a equação do movimento (equação 3.2) se transforma em:

$$ms^2\mathbf{X} + cs\mathbf{X} + k\mathbf{X} = cs\mathbf{Y} + k\mathbf{Y} \quad (3.7)$$

onde:

$s$  é a variável complexa no domínio de Laplace;

$\mathbf{X}$  é o deslocamento do corpo no domínio de Laplace;

$\mathbf{Y}$  é o deslocamento da base no domínio de Laplace.

Com o agrupamento dos termos, a equação 3.7 fica:

$$(ms^2 + cs + k)X = (cs + k)Y \quad (3.8)$$

Portanto, a função transferência do modelo é definida como a razão entre o sinal de saída e o sinal de entrada (OGATA, 1997), conforme mostra a equação 3.9.

$$\frac{X}{Y} = \frac{cs + k}{ms^2 + cs + k} \quad (3.9)$$

Substituindo-se a variável complexa  $s$  por  $j\omega$ , tem-se:

$$\frac{X}{Y} = \frac{jc\omega + k}{j^2m\omega^2 + jc\omega + k} \quad (3.10)$$

Como visto anteriormente, a transmissibilidade de deslocamento,  $T_d$ , é definida como a relação entre o deslocamento do corpo e o deslocamento da base. Assim, transmissibilidade de deslocamento é igualada à função transferência do sistema. Com a definição dos números complexos de que  $j^2 = -1$ , a equação da função transferência ou transmissibilidade de deslocamento do sistema é mostrada na equação 3.11.

$$T_d = \frac{X}{Y} = \frac{jc\omega + k}{-m\omega^2 + jc\omega + k} \quad (3.11)$$

Substituindo-se as equações 3.3, 3.4 e 3.5 na equação 3.11, a transmissibilidade assume a forma da equação 3.12.

$$T_d = \frac{X}{Y} = \frac{j2\xi r + 1}{1 - r^2 + j2\xi r} \quad (3.12)$$

A figura 3.2 apresenta as variações de  $T_d$  para diferentes valores de  $r$  e  $\xi$ , de acordo com a equação 3.12.

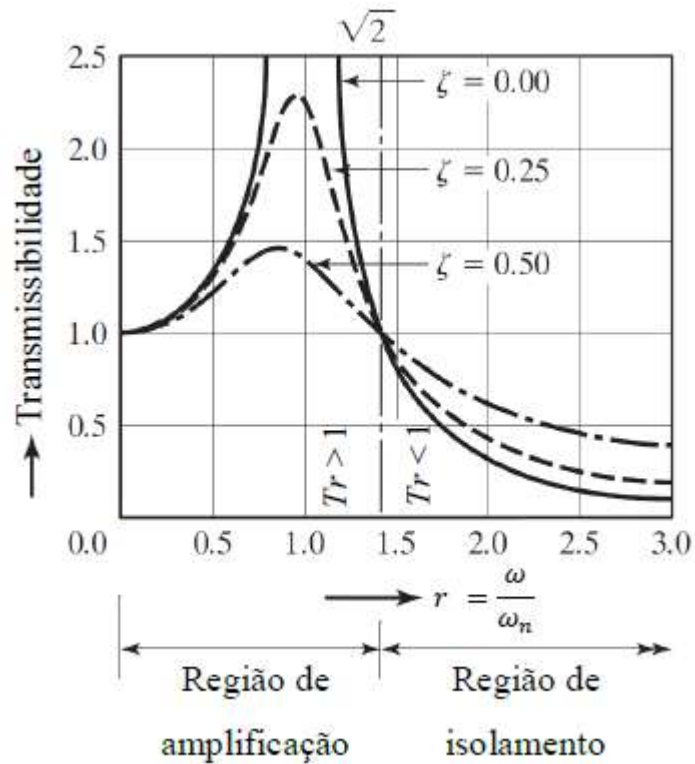


Figura 3.2 – Variação da transmissibilidade de deslocamento,  $T_d$ , com a razão de frequências,  $r$ , para alguns valores de fator de amortecimento,  $\xi$  (RAO, 2008)

Segundo Rao (2008), a razão de frequências  $r = \sqrt{2}$  separa a região em que  $T_d > 1$  (amplificação) da região onde  $T_d < 1$  (isolamento). A amplificação na ressonância ( $r = 1$ ) é governada pelo fator de amortecimento  $\xi$ . Quanto maior o valor de  $\xi$ , menor é a amplificação. Para altas frequências, por outro lado, a atenuação do movimento é máxima quando não há amortecimento, ou seja,  $\xi = 0$ .



### 3.3 MODELAGEM FÍSICA

O sistema proposto consiste de um oscilador mecânico (conjunto massa-mola), excitado harmonicamente pelo movimento da base, e magneticamente acoplado a um amortecedor eletromecânico.

O modelo físico utilizado na modelagem matemática é apresentado na figura 3.3, onde:

$m$  é a massa do corpo suspenso (kg);

$k$  é a rigidez da mola (N/m);

$y(t)$  é o deslocamento vertical da base (m);

$x(t)$  é o deslocamento vertical do corpo (m);

$t$  representa o tempo (s).

O movimento da base adotado é harmônico e definido por  $y(t) = Y \sin \omega t$ , onde:

$Y$  representa a amplitude do deslocamento da base (m);

$\omega$  representa a frequência do movimento da base (rad/s).

Já a velocidade da base é expressa por  $\dot{y} = \omega Y \cos \omega t$ , e sua unidade é dada em m/s.

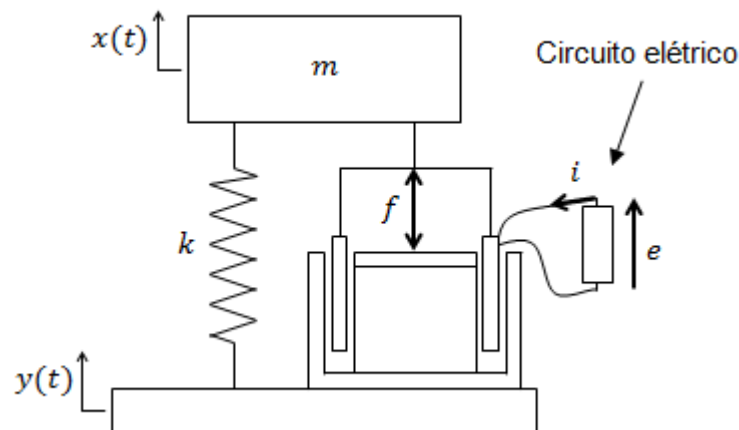


Figura 3.3 – Modelo físico do sistema acoplado a um amortecedor eletromecânico

As grandezas  $f$ ,  $e$ , e  $i$  estão ligadas ao amortecedor eletromecânico e são definidas como:

$f$  é a força eletromagnética total produzida pela bobina (N);

$e$  é a força eletromotriz criada na bobina (V);

$i$  é a corrente elétrica circulando na bobina (A).

O amortecedor eletromecânico, por sua vez, é formado por um transdutor eletromagnético ligado a um circuito elétrico. O transdutor adotado é do tipo bobina móvel, ou seja, a bobina se move em torno do ímã permanente, conforme pode ser visto na figura 3.4.

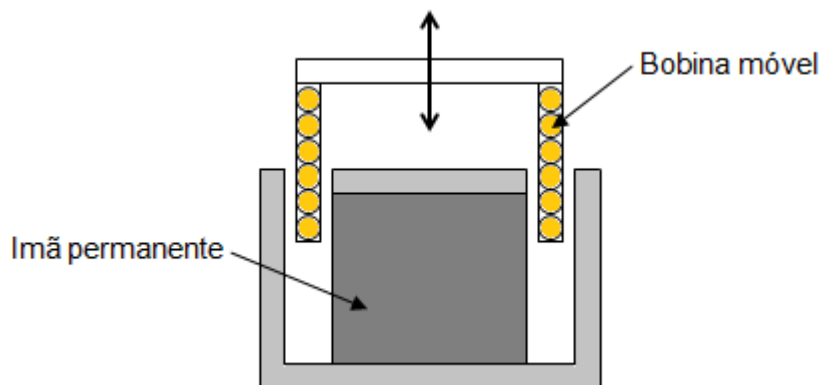


Figura 3.4 – Modelo esquemático do transdutor eletromagnético

Neste trabalho, são estudadas duas configurações de circuito elétrico: RLC linear em série e RLC não linear em série. A não linearidade é proveniente da variação não linear da indutância em função da posição da bobina. Os detalhes específicos de cada tipo de circuito serão apresentados nas seções seguintes.

### 3.4 MODELAGEM MATEMÁTICA DO TRANSDUTOR ELETROMAGNÉTICO

Um transdutor de bobina móvel é um transdutor de transferência de energia que converte energia mecânica em energia elétrica e vice-versa. O sistema consiste de um ímã permanente (figura 3.5) que produz um campo magnético uniforme,  $B$ , normal à fenda do ímã, e uma bobina que é livre para mover-se na direção axial dentro da fenda. Considera-se  $v$  como sendo a velocidade da bobina,  $f$  a força

externa atuando para manter a bobina em equilíbrio contra as forças eletromagnéticas,  $e$  a diferença de potencial através da bobina e  $i$  a corrente elétrica dentro da bobina. Neste modelo não se considerou a inércia da bobina, nem forças de resistência mecânica ou elétrica (PREUMONT, 2006).

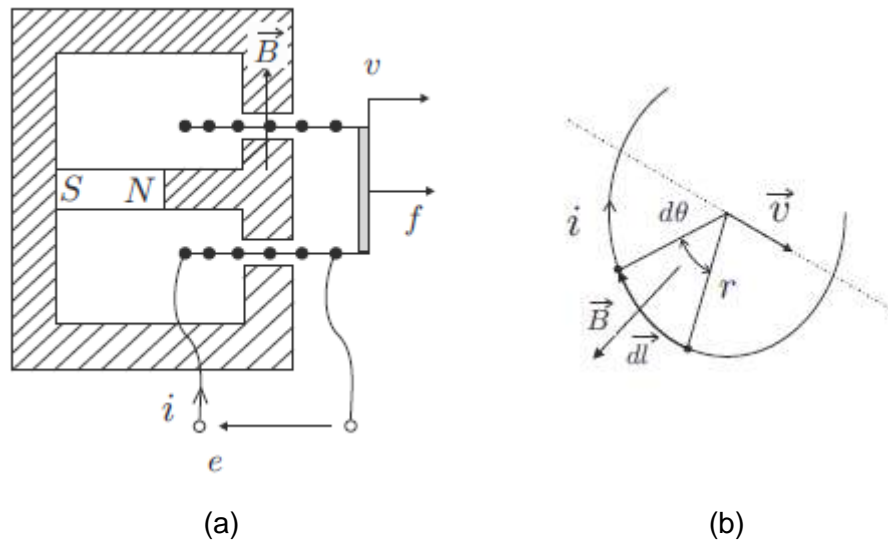


Figura 3.5 – (a) Modelo do transdutor de bobina móvel; (b) Grandezas físicas e direções (PREUMONT, 2006)

A figura 3.5(a) mostra a situação que envolve uma corrente induzida. Uma espira de comprimento  $l$  está parcialmente imersa em um campo magnético externo uniforme perpendicular ao plano da espira.

De acordo com Halliday, Resnick e Walker (2005), quando a espira desloca-se para a direita na figura 3.5(a), a parte da espira que está imersa no campo magnético diminui. Assim, o fluxo através da espira também diminui e, de acordo com a lei de Faraday, uma corrente é induzida na espira. É a presença desta corrente que produz a força que se opõe ao movimento.

De acordo com a lei de Faraday, a diminuição do fluxo magnético faz com que uma força eletromotriz seja induzida na espira. Assim:

$$e = -T_v(\dot{x} - \dot{y}) \quad (3.13)$$

$$T_v = Bl \quad (3.14)$$

onde:

$e$  é a força eletromotriz induzida na espira (V), como mencionado anteriormente;

$T_v$  é a constante do transdutor (Vs/m), também chamada de parâmetro de acoplamento entre os sistemas mecânico e elétrico;

$B$  é o módulo do campo magnético (T);

$l$  é o comprimento do fio movendo-se perpendicularmente ao campo magnético (m);

$\dot{x}$  (ou  $v$ ) é a velocidade da bobina (m/s), que denota a velocidade do corpo.

A força  $f$ , que também é mostrada na figura 3.5(a), é a força externa necessária para balancear a força total do campo magnético sobre  $n$  espiras do condutor. Logo:

$$f = T_v \dot{q} \quad (3.15)$$

onde:

$f$  é a força eletromagnética total produzida pela bobina (N), como mencionado anteriormente;

$T_v$ , como apontado anteriormente, é a constante do transdutor (N/A) ou o parâmetro de acoplamento entre os sistemas mecânico e elétrico;

$\dot{q}$  (ou  $i$ ) é a corrente induzida na bobina (A), derivada no tempo da carga elétrica  $q$  (C).

### 3.5 MODELAGEM MATEMÁTICA DO SISTEMA MECÂNICO

A partir do uso do método de Lagrange (MEIROVITCH, 1970), determina-se a equação dinâmica da parte mecânica do sistema mostrado na figura 3.3. A equação 3.16 é a equação clássica do método de Lagrange aplicada para a parte mecânica do sistema proposto. Portanto,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_1}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L_1}{\partial x} = Q_1 \quad (3.16)$$

na qual:

$Q_1$  representa as forças não conservativas do sistema que, neste caso, resumem-se à força eletromagnética total produzida pela bobina,  $f$ . Logo:

$$Q_1 = T_v \dot{q} \quad (3.17)$$

$L_1$  representa o Lagrangeano, calculado pela diferença entre as energias cinética e potencial do sistema, ou em termos matemáticos:

$$L_1 = T - V \quad (3.18)$$

onde:

$T$ , a energia cinética do sistema (J), é dada por

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad (3.19)$$

e

$V$  é a energia potencial do sistema (J), dada por

$$V = \frac{1}{2} k (x - y)^2 \quad (3.20)$$

O Lagrangeano assume a forma:

$$L_1 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k (x - y)^2 \quad (3.21)$$

Assim, com o desenvolvimento da equação 3.7, tem-se:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) - [-k(x - y)] = T_v\dot{q}$$

$$m\ddot{x} + kx - T_v\dot{q} = ky \quad (3.22)$$

A equação 3.22 é a equação dinâmica que descreve o movimento do corpo de massa  $m$ .

### 3.6 MODELAGEM MATEMÁTICA DO SISTEMA ELÉTRICO

Analogamente à dedução exibida para o sistema mecânico, são determinadas as equações correspondentes aos sistemas elétricos de cada uma das configurações de circuitos elétricos consideradas neste trabalho.

A aplicação do método de Lagrange (MEIROVITCH, 1970) segue a equação 3.23.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L_2}{\partial q} = Q_2 \quad (3.23)$$

$Q_2$  representa, no caso do sistema elétrico, as tensões elétricas não conservativas. Como não há fonte de tensão externa,  $Q_2$  fica restrito à soma da tensão elétrica do resistor com a tensão elétrica (ou força eletromotriz) induzida na bobina,  $e$ . Portanto,

$$Q_2 = -R\dot{q} - T_v(\dot{x} - \dot{y}) \quad (3.24)$$

onde:

$R$  representa a resistência elétrica total ( $\Omega$ ) do sistema, a qual inclui a resistência do circuito elétrico,  $R_c$ , e a resistência intrínseca da bobina,  $R_b$ . Assim,

$$R = R_c + R_b \quad (3.25)$$

O Lagrangeano para a parte elétrica,  $L_2$ , é obtido através da diferença entre as energias magnética e elétrica presentes no sistema. Ou seja,

$$L_2 = U_m - U_e \quad (3.26)$$

onde:

$U_m$  representa a energia magnética armazenada no campo magnético do indutor (J);  $U_e$  representa a energia elétrica armazenada no campo elétrico do capacitor em um dado instante (J).

A energia magnética,  $U_m$ , é definida como:

$$U_m = \frac{1}{2} L \dot{q}^2 \quad (3.27)$$

onde:

$L$  representa a indutância total do sistema (H), que é a soma da indutância do circuito,  $L_c$ , com a indutância da bobina,  $L_b$ . Assim,

$$L = L_c + L_b \quad (3.28)$$

Já a energia elétrica,  $U_e$ , é definida como:

$$U_e = \frac{1}{2C} q^2 \quad (3.29)$$

onde:

$C$  representa a capacitância do sistema (F).

A seguir, serão mostradas as deduções matemáticas para a obtenção das equações dinâmicas do sistema mecânico acoplado ao amortecedor eletromecânico linear. Depois disso, será abordado o circuito elétrico RLC em série com indutância com variação não linear pela posição.

### 3.7 EQUAÇÕES DO MODELO LINEAR

O sistema com o amortecedor eletromecânico do tipo circuito elétrico RLC em série é apresentado na figura 3.6.

Para essa configuração, as energias magnética,  $U_m$ , e elétrica,  $U_e$ , são definidas pelas equações 3.27 e 3.29, respectivamente. O Lagrangeano,  $L_2$ , assume a sua forma completa da equação 3.26. Assim, substituindo-se a equação 3.26 na equação 3.23, tem-se:

$$\frac{d}{dt}(L\dot{q}) - \left(-\frac{1}{C}q\right) = -R\dot{q} - T_v(\dot{x} - \dot{y})$$

e

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q + T_v\dot{x} = T_v\dot{y} \quad (3.30)$$

A equação 3.30 representa a equação dinâmica do sistema elétrico com circuito RLC em série.

Assim, o amortecedor eletromecânico com o circuito elétrico RLC em série possui o sistema de equações diferenciais que descrevem a dinâmica do sistema composto pelas equações 3.22 e 3.30. Portanto:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + kx - T_v\dot{q} = ky \\ L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q + T_v\dot{x} = T_v\dot{y} \end{cases} \quad (3.31)$$



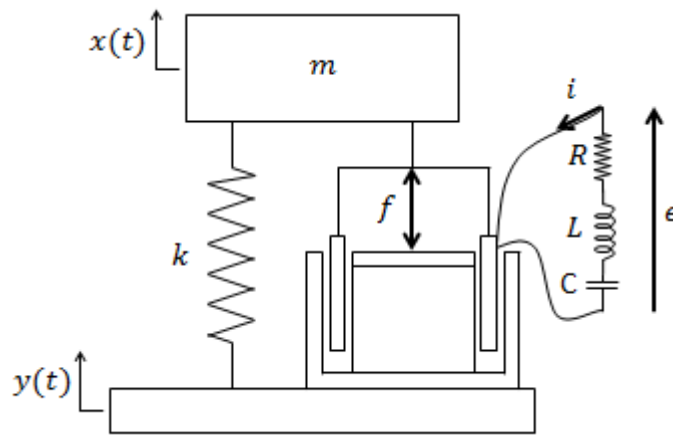


Figura 3.6 – Modelo físico do sistema acoplado ao transdutor magnético ligado a um circuito elétrico RLC em série

Um caso particular do sistema é quando apenas a resistência elétrica,  $R$ , é considerada, ou seja, a indutância,  $L$ , é desprezada e a capacitância,  $C$ , não é considerada, não havendo assim nenhum meio de acúmulo de energia. Nesse caso, o circuito elétrico é dito puramente resistivo.

A indutância intrínseca da bobina,  $L_b$ , pode quase sempre ser desprezada em comparação à sua resistência intrínseca,  $R_b$ , pelo menos para frequências abaixo de 1 kHz (DE MARNEFFE, 2007).

Para esse caso especial, tem-se:  $U_m = 0$ ,  $U_e = 0$  e  $L_2 = 0$ . Portanto, a partir da equação 3.23,

$$\frac{d}{dt}(0) - (0) = -R\dot{q} - T_v(\dot{x} - \dot{y})$$

A equação dinâmica para a configuração do circuito elétrico puramente resistivo fica:

$$R\dot{q} + T_v(\dot{x} - \dot{y}) = 0 \quad (3.32)$$

Para o caso do amortecedor eletromecânico com o circuito elétrico puramente resistivo, a corrente elétrica,  $\dot{q}$ , pode ser isolada a partir da equação 3.30, descartando-se os termos correspondentes à indutância e à capacitância, conforme mostra a equação 3.33.

$$\dot{q} = -\frac{T_v}{R}(\dot{x} - \dot{y}) \quad (3.33)$$

Portanto, substituindo-se a equação 3.33 na equação do movimento do corpo, 3.22, tem-se:

$$m\ddot{x} + \frac{T_v^2}{R}\dot{x} + kx = \frac{T_v^2}{R}\dot{y} + ky \quad (3.34)$$

Em uma analogia com um sistema puramente mecânico do tipo massa-mola-amortecedor, a relação entre o coeficiente de amortecimento,  $c$ , e a resistência elétrica,  $R$ , é dada pela equação 3.35.

$$c = \frac{T_v^2}{R} \quad (3.35)$$

Em termos adimensionais do fator de amortecimento, tem-se:

$$\xi = \frac{T_v^2}{2m\omega_n R} \quad (3.36)$$

Nota-se a característica de proporcionalidade inversa entre os parâmetros  $\xi$  e  $R$ .

### 3.8 EQUAÇÕES NO ESPAÇO DE ESTADOS DO MODELO LINEAR

O sistema de equações diferenciais do sistema linear estudado, da equação 3.31, é passado para o espaço de estados.

O vetor de estados,  $u$ , pode ser definido como o vetor composto pelas variáveis de estado  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  e  $u_4$ , que se relacionam com as variáveis dos sistemas segundo a equação 3.37.

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \\ q \\ \dot{q} \end{Bmatrix} \quad (3.37)$$

Assim a derivada no tempo do vetor  $u$  assume a forma:

$$\{\dot{u}\} = \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \\ \dot{u}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{q} \\ \ddot{q} \end{Bmatrix} \quad (3.38)$$

O sistema na forma do espaço de estados mostrado na equação 3.38 está propício para a implementação computacional.

A aceleração do corpo,  $\ddot{x}$ , para o caso do amortecedor eletromecânico com circuito elétrico RLC em série é conseguida através do rearranjo matemático da equação 3.22. Logo,

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x + \frac{T_v}{m}\dot{q} + \frac{k}{m}y \quad (3.39)$$

Da mesma forma, a derivada da corrente elétrica (ou a derivada segunda da carga elétrica  $q$ ),  $\ddot{q}$ , pode ser determinada isolando-a na equação 3.30. Logo,

$$\ddot{q} = -\frac{R}{L}\dot{q} - \frac{1}{LC}q - \frac{T_v}{L}\dot{x} + \frac{T_v}{L}\dot{y} \quad (3.40)$$

Assim, o vetor  $\dot{u}$  fica:

$$\{\dot{u}\} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ -\frac{k}{m}u_1 + \frac{T_v}{m}u_4 + \frac{k}{m}Y \sin \omega t \\ u_4 \\ -\frac{R}{L}u_4 - \frac{1}{LC}u_3 - \frac{T_v}{L}u_2 + \frac{T_v}{L}\omega Y \cos \omega t \end{Bmatrix} \quad (3.41)$$

### 3.9 FUNÇÃO TRANSFERÊNCIA DO MODELO LINEAR

Com a utilização da transformada de Laplace na equação dinâmica da parte mecânica (equação 3.22), a equação fica:

$$ms^2X + kX - T_v sQ = kY \quad (3.42)$$

onde:

$s$  é a variável complexa no domínio de Laplace;

$X$  é o deslocamento da massa no domínio de Laplace;

$Y$  é o deslocamento da base no domínio de Laplace;

$Q$  é a carga elétrica no domínio de Laplace.

Com o seu rearranjo, a equação toma a forma:

$$(ms^2 + k)X - T_v sQ = kY \quad (3.43)$$

Com isso, torna-se possível definir a impedância mecânica do sistema,  $Z_m$ , de acordo com a equação 3.44.

$$Z_m = ms^2 + k \quad (3.44)$$

A parte elétrica do sistema também é transformada no domínio de Laplace. Logo:

$$Ls^2Q + RsQ + \frac{1}{C}Q + T_v sX = T_v sY \quad (3.45)$$

Com o rearranjo matemático:

$$\left(Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}\right)Q = -T_v s(X - Y) \quad (3.46)$$

Assim, a impedância elétrica é definida por  $Z_e$  na equação 3.47.

$$Z_e = Ls^2 + Rs + \frac{1}{C} \quad (3.47)$$

Substituindo-se a equação 3.47 na equação 3.46, a carga elétrica no domínio de Laplace segue a equação 3.48.

$$Q = -\frac{T_v s(X - Y)}{Z_e} \quad (3.48)$$

Substituindo-se a equação 3.48, da carga elétrica, na equação 3.43, do sistema mecânico, obtém-se:

$$Z_m X - T_v s \left[ -\frac{T_v s(X - Y)}{Z_e} \right] = kY$$

$$Z_m X + \frac{T_v^2 s^2 (X - Y)}{Z_e} = kY$$

$$\left( Z_m + \frac{T_v^2 s^2}{Z_e} \right) X = \left( k + \frac{T_v^2 s^2}{Z_e} \right) Y$$

Assim, a função transferência do sistema, ou a transmissibilidade de deslocamento, assume a forma da equação 3.49, em função das impedâncias elétrica e mecânica.

$$T_d = \frac{X}{Y} = \frac{kZ_e + T_v^2 s^2}{Z_m Z_e + T_v^2 s^2} \quad (3.49)$$

Substituindo-se  $Z_m$  e  $Z_e$  na equação 3.49:

$$T_d = \frac{X}{Y} = \frac{(kL + T_v^2) s^2 + kRs + kC^{-1}}{mLs^4 + mRs^3 + (mC^{-1} + kL + T_v^2) s^2 + kRs + kC^{-1}} \quad (3.50)$$

Sendo  $s = j\omega$ , por definição, tem-se:

$$T_d = \frac{X}{Y} = \frac{(kL + T_v^2)j^2\omega^2 + kRj\omega + kC^{-1}}{mLj^4\omega^4 + mRj^3\omega^3 + (mC^{-1} + kL + T_v^2)j^2\omega^2 + kRj\omega + kC^{-1}} \quad (3.51)$$

A partir das definições dos números complexos, tem-se:  $j^2 = -1$ ,  $j^3 = -j$  e  $j^4 = 1$ . Portanto, com a substituição na equação 3.51:

$$T_d = \frac{X}{Y} = \frac{-(kL + T_v^2)\omega^2 + kRj\omega + kC^{-1}}{mL\omega^4 - mRj\omega^3 - (mC^{-1} + kL + T_v^2)\omega^2 + kRj\omega + kC^{-1}} \quad (3.52)$$

Portanto, a equação 3.52 representa a função transferência ou a transmissibilidade de deslocamento do sistema acoplado ao amortecedor eletromecânico com circuito RLC linear em série.

Os polos da função transferência são obtidos através da obtenção das raízes da equação característica presente em seu denominador. Nesse caso, os polos representam as frequências naturais do sistema. A equação 3.53 é a equação característica do sistema.

$$mL\omega^4 - mRj\omega^3 - (mC^{-1} + kL + T_v^2)\omega^2 + kRj\omega + kC^{-1} = 0 \quad (3.53)$$

### 3.10 EQUAÇÕES DO MODELO NÃO LINEAR

Na figura 3.7 é apresentado o modelo de um sistema com amortecedor eletromecânico de circuito RLC com a indutância de variação não linear em função da posição. A seta cruzando diagonalmente o símbolo da indutância representa um elemento variável e que, no caso estudado, essa variação é não linear. O modelo adotado para indutância com variação não linear segue a forma Gaussiana, por ser a que melhor se adapta à curva medida experimentalmente, conforme concluído por Ho , Nguyen e Woo (2010).

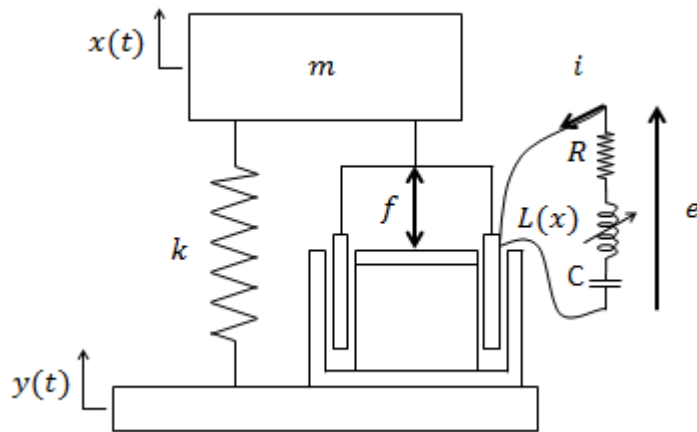


Figura 3.7 – Modelo físico do sistema acoplado ao transdutor magnético ligado a um circuito elétrico RLC em série, onde  $L$  é não linear

A indutância  $L(x)$  varia com o deslocamento  $x$  da bobina, de acordo com a equação 3.40, desenvolvida também por Ho , Nguyen e Woo (2010).

$$L(x) = L_0 + \frac{A}{\sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}}} e^{-2\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2} \quad (3.54)$$

onde:

$L_0$  representa a indutância do solenoide na posição inicial (H);

$A$  é um coeficiente da função;

$e$  é a base do logaritmo natural;

$\sigma$  é o desvio padrão como forma de interpolação da curva medida experimentalmente.

A parte mecânica permanece a mesma utilizada para o caso linear e é descrita pela equação 3.22.

Com a não linearidade da indutância, a energia magnética,  $U_m$ , assume a forma mostrada na equação 3.55.

$$U_m = \frac{1}{2}L(x)\dot{q}^2 \quad (3.55)$$

Portanto, substituindo-se as energias magnética,  $U_m$ , e elétrica,  $U_e$ , das equações 3.55 e 3.29, respectivamente, na equação 3.26, tem-se um novo Lagrangeano,  $L_2$ .

$$L_2 = \frac{1}{2}L(x)\dot{q}^2 - \frac{1}{2C}q^2 \quad (3.56)$$

Com a utilização da mesma tensão elétrica não conservativa,  $Q_2$ , definida pela equação 3.24, e com a substituição na equação 3.23 de Lagrange, o desenvolvimento da equação do movimento do sistema com a indutância não linear fica:

$$\frac{d}{dt}(L(x)\dot{q}) - \left(-\frac{1}{C}q\right) + R\dot{q} + T_v(\dot{x} - \dot{y}) = 0$$

$$\frac{dL(x)}{dt}\dot{q} + L(x)\ddot{q} + \frac{1}{C}q + R\dot{q} + T_v\dot{x} = T_v\dot{y}$$

$$L(x)\ddot{q} + \left(R + \frac{dL(x)}{dt}\right)\dot{q} + \frac{1}{C}q + T_v\dot{x} = T_v\dot{y} \quad (3.57)$$

Considerando-se o modelo da equação 3.54, a derivada de  $L(x)$  no tempo fica:



$$\frac{dL(x)}{dt} = -\frac{4A}{\sigma^3 \sqrt{\frac{\pi}{2}}} e^{-2\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2} x \dot{x} \quad (3.58)$$

Ao substituir a equação 3.58 na equação 3.57, a equação dinâmica da parte elétrica do sistema fica:

$$\left[ L_0 + \frac{A}{\sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}}} e^{-2\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2} \right] \ddot{q} + \left[ R - \frac{4A}{\sigma^3 \sqrt{\frac{\pi}{2}}} e^{-2\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2} x \dot{x} \right] \dot{q} + \frac{1}{C} q + T_v \dot{x} = T_v \dot{y} \quad (3.59)$$

Logo, o sistema de equações do sistema completo assume a forma abaixo.

$$\begin{cases} m\ddot{x} + kx - T_v \dot{q} = ky \\ \left[ L_0 + \frac{A}{\sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}}} e^{-2\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2} \right] \ddot{q} + \left[ R - \frac{4A}{\sigma^3 \sqrt{\frac{\pi}{2}}} e^{-2\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2} x \dot{x} \right] \dot{q} + \frac{1}{C} q + T_v \dot{x} = T_v \dot{y} \end{cases} \quad (3.60)$$

### 3.11 EQUAÇÕES NO ESPAÇO DE ESTADOS DO MODELO NÃO LINEAR

Para a representação das equações dinâmicas no espaço de estados, a aceleração,  $\ddot{x}$ , e a derivada da corrente elétrica,  $\dot{q}$ , são isoladas em função dos demais termos. Elas aparecem representadas nas equações 3.61 e 3.62, respectivamente.

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m} x + \frac{T_v}{m} \dot{q} + \frac{k}{m} y \quad (3.61)$$

$$\dot{q} = \left[ -R\dot{q} - \frac{4A}{\sigma^3 \sqrt{\frac{\pi}{2}}} e^{-2\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2} x \dot{x} \dot{q} - \frac{1}{C} q - T_v \dot{x} + T_v \dot{y} \right] \left[ L_0 + \frac{A}{\sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}}} e^{-2\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2} \right]^{-1} \quad (3.62)$$

Com a substituição pelas variáveis de estado definidas na equação 3.38, o sistema da equação 3.60 assume a forma abaixo.

$$\{\dot{u}\} = \left\{ \begin{array}{l} u_2 \\ -\frac{k}{m}u_1 + \frac{T_v}{m}u_4 + \frac{k}{m}Y\text{sen}\omega t \\ u_4 \\ -Ru_4 - \frac{4A}{\sigma^3\sqrt{\frac{\pi}{2}}}e^{-2\left(\frac{u_1}{\sigma}\right)^2}u_1u_2u_4 - \frac{1}{C}u_3 - T_vu_2 + T_v\omega Y\text{cos}\omega t \\ \hline L_0 + \frac{A}{\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}}e^{-2\left(\frac{u_1}{\sigma}\right)^2} \end{array} \right\} \quad (3.63)$$

Após a conclusão do capítulo de modelagem, a metodologia utilizada na obtenção dos resultados é abordada no capítulo 4.

## 4 METODOLOGIA

Após a obtenção, no capítulo anterior, das equações diferenciais que descrevem matematicamente os modelos físicos estudados, as respostas dos sistemas são obtidas por meio de integração numérica. As equações são todas diferenciais ordinárias.

As simulações são decorrentes de implementação computacional no ambiente do software Matlab®. Por ser o mais utilizado para aplicações semelhantes e por ter apresentado resultados satisfatórios, a função integradora ode45 foi utilizada em todas as rotinas. O ode45 emprega o método de Runge-Kutta de quarta e quinta ordem com passo de integração variável. Os parâmetros de integração como o tempo final e o passo de integração foram escolhidos caso a caso, para uma melhor apresentação das respostas. Na grande maioria das respostas, o passo máximo de integração utilizado foi de 0,001 s, por garantir boa precisão numérica aliada ao baixo tempo computacional gasto.

Os parâmetros físicos relacionados aos modelos estudados foram adotados para evidenciar as principais características e comparar os comportamentos dos sistemas em diferentes situações e configurações. Os parâmetros mantidos constantes em toda a análise foram apresentados em tabelas e os parâmetros instrumentos de comparação foram colocados nas legendas das próprias figuras contendo as respostas. Os parâmetros do sistema mecânico (massa e rigidez da mola) tiveram como referência uma possível aplicação veicular, com a admissão do modelo de  $\frac{1}{4}$  de veículo.

As análises dos comportamentos dos sistemas foram realizadas através de respostas nos domínios do tempo e da frequência. Nas respostas dos sistemas lineares, em todas as configurações estudadas, foram geradas curvas da transmissibilidade de deslocamento em função da razão de frequências, com a variação dos parâmetros elétricos. A transmissibilidade serviu de base para a comparação das versões de circuito elétrico linear e para determinar as faixas de parâmetros que apresentaram amplitudes mais baixas.

No sistema com indutância de variação não linear pela posição, outros métodos auxiliaram na análise do comportamento dinâmico do sistema. O diagrama de bifurcação permitiu entender as regiões nas quais o sistema tem o

comportamento alterado qualitativamente. Migrações de comportamentos periódicos para caóticos, e vice-versa, foram constantemente encontrados. Os mapas de Poincaré e os espectros de frequência, ou FFT, contribuíram também para a classificação do tipo de comportamento dinâmico.

Por fim, para o caso não linear, foi analisada analiticamente, pelo método de Routh-Hurwitz (MEIROVITCH, 1970), a estabilidade do sistema em torno do seu ponto de equilíbrio estático, considerando a vibração livre, ou seja, para o sistema na forma autônoma.

Os capítulos seguintes apresentam os resultados e discussões e a análise de estabilidade do modelo não linear, nos quais fica evidente o emprego da metodologia descrita acima.

## 5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo são apresentados os resultados e discussões envolvendo o sistema amortecido eletromecanicamente. Simulações numéricas são usadas para a geração das respostas que permitem a análise dos comportamentos dinâmicos dos diferentes sistemas. As ferramentas utilizadas são respostas em frequência, históricos no tempo, planos de fase, Mapas de Poincaré, diagramas de bifurcação e espectros de frequências (FFT). Os sistemas estudados diferem-se pela natureza dos circuitos elétricos empregados: RLC linear em série e RLC não linear em série. No segundo caso, a não linearidade vem da variação não linear da indutância em função da posição.

Os valores aplicados aos parâmetros são todos fisicamente coerentes. As geometrias resultantes dos valores adotados não foram estudadas por não serem objetos deste trabalho.

### 5.1 RESPOSTAS DO SISTEMA LINEAR

#### 5.1.1 CIRCUITO ELÉTRICO PURAMENTE RESISTIVO

Quando somente a resistência elétrica,  $R$ , está presente no circuito elétrico, ou seja, quando a indutância,  $L$ , e a capacitância,  $C$ , não são adicionadas, o circuito elétrico acoplado ao amortecedor eletromecânico é dito puramente resistivo e tem a característica de poder ser reduzido a um grau de liberdade. A resistência elétrica passa a ser o parâmetro que define o grau de amortecimento do sistema. Como pode ser visto na equação 3.35, o fator de amortecimento nesse caso é inversamente proporcional a  $R$ . Nesse aspecto, o sistema amortecido eletromecanicamente utilizando um circuito elétrico puramente resistivo tem comportamento dinâmico idêntico a um tradicional sistema com amortecimento viscoso, porém com a particularidade de que quanto menor o valor de  $R$ , maior o fator de amortecimento.

A figura 5.1 mostra a transmissibilidade de deslocamento da massa,  $m$ , com a variação da razão de frequências,  $r$ . Os valores utilizados para os parâmetros são apresentados na tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Parâmetros mantidos constantes na integração numérica para a resposta da figura 5.1.

Circuito elétrico puramente resistivo

Parâmetro	Descrição	Unidade	Valor
$m$	Massa	kg	240
$k$	Rigidez da mola	N/m	16000
$B$	Módulo do campo magnético	T	2,00
$l$	Comprimento do fio da bobina	m	99,8
$Y$	Amplitude do deslocamento da base	m	0,05

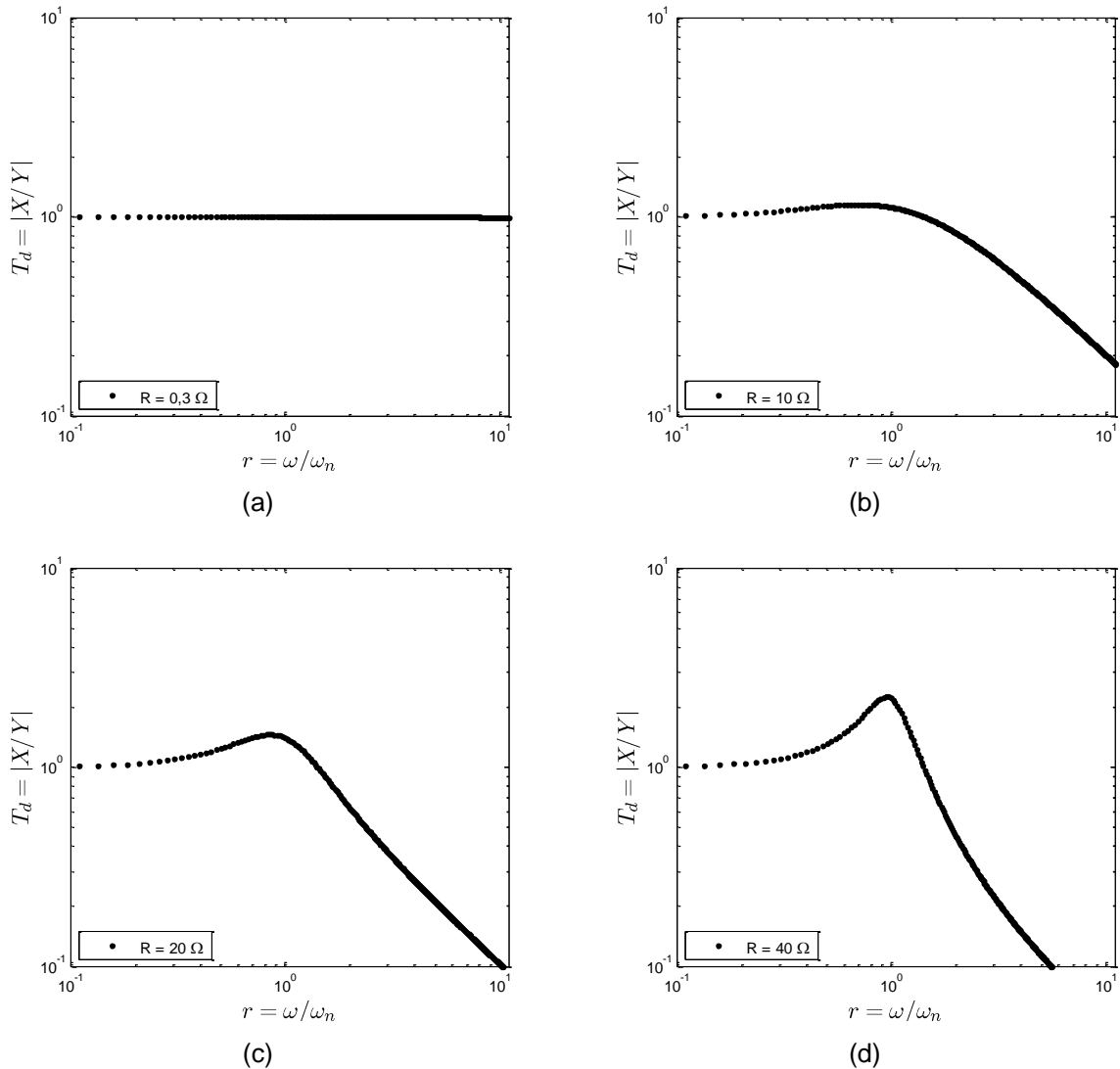


Figura 5.1 – Transmissibilidade,  $T_d$ , em função da razão de frequências,  $r$ , para diversos valores de resistência elétrica,  $R$ . Eixos logarítmicos. Circuito elétrico puramente resistivo. (a)  $R = 0,3 \Omega$ ; (b)  $R = 10 \Omega$ ; (c)  $R = 20 \Omega$ ; (d)  $R = 40 \Omega$

A tabela 5.2 exibe os resultados das frequências naturais do sistema para os diferentes valores de resistência elétrica.

Tabela 5.2 – Frequências naturais do sistema para os parâmetros usados na figura 5.1. Circuito puramente resistivo

Resistência elétrica, $R$ [ $\Omega$ ]	Frequência natural do sistema, $\omega_c$ [rad/s]	Razão de frequências, $r$
0,3	-	-
10,0	-	-
20,0	7,0316	0,8612
40,0	7,8969	0,9672

Com a análise da figura 5.1, verifica-se que, para razões de frequências inferiores a  $\sqrt{2}$ , quanto menor o valor da resistência elétrica,  $R$ , menor também o valor da transmissibilidade. Já para razões de frequências superiores a  $\sqrt{2}$ , quanto maior o valor da resistência elétrica,  $R$ , menor o valor da transmissibilidade. Assim como comentado anteriormente, a resistência elétrica,  $R$ , gera um efeito exatamente inverso ao efeito provocado pelo fator de amortecimento,  $c$ , para sistemas exclusivamente mecânicos.

Em todos os casos estudados neste trabalho, a rigidez da mola e a massa se mantêm constantes nos valores de 16000 N/m e 240 kg, respectivamente. Portanto, a frequência natural mecânica,  $\omega_n$ , estabelecida pela equação 3.3, tem sempre o valor de 8,165 rad/s. Assim, como visto anteriormente, a razão de frequências,  $r$ , sempre utiliza o valor de 8,165 rad/s como denominador, conforme a equação 3.5.

Pelo fato do sistema ter sido reduzido a um grau de liberdade, é natural que apenas um pico de amplitude seja encontrado nas respostas de transmissibilidade de deslocamento. Esse maior valor de transmissibilidade ocorre nas proximidades de  $r = 1$ , ou seja, quando a frequência de excitação se aproxima da frequência natural mecânica do sistema. Nas figuras 5.1(c) e 5.1(d), os picos de transmissibilidade são evidentes em  $r = 0,8612$  e  $r = 0,9672$ , respectivamente. Em  $r = \sqrt{2}$ , o comportamento deixa de ser de amplificação do movimento,  $T_d < 1$ , e passa a ser de isolamento,  $T_d > 1$ , assim como nos tradicionais sistemas viscosamente amortecidos.

Para valores mais baixos de  $R$ , os picos de amplitude passam a ser praticamente imperceptíveis. A curva para  $R = 10 \Omega$  da figura 5.1(b) exemplifica essa ausência de pico evidente.

Nota-se também que a curva para  $R = 0,3 \Omega$ , apresentada na figura 5.1(a), é praticamente constante no valor de transmissibilidade de 1. Se para baixas frequências essa característica é positiva, para frequências mais altas passa a ser

uma desvantagem, uma vez que praticamente não há a atenuação do deslocamento. Na realidade, o decaimento da curva na região de isolamento é muito lento, se comparado aos demais casos. Esse valor de resistência elétrica é muito próximo do valor correspondente à resistência elétrica intrínseca da bobina para o conjunto de valores de parâmetros exibidos na figura 5.1.

### 5.1.2 CIRCUITO ELÉTRICO RL EM SÉRIE

São investigadas agora as influências dos parâmetros elétricos de resistência,  $R$ , e indutância,  $L$ , sobre o comportamento do sistema mecânico acoplado ao transdutor de bobina móvel ligado ao circuito elétrico RL em série. No resultado a seguir, a transmissibilidade de deslocamento,  $T_d$ , é avaliada em função da razão de frequências,  $r$ .

A tabela 5.3 mostra os valores adotados para os parâmetros que não variaram na obtenção das respostas de transmissibilidade de deslocamento da figura 5.2.

Tabela 5.3 – Parâmetros mantidos constantes na integração numérica para as respostas da figura 5.2. Circuito elétrico RL em série

Parâmetro	Descrição	Unidade	Valor
$m$	Massa	kg	240
$k$	Rigidez da mola	N/m	16000
$B$	Módulo do campo magnético	T	2,00
$l$	Comprimento do fio da bobina	m	99,8
$Y$	Amplitude do deslocamento da base	m	0,05
$R$	Resistência elétrica	$\Omega$	10,0

Após a análise da figura 5.2, percebe-se que, mantendo-se constante o valor da resistência elétrica,  $R$ , ao variar o valor da indutância,  $L$ , a dinâmica do sistema é alterada. Para os valores de 1 H e 2 H, nota-se claramente picos de maior amplitude, porém esses picos encontram-se em razões de frequência diferentes, com o deslocamento da curva para a esquerda com o aumento do valor de  $L$ .

Para valores menores de  $L$ , como de 0,1 H na figura 5.2 (a), por exemplo, os picos de amplitude deixam de ser claramente perceptíveis, e os sistemas apresentam uma dinâmica bem similar. A principal diferença ocorre em frequências mais altas, com uma tendência de valores mais baixos de  $T_d$  para valores maiores de indutância.



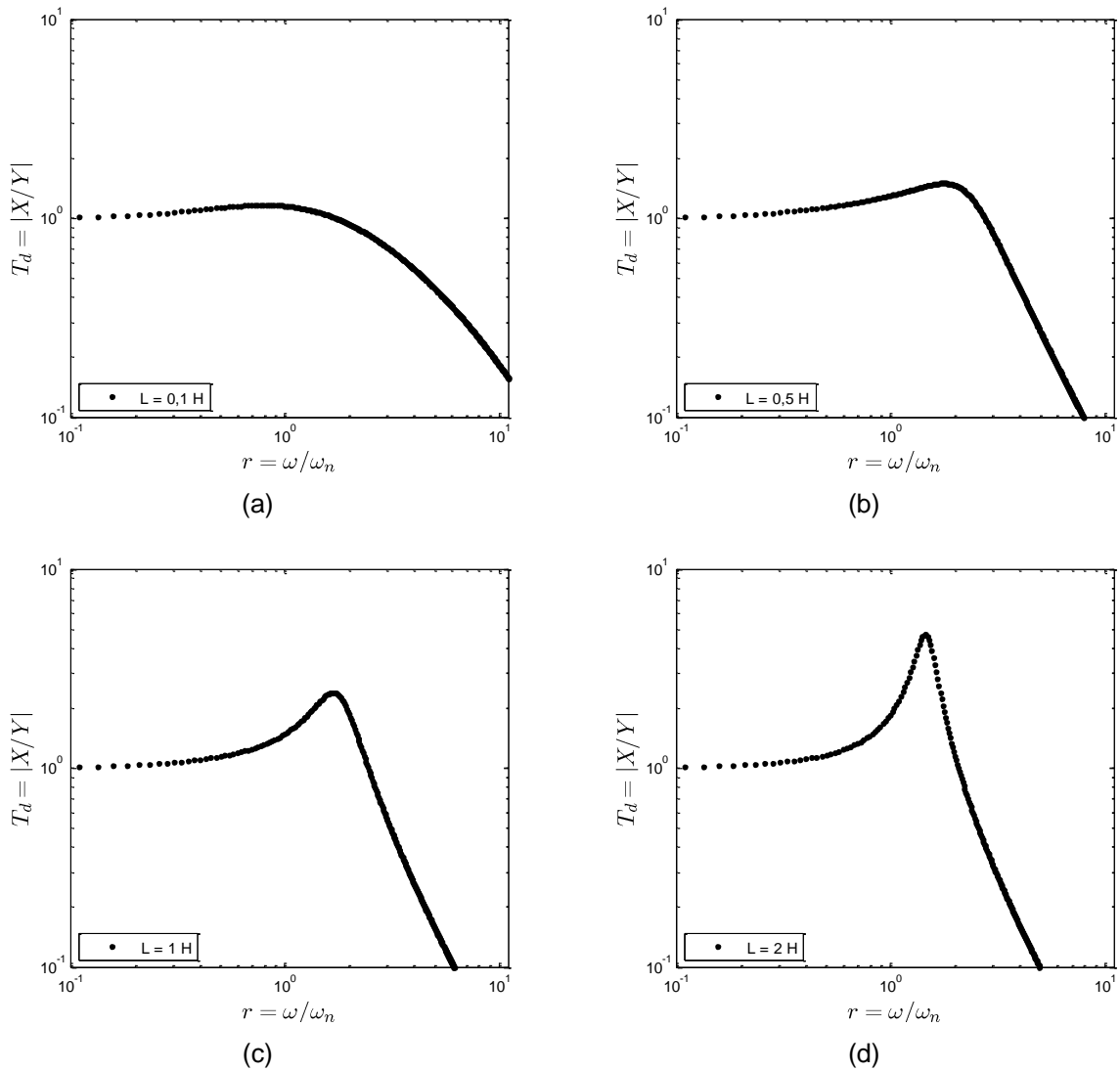


Figura 5.2 – Transmissibilidade,  $T_d$ , em função da razão de frequências,  $r$ , para diversos valores de indutância,  $L$ . Eixos logarítmicos. Circuito elétrico RL em série. (a)  $L = 0,1 \text{ H}$ ; (b)  $L = 0,5 \text{ H}$ ; (c)  $L = 1 \text{ H}$ ; (d)  $L = 2 \text{ H}$

Por isso, o valor de  $0,1 \text{ H}$  para a indutância  $L$  será adotado para a análise da influência do parâmetro de resistência elétrica,  $R$ .

Os valores das frequências naturais do sistema em todos os casos são mostrados na tabela 5.4.

Tabela 5.4 – Frequências naturais do sistema para os parâmetros usados na figura 5.2. Foi utilizado o valor de resistência elétrica,  $R$ , de  $10 \Omega$ . Circuito elétrico RL em série

Indutância, $L$ [H]	Frequência natural do sistema, $\omega_c$ [rad/s]	Razão de frequências, $r$
0,1	-	-
0,5	16,4543	2,0152
1,0	14,1194	1,7293
2,0	11,9020	1,4577

A tabela 5.5, mostrada abaixo, contém os parâmetros adotados para a geração da resposta em termos da transmissibilidade de deslocamento da figura 5.3. Essa figura apresenta as curvas de transmissibilidade para diferentes valores de resistência elétrica,  $R$ . Conforme mencionado anteriormente, o valor de indutância,  $L$ , escolhido para a análise foi de  $0,1 \text{ H}$ , visto que na proximidade desse valor a transmissibilidade apresenta valores mais comportados, comprovados pela ausência de picos significativos para qualquer frequência de excitação.

Tabela 5.5 – Parâmetros mantidos constantes na integração numérica para as respostas da figura 5.3. Circuito elétrico RL em série

Parâmetro	Descrição	Unidade	Valor do parâmetro
$m$	Massa	kg	240
$k$	Rigidez da mola	N/m	16000
$B$	Módulo do campo magnético	T	2,00
$l$	Comprimento do fio da bobina	m	99,8
$Y$	Amplitude do deslocamento da base	m	0,05
$L$	Indutância	H	0,100

De acordo com a resposta da figura 5.3, a dinâmica do sistema é sensivelmente alterada com a variação da resistência elétrica,  $R$ , mantendo-se constante o valor da indutância,  $L$ , em  $0,1 \text{ H}$ . Nota-se que, com o aumento do valor de  $R$ , acontece o deslocamento do pico de amplitude para a esquerda, ou seja, para valores menores da razão de frequências,  $r$ . Para os valores de  $20$  e  $40 \Omega$ , a ressonância ocorre nas razões de frequências de  $0,8741$  e  $0,9720$ , respectivamente.

Entretanto, com a redução de  $R$  até  $0,3 \Omega$ , a ressonância passa a acontecer a uma razão de frequências de  $5,0857$ . Até aproximadamente  $r = 7$ , a característica é de amplificação do movimento. Após esse valor, ocorre o isolamento. Essa peculiaridade encontrada nesses casos em que a resistência elétrica assume valores mais baixos pode ser benéfica em situações nas quais a frequência de trabalho é menor ou próxima da frequência natural do sistema, pois normalmente a

amplificação é significativamente menor do que as apresentadas em sistemas com a ressonância em  $r = 1$ .

A tabela 5.6 mostra os valores de frequência natural do sistema para cada valor de resistência elétrica das respostas mostradas na figura 5.3.

Tabela 5.6 – Frequências naturais do sistema para os parâmetros usados na figura 5.3. Foi utilizado o valor de indutância,  $L$ , de 0,1 H. Circuito elétrico RL em série

Resistência elétrica, $R$ [ $\Omega$ ]	Frequência natural do sistema, $\omega_c$ [rad/s]	Razão de frequências, $r$
0,3	41,5242	5,0857
10,0	-	-
20,0	7,1400	0,8741
40,0	7,9400	0,9720

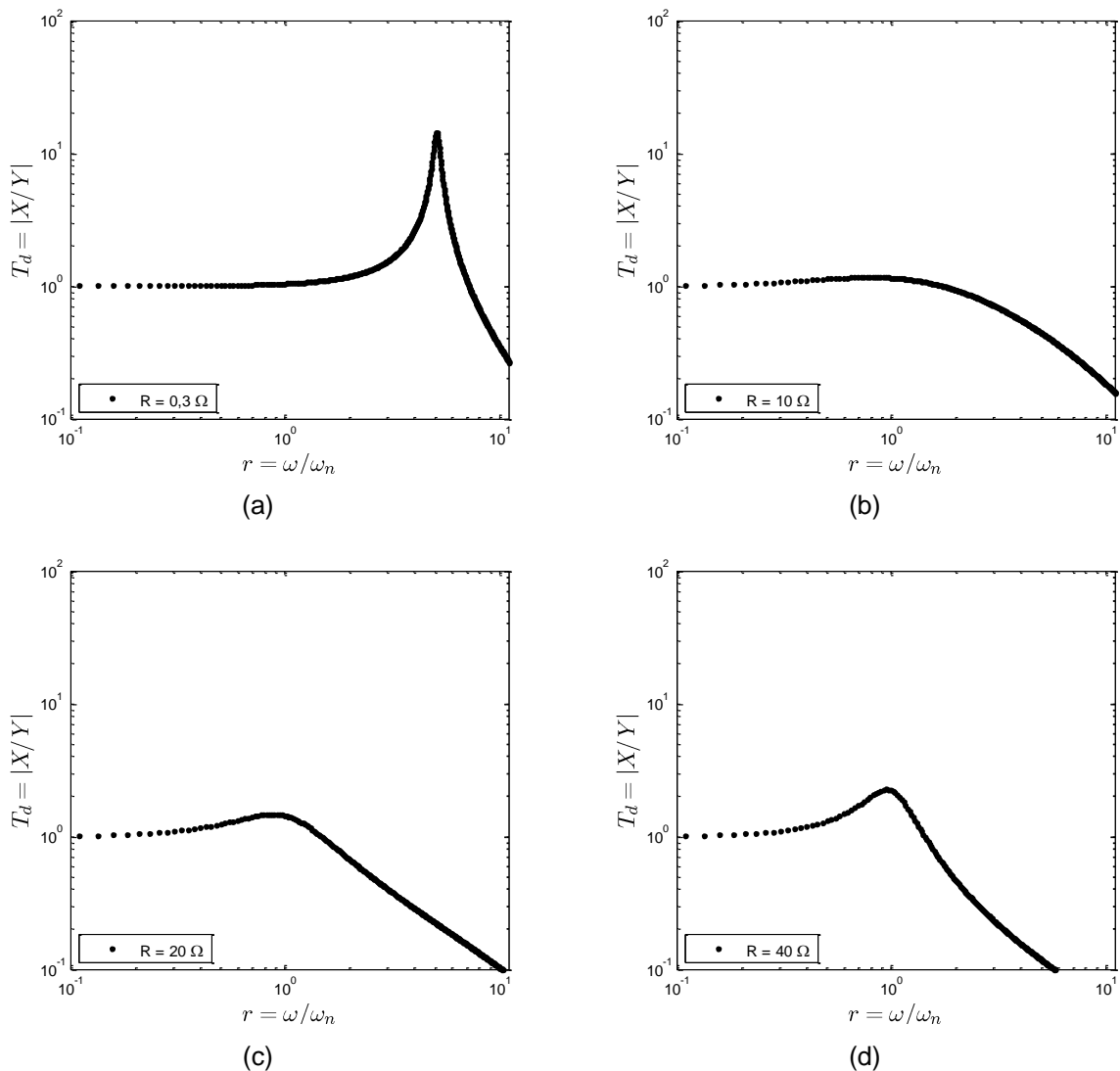


Figura 5.3 – Transmissibilidade,  $T_d$ , em função da razão de frequências,  $r$ , para diversos valores de resistência elétrica,  $R$ , e indutância,  $L$ , constante em 0,1 H. Eixos logarítmicos. Circuito elétrico RL em série. (a)  $R = 0,3 \Omega$ ; (b)  $R = 10 \Omega$ ; (c)  $R = 20 \Omega$ ; (d)  $R = 40 \Omega$

O valor de resistência de  $10 \Omega$ , da figura 5.3(b), apresenta comportamento de baixa amplificação na ressonância ( $T_d$  ligeiramente superior a 1). Como, para frequências mais altas, o sistema com  $10 \Omega$  apresenta valores de transmissibilidade singelamente menores, admitiu-se esse valor de indutância como sendo o mais adequado para a condição.

Portanto, em sistemas sujeitos a grandes faixas de frequências de excitação, é prudente a adoção de parâmetros que deixem a curva de transmissibilidade mais achatada, sem picos de amplitude evidentes e com valores de transmissibilidade de baixa amplificação na região de pré-ressonância e isolamento após a ressonância.

A figura 5.4 apenas reforça que, para valores altos de  $L$ , nenhum valor de  $R$  leva a uma transmissibilidade  $T_d$  aceitável. Para esse caso, foi adotado o valor de 2 H para a indutância. Na melhor condição, a amplificação máxima de movimento é de aproximadamente 2,8 para uma razão de frequências de aproximadamente 1,09. Todos os valores adotados para a construção da figura 5.4 estão na tabela 5.7.

Tabela 5.7 – Parâmetros mantidos constantes na integração numérica para as respostas da figura 5.4. Circuito elétrico RL em série

Parâmetro	Descrição	Unidade	Valor do parâmetro
$m$	Massa	kg	240
$k$	Rigidez da mola	N/m	16000
$B$	Módulo do campo magnético	T	2,00
$l$	Comprimento do fio da bobina	m	99,8
$Y$	Amplitude do deslocamento da base	m	0,05
$L$	Indutância	H	2,00

As frequências naturais do sistema são mostradas na tabela 5.8. O valor de indutância de 2 H foi utilizado para a determinação dos valores.

Tabela 5.8 – Frequências naturais do sistema para os parâmetros usados na figura 5.4. Foi utilizado o valor de indutância,  $L$ , de 2 H. Circuito elétrico RL em série

Resistência elétrica, $R$ [ $\Omega$ ]	Frequência natural do sistema, $\omega_c$ [rad/s]	Razão de frequências, $r$
0,3	12,2335	1,4983
10,0	11,9020	1,4577
20,0	10,9253	1,3381
40,0	8,9315	1,0939

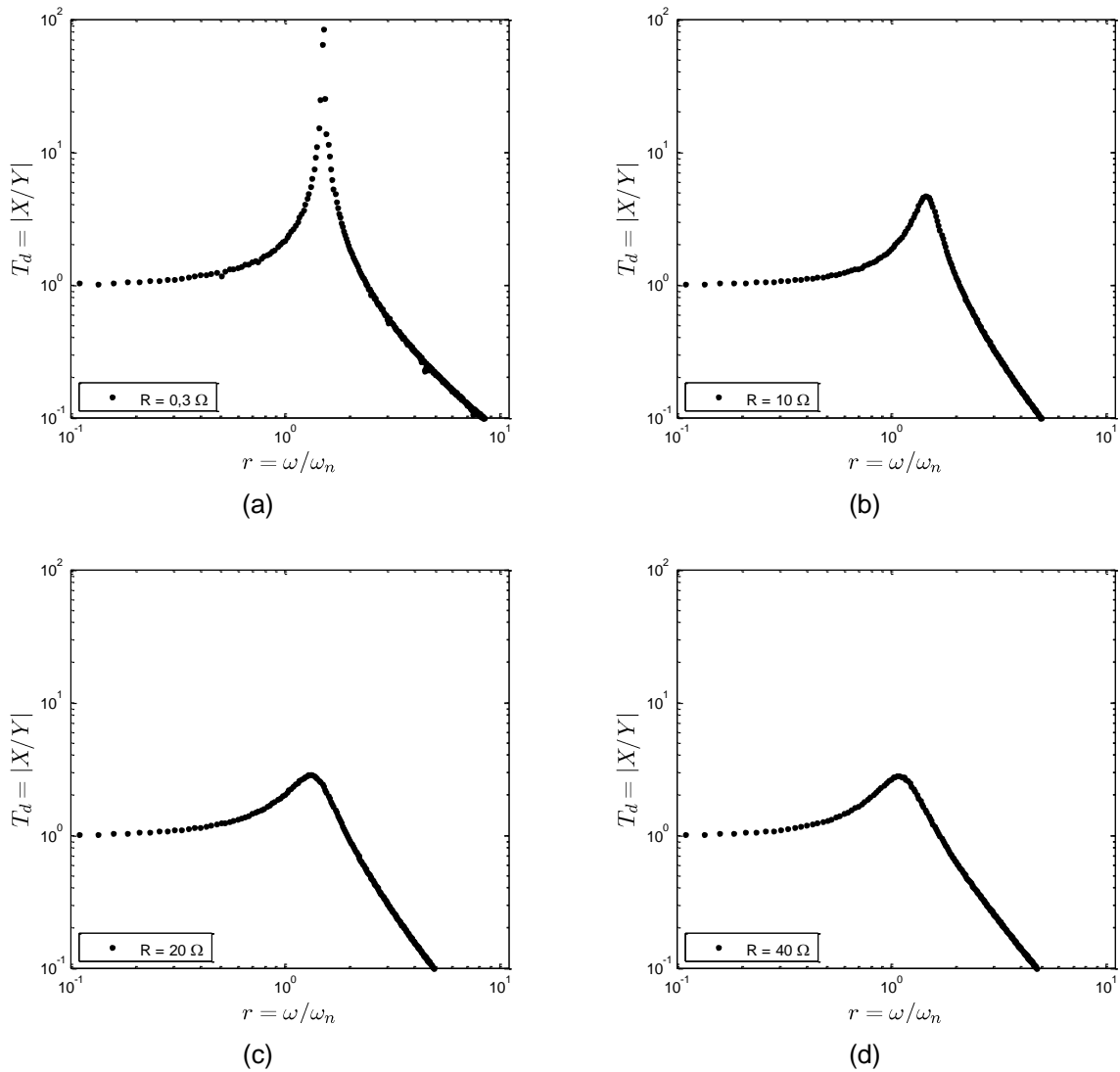


Figura 5.4 – Transmissibilidade,  $T_d$ , em função da razão de frequências,  $r$ , para diversos valores de resistência elétrica,  $R$ , e indutância,  $L$ , constante em 2 H. Eixos logarítmicos. Circuito elétrico RL em série. (a)  $R = 0,3 \Omega$ ; (b)  $R = 10 \Omega$ ; (c)  $R = 20 \Omega$ ; (d)  $R = 40 \Omega$

Pelo fato de ser restrito à resistência elétrica e indutância, ou seja, com capacitância infinita, o circuito elétrico RL não possui característica oscilatória. Por isso, é normal o surgimento de apenas um pico de amplitude nas curvas das figuras acima. Por não ser um oscilador nesse caso, o circuito elétrico contribui para que o sistema tenha apenas uma frequência natural.

### 5.1.3 CIRCUITO ELÉTRICO RLC EM SÉRIE

Para a análise inicial do sistema com amortecedor eletromecânico de circuito elétrico RLC em série, os valores adotados de  $L$  e  $R$  são os mesmos que apresentaram menores amplitudes para o circuito RL em série da subseção anterior. Assim, o valor de  $L$  é 0,1 H e o valor de  $R$  é 10  $\Omega$ .

A figura 5.5 mostra a transmissibilidade para vários valores da capacitância  $C$ . Os parâmetros constantes adotados para a integração numérica da figura 5.5 estão contidos na tabela 5.5.

Tabela 5.9 – Parâmetros mantidos constantes na integração numérica para a construção da figura 5.5. Circuito elétrico RLC em série

Parâmetro	Descrição	Unidade	Valor
$m$	Massa	kg	240
$k$	Rigidez da mola	N/m	16000
$B$	Módulo do campo magnético	T	2,00
$l$	Comprimento do fio da bobina	m	99,8
$Y$	Amplitude do deslocamento da base	m	0,05
$L$	Indutância	H	0,100
$R$	Resistência elétrica	$\Omega$	10,0

Na tabela 5.10, são apresentados os valores das frequências naturais do sistema encontradas para cada valor da capacitância analisada na figura 5.5.

Tabela 5.10 – Frequências naturais do sistema para os parâmetros usados na figura 5.5. Foi utilizado o valor de resistência elétrica,  $R$ , de 10  $\Omega$ , e de indutância,  $L$ , de 0,1 H. Circuito elétrico RLC em série

Capacitância, $C$ [F]	Frequência natural 1, $\omega_{c1}$ [rad/s]	Razão de frequências 1, $r_1$	Frequência natural 2, $\omega_{c2}$ [rad/s]	Razão de frequências 2, $r_2$
0,005	6,0655	0,7429	33,8915	4,1508
0,010	5,0574	0,6194	11,0462	1,3529
0,050	2,2458	0,2750	-	-
0,150	-	-	-	-

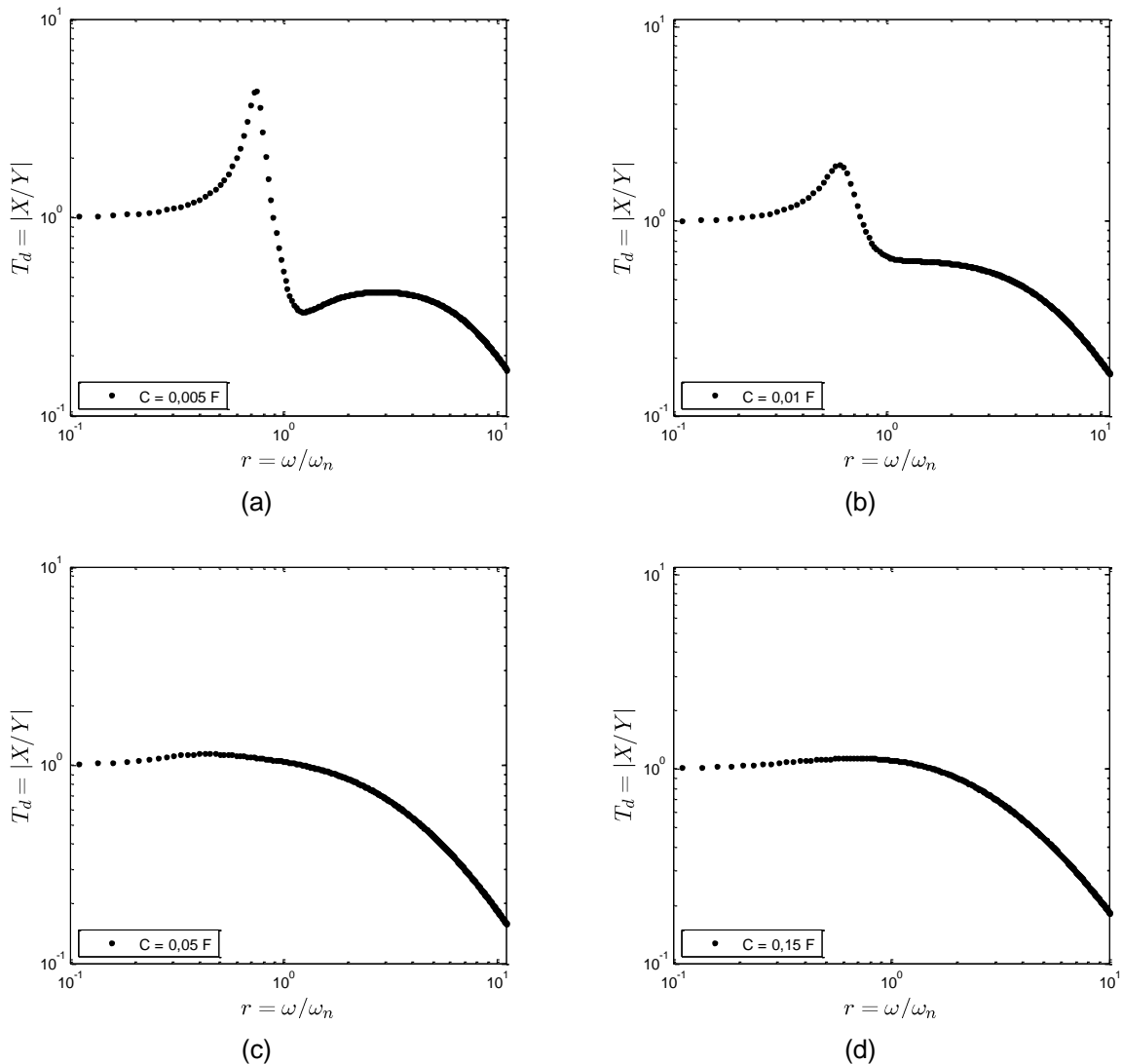


Figura 5.5 – Transmissibilidade,  $T_d$ , em função da razão de frequências,  $r$ , para diversos valores de capacitância,  $C$ . Foram adotados os valores de 0,1 H para  $L$  e 10  $\Omega$  para  $R$ . Eixos logarítmicos.

Circuito elétrico RLC em série. (a)  $C = 0,005 F$ ; (b)  $C = 0,01 F$ ; (c)  $C = 0,05 F$ ; (d)  $C = 0,15 F$

Nas figuras 5.5(a) e 5.5(b), as respostas em frequência apresentam dois picos claros de amplitude. Para  $C = 0,005 F$ , os picos ocorrem nas razões de frequências correspondentes às frequências naturais do sistema, ou seja, 0,7429 e 4,1508. Já para  $C = 0,01 F$ , os picos são evidenciados nas razões de frequências de 0,6194 e 1,3529, também correspondentes às frequências naturais do sistema.

Para esse sistema de dois graus de liberdade, especificamente, as frequências naturais dos sistemas isolados não são iguais às frequências naturais do sistema acoplado. Assim, os picos de amplitude, quando visíveis, ocorrem em frequências iguais às frequências naturais do sistema.

Observa-se, também, que, à medida que diminui o valor de  $C$ , os picos de amplitude aproximam-se dos valores de frequência natural da parte mecânica do sistema, ou seja,  $r = 1$ .

Através das figuras 5.5(c) e 5.5(d), percebe-se que, a partir de  $C = 0,05 F$ , a curva de transmissibilidade torna-se mais comportada, isto é, sem picos de amplitude evidentes. Para  $C = 0,15 F$ , a frequência natural do sistema elétrico se iguala à frequência natural do sistema mecânico.

A mesma análise de transmissibilidade pode ser feita com a variação da resistência elétrica,  $R$ . A figura 5.6 mostra o resultado dessa análise. Os parâmetros adotados são apresentados na tabela 5.11.

Tabela 5.11 – Parâmetros mantidos constantes na integração numérica para a construção da figura 5.6. Circuito elétrico RLC em série

Parâmetro	Descrição	Unidade	Valor
$m$	Massa	kg	240
$k$	Rigidez da mola	N/m	16000
$B$	Módulo do campo magnético	T	2,00
$l$	Comprimento do fio da bobina	m	99,8
$Y$	Amplitude do deslocamento da base	m	0,05
$L$	Indutância	H	0,300
$C$	Capacitância	F	0,05

Foi analisada, primeiramente, a transmissibilidade de deslocamento,  $T_d$ , para vários valores de  $R$ , com o valor da capacitância  $C$  mantido em 0,05 F. Os valores das frequências naturais do sistema,  $\omega_c$ , e suas respectivas razões de frequências,  $r$ , são exibidas na tabela 5.12 para cada valor de resistência elétrica.

Tabela 5.12 – Frequências naturais do sistema para os parâmetros usados na figura 5.6. Foi utilizado o valor de capacitância,  $C$ , de 0,05 F, e de indutância,  $L$ , de 0,1 H. Circuito elétrico RLC em série

Resistência elétrica, $R$ [ $\Omega$ ]	Frequência natural 1, $\omega_{c1}$ [rad/s]	Razão de frequências 1, $r_1$	Frequência natural 2, $\omega_{c2}$ [rad/s]	Razão de frequências 2, $r_2$
0,3	2,6352	0,3227	43,7875	5,3628
10,0	2,2458	0,2750	-	-
20,0	6,4200	0,7861	-	-
40,0	7,8000	0,9552	-	-



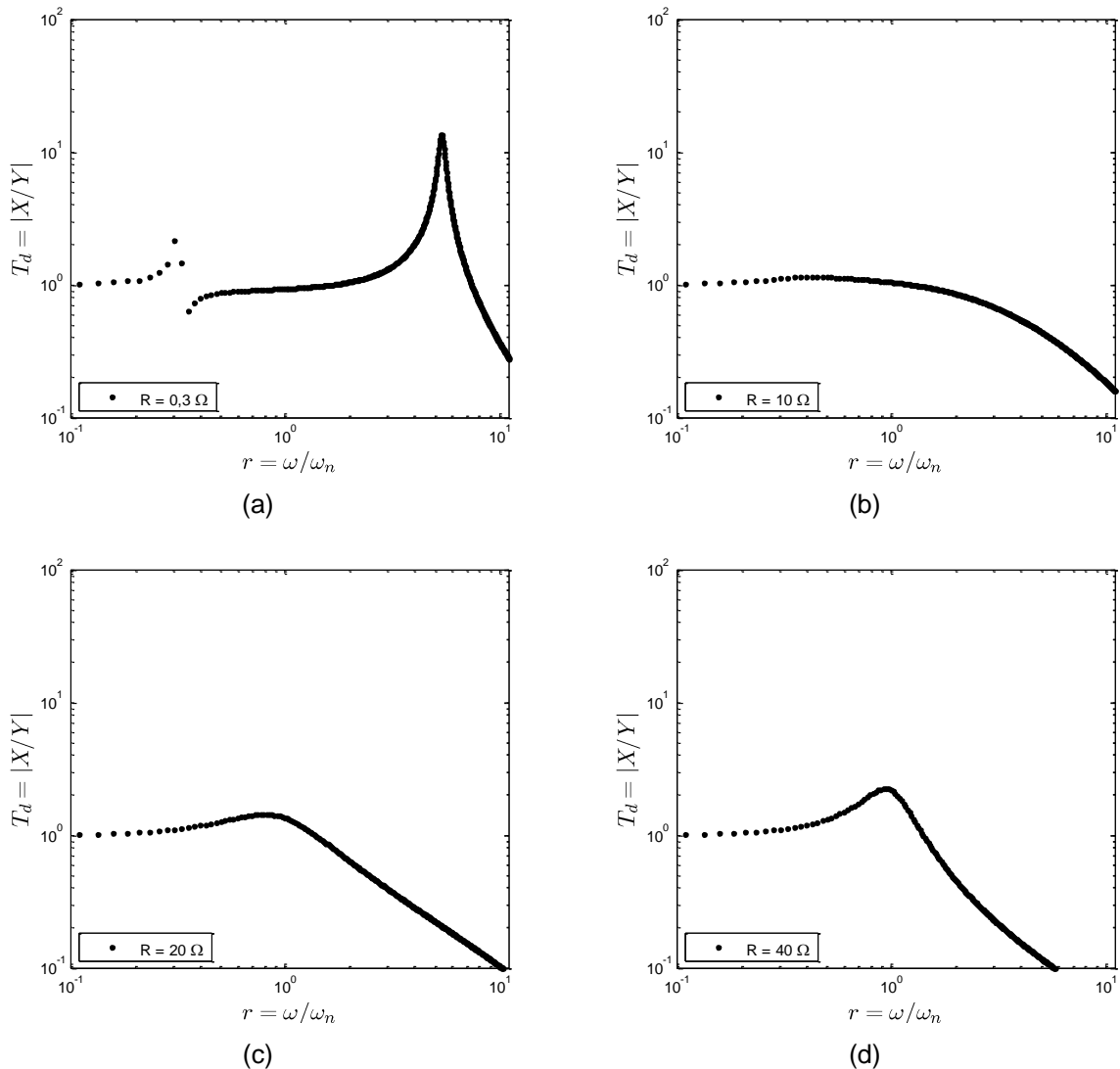


Figura 5.6 – Transmissibilidade,  $T_d$ , em função da razão de frequências,  $r$ , para diversos valores de resistência elétrica,  $R$ . Foram adotados os valores de 0,1 H para  $L$  e 0,05 F para  $C$ . Eixos logarítmicos. Circuito elétrico RLC em série. (a)  $R = 0,3 \Omega$ ; (b)  $R = 10 \Omega$ ; (c)  $R = 20 \Omega$ ; (d)  $R = 40 \Omega$ .

Na figura 5.6(a), com  $R = 0,3 \Omega$ , dois picos de amplitude são evidenciados na curva de transmissibilidade. O primeiro deles ocorre em  $r = 0,3227$ . Imediatamente após esse pico de menor amplitude, ocorre um vale, abaixo do valor de transmissibilidade de deslocamento unitária, ou seja, com característica de atenuação de vibrações. Na prática, por estar relacionado a razões de frequências mais baixas, essa característica permite que sistemas com frequências de trabalho antecipadamente conhecidas e em torno da região de vale possam ter uma redução da amplitude de deslocamento. Essa vantagem não é aplicada aos sistemas com valores de resistência elétrica maiores. Quanto menor o valor de  $R$ , maior o vale apresentado, ou seja, menor o valor da transmissibilidade, porém, maiores são os

picos principal e secundário. Esse comportamento exclusivo de sistemas oscilatórios com mais de um grau de liberdade é classificado como antirressonância. O segundo pico, de maior amplitude, está presente na figura 5.6(a) em  $r = 5,3628$ .

Para o valor de  $R = 10 \Omega$  da figura 5.6(b), o comportamento é o mesmo evidenciado na figura 5.5(c). A curva mostra-se achatada, com ausência de picos de amplitude evidentes. Sistemas com essa característica são altamente viáveis em aplicações cujas frequências de trabalho variam estocasticamente em faixas significativamente grandes. Embora não apresentem as melhores condições de transmissibilidade de vibrações para cada valor de razão de frequências, atendem de forma aceitável para todos os valores de  $r$ .

Conforme se aumenta o valor da resistência elétrica, a curva de transmissibilidade aproxima-se do ponto de  $r = 1$ . É o que acontece para  $R = 20 \Omega$  e  $R = 40 \Omega$ , das figuras 5.6(c) e 5.6(d), respectivamente. Embora ocorra um pico de amplitude de deslocamento na ressonância, para altas frequências essa condição apresenta os valores mais baixos de transmissibilidade. Logo, em situações em que a frequência de excitação é alta e previamente conhecida, as opções de sistemas com resistência elétrica maiores tornam-se interessantes. Os valores das razões de frequências relacionadas aos picos para  $R = 20 \Omega$  e  $R = 40 \Omega$  são  $r = 0,7861$  e  $r = 0,9552$ , respectivamente.

## 5.2 RESPOSTAS DO SISTEMA NÃO LINEAR

O sistema eletromecanicamente amortecido contendo a indutância não linear pela posição foi apresentado na figura 3.9. Nele, o valor da indutância varia com a posição da bobina, ou seja, com o deslocamento do corpo,  $x$ .

A curva característica da indutância não linear de Ho, Nguyen e Woo (2010), apresentada no capítulo 2, de revisão bibliográfica, na figura 2.9, é agora reproduzida na figura 5.7. A escolha dos parâmetros da indutância não linear foi feita de acordo com o testado e validado por Ho, Nguyen e Woo (2010), e aparecem na tabela 5.13.

Tabela 5.13 – Parâmetros utilizados na construção da curva característica da indutância não linear pela posição da figura 5.7

Parâmetro	Descrição	Unidade	Valor
$L_0$	Indutância na posição inicial	H	0,300
$A$	Coefficiente de ajuste da função	-	0,02494
$\sigma$	Desvio padrão	-	0,0483

Assim como mencionado anteriormente, a indutância exibe uma curva característica no formato de uma Gaussiana, com seu pico no valor de  $L = 0,5778 H$  em  $x = 0$ .

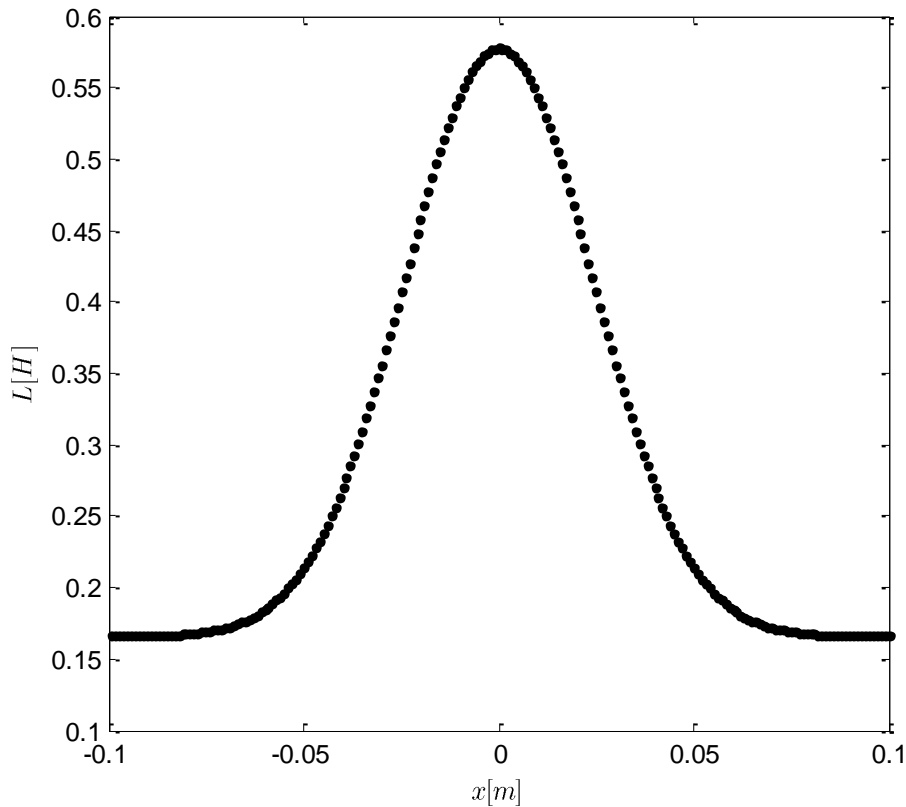


Figura 5.7 – Curva característica da indutância variável na forma Gaussiana,  $L(x)$ , em função do deslocamento do corpo ou posição da bobina,  $x$

Com o comportamento não linear da indutância como função da posição da massa, ou da bobina, definido, a dinâmica do sistema é analisada.

Inicialmente, são mostradas as respostas em frequência do sistema com indutância não linear por meio dos gráficos de transmissibilidade de deslocamento,  $T_d$ , em função da razão de frequências,  $r$ . Para o valor da capacitância de 0,03 F, a

transmissibilidade é analisada em quatro valores de resistência elétrica: 0,3, 10, 20 e 40  $\Omega$ . Os parâmetros mantidos fixos no estudo são apresentados na tabela 5.14.

Tabela 5.14 – Parâmetros mantidos constantes na integração numérica para a construção da figura 5.8. Circuito elétrico RLC em série com indutância não linear

Parâmetro	Descrição	Unidade	Valor
$m$	Massa	kg	240
$k$	Rigidez da mola	N/m	16000
$B$	Módulo do campo magnético	T	2,00
$l$	Comprimento do fio da bobina	m	99,8
$Y$	Amplitude do deslocamento da base	m	0,05
$C$	Capacitância	F	0,03
$L_0$	Indutância na posição inicial	H	0,300
$A$	Coefficiente de ajuste da função	-	0,02494
$\sigma$	Desvio padrão	-	0,0483

De acordo com a figura 5.8(a), para  $R = 0,3 \Omega$ , o sistema apresenta um pico de deslocamento em aproximadamente  $r = 0,38$ . Acima desse valor de razão de frequências, é observada uma desordem nos valores de transmissibilidade, chegando a patamares de aproximadamente  $T_d = 42$ . Após, aproximadamente,  $r = 8,13$ , a curva de transmissibilidade volta a ser comportada, e com um decaimento inferior aos demais valores de resistência elétrica.

Para os parâmetros adotados e mostrados na tabela 5.14, a resistência elétrica intrínseca da bobina circunda  $R = 0,3 \Omega$ . Portanto, admite-se que, para fugir de regiões irregulares de transmissibilidade de deslocamento vistos na figura 5.8(a), torna-se necessário o acréscimo de uma resistência elétrica adicional de maior valor no circuito elétrico associado.

Na figura 5.8(b), é apresentada a resposta para  $R = 10 \Omega$ , na qual o aspecto da curva é significativamente alterado na região entre, aproximadamente,  $r = 1,58$  e  $r = 4,48$ , chegando ao valor de, aproximadamente,  $T_d = 2,01$ . Para valores menores de  $r$ , a resposta mantém-se praticamente constante em valores pouco maiores que  $T_d = 1$ . Acima de  $r = 4,5$ , acontece o decaimento da curva, com taxa similar à situação de  $R = 0,3$ .

Nos demais casos da figura 5.8, a aparência da resposta de transmissibilidade é mais convencional. Para  $R = 20 \Omega$ , na figura 5.8(c), há um ligeiro pico de deslocamento em, aproximadamente,  $r = 0,8$ . Após esse valor, ocorre o isolamento do movimento, com decaimento singelamente mais rápido que nos casos

anteriormente discutidos. Nota-se que a curva é praticamente achatada, com a transmissibilidade não passando de  $T_d = 1,468$ .

Em  $R = 40 \Omega$ , mostrado na figura 5.16(d), a resposta passa a exibir um pico de transmissibilidade mais evidente, e referente ao valor de  $r = 0,9195$ . Com o aumento do valor da resistência elétrica, os picos tornam-se cada vez maiores e próximos de  $r = 1$ , e com decaimentos maiores em alta frequência, na região de isolamento.

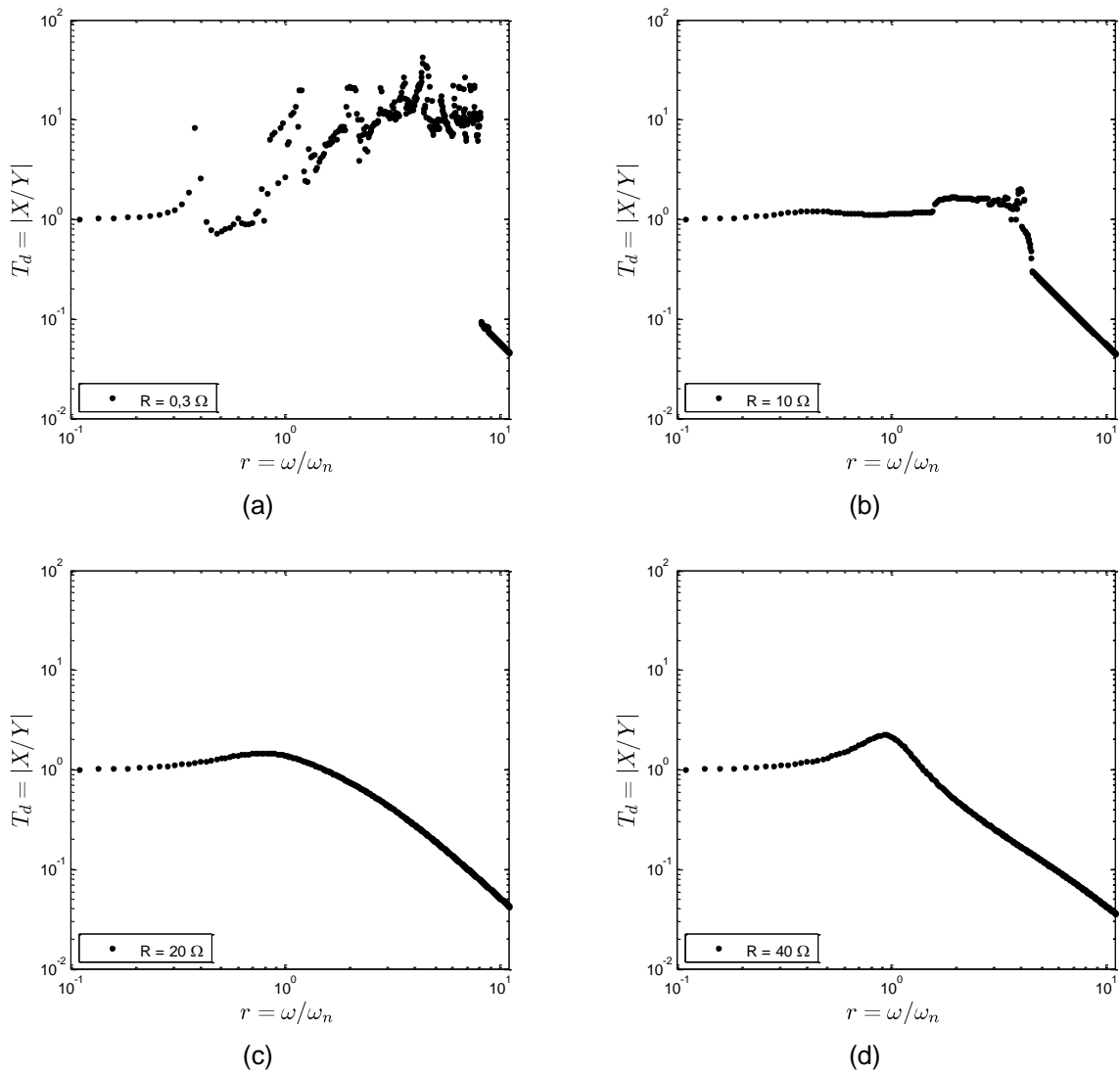


Figura 5.8 – Transmissibilidade,  $T_d$ , em função da razão de frequências,  $r$ , para diversos valores de resistência elétrica,  $R$ . Eixos logarítmicos. Foi adotado o valor de 0,03 F para  $C$ . Circuito elétrico RLC em série com indutância não linear. (a)  $R = 0,3 \Omega$ ; (b)  $R = 10 \Omega$ ; (c)  $R = 20 \Omega$ ; (d)  $R = 40 \Omega$

Com o intuito de explorar com mais detalhes o comportamento dinâmico do sistema eletromecânico não linear, três valores de resistência elétrica utilizados na figura 5.8 são selecionados para a construção de diagramas de bifurcação.

Os diagramas de bifurcação indicam as regiões de transição do comportamento dinâmico em termos qualitativos. Nas respostas seguintes, é possível evidenciar que não são raros os casos de mudança de comportamento regular (periódico) para comportamentos quasi-periódicos ou caóticos, e vice-versa.

A geração dos diagramas de bifurcação dá-se pela variação lenta de um dos parâmetros do sistema, denominado parâmetro de controle. No caso das respostas deste trabalho, a capacitância,  $C$ , foi utilizada como parâmetros de controle em todos os casos.

As escalas dos gráficos foram ajustadas para uma melhor percepção das ordens de grandeza e compreensão das bifurcações.

Como complemento e confirmação do comportamento dinâmico para cada valor escolhido do parâmetro de controle,  $C$ , históricos no tempo do deslocamento, planos de fase no regime permanente, quando de sua existência, mapas de Poincaré e espectros de frequências (FFT) são usados na análise.

A figura 5.9 exhibe um conjunto de quatro diagramas de bifurcação com a capacitância,  $C$ , como parâmetro de controle. Nessa primeira situação, o valor de  $R = 0,3 \Omega$  foi adotado. A cada uma das repostas está associada uma razão de frequências,  $r$ , diferente. A tabela 5.15 mostra os valores dos demais parâmetros envolvidos.

Tabela 5.15 – Parâmetros mantidos constantes na integração numérica para a construção das figuras de 5.9 a 5.45. Circuito elétrico RLC em série com indutância não linear

Parâmetro	Descrição	Unidade	Valor
$m$	Massa	kg	240
$k$	Rigidez da mola	N/m	16000
$B$	Módulo do campo magnético	T	2,00
$l$	Comprimento do fio da bobina	m	99,8
$Y$	Amplitude do deslocamento da base	m	0,05
$L_0$	Indutância na posição inicial	H	0,300
$A$	Coefficiente de ajuste da função	-	0,02494
$\sigma$	Desvio padrão	-	0,0483

Notam-se claramente os diferentes aspectos presentes nos diagramas apresentados, desde regiões densamente povoadas por pontos, indicando a provável presença de caos, até linhas bem definidas de deslocamento pequeno, associadas provavelmente ao comportamento periódico.

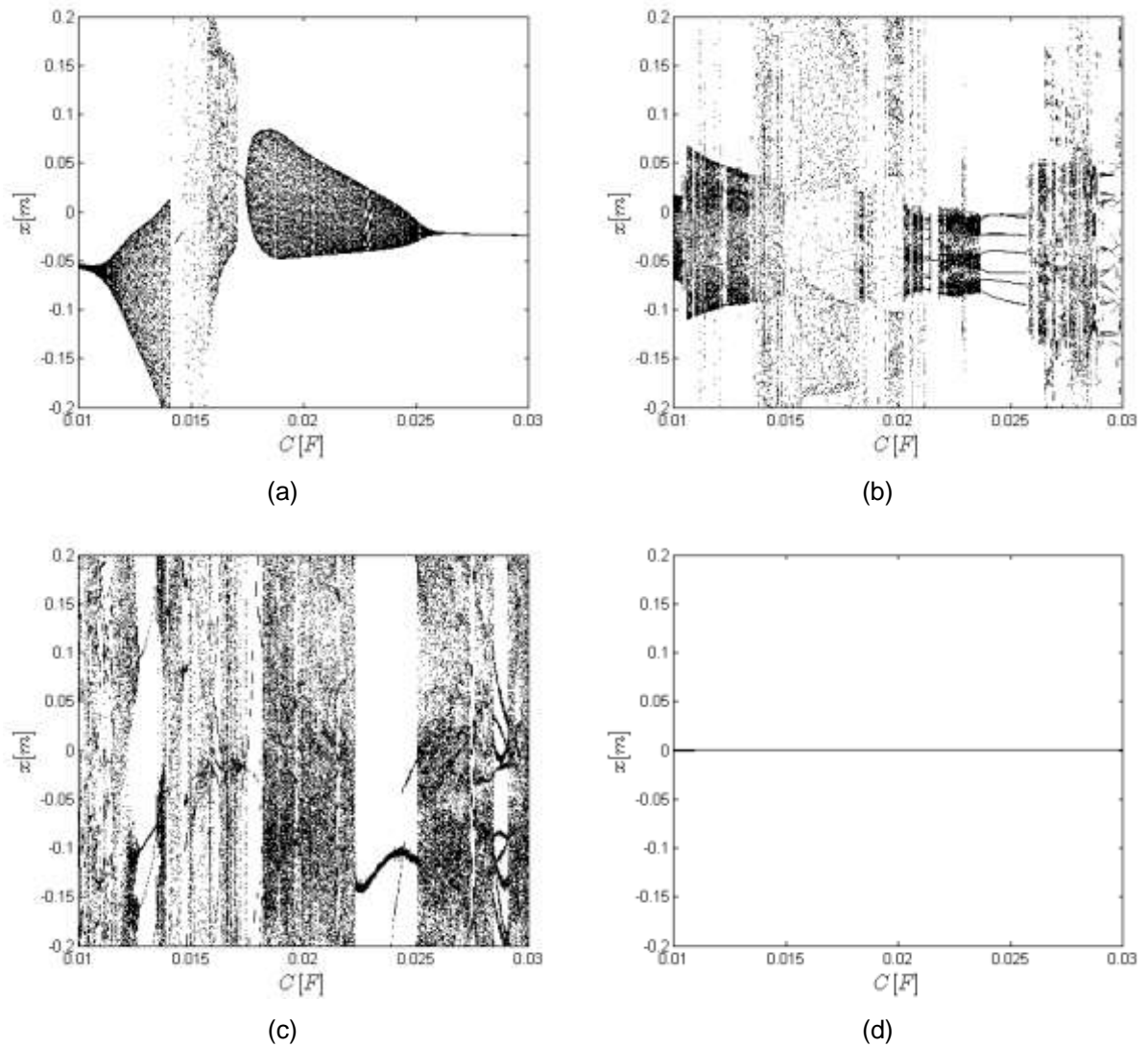


Figura 5.9 – Diagramas de bifurcação para a capacitância,  $C$ , como parâmetro de controle:

$R = 0,3 \Omega$ . (a)  $r = 0,5$ ; (b)  $r = 1$ ; (c)  $r = 4$ ; (d)  $r = 10$

Cada um dos diagramas de bifurcação é estudado separadamente com mais detalhes. A figura 5.10 mostra o primeiro caso, para  $r = 0,5$ . A tabela 5.15 também foi usada na construção da figura.

Sete regiões, de A a G, foram selecionadas para a análise detalhada do comportamento dinâmico. Cada uma corresponde a um valor de capacitância,  $C$ . As figuras de 5.11 a 5.17 exibem as respectivas séries temporais do deslocamento, os planos de fase no regime estacionário, os mapas de Poincaré e os espectros de frequências. Em todos os casos, os valores contidos na tabela 5.15 foram atribuídos aos parâmetros.

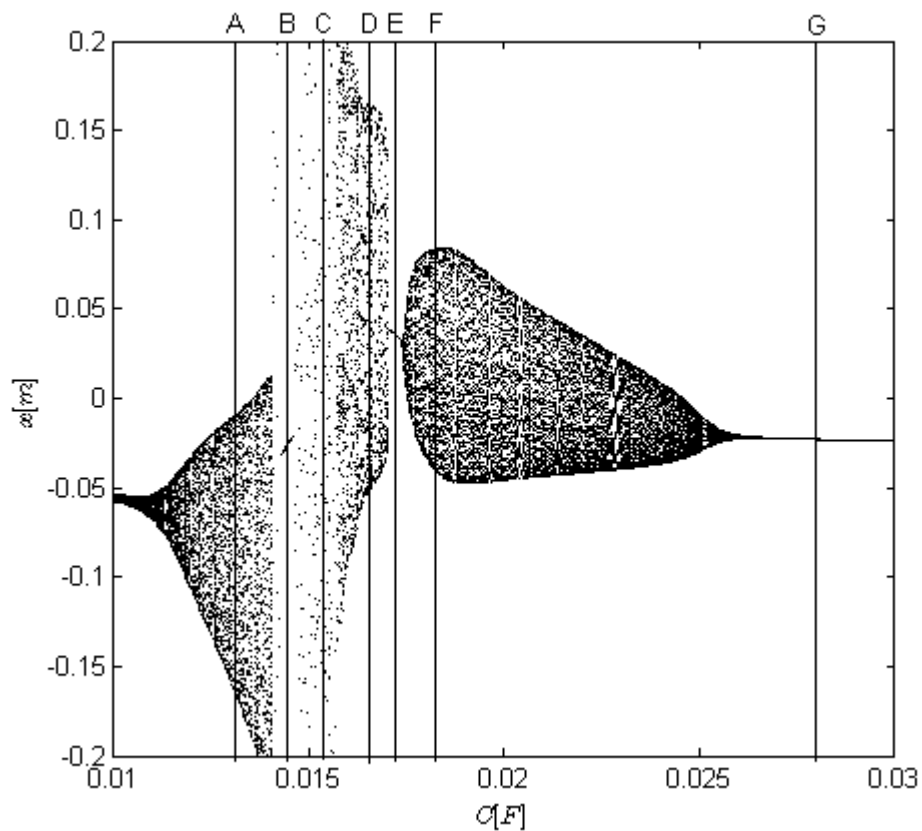


Figura 5.10 – Diagramas de bifurcação para a capacitância,  $C$ , como parâmetro de controle:  $R = 0,3 \Omega$  e  $r = 0,5$



As respostas da figura 5.11 indicam um comportamento quase-periódico para a região A do diagrama de bifurcação, ou seja, o valor de  $C = 0,01315 F$ , evidenciado, dentre outras coisas, pela figura fechada formada no mapa de Poicaré. No espectro de frequências, observam-se as presenças de dois picos de amplitude, muito próximos entre si, e outros picos de menor amplitude ao longo dos valores de frequência.

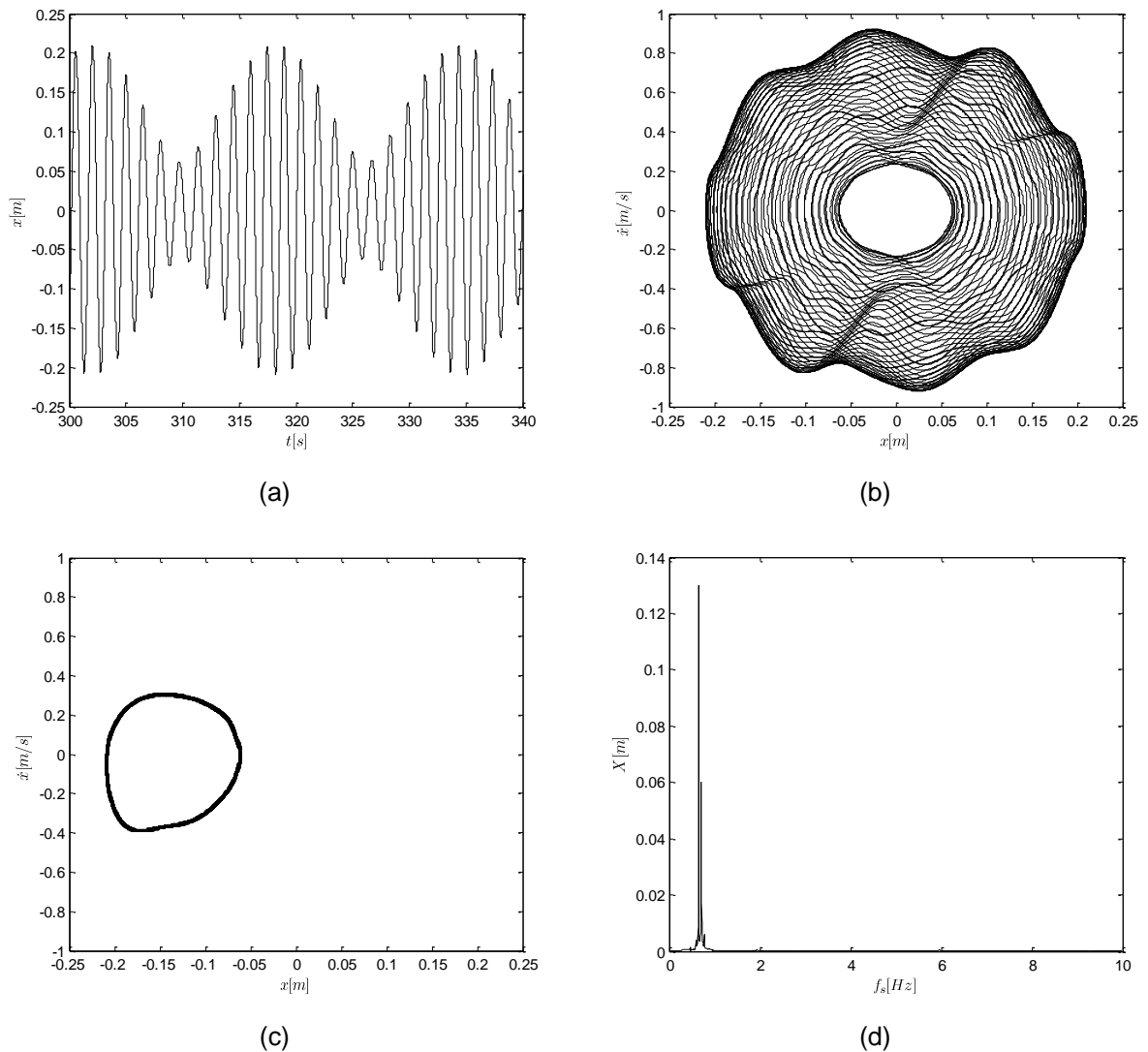


Figura 5.11 – Resposta do sistema com circuito elétrico RLC em série com indutância não linear:  $C = 0,01315 F$ ,  $R = 0,3 \Omega$  e  $r = 0,5$ . (a) Histórico no tempo do deslocamento  $x$ ; (b) Plano de fase no regime permanente; (c) Mapa de Poicaré; (d) FFT (espectro de frequências)

As características presentes na figura 5.12, referentes à região B do diagrama de bifurcação, com  $C = 0,01436 F$ , sugerem um comportamento periódico do sistema. Embora as curvas do deslocamento e do plano de fase apresentem uma pequena irregularidade em suas formas, o mapa de Poincaré e o espectro de frequências deixam claro o caráter de periodicidade.

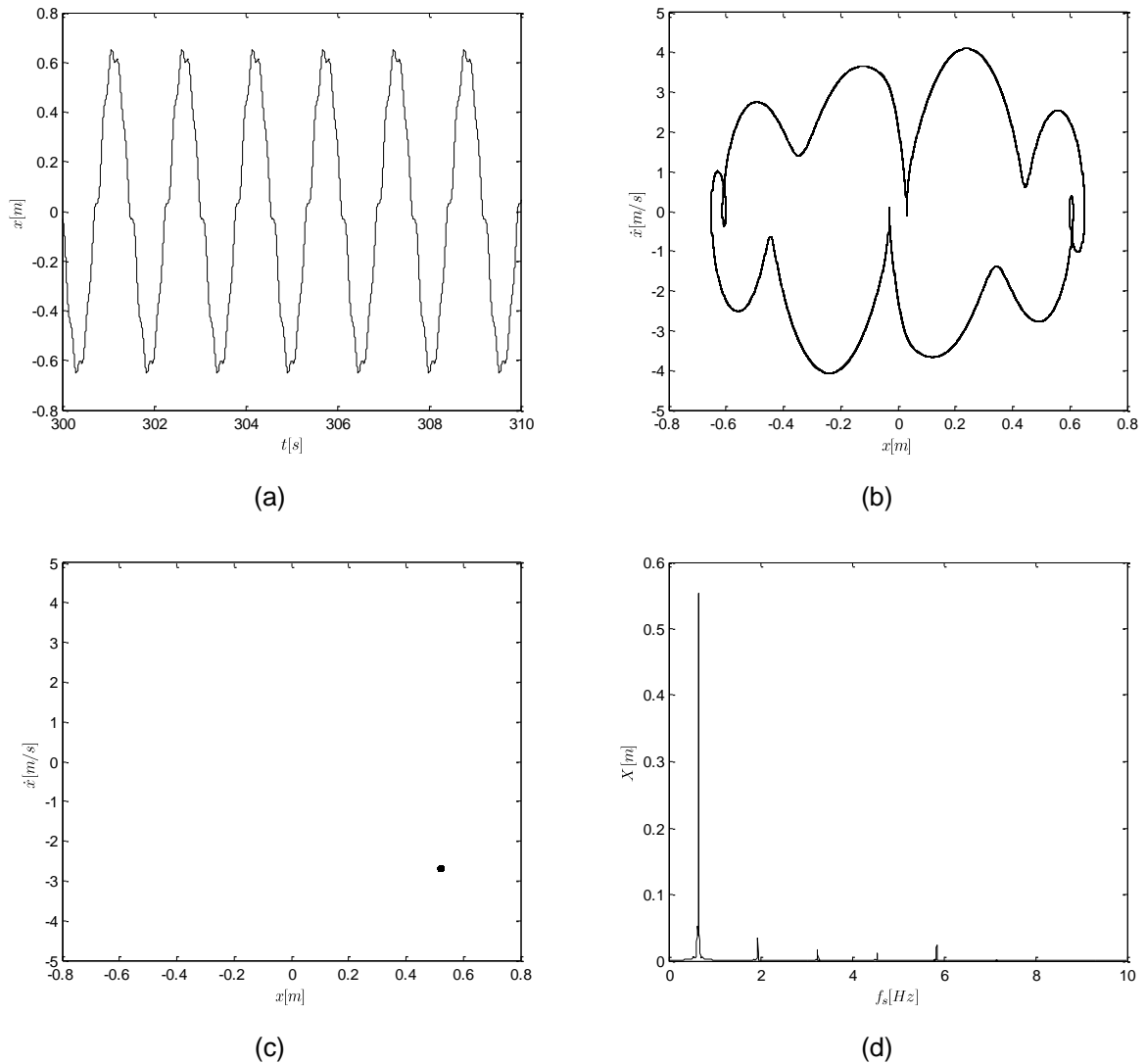


Figura 5.12 – Resposta do sistema com circuito elétrico RLC em série com indutância não linear:  $C = 0,01436 F$ ,  $R = 0,3 \Omega$  e  $r = 0,5$ . (a) Histórico no tempo do deslocamento  $x$ ; (b) Plano de fase no regime permanente; (c) Mapa de Poincaré; (d) FFT (espectro de frequências)

Já na figura 5.13, que representa a região C, para  $C = 0,0154 F$ , o comportamento dinâmico do sistema é de caos, uma vez que o mapa de Poincaré apresenta-se como uma nuvem de pontos de densidade considerável. O aspecto espalhado do espectro de frequências ajuda na caracterização de comportamento caótico, mesmo com o destaque de dois picos de amplitude.

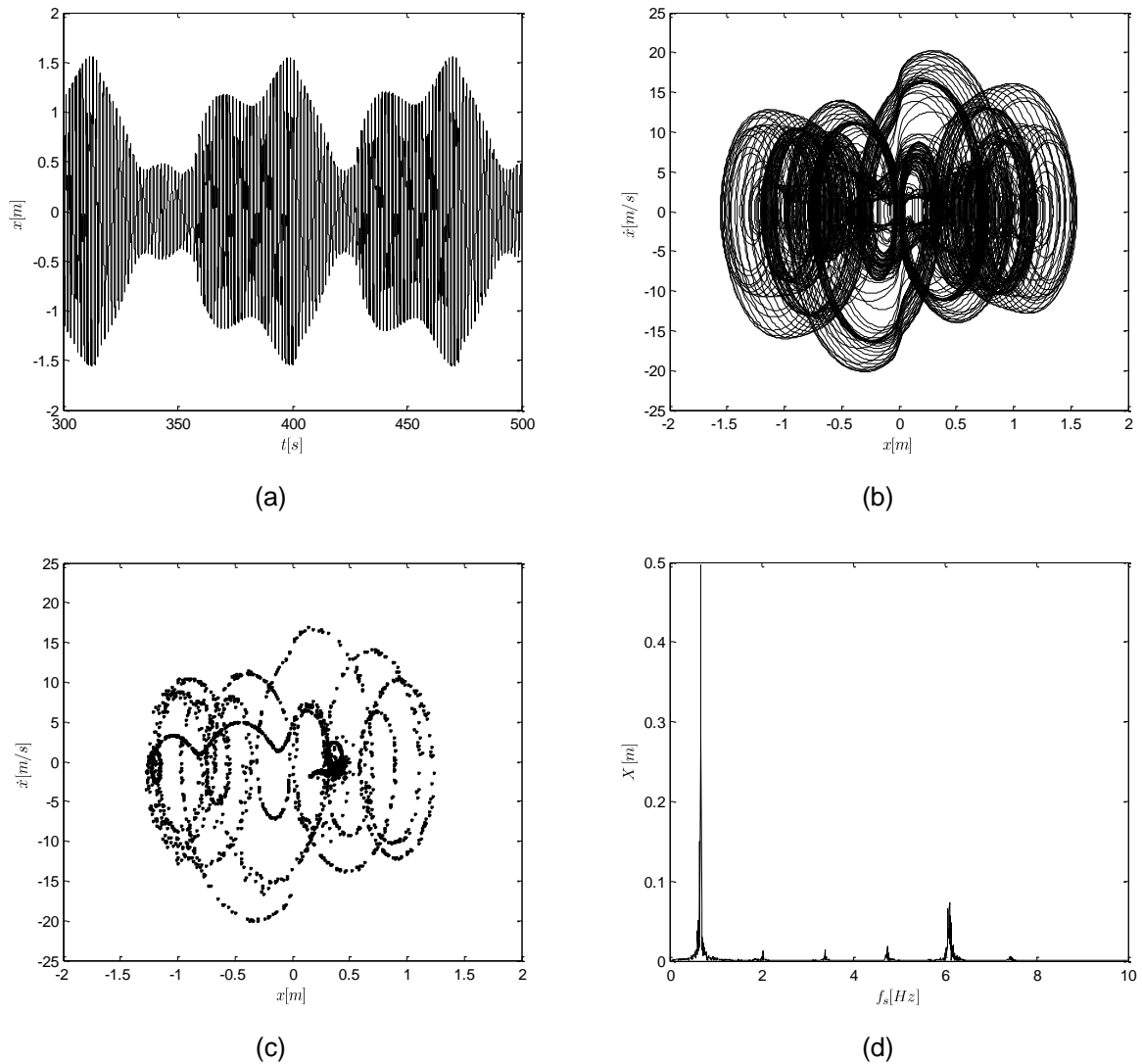


Figura 5.13 – Resposta do sistema com circuito elétrico RLC em série com indutância não linear:  $C = 0,0154 F$ ,  $R = 0,3 \Omega$  e  $r = 0,5$ . (a) Histórico no tempo do deslocamento  $x$ ; (b) Plano de fase no regime permanente; (c) Mapa de Poincaré; (d) FFT (espectro de frequências)

Assim como na região A, mostrada na figura 5.11, a região D da figura 5.14, definida pelo valor de capacitância de  $C = 0,01657 F$ , apresenta-se com um comportamento quasi-periódico. A figura fechada mostrada no mapa de Poincaré comprovam a classificação. No espectro de frequências, um pico de amplitude está destacado perante os demais.

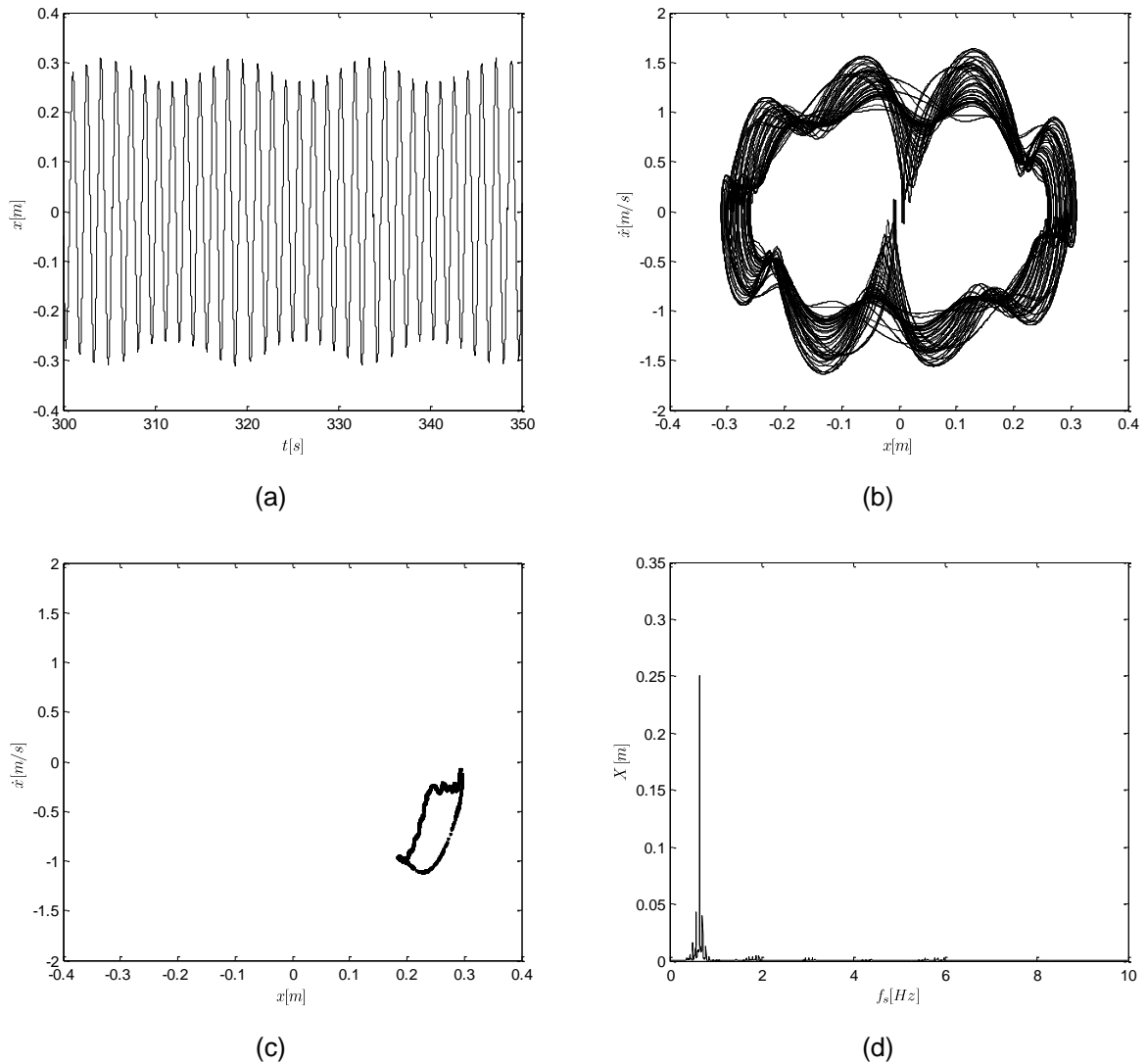


Figura 5.14 – Resposta do sistema com circuito elétrico RLC em série com indutância não linear:  $C = 0,01657 F$ ,  $R = 0,3 \Omega$  e  $r = 0,5$ . (a) Histórico no tempo do deslocamento  $x$ ; (b) Plano de fase no regime permanente; (c) Mapa de Poincaré; (d) FFT (espectro de frequências)

Na figura 5.15, é apresentada a resposta do sistema na região E, ou seja, para  $C = 0,01725 F$ . O histórico do deslocamento no tempo apresenta aspecto senoidal regular. O plano de fase mostra a formação de um ciclo, representado pela elipse no centro do plano. Além disso, os pontos do mapa de Poincaré estão concentrados em uma única coordenada no plano, e o espectro de frequências apresenta claramente um único pico. Portanto, pode-se afirmar que o sistema possui comportamento periódico para os valores de parâmetros adotados.

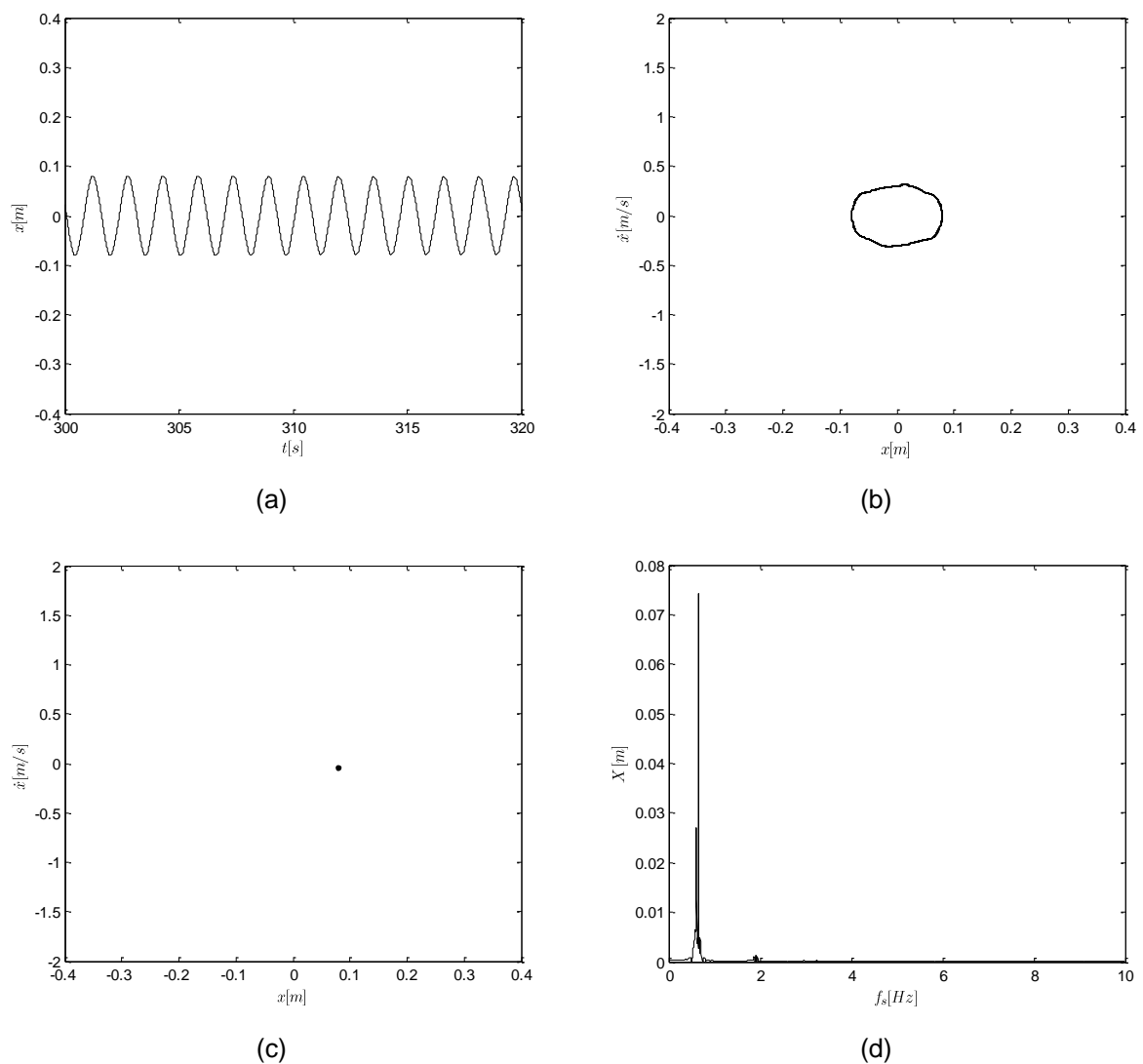


Figura 5.15 – Resposta do sistema com circuito elétrico RLC em série com indutância não linear:  $C = 0,01725 F$ ,  $R = 0,3 \Omega$  e  $r = 0,5$ . (a) Histórico no tempo do deslocamento  $x$ ; (b) Plano de fase no regime permanente; (c) Mapa de Poincaré; (d) FFT (espectro de frequências)

O sistema na região F, com  $C = 0,01828 F$ , também apresenta comportamento quase-periódico, de acordo com a figura 5.16. A figura fechada do mapa de Poincaré ajuda na conclusão.

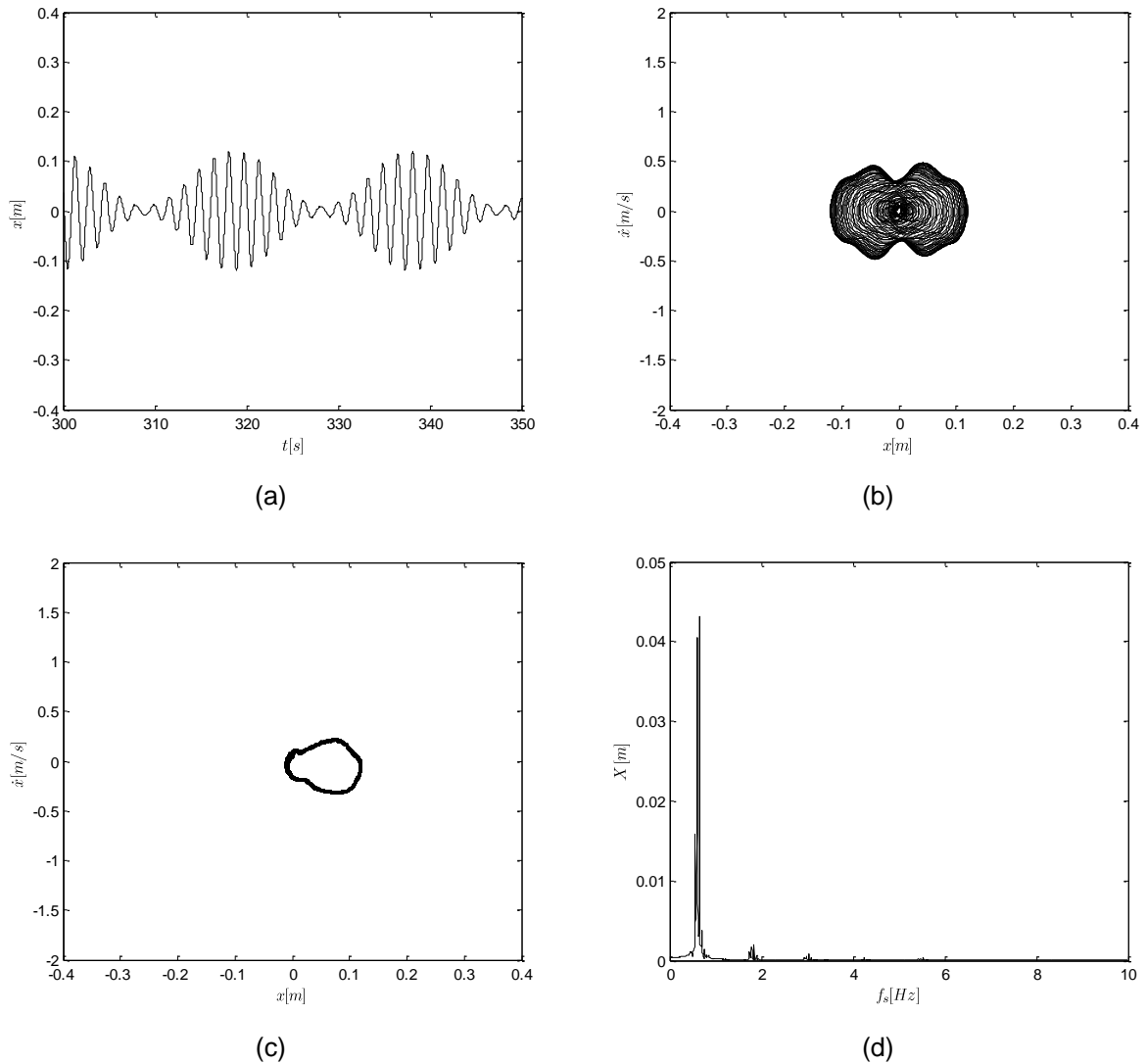


Figura 5.16 – Resposta do sistema com circuito elétrico RLC em série com indutância não linear:  $C = 0,01828 F$ ,  $R = 0,3 \Omega$  e  $r = 0,5$ . (a) Histórico no tempo do deslocamento  $x$ ; (b) Plano de fase no regime permanente; (c) Mapa de Poincaré; (d) FFT (espectro de frequências)

Para  $C = 0,028 F$ , o sistema assume novamente o comportamento dinâmico periódico. A figura 5.17 mostra a resposta. A região G está relacionada a esse valor de capacitância. Nota-se uma única localização dos pontos no mapa de Poincaré.

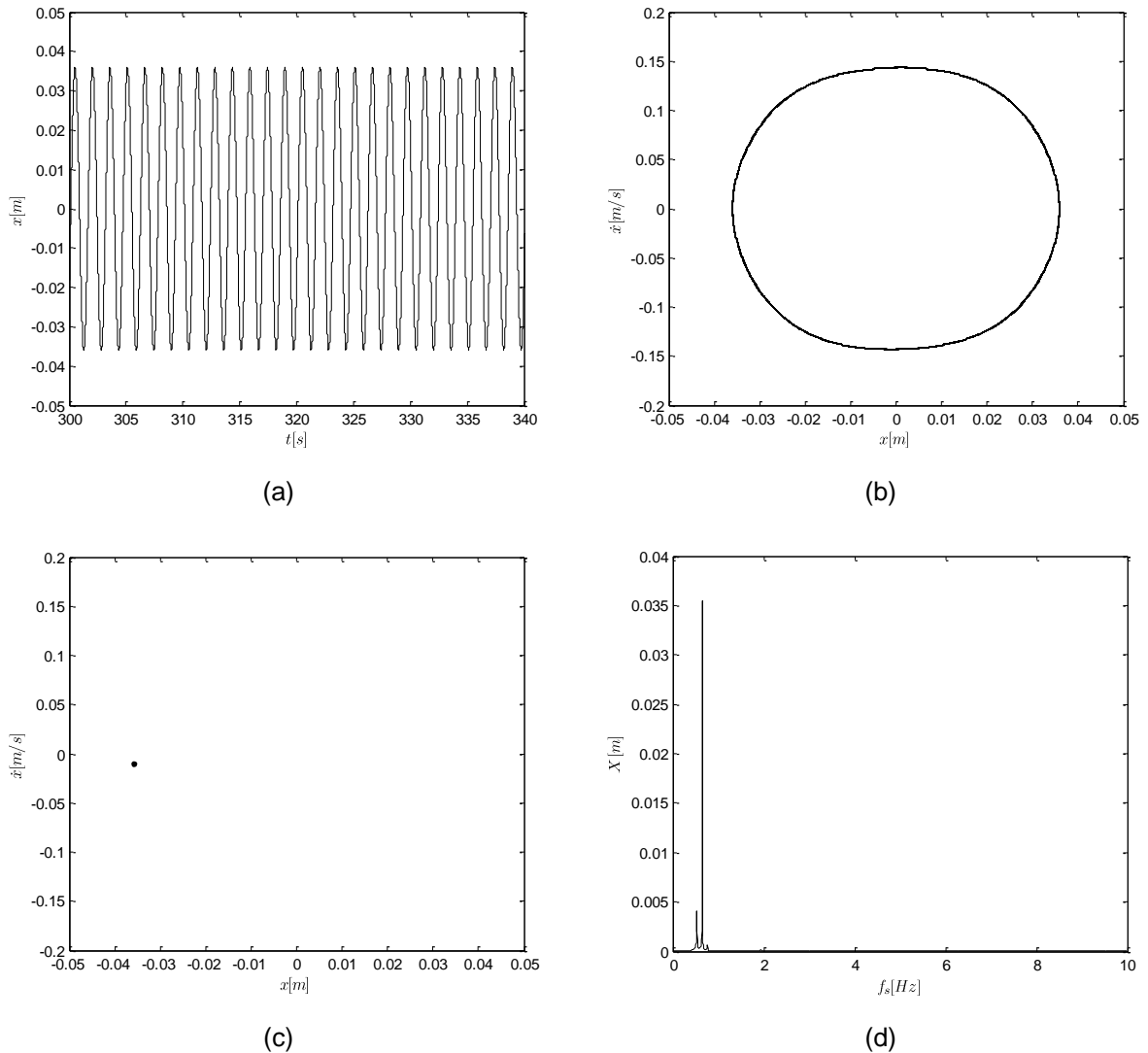


Figura 5.17 – Resposta do sistema com circuito elétrico RLC em série com indutância não linear:  $C = 0,028 F$ ,  $R = 0,3 \Omega$  e  $r = 0,5$ . (a) Histórico no tempo do deslocamento  $x$ ; (b) Plano de fase no regime permanente; (c) Mapa de Poincaré; (d) FFT (espectro de frequências)

O diagrama de bifurcação para a razão de frequências unitária,  $r = 1$ , é apresentado na figura 5.18. Da mesma forma que no caso anterior, alguns valores de capacitância foram destacados com letras de H a M. A análise dos comportamentos dinâmicos é feita através das respostas das figuras 5.19, 5.20, 5.21, 5.22, 5.23 e 5.24. A tabela 5.15 permanece fornecendo os valores dos parâmetros mantidos inalterados.

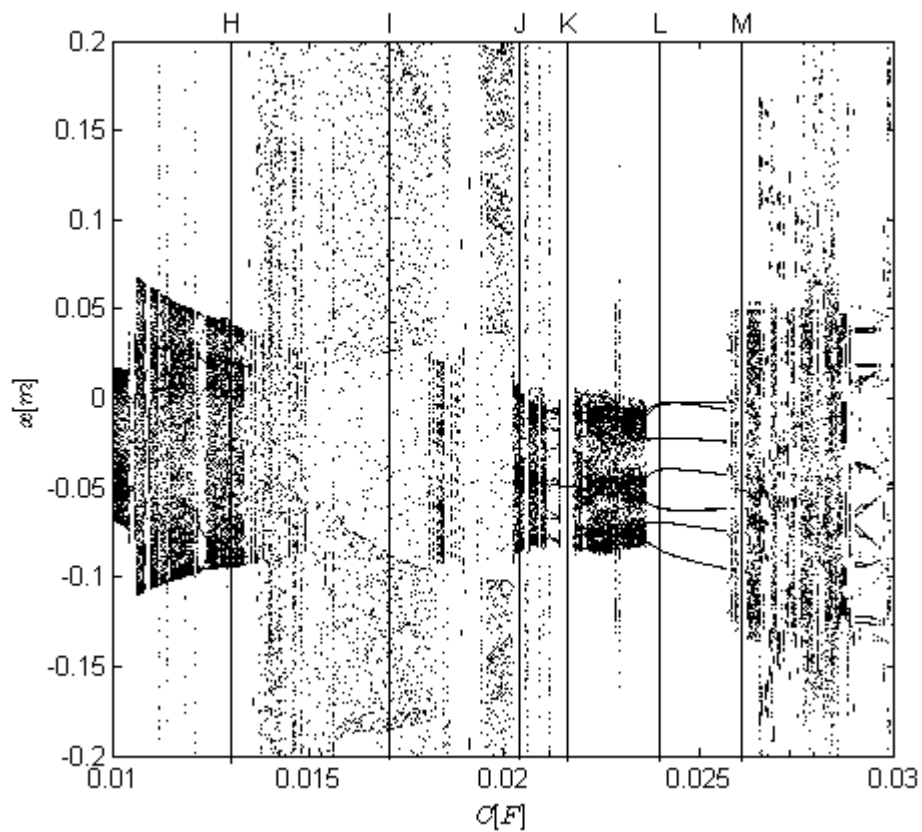


Figura 5.18 – Diagramas de bifurcação para a capacitância,  $C$ , como parâmetro de controle:  $R = 0,3 \Omega$   
e  $r = 1$



A figura 5.19 está relacionada à região H, com  $C = 0,01302 F$ . Nota-se, de modo claro, a presença de comportamento quase-periódico na resposta, principalmente pela composição fechada indicada pelo mapa de Poincaré.

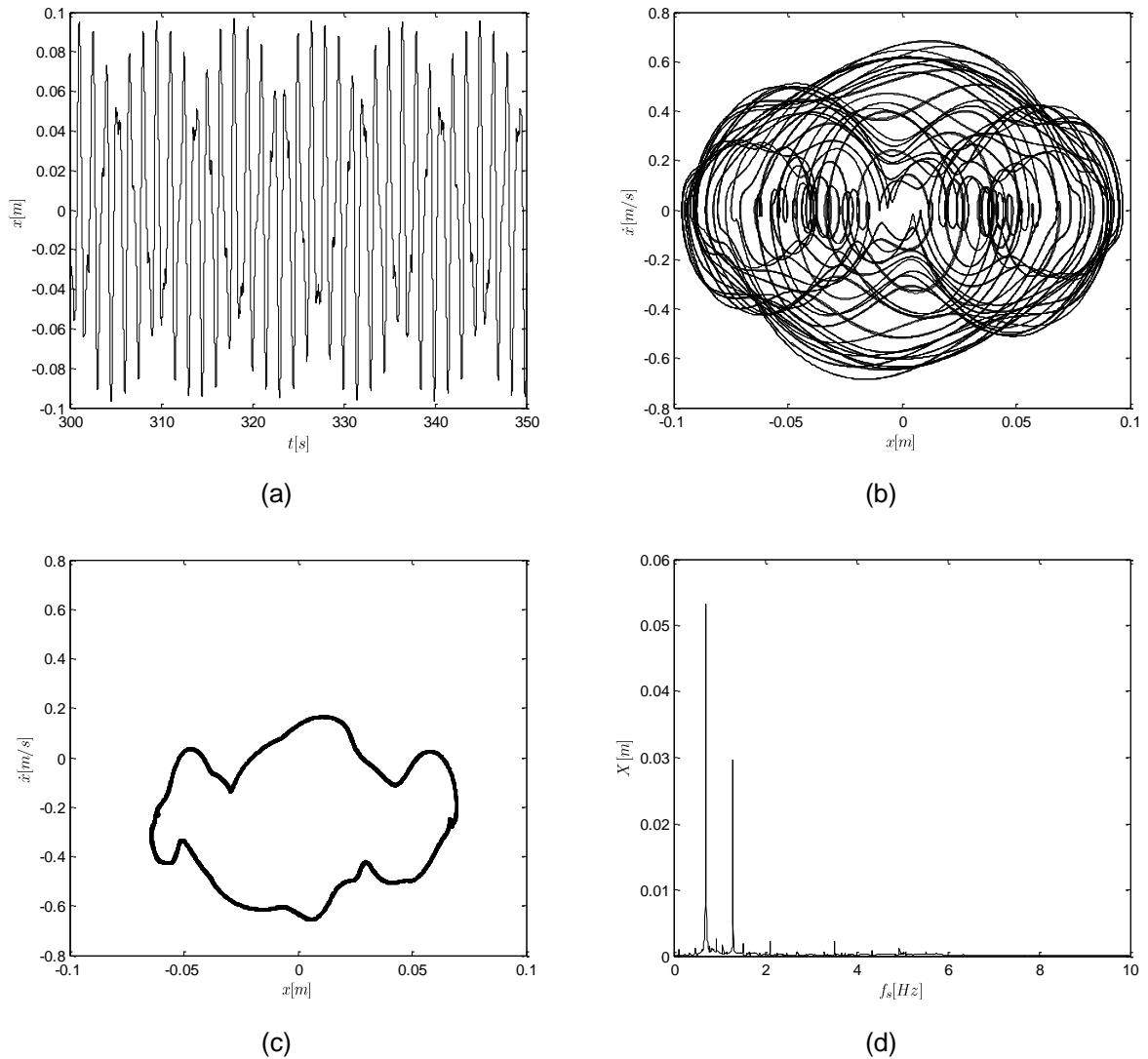


Figura 5.19 – Resposta do sistema com circuito elétrico RLC em série com indutância não linear:  $C = 0,01302 F$ ,  $R = 0,3 \Omega$  e  $r = 1$ . (a) Histórico no tempo do deslocamento  $x$ ; (b) Plano de fase no regime permanente; (c) Mapa de Poincaré; (d) FFT (espectro de frequências)

O mapa de Poincaré, mostrado na figura 5.20, indica o comportamento periódico do sistema. As duas coordenadas de localização dos pontos estão relacionadas à periodicidade dois do sistema. Trata-se da região I do diagrama de bifurcação, correspondente ao valor de capacitância de  $C = 0,01707 F$ .

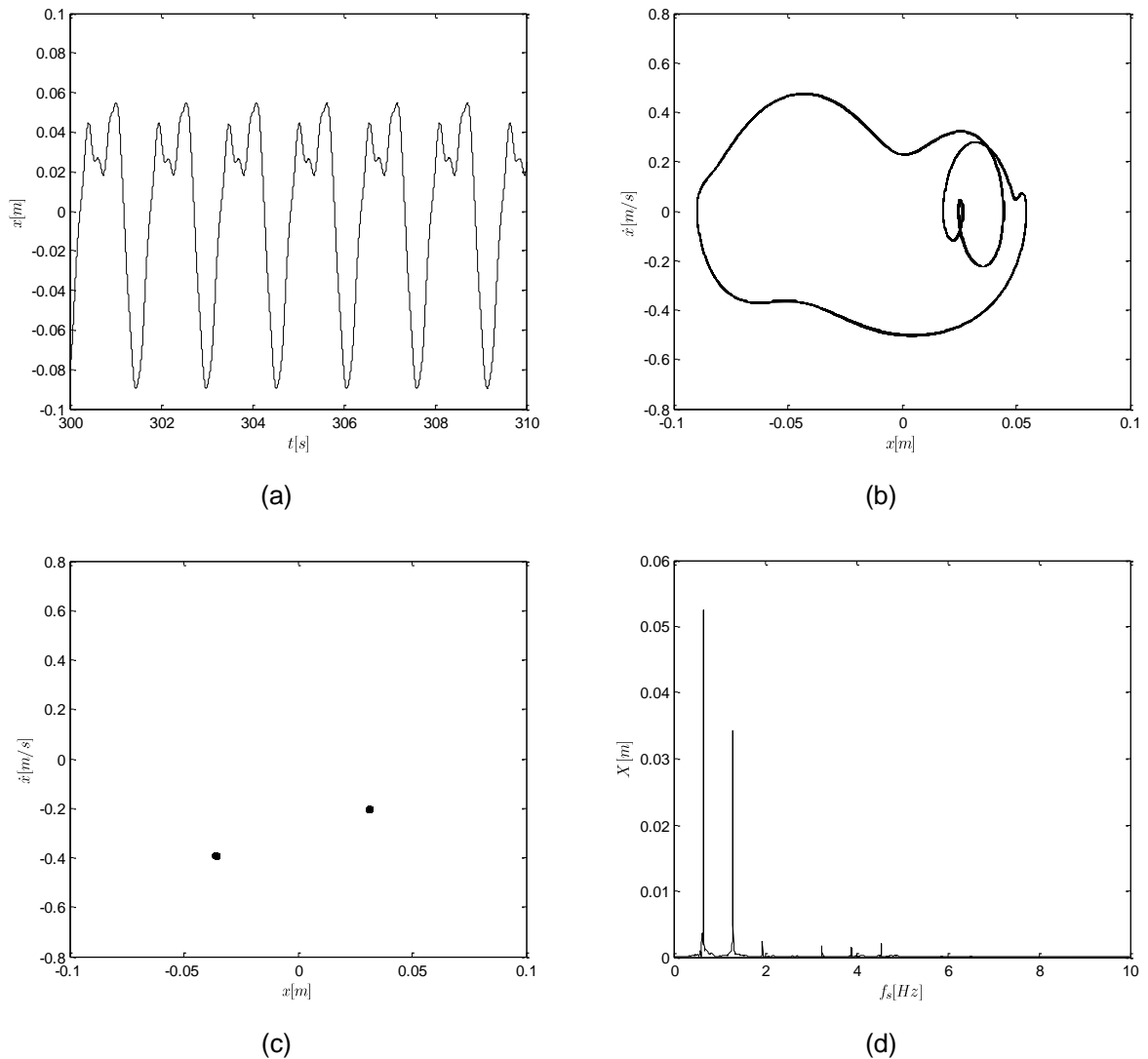


Figura 5.20 – Resposta do sistema com circuito elétrico RLC em série com indutância não linear:  $C = 0,01707 F$ ,  $R = 0,3 \Omega$  e  $r = 1$ . (a) Histórico no tempo do deslocamento  $x$ ; (b) Plano de fase no regime permanente; (c) Mapa de Poincaré; (d) FFT (espectro de frequências)

Na figura 5.21, são mostradas as respostas para o sistema com  $C = 0,0204 F$ , correspondentes à região J do diagrama de bifurcação. Os aspectos irregulares da resposta no tempo e do plano de fase, a distribuição desordenada dos pontos no mapa de Poincaré, e o espalhamento da FFT, mesmo com a presença de dois picos mais evidentes, denotam o comportamento caótico do sistema para esses valores de parâmetros.

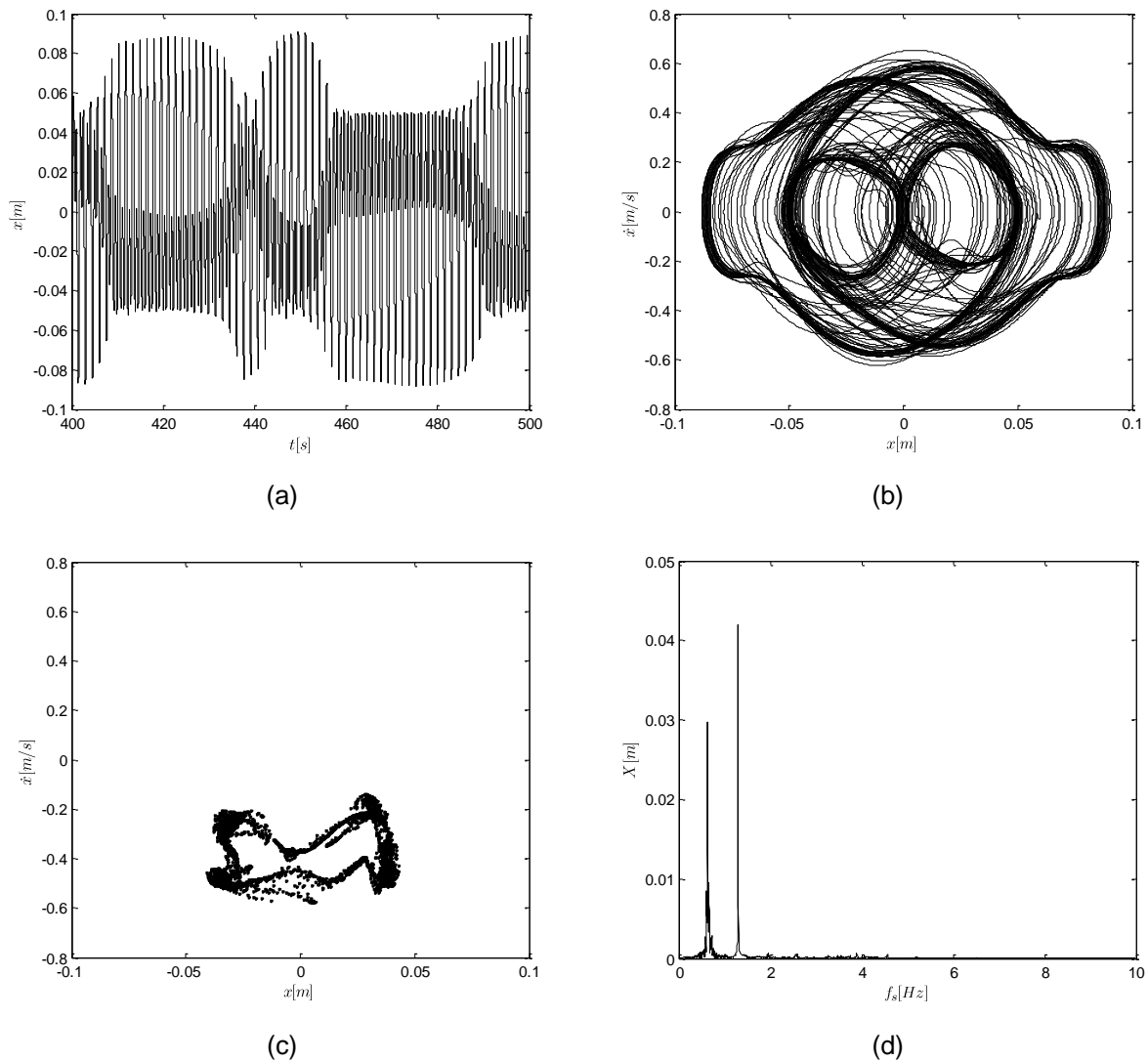


Figura 5.21 – Resposta do sistema com circuito elétrico RLC em série com indutância não linear:  $C = 0,0204 F$ ,  $R = 0,3 \Omega$  e  $r = 1$ . (a) Histórico no tempo do deslocamento  $x$ ; (b) Plano de fase no regime permanente; (c) Mapa de Poincaré; (d) FFT (espectro de frequências)

Na região K da figura 5.22, para  $C = 0,02161 F$ , o sistema volta a se comportar periodicamente. O formato regular do deslocamento no tempo, a trajetória fechada do plano de fase, a aglomeração dos pontos em uma única posição do mapa de Poincaré, e a clara existência de um único pico de amplitude na FFT confirmam a classificação do comportamento dinâmico.

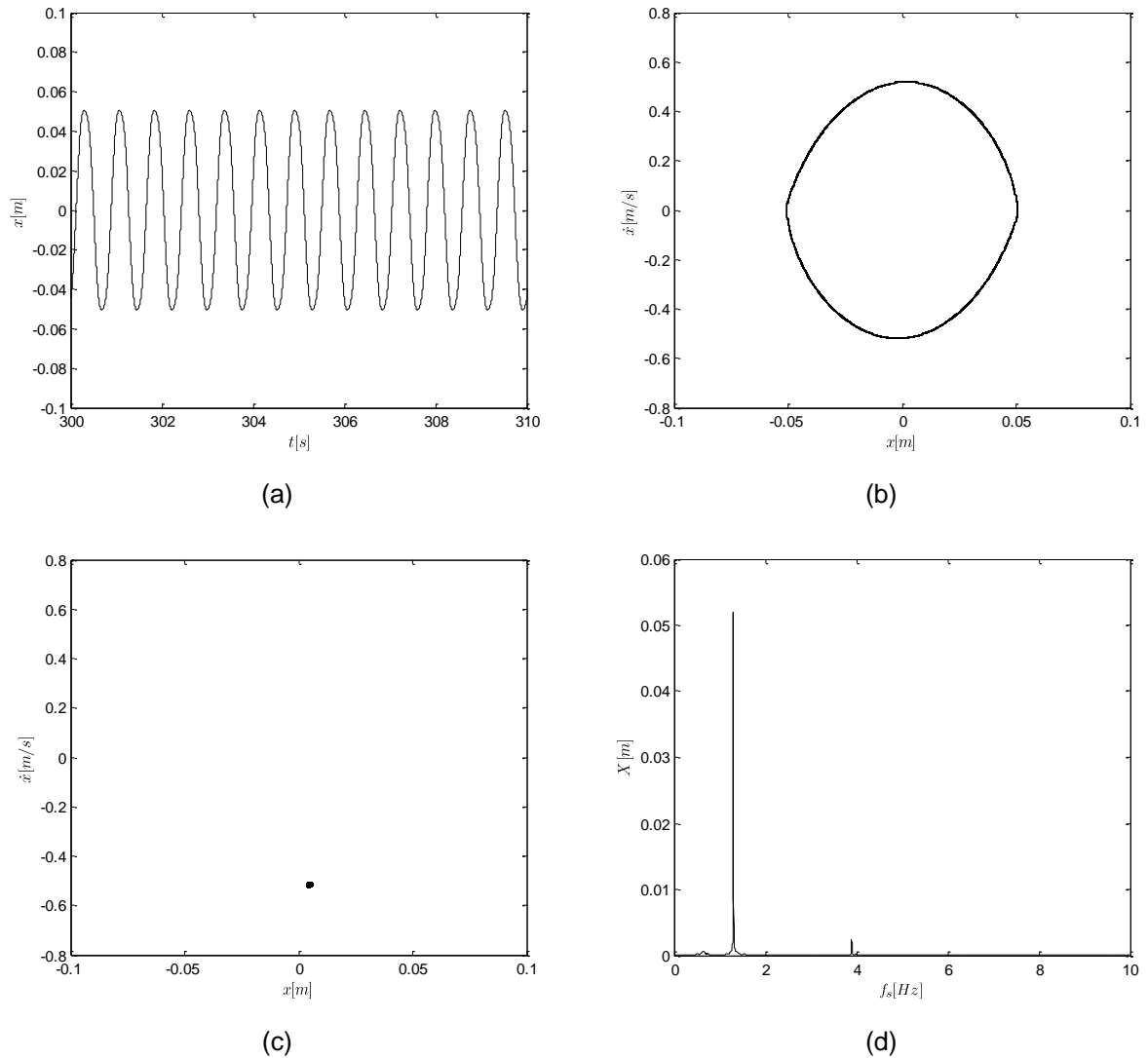


Figura 5.22 – Resposta do sistema com circuito elétrico RLC em série com indutância não linear:  $C = 0,02161 F$ ,  $R = 0,3 \Omega$  e  $r = 1$ . (a) Histórico no tempo do deslocamento  $x$ ; (b) Plano de fase no regime permanente; (c) Mapa de Poincaré; (d) FFT (espectro de frequências)

Nas respostas da figura 5.23, o sistema aparece com periodicidade sete. São sete as localizações dos pontos do mapa de Poincaré que confirma a classificação de comportamento periódico. Nesse caso, as respostas estão relacionadas com a região L do diagrama de bifurcação, ou seja,  $C = 0,024 F$ .

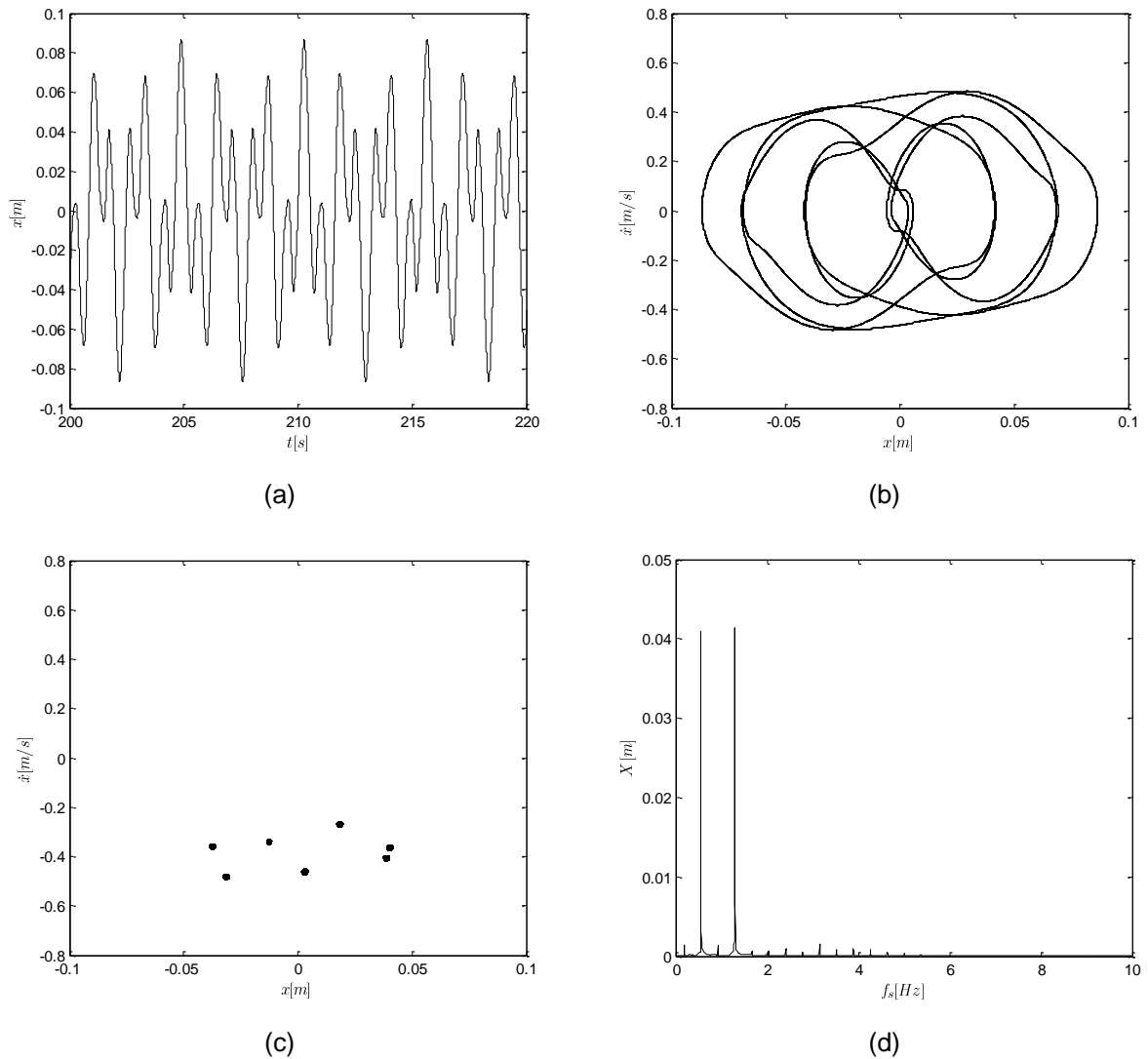


Figura 5.23 – Resposta do sistema com circuito elétrico RLC em série com indutância não linear:  $C = 0,024 F$ ,  $R = 0,3 \Omega$  e  $r = 1$ . (a) Histórico no tempo do deslocamento  $x$ ; (b) Plano de fase no regime permanente; (c) Mapa de Poincaré; (d) FFT (espectro de frequências)

O comportamento presente na figura 5.24 pode ser classificado como quase-periódico, uma vez que o mapa de Poincaré apresenta os pontos formando uma figura fechada. Destaque também é feito à presença de vários picos de amplitude no espectro de frequências. Na figura 5.24, a região M é abordada, com o valor de capacitância de  $C = 0,02606 F$ .

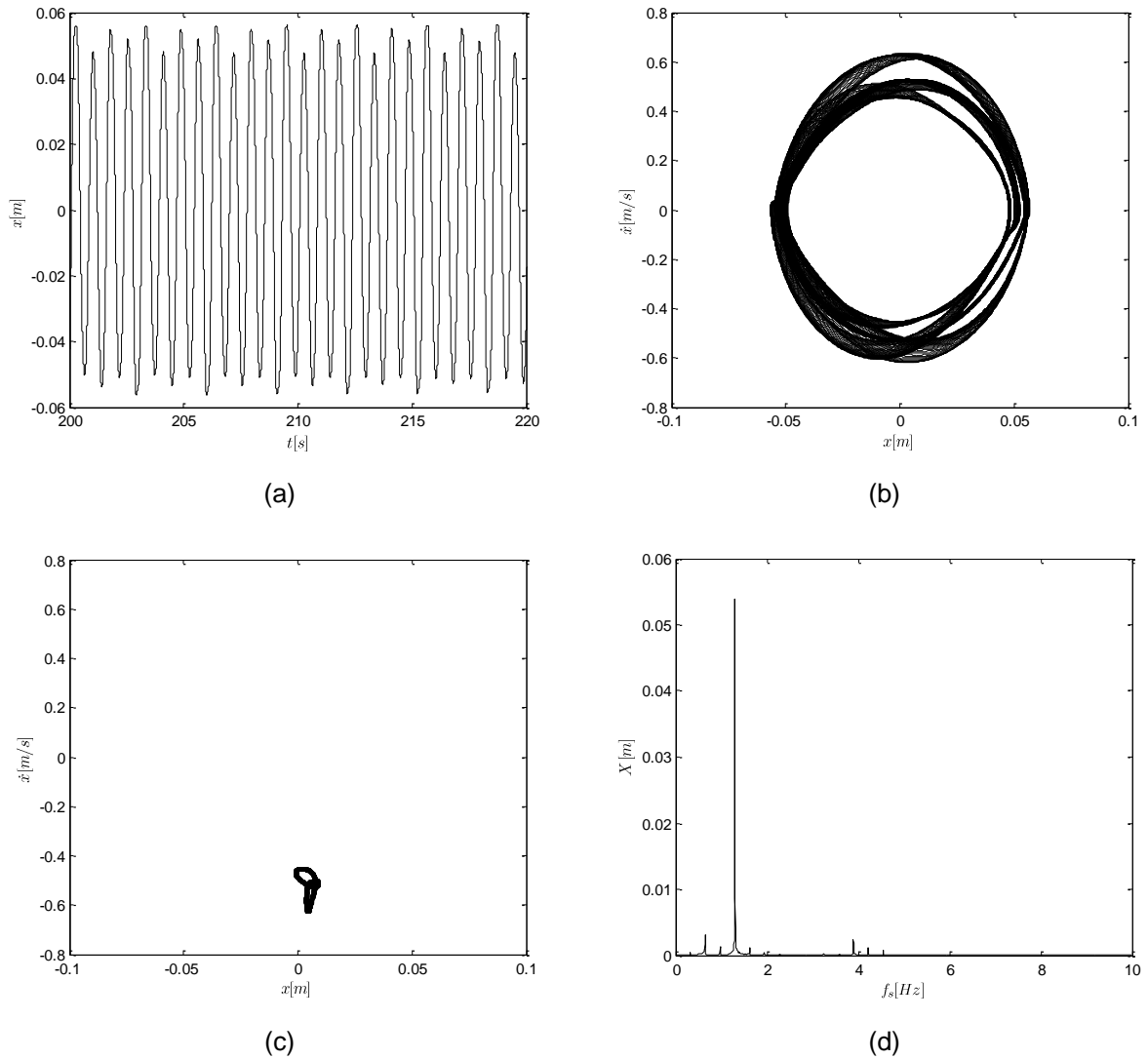


Figura 5.24 – Resposta do sistema com circuito elétrico RLC em série com indutância não linear:  $C = 0,02606 F$ ,  $R = 0,3 \Omega$  e  $r = 1$ . (a) Histórico no tempo do deslocamento  $x$ ; (b) Plano de fase no regime permanente; (c) Mapa de Poincaré; (d) FFT (espectro de frequências)

O diagrama de bifurcação da figura 5.25 está relacionado à razão de frequências de  $r = 4$ . As regiões selecionadas para a análise são indicadas por letras de N a R na figura 5.25. Na sequência, mais uma vez os comportamentos dinâmicos de algumas regiões são detalhados através de respostas no tempo, planos de fase, mapas de Poincaré e espectros de frequências, nas figuras de 5.26 a 5.30. A tabela 5.15 segue como referência dos valores dos parâmetros adotados.

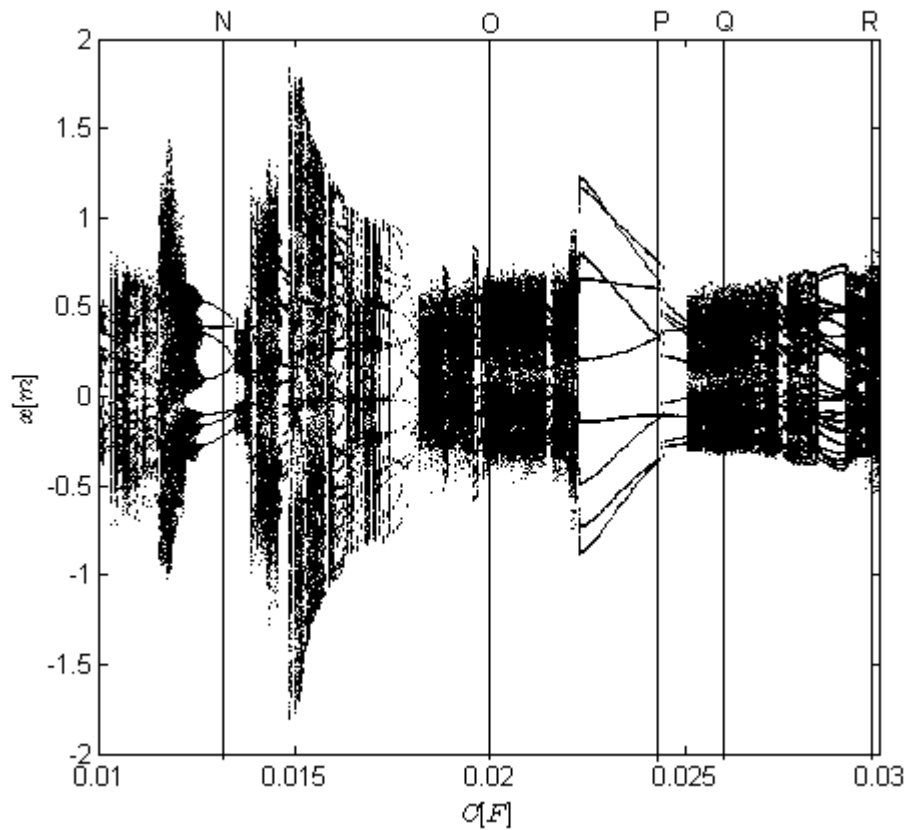


Figura 5.25 – Diagramas de bifurcação para a capacitância,  $C$ , como parâmetro de controle:  $R = 0,3 \Omega$   
e  $r = 4$

Na figura 5.26, o sistema apresenta periodicidade sete, como mostram as localizações dos pontos no mapa de Poincaré. Essa figura está relacionada à região N do diagrama de bifurcação, com  $C = 0,01315 F$ .

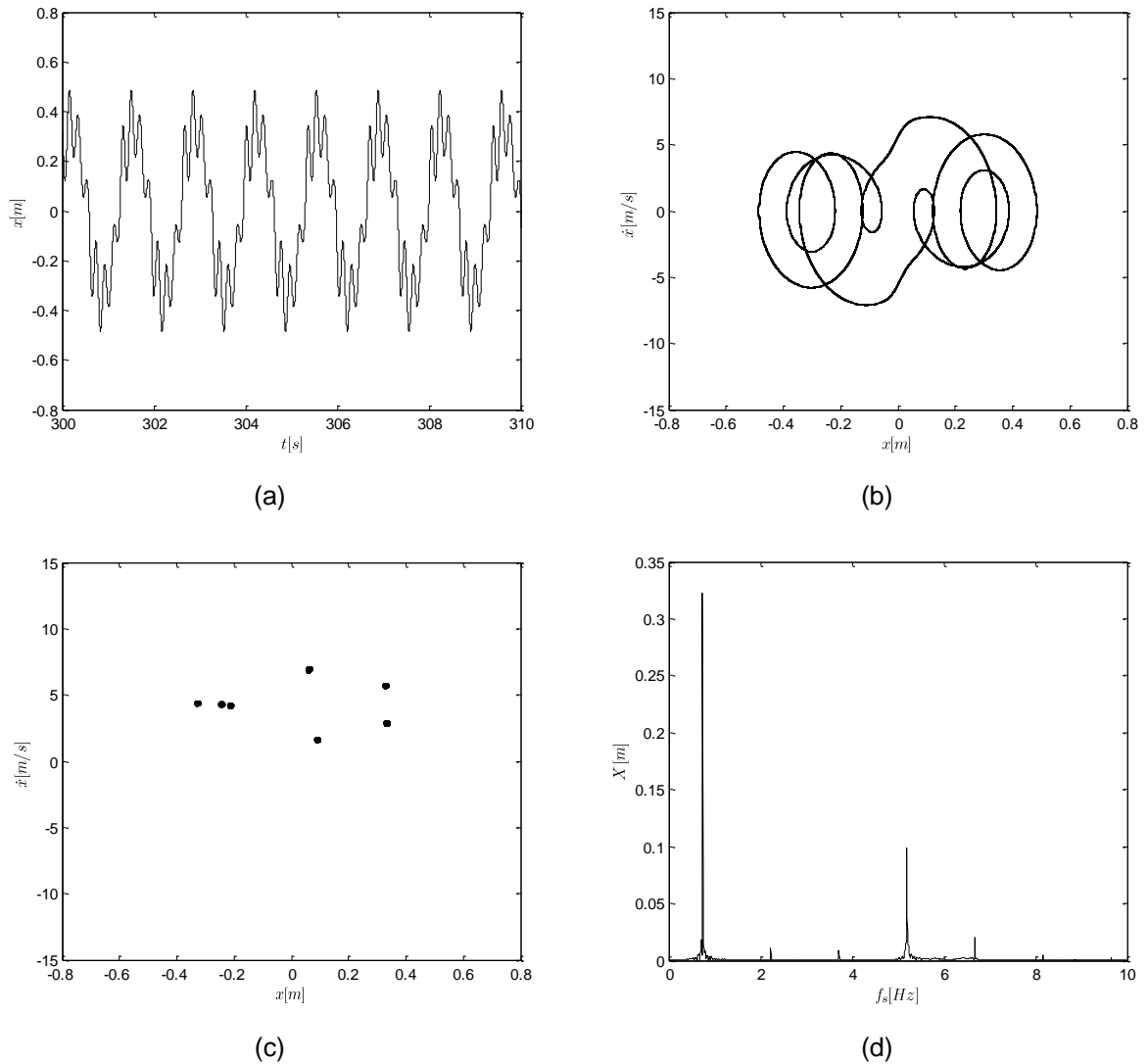


Figura 5.26 – Resposta do sistema com circuito elétrico RLC em série com indutância não linear:  $C = 0,01315 F$ ,  $R = 0,3 \Omega$  e  $r = 4$ . (a) Histórico no tempo do deslocamento  $x$ ; (b) Plano de fase no regime permanente; (c) Mapa de Poincaré; (d) FFT (espectro de frequências)



A figura 5.27 mostra a resposta do sistema na região O do diagrama de bifurcação, ou seja, com  $C = 0,02 F$ . A nuvem de pontos do mapa de Poincaré e o espectro de frequências espalhado permitem a classificação do comportamento dinâmico do sistema, para os valores adotados dos parâmetros, como sendo caótico.

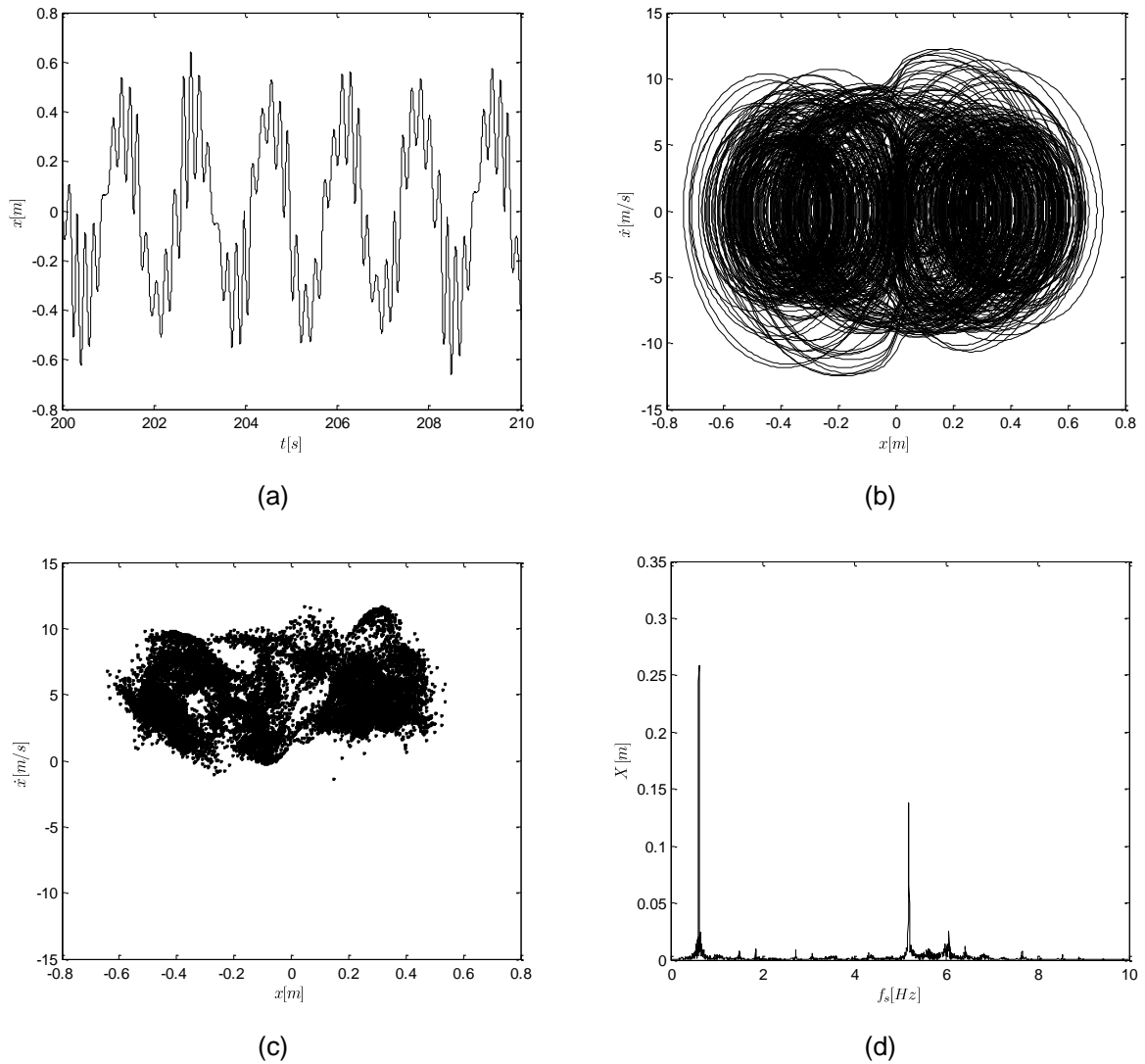


Figura 5.27 – Resposta do sistema com circuito elétrico RLC em série com indutância não linear:  $C = 0,02 F$ ,  $R = 0,3 \Omega$  e  $r = 4$ . (a) Histórico no tempo do deslocamento  $x$ ; (b) Plano de fase no regime permanente; (c) Mapa de Poincaré; (d) FFT (espectro de frequências)

Sete picos de amplitude e sete coordenadas de pontos são claramente detectados na FFT e no mapa de Poincaré, respectivamente, da figura 5.28. Com isso, pode-se classificar o seu comportamento dinâmico como periódico, de periodicidade sete. Para esse caso, o valor da capacitância é de  $C = 0,02436 F$ , representado pela região P do diagrama de bifurcação.

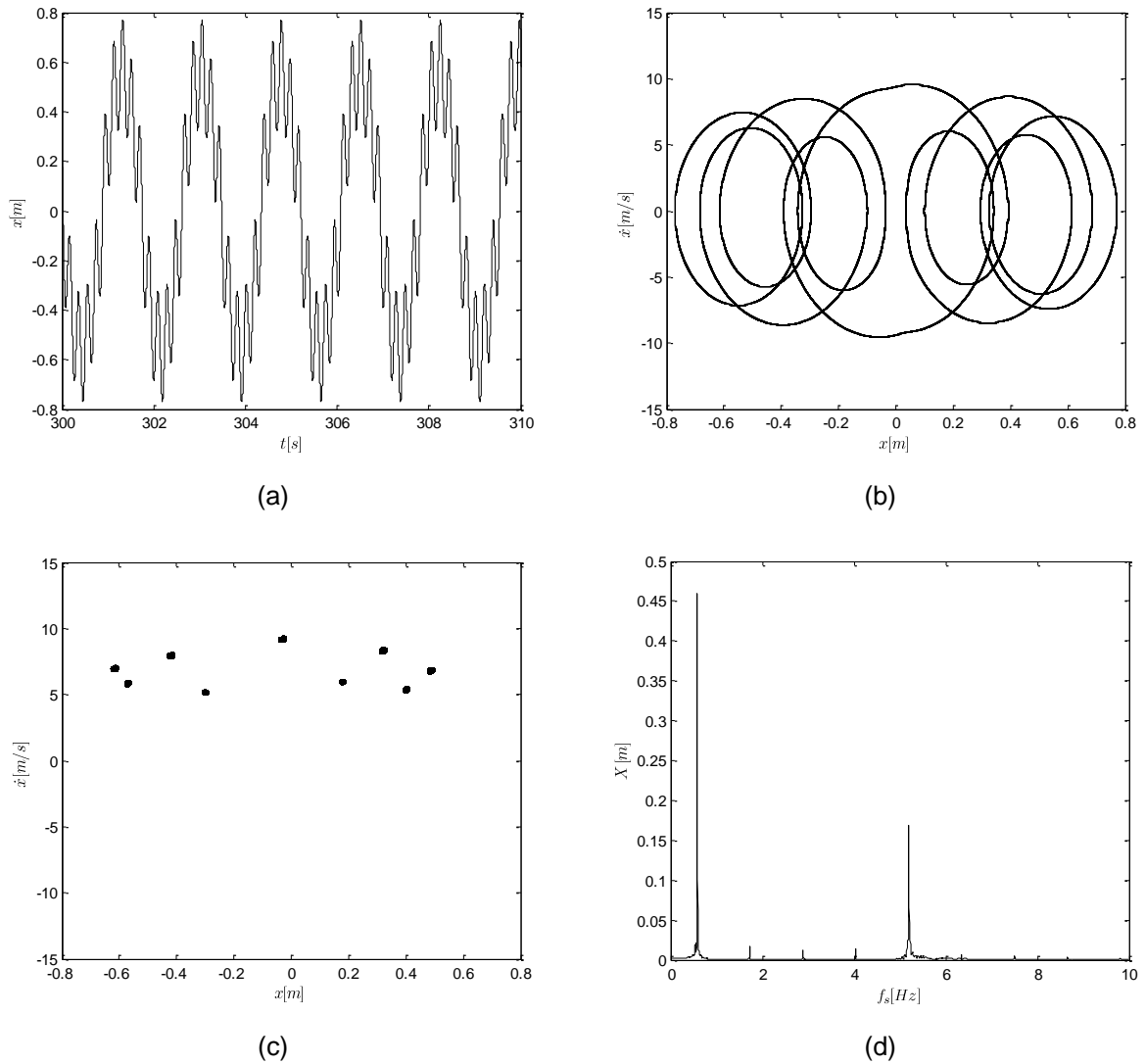


Figura 5.28 – Resposta do sistema com circuito elétrico RLC em série com indutância não linear:  $C = 0,02436 F$ ,  $R = 0,3 \Omega$  e  $r = 4$ . (a) Histórico no tempo do deslocamento  $x$ ; (b) Plano de fase no regime permanente; (c) Mapa de Poincaré; (d) FFT (espectro de frequências)

Na região Q, com  $C = 0,026 F$ , o comportamento do sistema volta a ser caótico, conforme mostra a figura 5.29. A nuvem desordenada de pontos do mapa de Poincaré e a característica espalhada do espectro de frequências confirmam a presença de caos.

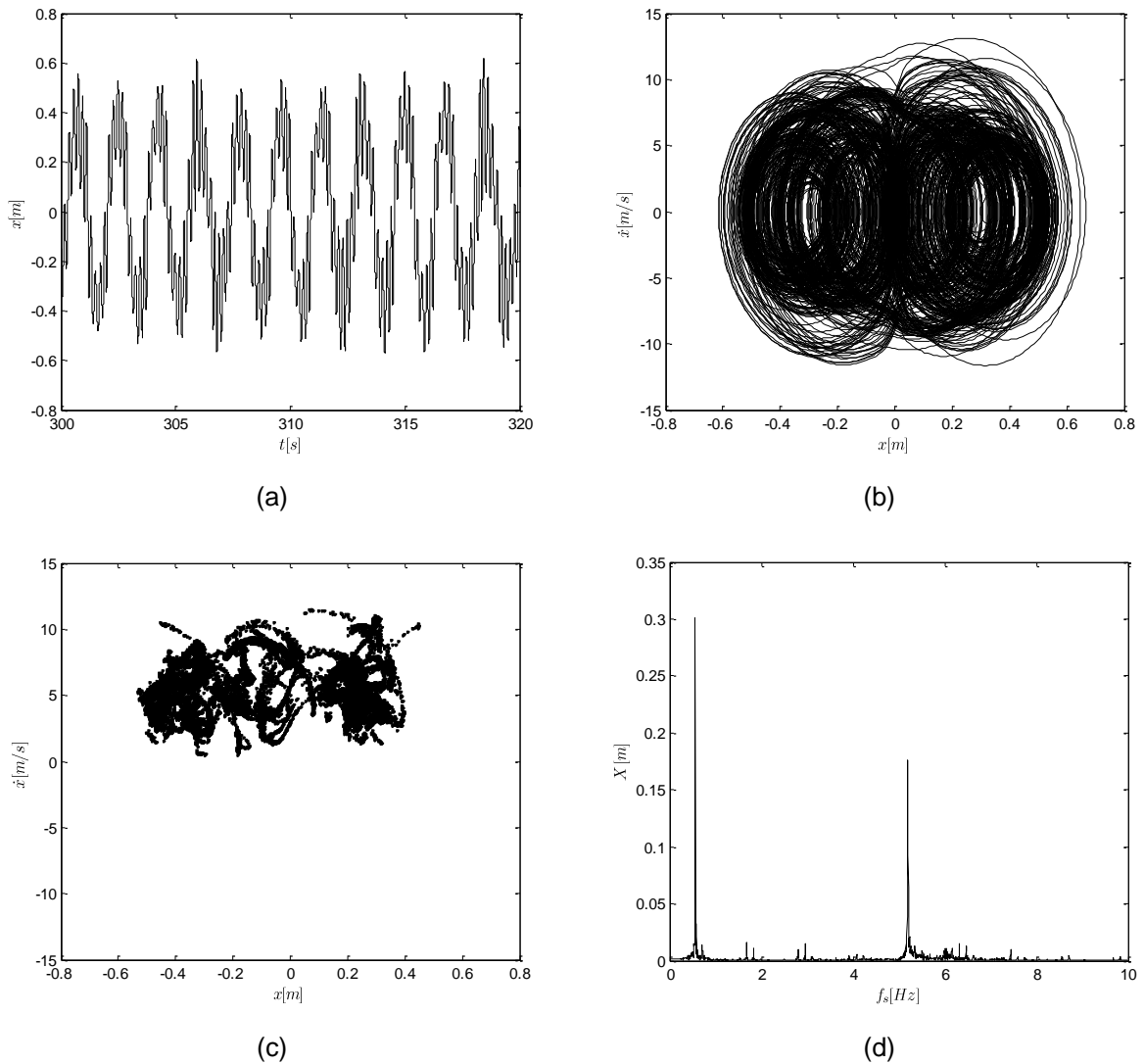


Figura 5.29 – Resposta do sistema com circuito elétrico RLC em série com indutância não linear:  $C = 0,026 F$ ,  $R = 0,3 \Omega$  e  $r = 4$ . (a) Histórico no tempo do deslocamento  $x$ ; (b) Plano de fase no regime permanente; (c) Mapa de Poincaré; (d) FFT (espectro de frequências)

O mesmo comportamento caótico é notado na resposta da figura 5.30, da região R do diagrama de bifurcação, com  $C = 0,0298 F$ . A nuvem desordenada de pontos no mapa de Poincaré e a FFT espalhada também são as principais características para a classificação do movimento.

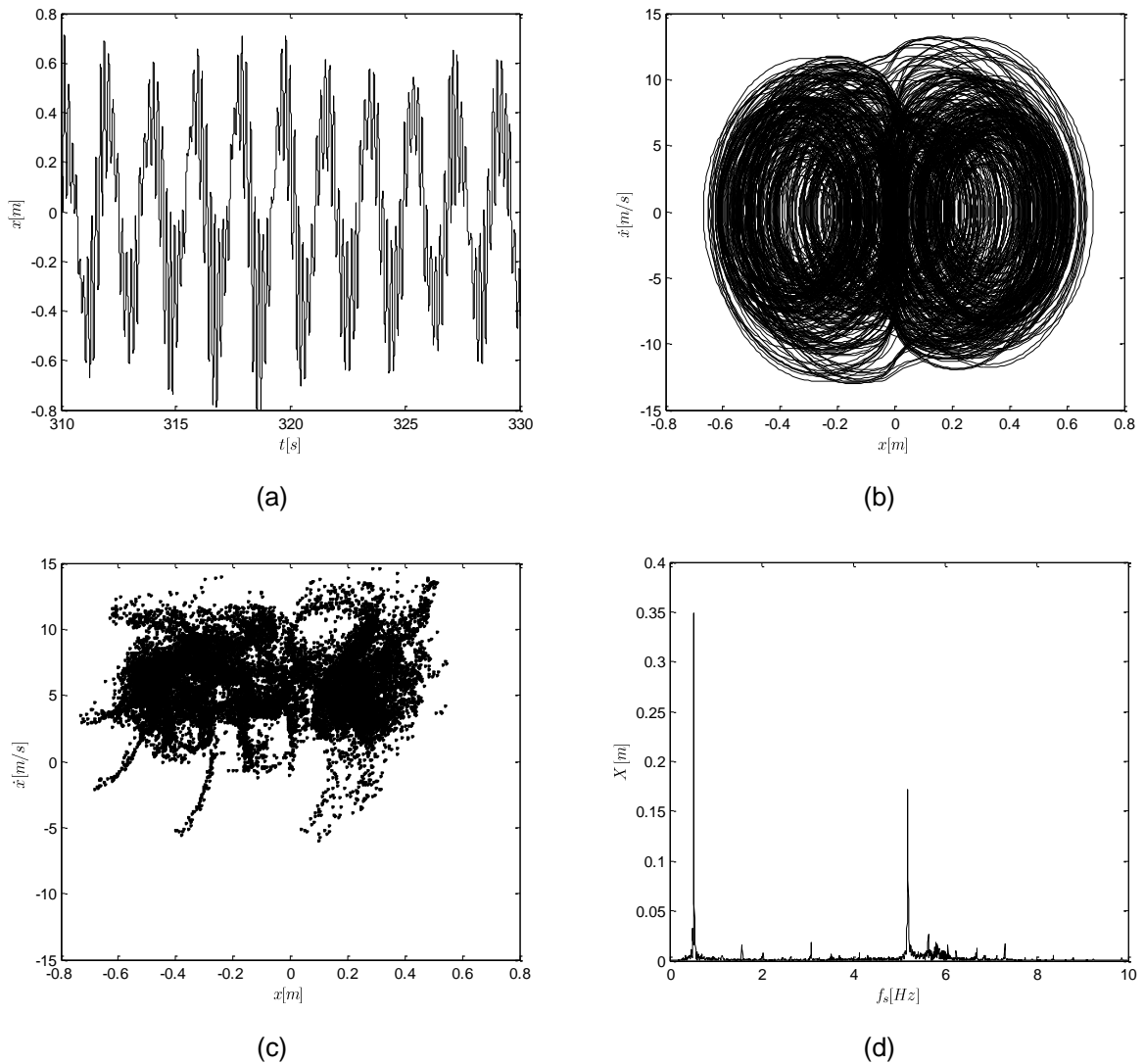


Figura 5.30 – Resposta do sistema com circuito elétrico RLC em série com indutância não linear:  $C = 0,0298 F$ ,  $R = 0,3 \Omega$  e  $r = 4$ . (a) Histórico no tempo do deslocamento  $x$ ; (b) Plano de fase no regime permanente; (c) Mapa de Poincaré; (d) FFT (espectro de frequências)

A figura 5.31 mostra o diagrama de bifurcação para a razão de frequências de  $r = 10$ . Nela, nota-se que, para qualquer valor de capacitância, o comportamento do sistema se mantém como periódico. O conjunto de respostas da figura 5.32 é utilizado na análise. Os valores dos parâmetros mantidos constantes são extraídos da tabela 5.15.

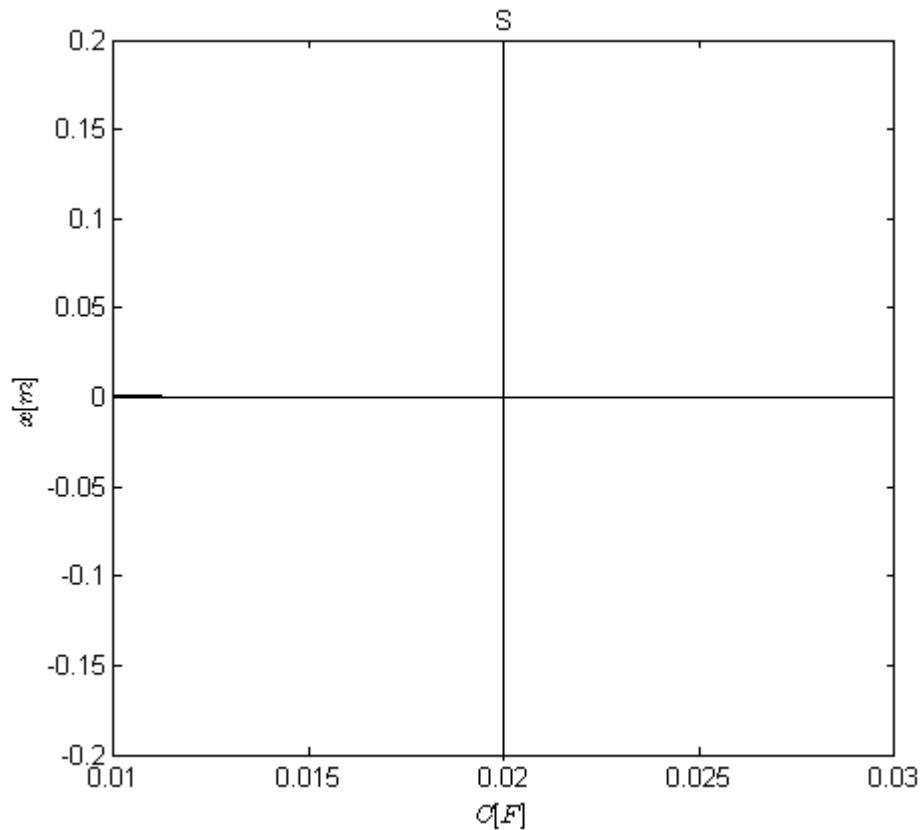


Figura 5.31 – Diagrama de bifurcação para a capacitância,  $C$ , como parâmetro de controle:  $R = 0,3 \Omega$   
e  $r = 10$

O resultado da figura 5.32, na qual a região S do diagrama de bifurcação é explorada, com  $C = 0,02 F$ , confirma o comportamento periódico do sistema. Na FFT, destaca-se a presença de um pico de maior amplitude, caracterizando a sua periodicidade unitária.

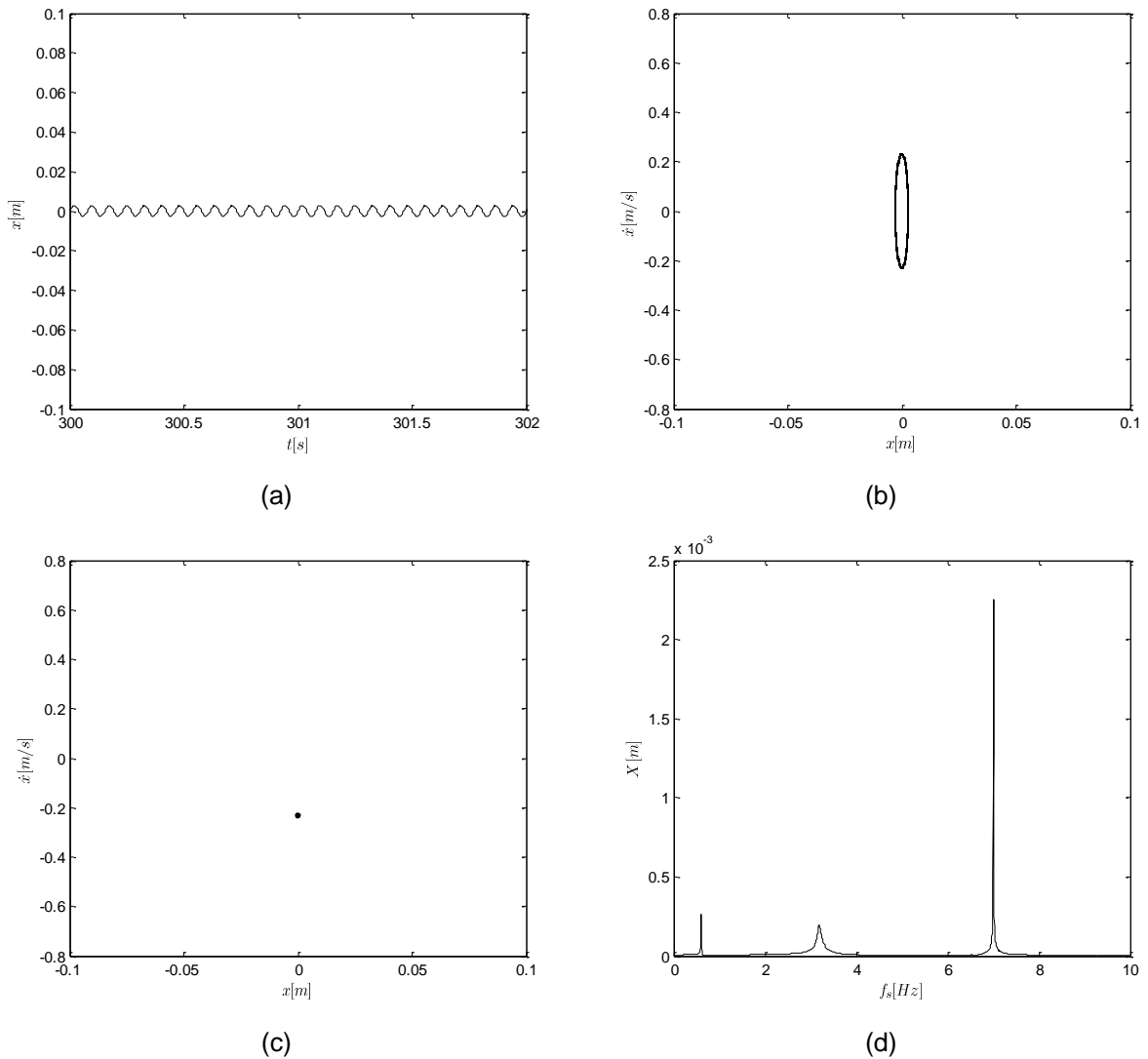


Figura 5.32 – Resposta do sistema com circuito elétrico RLC em série com indutância não linear:  $C = 0,02 F$ ,  $R = 0,3 \Omega$  e  $r = 10$ . (a) Histórico no tempo do deslocamento  $x$ ; (b) Plano de fase no regime permanente; (c) Mapa de Poincaré; (d) FFT (espectro de frequências)

A figura 5.33 apresenta os diagramas de bifurcação com a capacitância,  $C$ , como parâmetro de controle para o valor de resistência elétrica de  $R = 10 \Omega$ . Em três dos quatro casos mostrados, o comportamento do sistema apresenta-se claramente como periódico. Apenas na razão de frequências de  $r = 4$ , a dinâmica do sistema tem alteração dependendo do valor da capacitância. Para a construção da figura 5.33 e de seu detalhamento, mostrado nas figuras de 5.34 a 5.44, os parâmetros mantidos invariáveis respeitaram os valores contidos na tabela 5.15.

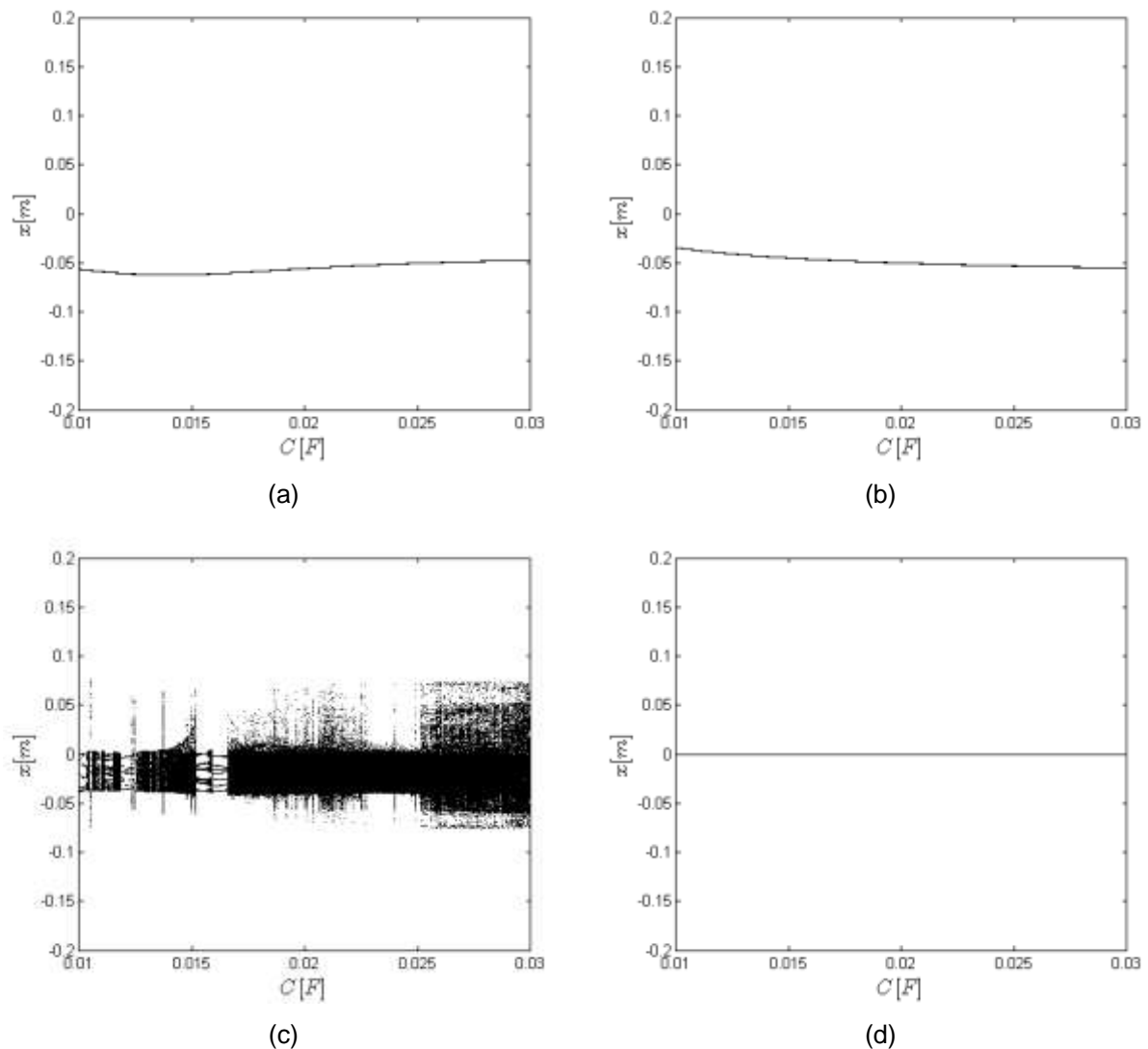


Figura 5.33 – Diagramas de bifurcação para a capacitância,  $C$ , como parâmetro de controle:

$R = 10 \Omega$ . (a)  $r = 0,5$ ; (b)  $r = 1$ ; (c)  $r = 4$ ; (d)  $r = 10$

No primeiro caso, para  $r = 0,5$ , o comportamento do sistema pode ser classificado como periódico para qualquer valor do parâmetro de controle,  $C$ , dentro da faixa analisada, de 0,01 a 0,03 F. A figura 5.34 exibe o diagrama de bifurcação detalhado. Apenas a região A é analisada, uma vez que não há bifurcação presente na resposta.

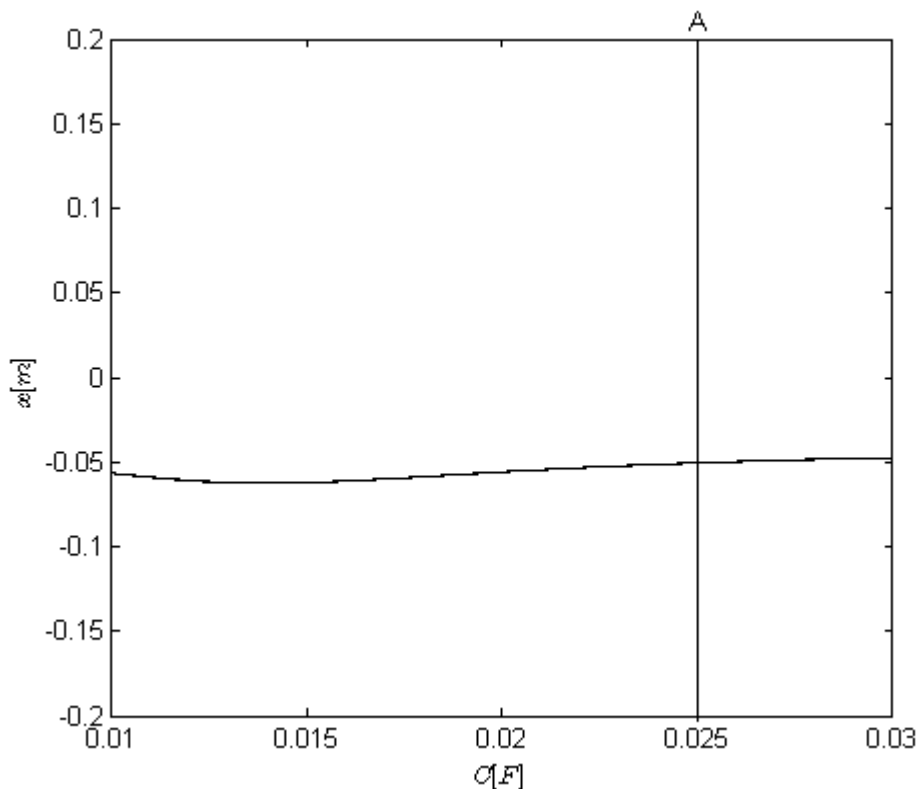


Figura 5.34 – Diagrama de bifurcação para a capacitância,  $C$ , como parâmetro de controle:  $R = 10 \Omega$   
e  $r = 0,5$



A figura 5.35 confirma o comportamento periódico do sistema com  $R = 10 \Omega$  para  $r = 0,5$ , na região A, com  $C = 0,025 F$ . A regularidade do histórico do deslocamento no tempo, a elipse formada no plano de fase, a única localização dos pontos do mapa de Poincaré e o único pico de amplitude do espectro de frequências auxiliam na análise. Como visto anteriormente no diagrama de bifurcação, esse comportamento se repete para qualquer valor de capacitância compreendido entre 0,01 e 0,03 F.

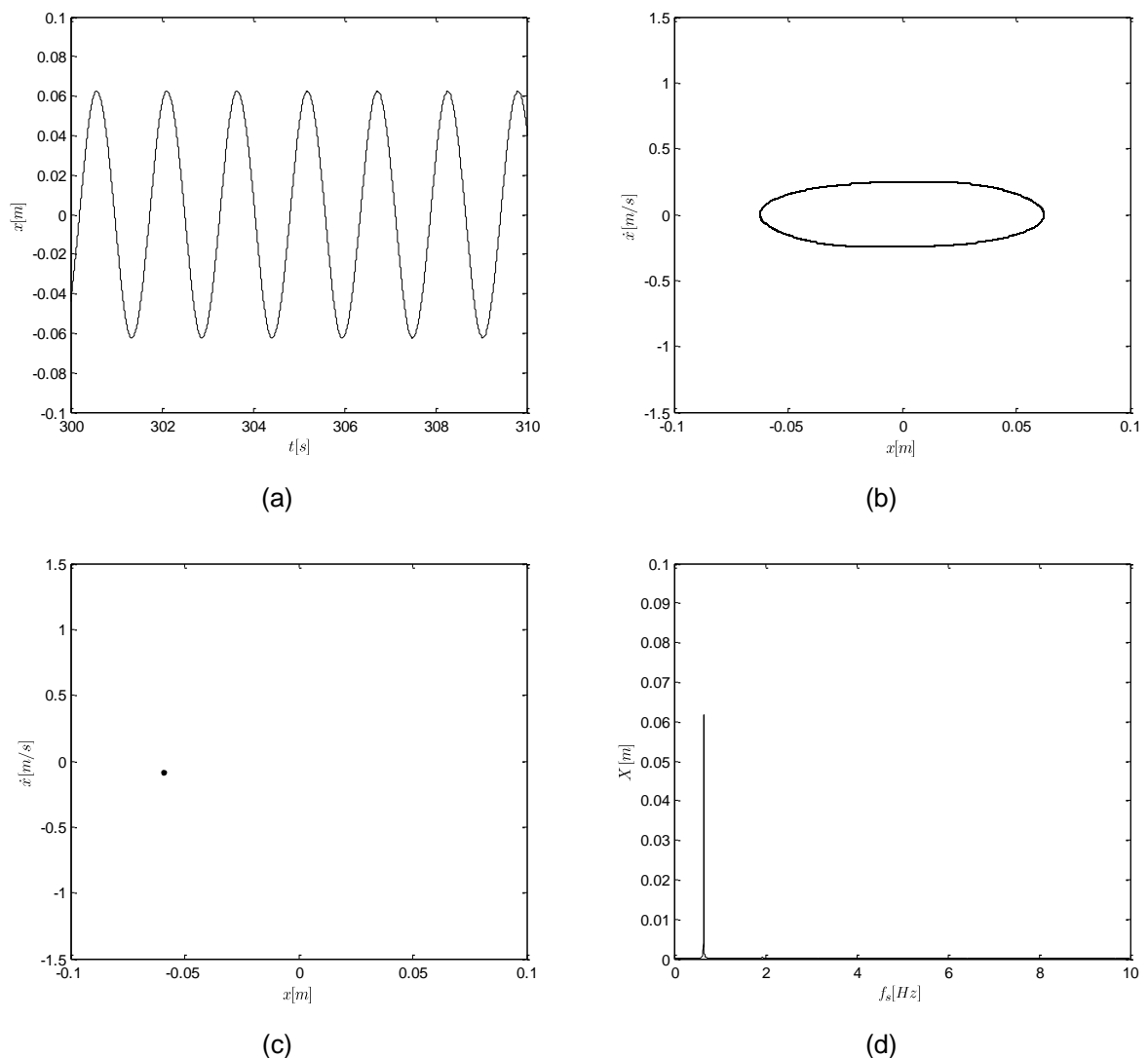


Figura 5.35 – Resposta do sistema com circuito elétrico RLC em série com indutância não linear:  $C = 0,025 F$ ,  $R = 10 \Omega$  e  $r = 0,5$ . (a) Histórico no tempo do deslocamento  $x$ ; (b) Plano de fase no regime permanente; (c) Mapa de Poincaré; (d) FFT (espectro de frequências)

A mesma conclusão pode-se obter através figura 5.36, porém para a razão de frequências  $r = 1$ . Não há bifurcação aparente no diagrama de bifurcação. Apenas a região B, com  $C = 0,025 F$  é analisada. Pequenas diferenças quantitativas podem ser percebidas entre os diagramas da figura 5.36 e 5.34.

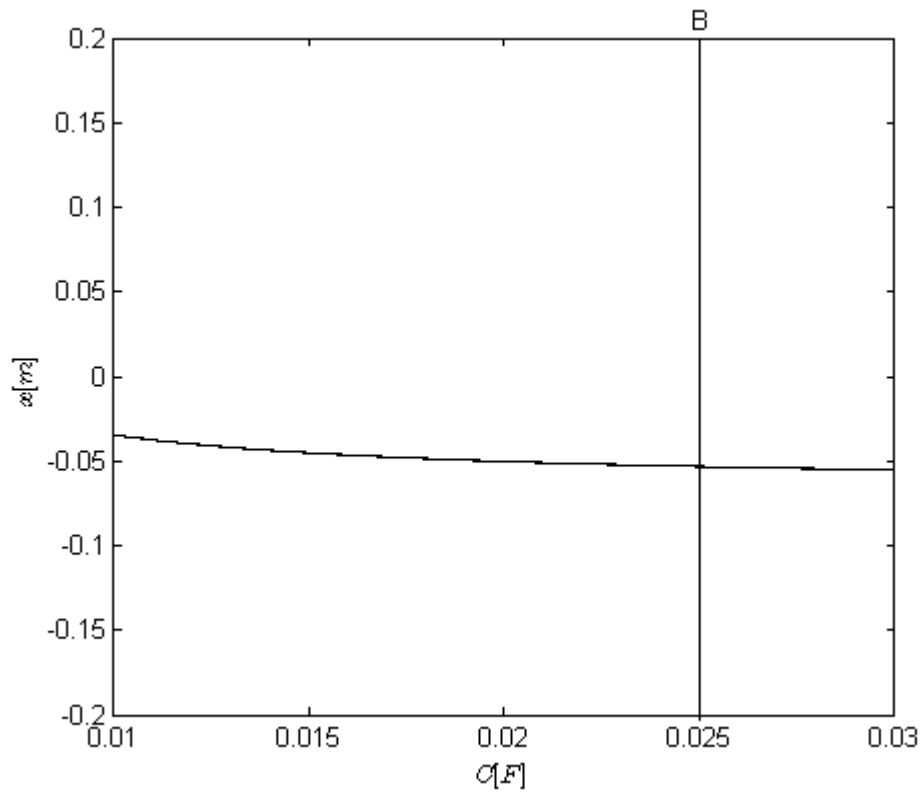


Figura 5.36 – Diagrama de bifurcação para a capacitância,  $C$ , como parâmetro de controle:  $R = 10 \Omega$   
e  $r = 1$

A figura 5.37 comprova o comportamento periódico do sistema em  $r = 1$ . A região analisada é a região B do diagrama da figura 5.36, com o valor da capacitância de  $C = 0,025 F$ . Os aspectos regulares das respostas confirmam a classificação dada ao comportamento dinâmico.

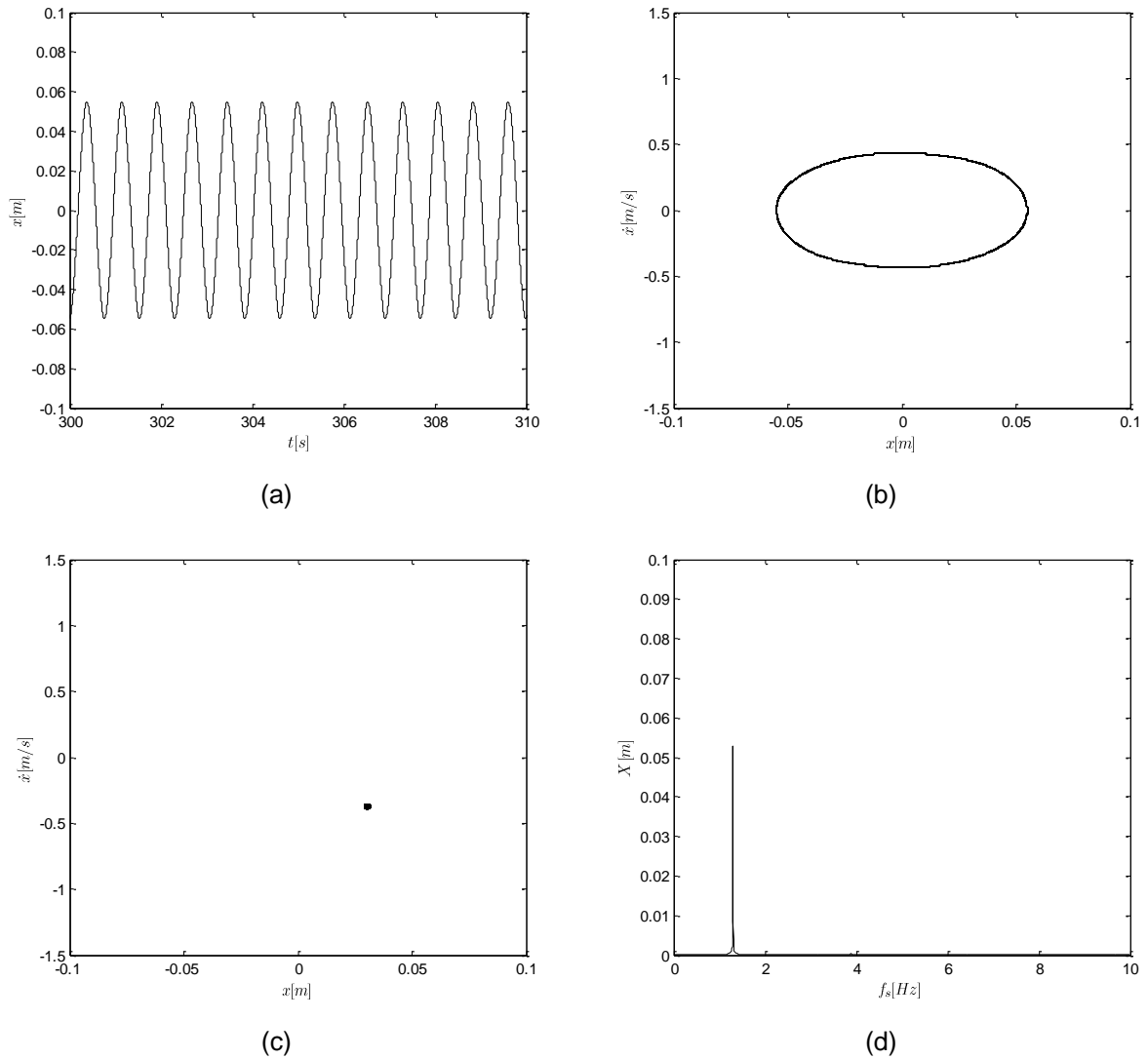


Figura 5.37 – Resposta do sistema com circuito elétrico RLC em série com indutância não linear:  $C = 0,025 F$ ,  $R = 10 \Omega$  e  $r = 1$ . (a) Histórico no tempo do deslocamento  $x$ ; (b) Plano de fase no regime permanente; (c) Mapa de Poincaré; (d) FFT (espectro de frequências)

Condição bem diferente é encontrada no diagrama de bifurcação da figura 5.38, para  $r = 4$ . Inúmeras bifurcações são facilmente identificadas, de comportamentos multiperíódicos para caóticos e vice-versa. Quatro regiões, de C a F, são adotadas para o estudo da dinâmica do sistema para esses valores.

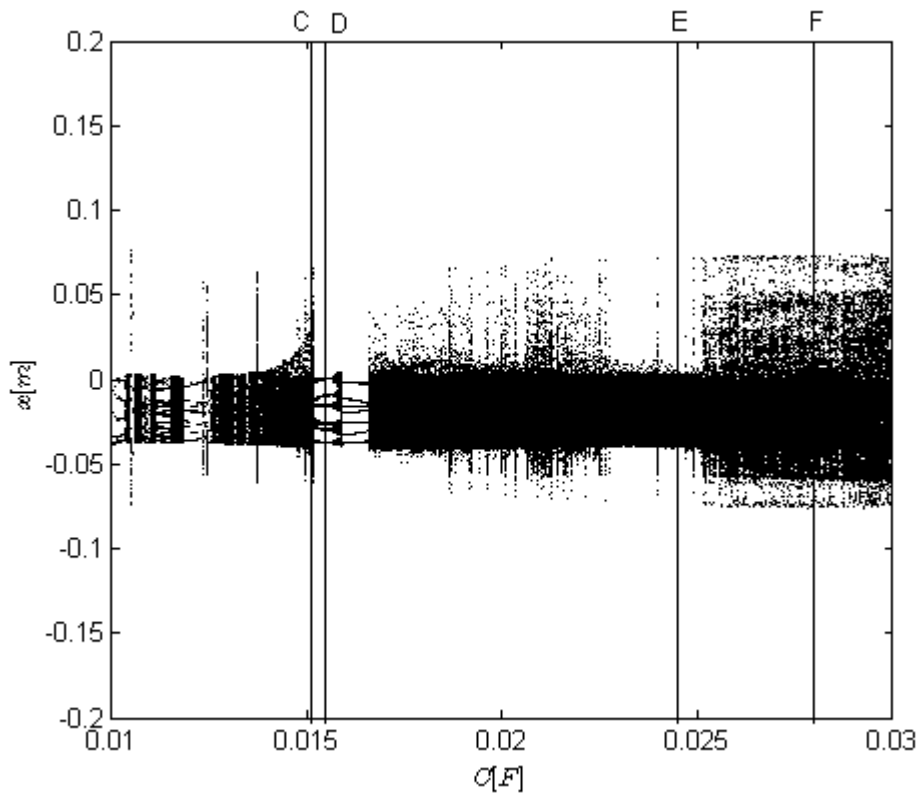


Figura 5.38 – Diagrama de bifurcação para a capacitância,  $C$ , como parâmetro de controle:  $R = 10 \Omega$   
e  $r = 4$

Na região C mostrada na figura 5.39, para  $C = 0,01513 F$ , os sistema mostra-se com comportamento caótico. A curva irregular da resposta no tempo, bem como a nuvem densa de pontos do mapa de Poincaré, ajudam na análise. Além disso, destaca-se a característica espalhada da FFT, indicando claramente a presença de caos.

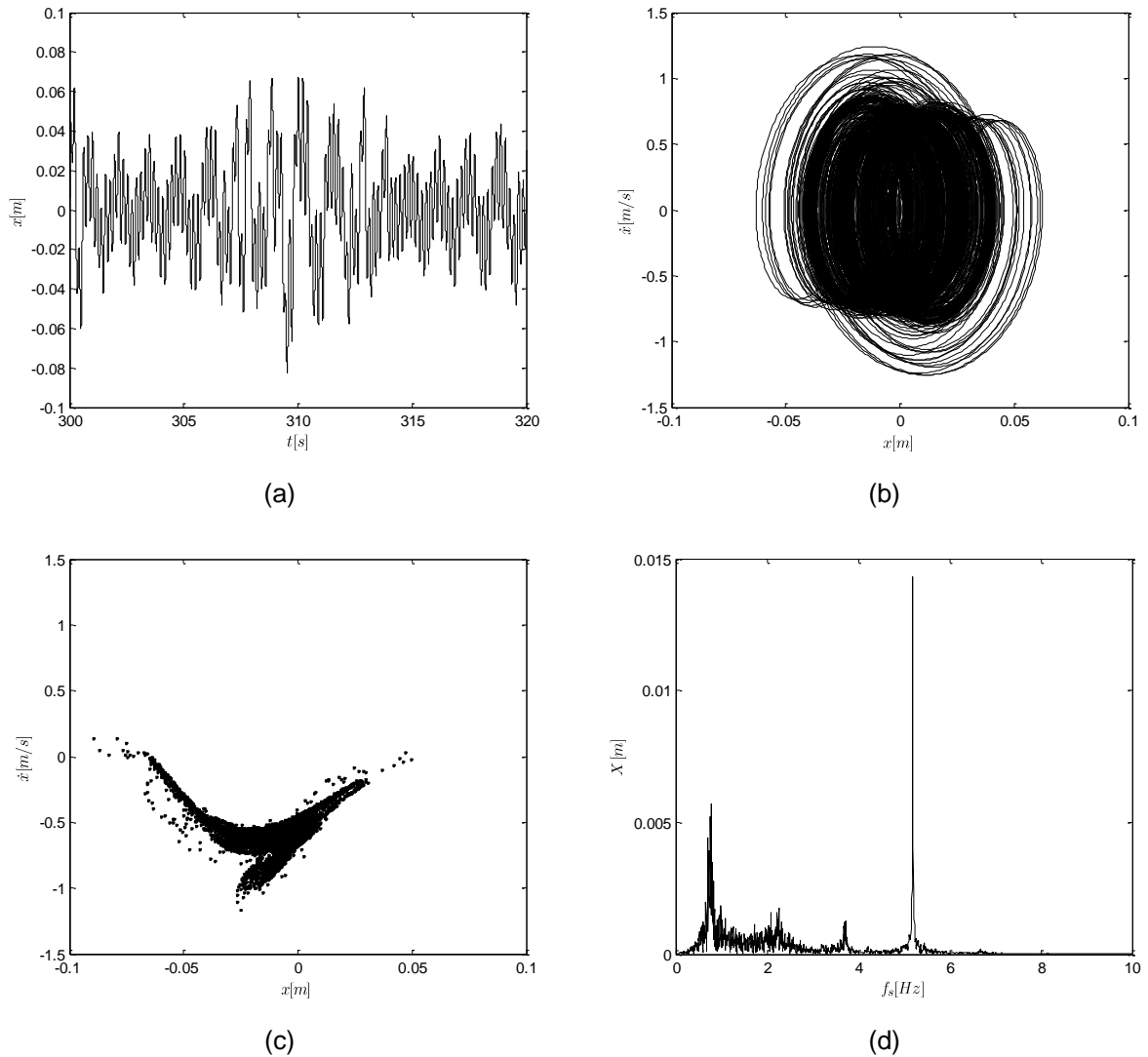


Figura 5.39 – Resposta do sistema com circuito elétrico RLC em série com indutância não linear:  $C = 0,01513 F$ ,  $R = 10 \Omega$  e  $r = 4$ . (a) Histórico no tempo do deslocamento  $x$ ; (b) Plano de fase no regime permanente; (c) Mapa de Poincaré; (d) FFT (espectro de frequências)

Na região subsequente, D, o comportamento dinâmico passa a ser multiperiódico. As coordenadas do mapa de Poincaré da figura 5.40, para a capacitância de  $C = 0,01549 F$ , indicam a presença de sete pontos distintos, ou seja, trata-se de um sistema com periodicidade sete. Embora seja clara a conclusão através do mapa de Poincaré e do plano de fase, a FFT do sistema demonstra uma aparência bem espalhada, indicativa de caos.

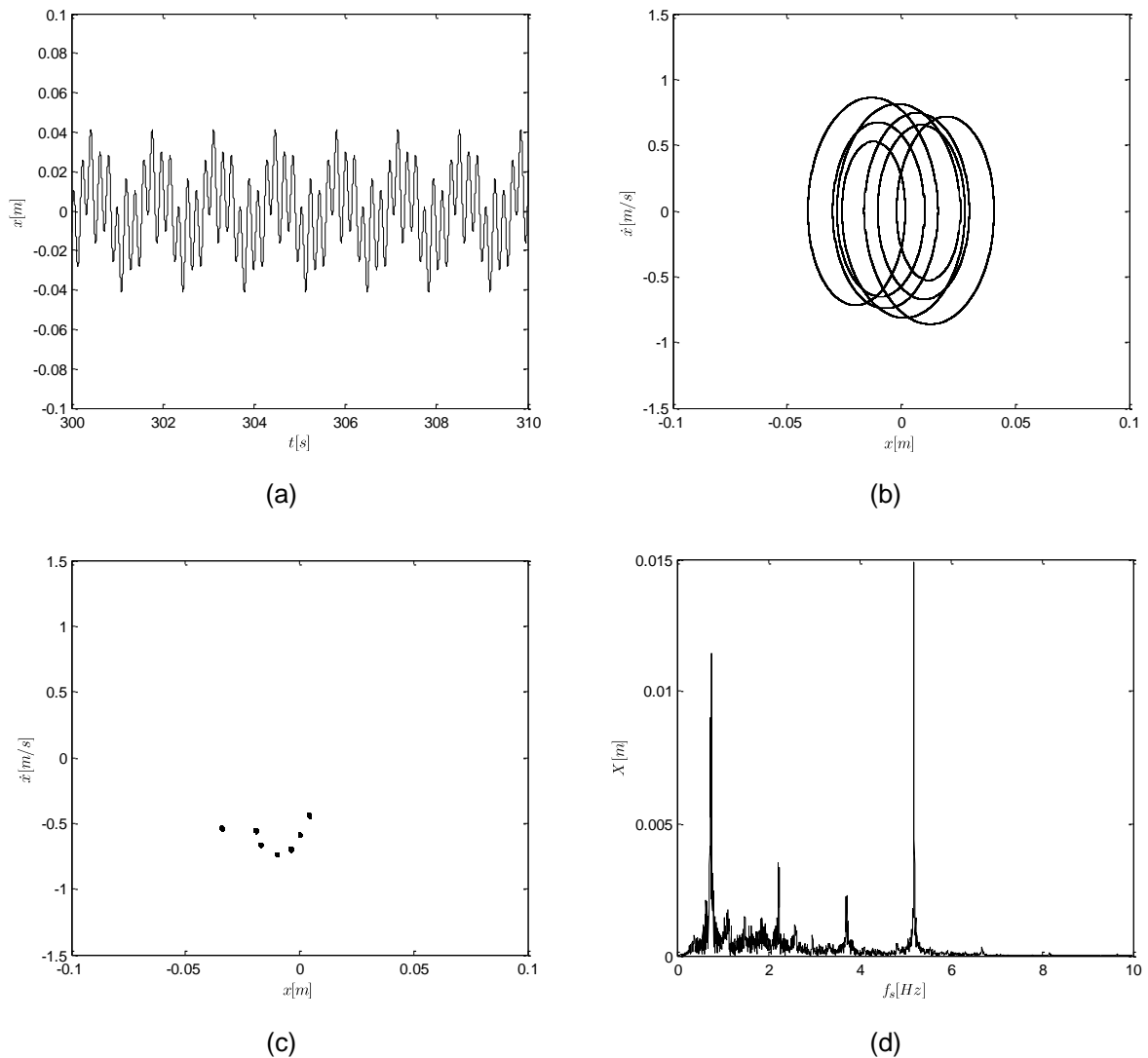


Figura 5.40 – Resposta do sistema com circuito elétrico RLC em série com indutância não linear:  $C = 0,01549 F$ ,  $R = 10 \Omega$  e  $r = 4$ . (a) Histórico no tempo do deslocamento  $x$ ; (b) Plano de fase no regime permanente; (c) Mapa de Poincaré; (d) FFT (espectro de frequências)

Na região E da figura 5.41, com  $C = 0,02454 F$ , o comportamento dinâmico volta a ser classificado como caótico. Nesse caso, o mapa de Poincaré formando uma nuvem densa de pontos e o espectro de frequências espalhado não deixam dúvidas quanto à presença de caos.

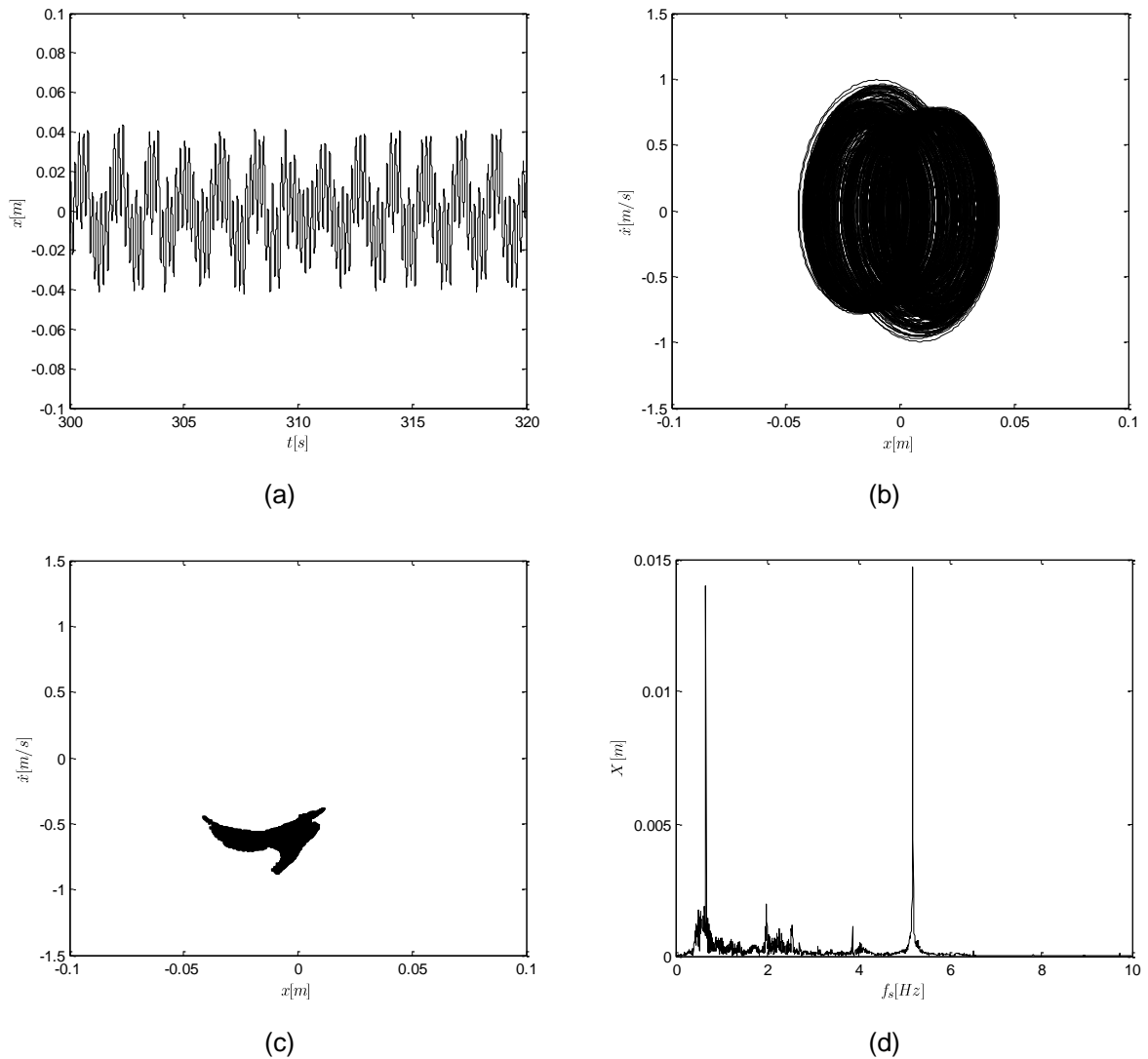


Figura 5.41 – Resposta do sistema com circuito elétrico RLC em série com indutância não linear:  $C = 0,02454 F$ ,  $R = 10 \Omega$  e  $r = 4$ . (a) Histórico no tempo do deslocamento  $x$ ; (b) Plano de fase no regime permanente; (c) Mapa de Poincaré; (d) FFT (espectro de frequências)

Através das respostas da figura 5.42, para a região F, com  $C = 0,02791 F$ , novamente classifica-se o comportamento dinâmico do sistema como caótico. Em comparação com os casos anteriores, a amplitude do deslocamento apresenta um valor maior. O comportamento irregular é caracterizado pela desordem encontrada na resposta do deslocamento no tempo, pelo mapa de Poincaré de natureza densa e muito povoado, e pelo espectro de frequências espalhado ao longo do eixo da frequência.

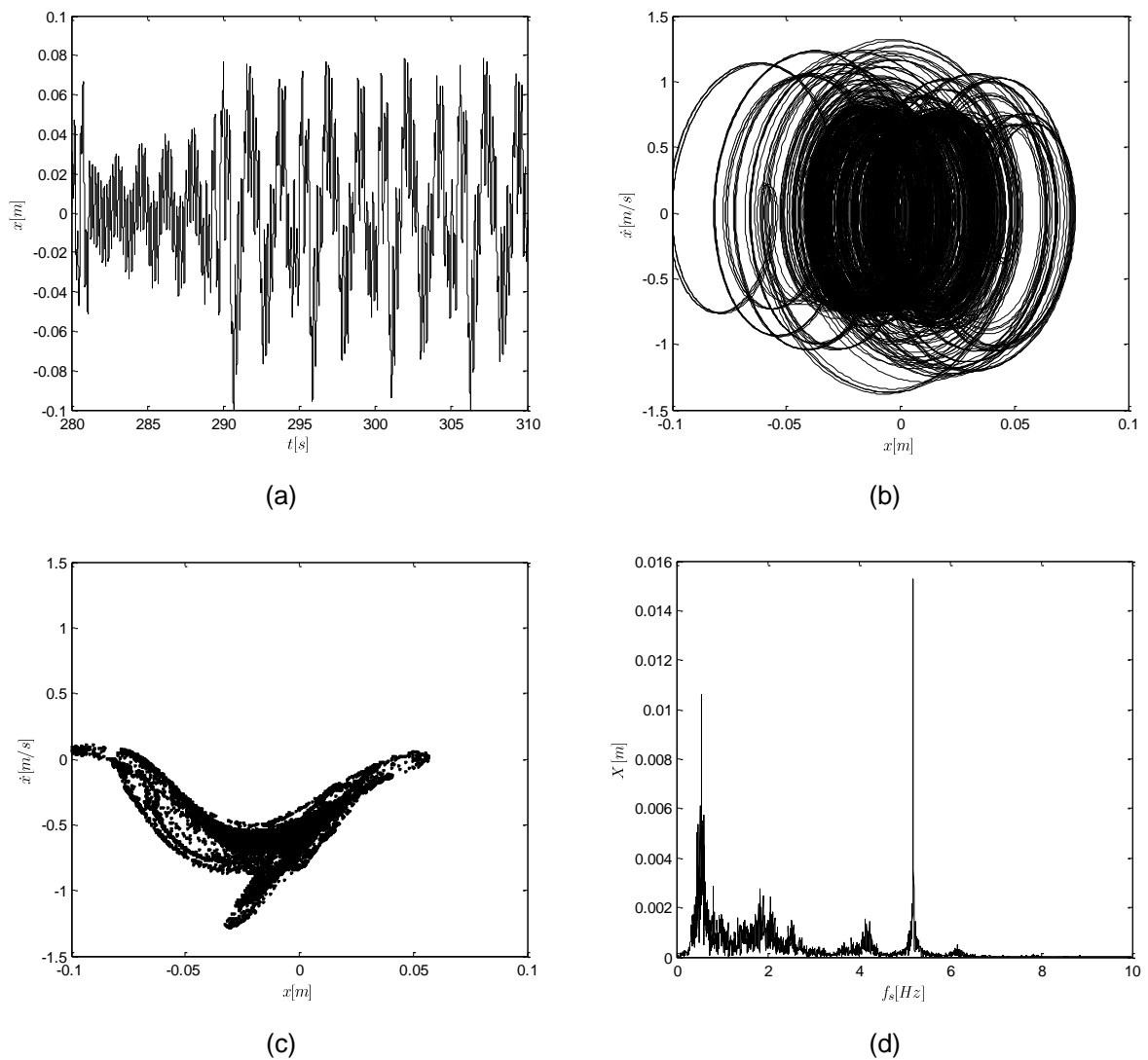


Figura 5.42 – Resposta do sistema com circuito elétrico RLC em série com indutância não linear:  $C = 0,02791 F$ ,  $R = 10 \Omega$  e  $r = 4$ . (a) Histórico no tempo do deslocamento  $x$ ; (b) Plano de fase no regime permanente; (c) Mapa de Poincaré; (d) FFT (espectro de frequências)



A última análise do sistema com a resistência elétrica de  $R = 10 \Omega$  é feita para a região de alta frequência, ou seja,  $r = 10$ . O comportamento evidenciado é periódico, de amplitude extremamente baixa, satisfazendo a condição de isolamento, conforme mostrado no diagrama de bifurcação da figura 5.43. Portanto, entre os valores de capacitância de 0,01 e 0,03 F, não há bifurcações presentes. A região G é analisada para a confirmação da classificação do movimento.

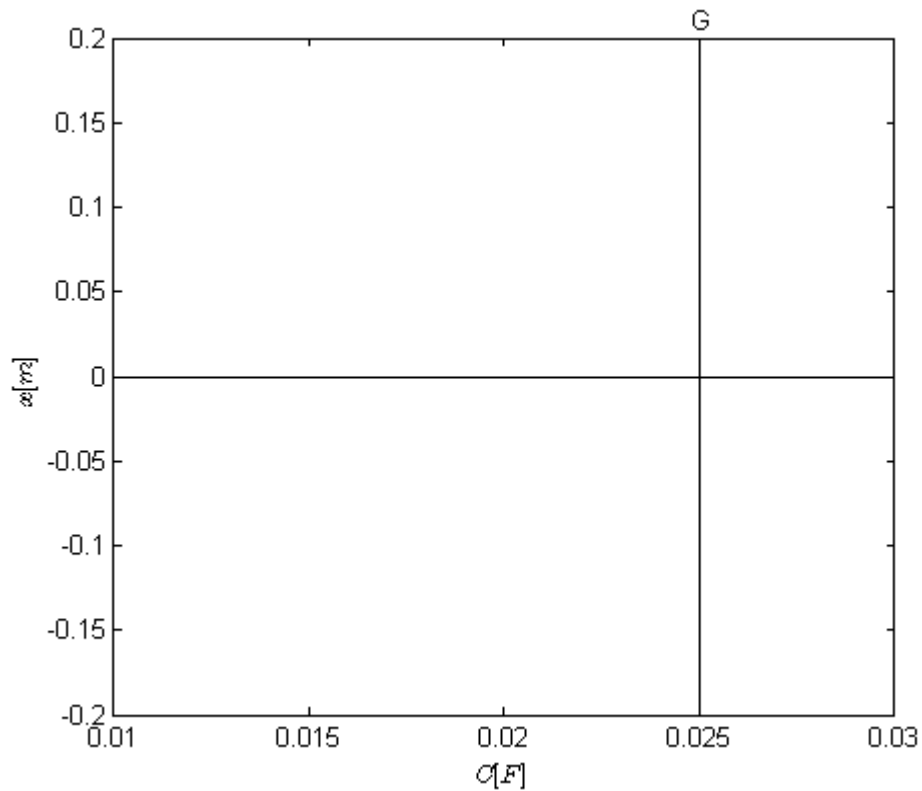


Figura 5.43 – Diagrama de bifurcação para a capacitância,  $C$ , como parâmetro de controle:  $R = 10 \Omega$   
e  $r = 10$

A região G apresenta uma amplitude do deslocamento muito pequena, conforme mostrado nas respostas da figura 5.44, para  $C = 0,025 F$ . Seguramente, pela regularidade da série temporal do deslocamento, do plano de fase, da localização única dos pontos no mapa de Poincaré, e do único ponto evidente no espectro de frequências, é possível afirmar que se trata de um comportamento dinâmico periódico.

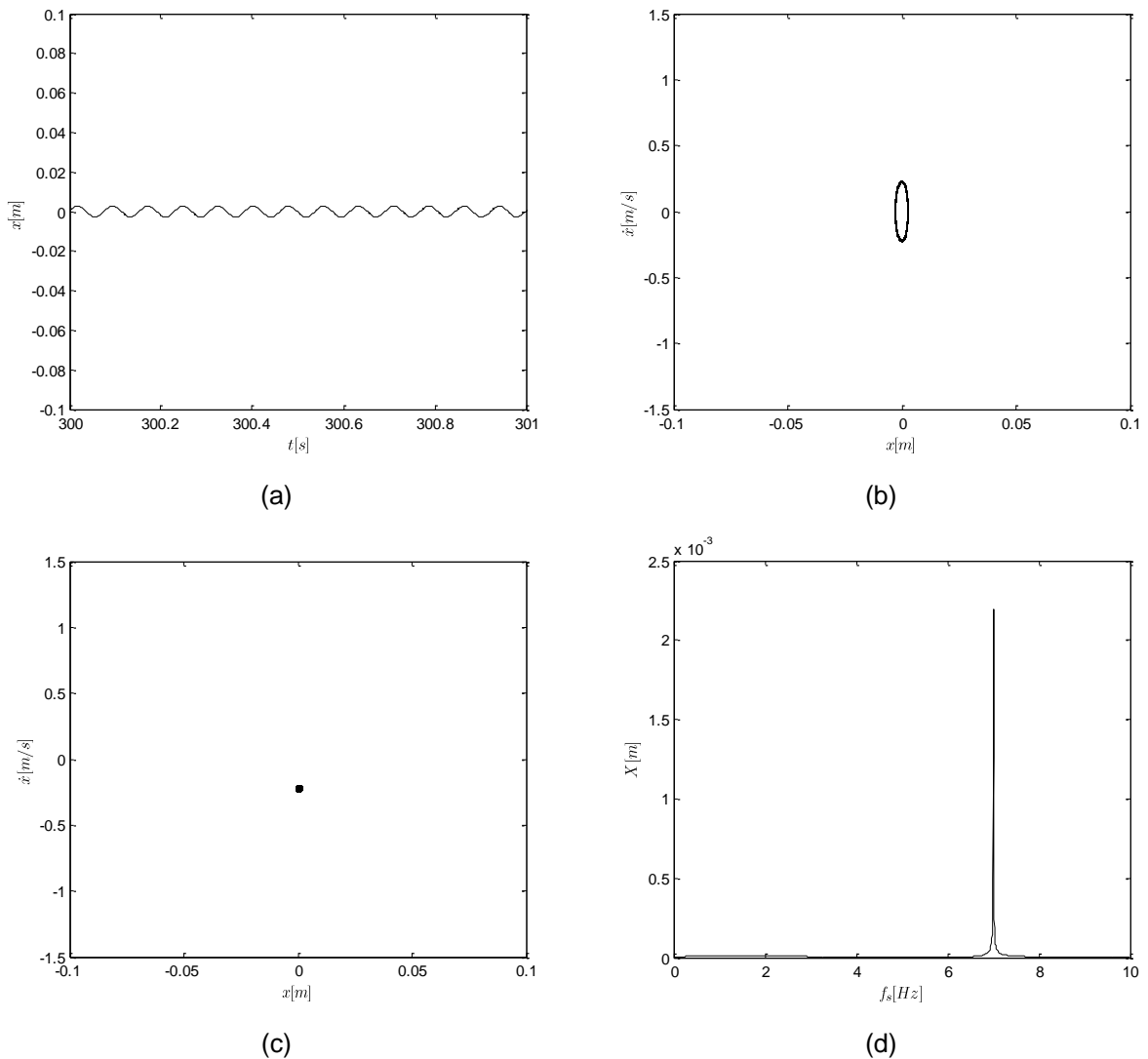


Figura 5.44 – Resposta do sistema com circuito elétrico RLC em série com indutância não linear:  $C = 0,025 F$ ,  $R = 10 \Omega$  e  $r = 10$ . (a) Histórico no tempo do deslocamento  $x$ ; (b) Plano de fase no regime permanente; (c) Mapa de Poincaré; (d) FFT (espectro de frequências)

Nos diagramas de bifurcação da figura 5.45, o comportamento dinâmico do sistema é avaliado para o valor de resistência de elétrica de  $R = 20 \Omega$ . Em nenhuma das quatro frequências escolhidas,  $r = 0,5$ ,  $r = 1$ ,  $r = 4$  ou  $r = 10$ , o sistema apresentou qualquer tipo de bifurcação. Apenas a amplitude do deslocamento apresentou uma variação, ligada principalmente às regiões de amplificação e isolamento da resposta em frequência.

Para esse valor de resistência, não foram gerados históricos no tempo do deslocamento, planos de fase, mapas de Poincaré ou espectros de frequências, pois claramente o comportamento dinâmico do sistema, em qualquer caso, é periódico.

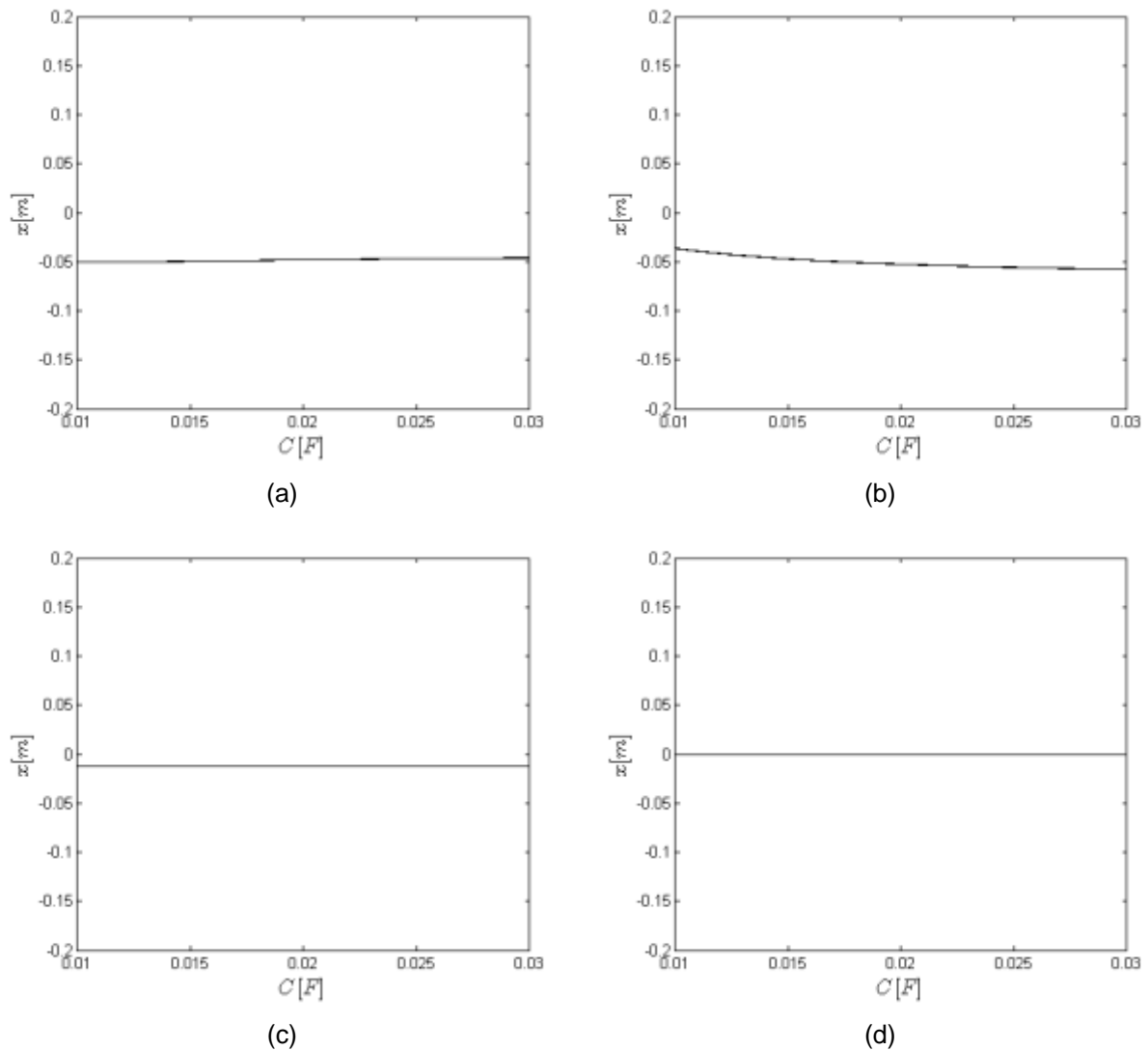


Figura 5.45 – Diagramas de bifurcação para a capacitância,  $C$ , como parâmetro de controle:

$R = 20 \Omega$ . (a)  $r = 0,5$ ; (b)  $r = 1$ ; (c)  $r = 4$ ; (d)  $r = 10$

## 6 ANÁLISE DE ESTABILIDADE DO SISTEMA NÃO LINEAR

A seguir, é realizada a análise de estabilidade do sistema com indutância não linear. Para isso, o sistema é considerado em vibração livre, para que se torne autônomo e possua ponto de equilíbrio estático. A estabilidade é analisada em torno desse ponto. A equação 6.1 mostra o sistema para vibração livre.

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{x} + kx - T_v\dot{q} = 0 \\ \left[ L_0 + \frac{A}{\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}} e^{-2\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2} \right] \ddot{q} + \left[ R - \frac{4A}{\sigma^3\sqrt{\frac{\pi}{2}}} e^{-2\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2} x\dot{x} \right] \dot{q} + \frac{1}{C}q + T_v\dot{x} = 0 \end{array} \right. \quad (6.1)$$

No espaço de estados, utilizando-se da mesma metodologia mostrada na seção de modelagem, tem-se:

$$\{\dot{u}\} = \left\{ \begin{array}{l} u_2 \\ -\frac{k}{m}u_1 + \frac{T_v}{m}u_4 \\ u_4 \\ -Ru_4 - \frac{4A}{\sigma^3\sqrt{\frac{\pi}{2}}} e^{-2\left(\frac{u_1}{\sigma}\right)^2} u_1u_2u_4 - \frac{1}{C}u_3 - T_vu_2 \\ \hline L_0 + \frac{A}{\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}} e^{-2\left(\frac{u_1}{\sigma}\right)^2} \end{array} \right. \quad (6.2)$$

Como definição do ponto de equilíbrio estático, a velocidade e a aceleração são igualadas a zero. Por analogia, para a parte elétrica, a corrente elétrica e sua derivada também são igualadas a zero. A equação 6.3 mostra essa condição.

$$\{\dot{u}\} = \begin{pmatrix} u_2 \\ -\frac{k}{m}u_1 + \frac{T_v}{m}u_4 \\ u_4 \\ -Ru_4 - \frac{4A}{\sigma^3\sqrt{\frac{\pi}{2}}}e^{-2\left(\frac{u_1}{\sigma}\right)^2}u_1u_2u_4 - \frac{1}{C}u_3 - T_vu_2 \\ \hline L_0 + \frac{A}{\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}}e^{-2\left(\frac{u_1}{\sigma}\right)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

Logo, com as substituições convenientes, chega-se ao ponto de equilíbrio, identificado na equação 6.4 como  $\bar{u}$ .

$$\{\bar{u}\} = \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{u}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

Por ser originalmente não linear, a equação de  $\dot{u}_4$ , que representa a derivada da corrente elétrica no espaço de estados, deve ser linearizada em torno do ponto de equilíbrio. Para isso, a série de Taylor é utilizada. A função  $f_4$  representa a equação de  $\dot{u}_4$ , conforme mostrado na equação 6.5.

$$f_4 = \frac{-Ru_4 - \frac{4A}{\sigma^3\sqrt{\frac{\pi}{2}}}e^{-2\left(\frac{u_1}{\sigma}\right)^2}u_1u_2u_4 - \frac{1}{C}u_3 - T_vu_2}{L_0 + \frac{A}{\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}}e^{-2\left(\frac{u_1}{\sigma}\right)^2}} \quad (6.5)$$

Na equação 6.6, a função  $f_4'$  representa a forma utilizada pela série de Taylor para a linearização da função  $f_4$ .

$$f_4' \approx f_4(\bar{u}) + \left. \frac{\partial f_4}{\partial u_1} \right|_{u_1=\bar{u}_1} (u_1 - \bar{u}_1) + \left. \frac{\partial f_4}{\partial u_2} \right|_{u_2=\bar{u}_2} (u_2 - \bar{u}_2) + \left. \frac{\partial f_4}{\partial u_3} \right|_{u_3=\bar{u}_3} (u_3 - \bar{u}_3) + \left. \frac{\partial f_4}{\partial u_4} \right|_{u_4=\bar{u}_4} (u_4 - \bar{u}_4) \quad (6.6)$$

Com o desenvolvimento da equação 6.6, a função linearizada,  $f_4'$ , fica:

$$f_4' \approx \frac{-T_v u_2 - \frac{1}{C} u_3 - R u_4}{L_0 + \frac{A}{\sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}}}} \quad (6.7)$$

Portanto, o vetor  $\dot{u}$  é representado por  $\dot{u}'$  em sua forma linearizada.

$$\{\dot{u}'\} = \left\{ \begin{array}{l} u_2 \\ -\frac{k}{m} u_1 + \frac{T_v}{m} u_4 \\ u_4 \\ \frac{-T_v u_2 - \frac{1}{C} u_3 - R u_4}{L_0 + \frac{A}{\sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}}}} \end{array} \right\} \quad (6.8)$$

Para facilitar os cálculos, a constante  $L_a$  é criada de acordo com a relação da equação 6.9.

$$L_a = L_0 + \frac{A}{\sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}}} \quad (6.9)$$

Assim, o vetor  $\dot{u}'$  assume a forma simplificada da equação 6.10.

$$\{\dot{u}'\} = \left\{ \begin{array}{l} u_2 \\ -\frac{k}{m} u_1 + \frac{T_v}{m} u_4 \\ u_4 \\ -\frac{T_v}{L_a} u_2 - \frac{1}{L_a C} u_3 - \frac{R}{L_a} u_4 \end{array} \right\} \quad (6.10)$$

Passando para a notação matricial, o vetor  $\dot{u}'$  assume a forma:

$$\{\dot{u}'\} = [D] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \quad (6.11)$$

onde:

$D$  representa a matriz característica do sistema.

Assim, para o sistema linearizado da equação 6.10, tem-se:

$$[D] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{m} & 0 & 0 & \frac{T_v}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{T_v}{L_a} & -\frac{1}{L_a C} & -\frac{R}{L_a} \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

Para a análise de estabilidade do sistema no ponto de equilíbrio, a equação característica da matriz  $D$  deve ser encontrada. A equação 6.13 expressa a equação característica.

$$\det[D - \lambda I] = 0 \quad (6.13)$$

Na equação 6.13:

$\lambda$  representa os autovalores da matriz  $D$ , ou as raízes da equação característica;  
 $I$  representa a matriz identidade que, nesse caso, possui dimensão 4X4.

A matriz  $[D - \lambda I]$  fica:

$$[D - \lambda I] = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{m} & -\lambda & 0 & \frac{T_v}{m} \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -\frac{T_v}{L_a} & -\frac{1}{L_a C} & -\frac{R}{L_a} - \lambda \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

Com a solução do determinante da matriz apresentada na equação 6.14, a equação característica 6.13 resulta em:

$$\lambda^4 + \frac{R}{L_a} \lambda^3 + \left( \frac{k}{m} + \frac{1}{L_a C} + \frac{T_v^2}{m L_a} \right) \lambda^2 + \frac{kR}{m L_a} \lambda + \frac{k}{m L_a C} = 0 \quad (6.15)$$

Como a solução de uma equação do quarto grau de maneira analítica muitas vezes não é trivial, outros métodos para a análise da estabilidade podem ser empregados. Nesse caso, será adotado o método de Routh-Hurwitz (MEIROVITCH, 1970) para a classificação da estabilidade do sistema.

A equação 6.16 mostra a forma geral da equação característica.

$$a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0 \quad (6.16)$$

Os símbolos  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  e  $a_4$  representam os coeficientes da equação característica. As equações 6.17, 6.18, 6.19, 6.20 e 6.21 exibem os valores dos coeficientes para o sistema estudado.

$$a_0 = 1 \quad (6.17)$$

$$a_1 = \frac{R}{L_a} \quad (6.18)$$

$$a_2 = \frac{k}{m} + \frac{1}{L_a C} + \frac{T_v^2}{m L_a} \quad (6.19)$$

$$a_3 = \frac{kR}{m L_a} \quad (6.20)$$

$$a_4 = \frac{k}{m L_a C} \quad (6.21)$$

O método de Routh-Hurwitz (MEIROVITCH, 1970) utiliza os sinais de determinantes parciais para a interpretação da estabilidade do sistema. Esses determinantes são extraídos da matriz mostrada na expressão 6.22.



$$\begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

Por se tratar de um sistema de dois graus de liberdade, que resulta em uma equação característica polinomial do quarto grau, não existem os coeficientes  $a_5$ ,  $a_6$  e  $a_7$ . Portanto, eles são substituídos por zero na equação 6.23.

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

Segundo o método de Routh-Hurwitz (MEIROVITCH, 1970), os determinantes  $\Delta_n$  têm a seguinte forma:

$$\Delta_1 = \det[a_1] \quad (6.24)$$

$$\Delta_2 = \det \begin{bmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

$$\Delta_3 = \det \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_4 & a_3 \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

$$\Delta_4 = \det \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

Ainda de acordo com Meirovitch (1970), os determinantes relacionam-se entre si através da equação 6.28.

$$\Delta_n = a_n \Delta_{n-1} \quad (6.28)$$

Logo, somente é necessário checar o sinal do primeiro determinante e dos coeficientes para analisar a estabilidade do sistema no ponto de equilíbrio. O primeiro determinante,  $\Delta_1$ , tem a forma apresentada na equação 6.29.

$$\Delta_1 = \frac{R}{L_a} = \frac{R}{L_0 + \frac{A}{\sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}}}} \quad (6.29)$$

Para que haja sentido físico dos parâmetros que compõem os coeficientes  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  e  $a_4$  da equação característica, seus valores devem ser assumidos como positivos. Portanto, todos os coeficientes também podem ser ditos como positivos.

Após a análise da equação 6.29, conclui-se que  $\Delta_1$  é positivo e, como todos os coeficientes também são positivos, todos os determinantes são positivos. Pelo critério de Routh-Hurwitz (MEIROVITCH, 1970), como todos os determinantes,  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ,  $\Delta_3$  e  $\Delta_4$ , são positivos, as raízes da equação característica, ou os autovalores da matriz  $D$ , possuem parte real negativa, o que permite classificar o ponto de equilíbrio  $\bar{u}$  como estável.

## 7 CONCLUSÕES

Os três circuitos lineares explorados nas seções acima revelam algumas diferenças em termos da transmissibilidade de deslocamento. O sistema com circuito puramente resistivo tem as mesmas características de um sistema puramente mecânico e viscosamente amortecido, entretanto a resistência elétrica e o fator de amortecimento viscoso se relacionam de forma inversamente proporcional. Quanto menor o valor de  $R$ , menor a transmissibilidade de deslocamento para baixas frequências ( $r < \sqrt{2}$ ). Em contrapartida, os mesmos valores baixos de  $R$  geram transmissibilidades menores que 1, mas com decaimento lento.

Dois casos relacionados ao circuito puramente resistivo esclarecem a característica explicada anteriormente. Na primeira situação, para  $R = 30 \Omega$ , é conseguido um excelente resultado de transmissibilidade para  $r > \sqrt{2}$ , com um rápido decaimento da curva, mas, em compensação, a resposta para frequências mais baixas ( $r < \sqrt{2}$ ) fica comprometida. Situação exatamente oposta é encontrada para  $R = 5 \Omega$ , onde os melhores resultados aparecem para  $r < \sqrt{2}$ , em detrimento da resposta para  $r > \sqrt{2}$ .

Uma das principais vantagens dos sistemas com amortecimento eletromecânico com circuitos RL ou RLC em série é a ausência de picos de amplitude. Essa característica também pode ser encontrada em sistemas com circuitos puramente resistivos, porém, nos dois primeiros ocorre o isolamento mais intenso em altas frequências, ou o decaimento mais rápido da curva de transmissibilidade.

As respostas dos circuitos RL e RLC, ambos em série, apresentam aspectos mais comportados. A transmissibilidade não é muito maior para frequências mais baixas e tem um decaimento considerável para frequências mais altas. Para sistemas expostos a altas frequências de excitação em quase todo o tempo, e sujeito também esporadicamente a frequências mais baixas, os sistemas RL e RLC podem ser considerados como melhores opções do que os puramente resistivos.

A principal diferença entre os sistemas com circuitos RL e RLC em série está principalmente na transmissibilidade para baixas frequências. Embora com uma pequena diferença, a transmissibilidade do sistema com circuito RLC é menor do que a do sistema com circuito RL, para baixas frequências. Além disso, para o

sistema com circuito RLC em série, em frequências baixas e conhecidas, é possível trabalhar com transmissibilidades de deslocamento menores que 1 (antirressonância), desde que os parâmetros estejam ajustados para isso.

A não linearidade imposta ao sistema pela variação da indutância com a posição da bobina altera de forma significativa a dinâmica do sistema.

Nas respostas em frequência, ou curvas de transmissibilidade de deslocamento, percebem-se regiões de resposta desordenada para valores baixos de resistência elétrica ( $R = 0,3 \Omega$ , por exemplo) em determinadas faixas de frequência. Conforme o valor da resistência elétrica aumenta, as curvas de transmissibilidade tomam a forma convencional, com os picos de amplitude do deslocamento se aproximando da razão de frequências de  $r = 1$ . Para  $R = 20 \Omega$ , por exemplo, a curva de transmissibilidade assume a forma achatada, ou seja, sem picos evidentes de amplitude, porém com razoável decaimento na região de isolamento (altas frequências).

Com a análise dos diagramas de bifurcação variando a capacitância e das respostas complementares (históricos no tempo, planos de fase, mapas de Poincaré e espectros de frequências), notam-se as presenças dos mais variados tipos de comportamentos dinâmicos. Dentre eles, destacam-se o periódico (periodicidade unitária e periodicidade múltipla), o quasi-periódico e o caótico.

Observa-se que, para  $R = 0,3 \Omega$ , em razões de frequências até  $r = 4$ , a dinâmica do sistema apresenta inúmeras bifurcações, de regulares para irregulares e vice-versa. Portanto, para esses valores baixos de resistência elétrica, a escolha do valor da capacitância é de suma importância para a classificação do tipo de comportamento dinâmico do sistema. Pequenas variações do valor da capacitância representam saltos enormes da dinâmica do sistema. Muitas vezes, mesmo dentro do campo de tolerância especificado pelos fornecedores de componentes elétricos, o valor da capacitância pode resultar em comportamentos caóticos indesejados. É dado destaque ao valor de  $R = 0,3 \Omega$  por se aproximar dos valores intrínsecos de resistência elétrica da bobina.

Por esses motivos, torna-se interessante a adoção de valores de resistência elétrica maiores, para que tenham boas características de amortecimento em grandes faixas de frequência, e para que se restrinjam a comportamentos dinâmicos regulares, ou periódicos, independentemente do valor de capacitância considerado. Obviamente, essa conclusão pode ser admitida para os valores dos parâmetros

escolhidos neste estudo. Por exemplo, a avaliação da influência da capacitância ficou restrita à faixa de 0,01 a 0,03 F.

De maneira geral, os sistemas expostos a altas frequências, normalmente a partir de  $r = 10$ , apresentam respostas periódicas de amplitude de deslocamento muito baixa.

Dessa forma, o valor de resistência elétrica de  $R = 20 \Omega$  atendeu aos requisitos acima, se comparado aos demais valores, e pode ser apontado como o valor de melhor resposta para o conjunto de parâmetros definidos para o sistema.

Quanto à estabilidade do sistema não linear em vibração livre, a análise pelo método de Routh-Hurwitz confirmou a classificação do ponto de equilíbrio estático como estável.

## 8 TRABALHOS FUTUROS

Este capítulo refere-se aos assuntos que poderão ser frutos de trabalhos futuros na linha de pesquisa apresentada nesta dissertação. A lista é apresentada a seguir.

- 1) Estudo do comportamento do sistema não linear com a variação dos demais parâmetros;
- 2) Construção e análise experimental do modelo não linear para a validação dos resultados obtidos numericamente;
- 3) Emprego de uma lógica de controle para o sistema;
- 4) Estudo de um modelo para a colheita de energia;
- 5) Estudo de sistemas não lineares em decorrência de outras fontes.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BEHRENS, S., FLEMING, A. J., MOHEIMANI, S. O. R., “Electromagnetic Shunt Damping”, **IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics**, 2003.

BILLINGS, S. A., **Identification of Nonlinear Systems – A Survey**, IEEE Proc., v.127, p. 272-283, 1980.

DE MARNEFFE, B., **Active and passive vibration isolation and damping via shunted transducers**, Ph.D. Thesis, Bruxelles: Université Libre de Bruxelles, Active Structures Laboratory, 2007

ELLIOTT, S. J., ZILLETI, M., “Scaling of electromagnetic transducers for shunt damping and energy harvesting”, **Journal of Sound and Vibration**, 2013, 2185-2195

HARRIS, C. M., PIERSOL, A. G., **Harris’s Shock and Vibration Handbook**, 5th ed, McGraw-Hill, 2002.

HALLIDAY, D., RESNICK, R., WALKER, J., **Fundamentals of Physics**, v. 3, 7th ed, Jonh Wiley and Sons, 2005.

HO, J., WOO, K., “Approximate analytical solution to oscillations of a conductor in a magnetic field”, **Nonlinear Dyn**, 2010, doi: 10.1007/s11071-010-9863-7

HO, J., NGUYEN, V., WOO, K., “Nonlinear dynamics of a new electro-vibro-impact system”, **Nonlinear Dyn**, 2010, doi: 10.1007/s11071-010-9783-6

MEIROVITCH, L., **Methods of Analytical Dynamics**. San Francisco: Mcgraw Hill, 1970.

MENDRELA, E. A., PUDLOWSKI, Z. J., “Transients and dynamics in a linear reluctance self-oscillating motor”, **IEEE Trans. Energy Convers.** **7(1)**, 1992, 183-191

OGATA, K., **Modern Control Engineering**, 3rd ed., Prentice Hall, 1997.

PREUMONT, A., **Mechatronics: Dynamics of Electromechanical and Piezoelectric Systems**. Dordrecht: Springer, 2006.

RAO, S.S. **Vibrações Mecânicas**, 4<sup>a</sup> ed. Pearson Prentice Hall, 2008, p. 1-6.

SHEN, W., ZHU, S., XU, Y., “An experimental study on self-powered vibration control and monitoring system using electromagnetic TMD and wireless sensors”, **Sensors and Actuators A: Physical**, 2012, 166-176

YAMAPI, R., “Dynamics of an Electromechanical Damping Device with Magnetic Coupling”, **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation** **11**, 2006, 907-921

ZHU, S., SHEN, W., XU, Y., “Linear electromagnetic devices for vibration damping and energy harvesting: Modeling and testing”, **Engineering Structures**, 2012, 198-212

ZUO, L., ZHANG, P., “Energy Harvesting, Ride Comfort, and Road Handling of Regenerative Vehicle Suspensions”, **Journal of Vibration and Acoustics**, 2013.