UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

Explorando a construção de calendários no ensino fundamental e médio

Luciana Bruneli Cirilo

Orientador
Prof. Dr. Marco Antônio Piteri

2017

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

Explorando a construção de calendários no ensino fundamental e médio

Luciana Bruneli Cirilo

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Naciona - PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pólo de Presidente Prudente.

Orientador
Prof. Dr. Marco Antônio Piteri

2017

Cirilo, Luciana Bruneli.
Explorando a construção de calendários no ensino fundamental e médio/ Luciana Bruneli Cirilo. - São José do Rio Preto, 2017
186 f. : il., tabs.

Orientador: Marco Antônio Piteri
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Números - Divisibilidade. 3. Calendários. 4. Seções cônicas. 5. Matemática - Metodologia. I. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. II. Título.

CDU - 51(07)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Campus de São José do Rio Preto

TERMO DE APROVAÇÃO

Luciana Bruneli Cirilo

Explorando a construção de calendários no ensino fundamental e médio

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pólo Presidente Prudente.

Comissão examinadora:

Prof. Dr. Marco Antônio Piteri
FCT/UNESP - Presidente Prudente
Orientador

Prof. Dr. Danillo Roberto Pereira
FIPP/UNOESTE - Presidente Prudente

Prof. Dr. Aylton Pagamisse
FCT/UNESP - Presidente Prudente

Presidente Prudente, 24 de fevereiro de 2017

Dedico este trabalho:
à minha filha Maria.
- fonte de inspiração -

Agradecimentos

A realização do presente curso foi possível devido à colaboração de muitas pessoas que me auxiliaram durante os 3 anos de curso. Manifesto assim minha gratidão:

Primeiramente a Deus que me ajudou a não desistir dessa longa caminhada e que sempre me acompanha durante a execução de minhas tarefas.

Ao Professor Dr. Marco Antônio Piteri, da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP - Universidade Estadual Paulista "Júlio Mesquita Filho", pela orientação, confiança e paciência.

Ao IMPA, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, pela oportunidade de continuidade de estudo e crescimento científico com o PROFMAT - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

À CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - pelo apoio financeiro.

Aos meus pais João e Creuza, a minha filha Maria, minha avó Lurdes, aos meus irmãos João e Fabiana, a meu cunhado Antônio e aos meus sobrinhos João Miguel e João Antônio que sempre me incentivaram durante esta longa caminhada e acreditaram em minha capacidade de realização.

Aos professores e amigos da turma do PROFMAT - 2014 da UNESP de Presidente Prudente em especial à Vanessa e Elizabete. Meus amigos Aparecido Cavalcante de Souza, Lidiane Delivechi, Nara Soares Couto e, ainda, a David Henriques da Matta.

Se vi mais longe foi porque estive
apoiado em ombros de gigantes.
Isaac Newton (1642 - 1727)

Resumo

Este trabalho tem como propósito estudar os principais calendários solares desenvolvidos ao longo da civilização humana, incluindo seus mecanismos de construção baseados inicialmente em observações astronômicas até chegar ao calendário atual, em que os movimentos de translação e de rotação do planeta Terra em relação ao Sol, passam a ser substituídos por relógios atômicos. A temática relativa a calendários é altamente interdisciplinar, pois envolve inúmeros aspectos de natureza cultural, histórica, religiosa, filosófica, astronômica e faz uso de conceitos sobre órbitas planetárias, abrangendo ainda a disciplina de física. Por outro lado, conceitos matemáticos, como, divisibilidade, sistemas de numeração e congruências permitem construir o calendário de um ano arbitrário no passado ou no futuro e saber exatamente em que dia da semana cairá uma determinada data. Além disso, considerando que as órbitas planetárias são elípticas, naturalmente comparece o conceito de cônicas. Vale salientar que os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) preconizam a exploração de temas e eixos transversais. Inúmeras atividades didáticas integram o escopo desse trabalho e foram propostas para serem exploradas junto aos estudantes do ensino fundamental e médio com o propósito de despertar, motivar e estimular o interesse dos mesmos pelo estudo de conceitos matemáticos e mostrar como a matemática está presente no cotidiano da vida de todas as pessoas, desde as antigas civilizações. Entre as atividades podem ser destacadas, o cálculo do número de dias entre duas datas quaisquer, que é usado para se computar juros bancários e a data de aposentadoria de um trabalhador, assim como a construção de um calendário gregoriano para um ano qualquer a partir de 1582 - data de sua promulgação.

Palavras-chave: Calendários, Divisibilidade, Congruência, Congruência de Zeller, Cônicas.

Abstract

This work aims to study the main solar calendars developed throughout human civilization, including its construction mechanisms based initially on astronomical observations until arriving at the current calendar, where the movements of translation and rotation of the planet Earth in relation to the Sun, Are replaced by atomic clocks. The calendrical theme is highly interdisciplinary, as it involves numerous aspects of cultural, historical, religious, philosophical, astronomical, and makes use of concepts about planetary orbits, which includes the discipline of physics. On the other hand, mathematical concepts such as divisibility, numbering systems and congruences allow one to construct the calendar of an arbitrary year in the past or in the future and know exactly on what day of the week a certain date will fall. Moreover, considering that the planetary orbits are elliptical, the concept of conic appears naturally. It is worth noting that the National Curricular Parameters (PCNs) advocate the exploration of themes and transversal axes. Numerous didactic activities are part of the scope of this work and were proposed to be explored with elementary and middle school students in order to awaken, motivate and stimulate their interest in the study of mathematical concepts and to show how mathematics is present in the daily life of People, since the ancient civilizations. Among activities can be highlighted, calculating the number of days between any two dates, which is used to compute bank interest and the retirement date of a worker, as well as the construction of a gregorian calendar for any year from 1582 - date of its promulgation.

Keywords: Calendars, Divisibility, Congruence, Zeller's congruence, Conics.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

1 Introdução

Desde os tempos mais primitivos, o homem foi capaz de verificar que existiam padrões na natureza e a partir deles, depreender a ocorrência de fenômenos. Observou que havia o dia e a noite. Durante o dia era possível caçar, visualizar grandes distâncias, que alguns animais eram mais ativos no período diurno, outros no noturno, momento em que deveriam se recolher e se protegerem, na medida em que estavam mais expostos aos perigos. Observou ainda, que em determinadas épocas chovia mais, que os frutos eram mais abundantes, que os animais migravam, que os rios secavam ou alagavam. Havia algo que fugia de seu controle e que influenciava de forma decisiva o ciclo de vida humana, o tempo. Acontecimentos como o crescimento de uma criança, adultos chegando à decrepitude, flores desabrochando e murchando, mostravam que ele se fazia presente.

Mesmo no início da era cristã, diversas dificuldades foram encontradas com relação a limitar ou fixar temporariamente algumas atividades como as cerimônias religiosas, as audiências dos juízes, a abertura das porta das cidade pela manhã e o fechamento à tarde, a partida de navios, a hora das refeições, a troca da guarda e os quartos de vigília nos navios, ou junto dos rebanhos (DONATO, 1993).

Se houver uma observação mais cuidadosa é possível perceber que o cotidiano de todos nós é regido por um calendário. Há os dias em que trabalhamos, há os finais de semana, o período de férias, dias em que são feitas reuniões, dias em que combinamos com os amigos alguma atividade, datas comemorativas, prazos nos quais devem ser feitos pagamentos e assim por diante.

É importante realçar que o tema "calendário" permeia a vida humana e junto a ele há inúmeros aspectos de natureza histórica, religiosa, cultural, filosófica e astronômica. Faz uso de conceitos sobre órbitas planetárias e envolve as disciplinas de física e de geografia, ou seja, é profundamente interdisciplinar. Se não bastasse isso, explora inúmeros conceitos matemáticos como sistema de numeração posicional, frações, divisibilidade, congruências e cônicas. Em outras palavras, perpassa noções variadas oriundas da matemática, sendo assim uma temática transversal a essa área do conhecimento, indo ao encontro do que apregoa os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's), que destacam e valorizam temas como este.

> A articulação entre as áreas é uma clara sinalização para o projeto

> pedagógico da escola. Envolve uma sintonia de tratamentos metodológicos e, no presente caso, pressupõe a composição do aprendizado de conhecimentos disciplinares com o desenvolvimento de competências gerais. Só em parte essa integração de metas formativas exige, para sua realização, projetos interdisciplinares, concentrados em determinados períodos, nos quais diferentes disciplinas tratem ao mesmo tempo de temas afins. Mais importante do que isso é o estabelecimento de metas comuns envolvendo cada uma das disciplinas de todas as áreas, a serviço do desenvolvimento humano dos alunos e também dos professores (BRASIL, 2002, p. 16).

Antigas civilizações como a egípcia, maia, assíria, babilônica, asteca, grega, romana, indiana, chinesa, entre outras, foram capazes de criar seus próprios calendários baseado em observações astronômicas. Os artefatos disponíveis, o conhecimento e a tecnologia existente há dois, três mil anos atrás era precária e mesmo assim, todos esses povos contruiram seus próprios calendários e com alto nível de precisão. Vários deles já admitiam um ano com 365 dias. Isso mostra a engenhosidade humana, como a curiosidade e a capacidade do homem é capaz de superar obstáculos e limitações, encontrando soluções para problemas que se impõem numa dada época. Atualmente, a civilização humana, após milhares de anos de progresso da ciência e de desenvolvimento tecnológico chega a resultados que atestam, dentro de uma margem mínima de erro, o saber e a perspicácia dos conhecimentos dessas sociedades, que usualmente refererenciamos como "primitivas".

Um exemplo simples do uso de calendário é o cálculo do número de dias entre duas datas, que é usado tanto para o cômputo de juros de uma prestação, atrasada ou não, como a data de aposentadoria de qualquer trabalhador. Saber calcular o dia da semana em que cai uma data religiosa (Páscoa) que não é fixa no calendário.

Nos dias de hoje, qualquer aparelho celular, por mais simples que seja, possui um aplicativo que possibilita verificar o calendário gregoriano de um ano arbitrário, no passado, ou, no futuro. Logo, uma questão que pode ser colocada é, como isso é possível?

Questões de natureza algorítmica associadas aos diferentes calendários elaborados pelos povos antigos, mecanismos de conversão de datas entre eles e o desenvolvimento de um programa de computador para automatizar a sua geração, também podem ser explorados.

Como se pode ver, a temática relacionada a calendários está presente na história da humanidade, é uma das criações mais antigas do homem ainda em uso, integra o cotidiano de todos nós e faz parte do contexto do jovem estudante, e, nesse sentido, pode ser usado para estimular a curiosidade e explorar a amplitude e diversidade de conceitos subjacentes e provenientes de diferentes disciplinas.

1.1 Educação brasileira frente ao PISA

Em dezembro de 2016 foram divulgados os resultados da última edição do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes, do inglês Programme for International Student Assessment (PISA), que ocorre a cada três anos e teve início no ano 2000. Nesse sentido, tem permitido acompanhar e monitorar ao longo de quase duas décadas, os sistemas educacionais utilizados em diferentes países e alguns territórios que não possuem o status de país. O PISA foi articulado e estruturado desde o seu início pela Organização de Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) e é considerado como um indicador que consegue aferir o nível de qualidade da educação básica em diferentes locais do planeta. A prova é aplicada a estudantes na faixa etária entre 15 e 16 anos, em três áreas do saber: Ciências, Leitura e Matemática, sempre com uma concentração em uma delas. Em 2015 participaram 23 mil alunos brasileiros oriundos de escolas públicas municipais, estaduais e federais, e, também da rede particular e a ênfase recaiu sobre a prova de Ciências. Em outras palavras, a prova busca avaliar, mais especificamente em Ciências e Matemática a capacidade de um aluno de encontrar soluções para problemas reais e situações-problema que ocorrem em seu cotidiano. Enfim, se ele consegue sistematizar e organizar seu raciocínio, entender a formulação do problema, contextualizá-la e aplicar os conceitos e experiências que ele acumulou ao longo de sua escolaridade. Os problemas do tipo onde ele aplica meramente uma fórmula decorada ou um conjunto de operações básicas, não exigindo qualquer abstração, são poucas e estão no nível 1, numa variação que vai do 1 ao 6. Tipicamente, as questões se enquadram em três classes de conhecimento? **elementar**, quando o estudante consegue usar seus saberes para lidar com problemas de seu cotidiano, ou seja, da realidade em que ele vive; **intermediário**, quando há a necessidade do aluno sistematizar, organizar seus pensamentos, ser capaz de elaborar um procedimento científico e extrair relações ao longo do processo; e **elevado**, onde pressupõe alto nível de abstração, de reflexão e generalização, capacidade de formular hipóteses e verificar sua consistência. A maioria dos problemas propostos envolvem várias disciplinas (interdisciplinaridade) e múltiplos conceitos de uma mesma área (transversalidade) e no último exame, também foi avaliado questões relacionadas ao trabalho em equipe, ou seja, a capacidade de cooperação, de síntese e de liderança. Na última edição realizada em 2015, os resultados não foram muito diferentes das edições anteriores. Novamente o desempenho escolar dos estudantes brasileiros, na média, esteve entre os 10 piores dos 70 países e territórios independentes participantes, a maioria integrantes da OCDE e outros convidados. O Brasil, que já esteve entre as cinco e é atualmente a oitava economia do mundo, no PISA de 2015 se posicionou entre os últimos classificados e ocupou as posições 63ª, 59ª e 65ª em Ciências, Leitura e Matemática, respectivamente. O número de pontos obtidos em Ciências, Matemática e Leitura foi 401, 377 e 407, respectivamente, frente à média de 493, 490 e 493 pontos dos países membros da OCDE. Para contrastar com os resultados brasileiros, Singapura, que ocupou a primeira colocação na última edição, obteve um total de 556, 535 e 564 pontos nas mesmas áreas. A gravidade da situação é ainda maior quando se observa que 87,4% dos alunos brasileiros não conseguem atingir o nível 2 da prova de matemática, que é considerado entre o elementar e o básico. Para agravar ainda mais, 82% não atingiram o nível 2 em ciências e 76% em leitura. Isso significa que uma parcela significativa dos alunos não consegue realizar contas de porcentagem, operações sobre juros, conferir o troco na padaria, ler e compreender um texto com informações muitas vezes vitais para sua saúde e de sua família, por exemplo. Diante dessas limitações e demonstração de ausência de conhecimento, os jovens não conseguem exercitar elementos básicos para o pleno exercício de sua cidadania. Para corroborar ainda mais com essa ideia, para o PISA, o nível básico (2) é relativo a "aprendizagem e participação na vida social, econômica e cívica das sociedades modernas num mundo globalizado". Se, em torno de 80% dos alunos não alcançam o nível 2 nas diferentes áreas, como isso é possível? Ao se olhar a posição brasileira nas seis edições do PISA já realizadas sob uma perspectiva histórica, conforme ilustra a Tabela 1.1, o resultado não é muito diferente. Houve algumas pequenas flutuações de posição entre as diferentes edições, mas no geral, o Brasil sempre esteve entre os últimos colocados.

Tabela 1.1: Resultados do Brasil no PISA (2000 - 2015)

Área	**2000**	**2003**	**2006**	**2009**	**2012**	**2015**
Matemática	334	356	370	385	391	377
Leitura	396	403	393	412	410	407
Ciências	375	390	390	405	405	401
Média geral	368	383	384	401	402	395
Enfoque disciplinar	Leitura	Matem.	Ciências	Leitura	Matem.	Ciências
Países participantes	32	41	57	61	65	70
Colocação brasileira	32º	40º	52º	50º	57º	63º
Total de inscritos	265.000	250.000	513.000	470.000	510.000	540.000
Alunos brasileiros	4.893	4.452	9.295	20.127	18.589	23.141
Escolas participantes	250	229	633	950	837	841
Primeiro lugar	Finlândia	Finlândia	Finlândia	Xangai	Xangai	Singapura

Fonte: retirada de www.oecd.org/pisa.

É interessante observar que o nível e a capacidade de leitura estão relacionados com o rendimento nas áreas de Ciências e Matemática, na medida em que, se o aluno não consegue interpretar, compreender e analisar um texto, ele não consegue organizar seu raciocínio, tomar atitudes corretamente e dar continuidade a sua aprendizagem com outras inferências num processo que o capacita a encontrar a solução de um problema específico.

Por outro lado, é importante destacar que os resultados internacionais não trazem nada de novo, já que na avaliação nacional, dados semelhantes já tinham sido observados por meio do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB), do Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb), do Ministério da Educação (MEC), pouco antes da divulgação dos resultados do PISA-2015.

Se por um lado, a educação brasileira evolui muito em relação à universalização do acesso das crianças no Ensino Fundamental (1º ao 9º ano) e consegue manter um contingente da ordem de 70% dos estudantes na escola na mesma idade em que o PISA é aplicado, essa mesma escola não consegue motivar e despertar nos jovens a necessidade pelo ato de estudar. Na disciplina de matemática, em particular, os estudantes não reconhecem a sua importância, já que não conseguem fazer uma relação entre os conceitos vistos em sala de aula com situações reais do cotidiano de suas vidas.

O propósito de olhar e destacar a avaliação realizada pelo PISA no contexto dessa dissertação é mostrar que algo não vai bem com relação ao sistema de educação adotado no País. Os dados internacionais e alguns nacionais (IDEB, SARESP, ENEM), indicam que é preciso mudar e transformar profundamente a escola e a educação brasileira.

Desde que a avaliação do PISA iniciou-se em 2002, houve 06 edições e se passaram 15 anos. Em linhas gerais, o Brasil sempre esteve entre os piores e até agora, pouco foi feito para se alterar essa situação, pois o fato de nos últimos anos o investimento em educação ter aumentado, não veio acompanhado de melhorias no nível de aprendizado dos alunos, conforme demonstra os indicadores nacionais IDEB, Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP), Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e internacionais (PISA).

É claro que os problemas vivenciados pela educação brasileira na atualidade são muitos e estão longe de serem simples. Não é o intuito desse trabalho, discutir essas questões, mas tentar reverter as dificuldades de aprendizagem dos alunos na disciplina de matemática, mostrar e realçar que o ensino da matemática e os conteúdos podem ser mais atrativos, que a matemática caminha junto do ser humano desde as civilizações mais antigas. Além disso, está ao lado dos principais avanços tecnológicos alcançados pelo ser humano em diferentes áreas do conhecimento. Pensar e desenvolver atividades colaborativas e interdisciplinares, que inclusive são focadas em avaliações como as do PISA. Nesse sentido, a temática de calendários usada nessa dissertação tenta oportunizar o desenvolvimento de atividades que exploram conteúdos matemáticos de uma forma contextualizada e multidisciplinar.

1.2 Objetivos

O propósito deste trabalho é abordar os principais calendários solares desenvolvidos ao longo da civilização humana, incluindo seus mecanismos de construção baseados inicialmente em observações astronômicas, até chegar ao calendário atual em que os movimentos de translação e de rotação do planeta Terra em relação ao Sol passam a ser substituídos por relógios atômicos.

Uma ênfase será dada ao calendário gregoriano, que é o mais usado atualmente.

Nesse sentido, algumas atividades didáticas são propostas para os estudantes do ensino fundamental e médio visando despertar, motivar e estimular o interesse dos mesmos pelo estudo de conceitos matemáticos envolvidos com a construção de um calendário, que está intrinsecamente presente no contexto de nossas vidas.

Adicionalmente, por meio do assunto calendários, chamar a atenção dos alunos que a matemática está presente no cotidiano da vida de todas as pessoas, desde as civilizações mais antigas. Não é uma criação do acaso, construída para dificultar a vida dos estudantes, mas necessária para auxiliar na resolução de problemas complexos de várias áreas do conhecimento, incluindo a Física, Economia, Engenharias, Medicina, Astronomia, Direito, para citar apenas algumas delas.

Em particular, os conceitos matemáticos que são tratados nesse trabalho, estão associados a fenômenos que se repetem num dado intervalo de tempo, conhecidos como cíclicos ou periódicos. Embora, muitos desses fenômenos sejam modelados pela matemática do contínuo, o interesse aqui é tratar apenas daqueles que a matemática discreta consegue resolver. Nesse sentido, diferentes sequências didáticas são propostas envolvendo noções de divisibilidade e de congruência. Considerando ainda que o movimento de translação de um planeta em torno do Sol é elíptica, o conceito de cônicas também é abordado nesta dissertação.

1.3 Organização do trabalho

De modo a explorar a temática proposta da forma mais compreensível possível e contextualizá-la conjuntamente com os documentos oficiais que regem a edução brasileira, essa dissertação está sistematizada em 6 capítulos e 4 apêndices.

O Capítulo 2 apresenta os elementos necessários que permitem caracterizar a noção de dia, estações do ano, ano solar, ano sideral e tempo, para na sequência discorrer sobre os calendários criados e usados por diferentes civilizações. Também destaca os ciclos primários: a rotação da Terra em torno de si própria que geram os dias (a alternância cíclica da luz solar e da escuridão da noite), as revoluções da Lua à volta da Terra definem os meses e as translações da Terra em volta do Sol desenvolvem os anos. Além disso, os fatores que influenciam nestes ciclos e no tempo como: a nutação, a precessão, os eclipses e as marés.

No Capítulo 3 é destacada o papel da astronomia e a relevância do trabalho realizado por astrônomos e matemáticos da Grécia antiga, desde as descobertas dos movimentos dos planetas (devido ao movimento de translação), as teorias do geocentrismo e do heliocentrismo e como essas ideias foram decisivas e influenciaram grandes pensadores a partir do século XII, como Copérnico, Galileu, Kepler e Newton.

Por sua vez, o Capítulo 4 explora as noções matemáticas que permitem modelar com precisão a construção de um calendário. Aqui são apresentados com um certo nível de formalismo os conceitos de divisibilidade, divisão euclidiana, sistema de numeração, congruências e cônicas.

Na sequência, o Capítulo 5 aborda os documentos oficiais que tratam da educação básica brasileira, da importância em se explorar temas interdisciplinares e propõe uma série de atividades didáticas para serem aplicadas em Sala de Aula, tanto ao ensino fundamental como ao ensino médio, envolvendo conceitos matemáticos associados a construção de um calendário. Em síntese, pretende-se que ao usar a noção de calendários e relacioná-los a matemática que é ensinada nas escolas, isso desperte o interesse dos alunos e torne um facilitador da aprendizagem de importantes conceitos.

Por fim, o Capítulo 6 apresenta algumas conclusões e trabalhos futuros que poderão ser complementados e desenvolvidos a partir deste trabalho e seus possíveis impactos no ensino fundamental e médio.

2 Astronomia e calendário

Todos os calendários são de origem astronômica, pois se baseiam nos movimentos aparentes dos dois astros mais brilhantes do sistema solar, o Sol e a Lua, variando somente seu grau de exatidão matemática. O calendário é um sistema de ordenamento do tempo com propósitos de organizar a vida civil, das obrigações religiosas e marcação de eventos científicos. Possui unidades de dias, meses e anos, além das semanas. A natureza desenvolve três ciclos primários que deram origem as unidades de tempo: a rotação da Terra em torno de seu próprio eixo que gera os dias, as revoluções da Lua à volta da Terra deu origem aos meses e as revoluções da Terra em volta do Sol que desenvolvem os anos. O dia, cuja percepção originou-se do contraste entre a luz solar e a escuridão da noite, é o elemento mais antigo e fundamental do calendário. A observação da periodicidade das fases lunares fez surgir a ideia de mês. A repetição alternada das estações, que variavam de acordo com os climas, deu origem ao conceito de ano.

O ano é o período de tempo necessário para que a Terra complete uma órbita elíptica com o Sol em um dos focos, que demora um período de aproximadamente 365 dias e seis horas. Esse número fracionário exige que se intercalem dias periodicamente, a fim de fazer com que os calendários coincidam com as estações. Ainda, os anos se agrupam em décadas e séculos, e séculos se agrupam em milênios. Toda composição do calendário e a origem de cada elemento será explicada mais detalhadamente a seguir.

2.1 Movimento da Terra e a influência no tempo

O ser humano estabeleceu a duração do movimento de rotação da Terra quando notou a alternância cíclica da luz solar e da escuridão da noite. Fato de grande importância, pois na linguagem moderna o chamado dia, tempo que vai entre duas passagens do Sol pelo mesmo meridiano, é a divisão do tempo mais antiga, de cerca de 8000 a.C.. Portanto, inicialmente o dia era o espaço de tempo compreendido entre dois nascimentos, ou ocasos, consecutivos do Sol, o que o tornava numa medida de tempo de grande irregularidade (LOPES, 2012).

Conforme Milone et. al (2003), as civilizações antigas elaboraram diversas explicações míticas para o movimento do Sol no céu durante o dia, assim como seu reaparecimento após a escuridão da noite. Por exemplo, os antigos babilônios acreditavam no deslocamento noturno do Sol por debaixo do solo que era a morada dos mortos. Os antigos egípcios (3200 a.C.) acreditavam que o transporte do Sol no céu (corpo da deusa Nut) era feito por um barco que durante a noite percorria um rio subterrâneo; e na Grécia clássica (600 a.C.), muitos afirmavam que a Terra era imóvel de modo que o Sol, deus Helius, percorria o céu numa grande carruagem.

A medida do tempo está ligada diretamente ao movimento da Terra. Este movimento é decomposto em vários outros, dos quais são conhecidos cerca de catorze até hoje, porém serão estudados neste trabalho os principais a influenciarem a passagem do tempo, que são: a rotação em torno do eixo da Terra, a translação em torno do Sol, a precessão e a nutação.

2.1.1 Rotação e translação

O movimento de rotação da Terra se dá em torno de um eixo imaginário da Terra, o qual liga os polos norte e sul geográficos. Entre suas consequências, tem-se a alternância do dia e da noite, o movimento aparente do Sol durante o dia, o movimento aparente das estrelas e a variação da obliquidade dos raios solares num mesmo lugar, ao longo do dia. A velocidade média do movimento rotação é de cerca de 1 674 km/h.

O Sol e os planetas do sistema solar rotacionam, o Sol gira em torno de seu próprio eixo em sentido horário, chamado prógrado. A maioria dos planetas coincidem o sentido de rotação com o do Sol, apenas Vênus e Urano rotacionam em sentido contrário, ou seja, a rotação desses corpos é anti-horária ou retrógrada. Outra característica do sistema solar é que as órbitas dos planetas são praticamente coplanares (DAMINELI NETO, 2011). A Figura 2.1 mostra os principais planetas com suas respectivas inclinações com relação ao eixo de rotação (em graus).

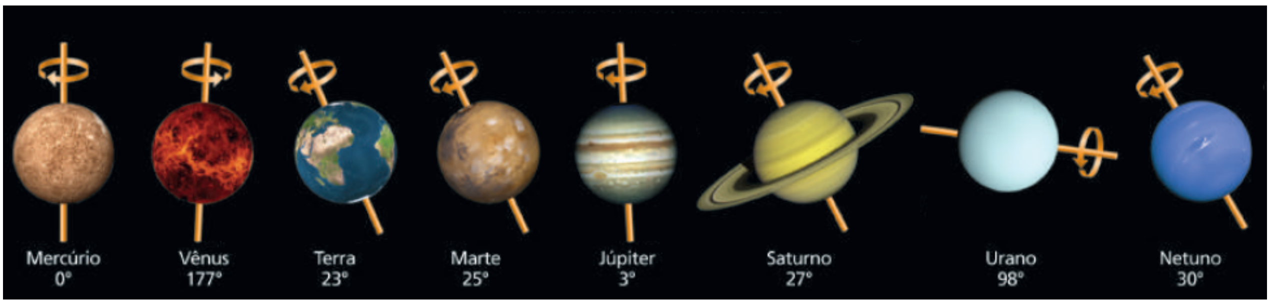


Figura 2.1: Principais planetas e as inclinações de seus eixos de rotação.
Fonte: retirado de São Paulo (2014 - 2017*a*).

Em relação a um referencial no Sol, os planetas se movimentam (transladam) descrevendo órbitas elípticas, estes giram em torno do Sol no mesmo sentido que o Sol rotaciona, ou seja, o sentido de rotação do Sol é igual ao da translação dos planetas.

A Figura 2.2 ilustra a órbita da Terra, onde o Sol ocupa um dos focos desta elipse[1]. O ponto da órbita mais próximo (147 000 000 km) do Sol é denominado *periélio* e o ponto mais afastado (152 000 000 km) do Sol é o *afélio* (DOCA et. al, 2013; MILONE et. al 2003).

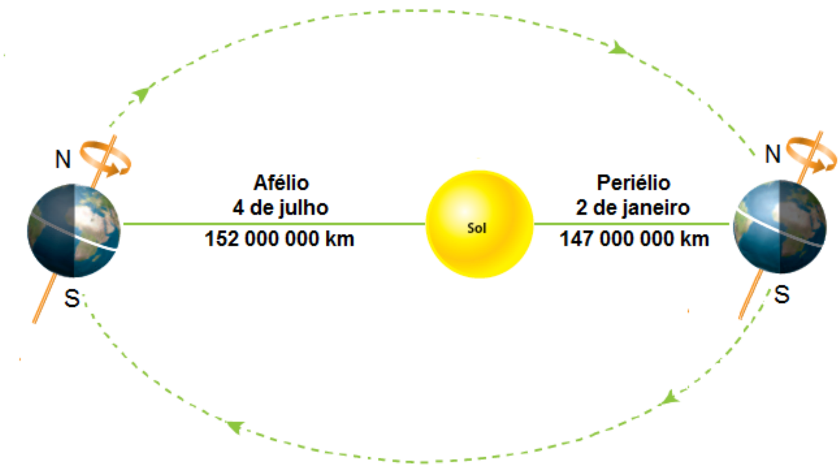


Figura 2.2: Pontos de afélio e periélio.

Fonte: adaptado de São Paulo (2014 - 2017a).

O movimento de translação é o tempo que a Terra leva para dar uma volta completa em torno do Sol. Este movimento ocorre no mesmo sentido da sua rotação (de oeste para leste). A translação da Terra pode ser chamada de movimento orbital e sua velocidade média é de cerca de 107 000 km/h. Ainda, o sentido de translação dos planetas é o mesmo de rotação do Sol (MILONE et. al, 2003).

De acordo com Kepler e Saraiva (2012), o "movimento aparente do Sol" ocorre devido ao movimento de translação da Terra em torno do Sol. O Sol aparentemente se move entre as estrelas, ao longo do ano, descrevendo uma trajetória na esfera celeste denominada "eclíptica". A eclíptica é um círculo máximo que tem uma inclinação de aproximadamente 23,5° em relação ao equador celeste, ou 66,5° em relação ao eixo de rotação da Terra, o que pode ser notado na Figura 2.3. É essa inclinação que causa as estações do ano.

[1] As elipses serão estudadas no Capítulo 4 deste trabalho.

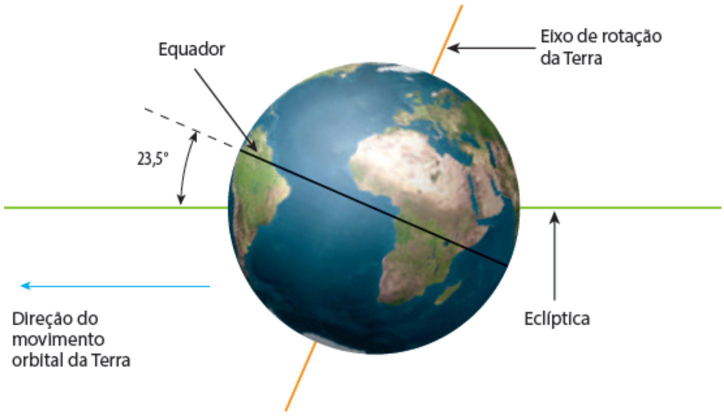


Figura 2.3: Ângulo formado entre o equador e a eclíptica.

Fonte: retirado de São Paulo (2014 - 2017*a*).

A Tabela 2.1 apresenta a distância média de cada planeta com relação ao Sol, o período de translação e rotação em relação à órbita que descrevem em torno do Sol.

Tabela 2.1: Inclinação do eixo de rotação dos principais planetas do sistema solar.

Planetas	**Distância média ao Sol (10^6 km - milhões de km)**	**Período de translação (d = dias, a = anos)**	**Período de Rotação (d = dias, h = horas, m = minutos)**	**Inclinação da órbita à eclíptica**
Mercúrio	57,9	87,9d	58,6d	7°
Vênus	108,2	224,7d	-243,0d	3,4°
Terra	149,6	365,25d	23h56m	0°
Marte	227,9	686,98d	24h37m	1,9°
Júpiter	778,4	11,86a	9h48m	1,3°
Saturno	1 423,6	29,46a	10h12m	2,5°
Urano	2 867,0	84,04a	-17h54m	0,8°
Netuno	4 488,4	164,8a	19h6m	1,8°

Fonte: retirada de São Paulo (2014 - 2017*a*).

2.1.2 Precessão

Segundo Barreto (2010) ao observar o giro de um pião num plano horizontal, nota-se que além de girar em torno de si mesmo (rotação), o pião também realiza outro movimento que aparenta um “cambalear” do eixo de rotação. Este movimento é conhecido como “precessão”. A precessão no pião ocorre devido à força de atração gravitacional que a Terra exerce sobre ele, ou seja, o peso desse pião. Observando este tipo de movimento, Isaac Newton (1642 - 1727) relacionou a Terra a um enorme pião girando em torno do seu eixo, pois a força gravitacional do Sol sobre a Terra provoca o movimento de precessão. Também calculou o movimento de precessão terrestre e, assim, notou que o eixo da Terra descreve uma superfície cônica no espaço a cada 25 800 anos aproximadamente. Na proposição XXXIX do Livro III *“Principia”* mostra que a marcha anual do movimento de precessão é de cerca de 50” por ano, ou seja, cerca de 1° a cada 72 anos.

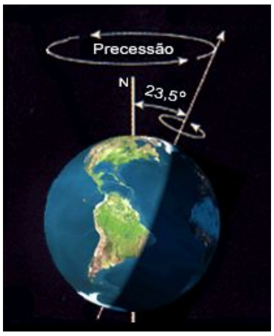


Figura 2.4: Movimento de precessão.
Fonte: retirado de http://astronomia-para-amadores.blogspot.com.br[2] (Acesso em 05/01/2017).

É devido ao movimento de precessão que o eixo (os pólos) da Terra aponta para direções diferentes com o passar do tempo, o que pode-se observar na Figura 2.4. A precessão é a causa da leve discrepância entre a duração do ano trópico e a duração do ano sideral. E ainda ocorre uma mudança no ponto da órbita em que a Terra se encontra quando acontece uma determinada estação, o que causa a mudança das estrela visíveis durante a noite nesta estação do ano, pois a posição do Sol entre as estrelas muda com o passar dos séculos. Por exemplo, no hemisfério sul é verão quando a Terra está no periélio e é inverno quando a Terra está no afélio, porém daqui a aproximadamente 13 000 anos a situação se reverte e, possivelmente, as estações ficarão mais atenuadas no hemisfério sul e mais acentuadas no hemisfério norte (KEPLER e SARAIVA, 2014).

2.1.3 Nutação

A nutação é uma oscilação periódica do eixo de rotação da Terra, pois, assim como o movimento de precessão, é causada pela interação gravitacional entre o Sol, a Lua e a Terra, em função desta última não ser uma esfera perfeita. Esse movimento períodico dos polos celestes tem uma aplitude de 9,2025” e período de 18,613 anos. Essas características da nutação faz o ângulo de inclinação do eixo da Terra oscilar em torno de um valor médio. A nutação é causada por uma inclinação de 5,1° do plano da órbita da Lua em relação à eclíptica pela qual a precessão é durante cerca de nove anos de maior intensidade e durante cerca de outros nove anos de menor intensidade do que na média (PIMENTA, 2004; JUNIOR, 2012).

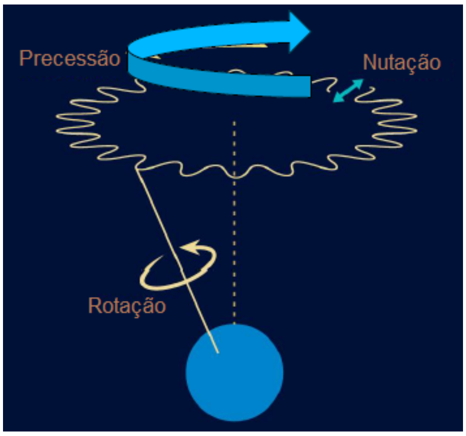


Figura 2.5: Movimento de nutação.
Fonte: adaptado de Milone et. al (2003).

2.1.4 Dia solar e sideral

A primeira definição de dia veio da observação do Sol, que corresponde ao dia solar. O dia solar é o intervalo de tempo decorrido entre duas passagens consecutivas do Sol pelo meridiano do mesmo lugar.

Segundo Junior (2012) e Rodrigues (2000), o dia solar verdadeiro é o intervalo de tempo que decorre entre duas passagens superiores consecutivas do centro do Sol pelo meridiano de um mesmo lugar. Varia entre 23 horas, 59 minutos e 39 segundos no mês de setembro, e 24 horas, 00 minutos e 30 segundos no mês de dezembro. Esta variação ocorre devido ao movimento anual aparente do Sol ser realizado no plano da eclíptica e não apresentar velocidade constante, de acordo com a lei das áreas de Kepler[3]. Hoje se usa o dia solar médio que é a média anual das durações do dia solar verdadeiro, a qual foi atribuída o valor de 24 horas e que marca o ritmo dos relógios. É a duração do dia civil.

Por outro lado, o dia sideral é o intervalo de tempo decorrido entre duas passagens consecutivas do ponto vernal pelo meridiano do mesmo lugar, ao qual corresponde a uma rotação terrestre com aproximadamente 23 horas, 56 minutos e 4,09 segundos. O ponto vernal, como pode ser visto na Figura 2.10, é um ponto do equador, ocupado pelo Sol quando passa do hemisfério sul celeste para o hemisfério norte celeste, definindo o equinócio de primavera do hemisfério norte (mais ou menos em 21 de março), isto é, em uma das duas intersecções do equador celeste com a eclíptica (KEPLER e SARAIVA, 2014).

O dia solar é 3 minutos e 56 segundos mais longo do que o dia sideral. Essa diferença ocorre devido a Terra realizar o movimento de rotação ao mesmo tempo que translada em torno do Sol no mesmo sentido e com uma velocidade angular de 0,986° por dia (360° dividido por 365 dias) e o ponto de referência do dia sideral (ponto vernal) ser

[3]As leis de Kepler serão estudadas no Capítulo 3.

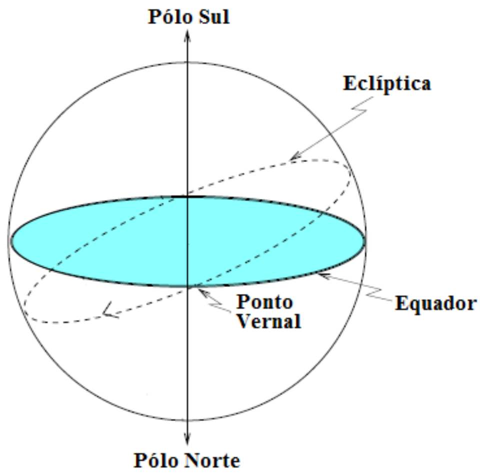


Figura 2.6: Localização do ponto vernal.

Fonte: adaptado de Kepler e Saraiva (2014).

diferente do dia solar (Sol). Por exemplo, observando a Figura 2.7, nota-se que em um certo lugar na Terra que ocorre o meio-dia solar e sideral ao mesmo tempo para que o mesmo lugar tem aproximadamente 1° de diferença entre o meio-dia solar e sideral do outro dia, ou seja, neste lugar é meio dia sideral é aproximadamente 4 minutos antes de chegar ao meio-dia solar.

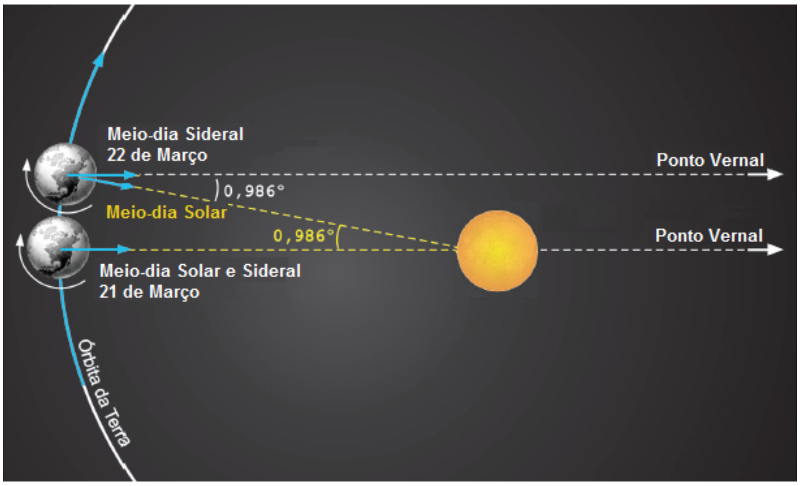


Figura 2.7: Comparação entre dia solar e dia sideral.

Fonte: adaptado de Kepler e Saraiva (2014).

2.1.5 Dia lunar

A Lua se move aproximadamente 13° (360° dividido por 27,3 dias) para leste, por dia, em relação às estrelas. Esse movimento é um reflexo da revolução da Lua em torno da Terra, que se completa a cada 27,32166 dias (mês sideral). Mas o Sol também se move aproximadamente 1° por dia para leste, refletindo a translação da Terra em torno do Sol, completada em 365,2564 dias (ano sideral). Portanto, a Lua se move aproximadamente 12° por dia, para leste, em relação ao Sol. Devido a isto, a cada dia a Lua cruza o meridiano local aproximadamente 50 minutos mais tarde do que no dia anterior. Portanto, o dia lunar tem aproximadamente 24 horas e 50 minutos (KEPLER e SARAIVA, 2014).

2.1.6 A influência das marés

As marés são consideradas a principal causa das variações seculares na velocidade de rotação da Terra, assim Pimenta (2004, p. 13) faz uma constatação importante:

> A palavra maré é um termo genericamente usado para definir a variação do nível do mar em relação à costa produzida pela atração gravitacional da Lua e do Sol. Numa escala bem menor, marés também ocorrem em grandes lagos, na atmosfera e dentro da crosta sólida da Terra. Fatores não-astronômicos adicionais, tais como a configuração da linha de costa, profundidade das águas, topografia do leito dos oceanos e outras influências hidrográficas e meteorológicas, podem ter um importante papel no intervalo entre as marés alta e baixa.

Os principais fatores responsáveis pela ocorrência do fenômeno das marés são: a conjugação da atração gravitacional do sistema Terra-Lua-Sol e a rotação da Terra em torno de seu eixo, os quais levam as águas do mar atingirem limites máximos e mínimos com determinada regularidade (SÃO PAULO, 2014 - 2017*c*).

As marés constituem um fenômeno resultante da atração gravitacional exercida pela Lua sobre a Terra e, em menor escala, da atração gravitacional exercida pelo Sol sobre a Terra. Conforme Milone et. al (2003) e Pimenta (2004), por a Lua estar cerca de 400 vezes mais próxima da Terra do que o Sol, seu efeito de maré sobre a Terra é aproximadamente o dobro do efeito de maré devido ao Sol, mesmo que esse tenha 27 milhões de vezes mais massa do que a Lua. A porcentagem de contribuição das marés lunares e solares é de $83,8\%$ e $16,2\%$, respectivamente.

A ideia básica da maré provocada pela Lua é que a atração gravitacional sentida por cada ponto da Terra devido à Lua depende da distância do ponto à Lua. Por isto, a atração gravitacional sentida no lado da Terra que está mais próximo da Lua é maior do que a sentida no centro da Terra, e a atração gravitacional sentida no lado da Terra que está mais distante da Lua é menor do que a sentida no centro da Terra. Portanto, em relação ao centro da Terra, um lado está sendo puxado na direção da Lua, e o outro lado está sendo puxado na direção contrária. Como a água flui muito facilmente, ela se "empilha" nos dois lados da Terra, que forma um bojo de água na direção da Lua e outro na direção contrária, tem-se este fato representado na Figura 2.8.

Enquanto a Terra desenvolve seu movimento de rotação, o bojo de água continua apontando na direção da Lua. Em um certo momento, um certo ponto da Terra estará embaixo da Lua e terá maré alta. Seis horas mais tarde, a rotação da Terra terá levado

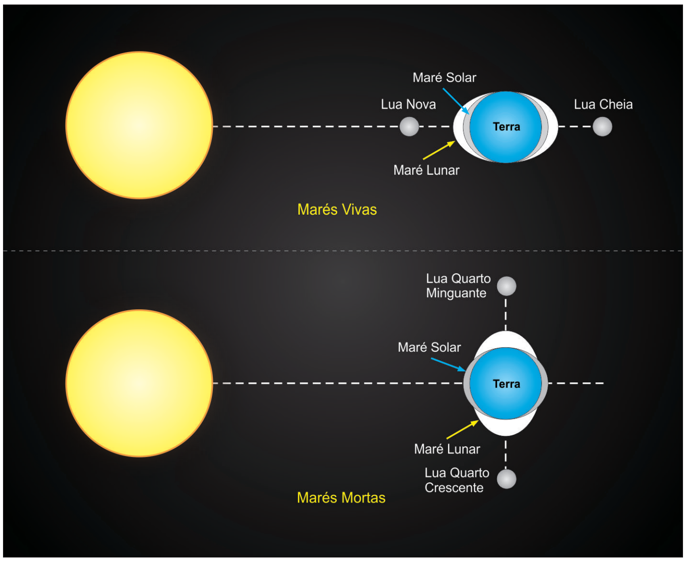


Figura 2.8: Sistema Terra-Lua-Sol e as marés.

Fonte: retirada de Kepler e Saraiva (2014).

esse ponto a 90° da Lua e ele terá maré baixa. Após mais seis horas, o mesmo ponto estará a 180° da Lua e terá maré alta novamente. Portanto, as marés acontecem duas vezes a cada 24 horas e 50 minutos (duração do dia lunar). Em alguns pontos as marés chegam a atingir a altura máxima de 10 m. A composição vetorial das forças que agem no sistema Sol-Terra-Lua, nas condições de Lua cheia ou Lua nova, no momento de produção das marés é o que provoca as marés mais altas e as marés mais baixas (o Sol e a Lua estão alinhados com a Terra), são chamadas marés de sizígia ou marés vivas. Na Lua crescente ou minguante os efeitos da maré são atenuados (o Sol, a Terra e a Lua estão em quadratura, ver Firura 2.8), chamadas marés de quadratura ou marés mortas (KEPLER e SARAIVA, 2012; HOVARTH, 2008).

De acordo com Pimenta (2004), os oceanos não estão completamente fixos no planeta devido à sua fluidez, havendo , assim, uma interface entre o fundo das águas e a Terra. Esta tentando se mover em um sentido enquanto o oceano é mantido em outro. Surge nesta interface uma força de atrito como em qualquer fenômeno de fricção entre dois corpos. Os atritos de maré em águas rasas, por milhões de anos, têm controlado a evolução do sistema Terra-Lua, sendo esta a causa do aumento do dia e do afastamento da Lua em relação à Terra. Atualmente o comprimento do dia está aumentando em aproximadamente 2,2 ms por século e a Lua está se afastando da Terra a uma taxa de 4 cm por ano. O comprimento do dia aumentará até que a Terra e a Lua tenham o período de rotação e translação iguais, ou seja, elas terão sempre a mesma face voltada uma para a outra.

2.1.7 Eclipses

É na eclíptica que a Lua se situa na ocasião de um eclipse, ocorrendo o eclipse lunar quando a Lua entra na sombra da Terra. Por sua vez, o eclipse solar ocorre quando a Terra é atingida pela sombra da Lua.

Para Kepler e Saraiva (2014) é devido ao Sol ser uma fonte luminosa extensa, que tanto a Lua como a Terra são iluminados projetando suas sombras no espaço e durante um eclipse geram duas regiões de sombra: a umbra e a penumbra. A umbra é a região da sombra que não recebe luz de nenhum ponto do Sol e a penumbra é a região da sombra que recebe luz de alguns pontos do Sol. A Figura 2.9 ilustra as regiões de sombra (umbra e penumbra) em um eclipse total do Sol.

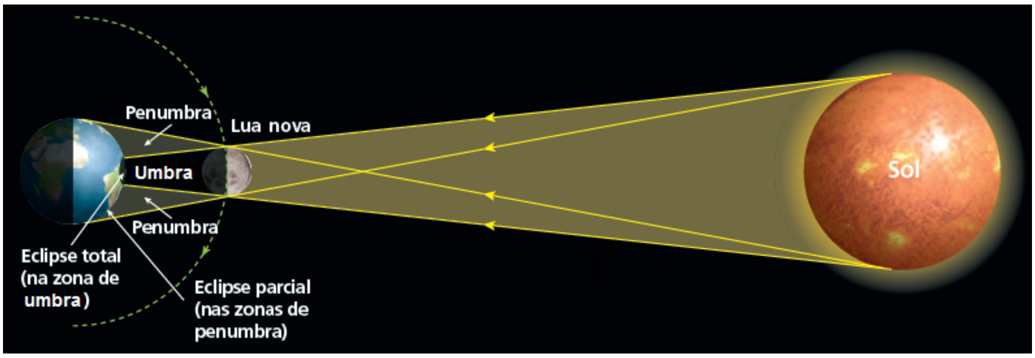


Figura 2.9: Região de umbra e penumbra num eclipse solar.

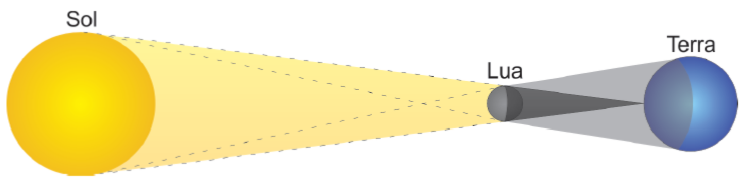
Fonte: retirado de São Paulo (2014-2017*a*).

Os eclipses lunares ocorrem somente durante a Lua cheia, podendo apenas ser observados do hemisfério da Terra onde é noite. Existem três tipos de eclipse lunar: o total, o parcial e o penumbral. O eclipse lunar total ocorre quando a Lua esta totalmente obscurecida pela umbra, o parcial quando somente parte da Lua é obscurecida por esse cone e o penumbral quando a Lua percorre apenas a zona da penumbra terrestre. Na ocasião de um eclipse total ou parcial, a Lua percorre a região de penumbra antes e depois de atravessar o cone umbral da Terra. A Figura 2.10(a) ilustra um diagrama de um eclipse da Lua (MILONE et. al, 2003).

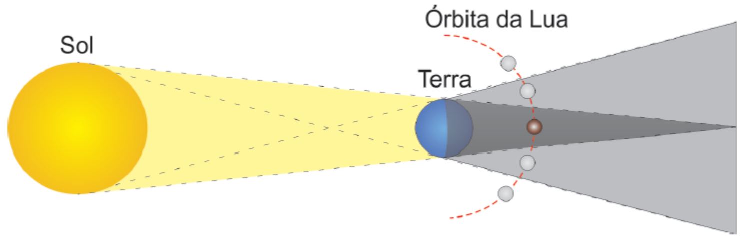
Os eclipses solares ocorrem durante a Lua nova, quando a Lua se localiza entre o Sol e a Terra, assim sua sombra é projetada na superfície terrestre. Esses eclípses podem ser parciais ou totais. O eclipse solar total ocorre quando a Lua projeta sobre a superfície terrestre tanto a região de umbra lunar quanto a de penumbra. Da região da superfície da Terra por onde a umbra da Lua passa, o eclipse é observado como total. Das regiões da Terra por onde apenas a penumbra lunar passa, avista-se um eclipse solar parcial. A Figura 2.10(b) ilustra um diagrama de um eclipse do Sol.

O eclipse solar parcial acontece quando o Sol está parcialmente coberto pelo disco lunar, assim há projeção somente da zona de penumbra sobre a Terra. Um tipo especial de eclipse solar parcial é o anular, ocorrendo quando o Sol, a Lua e a Terra estão alinhados, mas devido a uma separação relativamente maior da Lua à Terra, o Sol não é totalmente coberto pela Lua restando apenas um anel visível do disco solar. O eclipse solar anular é observado apenas da região da superfície da Terra que está exatamente naquele alinhamento Sol-Lua-Terra.

O disco lunar aparenta maior no momento em que a Lua está mais próxima da Terra, chamado de perigeu, e parece menor no momento em que está mais longe, chamado de apogeu. O mesmo ocorre com o disco solar, quando nosso planeta está no periélio ou no afélio (DAMINELI NETO, 2011).



(a) Eclipse lunar.



(b) Eclipse solar.

Figura 2.10: Tipos de eclipses.

Fonte: retirado de Kepler e Saraiva (2014).

Se o plano da eclíptica fosse coincidente com o plano da órbita da Lua, então ocorreria um eclipse lunar a cada Lua cheia e um eclipse solar a cada Lua nova. Porém o plano que contém a órbita da Lua ao redor da Terra é cerca de 5° inclinado em relação ao plano da eclíptica. Esta diferença que não permite que ocorram eclipses todos os meses, pois os pontos de interseções entre as duas órbitas são chamados de nodos, e a linha que une os dois nodos é denominada linha dos nodos. Para acontecer um eclipse, a Lua, precisa estar na fase nova ou cheia, e também estar no plano da eclíptica, ou seja, precisa estar em um dos nodos ou muito próxima dele. Como o sistema Terra-Lua orbita o Sol, então cerca de duas vezes por ano a linha dos nodos está alinhada com o Sol e a Terra. Estes são os períodos que os eclipses podem ocorrer (IACHEL, 2008; HORVATH, 2008; KEPLER e SARAIVA, 2014).

A Figura 2.11 representa a Lua em fases cheia e nova em quatro lunações diferentes. Nas lunações, da fase cheia ou nova em que a Lua está na eclíptica, tem-se o alinhamento Sol-Lua-Terra, então os eclipses ocorrem. Nas lunações da fases cheia ou nova em que a Lua está afastada da eclíptica os eclipses não ocorrem.

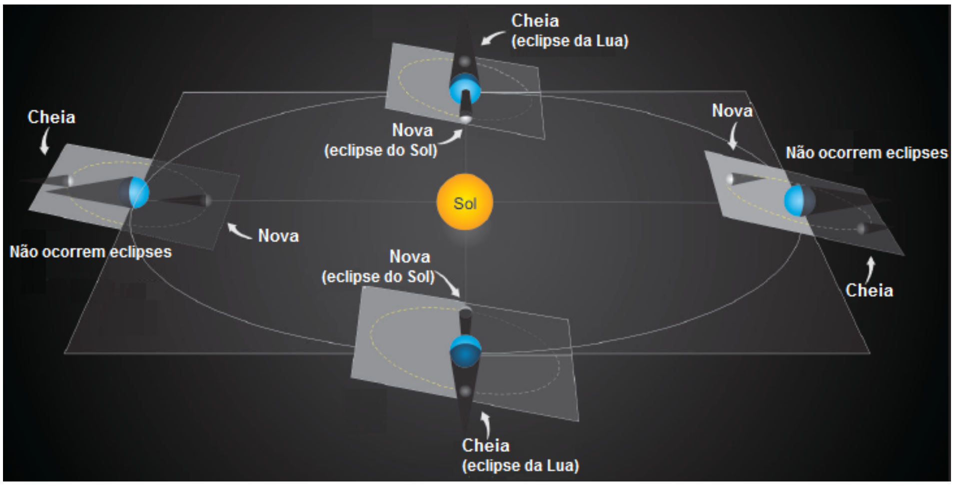


Figura 2.11: A Lua em fases cheia e nova em quatro lunações diferentes.

Fonte: adaptado de Kepler e Saraiva (2014).

Conforme Pimenta (2004) e Rodrigues (2000) foi possível confirmar que o tempo para a Terra completar uma rotação está aumentando cerca de 2,2 ms a cada século comparando registros de observações de eclipses do Sol e da Lua feitas por povos antigos como chineses, árabes, gregos e babilônios, com eclipses calculados quando se utiliza uma taxa de rotação constante. A partir destas observações também foi possível concluir que uma expansão da órbita da Lua ocorre lentamente. E ainda levaram os babilônios (300 a.C.) a descobrir o "ciclo de Saros", relação a qual se repetem tanto os eclipses solares como os lunares.

O ciclo de Saros tem duração de cerca de 18 anos e 11 dias e foi determinado pela periodicidade dos eclipses conforme uma certa ordem e sucessão. Neste período de tempo, Sol, Lua e Terra retornam as mesmas posições relativas, e a sequência de eclipses lunares e solares se repete, mas não na mesma hora e no mesmo lugar. Um eclipse em um ciclo ocorre cerca de 8 horas mais tarde e 120° de longitude mais a oeste do que no ciclo anterior (RODRIGUES, 2000; KEPLER e SARAIVA, 2014).

2.2 Semana

A semana, em latim *septimana* (significa sete manhãs), está ligada à duração das fases da Lua. Com origem no ciclo lunar, uma vez que são necessários aproximadamente sete dias para a Lua ir de uma fase à outra. Os babilônios talvez tenham sido os primeiros a utilizá-las. Foi adotada pelos romanos e outros povos europeus influenciados por estes. Tornou-se importante a partir do século III d.C., pois durante o Concílio de Nicéia (325 d.C.) que a semana foi fixada oficialmente com duração de sete dias (DONATO, 1993; LOPES, 2012).

Segundo Milone et. al (2003) as nomeações dos dias da semana em várias línguas modernas (espanhol, francês, inglês e alemão) originaram-se dos nomes em latim dedicados aos cinco planetas que conheciam, acrescidos do Sol e da Lua (*Martis*, *Mercurie*, *Jovis*, *Veneris*, *Saturni*, *Solis* e *Lunae*), como pode ser visto na Tabela 2.2. A língua portuguesa não seguiu essa denominação para os dias da semana, pois sofreu influência do cristianismo, assim como outros povos latinos. Originalmente as comemorações da Páscoa Cristã tinham duração de uma semana de orações. Os dias da Páscoa eram chamados *feriaes* em latim, significando feriados. O domingo era nomeado por *feria-prima*, a segunda-feira era *feria-secunda*, *feria-tertia*, *feria-quarta*, *feria-quinta*, *feria-sexta* e o sábado vem do vocábulo latino *shabbath*, que correspondia ao dia de descanso dos hebreus. A denominação domingo usada pelos povos latinos origina-se da substituição de *feria-prima* (ou *dies Solis*) por *dominica* imposta pelo imperador Flávio Constantino (Roma antiga, 280 - 337 d.C.), a qual significa dia do Senhor, a partir da sua conversão ao cristianismo.

Tabela 2.2: Semana em várias línguas.

Latim	**Italiano**	**Francês**	**Espanhol**	**Português**
Dies Dominica (Dia do Senhor)	Domenica	Dimanche	Domingo	Domingo
Lunae dies (Dia da Lua)	Lunedi	Lundi	Lunes	Segunda-feira
Martis dies (Dia de Marte)	Martedi	Mardi	Martes	Terça-feira
Mercurii dies (Dia de Mercurio)	Mercoledi	Mercredi	Miércoles	Quarta-feira
Jovis dies (Dia de Júpiter)	Giovedi	Jeudi	Jueves	Quinta-feira
Veneris dies (Dia de Vênus)	Venerdi	Vendredi	Viernes	Sexta-feira
Saturni dies (Dia de Saturno)	Sabbato	Samedi	Sábado	Sábado

Fonte: retirada de Donato (1993).

2.3 Mês

O mês, assim como a semana, teve sua origem a partir da observação do aspecto da Lua que varia ciclicamente. A Lua apresenta um movimento sincrônico, ou seja, mesmo período para rotação em torno de seu eixo e para sua translação em torno da Terra, pois à medida que a Lua orbita em torno da Terra, completando seu ciclo de fases, ela mantém sempre a mesma face voltada para a Terra. Portanto, visualmente é muito mais fácil acompanhar as fases da Lua (nova, crescente, cheia e minguante), representadas na Figura 2.12. O conceito de mês surgiu destas observações astronômicas, portanto a lunação (mês sinódico ou período sinódico da Lua) é definida como o período de duas luas novas consecutivas que dura cerca de 29,53059 dias. Várias sociedades antigas utilizaram e algumas ainda hoje adotam o ano lunar, que possui doze meses lunares, ou seja, cerca de 354,36708 dias (MILONE et. al, 2003; JUNIOR, 2012).

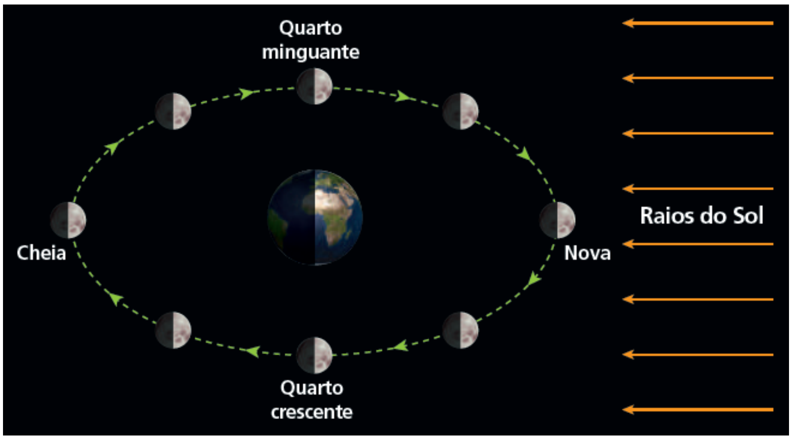


Figura 2.12: Fases da Lua.

Fonte: retirada de São Paulo (2014 - 2017*a*).

O período sideral da Lua, ou mês sideral, como já foi visto na Seção 2.1.5, é o tempo necessário para a Lua transladar em torno da Terra, em relação a uma estrela (ponto vernal). Tem duração de aproximadamente 27,32166 dias.

A diferença entre o mês sideral e o mês sinódico acontece devido ao movimento de revolução da Terra. A fase da Lua resulta do ângulo formado entre a Lua e o Sol, com a Terra no vértice, então o movimento da Terra contribui para esta medição. Se tomar a Lua nova como referência e se esperar 27,3 dias, a Lua terá completado uma órbita em torno da Terra antes de completar o ciclo de fases, ou seja, antes da Lua nova aparecer, portanto o ângulo entre ela e o Sol neste ponto será diferente do ângulo formado quando ocorrer a próxima Lua nova. Para que isto aconteça a Lua terá que se deslocar um período de aproximadamente 2,2 dias, ou seja, o mês sinódico é aproximadamente 2,2 dias mais longo em relação ao mês sideral, tal como ilustrado na Figura 2.13.

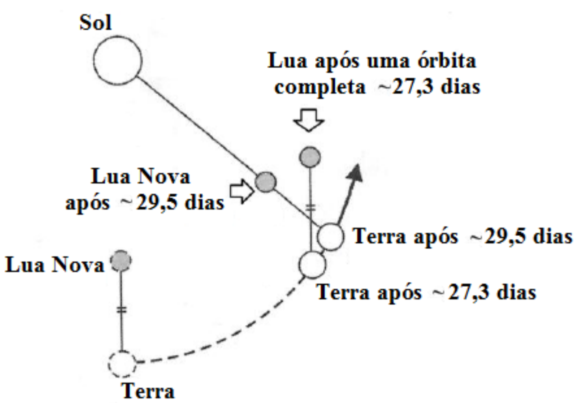


Figura 2.13: Diferença entre os meses sinódico e sideral.

Fonte: adaptado de Junior (2012).

2.4 Estações do ano

As estações o ano são causadas pela inclinação de 23,5° do plano da eclíptica em relação ao equador celeste, chamada obliquidade da eclíptica, combinada com o movimento de translação da Terra em torno do Sol. Esta inclinação se mantém constante à medida que a Terra orbita o Sol, de modo que os raios solares incidem mais diretamente em um hemisfério ou em outro, proporcionando mais horas com luz durante o dia a um hemisfério ou a outro e, consequentemente, aquecendo mais um hemisfério ou outro (DARROZ, 2010; KEPLER e SARAIVA, 2014).

2.4.1 Solstício e equinócio

De acordo com Langhi e Nardi (2007) é a inclinação no eixo de rotação da Terra garante que, em determinadas épocas do ano, que um dos hemisférios receba mais luz do Sol durante o período de rotação, enquanto que no outro, ocorre o inverso. No primeiro caso, ocorre o verão em que a parte clara do dia é mais longa do que a noite, e no segundo caso, ocorre o inverno em que a noite é mais longa. Entretanto, durante dois períodos do ano, a primavera e o outono, a Terra fica em uma posição em que a inclinação do seu eixo de rotação permite o recebimento uniforme da luz solar em ambos os hemisférios, deixando o dia claro e a noite com a mesma duração (12 horas cada um).

As datas de máxima desigualdade de iluminação nos hemisférios norte e sul (em junho e dezembro, respectivamente) são denominadas de solstício, que em latim significa sol parado. Entretanto, as datas de máxima igualdade de iluminação nos hemisférios norte e sul (em março e setembro, respectivamente) são chamadas equinócio, que em latim significa noites de iguais duração (ver Figura 2.14).

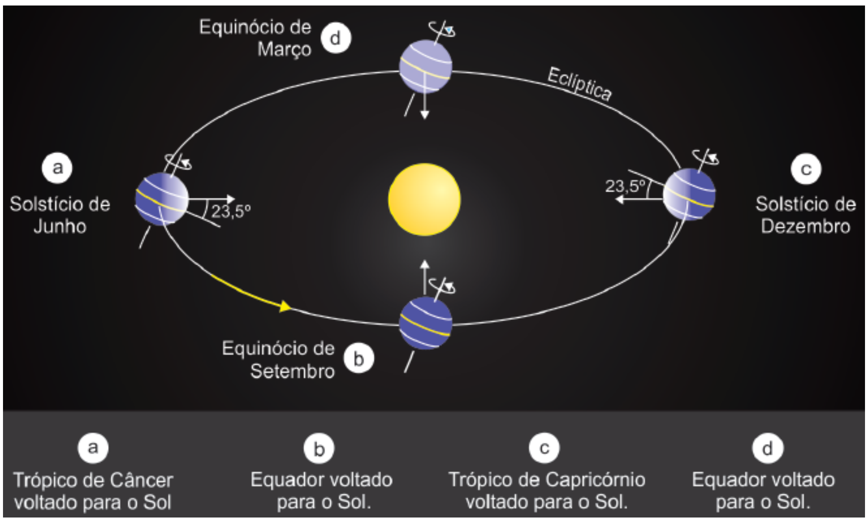


Figura 2.14: Divisão das estações do ano.

Fonte: retirada de Kepler e Saraiva (2014).

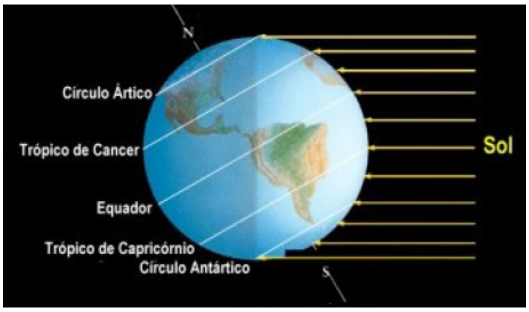
As quatro posições especiais, que a Terra ocupa durante sua translação em torno o Sol, são os dias em que ocorrem os solstícios e os equinócios. Estes dias marcam a transição de uma estação para outra:

- Em 20 ou 21 de março o Sol cruza o equador celeste, indo do hemisfério sul para o hemisfério norte, de modo que o dia e a noite duram 12 horas nos dois hemisférios e os pólos ficam com 24 horas de crepúsculo. Neste período ocorre o equinócio de outono no hemisfério sul e o equinócio de primavera no hemisfério norte;
- Entre 21 e 23 de junho o Sol está na máxima declinação norte, incidindo diretamente na região do trópico de câncer na Terra, deixando o dia mais curto do ano no hemisfério sul e mais longo do ano no hemisfério norte (Figura 2.15(b)). O Sol no pólo sul fica abaixo do horizonte e no pólo norte fica acima do horizonte. Neste período ocorre o solstício de inverno no hemisfério sul e o solstício de verão no hemisfério norte;
- Em 22 ou 23 de setembro o Sol cruza o equador, indo do hemisfério norte para o hemisfério sul, de modo que o dia e a noite duram 12 horas nos dois hemisférios e os pólos ficam com 24 horas de crepúsculo. Neste período ocorre o equinócio de primavera no hemisfério sul e o equinócio de outono no hemisfério norte;
- Entre 21 e 23 de dezembro o Sol está na máxima declinação sul, incidindo diretamente na região do trópico de capricórnio na Terra, deixando o dia mais longo do ano no hemisfério sul e mais curto do ano no hemisfério norte (Figura 2.15(a)). O Sol no pólo sul fica acima do horizonte e no pólo norte fica abaixo do horizonte. Neste período ocorre o solstício de verão no hemisfério sul e o solstício de inverno no hemisfério norte.

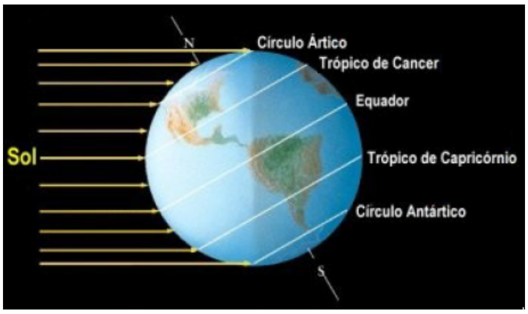
Segundo Barreto (2010), a noite mais longa do ano no hemisfério norte que ocorre em 21 de dezembro, hoje em dia, ocorria no dia 25 de dezembro, a mudança na data aconteceu devido ao movimento de precessão da Terra.

Atualmente, na Terra a inclinação entre o plano do equador celeste e o da eclíptica é de aproximadamente 23,5°, conforme foi visto anteriormente, porém se a inclinação fosse 0°, ou seja, se a Terra girasse com o seu eixo perpendicular ao plano da eclíptica, todas as manhãs e noites teriam sempre a mesma duração (12 horas), assim seria um eterno equinócio (os planos da eclíptica e do equador coincidiriam) e as estações do ano não existiriam.

Conforme Milone et al (2003), poderia se afirmar que as estações do ano decorrem da variação da distância entre a Terra e o Sol, porém deve-se lembrar que as estações do ano ocorrem de modo alternado em ambos os hemisférios. Mesmo que a variação na distância acarrete pequenas alterações no fluxo de luz solar recebido pela Terra (6,5% no máximo) não existe grandes consequências para as estações. Quando é verão



(a) Verão no hemisfério sul.



(b) Verão no hemisfério norte.

Figura 2.15: Solstício de dezembro e de junho, respectivamente.

Fonte: adaptada de Kepler e Saraiva (2014).

no hemisfério sul, a Terra se encontra mais próxima do Sol do que quando é verão no hemisfério norte, mas nem por isso o verão é mais intenso no hemisfério sul. Na Figura 2.16 pode-se ver a duração, em dias, das estações dos anos entre os solstícios e os equinócios.

2.5 Classificação dos calendários

Os calendários são classificados em siderais, lunares, solares ou lunissolares. O calendário sideral se baseia no período de revolução da Terra em torno do Sol com relação as estrelas em uma determinada posição na configuração celeste, ou seja, na observação do nascer de uma estrela. É composto de 365 dias, 6 horas, 9 minutos e 9,8 segundos (365,2564 dias solares médios). Os primeiros astrônomos tiveram mais facilidade para mensurar o tempo por meio da observação do Sol, e não por meio de uma estrela mais distante, assim um outro ciclo foi observado e denominado de ano solar ou ano trópico. A base do calendário solar corresponde ao tempo decorrido entre duas passagens aparentes consecutivas do Sol pelo ponto equinocial de março, ou seja, pelo ponto vernal (período de tempo decorrido para completar um ciclo de estações). Hoje os meses não têm mais conexão com o movimento da Lua, pois foram adequados para uniformizar o período anual. Segue unicamente o curso aparente do Sol, fazendo coincidir, com maior ou menor precisão, o ano solar com o civil, de forma que as estações recaiam

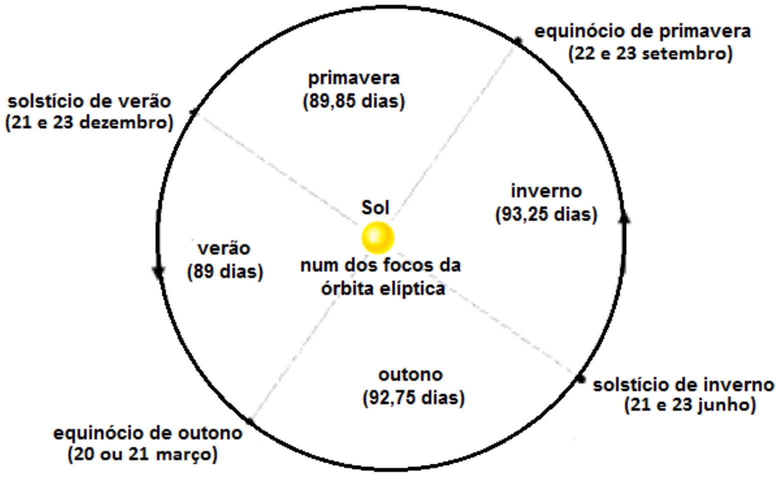


Figura 2.16: Duração das estações do ano com relação ao hemisfério sul.

Fonte: adaptada de Milone et. al (2003).

todos os anos nas mesmas datas (RODRIGUES, 2000; FRANCO, 2016).

A unidade básica para a contagem do tempo é o dia, que possui por sua vez 24 horas, dividido em duas etapas, intercaladas entre o nascer e o pôr do sol. O ano solar (ano trópico) é o período de tempo decorrido para completar um ciclo de estações, tendo duração de cerca de 365 dias, 5 horas, 48 minutos e 46 segundos (365,2422 dias solares médios). Portanto, por excesso a cada quatro anos, as horas extra acumuladas são reunidas no dia 29 de fevereiro, formando o ano bissexto, ou seja, o ano com 366 dias (FRANCO, 2016).

Para Nadal e Hatschbach (2000) devido ao movimento de precessão da Terra (ou precessão dos equinócios), que causa um movimento retrógrado do ponto vernal (em relação ao movimento do Sol) de proximadamente 50” por ano, o ano trópico (o Sol percorre aparentemente um arco de 359° 59’ 9,8” na esfera celeste) é levemente menor do que o ano sideral (o Sol percorre aparentemente um arco de 360° em um ano na esfera celeste), isto é, cerca de 20 minutos mais curto.

O calendário lunar é baseado no movimento da Lua, isto é, no mês lunar sinódico. O mês lunar sinódico é o intervalo de tempo entre duas conjunções da Lua e do Sol, com duração de 29 dias, 12 horas, 44 minutos e 2,8 segundos. O ano lunar se define como um período de tempo igual a 12 lunações completas existentes no ano trópico. Composto de 12 meses abrange 354 dias, 8 horas, 48 minutos e 36 segundos (354,36708 dias), os anos lunares devem ser regulados periodicamente, para que o início do ano corresponda sempre a uma Lua nova. Como uma revolução sinódica da Lua não é igual a um número inteiro de dias, e os meses também devem começar com uma Lua nova, esse momento inicial não se dá sempre numa mesma hora. Para que os meses compreendessem números inteiros de dias, convencionou-se o emprego de meses alternados de 29 e 30 dias. Porém, o mês lunar médio é de 29 dias e 12 horas, ou seja, mais curto 44 minutos e 2,8 segundos do que o sinódico, então para corrigir esta diferença se acrescentou um dia a cada trinta meses com a finalidade de evitar uma derivação das fases lunares. Entretanto, como o ano lunar era de 354 dias, observou-se que havia uma defasagem rápida entre o início do mesmo e o das estações. Procurou-se eliminar essa diferença, intercalando-se periodicamente um mês complementar, o que originou os anos lunissolares (MILONE et. al, 2003).

Nos calenários lunissolares os anos estão relacionados com o movimento da Terra em torno do Sol e os meses com o movimento da Lua em torno da Terra. O calendário hebreu possui uma sequência de meses baseada nas fases da Lua, porém de tempos em tempos um mês inteiro é intercalado para o calendário se manter em fase com o ano trópico.

2.6 A história do calendário

Criado pelo imperador Rômulo, em 753 a.C., o calendário romano primitivo tinha 304 dias distribuídos por dez meses lunares, seis de 30 dias e quatro de 31, sendo periodicamente adicionado um mês suplementar para compensar o atraso em relação às estações do ano. Os nomes dos quatro primeiros meses deste calendário romano foram dedicados aos deuses da mitologia romana. As designações dos meses restantes eram números ordinais. Na Tabela 2.3 pode-se ver a nomenclatura e a duração de cada um destes meses.

Tabela 2.3: Os 10 meses do calendário romano primitivo.

Mês	**Dias**	**Significado**
Martius	31	Marte
Aprilis	30	Apolo
Maius	31	Júpiter
Junius	30	Juno
Quintilis	31	5º
Sextilis	30	6º
September	30	7º
October	31	8º
November	30	9º
December	30	10º

Fonte: retirada de Lopes (2012).

Foi o sucessor de Rômulo, o segundo rei de Roma, Numa Pompílio (717-673 a.C.), que reformando este calendário lhe acrescentou dois meses. O mês de *januarius* (janeiro) no início de cada ano, dedicado a *Janus*, deus protetor de todos os começos. *Februarius* (fevereiro) o último mês do ano, dedicado a *Februa*, o deus a quem os romanos ofereciam sacrifícios para expiar as suas faltas de todo o ano. Também modificou a duração dos meses, deixando o calendário com 354 dias (ano lunar dos gregos) distribuídos como mostra a Tabela 2.4 (DONATO, 1993; LOPES, 2012).

Tabela 2.4: Os 12 meses do calendário de Numa Pompílio.

Mês	**Dias**	**Significado**
Januarius	29	Jano
Martius	31	Marte
Aprilis	29	Apolo
Maius	31	Júpiter
Junius	29	Juno
Quintilis	31	5º
Sextilis	29	6º
September	29	7º
October	31	8º
November	29	9º
December	29	10º
Februarius	27	Februa

Fonte: retirada de Lopes (2012).

O fato de cada mês possuir um número ímpar de dias se devia à superstição dos romanos, que consideravam nefastos os números pares. Portanto, pela mesma razão, consideravam de grande azar o ano de 354 dias e o aumentaram para 355 dias, atribuindo um dia a mais a *februarius*, que passou a ter 28 dias.

Os romanos sentiram necessidade de coordenar o seu ano lunar com o ciclo das estações e estabeleceram um rudimentar sistema lunissolar, introduzindo no seu calendário, de dois em dois anos, um novo mês: *mercedonius* ou *intercalaris*. Este mês tinha duração alternada de 22 ou 23 dias e intercalava-se entre 23 e 24 de *februarius*. O ano assim formado tinha, em média, 366,25 dias, portanto, um dia a mais do que o ciclo das estações. Como resultado, verificou-se no reinado de Júlio César (100 - 44 a.C.) que o ano civil ia três meses adiantado em relação ao ano solar. Júlio César chamou a Roma o astrônomo grego Sosígenes, da escola de Alexandria para acertar as datas no ano 46 a.C..

Conforme Donato (1993) , para desfazer tal diferença, Júlio César ordenou que naquele ano, além de intercalar o mês *mercedonius* de 23 dias naquele ano fossem acrescentados mais dois meses, um de 33 dias, outro de 34 dias, entre os meses de *november* e *december*. Obteve-se, assim, um ano civil de 445 dias, o maior de todos os tempos, único na história do calendário e conhecido pelo nome de "ano da confusão", pois, devido à grande extensão dos domínios de Roma e à lentidão dos meios de comunicação, em algumas regiões a ordem foi recebida com tal atraso que já havia começado um novo ano.

Em 45 a.C., os romanos adotaram o calendário solar egípcio com 365 dias e 6 horas ou 365,25, inserindo dias suficientes nos meses mais curtos, por exemplo, em *quintilis* e *sextilis* até um total de 365 dias, e inserindo também um dia, e não um mês, entre 23 e 24 de *februarius* de quatro em quatro anos, chamado bissexto, de modo a compensar as quase seis horas que havia de diferença para o ano trópico. *Februarius* passou a ser o segundo mês do ano. Este calendário ficou cnhecido como calendário juliano e utilizado pela maioria dos países ocidentais até a reforma gregoriana em 1582.

Durante o consulado de Marco Antônio, reconhecendo-se a importância da reforma no calendário romano por Júlio César, foi decidido prestar-lhe homenagem, perpetuando o seu nome no calendário, de maneira que o sétimo mês, *quintilis*, passou a ser chamado de *julius*. Também, no ano 8 d.C., o Senado romano decretou que o oitavo mês, *sextilis*, fosse denominado *augustus*, homenagem ao imperador César Augusto, que pôs fim à guerra civil que desolava o povo romano. Portanto, para que o mês dedicado a César Augusto não tivesse menos dias do que o dedicado a Júlio César, o mês de *augustus* passou a ter 31 dias. Este dia saiu do mês de *februarius*, que ficou com 28 dias nos anos comuns e 29 nos bissextos. Também para que não houvesse tantos meses seguidos com 31 dias, reduziram-se para 30 dias os meses de *september* e *november*, passando a ter 31 dias os de *october* e *december*. Os doze meses do calendário juliano ficaram ordenados conforme a Tabela 2.5 (TURAZZI e GABRIEL, 2000; LOPES, 2012; JUNIOR, 2012).

Tabela 2.5: Os 12 meses do calendário juliano.

Mês	**Dias**	**Origem**
Januarius	31	homenagem ao deus Janus
Februarius	28 ou 29	homenagem ao deus Februa
Martius	31	com origem no nome do deus Marte
Aprilis	30	com origem no nome do deus Apolo
Maius	31	homenagem ao deus Júpiter
Junius	30	com origem no nome da deusa Juno
Julius	31	em homenagem a Júlio César
Augustus	31	em homenagem a Augusto
September	30	sétimo mês no calendário primitivo
October	31	oitavo mês no calendário primitivo
November	30	nono mês no calendário primitivo
December	31	décimo mês no calendário primitivo

Fonte: retirada de Lopes (2012).

Os romanos se referiam ao primeiro dia de cada mês como *kalends*, de onde a palavra calendário se originou. Assim, *calendarium* passou a ser o livro romano onde se registrava o primeiro dia de cada mês, quando os débitos deveriam ser pagos. O calenário era divido em três "dias-sinais" que caíam no início do mês, no sexto (ou sétimo) dia e no meio, que eram chamados de *kalends*, *nonus* e *idus*, respectivamente. Em português são calendas, nonas e idos. Destas três divisões, calendas era a parte mais longa e tinha mais dias que as duas outras juntas. A Tabela 2.6 mostra que as calendas ocorriam do 16º até o 1º dia do mês seguinte, enquanto as nonas do 2º ao 7º e os idos do 8º ao 15º dias. Dedicado à deusa *Juno*, a principal deusa do Panteão romano, o dia de calendas começava com a Lua nova. Nonas, era o dia em que a Lua atingia sua fase de quarto crescente. Idos, dedicado a Júpiter, era o período da Lua cheia (JUNIOR, 2012).

A maior parte dos outros dias deste calendário romano não tinha nome. Entretanto, cada um era numerado em um sistema segundo a quantidade de dias em que ele caía antes das calendas, nonas e idos. Como as nonas iam do 2º ao 7º dia, o 3º dia do mês significava que faltavam 4 dias para as nonas (3º dia + 4 dias = 7º dia), assim se chamaria V nonas, ou seja, o numeral cinco inclui, ainda, o dia a corrente (3º, 4º, 5º, 6º, 7º dias = 5 dias).

A Tabela 2.6 apresenta o mês de março do calendário juliano como exemplo. Os romanos costumavam se referir ao dia 11 de março, por exemplo, como "cinco idos", que significava quatro dias antes do 15º dia e era tão simples para qualquer romano quanto, atualmente, alguém dizer "11 de março".

Tabela 2.6: Mês romano referente a março.

Datação moderna	**Datação romana**	**Datação moderna**	**Datação romana**
1	1º dia das calendas de março	16	XVII calendas aprilis
2	VI nonas (cinco dias antes de nonas)	17	XVI calendas aprilis
3	V nonas (quatro dias antes de nonas)	18	XV calendas aprilis
4	IV nonas (três dias antes de nonas)	19	XIV calendas aprilis
5	III nonas (dois dias antes de nonas)	20	XIII calendas aprilis
6	Primeiro nonas (dia anterior a nonas)	21	XII calendas aprilis
7	Nonas de março	22	XI calendas aprilis
8	VIII idos (sete dias antes de idos)	23	X calendas aprilis
9	VII idos (seis dias antes de idos)	24	IX calendas aprilis
10	VI idos (cinco dias antes de idos)	25	VIII calendas aprilis
11	V idos (quatro dias antes de idos)	26	VII calendas aprilis
12	IV idos (três dias antes de idos)	27	VI calendas aprilis
13	III idos (dois dias antes de idos)	28	V calendas aprilis
14	Primeiro idos (dia anterior a idos)	29	IV calendas aprilis
15	Idos de março	30	III calendas aprilis
		31	Primeiro calendas aprilis

Fonte: retirada de Junior (2012).

De acordo com Milone et. al (2003) e Turazzi e Gabriel (2000), apesar de todos os ajustes efetuados na Roma antiga a correção referente aos anos bissextos a cada quatro anos não foram suficientes. A contagem do tempo determinada pelo calendário juliano levou a um pequena confusão, pois na verdade a Terra demora 365 dias, 5 horas, 48 minutos e 45,96768... segundos para completar uma volta em torno do Sol. Portanto, o ano estabelecido pelo calendário juliano era maior que o ano real (ano trópico) em 11 minutos e 14 segundos, o que dava uma diferença de um dia a mais a cada 128 anos. Essa diferença, após centenas de anos, foi ficando tão grande que não se podia mais reconhecer as estações do ano. O calor não correspondia aos meses de verão e o frio aos meses de inverno. Os dias santos também não estavam sendo comemorados em datas certas, o que para muitos padres era consierado pecado. Somente em 1582, o papa Gregório XIII (1512 - 1586) estabeleceu uma reforma crucial ao calendário ocidental. Assim foi a reforma gregoriana:

(i) suprimiu 10 dias acumulados, para que o início de cada estação ocorresse na época certa, assim o dia posterior a 4 de outubro de 1582 passou a ser 15 de outubro de 1582;

(ii) introduziu a regra de que anos múltiplos de 100 não são bissextos, a menos que sejam também múltiplos de 400;

(iii) a contagem dos dias do mês passou a ser caracterizada por números cardinais (1, 2, 3, $\cdots$, 31) e não mais pela ordenação de *kalends*, *nonus* e *idus*.

O calendário gregoriano tem 365,2425 dias solares médios, de modo que o ano trópico tem cerca de 365,2422 dias solares médios. Uma diferença de 0,0003 dia por ano que corresponde a 26 segundos, isto é, 1 dia a cada 3300 anos. Então:

$$\text{1 ano trópico} = 365{,}2422 = 365 + 1/4 - 1/100 + 1/400 - 1/3300,$$

ou, ainda,

$$365{,}2422 = 365 + 0{,}25 - 0{,}01 + 0{,}0025 - 0{,}0003 = 365{,}2425 - 0{,}0003.$$

Conforme Donato (1993), apesar da coerência nas mudanças no calendário juliano, o calendário gregoriano teve resistência de alguns países. Na Inglaterra, que havia se separado de Roma a pouco tempo, revoltou-se com os dez dias tomados. Quase dois séculos mais tarde, o parlamento britânico decidiu aceitar a reforma, então em 3 de setembro de 1752 perderam os dez dias. Outros países também demoraram em aderir ao novo calendário, por exemplo, a Dinamarca apenas em 1652 o adotou, a Alemanha e a Holanda em 1699, a Suécia em 1753, o Japão, em 1873, quando recebeu influência cultural do ocidente, a China em 1911 e a Rússia em 1923. Os paises que mais resistiram foram os ligados a igreja ortodoxa ou oriental como a Rússia, a Grécia, a Sérvia, a Romênia, a Iugoslávia cristã, etc. Porém, o Brasil não demorou muito em aceitar o calendário gregoriano, pois isto ocorreu no ano de 1584.

2.7 Os diferentes calendários

A estrutura do calendário é complexa devido ao fato de ser baseado em ciclos, ou seja, a rotação da Terra, translação da Terra em torno do Sol e a revolução da Lua em torno da Terra, que têm durações que não são múltiplas umas das outras. O ano é composto de 52 semanas e mais um dia (dois no caso de ser ano bissexto) e não fosse por este(s) dia(s) a mais todas as datas do ano coincidiriam sempre no mesmo dia da semana, assim o cálculo do "dia-data" seria menos complexa (LOSANO, 1992).

De acordo com Donato (1993) e Júnior (2012), começou-se a desenvolver a primeira civilização, por volta de 6600 a.C., na Ásia Menor com os sumérios, então em 6500 a.C., surge em Nipur, uma cidade religiosa, o primeiro calendário. Composto pelo sumerianos esse calendário era dividido em 12 partes baseado em dois fenômenos celestes. Os nomes das doze divisões deviam sugerir ou indicar os movimentos e os costumes próprios das ocasiões. Pois o calendário devia valorizar as necessidades básicas da época religiosas, os tempos de semeiar, colheitas, pastagem, etc.. Entretanto, o arcaico calendário nipuriano foi de abolido durante a dinastia de Ur (entre 2300 e 2150 a.C.).

Durante a antiguidade a comunicação entre os povos de cada nação era difícil devido à demora no transporte das informações, por isso a troca de informações era algo muito demorado para que os calendários fossem os mesmos, apesar de existir algumas semelhanças, que serão observadas nas próximas seções. Além disso, cada imperador queria impor sua autoridade e, consequentemente, impunha o calendário que lhe era conveniente. Por essas razões vários calendários diferentes foram criados.

Nos calendários lunares e lunissolares o dia tem início com o pôr do sol, como ocorre ainda hoje, no calendário judeu e muçulmano. No calendário solar, o dia começa com a saída do Sol, como no antigo Egito. Na mesopotâmia o dia começava à meia-noite por causa das observações astronômicas, embora o calendário usual partisse do anoitecer. Os chineses e romanos adotaram também a meia-noite para o início do dia, uso que é seguido pelo calendário gregoriano.

Vale destacar a engenhosidade humana que, há milênios, com a ausência de instrumentos, ou seja, somente com o raciocínio lógico, a matemática básica e interesse em interpretar a natureza, diversos povos foram capazes de conseguir resultados muito próximos dos dias de hoje.

Na sequência são apresentadas algumas características dos calendários: babilônicos, egípcio, grego, muçulmano, maia e asteca.

2.7.1 Calendário babilônico

No século XXI a.C., os sumérios, povo que precedeu e foi incorporado à cultura babilônica, desenvolveram um sistema ligeiramente diferente, baseado em um calendário de 360 dias. Este número tinha origem no arredondamento do mês lunar para trinta dias, que se encaixava perfeitamente no sistema matemático e astronômico dos sumérios que era sexagesimal. Assim, os babilônios herdaram a velha numerologia sexagesimal suméria para dividir o dia em 24 horas (o qual é divisível por seis) e também por dividir o ano de 360 dias.

De acordo com Donato (1993) e Junior (2012), aproximadamente no século XVIII a.C., quando o império babilônico, dominando a região mesopotâmica, sistematizou o ano ao adotar o calendário lunar da cidade sagrada sumeriana de Nipur. Assim, o ano adotado não tinha um número fixo de dias, pois era dividido em 12 meses lunares de 29 ou 30 dias cada, o que somava 354 dias. Esses dozes meses eram denominados com os seguintes nomes: *nisan*, *aiaru*, *simanu*, *du' uzu*, *abu*, *ululu*, *tashritum*, *arakhsama*, *kislimu*, *tebitum*, *shabat* e *addaru*. Além disso, o início de todos os meses deviam coincidir com a Lua nova, de modo que essa coincidência era muito levada a sério, pois se a Lua nova aparecesse no último dia de um mês, tal dia, era suprimio e passava a ser contado como primeiro dia do mês seguinte. Para acertar a data do ano com as estações do ano adicionavam um 13° mês a cada três anos, assim as estações não ficavam muito defasadas com o passar do tempo. Essa adição do 13° mês não era muito regular, por causa da dificuldade no transito das informações. Também faziam a divisão do mês em semanas de sete dias.

Matemáticos babilônios, por volta do ano 432 a.C., imaginaram que 7 anos de 13 meses lunares, seguidos por 12 anos de 12 meses lunares seriam quase exatamente iguais a 19 anos solares. Assim, ficou conhecido como ciclo metônico, em homenagem ao astrônomo grego Meton (século V a.C.) que o desenvolveu. Funciona através da intercalação de meses extras dentro do ano lunar padrão de 12 meses, isto é, no período de 19 anos eram feitas correções para acertar os meses com o ano solar. Na Tabela 2.7 observa-se que o calendário babilônico acrescentava um segundo mês *addaru II* aos 3º, 6º, 8º, 11º, 14º, e 19º anos e um segundo mês *ululu II* ao 17º ano. Os próximos ciclos iniciaram-se em 367/6 a.C., 348/7 a.C, 329/8 a.C., e assim sucessivamente. Porém, este sistema de 19 anos não era exato e também se mostrou de difícil utilização, sendo pouco prático para o uso cotidiano (JUNIOR, 2012).

2.7.2 Calendário egípcio

Os egípcios, em 4500 a.C., observando a estrela *Sothis* (ou *Sírius*) notaram que esta brilhava ainda mesmo antes o pôr do Sol, porém fazia-se mais brilhante exatamente nos períodos de cheias do rio Nilo que inundava as terras de suas margens trazendo um rico limo (lodo) que as deixava férteis, possibilitando, assim, o cultivo agrícola. O início do ano egípcio era marcado pela subida heliacal[4] da estrela *Sothis*.

Por volta de 2776 a.C. o calendário egípcio já era composto de 365 dias, divididos em 12 meses de 30 dias que somam 360 dias e mais 5 dias contados separadamente, com festas depois da colheita (chamados *epagômenos*). O ano egípcio tinha as estações

[4]Momento em que a estrela se torna visível no horizonte, imediatamente antes do nascer do Sol.

Tabela 2.7: Calendário babilônico.

Meses	**Nº de dias**
Nisan	30
Aiaru	29
Simanu	30
Du' uzu	29
Abu	30
Ululu	29
Ululu II	29
Tashritum	30
Arakhsama	29
Kislimu	30
Tebitum	29
Shabat	30
Addaru	29
Addaru II	30

do ano determinadas pelo fluxo do rio Nilo. Havia três estações de quatro meses cada, denominadas estação da enchente ou cheias (*akket*), da semente ou semeio (*pert*) e da colheita (*shemu*), coincidentes com o ciclo anual da cheias do Nilo. Registrando o momento da aparição de Sothis com exatidão, a cada ano, os astrônomos egípcios perceberam que o ano solar era 1/4 de dia mais longo que 365 dias. No entanto, esse atraso ficou sem correção por séculos, os astrônomos não se preocupavam, pois perceberam que em cada 1461 anos egípcios o calendário se corrigia e deixava o ano civil de acordo com o ano solar. Este período de 1460 anos era conhecido como ciclo sótico ou período sotíaco. Apesar dessa comprovação, os egípcios não fizeram nenhuma correção no seu ano, assim chamado *calendário vago*. Em 238 a.C., o rei Ptolomeu III Evérgeta propôs que esta falha fosse corrigida, sugerindo algo como o ano bissexto moderno, isto é, a adição de um sexto dia suplementar para cada quatro anos para corrigir este calendário. Porém, esta reforma ia contra os hábitos egípcios e não foi aplicada. Somente com a conquista do Egito por Roma, sob o império romano de César Augusto (26 - 23 a.C.), que o ano egípcio correspondente a 23 - 22 a.C. em 29 de agosto do chamado calendário juliano, foi introduzido um dia a mais. Esta reforma não foi aceita integralmente e os dois calendários permaneceram vigentes em paralelo até cerca de 238 d.C. (LE GOFF, 1990; NADAL e HATSCHBACH, 2000; MARQUES, 2016).

Apesar do calendário egípcio ter sofrido diversas modificações ao longo dos tempos, como foi visto anteriormente na Seção 2.6, tornou-se a base para os calendários romano e gregoriano.

2.7.3 Calendário grego

Em 776 a.C., iniciada a primeira olimpíada, tais jogos eram celebrados de quatro em quatro anos. As olimpíadas marcavam o correr do tempo, os anos eram contados entre as épocas de sua realização, da seguinte maneira: ano 1, ou ano 2, etc., da décima quarta olimpíada. Foram 294 olimpíadas, a última no ano 394 d.C.. Apesar dessa forma particular de contar os anos, os gregos montaram um calendário baseado nos movimentos solares e lunares, começando o ano com uma data e posição do Sol (solstício ou equinócio), e o mês iniciava com a Lua nova. Porém, observando que de solstício a solstício, ou de equinócio a equinócio se passava um período não divisíveis pelo número de Luas novas. Portanto, foi criando o denominado *oktaeteris* que era um grupo de oito anos, dentro do qual se refazia o equilíbrio entre o ano solar e o ano lunar. Por exemplo, oito anos solares são iguais a 8 vezes 365 dias e mais 2 dias suplementares, de modo que oito anos lunares são iguais a 8 grupos de 12 meses (lunares) de 29,5 dias. Assim, a diferença dentro do *oktaeteris* era de 90 dias, ou seja, cerca de 3 meses lunares. Estes três meses eram intercalados em diferentes períodos do grupo de 8 anos, o que restaurava em parte o equilíbrio (DONATO, 1993).

O *oktaeteris* não foi suficiente para por de acordo os anos lunares e solares. Era preciso uma revolução nos costumes e na religião, bastando deixar de lado o uso de cultuar a Lua nova e de fazer com que ela marcasse o princípio de cada mês. Então o astrônomo Meton, em 432 a.C., agrupou os anos em períodos denominados *grandes anos* ou *ciclo metônico*, como já foi visto na Seção 2.7.1, cada período destes era constituido de 19 anos comuns e mais 7 meses intercalares. Assim, Meton obteve uma melhor precisão na contagem do tempo grego, pois a média de duração dos meses era de 29 dias, 12 horas, 45 minutos e 57 segundos.

Baseado na proposta de Meton, Calipos de Sizicus ampliou o período de *grandes anos*, fazendo de quatro períodos de Meton um único. Com isso procurava obter uma maior exatidão na contagem de dias e meses, além de dispor de uma unidade própria para contagem de parcelas mais dilatadas.

O astrônomo e matemático Hiparco de Nicéia (160 - 125 a.C.), também reformou o calendário grego, tomou quatro dos períodos calipianos e encaixou-os em um só período. Deste modo, obteve um ciclo de 304 anos e um grau de exatidão altamente aceitável.

Observe a seguir, a evolução dos períodos gregos:

- 1 período de Meton = 19 anos - 7 meses e 29 dias (intercalados);
- 1 período de Calipos = 4 períodos de Meton;
- 1 período de Hiparco = 4 períodos de Calipos, ou seja, 304 anos.

Na divisão do tempo grego, os meses não possuiam separações com relação aos dias da semana. Era dividido em três partes: o primeiro terço do mês denominado "dia do começo", o período intermediário não tinha nome; e o último terço chamado "que se acaba". A vintena (*eikades*) era a quantia base, os dias antes dela era "o 1º antes de *eikades*", "o 2º antes de *eikades*", etc. Os dias depois da vintena dizia-se "o 1º depois de *eikades*", e assim por diante.

Em Atenas a contagem do tempo, era diferente e feita por um método local. Elaboraram um calendário a partir dos tempo henísticos. Fixava-se o começo do ano no solstício de verão, ou na Lua nova imediatamente seguinte. No método gregoriano, equivale aos últimos dias de junho. Com doze meses regulares denominados: *hekatombion*, *pyanopsion*, *gamelion*, *mounichion*, *metageitmion*, *maimakterion*, *amthesterion*, *thargelion*, *boedromion*, *poseideon*, *elaphebolion* e *skirophorion*. Todos os meses se distinguiam por comemorações e dedicações especiais. O calendário de Atenas, assim como os outros calendários helênicos, sofria com o desencontro entre o ano civil e o natural. Portanto, quando necessário repetiam o mês de *poseideon* para a devida correção, sendo denominado *segundo poseideon*.

Após a batalha de Cheronéia em 338 a.C., Filipe da Macedônia ao conquistar a Grécia, além das suas imposições levou também a nova terra um novo calendário. Composto de 12 meses lunares com as seguintes nomeações: *dios*, *apellaios*, *audynaios*, *peritios*, *dystros*, *xantikkos*, *artemisios*, *daisios*, *panemos*, *loios*, *gorpiaios* e *hyerberataios*.

Os gregos, após o império de Alexandre, passaram a fazer uso do calendário egípcio, com 365 dias, sem intercalações. Os meses em vigor também possuía origem egípcia: *thoth*; *phaophi*; *athyr*; *choaiak*; *tybi*; *mechir*; *phamenoth*; *pharmouthi*; *pachon*; *pauni*; *epiphi*; e *mesori*.

O imperador Augusto, em 26 a.C., ordenou uma reforma no calendário egípcio e povos sobre influência de Roma, para deixá-los entrosados com o método juliano. A Grécia também foi infuenciada, assim o primeiro dia de *thoth* equivalia a 29 de agosto do calendário herdado de Júlio César. Com relação ao calendário gregoriano, a Grécia foi um dos países que mais resistiu, adotando-o somente em 1924.

2.7.4 Calendário muçulmano

A fuga do profeta Maomé de Meca para Yathrib (que seria conhecida no futuro como Medina) foi ponto de partida para o calendário dos povos árabes. Esse acontecimento, que ocorreu em 16 de julho de 622, ficou conhecido como "hégira", que significa fuga. Os anos da hégira são de base lunar, com 354 dias, divididas em 12 meses, que têm, alternadamente, 30 e 29 dias. O dia não começava a meia-noite, mas ao fim do dia com o aparecimento da Lua. O início do ano, assim como os meses, deviam coincidir com a Lua nova, pois este fato tinha muita importância para os povos do deserto (DONATO, 1993; FERREIRA, 2007; MALTA, 2014).

Há um ciclo de 30 anos, dentro do qual, onze vezes no fim do ano se acrescenta um dia extra, portanto neste ciclo soma-se 30 anos e mais 11 dias. Este acréscimo não conserta o erro do calendário que é mantido por motivos religiosos deixados incisivamente por Maomé no Alcorão.

Conforme Rodrigues (2012), ainda hoje o calendário muçulmano (também chamado islâmico ou ainda hegírico) se baseia no ano lunar com doze meses sinódicos. Como consequência o começo de cada ano se antecipa sucessivamente de 11 a 12 dias e ao fim de 32 a 33 anos as estações percorrem em sentido inverso. Cada 33 anos muçulmanos correspondem a 32 anos cristãos. A Tabela 2.8 mostra esse calendário destacando os meses islâmicos e seus significados.

Tabela 2.8: Calendário muçulmano.

Meses	**Nº de dias**	**Significado do nome**
Muhharran	30	mês sagrado
Safar	29	mês da partida para a guerra
Rabiá-al-áual	30	1º mês da primavera
Rabiá-a-áual	29	2º mês da primavera
Jumáda Al-Ula	30	1º mês da seca
Jumadá a-Thânia	29	2º mês da seca
Rajáb	30	mês do respeito e da abstinência
Xaaban	29	mês da germinação
Ramadan	30	mês do grande calor
Xauál	29	mês do acasalamento dos animais
Dhu Al-Qaáda	30	mês do descanso
Dhu Al-Hijja	29	mês da peregrinação

Fonte: retirada de Ferreira, (2007).

De acordo com Ferreira (2007) e Malta (2014) existem quatro meses sagrados (*ipso facto*) no Islã e não podendo guerrear nesses períodos, são eles: o primeiro mês, *Muhharram*, o próprio nome já indica que se trata de um mês sagrado; o sétimo mês, *Rajáb*, é o mês do respeito e da abstinência; e os meses 11 e 12, respectivamente, *Dhu Al-Qaáda* e *Dhu Al-Hijja*, mês do descanso e mês da peregrinação. Ao contrário do que se pensa, o mês do *Ramadan* não é considerado um mês sagrado, mas um mês de obrigações e prestações. Portanto, se se faz uma oração no mês do *Ramadan*, essa oração vale por 7024 orações feitas em outros períodos e, desse modo, acumulam-se dádivas para quando for necessário prestar contas, isto é, no dia do Juízo Final. E ainda, *Ramadan* é um mês marcado pelo jejum anual, onde o Alcorão determina que os fiéis comecem o jejum somente após observarem, a olho nu, a Lua nova, que marca o primeiro dia desse mês.

2.7.5 Calendário maia

Conforme Cavalcanti (2012) todas as culturas mesoamericanas usaram o sistema matemático de base vigesimal, sendo o número vinte fortemente associado ao corpo humano. Portanto, o sistema maia também era composto por vinte dígitos, isto é, de zero a dezenove representados por símbolos (hieróglifos) a unidade com um ponto e cinco unidades com uma barra, pode-se observar na Figura 2.17 todos o dezenove símbolos. Sendo o zero, um caso especial, era representado por uma concha, simbolizando a ausência de valor numérico. Porém, sua função de "ocupação dos lugares" é o que possibilita a notação de números de "ordem superior" na contagem maia, ou seja, numerais com valores acima do dezenove.

Figura 2.17: Os vinte dígitos maias e seus nomes em língua *yukateka*.

Fonte: retirada de Cavalcanti (2012).

Os vinte dígitos também possuem representações antropomorfas[5], associadas a divindades. Essas divindades eram geralmente alguns dos seus principais deuses, estes simbolizavam os números apenas pelas suas cabeças. Na Figura 2.18 estão representados estes 20 números em suas variantes antropomorfas com seus respectivos nomes na língua maia *yukateka*.

Diversos calendários foram desenvolvidos pelo povo maia, por volta de 300 - 600 d.C. (período clássico), porém dois se destacam na literatura corrente, que são denominados *tzolk'in* e *ja'ab'*. Estes calendários juntos, ainda, formam um outro ciclo, o *junab'* ou roda calendárica de 52 anos. *Tzok'in* significa "conta dos dias" ou "ordenamento dos dias", pois a palavra "*k'in*" quer dizer "Sol" que também pode-se entender como "dia".

O calendário *tzok'in* é um tipo de "calendário folclórico" relacionado ao ritual cotidiano e religioso. Este calendário possui um ciclo de 260 dias composto por outros dois ciclos menores. O ciclo de 20 dias, são representados pelos glifos[6] ilustrados na Figura 2.19, combina-se diariamente com o ciclo de 13 dias, os números de 1 a 13, de maneira que os dois ciclos correm paralelamente. Portanto, cada dia do *tzolk'in* é uma combinação entre esses dois ciclos, e até que todos os 20 dias sejam numerados de um a treze serão necessários 260 dias, pois 260 é o mínimo múltiplo comum entre 13 e 20.

Os treze números são nomeados e escritos assim como na matemática, além de serem também representados no sistema de ponto e barra e no sistema de figuras antropo-

[5]Antropomorfas: que apresentam ou se assemelham ao ser humano.

[6]Glifo: é uma figura que dá um tipo de característica particular a um símbolo específico.

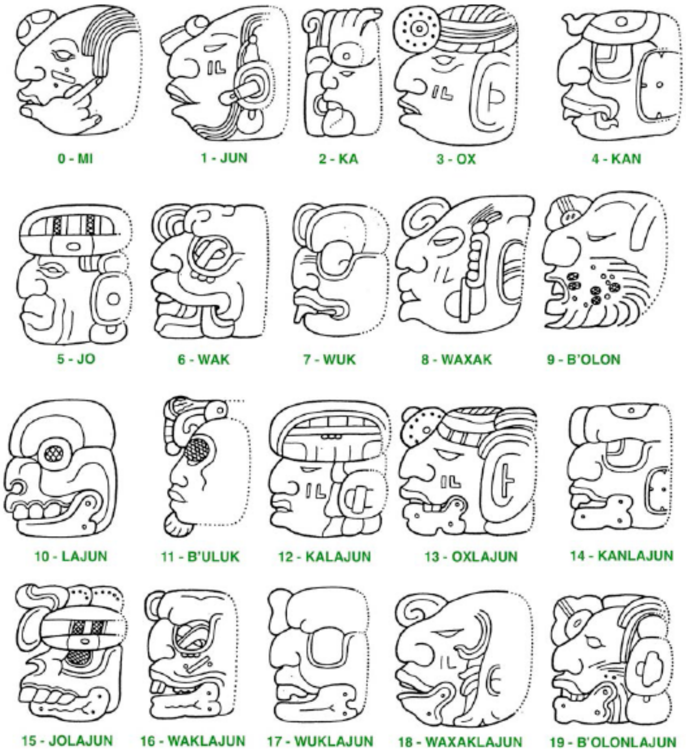


Figura 2.18: Os vinte dígitos maias em representações antropomorfas e seus nomes em língua *yukateka*.

Fonte: retirada de Cavalcanti (2012).

Figura 2.19: Os 20 glifos dos dias do calendário *tzolk'in* e seus nomes em língua *yukateka*.

Fonte: retirada de Cavalcanti (2012).

morfas. Por outro lado, os vinte dias têm representações específicas, que geralmente aparecem dentro de uma espécie de moldura ou suporte com duas bases. São acompanhados de seu coeficiente e significado básico: 0 - *Ajaw* (Senhor); 1 - *imix* (serpente aquática); 2 - *ik'* (vento); 3 - *akb'al* (escuridão); 4 - *k'an* (grão de milho); 5 - *chikchan* (serpente); 6 - *kimi* (morte); 7 - *manik'* (veado); 8 - *Lamat* (Vênus); 9 - *muluk* (jade); 10 - *ok* (cachorro); 11 - *chuwen* (macaco); 12 - *eb'* (caveira); 13 - *b'en* (junco); 14 - *ix* (jaguar); 15 - *men* (pássaro); 16 - *kib'* (ancestrais); 17 - *Kab'an* (Terra); 18 - *etz'nab'* (faca de obsidiana); 19 - *kawak* (raio). *Ajaw*, tem equivalência ao zero, é considerado um dia que marca o começo e/ou o final dos ciclos. No entanto, com relação ao calendário *tzolk'in*, *Ajaw* é considerado o vigésimo dos vinte dias, pois o número vinte está intimamente relacionado ao zero, por ser o número que inaugura as ordens de conversão, portanto, *imix* é o primeiro dia deste calendário. A Tabela 2.9 exemplifica como se dá a sequência dos dias no calendário *tzolk'in*.

Tabela 2.9: Calendário maia *tzolk'in*.

Ciclo-13 dias	**Ciclo-20 dias**	**Ciclo-13 dias**	**Ciclo-20 dias**
1	*imix* (1)	1	*ix* (14)
2	*ik'* (2)	2	*men* (15)
3	*akb'al* (3)	3	*kib'* (16)
4	*k'an* (4)	4	*Kab'an* (17)
5	*chikchan* (5)	5	*etz'nab'* (18)
6	*kimi* (6)	6	*kawak* (19)
7	*manik'*(7)	7	*Ajaw* (0)
8	*Lamat* (8)	8	*imix* (1)
9	*muluk* (9)	9	*ik'* (2)
10	*ok* (10)	10	*akb'al* (3)
11	*chuwen* (11)	11	*k'an* (4)
12	*eb'* (12)	12	*chikchan* (5)
13	*b'en* (13)	13	*kimi* (6)

Fonte: adaptada de Cavalcante (2012).

Quando um dos ciclos (de 13 ou 20 dias) é finalizado, recomeça-se sua contagem não importando a posição em que se encontra o outro ciclo, observa-se na Tabela 2.9, onde o dois ciclos correm simultaneamente e combinando-se até que o dia *13 - Ajaw* ocorra sendo o último dos 260 dias e que preceda o retorno a *1 - imix*. O que justifica a duração de *tzolk'in* ser de 260 dias (13 × 20). A Figura 2.20 representa a Tabela 2.9, ou seja, mostra esta combinação entre o ciclo de 13 dias, com seus números de 1 a 13 representados símbolos em ponto e barra, e o ciclo de 20 dias, com os glifos .

Devido a necessidade de um calendário solar foi que o povo maia desenvolveu o *ja'ab'* palavra que significa "ano". Este calendário, culturalmente familiar, tem uma duração de 365 dias divididos em 18 meses de 20 dias, respeitando a base vigesimal, o que resulta em 360 dias, os 5 dias restantes formam um curto período de transição entre os anos. Portanto, o *ja'ab'* tem 19 meses, onde o último é um mês atípico, fugindo à

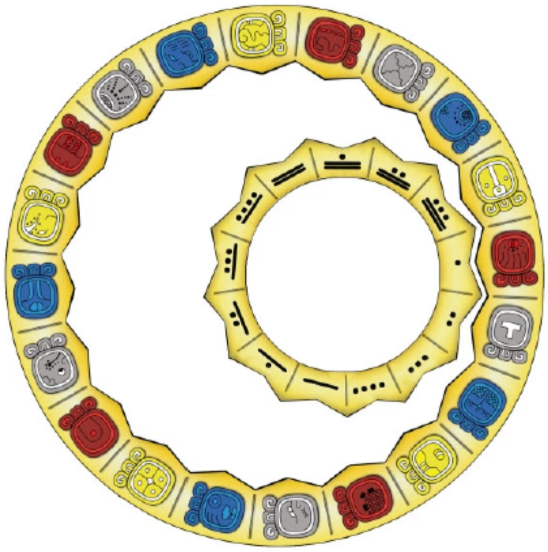


Figura 2.20: Calendário maia *tzolk'in*.

Fonte: http://phontlife.blogspot.com.br[7] (Acesso em 20/11/2016).

base vigesimal para acrescentar os 5 dias que faltam para completar o calendário de 365 dias. Os vinte dias de cada mês são contados de 0 a 19 e no caso do último mês, de 0 a 4. Logo, o primeiro dia do ano é o "*0 - pop*", sendo *pop* o primeiro mês, e o último dia do ano é "*4 - wayeb'*", sendo *wayeb'* o último mês deste calendário. Figura 2.21 apresenta a lista completa dos meses do *ja'ab'*, com seus nomes em língua *yukateka* e seus hieróglifos correspondentes.

Figura 2.21: Os meses do calendário maia *ja'ab'*.

Fonte: retirada de Cavalcanti (2012).

A partir de uma combinação entre os calendários *tzolk'in* e *ja'ab'* surgiu o *junab'*, que consiste em um ciclo de 18 980 dias (ou 52 anos de 365 dias). Desse modo, o ciclo de 52 anos tem como função sincronizar os ciclos de 260 e 365 dias. Como todos os calendários que ocorrem simultaneamente, o primeiro dia de cada ano no *ja'ab'* equivale a um dia específico no *tzolk'in*. Mais do que apenas um dia que acompanha a data, torna-se um dia que marca sua influência sobre todo o ano. É o dia do *tzolk'in* correspondente ao dia *0 - pop* no *ja'ab'* que determina o ano, lhe dando nome, fornecendo suas características e tendências. Entretanto, nem todos os dias do *tzolk'in* que coincidem com *0 - pop*. A explicação para isto vem da diferença entre 260 e 365 ser de 105 dias, que no sistema matemático maia equivale a 5 ciclos de 20 dias com mais um de 5 dias, pois estes 5 dias restantes fazem com que o grupo de marcadores de ano seja restrito a 4 dos 20 glifos do *tzolk'in*, tendo em vista que 5 é a quarta parte de 20 (observe que $365 \cong 5 \bmod 20$).

O grupo de marcadores de ano era composto pelos dias *ik'*, *manik'*, *eb'* e *Kab'an*, havendo uma distância de cinco dias entre cada um dos glifos, com o retorno a *ik'* após um ano *Kab'an*. Essa diferença de 105 dias entre *tzolk'in* e *ja'ab'* faz com que o número que acompanha o glifo do *tzolk'in* avance de um em um, enquanto o glifo avança de cinco em cinco. Por exemplo, se estiver em um ano *13 - eb'*, os próximos anos serão *1 - Kab'an*, *2 - ik'*, *3 - manik'*, *4 - eb'*, *5 - Kab'an*, *6 - ik'*, *7 - manik'*, *8 - eb'*, *9 - Kab'an*, *10 - ik'*, *11 - manik'*, *12 - eb'*, *13 - Kab'an*, *1 - ik'*, etc. Seriam necessários 52 anos até que voltasse a um mesmo ano *13 - eb'*, pois o grupo de marcadores é formado por 4 glifos que giram pelos 13 números que compõem o *tzolk'in*, o que resulta em $4 \times 13 = 52$, significando que existem 52 marcadores únicos, sendo também o sentido matemático da roda calendárica de 52 anos.

Para que este ciclo se complete, deve-se passar 52 ciclos do *ja'ab'* ou 73 ciclos do *tzolk'in*, totalizando 18 980 dias, isto é, o mínimo múltiplo comum aos ciclos de 365 e 260 dias, portanto, existem 18 980 combinações únicas entre os dois ciclos. O marco inicial da roda calendárica é *1 - Kab'an 0 - pop*, no chamado sistema de *tikal*, que é utilizado pelos acadêmicos como sistema maia do período clássico.

2.7.6 Calendário asteca

De acordo com Donato (1993), foi em 1519 (época das primeiras invasões espanholas e portuguesas), quando Hernán Cortez tentou, com cerca de 500 soldados, 13 cavalos e 6 canhões, a conquista do império asteca, quando encontrou uma região culturalmente enriquecida, com obras monumentais e uma espécie nativa de hieróglifos (principalmente relacionados a números e datas). O calendário asteca era vigente em todas as tribos deste império.

Este calendário era basicamente igual ao dos maias. O ano asteca possuí início no solstício de inverno com um ciclo de 18 meses de 20 dias cada e mais um mês de 5 dias, esses cinco dias suplementares eram denominados *nemotemi* ou "dias vazios". Da junção de 104 anos comuns obtinham um grande ciclo no qual intercalavam 25 dias, o que forneceu ao ano trópico asteca uma grande precisão, pois o ciclo sagrado de 260 anos continha, em relação ao movimento do Sol, uma imperfeição de somente 0,01136 de dia.

$$365 \text{ dias x } 104 \text{ anos} + 25 \text{ dias} = 37\ 985 \text{ dias}$$
$$37\ 985/104 = 365{,}240384615$$

Tabela 2.10: Os dias do calendário asteca e seus significados.

Dias	**Nomes**	**Significados**	**Dias**	**Nomes**	**Significados**
1	*cipactli*	crocodilo	11	*ozomahtli*	macaco
2	*ehecatl*	vento	12	*malinalli*	capim
3	*calli*	casa	13	*acatl*	bambu
4	*cuetzpalin*	lagarto	14	*ocelotl*	jaguar
5	*coatl*	cobra	15	*cuauhtli*	águia
6	*miquiztli*	morte	16	*cozcacuauhtli*	falcão
7	*mazatl*	cervo	17	*ollin*	terremoto
8	*tochtli*	coelho	18	*tecpatl*	faca
9	*atl*	água	19	*quiahuitl*	tempestade
10	*itzcuintli*	cachorro	20	*xochitl*	flor

Fonte: retirada de Donato (1993).

O calendário asteca dava aos dias do mês nomes próprios (ver Tabela 2.10) que correspondiam a números de ordem no decorrer do mês. Os dias corriam de 1 a 20, e os festivais eram comemorados no último dia do mês. Para citar ou escrever uma data, não seguiam a prática comum aos maias, dava-se primeiramente o ano em curso, depois o número e por fim o nome do dia. O dia do mês e o mês não eram mencionados, como havia 260 dias no *tzolk'in*, e o ano era composto de 360 dias, o nome do dia com seu número respectivo podiam ocorrer duas vezes no mesmo ano. Derivava daí uma possibilidade de erro que não existia no calendário maia. Os nomes dos meses deste calendário estão relacionados na Tabela 2.11.

Tabela 2.11: Os meses do calendário asteca.

Ordem	**Nomes**	**Ordem**	**Nomes**
1	*izcalli*	10	*tlaxochimaco*
2	*atlcahualo*	11	*xocotlhuetzi*
3	*tlacaxipehualiztli*	12	*ochpaniztli*
4	*tozoztontli*	13	*teotleco*
5	*hueytozoztli*	14	*tepeilhiuitl*
6	*toxcatl*	15	*quecholli*
7	*etzalcualiztli*	16	*panquetzaliztli*
8	*tecuilhuitontli*	17	*atemoztli*
9	*hueytecuilhuitl*	18	*tititl*

Fonte: retirada de Donato (1993).

2.8 Civilizações antigas

Outros povos primitivos também desenvolveram seus próprios calendários como hindu, assírio, chinês, judaico, incaico, etc. Alguns ainda são utlizados outro não, estima-se que existam atualmente aproximadamente 40 calendários em uso pelo mundo todo (JÚNIOR, 2012). Portanto, tem-se que muitos calendários no decorrer dos séculos foram criados pelo ser humano, entretanto, não é o propósito aqui descrever todos eles, apenas conseguir conhecimento para entender o que levou ao desenvolvimento dos calendários que estão até hoje em uso.

2.9 Medição do tempo

A ideia de tempo funciona de forma rítmica, os ciclos da natureza marcam as estações do ano, ou seja, a diferença entre o dia e a noite, e as fases da Lua. Ao ter o ano com os meses divididos em semanas, semanas em dias, dias divididos em horas, horas em minutos, minutos em segundos, pode se ter registrado o tempo. Porém, existe a dúvida se o tempo é somente uma inveção ou se pode ser definido com um caráter próprio (BARRETO, 2010).

Durante o Congresso dos Naturalistas e Médicos Alemães de Colônia, em 1908, as ideias de Albert Einstein sobre o tempo foram expostas, apesar de formuladas em 1905. Para Einstein os conceitos de espaço e tempo existem somente se há uma espécie de união entre os dois, ainda, mostra que para um observador os ponteiros de um relôgio em movimento avançarão mais lentamente do que os ponteiros de um relôgio imóvel. Assim, propõe que o tempo se dilata conforme um fator "gama" (F), dada pela Equação (2.1).

$$F = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{2.1}$$

onde v a velocidade; e c a velocidade da luz ($c = 300\ 000$ km/s).

E o tempo do objeto em movimento (t) é obtido pela Equação (2.2):

$$t = t_0 \cdot F \tag{2.2}$$

onde t_0 é o tempo do objeto imóvel.

Por exemplo, ao imaginar duas pessoas, uma em repouso em relação à Terra e outra que parte em viagem espacial dentro de uma nave. Se a velocidade (v) da nave for desprezível em relação à velocidade da luz (c), então "gama" é muito próximo de 1 (um). Portanto, $t = t_0$, ou seja, o tempo da pessoa que fica na Terra concorda em seu fluir com o tempo da pessoa que está na nave. Entretanto, se a velocidade da nave for próxima em relação à velocidade da luz, o tempo da pessoa que está em seu interior passará mais lentamente do que o tempo da pessoa que ficou na Terra (t é maior que

t_0). Se t é maior do que t_0, significa que cada segundo em "t" está dilatado, ou seja, "t" é maior e nele cabem muitos "t_0". Enquanto passa um segundo "t", para o observador em repouso passaram-se muitos. Este tempo pode ser marcado por um relógio de pulso ou pelo relógio biológico das pessoas. Considerando que o tempo da pessoa que viajou numa velocidade considerável passa mais lentamente, então seu envelhecimento será menor do que o da pessoa que ficou. Portanto, quando voltar de sua viagem, o navegante espacial, que tiver apenas algumas semanas mais velho, observará que a pessoa que ficou terá envelhecido muitos anos.

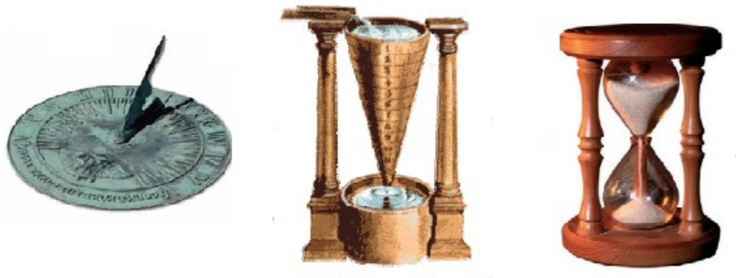
Em 1971 foi realizado um experimento sobre a dilatação do tempo que comprovou a teoria de Einstein. Assim, dois aviões a jato equipados com relógios de Césio partiram juntos e deram uma volta ao redor da Terra. No início e no fim das viagens, os relógios foram comparados com um relógio que ficou em repouso no Observatório Naval dos Estados Unidos, em Washington. O relógio enviado para leste perdera 59 bilionésimos de segundo ao ser comparado com o relógio de referência, e o enviado para o oeste ganhara 273 bilionésimo de segundo. Portanto, segundo Eintein o tempo se manifesta nas coisas e nos seres vivos, porem se manifesta de forma diferente em cada coisa, em cada ser, sendo relativo à circunstância em que cada coisa ou ser se localiza. Desta maneira, o tempo precisa das coisas para existir e não é absoluto nem exterior as coisas.

2.9.1 Instrumentos de contar o tempo

Os Romanos e os egípcios observavam as horas no relógio de Sol, o primeiro data de 3500 a.C., também denominado quadrante, pedra horária, gnômon, ou solarium. O qual consistia num ponteiro fixo no centro de uma superfície convexa ou plana dividida em doze partes, que media a hora do dia a partir da sombra existente, fundamentado na variação da posição do Sol com relação à Terra em cada instante. A medida que o Sol avançava no céu, o ponteiro projetava uma linha de sombra, superando sucessivamente os espaços marcados e que poderia ser chamado de "hora", como na Figura 2.22(a) (DONATO, 1993).

Para os dias sem Sol existia, em 1500 a.C., o relógio de água, chamado clepsidra (*clepsydra*), ilustrado na Figura 2.22(b), que consistia num recipiente de couro, pedra trabalhada, madeira ou terra argilosa cozida, cheio de água, colocado sobre outro recipiente marcado. Do recipiente superior a água gotejava para o inferior alcançando as sucessivas marcações, assim indicando o passar do tempo. Após algumas observações, pode-se notar que as clepsidras não mensuravam o tempo com a precisão necessária para época. A água utilizada a partir de certo momento, dizia-se que "perdia o folego", pois a proporção que o liquido baixa no reservatório perde pressão e, consequentemente, com esta perda a "velocidade" do funcionamento diminui. Portanto, o valor dos segundos se faz irregular, variando conforme a altura da água no reservatório.

As clepsidras na verdade não ofereciam horas certas, pois facilmente desacertava se a água escorresse com maior ou menor volume, no segundo caso, era necessário manter o volume de água sempre ao mesmo nível para manter o relógio certo.



(a) Relógio de Sol. (b) Clepsidra. (c) Ampulheta.

Figura 2.22: Exemplos de artefatos capazes de “medir” o tempo.
Fonte: retirada de Alves (2014).

Conforme Ribeiro (2015), a invenção do relógio de areia ou ampulheta (*ampulla*), apresentado na Figura 2.22(c), foi atribuída a Luitprand, um monge da região de Chartres, na França, que viveu no século VIII. Porém, no Oriente, onde existia muita areia e pouca água, que a ampulheta foi muito utilizada para medir as unidades de tempo. Essa foi desenvolvida com o mesmo princípio da clepsidra, ou seja, era constituída por dois cones de vidro sobrepostos, ligados um ao outro por um orifício muito fino que deixava escoar a areia, conforme uma determinada unidade de tempo. A quantidade de areia e a espessura do orifício, assim como o tamanho da ampulheta, definiam o tempo que levaria para a areia passar totalmente de um compartimento para o outro. Desse modo, haviam ampulhetas que marcavam o tempo de meia, uma, duas, três e até 24 horas. As ampulhetas controlavam o tempo com melhor precisão e eram mais fáceis de transportar do que os quadrantes ou as clepsidras.

Durante muitos anos diversos tipos de relógio foram desenvolvidos baseados em diferentes medidas de passagem de tempo, muitos deles, assim como foi visto, utilizavam o Sol, o escoar dos líquidos, areia ou a queima de fluidos para a contagem do tempo. Entretanto, nenhum desses apresentava uma técnica muito apurada (ALVES, 2014).

Por outro lado, os trabalhos em função de achar um novo mecanismo com maior precisão na medida do tempo nunca pararam e muitas foram as evoluções. Por exemplo, em 1509, o alemão, de Nurembergue, Peter Henlein desenvolveu o relógio de bolso, chamados de “ovos de Nurembergue”, este era feito de ferro e tinha apenas o indicador de hora. Em 1583, as observações de Galileu Galilei sobre o princípio da regularidade da oscilação acabou contribuindo para que o astrônomo e matemático holandês Christian Huygens, em 1647, produzisse o relógio de pêndulo. Por sua vez, em 1675, o inglês Thomas Tompion conseguiu aprimorar o invento de Henlein introduzindo os ponteiros dos minutos (DONATO, 1993).

Em função da necessidade de uma maior precisão, já que alguns fenômenos como abalos sísmicos muito intensos e, consequentemente, tsunamis alteram (retardam) alguns movimentos (rotação e translação), houve uma substituição destes artefatos pelo relógio atômico, já que o níves atômicos de energia estão imunes a estas variações.

De acordo com Bebeachibuli (2003), o primeiro relógio atômico surgiu em 1949, desenvolvido por Harold Lyons, usando o átomo como elemento básico para a contagem do tempo, utilizando moléculas de amônia. Mas foram Louis Essen e John Parry, em meados da década de 50, que construiram uma versão mais aprimorada desenvolvida a partir do átomo de césio. Deste modo, durante a 13ª Conferência Geral de Pesos e Medidas, em 1967, o segundo passou a ser baseado na transição hiperfina do átomo de césio, ou seja, o segundo ficou redefinido como a duração de 9 192 631 770 períodos da radiação emitida ou absorvida na transição entre os dois níveis hiperfinos do estado fundamental do átomo de césio-133.

Quando esta definição foi aderida, a escolha pelos átomos de césio apresentava várias vantagens, que, ainda hoje, continuam sendo levadas em consideração, as quais são:

(i) Os átomos de césio são encontrados em abundância na sua forma natural, além de sua pureza isotópica a tornar um átomo fácil de ser manuseado;

(ii) A sua frequência de ressonância de transição hiperfina é muito elevada de modo que seu fator de qualidade atômico seja alta (aproximadamente 10^7), o que favorece a precisão e a estabilidade do relógio;

(iii) Devido aos átomos de césio possuirem a pressão de vapor elevada à temperatura ambiente, é possível conseguir feixes atômicos deste elemento com velocidade relativamente baixa em um jato térmico (aproximadamente 200 $\text{m}{\cdot}\text{s}^{-1}$).

Conforme Martins e Zanetic (2002), em um relógio atômico típico, utiliza-se um campo magnético apropriado para selecionar um feixe de vapor de césio, aqueles átomos capazes de absorver microondas de uma dada frequência fundamental v_0. Após atravessar o campo de microondas, os átomos que sofreram a transição desejada são desviados por outro campo magnético em direção a um detector. Um circuito de retro-alimentação é usado para maximizar o número de átomos que chegam ao detector, regulando a frequência de microondas cada vez que esse número diminui. Essa frequência é mantida ajustada, dentro da maior precisão possível, àquela frequência v_0. Acopla-se a esse campo de microondas um dispositivo eletrônico (divisor de frequências) que, essencialmente, faz a contagem dos pulsos, gerando pulsos temporais. Deste modo, estabelece-se a relação 9 192 631 770 períodos da radiação igual a 1 segundo (uma série de experimentos realizados entre 1955 e 1958 relacionou a frequência v_0 com o segundo, conforme definido astronomicamente à época). Resumindo, as oscilações a que esses átomos são submetidos são de exatas 9 192 631 770 vezes por segundo. A cada vez que ocorrem essas oscilações, o relógio conta um segundo. O que também permite que o segundo seja dividido em 9 192 631 770 unidades.

Os relógios atômicos que formam (e controlam) uma escala de tempo chamada Tempo Atômico Internacional (TAI-Temps Atomic International) podem ser encontrados em vários laboratórios pelo mundo. A coordenação de um tempo internacional, baseado nessa escala, está sob responsabilidade do Bureau Internacional de Pesos e Medidas (BIPM - Bureau International de Poids et Mesures), localizado na França. Existem ainda outras escalas de tempo, baseadas no movimento de rotação da Terra, e que são mantidas coordenadas com o TAI por meio de uma outra escala, denominada Tempo Universal Coordenado (UTC).

Segundo Pimenta (2004), a Terra está sofrendo uma desaceleração gradual em sua velocidade de rotação , entretanto, a vida do ser humano depende do ciclo dia-noite. Devido a esse fenômeno, de tempos em tempos há necessidade de se fazer um ajuste nos relógios atômicos para sincronizá-los com a rotação decrescente do planeta. Vários são os fatores que contribuem para as variações ocorridas na velocidade de rotação da Terra. Alguns introduzem mudanças seculares e de longo período, enquanto outros refletem apenas variações sazonais e de curto período. Como foi visto em seções anteriores deste trabalho, as causas mais relevantes estão relacionadas a precessão, nutação e, sendo, ainda, os fatores seculares é dado ao fenômeno das marés, por provocar os efeitos mais acentuados nessa escala de tempo.

3 O movimento dos astros

A astronomia, a mais antiga das ciências e que significa estudo dos fenômenos celestes, como movimentos planetários, eclipses e outros, tem grande importância na formulação do calendário. Os registros astronômicos mais antigos datam de cerca de 3000 a.C. e se devem aos chineses, babilônios, assírios e egípcios. Assim, as observações de alguns conceitos matemáticos que envolvem tal tema, por exemplo, as formas elípticas geradas pelas órbitas dos planetas em torno do Sol são de grande relevância para o conhecimento dos alunos do ensino fundamental e médio.

3.1 Astrônomos da Grécia antiga

De acordo com Kepler e Saraiva (2014), pelo que se tem conhecimento, foram o gregos os primeiros a formularem sistemáticos modelos explicativos para os movimento dos astros. Na sequência apresenta-se a visão dos principais astrônomos gregos sobre este assunto.

Tales de Mileto (624 - 546 a.C.), foi o primeiro matemático cujo nome ficou registrado na história. Tales introduziu na Grécia os fundamentos da geometria, da aritmética e da astronomia, que aprendera com os egípcios. Pensava que a Terra era um disco plano em uma vasta extensão de água. Com seu discípulo Anaximandro (610 - 546 a.C), também de Mileto, foram os primeiros a propor modelos celestes baseados no movimento dos corpos celestes e não em manifestações dos deuses. Anaximandro descobriu a obliquidade da eclíptica (inclinacão do plano do equador da Terra em realação à trajetória anual aparente do Sol no céu), e ainda, Tales, previu o eclipse solar que ocorreu sobre a Grécia e a Mesopotâmia no dia 28 de maio de 585 a.C..

Pitágoras de Samos (572 - 497 a.C.), introduziu na astronomia grega o conceito de esfericidade da Terra, também acreditava que a Lua e outros corpos celestes fossem esféricos. Além disso, achava que os planetas, o Sol, e a Lua eram transportados por esferas separadas da que carregava as estrelas. Enfatizou a importância da matemática na descricão dos modelos cosmológicos que pudessem ser comparados com os movimentos observados dos corpos celestes, em cuja regularidade via uma “harmonia cósmica”.

Os pitagóricos (seguidores de Pitágoras) foram os primeiros a chamar o Universo de "cosmos", palavra que implicava ordem racional, simetria e beleza (KEPLER e SARAIVA, 2014).

Anaxímenes de Mileto (570 - 500 a.C.), o primeiro entre os gregos a apontar diferença entre os planetas e as estrelas. Para ele, as estrelas não esquentavam, por estarem muito mais distantes do Sol do que os planetas (SILVA, 2014).

Filolaus de Cretona (470 - 390 a.C.), trouxe a Grécia a ideia do movimento da Terra, do qual imaginava que a Terra girava em torno de seu próprio eixo e, com o Sol, a Lua e os planetas, girava em torno de um "fogo central" que seria o centro do Universo e fonte de toda a luz e energia encontrada.

Eudóxio de Cnidos (408 - 344 a.C.), o primeiro a propor que a duração do ano seria de 365 dias e 6 horas. Também explicou os movimentos observados do Sol, da Lua e dos planetas através de um complexo sistema de 27 esferas concêntricas (três para o movimento do sol, três para a lua, quatro para cada um dos cinco planetas conhecidos na época e uma esfera para o movimento das estrelas) que se moveriam com diferentes velocidades em torno da Terra (fixa no centro).

Aristóteles de Estagira (384 - 322 a.C.), sistematizou o conhecimento astronômico de seu tempo, procurando explicações racionais para todos os fenônomenos naturais existentes. Aristóteles afirmava que a Terra se encontrava imóvel (geostatismo) e que o Sol, a Lua, os planetas e as estrelas se moviam em órbitas circulares em volta desta; assim pensava, porque achava que, por razões místicas, a Terra era o centro do Universo e que o movimento circular era o mais perfeito (HAWKING, 1994). Isto significa que a Terra estaria no centro do Universo e os planetas girariam em torno dela, na seguinte ordem: Lua, Mercúrio, Vênus, Sol, Marte, Júpter, Saturno e a última esfera é das estrelas, como pode ser observado na Figura 3.1.

Aristóteles também explicou que as fases da Lua dependem de quanto da parte da face da Lua iluminada pelo Sol está voltada para a Terra. Também explicou os eclipses: que um eclipse do Sol ocorre quando a Lua passa entre a Terra e o Sol; que um eclipse da Lua ocorre quando a Lua entra na sombra da Terra. Concordava com o conceito de esfericidade da Terra, pois observou que a sombra da Terra na Lua durante um eclipse lunar é sempre arredondada. E ainda, rejeitou a ideia do movimento da Terra como alternativa ao movimento das estrelas argumentando que, se a Terra estivesse em movimento, os corpos cairiam para trás ao serem largados, e as estrelas deveriam apresentar movimentos aparentes entre, porém não era observado.

Para Aristóteles haveria uma região entre a Terra e a Lua (sublunar) e outra a

Figura 3.1: Universo Aristotélico.

Fonte: adaptado de http://www.benitopepe.com.br[1] (Acesso: jul/2016).

partir dela (supralunar). A região supralunar, onde estão localizadas as estrelas, seria imutável, isto é, não seria possível aparecer nela um novo objeto ou dela desaparecer. Por exemplo, um cometa seria um fenômeno ocorrido entre a Terra e a Lua. Os fenômenos que acontecessem nessa região seriam chamados de meteorológicos (ARTUSO e WRUBLEWSKI, 2013).

Aristarco de Samos (310 - 230 a.C.), o primeiro grego a propor um modelo heliocêntrico consistente para o sistema solar, deste modo antecipou Copérnico em quase 2000 anos. Acreditava que os planetas estavam arranjados em ordem de distância com relação ao Sol que é aceita hoje. Aristarco desenvolveu um método para determinar as distâncias relativas do Sol e da Lua com relação à Terra que o aproxima dos astrônomos modernos na solução de problemas astronômicos. Também mediu os tamanhos relativos da Terra, do Sol e da Lua, e mesmo achando valores muito abaixo dos atuais para o tamanho do Sol em relação à Lua (apenas 30 vezes maior), pode concluir que o Sol não poderia estar orbitando a Terra porque um corpo tão grande como o Sol não poderia girar em torno de um corpo tão pequeno como a Terra.

Eratóstenes de Cirênia (276 - 194 a.C.), era bibliotecário e diretor da Biblioteca Alexandrina de 240 a.C. a 194 a.C.. Foi o primeiro a medir o diâmetro da Terra, notou que, na cidade egípcia de Siena (atualmente chamada de Aswân), no primeiro dia do verão, ao meio-dia, a luz solar atingia o fundo de um grande poço, ou seja, o Sol estava incidindo perpendicularmente à Terra em Siena. Logo, em Alexandria, situada ao norte de Siena, isso não ocorria; medindo o tamanho da sombra de um bastão na vertical, Eratóstenes observou que em Alexandria, no mesmo dia e hora, o Sol estava aproximadamente 7 graus mais ao sul. A distância entre Alexandria e Siena era conhecida como de 5 000 estádios. Um estádio era uma unidade de medida utilizada na Grécia antiga.

O espaço entre 5 000 estádios equivalia à distância de cinquenta dias de viagem de camelo, que viaja 16 km/dia. Como graus corresponde a 1/50 de uma circunferência (360^o), Alexandria deveria estar a 1/50 da circunferência da Terra ao norte de Siena, e a circunferência da Terra deveria ser $50 \times 5\ 000$ estádios. Porém, não é possível se ter certeza do valor do estádio usado por Eratóstenes, já que na Grécia usavam diferentes tipos de estádios. Se ele utilizou um estádio equivalente a 1/6 km, o valor está a 1% do valor correto de 40 000 km. O diâmetro da Terra é obtido dividindo-se a circunferência por π.

Hiparco de Nicéia (160 - 125 a.C.), considerado o maior astrônomo da era pré-cristã, construiu um observatório na ilha de Rodes, onde fez observações durante o período de 160 a 127 a.C. Como resultado, gerou um catálogo com a posição no céu e a magnitude de 850 estrelas. A magnitude, que especificava o brilho da estrela, era dividida em seis categorias, de 1 a 6, sendo 1 a mais brilhante e 6 a mais fraca visível a olho nu. Também deduziu a direção dos pólos celestes e até mesmo a precessão, que é a variação da direção do eixo de rotação da Terra devido à influência gravitacional da Lua e do Sol, que leva 26 000 anos para completar um ciclo. Para deduzir a precessão, comparou as posições de várias estrelas com aquelas catalogadas por Timocharis de Alexandria e Aristyllus de Alexandria cerca de 150 anos antes (entre 283 a.C. e 260 a.C.). Timocharis e Aristyllus eram membros da Escola Alexandrina durante o século III a.C. e foram os primeiros a medir as distâncias das estrelas de pontos fixos no céu (coordenadas eclípticas). E também, foram dos primeiros a trabalhar na Biblioteca de Alexandria, que se chamava Museu, fundada pelo rei do Egito, Ptolémée Sôter Ier, em 305 a.C. (KEPLER e SARAIVA, 2014).

Claúdio Ptolomeu (85 - 165 d.C.) foi o último astrônomo importante da antiguidade, porém não se sabe se era egípcio ou romano. Gerou uma série de treze volumes sobre astronomia, conhecida como o "*Almagesto*", maior fonte de conhecimento sobre a astronomia na Grécia. Sua mais importante contribuição foi uma representação geométrica do sistema solar, com circunferências, epiciclos e equantes, que permitia predizer o movimento dos planetas com considerável precisão, conforme pode ser observado na Figura 3.2. Esse modelo foi usado até o renascimento (século XVI).

3.1.1 Modelo geocêntrico

O geocentrismo, a teoria que tem a Terra como centro do Universo, teve um sistema dominante na astronomia durante toda a antiguidade e idade média. O sistema geocêntrico é também conhecido como sistema ptolemaico, pois foi devido a Ptolomeu, o último grande astrônomo grego, que esta estrutura ficou mais completa e eficiente para a época.

Segundo Kepler e Saraiva (2014), Ptolomeu acreditava que o movimento dos pla-

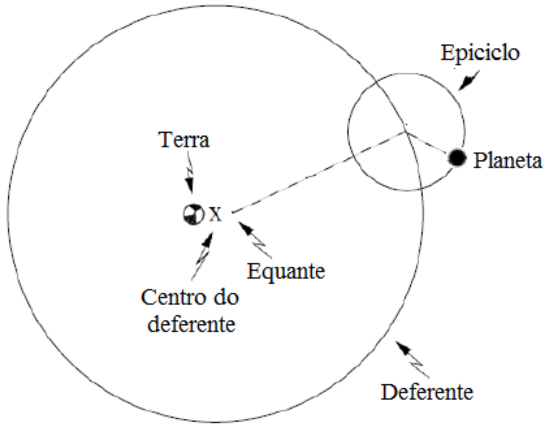


Figura 3.2: Modelo geocêntrico de Ptolomeu.
Fonte: adaptado de http://astro.if.ufrgs.br/p1/p1.htm (Acesso: jul/2016).

netas ocorria através de combinações de circunferências, que envolvia a Terra e mais oito esferas, ou seja, a Lua, o Sol, as estrelas e os cinco planetas até então conhecidos (Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter e Saturno). Neste sistema os planetas se movem ao longo de uma pequena circunferência chamado epiciclo, cujo centro se move em uma circunferência maior chamado deferente. A Terra fica numa posição um pouco afastada do centro do deferente (portanto, o deferente é um círculo excêntrico em relação à Terra). O modelo de Ptolomeu, até então, não diferia do modelo usado por Hiparco aproximadamente 250 anos antes, porém há uma novidade introduzida por Ptolomeu, o equante, que é um ponto ao lado do centro do deferente oposto em relação à Terra, ao qual o centro do epiciclo se move a uma taxa uniforme, e que tinha o objetivo de dar conta do movimento não uniforme dos planetas (Figura 3.2). Os planetas girariam em torno do equante com velocidade angular constante (SILVA, 2014).

Para Hawking (1994), Ptolomeu errou ao partir do princípio de que a Lua seguia uma trajetória que, por vezes, a Lua se encontrava duas vezes mais próxima do que em outras e, por consequência, teria ocasiões em que a Lua pareceria duas vezes maior do que outras. Esta falha não impediu seu modelo de ser aceito, embora não universalmente. A Igreja Cristã o adotou como modelo Universal de acordo com a Bíblia.

Artuso e Wrublewski (2013) diz que Ptolomeu, assim como Aristóteles, acreditava que a Terra se mantinha estática. Um argumento para defender este ponto de vista seria o de que, se a Terra tivesse o movimento de rotação, para vencer todo esse circuito de giro, sua velocidade deveria ser muito grande e, por isto, os objetos sobre o planeta ou os lançados para o alto deveriam se dipersar. O que não seria um argumento totalmente sem senso, pois, por exemplo, uma pessoa ao colocar uma bolinha na palma de uma das suas mãos, mantendo-a aberta e girando o braço na horizontal em torno de seu próprio eixo o mais rápido possível, esta escapará da mão. Para mantêr a bolinha no movimento circular seria preciso exercer uma força sobre ela.

No entanto o objetivo de Ptolomeu era o de produzir um modelo que permitisse prever a posição dos planetas de forma correta e, nesse ponto, ele foi razoavelmente bem-sucedido. Por essa razão, esse modelo continuou sendo usado sem mudança substancial por aproximadamente 1300 anos.

3.1.2 Modelo heliocêntrico

Durante o renascimento, início do século XIV, surgiram novas ideias em todas as áreas do conhecimento humano e o polonês Nicolau Copérnico (1473 - 1543) representou a astronomia muito bem neste período. Com grande inclinação para a matemática, durante seus estudos na Itália, Nicolau teve acesso à obra de Cláudio Ptolomeu *"O Almagesto"* e também leu sobre a proposta do modelo heliocêntrico de Aristarco de Samos, e assim, concluiu que o Sol no centro do Universo era muito mais razoável do que a Terra. Copérnico registrou suas ideias no livro *"De Revolutionibus"* publicado no ano de sua morte. Entretanto, Copérnico manteve sua suposição de que as órbitas dos planetas eram circulares e, para obter posições razoáveis, teve que manter pequenos epiciclos, mas não usou equantes.

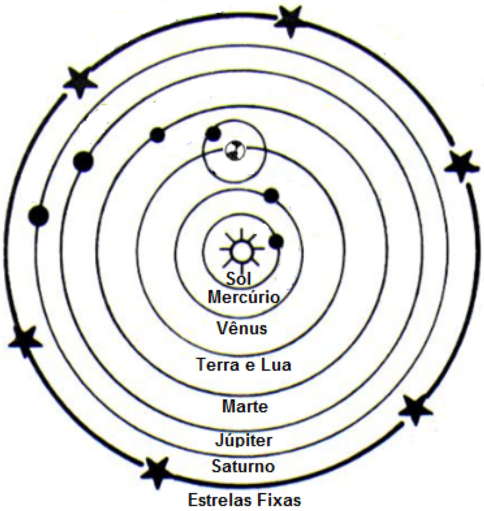


Figura 3.3: Modelo heliocêntrico de Copérnico.

Fonte: adaptado de http://alexiaeallant71.blogspot.com.br[2] (Acesso: jul/2016).

As colaborações astronômicas mais importantes de Copérnico foram:

- introduzir o conceito de que a Terra é apenas um dos seis planetas girando em torno do Sol;
- posicionar os planetas, até então conhecidos, em ordem de distância ao Sol: Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter, Saturno;
- determinar as distâncias dos planetas ao Sol, em termos da distância Terra-Sol;

- deduzir que quanto mais próximo do Sol está o planeta, maior é sua velocidade orbital. Dessa forma, o movimento retrógrado dos planetas foi facilmente explicado sem necessidade de epiciclos.

Devido a boa coerência em seu modelo e com o desenvolvimento de alguns instrumentos na área da astronomia, Copérnico teve vários seguidores, tais como, Galileu Galilei, Giordano Bruno, Johannes Kepler e outros.

Dentre eles, italiano Galileu Galilei (1564 - 1642) foi físico, matemático, astrônomo, filósofo e sua importância para a ciência o levou, muitas vezes, ser chamado de pai da ciência durante a Idade Moderna (XV - XVIII). Se interessou e conseguiu um exemplar de um aparelho utilizado pelos holandeses (grandes navegadores da época), capaz de aumentar objetos distantes. Aperfeiçoou o tal instrumento inventando assim o telescópio (uma luneta rústica, hoje exposta em um museu em Florença, na Itália). Então, com o uso de um telescópio Galileu estudou a Lua e fez desenhos de suas crateras. Essa observação ficava contrária a ideia de Ptolomeu de esferas perfeitas. Galileu identificou luas em Júpiter, o que o levou a pensar que, se existe algum corpo celeste com satélites próprios, então a Terra também poderia estar em órbita. Estudou e cartografou as fases de Vênus e seus estudos e previsões eram coerentes com um modelo centrado no Sol.

De acordo com Barreto (2010) em fevereiro de 1632 Galileu publicou o livro "*Diálogo sobre os dois máximos sistemas do mundo*" para explorar as visões centradas no Sol e na Terra, o que levou o Tribunal da Santa Inquisição a acusá-lo de heresia, obrigando-o a negar suas ideias. Então, é condenado a prisão domiciliar pelo resto de sua vida e seu livro foi acrescentado a lista de livros proibidos. Considerado transgressor do decreto de 1616 da sagrada congregação do *Index*, que proíbe a teoria de Copérnico.

O dinamarquês e astrônomo de renome Tycho Brahe (1546 - 1601), produziu mapas celestes de alta precisão. Tycho possuía seu próprio "sistema de mundo" e não era copernicano. Criou um modelo misto onde a Terra era o centro do Universo, o Sol girava em torno da Terra e os planetas giravam em torno do Sol. Passou a vida fazendo medidas astronômicas de grande valia para seu discípulo Kepler, que as pode usar após a sua morte.

Matemático genial e astrônomo de excelente percepção o alemão Johannes Kepler (1571 - 1630) é responsável por identificar e interpretar as leis que regem os movimentos dos corpos celestes. Seguidor de Copérnico e de posse das observações de Tycho consegue aprimorar a estrutura da astronomia heliocêntrica.

Kepler determinou que a órbita da Terra era aproximadamente circular. De fato, a trajetória da Terra em torno do Sol é uma elipse de pouca excentricidade (ver Tabela 3.1), ou seja, quase circular. Entretanto, ao observar a órbita de Marte percebeu que não era circular, porém esta tinha considerável excentricidade.

Definiu o "raio vetor" como um vetor que tem origem no Sol e extremidade em Marte (ou, generalizando, em qualquer outro planeta), como na Figura 3.5. Assim,

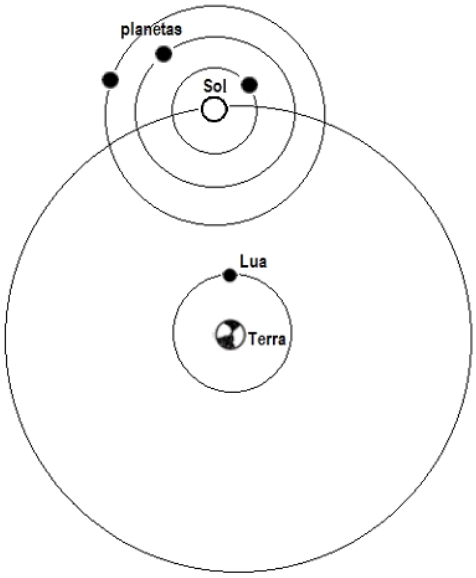


Figura 3.4: Modelo de Tycho Brahe.

Fonte: adaptado de http://soumaisenem.com.br[3] (Acesso: jul/2016).

Kepler percebeu que a área "varrida" pelo raio vetor é a mesma durante intervalos de tempo iguais. Isso o levou a concluir que, quanto mais próximo do Sol, mais rápido Marte faz seu trajeto.

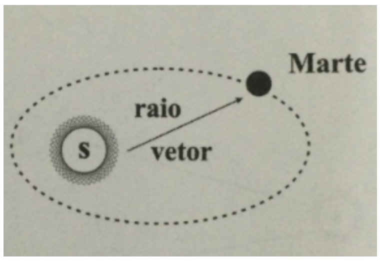


Figura 3.5: Raio vetor.

Fonte: retirado de Barreto (2010).

Observando Marte, Kepler tirou importantes conclusões, a primeira delas foi que a órbita de Marte não era circular como imaginava, mas uma órbita elíptica. Portanto, com esta conclusão, em 1609, enunciou a primeira lei de Kepler (lei das órbitas elípticas):

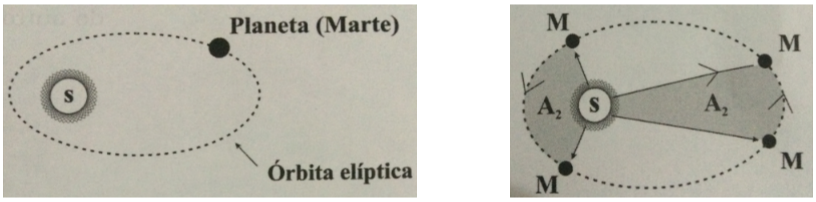
- Os planetas descrevem órbitas elípticas, estando o Sol num dos focos, (ver Figura 3.6(a)).

E ainda, Kepler concluiu que quando estava mais próximo do Sol, Marte tinha velocidade maior do que quando mais longe. Percebeu que havia uma relação entre a velocidade do planeta e sua distância até o Sol. No entanto, Kepler por ser anterior a Newton não usou o conceito de força gravitacional entre o Sol e Marte para explicar as variações na velocidade do planeta.

Tabela 3.1: Dados dos planetas do sistema solar.

PLANETA	RAIO DA ÓRBITA R (EM UA)	PERÍODO DE REVOLUCÃO T (EM ANOS)	T^3	R^3	EXCENTRICIDADE
Mercúrio	0,387	0,241	0,058	0,058	0,206
Vênus	0,723	0,615	0,378	0,378	0,007
Terra	1,000	1,000	1,000	1,000	0,017
Marte	1,524	1,881	3,537	3,537	0,093
Júpiter	5,203	11,862	140,70	140,80	0,048
Saturno	9,534	29,456	867,70	867,70	0,056
Urano	19,182	84,01	7058,0	7057,7	0,046
Neturno	30,058	164,8	27157	27159	0,010

Fonte: retirada de Artuso e Wrublewski (2013).



(a) Primeira Lei de Kepler. (b) Segunda Lei de Kepler.

Figura 3.6: Leis de Kepler.

Fonte: retirado de Barreto (2010).

Na Figura 3.6(b), é possível observar o trajeto de Marte num trecho distante do Sol (lado direito da figura) e num trecho próximo do Sol (lado esquerdo da figura). Kepler observou que, se as duas áreas são iguais ($A_1 = A_2$), então os tempos gastos nos trajetos da esquerda e da direita também são iguais. Entretanto, reparou que o espaço percorrido por Marte quando está mais longe do Sol é bem menor do que o espaço percorrido no trecho mais próximo do Sol. E ainda, como o tempo é igual, concluiu que a velocidade é menor, quando Marte está longe do Sol, e maior, quando está perto (BARRETO, 2010). A partir de tais fatos, ainda no ano de 1609, pode definir a segunda lei de Kepler (lei das áreas):

- Os raios vetores dos planetas varrem áreas proporcionais aos intervalos de tempo dos percursos.

Enquanto se passava a Guerra dos Trinta Anos (1618 - 1648), uma década após elaborar as duas primeiras leis, Kepler publicou a terceira lei (lei dos período ou lei harmônica):

- O quadrado do período de revolução (T) de cada planeta é proporcional ao cubo de sua distância média (D) do Sol.

Esta lei, que pode ser escrita como a Equação 3.1, determina que planetas com órbitas maiores se movem mais lentamente em torno do Sol e, portanto, isso implica que a força entre o Sol e o planeta decresce com a distância ao Sol.

$$\frac{T^2}{D^3} = K \tag{3.1}$$

Nascido na França, René Descartes (1596 - 1650) ao corrigir alguns erros de Galileu contribuiu muito para a física. Pois, para Galileu, além da inércia se aplicar a corpos livres de forças em movimento retilíneo uniforme, também acreditava que o movimento circular era inercial. Deste modo, para ele o movimento da Lua em torno da Terra era "natural".

Descartes percebeu que o movimento retilíneo é inercial e que o circular não. No entanto, desaprovava a hipótese da gravitação e defendia a "hipótese dos vórtices": os planetas "nadam" sem alternativa num infinito éter, ou "matéria inicial". Essa matéria cai numa série de redemoinhos ou vórtices nos quais os planetas se movimentam. Esse movimento, por ser dotado de maior tendência centrífuga que o planeta, o retinha em sua trajetória orbital, o que também explicaria a órbita dos planetas ao redor do Sol sem que se recorresse à força gravitacional (BARRETO, 2010).

A contribuição do inglês Isaac Newton (1643 - 1727) para a ciência também é vasta. Com sua Teoria da Gravitação Universal consegue explicação tanto para os movimentos celestes quanto terrestres e ainda para queda dos corpos, desta forma amplia a aceitação do modelo copernicano de heliocentrismo. Além disso, sua nova teoria justifica de maneira inédita, as órbitas elípticas, as marés e outros diversos fenômenos.

Ao enunciar que a força de atração entre dois corpos depende do produto das massas e do inverso do quadrado da distância que os separa, Newton consegue explicar o movimento de um corpo em órbita e como coloca-lo em órbita. Expressa matematicamente pela Equação 3.2.

$$F = \frac{G \cdot M_1 \cdot M_2}{D^2} \tag{3.2}$$

em que M_1 e M_2 representam as massas dos corpos; D a distância entre eles; e G é uma constante proporcionalidade conhecida como constante da Gravitação Universal, no Sistema Internacional de Unidades, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ m^2/Kg^2.

Exemplo 3.1. Utilizando as leis de Newton, calcula-se a intensidade da força de atração gravitacional da Sol sobre a Terra, aproximadamente.

DADOS:	massa do Sol (M_1) $\cong 2 \cdot 10^{30}$ Kg
	massa da Terra (M_2) $\cong 6 \cdot 10^{24}$ Kg
	distância (D) do Sol à Terra $\cong 1{,}0 \cdot 10^{11}$ m

$$F = \frac{G \cdot M_1 \cdot M_2}{D^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{(1,0 \cdot 10^{11})^2}$$

$$F \cong 8 \cdot 10^{22} \text{ N}$$

4 A matemática dos calendários

No Capítulo 2 deste trabalho, tem-se a relação dos fatos que levaram os calendários em sua maioria possuir estrutura cíclica, por exemplo, o gregoriano, onde cada ano tem 365 dias (exceto anos bissextos), os meses variam de 28 a 31 dias e cada semana tem 7 dias, portanto diante destas observações pode-se notar que alguns conceitos matemáticos, como divisibilidade, divisão euclidiana e congruência, estão relacionados com o tema. Ainda neste capítulo foi visto que os babilônicos usavam a base sexagesimal e os maias a base vigesimal, ou seja, sistemas de numeração também são conteúdos associados a construção dos calendários. Já no Capítulo 3 foi visto que os antigos astrônomos gregos ao tentarem formular o sistema solar envolveram mais um conteúdo estudado na matemática e na física, a elipse, razão pela qual a Seção 4.3 discute a noção de cônicas. Nesse sentido esse capítulo se preocupa em obter ferramentas (formalização de conceitos) necessárias para explorar o tema calendário de modo que possa desenvolver competências e habilidades nos discentes relacionadas a estes conteúdos.

Considerando que todos os calendários estão diretamente associados aos movimentos de translação da Terra em torno do Sol, de rotação da Terra em torno dela mesma e de revolução da Lua em volta da Terra e que tais movimentos possuem periodicidade, ou seja, se repetem com intervalos bem definidos.

- 01 dia - 24 horas;
- 01 mês - 28, 29, 30 ou 31 dias;
- 01 semana - 7 dias;
- estações do ano - $\approx$ 90 dias (3 meses);
- 01 ano - 365 ou 366 dias;
- eclipse - 18 anos e 11 dias (ciclo de Saros).

É interessante observar que os conceitos matemáticos que permitem descrever fenômenos cíclicos estão associados a divisibilidade, desse modo é possível instigar a curiosidade dos alunos explorando a temática relacionando conteúdos de história e geográfica com matemática (interdisciplinaridade).

Os conceitos associados a divisibilidade estão distribuidos ao longo do ensino fundamental dos anos finais. De acordo com a São Paulo (2016) a divisão de números naturais é introduzida no 5º ano nos 1º, no 2º e no 3º bimestres e retomada no 6º ano no 1º e 4º bimestre. Este conceito deve ser bem compreendido pelos discentes por ser pré-requisito para outros conteúdos como:

- divisão euclidiana;
- máximo divisor comum (mdc);
- mínimo múltiplo comum (mmc);
- algoritmo de Euclides para o mdc;
- critérios de divisibilidade.

Muito embora os conceitos de divisibilidade associados aos calendários estejam limitados aos números inteiros positivos, aqui tais conceitos são apresentados sob uma perspectiva geral. O tratamento aqui envolve igualmente os inteiros negativos.

Com relação a geometria , como foi visto anteriormente, as órbitas dos plantes em torno do Sol, da Lua e outros satélites em trono de alguns planetas descrevem uma forma eliptíca. Isso significa que ao apresentar a temática de cônicas na 3ª série do ensino médio, esse fato pode ser explorado como motivação, mostrando que um conceito não está limitado em apenas uma área do saber, mas possui conexões com outras a ser do conhecimento, ou seja, existe interdisciplinaridade.

Em particular o tema de cônicas está presente no dia-à-dia de várias maneiras, como nas artes, arquiteturas, velódromos, na publicidade (em logos), etc.

4.1 Divisibilidade em $\mathbb{Z}$

De acordo com Hefez (2011) e Milies (2001), a divisão de um número inteiro por outro nem sempre é possível, mas pode-se expressar esta possibilidade através da relação de divisibilidade. Quando não existir uma relação de divisibilidade entre dois números inteiros, ainda assim, será possível efetuar uma "divisão com resto pequeno", denominada "divisão euclidiana". O fato de sempre ser possível efetuar tal divisão é responsável por inúmeras propriedades dos inteiros que será explorado nesta e nas próximas seções.

4.1.1 Divisão exata

Dados dois números inteiros a e b, tem-se que a divide b quando existir $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = a \cdot c$, pode-se dizer também que b é um multiplo de a. Esta expressão é denotada pela $a|b$, sendo que a sentença de negação é representada por $a \nmid b$, ou seja, não existe nenhum número inteiro c tal que $b = c \cdot a$. Portanto, tem-se que $0 \nmid a$, se $a \neq 0$. E ainda, com a suposição de que $a \mid b$ e seja $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = c \cdot a$, tem-se que o número inteiro c é chamado de quociente de b por a e denotado por $c = \dfrac{b}{a}$.

A seguir, são apresentadas algumas propriedades da divisibilidade:

Proposição 4.1. *Sejam a, b, $c \in \mathbb{Z}$. Tem-se que:*

(i) $1|a$, $a|a$ *e* $a|0$;

(ii) *Se* $a \mid b$ *e* $b \mid c$, *então* $a \mid c$.

Demonstração:

(i) Isto decorre das igualdades $a = a \cdot 1$, $a = 1 \cdot a$ e $0 = 0 \cdot a$.

(ii) Dado que $a \mid b$ e $b \mid c$ isso implica que existem m e $n \in \mathbb{Z}$, tais que $b = m \cdot a$ e $c = n \cdot b$. Substituindo o valor de b da primeira igualdade na segunda, obtém-se que $c = n \cdot b = n \cdot (m \cdot a) = (n \cdot m) \cdot a$. Existe $k \in \mathbb{Z}$, tal que $k = n \cdot m$, então $c = (n \cdot n) = k \cdot a$, logo, $a \mid c$.

■

Proposição 4.2. *Para a, b, c, $d \in \mathbb{Z}$, se $a|b$ e $c|d$ então $a \cdot c \mid b \cdot d$.*

Demonstração: Se $a|b$ e $c|d$, então $\exists\ m, n \in \mathbb{Z}$, $b = m \cdot a$ e $d = n \cdot c$.
Logo, $b \cdot d = (m \cdot n)(a \cdot c)$, portanto, $a \cdot c \mid b \cdot d$.
Em particular, se $a \mid b$, então $a \cdot c \mid b \cdot c$, para todo $c \in \mathbb{Z}$. ■

Proposição 4.3. *Sejam a, b, $c \in \mathbb{Z}$, tais que $a \mid (b \pm c)$. Então $a \mid b$ se, e somente se, $a \mid c$.*

Demonstração: Supondo que $a \mid (b + c)$. Logo, existe $f \in \mathbb{Z}$ tal que $b + c = f \cdot a$. Agora, se $a \mid b$, tem-se que existe $g \in \mathbb{Z}$ tal que $b = g \cdot a$. Juntando as duas igualdades, tem-se $g \cdot a + c = f \cdot a$, ou seja, segue-se que $c = (f - g)a$, logo $a \mid c$.

A prova da implicação contrária é análoga.

Por outro lado, se $a \mid (b - c)$ e $a \mid b$, pelo caso anterior, tem-se $a \mid -c$, o que implica que $a \mid c$. ■

Conforme Domingues e Iezzi (2003), a relação entre elementos do conjunto dos números inteiros, definida por $a \mid b$, introduzida no início desta seção goza da propriedade a seguir.

Proposição 4.4. *Se a, b, $c \in \mathbb{Z}$ são tais que $a \mid b$ e $a \mid c$, então $a \mid (xb+yc)$, para todo x, $y \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração: Dado que $a \mid b$ e $a \mid c$ implicam que existem $m, n \in \mathbb{Z}$, por hipótese $b = am$ e $c = an$. Daí, $bx = a(xm)$ e $cy = a(yn)$. Somando as igualdades, obtemos:

$$bx + cy = a(xm) + a(yn) = a(xm + yn).$$

Portanto, $a \mid (xb + yc)$. ■

Proposição 4.5. *Sejam a, $b \in \mathbb{N}$. Se $a \mid b$, então $a \leq b$.*

Demonstração: De fato, se $a \mid b$, existe $k \in Z$ tal que $b = ka$. Como $a, b > 0$, segue-se que $k \in \mathbb{N}$. Como $1 \leq k$, segue-se que $a \leq ak = b$. ■

Observe que, em particular, se $a \in \mathbb{N}$ e $a \mid 1$, então $0 < a \leq 1$. Logo, $a = 1$.

Ainda, visivelmente, a recíproca da Proposição 4.5 não é válida, pois, por exemplo,$3 \leq 5$; e, entretanto, 3 não divide 5.

Note que pelas proposições 4.1(i), 4.1(ii), 4.5, tem-se que a divisibilidade é uma relação de ordem, isto é, goza das seguintes propriedades:

(i) é reflexiva: $\forall\ a \in \mathbb{N}$, $a \mid a$.

(ii) é transitiva: $\forall\ a$, b e $c \in \mathbb{N}$, se $a \mid b$ e $b \mid c$, então $a \mid c$.

(iii) é anti-simétrica: se $\forall\ a$ e $b \in \mathbb{N} a \mid b$ e $b \mid a$, então $a = b$.

As proposições a seguir são de grande utilidade.

Proposição 4.6. *Sejam a, $b \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. Temos que $a - b$ divide $a^n - b^n$.*

Demonstração: Seja $P(n)$ a proposição "$a - b$ divide $a^n - b^n$".

Por indução sobre n, tem-se:

Caso particular: Para $n = 1$, $a - b$ divide $a^1 - b^1 = a - b$. Portanto, $P(1)$ é verdadeira.

Passo indutivo: Agora, supondo que vale $P(n)$, ou seja, que $a - b \mid a^n - b^n$ é verdadeira para $n > 1$. Deve-se mostrar que $P(n + 1)$ é verdadeira. Logo,

$$a^{n+1} - b^{n+1} = aa^n - ba^n + ba^n - bb^n = (a - b)a^n + b(a^n - b^n). \tag{4.1}$$

Como $a - b \mid a - b$ e, por hipótese de indução, $a - b \mid a^n - b^n$, decorre da igualdade 4.1 e da Proposição 4.4 que $P(n + 1)$ é verdadeira, ou seja, $a - b \mid a^{n+1} - b^{n+1}$ é válida.

Portanto, pelo Princípio de Indução Finita $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Proposição 4.7. *Sejam* a*,* $b \in \mathbb{Z}$ *e* $n \in \mathbb{N}$*. Temos que* $a+b$ *divide* $a^{2n+1}+b^{2n+1}$*.*

Demonstração: Seja $P(n)$ a proposição "$a+b$ divide $a^{2n+1}+b^{2n+1}$".

Por indução sobre n, tem-se:

Caso particular: Para $n=0$, $a+b$ divide $a^1+b^1=a+b$. Portanto, $P(0)$ é verdadeira.

Passo indutivo: Agora, supondo que vale $P(n)$, ou seja, que $a+b$ divide $a^{2n+1}+b^{2n+1}$ é verdadeira para $n>0$. Deve-se mostrar que $P(n+1)$ é verdadeira. Logo,

$$a^{2(n+1)+1}+b^{2(n+1)+1}=a^2a^{2n+1}-b^2a^{2n+1}+b^2a^{2n+1}+b^2b^{2n+1}=(a^2-b^2)a^{2n+1}+b^2(a^{2n+1}+b^{2n+1}). \tag{4.2}$$

Como $a+b$ divide $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ e, por hipótese de indução, $a+b \mid a^{2n+1}+b^{2n+1}$, decorre das igualdades 4.2 e da Proposição 4.4 que $P(n+1)$ vale, ou seja, $a+b \mid a^{2(n+1)+1}+b^{2(n+1)+1}$ é verdadeira.

Logo, pelo Princípio de Indução Finita $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. ∎

Proposição 4.8. *Sejam* a*,* $b \in \mathbb{Z}$ *e* $n \in \mathbb{N}$*. Temos que* $a+b$ *divide* $a^{2n}-b^{2n}$*.*

Demonstração: Seja $P(n)$ a proposição "$a+b$ divide $a^{2n}-b^{2n}$".

Por indução sobre n, tem-se:

Caso particular:

Para $n=1$, $a+b$ divide $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$. Logo, $P(1)$ é verdadeira.

Passo indutivo:

Agora, supondo que vale $P(n)$, ou seja, que $a+b$ divide $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ é verdadeira para $n>1$. Deve-se mostrar que $P(n+1)$ é válida. Logo,

$$a^{2(n+1)}-b^{2(n+1)}=a^2a^{2n}-b^2a^{2n}+b^2a^{2n}-b^2b^{2n}=(a^2-b^2)a^{2n}+b^2(a^{2n}-b^{2n}). \tag{4.3}$$

Como $a+b \mid a^2-b^2$ e, por hipótese de indução, $a+b \mid a^{2n}-b^{2n}$, decorre das igualdades 4.3 e da Proposição 4.4 que $P(n+1)$ é verdadeira, ou seja, $a+b \mid a^{2(n+1)}+b^{2(n+1)}$ é valida.

Logo, pelo Princípio de Indução Finita $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

∎

4.2 Divisão euclidiana

Segundo Domingues e Iezzi (2003), existem infinitos casos de pares de números inteiros onde nenhum dos dois números é divisor ou multiplo do outro, porém sempre é possível efetuar a divisão de dois números inteiros, com resto, ou seja, a "divisão com resto", denominada divisão euclidiana. Assim, com o uso iterado dessa divisão, Euclides, em os "*Elementos*, em 300 a.C., estabelece o algoritmo euclidiano, método eficiente para se calcular o máximo divisor comum de dois números positivos.

Teorema 4.1 (Divisão Euclidiana). *Sejam a e $b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$. Existem dois únicos números inteiros q e r tais que $b = a \cdot q + r$, com $0 \leq r < |a|$.*

Demonstração:
Considerando o conjunto $S = \{x = b - ay; y \in \mathbb{Z}\} \cap (\mathbb{N} \cup \{0\})$.

i) *Existência:* pela propriedade arquimediana[1], existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n(-a) > -b$, logo $b - na > 0$, o que mostra que S é não vazio. O conjunto S é limitado inferiormente por 0, portanto, pelo Princípio da Boa Ordem[2], tem-se que S possui um menor elemento r. Supondo então que $r = b - aq$. Sabe-se que $r \geq 0$.

   Deve-se provar que $r < |a|$. Supondo por absurdo que $r \geq |a|$. Logo, existe $s \in N \cup \{0\}$ tal que $r = |a| + s$, portanto, $0 \leq s < r$. O que contradiz o fato de r ser o menor elemento de S, pois $s = b - (q \pm 1)a \in S$, com $s < r$.

ii) *Unicidade:* Supondo que $b = aq + r = aq' + r'$, em que $q, q', r, r' \in Z$, $0 \leq r < |a|$ e $0 \leq r' < |a|$.
   Desse modo, tem-se que $-|a| < -r \leq r' - r < |a|$.
   Logo, $|r' - r| < |a|$. Por outro lado, $a(q - q') = r' - r$, o que implica que $|a|\,|q - q'| = |r' - r| < |a|$, o que somente é possível se $q = q'$ e, consequentemente, $r = r'$.

∎

Observação 4.1. Geralmente, os livros didáticos de matemática do 3º ano do ensino fundamental explica o algoritmo da divisão euclidiana, esquema simples: dividendo = divisor · quociente + resto, como pode ser visto na Figura 4.1.

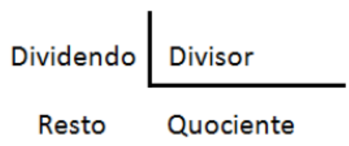


Figura 4.1: Algoritmo da divisão euclidiana.

Nas condições do teorema 4.1, tem-se que a é o *divisor*, b o *dividendo*, q é o *quociente* e r é o *resto* da divisão de b por a.

[1] Dados $a, b \in \mathbb{N}$ com $O < a < b$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $na > b$.
[2] Para todo conjunto $A \subset \mathbb{N}$ com $A \neq 0$, $\exists a \in A$, tal que $a \leq x$, $\vee x \in A$.

Observação 4.2. Na divisão euclidiana, tem-se que o resto da divisão de b por a é zero se, e somente se, $a \mid b$.

Corolário 4.1. *Dados dois números $a, b \in \mathbb{N}$, existe um número $n \in \mathbb{Z}$ tal que $na \leq b < (n+1)a$.*

Demonstração:

Pela divisão euclidiana existem $q, r \in \mathbb{Z}$ onde $0 \leq r < a$, univocamente determinados, tais que $b = a \cdot q + r$. Agora basta tomar $n = q$. ∎

Exemplo 4.1. Dado um número $n \in \mathbb{Z}$ qualquer, tem-se duas possibilidades:

i) o resto da divisão de n por 2 é 0, ou seja, $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que $n = 2k$; ou

ii) o resto da divisão de n por 2 é 1, ou seja, $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que $n = 2k + 1$.

De acordo com Domingues e Iezzi (2003) e Hefez (2015), pelo Exemplo 4.1, tem-se que os números inteiros se dividem em duas classes, a dos números pares da forma $2k$ para algum $k \in \mathbb{Z}$ e a dos números ímpares da forma $2k + 1$. Pitágoras, em 500 a.C., classificou os números naturais em pares e ímpares.

A paridade de um número inteiro é a característica do número ser par ou ímpar. É fácil determinar a paridade da soma e do produto de dois números a partir da paridade dos mesmos.

Com relação a soma tem-se:

(i) A soma de dois números pares é par.
De fato, a soma de dois números escritos na forma $2m$ e $2n$ é dada por $2m+2n = 2(m+n), \exists k \in \mathbb{Z}; k = m+n$, então $2(m+n) = 2k$. Portanto, o resultado é um número par.

(ii) A soma de dois números ímpares é par.
De fato, a soma dos números da forma $2m+1$ e $2n+1$ é dada por $2m+1+(2n+1) = 2(m+n+1), \exists k \in \mathbb{Z}; k = m+n+1$, então $2(m+n+1) = 2k$. Portanto, esta soma resulta em um número par.

(iii) A soma de um número par com um número ímpar é ímpar.
De fato, a soma de um números da forma $2m$ com o outro $2m + 1$ é dada por $2m + (2m + 1) = 2(m + n) + 1, \exists k \in \mathbb{Z}; k = m + n$, então $2(m + n) = 2k + 1$. Logo, o resultado desta soma é um número ímpar.

Com relação ao produto tem-se:

(i) O produto de dois números pares é par. De fato, o produto de dois números da forma $2m$ e $2n$ é $2m \cdot 2n = 4mn, \exists k \in \mathbb{Z}; k = 2mn$, então $4mn = 2(2mn) = 2k$, logo, este produto resulta em é um número par.

(ii) O produto de um número par por um número ímpar é par.
De fato, o produto de um número da forma $2m$ com um número da forma $2n + 1$ é dado por $2m \cdot (2n+1), \exists k \in \mathbb{Z}; k = m(2n+1)$, então $2m(2n+1) = 2k$. Portanto, o resultado deste produto é par.

(iii) O produto de dois números ímpares é ímpar.
De fato, o produto dos números da forma $2m+1$ e $2n+1$ é dado pela expressão: $2(2mn+m+n)+1, \exists k \in \mathbb{Z}; k = 2mn+m+n$, então $2(2mn+m+n)+1 = 2k+1$. Logo, o produto de dois números ímpares resulta em um número ímpar.

Observação 4.3. Dados a, $b \in \mathbb{N}$ com $a < b$, o número de múltiplos não nulos de a menores ou iguais a b é igual ao quociente da divisão de b por a.

Exemplo 4.2. Para $a = 5$ e $b = 93$, portanto, pela divisão euclidiana, $93 = 5 \cdot 18 + 3$. Os múltiplos de 5 menores ou iguais a 93 são:

$$\mathrm{M}(5) = \underbrace{\{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90\}}_{18}$$

4.3 Sistemas de numeração

Conforme Santos (2014), referente ao processo de contagem muitas maneiras diferentes foram desenvolvidas e sempre relacionadas às relacões biunívocas. Além disso, todo sistema de numeração possui um conjunto de símbolos, utilizados para representar quantidades e também permite realizar operações numéricas.

Em torno de 500 d.C., na Índia, surgiu o sistema de numeração decimal posicional que é usado atualmente na maior parte do mundo. Porém, este sistema foi difundido na Europa por volta de 825 d.C. pelo matemático árabe Mohamed Ben Mussa Al Khawarismi, então o sistema ficou conhecido como sistema indo-arábico. Este sistema de numeração é uma variante do sistema sexagesimal utilizado pelos babilônios 1700 a.C. como já foi mencionado no Capítulo 2 (MIYASCHITA, 2002; HEFEZ 2011).

Existem outros sistemas de numeração em uso, em particular os sistemas binário, quaternário, octal e hexadecimal ou de base 2, 4, 8 e 16, respectivamente, que são usados em computação. Entretanto, é possível perceber a influência de outros sistemas de numeração no cotidiano. Por exemplo, o dia que é dividido em 24 horas (dois “blocos” de 12 horas), ainda, a hora é dividida em 60 minutos e os minutos em 60 segundos. Observa-se uma grande influência do sistema duodecimal (de base 12) e sexagesimal (de base 60).

Os sistemas de numeração são conceitos tratados no ensino fundamental dos anos finais durante os 5º, 6º e 7º anos, de acordo com a São Paulo (2008).

Na próxima Seção será tratada à representação dos números naturais, pois 0 tem seu próprio símbolo e todo número inteiro negativo é representado por um número natural precedido pelo sinal $-$.

4.3.1 Representação dos números naturais

No sistema de numeração decimal posicional a base de contagem é 10, pois o sistema decimal possui 10 símbolos representativos, denominados algarismos ou dígitos, os quais são representados pelos números naturais: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, acrescido do símbolo 0 (zero), que representa a ausência de algarismo.

Este sistema também denominado posicional, pois cada algarismo ou dígito, além do seu valor intrínseco, tem um peso que lhe é atribuído em função da posição que ele ocupa no número. Esse peso esta sempre relacionado à potência de dez, variando da seguinte forma: o algarismo da extrema direita tem peso 1; o seguinte, sempre da direita para a esquerda, tem peso dez; o seguinte tem peso cem; o seguinte tem peso mil, etc.

Exemplo 4.3. O número 21039, na base 10, tem a representação:

$$2 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0.$$

Vale ressaltar que cada algarismo de um número tem uma *ordem* contada da direita para a esquerda. No Exemplo 4.3, tem-se que o algarismo 9 é de primeira ordem, enquanto que o 3 é de segunda ordem e assim por diante.

Cada terna de ordens, forma uma *classe*, também são contadas da direita para a esquerda. As classes podem ser separadas umas das outras por meio de um ponto.

As primeiras classes e ordens são classificadas a seguir:

$$\text{Classe das Unidades} \begin{cases} \text{unidades} \\ \text{dezenas} \\ \text{centenas} \end{cases}$$

$$\text{Classe do Milhar} \begin{cases} \text{unidades de milhar} \\ \text{dezenas de milhar} \\ \text{centenas de milhar} \end{cases}$$

$$\text{Classe do Milhão} \begin{cases} \text{unidades de milhão} \\ \text{dezenas de milhão} \\ \text{centenas de milhão} \end{cases}$$

$$\dots$$

Os sistemas de numeração posicionais baseiam-se no próximo teorema, o qual é uma aplicação da divisão euclidiana.

Teorema 4.2. *Dados dois números naturais* a *e* b*, com* $b > 1$*, existem números naturais* $a_0, a_1, \cdots, a_n$ *menores do que* b*, univocamente determinados, tais que* $a = a_0b^0 + a_1b^1 + a_2b^2 + \cdots + a_nb^n$*, onde* $n \geq 0$*,* $a_i \neq 0$ *e* $0 \leq i \leq n$*, tem-se que* $0 \leq a_i \leq b$*.*

Demonstração:

i) *Existência:* Usando o Segundo Princípio de Indução Matemática sobre a.
Se $a < b$, então $a = a$. Tomando $a \geq b$ e admitir, por hipótese, $\exists q \in \mathbb{Z}; 1 \leq q < a$, essa representação seja possível. Aplicando a divisão euclidiana para a e b, obtém-se:

$$a = bq + a_0, \text{ com } 0 \leq a_i \leq b.$$

Observe que não pode ocorrer $a \leq q$. De fato, como $b > 1$, então $bq > q$ e por essa hipótese, tem-se $bq > a$ e logo, $bq + a_0 = a > a$. Portanto, $1 \leq q < a$ e pela hipótese de indução:

$$q = a_1b^0 + a_2b^1 + \cdots + a_nb^{n-1}, \text{ com } 0 \leq a_i \leq b;\ a_n \neq 0.$$

Consequentemente,

$$a = b(a_1b^0 + a_2b^1 + \cdots + a_nb^{n-1}) = a_0b^0 + a_1b^1 + a_2b^2 + \cdots + a_nb^n.$$

ii) *Unicidade:* Novamente, pelo Segundo Princípio de Indução Finita sobre a.

É trivial para $a < b$.

Seja $a \geq b$ e supondo que a unicidade se verifica para todo q tal que $1 \leq q < a$. Supondo ainda que

$a = a_0b^0 + a_1b^1 + a_2b^2 + \cdots + a_nb^n = a_0'b^0 + a_1'b^1 + a_2'b^2 + \cdots + a_s'b^s$,

onde $0 \leq a_i' \leq b$. Logo,

$a = b(a_1b^0 + a_2b^1 + \cdots + a_nb^{n-1}) + a_0 = b(a_1'b^0 + a_2'b^1 + \cdots + a_s'b^{s-1}) + a_0'$

Como $a_0 < b$ e $a_0' < b$, a divisão euclidiana (unicidade) garante que $a_0 = a_0'$ e $a_1b^0 + a_2b^1 + \cdots + a_nb^{n-1} = a_1'b^0 + a_2'b^1 + \cdots + a_s'b^{s-1} = q$. Como $q < a$, então, pela hipótese de indução, $n - 1 = s - 1$, segue que, $n = s$ e $a_1 = a_1'$, $a_2 = a_2'$, $\cdots$, $a_n = a_s'$

■

A representação dada no Teorema 4.2 é denominada de expansão relativa à base b. Assim, quando $b = 10$, essa expansão é chamada decimal, e quando $b = 2$, a expansão é binária.

A demonstração deste teorema, ainda, gera um algoritmo para determinar a expansão de um número qualquer com relação à base b.

Assim, aplicando, sucessivamente, a divisão euclidiana, como segue:

$$a = bq_0 + r_0,\ r_0 < b,$$
$$q_0 = bq_1 + r_1,\ r_1 < b,$$
$$q_1 = bq_2 + r_2,\ r_2 < b,$$
$$\ldots$$

Como $a > q_0 > q_1 > \cdots$, em um certo ponto, tem-se $q_{n-1} < b$. Logo, de $q_{n-1} = bq_n + r_n$, decorre que $q_n = 0$, o que implica $0 = q_n = q_{n+1} = q_{n+2} = \cdots$, e, logo, $0 = r_{n+1} = r_{n+2} = \cdots$. Então $a = r_0 + r_1 b + \cdots + r_n b^n$.

A expansão na base b fornece um método para representar os números naturais. Escolhendo um conjunto S de b símbolos $S = s_0, s_1, \cdots, s_{b-1}$, com $s_0 = 0$, para representar os números de 0 a $b-1$. Seja $a \in \mathbb{N}$ na base b e x_i algarismos, tais que, $0 \leq a_i < b$, onde $i = 0, 1, \cdots, n$, então este pode ser escrito:

$$a = a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0,$$

com $a_0, \cdots, a_n \in S$, e n variando, dependendo de a, representando o número

$$a = a_0 + a_1 b + \cdots + a_n b^n.$$

No sistema decimal, ou seja, $b = 10$, tem-se $S = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

De acordo com Paterlini (2013), caso haja necessidade de esclarecer em que base o número se encontra, pode-se usar a seguinte notação:

$$(a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0)_b$$

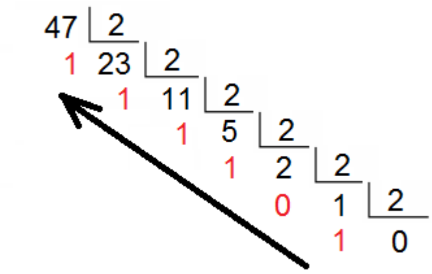
É a representação $a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0$ em um sistema de base b, os valores a_i chamam-se b-dígitos. Se b for 2 os valores a_i também podem ser chamados de dígitos binários. A representação de uma base qualquer precisa de uma notação de modo que não tenha confusão com a base dez sempre que for usados para algarismos os mesmos símbolos da base dez. Ainda é possível passar um número de uma base para outra, ou seja, $(a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0)_{b_1} = (a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0)_{b_2}$.

Exemplo 4.4. Para determinar a expansão na base $b = 2$ do número 47.

Aplicando a divisão euclidiana, sucessivamente, tem-se

$$
\begin{aligned}
47 &= 2 \cdot 23 + 1\\
23 &= 2 \cdot 11 + 1\\
11 &= 2 \cdot 5 + 1\\
5 &= 2 \cdot 2 + 1\\
2 &= 2 \cdot 1 + 0\\
2 &= 2 \cdot 0 + 1
\end{aligned}
$$

Esquema:



Portanto, o $(47)_{10} = (101111)_2$.

Exemplo 4.5. Determinar o número $(12022)_3$ na base decimal:

$$
\begin{aligned}
12022 = &\quad 1 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0\\
= &\quad 81 + 54 + 0 + 6 + 2\\
= &\quad 143
\end{aligned}
$$

Portanto, $(12022)_3 = (143)_{10}$.

4.3.2 Critérios de divisibilidade

Os critérios de divisibilidade consistem em algumas regras, aplicadas aos números inteiros, que permitem determinar se um número é ou não divisível por um outro determinado número.

Apesar dos critérios de divisibilidade não aparecerem na grade curricular do estado de São Paulo, cabe ao professor introduzir tais conceitos no 6º ano do ensino fundamental ao serem estudadas as operações com números naturais durante os dois primeiros bimestres, de modo a estimular o raciocinio lógico dos alunos, que possam depois aplicar na decomposição de números em fatores primos e também na resolução de problemas. E, ainda, no primeiro bimestre do 7º ano o conteúdo pode ser explorado, antes de ser trabalhado o conteúdo de potenciação. Além disso, o ensino de congruência e aritmética modular durante o ensino médio podem levar o professor a retomar estes conceitos.

Para as proposições a seguir, considere um número natural a representado na forma $a = a_n \cdots a_1 a_0$, onde a_i são algarismos (ou dígitos) decimais, ou seja, $a_i \in \mathbb{N}$, $0 \leq a_i < 10$ tal que $0 \leq i \leq n$ e $a_i \neq 0$.

Proposição 4.9. *Um número natural a é par se, e somente se, o algarismo das unidades for par, ou seja, a_0 = 0, 2, 4, 6 ou 8.*

Demonstração: Seja a representação decimal de um número natural a dada por $a = a_n \cdot 10^n + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, como $10 = 2 \cdot 5$ ao substituir em a, tem-se:

$$a = 2 \cdot (a_n \cdot 5^n \cdot 2^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 5^2 \cdot 2 + a_1 \cdot 5) + a_0,$$

, para $k \in \mathbb{N}$ tal que $k = a_n \cdot 5^n \cdot 2^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 5^2 \cdot 2 + a_1 \cdot 5$, logo, $a = 2 \cdot k + a_0$, onde a_0 é o algarismo da unidade de a.

Se a é par $a_0 = n - 2 \cdot k$ também é par, pois a diferença de números pares resulta um número par.

Reciprocamente, se a_0 é par , então $k = 2 \cdot a + a_0$ é par, pois, por paridade, tem-se que a soma de dois números pares resulta em par. ■

Proposição 4.10. *Um número natural a é divisível por 5 se, e somente se, o algarismo das unidades for divisível por 5, ou seja, $a_0 = 0$ ou 5.*

Demonstração: Seja a representação decimal de um número natural a dada por $a = a_n \cdot 10^n + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, tem-se:

$$a = 10 \cdot (a_n \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 10 + a_1) + a_0,$$

para $k \in \mathbb{N}$ tal que $k = a_n \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 10 + a_1$, logo, $a = 10 \cdot k + a_0$, onde a_0 é o algarismo da unidade de a.

Como 10 é divisível por 5, tem-se que a é divisível por 5 se, e somente se, a_0 for divisível por 5. Porém, isso ocorre se, e somente se, $a_0 = 0$ ou 5. ■

Proposição 4.11. *Um número natural a é divisível por 10 se, e somente se, o algarismo das unidades for divisível por 10, ou seja, $a_0 = 0$.*

Demonstração: Seja a representação decimal de um número natural a dada por $a = a_n \cdot 10^n + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, tem-se:

$$a = 10 \cdot (a_n \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 10 + a_1) + a_0,$$

para $k \in \mathbb{N}$ tal que $k = a_n \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 10 + a_1$, logo, $a = 10 \cdot k + a_0$, onde a_0 é o algarismo da unidade de a.

Como 10 é divisível por 10, tem-se que a é divisível por 10 se, e somente se, a_0 for divisível por 10. Porém, isso ocorre se, e somente se, $a_0 = 0$.

■

Proposição 4.12. *Um número natural a é divisível por 3 se, e somente se, a soma dos seus algarismos formar um número divisível por 3.*

Demonstração:
Seja a representação decimal de um número natural a dada pela igualdade $a = a_n \cdot 10^n + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, subtraindo a soma $a_n + \cdots + a_1 + a_0$ desta igualdade, tem-se:

$$a - (a_n + \cdots + a_1 + a_0) = a_n \cdot 10^n + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0 - (a_n + \cdots + a_1 + a_0) =$$
$$(10^n - 1) \cdot a_n + \cdots + (10 - 1) \cdot a_1,$$

ou seja,

$$a = (10^n - 1) \cdot a_n + \cdots + (10 - 1) \cdot a_1 + (a_n + \cdots + a_1 + a_0). \tag{4.4}$$

Observe que para n um número natural não nulo, tem-se:

$$10^n - 1 = \underbrace{11\ldots1}_{n-\text{vezes}} \times 9.$$

Logo, todos os números da forma 10^n - 1 são divisíveis por 9 e também por 3, pois 9 é divisível por 3.

Portanto, a expressão 4.4 pode ser escrita na forma:

$$a = (a_n + \cdots + a_1 + a_0) + 9 \cdot k,$$

para algum $k \in \mathbb{Z}$, tal que $9 \cdot k = (10^n - 1) \cdot a_n + \cdots + (10 - 1) \cdot a_1$.

Portanto, pela Proposição 4.3, a é divisível por 3 se, e somente se, $a_n + \cdots + a_1 + a_0$ é divisível por 3. ■

Proposição 4.13. *Um número natural a é divisível por 9 se, e somente se, a soma dos seus algarismos formar um número divisível por 9.*

Demonstração:
Seja a representação decimal de um número natural a dada pela igualdade $a = a_n \cdot 10^n + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, subtraindo a soma $a_n + \cdots + a_1 + a_0$ desta igualdade, tem-se:

$$a - (a_n + \cdots + a_1 + a_0) = a_n 10^n + \cdots + a_1 10 + a_0 - (a_n + \cdots + a_1 + a_0) =$$
$$(10^n - 1) \cdot a_n + \cdots + (10 - 1) \cdot a_1,$$

ou seja,

$$a = (10^n - 1) \cdot a_n + \cdots + (10 - 1) \cdot a_1 + (a_n + \cdots + a_1 + a_0). \quad (4.5)$$

Observe que para n um número natural não nulo, tem-se:

$$10^n - 1 = \underbrace{11 \ldots 1}_{n-\text{vezes}} \times 9.$$

Logo, todos os números da forma 10^n - 1 são divisíveis por 9.

Portanto, a expressão 4.5 pode ser escrita na forma:

$$a = (a_n + \cdots + a_1 + a_0) + 9 \cdot k,$$

para algum $k \in \mathbb{Z}$, tal que $9 \cdot k = (10^n - 1) \cdot a_n + \cdots + (10 - 1) \cdot a_1$.

Portanto, pela Proposição 4.3, a é divisível por 9 se, e somente se, $a_n + \cdots + a_1 + a_0$ é divisível por 9. ■

Não é comum abordar o critério de divisibilidade por 7, tanto no ensino fundamental, médio e até mesmo na graduação, assim como muitos outros critérios, porém neste trabalho foi visto que o número 7 foi muito importante na formação dos calendários (quantidade de dias da semana devido ao movimento de revolução da Lua em torno do Sol), portanto, a seguir será apresentada a proposição relacionada a 7.

Proposição 4.14. *Um número natural a é divisível por 7 se, e somente se, o número que não contém o último algarismo ($a_n \ldots a_2 a_1$) subtraído do dobro do último algarismo for divisível por 7, ou seja,*

$$7 \mid [(a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_2 \cdot 10 + a_1) - 2 \cdot a_0].$$

Demonstração: Seja a representação decimal de um número natural a dada pela igualdade $a = a_n \cdot 10^n + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, então $\exists k \in \mathbb{Z}$, tal que $a_n \cdot 10^n + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 = 7 \cdot k$, ou seja,

$$\begin{aligned} a_0 = &\ 7 \cdot k - (a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10) \\ = &\ 7 \cdot k - 10 \cdot \underbrace{(a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_2 \cdot 10 + a_1)}_{l} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Seja $l \in \mathbb{Z}$, tal que $l = a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_2 \cdot 10 + a_1$, a expressão 4.6 fica:

$$a_0 = 7 \cdot k - 10 \cdot l \quad (4.7)$$

Desse modo,

$$a_n \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 10 + a_1 - 2 \cdot a_0 = \ l - 2 \cdot a_0$$

Da expressão 4.7, tem-se:

$$\begin{aligned} l - 2 \cdot a_0 = &\ l - 2 \cdot (7 \cdot k - 10 \cdot l) \\ = &\ l - 14 \cdot k + 20 \cdot l \\ = &\ 21 \cdot l - 14 \cdot k \\ = &\ 7 \cdot (3 \cdot l - 2 \cdot k). \end{aligned}$$

Logo, $7 \mid 7 \cdot (3 \cdot l - 2 \cdot k)$, ou seja, $7 \mid l - 2 \cdot a_0$.
Portanto, $7 \mid [(a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_2 \cdot 10 + a_1) - 2 \cdot a_0]$.

Reciprocamente, se $7 \mid [(a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_2 \cdot 10 + a_1) - 2 \cdot a_0]$, então $\exists s \in \mathbb{Z}$ tal que $a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_2 \cdot 10 + a_1 - 2 \cdot a_0 = 7 \cdot s$, isto é,

$$a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_2 \cdot 10 + a_1 = 7 \cdot s + -2 \cdot a_0$$

Porém,

$$\begin{aligned} a_0 \cdot 10^n + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0 = &\ 10 \cdot (a_n \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1) + a_0 \\ = &\ 10 \cdot (7 \cdot s + 2 \cdot a_0) + a_0 \\ = &\ 70 \cdot s + 20 \cdot a_0 + a_0 \\ = &\ 70 \cdot s + 21 \cdot a_0 \\ = &\ 7 \cdot (10 \cdot s + 3 \cdot a_0). \end{aligned}$$

Logo, $7 \mid 7 \cdot (10 \cdot s + 3 \cdot a_0)$, ou seja, $7 \mid a_0 \cdot 10^n + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$. Portanto, $7 \mid a$ ∎

A representação binária tem peculiaridades interessantes. Assim, um corolário imediato do Teorema 4.2 é apresentado a seguir.

4.4 Congruência

Apesar do conceito de congruência estar presente nas provas da Olimpíadas Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) para os alunos do ensino fundamental dos anos finais, assim como os critérios de divisibilidade, este conteúdo também não pertence à grade curricular de matemática da educação básica. No entanto, poderia ser um assunto a ser introduzido no ensino médio, pois frequentemente os restos das divisões são usados para resolver problemas relacionados a conteúdos de tais séries, como nas progressões aritméticas, fenômenos periódicos, além de diversos assuntos relacionados ao cotidiano como as criptografia, código de barras, documentos de identidade, calendários, entre muitos outros.

De acordo com Domingues (1991), o conceito de congruência, assim como sua notação utilizada até hoje como instrumentos para trabalhar com tal conceito, foi introduzido pelo, matemático alemão Karl Friedrich Gauss (1777 - 1855), em sua obra *"Disquisitiones arithmeticae"* publicada em 1801.

Nesta seção será tratada uma aritmética com o restos da divisão euclidiana.

Definição 4.1. *Sejam a, b e m números inteiros, tal que $m > 1$. Diz-se que a é congruente a b, módulo m, se os restos divisão de ambos por m são iguais. Notação: $a \equiv b \mod m$.*

Por exemplo, $44 \equiv 30 \mod 7$, pois os restos da divisão de 44 e de 30 por 7 são iguais a 2.

Observação 4.4. Quando a e b não são congruentes módulo m, denota-se $a \not\equiv b \mod m$.

As proposições a seguir são consequência da definição 4.1.

Proposição 4.15. *Seja a e $b \in \mathbb{Z}$; $m \in \mathbb{N}$, tem-se que $a \equiv b \mod m$ se, e somente se, $m \mid a - b$.*

Demonstração:
Supondo $a \equiv b \mod m$, por definição, $a - b = m \cdot k$, isto é,

$$a = b + m \cdot k, \tag{4.8}$$

com $k \in \mathbb{Z}$.

Sejam k_1 e $r \in \mathbb{Z}$, onde k_1 é o quociente e r o resto da divisão euclidiana de a por m, tem-se:

$$a = mk_1 + r, (0 \leq r < m). \tag{4.9}$$

Segue das igualdades 4.8 e 4.9 que:

$$b + m \cdot k = m \cdot k_1 + r,$$

então,

$$b = m \cdot (k_1 - k) + r, (0 \leq r < m).$$

Logo, r também é o resto da divisão de b por m.

Reciprocamente, supondo que a divisão euclidiana de a e b por m deixam o mesmo restos (r). Então, pelo algoritmo da divisão, pode-se escrever:

$$a = m \cdot k_1 + r \text{ e } b = m \cdot k_2 + r, \ (0 \leq r < m),$$

onde k_1 e $k_2 \in \mathbb{Z}$. Logo, subtraindo membro a membro dessas igualdades:

$$a - b = m \cdot (k_1 - k_2) + r - r.$$

Portanto, $a - b = m \cdot (k_1 - k_2)$ o que implica que $m \mid a - b$.
Logo, $a \equiv b \mod m$. ∎

A definição 4.1, da qual estabelece a relação de congruência, satisfaz as propriedades a seguir.

Proposição 4.16. *Seja $m \in \mathbb{N}$. Para todos a, b, $c \in \mathbb{Z}$, tem-se que:*

(i) $a \equiv a \mod m$ *(reflexiva);*

(ii) *se* $a \equiv b \mod m$, *então* $b \equiv a \mod m$ *(simétrica);*

(iii) *se* $a \equiv b \mod m$ *e* $b \equiv c \mod m$, *então* $a \equiv c \mod m$ *(transitiva).*

Demonstração:

(i) $m \mid 0$, ou seja, $m \mid a - a$, então $a \equiv a \mod m$.

(ii) Se $a \equiv b \mod m$, então $a - b = m \cdot k$, com $k \in \mathbb{Z}$.
Logo, $b - a = -(m \cdot k) = m \cdot (-k)$, portanto, $b \equiv a \mod m$.

(iii) Se $a \equiv b \mod m$ e se $b \equiv c \mod m$, então $\exists k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, tais que:

$$a - b = m \cdot k_1 \text{ e } b - c = m \cdot k_2$$

Logo, $a - c = (a - b) + (b - c) = m \cdot k_1 + m \cdot k_2 = m \cdot (k_1 + k_2)$ e isto significa que $a \equiv c \mod m$.

■

Observação 4.5. Pelas propriedades 4.16(i) reflexiva, 4.16(ii) simétrica e 4.16(iii) transitiva, tem-se que a congruência é uma relação de equivalência.

Do fato da congruência ser uma relação de equivalência, tem-se que satisfaz as proposições as seguir.

Proposição 4.17. *Sejam a, b, c, $d \in \mathbb{Z}$ e $m \in \mathbb{N}$, tem-se:*

(i) $a \equiv b \mod m$ *e* $c \equiv d \mod m \iff a + c \equiv b + d \mod m$.

(ii) $a \equiv b \mod m$ *e* $c \equiv d \mod m \iff a \cdot c \equiv b \cdot d \mod m$.

(iii) $a \equiv b \mod m \iff a^n \equiv b^n \mod m$; $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração:

(i) Seja $a \equiv b \mod m$ e $c \equiv d \mod m$, ou seja, $m \mid a - b$ e $m \mid c - d$ então, existem k_1 e $k_2 \in \mathbb{Z}$, tais que $a - b = m \cdot k_1$ e $c - d = m \cdot k_2$. Logo, somando ambas igualdades, tem-se:

$$(a + c) - (b + d) = m \cdot k_1 + m \cdot k_2 = m \cdot (k_1 + k_2).$$

Portanto, $m \mid (a + c) - (b + d)$, então, $a + c \equiv b + d \mod m$.

(ii) Seja $a \equiv b \bmod m$ e $c \equiv d \bmod m$, ou seja, $m \mid a - b$ e $m \mid c - d$ então, existem k_1 e $k_2 \in \mathbb{Z}$, tais que $a - b = m \cdot k_1$ e $c - d = m \cdot k_2$. Porém, utilizando-se da identidade a seguir:

$$\begin{aligned} a \cdot c - b \cdot d = &\ a \cdot c - b \cdot c + b \cdot c - b \cdot d \\ = &\ c \cdot (a - b) + b \cdot (c - d) \\ = &\ c \cdot m \cdot k_1 + b \cdot m \cdot k_2 \\ = &\ m \cdot (c \cdot k_1 + b \cdot m \cdot k_2). \end{aligned}$$

Portanto, $m \mid a \cdot c - b \cdot d$, isto é, $a \cdot c \equiv b \cdot d \bmod m$.

(iii) Seja $a \equiv b \bmod m$.

Por indução sobre n.

Seja $a^n \equiv b^n \bmod m$; $n \in \mathbb{N}$, tem-se:

Caso particular:

Para $n = 1$, $a^1 \equiv b^1 \bmod m = a \equiv b \bmod m$; $n \in \mathbb{N}$, portanto, $P(1)$ é válida.

Passo indutivo:

Supondo que $P(n)$ é verdadeira, ou seja, $a^n \equiv b^n \bmod m$; $n \in \mathbb{N}$ é válida. Deve-se provar para $P(n+1)$ é verdadeira. Então,

$$a^n \equiv b^n \bmod m \text{ e } a \equiv b \bmod m$$

Pela proposição 4.17(ii), tem-se:

$$a^n \cdot a \equiv b^n \cdot b \bmod m = a^{n+1} \equiv b^{n+1} \bmod m.$$

Logo, a proposição é verdadeira para $P(n+1)$, para todo natural $n+1$. Portanto, pelo Princípio de Indução Finita $P(n)$ é válido para todo natural $n \geq 1$.

■

Proposição 4.18. *Sejam a, b, c, $\in \mathbb{Z}$ e $m \in \mathbb{N}$, tem-se:*

(i) $a \equiv b \bmod m \iff a + c \equiv b + c \bmod m$.

(ii) $a \equiv b \bmod m \iff a \cdot c \equiv b \cdot c \bmod m$.

Demonstração:

(i) Seja $a \equiv b \bmod m$, então $m \mid a - b$.

Pela identidade $(a + c) - (b + c)$, tem-se que $m \mid (a + c) - (b + c)$. Portanto, $a + c \equiv b + c \bmod m$.

Reciprocamente, se $a + c \equiv b + c \bmod m$, então $m \mid (a + c) - (b + c)$, ou seja, $m \mid (a - b) + (c - c)$, o que implica que $m \mid a - b$. Portanto, $a \equiv b \bmod m$.

(ii) Seja $a \equiv b \bmod m$, então $m \mid a - b$, isto é, $a - b = m \cdot k$, $k \in \mathbb{Z}$. Logo, $c \cdot (a - b) = c \cdot m \cdot k$, o que implica que, $a \cdot c - b \cdot c = m \cdot (c \cdot k)$, portanto, $m \mid a \cdot c - b \cdot c$, então $a \cdot c \equiv b \cdot c \bmod m$.

■

Proposição 4.19. *Sejam a, b, $c \in \mathbb{Z}$ e $d, m \in \mathbb{N}$. Se $c \cdot a \equiv c \cdot b$ mod m e mdc(m, c) $= d$, então $a \equiv b$ mod $\dfrac{m}{d}$.*

Demonstração: Seja $c \cdot a \equiv c \cdot b \bmod m$ e $\text{mdc}(m, c) = d$, então $m \mid c \cdot a - c \cdot b$, o que implica que $m \mid c \cdot (a - b)$. Logo, $c \cdot (a - b) = m \cdot k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Daí,

$$\frac{c}{d} \cdot (a - b) = \frac{m}{d} \cdot k,$$

onde $\text{mdc}(\frac{c}{d}, \frac{m}{d}) = 1$. Então, $\frac{m}{d} \mid a - b$ e, portanto, $a \equiv b \bmod \frac{m}{d}$.

■

Corolário 4.2. *Sejam a, b,$c \in \mathbb{Z}$ e $m \in \mathbb{N}$. Se $c \cdot a \equiv c \cdot b$ mod m e mdc$(c, m) = 1$, então $a \equiv b$ mod m.*

Corolário 4.3. *Sejam a, b, c, $p \in \mathbb{Z}$ e p é primo. Se $c \cdot a \equiv c \cdot b$ mod p e $p \nmid c$, então $a \equiv b$ mod p.*

4.4.1 Sistema completo de resíduos

Seja a congruência uma relação de equivalência sobre $\mathbb{Z}$, para $m > 0$, determina-se sobre o conjunto dos inteiros uma partição em classes de equivalência, módulo m.

Exemplo 4.6. Se $m = 7$, suas classes de equivalência são:

$$\begin{gathered}
\{\ldots, -21, -14, -7, 0, 7, 14, 21, \ldots, 7i, \ldots\}, \\
\{\ldots, -20, -13, -6, 1, 8, 15, 22, \ldots, 7i + 1, \ldots\}, \\
\{\ldots, -19, -12, -5, 2, 9, 16, 23, \ldots, 7i + 2, \ldots\}, \\
\cdots
\end{gathered}$$

De fato,

$$\begin{gathered}
\ldots \equiv -21 \equiv -14 \equiv -7 \equiv 0 \equiv 7 \equiv 14 \equiv 21 \equiv \ldots \equiv 7i \equiv \ldots \bmod 7, \\
\ldots \equiv -20 \equiv -13 \equiv -6 \equiv 1 \equiv 8 \equiv 15 \equiv 22 \equiv \ldots \equiv 7i + 1 \equiv \ldots \bmod 7, \\
\ldots \equiv -19 \equiv -12 \equiv -5 \equiv 2 \equiv 9 \equiv 16 \equiv 13 \equiv \ldots \equiv 7i + 2 \equiv \ldots \bmod 7, \\
\cdots
\end{gathered}$$

ou seja, dois elementos de uma mesma classe são congruentes entre si, módulo 7, porém, se dois elementos são de classes de equivalência distintas, então não há congruência entre eles.

Exemplo 4.7. Considerando o calendário do mês de março de 2017.

Domingo	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

Como pode-se notar cada coluna possui um dia da semana, dos quais os números do mês são congruêntes entre si módulo 7. Observe os números nas colunas e as respectivas classes de equivalência.

Domingo os números são conguentes a 5: $\{5, 12, 19, 26\}$;
Segunda os números são conguentes a 6: $\{6, 13, 20, 27\}$;
Terça os números são conguentes a 7: $\{7, 14, 21, 28\}$;
Quarta os números são conguentes a 1: $\{1, 8, 15, 22, 29\}$;
Quinta os números são conguentes a 2: $\{2, 9, 16, 23, 30\}$;
Sexta os números são conguentes a 3: $\{3, 10, 17, 24, 31\}$;
Sábado os números são conguentes a 4: $\{4, 11, 18, 25\}$.

No entanto, no mês de abril de 2017 dia 1º é sábado, 2 é domingo, 3 é segunda, 4 é terça, 5 é quarta, 6 é quinta e 7 é sexta. Assim para saber o dia da semana que corresponde 27 de abril de 2017, basta encontrar um número entre 1 e 7 que seja congruente a 27 módulo 7, ou seja, a divisão euclidiana de 27 por 7 é: $27 = 7 \cdot 3 + 6$. Portanto, o resto desta divisão é 6, logo, $27 \equiv 6 \mod 7$. Como 6 de abril corresponde a quinta, isto implica que dia 27 também foi uma quinta.

Definição 4.2. *Seja S um conjunto de m inteiros, com $m > 0$. O conjunto S forma um sistema completo de resíduos módulo m, se para quaisquer a, $b \in S$, tal que $a \neq b$, então $a \not\equiv b \mod m$.*

Exemplo 4.8. O conjunto $S = \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ é um sistema completo de resíduo módulo m.

De fato, sejam i, $j \in \mathbb{Z}$, tai que $0 \leq i < j < m$, então $0 < j - i < m$ e, logo, $j \not\equiv i \mod m$. Portanto, o conjunto S é um sistema completo de resíduos módulo m.

Proposição 4.20. *Seja $m \in \mathbb{Z}$, $m > 0$. O conjunto $S = \{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$ é um sistema completo de resíduos módulo m, então todo inteiro a é congruente módulo m a somente um elemento de S.*

Demonstração: Seja $S = \{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$ um sistema completo de resíduos módulo m. Existe $a \in \mathbb{Z}$, tal que aplicando o algoritmo da divisão, tem-se:

$$a = m \cdot k + r,$$

onde $0 \leq r < m$ e $k \in \mathbb{Z}$. Logo, $a \equiv r \bmod m$, tal que $r \in S$.

Por outro lado, a divisão de $r_1, r_2, \ldots, r_m$ por m fornecerá m restos, distintos dois a dois, e portanto, para um certo $r_j \in S$, obtem-se:

$$r_j = m \cdot k_j + r, \text{ ou, ainda, } r_j \equiv r \bmod m$$

Como $a \equiv r \bmod m$, então $a \equiv r_j \bmod m$.

Se $a \equiv r_k \bmod m$, então $r_j \equiv r_k \bmod m$, o que implica que $r_j = r_k$, pela definição de sistema completo de resíduos.

■

Proposição 4.21. *Sejam a, k, $\in \mathbb{Z}$, com $m > 1$ e $mdc(k, m) = 1$. Se o conjunto $S = \{r_1, \cdots, r_m\}$ é um sistema completo de resíduos módulo m, então o conjunto $S' = \{a + kr_1, \cdots, a + kr_m\}$ também é um sistema completo de resíduos módulo m.*

Demonstração: Pela Proposição 4.18, para $i, j = 0, \cdots, m-1$, tem-se:

$$a + kr_i \equiv a + kr_j \bmod m \Longleftrightarrow kr_i \equiv kr_j \bmod m$$

$$\Longleftrightarrow r_i \equiv r_j \bmod m \Longleftrightarrow i = j.$$

Portanto, $a + kr_1, \cdots, a + kr_m$ são, dois a dois, não congruentes módulo m, o que implica que formam um sistema completo de resíduos módulo m. ■

Para demonstrar a próxima proposição será necessária a utilização do Lema de Euclides anunciado a seguir.

Lema 4.1 (Lema de Euclides). *Sejam $a, b, n \in \mathbb{Z}$. Se existe $mdc(a, b - na)$, então $mdc(a, b)$ existe e $mdc(a, b) = mdc(a, b - na)$.*

Proposição 4.22. *Sejam a, $b \in \mathbb{Z}$. Se m, n são inteiros maiores do que 1, tem-se:*

(i) se $a \equiv b \bmod m$ e $n \mid m$, então $a \equiv b \bmod n$;

(ii) se $a \equiv b \bmod m$, então $mdc(a, m) = mdc(b, m)$.

Demonstração:

(i) Se $a \equiv b \bmod m$, então $m \mid b - a$. Como $n \mid m$, segue-se que $n \mid b - a$. Portanto, $a \equiv b \bmod n$.

(ii) Se $a \equiv b \bmod m$, então $m \mid b - a$ e, logo, $b = a + tm$ com $t \in \mathbb{Z}$.

Portanto, pelo Lema 4.1, $\text{mdc}(a, m) = \text{mdc}(a + tm, m) = \text{mdc}(b, m)$.

■

Teorema 4.3. *Sejam a, $b \in \mathbb{Z}$. Se $m_1, \cdots, m_k$ são inteiros maiores do que 1, $a \equiv b \bmod m_i$ $\forall i = 1, \ldots, k \iff a \equiv b \bmod [m_1, \ldots, m_k]$, onde $[m_1, \ldots, m_k]$ é o mínimo múltiplo comum de $m_1, \cdots, m_k$.*

Demonstração: Se $a \equiv b \bmod m_i$, $i = 1, \ldots, r$, então $m_i \mid b - a$, para todo i, $1 \leq i \leq k$. Sendo $b - a$ um múltiplo de cada m_i, segue-se que $[m_1, \ldots, m_k] \mid b - a$, portanto, $a \equiv b \bmod [m_1, \ldots, m_r]$.

Reciprocamente, seja $a \equiv b \bmod [m_1, \ldots, m_k]$, tal que $[m_1, \ldots, m_k]$ é o mínimo múltiplo comum de $m_1, \ldots, m_k$, segue-se que $m_i \mid [m_1, \ldots, m_k]$, para qualquer $i = 1, \ldots, r$, portanto, pelo item (i), tem-se que $a \equiv b \bmod m_i$. ■

4.4.2 Algoritmo de Zeller

O matemático alemão Julius Christian Johannes Zeller (1822 - 1899), em 1983, publicou em periódico da *Société Mathématique de France*, da qual era membro, um algoritmo que permite calcular o dia da semana de uma data específica, por meio da Equação 4.10.

Devido às irregularidades do mês de fevereiro, se enumera os meses a partir de março, assim o mês de fevereiro fica por último na contagem dos meses e facilita os cálculos, ou seja, março (1), abril (2), maio (3), junho (4), julho (5), agosto (6), setembro (7), outubro (8), novembro, (9), dezembro (10), janeiro (11) e fevereiro (12). Porém, os meses de janeiro e fevereiro de um determinado ano são considerados como os meses 11 e 12 do ano anterior. Enquanto os dias da semana são enumerados: sábado (0), domingo (1), segunda (2), terça (3), quarta (4), quinta (5) e sexta (6).

$$S(d, m, a) = (d + 1 + A + a + B - C + D) \mod 7 \tag{4.10}$$

onde $A = (13m - 1)$ `div` 5, $B = a$ `div` 4, $C = a$ `div` 100 e $D = a$ `div` 400.

Lembrando que, assim como `mod` é o resto da divisão, o operador `div` é a divisão inteira, ou seja, a parte inteira da divisão de um número por outro. Em nosso caso, ambos os inteiros são sempre positivos.

Na Equação 4.10, tem-se que $S(d, m, a)$ é o dia da semana encontrado em função de três valores, os quais são: d o dia do mês, m o mês referente, de acordo com a ordem mencionada, e a é o ano. Porém o ano deve ser posterior a 1600, isto é, $a > 1601$. Por exemplo, 15 de janeiro de 1980 deve ser representado por (15, 11, 1979) e 21 de fevereiro de 2017 por (21, 12, 2016).

A relação de Zeller envolve a função modular, pois seu resultado relacionado com os números dos dias da semana permite criar programas para encontrar datas específicas do calendário gregoriano. Assim, pode-se encontrar em que dia da semana vai ocorrer algum evento ou encontrar quando ocorreu certo evento.

Exemplo 4.9. Para encontrar o dia da semana em que foi declarada a Independência do Brasil, ou seja, 7 de setembro de 1822.

Usando o algoritmo de Zeller:

$S(d, m, a) = (d + 1 + A + a + B - C + D) \text{ mod } 7;$

Calculando, primeiramente, A, B, C e D:

$A = (13m - 1) \text{ div } 5 = (13 \cdot 7 - 1) \text{ div } 5 = 90 \text{ div } 5 = 18$
$B = a \text{ div } 4 = 1822 \text{ div } 4 = 455$
$C = a \text{ div } 100 = 1822 \text{ div } 100 = 18$
$D = a \text{ div } 400 = 1822 \text{ div } 400 = 4$

Substituindo os valores encontrados para A, B, C e D no algoritmo de Zeller, tem-se:

$S(d, m, a) = (d + 1 + A + a + B - C + D) \text{ mod } 7$
$S(7{,}7{,}1822) = (7 + 1 + A + 1822 + B - C + D) \text{ mod } 7$
$S(7{,}7{,}1822) = (8 + 18 + 1822 + 455 - 18 + 4) \text{ mod } 7$
$S(7{,}7{,}1822) = 2289 \text{ mod } 7$
$S(7{,}7{,}1822) = 7 \text{ mod } 7$
$S(7{,}7{,}1822) = 0 \text{ mod } 7$

Portanto, sábado é o dia da semana em que foi declarada a Independência do Brasil.

4.4.3 Data da Páscoa

A Páscoa é um dos feriados móveis do cristianismo, ou seja, sua data não é a mesma todo ano. Estabelecida no Concílio de Nicéia (325 d.C.), a data da Páscoa ficou definida como: o domingo de Páscoa, o qual é o primeiro domingo depois da primeira Lua cheia depois do equinócio de primavera do hemisfério norte (de outono do hemisfério sul) (MACHADO, 2014).

De acordo com Melo (2014), a fórmula para o cálculo manual da data da Páscoa foi desenvolvida por Karl Friedrich Gauss (1777 - 1855), com validade entre 1900 e 2099:

$A \equiv ano \text{ mod } 4;$
$B \equiv ano \text{ mod } 7;$
$C \equiv ano \text{ mod } 19;$
$D \equiv (19 \cdot C + 24) \text{ mod } 30;$
$E \equiv (2 \cdot A + 4 \cdot B + 6 \cdot D + 5) \text{ mod } 7.$

A data da Páscoa poderá ocorrer em $(22+D+E)$ de março ou, se caso esse número seja maior do que 31 será em $(D+E-9)$ de abril.

Observação 4.6. Existem duas exceções por século, assim quando o resultado for 25 de abril é necessário corrigir uma semana antes tomado como data adequada a de 18 de abril (se $D = 28$ e $C > 10$) e também quando o resultado for 26 de abril deve-se corrigir passando a data para 19 de abril.

Aplicando esse método para verificar quando ocorrerá a Páscoa referente ao ano de 2017, tem-se:

$A \equiv 2017 \text{ mod } 4;$
$B \equiv 2017 \text{ mod } 7;$
$C \equiv 2017 \text{ mod } 19;$
$D \equiv (19 \cdot C + 24) \text{ mod } 30;$
$E \equiv (2 \cdot A + 4 \cdot B + 6 \cdot D + 5) \text{ mod } 7.$

Fazendo os cálculos temos:

$2017 = 4 \cdot 504 + 1$, ou seja, $A = 1$
$2017 = 7 \cdot 288 + 1$, ou seja, $B = 1$
$2017 = 19 \cdot 106 + 3$, ou seja, $C = 3$

Agora,

$D \equiv (19 \cdot C + 24) \text{ mod } 30;$
$D \equiv (19 \cdot 3 + 24) \text{ mod } 30;$
$D \equiv (57 + 24) \text{ mod } 30;$
$D \equiv (81) \text{ mod } 30;$
$D = 21$

Por fim,

$E \equiv (2 \cdot A + 4 \cdot B + 6 \cdot D + 5) \text{ mod } 7$
$E \equiv (2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 21 + 5) \text{ mod } 7$
$E \equiv (2 + 4 + 126 + 5) \text{ mod } 7$
$E \equiv 137 \text{ mod } 7$
$E = 4$

Portanto, utilizando a regra, tem-se que "a Páscoa ocorre em $22 + D + E$ de março ou, caso esse número seja maior do que 31, em $D + E - 9$ de abril", isto é,

$22 + D + E = 22 + 21 + 4 = 47$

Como $47 > 31$, então, deve-se considerar $D + E - 9 = 21 + 4 - 9 = 16$.

Logo, a Páscoa será em 16 de abril.

Todos outros feriados móveis são calculados em função da data da Páscoa, assim a terça-feira de carnaval sempre acontece 47 dias antes do domingo de Páscoa, podendo se cair entre os dias 3 de fevereiro e 8 de março. O feriado de Corpus Christi ocorre 60 dias após o domingo de Páscoa, sendo sempre uma quinta-feira, podendo ocorrer entre os dias 21 de maio e 24 de junho. A sequência dos dias de Páscoa, carnaval e Corpus Christi se repetem em ciclos de cerca de 5 700 000 anos.

4.5 Cônicas

O conceito de cônicas deve ser apresentado aos alunos na 3ª série do ensino médio, logo no primeiro bimestre. A matriz curricular do estado de São Paulo enfatiza as competências e habilidades, das quais os alunos devem atingir que são: "capacidade de expressar por meio da linguagem algébrica as propriedades características de curvas muito frequentes na natureza, como as circunferências e as cônicas. Capacidade de reconhecer, em diferentes contextos, a presença das circunferências e das cônicas, expressas por meio de suas equações. Capacidade de lidar com as equações das circunferências e das cônicas para resolver problemas simples, em diferentes contextos" (SÃO PAULO, 2016).

A importância do estudo das cônicas neste trabalho se deve aos movimento dos planetas em torno do Sol, ou seja, ao movimento de translação dos planetas. Portanto, nesta seção será dada maior ênfase as elípses.

Conforme Boyer (1974), o matemático Menaecmus (380 - 320 a.C.) foi o primeiro a mostrar que as elipses, as parábolas e as hipérboles são obtidas a partir de seções de um cone quando cortado por planos não paralelos á sua base. Em "Os elementos", Euclides dedica um dos seus livros as cônicas, porém esta se perdeu com mais algumas obras, portanto, pouco se sabe a respeito. Entretanto, a obra *"As cônicas"*, de Apolónio de Perga (262 - 190 a.C.) contêm grandes avanços relacionados a geometria analítica, inclusive muitos usados até hoje:

- responsável pela introdução dos nomes elipse e hipérbole para estas curvas;
- mostrou que de um único cone podem ser obtidas a elipse, a parábola e a hipérbole variando a inclinação do plano de seção, pois anteriormente as seções eram tomadas perpendicularmente a um elemento do cone;
- provou que o cone não precisa ser reto, mas também pode ser um cone oblíquo ou escaleno;
- substituiu o cone de uma só folha pelo cone duplo.

Apolônio apresentou a mesma definição de cone circular reto usada atualmente:

> Se fizermos uma reta, de comprimento indefinido e passando sempre por um ponto fixo move-se ao longo da circunferência de um círculo que não está num mesmo plano com o ponto de modo a passar sucessivamente por cada um dos pontos dessa circunferência, a reta móvel descreverá a superfície de um cone duplo. (BOYER, 1974, p. 107)

De acordo com Delgado (2013) e Venturi (2003), Pierre de Fermat (1601 - 1665) obteve em forma de equações algébricas com duas variáveis todos os lugares geométricos discutidos por Apolônio, além de produzir as propriedades fundamentais do lugar geométrico assim como a natureza da sua construção. Desse modo, seus estudos e análise fizeram surgir uma notação algébrica adequada, assim pode etebelecer que em um plano uma equação do 1º representa uma reta e uma equação do 2º representa uma cônica, além de determinar as equações simples da reta, da circunferência, da elipse, da hipérbole e da parábola.

As cônicas são figuras planas, portanto, as suas representações são dadas no plano cartesiano ($\mathbb{R}$).

Definição 4.3. *A seção cônica é a curva obtida a partir da interseção de um plano α e um cone duplo.*

Considerando um cone duplo, de vértice (V) e eixo (e), como na Figura 4.2. Assim, qualquer reta que passa pelo vértice e está sobre a superfície do cone duplo denomina-se geratriz (g).

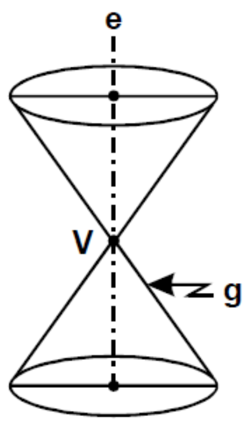


Figura 4.2: Elementos de um cone duplo.

Fonte: retirado de Venturi (2003).

Quando o plano α for secante ao cone duplo e não contendo o vértice, poder-se-á ter uma seção cônica denominada cônica regular ou não degenerada, que pode estar nas formas de circunferência, elipse, parábola ou hipérbole, ilustradas na Figura 4.3.

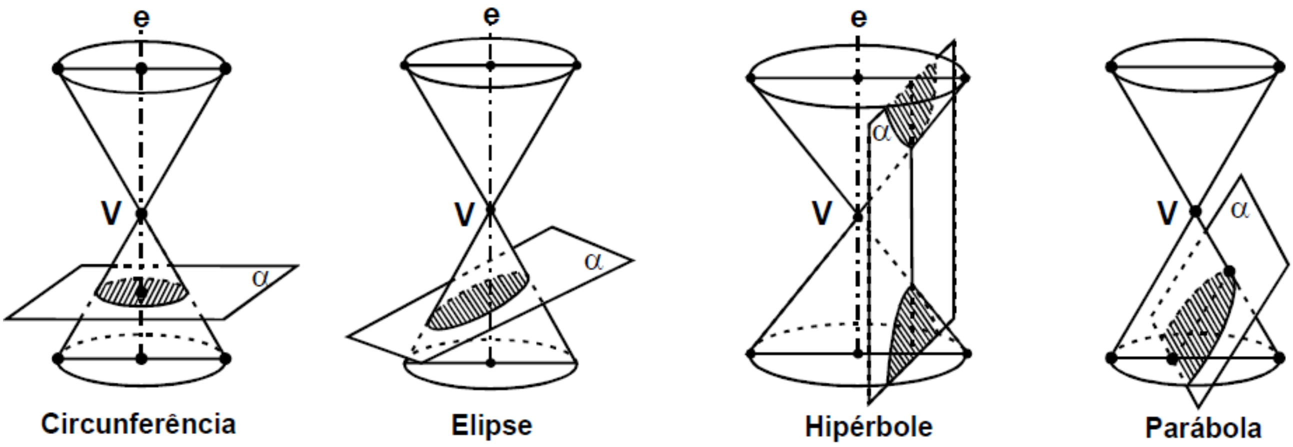


Figura 4.3: Cônicas regulares.

Fonte: adaptado de Venturi (2003).

Por outro lado, as cônicas chamadas degeneradas são obtidas quando, em particular, o plano intersepta o cone duplo em seu vértice, como mostra a Figura 4.4, assim obtendo um ponto, uma reta ou duas retas.

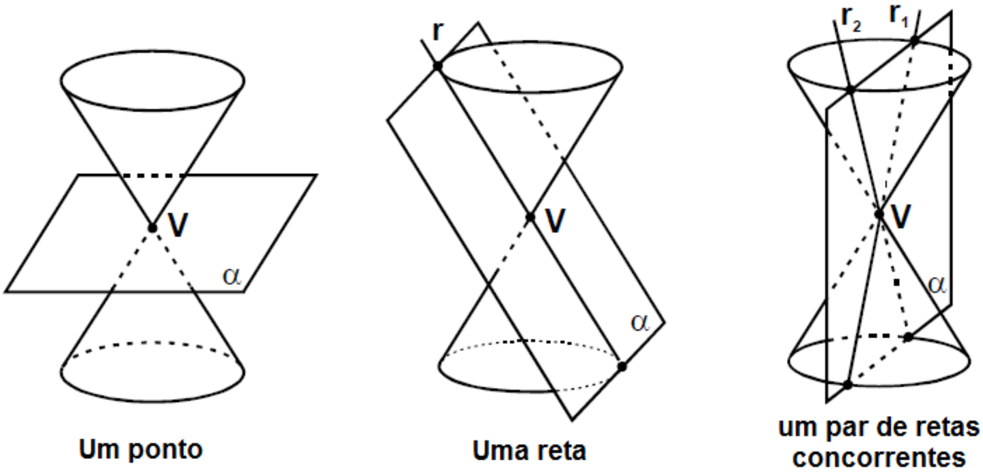


Figura 4.4: Cônicas degeneradas.

Fonte: adaptado de Venturi (2003).

As cônicas podem ser estudas de três maneiras, isto é, a partir de observações de desenhos geométricos (interseção de um plano com um cone duplo), algebricamente através da equação geral do segundo grau com duas variáveis, dada pela Equação 4.11, ou ainda cada cônica pode ser definida a partir do lugar geométrico que satisfaçam as suas propriedades.

$$G(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{4.11}$$

A nomenclatutura dos lugares geométricos obtidos por Fermat foram dados por ele conforme os valores dos coeficientes dessa equação: reta, par de retas concorrentes, parábola, círculo, elipse, hipérbole axial e hipérbole equilátera.

4.5.1 Circunferência

Definição 4.4. *Uma circunferência é o lugar geométrico do conjunto de pontos do plano equidistantes de um ponto fixo C (centro).*

O segmento que une um ponto (P) qualquer da circunferência ao centro (C) é denominado de raio (r). O segmento que une dois pontos quaisquer da circunferência passando pelo centro (C) e chamado de diâmetro (d), onde tem-se a relação $d = 2 \cdot r$.

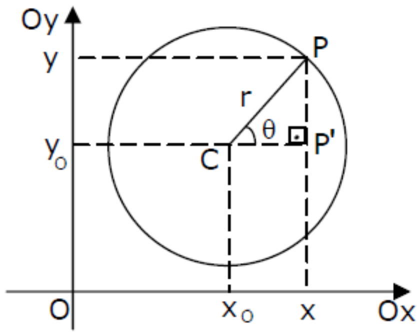


Figura 4.5: Circunferência.

Fonte: adaptado de Cruz (2014).

Seja uma cicunferência ε, como mostra a Figura 4.5, com centro $C(x_0, y_0)$ e $P(x, y)$ um ponto qualquer do plano sobre a circunferência, tem-se:

$d(C, P) = r$

$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r$

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$

A expressão obtida é denominada equação reduzida da circunferência.

O desenvolvimento da equação reduzida resulta na equação geral:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

$$x^2 - 2x_0x + x_0^2 + y^2 - 2y_0y + y_0^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0 \tag{4.12}$$

Para caracterizar uma circunferência através da equação geral, basta igualar as Equações 4.11 e 4.12.

Primeiramente, dividindo a Equação 4.11 por A ($A \neq 0$), obtém-se:

$$x^2 + \frac{B}{A}xy + \frac{C}{A}y^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0 \tag{4.13}$$

Logo, igualando as constantes das Equações 4.12 e 4.13 de acordo com cada termo, tem-se:

$$\frac{C}{A} = 1 \Longrightarrow A = C; \quad \frac{D}{A} = -2x_0 \Longrightarrow x_0 = -\frac{D}{2A}; \quad \frac{E}{A} = -2y_0 \Longrightarrow y_0 = -\frac{E}{2A};$$

$\dfrac{F}{A} = x_0^2 + y_0^2 - r^2 \Longrightarrow r^2 = x_0^2 + y_0^2 - \dfrac{F}{A} \Longrightarrow r^2 = \dfrac{D^2}{4A^2} + \dfrac{E^2}{4A^2} - \dfrac{F}{A} \Longrightarrow r^2 = \dfrac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}.$

Considerando que $r^2 = \dfrac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}$ e $r^2 > 0$. Como $4A^2 > 0$, então, tem-se que $D^2 + E^2 - 4AF > 0$.

Portanto, as condições a seguir devem ser satisfeitas para que uma equação geral das cônicas represente uma circunferência.

$$A \neq 0; B = 0 \text{ e } r^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}.$$

O centro $C(x_0, y_0)$ da circunferência é $(x_0, y_0) = \left(-\dfrac{D}{2A}, -\dfrac{E}{2A}\right)$.

Por outro lado, as equações paramétricas da circunferência também são importante e podem ser obtidas observando o triangulo CPP' na Figura 4.5.

Seja θ a medida do ângulo $\widehat{PP'C}$, tal que $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Como o triângulo CPP' é retângulo em P' , segue-se que as expresões das coordenadas x e y , em função de θ:

$\text{sen } \theta = \dfrac{y - y_0}{r} \Rightarrow y = y_0 + r\text{sen } \theta$ e $\cos \theta = \dfrac{x - x_0}{r} \Rightarrow x = x_0 + r \cos \theta$.

$$\varepsilon : \begin{cases} x = x(\theta) = x_0 + r \cos \theta \\ y = y(\theta) = y_0 + r \text{ sen } \theta \end{cases}$$

Portanto, essas são as equações paramétricas da circunferência.

4.5.2 Elipse

Devido a sua relação com os movimentos dos astros a elipse é a cônica de maior importância neste trabalho.

Como já foi mencionado no Capítulo 3, estes movimentos foram descobertos em 1609 por Kepler e enunciados na sua primeira lei, a lei das órbitas: "a órbita de cada planeta é uma elipse com o Sol posicionado em um dos focos" (ver Figura 4.6). Uma consequências desta lei é que no decorrer do movimento orbital a distância do Sol ao planeta varia. Este conteúdo com as outras duas leis de Kepler, de igual relevância com relação as órbitas, são estudados na 1ª série do ensino médio durante o quarto bimestre, onde o principal objetivo (habilidade) é que os alunos aprendam a representar graficamente órbitas dos planetas do sistema solar, de acordo com São Paulo (2016a).

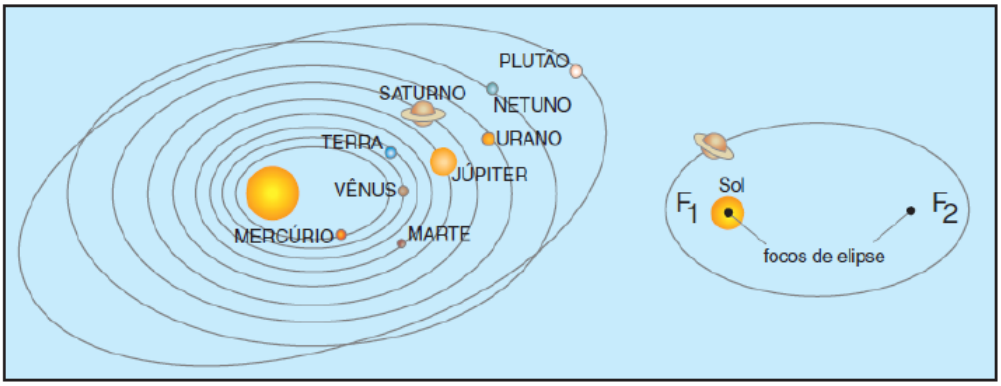


Figura 4.6: Modelo de Kepler.

Fonte: retirado de Santana (2014).

Definição 4.5. *Dados dois pontos fixos F_1 e F_2 do plano, com $d(F_1, F_2) = 2c$, denomina-se elipse ε o lugar geométrico dos pontos desse plano, cuja soma das distâncias aos pontos F_1 e F_2 é uma constante $2a$, sendo que $0 \leq c < a$.*

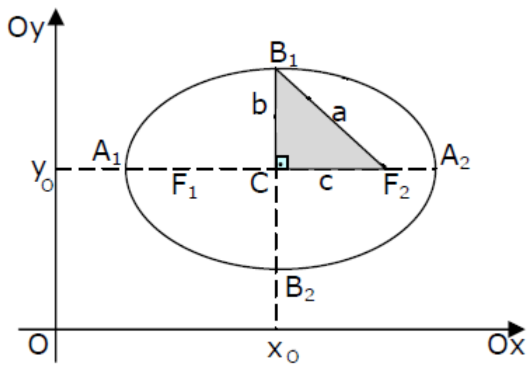


Figura 4.7: Elipse.

Fonte: adaptado de Cruz (2014).

Observando a Figura 4.7, tem-se que os elementos de uma elipse são:

- $C(x_0, y_0)$ é o centro da elipse (ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$);
- A_1, A_2, B_1 e B_2 são vértices;
- F_1 e F_2 são focos;
- $\overline{A_1A_2} = 2a$ é o eixo maior;

- $\overline{B_1B_2} = 2b$ é o eixo menor;
- $\overline{F_1F_2} = 2c$ é a distância focal;
- Relação fundamental para elipse: do triângulo CB_1F_2 vem que $a^2 = b^2 + c^2$;
- O eixo maior da elipse contém os focos;
- O eixo menor é perpendicular ao maior ($\overline{B_1B_2} \perp \overline{A_1A_2}$) definindo o centro ($C$);
- Os eixos maior e menor são chamados de eixo de simetria.

A *excentricidade* (e) é uma importante característica da elipse, a qual é definida pela relação: $e = \dfrac{c}{a}$. Como $c < a$, então $0 < e < 1$. Assim, quanto mais próxima de 0 a excentricidade estiver mais a curvatura da elipse se aproxima de uma circunferência, porém quanto mais próxima de 1 é a excentricidade mais "achatada" (alongada) é a elipse. Portanto, existe uma correspondência entre o valor da excentricidade e e a distância focal, para um valor fixo de a, isto é, quanto menor a distância entre os focos mais a elipse se aproxima de uma circunferência e quanto maior a distância entre os focos mais achatada será a elipse, como ilustra a Figura 4.8 (VENTURI, 2003).

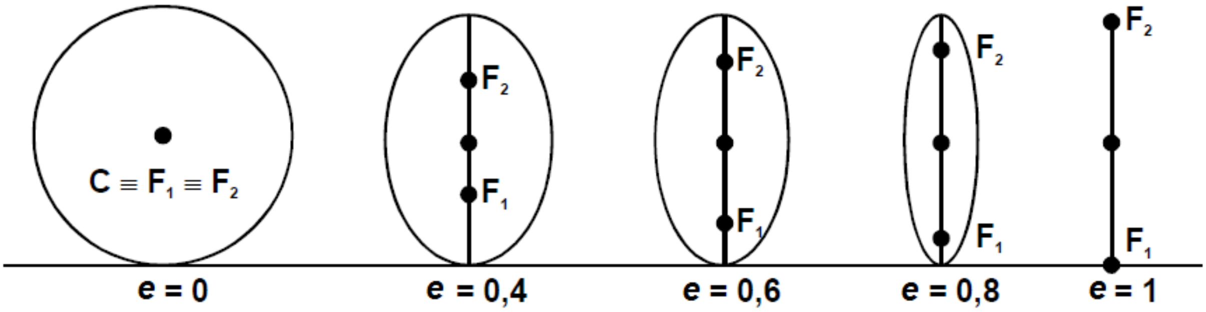


Figura 4.8: Excentricidade.

Fonte: retirado de Venturi (2003).

Nota-se que uma circunferência é obtida se $e = 0$, onde seu diâmetro é $2a$ e os focos coincidem com o centro, ou seja, $F_1 = F_2 = C$. E, ainda, é obtido um segmento retilíneo $\overline{F_1F_2}$ se $e = 1$.

Tabela 4.1: Excentricidades dos principais planetas do sistema solar.

Planetas	**Excentricidade**	**Planetas**	**Excentricidade**
Mercúrio	0,206	Júpiter	0,048
Vênus	0,007	Saturno	0,056
Terra	0,017	Urano	0,046
Marte	0,093	Netuno	0,010

Fonte: retirada de Artuso e Wrublewski (2013).

A Tabela 4.1 apresenta as excentridades das órbitas dos principais planetas do sistema solar, estes dados também são estudados no Capítulo 3 deste trabalho ao ser mencionadas as leis de Kepler, as quais são fundamentais para compreensão dos movimentos orbitais dos astros.

Por outro lado, com base na Tabela 4.1, pode-se observar as diferenças das órbitas entre os planetas, assim a órbita de menor excentricidade é a de Vênus, portanto o movimento orbital feito por este planeta é bem próximo a uma circunferência, ou seja, o Sol fica quase no centro de sua órbita e assim sua velocidade durante o movimento de translação é quase constante. Enquanto, Mercúrio possui a maior excentricidade, isto é, sua órbita elíptica é a mais achatada. Com relação a Terra, a excentricidade é uma das menores, assim sua órbita descreve uma elipse bem próxima de uma circunferência, lembrando que a distância da Terra a seu periélio é de 147 000 000 km e com relação ao afélio é de 152 000 000 km, portanto o Sol fica próximo ao centro de sua órbita.

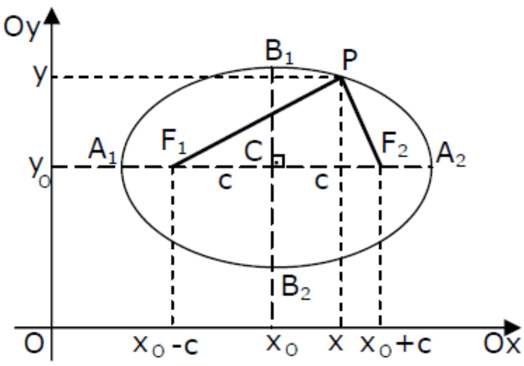


Figura 4.9: Elipse de eixo maior horizontal.

Fonte: retirado de Crus (2016).

Observando a Figura 4.9 pode-se ter algumas relações sobre uma elipse de eixo maior horizontal. Desse modo, seja $P(x, y)$ um ponto qualquer desta elipse, como mostra a Figura 4.9. A distância do ponto P ao foco F_1 é dada por $d(F_1, P)$ e a distância do ponto P ao foco F_2 é dada por $d(F_1, P)$. Logo, pela definição da elipse, tem-se a expressão $d(F_1, P) + d(F_1, P) = 2a$.

Seja a elipse ε de centro $C(x_0, y_0)$, focos $F_1(x_0 - c, y_0)$ e $F_2(x_0 + c, y_0)$ e $P(x, y)$ um ponto qualquer da elipse. Considerando o eixo maior da elipse $\overline{A_1A_2}$ paralelo ao eixo coordenado Ox, tem-se:

$$\begin{cases} \overrightarrow{F_1, P} = (x - (x_0 - c), y - y_0) \Rightarrow \overrightarrow{F_1, P} = ((x - x_0) + c, y - y_0) \\ \overrightarrow{F_2, P} = (x - (x_0 + c), y - y_0) \Rightarrow \overrightarrow{F_1, P} = ((x - x_0) + c, y - y_0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |\overline{F_1, P}| = \sqrt{(x - (x_0 - c))^2 + (y - y_0)^2} \\ |\overline{F_2, P}| = \sqrt{(x - (x_0 + c))^2 + (y - y_0)^2} \end{cases}$$

Como $d(F_1,P)+d(F_2,P)=2a \Longrightarrow |\overline{F_1,P}|+|\overline{F_2,P}|=2a \Longrightarrow |\overline{F_1,P}|=2a-|\overline{F_2,P}|$, elevando ao quadrado ambos membros desta igualdade, tem-se:

$|\overline{F_1,P}|^2=(2a-|\overline{F_2,P}|)^2 \Rightarrow |\overline{F_1,P}|^2=4^2-4a|\overline{F_2,P}|+|\overline{F_2,P}|^2 \Rightarrow$

$|\overline{F_1,P}|^2-|\overline{F_2,P}|^2=4a^2-4a|\overline{F_2,P}|^2 \Rightarrow$

$\left(\sqrt{[(x-x_0)+c]^2+(y-y_0)^2}\right)^2-\left(\sqrt{[(x-x_0)-c]^2+(y-y_0)^2}\right)^2=$

$4\mathrm{a}^2-4a|\overline{F_2,P}|^2 \Rightarrow$

$[(x-x_0)+c]^2+(y-y_0)^2-[(x-x_0)-c]^2-(y-y_0)^2=4a^2-4a|\overline{F_2,P}| \Rightarrow$

$(x-x_0)^2+2c(x-x_0)+c^2-(x-x_0)^2+2c(x-x_0)-c^2=4a^2-4a|\overline{F_2,P}| \Rightarrow$

$4c(x-x_0)=4a^2-4a|\overline{F_2,P}| \Rightarrow$

$c(x-x_0)-a^2=-a|\overline{F_2,P}|$, elevando ambos lados ao quadrado, tem-se:

$\left[c(x-x_0)-a^2\right]^2=\left(-a|\overline{F_2,P}|\right)^2 \Rightarrow \left[c(x-x_0)-a^2\right]^2 c=(-a)^2|\overline{F_2,P}|^2 \Rightarrow$

$\left[c(x-x_0)-a^2\right]^2=(-a)^2\left(\sqrt{[(x-x_0)-c]^2+(y-y_0)^2}\right)^2 \Rightarrow$

$c^2(x-x_0)^2-2a^2c(x-x_0)+a^4=a^2\left((x-x_0)^2-2c(x-x_0)+c^2+(y-y_0)^2\right) \Rightarrow$

$c^2(x-x_0)^2-2a^2c(x-x_0)+a^4=a^2(x-x_0)^2-2a^2c(x-x_0)+a^2c^2+a^2(y-y_0)^2 \Rightarrow$

$c^2(x-x_0)^2-a^2(x-x_0)^2-a^2(y-y_0)^2+a^4-a^2c^2=0 \Rightarrow$

$$(c^2-a^2)(x-x_0)^2-a^2(y-y_0)^2+a^2(a^2-c^2)=0 \tag{4.14}$$

Pela relação fundamental da elipse $a^2=b^2+c^2 \Rightarrow a^2-c^2=b^2$. Substituindo na Equação 4.14, tem-se:

$-b^2(x-x_0)^2-a^2(y-y_0)^2+a^2b^2=0 \Rightarrow -b^2\cdot(x-x_0)^2-a^2\cdot(y-x)^2=-a^2b^2$

Dividindo esta expressão por $(-a^2\cdot b^2)$, tem-se:

$\frac{-b^2}{-a^2b^2}(x-x_0)^2-\frac{b^2}{-a^2b^2}(y-y_0)^2=\frac{-a^2b^2}{-a^2b^2} \Rightarrow \frac{1}{a^2}(x-x_0)^2+\frac{1}{b^2}(y-y_0)^2=1$

$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$

A expressão obtida é a equação reduzida da elipse. Esta expressão foi demonstrada a partir de uma elipse de eixo maior na horizontal, ou seja, com o eixo maior paralelo ao eixo Ox . Porém, para encontrar uma equação reduzida de eixo vertical(ver Figura 4.10), isto é, com o eixo maior paralelo ao eixo Oy é de modo análogo a elipse de eixo maior na horizontal. Entretanto, para notar as diferenças nestas equações basta observar a relação fundamental da elipse, pois $a^2 = b^2 + c^2$, tem-se que $a^2 > b^2$, então $a > b$. Portanto, a^2 é o denominador de maior valor da equação reduzida da elipse, onde a é a medida do semieixo maior. Assim, se o a^2 é o valor do denominador do termo $(x - x_0)^2$ desta equação, então a elipse possui seu maior eixo paralelo sobre o eixo Ox, ou seja, na horizontal (CRUZ, 2014).

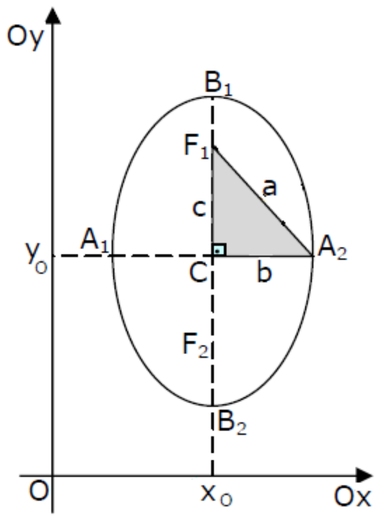


Figura 4.10: Elipse de eixo maior vertical.

Fonte: adaptado de Cruz (2014).

As possibilidades da equação reduzida da elipse de acordo com seu eixo maior:

- Elipse de eixo maior horizontal: $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1;$
- Elipse de eixo menor vertical: $\dfrac{(x-x_0)^2}{b^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1.$

Caso particular: Da equação fundamental da elipse, se $a = b$, então $a^2 = a^2 + c^2$, portanto $c = 0$. Fazendo $a = c$ na equação reduzida, tem-se:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1$$

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = a^2$$

Esta é a equação de uma circunferência de raio a, portanto, a elipse pode ser uma circunferência de excentricidade nula $\left(e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{0}{a} = 0\right)$.

Fazendo o desenvolvimento da equação reduzida da elipse com eixo maior na horizontal (análogo para eixo maior na vertical) resulta na equação geral:

$\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$, multiplicando ambos lados por a^2b^2, tem-se:

$$\frac{a^2b^2(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{a^2b^2(y-y_0)^2}{b^2}=a^2b^2 \Rightarrow$$

$$b^2(x-x_0)^2+a^2(y-y_0)^2=a^2b^2 \Rightarrow$$

$$b^2(x^2-2x_0x+x_0^2)+a^2(y^2-2y_0y+y_0^2)=a^2b^2 \Rightarrow$$

$$b^2x^2-2x_0b^2x+b^2x_0^2+a^2y^2-2y_0a^2y+a^2y_0^2-a^2b^2=0 \Rightarrow$$

$$b^2x^2+a^2y^2-2x_0b^2x-2y_0a^2y+(\underbrace{a^2y_0^2+b^2x_0^2-a^2b^2}_{\textit{termo independente}})=0.$$

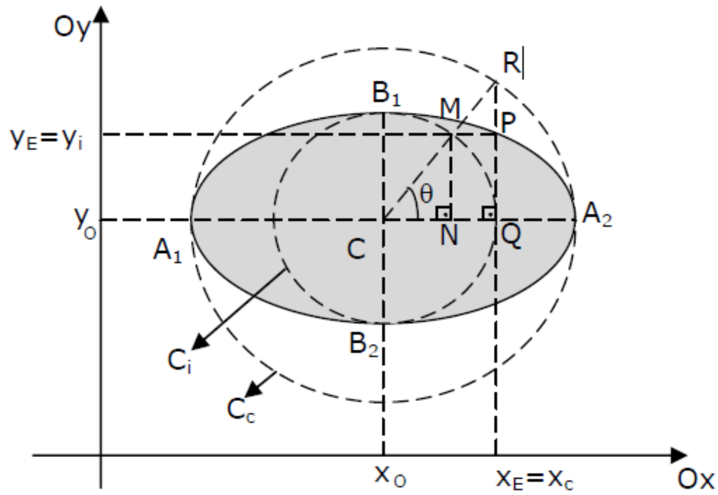


Figura 4.11: Elementos da elipse de eixo maior horizontal.

Fonte: adaptado de Cruz (2014).

Por outro lado, para encontrar as equações paramétricas da elipse, deve-se observar a Figura 4.11. Considerando uma elipse ε com eixo maior horizontal $\overline{A_1A_2}=2a$, eixo menor $\overline{B_1B_2}=2b$e centro $C(x_0,y_0)$, uma circunferência C_i com centro $C(x_0,y_0)$ e raio "b", inscrita na elipse, uma circunferência C_c com centro $C(x_0,y_0)$ e raio "a", circunscrita na elipse e seja $P(x_E,y_E)$ um ponto qualquer de ε.

Sendo assim, passa-se por P uma reta paralela ao eixo Oy, que determina em C_c o ponto $R(x_c,y_c)$ e uma reta paralela ao eixo Ox, que determina em C_i o ponto $M(x_i,y_i)$. Portanto, as equações paramétricas das circunferências C_c e C_i são, respectivamente, (I): $\begin{cases} x_c = x_c(\theta) = x_0 + a\cos\theta \\ y_c = y_c(\theta) = y_0 + a\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$; (II): $\begin{cases} x_i = x_i(\theta) = x_0 + b\cos\theta \\ y_i = y_i(\theta) = y_0 + b\,\mathrm{sen}\,\theta, \end{cases}$

onde $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Como os pontos $C(x_0, y_0)$, $R(x_c, y_c)$ e $M(x_i, y_i)$ são colineares, pois

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_c & y_c & 1 \\ x_i & y_i & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_0 + a\cos\theta & y_0 + a\,\mathrm{sen}\,\theta & 1 \\ x_0 + b\cos\theta & y_0 + b\,\mathrm{sen}\,\theta & 1 \end{vmatrix} =$$

$x_0(y_0 + a\,\mathrm{sen}\,\theta) + (x_0 + a\cos\theta)(y_0 + b\,\mathrm{sen}\,\theta) + y_0(x_0 + b\cos\theta) -$

$(\mathrm{x}_0 + b\cos\theta)(y_0 + a\,\mathrm{sen}\,\theta) - x_0(y_0 + \mathrm{sen}\,\theta) - y_0(x_0 + a\cos\theta) =$

$x_0y_0 + x_0\,\mathrm{sen}\,\theta + x_0y_0 + x_0b\,\mathrm{sen}\,\theta + y_0a\cos\theta + ab\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + x_0y_0 + y_0b\cos\theta -$

$\mathrm{x}_0y_0 - x_0a\,\mathrm{sen}\,\theta - y_0b\cos\theta - ab\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta - x_0y_0 - x_0b\,\mathrm{sen}\,\theta - x_0y_0 - y_0a\cos\theta = 0.$

O segmento $\overline{PM}$ é paralelo ao eixo Ox. Desse modo, tem-se que $x_E = x_c$ e $y_E = y_i$, então:

(III): $\begin{cases} x_E = x_E(\theta) = x_0 + a\cos\theta \\ y_E = y_E(\theta) = y_0 + b\,\mathrm{sen}\,\theta, \end{cases}$

onde $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Portanto, essas são as equações paramétricas da elipse de eixo maior paralelo ao eixo Ox.

De modo análogo são desenvolvidas as equações paramétricas para uma elipse de eixo maior paralelo ao eixo Oy. Portanto, para um ponto $P(x_E, y_E)$ pertencente a uma elipse de eixo maior vertical, tem-se:

(IV): $\begin{cases} x_E = x_E(\theta) = x_0 + b\cos\theta \\ y_E = y_E(\theta) = y_0 + a\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$.

4.5.3 Parábola

Definição 4.6. *É o lugar geométrico dos pontos de um plano α que equidistam de uma reta (d) fixa e de um ponto fixo (F), não pertencente à reta (d).*

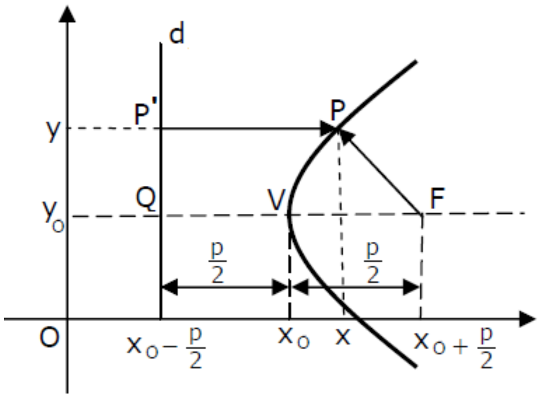


Figura 4.12: Parábola.

Fonte: adaptado de Cruz (2014).

Observando a Figura 4.12, tem-se os elementos de uma parábola a seguir:

- O vétice $V(x_0, y_0)$;
- O foco F;
- A reta diretriz (d);
- A reta $\overrightarrow{VF}$ é o eixo de simetria da parábola;
- O segmento $\overline{QF} = p$, p é denominado parâmetro da parábola;
- Os segmentos $\overline{QV} = \overline{VF} = \dfrac{p}{2}$;
- A excentricidade da parábola é dada por: $e = \dfrac{d(P,F)}{d(P,d)} = 1$

Pela definição da parábola, seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da parábola, tem-se $d(P'P) = d(PF)$. Como $P'\left(x_0 - \dfrac{p}{2}, y\right)$ e $F\left(x_0 + \dfrac{p}{2}, y_0\right)$, tem-se $\overline{QP} = \left(x - x_0 + \dfrac{p}{2}, 0\right)$ e $\overline{FP} = \left(x - x_0 - \dfrac{p}{2}, y - y_0\right)$. Logo,

$$|\overline{QP}| = |\overline{FP}| \Rightarrow \sqrt{\left[(x - x_0) + \frac{p}{2}\right]^2} = \sqrt{\left[(x - x_0) - \frac{p}{2}\right]^2 + (y - y_0)^2} \Rightarrow$$

$$\left[(x - x_0) + \frac{p}{2}\right]^2 = \left[(x - x_0) - \frac{p}{2}\right]^2 + (y - y_0)^2 \Rightarrow$$

$$(x - x_0)^2 + p(x - x_0) + \frac{p^2}{4} = (x - x_0)^2 - p(x - x_0) + \frac{p^2}{4} + (y - y_0)^2 \Rightarrow$$

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0).$$

A expressão obtida é a equação reduzida da parábola com eixo de simetria na horizontal.

De modo análogo, demonstra-se a equação reduzida de uma parábola com eixo de simetria vertical, isto é, paralelo ao eixo Oy.

As possibilidades da equação reduzida da parábola de acordo com seu eixo de simetria:

- Parábola com eixo de simetria horizontal: $\begin{cases} (y-y_0)^2 = 2p(x-x_0) \\ \text{diretriz } (d)\text{: } x = x_0 \pm \dfrac{p}{2} \end{cases}$;

- Parábola com eixo de simetria vertical: $\begin{cases} (x-x_0)^2 = 2p(y-y_0) \\ \text{diretriz } (d)\text{: } y = y_0 \pm \dfrac{p}{2} \end{cases}$.

Desenvolvendo a equação reduzida da reta obtém-se a equação geral. Considerando uma parábola de eixo de simetria paralelo ao eixo Ox (horizontal), tem-se:

$$(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0) \Rightarrow y^2 - y_0y + y_0^2 = 2px - 2px_0 \Rightarrow$$

$$y^2 - 2y_0x - 2py + \underbrace{y^2 + 2px_0}_{termo\ independente}.$$

Analogamente, obtem-se a equação geral para uma parábola de eixo se simetria vertical da forma:

$$x^2 - 2px - 2x_0y + \underbrace{x_0^2 + 2py_0}_{termo\ independente}.$$

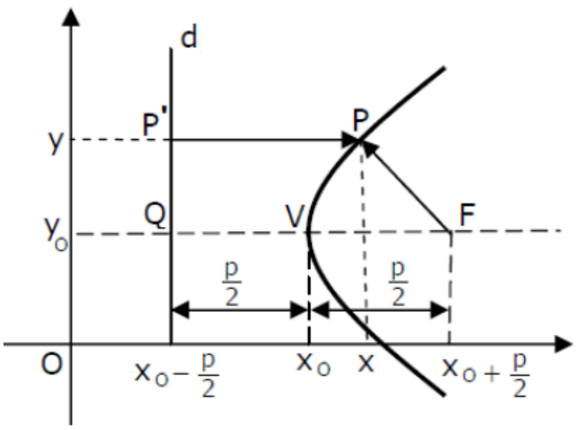


Figura 4.13: Elementos da parábola de eixo de simentria horizontal.

Fonte: adaptado de Cruz (2014).

Por outro lado, para encontrar as equações paramétricas da parábola, deve-se observar a Figura 4.13. Considerando uma parábola com eixo simetria horizontal de vértice $V(x_0, y_0)$, diretriz d. Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da parábola. Traçando pelo vértice V uma reta paralela ao eixo Oy, da interseção desta reta com a reta $\overrightarrow{P'P}$, tem-se o ponto R. Assim, do triângulo QRV tem-se:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y - y_0}{p/2} \Rightarrow y - y_0 = \frac{p}{2}\operatorname{tg}\theta \Rightarrow$$

$$y = y_0 + \frac{p}{2}\operatorname{tg}\theta. \tag{4.15}$$

Note que $(y - y_0)^2 = \dfrac{p^2}{4}\operatorname{tg}^2\theta$ e da equação reduzida da parábola, tem-se que $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$. Logo,

$$2p(x - x_0) = \frac{p^2}{4}\operatorname{tg}^2\theta \Rightarrow$$

$$x = x_0 + \frac{p}{8}\operatorname{tg}^2\theta. \tag{4.16}$$

Portanto, expressões e são as equações paramétricas da parábola de eixo de simetria horizontal.

As equações paramétricas para uma parábola de eixo de simetria vertical são desenvolvidas de modo análogo.

$$\begin{cases} x = x_0 + \dfrac{p}{2}\operatorname{cotg}\theta \\ \\ y = y_0 + \dfrac{p}{8}\operatorname{cotg}^2\theta \end{cases} ,0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

4.5.4 Hipérbole

Definição 4.7. *É o lugar geométrico dos pontos de um plano α cujo módulo da diferença de suas distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 (focos) é uma constante $(2a)$, onde $2a < d(F1F2)$.*

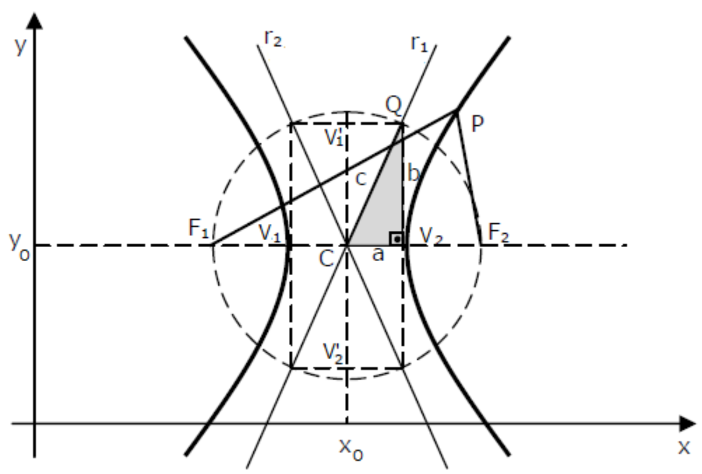


Figura 4.14: Hipérbole.

Fonte: adaptado de Cruz (2014).

Observando a Figura 4.14, tem-se os elementos de uma hipérbole a seguir:

- $C(x_0, y_0)$ é o centro;
- Os vétices são V_1 e V_2;
- Os focos são F_1 e F_2;
- O segmento $\overline{V_1V_2} = 2a$ é o eixo real (ou eixo transverso);
- O segmento $\overline{V_1'V_2'} = 2b$ é o eixo imaginário (ou eixo conjugado);
- O segmento $\overline{F_1F_2} = 2c$ é a distância focal;
- Relação fundamental para elipse: Do triângulo $CV_2Q \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$;
- As retas r_1 e r_2 são denominadas de assíntotas;
- Excentricidade: $e = \dfrac{c}{a} \Rightarrow e = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$. Portanto, para hipérbole $a < c$, então $e > 1$. Assim, quanto mais próximo de 1 estiver à excentricidade, mais fechados são os ramos da hipérbole, ou seja, maior a sua abertura e, mais abertos eles serão à medida que a excentricidade se afasta de 1, ou seja, menor a sua abertura.

As retas r_1 e r_2 são importantes no esboço do gráfico da hipérbole, pois definem a abertura dos ramos, os quais não interceptam e nem tangenciam as assíntotas. As equações das retas assíntotas da hipérbole são determinadas por: $(y-y_0) = \pm\dfrac{b}{a}(x-x_0)$, para hipérbole de eixo real horizontal, ou seja, eixo real V_1V_2 paralelo ao eixo Ox e $(y - y_0) = \pm\dfrac{b}{a}(x - x_0)$, para hipérbole de eixo real vertical, ou seja, eixo real V_1V_2 paralelo ao eixo Oy.

Pela definição de hipérbole, seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da hipérbole, tem-se que $|d(F_1P) - d(F_2P)| = 2a$. Como $F_1(x_0 - c, y_0)$ e $F_1(x_0 + c, y_0)$. Considerando uma hipérbole de eixo real horizontal, ou seja, V_1V_2 paralelo ao eixo coordenado Ox, como ilustra a Figura 4.15, tem-se:

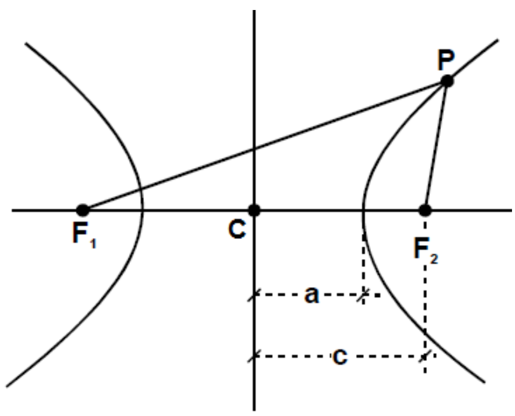


Figura 4.15: Hipérbole de eixo real horizontal.

Fonte: adaptado de Venturi (2003).

$$\begin{cases} \overrightarrow{F_1, P} = (x - (x_0 - c), y - y_0) \Rightarrow \overrightarrow{F_1, P} = ((x - x_0) + c, y - y_0) \\ \overrightarrow{F_2, P} = (x - (x_0 + c), y - y_0) \Rightarrow \overrightarrow{F_1, P} = ((x - x_0) + c, y - y_0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |\overline{F_1, P}| = \sqrt{(x - (x_0 - c))^2 + (y - y_0)^2} \\ |\overline{F_2, P}| = \sqrt{(x - (x_0 + c))^2 + (y - y_0)^2} \end{cases} .$$

Como $|d(F_1, P) - d(F_2, P)| = 2a \Longrightarrow \left||\overline{F_1, P}| - |\overline{F_2, P}|\right| = 2a \Longrightarrow$

$$\left|\sqrt{[(x - x_0) + c]^2 + (y - y_0)^2} - \sqrt{[(x - x_0) - c]^2 + (y - y_0)^2}\right| = 2a \Rightarrow$$

$$\sqrt{[(x - x_0) + c]^2 + (y - y_0)^2} - \sqrt{[(x - x_0) - c]^2 + (y - y_0)^2} = \pm 2a \Rightarrow$$

$\sqrt{[(x - x_0) + c]^2 + (y - y_0)^2} = \pm 2a + \sqrt{[(x - x_0) - c]^2 + (y - y_0)^2}$, elevando ambos membros da igualdade ao quadrado, obtem-se:

$$[(x - x_0) + c]^2 + (y - y_0)^2 =$$

$$4\mathrm{a}^2 \pm 4a\sqrt{[(x - x_0) - c]^2 + (y - y_0)^2} + [(x - x_0) - c]^2 + (y - y_0)^2 \Rightarrow$$

$$(x - x_0)^2 + 2c(x - x_0) + c^2 + (y - y_0)^2 =$$

$$4\mathrm{a}^2 \pm 4a\sqrt{[(x - x_0) - c]^2 + (y - y_0)^2} + (x - x_0)^2 - 2c(x - x_0) + c^2 + (y - y_0)^2 \Rightarrow$$

$$2c(x - x_0) = 4a^2 \pm 4a\sqrt{[(x - x_0) - c]^2 + (y - y_0)^2} - 2c(x - x_0) \Rightarrow$$

$4c(x - x_0) = 4a^2 \pm 4a\sqrt{[(x - x_0) - c]^2 + (y - y_0)^2} \Rightarrow$, dividindo ambos membros da igualdade por 4, tem-se:

$$c(x - x_0) = a^2 \pm a\sqrt{[(x - x_0) - c]^2 + (y - y_0)^2} \Rightarrow$$

$c(x - x_0) - a^2 = \pm a\sqrt{[(x - x_0) - c]^2 + (y - y_0)^2}$, elevando novamente ambos membros da igualdade ao quadrado, obtem-se:

$$c^2(x - x_0)^2 - 2a^2c(x - x_0) + a^4 = a^2\left\{[(x - x_0) - c]^2 + (y - y_0)^2\right\} \Rightarrow$$

$$c^2(x - x_0)^2 - 2a^2c(x - x_0) + a^4 = a^2[(x - x_0) - c]^2 + a^2(y - y_0)^2 \Rightarrow$$

$$c^2(x - x_0)^2 - 2a^2c(x - x_0) + a^4 = a^2[(x - x_0)^2 - 2c(x - x_0) + c^2] + a^2(y - y_0)^2 \Rightarrow$$

$$c^2(x - x_0)^2 - 2a^2c(x - x_0) + a^4 = a^2(x - x_0)^2 - 2a^2c(x - x_0) + a^2c^2 + a^2(y - y_0)^2 \Rightarrow$$

$$c^2(x - x_0)^2 + a^4 = a^2(x - x_0)^2 + a^2c^2 + a^2(y - y_0)^2 \Rightarrow$$

$$c^2(x - x_0)^2 - a^2(x - x_0)^2 - a^2(y - y_0)^2 = a^2c^2 - a^4 \Rightarrow$$

$(x - x_0)^2(c^2 - a^2) - a^2(y - y_0)^2 = a^2(c^2 - a^2)$, dividindo ambos os membros por $a^2(c^2 - a^2)$, tem-se:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{c^2 - a^2} = 1$$

Da relação fundamental, tem-se $b^2 = c^2 - a^2$, logo,

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Portanto, expressão obtida é a equação reduzida da hipérbole com eixo real horizontal, isto é, V_1V_2 paralelo ao eixo coordenado Ox.

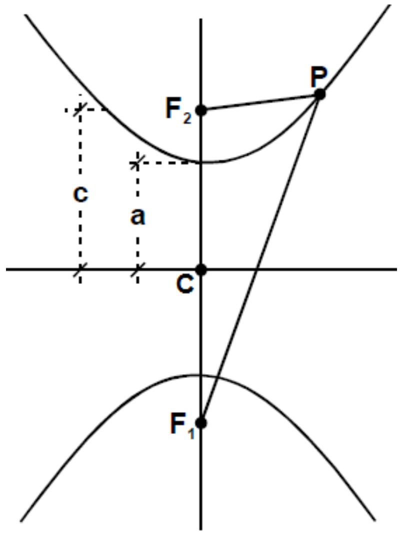


Figura 4.16: Hipérbole de eixo real vertical.

Fonte: adaptado de Venturi (2003).

De modo análogo, demonstra-se a equação reduzida de uma hipérbole com eixo real vertical, isto é, V_1V_2 paralelo ao eixo Oy, ilustrada na Figura 4.16. Assim,

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1.$$

Fazendo o desenvolvimento da equação reduzida da elipse hipérbole com eixo real horizontal (análogo para eixo maior na vertical) resulta na equação geral:

$\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$, multiplicando ambos lados por a^2b^2, tem-se:

$$\frac{a^2b^2(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{a^2b^2(y - y_0)^2}{b^2} = a^2b^2 \Rightarrow$$

$$b^2(x - x_0)^2 - a^2(y - y_0)^2 = a^2b^2 \Rightarrow$$

$b^2(x^2 - 2x_0x + x_0^2) - a^2(y^2 - 2y_0y + y_0^2) = a^2b^2 \Rightarrow$

$b^2x^2 - 2x_0b^2x + b^2x_0^2 - a^2y^2 + 2y_0a^2y - a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0 \Rightarrow$

$b^2x^2 - a^2y^2 - 2x_0b^2x + 2y_0a^2y + \underbrace{b^2x_0^2 - a^2y_0^2 - a^2b^2}_{termo\ independente}.$

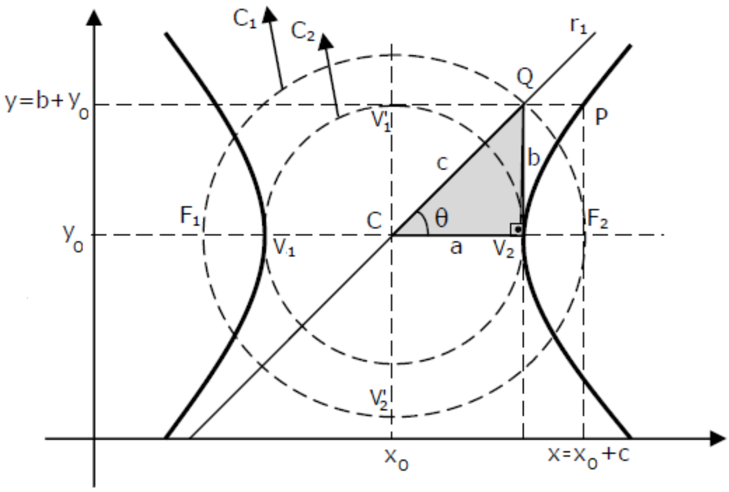


Figura 4.17: Elementos da hipérbole de eixo real horizontal.

Fonte: adaptado de Cruz (2014).

Considerando uma hipérbole com eixo real horizontal de centro $C(x_0, y_0)$, eixo real $\overline{V_1V_2} = 2a$, eixo imaginário $\overline{V_1'V_2'} = 2b$ e distância focal $\overline{F_1F_2} = 2c$. Traçando uma circunferência C_1 centrada em $C(x_0, y_0)$ e raio igual a "a" interseptando a reta assíntota r_1 em Q.

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer desta hipérbole. Traça-se uma reta pelos pontos Q e V_2 paralela ao eixo Oy. Pela construção, tem-se que $a = b$ e as coordenadas do ponto $P(x, y)$ são $x = x_0 + c$ e $y = y_0 + b$. Do triângulo CV_2Q retângulo em V_2, tem-se que:

$\cos\theta\dfrac{a}{c} \Rightarrow \dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{\cos\theta} \Rightarrow x - x_0 = a\sec\theta \Rightarrow x = x_0 + a\sec\theta;$

$\operatorname{tg}\theta = \dfrac{b}{a} \Rightarrow b = a\operatorname{tg}\theta \Rightarrow y - y_0 = b\operatorname{tg}\theta \Rightarrow y = y_0 + b\operatorname{tg}\theta,$

onde $0 \leq \theta \leq 2\Pi$.

Portanto, estas são as equações paramétricas de uma hipérbole de eixo real horizontal

De modo análogo, pode-se demonstrar as equações paramétricas para uma hipérbole de eixo real vertical. Assim:

$$\begin{cases} x = x_0 + b\operatorname{tg}\theta \\ y = y_0 + a\sec\theta \end{cases} \quad (0 \leq \theta \leq 2\Pi).$$

Para identificar uma cônica através de sua equação geral: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, basta utilizar a classificação a seguir:

- Se $B^2 - 4AC < 0 \Rightarrow$ elipse ou circunferência;
- Se $B^2 - 4AC = 0 \Rightarrow$ parábola;
- Se $B^2 - 4AC > 0 \Rightarrow$ hipérbole.

Ainda, é possível identificar uma cônica a partir do valor de sua excentricidade e:

- Se $e = 0 \Rightarrow$ circunferência;
- Se $0 < e < 1 \Rightarrow$ elipse;
- Se $e = 1 \Rightarrow$ parábola;
- Se $e > 1 \Rightarrow$ hipérbole.

Segundo Peres (2014), além das cônicas regulares como circunferências, elipses, parábolas e hipérboles, também denominadas cônicas não degeneradas existem as formas degeneradas desses tipos de cônicas. As cônicas degeneradas são obtidas quando o plano intersepta o cone duplo em seu vértice, assim obtendo um conjunto vazio, um ponto, uma reta ou duas retas, sendo um caso particular das equações encontradas para cada cônica regular, a partir da equação geral.

- Um ponto é uma elipse ou uma circunferência degenerada, o qual ocorre a partir da intersecção de um cone duplo com um plano que é oblíquo ao seu eixo e não paralelo a nenhuma de suas geratrizes, passando pelo seu vértice;
- Uma única reta é uma parábola degenerada, a qual é formada a partir da intersecção de um cone duplo com um plano que é paralelo a uma de suas geratrizes que passa pelo seu vértice;
- Um par de retas é hipérbole degenerada e ocorre por meio da intersecção do cone duplo com um plano que contém o seu eixo.

A Tabela 4.2 apresenta um resumo sobre as cônicas regulares (não degeneradas) e das cônicas degeneradas com as condições que as caracterizam como circunferência, elipse, parábola, hipérbole, duas retas, uma reta, um ponto ou o conjunto vazio.

Tabela 4.2: Resumo sobre cônicas

Discriminte	**Cônicas**	**Condições**
$B^2 - 4AC < 0 (AC > 0)$	Circunferência	$A = C \Rightarrow Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$
	Elipse	$A \neq C \Rightarrow Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$
	Um ponto	$\frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F = 0$
	Conjunto vazio	$\frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F < 0$
$B^2 - 4AC = 0 (AC = 0)$	Parábola	$A = 0$ e $C \neq 0 \Rightarrow Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ $A \neq 0$ e $C = 0 \Rightarrow Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$
	Uma reta	$A = D = 0$ e $E^2 - 4CF \geq 0$ $C = E = 0$ e $D^2 - 4AF \geq 0$
	Conjunto vazio	$A = D = 0 \Rightarrow E^2 - 4CF < 0$ $C = E = 0 \Rightarrow D^2 - 4AF < 0$
$B^2 - 4AC > 0 (AC < 0)$	Hipérbole	$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$
	Par de retas	$A > 0$, $C < 0$ e $\frac{D^2}{4A} - \frac{E^2}{4C} - F = 0$ $A < 0$, $C > 0$ e $\frac{D^2}{4A} - \frac{E^2}{4C} - F = 0$

5 A importância do estudo do tempo

O tema calendário envolve um profundo estudo do tempo, cuja aprendizagem é desenvolvida em vários momentos do ensino fundamental e médio. O tempo é mencionado por diversas vezes nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) e sua importância também é destacada nos mesmos nas disciplinas de ciências/física (fundamental/médio), química, matemática, filosofia e história. Além disso, em tais disciplinas, existem várias atividades presentes nos cadernos do professor e também do aluno destas disciplinas, sendo estes materiais de apoio criados pela Secretaria de Estado de Educação (SEE) do Estado de São Paulo baseados nas competências e habilidades destacadas nos PCN's.

Vale ressaltar ainda, que o tempo (calendário) está relacionado a diversos conteúdos matemáticos que também devem ser explorados, sendo que alguns modelos de aplicação serão apresentados nesta seção, apesar de já terem sido abordados anteriormente. Ainda será feita uma análise sobre os assuntos relacionados ao tema nos documentos aqui citados.

É interessante notar que a proposta envolvendo a temática calendário permite explorar também a área da informática desenvolvendo algoritmos para encontrar datas específicas para diferentes calendários, até mesmo conversões entre datas de calendÃ¡rios diferentes. Assim estes algoritmos desenvolvidos de acordo com o que se deseja podem ser gerados em alguns programas apropriados como o Excel, o R, entre outros.

5.1 Parâmetros Curriculares Nacionais e o tempo

Nesta seção será mostrado como os PCN's exploram o tema de acordo com as matérias aplicadas nos anos do ensino fundamental e médio, ou seja, quais são as orientações destes documentos de como se deve tratar tal assunto. A idéia de tempo retratada nos PCN's é essencial para o planejamento das aulas e até mesmo para ser traçada uma sequência didática. De acordo com Brasil (1998) é importante o aluno reconhecer que as relações entre as unidades padronizadas de algumas grandezas não são decimais, como as de tempo, e este fato encontra suas razões nas origens históricas. Vale notar que, hoje em dia, utiliza-se em muitas situações um sistema misto (sexagesimal e decimal) como nas corridas de automóvel, provas de natação onde o tempo é expresso em décimos e centésimos de segundo.

Entre os alunos dos primeiro (2º e 3º anos) e segundo (4º e 5º anos) ciclos do ensino fundamental existe muita dificuldade com relação às medidas de tempo. Ainda assim, o trabalho com essa grandeza nem sempre é retomado nos terceiro (6º e 7º anos) e quarto (8º e 9º anos) ciclos, pois se considera que os alunos possuem certa noção sobre este assunto. Se discute quais assuntos instigam a curiosidade dos alunos sobre o tempo:

> [$\cdots$] os alunos se interessam muito por assuntos como o extermínio dos dinossauros ocorrido há 65 milhões de anos, ou pelo intervalo de tempo entre duas batidas sucessivas das asas de um beija-flor e, além disso, compreendem que esses valores estão muito além dos limites que os sentidos podem perceber. O trabalho com o tempo pode permitir discussões interessantes, como sobre quanto tempo decorreu muito antes de existirem os homens das cavernas, ou ainda sobre como será a paisagem da Terra daqui a um milhão de anos etc (BRASIL, 1998, p. 132).
> As dificuldades encontradas pelos alunos podem estar relacionadas ao fato de que o tempo não pode ser observado diretamente como propriedade dos objetos. A medição do tempo é essencialmente um processo de contagem. Qualquer fenômeno periódico (fenômeno que se repete num ritmo regular) pode ser usado para a medição do tempo e esta consiste, então, na contagem das repetições do fenômeno escolhido.

Ainda é importante salientar aos alunos as diferentes formas pelas quais os seres humanos historicamente evoluiram na maneira de medir o tempo, notando que foi possível medi-lo registrando as repetições de fenômenos periódicos. Conscientizá-los que qualquer evento (ciclos) da natureza era usado para marcar o tempo, como o período entre um nascer do Sol e outro, a sucessão das Luas cheias, o número de primaveras. Então se costumava contar os anos por verões (ou invernos), os meses por Luas e os dias por Sóis, o que os levou a concluir que o período entre uma Lua e outra era constante (29 dias e meio).

Os PCN's levam em consideração a compreensão da relação entre as unidades de tempo utilizadas hoje que tornam-se mais aceita quando se retomam alguns aspectos históricos das medidas. Por exemplo, ter a noção que em 2000 a.C. os babilônios já adotavam seu ano, como período de 360 dias e, ainda, que este povo escolheu como base para seu sistema de numeração o número 60 (que é divisor de 360), lembrando que isso se mantém até hoje na contagem de tempo, pois 1 hora equivale a 60 minutos e 1 minuto a 60 segundos.

Segundo Brasil (1998), a resolução de situações-problema envolvendo medida de tempo ajuda na construção de procedimentos de cálculos com as diferentes unidades de medida. Várias atividades que envolvem a questão do tempo motivam a curiosidade dos alunos, como:

- pesquisa/seminário sobre o funcionamento e construção de um relógio solar;

- construção e determinação do tempo que a areia leva para escoar da parte superior para a parte inferior de uma ampulheta;
- pesquisa/seminário sobre o funcionamento de relógios de pêndulo, mecânicos, de quartzo e digitais, observando neles os fenômenos periódicos que são contados.

Com relação à disciplina de física a competência para identificar o significado do conceito de tempo como parâmetro físico deve ser acompanhada da capacidade de associar este conceito com os tempos envolvidos nos processos biológicos ou químicos e mesmo sua contraposição com os tempos psicológicos, além da importância do tempo no mundo da produção e dos serviços. Portanto, a competência para utilizar o instrumental da física não significa restringir a atenção aos objetos de estudo básicos da física: o tempo não é apenas um valor colocado no "eixo horizontal" ou uma grandeza física para o estudo dos movimentos (BRASIL, 2000a).

Usando-se a vivência dos alunos e os fatos do cotidiano, busca-se reconstruir os conhecimentos químicos que permitiriam refazer essas leituras de mundo, também com fundamentação na ciência. Nesta etapa, desenvolvem-se "ferramentas químicas" mais apropriadas para estabelecer ligações com outros campos do conhecimento. É o início da interdisciplinaridade. O conteúdo a ser abordado, nesta fase, deve proporcionar um entendimento amplo acerca da transformação química, envolvendo inicialmente seu reconhecimento qualitativo e suas interrelações com massa, energia e **tempo**.

De acordo com Brasil (2000b), as ciências humanas leva a buscar respostas e ferramentas para a resolução de problemas concretos, além de avaliar o impacto que as tecnologias promovem sobre estas mesmas sociedades, o que deve ocorrer com relação às concepções de tempo, que têm variado intensamente ao longo da história, em função das tecnologias envolvidas na sua medição, como os relógios mecânicos ou eletrônicos e os modernos cronômetros, que asseguram precisão em medidas muito curtas.

Ainda neste documento é observado que estes recursos, que são desenvolvidos para corresponder às necessidades no campo da produção econômica e da circulação de mercadorias e informações, são responsáveis por darem uma sensação de controle do tempo. Esta atual relação com o tempo, diferentemente das de épocas anteriores, hoje, interfere diretamente nas rotinas do cotidiano social, em diversos contextos como o trabalho e do lazer. No entanto ressalta que devido a complexidade das relações sociais nem todos dispõem do tempo da mesma forma, estabelece-se relações diferenciadas de maior ou menor liberdade neste controle. Para alguns, o relógio implica libertação; para outros, escravidão.

> O tempo histórico pode ser compreendido em toda sua complexidade, ultrapassando sua apreensão a partir das vivências pessoais, psicológicas ou fisiológicas. No nível médio de ensino, é preciso igualmente que o tempo histórico seja entendido como objeto da cultura, como criação de povos em diversos momentos e espaços. É da cultura que nascem concepções de tempo tão diferenciadas como o tempo mítico,

> escatológico, cíclico, cronológico, noções sociais criadas pelo homem para representar as temporalidades naturais, expressas nos tempos geológico e astronômico. Não se pode esquecer, ainda, que mesmo o tempo natural reveste-se de um caráter cultural, quando apropriado pela geologia e pela astronomia, enquanto ciências socialmente criadas (BRASIL, 2000b, p. 23).

Com relação aos conhecimentos de história o tempo elaborado pelas variadas culturas é muitas vezes expresso nos mitos, destacando-se os que se referem às origens do universo e do ser humano, e nas religiões, que ultrapassam os tempos passado e presente e determinam o tempo de possíveis vidas futuras. As sociedades agrárias coordenaram a vida cotidiana pelo tempo cíclico, marcados pelos momentos de plantação e de colheita, motivados pelas estações que se repetem anualmente, e vincularam o tempo cotidiano, com seus ritmos de mudanças, ao astronômico, criando calendários, referenciando as marcas dos acontecimentos do dia-a-dia e daqueles considerados significativos para a memória de um povo. Então, pode-se compreender o tempo cronológico como instrumento de marcação e datação e entender como a cultura ocidental cristã desenvolveu seu calendário. Sobre o calendário gregoriano, que marca o tempo da maioria dos povos atualmente, deve-se considerar as formas como ele está organizado. Apesar dos números dos dias e os nomes dos meses se repetirem de um ano para o outro (com base em organizações periódicas), a numeração dos anos não se repete nunca, o que torna cada data única, ou seja, sem possibilidade de repetição no tempo.

Ainda, segundo Brasil (2000b), a contribuição mais importante da aprendizagem da história é propiciar ao jovem situar-se na sociedade contemporânea para poder melhor entendê-la. Como decorrência direta disto está a possibilidade efetiva do desenvolvimento da capacidade de compreensão do tempo. O tempo histórico, entendido nesta complexidade, se favorece do tempo cronológico, que possibilita referenciar o lugar dos fatos históricos em seu processo de sucessão e sua simultaneidade. A duração torna-se, neste nível de ensino, a maneira mais fundamentada de apreensão do tempo histórico, ao possibilitar que alunos estabeleçam as relações entre continuidades e descontinuidades. A concepção de duração possibilita entender o sentido das revoluções como momentos de mudanças irreversíveis da história e ainda favorece que o aluno aprenda as relações entre presente-passado-presente, fundamentais à compreensão das problemáticas contemporâneas, e entre presente-passado-futuro, que permitem criar projeções e utopias.

5.2 Caderno do professor/aluno - atividades

É interessante destacar para aos discentes as diferentes formas pelas quais os seres humanos historicamente mediram o tempo, a forma pela qual perceberam que, apesar de não se poder conter o tempo, era possível medi-lo registrando as repetições de fenômenos periódicos. Mostrar que, na antiguidade, embora a falta de conhecimento profundo, o bom senso e a necessidade (por causa das plantações, da forma de se proteger da variação de clima, etc.) os levaram a criar seu próprio estilo de contagem do tempo.

As resoluções de situações-problema que envolvem medida de tempo favorece a construção de procedimentos de cálculo com as diferentes unidades de medida (1 hora equivale a 60 minutos e 1 minuto a 60 segundos). Entretanto, exitem diversas atividades que envolvem a questão do tempo que estão no caderno do professor/aluno em várias disciplinas do currículo que podem instigar a curiosidade dos alunos sobre o assunto. A seguir algumas destas atividades propostas pelo estado de São Paulo são destacadas e comentadas por disciplinas.

5.2.1 História

A noção de tempo começa a ser introduzida aos alunos do ensino fundamental dos anos finais na 6° ano (5ª série) no primeiro semestre na disciplina de história observada no material de apoio ao currículo do estado de São Paulo, em São Paulo (2014 - 2017*b*), onde são abordados os conteúdos: sistemas sociais e culturais de notação de tempo; passado, presente e futuro, anterioridade, posteridade, calendários, tempo, ampulheta, clepsidra, pêndulo e solstício. O Caderno sugere que com estes conteúdos o docente desenvolva habilidades e competências nos discentes como: dominar a norma culta da língua portuguesa e fazer uso das linguagens matemática, artística e científica; além disso, reconhecer acontecimentos no tempo (tendo como referência a anterioridade e a posteridade); reconhecer diferentes formas de marcação de tempo; trabalhar em equipe; pesquisar; sistematizar e apresentar conceitos e informações; desenvolver a expressão oral e escrita.

Em São Paulo (2014 - 2017*b*) a primeira situação de aprendizagem (sondagem e sensibilização) é dividida em três etapas. Na primeira etapa é indicado pelo material que se inicie a sondagem perguntando aos alunos como eles marcam o tempo. Fala da importância do professor mostrar aos alunos que se percebe a existência do tempo, mas não se pode vê-lo nem segurá-lo, embora se possa estabelecer maneiras para medi-lo.

Nesta etapa é recomendado que o professor converse muito com os alunos sobre o tempo e seus diferentes significados, que estimule os alunos visulizarem situações que estejam relacionadas ao cotidiano deles, em que percebam a passagem do tempo de modo diferenciado (rápido e devagar). Também que seja organizado com seus alunos um roteiro de pesquisa sobre os sistemas sociais e culturais de notação de tempo ao longo da história, como os diferentes tipos de calendário. Além disso, é destacada a importância de buscar informações sobre a clepsidra, a ampulheta, o gnômon e os relógios de pêndulo, de bolso, de pulso e digital; e os temas relacionados ao tempo histórico, como as origens dos nomes dos meses do ano e dos dias da semana, as razões da periodização do tempo e curiosidades sobre a necessidade do ser humano de marcar o tempo.

A segunda etapa apresenta o tema com um texto "Tempo: duração e medição". Com ele será estimulada a curiosidade dos alunos sobre a notação do tempo, seu surgimento e as necessidades que pretendia suprir. Então são sugeridas algumas questões a serem passadas aos alunos:

1. A necessidade de marcar o tempo nasce com o ser humano?

2. Por que a semana tem sete dias?

3. Qual é a origem dos nomes dos meses do nosso calendário?

4. Com que objetivos se periodiza o tempo? Quais são os critérios usados nessa divisão do tempo em períodos?

5. Quais são as informações que temos sobre os relógios mais antigos?

Em seguida há mais um texto, "Os relógios e o tempo", sobre o surgimento e funcionamento dos relógios mais antigos como gnômon, clepsidra e a ampulheta. Desta forma, os alunos poderão verificar a singularidade e a necessidade das sociedades na notação do tempo ao longo da história.

Para finalizar esta etapa, deve ser apresentado aos alunos o roteiro de pesquisa que busca novos dados para ampliar o entendimento do tema. Este processo é iniciado com a leitura do texto "O calendário", presente na seção leitura e análise de texto, no Caderno do Aluno. Então, deve ser solicitado aos alunos que realizem pesquisas para caracterizar os marcadores de tempo.

Organizados em grupos pequenos os alunos devem coletar dados para, posteriormente, elaborar textos autorais a partir da seleção das informações que atendam aos objetivos propostos, selecionando ou desenhando imagens que se refiram ao assunto pesquisado.

A última etapa realizada a partir da pesquisa do material sobre sistemas sociais e culturais de notação de tempo, os alunos devem se reunir na classe para apresentar aos colegas o material coletado e começarem a fazer os registros.

No Caderno do Aluno o experimento a seguir (ver Figura 5.1) está contemplada na seção *Roteiro de experimentação* a montagem de uma ampulheta.

Montagem de uma ampulheta

Materiais:

- 2 garrafas plásticas de refrigerante (600 ml) ou água (500 ml) bem limpas e secas (uma delas com tampa).
- Sal, areia fina ou farinha fina de mesa (farinha de trigo ou de mandioca).
- Fita adesiva.

Montagem:

- ▶ Encha uma das garrafas com areia, sal ou farinha de mesa.
- ▶ Tampe a garrafa e peça para um adulto fazer um pequeno furo na tampa.
- ▶ Cole uma garrafa na outra pelo gargalo.
- ▶ Ponha a garrafa cheia de areia virada para baixo e espere.

Usando a ampulheta:

- ▶ Vire a ampulheta para marcar o tempo da atividade que está sendo realizada.
- ▶ Registre quantas vezes, durante a atividade, a areia da ampulheta passou para a garrafa de baixo.

Ciência Hoje na Escola, 7: "Tempo e Espaço". Rio de Janeiro, Instituto Ciência Hoje, 1999. v.7. p. 18.

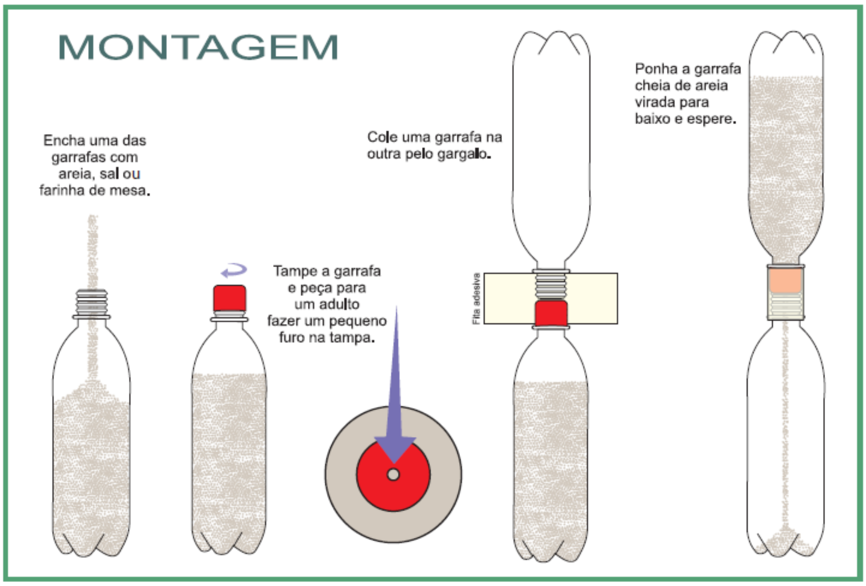


Figura 5.1: Montagem de uma ampulheta.

Fonte: retirada de São Paulo (2014 - 2017*b*).

Esta situação de aprendizagem desperta a curiosidade dos alunos, de modo que o professor possa explorar ainda mais o tema com uma atividade de pesquisa sobre a evolução dos relógios ao longo dos tempos.

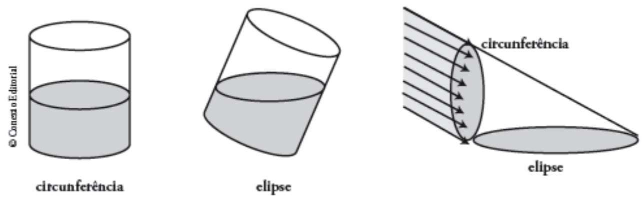
5.2.2 Matemática

Na disciplina de matemática é grande o leque de atividades diversificadas que envolvem os conteúdos discutidos neste trabalho. No entanto, no caderno do professor/aluno da 3ª série do ensino médio em São Paulo (2014 - 2017*d*) apresenta a situação de aprendizagem 4 sobre circunferências e cônicas, que deve ser desenvolvida no segundo semestre, expõe o tema de maneira clara e descontraida, relacionando as cônicas com o cotidiano. Como toda situação de aprendizagem, no caderno do professor, inicia-se com as competências e habilidades que o docente deve desenvolver nos alunos: "capacidade de expressar por meio da linguagem algébrica as propriedades características de curvas muito frequentes na natureza, como as circunferências e as cônicas; capacidade de reconhecer, em diferentes contextos, a presença das circunferências e das cônicas, expressas por meio de suas equações; capacidade de lidar com as equações das circunferências e das cônicas para resolver problemas simples, em diferentes contextos" (São Paulo, 2014 -2017d). O conteúdo é iniciado com um texto de apresentação com figuras ilustrativas, de modo que professor e aluno possam interagir e encontrar em diferentes contextos do cotidiano exemplos de tais cônicas. O texto esta representado na Figura 5.2.

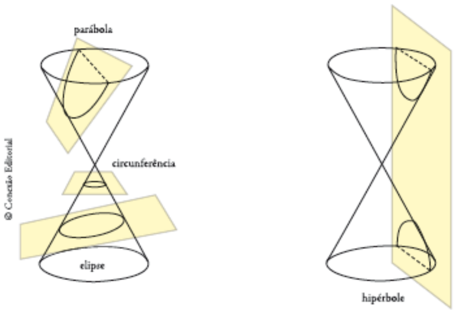
Leitura e análise de texto

As circunferências e as cônicas (elipses, hipérboles e parábolas) são curvas que também podem ser representadas no plano cartesiano e cuja propriedade obedecida pelos seus pontos pode ser descrita por meio de uma equação de duas variáveis.

A circunferência e a elipse podem ser vistas a partir de seções de um cilindro circular; a elipse não passa de uma circunferência alongada em uma das duas direções.



Os quatro tipos de curvas podem ser vistos como seções de uma superfície cônica.



Também é possível observar superfícies cônicas colocando-se água em recipientes cilíndricos ou cortando-se adequadamente uma peça de salame.

Figura 5.2: Texto sobre circunferências e cônicas.
Fonte: retirado de São Paulo (2014 - 2017d).

O mesmo ocorre quando o foco é sobre a elipse, uma das formas cônicas estudadas e de maior importância neste trabalho por ser o formato das órbitas dos planetas, começa-se a introduzir o assunto com o texto "Elipse" (ver Figura 5.3) também com figuras representativas. Em seguida são propostas três atividades bem completas sobre elipse, porém, São Paulo (2014 - 2017d) informa que há necessidade de antes oferecer aos discentes muitas atividades extras para que assim tenham habilidade suficiente para desenvolver tais atividades.

Após o texto apresentado na Figura 5.3, a situação de aprendizagem propõe algumas atividades que ajudam na construção da equação reduzida da elipse e os elementos que a compõe, além de relacionar a forma geométrica com expressão algébrica, o que exige esforço do docente para que o aluno adquira domínio de tais conteúdos suficientes para desenvolvê-las. E ainda, cabe ao docente saber introduzir alguns conceitos não

Elipse

As curvas chamadas cônicas – a elipse, a hipérbole e a parábola – ocorrem com muita frequência na natureza e no dia a dia. Vamos conhecer suas principais características, começando pela elipse.

Quando inclinamos um recipiente cilíndrico aberto, de seção circular, contendo água em repouso, o contorno da superfície da água é uma elipse. Também é uma elipse a sombra projetada de uma circunferência situada em um plano vertical, quando a luz do Sol, ou outra luz qualquer, incide obliquamente.

Foi Johannes Kepler (1571-1630), em seus estudos de Astronomia, quem associou às trajetórias dos planetas ao redor do Sol não mais circunferências, mas sim elipses, ou seja, circunferências "achatadas". Nessas elipses, Kepler destacou a existência de dois pontos simetricamente opostos em relação ao centro, chamados focos, em um dos quais o Sol se situava.

A partir desses dois pontos, uma propriedade fundamental pode ser utilizada para caracterizar uma elipse: qualquer ponto da elipse é tal que a soma das distâncias até esses dois pontos fixados, que são os focos, é constante. Jardineiros utilizam frequentemente essa propriedade para construir canteiros elípticos: fincando-se duas estacas, uma em cada foco, e deslocando-se um estilete, com um barbante de comprimento L (maior do que a distância entre os focos) esticado, obtém-se uma elipse.

$d(P, F_1) + d(P, F_2) = \text{constante}$

Um coador de café de plástico pode ilustrar o fato de que as elipses podem ser consideradas como curvas intermediárias entre a circunferência e o segmento de reta:

Uma elipse apresenta dois eixos de simetria: o semieixo maior costuma ser representado por **a**, o menor por **b**. Assim, os dois eixos são 2a e 2b.

Figura 5.3: Texto sobre elipse.

Fonte: retirado de São Paulo (2014 - 2017*d*).

apresentado nesta situação de aprendizagem, como por exemplo, a formalização da equação da elipse a partir da equação geral. Apesar das atividades serem completas não são suficientes, então, no final do conteúdo apresentado, há sugestões para que o docente aplique mais atividades, porém, deve ser observada a realidade da sala e as dificuldades da maioria dos alunos para escolha dos exercícios, para poder focar os conceitos dos quais as habilidades não foram totalmente assimiladas.

Do mesmo modo que foram tratados os conceitos sobre elipse, segue-se com a hipérbole e a parábola. Um texto introduz o tema sobre a cônica relacionando sua forma com alguma situação cotidiana, então, em seguida são propostas algumas atividades contextuais, dos quais exigem mais conhecimentos do que o texto traz, por este motivo o docente deve conduzir a aula com conteúdos e atividades complementares.

5.3 Atividades/sequências didáticas

São descritas três atividades/oficinas que foram desenvolvidas de modo que os alunos possam assimilar as competências e habilidades de acordo com o conteúdo aplicado. Estas atividades se iniciam com orientações pedagógicas, onde segue com algumas atividades que estão dividas em três etapas seguindo uma sequência didática de modo que os alunos consigam assimilar os conceitos estudados anteriormente que sã pré-requisitos para trabalhar o conteúdo atual e assim consigam desenvolvê-las sem muita dificuldade.

5.3.1 Atividade 1 - Divisibilidade

Folha do Professor

Atividade: Explorando os números naturais ($\mathbb{N}$) - divisão exata.

Atividade em grupo: 4 alunos.

Público alvo: Alunos do 6º ano do ensino fundamental.

Conteúdo(s): Divisores, divisibilidade de um número natural e aplicações.

Objetivo(s) (competências/habilidades): Saber determinar os divisores de um número natural; compreender o conceito de múltiplo e divisor; desenvolver o cálculo mental e as técnicas de divisão e multiplicação.

Material utilizado: Giz, lousa e folhas de orientações (professor/aluno).

Tempo de duração: 2 aulas simples (50 minutos cada).

Procedimento pedagógico/orientações ao docente:

É importante que os alunos já tenham conhecimentos prévios sobre os números naturais como seus principais subconjuntos que são os números pares, os ímpares, os primos, os múltiplos e os divisores.

De acordo com São Paulo (2015 - 2017*e*), ao introduzir o conceito de divisibilidade é possível explorar o processo da divisão exata com números naturais e sua reconstituição através da operação inversa. É necessário enfatizar o conceito de que se pode fazer o caminho de volta da operação de divisão pelo processo de multiplicação.

Apesar do conceito de divisibilidade ser introduzido aos alunos no 3º ano do ensino fundamental vale relembrá-los de cada elemento da divisão, o *divisor*, o *dividendo*, o *quociente* e o *resto*, na forma de algoritmo, como mostra a Figura 5.4. Além disso, há necessidade dos discentes se familiarizarem com os significados dos seguintes termos: "ser múltiplo de", "ser divisível por", "ser divisor de" e "ser fator de".

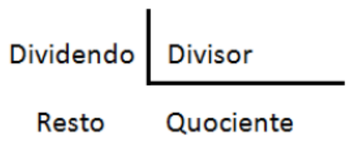


Figura 5.4: Algoritmo da divisão euclidiana.

Exemplo 5.1.

A divisão exata de 56 por 7 e sua operação inversa: $56 \div 7 = 8 \Rightarrow 8 \cdot 7 = 56$.

Observando as operações do Exemplo 5.1, pode-se afirmar que:

- o número 7 divide o número 56 em 8 partes idênticas;
- 7 é divisor de 56, ou, ainda, 56 é divisível por 7;
- na operação inversa, 56 é o resultado do produto de 7 por 8, então 56 é múltiplo de 7;
- 56 também é múltiplo de 8.

Observe que a ideia de divisor está ligada ao conceito múltiplo, isto é, se um número a é múltiplo de outro número b, então b é divisor de a.

Etapa 1: Flechando múltiplos e divisores.

Fonte: São Paulo (1994).

A turma pode ser dividida em grupos de até quatro alunos.

O professor deve colocar na lousa o diagrama da Figura 5.5 na lousa. Explicar que a flecha significa *"é divisor de"*, por exemplo, 2 *é divisor de* 8 ou 5 *é divisor de* 5, visto no diagrama.

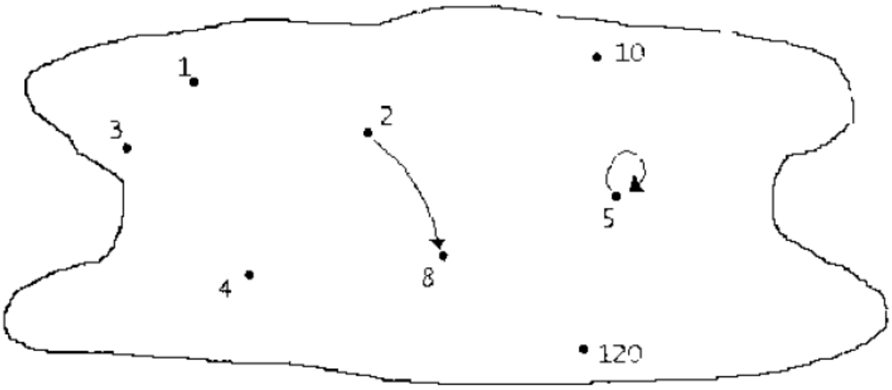


Figura 5.5: Diagrama para explorar "os divisores de".

Os alunos devem ser orientados a desenharem as flechas que estão faltando. Após completarem as flechas uma análise da situação será proposta com as seguintes questões:

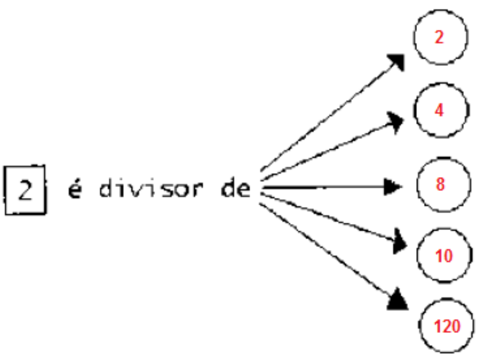
- Dos números apresentados no diagrama teve algum número que partiram flechas para todos os números? O que isto significa?
  Resposta: Sim, isto significa que este número divide todos os outros.

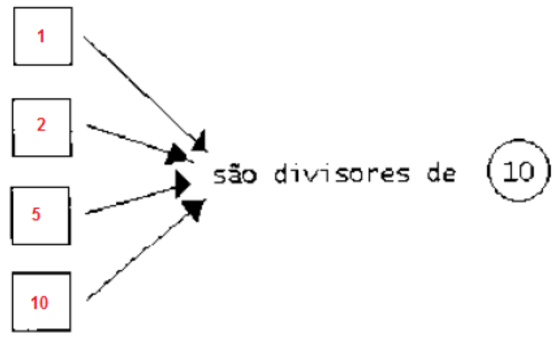
- Dentre estes números teve algum que chegaram flechas de todos os números? Por quê?
  Resposta: Sim, porque todos os outros números o dividem.

- De cada número parte uma flecha para ele mesmo? Justifique sua resposta.
  Resposta: Sim, pois todos os números se dividem.

- Para quais números apontam as flechas que partem de 2? Justifique sua resposta.
  Resposta: As flechas que partem de 2 apontam para os números: 2, 4, 8, 10 e 120, pois estes números são divisíveis por dois.

Observando o diagrama da Figura 5.5, os alunos poderão completar o esquema:





Após tal discussão, o mesmo diagrama é apresentado, porém deve ser proposta com uma mudança do significado da flecha para *é múltiplo de*, por exemplo, 8 *é múltiplo de* 2 ou 3 *é múltiplo de* 3, como na Figura 5.6

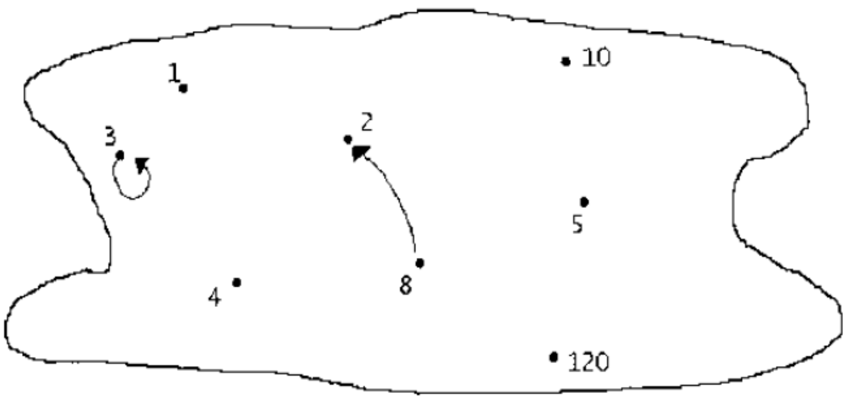


Figura 5.6: Diagrama para explorar "os múltiplos de".

Novamente, os alunos devem ser orientados a desenharem as flechas faltantes. E, portanto, deve ser feita uma discussão relacionado os dois diagramas:

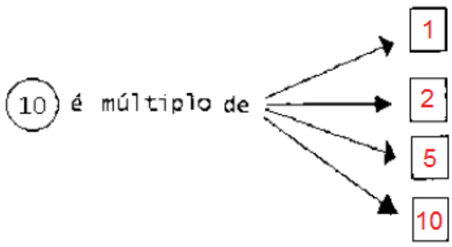
- Por que toda flecha que vai de um número para o outro no diagrama da Figura 5.5, volta no diagrama da Figura 5.6?
  Resposta: Porque no diagrama da Figura 5.5 as flechas partem do divisor e no diagrama da Figura 5.6 as flechas partem dos múltiplo.

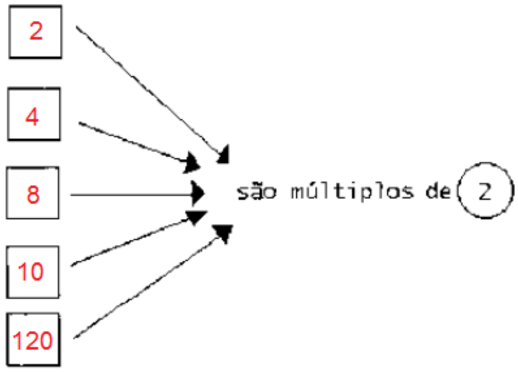
- Por que em todo número existe uma flecha dele para ele mesmo, tanto no diagrama da Figura 5.5, como no diagrama da Figura 5.6?
  Resposta: Porque assim como todo número divide ele mesmo, também é múltiplo.

- Por que do número 1 partem flechas para todos os números no diagrama da Figura 5.5?
  Resposta: Porque o 1 divide todos os outros números.

- Por que do número 120 partem flechas para todos os números no diagrama da Figura 5.6?
  Resposta: Porque o 120 é divisível por todos os outros números do diagrama da Figura 5.6.

Observando o diagrama da Figura 5.6, os alunos poderão completar o esquema:





Com base no diagrama da Figura 5.6, os alunos poderão completar, também:

120 é divisível por 1, 2, 3, 4, 5, 8, 10 e 120.	4 é divisível por 1, 2 e 4.
10 é divisível por 1, 2, 5 e 10.	3 é divisível por 1 e 3.
8 é divisível por 1, 2, 4 e 8.	2 é divisível por 1 e 2.
5 é divisível por 1, 5 e 10.	1 é divisível por 1

Agora, os alunos devem "arrumar" o que descobriram na seguinte tabela:

Número com UM divisor, apenas	Número com Dois divisores, apenas	Número com mais de DOIS divisores
1	2, 3, e 5	4, 8, 10 e 120

Etapa 2: Encontrando divisores.

Formalizando o que aprenderam na Etapa 1, os alunos devem encontrar todos os divisores dos números indicados e fazer o caminho inverso com a operação oposta.

- 24: 1, 2, 4, 6, 12, 24.
  $24 = 1 \cdot 24$
  $24 = 2 \cdot 12$
  $24 = 4 \cdot 6$

- 60: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.
  $60 = 1 \cdot 60$
  $60 = 2 \cdot 30$
  $60 = 3 \cdot 20$
  $60 = 4 \cdot 15$
  $60 = 5 \cdot 12$
  $60 = 6 \cdot 10$

- 365: 1, 5, 73, 365.
  $365 = 1 \cdot 365$
  $365 = 5 \cdot 73$

- 366: 1, 2, 3, 6, 61, 122, 183, 366.
  $366 = 1 \cdot 366$
  $366 = 2 \cdot 183$
  $366 = 3 \cdot 122$
  $366 = 6 \cdot 61$

Etapa 3: DESAFIO - Cruzada das operações (multiplicação e divisão com números inteiros).

Para instigar a curiosidade do grupo é proposto um desafio, observado na Figura 5.7, onde juntos devem descobrir os números que estão faltando na cruzada.

24	x	1	:	4	= 6
:		x		x	
12	:	4	x	2	= 6
X		X		:	
4	x	2	:	1	= 8
= 8		= 8		= 8	

Figura 5.7: Cruzadinha de operações.

Fonte: retirada http://www.paic.seduc.ce.gov.br[1] (Acesso em jan/2017).

Atuação do professor durante as Atividades:

Ao entregar a Atividade resolvida, o professor poderá colocar o tempo dispendido pelo aluno no campo específico. Obviamente que o tempo de resolução entre os estudantes irá variar em função do domínio de conteúdo de cada um deles. Uma alternativa para os alunos que terminarem é auxiliar os demais colegas de classe.

Atividade 1 - Divisibilidade

Folha do Aluno

Explorando os números naturais ($\mathbb{N}$) - divisão exata.

Etapa 1: Flechando múltiplos e divisores.

Fonte: São Paulo, 1994.

Responda conforme o exemplo:

Exemplo: 2 *é divisor de* 8 ou 5 *é divisor de* 5, como pode ser visto no diagrama da Figura 5.8.

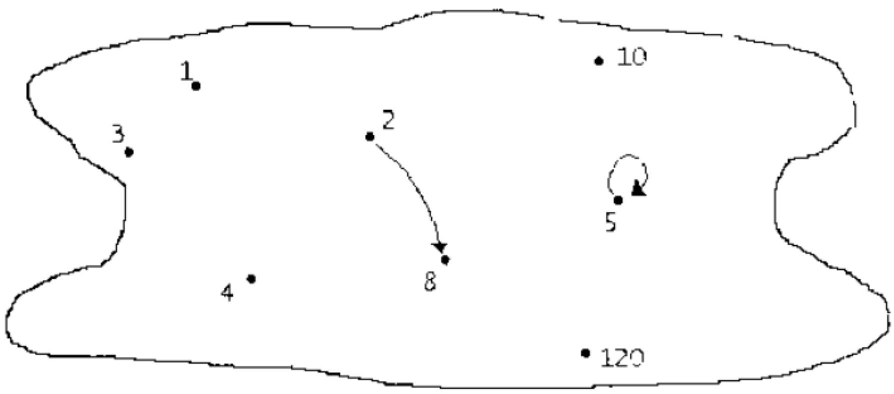


Figura 5.8: Diagrama para explorar "os divisores de".

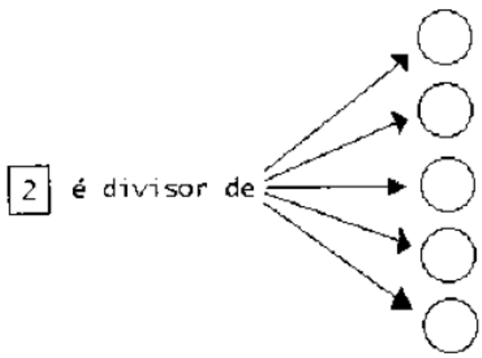
- Dos números apresentados no diagrama teve algum número que partiram flechas para todos os números? O que isto significa?

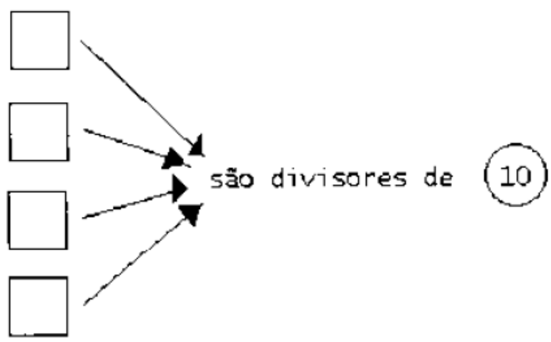
- Dentre estes números teve algum que chegaram flechas de todos os números? Por quê?

- De cada número parte uma flecha para ele mesmo? Justifique sua resposta.

- Para quais números apontam as flechas que partem de 2? Justifique sua resposta.

Observando o diagrama da Figura 5.8 complete o esquema:





Exemplo: 8 *é múltiplo de* 2 ou 3 *é múltiplo de* 3, como pode ser visto no diagrama da Figura 5.9.

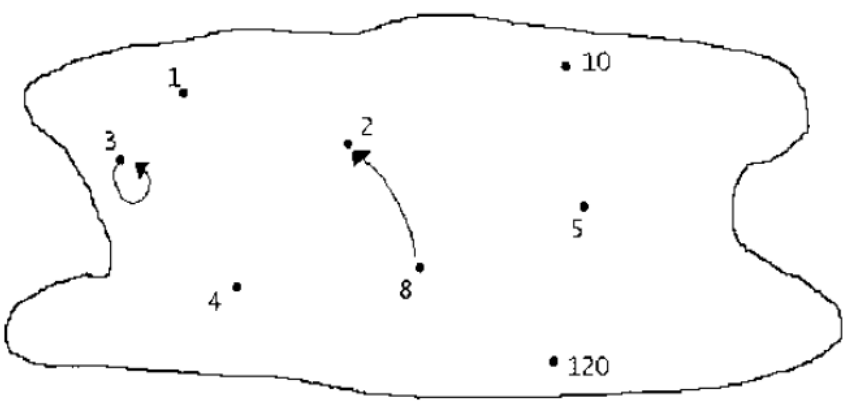


Figura 5.9: Diagrama para explorar "os múltiplos de".

Responda:

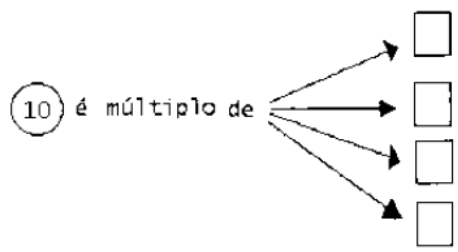
- Por que toda flecha que vai de um número para o outro no diagrama da Figura 5.8, volta no diagrama da Figura 5.9?

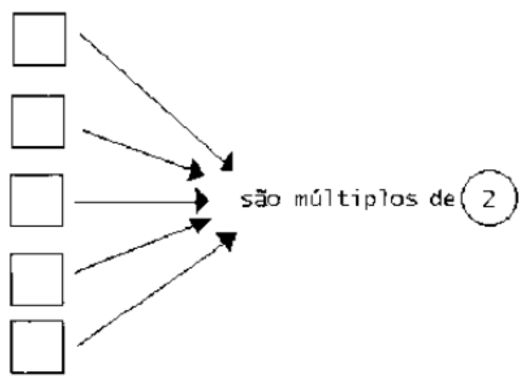
- Por que em todo número existe uma flecha dele para ele mesmo, tanto no diagrama da Figura 5.8, como no diagrama da Figura 5.9?

- Por que do número 1 partem flechas para todos os números no diagrama da Figura 5.8?

- Por que de 120 partem flechas para todos os números no diagrama da Figura 5.9?

Observando o diagrama da Figura 5.9 complete o esquema:





Complete:

120 é divisível por	4 é divisível por
10 é divisível por	3 é divisível por
8 é divisível por	2 é divisível por
5 é divisível por	1 é divisível por

De acordo com os dois diagramas complete a seguinte tabela:

Número com UM divisor, apenas	Número com Dois divisores, apenas	Número com mais de DOIS divisores

Etapa 2: Encontrando divisores.

Encontre todos os divisores dos números a seguir e faça o caminho inverso com a operação oposta:

- 24:
- 60:
- 365:
- 366:

Etapa 3: DESAFIO - Cruzada das operações. (multiplicação e divisão com números inteiros).

Descubra os números que estão faltando na cruzadinha da Figura 5.10:

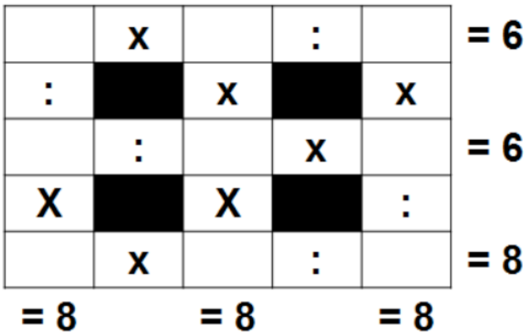


Figura 5.10: Cruzadinha de operações.
Fonte: retirada http://www.paic.seduc.ce.gov.br[2] (Acesso em jan/2017).

Com o propósito de explorar os conceitos associados a divisibilidade esta atividade/oficina foi proposta para os alunos do 6º ano (5ª série) do ensino fundamental.De modo que estes alunos possam adquirir as competências e habilidades indicadas pelos PCN's como: saber determinar os divisores de um número natural; compreender o conceito de múltiplo e divisor; desenvolver do cálculo mental e as técnicas de divisão e multiplicação. Esta Atividade deve ser realizada em grupos de 4 alunos em um período de duas aulas (de 50 minutos cada), dividida em três etapas, onde a primeira denominada "Flechando múltiplos e divisores" os alunos de forma lúdica descobrem, respectivamente, os "divisores" e os "múltiplo" de um conjunto de números naturais e respondem a perguntas relacionadas as descobertas. Na segunda etapa "Encontrando divisores", os alunos devem encontrar todos os divisores dos números indicados e fazer o caminho inverso com a operação oposta. Na terceira etapa chamada "Cruzada das operações", para instigar a curiosidade do grupo, é proposto um desafio onde juntos devem descobrir os números que estão faltando na cruzada.

5.3.2 Atividade 2 - Sistemas de numeração

Folha do Professor

Atividade: Sistemas de numeração.

Atividade em grupo: 2 ou 3 alunos.

Público alvo: Alunos do 7º ano do ensino fundamental.

Conteúdo(s): Sistema posicional decimal de numeração; potências; sistemas antigos de numeração (egÃpcio, babilônico e maia) e aplicações.

Objetivo(s) (competências/habilidades): Reconhecer, por meio da história dos sistemas de numeração, a construção de ideias e do conhecimento matemático; estabelecer comparações entre sistemas de numeração, identificando semelhanças e diferenças entre eles; decodificar a estrutura lógica da escrita matemática; transpor ideias relacionadas à base de um sistema de numeração para aplicações práticas na computação (sistema binário).

Material utilizado: Giz, lousa e folhas de orientações (professor/aluno).

Tempo de duração: 4 aulas simples (50 minutos cada).

Procedimento pedagógico/orientações ao docente:

Sistemas de numeração é um conteúdo familiar para os alunos do 7º ano do ensino fundamental, pois no primeiro bimestre do 6º ano aprendem sobre o sistema de numeração decimal, agrupamentos e contagens, valor posicional e suas operações.

No 6º ano a discussão sobre sistemas de numeração de povos antigos se restringe apenas aos aspectos históricos do tema, uma vez que os alunos ainda não têm um conhecimento numérico formalizado sobre potências. Portanto, discutir a base de numeração de sistemas antigos, a comparação entre sistemas posicionais e não posicionais, a relevância do zero para os sistemas de numeração, os princípios aritméticos utilizados em cada sistema etc., podem fazer mais sentido para os alunos de 7º ano do que para os alunos do 6º ano (SÃO PAULO, 2014 - 2017*f*).

A utilização da história da matemática sobre os antigos sistemas de numeração, consiste em uma das abordagens interessantes, pois permite a interdisciplinaridade com as disciplinas de história e geografia. É importante a comparações entre os sistemas de numeração egípcio, babilônico e maia com o decimal, para poder melhor compreendê-lo. No caso específico dos maias, tal estudo poderá valorizar o contato com seus notáveis conhecimentos sobre astronomia, agricultura e calendário, assim como com seu engenhoso sistema de numeração. O objetivo é demonstrar que os sistemas de numeração se baseiam em um tipo particular de agrupamento em que a contagem é feita por meio de “pacotes”. Os alunos devem compreender algumas das principais características de alguns sistemas de numeração: a ideia de correspondência, a contagem em agrupamentos de uma unidade qualquer e o valor posicional dos algarismos para a base decimal. Entenderem o sistema binário e sua aplicação na computação, o que permite contextualizar de modo abrangente algo que é tão presente na vida das pessoas.

Introdução

Em torno de 500 d.C., na Índia, surgiu o sistema de numeração decimal posicional que é usado atualmente na maior parte do mundo. Porém, este sistema foi difundido na Europa por volta de 825 d.C. pelo matemático árabe Mohamed Ben Mussa Al Khawarismi, então o sistema ficou conhecido como sistema indo-arábico.

No sistema de numeração decimal posicional a base de contagem é 10, pois o sistema decimal possui 10 símbolos representativos, denominados algarismos ou dígitos, os quais são representados pelos números naturais: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, acrescido do símbolo 0 (zero), que representa a ausência de algarismo.

Este sistema também é denominado posicional, por causa do valor intrínseco de cada algarismo (ou dígito) que tem um peso atribuído em função da posição que ele ocupa no número. Esse peso esta sempre relacionado à potência de dez, variando da seguinte forma: o algarismo da extrema direita tem peso 1; o seguinte, sempre da direita para a esquerda, tem peso dez; o seguinte tem peso cem; o seguinte tem peso mil, etc.

Exemplo 1. O número 21039, na base 10, tem a representação:

$$2 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0.$$

Vale lembrar que cada algarismo de um número tem uma *ordem* contada da direita para a esquerda. No Exemplo 1, tem-se que o algarismo 9 é de primeira ordem, enquanto que o 3 é de segunda ordem e assim por diante.

Cada terna de ordens, forma-se uma *classe*, também são contadas da direita para a esquerda. As classes podem ser separadas umas das outras por meio de um ponto.

As primeiras classes e ordens são classificadas a seguir:

$$\text{Classe das Unidades} \begin{cases} \text{unidades} \\ \text{dezenas} \\ \text{centenas} \end{cases}$$

$$\text{Classe do Milhar} \begin{cases} \text{unidades de milhar} \\ \text{dezenas de milhar} \\ \text{centenas de milhar} \end{cases}$$

$$\text{Classe do Milhão} \begin{cases} \text{unidades de milhão} \\ \text{dezenas de milhão} \\ \text{centenas de milhão} \end{cases}$$

...

Os sistemas de numeração posicionais baseiam-se no teorema a seguir, o qual é uma aplicação da divisão euclidiana.

Teorema 1. Dados dois números naturais a e b, com $b > 1$, existem números naturais $a_0, a_1, \cdots, a_n$ menores do que b, univocamente determinados, tais que

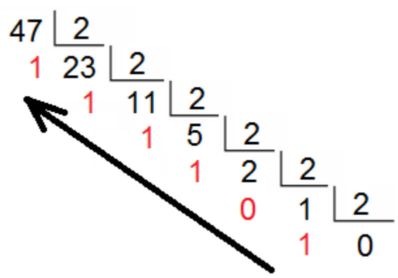
$$a = a_0 b^0 + a_1 b^1 + a_2 b^2 + \cdots + a_n b^n,$$

onde $n \geq 0$, $a_i \neq 0$ e $0 \leq i \leq n$, tem-se que $0 \leq a_i \leq b$.

Exemplo 2. Para determinar a expansão na base $b = 2$ do número 47.
Aplicando a divisão euclidiana, sucessivamente, tem-se

$$\begin{aligned} 47 &= 2 \cdot 23 + 1 \\ 23 &= 2 \cdot 11 + 1 \\ 11 &= 2 \cdot 5 + 1 \\ 5 &= 2 \cdot 2 + 1 \\ 2 &= 2 \cdot 1 + 0 \\ 2 &= 2 \cdot 0 + 1 \end{aligned}$$

Esquema:



Portanto, o $(47)_{10} = (101111)_2$.

Exemplo 3.

Determinar o número $(12022)_3$ na base decimal:

$$\begin{aligned} 12022 = &\ 1 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 \\ = &\ 81 + 54 + 0 + 6 + 2 \\ = &\ 143 \end{aligned}$$

Portanto, $(12022)_3 = (143)_{10}$.

Por outro lado, os povos antigos, além de se expressarem por diferentes símbolos seus algarismos, também escolheram várias formas de agruparem para seus sistemas de numeração que utilizaram por longos períodos. Os babilônios, povo que vivia na mesopotâmia, usavam a base sexagesimal de contagem, os maias a vigesimal e o egípcio, que assim como o sistema usado atualmente, o indo-arábico, era decimal.

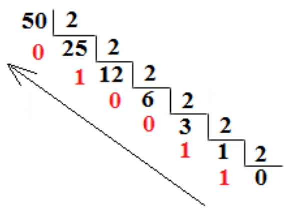
Além do sistema indo-arábico existem outros sistemas de numeração em uso, em particular os sistemas binário, quaternário, octal e hexadecimal ou de base 2, 4, 8 e 16, respectivamente, que são usados em computação. Entretanto, é possível perceber a infuência de outros sistemas de numeração no cotidiano. Por exemplo, o dia que é dividido em 24 horas (dois grupos de 12 horas), ainda, a hora é dividida em 60 minutos e os minutos em 60 segundos. Observa-se uma grande infuência do sistema duodecimal (de base 12) e sexagesimal (de base 60).

Vale notar que, hoje em dia, utiliza-se em muitas situações um sistema misto (sexagesimal e decimal) como nas corridas de automóvel, provas de natação onde o tempo é expresso em décimos e centésimos de segundo.

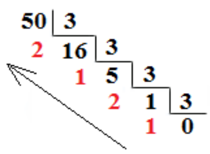
Etapa 1: Mudança de base.

Os alunos devem ser instruídos a converter os números na base decimal para a base indicada a seguir:

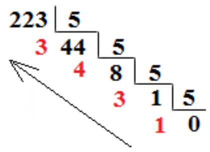
- $50_{10} = \underline{\hspace{2cm}}_2$
  Responta: 1010010_2



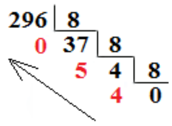
- $50_{10} = \underline{\hspace{2cm}}_3$
  Responta: 1212_3



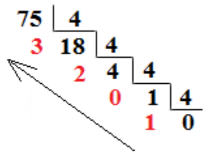
- $223_{10} = \underline{\hspace{2cm}}_5$
  Responta: 1343_5



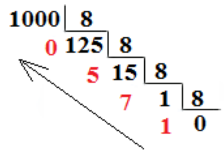
- $296_{10} = \_\_\_\_\_\_\_\__{8}$
  Responta: 450_8



- $75_{10} = \_\_\_\_\_\_\_\__{4}$
  Responta: 1023_4



- $1000_{10} = \_\_\_\_\_\_\_\__{8}$
  Responta: 1750_8



Agora, invertendo, ou seja, os alunos devem ser instruídos a converter os números na base indicada para a base decimal:

- $110011_2 = \_\_\_\_\_\_\_\__{10}$
  Responta: $1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 1 \cdot 32 + 1 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 32 + 16 + 0 + 0 + 2 + 1 = 51_{10}$

- $2121_3 = \_\_\_\_\_\_\_\__{10}$
  Responta: $2 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 = 2 \cdot 27 + 1 \cdot 9 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 54 + 9 + 6 + 1 = 70_{10}$

- $142_8 = \_\_\_\_\_\_\_\__{10}$
  Responta: $1 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8^1 + 2 \cdot 8^0 = 1 \cdot 64 + 4 \cdot 8 + 2 \cdot 1 = 98_{10}$

- $703_4 = \_\_\_\_\_\_\_\__{10}$
  Responta: $7 \cdot 4^2 + 0 \cdot 4^1 + 3 \cdot 4^0 = 7 \cdot 16 + 0 \cdot 4 + 3 \cdot 1 = 112 + 0 + 1 = 113_{10}$

- $1001_2 = \_\_\_\_\_\_\_\__{10}$
  Responta: $1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 8 + 0 + 0 + 1 = 9_{10}$

- $2410_5 = \_\_\_\_\_\_\_\__{10}$
  Responta: $2 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^1 + 0 \cdot 5^0 = 2 \cdot 125 + 4 \cdot 25 + 1 \cdot 5 + 0 \cdot 1 = 250 + 100 + 5 + 0 = 355_{10}$

Sistema egípcio antigo de numeração

Fonte: São Paulo, (1994).

Desde os primeiros tempos da história egípcia, por volta de 3 000 a.C., já existia um sistema de numeração egípcio, este sistema de escrita era representado por algarismos em forma de símbolos, dos quais vários possuiam referências à fauna e à flora das proximidades do Rio Nilo, local que habitavam. A base do sistema egípcio de numeração, assim como a indo-arábico, é decimal, o que significa que os agrupamentos são feitos em potências de 10.

No antigo Egito, os faraós mandavam construir templos em sua honmenagem e ordenavam que fossem decorados com esculturas e pinturas ilustrando os fatos mais gloriosos de suas vidas ou cenas da vida cotidiana. Observe as inscrições encontradas em alguns desses templos:

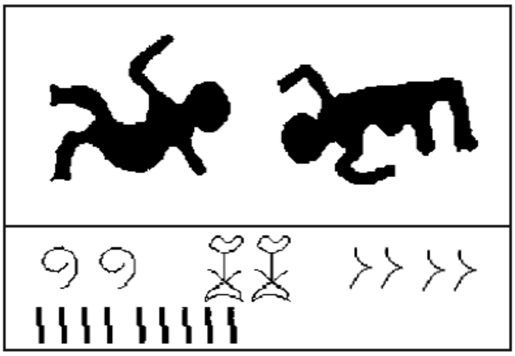


Figura 5.11: Dados de uma batalha egípcia.

A inscrição representada na Figura 5.11 indica o número de inimigos massacrados durante uma batalha vencida pelo faraó de Hierakonpolis, isto é, 42 209 homens.

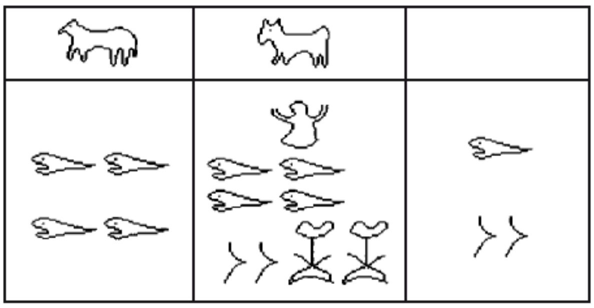


Figura 5.12: Número de homens, de cavalos e de bois capturados durante a batalha.

A Figura 5.12 indica o número de homens, de cavalos e de bois capturados durante essa mesma batalha, ou seja, 120 000 homens, 1 422 000 cavalos e 400 000 bois.

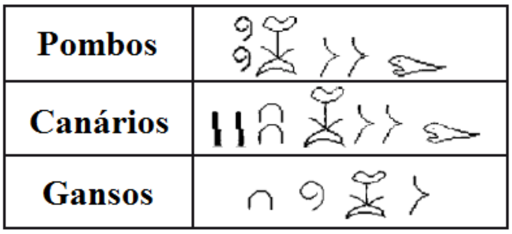
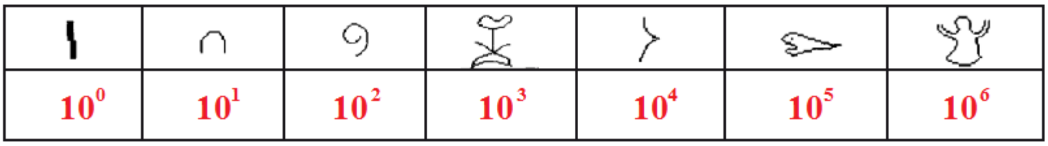


Figura 5.13: Riquezas de Memphis.

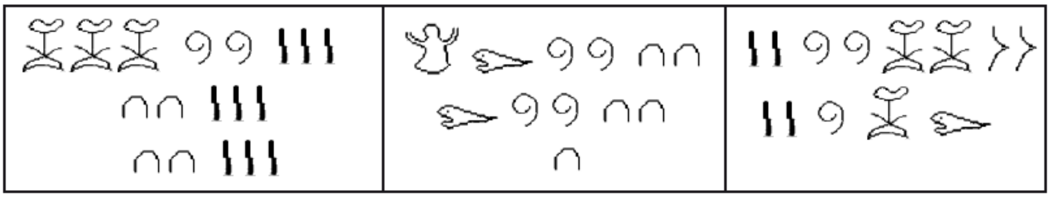
Agora, a Figura 5.13 indica algumas das riquezas de Memphis: 121 200 pombos, 121 022 canários e 11 110 gansos.

Em função dos dados sobre o sistema egípcio antigo de numeração observados nas Figuras 5.11, 5.12 e 5.13, responda:

- Quais são os números na base decimal representados pelos símbolos da tabela a seguir?

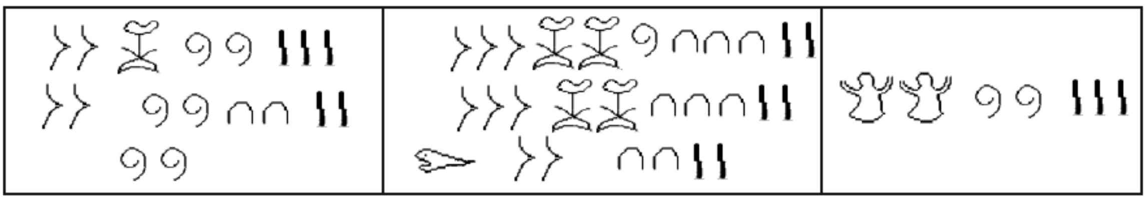


- Que números seriam estes?



3249	1200450	123304

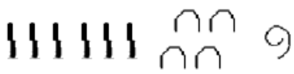
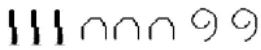
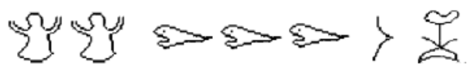
- Como se escreveria no sistema egípcio os números a seguir?



31 625	186 186	2 000 203

- Se os egípcios repetiam seus símbolos no máximo de 9 vezes e somavam seus valores, qual o maior número que podiam escrever usando o máximo de vezes?
  Resposta: O número 9 999 999.

- A maior das pirâmides egípcias construídas foi a de Queops. Traduza as seguintes informações sobre ela:

Medida da altura, em metros	 146 m
Medida do lado da base, em metros	 233 m
Peso, em toneladas	 5 750 000 toneladas
Número de blocos de pedras empilhadas	 2 311 000

- Você percebeu, no quadro da atividade anterior, que a posição dos símbolos pode variar, ou seja, às vezes começam pelos de maior valor e, outras vezes, pelo de menor valor? Por que isso não tinha importância?
  Resposta: A posição dos símbolos não tinham importância, pois o valor numérico nâo dependia de sua posição, mas apenas dos valores dos próprios síbolos.

Observação: É interessante levantar informações sobre a civilização egípcio e também explorar a localização geografica da região em que ela se desenvolveu.

Etapa 2: Sistema babilônico antigo de numeração.

Fonte: São Paulo (1994); São Paulo, (2014 - 2017*f*).

O sistema de escrita dos babilônios recebeu o nome de *cuneiforme*: os escribas gravavam os sinais, com cunhas, em tabuinhas de argila que depois faziam secar ao Sol. Então, repetindo marcas de cunhas e invertendo suas posições em algumas situações, representaram os números de 1 a 59, como nos exemplos da Figura 5.14.

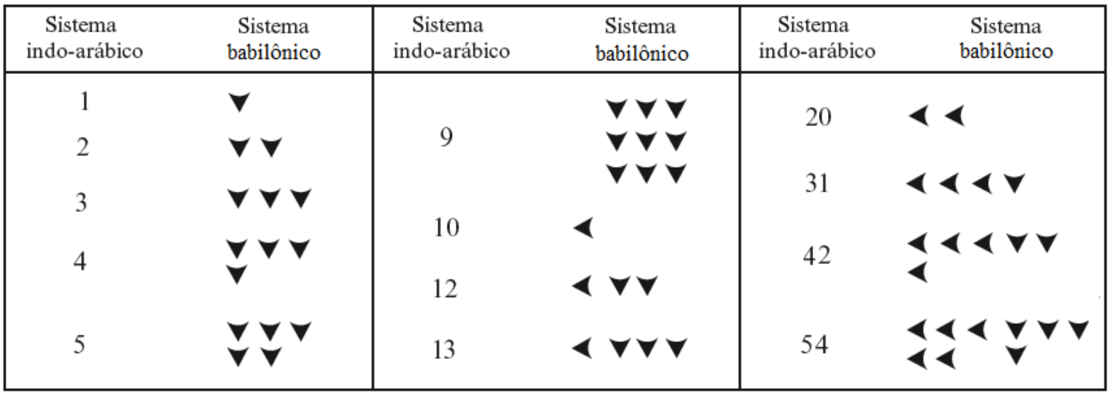


Figura 5.14: Sistema babilônico antigo de numeração.

Observe na Figura 5.15 que para representar o 60 os babilônios voltaram a usar a cunha na mesma posição que a usavam para representar o 1. Portanto, até certo ponto usavam uma base decimal, mas, depois, trocaram-na pela base 60. Isso provavelmente dificultou o trabalho dos decifradores, porém não devia ser um grande problema para eles.

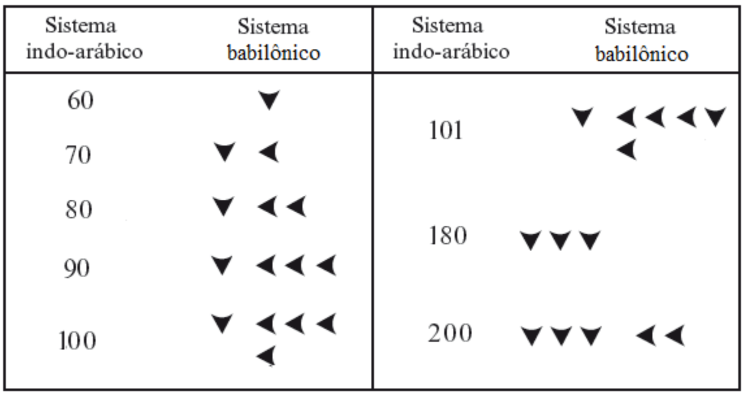
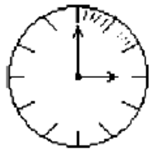


Figura 5.15: Sistema babilônico antigo de numeração.

Para se ter uma ideia melhor do que é a base 60 , tem-se um caso em que ela é usada ainda hoje: a medição do tempo. Sabe-se que uma hora tem 60 minutos e um minuto tem 60 segundos. Então:

Explique como funciona a base 60 e a leitura das horas:Usando um relógio de ponteiros.



- **Resposta:** O ponteiro maior apontada marca os minutos, enquanto o menor marca as horas. Quando o ponteiro maior completa uma volta a partir do "zero" o ponteiro menor chega a próxima hora. Portanto, a cada 60 minutos se completa uma hora.

- Usando um relógio digital que marque horas, minutos e segundos.

Resposta: Quando o marcador dos segundos termina de correr 60 segundos na sequência o marcador dos minutos aumenta um dígito até correr 60 minutos e assim um dígito no marcador das horas. No entanto, o marcador das horas corre de 12 em 12 horas que corresponde uma parte nova do dia ou de 24 em 24 horas que corresponde a um novo dia.

Assim como o sistema de numeração indo-arábico, o babilônico também era posicional, mas, apresenta certa ambiguidade na escrita dos números. Essa ambiguidade poderia ser eliminada com a utilização de um algarismo que era desconhecido dos babilônicos. Qual algarismo é esse?
Resposta: O zero.

> **Observação:** É interessante levantar informações sobre a civilização babilônica e também explorar a localização geografica da região em que ela se desenvolveu.

Etapa 3: Sistema maia antigo de numeração.
Fonte: São Paulo (1994); São Paulo, (2014 - 2017f).

Usando pontos e traços os maias representavam seus dezenove primeiros números, como na Figura 5.22.

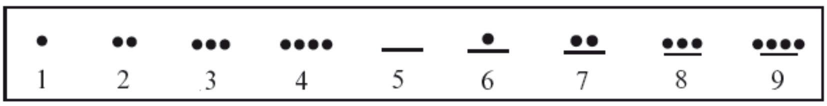
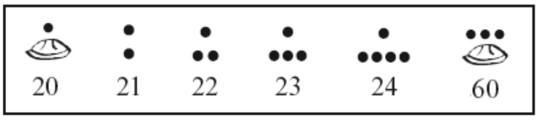


Figura 5.16: Sistema maia antigo de numeração.

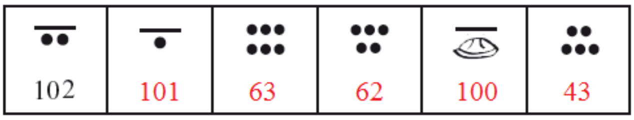
Agora continue esta sequência:
Resposta:

Para representar números maiores ou iguais a 20, escreviam os números verticalmente (de baixo para cima) de modo que o símbolo registrado no primeiro andar era multiplicado por 1 e o do segundo andar, era multiplicado por 20.

O modo que encontraram para indicar a ausência de quantidade numa classe foi adotarum símbolo especial: . Esse símbolo permitia não confundir as escritas do 3 e do 60.



Agora, descubra que números estão nos quadros abaixo:



Observação: É interessante levantar informações sobre a civilização maia e também explorar a localização geografica da região em que ela se desenvolveu.

Atividade 2 - Sistemas de numeração

Folha do Aluno

Etapa 1: Mudança de base.

Converta os números na base decimal para a base indicada a seguir:

- $50_{10} = \rule{3cm}{0.4pt}_2$
- $50_{10} = \rule{3cm}{0.4pt}_3$
- $223_{10} = \rule{3cm}{0.4pt}_5$
- $296_{10} = \rule{3cm}{0.4pt}_8$
- $75_{10} = \rule{3cm}{0.4pt}_4$
- $1000_{10} = \rule{3cm}{0.4pt}_8$

Agora, invertendo, ou seja, converta os números na base indicada para a base decimal:

- $110011_2 = \underline{\hspace{2cm}}_{10}$
- $2121_3 = \underline{\hspace{2cm}}_{10}$
- $142_8 = \underline{\hspace{2cm}}_{10}$
- $703_4 = \underline{\hspace{2cm}}_{10}$
- $1001_2 = \underline{\hspace{2cm}}_{10}$
- $2410_5 = \underline{\hspace{2cm}}_{10}$

Sistema egípcio antigo de numeração
Fonte: São Paulo, (1994).

Desde os primeiros tempos da história egípcia, por volta de 3 000 a.C., já existia um sistema de numeração egípcio, este sistema de escrita era representado por algarismos em forma de símbolos, dos quais vários possuiam referências à fauna e à flora das proximidades do Rio Nilo, local que habitavam. A base do sistema egípcio de numeração, assim como a indo-arábico, é decimal, o que significa que os agrupamentos são feitos em potências de 10.

No antigo Egito, os faraós mandavam construir templos em sua honmenagem e ordenavam que fossem decorados com esculturas e pinturas ilustrando os fatos mais gloriosos de suas vidas ou cenas da vida cotidiana. Observe as inscrições encontradas em alguns desses templos:

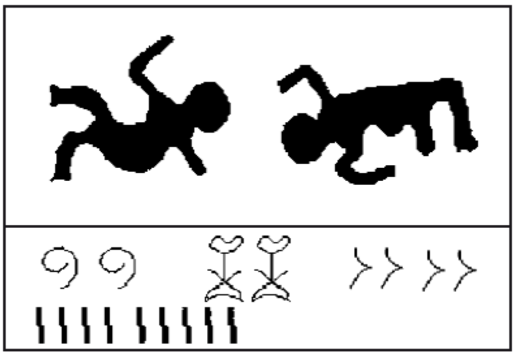


Figura 5.17: Dados de uma batalha egípcia.

A inscrição representada na Figura 5.17 indica o número de inimigos massacrados durante uma batalha vencida pelo faraó de Hierakonpolis, isto é, 42 209 homens.

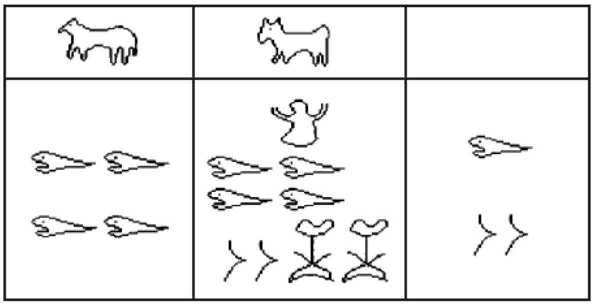


Figura 5.18: Número de homens, de cavalos e de bois capturados durante a batalha.

A Figura 5.18 indica o número de homens, de cavalos e de bois capturados durante essa mesma batalha, ou seja, 120 000 homens, 1 422 000 cavalos e 400 000 bois.

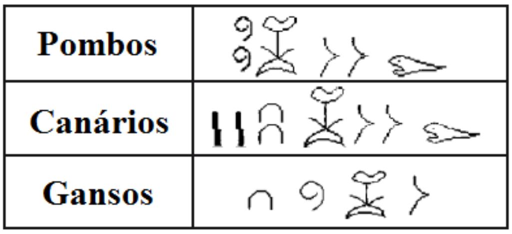
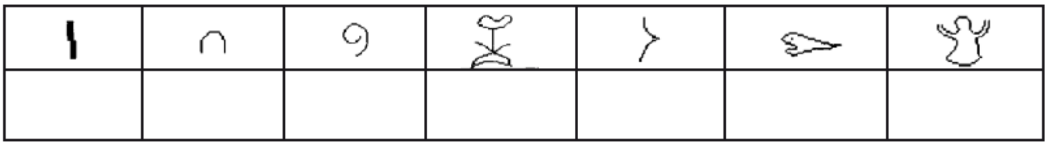


Figura 5.19: Riquezas de Memphis.

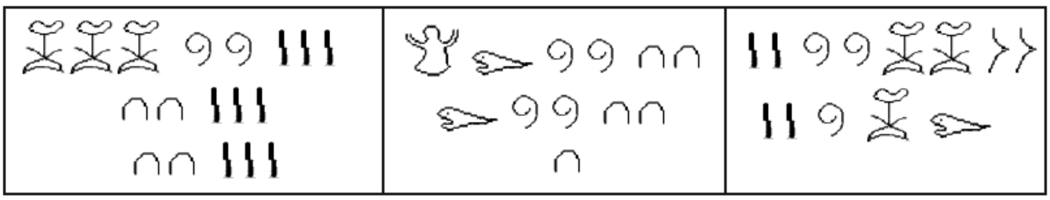
Agora, a Figura 5.19 indica algumas das riquezas de Memphis: 121 200 pombos, 121 022 canários e 11 110 gansos.

Em função dos dados sobre o sistema egípcio antigo de numeração observados nas Figuras 5.17, 5.18 e 5.19, responda:

- Quais são os números representados pelos símbolos na tabela a seguir?



- Que números seriam estes?

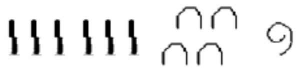
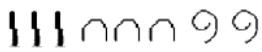
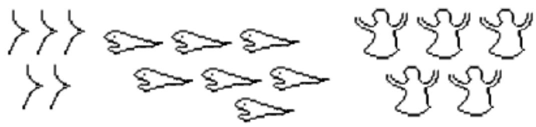
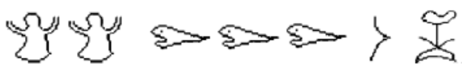


- Como se escreveria no sistema egípcio os números a seguir?

31 625	186 186	2 000 203

- Se os egípcios repetiam seus símbolos no máximo de 9 vezes e somavam seus valores, qual o maior número que podiam escrever usando o máximo de vezes?

- A maior das pirâmides egípcias construídas foi a de Queops. Traduza as seguintes informações sobre ela:

Medida da altura, em metros	 ______________
Medida do lado da base, em metros	 ______________
Peso, em toneladas	 ______________
Número de blocos de pedras empilhadas	 ______________

- Você percebeu, no quadro da atividade anterior, que a posição dos símbolos pode variar, ou seja, às vezes começam pelos de maior valor e, outras vezes, pelo de menor valor? Por que isso não tinha importância?

Etapa 2: Sistema babilônico antigo de numeração.

O sistema de escrita dos babilônios recebeu o nome de *cuneiforme*: os escribas gravavam os sinais, com cunhas, em tabuinhas de argila que depois faziam secar ao Sol. Então, repetindo marcas de cunhas e invertendo suas posições em algumas situações, representaram os números de 1 a 59, como nos exemplos da Figura 5.20.

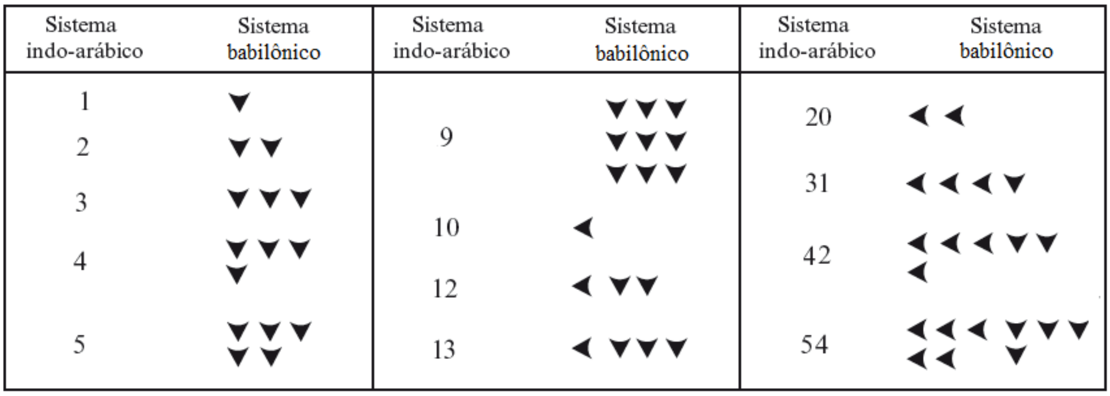


Figura 5.20: Sistema babilônico antigo de numeração.

Observe na Figura 5.21 que para representar o 60 os babilônios voltaram a usar a cunha na mesma posição que a usavam para representar o 1. Portanto, até certo ponto usavam uma base decimal, mas, depois, trocaram-na pela base 60. Isso provavelmente dificultou o trabalho dos decifradores, porém não devia ser um grande problema para eles.

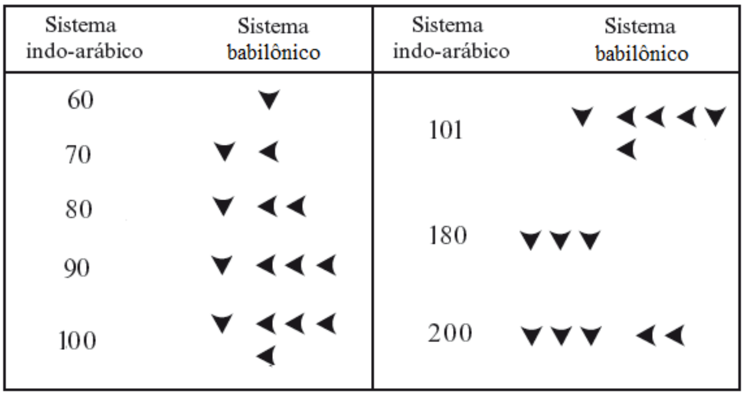
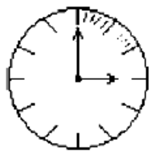


Figura 5.21: Sistema babilônico antigo de numeração.

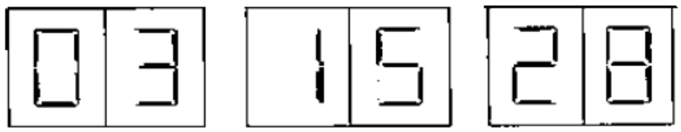
Para se ter uma ideia melhor do que é a base 60 , tem-se um caso em que ela é usada ainda hoje: a medição do tempo. Sabe-se que uma hora tem 60 minutos e um minuto tem 60 segundos. Então:

Explique como funciona a base 60 e a leitura das horas:

- Usando um relógio de ponteiros.



- Usando um relógio digital que marque horas, minutos e segundos.



Assim como o sistema de numeração indo-arábico, o babilônico também era posicional, mas, apresenta certa ambiguidade na escrita dos números. Essa ambiguidade poderia ser eliminada com a utilização de um algarismo que era desconhecido dos babilônicos. Qual algarismo é esse?

Etapa 3: Sistema maia antigo de numeração.

Usando pontos e traços os maias representavam seus dezenove primeiros números, como na Figura 5.22.

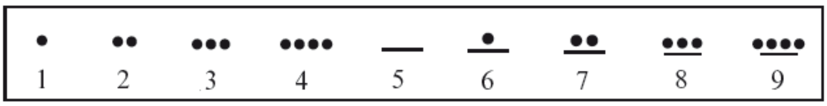
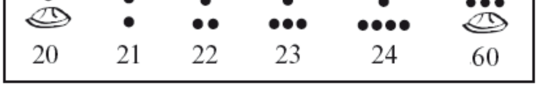


Figura 5.22: Sistema maia antigo de numeração.

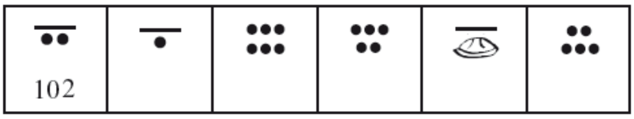
Agora continue esta sequência:

Para representar números maiores ou iguais a 20, escreviam os números verticalmente (de baixo para cima) de modo que o símbolo registrado no primeiro andar era multiplicado por 1 e o do segundo andar, era multiplicado por 20.

O modo que encontraram para indicar a ausência de quantidade numa classe foi adotarum símbolo especial: . Esse símbolo permitia não confundir as escritas do 3 e do 60.



Agora, descubra que números estão nos quadros abaixo:



A atividade/oficina descrita tem como objetivo aprimorar os conhecimentos dos alunos do 7º ano (6ª série) relacionados ao sistema de numeração. Além disso, esta atividade pode contribuir para que os alunos atinjam as competências e as habilidades indicadas nos PCN's que são: reconhecer, por meio da história dos sistemas de numeração, a construção de ideias e do conhecimento matemático; estabelecer comparações entre sistemas de numeração, identificando semelhanças e diferenças entre eles; decodificar a estrutura lógica da escrita matemática; transpor ideias relacionadas à base de um sistema de numeração para aplicações práticas na computação (sistema binário). Lembrando que o estudo dos sistemas de numeração de povos antigos sinaliza várias possibilidades de interdisciplinaridade com as disciplinas de história e geografia. Assim, esta Atividade permite explorar a história da matemática sobre os antigos sistemas de numeração, levantar informações sobre a civilização egípcia, maia e babilônica e também apresentar a localização geográfica da região em que elas se desenvolveram. Deve ser aplicada para grupos de dois ou três alunos em quatro aulas (de 50 minutos cada), a primeira etapa denominada "Mudança de base", os alunos devem ser instruídos a converter os números na base decimal para uma base qualquer indicada e em seguida devem inverter, ou seja, converter os números que estão em uma base qualquer indicada para a base decimal. Ainda nesta etapa são propostas atividades relacionadas ao sistema egípcio antigo de numeração que assim como o indo-arábico é decimal. Na segunda etapa "Sistema babilônico antigo de numeração" são propostas atividades envolvendo os relógios analógico e o digital para que os alunos possam entender a importância do sistema de numeração sexagesimal. A terceira etapa "Sistema maia antigo de numeração", onde o sistema de numeração é vigesimal, inicia-se com a apresentação dos 10 primeiros números em forma de símbolos utilizados pelos maias e os alunos devem continuar a sequência. Em seguida é apresentado um símbolo especial, do qual é usado para desenvolver novos números, então os alunos devem encontrar o valor numérico de cada da simbologia escolhida.

5.3.3 Atividade 3 - Explorando congruências

Folha do Professor

Atividade: Matemática e calendário.

Atividade em grupo: 3 alunos.

Público alvo: Alunos do 1º série do ensino médio.

Conteúdo(s): Divisibilidade, congruência e aplicações.

Objetivo(s) (competências/habilidades): Saber determinar os divisores de um número natural; desenvolver do cálculo mental e as técnicas de divisão e multiplicação; reconhecer o padrão de regularidade de uma sequência; utilizar a linguagem matemática para expressar a regularidade dos padrões de sequências numéricas; aplicar conhecimentos matemáticos em situações do cotidiano; compreender que o calendário é produzido com base em conhecimentos matemáticos e, a partir disso, identificar as semelhanças e diferenças entre os calendários; tornar a matemática estimulante, fonte de novos conhecimentos, a partir de situações reais e contextuais.

Material utilizado: Giz, lousa, folhas de orientações (professor/aluno), celular para consultar o aplicativo calendário e calculadora.

Tempo de duração: 3 aulas simples (50 minutos cada).

Procedimento pedagógico/orientações ao docente:

O tema envolve o conceito de congruência, o qual necessita que os discentes tenham conhecimentos prévios sobre os números inteiros e divisão euclidiana. Congruência e divisibilidade permitem classificar números com características semelhantes. Também será necessário que tenham noções básicas sobre os números racionais ($\mathbb{Q}$).

Embora parte do conteúdo abordado não esteja presente na grade curricular de matemática do estado de São Paulo, o docente pode explorá-lo como estudo complementar de grande importância, pois o tema calendário está presente no cotidiano de todos desde as civilizações antigas com previsões de melhor data para plantio, datas comemorativas e, atualmente, os prazos para variadas atividades, cálculos de juros, datas de aposentadoria de trabalhadores, entre outros. Deste modo, é um excelente gerador de oportunidades de contextualização no processo de ensino aprendizagem de matemática.

Introdução

Apesar de simples, o assunto calendário é altamente interdisciplinar e envolve um aglomerado de conhecimento e de cultura. Portanto, cabe ao docente apresentar de forma resumida alguns aspectos que motivou sua origem para então ser sugerida a presente atividade. Para isto, a seguir será apresentada uma breve introdução informativa sobre o tema.

Todos os calendários são de origem astronômica, pois se baseiam nos movimentos aparentes dos dois astros mais brilhantes do sistema solar, o Sol e a Lua. O calendário possui unidades de dias, meses e anos, além das semanas, sas quais são baseadas em três ciclos primários da natureza: a rotação da Terra em torno de seu próprio eixo que gera os dias, as revoluções da Lua à volta da Terra que deu origem ao conceito de meses e as revoluções da Terra em volta do Sol que desenvolvem os anos.

A unidade básica e mais antiga para a contagem do tempo é o dia, que possui por sua vez 24 horas, dividido em duas etapas, intercaladas entre o nascer e o pôr do Sol. A observação da periodicidade das fases lunares fez surgir a ideia de mês assim como a semana, porém, hoje, essas unidades não têm mais conexão com o movimento da Lua, pois foram adequadas para uniformizar o período anual. A repetição alternada das estações, que variavam de acordo com os climas, deu origem ao conceito de ano.

De acordo com Leopold (2015), o calendário gregoriano tem como base de sua construção o ano solar ou ano tropical é o período de tempo decorrido para completar um ciclo de estações, tendo duração de cerca de 365 dias, 5 horas, 48 minutos e 46 segundos (365,2422 dias solares médios). Entretanto, mesmo o ano tropical sendo 365,2422 dias solares médios, em 1582, o Papa Gregório XIII (1512- 1586) ao reformar o calendário juliano estabeleceu o uso de 365,2425 dias solares médios para facilitar os cálculos na construção do calendário gregoriano. Assim, o calendário adota a quantidade exata de 365 dias para o período de um ano, ou seja, um período de tempo menor do que a duração de uma volta completa da Terra em torno do Sol. Tem-se, então, que esta diferença, equivalente a 0,2425 dia, quando multiplicada por 4 resulta em 0,97 dia. Então, faz-se, a cada 4 anos, o acréscimo de 1 dia no mês de fevereiro, o que corresponde ao chamado ano bissexto com 366 dias. Porém, essa alteração provoca uma nova discrepância, de +0,03 dia. Para corrigi-la, estabeleceu-se as seguintes regras:

- ano múltiplo de 4 é bissexto;
- ano múltiplo de 100 e não múltiplo de 400, nãao é bissexto;
- ano múltiplo de 400, é bissexto.

Portanto, para tais regras são justificadas pela relação matemática desenvolvida:

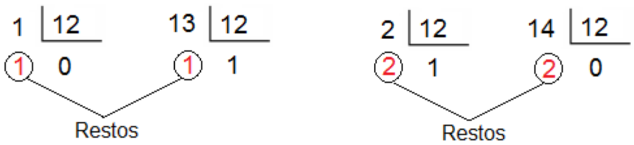
$$365,2425 = 365 + \frac{97}{400} = 365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{1}{400}.$$

Como 356,2425 é equivalente a 365 dias, 5 horas, 49 minutos e 12 segundos, tem-se uma diferença de 26 segundos por dia, isto é, 1 dia a cada 3300 anos. Portanto, um erro suportável, assim as regras corrigem com excelente aproximação o ano tropical.

Para compreender a formação do calendário gregoriano é necessário conhecer alguns conceitos básicos sobre aritmética modular.

Exemplo 1.: Aritmética do relógio.

Pode-se notar que nos relógios existe a congruência, módulo 12. Essa congruência é mais fácil de ser observada nos analógicos, devido ao ponteiro das horas. Assim, 13 horas é congruente a 1 hora, módulo 12, pois ambos divididos por 12, deixam resto 1, logo o ponteiro pára no mesmo lugar após 12 horas. Ainda, 14 horas é congruente a 2 horas, módulo 12. Tanto 14, quanto 2, divididos por 12, deixam resto 2... e assim, sucessivamente.



Para formalizar o exemplo tem-se a definição de congruência a seguir:

Definição: Seja $m > 1$, um número inteiro. Diz-se que dois inteiros a e b são congruentes módulo m se a e b deixam mesmo resto quando divididos por m.

$$a \equiv b \text{ mod } m$$

Assim, a representação do Exemplo 1 é dado da seguinte forma:

$$13 \equiv 1 \text{ mod } 12$$
$$14 \equiv 2 \text{ mod } 12$$
$$15 \equiv 3 \text{ mod } 12$$
$$\cdots$$

Além do que já foi apresentado, para desenvolver as atividades propostas, também é interessante ter conhecimento do algoritmo apresentado em Brasil (2009) que é válido para datas do calendário gregoriano, porém vale lembrar que nem todos os países adotaram imediatamente esse calendário decretado em 1582. Sendo assim, o algoritmo deve ser usado com as devidas restrições históricas e geográficas. O discente deve entender que os anos bissextos possuem um dia a mais em 29 de fevereiro.

Após escolher o dia da semana de um determinado ano, precisa-se calcular (recomenda-se o uso de calculadora simples):

- Δ é o intervalo em anos até a data escolhida;
- M é quantas vezes ocorreu o dia 29 de fevereiro entre estas datas;
- $P = 365 \cdot \Delta + B$, que são os dias transcorridos entre as datas;
- $N = P \bmod 7$;
- Observe que N só pode resultar em valores naturais de 0 a 6. E, ainda, como $1 \equiv 365 \bmod 7$, conclui-se que $N = (\Delta + M) \bmod 7$.

Observação: Após os alunos realizarem os cálculos devem ser orientados a conferir no celular as datas encontradas no aplicativo calendário.

Etapa 1: Encontrando anos bissextos.
Fonte: Brasil (2009).

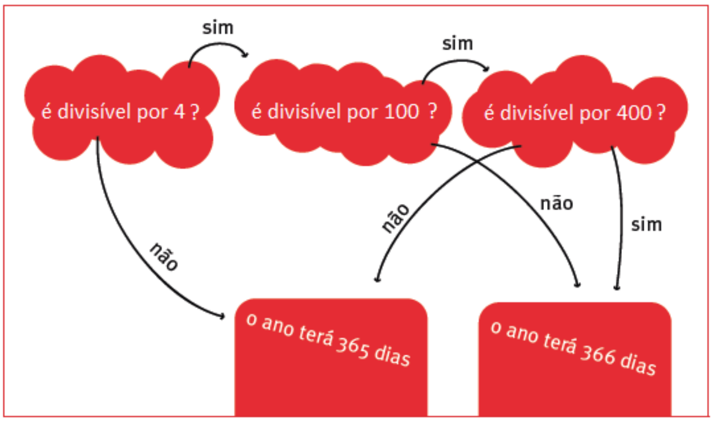


Figura 5.23: Algoritmo de funcionamento do calendário gregoriano.
Fonte: adaptada de Brasil (2009).

Utilizando o algoritmo da Figura 5.24 os alunos devem encontrar, dentre os anos apresentados a seguir, quais são bissextos:

- **1967:** não é bissexto, pois é um número ímpar;
- **1582:** não é bissexto, pois não é divisível por 4;
- **1936:** é bissexto, pois é é divisível por 4 e não é divisível po 100;
- **2100:** não é bissexto, pois é divisível por 4 e por 100;
- **2400:** é bissexto, pois é divisível por 400.

Contando os anos bissextos.
Para contar a quantidade de anos bissextos entre duas datas deve-se calcular a diferença entre a ocorrência do primeiro ano bissexto após a menor data escolhida até o último ano bissexto (anterior a maior data).

Exemplo: Para saber quantos anos foram bissextos entre desde o dia da proclamação da Republica em 1889: o primeiro ano bissexto após 1889 foi em 1892 e o último ano bissexto anterios a 2017 ocorreu em 2016. Portanto, a diferença entre as duas datas é de 124 anos, ou seja, $2016 - 1892 = 124$.

Em seguida deve-se dividir o resultado da diferença por 4 e somar uma unidade ao quaciente: $124 \div 4 = 31$; assim ao quociente 23 se soma 1 unidade, ou seja, $31 + 1 = 32$. Portanto, são 32 anos bissextos.

Observação: É necessário verificar se existe alguma possibilidade do resultado se alterar de acordo com as regras da Figura 5.24. Pois, no exemplo, dentro do intervalo escolhido, tem-se o ano de 2000, o qual é divisível por 100 e por 400, logo, é bissexto e assim não interfere no resultado.

Então é proposta a seguinte pergunta aos discentes:

Quantos anos foram bissextos desde o ano de seu nascimento?

Etapa 2: Encontrando o dia da semana.
Fonte: Brasil (2009).

Para esta etapa será necessário passar aos discentes algumas instruções:

1. Observe no calendário do ano atual em qual dia da semana cairá a data escolhida;

2. Encontre qual a diferença (denotada por Δ) de anos entre o ano atual e o ano da data escolhida;

3. Calcule quantos anos bissextos acorreram no intervalo entre as datas em questão, pois precisa-se saber quantos dias foram 29 de fevereiro ocorreram entre as datas escolhidas (para tal, pode-se usar o algoritmo sugerido na Etapa 1);

4. Denotado por M a quantidade de 29 de fevereiro existentes entre a data no calendário atual e a data no calendário desejado;

5. Para saber quantos dias se passaram, multiplica-se Δ por 365 e soma M. Denotando por P este número, isto é, $P = 365 \cdot \Delta + M$.

Usando o calendário de 2017 (ou o celular) como referência os alunos devem responder as questões a seguir (pois tendo apenas um ponto de partida, ou seja, uma data inicial, consegue-se determinar qualquer outra).

- Em que dia da semana foi o atentado terrorista que destruiu as Torres Gêmeas, em 11 de setembro de 2001?
  Responta: 11/09/2017 é segunda-feira. Então, para 11/09/2001, tem-se $\Delta = 2017 - 2001 = 16$, $M = [(2016 - 2004) \div 4] + 1 = 4$, $P = 365 \cdot 16 + 4 = 5844$ e $N \equiv 5844 \bmod 7$ ou $N \equiv 16 + 4 \bmod 7$, portanto, $N = 6$ e retornando 6 dias dá uma terça-feira.

- Qual foi o dia da semana em que foi publicado o Ato Institucional número 5 (AI-5), em 13 de dezembro de 1968?
  Responta: 13/12/2017 é quarta-feira. Então, para 13/12/1968, tem-se $\Delta = 2017 - 1968 = 49$, $M = [(2016 - 1968) \div 4] = 12$, $P = 365 \cdot 49 + 12 = 17897$ $N \equiv 17897 \bmod 7$ ou $N \equiv 49 + 12 \bmod 7$, portanto, $N = 5$ retornando 5 dias dá uma sexta-feira.

- Em qual dia da semana teve início a Semana de Arte Moderna, em 11 de fevereiro de 1922?
  Responta: 11/02/2017 é sábado. Então, para 11/02/1922, tem-se $\Delta = 2017 - 1922 = 95$, $M = [(2016 - 1924) \div 4] + 1 = 24$, $P = 365 \cdot 95 + 24 = 34699$ $N \equiv 34699 \bmod 7$ ou $N \equiv 95 + 24 \bmod 7$, portanto, $N = 0$ retornando 0 dias dá uma sábado.

- Qual foi o dia da semana em que foi proclamada a República no Brasil (1889)?
  Responta: 15/11/2017 é quarta-feira. Então, para 15/11/1889, tem-se $\Delta = 2017 - 1889 = 128$, $B = [(2016 - 1892) \div 4] + 1 = 32$ observe que 1900 está entre as datas escolhidas e é um número divisível por 4 e por 100, portanto, não é bissexto, então $M = 32 - 1 = 31$, $P = 365 \cdot 128 + 31 = 46751$ $N \equiv 46751 \bmod 7$ ou $N \equiv 128 + 31 \bmod 7$, portanto, $N = 5$ retornando 5 dias dá uma sexta-feira.

- Em que dia da semana o homem pisou a Lua, sabendo que a data foi 20 de julho de 1969?
  Responta: 20/07/2017 é quinta-feira. Então, para 20/07/1969, tem-se $\Delta = 2017 - 1969 = 48$, $M = [(2016 - 1972) \div 4] + 1 = 12$, $P = 365 \cdot 48 + 12 = 17532$ e $N \equiv 17532 \bmod 7$ ou $N \equiv 48 + 12 \bmod 7$, portanto, $N = 4$ e retornando 4 dias dá uma domingo.

- Em que dia da semana caiu 29 de fevereiro de 1972?
  Responta: 01/03/2017 é quarta-feira. Então, para 29/02/1972, tem-se $\Delta = 2017 - 1972 = 45$, $M = [(2016 - 1972) \div 4] = 11$, $P = 365 \cdot 45 + 11 = 16436$ e $N \equiv 16436 \bmod 7$ ou $N \equiv 45 + 11 \bmod 7$, portanto, $N = 0$ e retornando 0 dias dá uma quarta-feira para o dia 01/03/1972, logo, o dia 29/02/1972 foi uma terça-feira.

- Em que dia da semana você nasceu? **Responta:** *Pessoal.*

- Em que dia da semana irá cair o Natal de 2041?
  Responta: 25/12/2017 é segunda-feira. Então, para 25/12/2041, tem-se $\Delta = 2041 - 2017 = 24$, $M = [(2040 - 2020) \div 4] + 1 = 6$, $P = 365 \cdot 24 + 6 = 8766$ e $N \equiv 8766 \bmod 7$ ou $N \equiv 24 + 6 \bmod 7$, portanto, $N = 2$ e anvançando 2 dias dá uma quarta-feira.

Etapa 3: Construindo calendário.

Fonte: Alegri e Gomes (2015).

Considenrando que os discentes já estejam familiarizados com a definição de congruêcia devem responder a questão a seguir:

De acordo com Alegri e Gomes (2015), o Cometa Halley é um cometa brilhante de período intermediário que retorna às regiões interiores do Sistema Solar a cada período que varia entre 75 e 76 anos, aproximadamente. Foi o primeiro cometa a ser reconhecido como periódico: descoberta feita por Edmond Halley em 1696. Em sua última passagem na órbita terrestre, o Cometa Halley pôde ser observado a olho nu, em 09/02/1986, um domingo. Sabendo que a próxima passagem do Cometa Halley será daqui a 75 anos e 169 dias.

(a) Encontre a data que ocorrerá a próxima passagem do Cometa Halley na órbita do nosso planeta.
Responta: A próxima passagem do Cometa Halley será daqui a 75 anos e 169 dias a partir de 09/02/1986, então tem-se que em 09/02/2061 completará 75 anos da última passagem, assim, para saber a data do evento, basta adicionar 169 dias a data de 09/02/2061. Sabendo que o ano de 2061 não é um ano bissexto (é ímpar), logo o mês de fevereiro deste ano tem 28 dias, assim, tem-se 19 dias a serem contados em fevereiro, 31 dias em março, 30 dias em abril, 31 dias em maio, 30 dias em junho, completando até o momento 141 dias a mais que 09/02/2061, faltando 28 dias para completar os 169 dias necessários, portanto, a data da próxima passagem é 28/07/2061.

(b) Seja 09/02/1986 o dia da últma passagem do Cometa Halley pela órbita da Terra e considerando o dia encontrado no item (a), o qual será a data da sua próxima passagem, quantos dias existem neste intervalo? **Responta:** $\Delta = 2061 - 1986. = 75$, $M = [(2060 - 1988) \div 4] + 1 = 19$, $P = 365 \cdot 75 + 19 + 169 = 27563$. Portanto, entre os dias 09/02/1986 e 28/07/2061 existem 27563 dias.

(c) Descubra em que dia da semana será a próxima passagem do Cometa Halley na órbita do nosso planeta.
Responta: 09/02/2/1986 foi domingo. Então, para 28/07/2061, da resposta do item (b) tem-se que $\Delta = 75$, $M = 19$ e $P = 27563$, então $N \equiv 27563 \bmod 7$ ou $N \equiv 75 + 19 + 169 \bmod 7$, portanto, $N = 4$ e anvançando 4 dias dá uma quinta-feira.

(d) Construa o mês em que caiu a data em que ocorrerá a próxima passagem do Cometa Halley na órbita do nosso planeta.
Responta: A data e dia da semana para ocorrer a próxima passagem do Cometa Halley na órbita da Terra é: 28/07/2061 uma quinta-feira. Como $28 \equiv 0 \bmod 7 \Rightarrow$ quinta-feira, então, pode-se considerar o seguinte:

quinta-feira $\Rightarrow N \equiv 0 \bmod 7$: $\{7, 14, 21, 28\}$;
sexta-feira $\Rightarrow N \equiv 1 \bmod 7$: $\{1, 8, 15, 22, 29\}$;
sábado $\Rightarrow N \equiv 2 \bmod 7$: $\{2, 9, 16, 23, 30\}$;
domingo $\Rightarrow N \equiv 3 \bmod 7$: $\{3, 10, 17, 24, 31\}$;
segunda-feira $\Rightarrow N \equiv 4 \bmod 7$: $\{4, 11, 18, 25\}$;
terça-feira $\Rightarrow N \equiv 5 \bmod 7$: $\{5, 12, 19, 26\}$;
quarta-feira $\Rightarrow N \equiv 6 \bmod 7$: $\{6, 13, 20, 27\}$.

Como pode-se notar cada coluna possui um dia da semana, dos quais os números do mês são congruêntes entre si módulo 7. Observe os números nas colunas e as respectivas classes de equivalência.

Mês: Julho

Domingo	**Segunda**	**Terça**	**Quarta**	**Quinta**	**Sexta**	**Sábado**
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31						

(e) Complete o calendário do ano correspondente a data em que ocorrerá a próxima passagem do Cometa Halley na órbita do nosso planeta. Descreva as suas comclusões.

Ano: 2061

Janeiro

D	S	T	Q	Q	S	S
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31					

Fevereiro

D	S	T	Q	Q	S	S
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28					

Março

D	S	T	Q	Q	S	S
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

Abril

D	S	T	Q	Q	S	S
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30

Maio

D	S	T	Q	Q	S	S
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

Junho

D	S	T	Q	Q	S	S
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30		

Julho

D	S	T	Q	Q	S	S
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31						

Agosto

D	S	T	Q	Q	S	S
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

Setembro

D	S	T	Q	Q	S	S
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	

Outubro

D	S	T	Q	Q	S	S
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31					

Novembro

D	S	T	Q	Q	S	S
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30			

Dezembro

D	S	T	Q	Q	S	S
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

Atividade 3 - Explorando congruências

Folha do Aluno

Etapa 1: Encontrando anos bissextos.

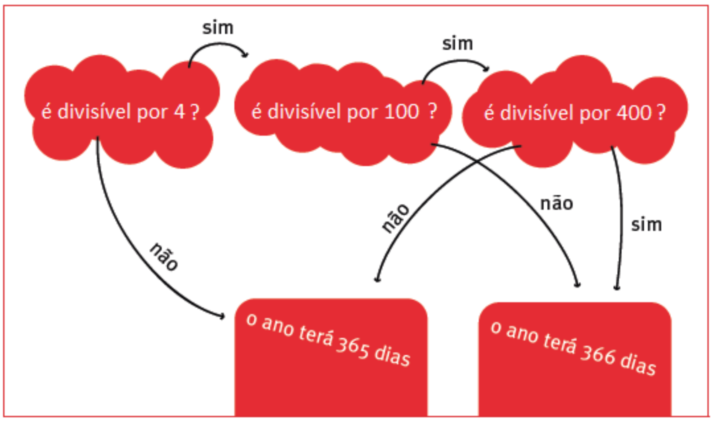


Figura 5.24: Algoritmo de funcionamento do calendário gregoriano.

Fonte: adaptada de Brasil (2009).

Utilizando o algoritmo da Figura 5.24 encontre, dentre os anos apresentados a seguir, quais são bissextos:

- **1967:**
- **1582:**
- **1936:**
- **2100:**
- **2400:**

Calcule quantos anos foram bissextos desde o ano de seu nascimento?

Etapa 2: Encontrando o dia da semana.

Para esta etapa será necessária algumas instruções sobre o algoritmo de Brasil (2009):

1. Observe no calendário do ano atual em qual dia da semana cairá a data escolhida;
2. Encontre qual a diferença (denotada por Δ) de anos entre o ano atual e o ano da data escolhida;
3. Calcule quantos anos bissextos acorreram no intervalo entre as datas em questão, pois precisa-se saber quantos dias foram 29 de fevereiro ocorreram entre as datas escolhidas (para tal, pode-se usar o algoritmo sugerido na Etapa 1);
4. Denotado por M a quantidade de 29 de fevereiro existentes entre a data no calendário atual e a data no calendário desejado;
5. Para saber quantos dias se passaram, multiplica-se Δ por 365 e soma M. Denotando por P este número, isto é, $P = 365 \cdot \Delta + M$.

Usando o calendário de 2017 (ou o celular) como referência responda as questões a seguir:

- Em que dia da semana foi o atentado terrorista que destruiu as Torres Gêmeas, em 11 de setembro de 2001?
- Qual foi o dia da semana em que foi publicado o Ato Institucional número 5 (AI-5), em 13 de dezembro de 1968?
- Em qual dia da semana teve início a Semana de Arte Moderna, em 11 de fevereiro de 1922?
- Qual foi o dia da semana em que foi proclamada a Rep{ublica no Brasil (1889)?
- Em que dia da semana o homem pisou a Lua, sabendo que a data foi 20 de julho de 1969?
- Em que dia da semana caiu 29 de fevereiro de 1972?
- Em que dia da semana você nasceu?

Etapa 3: Construindo calendário.

De acordo com Alegri e Gomes (2015), o Cometa Halley é um cometa brilhante de período intermediário que retorna às regiões interiores do Sistema Solar a cada período que varia entre 75 e 76 anos, aproximadamente. Foi o primeiro cometa a ser reconhecido como periódico: descoberta feita por Edmond Halley em 1696. Em sua última passagem na órbita terrestre, o Cometa Halley pôde ser observado a olho nu, em 09/02/1986, um domingo. Sabendo que a próxima passagem do Cometa Halley será daqui a 75 anos e 169 dias.

(a) Encontre a data que ocorrerá a próxima passagem do Cometa Halley na órbita do nosso planeta.

(b) Seja 09/02/1986 o dia da últma passagem do Cometa Halley pela órbita da Terra e considerando o dia encontrado no item (a), o qual será a data da sua próxima passagem, quantos dias existem neste intervalo?

(c) Descubra em que dia da semana será a próxima passagem do Cometa Halley na órbita do nosso planeta.

(d) Construa o mês em que caiu a data em que ocorrerá a próxima passagem do Cometa Halley na órbita do nosso planeta.

Mês: ___________						
Domingo	**Segunda**	**Terça**	**Quarta**	**Quinta**	**Sexta**	**Sábado**

(e) Complete o calendário do ano correspondente a data em que ocorrerá a próxima passagem do Cometa Halley na órbita do nosso planeta. Descreva as suas comclusões.

Ano: ________

Janeiro

D	S	T	Q	Q	S	S

Fevereiro

D	S	T	Q	Q	S	S

Março

D	S	T	Q	Q	S	S

Abril

D	S	T	Q	Q	S	S

Maio

D	S	T	Q	Q	S	S

Junho

D	S	T	Q	Q	S	S

Julho

D	S	T	Q	Q	S	S

Agosto

D	S	T	Q	Q	S	S

Setembro

D	S	T	Q	Q	S	S

Outubro

D	S	T	Q	Q	S	S

Novembro

D	S	T	Q	Q	S	S

Dezembro

D	S	T	Q	Q	S	S

Observação: Após realizar os cálculos, pode-se conferir no celular as datas encontradas no aplicativo calendário.

Embora a atividade/oficina desenvolvida tenha sido proposta aos alunos da 1ª série do ensino médio, ainda pode ser aplicada na 2ª e na 3ª séries, entretanto o intuito é que os alunos do ensino médio tenham contato com os conceitos associados a congruência. Apesar da congruência ser um conteúdo que não pertence a matriz curricular do estado de São Paulo permite atingir muitas competências e habilidades que estão na matriz curricular do estado de São Paulo como: saber determinar os divisores de um número natural; desenvolver do cálculo mental e as técnicas de divisão e multiplicação; reconhecer o padrão de regularidade de uma sequência; utilizar a linguagem matemática para expressar a regularidade dos padrões de sequências numéricas; aplicar conhecimentos matemáticos em situações do cotidiano; compreender que o calendário é produzido com base em conhecimentos matemáticos e, a partir disso, identificar as semelhanças e diferenças entre os calendários; tornar a matemática estimulante, fonte de novos conhecimentos, a partir de situações reais e contextualizadas. Deve ser realizada em 3 aulas (de 50 minutos cada) dividindo a sala em grupos de três alunos, assim esta Atividade possui uma introdução onde são apresentados conceitos astronômicos e históricos, além de conteúdos sobre congruência que devem ser abordados para que os alunos consigam realizar as atividades propostas. Na primeira etapa "Encontrando anos bissextos" os alunos devem entender o funcionamento do algoritmo do calendário gregoriano e encontrar entre os anos sugeridos quais são e quais não são bissextos, ainda nesta etapa os alunos aprendem a contar a quantidade de anos bissextos entre duas datas. A segunda etapa "Encontrando o dia da semana" tem como objetivo fazer com que os alunos compreendam como se determina o dia da semana em que uma data específica ocorreu ou irá ocorrer. Na terceira etapa é proposta uma atividade que envolve conceitos das outras duas etapas, ou seja, será utilizado os algoritmos dos quais foram elaborados nas duas etapas para resolucionar está etapa, da qual é finalizada com a construção de um calendário.

Observe que todas essas atividades, após a sua resolução por parte dos alunos, podem ser verificadas por meio do uso do celular e de um aplicativo relativo a calendário. Com relação aos discentes, este atividade visa a motivação, a curiosidade, instigar o interesse, gerar dúvidas. O que permite ao docente esclarecer as dúvidas e tornar a aula mais produtiva.

Muitas atividades podem ser elaboradas afim de que os alunos possam de modo menos tradicional assimilarem as habilidades das quais exigem os PCN's. As atividades encontradas nos Cadernos propostos pela SEE (Secretaria de Estado de Educação) do estado de São Paulo podem ser enriquecidos por alguns experimentos encontrados em São Paulo (1994) também desenvolvidos pela SEE. Entretanto, cabe ao docente escolher as mais adequadas para o momento e para o "tempo" disponível.

6 Conclusões e trabalhos futuros

O foco fundamental desta Dissertação está associado à temática que envolve a elaboração de calendários ao longo da civilização humana. Nesse sentido, houve a preocupação em mostrar que desde os tempos mais remotos o ser humano estava preocupado em estabelecer regras para padrões cíclicos que ele observava em seu cotidiano ao longo de um dado período e que eram essenciais para sua sobrevivência.

Pode se dizer que a ideia de se estabelecer calendários é algo que caminha ao lado da humanidade há pelo menos 5 000 anos. O mais interessante ainda é observar que os modernos instrumentos e os conhecimentos disponíveis hoje e que permitem estabelecer com precisão o calendário que é utilizado hoje na maioria dos países ocidentais é muito próximo daqueles elaborados pelas primeiras civilizações.

É muito comum em Sala de Aula o professor ouvir dos estudantes, coisas do tipo "Para que serve isso? Onde é que eu posso usar isso?". Muitas vezes o próprio docente desconhece uma aplicação próxima da realidade do aluno que poderia chamar sua atenção ou servir como elemento motivacional para o estudo de determinados conteúdos. Nesse sentido, todas as atividades didáticas propostas e que objetivam facilitar situações de aprendizagem de importantes conceitos matemáticos, estão relacionadas à construção de calendários, ou seja, esse tema entra como plano de fundo para atrair e conquistar o aprendiz, já que está presente em seu cotidiano e, portanto, podem ser contextualizadas.

Atualmente, qualquer dispositivo móvel do tipo Celular possui um aplicativo como esse e que é usado intensamente por essa geração de jovens que já nasceram na era digital. Assim, mostrar ao jovem que ele pode obter as mesmas informações disponíveis a partir do Celular com algumas operações matemáticas básicas, dá a ele um sentimento e uma segurança para se sentir confiante e desafiado a fazer, a aprender, a dominar, a estudar.

Como é construído o calendário de um dado ano, no passado ou no futuro, que dia da semana cairá o feriado da Páscoa em 2023, que dia da semana cairá o meu aniversário quando eu fizer 30 anos? São questões relativamente simples de serem respondidas e que utilizam uma matemática básica de conhecimento de qualquer aluno do ensino médio e podem servir de motivação para iniciar o desenvolvimento de alguns conteúdos matemáticos.

Com isso, usando a noção de calendários que está presente na vida de todos nós, como tema de fundo, procurou-se desenvolver um conjunto de atividades didáticas que exploram conceitos matemáticos envolvendo divisibilidade, sistemas de numeração, congruências e cônicas. Assim, procura-se mostrar que a matemática não está distante e dissociada de nossas vidas, ela está presente em nosso dia a dia, ela é um produto do pensamento humano que busca estabelecer regras e leis para explicar com precisão fenômenos e fatos os mais variados e que nos rodeiam, dos mais simples aos mais complexos.

A maioria das atividades propostas procurou também envolver os alunos em grupos, de forma que eles possam trabalhar de forma colaborativa, que é algo que está cada vez mais presente em avaliações, como o PISA, por exemplo, e também na vida das pessoas, incluindo o mundo do trabalho. As atividades propostas objetivam ainda tornar as aulas de matemática menos abstratas, mais interessantes, interativas e participativas, sem abrir mão dos conceitos, mas de forma que esses apareçam de forma contextualizada depois que os alunos perceberem que o assunto tratado é importante para entender fenômenos ou situações que estão próximas de sua realidade.

É importante realçar temas multidisciplinares, contextualizar os conceitos desenvolvidos em Sala de Aula com a realidade do aluno, aulas mais colaborativas e interativas, abordar aspectos de natureza histórica e uso de tecnologias, entre outras, estão presentes nos documentos oficiais como abordagens capazes de chamar a atenção e motivar os jovens, facilitando o aprendizado de diferentes conteúdos. Em particular em relação a matemática, já que essa é tradicionalmente uma disciplina considerada difícil pela maioria os alunos.

Por fim, em que pese o fato do trabalho explorar inúmeros aspectos relativos à construção de calendários, ele está longe de esgotar o assunto, mas a expectativa é que ele possa estimular docentes na elaboração de outras propostas didáticas envolvendo o tema, inclusive ligadas a outras disciplinas, como história, geografia e física.

6.1 Trabalhos futuros

Embora fosse um objetivo inicial, não foi possível aplicar as atividades didáticas diretamente em Sala de Aula, além de questionários de avaliação, tanto ao docente quanto ao discente com o propósito de verificar o aprendizado por parte dos alunos e "ouvir" destes sua opinião e aceitação em relação as atividades.

Oficinas e atividades didáticas realizadas em grupo são sempre motivadores, interativas e participativas, carregadas de muita energia e dinâmicas por natureza, sendo um espaço interessante para se observar comportamentos e outras características dos estudantes que podem ser valiosas para futuras ações e aprendizados.

A "Folha do Aluno" com questões relacionadas ao conteúdo que se pretende avaliar permite que o docente possa aferir o grau de compreensão e aprendizado do aluno, seu raciocínio lógico, dedutivo e indutivo, sua capacidade de abstração, assim como, mapear as dificuldades encontradas e tomar decisões para corrigi-las. Por outro lado, os "Questionários de Avaliação" aplicados "a posteriori" das atividades, busca colher dos alunos como eles se sentiram em relação a atividades, se foi interessante, se o tempo disponível foi adequado, quais foram as maiores dificuldades e assim por diante. Com esses dois instrumentos a mão, o docente terá condições de avaliar, corrigir e refazer as atividades, caso seja necessário, daí a importância dos experimentos.

Enfim, diversas atividades/oficinas podem ser elaboradas com o intuito de que os discentes possam de modo menos tradicional assimilarem as habilidades das quais exigem os PCN's.

Referências

ALEGRI, M.; GOMES A. R. G. Congruências e a aritmética do calendário. *Revista Curiá*, Sergipe, v.1, n.1, 2015.

ALVES, A. L. *O relógio atômico:* uma análise da física atômica na medição do tempo. 2014. 68 f. Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Física) - Departamento de Física, Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande.

ARTUSO, A. R. e WRUBLEWSKI M. *Física.* 1. ed. Curitiba: Positivo, 2013. v. 1.

BARRETO, M. *Física*: Newton para o ensino médio. 3. ed. Campinas: Papirus, 2010. 106 p.

BEBEACHIBULI A. *Relôgio atômico a feixe efusivo de césio:* estudo da estabilidade e da acurácia como função do deslocamento da frequência atômica devido ao efeito Zeeman de segunda ordem, ao cavity pulling e ao rabi pulling. 2003. 117 f. Dissertação (Mestrado em Física) Universidade de São Paulo, São Carlos.

BOYER, C. B. *História da matemática.* São Paulo: Edgard Blücher, 1974. 487 p.

BRASIL. MEC. Secretaria de Educação Básica. *Parâmetros curriculares nacionais:* ensino fundamental. Brasília, 1998.

BRASIL. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio:* parte III - ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, 2000a.

BRASIL. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio:* parte IV - ciências humanas e suas tecnologias. Brasília: MEC, 2000b.

BRASIL. MEC. SEMT. *PCN + Ensino Médio:* Orientações Educacionais Complementares aos PCN's. Brasília, 2002.

BRASIL. MEC. Secretaria de Educação a Distância. A matemática dos calendários. Guia do professor. FNDE. Unicamp. Campinas, 2009.

CAVALCANTI, T. J. B. *Calendário maia, 2012 e nova era.* 1. ed. Niterói: Projeto cmaia, 2012. 184 p.

CRUZ, L. F. Cônicas. In: __________. *Cálculo vetorial e geometria analítica.* Bauru: UNESP, 2014. Disponível em: <http://wwwp.fc.unesp.br/ lfcruz/Material_Didatico.htm> Acesso em 15 jan. 2017.

DAMINELI NETO, A. ; MOLINA, E. C.; PICAZZIO, E.; GREGORIO-HETEM, J. C.; PEREIRA, V. J.; MACIEL, W. J.; LIMA NETO, G. B. *O Céu que nos Envolve*: Introdução à astronomia para educadores e iniciantes. 1. ed. São Paulo: Odysseus Editora, 2011. 286 p.

DARROZ, L. M. *Uma proposta para trabalhar conceitos de astronomia com alunos concluintes do curo de formação de professores na modalidade normal.* 2010. 195 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Física) Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAFF, L. *Geometria analítica.* Coleção professor PROFMAT. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. 340 p.

DOCA, R. H.; BISCUOLA, G. J. e BÔAS, N. V. *Física 1*: mecânica. 2. ed. São Paulo: Saraiva, 2013. 448 p.

DOMINGUES, H. H. *Fundamentos de aritmética.* São Paulo: Atual, 1991. 296 p.

DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. *Álgebra moderna:* volume único. 4. ed. São Paulo: Atual, 2003. 371 p.

DONATO, H. *A história do calendário.* 3.ed. São Paulo: Melhoramentos, 1993. 158 p.

FERREIRA, F. C. B. O sacrifício do carneiro islâmico como objeto transicional: notas antropológicas. *Revista Antropologia*, São Paulo, v.50, n.2, p.747-783, 2007.

FRANCO T. R. R. *Divisibilidade e congruências:* aplicações no ensino fundamental II. 2016. 80 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) Universidade Federal

de Goiás, Jataí.
HAWKING, S. W. *Breve história do tempo*: do "Big Bang" aos buracos negros. 3. ed. Lisboa/Portugal: Gradiva Publicações Ltda, 1994. 82 p.

HEFEZ, A. *Elementos de aritmética*. Coleção professor de matemática. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011. 174 p.

HEFEZ, A. *Iniciação à aritmética*. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. 127 p.

HORVATH, J. E. *O ABCD da astronomia e astrofísica*. 2. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2008. 232 p.

IACHEL, G.; LANGHI, R.; SCALVI, R. M. F. Concepções alternativas de alunos do ensino médio sobre o fenômeno de formação das fases da Lua. *Revista Latino-Americana de Educação em Astronomia - RELEA*, Bauru, v.1, n. 5, p. 25-37, 2008.

JUNIOR, M. A. R. *Os calendários e a sua contribuição para o ensino da astronomia*. 2012. 128 f. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Porto.

KEPLER, S. O. e SARAIVA, M. F. O. *Astronomia e astrofísica*. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2014.

LANGHI, R.; NARDI, R. Ensino de astronomia: erros conceituais mais comuns presentes em livros didáticos de ciências. *Caderno brasileiro de ensino de física*, Bauru, v.24, n. 1, p. 87-111, abr. 2007.

LE GOFF, J. tradução LEITÃO B. *História e memória*. Campinas: Unicamp, 1990.

LOPES, M. C. O calendário atual. História, algoritmos e observações. *Millenium*, Portugal, v. 43 jun-dez p. 107-125, 2012.

LOSANO, M. G. Teorias da mente. *Revista Olhar*. v. 3, jan-jun/03 1992. Ano 05 n. 8.

MACHADO, R. E. G. *Data da páscoa e ano bissexto:* a astronomia na história dos calendários. (Desenvolvimento de material didático ou instrucional - Texto complementar) São Paulo: Universidade de São Paulo, 2014.

MALTA, E. V. P. O contexto sociocultural muçulmano: A literatura como veículo artístico e religioso. *Revista Mundo Antigo*, Recife, v.3, n. 5, p. 157-170, 2014.

MARQUES, M. N. *Origem e evolução de nosso calendário.*
Disponível em: <http://www.mat.uc.pt/ helios/Mestre/H01orige.htm>. Acesso em: 15 jun. 2016.

MARTINS A. F. P. e ZANETIC, J. Tempo: esse velho estranho conhecido. *Cienc. Cult.* [online], v. 54, n.2, p. 41-44. 2002.

MELO C. B. *A matemática dos restos e o calendário gregoriano.* 2014. 55 f. Mestrado (Matemática) - Universidade Federal do Ceará, Juazeiro do Norte.

MIYASCHITA, W. Y. *Sistemas de numeração*: como funcionam e como são estruturados os números. 2002. 42 f. Trabalho de conclusão de curso (Graduação) - Faculdade de Ciências, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Bauru.

MILIES, F. C. P.; COELHO, S. P. *Números:* uma introdução à matemática. 3. ed. São Paulo: Universidade de São Paulo, 2001.

MILONE, A. C.; WUENSCHE, C. A.; RODRIGUES, C. V.; JABLONSKI, F. J.; CAPELATO, H. V.; VILAS-BOAS, J. W.; CECATTO, J. R.; NETO, T. V. *Introdução à astronomia e astrofísica.* São José dos Campos: Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais-INPE, 2003. 322 p.

NADAL, C. A.; HATSCHBACH F. *Introdução aos sistemas de medição de tempo*: Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas. 2. ed. Curitiba: 2000.

PATERLINI, R. R. *Aritmética dos números inteiros.* 1 ed. São Carlos: UFSCAR, 2013.

PERES, E. S. *Classificação de cônicas e quádricas em função da equação algébrica.* 2014. 95 f. Mestrado (Matemática) - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

PIMENTA, A. F. *Evolução dinâmica do sistema TerraLua:* um modelo semi-empírico. 2004. 81 f. Tese (Doutorado em Ciências Geodésicas) - Setor de Ciências da Terra, Universidade Federal do Paraná, Curitiba.

RIBEIRO, V. M. *Piatã:* história, 6º Curitiba: Positivo, 2015.

RODRIGUES, O. M. A. C. *O ciclo solar.* 2000. 137 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) - Departamento de Matemática Aplicada, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Porto.

SANTANA, G. R.*Elipse de Steiner*. 2014. 77 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de Goiás, Goiânia.

SANTOS, A. F. *Sistemas de numeração posicionais e não posicionais*. 2014. 80 f. Dissertação (Mestrado em Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", São José do Rio Preto.

SÃO PAULO (Estado). *Caderno do professor*: ciência, ensino fundamental 7ª série| 8º ano, v. 2. São Paulo: SEE, 2014 - 2017a.

SÃO PAULO (Estado). *Caderno do professor*: história, ensino fundamental 5ª série| 6º ano, v. 1. São Paulo: SEE, 2014 - 2017b.

SÃO PAULO (Estado). *Caderno do professor*: matemática, ensino médio 2ª série, v. 1. São Paulo: SEE, 2014 - 2017c.

SÃO PAULO (Estado). *Caderno do professor*: matemática, ensino médio 3ª série, v. 1. São Paulo: SEE, 2014 - 2017d.

SÃO PAULO (Estado). *Caderno do professor*: matemática, ensino fundamental 5ª série| 6º ano, v. 1. São Paulo: SEE, 2014 - 2017e.

SÃO PAULO (Estado). *Caderno do professor*: matemática, ensino fundamental 6ª série| 7º ano, v. 1. São Paulo: SEE, 2014 - 2017f.

SÃO PAULO (Estado). *Experiências matemáticas:* 5ª série, 1. ed. São Paulo: SEE, 1994.

SÃO PAULO (Estado). *Matriz de avaliação processual:* física e química, ciências da natureza; encarte do professor, v. 1. São Paulo: SEE, 2016a. 64 p.

SÃO PAULO (Estado). *Matriz de avaliação processual:* matemática, encarte do professor, v. 1. São Paulo: SEE, 2016.

SÃO PAULO (Estado). *Proposta curricular do Estado de São Paulo:* matemática , v. 1. São Paulo: SEE, 2008.

SILVA, C. B. C. *O desenvolvimento das leis de Kepler.* 2014. 77 f. Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Física) - Departamento de Física de Ji-Paraná Universidade Federal de Rondônia, Ji-Paraná.

TEIXEIRA, C. C. *Calendários.* 2010. 30 f. Especialização (Matemática) - Departamento de Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.

TURAZZI, M. I.; GABRIEL C. T. *Tempo e história* 1. ed. São Paulo: Moderna, 2000. 88 p.

VENTURI, J. J. *Cônicas e quadráticas.* 5. ed. Curitiba: Editora Unificado, 2003. 243 p.