



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil

MARCELO CAVALCANTI DA SILVA

**ANÁLISE LINEAR ESTÁTICA E DINÂMICA DE PLACAS UTILIZANDO O
ELEMENTO FINITO PRISMÁTICO REGULAR LINEAR**

Ilha Solteira

2017

FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil

MARCELO CAVALCANTI DA SILVA

**ANÁLISE LINEAR ESTÁTICA E DINÂMICA DE PLACAS UTILIZANDO O
ELEMENTO FINITO PRISMÁTICO REGULAR LINEAR**

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – UNESP, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Civil.

Área de Concentração: Estruturas.

Prof. Dr. JEFFERSON SIDNEY CAMACHO

Orientador

Prof. Dr. ROGÉRIO DE OLIVEIRA RODRIGUES

Co-orientador

Ilha Solteira

2017

FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

S586a Silva, Marcelo Cavalcanti da.
Análise linear estática e dinâmica de placas utilizando o elemento finito prismático regular linear / Marcelo Cavalcanti da Silva. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2017
152 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Estruturas, 2017

Orientador: Jefferson Sidney Camacho
Co-orientador: Rogério De Oliveira Rodrigues
Inclui bibliografia

1. Análise linear estática e dinâmica. 2. Comportamento estrutural de placas.
3. Método dos elementos finitos.



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Câmpus de Ilha Solteira

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO


TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Análise linear estática e dinâmica de placas utilizando o elemento finito prismático regular linear

AUTOR: MARCELO CAVALCANTI DA SILVA

ORIENTADOR: JEFFERSON SIDNEY CAMACHO

COORIENTADOR: ROGÉRIO DE OLIVEIRA RODRIGUES

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em ENGENHARIA CIVIL,
área: ESTRUTURAS pela Comissão Examinadora:


Prof. Dr. ROGÉRIO DE OLIVEIRA RODRIGUES
Departamento de Engenharia Civil / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira


Prof. Dr. JOSÉ LUIZ PINHEIRO MELGES
Departamento de Engenharia Civil / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira


Prof. Dr. RODRIGO PIERNAS ANDOLFATO
. / TECNOBENS Construção e Incorporação Ltda

Ilha Solteira, 31 de janeiro de 2017

Márcia Regina Nagamachi Chaves
Supervisor Técnico de Seção - STPG

DEDICO

Ao meu pai João Vaz da Silva e minha mãe Maria Cavalcanti da Silva, que me educaram com amor, e souberam com sabedoria transmitir para minha vida o valor da educação. E também ao meu sobrinho Gabriel Adriano Cavalcanti da Silva, a sua existência me inspirou a realizar sempre o melhor de mim.

AGRADECIMENTOS

A Deus,

Pelo amparo de sua paz e pelo consentimento da realização deste trabalho.

Aos meus pais João e Maria,

Pela compreensão e paciência ao longo do período de estudo.

Ao Prof. Dr. Rogério de Oliveira Rodrigues,

Pela transmissão de conhecimentos de forma clara e simples de assuntos complexos.

Ao Prof. Dr. Jefferson Nascimento de Oliveira,

Pela confiança e incentivo, que foram essenciais no transcorrer deste percurso.

À Mestra Rosane Caldeira,

Pelo recebimento de sentimentos e dos seus conhecimentos de informática.

Aos meus amigos de curso,

Pela cumplicidade, troca de informações e pela amizade.

Aos funcionários do Departamento da Engenharia Civil – FEIS/ UNESP,

Por proporcionar um bom ambiente de trabalho.

A CAPES,

Pelo recurso financeiro, que foi essencial para que pudesse dedicar-me aos estudos.

Oração de São Francisco de Assis

“Senhor, fazei-me instrumento de vossa paz.

Onde houver ódio, que eu leve o amor;

Onde houver ofensa, que eu leve o perdão;

Onde houver discórdia, que eu leve a união;

Onde houver dúvida, que eu leve a fé;

Onde houver erro, que eu leve a verdade;

Onde houver desespero, que eu leve a esperança;

Onde houver tristeza, que eu leve a alegria;

Onde houver trevas, que eu leve a luz.

Ó Mestre, fazei que eu procure mais

consolar, que ser consolado;

compreender, que ser compreendido;

amar, que ser amado.

Pois é dando que se recebe,

é perdoando que se é perdoado,

e é morrendo que se vive para a vida eterna.”

São Francisco de Assis

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo principal analisar o comportamento linear estático e dinâmico de placas, com carregamento perpendicular ao seu plano médio, realizando a discretização estrutural com o elemento finito prismático regular linear. Na dedução das matrizes de rigidez e de massas do elemento finito em questão, utiliza-se a formulação com parâmetros generalizados e com coordenadas homogêneas, cujas funções aproximadoras com vinte e quatro monômios, respectivamente, foram extraídos do polinômio algébrico cúbico em “x”, “y” e “z”. Para a consideração do amortecimento utiliza-se o Método de Rayleigh e para a integração numérica ao longo do tempo utiliza-se o Método de Newmark, via algoritmo predictor / corretor. Ao final deste trabalho foram elaborados exemplos elucidativos visando uma análise quantitativa e qualitativa dos resultados obtidos, que foram comparados com os valores determinados do elemento finito de placa retangular. Como conclusões finais, para placas muito delgadas deve-se utilizar o elemento finito de placa retangular; em placas delgadas é possível a utilização dos elementos finitos de placa retangular e o prismático regular linear; e para placas espessas deve-se utilizar o elemento finito prismático regular linear.

Palavras-chave: Análise linear estática e dinâmica. Comportamento estrutural de placas. Método dos elementos finitos.

ABSTRACT

The main objective of this work is to analyze the static and dynamic linear behavior of plates with perpendicular loading to its mean plane, performing the structural discretization with the regular linear prismatic finite element. In the deduction of the stiffness and mass matrices of the finite element, it is used the formulation with generalized parameters and with homogeneous coordinates, whose approximate functions with twenty-four monomials, respectively, were extracted from the cubic algebraic polynomial in x , y and z . For the damping consideration, it is used the Rayleigh Method and for the numerical integration by along the time it is used the Newmark Method, via forecaster / corrector algorithm. At the end of this work, elucidative examples were elaborated aiming a quantitative and qualitative analysis of the obtained results which were compared with the finite element determined values of rectangular plate. As final conclusions, for very thin plates must use the rectangular plate finite element; in thin plates it is possible to use the rectangular plate finite elements and the linear regular prismatic; and for thick plates the linear regular prismatic finite element must be used.

Keywords: Static and dynamic linear analysis. Structural behavior of Plates. Finite element method.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	- Elemento finito de placa retangular	22
Figura 2	- Graus de liberdade do elemento finito de placa retangular	22
Figura 3	- Placa com carregamento perpendicular ao seu plano médio	23
Figura 4	- Sistema estrutural arbitrário	26
Figura 5	- Tensões atuantes em um cubo infinitesimal	28
Figura 6	- Elemento infinitesimal do sólido com variação de tensões em suas faces	29
Figura 7	- Deformação linear do elemento linear	32
Figura 8	- Deformação cisalhante de um elemento infinitesimal no plano	33
Figura 9	- Modelo reológico	38
Figura 10	- Deformação tangencial provocada por um deslocamento virtual	41
Figura 11	- Aceleração constante	49
Figura 12	- Aceleração com variação linear	50
Figura 13	- Diagrama de blocos do método de Newmark	58
Figura 14	- Diagrama de blocos para análise estática com carregamento incremental	59
Figura 15	- Elemento finito prismático regular linear com oito nós	60
Figura 16	- Pirâmide de Pascal	62
Figura 17	- Monômios do elemento finito prismático regular linear	63
Figura 18	- Componentes da função de forma nos lados do prisma com a variável em x	68
Figura 19	- Componentes da função de forma nos lados do prisma com a variável em y	69
Figura 20	- Componentes da função de forma nos lados do prisma com a variável em z	69
Figura 21	- Carregamento superficial no elemento finito prismático regular linear	79
Figura 22	- Carga concentrada no elemento finito prismático regular linear	84
Figura 23	- Esquematização de matrizes simétricas	87
Figura 24	- Etapas das sub-rotinas do programa para cálculo da análise estática	91
Figura 25	- Etapas das sub-rotinas do programa para cálculo da análise estática com carregamento incremental	92
Figura 26	- Etapas das sub-rotinas do programa para cálculo da análise dinâmica	93
Figura 27	- Apoios das bordas da placa discretizada em $2 \times 2 \times 2$	100
Figura 28	- Placa quadrada com carga distribuída	101

Figura 29	- Gráfico do deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/100 e carga distribuída, considerando-se todas as bordas apoiadas na altura média da placa	103
Figura 30	- Gráfico do deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/100 e carga distribuída, considerando-se todas as bordas engastadas	104
Figura 31	- Gráfico do deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/25 e carga distribuída, considerando-se todas as bordas apoiadas na altura média da placa	105
Figura 32	- Gráfico do deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/25 e carga distribuída, considerando-se todas as bordas engastadas	106
Figura 33	- Gráfico do deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/10 e carga distribuída, considerando-se todas as bordas apoiadas na altura média da placa	107
Figura 34	- Gráfico do deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/10 e carga distribuída, considerando-se todas as bordas engastadas	108
Figura 35	- Gráfico do deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/5 e carga distribuída, considerando-se todas as bordas apoiadas na altura média da placa	109
Figura 36	- Gráfico do deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/5 e carga distribuída, considerando-se todas as bordas engastadas	110
Figura 37	- Placa quadrada com carga concentrada em seu ponto central	112
Figura 38	- Gráfico do deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas apoiadas na altura média da placa, e malha de 2x2 no plano xy	113
Figura 39	- Gráfico do deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas apoiadas na altura média da placa, e malha de 4x4 no plano xy	114
Figura 40	- Gráfico do deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas apoiadas na altura média da placa, e malha de 8x8 no plano xy	115
Figura 41	- Gráfico do deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas apoiadas na altura média da placa, e malha de 16x16 no plano xy	116

Figura 42	- Gráfico do deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas apoiadas na altura média da placa, e malha de 20x20 no plano xy	117
Figura 43	- Gráfico do deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas apoiadas na altura média da placa, e malha de 24x24 no plano xy	118
Figura 44	- Gráfico do deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas apoiadas na altura média da placa, e malha de 32x32 no plano xy	120
Figura 45	- Gráfico do deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas engastadas, e malha de 2x2 no plano xy	121
Figura 46	- Gráfico do deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas engastadas, e malha de 4x4 no plano xy	122
Figura 47	- Gráfico do deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas engastadas, e malha de 8x8 no plano xy	123
Figura 48	- Gráfico do deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas engastadas, e malha de 16x16 no plano xy	124
Figura 49	- Gráfico do deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas engastadas, e malha de 20x20 no plano xy	125
Figura 50	- Gráfico do deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas engastadas, e malha de 24x24 no plano xy	126
Figura 51	- Gráfico do deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas engastadas, e malha de 32x32 no plano xy	128
Figura 52	- Gráfico do deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas engastadas, e malha de 42x42 no plano xy	130
Figura 53	- Gráfico do deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas apoiadas na base da placa	132
Figura 54	- Gráfico do deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/10 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas apoiadas na base da placa	133

Figura 55	- Gráfico do deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/5 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas apoiadas na base da placa	134
Figura 56	- Deslocamentos dos pontos da placa para y=2,50m e “t/a” de 1/20, carga concentrada, malha de 32x32 no plano xy, com 2 camadas na direção z, e com todas as bordas apoiadas na altura média e na base da placa	141
Figura 57	- Forças nos pontos da placa para y=2,50m e “t/a” de 1/20, carga concentrada, malha de 32x32 no plano xy, com 2 camadas na direção z, e com todas as bordas apoiadas na altura média e na base da placa	142
Figura 58	- Gráfico dos deslocamentos do ponto central da placa com “t/a” de 1/20, carga concentrada, malha de 42x42 no plano xy, com 2 camadas na direção z, todas as bordas engastadas, e com carregamento incremental	144
Figura 59	- Gráfico dos deslocamentos do ponto central da placa com “t/a” de 1/20, carga concentrada, malha de 42x42 no plano xy, com 2 camadas na direção z, todas as bordas engastadas, e com análise dinâmica	148

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	- Deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/100 e carga distribuída, considerando-se todas as bordas apoiadas na altura média da placa	103
Tabela 2	- Deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/100 e carga distribuída, considerando-se todas as bordas engastadas	104
Tabela 3	- Deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/25 e carga distribuída, considerando-se todas as bordas apoiadas na altura média da placa	105
Tabela 4	- Deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/25 e carga distribuída, considerando-se todas as bordas engastadas	106
Tabela 5	- Deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/10 e carga distribuída, considerando-se todas as bordas apoiadas na altura média da placa	107
Tabela 6	- Deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/10 e carga distribuída, considerando-se todas as bordas engastadas	108
Tabela 7	- Deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/5 e carga distribuída, considerando-se todas as bordas apoiadas na altura média da placa	109
Tabela 8	- Deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/5 e carga distribuída, considerando-se todas as bordas engastadas	110
Tabela 9	- Deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, malha de 2x2 no plano xy e todas as bordas apoiadas na altura média da placa	113
Tabela 10	- Deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, malha de 4x4 no plano xy e todas as bordas apoiadas na altura média da placa	114

Tabela 11	- Deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, malha de 8x8 no plano xy e todas as bordas apoiadas na altura média da placa	115
Tabela 12	- Deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, malha de 16x16 no plano xy e todas as bordas apoiadas na altura média da placa	116
Tabela 13	- Deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, malha de 20x20 no plano xy e todas as bordas apoiadas na altura média da placa	117
Tabela 14	- Deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, malha de 24x24 no plano xy e todas as bordas apoiadas na altura média da placa	118
Tabela 15	- Deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, malha de 32x32 no plano xy e todas as bordas apoiadas na altura média da placa	119
Tabela 16	- Deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, malha de 2x2 no plano xy e todas as bordas engastadas	120
Tabela 17	- Deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, malha de 4x4 no plano xy e todas as bordas engastadas	121
Tabela 18	- Deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, malha de 8x8 no plano xy e todas as bordas engastadas	122
Tabela 19	- Deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, malha de 16x16 no plano xy e todas as bordas engastadas	123
Tabela 20	- Deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, malha de 20x20 no plano xy e todas as bordas engastadas	124
Tabela 21	- Deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, malha de 24x24 no plano xy e todas as bordas engastadas	125

Tabela 22	- Deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, malha de 32x32 no plano xy e todas as bordas engastadas	127
Tabela 23	- Deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, malha de 42x42 no plano xy e todas as bordas engastadas	129
Tabela 24	- Deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas apoiadas na base da placa	131
Tabela 25	- Deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/10 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas apoiadas na base da placa	132
Tabela 26	- Deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/5 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas apoiadas na base da placa	133
Tabela 27	- Deslocamentos dos pontos da placa para y=2,50m e z=0, “t/a” de 1/20, carga concentrada, malha de 32x32 no plano xy, com 2 camadas na direção z, e com todas as bordas apoiadas na altura média e na base da placa	135
Tabela 28	- Deslocamentos dos pontos da placa para y=2,50m e z=12,5cm, “t/a” de 1/20, carga concentrada, malha de 32x32 no plano xy, com 2 camadas na direção z, e com todas as bordas apoiadas na altura média e na base da placa	136
Tabela 29	- Deslocamentos dos pontos da placa para y=2,50m e z=25cm, “t/a” de 1/20, carga concentrada, malha de 32x32 no plano xy, com 2 camadas na direção z, e com todas as bordas apoiadas na altura média e na base da placa	137
Tabela 30	- Forças nos pontos da placa para y=2,50m e z=0, “t/a” de 1/20, carga concentrada, malha de 32x32 no plano xy, com 2 camadas na direção z, e com todas as bordas apoiadas na altura média e na base da placa	138

Tabela 31	- Forças nos pontos da placa para $y=2,50\text{m}$ e $z=12,5\text{cm}$, " t/a " de $1/20$, carga concentrada, malha de 32×32 no plano xy , com 2 camadas na direção z , e com todas as bordas apoiadas na altura média e na base da placa	139
Tabela 32	- Forças nos pontos da placa para $y=2,50\text{m}$ e $z=25\text{cm}$, " t/a " de $1/20$, carga concentrada, malha de 32×32 no plano xy , com 2 camadas na direção z , e com todas as bordas apoiadas na altura média e na base da placa	140
Tabela 33	- Deslocamentos do ponto central da placa com " t/a " de $1/20$, carga concentrada, malha de 42×42 no plano xy , com 2 camadas na direção z , todas as bordas engastadas, e com carregamento incremental	143
Tabela 34	- Deslocamentos do ponto central da placa com " t/a " de $1/20$, carga concentrada, malha de 42×42 no plano xy , com 2 camadas na direção z , todas as bordas engastadas, e com análise dinâmica	146

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

EFPR	Elemento finito de placa retangular
EFPRL	Elemento finito prismático regular linear
MATLAB	Laboratório de Matrizes (programa computacional)
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MEF	Método dos Elementos Finitos

LISTA DE SIMBOLOS

ν	Coeficiente de Poisson
u	Componente de deslocamento na direção X
v	Componente de deslocamento na direção Y
w	Componente de deslocamento na direção Z
γ	Deformação cisalhante
ε	Deformação linear
ρ	Densidade específica
$\underline{f_e}$	Esforços externos
F	Força
ω	Frequência natural de vibração da estrutura
$\underline{\phi}$	Matriz das funções de forma
\underline{C}	Matriz de amortecimento da estrutura
\underline{c}	Matriz de amortecimento do elemento
\underline{d}	Matriz de deslocamento nodal
\underline{M}	Matriz de massa da estrutura
\underline{m}	Matriz de massa do elemento
\underline{K}	Matriz de rigidez da estrutura
\underline{k}	Matriz de rigidez do elemento
E	Módulo de elasticidade longitudinal
M	Momento fletor
μ	Parâmetro de amortecimento viscoso
τ	Tensão cisalhante
σ	Tensão normal
\underline{u}	Vetor de deslocamento
V_e	Volume do elemento

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
1.1	TEMA E MOTIVAÇÃO	21
1.2	OBJETIVO	24
1.3	APRESENTAÇÃO	24
2	EQUAÇÃO GERAL DO MOVIMENTO VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	25
2.1	CONCEITOS DA MECÂNICA DOS SÓLIDOS DEFORMÁVEIS	25
2.1.1	<i>Solicitações atuantes em um sistema estrutural devidas ao meio externo</i>	26
2.1.1.1	<i>Esforços volumétricos</i>	27
2.1.1.2	<i>Esforços superficiais</i>	27
2.1.1.3	<i>Esforços concentrados</i>	27
2.1.2	<i>Tensores de tensões e deformações</i>	27
2.1.3	<i>Equações de equilíbrio de um sólido</i>	31
2.1.4	<i>Relações cinemáticas</i>	32
2.1.5	<i>Relações constitutivas</i>	35
2.1.6	<i>Condições de contorno</i>	36
2.1.7	<i>Resolução do problema</i>	37
2.2	BASE DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	37
2.3	TRABALHOS VIRTUAIS PROVENIENTES DE FORÇAS QUE ENVOLVEM UMA ANÁLISE ESTRUTURAL DINÂMICA	38
2.3.1	<i>Trabalhos virtuais no elemento estrutural devido ao meio externo</i>	39
2.3.2	<i>Trabalhos virtuais das forças restauradoras</i>	40
2.3.3	<i>Trabalhos virtuais das forças inerciais</i>	42
2.3.4	<i>Trabalhos virtuais das forças dissipativas</i>	43
2.4	EQUAÇÃO GERAL DO MOVIMENTO	44
3	INTEGRAÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO GERAL DO MOVIMENTO	47
3.1	MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA	47
3.2	EQUAÇÕES DE NEWMARK	48

3.2.1	<i>Aceleração constante durante o intervalo de tempo</i>	48
3.2.2	<i>Aceleração variando linearmente durante o intervalo de tempo</i>	50
3.2.3	<i>Equações generalizadas</i>	52
3.3	PROCESSOS ITERATIVOS	52
3.4	PROCESSO INCREMENTAL	53
3.5	MÉTODO DE NEWMARK PARA INTEGRAÇÃO NUMÉRICA AO LONGO DO TEMPO	53
3.5.1	<i>Equacionamento básico</i>	54
3.6	ALGORITMO NUMÉRICO PARA RESOLUÇÃO DO PROCESSO	56
4	ELEMENTO FINITO PRISMÁTICO REGULAR LINEAR	60
4.1	TRIÂNGULO DE PASCAL	60
4.2	FUNÇÕES DE FORMA	63
4.3	MATRIZ DE RIGIDEZ	70
4.4	MATRIZ DE MASSAS	73
4.5	MATRIZ DE AMORTECIMENTO	75
4.5.1	<i>Frequências naturais de vibração</i>	75
4.5.2	<i>Amortecimento Rayleigh</i>	77
4.6	FORÇAS NODAIS EQUIVALENTES	79
4.6.1	<i>Forças nodais equivalentes para carregamento na superfície</i>	79
4.6.2	<i>Forças nodais equivalentes para esforço concentrado</i>	83
5	ASPECTOS COMPUTACIONAIS	87
5.1	GENERALIDADES	87
5.2	MONTAGEM DO SISTEMA DE EQUAÇÕES	87
5.2.1	<i>Processo de expansão e acumulação</i>	88
5.2.2	<i>Armazenamento computacional da matriz de rigidez</i>	88
5.3	CONDIÇÕES DE CONTORNO	88
5.4	SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES	89
5.5	ESQUEMA GERAL DE CÁLCULO	90
5.5.1	<i>Descrição das sub-rotinas</i>	94
6	ANÁLISE NUMÉRICA	100
6.1	GENERALIDADES	100
6.2	EXEMPLO 1 – ANÁLISE ESTÁTICA DA PLACA QUADRADA COM CARGA DISTRIBUÍDA	101

6.3	EXEMPLO 2 – PLACA QUADRADA COM CARGA CONCENTRADA EM SEU PONTO CENTRAL	111
6.3.1	Análise estática	112
6.3.1.1	<i>Todas as bordas simplesmente apoiadas na altura média da placa e todas as bordas engastadas</i>	112
6.3.1.2	<i>Todas as bordas simplesmente apoiadas na base da placa</i>	131
6.3.1.3	<i>Todas as bordas simplesmente apoiadas na altura média e na base da placa</i>	134
6.3.1.4	<i>Carregamento incremental considerando-se todas as bordas engastadas</i>	143
6.3.2	Análise dinâmica	144
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	149
7.1	CONCLUSÕES	149
7.2	PROPOSTA DE DESENVOLVIMENTO	151
	REFERÊNCIAS	152

1 INTRODUÇÃO

1.1 TEMA E MOTIVAÇÃO

O objetivo do Engenheiro de Estruturas é determinar os esforços internos e os deslocamentos, que ocorrem em um sistema estrutural quando submetido a um carregamento arbitrário.

Quando as grandezas vetoriais dos esforços internos e deslocamentos do sistema estrutural forem invariantes no tempo, a análise estrutural é classificada como estática, como por exemplo, o peso próprio.

No entanto, se as ações dos carregamentos provocarem no sistema estrutural um comportamento onde as tensões e deformações variem com o tempo, a análise será classificada como dinâmica. Como exemplos de carregamentos que provoquem um comportamento estrutural dinâmico, podem ser citados: a incidência do vento nas edificações, a frenagem/aceleração/movimentação de veículos em pontes, o salto de pessoas em um estádio de futebol, o sismo, etc.

Os Métodos Analíticos Clássicos, através da solução das Equações Diferenciais, dentro das hipóteses adotadas, determinam a resposta exata dos esforços internos e dos deslocamentos da estrutura em seus infinitos pontos. Porém essas soluções são possíveis em sistemas estruturais de geometria simples. Em função da continuidade do cálculo analítico, os sistemas estruturais possuem um número infinito de graus de liberdade.

Para contornar tal dificuldade, o Método dos Elementos Finitos considera um sistema estrutural discreto, que contém um número finito de graus de liberdade. É realizada a divisão do modelo geométrico dos elementos estruturais em pequenas regiões, chamadas de elementos finitos, que são interconectadas entre si por meio de nós para formar o conjunto estrutural.

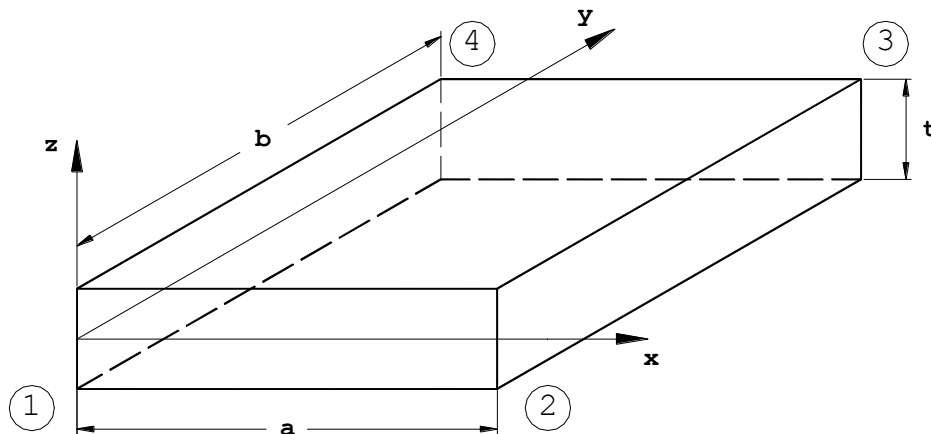
A precisão da solução do Método dos Elementos Finitos será função do tipo do elemento, da sua disposição e do número de elementos finitos a ser considerado na análise estrutural. Quanto maior for o número de elementos finitos maior será a precisão dos resultados gerados, como consequência, maior será o sistema discreto de equações a ser resolvido.

“Com a idealização do Método dos Elementos Finitos, que ocorreu na década de cinquenta com os trabalhos de Argyris e Kelsey, publicados em 1954, e de Turner et al. Publicado em 1956,” (RODRIGUES, 1997, p.1) e do desenvolvimento da informática ocorrido no final da década de 1980, principalmente em função do aumento da capacidade de armazenamento, gerenciamento e processamento de dados, apresentados pelos computadores de pequeno porte, proporcionou ao Engenheiro de Estruturas a aplicação do Método dos Elementos Finitos em

programas computacionais, com geração de modelos mais refinados, proporcionando maior segurança e menor custo aos projetos estruturais.

Neste contexto, em janeiro de 2004 foi apresentado na dissertação de Waidemam (2004) a análise estrutural dinâmica de placas delgadas, utilizando-se elemento finito de placa retangular. As figuras 1 e 2 apresentam tal elemento.

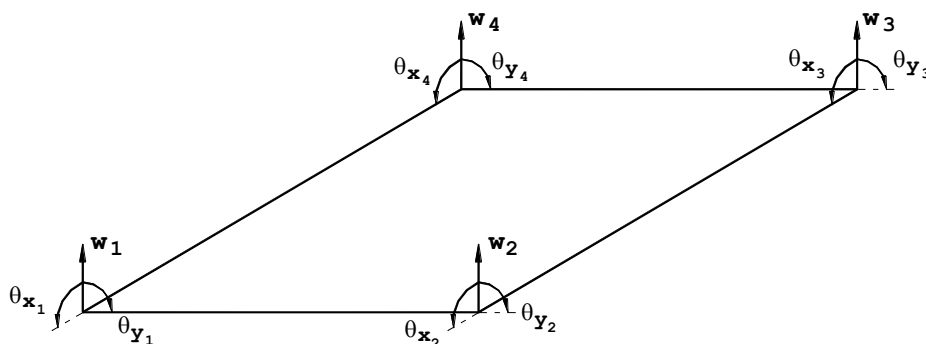
Figura 1 – Elemento finito de placa retangular



Fonte: (WAIDEMAM, 2004, p. 61).

Devido à espessura “t” ser muito menor do que as outras duas dimensões “a” e “b”, o elemento finito de placa retangular é classificado como elemento finito laminar.

Figura 2 – Graus de liberdade do elemento finito de placa retangular



Fonte: (WAIDEMAM, 2004, p. 61).

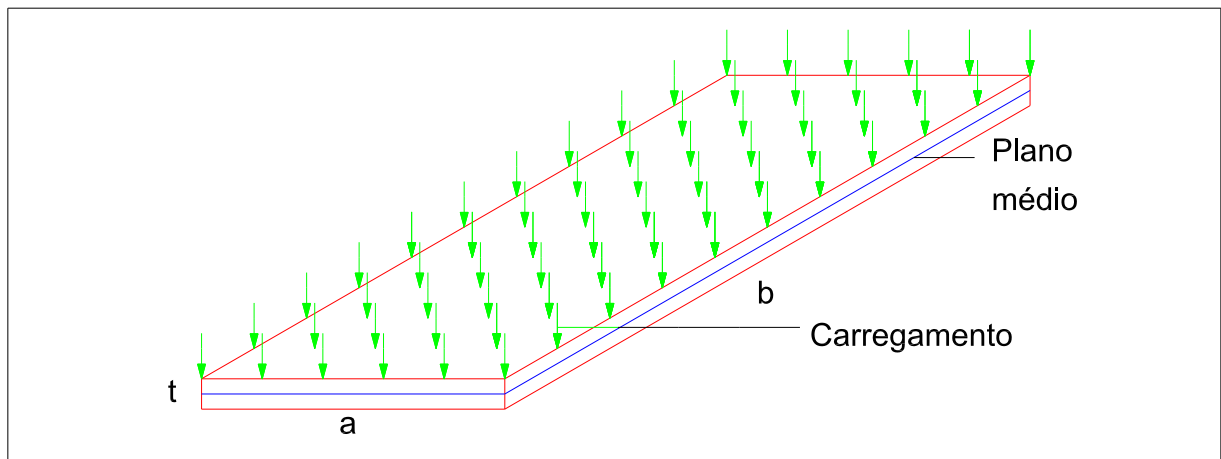
Neste trabalho será apresentado a análise estrutural linear estática e dinâmica de placas, com a utilização do elemento finito prismático regular linear. Os resultados determinados neste trabalho serão comparados com os de Waidemam

(2004), para validação e comparação das respostas determinadas pelos diferentes elementos finitos.

Segundo Martinelli et al. (1986) as placas são elementos estruturais simétricos em relação a um plano médio, cuja dimensão normal a esse plano, chamada de espessura, é pequena em relação às demais. As placas têm a particularidade de serem solicitadas por esforços externos normais ao plano médio.

A figura 3 ilustra uma placa com carregamento perpendicular ao seu plano médio.

Figura 3 – Placa com carregamento perpendicular ao seu plano médio



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Em Martinelli et al. (1986) as placas são classificadas de acordo com a relação “ t/a ”, onde “ t ” é a espessura e “ a ” é o menor dos vãos da placa:

- Espessas: $t/a > 1/5$;
- Delgadas: $1/5 \geq t/a \geq 1/100$;
- Muito delgadas: $t/a < 1/100$.

Consta em (VAZ, 2011, item 7.2) que o parâmetro $r=a/t$ classifica a placa em:

- Delgadas: $r \geq 20$;
- Espessas: $r < 20$.

Para formar uma biblioteca de softwares para análise estrutural, será desenvolvido um programa computacional em linguagem MATLAB, que contemple as análises estática e dinâmica de placas com comportamento linear, permitindo sempre que possível realizar a comparação do comportamento estático e dinâmico de tais sistemas estruturais.

1.2 OBJETIVO

O elemento finito prismático regular linear será aplicado na análise linear estática e dinâmica de placas. O objetivo deste trabalho é analisar a eficiência do elemento finito prismático regular linear, em comparação ao elemento finito de placa retangular desenvolvido por Waidemam (2004).

1.3 APRESENTAÇÃO

Neste capítulo procura-se apresentar uma visão geral de todo o trabalho, descrevendo-se para isso, tema e motivação, o objetivo do trabalho e finalizando com uma descrição sucinta dos capítulos subsequentes.

No capítulo 2 é apresentada a equação geral do movimento via método dos elementos finitos, para análise linear estática e dinâmica.

No capítulo 3 apresentam-se as equações de Newmark para integração numérica ao longo do tempo, e o algoritmo numérico a ser usado para resolução do processo de integração da equação do movimento.

No capítulo 4 é apresentado o elemento finito prismático regular linear, com a apresentação de sua matriz de rigidez, com a determinação de sua matriz de massa, forças nodais equivalentes para os carregamentos concentrado e distribuído, e também de sua matriz de amortecimento com a utilização do Método de Amortecimento Rayleigh.

No capítulo 5 são apresentados os aspectos computacionais relativos ao programa computacional desenvolvido, com o esquema geral de cálculo e a descrição das sub-rotinas.

No capítulo 6 são apresentados exemplos relativos à análise linear estática e dinâmica de placas.

No capítulo 7 são apresentadas as conclusões do trabalho e propostas para desenvolvimento em trabalhos futuros.

2 EQUAÇÃO GERAL DO MOVIMENTO VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

A análise estrutural linear é proveniente da manutenção da geometria inicial, como referência para a verificação do equilíbrio, e da manutenção das propriedades físicas específicas do material da estrutura.

O objetivo principal da análise estática é quantificar a magnitude dos esforços internos e dos deslocamentos, que se manifestam em qualquer sistema estrutural, quando o mesmo é submetido a um carregamento arbitrário, cuja intensidade direção ou sentido não variem com o tempo. A aplicação do carregamento na estrutura deve ser de forma lenta e gradual, de modo que provoque no sistema estrutural um comportamento onde as tensões e deformações não variem com o tempo.

A análise estrutural dinâmica tem por objetivo determinar a magnitude dos esforços internos, das velocidades, das acelerações e dos deslocamentos que ocorrem em um sistema estrutural, quando o mesmo é submetido a um carregamento arbitrário, cuja intensidade, direção ou sentido variem com o tempo. Ou quando o carregamento for invariante no tempo, mas aplicado no sistema estrutural de forma rápida, gerando vibrações na estrutura. Em função da variação dos resultados no tempo, o Engenheiro de Estruturas tem como objetivo principal determinar o “histórico de resposta”.

A obtenção do histórico dos deslocamentos será dado pela utilização de sistemas discretos, que envolve um número limitado de graus de liberdade.

As expressões matemáticas que definem os deslocamentos dinâmicos são chamadas de equações do movimento da estrutura, e a sua solução fornece o exigido histórico dos deslocamentos.

As forças que envolvem uma análise estrutural dinâmica são classificadas em: esforços externos, forças restauradoras, forças dissipativas e forças de inércia.

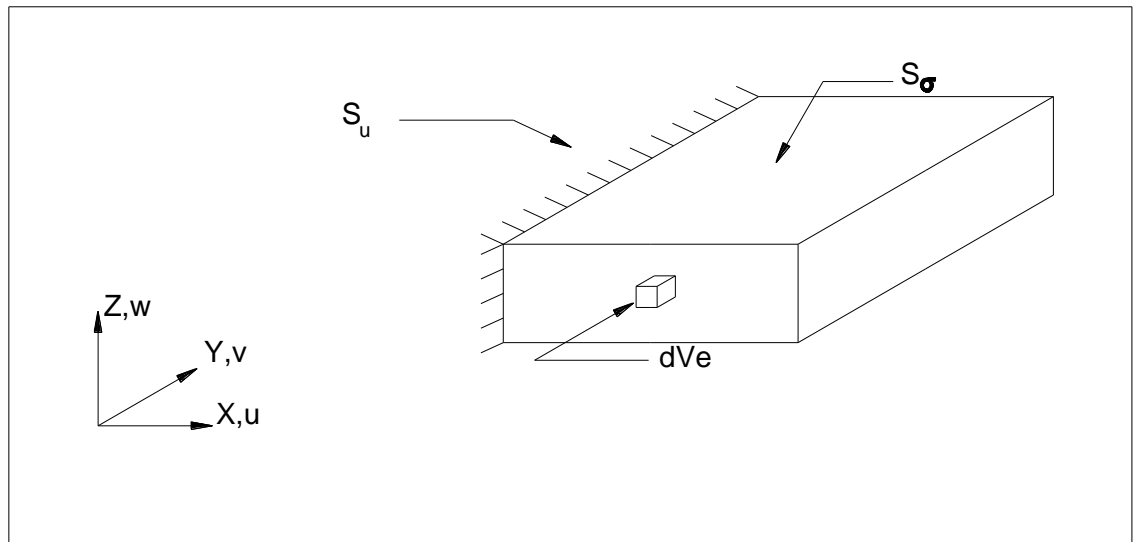
2.1 CONCEITOS DA MECÂNICA DOS SÓLIDOS DEFORMÁVEIS

A Mecânica dos Sólidos Deformáveis tem por finalidade a determinação dos campos de tensões, deformações e deslocamentos no interior de um sólido genérico, sujeito a uma solicitação qualquer.

2.1.1 Solicitações atuantes em um sistema estrutural devidas ao meio externo

Dado um sistema estrutural arbitrário conforme ilustra a figura 4, pode-se isolar um cubo infinitesimal com volume “ dV_e ” de qualquer parte do sistema.

Figura 4 – Sistema estrutural arbitrário



Fonte: (WAIDEMAM, 2004, p.12).

O sistema estrutural está referido a um sistema triortogonal de eixos globais “ (X,Y,Z) ”, sendo “ u ”, “ v ” e “ w ” as componentes de um deslocamento qualquer nas direções “ X ”, “ Y ” e “ Z ” respectivamente. Organizando-se na forma matricial, tem-se:

$$\underset{\sim}{u}^T = \{u \quad v \quad w\} \quad (1)$$

Sendo que tais componentes de deslocamento são funções dependentes do sistema de coordenadas, e expressas por “ $u=u(X,Y,Z)$ ”, “ $v=v(X,Y,Z)$ ” e “ $w=w(X,Y,Z)$ ”.

O volume total do sistema estrutural é definido pela letra “ V ” e o volume de cada elemento é definido por “ V_e ”. Já a superfície do sistema é definida pela letra “ S ”, sendo essa subdividida em:

- Superfície na qual os deslocamentos são conhecidos “ S_u ”;
- Superfície na qual os esforços atuantes são conhecidos “ S_σ ”.

2.1.1.1 Esforços volumétricos

Os esforços volumétricos são aplicados em todos os pontos do material, e tem dimensão de força por unidade de volume. Em geral são provenientes do campo gravitacional, mas também podem ser provocados por campos magnéticos, elétricos, etc. Em cada elemento diferencial de volume “ dV_e ” atuam as componentes dos esforços volumétricos, que organizadas na forma matricial resultam:

$$\underset{\sim V_e}{\mathbf{p}}^T = \{V_x \ V_y \ V_z\} \quad (2)$$

2.1.1.2 Esforços superficiais

Os esforços superficiais são aplicados de forma distribuída nas superfícies externas dos elementos, e tem dimensão de força por unidade de área. Esses podem ser provenientes da ação do vento, da sobrecarga, etc. Logo, sobre cada elemento diferencial com área externa “ dS_u ” atuam as componentes dos esforços superficiais, que organizadas na forma matricial resultam em:

$$\underset{\sim S_e}{\mathbf{p}}^T = \{S_x \ S_y \ S_z\} \quad (3)$$

2.1.1.3 Esforços concentrados

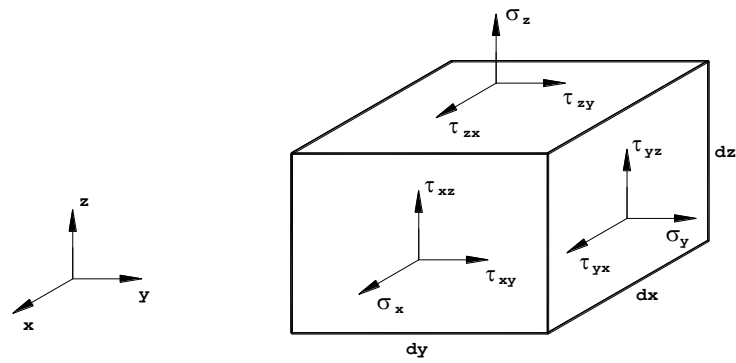
Os esforços concentrados são geralmente aplicados nos nós dos elementos e têm dimensão de força e de força vezes unidade métrica, pois os momentos são incluídos nesta categoria de esforço. Esses podem ser provenientes das reações das vigas ou pilares, carregamentos pontuais, etc. Sobre cada nó de um elemento finito atuam as componentes dos esforços concentrados, que organizadas na forma matricial resultam:

$$\underset{\sim C}{\mathbf{p}}^T = \{C_x \ C_y \ C_z\} \quad (4)$$

2.1.2 Tensores de tensões e deformações

Tensão é definida pela relação da força por unidade de área, com a componente na direção perpendicular à seção transversal, chamada de tensão normal, e com a componente contida no plano, chamada de tensão tangencial ou cisalhante, conforme ilustra a figura 5.

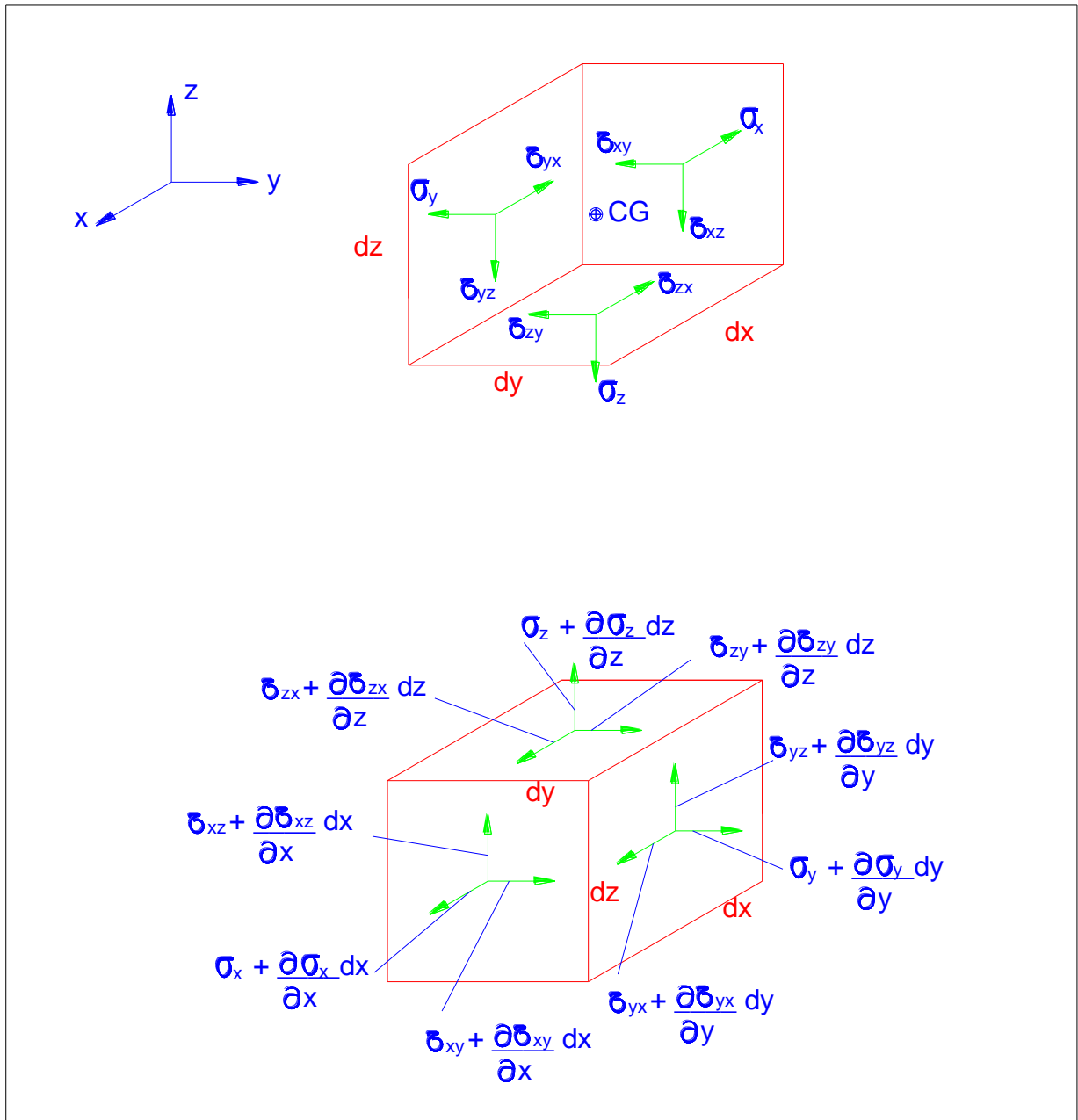
Figura 5 - Tensões atuantes em um cubo infinitesimal



Fonte: (WAIDEMAM, 2004, p.17).

Seja o elemento infinitesimal do sólido dado pela figura 6, onde atuam as componentes da força volumétrica V_x, V_y, V_z no CG do elemento.

Figura 6 – Elemento infinitesimal do sólido com variação de tensões em suas faces



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Admitindo-se que a tensão é uniformemente distribuída na face, a força e o momento fletor podem ser expressos por:

$$F = \sigma \cdot A \quad (5)$$

$$M = \sigma \cdot A \cdot d \quad (6)$$

Aplicando-se $\sum \mathbf{M}_z = 0$ no CG, onde \mathbf{M}_z é o momento fletor que ocorre em torno do eixo z:

$$\left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dy \cdot dz \cdot \frac{dx}{2} + \tau_{xy} dy \cdot dz \cdot \frac{dx}{2} - \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx \cdot dz \cdot \frac{dy}{2} - \tau_{yx} dx \cdot dz \cdot \frac{dy}{2} = 0 \quad (7)$$

Desprezando os termos :

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dy \cdot dz \cdot \frac{dx^2}{2} \quad ; \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dx \cdot dz \cdot \frac{dy^2}{2} \quad , \text{ a equação (7) resulta:}$$

$$\tau_{xy} dy \cdot dz \cdot dx = \tau_{yx} dx \cdot dz \cdot dy$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (8)$$

Aplicando-se $\sum \mathbf{M}_y = 0$ no CG, por analogia ao processo que resultou na expressão (8):

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} \quad (9)$$

Aplicando-se $\sum \mathbf{M}_x = 0$ no CG, e também analogamente ao processo que determinou à equação (8):

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (10)$$

O teorema de Cauchy é representado pelas expressões (8), (9) e (10), e representa a simetria das tensões cisalhantes.

Considerando o teorema de Cauchy, dado por (8), (9) e (10), o tensor das tensões é expresso em função das suas componentes nas direções dos eixos locais “x”, “y” e “z” como segue:

$$\underset{\sim}{\sigma}^T = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z & \tau_{xy} & \tau_{xz} & \tau_{yz} \end{bmatrix} \quad (11)$$

No caso das deformações, a variação do comprimento que ocorre em uma fibra qualquer por unidade de comprimento é chamada de deformação linear ou específica, e a variação dos ângulos retos iniciais entre as linhas imaginárias do sólido é chamada de deformação tangencial ou cisalhante. Pode-se explicitar as componentes do tensor das deformações como segue:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^T = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} & \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad (12)$$

2.1.3 Equações de equilíbrio de um sólido

Será realizado o equilíbrio das forças no elemento infinitesimal do sólido representado pela figura 6, onde atuam as componentes da força volumétrica V_x, V_y, V_z no CG do elemento. Aplicando-se $\sum \mathbf{F}_x = \mathbf{0}$:

$$\begin{aligned} & + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy \cdot dz - \sigma_x dy \cdot dz + \\ & + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx \cdot dz - \tau_{yx} dx \cdot dz + \\ & + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx \cdot dy - \tau_{zx} dx \cdot dy + \\ & + V_x dx \cdot dy \cdot dz = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Aplicando o Teorema de Cauchy com as expressões (8) e (9) e dividindo por $dx \cdot dy \cdot dz$ na expressão (13):

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + V_x = 0 \quad (14)$$

Aplicando as leis de equilíbrio das forças nas outras duas direções ($\sum \mathbf{F}_y = 0$; $\sum \mathbf{F}_z = 0$), e por analogia ao processo que resultou na equação (14), são obtidas as outras duas equações de equilíbrio:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + V_y = 0 \quad (15)$$

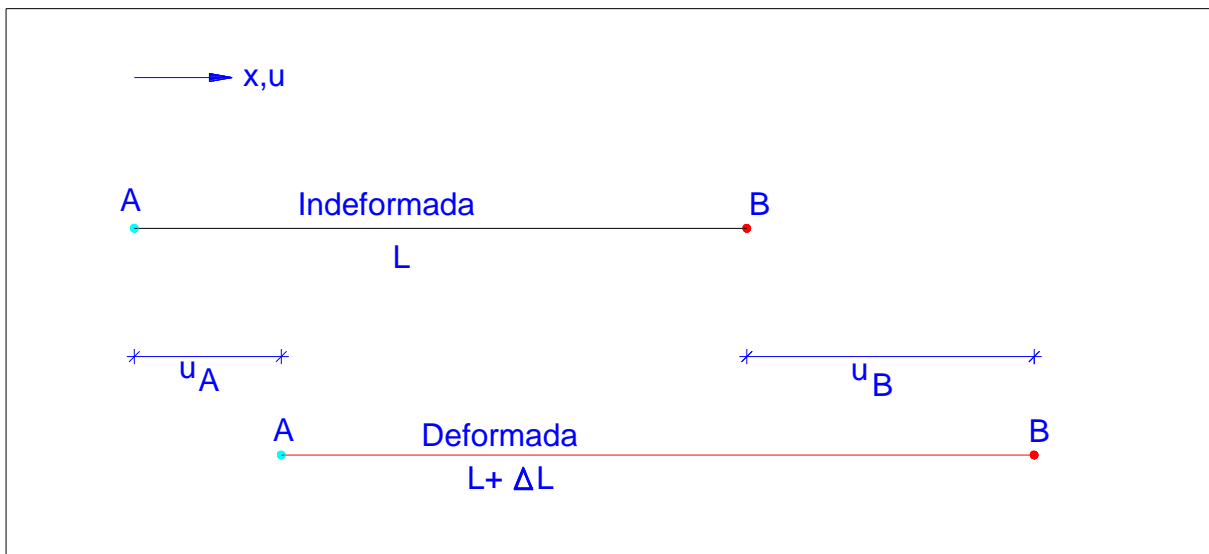
$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + V_z = 0 \quad (16)$$

2.1.4 Relações cinemáticas

A deformação linear é definida como a variação do comprimento que ocorre em uma fibra qualquer por unidade de comprimento. Para o caso do elemento linear, a deformação linear é representada pela expressão (17) e pela figura 7:

$$\epsilon_x = \frac{\Delta L}{L} \quad (17)$$

Figura 7 - Deformação linear do elemento linear



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Através da figura 7 é escrita a seguinte equação:

$$L + \Delta L = L + u_B - u_A$$

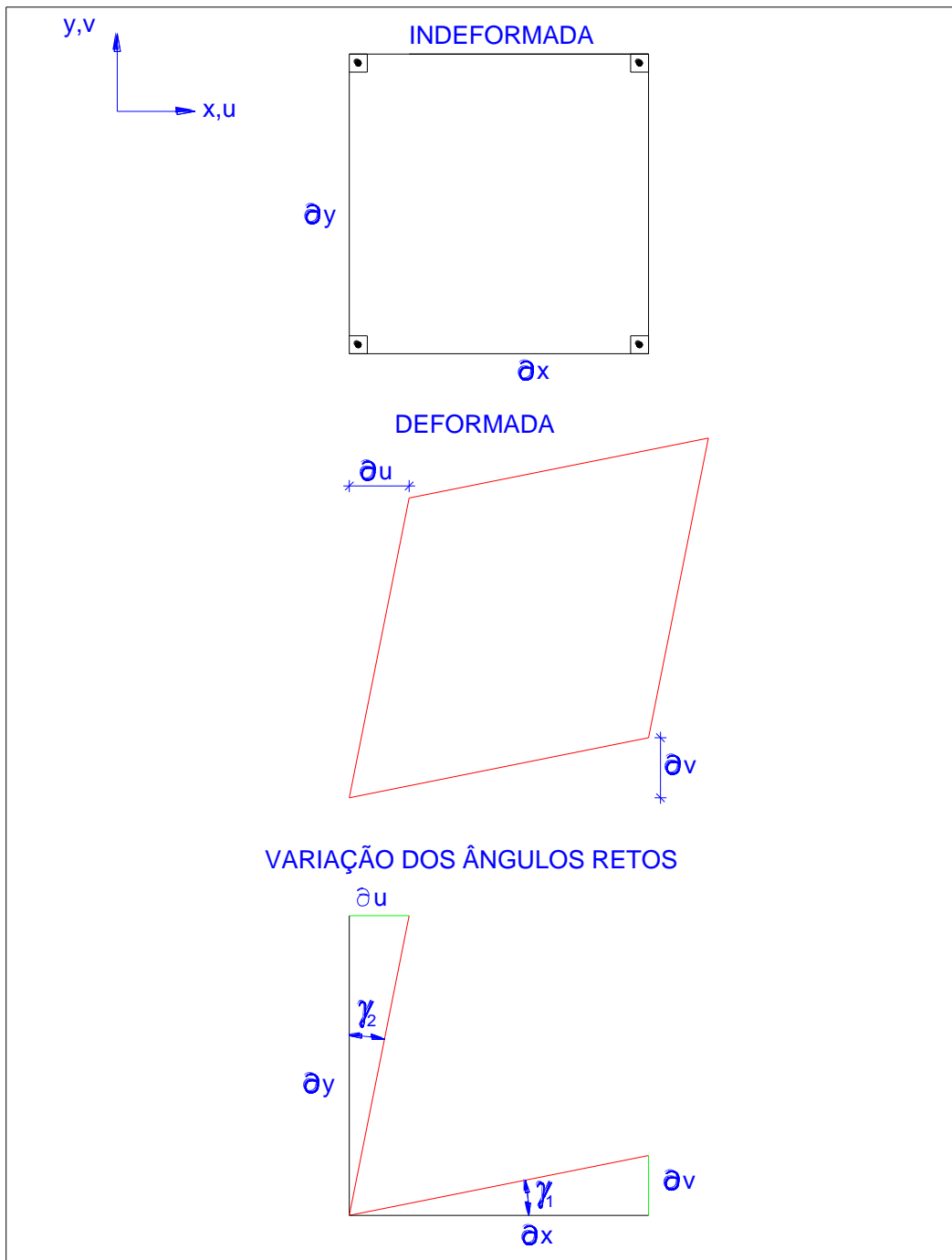
$$\Delta L = u_B - u_A \quad (18)$$

Substituindo a equação (18) em (17):

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L} = \frac{u_B - u_A}{L} \quad (19)$$

A deformação cisalhante é a variação dos ângulos retos iniciais entre as linhas imaginárias do sólido. A figura 8 representa a deformação cisalhante de um elemento infinitesimal no plano.

Figura 8 - Deformação cisalhante de um elemento infinitesimal no plano



Com o auxílio da figura 8 as variações dos ângulos retos são dadas por:

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\operatorname{tg} \gamma_2 = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Para ângulos pequenos: $\operatorname{tg} \gamma_1 = \gamma_1$

$$\gamma_{xy} = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (20)$$

No estudo da deformação de um sólido elástico será presumido que há restrições, para impedir seu deslocamento como corpo rígido, de tal forma que nenhum deslocamento de partículas do sólido seja possível sem que este sofra uma deformação. Com base nas expressões (19) e (20), considerando o caso linear geométrico com pequenas deformações, a relação entre deformações e deslocamentos possa ser expressa nas expressões seguintes:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (21)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

Colocando-se as equações (21) na forma matricial, obtém-se a seguinte equação:

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{L} \underset{\sim}{u} \quad (22)$$

onde “ $\underset{\sim}{L}$ ” é a matriz que contém os operadores diferenciais, dada por:

$$\underset{\sim}{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (23)$$

2.1.5 Relações constitutivas

As equações que definem a relação entre tensão e deformação são chamadas de relações constitutivas.

Admitindo-se que o material tenha comportamento elástico linear e seja isotrópico, essas equações são dadas pela Lei de Hooke generalizada:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{xz} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xz} \\ \gamma_{yz} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{yz}\end{aligned}\quad (24)$$

onde “ E ” e “ ν ” são características físicas do material, denominadas respectivamente por módulo de elasticidade longitudinal e coeficiente de Poisson.

Organizando-se as equações (24) na forma matricial, obtém-se a seguinte equação:

$$\begin{matrix} \sigma \\ \sim \\ \sim \end{matrix} = \begin{matrix} E \\ \sim \\ \sim \end{matrix} \varepsilon \quad (25)$$

onde “ E ” é a matriz que contém os coeficientes elásticos do material da estrutura, expressa pela relação mostrada a seguir:

$$\begin{matrix} E \\ \sim \\ \sim \end{matrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (26)$$

2.1.6 Condições de contorno

A primeira condição de contorno do sistema estrutural é dada em função da vinculação do sólido com o meio externo, sendo conhecidos os valores dos deslocamentos na superfície “ S_u ” ilustrada pela figura 4:

$$u = \bar{u}(X, Y, Z) \quad (27)$$

$$v = \bar{v}(X, Y, Z) \quad (28)$$

$$w = \bar{w}(X, Y, Z) \quad (29)$$

A segunda condição de contorno é dada em função do carregamento externo aplicado, sendo conhecidos os valores dos esforços atuantes na superfície “ S_σ ” ilustrada pela figura 4.

2.1.7 Resolução do problema

Para a determinação das 15 funções incógnitas formadas por 3 deslocamentos (1), 6 tensões (11) e 6 deformações (12) de um sólido genérico, efetua-se a imposição das condições de contorno na resolução do sistema formado por 15 equações:

Equações de equilíbrio (14), (15) e (16) compõem 3 equações;

Relações cinemáticas (22) formam 6 equações;

Relações constitutivas (25) constituem 6 equações.

Uma vez resolvido o problema obtém-se funções matemáticas que descrevem o comportamento estrutural do sistema analisado. Porém as soluções completas obtidas utilizando-se tal procedimento são pouco numerosas. Neste contexto, o Método dos Elementos Finitos constitui-se um método direto geral, embora numérico, que possibilita a solução de problemas da Mecânica das Estruturas.

2.2 BASE DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

A ideia básica do Método dos Elementos Finitos é dividir uma região do sólido em elementos finitos, que são relacionados uns com os outros, através de um número discreto de pontos comuns distribuídos no contorno, denominados nós. O comportamento estrutural de cada elemento é definido através de funções com variáveis nodais, tais como: coordenadas, deslocamentos e carregamentos.

Efetuando-se tal procedimento, os deslocamentos “ \tilde{u} ” de um elemento finito podem ser escritos em função dos deslocamentos nodais “ \tilde{d} ”, através da utilização de funções de forma apropriadas. Essa relação matricial é definida por:

$$\tilde{u} = \phi \tilde{d} \quad (30)$$

onde “ ϕ ” é a matriz que contém as funções de forma, e relaciona os deslocamentos que ocorrem ao longo do interior do elemento com os seus pontos nodais.

Derivando-se tal equação em relação ao tempo, obtêm-se as seguintes relações básicas:

$$\underset{\sim}{\dot{u}} = \underset{\sim}{\phi} \underset{\sim}{\dot{d}} \quad (31)$$

$$\underset{\sim}{\ddot{u}} = \underset{\sim}{\phi} \underset{\sim}{\ddot{d}} \quad (32)$$

Substituindo-se a equação (30) na equação (22), obtêm-se:

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{L} \underset{\sim}{u}$$

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{L} \underset{\sim}{\phi} \underset{\sim}{d}$$

Definindo:

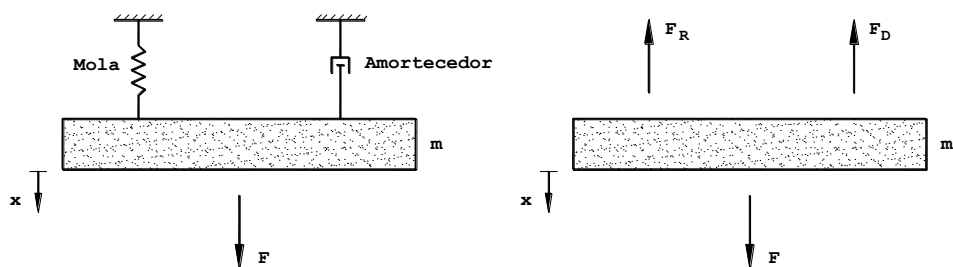
$$\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{L} \underset{\sim}{\phi} \quad (33)$$

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{B} \underset{\sim}{d} \quad (34)$$

2.3 TRABALHOS VIRTUAIS PROVENIENTES DE FORÇAS QUE ENVOLVEM UMA ANÁLISE ESTRUTURAL DINÂMICA

Com a ação dos esforços externos, um elemento estrutural desenvolve esforços internos que atuam em oposição à ação aplicada. Esses esforços podem ser representados pelo modelo reológico ilustrado pela figura 9.

Figura 9 - Modelo reológico



Fonte: (WAIDEMAM, 2004, p.10).

As forças restauradoras no modelo, representadas por uma mola, surgem com o propósito de restaurar a estrutura no seu estado inicial de equilíbrio.

Por analogia, as forças dissipadoras estão representadas por um amortecedor, que surgem com o propósito de dissipar a energia do sistema estrutural real.

Os trabalhos virtuais serão obtidos pela multiplicação das forças por um deslocamento virtual.

2.3.1 Trabalhos virtuais no elemento estrutural devido ao meio externo

A força que atua no elemento de volume “Ve” proveniente dos esforços volumétricos é dada por:

$$F_{\sim Ve} = \int_{Ve \sim Ve} p \, dve \quad (35)$$

A força que atua na superfície “Se” proveniente dos esforços superficiais é representada pela expressão:

$$F_{\sim Se} = \int_{Se \sim Se} p \, dse \quad (36)$$

O total dos esforços concentrados atuantes no elemento estrutural é escrito na forma:

$$F_{\sim C} = \sum_{i \sim Ci}^{nc} p \quad (37)$$

onde “nc” é o número de cargas aplicadas nos pontos nodais do elemento.

Para obter-se o total dos esforços externos que atuam no elemento estrutural, é necessário somar as parcelas dos esforços volumétricos (35), esforços superficiais (36) e os esforços concentrados (37).

$$\sum_j^n F(t) = F_{\sim Ve} + F_{\sim Se} + F_{\sim C}$$

$$\sum_j^n F(t)_{\sim j} = \int_{Ve_{\sim}} p_{\sim} dve + \int_{Se_{\sim}} p_{\sim} dse + \sum_i^{nc} p_{\sim Ci} \quad (38)$$

Os trabalhos virtuais realizados pelos esforços externos são obtidos multiplicando-se o total dos esforços (38) por um deslocamento virtual δu_{\sim}^T .

$$\sum_j^n \delta u_{\sim}^T F(t)_{\sim j} = \int_{Ve_{\sim}} \delta u_{\sim}^T p_{\sim} dve + \int_{Se_{\sim}} \delta u_{\sim}^T p_{\sim} dse + \sum_i^{nc} \delta u_{\sim}^T p_{\sim Ci} \quad (39)$$

2.3.2 Trabalhos virtuais das forças restauradoras

As forças restauradoras podem ser entendidas como sendo a reação interna do sistema estrutural à ação de um carregamento externo.

Para a obtenção de tais forças, inicialmente considera-se o elemento genérico extraído do sistema estrutural. Efetuando-se um corte perpendicular ao seu eixo, devem aparecer forças que traduzem a ação nas partes separadas, para que essas continuem em equilíbrio. Essas forças estão distribuídas sobre toda a seção transversal, sendo que a força por unidade de área é denominada tensão.

As forças restauradoras podem ser obtidas fazendo-se o produto das tensões pelas respectivas áreas de atuação. Sendo assim tem-se:

$$p_x = \sigma_x \cdot dy \cdot dz \quad (40)$$

$$p_{xy} = \tau_{xy} \cdot dy \cdot dz$$

De modo análogo pode-se chegar à contribuição das demais componentes das tensões normais e tangenciais.

O trabalho virtual é dado pelo produto da força pelo deslocamento virtual imposto.

$$\delta W_x = \sigma_x \cdot dy \cdot dz \cdot \delta u_x \quad (41)$$

onde " δu_x " é a componente do deslocamento virtual na direção "x".

Mas:

$$\delta\varepsilon_x = \frac{\delta u_x}{dx} \Rightarrow \delta u_x = \delta\varepsilon_x \cdot dx \quad (42)$$

Dessa forma obtém-se o trabalho virtual realizado pela parcela “ σ_x ” das tensões normais, com a substituição de (42) em (41):

$$\delta W_x = \sigma_x \cdot dy \cdot dz \cdot \delta\varepsilon_x \cdot dx \quad (43)$$

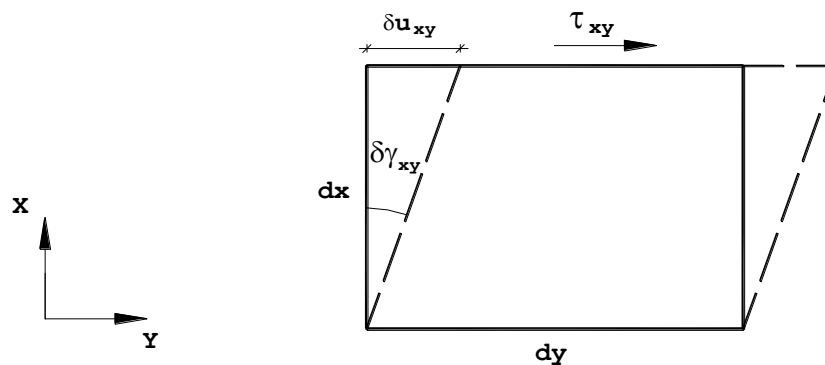
De modo análogo chega-se à contribuição das demais parcelas das tensões normais.

Do mesmo modo pode-se quantificar o trabalho virtual realizado pela parcela “ τ_{xy} ” das tensões tangenciais. Assim tem-se:

$$\delta W_{xy} = \tau_{xy} \cdot dy \cdot dz \cdot \delta u_{xy} \quad (44)$$

onde “ δu_{xy} ” é a componente do deslocamento virtual no plano “ xy ”.

Figura 10 – Deformação tangencial provocada por um deslocamento virtual



Fonte: (WAIDEMAM, 2004, p.19).

Assim:

$$\operatorname{tg} \delta\gamma_{xy} = \frac{\delta u_{xy}}{dx} \Rightarrow \delta u_{xy} = \delta\gamma_{xy} dx \quad (45)$$

Dessa forma o trabalho virtual realizado pela parcela “ τ_{xy} ” das tensões tangenciais é obtido substituindo (45) em (44):

$$\delta W_{xy} = \tau_{xy} \cdot dy \cdot dz \cdot \delta \gamma_{xy} \cdot dx \quad (46)$$

Analogamente obtém-se a contribuição das demais parcelas das tensões tangenciais.

Por superposição dos efeitos, chega-se à equação do trabalho virtual total realizado pelas forças restauradoras em todo o volume, através da seguinte equação:

$$\delta W = \int_{V_e} \delta \varepsilon^T \sigma \cdot dV_e \quad (47)$$

onde as parcelas das tensões estão organizadas no tensor “ σ ” e as deformações virtuais pelo tensor “ $\delta \varepsilon^T$ ”.

Substituindo as equações (25) e (34) na equação (47):

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_{V_e} \delta \varepsilon^T E \varepsilon dV_e \\ \delta W &= \int_{V_e} \delta B^T d^T E B d dV_e \end{aligned} \quad (48)$$

Fazendo um rearranjo da equação (48) são determinados os trabalhos virtuais provenientes das forças restauradoras:

$$\sum_j^n \delta u_j^T FR_j = \int_{V_e} \delta d^T B^T E B d dV_e \quad (49)$$

2.3.3 Trabalhos virtuais das forças inerciais

Considerando-se o cubo infinitesimal de volume “ dV_e ”, cuja densidade específica é “ ρ ”, seja acelerado nas direções “ X ”, “ Y ” e “ Z ”, então as forças inerciais podem ser obtidas pela segunda lei de Newton.

Desse modo as forças inerciais por unidade de volume, nas direções das coordenadas “ X ”, “ Y ” e “ Z ”, são dadas na forma matricial por:

$$p_I = \rho(x, y, z) \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \\ \ddot{w} \end{Bmatrix} = \rho \ddot{u} \quad (50)$$

As forças inerciais atuantes no elemento infinitesimal são aplicadas no contorno, que define o elemento como um todo. Logo a estrutura sofre uma distribuição de forças na direção oposta ao vetor da aceleração “ \ddot{u} ” do elemento, fazendo com que as forças inerciais tenham sentido contrário à direção do movimento.

Para obter os trabalhos virtuais provocados pelas forças inerciais, é necessário fazer o produto das forças inerciais pelo deslocamento virtual $\delta \tilde{u}^T$, e também substituindo a equação (32) na equação (50):

$$\begin{aligned} \tilde{p}_I &= \rho \phi \tilde{d}'' \\ \sum_j^n \delta \tilde{u}_j^T m_j \tilde{u}'' &= \int_{Ve} \delta \tilde{d}^T \phi^T \rho \phi \tilde{d}'' dVe \end{aligned} \quad (51)$$

2.3.4 Trabalhos virtuais das forças dissipativas

A formulação consistente de um mecanismo que considere as forças dissipativas é de difícil elaboração, visto que tais forças podem ser oriundas do arrasto aerodinâmico e da fricção interna que ocorre no interior do material estrutural. Essa dissipação de energia se dá geralmente na forma de calor e/ou som, fazendo com que a amplitude da vibração diminua ao longo do tempo.

Em face dessa dificuldade, de uma forma bastante simplista, considera-se que todos os elementos do sistema estrutural estejam submetidos aos efeitos de um amortecimento viscoso uniformemente distribuído, de tal forma que as forças dissipativas por unidade de volume, nas direções das coordenadas “X”, “Y” e “Z”, possam ser definidas pela equação (52), e depois é realizada a substituição da equação (31) em (52):

$$\tilde{p}_D = \mu(x,y,z) \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{Bmatrix} = \mu \dot{\tilde{u}} \quad (52)$$

$$\tilde{p}_D = \mu \phi \tilde{d}' \quad (53)$$

onde “ μ ” é o parâmetro de amortecimento viscoso do material estrutural.

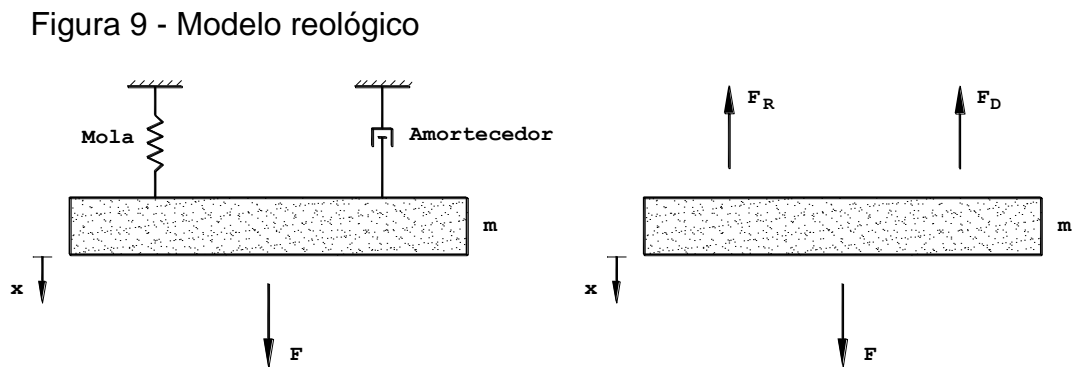
Como o elemento infinitesimal se move com uma velocidade “ \dot{u} ” em uma dada direção, então as forças dissipativas serão aplicadas na direção oposta ao sentido do movimento do mesmo.

Para determinar os trabalhos virtuais, devidos às forças dissipativas, é necessário fazer o produto das forças dissipativas pelo deslocamento virtual $\delta \tilde{u}^T$.

$$\sum_j^n \delta \tilde{u}^T F D_j = \int_{Ve} \delta \tilde{d}^T \phi^T \mu \phi \tilde{d}^{\bullet} dVe \quad (54)$$

2.4 EQUAÇÃO GERAL DO MOVIMENTO

A segunda Lei de Newton afirma que o somatório das forças que atuam sobre um corpo de massa “M” em movimento é igual à força de inércia. Aplicando a segunda Lei de Newton no Modelo reológico abaixo é possível escrever:



Fonte: (WAIDEMAM, 2004, p.10).

$$\sum_j^n F_j(t) - \sum_j^n F_{R_j} - \sum_j^n F_{D_j} = \sum_j^n m_j \ddot{u}_j$$

Multiplicando-se um deslocamento virtual infinitesimal “ $\delta \tilde{u}^T$ ” na equação obtém-se:

$$\sum_j^n \delta \tilde{u}^T F_j(t) - \sum_j^n \delta \tilde{u}^T FR_j - \sum_j^n \delta \tilde{u}^T FD_j = \sum_j^n \delta \tilde{u}^T m_j \ddot{u}^{\bullet\bullet}_j$$

$$\sum_j^n \delta \tilde{u}^T F_j(t) = \sum_j^n \delta \tilde{u}^T FR_j + \sum_j^n \delta \tilde{u}^T FD_j + \sum_j^n \delta \tilde{u}^T m_j \ddot{u}^{\bullet\bullet}_j \quad (55)$$

Substituindo as equações (39), (49), (51), (54) na equação (55) resulta:

$$\int_{V_e} \delta \tilde{u}^T \tilde{p} \, dve + \int_{S_e} \delta \tilde{u}^T \tilde{p} \, dse + \sum_i^{nc} \delta \tilde{u}^T_i \tilde{p} =$$

$$= \int_{V_e} \delta \tilde{d}^T \tilde{B}^T \tilde{E} \tilde{B} \tilde{d} \, dVe + \int_{V_e} \delta \tilde{d}^T \tilde{\phi}^T \tilde{\mu} \tilde{\phi} \tilde{d}^{\bullet} \, dve + \int_{V_e} \delta \tilde{d}^T \tilde{\phi}^T \tilde{\rho} \tilde{\phi} \tilde{d}^{\bullet\bullet} \, dve \quad (56)$$

Substituindo a equação (30) na (56) resulta:

$$\int_{V_e} \delta \tilde{\phi}^T \tilde{d}^T \tilde{p} \, dve + \int_{S_e} \delta \tilde{\phi}^T \tilde{d}^T \tilde{p} \, dse + \sum_i^{nc} \delta \tilde{d}^T_i \tilde{\phi}^T \tilde{p} =$$

$$= \int_{V_e} \delta \tilde{d}^T \tilde{B}^T \tilde{E} \tilde{B} \tilde{d} \, dved + \int_{V_e} \delta \tilde{d}^T \tilde{\mu} \tilde{\phi}^T \tilde{\phi} \tilde{d} \, ved^{\bullet} + \int_{V_e} \delta \tilde{d}^T \tilde{\rho} \tilde{\phi}^T \tilde{\phi} \tilde{d} \, ved^{\bullet\bullet}$$

Colocando-se os deslocamentos virtuais em evidência, e rearranjando os termos da equação resulta:

$$\delta \tilde{d}^T \left\{ \int_{V_e} \tilde{\phi}^T \tilde{p} \, dve + \int_{S_e} \tilde{\phi}^T \tilde{p} \, dse + \sum_i^{nc} \tilde{\phi}^T_i \tilde{p} + \right.$$

$$\left. - \int_{V_e} \tilde{B}^T \tilde{E} \tilde{B} \tilde{d} \, ved - \int_{V_e} \tilde{\mu} \tilde{\phi}^T \tilde{\phi} \tilde{d} \, ved^{\bullet} - \int_{V_e} \tilde{\rho} \tilde{\phi}^T \tilde{\phi} \tilde{d} \, ved^{\bullet\bullet} \right\} = 0 \quad (57)$$

Como os deslocamentos virtuais são valores arbitrários, a equação (57) pode ser escrita:

$$\int_{V_e} \tilde{\phi}^T \tilde{p} \, dve + \int_{S_e} \tilde{\phi}^T \tilde{p} \, dse + \sum_i^{nc} \tilde{\phi}^T_i \tilde{p} =$$

$$+ \int_{V_e} \tilde{B}^T \tilde{E} \tilde{B} \tilde{d} \, ved + \int_{V_e} \tilde{\mu} \tilde{\phi}^T \tilde{\phi} \tilde{d} \, ved^{\bullet} + \int_{V_e} \tilde{\rho} \tilde{\phi}^T \tilde{\phi} \tilde{d} \, ved^{\bullet\bullet} \quad (58)$$

A expressão (58) é a equação do movimento de um elemento finito genérico, que escrito na forma simplificada resulta:

$$\tilde{m}\ddot{\tilde{d}} + \tilde{c}\dot{\tilde{d}} + \tilde{k}\tilde{d} = \tilde{f}_E(t) \quad (59)$$

onde:

$$\tilde{m} = \int_{V_e} \rho \tilde{\phi}^T \tilde{\phi} dV_e \quad (\text{matriz de massa do elemento}); \quad (60)$$

$$\tilde{c} = \int_{V_e} \mu \tilde{\phi}^T \tilde{\phi} dV_e \quad (\text{matriz de amortecimento do elemento}); \quad (61)$$

$$\tilde{k} = \int_{V_e} \tilde{B}^T E \tilde{B} dV_e \quad (\text{matriz de rigidez do elemento}); \quad (62)$$

$$\tilde{f}_E(t) = \int_{V_e} \tilde{\phi}^T p_{Ve} dV_e + \int_{S_e} \tilde{\phi}^T p_{Se} dS_e + \sum_i^{nc} \tilde{\phi}^T p_{Ci} \quad (\text{esforços externos}) \quad (63)$$

Para todo o sistema estrutural discreto, com as contribuições de todos os elementos, utiliza-se o processo de expansão e acumulação para obter a equação geral do movimento, dada pelo sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\tilde{M}\ddot{\tilde{D}} + \tilde{C}\dot{\tilde{D}} + \tilde{K}\tilde{D} = \tilde{F}_E(t) \quad (64)$$

A equação (64) representa uma análise dinâmica. Se forem retirados o primeiro e segundo termos da equação, e \tilde{F}_E deixar de ser função do tempo, a análise será estática, e representada pelo sistema de equações algébricas:

$$\tilde{K}\tilde{D} = \tilde{F}_E \quad (65)$$

Em problemas estáticos, este procedimento resulta um sistema de equações algébricas que pode ser facilmente resolvido com a ajuda de técnicas computacionais. Já em problemas dinâmicos, a discretização resulta um sistema de equações diferenciais ordinárias do movimento, que requerem o uso de técnica computacional apropriada e métodos numéricos adequados de integração no tempo. (RODRIGUES, 1997, p. 9, 10).

3 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO GERAL DO MOVIMENTO

3.1 MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Neste capítulo será encontrada a resolução da equação geral do movimento, visando obter os deslocamentos, as velocidades e as acelerações requeridas dos pontos nodais da estrutura.

Sua solução pode ser obtida via métodos numéricos, ou então por meio de sua resolução analítica.

As hipóteses básicas utilizadas para a geração de sistemas lineares constituem uma poderosa ferramenta na obtenção de soluções numéricas. Elas permitem, por exemplo, a utilização do princípio da superposição dos efeitos. Tais hipóteses são dadas pelas relações lineares entre carregamento x deslocamento e tensão x deformação.

Dentre os métodos numéricos destacam-se os métodos de integração direta e as técnicas de superposição modal. Por sua vez, os métodos de integração direta classificam-se em métodos explícitos e implícitos.

Os métodos explícitos permitem expressar os deslocamentos finais “ \tilde{D}_n ”, do intervalo de tempo “ $n\Delta t$ ”, em função da história temporal anterior, ou seja, em função dos deslocamentos finais e suas respectivas derivadas temporais referentes aos intervalos de tempo “ $(n-1)\Delta t$ ” e anteriores, conforme a equação (66).

$$\tilde{D}_n = f\left(\tilde{D}_{n-1}, \tilde{\dot{D}}_{n-1}, \tilde{\ddot{D}}_{n-1}, \tilde{D}_{n-2}, \dots\right) \quad (66)$$

Já os métodos implícitos permitem expressar os deslocamentos finais “ \tilde{D}_n ”, do intervalo de tempo “ $n\Delta t$ ”, em função dos deslocamentos finais, e suas respectivas derivadas temporais referentes ao intervalo de tempo “ $(n-1)\Delta t$ ” e anteriores, e das derivadas temporais dos deslocamentos “ \tilde{D}_n ” que, a princípio não são conhecidas.

Os métodos implícitos podem ser expressos pela equação (67), e entre eles destaca-se o processo de Newmark e o processo previsor-corretor.

$$\tilde{D}_n = f\left(\tilde{\dot{D}}_n, \tilde{\ddot{D}}_n, \tilde{D}_{n-1}, \tilde{\dot{D}}_{n-1}, \dots\right) \quad (67)$$

Existem ainda os chamados métodos implícitos-explícitos, que utilizam os métodos explícitos para resolver uma sub-região específica do sistema estrutural, e os métodos implícitos para resolver o restante.

Os métodos implícitos possuem essencialmente duas vantagens quando comparados com os métodos explícitos: elevada exatidão e estabilidade numérica melhorada. No entanto, a desvantagem dos métodos implícitos reside na necessidade de ter que se resolver o sistema de equações a cada iteração, que ocorre durante o processo de integração para cada intervalo de tempo “ $n\Delta t$ ”.

Na seqüência deste trabalho, abordar-se-á o método implícito de Newmark, tendo em vista que esse método é indicado para análise determinista de sistemas estruturais com comportamento não-linear, submetidos à carregamentos prescritos, ARGYRIS et al.(1991). (RODRIGUES, 1997, p. 33).

3.2 EQUAÇÕES DE NEWMARK

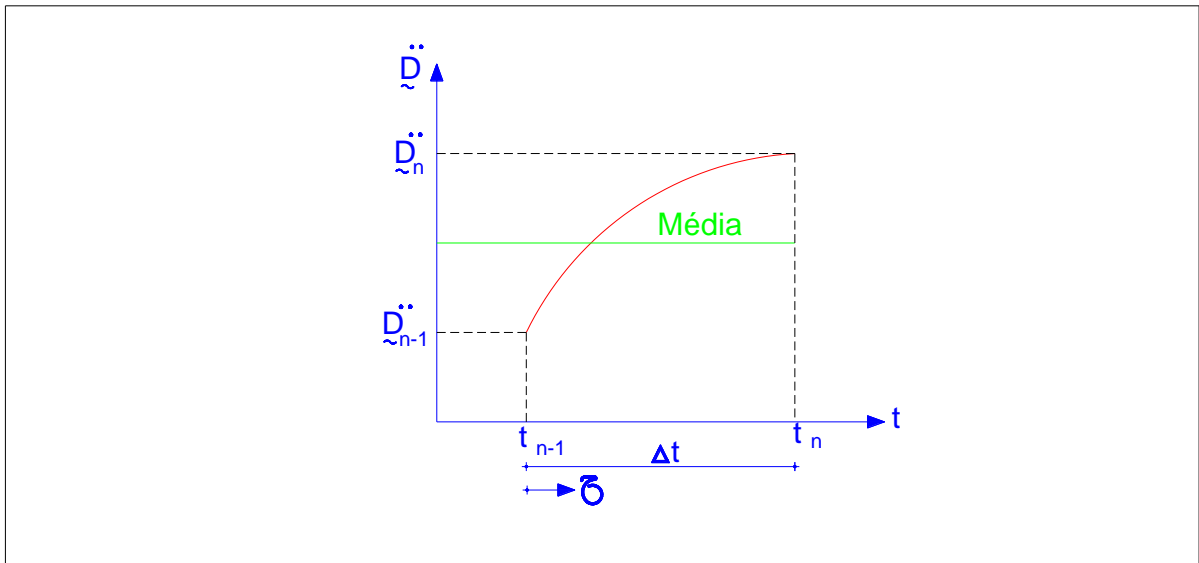
Os métodos implícitos estão fundamentados no conhecimento das derivadas temporais dos deslocamentos finais “ D_n ”, referentes ao intervalo de tempo “ $n\Delta t$ ”.

Uma vez que essas derivadas temporais não são conhecidas, os seus valores podem ser estimados, conforme será visto nos itens subseqüentes, utilizando-se as chamadas equações de Newmark.

3.2.1 Aceleração constante durante o intervalo de tempo

Considera-se que a aceleração durante o intervalo de tempo “ $n\Delta t$ ” seja igual a uma constante, dada pela média entre a aceleração do início do intervalo e do final do intervalo, conforme descrito na figura 11.

Figura 11 - Aceleração constante



Fonte: Elaboração do próprio autor.

A aceleração pode ser estimada por:

$$\ddot{D}(\tau) = \frac{1}{2} \left(\ddot{D}_n + \ddot{D}_{n-1} \right)$$

$$\frac{d\dot{D}}{d\tau} = \frac{1}{2} \left(\ddot{D}_n + \ddot{D}_{n-1} \right)$$

onde “ τ ” é uma variável de tempo auxiliar, variando de zero até “ Δt ”.

Integrando-se duas vezes em relação à variável “ τ ”, tem-se:

$$\int_{\dot{D}_{n-1}}^{\dot{D}} d\dot{D} = \int_0^{\tau} \frac{1}{2} \left(\ddot{D}_n + \ddot{D}_{n-1} \right) d\tau$$

$$\dot{D}(\tau) = \dot{D}_{n-1} + \frac{1}{2} \left(\ddot{D}_n + \ddot{D}_{n-1} \right) \tau$$

$$\frac{dD}{d\tau} = \dot{D}_{n-1} + \frac{1}{2} \left(\ddot{D}_n + \ddot{D}_{n-1} \right) \tau$$

$$\int_{\tilde{D}_{n-1}}^{\tilde{D}_n} d\tilde{D} = \int_0^{\tau} \dot{\tilde{D}}_{n-1} + \frac{1}{2} \left(\ddot{\tilde{D}}_n + \ddot{\tilde{D}}_{n-1} \right) \tau d\tau$$

$$\tilde{D}(\tau) = \tilde{D}_{n-1} + \dot{\tilde{D}}_{n-1} \tau + \frac{1}{4} \left(\ddot{\tilde{D}}_n + \ddot{\tilde{D}}_{n-1} \right) \tau^2$$

Calculando-se as variáveis ao final do intervalo de tempo, com “ $\tau = \Delta t$ ”, e reorganizando-se o resultado, obtém-se:

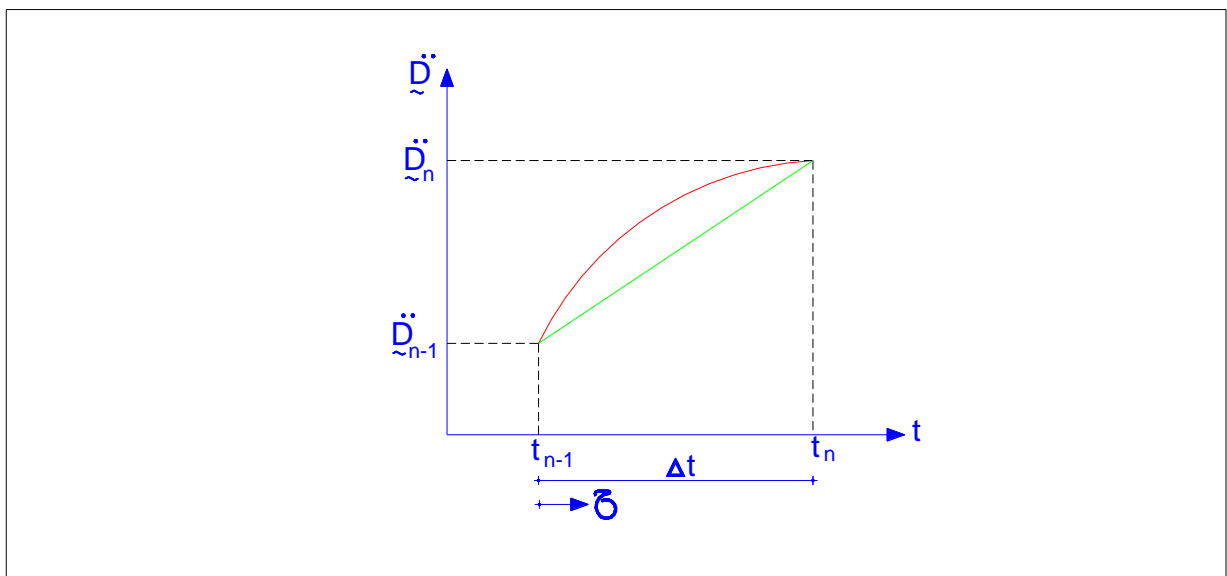
$$\dot{\tilde{D}}_n = \dot{\tilde{D}}_{n-1} + \left(1 - \frac{1}{2} \right) \Delta t \ddot{\tilde{D}}_{n-1} + \frac{1}{2} \Delta t \ddot{\tilde{D}}_n \quad (68)$$

$$\tilde{D}_n = \tilde{D}_{n-1} + \Delta t \dot{\tilde{D}}_{n-1} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \Delta t^2 \ddot{\tilde{D}}_{n-1} + \frac{1}{4} \Delta t^2 \ddot{\tilde{D}}_n$$

3.2.2 Aceleração variando linearmente durante o intervalo de tempo

Assumindo a estimativa da aceleração, durante o intervalo de tempo “ $n\Delta t$ ”, varie linearmente entre as acelerações do início e do fim do intervalo, conforme a figura 12.

Figura 12 – Aceleração com variação linear



Fonte: Elaboração do próprio autor.

$$\ddot{D}(\tau) = \ddot{D}_{n-1} + \left(\ddot{D}_n - \ddot{D}_{n-1} \right) \frac{\tau}{\Delta t}$$

$$\frac{d\dot{D}}{d\tau} = \ddot{D}_{n-1} + \left(\ddot{D}_n - \ddot{D}_{n-1} \right) \frac{\tau}{\Delta t}$$

Integrando a expressão acima duas vezes obtém-se:

$$\int_{\dot{D}_{n-1}}^{\dot{D}} d\dot{D} = \int_0^{\tau} \ddot{D}_{n-1} + \left(\ddot{D}_n - \ddot{D}_{n-1} \right) \frac{\tau}{\Delta t} d\tau$$

$$\dot{D}(\tau) = \dot{D}_{n-1} + \ddot{D}_{n-1} \tau + \left(\ddot{D}_n - \ddot{D}_{n-1} \right) \frac{\tau^2}{2\Delta t}$$

$$\frac{dD}{d\tau} = \dot{D}_{n-1} + \ddot{D}_{n-1} \tau + \left(\ddot{D}_n - \ddot{D}_{n-1} \right) \frac{\tau^2}{2\Delta t}$$

$$\int_{D_{n-1}}^D dD = \int_0^{\tau} \dot{D}_{n-1} + \ddot{D}_{n-1} \tau + \left(\ddot{D}_n - \ddot{D}_{n-1} \right) \frac{\tau^2}{2\Delta t} d\tau$$

$$D(\tau) = D_{n-1} + \dot{D}_{n-1} \tau + \ddot{D}_{n-1} \frac{\tau^2}{2} + \left(\ddot{D}_n - \ddot{D}_{n-1} \right) \frac{\tau^3}{6\Delta t}$$

Calculando-se as variáveis ao final do intervalo de tempo com “ $\tau = \Delta t$ ” e, reorganizando-se o resultado obtém-se:

$$\dot{D}_n = \dot{D}_{n-1} + \left(1 - \frac{1}{2} \right) \Delta t \ddot{D}_{n-1} + \frac{1}{2} \Delta t \ddot{D}_n$$

$$D_n = D_{n-1} + \Delta t \dot{D}_{n-1} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) \Delta t^2 \ddot{D}_{n-1} + \frac{1}{6} \Delta t^2 \ddot{D}_n \quad (69)$$

3.2.3 Equações generalizadas

Com base nas respostas encontradas nos itens 3.2.1 e 3.2.2,

pode-se unificar as respostas encontradas, resultando as equações generalizadas de Newmark, WARBURTON (1976), dadas por:

$$\dot{\tilde{D}}_n = \dot{\tilde{D}}_{n-1} + (1-\gamma)\Delta t \ddot{\tilde{D}}_{n-1} + \gamma\Delta t \ddot{\tilde{D}}_n \quad (70)$$

$$\tilde{D}_n = \tilde{D}_{n-1} + \Delta t \dot{\tilde{D}}_{n-1} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\Delta t^2 \ddot{\tilde{D}}_{n-1} + \beta\Delta t^2 \ddot{\tilde{D}}_n \quad (71)$$

(RODRIGUES, 1997, p. 36)

onde “ γ ” e “ β ” são conhecidos como parâmetros de Newmark.

Para aceleração constante durante o intervalo de tempo utiliza-se “ $\gamma = \frac{1}{2}$ ” e “ $\beta = \frac{1}{4}$ ”, e para aceleração variando linearmente durante o intervalo de tempo adota-se “ $\gamma = \frac{1}{2}$ ” e “ $\beta = \frac{1}{6}$ ”. As equações de Newmark permitem alterações nos parâmetros “ γ ” e “ β ”, “conforme variante de Fox-Goodwin que define “ $\gamma = \frac{1}{2}$ ” e “ $\beta = \frac{1}{12}$ ”, ARGYRIS et al. (1991).” (RODRIGUES, 1997, p.37).

Por meio das equações (70) e (71) é calculado o valor dos deslocamentos e das velocidades ao final do intervalo de tempo. No entanto, os valores das acelerações do final do intervalo permanecem ainda indeterminados. Tal problema será contornado no decorrer deste trabalho.

3.3 PROCESSOS ITERATIVOS

Para os casos em que a equação geral do movimento de um sistema estrutural resulte um sistema de equações não-lineares, um procedimento iterativo deve ser adotado visando encontrar a sua solução.

A primeira relação importante para descrever tal procedimento é dada pelo equilíbrio dinâmico ao longo de cada intervalo de tempo “ Δt ”, representado pela equação (WAIDEMAM, 2004, p. 35, 36)

(64).

Em uma primeira análise os valores da aceleração “ $\ddot{\tilde{D}}_k$ ” são estimados, para determinar \tilde{D}_k utilizando as Equações de Newmark, portanto o valor de \tilde{D}_k

calculado também será estimado, e dessa forma a equação (64) pode não ser totalmente satisfeita. Em consequência calcula-se o “resíduo” provocado pelos deslocamentos estimados através de uma adaptação da equação (64) como segue:

$$\underset{\sim}{R}\left(\underset{\sim}{D}_k\right)=\underset{\sim}{F}_E(t)-\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{\ddot{D}}_k-\underset{\sim}{C}\underset{\sim}{\dot{D}}_k-\underset{\sim}{K}\underset{\sim}{D}_k \quad (72)$$

sendo “ $\underset{\sim}{R}\left(\underset{\sim}{D}_k\right)$ ” o referido resíduo das forças dinâmicas teoricamente não equilibradas em função dos deslocamentos previstos “ $\underset{\sim}{D}_k$ ”.

A condição de equilíbrio ao final do intervalo de tempo “ $n\Delta t$ ” é dada por:

$$\underset{\sim}{R}\left(\underset{\sim}{D}_k+\underset{\sim}{\Delta D}_k\right)=0 \quad (73)$$

onde “ $\underset{\sim}{\Delta D}_k$ ” é o acréscimo de deslocamentos que teoricamente ocorre durante o intervalo “ $n\Delta t$ ”.

Dessa forma, pode-se calcular o acréscimo de deslocamentos para o intervalo de tempo “ $n\Delta t$ ” de modo que a condição dada pela equação (73) seja satisfeita. A descrição detalhada desse procedimento será fornecida no item 3.5 deste trabalho.

3.4 PROCESSO INCREMENTAL

“O procedimento incremental consiste na aplicação gradual do carregamento externo no sistema estrutural, através de pequenas parcelas do carregamento total. Em geral, associa-se este procedimento a um processo iterativo.” (WAIDEMAM, 2004, p. 37).

3.5 MÉTODO DE NEWMARK PARA INTEGRAÇÃO NUMÉRICA AO LONGO DO TEMPO

A ideia básica do método é dada pela previsão do valor das acelerações ao final do intervalo de tempo, que se deseja conhecer. Com este procedimento, aplicando-se as equações generalizadas de Newmark, pode-se prever o valor dos deslocamentos e das acelerações ao final do mesmo intervalo de tempo.

3.5.1 Equacionamento básico

Alterando-se os índices das equações generalizadas de Newmark dadas pelas equações (70) e (71) tem-se:

$$\underset{\sim}{\dot{D}}_k = \underset{\sim}{\dot{D}}_{k-1} + (1-\gamma)\Delta t \underset{\sim}{\ddot{D}}_{k-1} + \gamma\Delta t \underset{\sim}{\ddot{D}}_k \quad (74)$$

$$\underset{\sim}{D}_k = \underset{\sim}{D}_{k-1} + \Delta t \underset{\sim}{\dot{D}}_{k-1} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\Delta t^2 \underset{\sim}{\ddot{D}}_{k-1} + \beta\Delta t^2 \underset{\sim}{\ddot{D}}_k \quad (75)$$

Derivando-se a equação (74) em relação à $\underset{\sim}{\ddot{D}}_k$:

$$\frac{\partial \underset{\sim}{\dot{D}}_k}{\partial \underset{\sim}{\ddot{D}}_k} = \gamma\Delta t \quad (76)$$

Isolando-se $\underset{\sim}{\ddot{D}}_k$ da equação (75) e derivando-se em relação à $\underset{\sim}{D}_k$ é encontrado:

$$\frac{\partial \underset{\sim}{\ddot{D}}_k}{\partial \underset{\sim}{D}_k} = \frac{1}{\beta\Delta t^2} \quad (77)$$

Aplicando a regra da cadeia do Cálculo e com as equações (76) e (77) é possível escrever:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underset{\sim}{\dot{D}}_K}{\partial \underset{\sim}{D}_k} &= \frac{\partial \underset{\sim}{\dot{D}}_K}{\partial \underset{\sim}{\ddot{D}}_K} \cdot \frac{\partial \underset{\sim}{\ddot{D}}_K}{\partial \underset{\sim}{D}_k} \\ \frac{\partial \underset{\sim}{\dot{D}}_K}{\partial \underset{\sim}{D}_k} &= \gamma\Delta t \frac{1}{\beta\Delta t^2} = \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \end{aligned} \quad (78)$$

Com base nas equações (77) e (78) é possível escrever as relações:

$$\Delta \underset{\sim}{\ddot{D}}_K = \frac{1}{\beta\Delta t^2} \Delta \underset{\sim}{D}_K \quad (79)$$

$$\dot{\Delta D}_{\sim K} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta D_{\sim K} \quad (80)$$

Em uma primeira análise os valores de deslocamentos “ D_k ” são estimados, provocando um erro na equação (64). Calcula-se o “resíduo” provocado pelos deslocamentos estimados através de uma adaptação da equação (64), conforme mostrado na equação (72):

$$R\left(D_k\right) = F_E(t) - M \ddot{D}_k - C \dot{D}_k - K D_k \quad (72)$$

Derivando-se o resíduo em relação aos deslocamentos “ D_k ”, obtém-se:

$$\frac{\partial R\left(D_k\right)}{\partial D_k} = \frac{\partial F_E(t)}{\partial D_k} - M \frac{\partial \ddot{D}_k}{\partial D_k} - C \frac{\partial \dot{D}_k}{\partial D_k} - K \frac{\partial D_k}{\partial D_k} \quad (81)$$

Como os esforços externos são dependentes apenas do tempo tem-se:

$$\frac{\partial F_E(t)}{\partial D_k} = 0 \quad (82)$$

Substituindo as equações (82), (77) e (78) na equação (81):

$$\frac{\partial R\left(D_k\right)}{\partial D_k} = - \left\{ M \frac{1}{\beta \Delta t^2} + C \frac{\gamma}{\beta \Delta t} + K \right\} \quad (83)$$

Para que as forças dinâmicas fiquem em equilíbrio ao final do intervalo de tempo “ $n\Delta t$ ” é necessário à imposição da equação (73).

$$R\left(D_k + \Delta D_k\right) = 0$$

Expandindo-se a equação (73) na série de Taylor e desprezando-se os termos de ordem superior, obtém-se:

$$\underset{\sim}{R}\left(\underset{\sim}{D}_k + \underset{\sim}{\Delta D}_k\right) = \underset{\sim}{R}\left(\underset{\sim}{D}_k\right) + \frac{\underset{\sim}{\partial R}\left(\underset{\sim}{D}_k\right)}{\underset{\sim}{\partial D}_k} \underset{\sim}{\Delta D}_k = 0$$

Rearranjando os termos:

$$-\frac{\underset{\sim}{\partial R}\left(\underset{\sim}{D}_k\right)}{\underset{\sim}{\partial D}_k} \underset{\sim}{\Delta D}_k = \underset{\sim}{R}\left(\underset{\sim}{D}_k\right) \quad (84)$$

Substituindo a equação (83) em (84) resulta na expressão:

$$\left\{ \underset{\sim}{M} \frac{1}{\underset{\sim}{\beta \Delta t^2}} + \underset{\sim}{C} \frac{\underset{\sim}{\gamma}}{\underset{\sim}{\beta \Delta t}} + \underset{\sim}{K} \right\} \underset{\sim}{\Delta D}_k = \underset{\sim}{R}\left(\underset{\sim}{D}_k\right) \quad (85)$$

3.6 ALGORITMO NUMÉRICO PARA RESOLUÇÃO DO PROCESSO

O conhecimento prévio das condições iniciais do problema no instante “ $t=0$ ”, ou seja, os deslocamentos “ $\underset{\sim}{D}_0$ ” e velocidades “ $\underset{\sim}{\dot{D}}_0$ ” é o ponto de partida para dar início ao processo de integração. Com isso pode-se obter as acelerações “ $\underset{\sim}{\ddot{D}}_0$ ” utilizando-se a equação de equilíbrio (64) da seguinte forma:

$$\underset{\sim}{\ddot{D}}_0 = \underset{\sim}{M}^{-1} \left\{ \underset{\sim}{F}_E(0) - \underset{\sim}{C} \underset{\sim}{\dot{D}}_0 - \underset{\sim}{K} \underset{\sim}{D}_0 \right\}$$

Feito isso, deve-se fazer uma previsão das acelerações, dos deslocamentos e das velocidades para o primeiro intervalo de tempo “ $n\Delta t$ ”, com “ $k=n=1$ ”, utilizando-se as equações generalizadas de Newmark como segue:

$$\underset{\sim}{\ddot{D}}_k = \underset{\sim}{\ddot{D}}_{n-1}$$

$$\underset{\sim}{\dot{D}}_k = \underset{\sim}{\dot{D}}_{n-1} + (1-\underset{\sim}{\gamma}) \Delta t \underset{\sim}{\ddot{D}}_{n-1} + \underset{\sim}{\gamma} \Delta t \underset{\sim}{\dot{D}}_k$$

$$\underset{\sim}{D}_k = \underset{\sim}{D}_{n-1} + \Delta t \underset{\sim}{\dot{D}}_{n-1} + \left(\frac{1}{2} - \underset{\sim}{\beta} \right) \Delta t^2 \underset{\sim}{\ddot{D}}_{n-1} + \underset{\sim}{\beta} \Delta t^2 \underset{\sim}{\ddot{D}}_k$$

Com essa primeira aproximação calculam-se as forças inerciais, dissipativas, restauradoras, e conseqüentemente o resíduo das forças dinâmicas não equilibradas através da equação (72).

Para verificar o equilíbrio utiliza-se a seguinte relação:

$$\frac{\|R_{\sim}(D_k)\|}{\|FE_{\sim}(n\Delta t)\|} < \varepsilon$$

onde ε é a tolerância para o erro de cálculo. Caso não seja verificado o equilíbrio, deve-se calcular o acréscimo de deslocamentos por meio da equação (85).

Com o valor do acréscimo de deslocamentos " ΔD_k ", faz-se uma correção nos valores dos deslocamentos:

$$\underset{\sim}{D_k} \underset{\sim}{(corrigido)} = \underset{\sim}{D_k} + \underset{\sim}{\Delta D_k}$$

Com o auxílio da equação (80) pode-se fazer o cálculo do acréscimo da velocidade utilizando-se a seguinte equação:

$$\underset{\sim}{\dot{D}_k} \underset{\sim}{(corrigido)} = \underset{\sim}{\dot{D}_k} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \underset{\sim}{\Delta D_k}$$

Já para correção das acelerações, com auxílio da equação (79), utiliza-se a seguinte equação:

$$\underset{\sim}{\ddot{D}_k} \underset{\sim}{(corrigido)} = \underset{\sim}{\ddot{D}_k} + \frac{1}{\beta\Delta t^2} \underset{\sim}{\Delta D_k}$$

É importante salientar que o valor de cada intervalo de tempo " Δt " deverá permanecer constante ao longo de todo o processo de integração.

Apresenta-se na figura 13 o diagrama de blocos contendo apenas o equacionamento básico, onde se podem visualizar de forma global todos os passos descritos anteriormente.

Figura 13 - Diagrama de blocos do método de Newmark

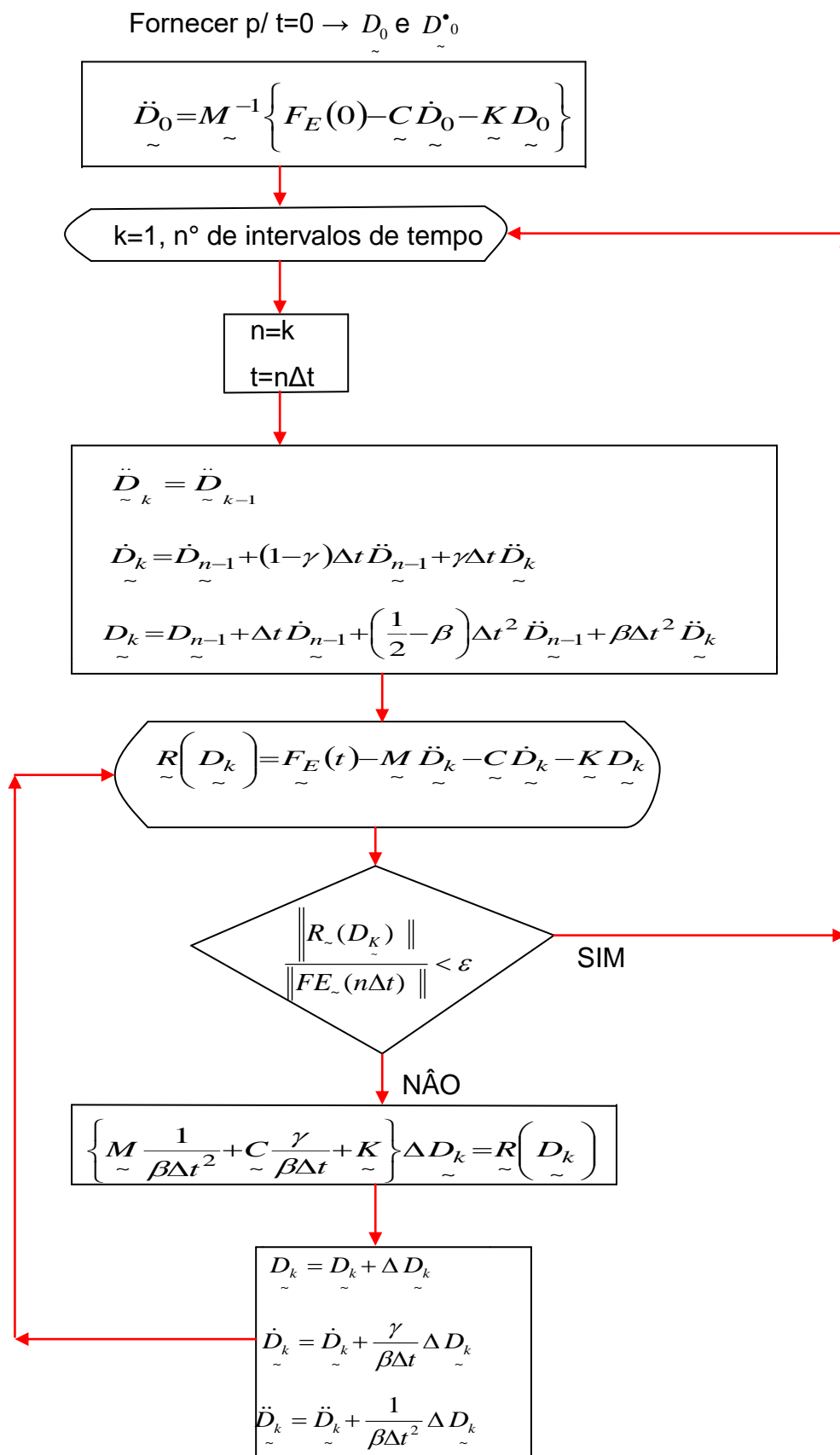
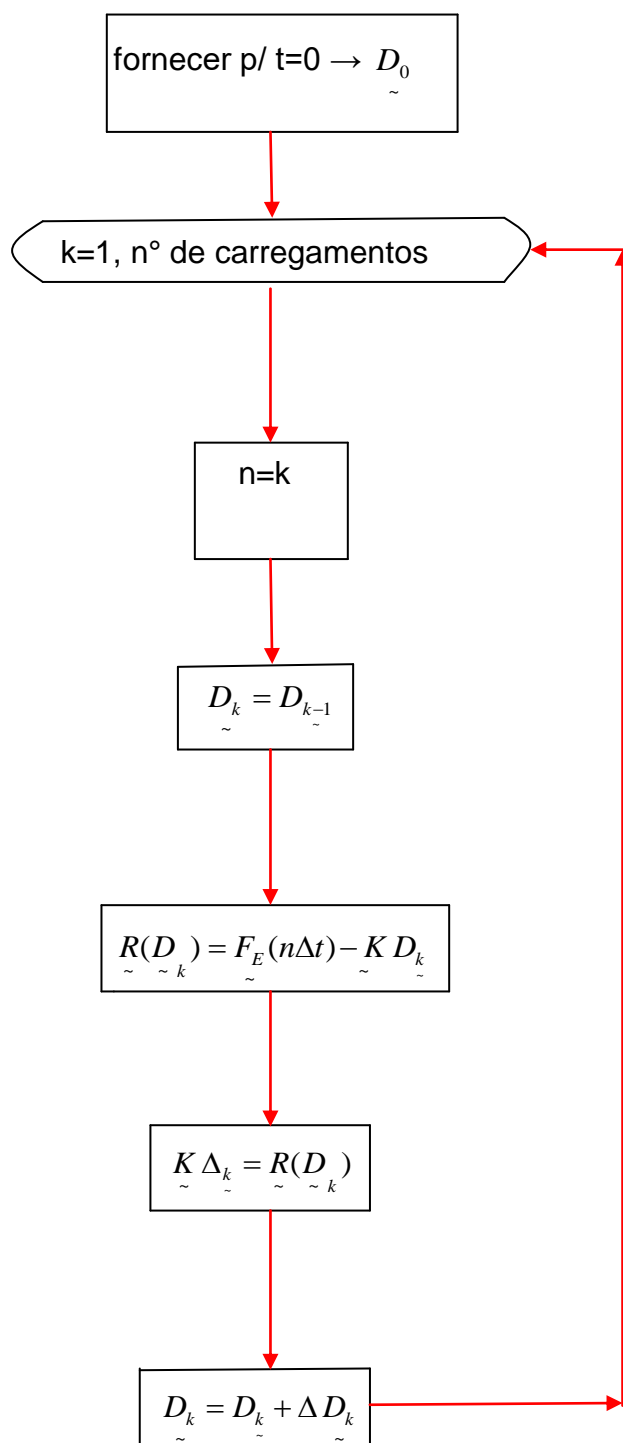


Figura 14 – Diagrama de blocos para análise estática com carregamento incremental



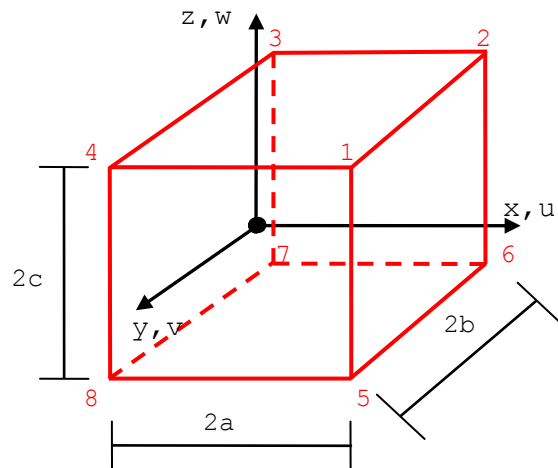
Fonte: Elaboração do próprio autor.

4 ELEMENTO FINITO PRISMÁTICO REGULAR LINEAR

O elemento finito prismático regular linear tem oito nós, com os lados de $2a$, $2b$ e $2c$ que tem a mesma ordem de grandeza, por este fato o elemento finito prismático regular linear é classificado como elemento sólido. Cada nó desse elemento possui três graus de liberdade, ou seja, deslocamentos nas direções x , y , z .

Na análise de sólidos o elemento finito prismático regular linear destaca-se em relação aos demais elementos devido a sua simplicidade, conforme mostrado na figura 15.

Figura 15 - Elemento finito prismático regular linear com oito nós



Fonte: (FAGLIONI, 2006, p. 64).

As funções aproximadoras desse elemento contêm oito monômios extraídos do polinômio algébrico cúbico completo em x , y e z . Nesse caso, para garantir a continuidade com os deslocamentos dos elementos adjacentes, a função deslocamento deve variar linearmente ao longo dos lados (ZIENKIEWICZ; CHEUNG, 1967, citado por FAGLIONI, 2006, p. 64, 65)

4.1 TRIÂNGULO DE PASCAL

Os monômios das funções interpoladoras são extraídos do triângulo de Pascal. O mesmo correspondente a uma função de duas variáveis x e y é dado por:

$$\begin{array}{cccc}
 & & 1 & \\
 & & x & y \\
 & x^2 & xy & y^2 \\
 x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 \\
 & & \dots &
 \end{array}$$

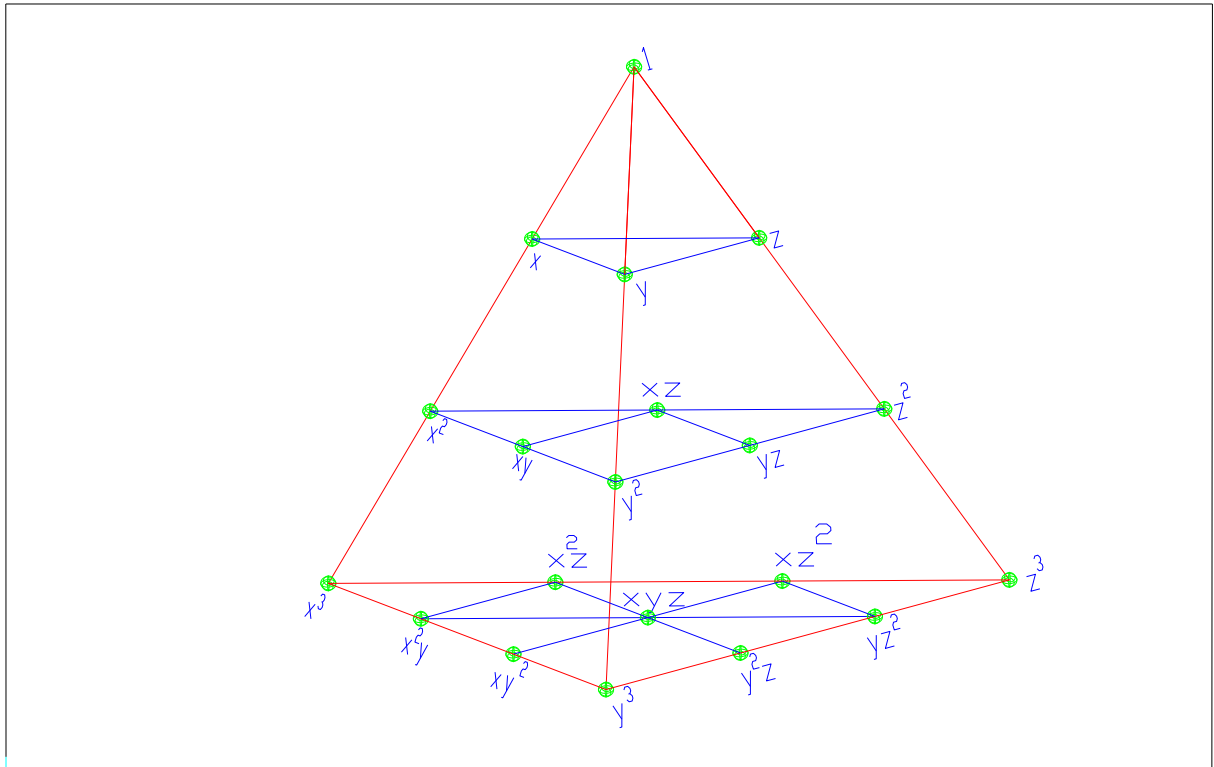
Como o elemento finito prismático regular linear é um elemento sólido, com deslocamentos nas direções x , y e z , serão descritos mais dois triângulos de Pascal, com função de duas variáveis, um triângulo com variáveis x e z e o outro com y e z .

$$\begin{array}{cccc}
 & & 1 & \\
 & & x & z \\
 & x^2 & xz & z^2 \\
 x^3 & x^2z & xz^2 & z^3 \\
 & & \dots &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 & & 1 & \\
 & & y & z \\
 & y^2 & yz & z^2 \\
 y^3 & y^2z & yz^2 & z^3 \\
 & & \dots &
 \end{array}$$

Utilizando-se dos três triângulos de Pascal descritos anteriormente é construída a pirâmide. A figura 16 descreve a pirâmide formada pela união dos três triângulos, como faces inclinadas da pirâmide.

Figura 16 - Pirâmide de Pascal



Fonte: (ZIENKIEWICZ, 2000 citado por ALBERTINI, 2009, p. 46).

O monômio “xyz” foi colocado na figura 16 pela lei dos expoentes, descrita a seguir. Entre os monômios x^3 e y^3 , y^3 e z^3 e entre z^3 e x^3 tem os seguintes monômios:

$$\begin{array}{cccc} x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 \\ y^3 & y^2z & yz^2 & z^3 \\ z^3 & xz^2 & x^2z & x^3 \end{array}$$

A sequência do expoente “x” está na primeira linha, o expoente de “y” na segunda linha, e a última linha com sequência do expoente “z”. A sequência dos expoentes de x, y e z é: 3, 2, 1 e 0, portanto a lei dos expoentes é dada por:

$$a_{n+1} = x^{3-n}$$

$$b_{n+1} = y^{3-n}$$

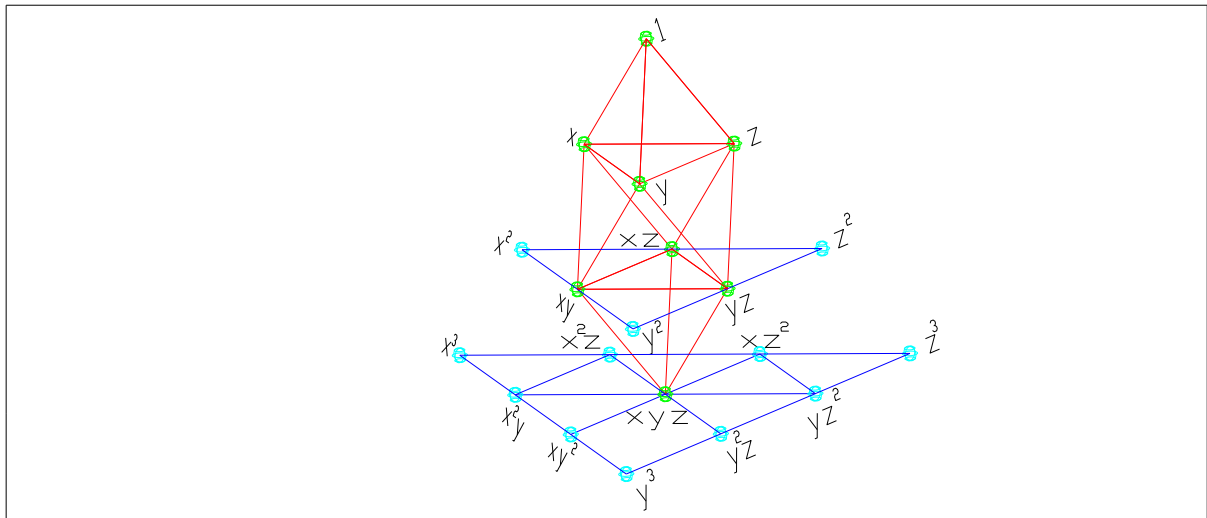
$$c_{n+1} = z^{3-n}, \text{ com } n=(0,1,2,3) \quad (86)$$

A seguir serão colocadas as linhas que são paralelas a x^3 e y^3 , a y^3 e z^3 e entre z^3 e x^3 :

$$\begin{array}{ccc}
 x^2z & x^i y^j z^k & y^2z \\
 xy^2 & x^i y^j z^k & xz^2 \\
 yz^2 & x^i y^j z^k & x^2y
 \end{array}$$

A sequência do expoente de x será determinada na primeira linha, o expoente de y na segunda linha, e a última linha com a determinação do expoente z. Pela expressão (86) $i=j=k=1$.

Figura 17 - Monômios do elemento finito prismático regular linear



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Os oito monômios do elemento prismático regular linear, extraídos do polinômio algébrico cúbico em x, y e z são: 1, x, y, z, xy, xz, yz e xyz.

4.2 FUNÇÕES DE FORMA

As funções interpoladoras para os deslocamentos u , v e w , são dadas pelas equações:

$$u(\xi, \eta, \zeta) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \zeta + \alpha_4 \xi \eta + \alpha_5 \xi \zeta + \alpha_6 \eta \zeta + \alpha_7 \xi \eta \zeta \quad (87)$$

$$v(\xi, \eta, \zeta) = \beta_0 + \beta_1 \xi + \beta_2 \eta + \beta_3 \zeta + \beta_4 \xi \eta + \beta_5 \xi \zeta + \beta_6 \eta \zeta + \beta_7 \xi \eta \zeta \quad (88)$$

$$w(\xi, \eta, \zeta) = \gamma_0 + \gamma_1 \xi + \gamma_2 \eta + \gamma_3 \zeta + \gamma_4 \xi \eta + \gamma_5 \xi \zeta + \gamma_6 \eta \zeta + \gamma_7 \xi \eta \zeta \quad (89)$$

onde as coordenadas adimensionais são dadas pelas equações:

$$\xi = \frac{x}{a} ; \quad \eta = \frac{y}{b} \quad e \quad \zeta = \frac{z}{c} \quad (90)$$

Na forma matricial essas equações são dadas por:

$$\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{\varphi} \underset{\sim}{\alpha} \quad (91)$$

em que:

$$\underset{\sim}{u}^T = \{u \quad v \quad w\};$$

$$\underset{\sim}{\varphi} = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \zeta & \xi\eta & \xi\zeta & \eta\zeta & \xi\eta\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta & \zeta & \xi\eta & \xi\zeta & \eta\zeta & \xi\eta\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta & \zeta & \xi\eta & \xi\zeta & \eta\zeta & \xi\eta\zeta \end{bmatrix};$$

$$\underset{\sim}{\alpha}^T = \{\alpha_0 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5 \quad \alpha_6 \quad \alpha_7 \quad \beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \beta_4 \quad \beta_5 \quad \beta_6 \quad \beta_7 \quad \gamma_0 \quad \gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \gamma_3 \quad \gamma_4 \quad \gamma_5 \quad \gamma_6 \quad \gamma_7\}.$$

Substituindo-se os valores das coordenadas nodais na matriz $\underset{\sim}{\varphi}$ obtém:

-Nó 1

$$\left(\xi = \frac{x}{a} = \frac{a}{a} = 1; \quad \eta = \frac{y}{b} = \frac{b}{b} = 1; \quad \zeta = \frac{z}{c} = \frac{c}{c} = 1 \right):$$

$$\underset{\sim}{\varphi}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

-Nó 2

$$\left(\xi = \frac{x}{a} = \frac{a}{a} = 1; \quad \eta = \frac{y}{b} = \frac{-b}{b} = -1; \quad \zeta = \frac{z}{c} = \frac{c}{c} = 1 \right):$$

$$\underset{\sim}{\varphi}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

-Nó 3

$$\left(\xi = \frac{x}{a} = \frac{-a}{a} = -1; \quad \eta = \frac{y}{b} = \frac{-b}{b} = -1; \quad \zeta = \frac{z}{c} = \frac{c}{c} = 1 \right):$$

$$\underset{\sim}{\varphi}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

-Nó 4

$$\left(\xi = \frac{x}{a} = \frac{-a}{a} = -1; \quad \eta = \frac{y}{b} = \frac{b}{b} = 1; \quad \zeta = \frac{z}{c} = \frac{c}{c} = 1 \right):$$

$$\underset{\sim}{\varphi}_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

-Nó 5

$$\left(\xi = \frac{x}{a} = \frac{a}{a} = 1; \quad \eta = \frac{y}{b} = \frac{b}{b} = 1; \quad \zeta = \frac{z}{c} = \frac{-c}{c} = -1 \right):$$

$$\underset{\sim}{\varphi}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

-Nó 6

$$\left(\xi = \frac{x}{a} = \frac{a}{a} = 1; \quad \eta = \frac{y}{b} = \frac{-b}{b} = -1; \quad \zeta = \frac{z}{c} = \frac{-c}{c} = -1 \right):$$

$$\underset{\sim}{\varphi}_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

-Nó 7

$$\left(\xi = \frac{x}{a} = \frac{-a}{a} = -1; \quad \eta = \frac{y}{b} = \frac{-b}{b} = -1; \quad \zeta = \frac{z}{c} = \frac{-c}{c} = -1 \right):$$

$$\underset{\sim}{\varphi}_7 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

-Nó 8

$$\left(\xi = \frac{x}{a} = \frac{-a}{a} = -1; \quad \eta = \frac{y}{b} = \frac{b}{b} = 1; \quad \zeta = \frac{z}{c} = \frac{-c}{c} = -1 \right):$$

$$\underset{\sim}{\varphi}_8 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Considerando-se conjuntamente os oito nós do elemento, obtém-se:

$$\underline{\underline{d}} = \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\alpha}} \quad (92)$$

onde:

$$\underline{\underline{d}}^T = \{u_1 \ v_1 \ w_1 \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ u_3 \ v_3 \ w_3 \ u_4 \ v_4 \ w_4 \ u_5 \ v_5 \ w_6 \ u_7 \ v_7 \ w_7 \ u_8 \ v_8 \ w_8\};$$

$$N_1 = 1 + \xi + \eta + \zeta + \xi\eta + \xi\zeta + \eta\zeta + \xi\eta\zeta = (1 + \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta);$$

$$N_2 = 1 + \xi - \eta + \zeta - \xi\eta + \xi\zeta - \eta\zeta - \xi\eta\zeta = (1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta);$$

$$N_3 = 1 - \xi - \eta + \zeta + \xi\eta - \xi\zeta - \eta\zeta + \xi\eta\zeta = (1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta);$$

$$N_4 = 1 - \xi + \eta + \zeta - \xi\eta - \xi\zeta + \eta\zeta - \xi\eta\zeta = (1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta);$$

$$N_5 = 1 + \xi + \eta - \zeta + \xi\eta - \xi\zeta - \eta\zeta - \xi\eta\zeta = (1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta);$$

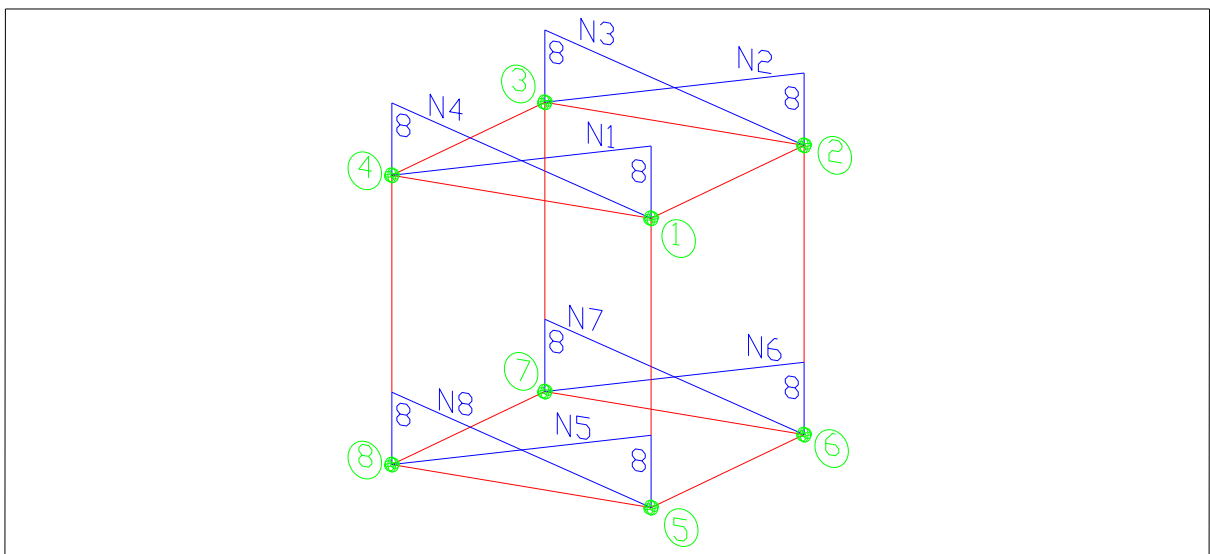
$$N_6 = 1 + \xi - \eta - \zeta - \xi\eta - \xi\zeta + \eta\zeta + \xi\eta\zeta = (1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta);$$

$$N_7 = 1 - \xi - \eta - \zeta + \xi\eta + \xi\zeta + \eta\zeta - \xi\eta\zeta = (1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta);$$

$$N_8 = 1 - \xi + \eta - \zeta - \xi\eta + \xi\zeta - \eta\zeta + \xi\eta\zeta = (1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta).$$

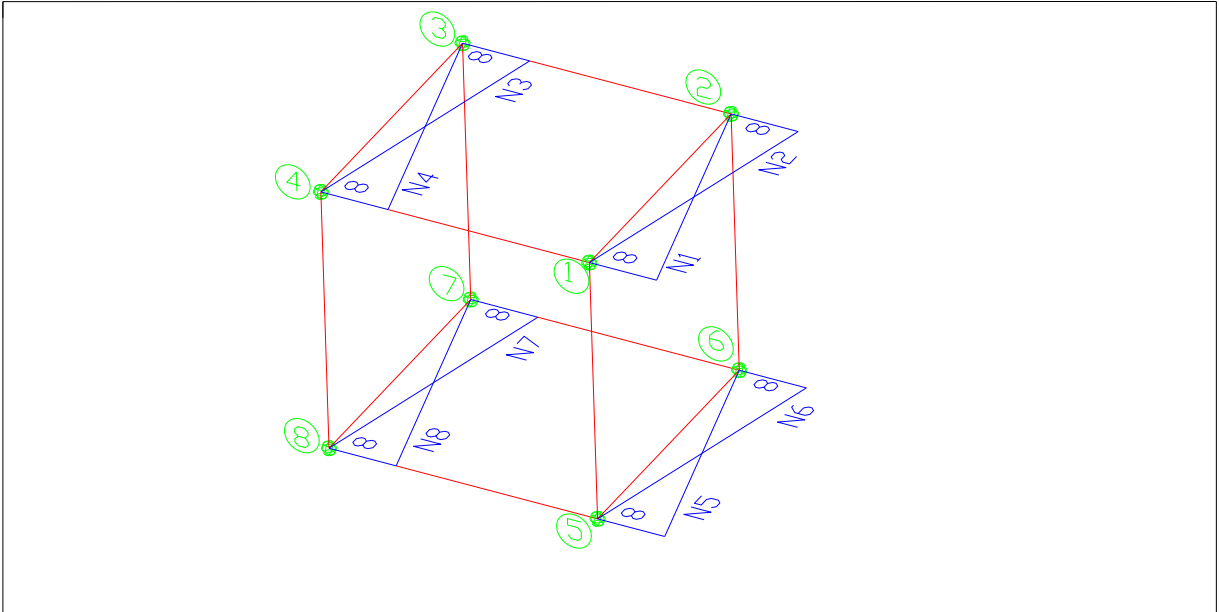
As figuras 18, 19 e 20 foram determinadas pela substituição dos valores das coordenadas dos lados, do elemento prismático regular linear, na matriz de forma ϕ (96).

Figura 18 – Componentes da função de forma nos lados do prisma com a variável em x



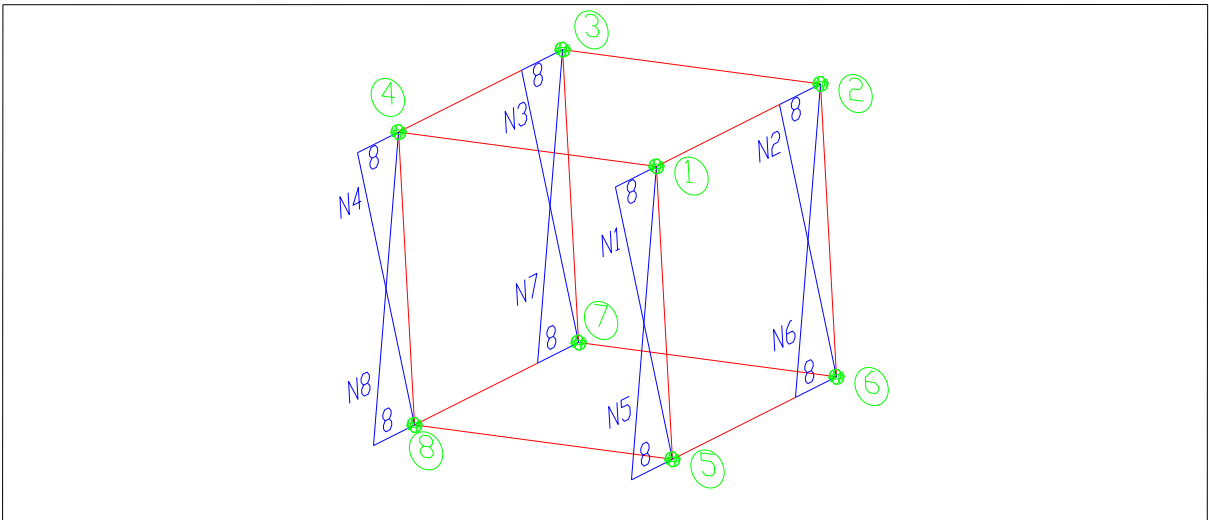
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 19 – Componentes da função de forma nos lados do prisma com a variável em y



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 20 – Componentes da função de forma nos lados do prisma com a variável em z



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Com as figuras 18, 19 e 20 conclui-se que a função de forma, nos lados do elemento finito prismático regular linear, tem variação linear.

4.3 MATRIZ DE RIGIDEZ

Conforme visto no item 2.4, a matriz de rigidez de um elemento finito pode ser deduzida através da equação (62). Para o elemento finito prismático regular linear, a sua matriz de rigidez foi deduzida por Faglioni (2006, p. 69 a 75), cuja a expressão é dada por:

$$\underline{k}_s = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \quad (97)$$

Os coeficientes k_{ij} da matriz (97) são definidos pelas equações a seguir:

$$k_{11} = \begin{bmatrix} \frac{2}{9}(\psi + \omega + \theta) & \frac{1}{12}c & \frac{1}{12}b & \frac{1}{9}(\psi - 2\omega + \theta) & \frac{1}{6}c\chi & \frac{1}{24}b \\ \frac{1}{12}c & \frac{2}{9}(\lambda + \vartheta + \theta) & \frac{1}{12}a & -\frac{1}{6}c\chi & \frac{1}{9}(-2\lambda + \vartheta + \theta) & -\frac{1}{6}a\chi \\ \frac{1}{12}b & \frac{1}{12}a & \frac{2}{9}(\rho + \vartheta + \omega) & \frac{1}{24}b & \frac{1}{6}a\chi & \frac{1}{9}(\rho + \vartheta - 2\omega) \\ \frac{1}{9}(\psi - 2\omega + \theta) & -\frac{1}{6}c\chi & \frac{1}{24}b & \frac{2}{9}(\psi + \omega + \theta) & -\frac{1}{12}c & \frac{1}{12}b \\ \frac{1}{6}c\chi & \frac{1}{9}(-2\lambda + \vartheta + \theta) & \frac{1}{6}a\chi & -\frac{1}{12}c & \frac{2}{9}(\lambda + \vartheta + \theta) & -\frac{1}{12}a \\ \frac{1}{24}b & -\frac{1}{6}a\chi & \frac{1}{9}(\rho + \vartheta - 2\omega) & \frac{1}{12}b & -\frac{1}{12}a & \frac{2}{9}(\rho + \vartheta + \omega) \end{bmatrix} \quad (98)$$

$$k_{21} = \begin{bmatrix} \frac{1}{18}(-2\psi - 2\omega + \theta) & -\frac{1}{12}c & \frac{1}{12}b\chi & \frac{1}{9}(-2\psi + \omega + \theta) & -\frac{1}{6}c\chi & \frac{1}{6}b\chi \\ -\frac{1}{12}c & \frac{1}{18}(-2\lambda - 2\vartheta + \theta) & \frac{1}{12}a\chi & \frac{1}{6}c\chi & \frac{1}{9}(\lambda - 2\vartheta + \theta) & -\frac{1}{24}a \\ -\frac{1}{12}b\chi & -\frac{1}{12}a\chi & \frac{1}{18}(\rho - 2\vartheta - 2\omega) & -\frac{1}{6}b\chi & -\frac{1}{24}a & \frac{1}{9}(\rho - 2\vartheta + \omega) \\ \frac{1}{9}(-2\psi + \omega + \theta) & \frac{1}{6}c\chi & \frac{1}{6}b\chi & \frac{1}{18}(-2\psi - 2\omega + \theta) & \frac{1}{12}c & \frac{1}{12}b\chi \\ -\frac{1}{6}c\chi & \frac{1}{9}(\lambda - 2\vartheta + \theta) & \frac{1}{24}a & \frac{1}{12}c & \frac{1}{18}(-2\lambda - 2\vartheta + \theta) & -\frac{1}{12}a\chi \\ -\frac{1}{6}b\chi & \frac{1}{24}a & \frac{1}{9}(\rho - 2\vartheta + \omega) & -\frac{1}{12}b\chi & \frac{1}{12}a\chi & \frac{1}{18}(\rho - 2\vartheta - 2\omega) \end{bmatrix} \quad (99)$$

$$k_{31} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9}(\psi + \omega - 2\theta) & \frac{1}{24}c & -\frac{1}{6}b\chi & \frac{1}{18}(\psi - 2\omega - 2\theta) & \frac{1}{12}c\chi & -\frac{1}{12}b\chi \\ \frac{1}{24}c & \frac{1}{9}(\lambda + \vartheta - 2\theta) & -\frac{1}{6}a\chi & -\frac{1}{12}c\chi & \frac{1}{18}(-2\lambda + \vartheta - 2\theta) & \frac{1}{12}a \\ \frac{1}{6}b\chi & \frac{1}{6}a\chi & \frac{1}{9}(-2\rho + \vartheta + \omega) & \frac{1}{12}b\chi & \frac{1}{12}a & \frac{1}{18}(-2\rho + \vartheta - 2\omega) \\ \frac{1}{18}(\psi - 2\omega - 2\theta) & -\frac{1}{12}c\chi & -\frac{1}{12}b\chi & \frac{1}{9}(\psi + \omega - 2\theta) & -\frac{1}{24}c & -\frac{1}{6}b\chi \\ \frac{1}{12}c\chi & \frac{1}{18}(-2\lambda + \vartheta - 2\theta) & -\frac{1}{12}a & -\frac{1}{24}c & \frac{1}{9}(\lambda + \vartheta - 2\theta) & \frac{1}{6}a\chi \\ \frac{1}{12}b\chi & -\frac{1}{12}a & \frac{1}{18}(-2\rho + \vartheta - 2\omega) & \frac{1}{6}b\chi & -\frac{1}{6}a\chi & \frac{1}{9}(-2\rho + \vartheta + \omega) \end{bmatrix} \quad (100)$$

$$k_{41} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{18}(\psi + \omega + \theta) & -\frac{1}{24}c & -\frac{1}{24}b & \frac{1}{18}(-2\psi + \omega - 2\theta) & -\frac{1}{12}c\chi & -\frac{1}{12}b \\ -\frac{1}{24}c & -\frac{1}{18}(\lambda + \vartheta + \theta) & -\frac{1}{24}a & \frac{1}{12}c\chi & \frac{1}{18}(\lambda - 2\vartheta - 2\theta) & -\frac{1}{12}a\chi \\ -\frac{1}{24}b & -\frac{1}{24}a & -\frac{1}{18}(\rho + \vartheta + \omega) & -\frac{1}{12}b & -\frac{1}{12}a\chi & \frac{1}{18}(-2\rho - 2\vartheta + \omega) \\ \frac{1}{18}(-2\psi + \omega - 2\theta) & \frac{1}{12}c\chi & -\frac{1}{12}b & -\frac{1}{18}(\psi + \omega + \theta) & \frac{1}{24}c & -\frac{1}{24}b \\ -\frac{1}{12}c\chi & \frac{1}{18}(\lambda - 2\vartheta - 2\theta) & -\frac{1}{12}a\chi & \frac{1}{24}c & -\frac{1}{18}(\lambda + \vartheta + \theta) & \frac{1}{24}a \\ -\frac{1}{12}b & \frac{1}{12}a\chi & \frac{1}{18}(-2\rho - 2\vartheta + \omega) & -\frac{1}{24}b & \frac{1}{24}a & -\frac{1}{18}(\rho + \vartheta + \omega) \end{bmatrix} \quad (101)$$

$$k_{12} = \begin{bmatrix} \frac{1}{18}(-2\psi - 2\omega + \theta) & -\frac{1}{12}c & -\frac{1}{12}b\chi & \frac{1}{9}(-2\psi + \omega + \theta) & -\frac{1}{6}c\chi & -\frac{1}{6}b\chi \\ -\frac{1}{12}c & \frac{1}{18}(-2\lambda - 2\vartheta + \theta) & -\frac{1}{12}a\chi & \frac{1}{6}c\chi & \frac{1}{9}(\lambda - 2\vartheta + \theta) & \frac{1}{24}a \\ \frac{1}{12}b\chi & \frac{1}{12}a\chi & \frac{1}{18}(\rho - 2\vartheta - 2\omega) & \frac{1}{6}b\chi & \frac{1}{24}a & \frac{1}{9}(\rho - 2\vartheta + \omega) \\ \frac{1}{9}(-2\psi + \omega + \theta) & \frac{1}{6}c\chi & -\frac{1}{6}b\chi & \frac{1}{18}(-2\psi - 2\omega + \theta) & \frac{1}{12}c & -\frac{1}{12}b\chi \\ -\frac{1}{6}c\chi & \frac{1}{9}(\lambda - 2\vartheta + \theta) & -\frac{1}{24}a & \frac{1}{12}c & \frac{1}{18}(-2\lambda - 2\vartheta + \theta) & \frac{1}{12}a\chi \\ \frac{1}{6}b\chi & -\frac{1}{24}a & \frac{1}{9}(\rho - 2\vartheta + \omega) & \frac{1}{12}b\chi & -\frac{1}{12}a\chi & \frac{1}{18}(\rho - 2\vartheta - 2\omega) \end{bmatrix} \quad (102)$$

$$k_{22} = \begin{bmatrix} \frac{2}{9}(\psi + \omega + \theta) & \frac{1}{12}c & -\frac{1}{12}b & \frac{1}{9}(\psi - 2\omega + \theta) & \frac{1}{6}c\chi & -\frac{1}{24}b \\ \frac{1}{12}c & \frac{2}{9}(\lambda + \vartheta + \theta) & -\frac{1}{12}a & -\frac{1}{6}c\chi & \frac{1}{9}(-2\lambda + \vartheta + \theta) & \frac{1}{6}a\chi \\ -\frac{1}{12}b & -\frac{1}{12}a & \frac{2}{9}(\rho + \vartheta + \omega) & -\frac{1}{24}b & -\frac{1}{6}a\chi & \frac{1}{9}(\rho + \vartheta - 2\omega) \\ \frac{1}{9}(\psi - 2\omega + \theta) & -\frac{1}{6}c\chi & -\frac{1}{24}b & \frac{2}{9}(\psi + \omega + \theta) & -\frac{1}{12}c & -\frac{1}{12}b \\ \frac{1}{6}c\chi & \frac{1}{9}(-2\lambda + \vartheta + \theta) & -\frac{1}{6}a\chi & -\frac{1}{12}c & \frac{2}{9}(\lambda + \vartheta + \theta) & \frac{1}{12}a \\ -\frac{1}{24}b & \frac{1}{6}a\chi & \frac{1}{9}(\rho + \vartheta - 2\omega) & -\frac{1}{12}b & \frac{1}{12}a & \frac{2}{9}(\rho + \vartheta + \omega) \end{bmatrix} \quad (103)$$

$$k_{32} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{18}(\psi + \omega + \theta) & -\frac{1}{24}c & \frac{1}{24}b & \frac{1}{18}(-2\psi + \omega - 2\theta) & -\frac{1}{12}c\chi & \frac{1}{12}b \\ -\frac{1}{24}c & -\frac{1}{18}(\lambda + \vartheta + \theta) & \frac{1}{24}a & \frac{1}{12}c\chi & \frac{1}{18}(\lambda - 2\vartheta - 2\theta) & -\frac{1}{12}a\chi \\ \frac{1}{24}b & \frac{1}{24}a & -\frac{1}{18}(\rho + \vartheta + \omega) & \frac{1}{12}b & \frac{1}{12}a\chi & \frac{1}{18}(-2\rho - 2\vartheta + \omega) \\ \frac{1}{18}(-2\psi + \omega - 2\theta) & \frac{1}{12}c\chi & \frac{1}{12}b & -\frac{1}{18}(\psi + \omega + \theta) & \frac{1}{24}c & \frac{1}{24}b \\ -\frac{1}{12}c\chi & \frac{1}{18}(\lambda - 2\vartheta - 2\theta) & \frac{1}{12}a\chi & \frac{1}{24}c & -\frac{1}{18}(\lambda + \vartheta + \theta) & -\frac{1}{24}a \\ \frac{1}{12}b & -\frac{1}{12}a\chi & \frac{1}{18}(-2\rho - 2\vartheta + \omega) & \frac{1}{24}b & -\frac{1}{24}a & -\frac{1}{18}(\rho + \vartheta + \omega) \end{bmatrix} \quad (104)$$

$$k_{42} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9}(\psi + \omega - 2\theta) & \frac{1}{24}c & \frac{1}{6}b\chi & \frac{1}{18}(\psi - 2\omega - 2\theta) & \frac{1}{12}c\chi & \frac{1}{12}b\chi \\ \frac{1}{24}c & \frac{1}{9}(\lambda + \vartheta - 2\theta) & \frac{1}{6}a\chi & -\frac{1}{12}c\chi & \frac{1}{18}(-2\lambda + \vartheta - 2\theta) & -\frac{1}{12}a \\ -\frac{1}{6}b\chi & -\frac{1}{6}a\chi & \frac{1}{9}(-2\rho + \vartheta + \omega) & -\frac{1}{12}b\chi & -\frac{1}{12}a & \frac{1}{18}(-2\rho + \vartheta - 2\omega) \\ \frac{1}{18}(\psi - 2\omega - 2\theta) & -\frac{1}{12}c\chi & \frac{1}{12}b\chi & \frac{1}{9}(\psi + \omega - 2\theta) & -\frac{1}{24}c & \frac{1}{6}b\chi \\ \frac{1}{12}c\chi & \frac{1}{18}(-2\lambda + \vartheta - 2\theta) & \frac{1}{12}a & -\frac{1}{24}c & \frac{1}{9}(\lambda + \vartheta - 2\theta) & -\frac{1}{6}a\chi \\ -\frac{1}{12}b\chi & \frac{1}{12}a & \frac{1}{18}(-2\rho + \vartheta - 2\omega) & -\frac{1}{6}b\chi & \frac{1}{6}a\chi & \frac{1}{9}(-2\rho + \vartheta + \omega) \end{bmatrix} \quad (105)$$

$$k_{13} = k_{42} \quad (106)$$

$$k_{23} = k_{32} \quad (107)$$

$$k_{33} = k_{22} \quad (108)$$

$$\underline{k}_{43} = \underline{k}_{12} \quad (109)$$

$$\underline{k}_{14} = \underline{k}_{41} \quad (110)$$

$$\underline{k}_{24} = \underline{k}_{31} \quad (111)$$

$$\underline{k}_{34} = \underline{k}_{21} \quad (112)$$

$$\underline{k}_{44} = \underline{k}_{11} \quad (113)$$

sendo:

$$\psi = \frac{bc}{a} (1 - \nu);$$

$$\lambda = \frac{ac}{b} (1 - \nu);$$

$$\rho = \frac{ab}{c} (1 - \nu);$$

$$\mathcal{g} = \frac{bc}{a} \left(\frac{1}{2} - \nu \right);$$

$$\omega = \frac{ac}{b} \left(\frac{1}{2} - \nu \right);$$

$$\theta = \frac{ab}{c} \left(\frac{1}{2} - \nu \right);$$

$$\psi = \frac{1}{2} - 2\nu. \text{ (FAGLIONI, 2006, p.72 a 75)}$$

4.4 MATRIZ DE MASSAS

A matriz de massas de acordo com a equação (60) é definida por:

$$\begin{aligned} \underline{m} &= \int_{V_e} \underline{\rho} \underline{\phi}^T \underline{\phi} dV_e \\ \underline{m} &= \int_{V_e} \underline{\rho} \underline{\phi}^T \underline{\phi} dx.dy.dz \end{aligned} \quad (114)$$

Com base na definição das coordenadas adimensionais dada pela equação (90) é possível escrever:

$$dx = d\xi.a$$

$$dy = d\eta.b$$

$$dz = d\zeta.c$$

4.5 MATRIZ DE AMORTECIMENTO

A dificuldade em determinar a matriz de amortecimento “ \tilde{c} ”, dada pela equação (61), está no obstáculo em obter-se a magnitude do parâmetro de amortecimento viscoso “ μ ”.

“O grande obstáculo está relacionado com a determinação da magnitude do parâmetro de amortecimento viscoso “ μ ” do material, HALLAN et al. (1978), sem o qual a matriz “ c ” fica indeterminada.” (RODRIGUES, 1997, p. 109).

Segundo Cook et al (1989), citado por Waidemam (2004, p.43) tal procedimento é impraticável, pois as propriedades de amortecimento dos materiais não são suficientemente definidas para que se permita uma análise deste tipo.

Para contornar tal dificuldade utiliza-se neste trabalho, dentre os métodos existentes, o método de amortecimento modal, também conhecido como amortecimento Rayleigh, onde o amortecimento viscoso é introduzido por meio de frações específicas do amortecimento crítico.

4.5.1 Frequências naturais de vibração

Dado um sistema estrutural com comportamento linear, livre de carregamentos externos, e desprovido de qualquer tipo de mecanismo de amortecimento, pode-se particularizar a equação (64) que rege o comportamento dinâmico estrutural da seguinte forma:

$$\tilde{M} \tilde{D}'' + \tilde{K} \tilde{D} = \tilde{0} \quad (117)$$

onde “ $\tilde{0}$ ” é o vetor nulo.

A solução analítica da equação (117) é dada por:

$$\tilde{D} = \tilde{X} \text{sen } \omega t \quad (118)$$

$$\tilde{D}' = \omega \tilde{X} \text{cos } \omega t$$

$$\tilde{D}'' = -\omega^2 \tilde{X} \text{sen } \omega t$$

Nesta equação, “ \tilde{X} ” é um vetor chamado de autovetor, formado pelas máximas amplitudes dos deslocamentos nodais, e “ ω ” é um escalar que quantifica a frequência natural de vibração da estrutura.

Substituindo-se a solução dada pela equação (118) na equação diferencial de vibração livre sem amortecimento (117) obtém-se:

$$\left(-\tilde{M} \tilde{X} \omega^2 + \tilde{K} \tilde{X} \right) \text{sen} \omega t = \tilde{0}$$

Para que tal produto seja nulo, uma vez que a parcela “ $\text{sen} \omega t$ ” pode assumir qualquer valor, é necessário que faça a seguinte imposição:

$$\tilde{M} \tilde{X} \omega^2 = \tilde{K} \tilde{X} \quad (119)$$

Multiplicando-se ambos os membros por “ \tilde{K}^{-1} ”, obtém-se:

$$\left(\tilde{K}^{-1} \tilde{M} \right) \tilde{X} = \left(\tilde{K}^{-1} \tilde{K} \right) \tilde{X} \frac{1}{\omega^2}$$

$$\left(\tilde{K}^{-1} \tilde{M} \right) \tilde{X} = \tilde{X} \Lambda$$

onde “ Λ ” é o autovalor dado por:

$$\Lambda = \frac{1}{\omega^2} \quad (120)$$

Devido o produto “ $\tilde{K}^{-1} \tilde{M}$ ” resultar em uma matriz não simétrica, será desenvolvida a equação (117) primeiramente aplicando-se a decomposição de Cholesky na matriz “ \tilde{K} ”, tem-se:

$$\tilde{K} = \tilde{L}^T \tilde{L} \quad (121)$$

onde “ \tilde{L} ” é uma matriz triangular superior não singular.

Utilizando-se a matriz “ \tilde{L} ” para transformar os autovetores tem-se:

$$\tilde{\bar{X}} = \tilde{L} \tilde{X} \quad (122)$$

ou

$$\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{L}^{-1} \underset{\sim}{\bar{X}} \quad (123)$$

Multiplicando-se a equação (119) por “ $\left[\underset{\sim}{L}^T\right]^{-1}$ ” e substituindo as equações (122) e (123) obtém-se:

$$\left[\underset{\sim}{L}^T\right]^{-1} \underset{\sim}{M} \underset{\sim}{L}^{-1} \underset{\sim}{\bar{X}} = \left[\underset{\sim}{L}^T\right]^{-1} \underset{\sim}{K} \underset{\sim}{L}^{-1} \underset{\sim}{\bar{X}} \Lambda \quad (124)$$

Substituindo-se a equação (121) na equação acima, obtém-se:

$$\begin{aligned} \left[\underset{\sim}{L}^T\right]^{-1} \underset{\sim}{M} \underset{\sim}{L}^{-1} \underset{\sim}{\bar{X}} &= \left[\underset{\sim}{L}^T\right]^{-1} \underset{\sim}{L}^T \underset{\sim}{L} \underset{\sim}{L}^{-1} \underset{\sim}{\bar{X}} \Lambda \\ \left[\underset{\sim}{L}^T\right]^{-1} \underset{\sim}{M} \underset{\sim}{L}^{-1} \underset{\sim}{\bar{X}} &= \underset{\sim}{\bar{X}} \Lambda \end{aligned} \quad (125)$$

Segundo Bathe (1996), citado por Rodrigues (1997, p.112), o produto “ $\left[\underset{\sim}{L}^T\right]^{-1} \underset{\sim}{M} \underset{\sim}{L}^{-1}$ ” resulta uma matriz simétrica, permitindo-se a utilização do método de Jacobi que é indicado para a obtenção dos autovalores e autovetores de tal matriz.

Uma vez obtido cada um dos autovalores “ Λ ”, pode-se calcular as frequências naturais de vibração da estrutura através da equação:

$$\omega_i = \sqrt{\frac{1}{\Lambda_i}} \quad (126)$$

4.5.2 Amortecimento Rayleigh

“O amortecimento Rayleigh é definido pela combinação linear entre as matrizes de rigidez e de massas, CLOUGH et al. (1975), sendo que tal amortecimento é dado por:” (RODRIGUES, 1997, p.113)

$$\underset{\sim}{C} = \lambda_m \underset{\sim}{M} + \lambda_k \underset{\sim}{K} \quad (127)$$

onde “ λ_m ” e “ λ_k ” são constantes da matriz de amortecimento e quantificam a proporção existente entre as matrizes de massas e de rigidez.

“A relação existente entre as constantes de amortecimento “ λ_m ” e “ λ_k ” e a fração do amortecimento crítico “ ξ ” para uma dada frequência natural de vibração “ ω ”, é dada pela equação (128), COOK et al. (1989).” (RODRIGUES, 1997, p.113)

$$\xi_i = \frac{1}{2} \left(\lambda_k \omega_i + \frac{\lambda_m}{\omega_i} \right) \quad (128)$$

As constantes de amortecimento podem ser determinadas utilizando-se frações do amortecimento crítico para duas diferentes frequências naturais de vibração:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{1}{2} \left(\lambda_k \omega_1 + \frac{\lambda_m}{\omega_1} \right) \\ \xi_2 &= \frac{1}{2} \left(\lambda_k \omega_2 + \frac{\lambda_m}{\omega_2} \right) \end{aligned} \quad (129)$$

Resolvendo o sistema (129) obtém-se:

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \frac{2(\xi_2 \omega_2 - \xi_1 \omega_1)}{(\omega_2^2 - \omega_1^2)} \\ \lambda_m &= \frac{2\omega_1 \omega_2 (\xi_1 \omega_2 - \xi_2 \omega_1)}{(\omega_2^2 - \omega_1^2)} \end{aligned} \quad (130)$$

Usualmente, os valores das frequências naturais são tomados da seguinte forma, COOK et al. (1989): para “ ω_1 ” adota-se a menor frequência natural de vibração da estrutura e para “ ω_2 ” adota-se uma frequência relacionada com o carregamento externo de maior importância ou “ ω_2 ” a frequência subsequente à “ ω_1 ”. (RODRIGUES, 1997, p.114)

Com relação às frações do amortecimento crítico, as mesmas são dadas em função do tipo de material e do tipo de sistema estrutural empregado, lembrando-se que o amortecimento crítico é dado pela relação “ $\xi_i=1$ ”. Portanto para estruturas convencionais o valor de “ ξ_i ” é sempre menor que a unidade (amortecimento subcrítico).

Já a condição de amortecimento crítico pode ser descrita como sendo uma pequena quantidade de amortecimento, necessária para que não ocorra oscilação, na resposta de um sistema livre de carregamento externo.

4.6 FORÇAS NODAIS EQUIVALENTES

Quando o carregamento externo atuar fora do nó estrutural, é necessária a obtenção de forças nodais equivalentes do elemento.

As forças nodais equivalentes do elemento para carregamento no volume, na superfície do elemento e, concentrado fora do nó estrutural, são determinadas utilizando-se a equação (63):

$$\underline{f}_E = \int_{V_e} \underline{\phi}^T \underline{\phi} dV_e \cdot \underline{P}_{\sim V_e}^n \quad (131)$$

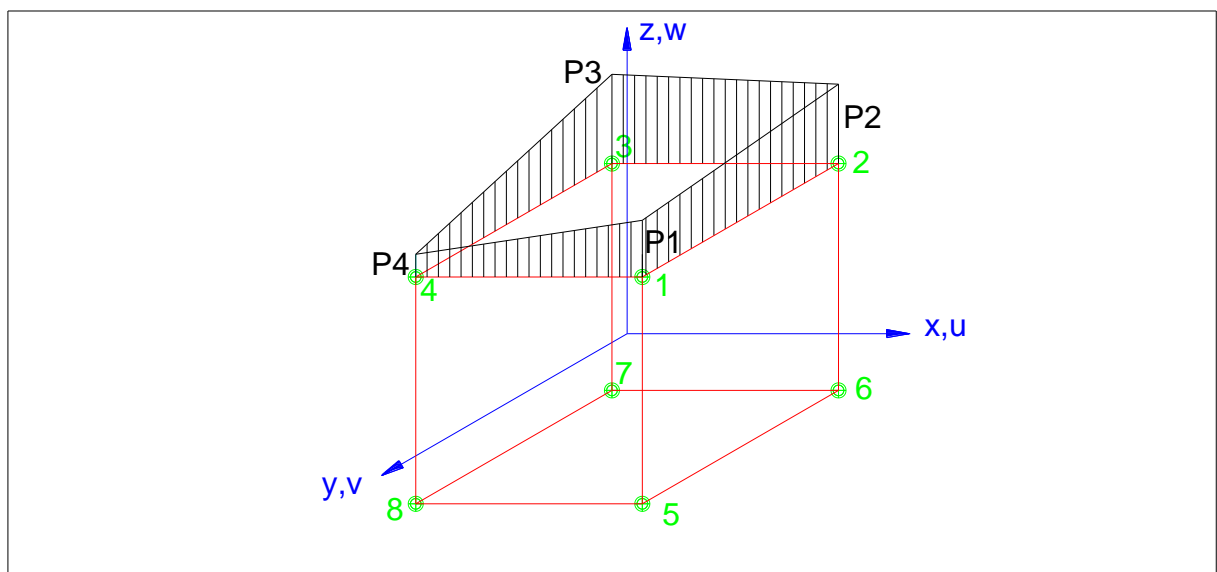
$$\underline{f}_E = \int_{S_e} \underline{\phi}^T \underline{\phi} dS_e \cdot \underline{P}_{\sim S_e}^n \quad (132)$$

$$\underline{f}_E = \underline{\phi}^T \underline{P}_{\sim C} \quad (133)$$

4.6.1 Forças nodais equivalentes para carregamento na superfície

Para resolver a integral dada pela expressão (132) é necessário encontrar a matriz do carregamento $\underline{\phi}_{\sim p}$, que será determinada na sequência. A figura 21 representa o carregamento superficial na direção do eixo z, onde com os valores de P1, P2, P3 e P4 deve-se formar um plano.

Figura 21 - Carregamento superficial no elemento finito prismático regular linear



Fonte: Elaboração do próprio autor.

$$\alpha_0 + \alpha_1 a + \alpha_2 (-b) + \alpha_3 c + \alpha_4 (-ab) + \alpha_5 ac + \alpha_6 (-bc) + \alpha_7 (-abc) = P2$$

$$\alpha_0 + \alpha_1 (-a) + \alpha_2 (-b) + \alpha_3 c + \alpha_4 ab + \alpha_5 (-ac) + \alpha_6 (-bc) + \alpha_7 abc = P3$$

$$\alpha_0 + \alpha_1 (-a) + \alpha_2 b + \alpha_3 c + \alpha_4 (-ab) + \alpha_5 (-ac) + \alpha_6 bc + \alpha_7 (-abc) = P4$$

$$\alpha_0 + \alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 (-c) + \alpha_4 ab + \alpha_5 (-ac) + \alpha_6 (-bc) + \alpha_7 (-abc) = 0$$

$$\alpha_0 + \alpha_1 a + \alpha_2 (-b) + \alpha_3 (-c) + \alpha_4 (-ab) + \alpha_5 (-ac) + \alpha_6 bc + \alpha_7 abc = 0$$

$$\alpha_0 + \alpha_1 (-a) + \alpha_2 (-b) + \alpha_3 (-c) + \alpha_4 ab + \alpha_5 ac + \alpha_6 bc + \alpha_7 (-abc) = 0$$

$$\alpha_0 + \alpha_1 (-a) + \alpha_2 b + \alpha_3 (-c) + \alpha_4 (-ab) + \alpha_5 ac + \alpha_6 (-bc) + \alpha_7 abc = 0$$

Resolvendo o sistema:

$$\alpha_0 = \frac{P1 + P2 + P3 + P4}{8}$$

$$\alpha_1 = \frac{P1 + P2 - P3 - P4}{8a}$$

$$\alpha_2 = \frac{P1 - P2 - P3 + P4}{8b}$$

$$\alpha_3 = \frac{P1 + P2 + P3 + P4}{8c}$$

$$\alpha_4 = \frac{P1 - P2 + P3 - P4}{8ab}$$

$$\alpha_5 = \frac{P1 + P2 - P3 - P4}{8ac}$$

$$\alpha_6 = \frac{P1 - P2 - P3 + P4}{8bc}$$

$$\alpha_7 = \frac{P1 - P2 + P3 - P4}{8abc}$$

Para o caso particular de $P1=P2=P3=P4=P$:

$$\alpha_0 = \frac{P}{2}$$

$$\alpha_3 = \frac{P}{2c}$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = \alpha_7 = 0$$

$$S_z(x, y, z) = \frac{P}{2} + \frac{Pz}{2c}$$

Na forma matricial os esforços superficiais podem ser escritos como segue:

$$\underset{\sim}{f_e} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2Pab}{3} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2Pab}{3} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2Pab}{3} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2Pab}{3} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{Pab}{3} \\ 0 \\ \frac{Pab}{3} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{Pab}{3} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{Pab}{3} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{Pab}{3} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{Pab}{3} \\ 3 \end{bmatrix} \quad (137)$$

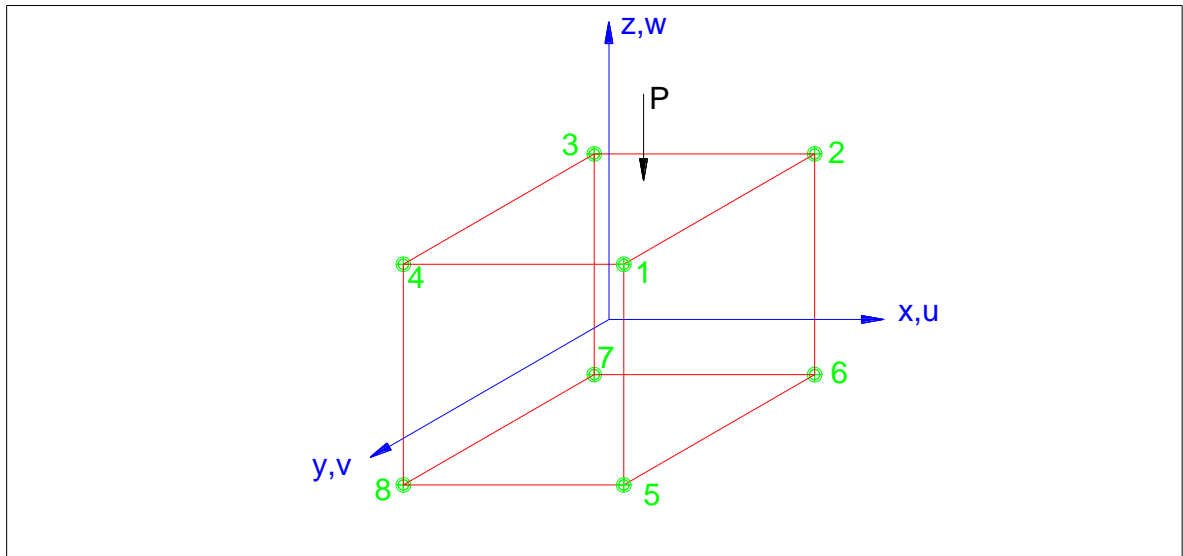
4.6.2 Forças nodais equivalentes para esforço concentrado

O esforço concentrado foi definido pela expressão (4):

$$\underset{\sim}{p}^T = \{ C_x \ C_y \ C_z \}$$

Serão determinadas as forças nodais equivalentes, com base no carregamento concentrado dado na figura 22.

Figura 22 - Carga concentrada no elemento finito prismático regular linear



Fonte: Elaboração do próprio autor.

A matriz do carregamento concentrado da figura 22 é:

$$\underset{\sim}{p}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \end{bmatrix} \quad (138)$$

As expressões (96) e (138) serão substituídas na (133) para determinação das forças nodais equivalentes em coordenadas cartesianas (x,y,z):

$$\underset{\sim}{f}_E = \underset{\sim}{\phi}^T \underset{\sim}{p}_c$$

$$\underset{\sim}{f}e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{P}{8}\left(\frac{x}{a}+1\right)\left(\frac{y}{b}+1\right)\left(\frac{z}{c}+1\right) \\ 0 \\ \frac{P}{8}\left(\frac{x}{a}+1\right)\left(\frac{y}{b}-1\right)\left(\frac{z}{c}+1\right) \\ 0 \\ -\frac{P}{8}\left(\frac{x}{a}-1\right)\left(\frac{y}{b}-1\right)\left(\frac{z}{c}+1\right) \\ 0 \\ \frac{P}{8}\left(\frac{x}{a}-1\right)\left(\frac{y}{b}+1\right)\left(\frac{z}{c}+1\right) \\ 0 \\ \frac{P}{8}\left(\frac{x}{a}+1\right)\left(\frac{y}{b}+1\right)\left(\frac{z}{c}-1\right) \\ 0 \\ -\frac{P}{8}\left(\frac{x}{a}+1\right)\left(\frac{y}{b}-1\right)\left(\frac{z}{c}-1\right) \\ 0 \\ \frac{P}{8}\left(\frac{x}{a}-1\right)\left(\frac{y}{b}-1\right)\left(\frac{z}{c}-1\right) \\ 0 \\ -\frac{P}{8}\left(\frac{x}{a}-1\right)\left(\frac{y}{b}+1\right)\left(\frac{z}{c}-1\right) \end{bmatrix} \quad (139)$$

Para o caso particular da força P estiver na linha situada entre o nó 3 e o nó 2 ($x=x$; $y=-b$; $z=c$), as forças nodais equivalentes para o carregamento concentrado ficam representadas por:

$$f_{\sim} e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{P}{2}\left(\frac{x}{a} + 1\right) \\ 0 \\ \frac{P}{2}\left(\frac{x}{a} - 1\right) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(140)

5 ASPECTOS COMPUTACIONAIS

5.1 GENERALIDADES

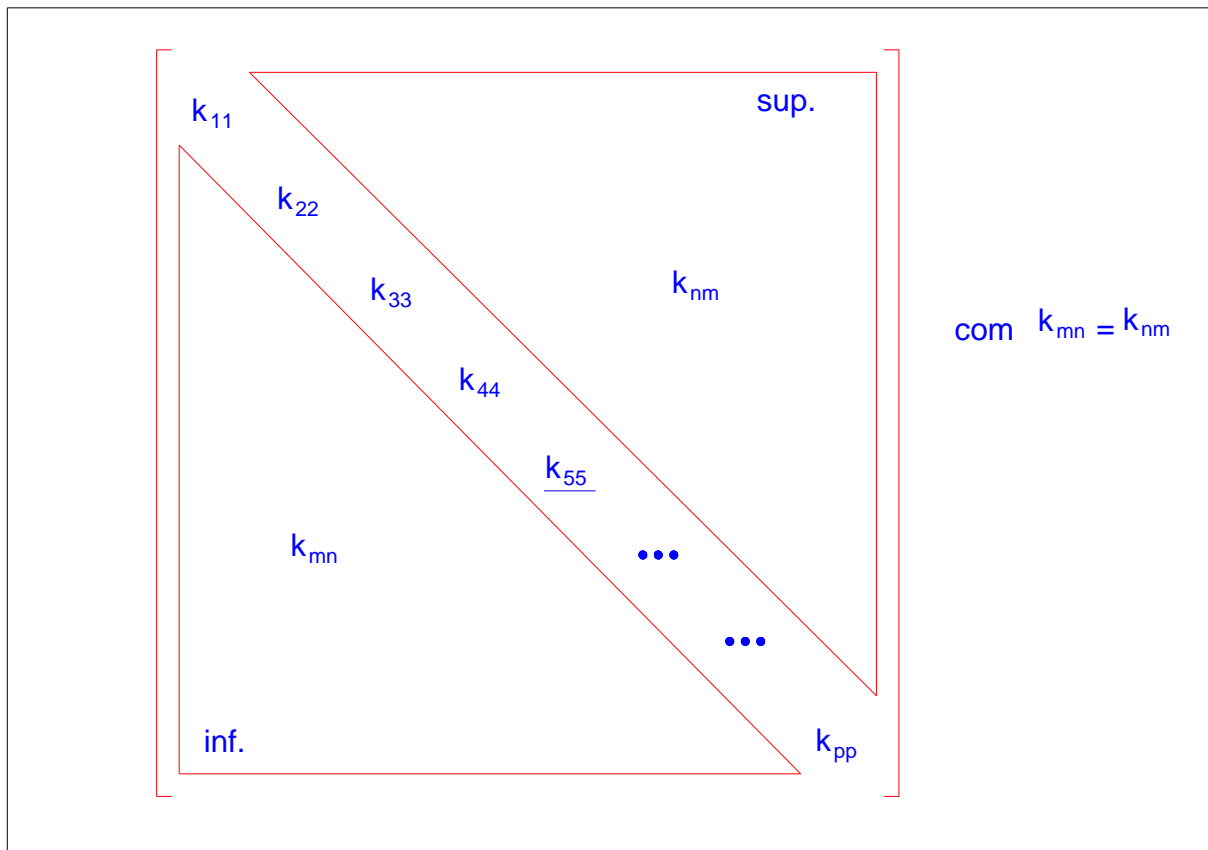
Para ilustrar o funcionamento do *software* desenvolvido na linguagem MATLAB no decorrer deste trabalho, apresenta-se neste capítulo uma visão geral do código computacional, referente à implementação do método de Newmark na análise dinâmica de placas.

A estrutura do programa computacional foi realizada em módulos, permitindo uma fácil adaptação para análise de outros elementos estruturais.

5.2 MONTAGEM DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

Como a maior parte das matrizes estruturais são simétricas, somente há necessidade de se armazenarem os coeficientes pertencentes à parte triangular superior, ou inferior, e os coeficientes da diagonal principal, como ilustra a figura 23.

Figura 23 - Esquematização de matrizes simétricas



Fonte: Elaboração do próprio autor.

5.2.1 Processo de expansão e acumulação

A matriz de rigidez global “ \tilde{K}_s ” de uma estrutura é obtida pela contribuição das matrizes de rigidez de cada elemento, conforme mostra a equação (141). Então cada coeficiente da matriz “ \tilde{K}_s ” corresponde à somatória das contribuições dos vários elementos da matriz de rigidez de cada elemento, que concorrem a um mesmo nó, formando uma matriz simétrica.

$$\tilde{K}_s = \sum_{l=1}^{ne} \tilde{k}_s^l \quad (141)$$

5.2.2 Armazenamento computacional da matriz de rigidez

O armazenamento da matriz de rigidez da estrutura foi realizado com a técnica de altura efetiva de coluna ou skyline, que permite armazenar dentro de um vetor as colunas da parte triangular superior da matriz e os elementos da diagonal principal, a partir do primeiro elemento não nulo de cada coluna. Este armazenamento é realizado em forma sequencial por coluna, de cima para baixo. O vetor auxiliar IPOS é necessário no armazenamento skyline, pois tem como função indicar as posições dos elementos da diagonal principal da matriz.

A partir do armazenamento da matriz de rigidez da estrutura em skyline, foi determinada a matriz de rigidez da estrutura, no formato de matriz quadrada e simétrica.

5.3 CONDIÇÕES DE CONTORNO

Para resolver o sistema de equações:

$$\tilde{G} \cdot \Delta \tilde{D}_k = \tilde{R}(\tilde{D}_k) \quad (142)$$

É necessário considerar os vínculos fazendo com que a matriz \tilde{G} deixe de ser singular.

Neste trabalho será utilizado a técnica dos zeros e um, que utiliza o artifício de substituir em uma direção restringida “i”, todos os coeficientes “ G_{ij} ” da linha “i”, com $j \neq i$, e da coluna “j”, com $j = i$, por zeros, e o coeficiente “ G_{ii} ” da diagonal principal por um, conforme mostra a equação (143), e no vetor de resíduos substitui-se o coeficiente “ R_i ” por zero.

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & 0 & \dots & G_{1n} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & 0 & \dots & G_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{n1} & G_{n2} & \dots & 0 & \dots & G_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta D_1 \\ \Delta D_2 \\ \dots \\ \Delta D_i \\ \dots \\ \Delta D_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ R_n \end{bmatrix} \quad (143)$$

Da equação (143) em sua linha i :

$\Delta D_i = 0$, foi realizada a restrição.

5.4 SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

A resolução do sistema de equações foi realizada pelo Método de Cholesky.

O objetivo é resolver o sistema de equações determinando o $\Delta D_{\sim k}$.

$$G_{\sim} \cdot \Delta D_{\sim k} = R(D_{\sim k}) \quad (142)$$

Inicialmente faz a decomposição da matriz de rigidez global em duas matrizes:

$$G_{\sim} = G_t^T G_t \quad (144)$$

onde G_t é uma matriz triangular superior.

Substituindo a expressão (144) em (142):

$$G_t^T \cdot G_{\sim} \cdot \Delta D_{\sim k} = R(D_{\sim k})$$

$$G_t^T \cdot Y_{\sim} = R(D_{\sim k}) \quad (145)$$

Determina-se Y_{\sim} da equação (145) correspondendo a um processo de substituição.

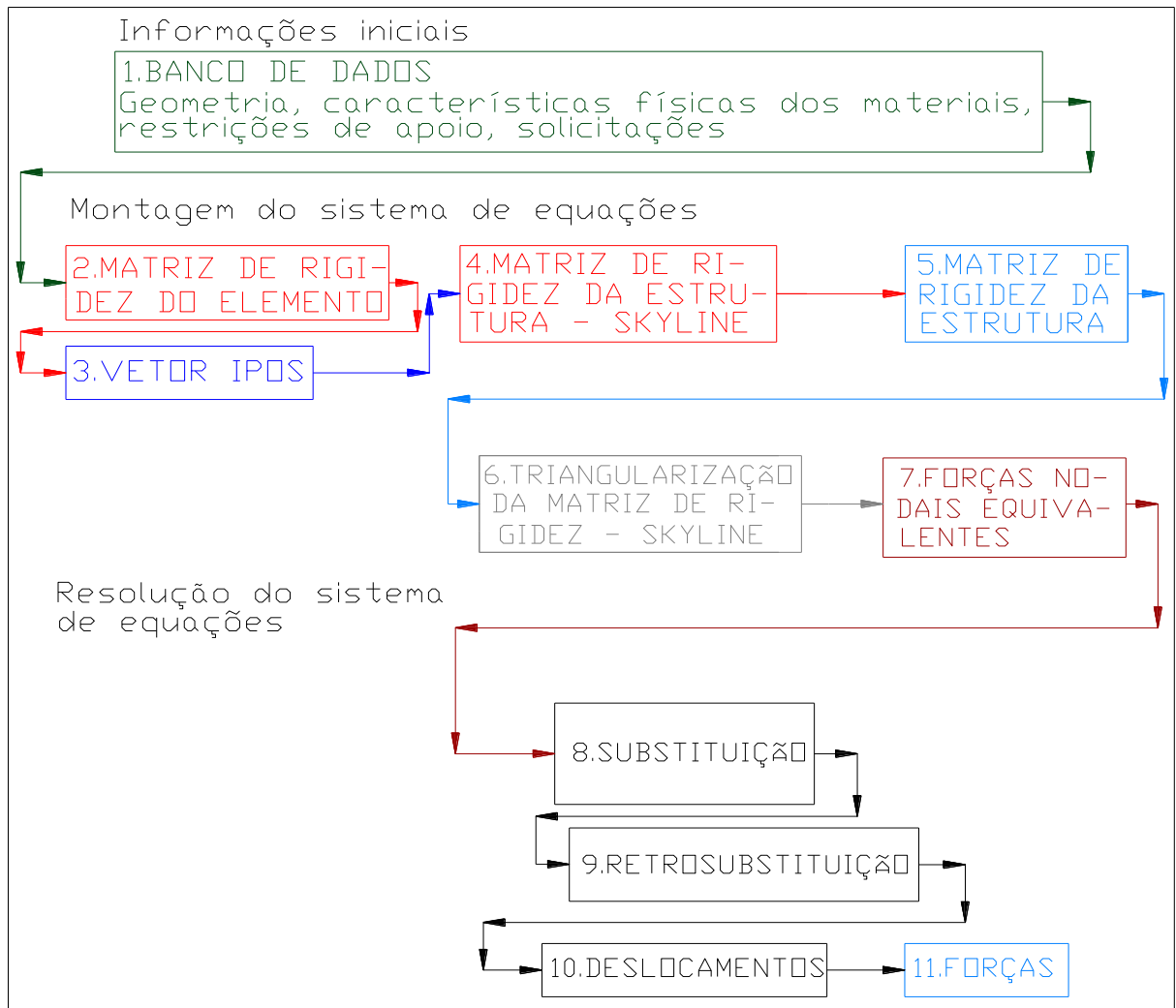
$$\underset{\sim t}{G} . \underset{\sim k}{\Delta D} = \underset{\sim}{Y} \quad (146)$$

O processo de retrosubstituição resolve o sistema (146) determinando o $\underset{\sim k}{\Delta D}$.

5.5 ESQUEMA GERAL DE CÁLCULO

O esquema geral de cálculo é ilustrado pela figura 24 para análise estática, pela figura 25 para análise estática com carregamento incremental, e pela figura 26 para análise dinâmica, que está em conformidade com a figura 13 – Diagrama de blocos do método de Newmark, sendo que cada bloco contém o nome de uma sub-rotina específica, cuja função é descrita no item 5.5.1 deste trabalho.

Figura 24 - Etapas das sub-rotinas do programa para cálculo da análise estática



Fonte: Elaboração do próprio autor.

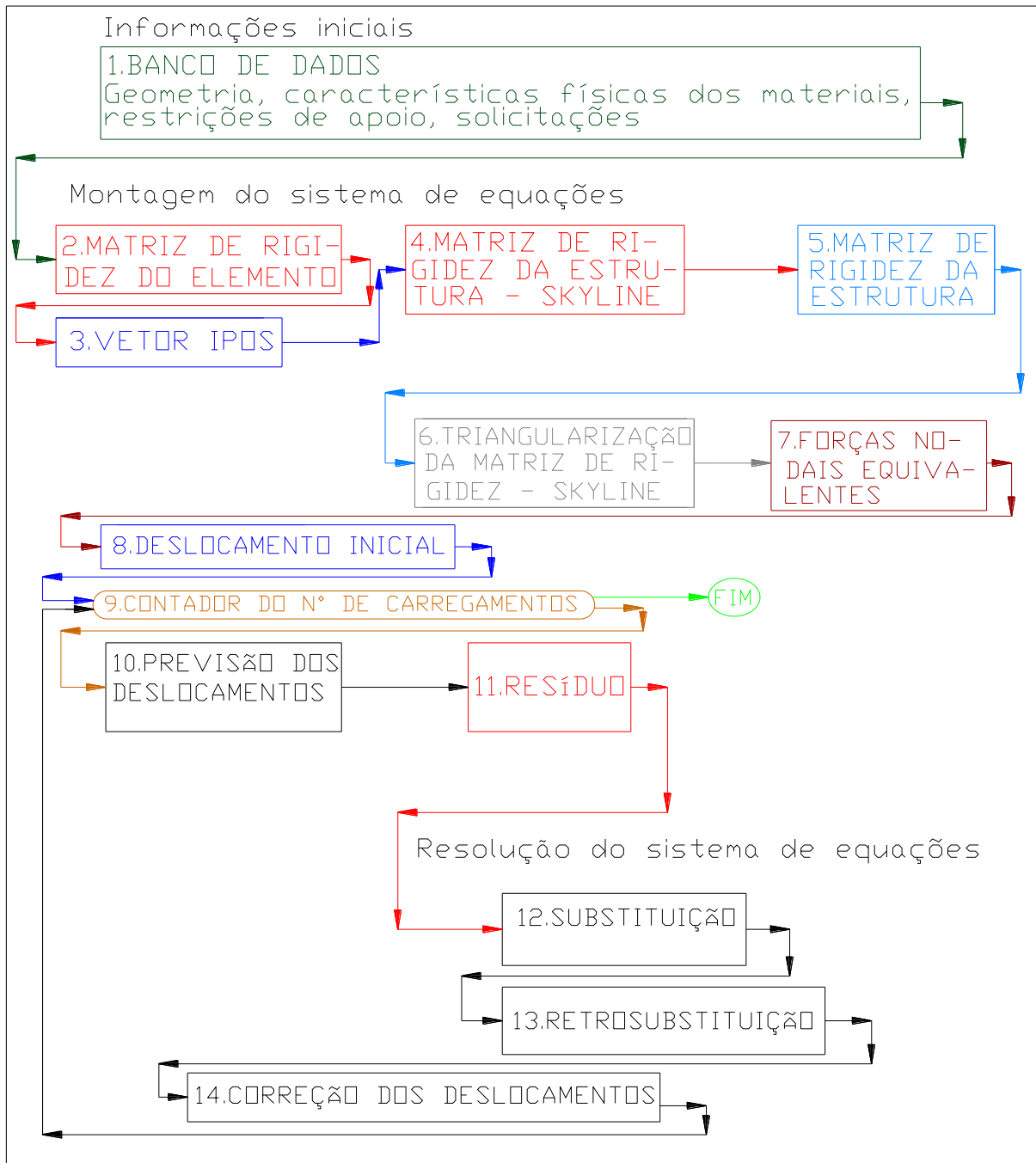
As sub-rotinas 10.DESLOCAMENTO e 11.FORÇAS foram determinadas com base na expressão:

$$\underset{\sim}{K} \underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{F}_E \quad (65)$$

Para determinar a sub-rotina 10.DESLOCAMENTOS foi utilizada a sub-rotina “4.MATRIZ DE RIGIDEZ DA ESTRUTURA – SKYLINE”, com as condições de contorno da estrutura, com a técnica dos zeros e um.

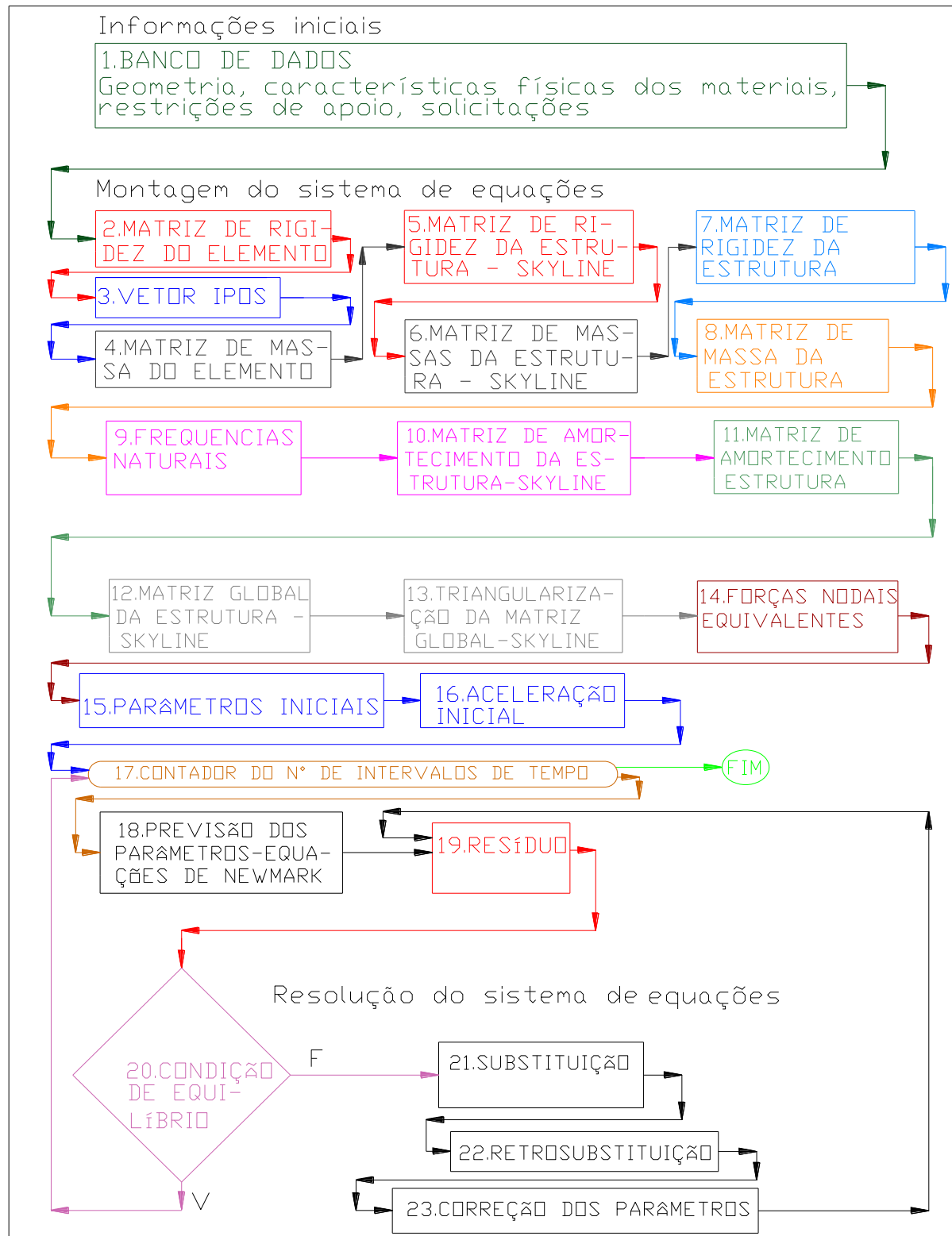
A sub-rotina “11. FORÇAS” têm como objetivo determinar as reações de apoios, onde se utilizou da sub-rotina “5. MATRIZ DE RIGIDEZ DA ESTRUTURA”, em forma quadrada e sem as condições de contorno da estrutura.

Figura 25 - Etapas das sub-rotinas do programa para cálculo da análise estática com carregamento incremental



Fonte:Elaboração do próprio autor.

Figura 26 - Etapas das sub-rotinas do programa para cálculo da análise dinâmica



Fonte: Elaboração do próprio autor.

5.5.1 Descrição das sub-rotinas

A descrição das funções de cada sub-rotina contida na figura 26 é apresentada a seguir. A determinação de cada sub-rotina deve ser determinada respeitando-se a ordem de sua numeração.

Sub-rotina “1.BANCO DE DADOS”

No banco de dados são fornecidos os seguintes dados: características físicas dos materiais, geometria, vinculação e solicitação da estrutura.

Sub-rotina “2.MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO”

Determina a matriz de rigidez do elemento finito prismático regular linear “ \tilde{k} ”, de acordo com a equação (97) dada no item 4.3.

Sub-rotina “3.VETOR IPOS”

O vetor auxiliar IPOS armazena as posições dos elementos da diagonal principal da matriz de rigidez ou de massa da estrutura.

Sub-rotina “4.MATRIZ DE MASSAS DO ELEMENTO”

Determina a matriz de massas do elemento finito prismático regular linear “ \tilde{m} ”, conforme a equação (116) dada no item 4.4.

Sub-rotina “5.MATRIZ DE RIGIDEZ DA ESTRUTURA-SKYLINE”

A matriz de rigidez da estrutura “ \tilde{K} ” é calculada com a somatória das contribuições dos vários elementos da matriz de rigidez que corresponde a um mesmo nó.

Foi armazenada a matriz de rigidez da estrutura “ \tilde{K} ” com a técnica de altura efetiva de coluna ou skyline.

Foram aplicadas na matriz de rigidez da estrutura “ \tilde{K} ” as condições de contorno da estrutura, com a técnica dos zeros e um.

Sub-rotina “6.MATRIZ DE MASSAS DA ESTRUTURA-SKYLINE”

A matriz de massas da estrutura “ \tilde{M} ” é determinada fazendo a somatória das contribuições dos vários elementos da matriz de massas que correspondem a um mesmo nó. O armazenamento da matriz de massa da estrutura foi realizado pela técnica skyline.

Na matriz de massas da estrutura “ \tilde{M} ” foi aplicada as condições de contorno da estrutura.

Sub-rotina “7.MATRIZ DE RIGIDEZ DA ESTRUTURA”

É determinada a partir da sub-rotina “5.MATRIZ DE RIGIDEZ DA ESTRUTURA-SKYLINE”. A matriz de rigidez da estrutura “ \tilde{K} ” tem forma quadrada e simétrica, e com a aplicação das condições de contorno da estrutura.

Sub-rotina “8.MATRIZ DE MASSAS DA ESTRUTURA”

É determinada a partir da sub sub-rotina “6.MATRIZ DE MASSAS DA ESTRUTURA-SKYLINE”. A matriz de rigidez da estrutura “ \tilde{M} ” tem forma quadrada e simétrica, e com as condições de contorno da estrutura.

Sub-rotina “9.FREQUÊNCIAS NATURAIS”

Calcula os valores das frequências naturais de vibração da estrutura.

Os valores de “ ω_1 ” e “ ω_2 ” são determinados conforme descrito no item 4.5.1 com o auxílio da equação (126).

Sub-rotina “10.MATRIZ DE AMORTECIMENTO DA ESTRUTURA-SKYLINE”

Calcula a matriz de amortecimento global “ \tilde{C} ” da estrutura, conforme equação (127) do item 4.5.2 deste trabalho. A matriz de amortecimento da estrutura foi determinada utilizando as matrizes de rigidez e de massa na forma skyline, portanto a matriz “ \tilde{C} ” tem formato de um vetor, e tem as condições de contorno da estrutura.

Sub-rotina “11.MATRIZ DE AMORTECIMENTO DA ESTRUTURA”

Calcula a matriz de amortecimento global “ \tilde{C} ” da estrutura em formato de matriz quadrada simétrica, conforme equação (127) do item 4.5.2 deste trabalho. A matriz de amortecimento da estrutura foi determinada a partir da Sub-rotina “7.MATRIZ DE RIGIDEZ DA ESTRUTURA” e da Sub-rotina “8.MATRIZ DE MASSAS DA ESTRUTURA”, e tem as condições de contorno da estrutura.

Sub-rotina “12.MATRIZ GLOBAL DA ESTRUTURA -SKYLINE”

Com base na equação (85) dada no item (3.5.1), é determinada a matriz global da estrutura “ \tilde{G} ” dada por:

$$\tilde{G} = \left\{ \tilde{M} \frac{1}{\beta \Delta t^2} + \tilde{C} \frac{\gamma}{\beta \Delta t} + \tilde{K} \right\}$$

A matriz global da estrutura \tilde{G} foi determinada utilizando as matrizes de rigidez, de massa, e de amortecimento na forma skyline, portanto a matriz “ \tilde{G} ” tem formato de um vetor, e tem as condições de contorno da estrutura.

Sub-rotina “13.TRIANGULARIZAÇÃO”

A equação (144) demonstra a decomposição da matriz de rigidez global em duas matrizes.

$$\tilde{G} = \tilde{G}_t^T \tilde{G}_t \quad (144)$$

A etapa de triangularização determina a matriz \tilde{G}_t , que é a matriz triangular superior.

Sub-rotina “14.FORÇAS NODAIS EQUIVALENTES”

Calcula as forças nodais equivalentes, conforme as equações (137) do item 4.6.1 e a (140) do item 4.6.2.

Sub-rotina “15.PARÂMETROS INICIAIS”

Para o instante inicial t_0 são fornecidos o deslocamento inicial \tilde{D}_0 e a aceleração inicial \tilde{D}_0^\bullet .

Sub-rotina “16.ACELERAÇÃO INICIAL”

Para obter as acelerações “ \tilde{D}_0^\bullet ” utiliza-se a equação de equilíbrio (64) na seguinte forma:

$$\tilde{D}_0^\bullet = \tilde{M}^{-1} \left\{ \tilde{F}_E(0) - \tilde{C} \tilde{D}_0^\bullet - \tilde{K} \tilde{D}_0 \right\}$$

As matrizes “ \tilde{C} ” e “ \tilde{K} ”, utilizadas para a determinação de “ \tilde{D}_0^\bullet ”, são quadradas.

Sub-rotina “17.CONTADOR DO N° DE INTERVALOS DE TEMPO”

Fornece o número de intervalos de tempo.

Sub-rotina “18.PREVISÃO DOS PARÂMETROS – EQUAÇÕES DE NEWMARK”

Faz uma previsão dos parâmetros “ \tilde{D}_k^\bullet ”, “ \tilde{D}_k ” e “ \tilde{D}_k^\bullet ” através das equações dadas no item 3.5.1:

$$\tilde{D}_k^\bullet = \tilde{D}_{n-1}^\bullet$$

$$\tilde{D}_k^\bullet = \tilde{D}_{k-1}^\bullet + (1-\gamma)\Delta t \tilde{D}_{k-1}^\bullet + \gamma\Delta t \tilde{D}_k^\bullet \quad (74)$$

$$\tilde{D}_k = \tilde{D}_{k-1} + \Delta t \tilde{D}_{k-1}^\bullet + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\Delta t^2 \tilde{D}_{k-1}^\bullet + \beta\Delta t^2 \tilde{D}_k^\bullet \quad (75)$$

Sub-rotina “19.RESÍDUO”

Calcula o resíduo “ $\tilde{R}(\tilde{D}_k)$ ” com auxílio da equação (72) dada no item 3.3:

$$\underset{\sim}{R} \left(\underset{\sim}{D}_k \right) = \underset{\sim}{F}_E(t) - \underset{\sim}{M} \underset{\sim}{\ddot{D}}_k - \underset{\sim}{C} \underset{\sim}{\dot{D}}_k - \underset{\sim}{K} \underset{\sim}{D}_k \quad (72)$$

As matrizes “ $\underset{\sim}{M}$ ” “ $\underset{\sim}{C}$ ” e “ $\underset{\sim}{K}$ ” são quadradas.

Sub-rotina “20.CONDIÇÃO DE EQUILÍBRIO”

A condição de equilíbrio é realizada através da relação:

$$\frac{\| \underset{\sim}{R}(\underset{\sim}{D}_k) \|}{\| \underset{\sim}{F}_E(n\Delta t) \|} < \varepsilon$$

onde ε é a tolerância a ser informada ao programa computacional.

Sub-rotina “21.SUBSTITUIÇÃO”

Determina-se $\underset{\sim}{Y}$ da equação (145) correspondendo a um processo de substituição.

$$\underset{\sim}{G}_t^T . \underset{\sim}{Y} = \underset{\sim}{R}(\underset{\sim}{D}_k) \quad (145)$$

Sub-rotina “22.RETROSUBSTITUIÇÃO”

Determina-se o $\Delta \underset{\sim}{D}_k$ do sistema (146):

$$\underset{\sim}{G}_t . \Delta \underset{\sim}{D}_k = \underset{\sim}{Y} \quad (146)$$

Sub-rotina “23.CORREÇÃO DOS PARÂMETROS”

Efetua-se a correção dos parâmetros “ $\underset{\sim}{D}_K$ ” e “ $\underset{\sim}{\dot{D}}_K$ ” e “ $\underset{\sim}{\ddot{D}}_K$ ” através das equações dadas no item 3.5.1:

$$\underset{\sim}{D}_k \text{ (corrigido)} = \underset{\sim}{D}_k + \Delta \underset{\sim}{D}_k$$

$$\begin{array}{l} \dot{D}_k \\ \sim (\text{corrigido}) \end{array} = \begin{array}{l} \dot{D}_k \\ \sim \end{array} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \begin{array}{l} \Delta D_k \\ \sim \end{array}$$

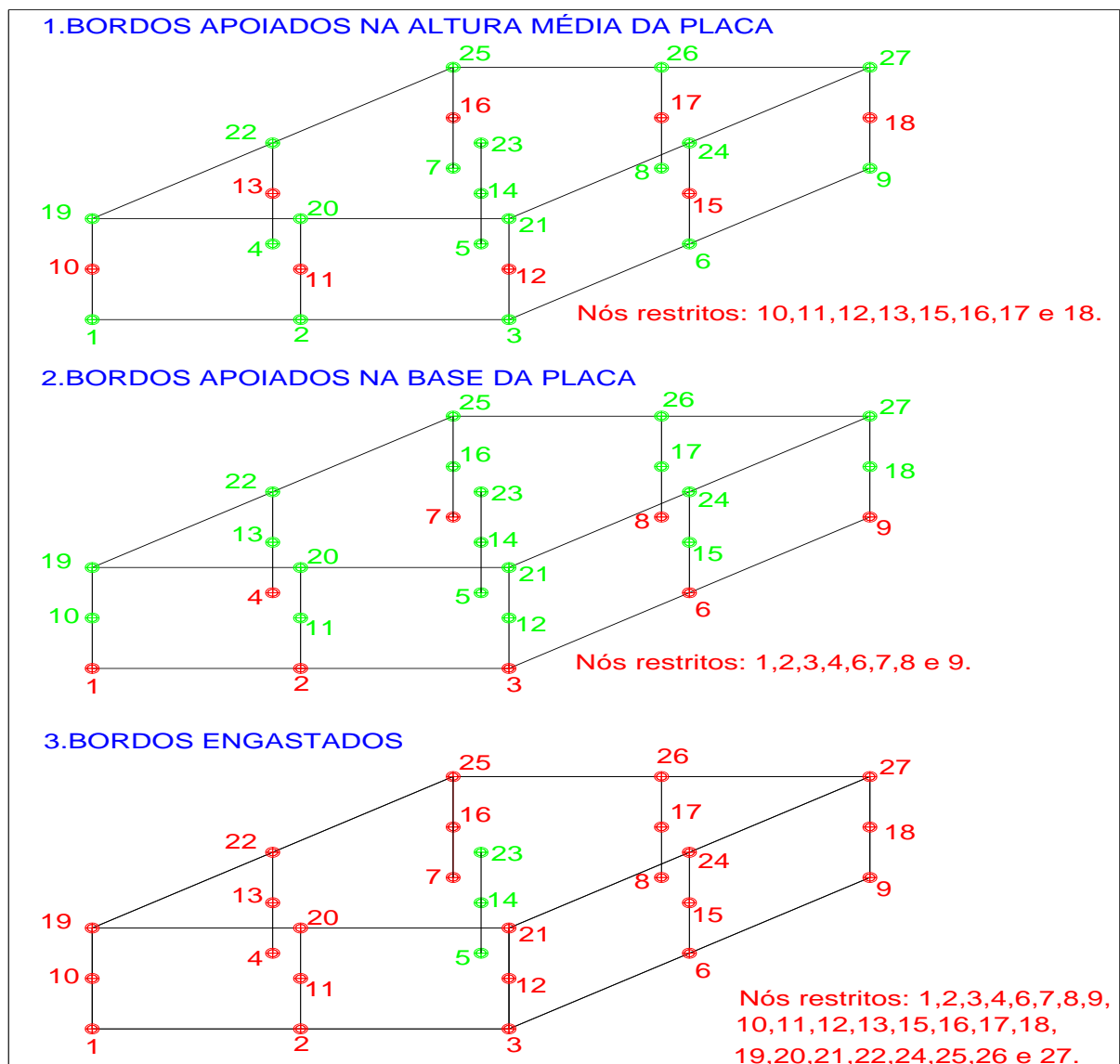
$$\begin{array}{l} \ddot{D}_k \\ \sim (\text{corrigido}) \end{array} = \begin{array}{l} \ddot{D}_k \\ \sim \end{array} + \frac{1}{\beta\Delta t^2} \begin{array}{l} \Delta D_k \\ \sim \end{array}$$

6 ANÁLISE NUMÉRICA

6.1 GENERALIDADES

O objetivo deste capítulo é analisar o comportamento linear estático e dinâmico de placas, através do elemento finito prismático regular linear. A análise será realizada por vários exemplos elucidativos, fazendo a comparação dos resultados obtidos deste trabalho com o elemento finito de placa retangular, da dissertação do Waidemam (2004). Os apoios da placa aplicados nos exemplos estão representados pela figura 27.

Figura 27 – Apoios das bordas da placa discretizada em 2x2x2



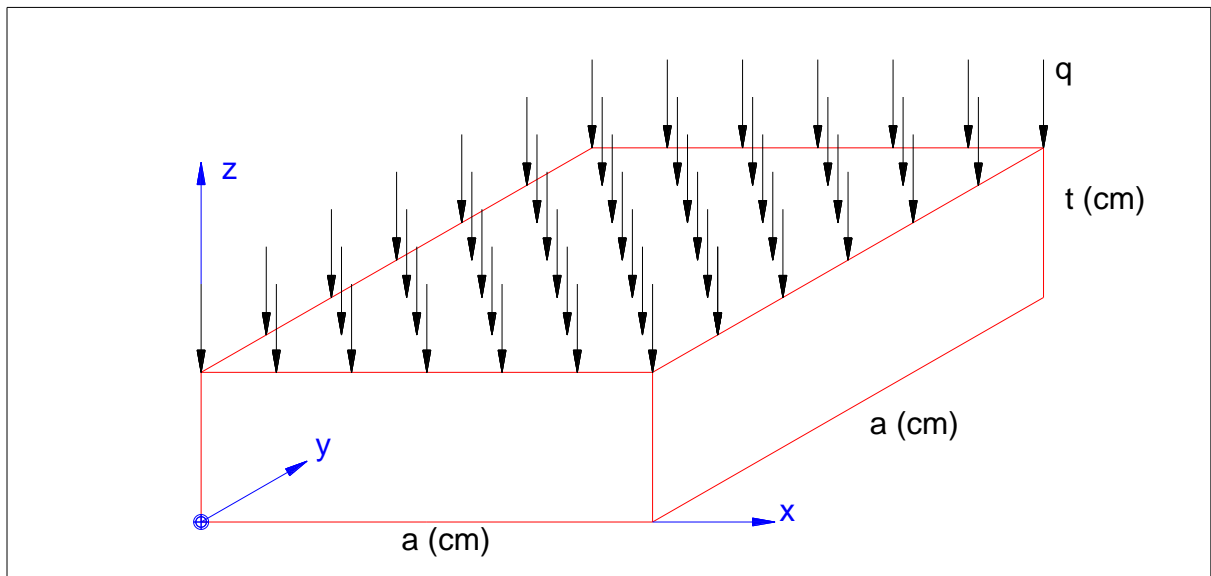
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Para a placa discretizada em 2, 4, 6 e 8 camadas, os deslocamentos determinados neste trabalho referem-se aos nós localizados na altura média da placa. Para a placa discretizada em 1 camada, foi realizada a média aritmética dos deslocamentos dos nós situados nas superfícies da base com a do topo da placa.

6.2 EXEMPLO 1 – ANÁLISE ESTÁTICA DA PLACA QUADRADA COM CARGA DISTRIBUÍDA

A placa deste exemplo possui vãos com dimensões iguais a “ a ”, espessura igual a “ t ” e um carregamento “ q ” agindo de forma uniforme em toda a sua área, conforme ilustrada pela figura 28.

Figura 28 – Placa quadrada com carga distribuída



Fonte: Elaboração do próprio autor.

A placa tem como características físicas, módulo de elasticidade longitudinal igual a “ E ” e coeficiente de Poisson igual a 0,25.

A placa será analisada estaticamente com todas as bordas simplesmente apoiadas, restringindo os nós situados na altura média da placa, e também com as bordas engastadas. Visando estudar a influência da discretização dos elementos finitos serão realizadas nos exemplos várias discretizações de malhas no plano xy , e com 1, 2, 4 e 8 camadas discretizadas na direção z .

Os resultados obtidos estão apresentados na sequência, juntamente com os valores fornecidos pelas tabelas de Bares (1972), representadas pelas expressões

(147) que será utilizada para as bordas simplesmente apoiadas na altura média da placa, e a (148) para todas as bordas engastadas.

$$d = 0,0457 qa^4 / Et^3 \quad (147)$$

$$d = 0,0143 qa^4 / Et^3 \quad (148)$$

No programa desenvolvido em linguagem MATLAB foram fornecidos os seguintes dados:

$E = 2,9 \times 10^3 \text{ kN/cm}^2$; $\nu = 0,25$; $a = 500 \text{ cm}$; $q = 0,001 \text{ kN/cm}^2$; e quatro espessuras com valores de 5 cm (" t/a "=1/100), 20 cm (" t/a "=1/25), 50 cm (" t/a "=1/10) e 100 cm (" t/a "=1/5).

Substituindo os valores nas expressões de Bares (1972) representadas pelas expressões (147) e (148), os valores dos deslocamentos no ponto central da placa dados por Bares (1972) são de:

$$d = 0,0457 qa^4 / Et^3 = 7,879310345 \text{ cm} \text{ para as bordas apoiadas e } t/a \text{ de } 1/100;$$

$$d = 0,0143 qa^4 / Et^3 = 2,465517241 \text{ cm} \text{ para as bordas engastadas e } t/a \text{ de } 1/100;$$

$$d = 0,0457 qa^4 / Et^3 = 0,123114224 \text{ cm} \text{ para as bordas apoiadas e } t/a \text{ de } 1/25;$$

$$d = 0,0143 qa^4 / Et^3 = 0,038523707 \text{ cm} \text{ para as bordas engastadas e } t/a \text{ de } 1/25.$$

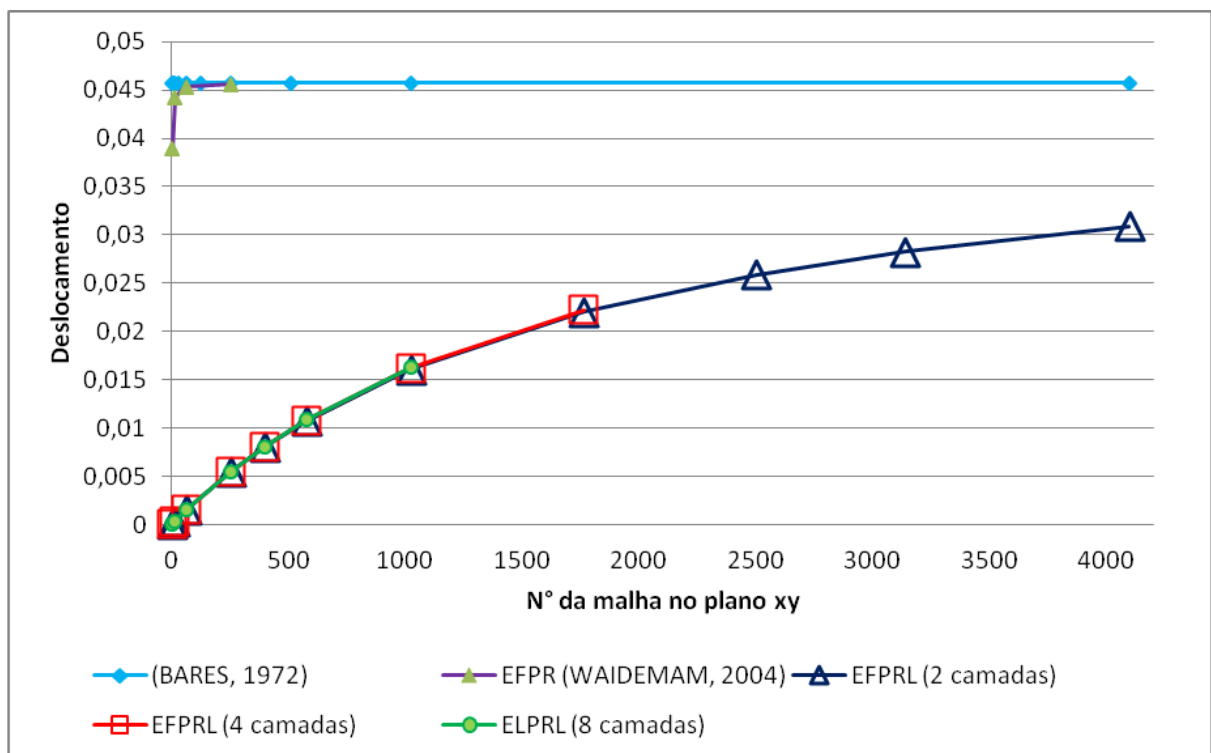
As respostas obtidas pelo programa MATLAB encontram-se nas tabelas que seguem, onde relacionam o deslocamento em "cm" em função do número da malha no plano xy e da camada na direção z. No plano xy foram determinadas malhas de $2 \times 2=4$, $4 \times 4=16$, $8 \times 8=64$, $16 \times 16=256$, $20 \times 20=400$, $24 \times 24=576$, $32 \times 32=1024$, $42 \times 42=1764$, $50 \times 50=2500$, $56 \times 56=3136$, $64 \times 64=4096$, $80 \times 80=6400$. Na direção z a placa foi discretizada com 1, 2, 4 e 8 camadas respectivamente. As ordenadas dos gráficos com o deslocamento adimensional, determinado pela divisão do deslocamento em "cm" pelo fator " qa^4 / Et^3 ", para comparar com os valores de Bares (1972). Para placas espessas, segundo a classificação de (VAZ, 2011), os deslocamentos tem unidade de "cm", representados pelas ordenadas dos gráficos, onde as respostas obtidas pelo elemento finito prismático regular linear ficaram sem parâmetro de comparação.

Tabela 1 – Deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/100 e carga distribuída, considerando-se todas as bordas apoiadas na altura média da placa

MALHA XY	PLACA		PRISMÁTICO		
	RETANGULAR		2 CAMADAS	4 CAMADAS	8 CAMADAS
Nº	Desloc.(cm)		Desloc.(cm)	Desloc.(cm)	Desloc.(cm)
2x2=4	6,699175000		0,016139331	0,016139567	0,016139559
4x4=16	7,624776700		0,067483309	0,067493725	0,067495888
8x8=64	7,817788200		0,262776480	0,262970608	0,263017550
16x16=256	7,861681500		0,952551233	0,955231780	0,955899725
20x20=400			1,391207605	1,396974199	1,398418448
24x24=576			1,855453679	1,865774304	1,868368875
32x32=1024			2,777079557	2,800412020	2,806311914
42x42=1764			3,793681633	3,837587807	
50x50=2500			4,458828668		
56x56=3136			4,874361600		
64x64=4096			5,332349419		

Fonte: Dados do próprio autor.

Figura 29 – Gráfico do deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/100 e carga distribuída, considerando-se todas as bordas apoiadas na altura média da placa



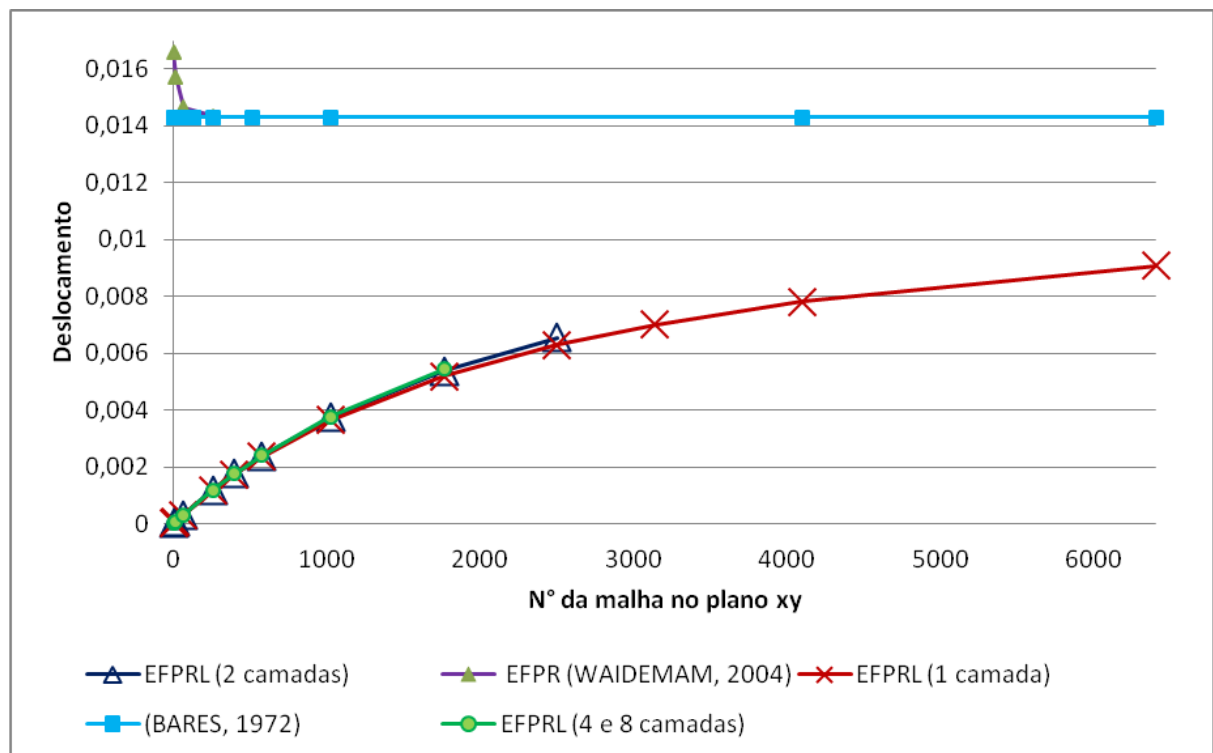
Fonte: Dados do próprio autor.

Tabela 2 – Deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/100 e carga distribuída, considerando-se todas as bordas engastadas

MALHA XY	PLACA	PRISMÁTICO			
	RETANGULAR	1 CAMADA	2 CAMADAS	4 CAMADAS	8 CAMADAS
Nº	Desloc.(cm)	Desloc.(cm)	Desloc.(cm)	Desloc.(cm)	Desloc.(cm)
2x2=4	2,859161500	0,004040948	0,004040881	0,004040830	0,004040818
4x4=16	2,712183300	0,015278956	0,015283095	0,015283365	0,015283377
8x8=64	2,526390300	0,055571210	0,055659609	0,055679896	0,055684875
16x16=256	2,472644800	0,202107815	0,203493118	0,203838618	0,203925160
20x20=400		0,299344529	0,302479160	0,303270193	0,303468793
24x24=576		0,405914830	0,411801617	0,413300353	0,413677314
32x32=1024		0,629504002	0,644070161	0,647832739	0,648782123
42x42=1764		0,896671780	0,926928618	0,934863505	0,936872862
50x50=2500		1,084522625	1,129401845		
56x56=3136		1,207620761	1,263740079		
64x64=4096		1,348773968			
80x80=6400		1,563979411			

Fonte: Dados do próprio autor.

Figura 30 – Gráfico do deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/100 e carga distribuída, considerando-se todas as bordas engastadas



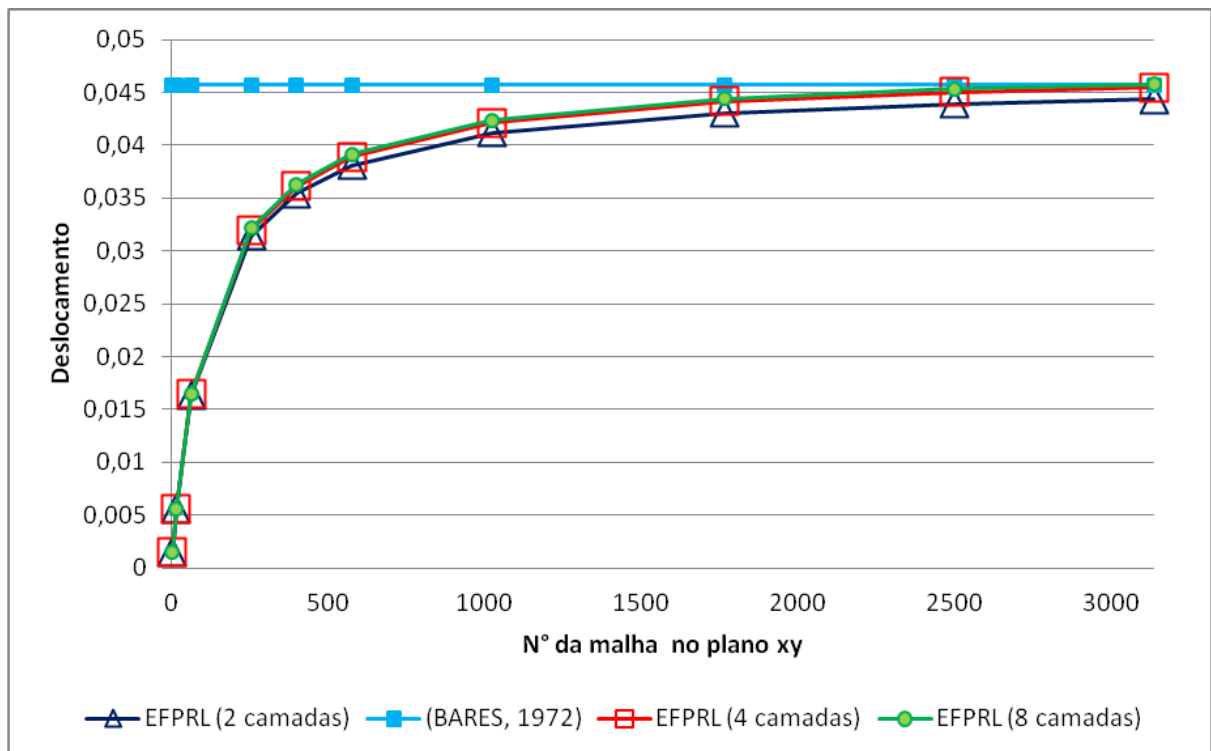
Fonte: Dados do próprio autor.

Tabela 3 – Deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/25 e carga distribuída, considerando-se todas as bordas apoiadas na altura média da placa

MALHA XY	PRISMÁTICO		
	2 CAMADAS	4 CAMADAS	8 CAMADAS
Nº	Desloc.(cm)	Desloc.(cm)	Desloc.(cm)
2x2=4	0,003946144	0,003947111	0,003947105
4x4=16	0,015051295	0,015085807	0,015093063
8x8=64	0,043909544	0,044278633	0,044369442
16x16=256	0,084709298	0,086192998	0,086573917
20x20=400	0,095471473	0,097380251	0,097873930
24x24=576	0,102604112	0,104823774	0,105400453
32x32=1024	0,110924650	0,113532877	0,114213905
42x42=1764	0,116067894	0,118927030	0,119675910
50x50=2500	0,118326347	0,121297445	0,122076836
56x56=3136	0,119463200	0,122491079	0,123286069

Fonte: Dados do próprio autor.

Figura 31 – Gráfico do deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/25 e carga distribuída, considerando-se todas as bordas apoiadas na altura média da placa



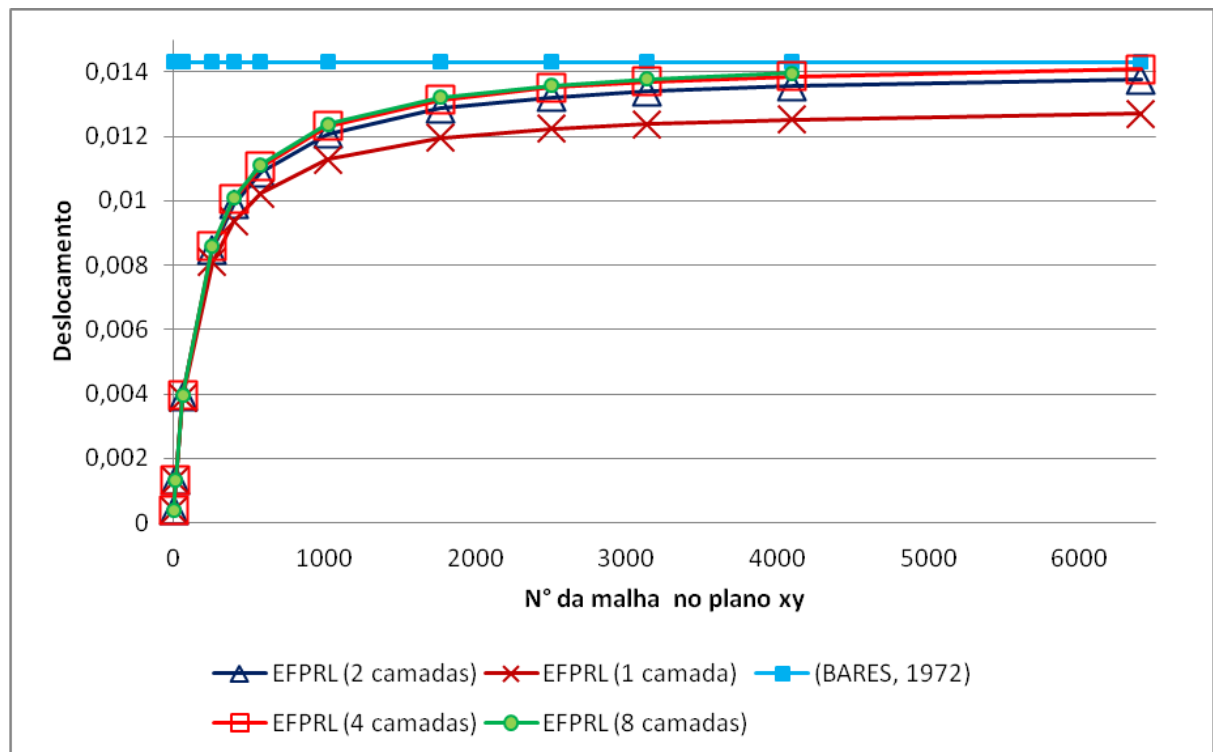
Fonte: Dados do próprio autor.

Tabela 4 – Deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/25 e carga distribuída, considerando-se todas as bordas engastadas

MALHA XY	PRISMÁTICO			
	1 CAMADA	2 CAMADAS	4 CAMADAS	8 CAMADAS
Nº	Desloc.(cm)	Desloc.(cm)	Desloc.(cm)	Desloc.(cm)
2x2=4	0,001010237	0,001009968	0,001009766	0,001009715
4x4=16	0,003580339	0,003594671	0,003596002	0,003596173
8x8=64	0,010408011	0,010601292	0,010651365	0,010664066
16x16=256	0,021804202	0,022820279	0,023114082	0,023190610
20x20=400	0,025208184	0,026615174	0,027029944	0,027138498
24x24=576	0,027557675	0,029279324	0,029793239	0,029928195
32x32=1024	0,030385071	0,032540129	0,033192946	0,033365192
42x42=1764	0,032171385	0,034636395	0,035390175	0,035589909
50x50=2500	0,032962235	0,035575426	0,036377998	0,036591268
56x56=3136	0,033361180	0,036052195	0,036880558	0,037101110
64x64=4096	0,033737560	0,036504187	0,037357744	0,037585551
80X80=6400	0,034191446	0,037052568	0,037937884	

Fonte: Dados do próprio autor.

Figura 32 – Gráfico do deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/25 e carga distribuída, considerando-se todas as bordas engastadas



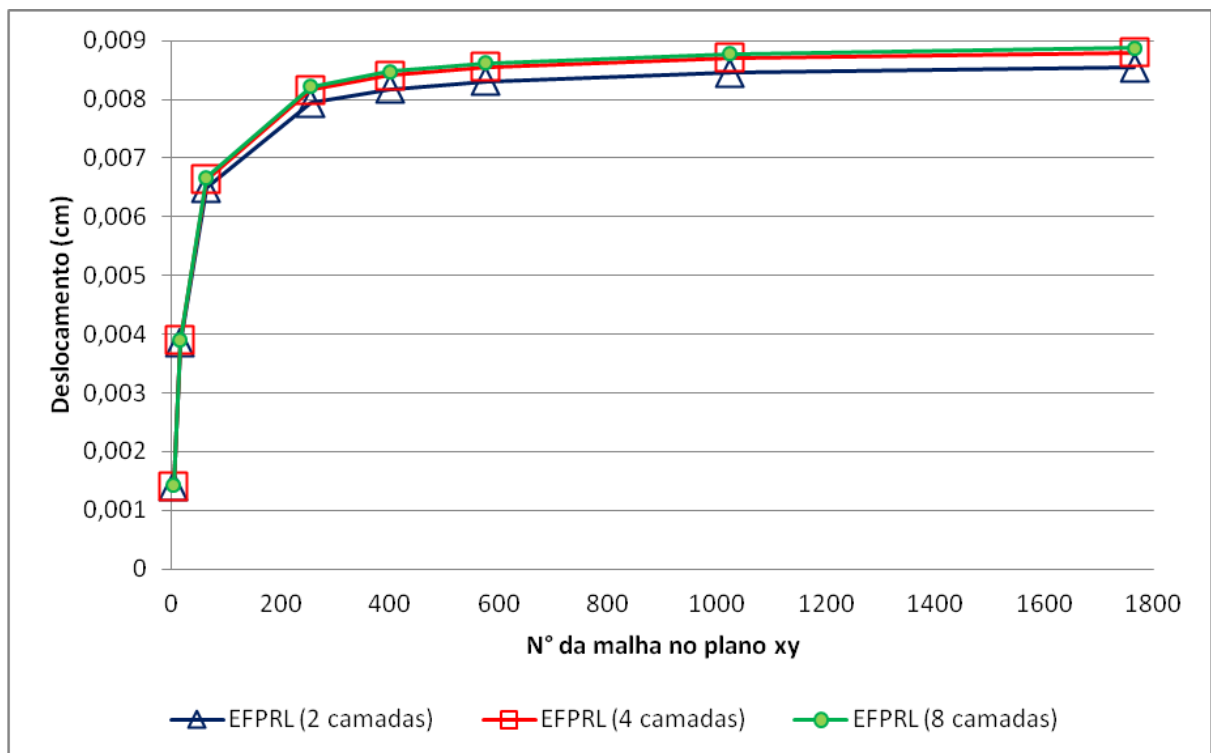
Fonte: Dados do próprio autor.

Tabela 5 – Deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/10 e carga distribuída, considerando-se todas as bordas apoiadas na altura média da placa

MALHA XY	PRISMÁTICO		
	2 CAMADAS	4 CAMADAS	8 CAMADAS
Nº	Desloc.(cm)	Desloc.(cm)	Desloc.(cm)
2x2=4	0,001414447	0,001416931	0,001417147
4x4=16	0,003851308	0,003891431	0,003900246
8x8=64	0,006494206	0,006637213	0,006673543
16x16=256	0,007938094	0,008160424	0,008219186
20x20=400	0,008171188	0,008407296	0,008470241
24x24=576	0,008307557	0,008552090	0,008617778
32x32=1024	0,008452572	0,008707167	0,008776642
42x42=1764	0,008536444	0,008798543	0,008871727

Fonte: Dados do próprio autor.

Figura 33 – Gráfico do deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/10 e carga distribuída, considerando-se todas as bordas apoiadas na altura média da placa



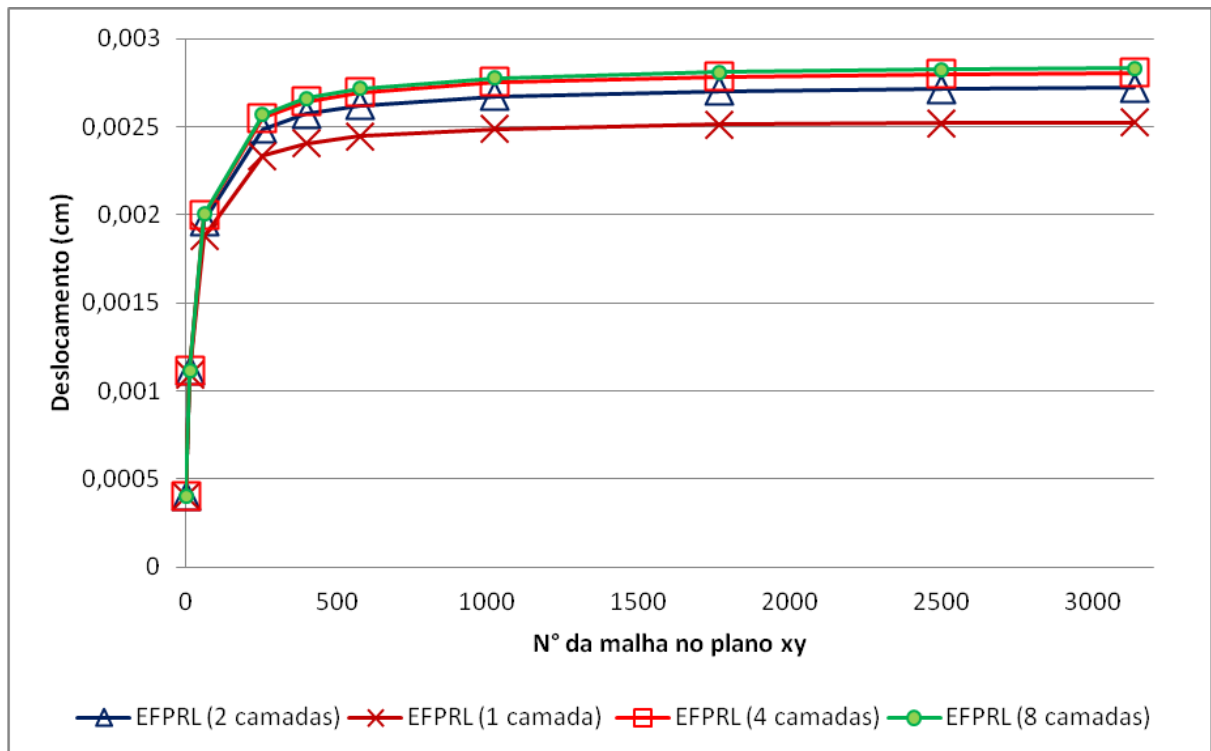
Fonte: Dados do próprio autor.

Tabela 6 – Deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/10 e carga distribuída, considerando-se todas as bordas engastadas

MALHA XY	PRISMÁTICO			
	1 CAMADA	2 CAMADAS	4 CAMADAS	8 CAMADAS
Nº	Desloc.(cm)	Desloc.(cm)	Desloc.(cm)	Desloc.(cm)
2x2=4	0,000404095	0,000403422	0,000402918	0,000402793
4x4=16	0,001092494	0,0011111594	0,001115851	0,001116908
8x8=64	0,001879572	0,001963454	0,001996116	0,002005271
16x16=256	0,002333425	0,002485032	0,002549588	0,002568251
20x20=400	0,002404848	0,002570540	0,002641839	0,002662660
24x24=576	0,002445699	0,002620161	0,002695662	0,002717902
32x32=1024	0,002487859	0,002672123	0,002752323	0,002776281
42x42=1764	0,002511269	0,002701425	0,002784469	0,002809599
50x50=2500	0,002520946	0,002713663	0,002797958	0,002823664
56x56=3136	0,002525679	0,002719682	0,002804611	0,002830632

Fonte: Dados do próprio autor.

Figura 34 – Gráfico do deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/10 e carga distribuída, considerando-se todas as bordas engastadas



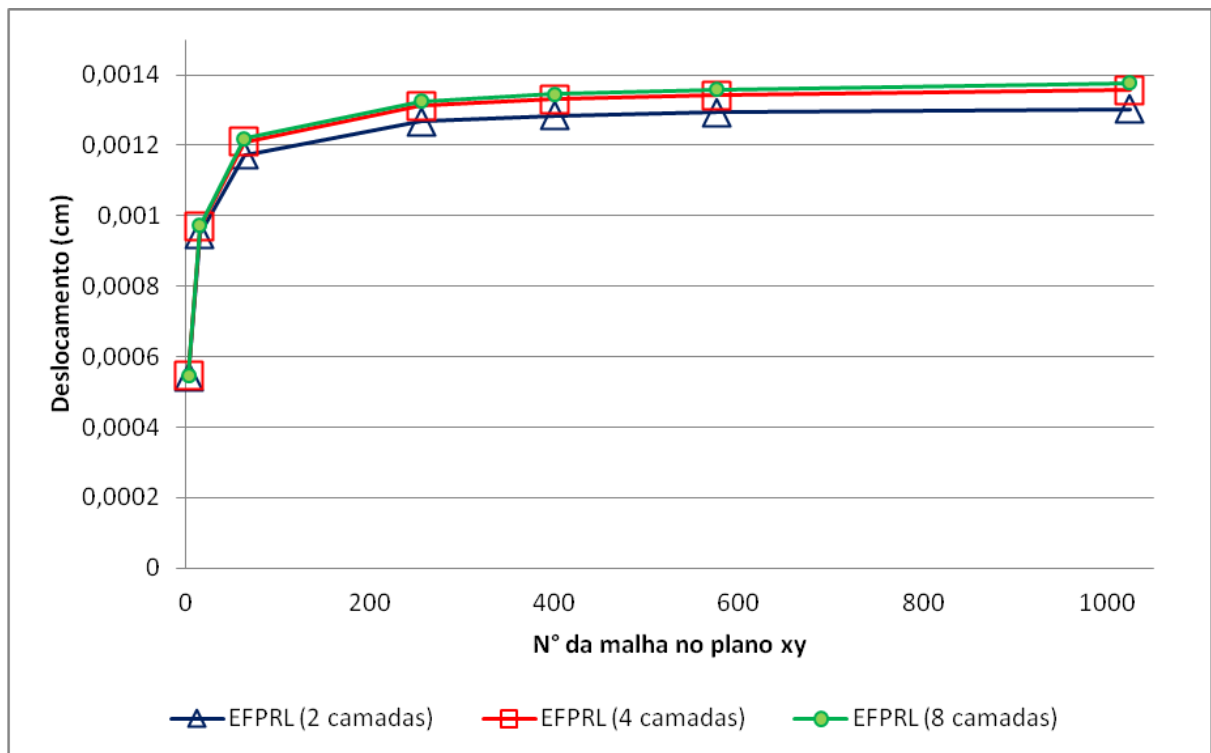
Fonte: Dados do próprio autor.

Tabela 7 – Deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/5 e carga distribuída, considerando-se todas as bordas apoiadas na altura média da placa

MALHA XY	PRISMÁTICO		
	2 CAMADAS	4 CAMADAS	8 CAMADAS
Nº	Desloc.(cm)	Desloc.(cm)	Desloc.(cm)
2x2=4	0,000542873	0,000546462	0,000547235
4x4=16	0,000948152	0,000967934	0,000972669
8x8=64	0,001173131	0,001209069	0,001218698
16x16=256	0,001267689	0,001312037	0,001325212
20x20=400	0,001283299	0,001330286	0,001345111
24x24=576	0,001292799	0,001342055	0,001358604
32x32=1024	0,001303339	0,001356194	0,001376223

Fonte: Dados do próprio autor.

Figura 35 - Gráfico do deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/5 e carga distribuída, considerando-se todas as bordas apoiadas na altura média da placa



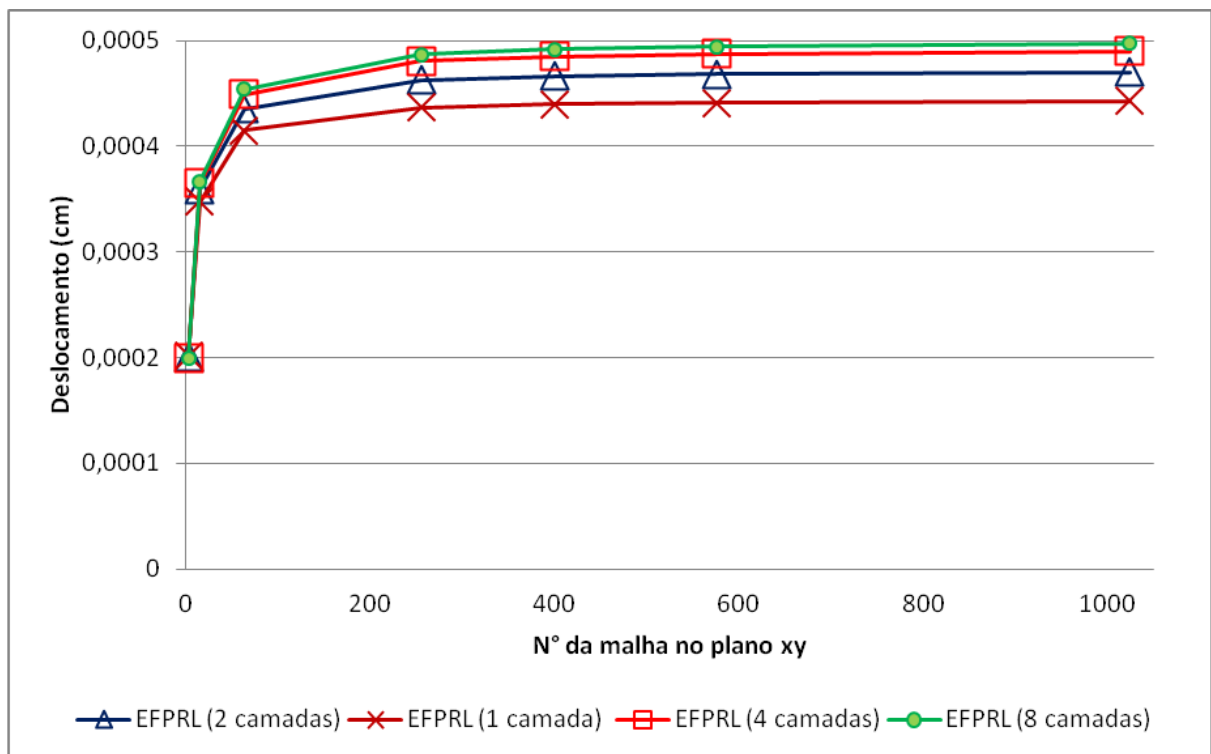
Fonte: Dados do próprio autor.

Tabela 8 – Deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/5 e carga distribuída, considerando-se todas as bordas engastadas

MALHA XY	PRISMÁTICO			
	1 CAMADA	2 CAMADAS	4 CAMADAS	8 CAMADAS
Nº	Desloc.(cm)	Desloc.(cm)	Desloc.(cm)	Desloc.(cm)
2x2=4	0,000202047	0,000200709	0,000199707	0,000199460
4x4=16	0,000347810	0,000359250	0,000364707	0,000366520
8x8=64	0,000414847	0,000435493	0,000449349	0,000453920
16x16=256	0,000436782	0,000462511	0,000480832	0,000487153
20x20=400	0,000439620	0,000466185	0,000485189	0,000491864
24x24=576	0,000441182	0,000468237	0,000487641	0,000494546
32x32=1024	0,000442751	0,000470325	0,000490155	0,000497332

Fonte: Dados do próprio autor.

Figura 36 – Gráfico do deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/5 e carga distribuída, considerando-se todas as bordas engastadas



Fonte: Dados do próprio autor.

Analisando as figuras 29 e 30, que representam os deslocamentos da placa para as bordas simplesmente apoiadas na altura média e engastadas da placa com “t/a” de 1/100, é possível verificar que o número de elementos finitos de placa retangulares (malha 16x16) necessários para coincidir com a solução dada por (BARES, 1972) é menor, comparado com o número de elementos finitos prismáticos

regulares lineares. Para que a solução dada pelo elemento finito prismático regular linear de “t/a” de 1/100 se aproxime da solução fornecida por (BARES, 1972), é necessário fazer um número maior de discretização da placa no plano xy do que o realizado neste trabalho. Este procedimento não foi realizado devido à dificuldade no processamento computacional em solucionar o sistema de equações dado por (65). A equação que fornece o número de equações do sistema é dada por:

$$NEQ=NDN.NNODS \quad (149)$$

NDN é o número de deslocamentos em cada ponto nodal, para o elemento finito prismático regular linear o NDN é 3;

NNODS é o número de pontos nodais da estrutura.

Na solução obtida com 8192 elementos ilustrada pela tabela 1, com a malha de 64x64 no plano xy e 2 camadas na direção z, o número de pontos nodais da placa NNODS é 12675 (65.65.3). O computador solucionou um sistema de equações de 38025x38025 elementos.

Para “t/a” de 1/25 as soluções estão representadas pela figura 31 para as bordas simplesmente apoiadas na altura média da placa, e pela figura 32 para as bordas engastadas. Os gráficos ilustram que o elemento finito prismático regular linear convergiu para a solução de (BARES, 1972) com 4 camadas na direção z, com uma malha de 56x56 para as bordas apoiadas na altura média da placa, e malha de 80x80 para as bordas engastadas.

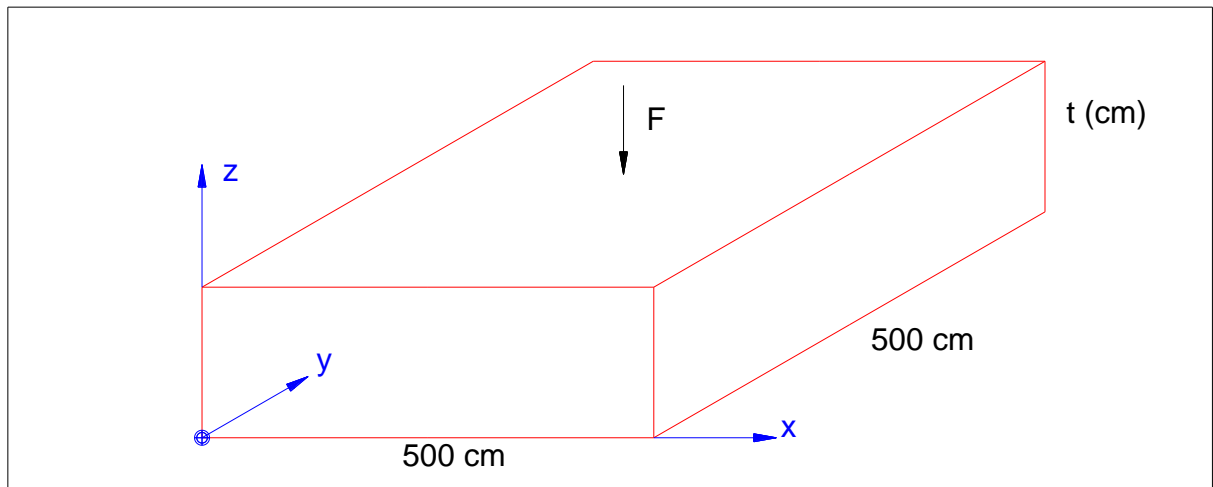
As figuras 33 e 34 ilustram as respostas para “t/a” de 1/10, onde o elemento finito prismático regular linear convergiu com 4 camadas na direção z, malha de 32x32 para as bordas apoiadas na altura média da placa, e malha de 56x56 para as bordas engastadas.

Para “t/a” de 1/5 o elemento finito prismático regular linear convergiu com 8 camadas na direção z, e malha de 24x24, conforme demonstram as figuras 35 e 36.

6.3 EXEMPLO 2 – PLACA QUADRADA COM CARGA CONCENTRADA EM SEU PONTO CENTRAL

Neste exemplo serão aplicadas as análises estática e dinâmica, definido por uma placa quadrada sujeita a uma força “F” igual a 1000 kN concentrada em seu ponto central, conforme ilustra a figura 37.

Figura 37 – Placa quadrada com carga concentrada em seu ponto central



Fonte: Elaboração do próprio autor.

6.3.1 Análise estática

As características físicas do material são dadas por:

$$E=2,5 \times 10^3 \text{ kN/cm}^2 ; \nu=0,20.$$

6.3.1.1 Todas as bordas simplesmente apoiadas na altura média da placa e todas as bordas engastadas

Este item será desenvolvido para a placa descrita na figura 37, com a espessura “t” de 25 cm.

Para todas as bordas apoiadas na altura média da placa foram realizadas sete discretizações no plano xy: malha 2x2, malha 4x4, malha 8x8, malha 16x16, malha 20x20, malha 24x24 e malha 32x32. Na espessura na direção de z foram discretizadas em 2, 4, e 8 camadas.

Na análise de todas as bordas engastadas foram feitas oito discretizações no plano xy: malha 2x2, malha 4x4, malha 8x8, malha 16x16, malha 20x20, malha 24x24, malha 32x32 e malha 42x42. Na espessura na direção de z foram discretizadas em 1, 2, 4 e 8 camadas respectivamente.

Os resultados obtidos são comparados com os valores fornecidos por Danson (1980), que apresenta resultados teóricos e numéricos obtidos via método dos elementos finitos e de contorno, e também com os de Waidemam (2004) com o elemento finito de placa retangular.

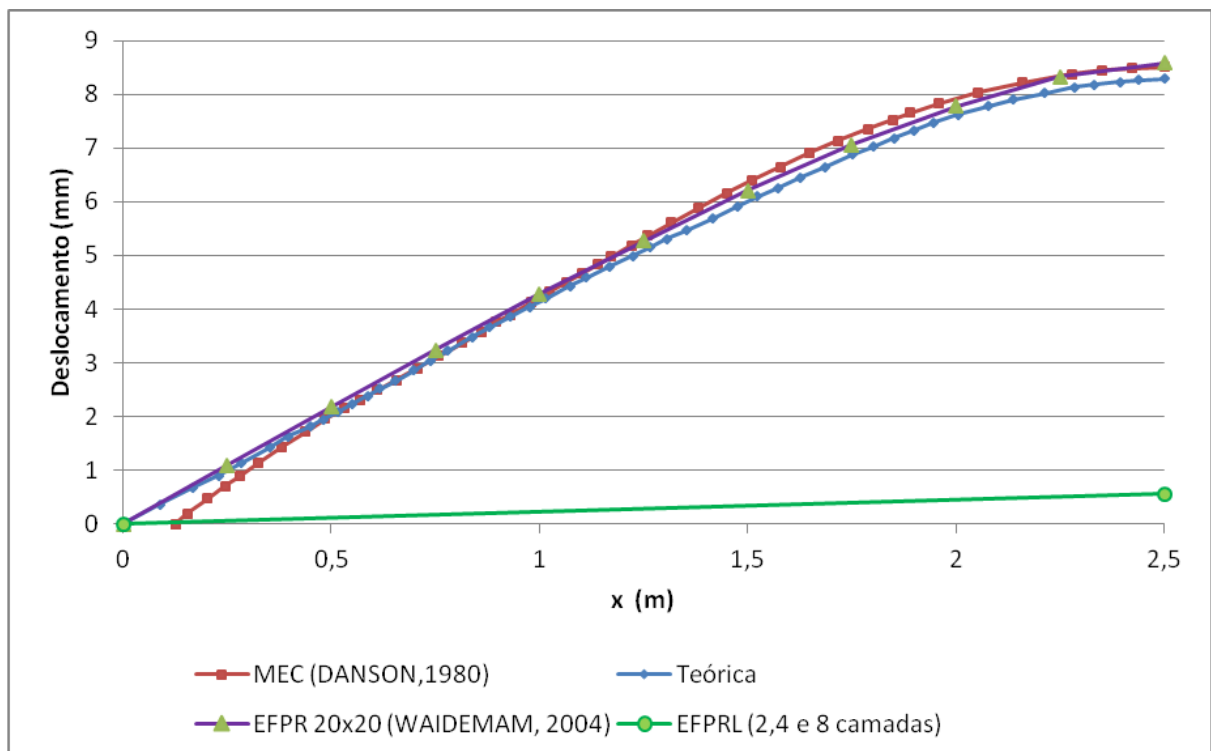
Na sequencia serão apresentadas as tabelas, que relacionam o deslocamento em “mm” do eixo central da placa para $y=2,50$ m em função da distância “x” em “m”. Com as tabelas foram realizados os gráficos que relacionam em sua ordenada o deslocamento em “mm”, e em sua abscissa à distância “x” em “m” da placa.

Tabela 9 – Deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, malha de 2x2 no plano xy e todas as bordas apoiadas na altura média da placa

Distância	Deslocamento (mm)		
	2 camadas	4 camadas	8 camadas
x (m)	8 elementos	16 elementos	32 elementos
0,0	0,000000000	0,000000000	0,000000000
2,5	0,556249982	0,556536942	0,556611731

Fonte: Dados do próprio autor.

Figura 38 – Gráfico do deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas apoiadas na altura média da placa, e malha de 2x2 no plano xy



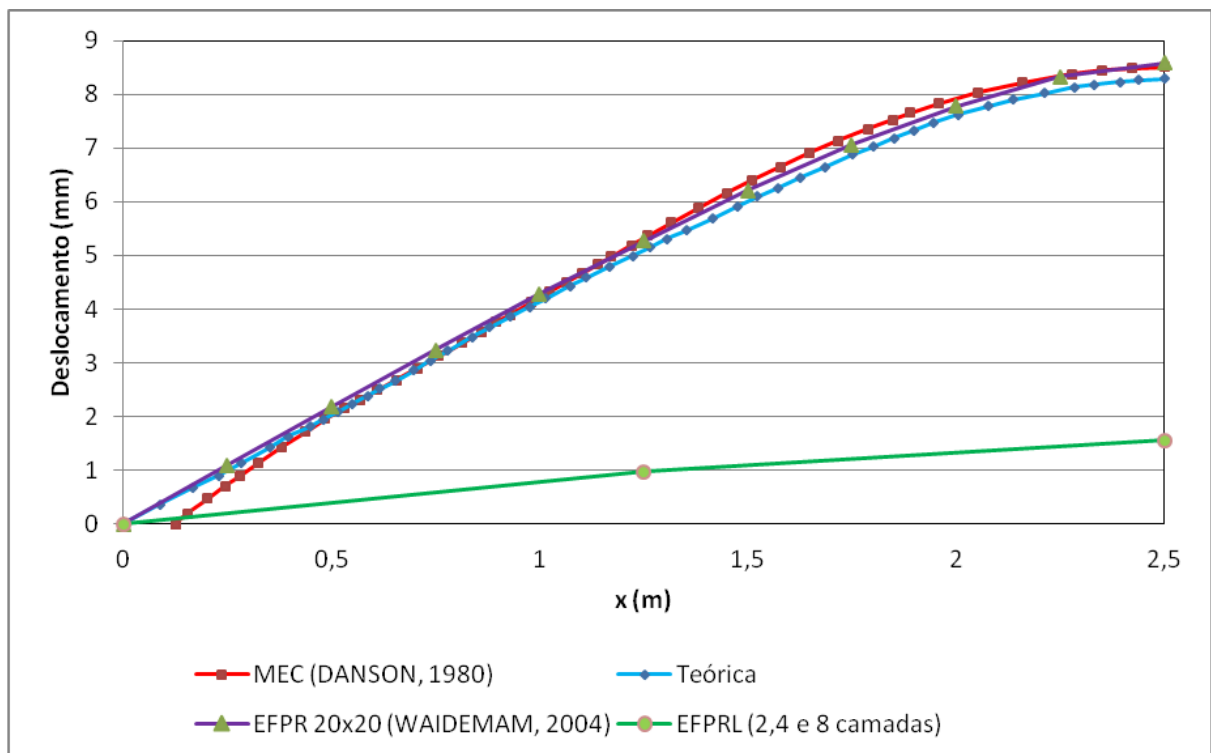
Fonte: Dados do próprio autor.

Tabela 10 – Deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, malha de 4x4 no plano xy e todas as bordas apoiadas na altura média da placa

Distância	Deslocamento (mm)		
	2 camadas	4 camadas	8 camadas
x (m)	32 elementos	64 elementos	128 elementos
0,00	0,000000000	0,000000000	0,000000000
1,25	0,968005838	0,969797301	0,970269337
2,50	1,551529576	1,554356145	1,555103233

Fonte: Dados do próprio autor.

Figura 39 – Gráfico do deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas apoiadas na altura média da placa, e malha de 4x4 no plano xy



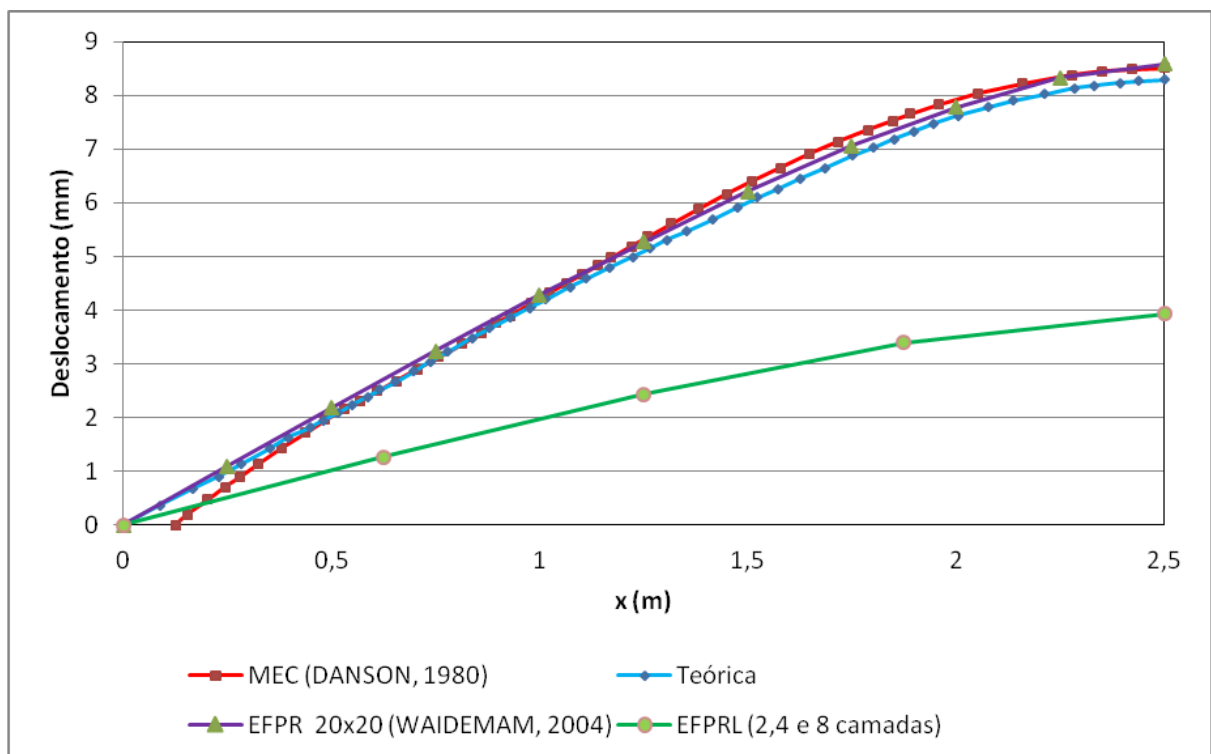
Fonte: Dados do próprio autor.

Tabela 11 – Deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, malha de 8x8 no plano xy e todas as bordas apoiadas na altura média da placa

Distância	Deslocamento (mm)		
	2 camadas	4 camadas	8 camadas
x (m)	128 elementos	256 elementos	512 elementos
0,000	0,000000000	0,000000000	0,000000000
0,625	1,251115094	1,259419983	1,261632931
1,250	2,408484556	2,424054878	2,428175267
1,875	3,368147723	3,388824369	3,394331006
2,500	3,903923351	3,928063602	3,934535546

Fonte: Dados do próprio autor.

Figura 40 – Gráfico do deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas apoiadas na altura média da placa, e malha de 8x8 no plano xy



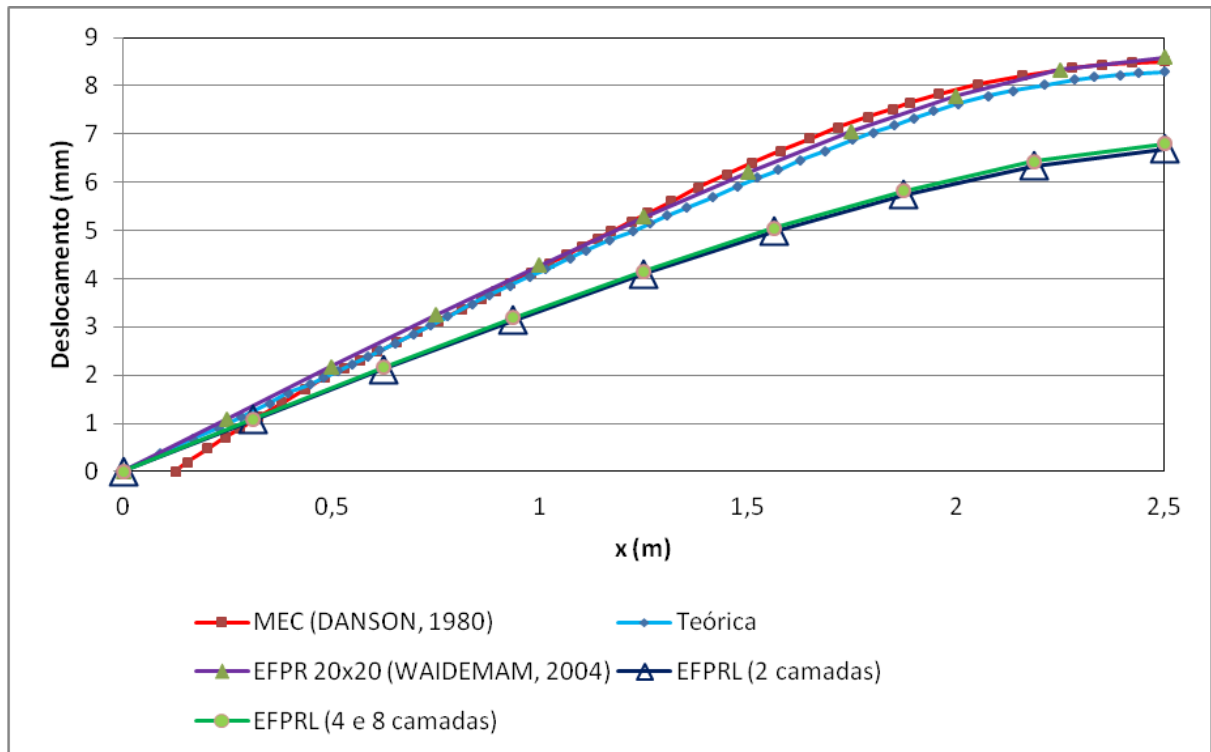
Fonte: Dados do próprio autor.

Tabela 12 – Deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, malha de 16x16 no plano xy e todas as bordas apoiadas na altura média da placa

Distância	Deslocamento (mm)		
	2 camadas	4 camadas	8 camadas
x (m)	512 elementos	1024 elementos	2048 elementos
0,0000	0,000000000	0,000000000	0,000000000
0,3125	1,070287267	1,083976238	1,087704331
0,6250	2,120924421	2,147359410	2,154519808
0,9375	3,136546094	3,174941653	3,185313862
1,2500	4,097433846	4,146823924	4,160125446
1,5625	4,978195242	5,037263754	5,053194497
1,8750	5,739861365	5,807596627	5,825783996
2,1875	6,341650795	6,415130909	6,435044877
2,5000	6,693284199	6,775337010	6,797847509

Fonte: Dados do próprio autor.

Figura 41 – Gráfico do deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas apoiadas na altura média da placa, e malha de 16x16 no plano xy



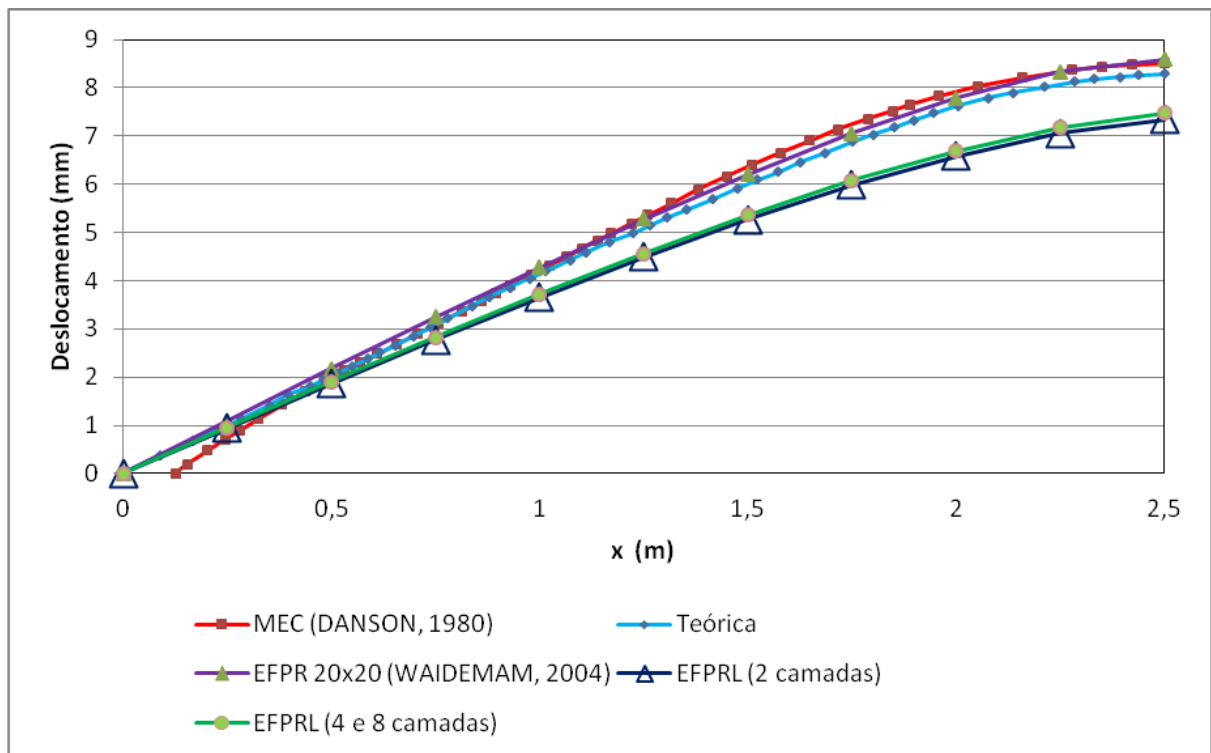
Fonte: Dados do próprio autor.

Tabela 13 – Deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, malha de 20x20 no plano xy e todas as bordas apoiadas na altura média da placa

Distância	Deslocamento (mm)		
	2 camadas	4 camadas	8 camadas
x (m)	800 elementos	1600 elementos	3200 elementos
0,00	0,000000000	0,000000000	0,000000000
0,25	0,939476956	0,952919414	0,956608106
0,50	1,866171613	1,892208288	1,899307330
0,75	2,773165117	2,811260633	2,821609236
1,00	3,651159189	3,700587308	3,713979159
1,25	4,488803607	4,548771419	4,565001057
1,50	5,271164763	5,340909904	5,359736529
1,75	5,979482936	6,057694942	6,078874349
2,00	6,584153734	6,670437852	6,693674564
2,25	7,062087220	7,153086682	7,177870371
2,50	7,348375754	7,450638270	7,478944210

Fonte: Dados do próprio autor.

Figura 42 – Gráfico do deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas apoiadas na altura média da placa, e malha de 20x20 no plano xy



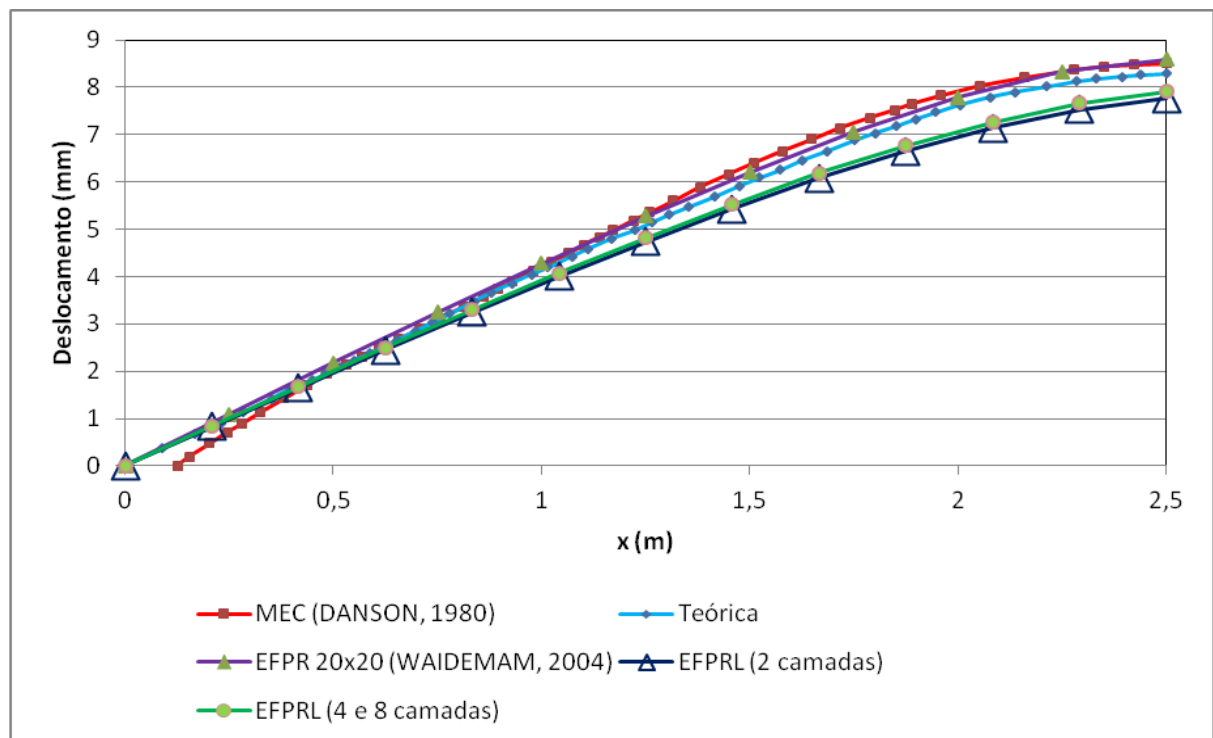
Fonte: Dados do próprio autor.

Tabela 14 – Deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, malha de 24x24 no plano xy e todas as bordas apoiadas na altura média da placa

Distância x (m)	Deslocamento (mm)		
	2 camadas 1152 elementos	4 camadas 2304 elementos	8 camadas 4608 elementos
0,000000000	0,000000000	0,000000000	0,000000000
0,208333333	0,827623450	0,840272726	0,843767178
0,416666667	1,645771169	1,670293557	1,677014930
0,625000000	2,451420037	2,487451241	2,497283341
0,833333333	3,239454031	3,286424889	3,299208368
1,041666667	4,004088522	4,061456853	4,077039186
1,250000000	4,738035644	4,805226226	4,823441800
1,458333333	5,432226166	5,508530559	5,529214266
1,666666667	6,074902476	6,159754765	6,182695235
1,875000000	6,652015392	6,744080602	6,769098605
2,083333333	7,140243907	7,239888593	7,266761437
2,291666667	7,529792076	7,632854606	7,661034890
2,500000000	7,765420910	7,882678971	7,915409475

Fonte: Dados do próprio autor.

Figura 43 – Gráfico do deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas apoiadas na altura média da placa, e malha de 24x24 no plano xy



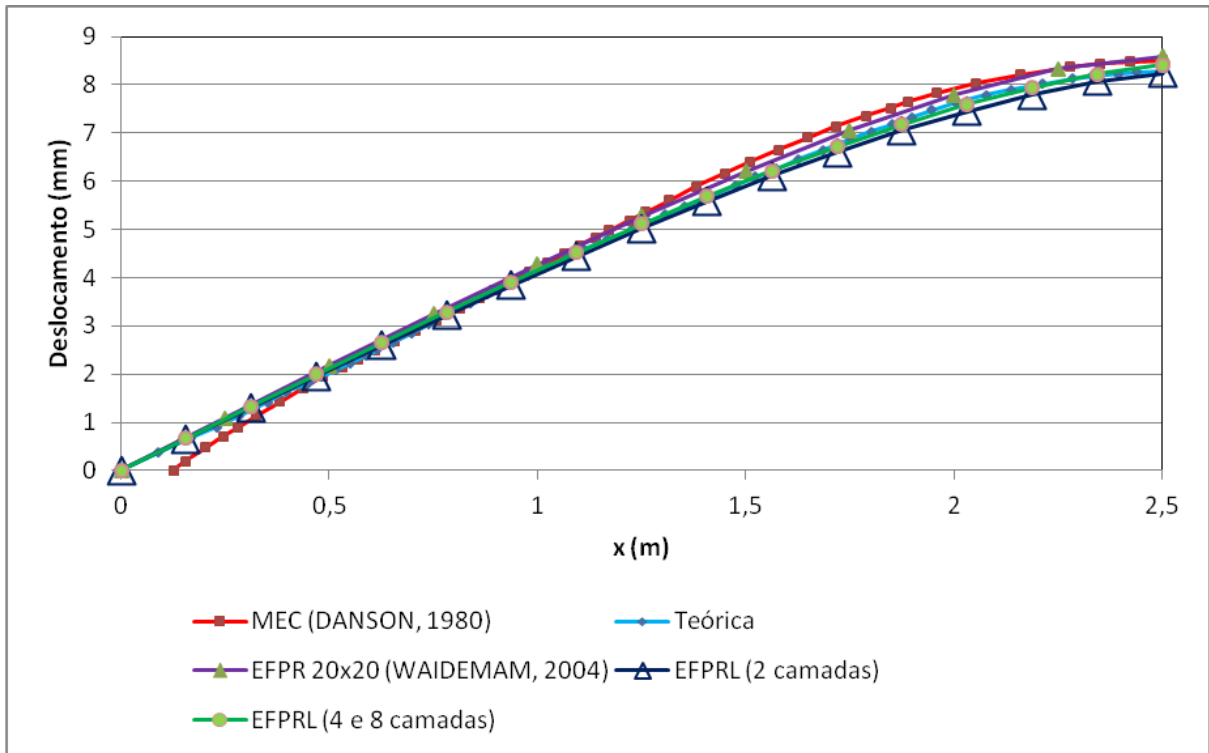
Fonte: Dados do próprio autor.

Tabela 15 – Deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, malha de 32x32 no plano xy e todas as bordas apoiadas na altura média da placa

Distância	Deslocamento (mm)		
	2 camadas	4 camadas	8 camadas
x (m)	2048 elementos	4096 elementos	8192 elementos
0,00000	0,000000000	0,000000000	0,000000000
0,15625	0,659409348	0,670237832	0,673269246
0,31250	1,312283967	1,333222608	1,339013834
0,46875	1,958914099	1,989831431	1,998332062
0,62500	2,597124374	2,637639292	2,648743312
0,78125	3,224950804	3,274739065	3,288349773
0,93750	3,839953757	3,898680889	3,914703360
1,09375	4,439255351	4,506574677	4,524912161
1,25000	5,019408783	5,094954600	5,115505767
1,40625	5,576280012	5,659651839	5,682313961
1,56250	6,104872965	6,195658815	6,220308658
1,71875	6,599188569	6,696832058	6,723376460
1,87500	7,051638443	7,155910249	7,184156729
2,03125	7,454153623	7,563548135	7,593475264
2,18750	7,790845656	7,907469895	7,938901945
2,34375	8,070150133	8,187184956	8,219438420
2,50000	8,231127199	8,369149677	8,408274727

Fonte: Dados do próprio autor.

Figura 44 – Gráfico do deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas apoiadas na altura média da placa, e malha de 32x32 no plano xy



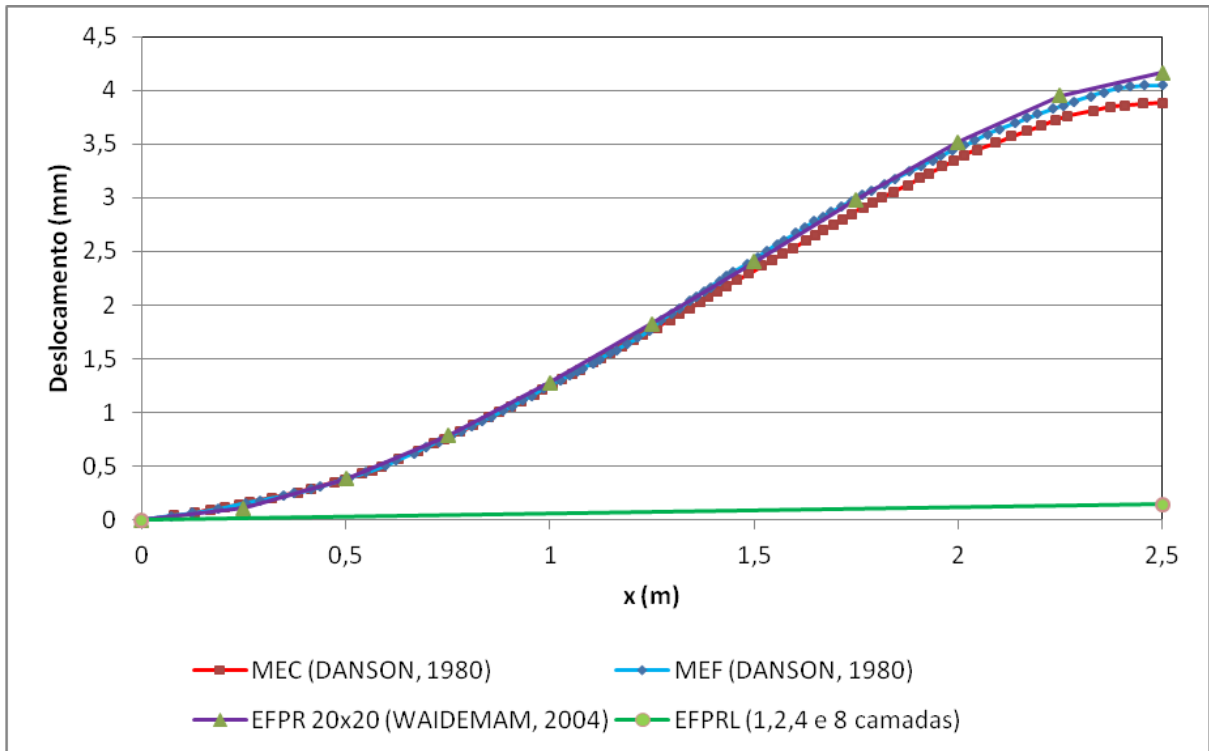
Fonte: Dados do próprio autor.

Tabela 16 – Deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, malha de 2x2 no plano xy e todas as bordas engastadas

Distância	Deslocamento (mm)			
	1 camada	2 camadas	4 camadas	8 camadas
x (m)	4 elementos	8 elementos	16 elementos	32 elementos
0,0	0,000000000	0,000000000	0,000000000	0,000000000
2,5	0,144000000	0,143797595	0,143848214	0,143860870

Fonte: Dados do próprio autor.

Figura 45 – Gráfico do deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas engastadas, e malha de 2x2 no plano xy



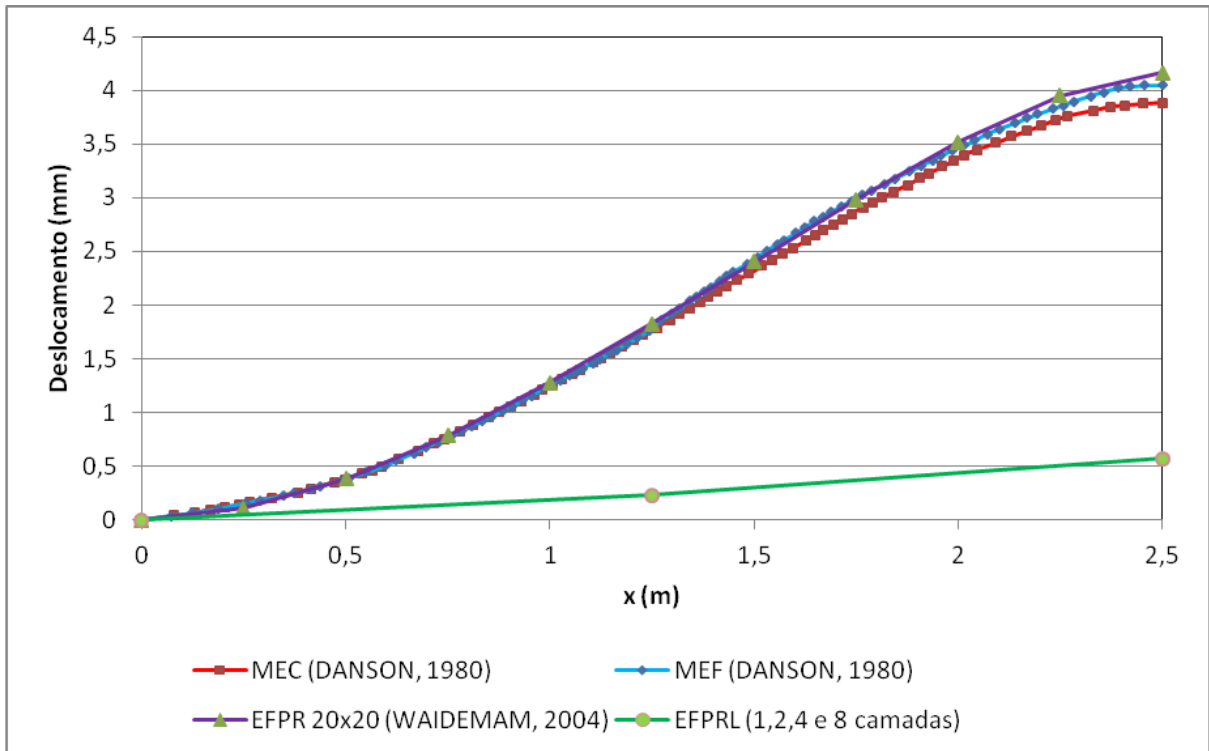
Fonte: Dados do próprio autor.

Tabela 17 – Deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, malha de 4x4 no plano xy e todas as bordas engastadas

Distância	Deslocamento (mm)			
	1 camada	2 camadas	4 camadas	8 camadas
x (m)	4 elementos	8 elementos	16 elementos	32 elementos
0,00	0,000000000	0,000000000	0,000000000	0,000000000
1,25	0,227562886	0,228050834	0,228094356	0,228110617
2,50	0,568578068	0,568613498	0,568897232	0,568981859

Fonte: Dados do próprio autor.

Figura 46 – Gráfico do deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas engastadas, e malha de 4x4 no plano xy



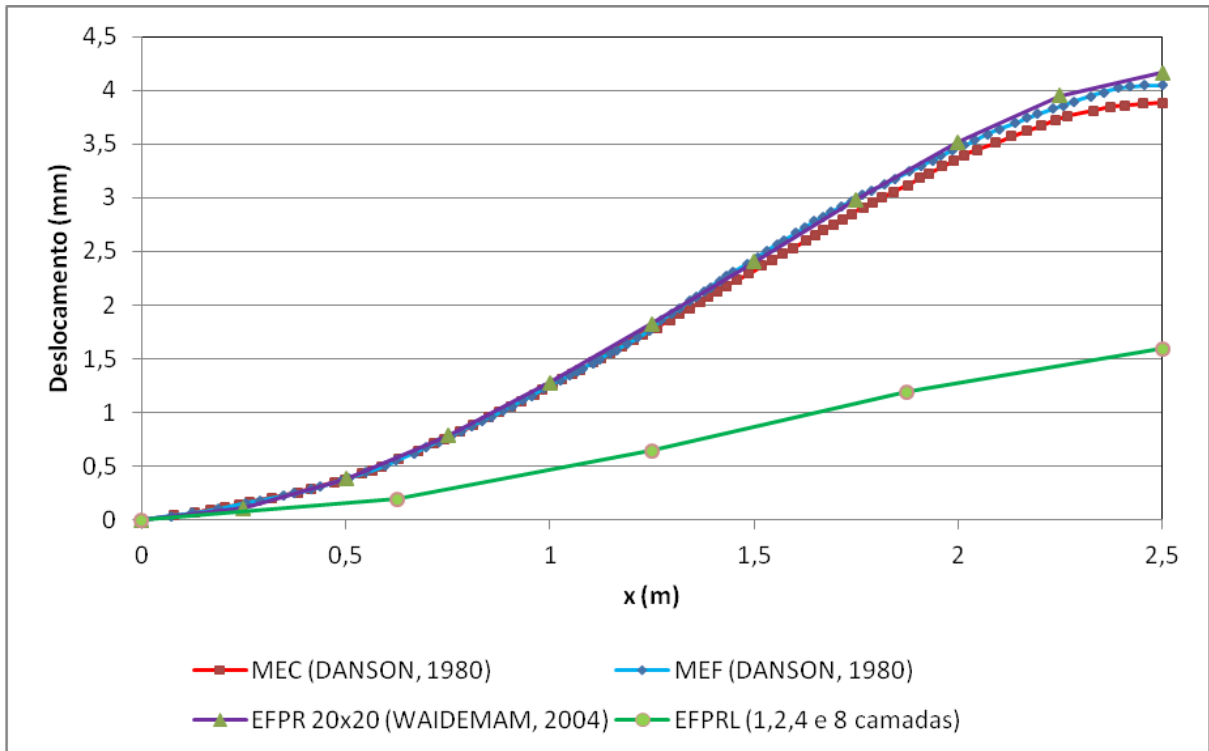
Fonte: Dados do próprio autor.

Tabela 18 – Deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, malha de 8x8 no plano xy e todas as bordas engastadas

Distância	Deslocamento (mm)			
	1 camada	2 camadas	4 camadas	8 camadas
x (m)	64 elementos	128 elementos	256 elementos	512 elementos
0,000	0,000000000	0,000000000	0,000000000	0,000000000
0,625	0,190925432	0,191867462	0,192677666	0,192895591
1,250	0,632046519	0,639204013	0,641609765	0,642241249
1,875	1,169477452	1,186005359	1,190226996	1,191374553
2,500	1,570784026	1,585846661	1,592430161	1,594252937

Fonte: Dados do próprio autor.

Figura 47 – Gráfico do deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas engastadas, e malha de 8x8 no plano xy



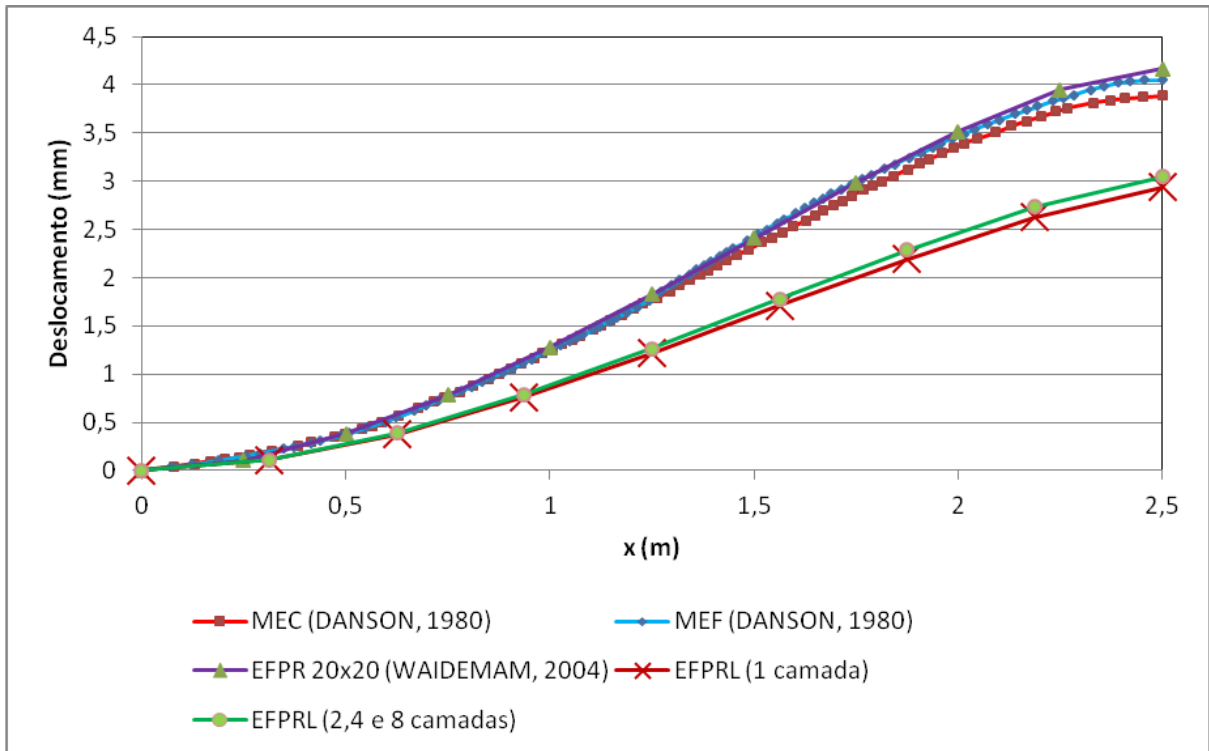
Fonte: Dados do próprio autor.

Tabela 19 – Deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, malha de 16x16 no plano xy e todas as bordas engastadas

Distância	Deslocamento (mm)			
	1 camada	2 camadas	4 camadas	8 camadas
x (m)	256 elementos	512 elementos	1024 elementos	2048 elementos
0,0000	0,000000000	0,000000000	0,000000000	0,000000000
0,3125	0,108441122	0,108259956	0,109794448	0,110209347
0,6250	0,377469605	0,385306556	0,388924806	0,389915658
0,9375	0,760096531	0,779437046	0,786429705	0,788315460
1,2500	1,216711612	1,250314380	1,261469548	1,264447294
1,5625	1,709549497	1,759036809	1,774673502	1,778881252
1,8750	2,195412991	2,258920157	2,279558652	2,285037577
2,1875	2,623589873	2,704955268	2,729158263	2,735777479
2,5000	2,938876766	3,004864376	3,036915595	3,045936674

Fonte: Dados do próprio autor.

Figura 48 – Gráfico do deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas engastadas, e malha de 16x16 no plano xy



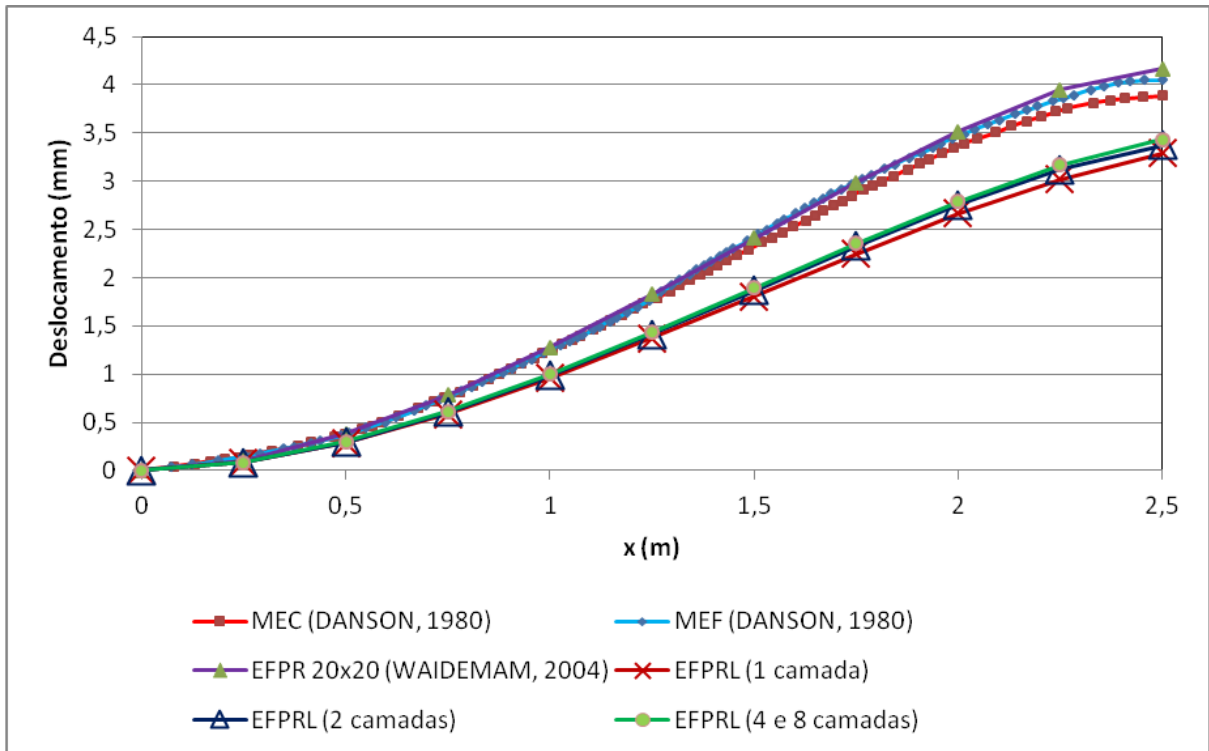
Fonte: Dados do próprio autor.

Tabela 20 – Deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, malha de 20x20 no plano xy e todas as bordas engastadas

Distância	Deslocamento (mm)			
	1 camada	2 camadas	4 camadas	8 camadas
x (m)	400 elementos	800 elementos	1600 elementos	3200 elementos
0,00	0,000000000	0,000000000	0,000000000	0,000000000
0,25	0,082595009	0,081702377	0,083342929	0,083790135
0,50	0,288379115	0,294589836	0,298104652	0,299084491
0,75	0,587450743	0,603738749	0,610340517	0,612137074
1,00	0,955079381	0,984371501	0,994770674	0,997576405
1,25	1,369305388	1,413456935	1,428201519	1,432169053
1,50	1,808636498	1,868516025	1,888062050	1,893282353
1,75	2,249753956	2,325875920	2,350073908	2,356616179
2,00	2,664005933	2,752931026	2,782500520	2,790370925
2,25	3,016783446	3,124867055	3,157540742	3,166523170
2,50	3,294338420	3,375910126	3,419311184	3,431671295

Fonte: Dados do próprio autor.

Figura 49 – Gráfico do deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas engastadas, e malha de 20x20 no plano xy



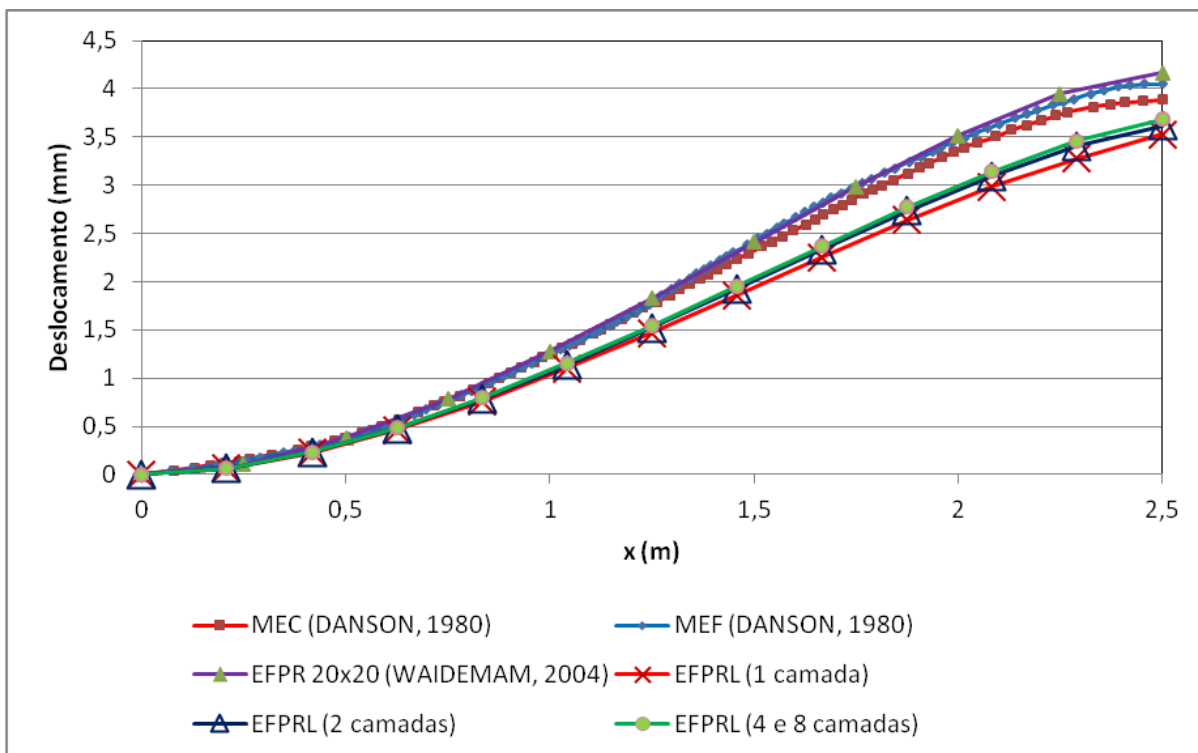
Fonte: Dados do próprio autor.

Tabela 21 – Deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, malha de 24x24 no plano xy e todas as bordas engastadas

Distância	Deslocamento (mm)			
	1 camada	2 camadas	4 camadas	8 camadas
x (m)	576 elementos	1152 elementos	1728 elementos	2304 elementos
0,000000000	0,000000000	0,000000000	0,000000000	0,000000000
0,208333333	0,064469247	0,062994073	0,064668196	0,065128068
0,416666667	0,224959206	0,229607327	0,232903074	0,233838100
0,625000000	0,461385250	0,474562851	0,480579755	0,482233940
0,833333333	0,757078012	0,781494945	0,790829339	0,793374074
1,041666667	1,097596758	1,135119779	1,148344695	1,151922081
1,250000000	1,469624348	1,521586430	1,539114883	1,543830506
1,458333333	1,859940677	1,927125808	1,949183928	1,955125054
1,666666667	2,254382062	2,336761317	2,363665351	2,370860516
1,875000000	2,636697106	2,734297136	2,765562468	2,774062935
2,083333333	2,986650338	3,095043482	3,131864667	3,141672203
2,291666667	3,279761625	3,408385573	3,447415364	3,458203088
2,500000000	3,529158148	3,618656429	3,671479451	3,686708540

Fonte: Dados do próprio autor.

Figura 50 – Gráfico do deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas engastadas, e malha de 24x24 no plano xy



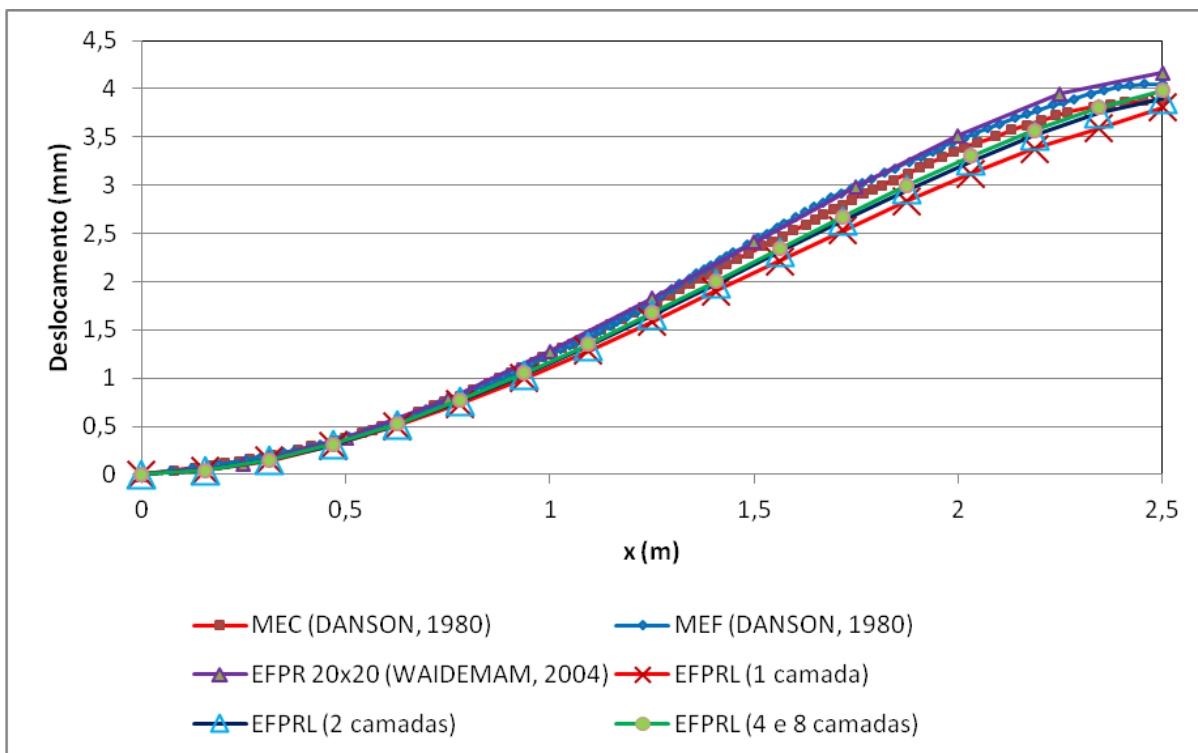
Fonte: Dados do próprio autor.

Tabela 22 – Deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, malha de 32x32 no plano xy e todas as bordas engastadas

Distância x (m)	Deslocamento (mm)			
	1 camada 1024 elementos	2 camadas 2048 elementos	4 camadas 4096 elementos	8 camadas 8192 elementos
0,00000	0,000000000	0,000000000	0,000000000	0,000000000
0,15625	0,042155823	0,039892705	0,041548863	0,042009792
0,31250	0,146137415	0,148399077	0,151226308	0,152058460
0,46875	0,301749783	0,310047131	0,314966904	0,316347844
0,62500	0,500339442	0,516791036	0,524183948	0,526242854
0,78125	0,734421196	0,760597684	0,770945334	0,773789222
0,93750	0,997331939	1,034541584	1,048195281	1,051921155
1,09375	1,282923733	1,332182622	1,349445806	1,354131320
1,25000	1,585282415	1,647333854	1,668444236	1,674152955
1,40625	1,898457112	1,973768210	1,998897069	2,005681723
1,56250	2,216184891	2,304917762	2,334199384	2,342085540
1,71875	2,531591765	2,633624089	2,667029299	2,676067293
1,87500	2,836849233	2,951462637	2,989275115	2,999412030
2,03125	3,122786930	3,249777911	3,290994770	3,302345839
2,18750	3,378405740	3,512285592	3,559509401	3,572033512
2,34375	3,590748944	3,747170694	3,794073173	3,807220084
2,50000	3,803676362	3,893355867	3,961002313	3,980954687

Fonte: Dados do próprio autor.

Figura 51 – Gráfico do deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas engastadas, e malha de 32x32 no plano xy



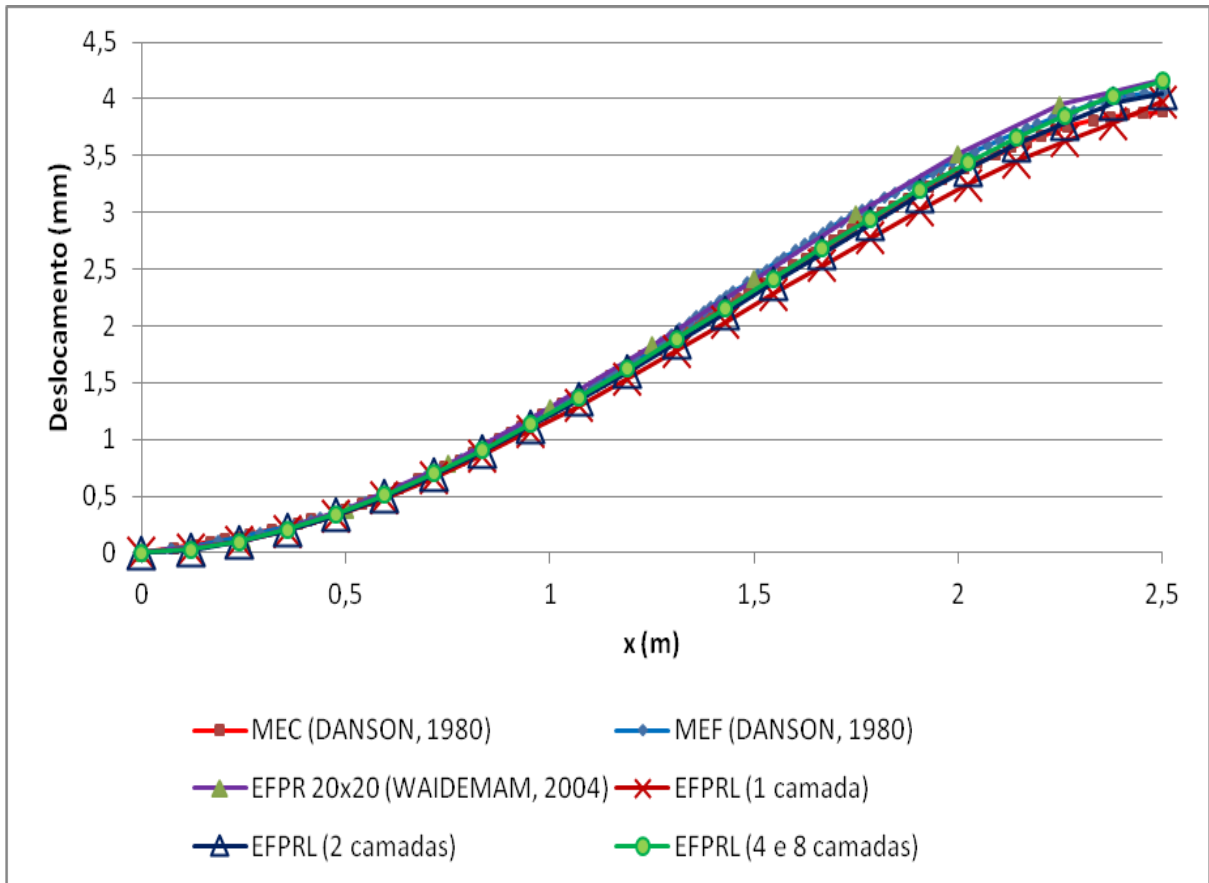
Fonte: Dados do próprio autor.

Tabela 23 – Deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, malha de 42x42 no plano xy e todas as bordas engastadas

Distância x (m)	Deslocamento (mm)			
	1 camada 1024 elementos	2 camadas 2048 elementos	4 camadas 4096 elementos	8 camadas 8192 elementos
0,000000000	0,000000000	0,000000000	0,000000000	0,000000000
0,119047619	0,027548005	0,024766938	0,026361529	0,026809506
0,238095238	0,094287499	0,094706158	0,097071738	0,097803626
0,357142857	0,195098397	0,199594532	0,203528723	0,204661161
0,476190476	0,325514250	0,335605383	0,341301095	0,342932626
0,595238095	0,481604124	0,498471753	0,506292549	0,508492126
0,714285714	0,659861516	0,684546472	0,694758970	0,697602325
0,833333333	0,857105253	0,890492151	0,903342545	0,906890310
0,952380952	1,070390495	1,113224139	1,128923965	1,133231534
1,071428571	1,296927250	1,349818802	1,368549773	1,373664772
1,190476190	1,534003876	1,597434386	1,619348726	1,625312017
1,309523810	1,778913047	1,853233071	1,878454173	1,885299830
1,428571429	2,028877616	2,114303093	2,142925293	2,150681023
1,547619048	2,280973525	2,377577103	2,409666736	2,418352783
1,666666667	2,532046543	2,639745860	2,675335548	2,684970743
1,785714286	2,778619374	2,897149762	2,936265870	2,946844460
1,904761905	3,016786604	3,145715725	3,188255461	3,199836337
2,023809524	3,242102834	3,380569843	3,426868162	3,439305818
2,142857143	3,449502349	3,597330585	3,645937534	3,659571302
2,261904762	3,633542183	3,784928653	3,840476554	3,854964722
2,380952381	3,788280623	3,964840777	4,016057451	4,030883972
2,500000000	3,976180512	4,050364798	4,132849970	4,157579948

Fonte: Dados do próprio autor.

Figura 52 – Gráfico do deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas engastadas, e malha de 42x42 no plano xy



Fonte: Dados do próprio autor.

Analisando-se os gráficos ilustrados pelas figuras 38, 39, 40, 41, 42, 43 e 44, que tratam do comportamento estático com carregamento concentrado da placa, considerando-se todas as bordas simplesmente apoiadas na altura média da placa, é possível verificar que as malhas de 2x2, 4x4, 8x8, 16x16, 20x20 e 24x24 elementos no plano xy, a precisão do elemento finito de placa retangular (malha 20x20) foi maior comparado com o elemento finito prismático regular linear, e quando a malha foi de 32x32 elementos no plano xy e 4 e 8 camadas, os resultados atingidos pelo elemento finito prismático regular linear ficaram mais próximos da curva teórica, do que os obtidos pelo elemento finito de placa retangular (malha 20x20).

Com os gráficos das figuras 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51 e 52 que se referem para todas as bordas engastadas da placa, é possível constatar que nas malhas de 2x2, 4x4, 8x8, 16x16, 20x20, 24x24 e 32x32 elementos no plano xy, o elemento finito de placa retangular (malha 20x20) apresentou maior precisão do que o elemento finito prismático regular linear. Com a malha de 42x42 elementos no plano

xy, a curva do elemento finito prismático regular linear de 4 e 8 camadas com os valores de x entre 2 e 2,5 metros, ilustrada pela figura 52, está mais próxima da curva MEF do que a curva do elemento finito de placa retangular (malha 20x20).

6.3.1.2 Todas as bordas simplesmente apoiadas na base da placa

Neste item serão determinados os deslocamentos no ponto central da placa, descrita na figura 37, para as espessuras “t” de 25 cm ($t/a=1/20$), “t” de 50 cm ($t/a=1/10$) e “t” de 100 cm ($t/a=1/5$).

Para todas as bordas apoiadas na base da placa foram realizadas dez discretizações no plano xy: malha 2x2, malha 4x4, malha 8x8, malha 16x16, malha 20x20, malha 24x24, malha 32x32, malha 42x42, malha 50x50 e malha 56x56. Na espessura na direção de z foram discretizadas em 1, 2, 4, e 8 camadas.

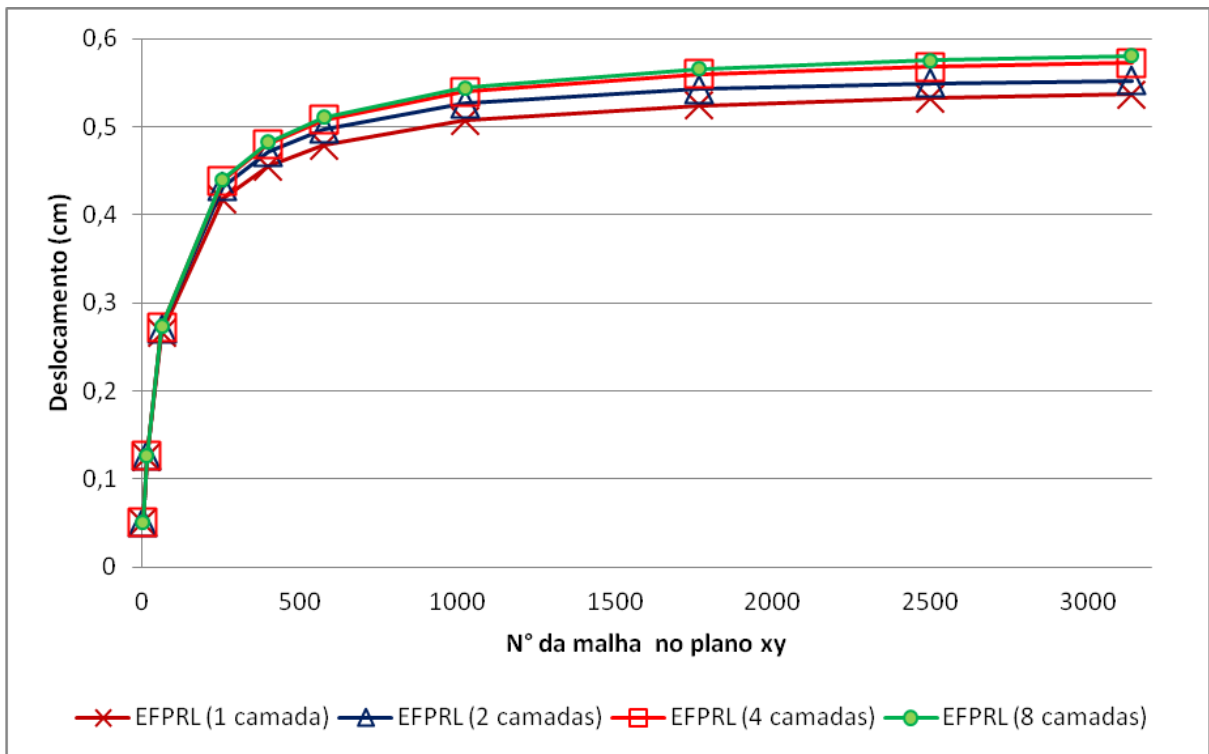
As respostas obtidas pelo programa MATLAB se encontram nas tabelas que seguem, onde relacionam o deslocamento em (cm) em função do número da malha no plano xy e da camada na direção z.

Tabela 24 – Deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas apoiadas na base da placa

MALHA XY	1 CAMADA	2 CAMADAS	4 CAMADAS	8 CAMADAS
Nº	Desloc.(cm)	Desloc.(cm)	Desloc.(cm)	Desloc.(cm)
2x2=4	0,050708104	0,050807458	0,050845109	0,050854760
4x4=16	0,125029757	0,125979970	0,126253347	0,126324547
8x8=64	0,265353322	0,270635168	0,272376195	0,272841118
16x16=256	0,418201117	0,432217028	0,438444420	0,440218551
20x20=400	0,455084144	0,471626622	0,480004069	0,482481611
24x24=576	0,479123803	0,497159201	0,507467271	0,510641515
32x32=1024	0,506998602	0,525999855	0,539573471	0,544117885
42x42=1764	0,524432624	0,542607908	0,559450697	0,565648112
50x50=2500	0,532320432	0,549093034	0,568130408	0,575564386
56x56=3136	0,536420035	0,551948329	0,572468875	0,580759542

Fonte: Dados do próprio autor.

Figura 53 – Gráfico do deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas apoiadas na base da placa



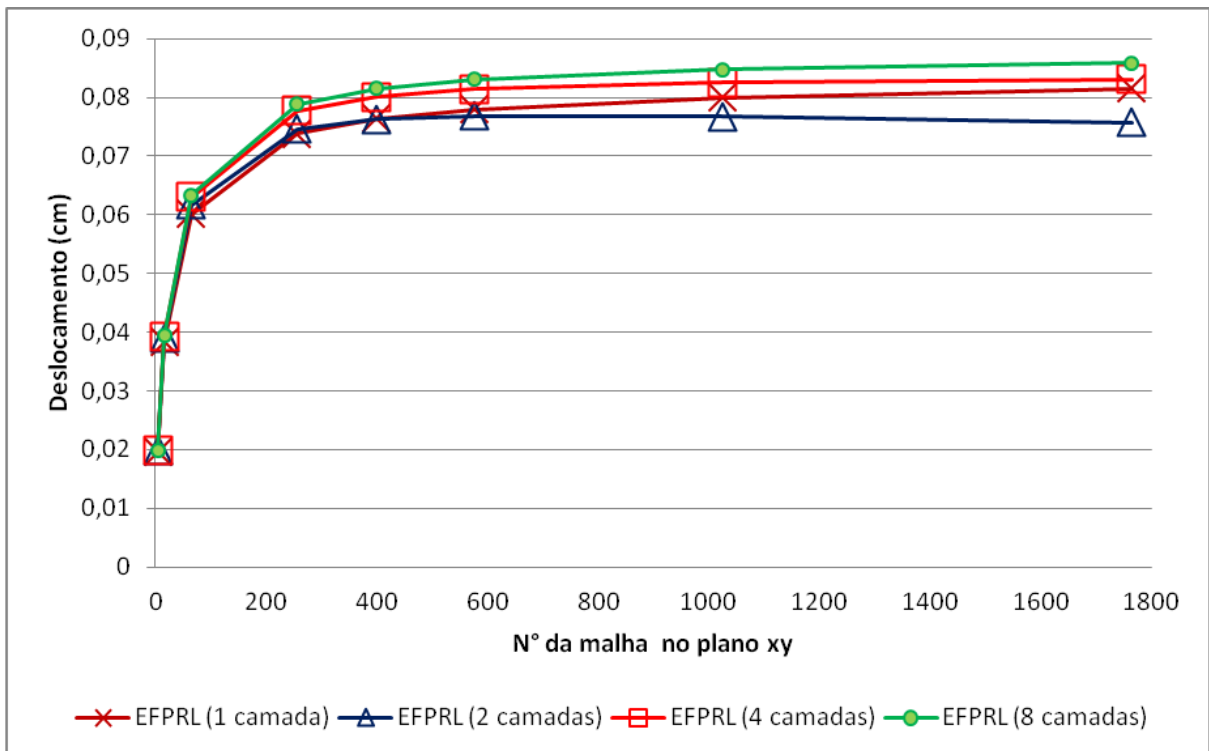
Fonte: Dados do próprio autor.

Tabela 25 – Deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/10 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas apoiadas na base da placa

MALHA XY	1 CAMADA	2 CAMADAS	4 CAMADAS	8 CAMADAS
Nº	Desloc.(cm)	Desloc.(cm)	Desloc.(cm)	Desloc.(cm)
2x2=4	0,019574560	0,019761873	0,019848632	0,019871311
4x4=16	0,038323802	0,038975150	0,039300638	0,039392260
8x8=64	0,060142178	0,061676329	0,062962381	0,063348129
16x16=256	0,073794160	0,074624055	0,077720953	0,078798893
20x20=400	0,076345710	0,076239942	0,080079282	0,081497578
24x24=576	0,077985869	0,076822408	0,081348006	0,083086811
32x32=1024	0,079997060	0,076674560	0,082502436	0,084781364
42x42=1764	0,081465049	0,075677613	0,083089322	0,085809602

Fonte: Dados do próprio autor.

Figura 54 – Gráfico do deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/10 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas apoiadas na base da placa



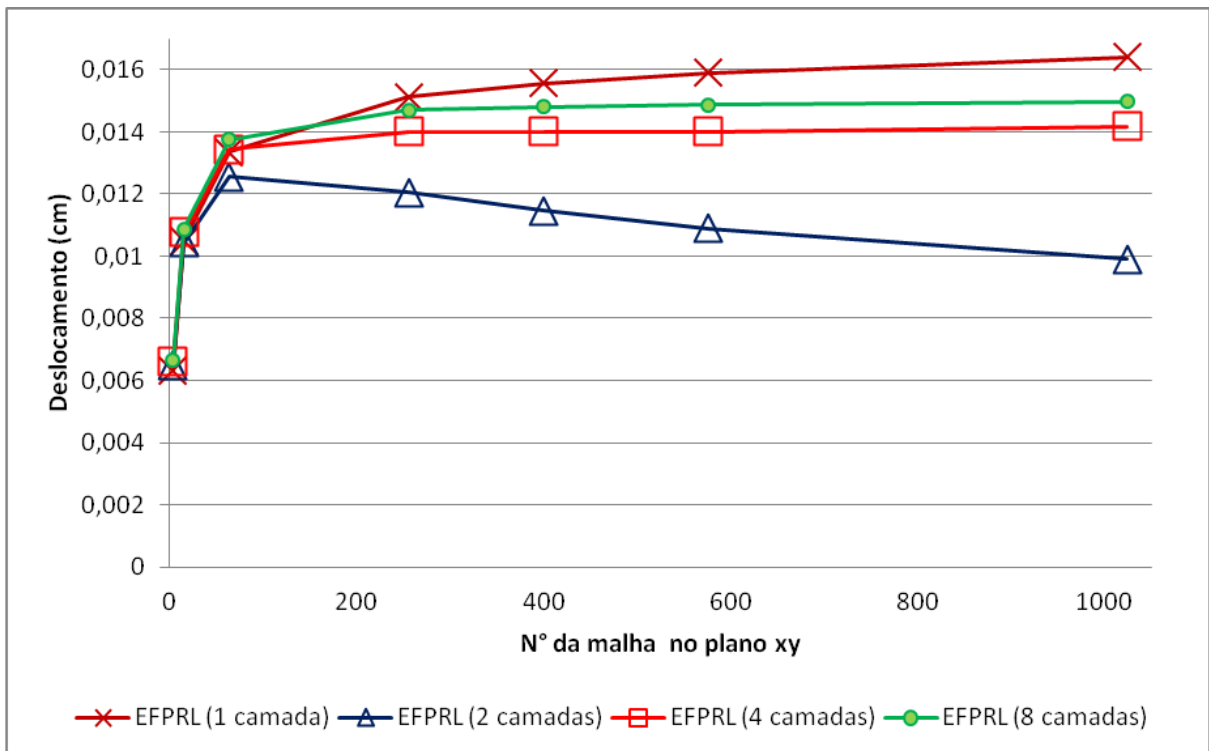
Fonte: Dados do próprio autor.

Tabela 26 – Deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/5 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas apoiadas na base da placa

MALHA XY	1 CAMADA	2 CAMADAS	4 CAMADAS	8 CAMADAS
Nº	Desloc.(cm)	Desloc.(cm)	Desloc.(cm)	Desloc.(cm)
2x2=4	0,006321355	0,006470972	0,006603993	0,006640071
4x4=16	0,010496889	0,010427072	0,010759579	0,010866627
8x8=64	0,013356792	0,012549961	0,013438996	0,013753623
16x16=256	0,015123686	0,012042545	0,014006608	0,014702349
20x20=400	0,015564655	0,011455593	0,013996757	0,014802204
24x24=576	0,015899635	0,010889040	0,014017190	0,014870039
32x32=1024	0,016397002	0,009910098	0,014173174	0,014975402

Fonte: Dados do próprio autor.

Figura 55 – Gráfico do deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/5 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas apoiadas na base da placa



Fonte: Dados do próprio autor.

Através das figuras 53, 54 e 55, que ilustram o deslocamento do ponto central, com carga concentrada, e considerando-se todas as bordas apoiadas na base da placa, é possível afirmar que o elemento finito prismático regular linear convergiu com a solução de 8 camadas na direção z. No plano xy a malha necessária para a convergência foi de: 50x50 para “t/a” de 1/20; 32x32 para “t/a” de 1/10; e 24x24 para “t/a” de 1/5.

6.3.1.3 Todas as bordas simplesmente apoiadas na altura média e na base da placa

Este item foi desenvolvido com o objetivo de analisar as respostas encontradas pelos os dois modos de bordas apoiadas: na altura média e na base da placa. As tabelas 27, 28 e 29 e a figura 56 referem-se à malha de 32x32 no plano xy, e 2 camadas na direção z, onde foram determinados os deslocamentos em “cm” dos nós localizados em y=2,50m da placa, ilustrada pela figura 37.

Tabela 27 – Deslocamentos dos pontos da placa para $y= 2,50\text{m}$ e $z=0$, “t/a” de 1/20, carga concentrada, malha de 32x32 no plano xy, com 2 camadas na direção z, e com todas as bordas apoiadas na altura média e na base da placa

Nó	Todos os bordos simplesmente apoiados na altura média da placa			Todos os bordos simplesmente apoiados na base da placa		
	Deslocamento (cm)			Deslocamento (cm)		
	Dx	Dy	Dz	Dx	Dy	Dz
529	-0,0521991	-2,35E-15	-0,0002357	0,0000000	0,0000000	0,0000000
530	-0,0520871	-3,25E-15	-0,0657931	-0,0062784	2,75E-15	-0,0242017
531	-0,0516177	-6,13E-15	-0,1310747	-0,0105131	5,11E-15	-0,0526086
532	-0,0510156	-8,99E-15	-0,1956539	-0,0142040	7,59E-15	-0,0840228
533	-0,0502544	-1,22E-14	-0,2594042	-0,0174148	1,02E-14	-0,1181370
534	-0,0493096	-1,54E-14	-0,3221087	-0,0201276	1,28E-14	-0,1544113
535	-0,0481463	-1,78E-14	-0,3835262	-0,0223541	1,58E-14	-0,1923246
536	-0,0467221	-1,97E-14	-0,4433665	-0,0240889	1,88E-14	-0,2313714
537	-0,0449842	-2,15E-14	-0,5012831	-0,0253127	2,18E-14	-0,2710303
538	-0,0428669	-2,18E-14	-0,5568593	-0,0259896	2,49E-14	-0,3107461
539	-0,0402871	-2,27E-14	-0,6095939	-0,0260637	2,81E-14	-0,3499088
540	-0,0371362	-2,30E-14	-0,6588706	-0,0254509	3,03E-14	-0,3878181
541	-0,0332720	-2,22E-14	-0,7039744	-0,0240313	3,20E-14	-0,4236952
542	-0,0284396	-2,27E-14	-0,7438172	-0,0215709	3,30E-14	-0,4564052
543	-0,0227462	-2,15E-14	-0,7778643	-0,0181962	3,37E-14	-0,4853794
544	-0,0135224	-1,80E-14	-0,8041761	-0,0112561	3,50E-14	-0,5086559
545	0,0000000	-1,40E-14	-0,8150736	0,0000000	3,61E-14	-0,5185430
546	0,0135224	-9,62E-15	-0,8041761	0,0112561	3,75E-14	-0,5086559
547	0,0227462	-4,45E-15	-0,7778643	0,0181962	3,80E-14	-0,4853794
548	0,0284396	-2,32E-16	-0,7438172	0,0215709	3,80E-14	-0,4564052
549	0,0332720	2,54E-15	-0,7039744	0,0240313	3,78E-14	-0,4236952
550	0,0371362	4,48E-15	-0,6588706	0,0254509	3,67E-14	-0,3878181
551	0,0402871	5,87E-15	-0,6095939	0,0260637	3,49E-14	-0,3499088
552	0,0428669	7,08E-15	-0,5568593	0,0259896	3,25E-14	-0,3107461
553	0,0449842	7,84E-15	-0,5012831	0,0253127	2,96E-14	-0,2710303
554	0,0467221	7,72E-15	-0,4433665	0,0240889	2,59E-14	-0,2313714
555	0,0481463	7,16E-15	-0,3835262	0,0223541	2,22E-14	-0,1923246
556	0,0493096	6,01E-15	-0,3221087	0,0201276	1,83E-14	-0,1544113
557	0,0502544	5,19E-15	-0,2594042	0,0174148	1,46E-14	-0,1181370
558	0,0510156	3,77E-15	-0,1956539	0,0142040	1,09E-14	-0,0840228
559	0,0516177	2,46E-15	-0,1310747	0,0105131	7,04E-15	-0,0526086
560	0,0520871	1,19E-15	-0,0657931	0,0062784	3,33E-15	-0,0242017
561	0,0521991	9,84E-16	-0,0002357	0,0000000	0,0000000	0,0000000

Fonte: Dados do próprio autor.

Tabela 28 – Deslocamentos dos pontos da placa para $y=2,50\text{m}$ e $z=12,5\text{cm}$, “t/a” de 1/20, carga concentrada, malha de 32x32 no plano xy, com 2 camadas na direção z, e com todas as bordas apoiadas na altura média e na base da placa

Nó	Todos os bordos simplesmente apoiados na altura média da placa			Todos os bordos simplesmente apoiados na base da placa		
	Deslocamento (cm)			Deslocamento (cm)		
	Dx	Dy	Dz	Dx	Dy	Dz
1618	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0144432	5,68E-16	0,0003962
1619	-7,39E-06	-8,10E-16	-0,0659409	0,0144272	1,56E-15	-0,0237620
1620	-1,19E-05	-1,36E-15	-0,1312284	0,0130557	2,83E-15	-0,0520728
1621	-1,64E-05	-1,88E-15	-0,1958914	0,0116753	3,86E-15	-0,0835942
1622	-2,15E-05	-2,42E-15	-0,2597124	0,0103977	4,81E-15	-0,1178112
1623	-2,71E-05	-2,82E-15	-0,3224951	0,0091863	5,67E-15	-0,1541780
1624	-3,34E-05	-3,64E-15	-0,3839954	0,0080466	6,34E-15	-0,1921870
1625	-4,06E-05	-3,98E-15	-0,4439255	0,0069795	7,02E-15	-0,2313328
1626	-4,92E-05	-4,20E-15	-0,5019409	0,0059828	7,79E-15	-0,2710969
1627	-5,98E-05	-4,56E-15	-0,5576280	0,0050523	8,50E-15	-0,3109278
1628	-7,33E-05	-4,37E-15	-0,6104873	0,0041817	9,08E-15	-0,3502178
1629	-9,10E-05	-4,35E-15	-0,6599189	0,0033634	9,72E-15	-0,3882834
1630	-0,0001204	-4,35E-15	-0,7051638	0,0025821	1,03E-14	-0,4243025
1631	-0,0001795	-3,73E-15	-0,7454154	0,0018113	1,10E-14	-0,4574212
1632	0,0000243	-3,80E-15	-0,7790846	0,0013341	1,17E-14	-0,4860175
1633	-0,0022289	-3,47E-15	-0,8070150	-0,0015793	1,21E-14	-0,5109126
1634	0,0000000	-2,76E-15	-0,8231127	0,0000000	1,26E-14	-0,5259999
1635	0,0022289	-2,78E-15	-0,8070150	0,0015793	1,25E-14	-0,5109126
1636	-0,0000243	-2,52E-15	-0,7790846	-0,0013341	1,20E-14	-0,4860175
1637	0,0001795	-2,85E-15	-0,7454154	-0,0018113	1,16E-14	-0,4574212
1638	0,0001204	-3,29E-15	-0,7051638	-0,0025821	1,11E-14	-0,4243025
1639	9,10E-05	-3,82E-15	-0,6599189	-0,0033634	1,06E-14	-0,3882834
1640	7,33E-05	-4,29E-15	-0,6104873	-0,0041817	1,00E-14	-0,3502178
1641	5,98E-05	-4,54E-15	-0,5576280	-0,0050523	9,44E-15	-0,3109278
1642	4,92E-05	-4,45E-15	-0,5019409	-0,0059828	8,47E-15	-0,2710969
1643	4,06E-05	-4,62E-15	-0,4439255	-0,0069795	7,72E-15	-0,2313328
1644	3,34E-05	-4,41E-15	-0,3839954	-0,0080466	6,60E-15	-0,1921870
1645	2,71E-05	-4,05E-15	-0,3224951	-0,0091863	5,83E-15	-0,1541780
1646	2,15E-05	-3,48E-15	-0,2597124	-0,0103977	4,87E-15	-0,1178112
1647	1,64E-05	-2,93E-15	-0,1958914	-0,0116753	3,79E-15	-0,0835942
1648	1,19E-05	-2,19E-15	-0,1312284	-0,0130557	2,53E-15	-0,0520728
1649	7,39E-06	-1,40E-15	-0,0659409	-0,0144272	9,93E-16	-0,0237620
1650	0,0000000	0,0000000	0,0000000	-0,0144432	-6,37E-16	0,0003962

Fonte: Dados do próprio autor.

Tabela 29 – Deslocamentos dos pontos da placa para $y=2,50\text{m}$ e $z=25\text{cm}$, “t/a” de 1/20, carga concentrada, malha de 32x32 no plano xy, com 2 camadas na direção z, e com todas as bordas apoiadas na altura média e na base da placa

Nó	Todos os bordos simplesmente apoiados na altura média da placa			Todos os bordos simplesmente apoiados na base da placa		
	Deslocamento (cm)			Deslocamento (cm)		
	Dx	Dy	Dz	Dx	Dy	Dz
2707	0,0521846	1,40E-15	-0,0002372	0,0342942	-1,49E-17	0,0007854
2708	0,0520721	1,80E-15	-0,0657901	0,0350045	5,62E-16	-0,0240430
2709	0,0515942	3,56E-15	-0,1310735	0,0365321	5,36E-16	-0,0519041
2710	0,0509827	5,25E-15	-0,1956527	0,0375820	2,31E-16	-0,0834071
2711	0,0502114	6,88E-15	-0,2594030	0,0382198	-3,89E-16	-0,1175535
2712	0,0492554	8,73E-15	-0,3221075	0,0385066	-1,38E-15	-0,1538453
2713	0,0480796	1,06E-14	-0,3835250	0,0384524	-2,63E-15	-0,1917735
2714	0,0466408	1,22E-14	-0,4433653	0,0380517	-4,55E-15	-0,2308312
2715	0,0448858	1,30E-14	-0,5012818	0,0372809	-6,04E-15	-0,2704979
2716	0,0427473	1,40E-14	-0,5568581	0,0360959	-7,89E-15	-0,3102190
2717	0,0401406	1,43E-14	-0,6095926	0,0344284	-9,32E-15	-0,3493851
2718	0,0369520	1,45E-14	-0,6588697	0,0321761	-1,09E-14	-0,3872969
2719	0,0330362	1,39E-14	-0,7039630	0,0292009	-1,09E-14	-0,4231647
2720	0,0281528	1,38E-14	-0,7438642	0,0252659	-1,05E-14	-0,4559336
2721	0,0217660	1,37E-14	-0,7779566	0,0198357	-1,05E-14	-0,4849533
2722	0,0145959	1,14E-14	-0,8000487	0,0136289	-1,01E-14	-0,5040101
2723	0,0000000	7,77E-15	-0,8476223	9,26E-15	-1,14E-14	-0,5505734
2724	-0,0145959	3,27E-15	-0,8000487	-0,0136289	-1,22E-14	-0,5040101
2725	-0,0217660	-2,51E-16	-0,7779566	-0,0198357	-1,40E-14	-0,4849533
2726	-0,0281528	-3,93E-15	-0,7438642	-0,0252659	-1,50E-14	-0,4559336
2727	-0,0330362	-9,36E-15	-0,7039630	-0,0292009	-1,55E-14	-0,4231647
2728	-0,0369520	-1,20E-14	-0,6588697	-0,0321761	-1,53E-14	-0,3872969
2729	-0,0401406	-1,54E-14	-0,6095926	-0,0344284	-1,45E-14	-0,3493851
2730	-0,0427473	-1,61E-14	-0,5568581	-0,0360959	-1,34E-14	-0,3102190
2731	-0,0448858	-1,77E-14	-0,5012818	-0,0372809	-1,20E-14	-0,2704979
2732	-0,0466408	-1,70E-14	-0,4433653	-0,0380517	-1,03E-14	-0,2308312
2733	-0,0480796	-1,61E-14	-0,3835250	-0,0384524	-8,47E-15	-0,1917735
2734	-0,0492554	-1,44E-14	-0,3221075	-0,0385066	-6,62E-15	-0,1538453
2735	-0,0502114	-1,23E-14	-0,2594030	-0,0382198	-4,80E-15	-0,1175535
2736	-0,0509827	-9,52E-15	-0,1956527	-0,0375820	-3,19E-15	-0,0834071
2737	-0,0515942	-6,63E-15	-0,1310735	-0,0365321	-1,90E-15	-0,0519041
2738	-0,0520721	-3,66E-15	-0,0657901	-0,0350045	-1,15E-15	-0,0240430
2739	-0,0521846	-2,56E-15	-0,0002372	-0,0342942	-2,12E-15	0,0007854

Fonte: Dados do próprio autor.

Tabela 30 – Forças nos pontos da placa para $y= 2,50\text{m}$ e $z=0$, “t/a” de 1/20, carga concentrada, malha de 32x32 no plano xy, com 2 camadas na direção z, e com todas as bordas apoiadas na altura média e na base da placa

Nó	Todos os bordos simplesmente apoiados na altura média da placa			Todos os bordos simplesmente apoiados na base da placa		
	Força (KN)			Força (KN)		
	Fx	Fy	Fz	Fx	Fy	Fz
529	-3,41E-13	-1,28E-13	-1,11E-12	99,3360974	-1,73E-11	22,5228580
530	1,25E-12	-5,68E-14	-3,98E-13	2,70E-13	-1,07E-13	-8,24E-13
531	2,56E-13	-4,26E-13	1,09E-11	1,42E-14	3,69E-13	-2,02E-12
532	3,69E-12	-1,14E-12	2,61E-12	1,99E-13	-1,99E-13	-3,18E-12
533	9,66E-13	6,25E-13	-1,14E-13	-1,14E-13	-3,98E-13	-1,09E-11
534	9,09E-13	-2,73E-12	4,27E-11	2,84E-14	4,55E-13	-1,92E-11
535	1,08E-12	2,84E-13	-1,61E-11	3,41E-13	1,53E-12	-1,78E-11
536	0	-1,93E-12	-2,00E-11	-6,82E-13	1,82E-12	-5,12E-11
537	-5,68E-13	-1,14E-12	7,44E-11	-1,08E-12	2,84E-12	2,50E-12
538	3,07E-12	3,52E-12	8,05E-11	-9,09E-13	3,41E-12	1,44E-11
539	1,02E-12	-2,27E-13	7,12E-11	2,84E-12	2,27E-12	-5,91E-11
540	1,48E-12	-6,25E-12	1,43E-10	-8,53E-13	2,27E-13	-2,15E-11
541	4,21E-12	-1,25E-12	1,66E-10	1,71E-12	-3,13E-12	-1,89E-11
542	5,91E-12	-9,09E-13	4,96E-11	7,96E-13	-2,39E-12	2,73E-12
543	2,16E-12	-5,91E-12	8,09E-11	1,48E-12	-1,71E-12	-4,05E-11
544	1,48E-12	-2,84E-12	1,66E-10	5,68E-13	3,18E-12	1,98E-11
545	6,48E-12	3,98E-12	2,19E-10	3,07E-12	3,18E-12	9,28E-11
546	8,19E-12	-9,09E-12	2,02E-10	3,41E-12	-1,36E-12	-1,41E-11
547	9,44E-12	1,82E-12	1,20E-10	-5,12E-13	7,39E-13	-3,87E-12
548	4,77E-12	-2,61E-12	7,48E-11	2,27E-13	2,79E-12	5,62E-11
549	6,25E-12	-1,02E-12	1,00E-10	4,60E-12	-1,14E-12	5,91E-12
550	4,89E-12	-5,00E-12	9,19E-11	-1,14E-13	1,48E-12	9,09E-12
551	6,37E-12	-2,96E-12	5,39E-11	9,09E-13	3,98E-13	6,71E-12
552	7,05E-12	-1,02E-12	3,73E-11	1,71E-12	-1,36E-12	-5,25E-11
553	4,49E-12	-3,07E-12	1,67E-11	-3,41E-12	1,19E-12	-1,77E-11
554	-2,16E-12	1,14E-12	5,14E-11	-9,95E-13	7,11E-13	-1,34E-11
555	6,82E-13	-2,56E-12	3,04E-11	7,11E-13	-1,42E-13	-1,39E-11
556	4,32E-12	-3,13E-12	4,66E-11	-1,65E-12	2,84E-13	-1,04E-11
557	3,81E-12	-1,19E-12	1,40E-11	-1,49E-12	6,25E-13	-1,46E-11
558	2,90E-12	1,42E-13	-4,55E-12	-4,62E-13	2,27E-13	-1,92E-11
559	-1,78E-12	1,56E-13	-1,10E-11	-3,98E-13	-1,03E-13	-7,19E-12
560	-7,82E-13	-1,14E-13	-3,98E-12	-5,96E-13	8,67E-14	-2,48E-12
561	2,42E-13	-1,56E-13	-4,26E-13	-99,3360974	-1,25E-11	22,5228580

Nota: Os valores demarcados serão utilizados na figura 57.

Fonte: Dados do próprio autor.

Tabela 31 – Forças nos pontos da placa para $y=2,50\text{m}$ e $z=12,5\text{cm}$, “t/a” de 1/20, carga concentrada, malha de 32x32 no plano xy, com 2 camadas na direção z, e com todas as bordas apoiadas na altura média e na base da placa

Nó	Todos os bordos simplesmente apoiados na altura média da placa			Todos os bordos simplesmente apoiados na base da placa		
	Força (KN)			Força (KN)		
	Fx	Fy	Fz	Fx	Fy	Fz
1618	0,2419940	1,32E-11	19,7799074	-2,13E-12	-3,91E-14	1,80E-12
1619	-2,81E-12	-6,54E-13	3,85E-11	-5,35E-12	-9,52E-13	8,20E-12
1620	-4,41E-12	-1,34E-12	1,09E-11	-5,26E-12	-1,42E-13	2,81E-12
1621	-1,02E-11	-5,12E-12	5,88E-11	-6,37E-12	1,45E-12	3,13E-12
1622	-8,75E-12	-9,09E-12	1,04E-10	-9,46E-12	6,25E-13	1,86E-11
1623	-1,64E-11	2,05E-12	1,98E-10	-8,84E-12	-3,78E-12	1,09E-10
1624	-2,98E-11	-6,14E-12	1,68E-10	-1,93E-11	-6,65E-12	1,01E-10
1625	-7,16E-12	3,07E-12	1,12E-10	-8,87E-12	-4,43E-12	1,14E-10
1626	-6,37E-12	0,0000000	7,98E-11	-3,07E-12	-6,14E-12	9,37E-11
1627	-2,36E-11	-1,33E-11	1,91E-11	-1,89E-11	-3,18E-12	1,10E-11
1628	-3,87E-12	1,10E-11	2,08E-10	-1,19E-11	-3,64E-12	1,66E-10
1629	-8,07E-12	2,05E-12	-2,75E-11	-3,69E-12	-2,27E-13	2,29E-10
1630	-2,13E-11	-3,52E-12	3,27E-10	-8,64E-12	3,64E-12	1,50E-10
1631	-2,13E-11	8,30E-12	2,74E-10	-1,17E-11	-2,96E-12	1,34E-10
1632	3,87E-12	-8,98E-12	2,07E-10	6,25E-12	3,41E-12	1,27E-10
1633	-4,77E-12	5,46E-12	1,75E-11	1,00E-11	3,75E-12	-2,16E-11
1634	5,23E-12	9,32E-12	2,84E-10	-1,27E-11	-1,13E-11	9,21E-11
1635	-4,20E-11	-1,07E-11	1,86E-11	-1,51E-11	-1,93E-12	1,11E-10
1636	-2,65E-11	1,84E-11	1,35E-10	2,96E-12	-4,49E-12	8,07E-11
1637	-6,82E-12	-5,68E-13	1,70E-10	-1,53E-12	-7,56E-12	1,14E-10
1638	1,06E-11	-2,17E-11	1,51E-10	-5,17E-12	-1,33E-11	9,83E-11
1639	-4,32E-12	6,48E-12	3,97E-10	7,05E-12	-5,80E-12	2,24E-10
1640	-1,25E-12	9,09E-13	2,37E-10	-6,08E-12	-5,29E-12	2,84E-12
1641	7,05E-12	-2,05E-12	4,14E-11	1,08E-11	6,03E-12	1,89E-10
1642	1,43E-11	-2,27E-13	1,38E-10	1,61E-11	-5,91E-12	4,60E-11
1643	5,29E-12	-9,49E-12	3,52E-11	1,11E-11	1,19E-12	5,48E-11
1644	1,55E-11	-8,19E-12	6,34E-11	6,93E-12	-8,55E-12	9,09E-13
1645	1,13E-11	-1,07E-11	3,21E-11	1,08E-11	-7,76E-12	1,12E-11
1646	4,69E-12	-1,14E-12	2,96E-12	5,19E-12	-5,19E-12	8,90E-12
1647	1,31E-12	-5,97E-12	5,53E-11	7,33E-12	-1,63E-12	3,68E-11
1648	1,72E-12	-4,68E-12	5,98E-11	8,26E-12	-1,65E-12	8,19E-12
1649	6,04E-12	-1,91E-12	2,82E-11	5,67E-12	-1,67E-13	7,41E-12
1650	-0,2419940	2,41E-11	19,7799074	2,57E-13	-3,22E-14	1,24E-12

Nota: Os valores demarcados serão utilizados na figura 57.

Fonte: Dados do próprio autor.

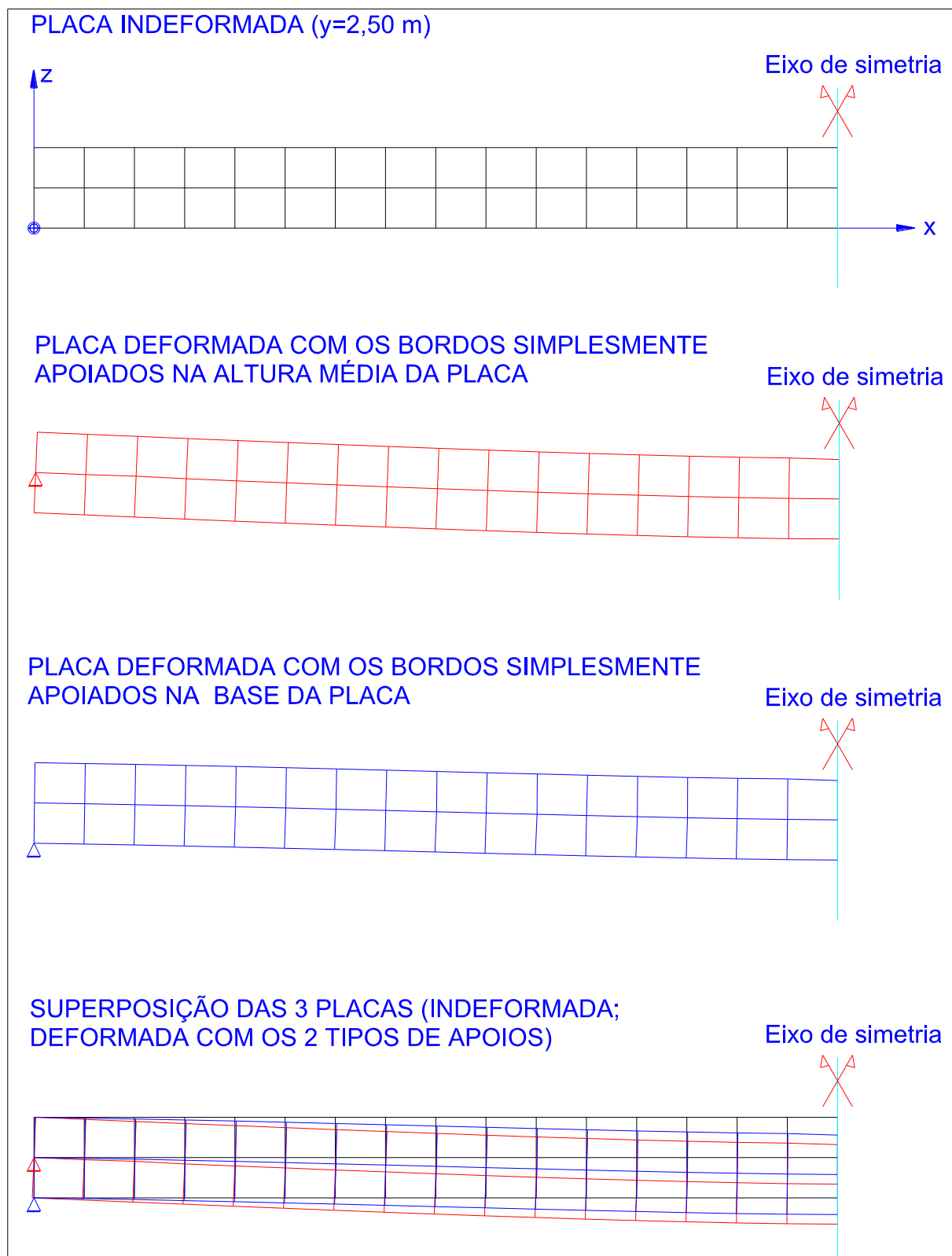
Tabela 32 – Forças nos pontos da placa para $y=2,50\text{m}$ e $z=25\text{cm}$, “t/a” de 1/20, carga concentrada, malha de 32x32 no plano xy, com 2 camadas na direção z, e com todas as bordas apoiadas na altura média e na base da placa

Nó	Todos os bordos simplesmente apoiados na altura média da placa			Todos os bordos simplesmente apoiados na base da placa		
	Força (KN)			Força (KN)		
	Fx	Fy	Fz	Fx	Fy	Fz
2707	-2,00E-12	-3,02E-13	-3,57E-13	-5,22E-12	5,24E-14	2,65E-12
2708	-1,15E-11	2,84E-13	9,59E-12	-6,44E-12	-3,22E-13	7,21E-12
2709	-1,42E-11	2,83E-12	6,38E-12	-1,38E-11	1,52E-12	1,93E-11
2710	-1,18E-11	2,73E-12	3,49E-11	-1,30E-11	2,95E-12	2,95E-11
2711	-1,04E-11	-1,34E-11	3,94E-11	-7,38E-12	4,42E-12	1,31E-11
2712	-2,95E-11	-1,77E-11	-2,99E-11	-1,21E-11	-4,69E-13	1,27E-11
2713	-2,05E-11	-8,55E-12	3,76E-11	-1,74E-11	4,40E-12	3,90E-11
2714	-2,17E-11	4,89E-12	6,56E-11	-1,66E-11	2,13E-13	2,62E-11
2715	-2,26E-11	-3,34E-12	5,33E-11	-2,86E-11	2,96E-12	6,58E-11
2716	-1,45E-11	1,77E-11	9,99E-11	-1,28E-11	-5,03E-12	7,46E-11
2717	-2,18E-11	-1,96E-12	8,98E-11	5,34E-12	8,24E-12	5,11E-11
2718	1,68E-11	-3,24E-12	3,12E-11	-1,10E-11	-4,58E-12	2,31E-11
2719	2,69E-11	-9,44E-12	-7,18E-11	-1,29E-11	4,92E-12	5,66E-11
2720	-1,62E-11	-3,17E-11	-2,66E-11	-1,40E-11	9,18E-12	4,06E-11
2721	-2,34E-11	-1,92E-11	-4,22E-12	-1,09E-11	-5,47E-12	2,81E-11
2722	9,61E-12	-5,40E-13	3,56E-11	-9,52E-13	4,31E-12	8,28E-11
2723	1,57E-11	-4,43E-12	-1000	4,48E-12	-9,35E-12	-1000
2724	-3,18E-11	-1,03E-11	-1,42E-10	-1,10E-11	1,22E-11	5,20E-12
2725	1,19E-11	1,76E-11	-5,52E-11	5,97E-13	-8,28E-12	-3,50E-11
2726	-4,72E-12	4,06E-11	4,14E-11	1,93E-11	-1,26E-11	3,52E-11
2727	1,48E-11	-4,15E-12	-8,08E-11	1,97E-11	-5,60E-12	4,33E-11
2728	1,47E-11	3,33E-12	-1,04E-10	7,65E-12	1,71E-13	4,13E-11
2729	5,68E-14	-1,85E-11	2,75E-11	1,88E-11	5,68E-12	3,40E-11
2730	1,97E-11	1,61E-12	1,58E-11	2,26E-11	1,10E-11	3,10E-11
2731	2,70E-11	-1,87E-11	-2,01E-11	7,22E-12	8,04E-12	3,89E-11
2732	1,19E-12	-9,15E-12	-1,84E-12	1,62E-11	1,09E-12	7,58E-11
2733	1,51E-11	-2,12E-12	7,97E-11	1,35E-11	2,93E-12	6,52E-11
2734	1,58E-11	-1,12E-11	5,50E-11	1,40E-11	-1,03E-13	5,02E-11
2735	2,41E-11	-4,79E-12	3,81E-11	1,60E-11	-1,30E-12	3,59E-11
2736	2,02E-11	1,28E-13	4,14E-11	1,68E-11	5,06E-13	2,62E-11
2737	1,56E-11	2,05E-12	1,67E-11	1,23E-11	4,86E-13	1,87E-11
2738	1,84E-11	1,38E-15	1,03E-11	1,44E-11	6,10E-14	9,71E-12
2739	1,27E-11	7,75E-13	4,78E-12	5,43E-12	-4,48E-14	2,24E-12

Nota: Os valores demarcados serão utilizados na figura 57.

Fonte: Dados do próprio autor.

Figura 56 – Deslocamentos dos pontos da placa para $y=2,50\text{m}$ e “ t/a ” de $1/20$, carga concentrada, malha de 32×32 no plano xy , com 2 camadas na direção z , e com todas as bordas apoiadas na altura média e na base da placa



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 57 – Forças nos pontos da placa para $y=2,50\text{m}$ e “ t/a ” de $1/20$, carga concentrada, malha de 32×32 no plano xy , com 2 camadas na direção z , e com todas as bordas apoiadas na altura média e na base da placa



Fonte: Elaboração do próprio autor.

A figura 56 revela que a placa teve uma maior deformação com os apoios restritos em sua altura média, comparada com a deformação obtida pela restrição dos apoios na base da placa. Isto ocorre porque os apoios restritos na altura média da placa permitem que a rotação ocorra com movimentos livres de translação nos

nós superiores e inferiores da placa; quando a restrição dos apoios é feita na base a rotação ocorre com impedimento de translação nos nós localizados na base da placa.

A figura 57 mostra que a reação de apoio horizontal é maior para a placa apoiada em sua base, que foi de 99,3360974 kN, comparada com a reação horizontal da placa restrita em sua altura média, onde foi determinado o valor de 0,2419940 kN. Podem-se justificar as diferenças dos valores das reações de apoios de forma análoga ao efeito mencionado no parágrafo anterior.

6.3.1.4 Carregamento incremental considerando todas as bordas engastadas

A análise estática com carregamento incremental será efetuada para a placa descrita na figura 37, para a espessura “t” de 25 cm ($t/a=1/20$). Esta análise foi realizada neste trabalho com o objetivo de preparar a estrutura do programa computacional para a análise dinâmica, pois para a análise linear estática com carregamento incremental o gráfico deve ser uma reta.

A discretização da estrutura foi efetuada com uma malha de 42x42 no plano xy, e na direção z com duas camadas.

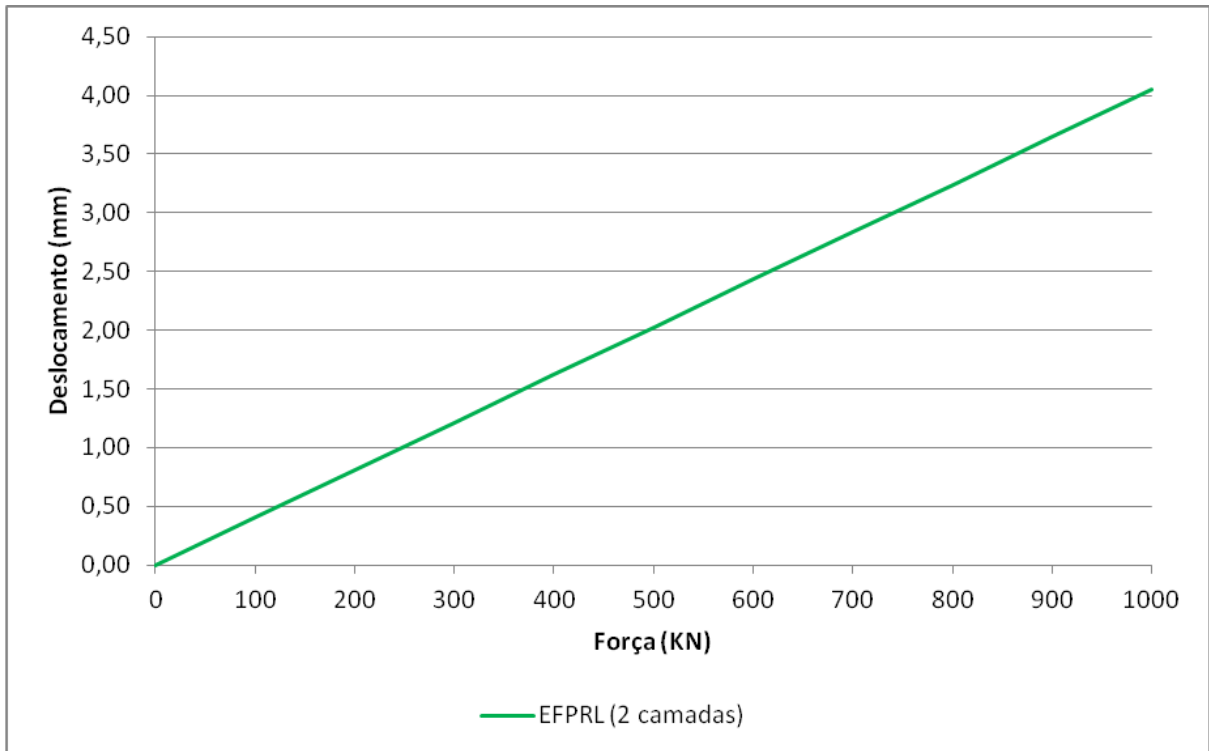
A análise estática incremental foi realizada através do acréscimo da força de 100 KN em 10 passos. A tabela 33 e o gráfico representado pela figura 58 ilustram a resposta da análise estática com carregamento incremental.

Tabela 33 – Deslocamentos do ponto central da placa com “t/a” de 1/20, carga concentrada, malha de 42x42 no plano xy, com 2 camadas na direção z, todas as bordas engastadas, e com carregamento incremental

Força (KN)	Deslocamentos (mm)
0	0,000000000
100	0,405036480
200	0,810072960
300	1,215109440
400	1,620145919
500	2,025182399
600	2,430218879
700	2,835255359
800	3,240291839
900	3,645328319
1000	4,050364799

Fonte: Dados do próprio autor.

Figura 58 – Gráfico dos deslocamentos do ponto central da placa com “t/a” de 1/20, carga concentrada, malha de 42x42 no plano xy, com 2 camadas na direção z, todas as bordas engastadas, e com carregamento incremental



Fonte: Dados do próprio autor.

O gráfico da figura 58 apresentou uma reta, que está de acordo com análise estrutural linear desenvolvido neste trabalho, permitindo concluir que a estrutura do programa computacional está correta.

E o deslocamento obtido para força de 1000 KN de 4,050364799 mm, que está na tabela 33, confere com o deslocamento obtido pela análise estática do item 6.3.1.1, que se encontra na tabela 23 para “x” de 2,5 m e 2 camadas.

6.3.2 Análise dinâmica

A análise dinâmica será realizada para a placa descrita na figura 37 para a espessura “t” de 25 cm (“t/a”=1/20).

A discretização da estrutura foi efetuada com uma malha de 42x42 no plano xy, e com 2 camadas na direção z.

As características físicas do material são dadas por:

$$E=2,5 \times 10^3 \text{ kN/cm}^2; \nu=0,20; \gamma = 2,557022 \times 10^{-5} \text{ kN/cm}^2; \varepsilon = 0,001; \\ \beta = 1/4; \gamma = 1/2.$$

A análise dinâmica será realizada com amortecimento ξ de 0%, 12,5% e 50%.

A determinação adequada do parâmetro Δt é de fundamental importância para uma análise dinâmica, para evitar instabilidade numérica na resolução de sistemas de equações (BATHE et al.1973 citado por RODRIGUES, 1997, p. 169).

O valor de Δt é proposto por Warburton (1976) representado pela expressão (150), citado por RODRIGUES (1997, p. 169).

$$\Delta t \leq 0,551T \quad (150)$$

onde "T" é o período necessário para a estrutura realizar um ciclo completo de vibração.

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1} \quad (151)$$

O valor da frequência natural ω_1 é determinado com o auxílio da equação (126).

$$\omega_i = \sqrt{\frac{1}{\Lambda_i}}$$

$$\omega_1 = 335,5848 \text{ rad} / \text{s}$$

$$T = 18,72 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

Será adotado o $\Delta t = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ s}$.

A tabela 34 e a figura 59 representam a resposta dinâmica da placa quadrada com carregamento concentrado.

Tabela 34 – Deslocamentos do ponto central da placa com “t/a” de 1/20, carga concentrada, malha de 42x42 no plano xy, com 2 camadas na direção z, todas as bordas engastadas, e com análise dinâmica

n	Tempo (ms)	Deslocamento (mm)			n	Tempo (ms)	Deslocamento (mm)		
		0%	12,50%	50%			0%	12,50%	50%
0	0,0	0,000000	0,000000	0,000000	31	15,5	2,721045	3,656093	4,263831
1	0,5	0,270165	0,181994	0,107003	32	16,0	1,999782	3,384619	4,217427
2	1,0	0,740509	0,598838	0,386345	33	16,5	1,483909	3,146738	4,173858
3	1,5	1,137753	1,026027	0,729498	34	17,0	1,216972	2,948260	4,133795
4	2,0	1,567619	1,422385	1,074336	35	17,5	1,104602	2,792222	4,097748
5	2,5	1,965685	1,813763	1,413024	36	18,0	1,036080	2,679160	4,066014
6	3,0	2,385352	2,190957	1,739305	37	18,5	1,009774	2,608201	4,038765
7	3,5	2,777417	2,557667	2,055185	38	19,0	1,057681	2,577641	4,016000
8	4,0	3,165988	2,914618	2,360545	39	19,5	1,240977	2,585751	3,997629
9	4,5	3,509426	3,275197	2,655691	40	20,0	1,330868	2,630758	3,983438
10	5,0	3,862691	3,652552	2,938284	41	20,5	1,242020	2,710900	3,973164
11	5,5	4,292923	4,055767	3,205743	42	21,0	1,194675	2,823859	3,966456
12	6,0	4,874851	4,478583	3,454389	43	21,5	1,419967	2,966540	3,962951
13	6,5	5,521692	4,903965	3,681236	44	22,0	1,895189	3,134639	3,962236
14	7,0	6,104127	5,306604	3,883505	45	22,5	2,509339	3,322785	3,963910
15	7,5	6,622143	5,660981	4,059633	46	23,0	3,263990	3,524618	3,967553
16	8,0	7,116927	5,944478	4,208703	47	23,5	4,020846	3,733359	3,972777
17	8,5	7,478228	6,143296	4,330927	48	24,0	4,628267	3,942155	3,979196
18	9,0	7,559778	6,253437	4,427067	49	24,5	5,179316	4,144671	3,986469
19	9,5	7,454007	6,281525	4,498673	50	25,0	5,700334	4,335268	3,994268
20	10,0	7,215082	6,240474	4,547592	51	25,5	6,057336	4,509301	4,002318
21	10,5	6,859962	6,145660	4,576121	52	26,0	6,323665	4,662992	4,010368
22	11,0	6,486656	6,009646	4,586627	53	26,5	6,513765	4,793473	4,018214
23	11,5	6,298626	5,840575	4,581676	54	27,0	6,655518	4,898540	4,025680
24	12,0	6,220089	5,641606	4,563745	55	27,5	6,783442	4,976670	4,032639
25	12,5	6,099963	5,413562	4,535341	56	28,0	6,994107	5,026870	4,038981
26	13,0	5,745045	5,157010	4,498775	57	28,5	7,240083	5,048796	4,044644
27	13,5	5,223901	4,874971	4,456281	58	29,0	7,410463	5,042718	4,049582
28	14,0	4,641756	4,573523	4,409837	59	29,5	7,342275	5,009677	4,053783
29	14,5	4,067129	4,262147	4,361274	60	30,0	7,174802	4,951430	4,057246
30	15,0	3,416397	3,952270	4,312147	61	30,5	6,924741	4,870514	4,060002

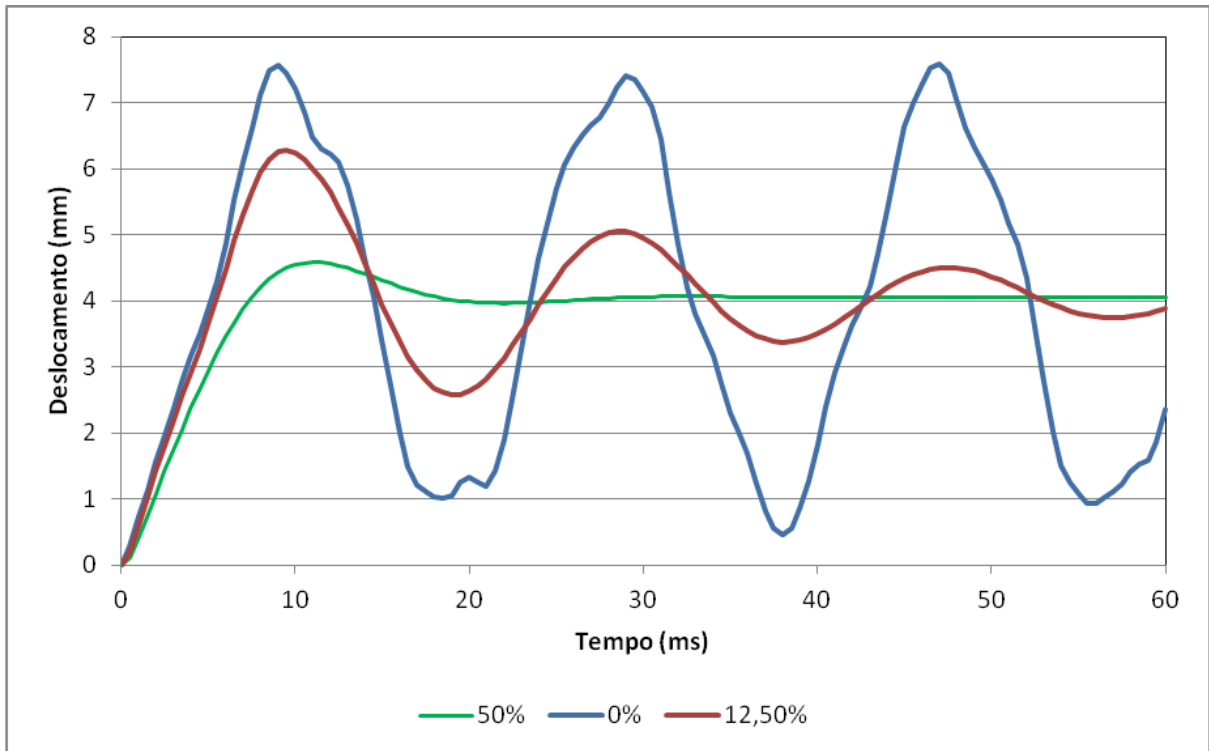
Fonte: Dados do próprio autor.

Continuação da tabela 34 – Deslocamentos do ponto central da placa com “t/a” de 1/20, carga concentrada, malha de 42x42 no plano xy, com 2 camadas na direção z, todas as bordas engastadas, e com análise dinâmica

n	Tempo (ms)	Deslocamento (mm)			n	Tempo (ms)	Deslocamento (mm)		
		0%	12,50%	50%			0%	12,50%	50%
62	31,0	6,430632	4,770075	4,062084	92	46,0	7,280238	4,444001	4,048588
63	31,5	5,652665	4,653806	4,063544	93	46,5	7,518754	4,477564	4,048797
64	32,0	4,848437	4,525692	4,064438	94	47,0	7,592560	4,498037	4,049013
65	32,5	4,208298	4,389902	4,064833	95	47,5	7,442831	4,505402	4,049232
66	33,0	3,813793	4,250551	4,064792	96	48,0	7,042401	4,499991	4,049445
67	33,5	3,493409	4,111640	4,064387	97	48,5	6,617409	4,482490	4,049651
68	34,0	3,179794	3,976887	4,063681	98	49,0	6,327270	4,453870	4,049842
69	34,5	2,749072	3,849735	4,062741	99	49,5	6,105092	4,415381	4,050018
70	35,0	2,289440	3,733238	4,061625	100	50,0	5,835427	4,368472	4,050175
71	35,5	1,983834	3,630087	4,060391	101	50,5	5,518373	4,314776	4,050314
72	36,0	1,688794	3,542513	4,059087	102	51,0	5,178256	4,256029	4,050432
73	36,5	1,229982	3,472303	4,057760	103	51,5	4,849366	4,194048	4,050530
74	37,0	0,810442	3,420706	4,056445	104	52,0	4,345609	4,130654	4,050609
75	37,5	0,549589	3,388449	4,055176	105	52,5	3,608213	4,067644	4,050670
76	38,0	0,449630	3,375669	4,053977	106	53,0	2,769484	4,006724	4,050713
77	38,5	0,553432	3,381970	4,052871	107	53,5	2,024806	3,949484	4,050741
78	39,0	0,848689	3,406393	4,051868	108	54,0	1,508186	3,897340	4,050754
79	39,5	1,267082	3,447524	4,050983	109	54,5	1,241241	3,851520	4,050756
80	40,0	1,817119	3,503508	4,050216	110	55,0	1,063658	3,813016	4,050747
81	40,5	2,407919	3,572182	4,049573	111	55,5	0,940102	3,782589	4,050730
82	41,0	2,921351	3,651106	4,049047	112	56,0	0,930946	3,760738	4,050706
83	41,5	3,318379	3,737702	4,048638	113	56,5	1,027642	3,747714	4,050677
84	42,0	3,621253	3,829278	4,048335	114	57,0	1,116626	3,743507	4,050644
85	42,5	3,903160	3,923151	4,048132	115	57,5	1,232414	3,747876	4,050609
86	43,0	4,229949	4,016668	4,048017	116	58,0	1,408467	3,760346	4,050573
87	43,5	4,725110	4,107311	4,047981	117	58,5	1,520567	3,780251	4,050538
88	44,0	5,367087	4,192719	4,048011	118	59,0	1,581914	3,806738	4,050503
89	44,5	6,064205	4,270776	4,048098	119	59,5	1,866638	3,838819	4,050470
90	45,0	6,632028	4,339628	4,048230	120	60,0	2,357123	3,875383	4,050439
91	45,5	6,994392	4,397762	4,048397					

Fonte: Dados do próprio autor.

Figura 59 – Gráfico dos deslocamentos do ponto central da placa com “t/a” de 1/20, carga concentrada, malha de 42x42 no plano xy, com 2 camadas na direção z, todas as bordas engastadas, e com análise dinâmica



Fonte: Dados do próprio autor.

Os deslocamentos da estrutura, com comportamento linear dinâmico, oscilam em torno da solução obtida pela análise estática. A solução dinâmica com amortecimento convergirá para a solução estática após um tempo. Com o gráfico da figura 59 é possível afirmar que quanto maior for o amortecimento da estrutura menor será a sua oscilação.

Para o amortecimento de 50% com o tempo a partir de 49,5 ms o deslocamento da placa é de 4,05 mm, convergindo com a solução estática.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

7.1 CONCLUSÕES

O presente trabalho teve como objetivo à análise estrutural linear estática e dinâmica de placas, com a utilização do elemento finito prismático regular linear. Os resultados determinados neste trabalho sendo comparados com os de Waidemam (2004) para validação e comparação da resposta obtida pelos diferentes elementos finitos.

Primeiramente foi apresentada toda a teoria, as análises estática e dinâmica linear via método dos elementos finitos, o método de Newmark para integração numérica da equação do movimento. Do elemento finito prismático regular linear foi citada sua matriz de rigidez, foi deduzida a matriz de massas utilizando-se a formulação em coordenadas homogêneas, a matriz de amortecimento caracterizada pelo método de Rayleigh, e determinadas às forças nodais equivalentes para os carregamentos concentrado e distribuído.

Depois de estabelecida toda a teoria, foi desenvolvido o programa computacional capaz de solucionar as análises linear estática e dinâmica, possibilitando o entendimento estrutural da placa.

O problema relativo à análise dinâmica com amortecimento demonstrou a importância dos parâmetros de amortecimento “ ξ_i ”, uma vez que esses possuem influência direta nos deslocamentos máximos e no tempo para cessar a vibração.

O número de discretizações do elemento finito prismático regular linear para obter à solução está relacionado com o valor de “ t/a ” da placa, quanto maior for “ t/a ” menor será a malha a ser discretizada no plano xy , e maior será o número de camadas a serem discretizadas na direção z .

Para “ t/a ” de 1/100 com carga distribuída neste trabalho não foi determinada a malha necessária do elemento finito prismático regular linear para chegar à solução, devido à dificuldade computacional. Portanto para “ t/a ” de 1/100 deve-se utilizar elemento finito de placa retangular, que obteve a solução com uma malha de 16x16 no trabalho de (WAIDEMAM, 2004).

Para “ t/a ” de 1/20 com o carga concentrada a resposta do elemento finito prismático regular linear convergiu com 4 camadas na direção z , e com uma malha de 32x32 para os apoios fixos na altura média da placa, e malha de 42x42 para o

engaste nas bordas. O elemento finito de placa retangular alcançou a solução com uma malha de 20x20.

Os problemas desenvolvidos no capítulo 6 para placa delgada, segundo a classificação de (VAZ, 2011), mostram que as malhas do elemento finito prismático regular linear necessárias para a solução dos problemas, foram maiores do que as malhas desenvolvidas pelo elemento finito de placa retangular. Portanto a aplicação do elemento finito de placa retangular proporciona economia no processamento computacional.

As funções interpoladoras do elemento finito prismático regular linear tem variação linear nos lados do prisma, este fato explica a necessidade de uma maior discretização de sua malha para a precisão dos resultados finais, pois a deformação da placa proveniente da flexão não é uma função linear.

O elemento finito prismático regular linear apresentou um diferencial em relação ao elemento de placa retangular, que é a possibilidade de restringir a placa por apoios fixos em pontos distintos na altura da placa, neste trabalho foi desenvolvido com os apoios fixos na altura média e na base da placa. Este fato possibilita ao projetista estrutural definir o ponto de aplicação dos apoios fixos que farão a restrição da placa, que melhor representar o encontro da viga com a placa na estrutura. A deformação da placa proveniente da restrição com os apoios na base é menor, comparada com a determinada com os apoios na altura média. Em relação à reação de apoio horizontal, com a placa apoiada em sua base o valor obtido foi maior do que a reação horizontal obtida pela placa apoiada em sua altura média.

Pelo o fato do elemento finito prismático regular linear ser um elemento sólido, recomenda-se a sua aplicação nos problemas de placas espessas, conforme classificação dada por (VAZ, 2011), ao invés do elemento finito de placa retangular. Os problemas resolvidos pelo elemento finito prismático regular linear para “ t/a ” de 1/10 e de 1/5 mostrou-se malhas menores no plano xy necessárias a solução, quando comparadas com as malhas da placa delgada, viabilizando assim sua aplicação em placas espessas.

Com o decorrer do tempo, a tendência é que o desenvolvimento da informática continue ocorrendo, fazendo com que a aplicação dos elementos finitos sólidos tenha uma maior aplicação nos projetos de engenharia estrutural, principalmente em elementos estruturais com geometrias tridimensionais.

7.2 PROPOSTAS DE DESENVOLVIMENTO

Uma proposta de desenvolvimento é a aplicação de outros elementos finitos sólidos no software desenvolvimento neste trabalho, como o elemento finito prismático regular parabólico que tem 20 nós, onde a potência de seus monômios que formam a sua função interpoladora é maior, comparada com a do elemento finito prismático regular linear.

Como perspectiva futura pode-se fazer a análise da não-linearidade, física e/ou geométrica de sistemas estruturais, uma vez que o programa computacional desenvolvido pode fazer a adaptação facilmente.

REFERÊNCIAS

- ALBERTINI, M. M. **Análise do comportamento experimental e numérico de prismas de alvenaria estrutural utilizando o elemento finito prismático regular parabólico.** 2009. 214 f. Dissertação (Mestrado em Estruturas) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2009.
- BARES, R. **Tablas para el calculo de placas y vigas pared.** Barcelona: Gustavo Gili, 1972. 537 p.
- DANSON, D. J. **Analysis of plate bending problems by the direct boundary element method.** 1980, 93 f. Dissertation (MSC. in Advanced Structural Engineering) – Faculty of Engineering and Applied Science, University of Southampton, Southampton, 1980.
- FAGLIONI, A. F. **Análise não linear física de vigas de concreto armado utilizando o elemento finito prismático regular linear.** 2006. 122 f. Dissertação (Mestrado em Estruturas) – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2006.
- MARTINELLI, D. A. O.; MONATANARI, I.; SAVASSI, W. **Placas elásticas: equações gerais e placas retangulares: conceituação teórica, métodos das diferenças finitas e elementos finitos.** São Carlos: EESC, 1986. 114 p.
- RODRIGUES, R. O. **Análise dinâmica bidimensional não linear física e geométrica de treliças de aço e pórticos de concreto armado.** 1997. 298 f. Tese (Doutorado em Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1997.
- VAZ, L. E. **Método dos elementos finitos em análise de estruturas.** Amsterdam: Elsevier, 2011. 296 p.
- WAIDEMAM, L. **Análise dinâmica de placas delgadas utilizando elementos finitos triangulares e retangulares.** 2004. 153 f. Dissertação (Mestrado em Estruturas) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2004.
- WARBURTON, G. B. **The dynamical behavior of structure.** New York: Pergamon Press, 1976. 354 p.
- ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The finite element method.** 5th. ed. Oxford: Butterworth; Heinemann, 2000. v 3.