

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

Carlos Hugo Coronado Villalobos

Álgebra de Espinores e novos espinores
em Física

Guaratinguetá

2017

Álgebra Espinorial e novos espinores em Física

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia
do Campus de Guaratinguetá, Universidade
Estadual Paulista, como parte dos requisitos
para a obtenção do Título de Doutor em Física
na área de Partículas e Campos

Orientador: Prof. Dr. Júlio Marny Hoff da Silva.

Guaratinguetá

2017

V714a Villalobos, Carlos Hugo Coronado
Álgebra de espinores e novos espinores em física / Carlos Hugo
Coronado Villalobos – Guaratinguetá, 2017
89 f. : il.
Bibliografia: f. 86-89

Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de
Engenharia de Guaratinguetá, 2017.
Orientadora: Prof. Dr. Júlio Marny Hoff da Silva

1. Spinor – análise.
2. Clifford, álgebra de.
3. Dirac, Equações de.
4. Física. I. Título

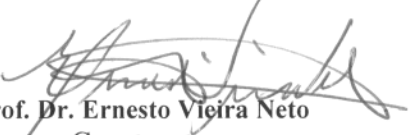
CDU 53(043)

CARLOS HUGO CORONADO VILLALOBOS

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
“DOUTOR EM FÍSICA”

PROGRAMA: FÍSICA

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO


Prof. Dr. Ernesto Vieira Neto
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:


Prof. Dr. JULIO MARNY HOFF DA SILVA
Orientador / UNESP/FEG


Prof. Dr. SAULO HENRIQUE PEREIRA
UNESP/FEG


Prof. Dr. MARCO ANDRÉ FERREIRA DIAS
UNIFESP


Prof.ª Dr.ª MARIA EMILIA XAVIER GUIMARÃES
UFF


Prof. Dr. JOSÉ ABDALLA HELAYEL-NETO
CBPF/RJ

Março de 2017

DADOS CURRICULARES

Carlos Hugo Coronado Villalobos

NASCIMENTO 03.08.1984 / LIMA-PERÚ

FILIAÇÃO Hugo Aristides Coronado Zapata
Catalina Villalobos Guarniz

2003 / 2008 Curso de Graduação - Bacharelado em Física
Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas
Universidad Nacional del Callao - UNAC, Lima Perú.

2011 / 2013 Curso de Pós-Graduação em Física, nível Mestrado,
na Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá
Universidade Estadual Paulista - UNESP, Guaratinguetá-SP
Brasil.

2013 / 2017 Curso de Pós-Graduação em Física, nível Doutorado,
na Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá
Universidade Estadual Paulista - UNESP, Guaratinguetá-SP
Brasil.

Esta Tese está dedicada aos meus pais e meus irmãos
pelo grande apoio e amor que sempre me mostraram.

AGRADECIMENTOS

Eu ofereço a minha mais profunda gratidão para com aqueles que de uma forma ou de outra participaram na culminação desta dissertação do qual estou orgulhoso.

- A minha família: especialmente a meus pais *Hugo* e *Catalina* e meus irmãos *Allan* e *Miguel*, que completam todos meus espaços seu amor e apoio.
- A meu orientador *Julio Marny Hoff da Silva*, quem refletindo a sua formação acadêmica, me dá as bases necessárias para que eu possa formar a minha.
- Aos professores do grupo de partículas e campos da Feg-Unesp campus de Guaratinguetá.
- A meus amigos que sempre me apoiam, *Angel* pela convivência e também pelas discussões profissionais e pessoais, também gostaria de agradecer a “Sala 1” da Pós-Graduação em Física, especialmente ao *Ricardo* (Pinky) pela amizade, quero também fazer um agradecimento especial à meu colega e amigo *Rodolfo* pela disposição, sabedoria e por sempre me aconselhar e sobre tudo pelo tempo de trabalho juntos os quais foram produtivos.
- Também gostaria de agradecer a minha noiva, *Ananda*, pela paciência, amor e suporte, também agradeço à toda sua família, pelo acolhimento, em especial à meu sogro *Ícaro*.
- Agradeço esta grande universidade e este grande país que me acolhe e me faz sentir em casa.

E por último e o mais importante, meu agradecimento **Deus Nosso Senhor**...Obrigado, muito obrigado **Senhor** por manter a todos exatamente onde eles estão, cumprindo exatamente o papel que cumprem, pois eles são em conjunto minha inspiração, minha força e a razão para sempre querer superar os desafios que a vida me apresenta...

Obrigado Bom Padre!....

Este trabalho contou com o apoio financeiro da PEC-PG.

A matemática,
vista corretamente,
possui não apenas verdade,
mas também suprema beleza,
uma beleza fria e austera,
como a da escultura.
Bertrand Russell.

Coronado Villalobos, C. H. **Álgebra Espinorial e novos espinores em Física**. 2017. 87 f. Tese de Doutorado em Física – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2017.

RESUMO

Na presente tese abordaremos quatro tópicos importantes: espinores, covariantes bilineares, classificação de Lounesto e o teorema da inversão. Apresentamos a construção de covariantes bilineares para o espinor Elko e mostraremos a necessidade da deformação dos elementos da base da álgebra de Clifford com a finalidade de que as identidades de Fierz-Pauli-Kofink sejam satisfeitas. Estudamos também os ingredientes principais da classificação de espinores elaborada por Lounesto. Por último, construiremos três novas classes de espinores via o teorema da inversão a partir da premissa que o covariante bilinear J_μ seja nulo. Como consequência desta consideração esses novos espinores não possuem a dinâmica de Dirac, haja visto que J_μ na teoria de Dirac representa a corrente conservada. O surgimento de apenas três novas classes de espinores é uma consequência direta da imposição de que as identidades de Fierz-Pauli-Kofink sejam satisfeitas.

PALAVRAS-CHAVE: Espinores, Covariantes bilineares, identidades de Fierz-Pauli-Kofink, Classificação de Lounesto, Teorema da inversão.

Coronado Villalobos, C. H. **Spinorial Algebra and new Spinors in Physics**. 2017. 87 f. Tese (Doctor in Physics) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2017.

ABSTRACT

The present thesis covers four important topics: spinors, bilinear covariants, Lounesto's classification and the inversion theorem. We show and explicit the construction of bilinear covariants for the Elko spinors and the necessity of deformation of the Clifford algebra basis elements in order to satisfy the Fierz-Pauli-Kofink identities. We also study the main ingredients of the classification of spinors elaborated by Lounesto. Finally, we construct three new classes of spinors via the inversion theorem from the premise that the bilinear covariant J_μ is null. As a consequence, these new spinors do not have usual dynamics of Dirac, have seen that J_μ in Dirac's theory represents the conserved current. The emergence of only three new classes of spinors is a direct consequence of the requeriment that Fierz-Pauli-Kofink's identities must hold.

KEYWORDS: Spinors, Bilinear covariants, Fierz-Pauli-Kofink identities, Lounesto classification, Inversion Theorem.

Lista de Figuras

2.1	O bivector expressa um fragmento de área dado pelo produto e_1e_2	19
2.2	Orientação do bivector.	20
2.3	Produto exterior do ponto de vista geométrico.	20
2.4	O elemento de volume expresso geometricamente.	21
5.1	Diagrama esquemático do teorema da inversão	76

Sumário

1	Introdução	13
2	Álgebra de Clifford	17
2.1	Álgebra de Clifford no espaço Euclidiano	17
2.2	Álgebra exterior e álgebra de Clifford	22
2.2.1	Representação matricial de \mathcal{Cl}_3	25
2.3	Quatérnions	26
2.4	Isomorfismo entre \mathcal{Cl}_3^+ e quatérnions	28
3	Espinores	30
3.1	Espinor de Pauli	31
3.2	Espinor de Dirac	33
3.3	O espinor Elko	36
3.3.1	Estrutura dos espinores Elko	37
3.3.2	Somas de spin	43
3.3.3	Dinâmica	45
4	Construção dos covariantes bilineares e estrutura multivetorial	49
4.1	Estruturas bilineares para os espinores de Dirac	49
4.1.1	Álgebra de Clifford real	50
4.1.2	Identidades de Fierz-Pauli-Kofink	54
4.2	Deformação da álgebra de Clifford para o espinor Elko	59
4.3	Covariância das estruturas bilineares para o Elko	64
4.4	Espinores Elko na VSR	67
5	Classificação de Lounesto e Teorema da inversão	70
5.1	Classificação de Lounesto	70
5.1.1	Caracterização algébrica dos espinores	71
5.2	Teorema da inversão	75
5.3	Construção algébrica de novos espinores	76
6	Conclusões e Comentários	84

Capítulo 1

Introdução

Em 1878, William K. Clifford publicou um artigo no *American Journal of Mathematics* intitulado “Applications of Grassmann extensive algebra” [1]. Naquele trabalho Clifford apresentou uma nova estrutura matemática, a qual é por ele denominada “álgebra geométrica”, conhecida na atualidade como álgebra de Clifford. As álgebras de Clifford têm como origem esforços em representar geometricamente um número complexo. Cabe mencionar que a ideia de relacionar operações geométricas e algébricas não era uma novidade, já que em 1679 Leibniz em uma carta dirigida a Huygens menciona esse fato. Tal carta foi posteriormente publicada em 1833. A grande contribuição de Clifford foi a introdução do análogo do produto de quatérnions na estrutura da álgebra de extensão de Grassmann, obtendo assim um sistema naturalmente adaptado para a geometria ortogonal de um espaço arbitrário. Nesse cenário, os quatérnions se apresentam como um caso particular de uma álgebra de Clifford (álgebra de Clifford par).

Devido à repentina morte de Clifford, muitos cientistas deram continuidade para com o desenvolvimento da teoria das álgebras de Clifford. Um dos mais importantes foi certamente Elie Cartan. Foi justamente Cartan quem introduziu em 1913 o conceito de espinor [2].

Foi através do conceito de espinor que as álgebras de Clifford marcaram presença decisiva na Ciência. Dirac mostrou em 1928 [3] que a equação fundamental da mecânica quântica relativística é escrita em termos de uma álgebra de Clifford, sendo a partícula elementar, o elétron, descrito por um espinor.

É pertinente, mesmo hoje, se perguntar o que é um espinor? Definir com exatidão o conceito de espinor é uma tarefa extremamente complexa. Isto é devido ao fato que tanto físicos como matemáticos têm tratado de maneira independente os espinores, o que tem gerado diversas definições e aplicações destes objetos. A definição feita por Cartan é a mais relevante, e esta diz que o espinor é o objeto matemático que carrega a mais rica informação sobre o espaço-tempo que conhecemos. Mencionaremos três definições dos espinores as quais são de muita importância, a definição clássica ou definição covariante

que foi proposta por Cartan em 1966, seguindo a linha estabelecida por Brauer e Weyl [4] que definiram os espinores como um conjunto de variáveis complexas definido por sua transformação dentro de um grupo de spin particular. A segunda definição é chamada de algébrica ou ideal, proposta por Chevalley em 1954 [5] e estudada posteriormente por Riesz em 1958 [6] e Graf em 1978 [7], onde um tipo de espinor algébrico é um elemento de um minimal ideal (definido também como idempotente primitivo) em uma álgebra de Clifford. Por último temos a definição operatorial para espinores, proposta por Hestenes e Sobczyk em 1984 [8]; nessa definição usa-se como espaço de representação a subálgebra par de uma álgebra de Clifford. Essa última definição, embora aparentemente bem distinta das outras, é equivalente às anteriores.

Devemos enfatizar que os espinores, independentemente da definição, possuem as mesmas aplicações físicas. Justamente essas aplicações surgem quando Cartan percebeu que os espinores não eram invariantes por rotações de 2π , já que o espinor original após a rotação citada ganha um sinal. Por tal motivo era necessário construir um objeto a partir dos espinores de tal maneira que por rotações de 2π se mantivesse invariante. Tais objetos são conhecidos como observáveis físicos ou covariantes bilineares.

Na presente tese apresentamos a abordagem desenvolvida por Crawford [9, 10] para construir os covariantes bilineares associados ao espinor de Dirac, definida em um espaço-tempo de dimensão par. Do ponto de vista físico os covariantes bilineares tem muita relevância já que fazem o link entre os espinores e as aplicações físicas, como veremos mais adiante. Um grupo de cientistas encabeçado por Fierz encontrou certas relações que são satisfeitas pelos covariantes bilineares [11, 12, 13]. Tais relações são conhecidas como identidades de Fierz-Pauli-Kofink (FPK) e são de muita importância, uma vez que a partir das mesmas é possível classificar os espinores e também recuperar propriamente um espinor em termos de seus covariantes bilineares.

Com respeito a classificação de espinores devemos mencionar que muitos cientistas tentaram classificar os espinores já conhecidos na literatura (espinores de Dirac, Majorana e Weyl) mas sem muito êxito. Por exemplo, Been e Tucker em 1987 [14] e posteriormente Crymeyerolle [15] em 1990, introduziram propriedades matriciais com o objetivo de estabelecer uma classificação para espinores, mas infelizmente não tiveram muito sucesso. Até que Pertti Lounesto conseguiu realizar uma classificação para espinores [16]. Tal classificação possui um caráter geométrico, isto é consequência de considerar os covariantes bilineares e um novo objeto chamado de estrutura multivetorial, os ingredientes principais desta classificação. Portanto, podemos afirmar que a classificação de Lounesto é a mais completa, pois além de conter os espinores já conhecidos na literatura fornece um novo tipo de espinor chamado de *flag-dipole*, o qual ainda não possui um tratamento físico completo, apenas se tem evidência desse espinor na solução da equação de Dirac em uma teoria $f(R)$ com torsão [17].

Se inicialmente pensávamos existirem apenas seis classes de espinores definidos na

classificação de Lounesto, recentemente foi proposto por Ahluwalia e Grumiller um novo espinor de dimensão de massa um [18], chamado Elko, que é um acrônimo alemão para *Eigenspinoren des Ladungskojugationsoperator*, cuja tradução é Autoespinor do Operador Conjugação de Carga. Podemos dizer que tal espinor possui algumas características dos espinores de Majorana, mas na realidade são bem diferentes, uma vez que os espinores Elko possuem helicidade dual, enquanto os espinores de Majorana tem helicidade única. Outra característica marcante é a estrutura dual do Elko, que é extremamente diferente das estruturas duais dos espinores conhecidos.

Uma característica importante a salientar sobre o Elko é que ele não satisfaz a equação de Dirac. Isso é devido ao fato que as componentes espinoriais do Elko não estão relacionadas entre si pela simetria de paridade mas sim através das matrizes de Pauli. Assim, o espinor Elko apenas satisfaz a equação de Klein-Gordon, assim como esperado para todo campo relativístico. Outra particularidade do Elko está nas somas de spin, ela não é invariante por transformações de Lorentz. De fato, para o estudo do Elko é necessário se considerar a chamada de Very Special Relativity ou simplesmente VSR, proposta por Cohen e Glashow em 2006 [19].

O espinor Elko apesar de descrever um férmion, possui dimensão de massa um. Isso implica que o campo associado ao Elko não interage com o campo eletromagnético apenas interage com o tensor eletromagnético, $\mathcal{L}_{int} = g_e \bar{\lambda}(x)[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\lambda(x)F_{\mu\nu}(x)$, por ser eletricamente neutro via atuação do operador conjugação de carga, e as interações com todas as partículas do modelo padrão, exceto com o bóson de Higgs, $\mathcal{L}_{int} = \alpha_e \phi^\dagger(x)\phi(x) \bar{\lambda}(x)\lambda(x)$, não são renormalizáveis perturbativamente [20]. Elko tem sido estudado em diferentes cenários, em 2006 Bohmer mostrou que o Elko é um candidato natural a descrever matéria escura [21].

É importante mencionar que no escopo da presente tese definiremos os espinores do ponto de visto algébrico, mas isto não será feito para o caso do espinor Elko, devido ao fato dele pertence ao grupo de simetria $HOM(2)$ ou $SIM(2)$ que embasam a VSR. Porém, visando definir algumas características algébricas do Elko, construiremos as estruturas bilineares associadas, para as quais usaremos a prescrição usada por Crawford na construção dos covariantes bilineares do espinor de Dirac.

Por último, abordaremos o teorema da inversão proposto por Crawford em 1985 [22]. Devemos salientar que o precursor do teorema da inversão foi Takahashi, quando em 1982 [23] propôs a construção de espinores via as identidades de FPK. A proposta de Takahashi é conhecida como algoritmo de Takahashi e foi a primeira a mencionar a possibilidade de escrever os espinores em termos de seus covariantes bilineares. Entretanto Crawford simplificou o algoritmo de Takahashi, de tal maneira que conseguiu recuperar o espinor original em termos de seus covariantes bilineares de um modo mais simples e elegante.

A presente tese está dividida da seguinte maneira:

No segundo capítulo apresentamos as ferramentas matemáticas que usaremos ao

longo da tese. Definiremos as álgebras de Clifford e alguns isomorfismos importantes que serão usados nos capítulos posteriores.

Definiremos no terceiro capítulo os espinores do ponto de vista algébrico, exceção feita ao Elko, o qual definiremos com o enfoque físico, tal como já mencionado.

No quarto capítulo, construiremos as estruturas bilineares do espinor Elko, considerando sua estrutura dual correspondente. Para isso, será necessário entender o mecanismo usado por Crawford quando construiu as estruturas bilineares para o espinor de Dirac a partir da álgebra de Clifford Real. Nesse capítulo analisamos a covariância das estruturas bilineares, tanto por transformações de Lorentz quanto por transformações da VSR.

Por fim, no quinto capítulo apresentamos a classificação de Lounesto e o teorema da inversão. Cabe mencionar que neste capítulo apresentamos três novas classes de espinores os quais surgem da premissa que o bilinear J_μ seja nulo, o que traz como consequência que esses novos espinores não satisfaçam a equação de Dirac. Portanto, apenas satisfazem a equação de Klein-Gordon.

O quarto e quinto capítulo trazem nossas contribuições para a área. O último capítulo é reservado às considerações finais.

Capítulo 2

Álgebra de Clifford

O formalismo da álgebra de Clifford permite diversas aplicações, em particular a proeminente construção de espinores e operadores de Dirac. Porém, nesse capítulo apresentaremos os conceitos gerais sobre a álgebra de Clifford e multivetores, os quais serão usados nos próximos capítulos.

2.1 Álgebra de Clifford no espaço Euclidiano

Seja um vetor \mathbf{v} pertencente a \mathbb{R}^3 . Considerando que a base do espaço \mathbb{R}^3 seja $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, podemos expressar \mathbf{v} em termos dos vetores da base

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3, \quad \text{onde, } v_1, v_2 \text{ e } v_3 \text{ pertencem a } \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

A última expressão não é nada mais que a definição de um vetor no espaço Euclidiano. Uma pergunta que surge de maneira natural é: como podemos medir um vetor? A resposta tem a ver com a geometria ortogonal dos elementos da base do espaço Euclidiano. Para medir um vetor precisamos definir a norma do vetor e para isso é necessário que os vetores da base sejam unitários e ortogonais. Com essas considerações podemos definir a norma de um vetor como segue

$$|\mathbf{v}|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2. \quad (2.2)$$

É necessário definir o produto entre os vetores do espaço \mathbb{R}^3 , tal produto vamos chamar de P

$$P(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = |\mathbf{v}|^2. \quad (2.3)$$

Vamos exigir que o produto P seja bilinear, ou seja, sendo α e β escalares

$$P(\alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2, \mathbf{u}) = \alpha P(\mathbf{v}_1, \mathbf{u}) + \beta P(\mathbf{v}_2, \mathbf{u}), \quad (2.4)$$

$$P(\mathbf{v}, \alpha \mathbf{u}_1 + \beta \mathbf{u}_2) = \alpha P(\mathbf{v}, \mathbf{u}_1) + \beta P(\mathbf{v}, \mathbf{u}_2).$$

Das definições anteriores é possível encontrar a relação entre os vetores da base $\{\mathbf{e}_i\}$. Para tanto usamos a definição do produto entre dos vetores e aplicamos a definição de bilinearidade (2.4)

$$\begin{aligned} P(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &= v_1^2 P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + v_2^2 P(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) + v_3^2 P(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3) + v_1 v_2 [P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + P(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)] \\ &+ v_1 v_3 [P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) + P(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1)] + v_2 v_3 [P(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) + P(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2)]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Comparando as equações (2.5) e (2.4), obtemos as seguintes relações

$$P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = 1, \quad P(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = 1, \quad P(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3) = 1 \quad (2.6)$$

e

$$\begin{aligned} P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + P(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) &= 0, \\ P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) + P(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) &= 0, \\ P(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) + P(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) &= 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Desta maneira, podemos induzir uma possível solução para as equações (2.7)

$$P(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = P(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i) = 0, \quad (i \neq j). \quad (2.8)$$

Vamos impor que o resultado do produto $P(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ ($i \neq j$) seja um escalar. Desta maneira a equação (2.8) seria a única solução. Denota-se o produto P , por um ponto, ou seja, $P(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$. O produto ponto é chamado de "escolha de Gibbs". Das relações anteriores e da imposição que o resultado do produto ponto forneça um escalar, encontramos as seguintes relações

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = 1, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (2.9)$$

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i = 0 \quad (i \neq j). \quad (2.10)$$

Assim, garantimos que a norma $|\mathbf{v}|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ se preserve quando introduzimos o produto P . Esse produto é o usual "produto escalar". Por outro lado, da equação (2.9), podemos afirmar que os vetores da base $\{\mathbf{e}_i\}$ são unitários, e da equação (2.10) é fácil ver que são também ortogonais para $i \neq j$. É importante ressaltar que a escolha de Gibbs só se

justifica se o resultado do produto $P(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$, ($i \neq j$) for escalar [24]. Mas como podemos ver, a escolha de Gibbs é um caso particular, já que existe uma outra possibilidade de denotar as equações (2.6) e (2.8), para a qual vamos definir o produto simplesmente por justaposição, ou seja, $P(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \mathbf{v}\mathbf{u}$, assim

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i^2 = 1 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (2.11)$$

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j\mathbf{e}_i = 0 \quad (i \neq j). \quad (2.12)$$

Das relações anteriores, definimos a norma $|\mathbf{v}|^2 = \mathbf{v}\mathbf{v} = \mathbf{v}^2$. Esta última definição é chamada de escolha de Clifford. Na escolha de Clifford o produto entre dois vetores é chamado de produto de Clifford ou produto geométrico. Da mesma maneira que na escolha de Gibbs, os vetores da base $\{\mathbf{e}_i\}$ são unitários e ortogonais ($i \neq j$). Uma característica particular da escolha de Clifford é a interpretação que temos que dar a $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = 0$. Do fato de não considerar mais a escolha de Gibbs, sabemos que $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ não pode ser um escalar. Para mostrar essa afirmação, usamos um exemplo. Consideremos que $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ seja um escalar α , (tal que $\mathbf{v}\alpha = \alpha\mathbf{v}$), e fazendo a seguinte escolha $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1$, por exemplo, temos

$$\mathbf{e}_1(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2, \quad (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1^2\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2, \quad (2.13)$$

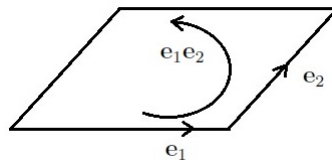
o que nos mostra que $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ não é um escalar. Por outro lado, também é fácil ver que $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ não é um vetor de \mathbb{R}^3 , já que para $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ a norma é não negativa, enquanto que

$$(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)^2 = (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2), \quad (2.14)$$

$$= -\mathbf{e}_1^2\mathbf{e}_2^2 = -1. \quad (2.15)$$

Desta maneira podemos descartar que o produto $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ seja um escalar e um vetor. Essa quantidade é chamada de bivector. Um bivector em \mathbb{R}^3 é um fragmento de plano com certa orientação. Assim, no espaço tridimensional não existem apenas segmentos de reta, mas também existem fragmentos de plano, superfícies, etc.

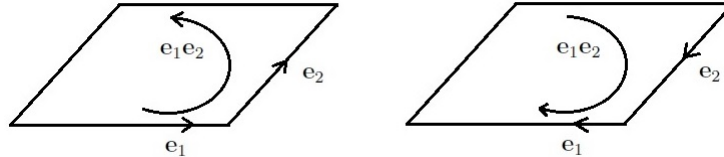
Figura 2.1: O bivector expressa um fragmento de área dado pelo produto e_1e_2 .



Daqui em diante vamos nos referir ao vetor que representa os segmentos de planos como um 2-vetor (bivector). O bivector pertence ao espaço vetorial $\wedge^2(\mathbb{R}^3)$. Desta última definição, podemos escrever um vetor, de modo análogo, como $\wedge^1(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3$. Do mesmo modo, quando nos referirmos a um escalar (0-vetor) vamos denotar por $\wedge^0(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}$.

O fato de que $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1$, quer dizer que $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1$ são segmentos de plano com orientações opostas, ver Figura 2.2. A área ou norma de um bivetor A é denotado por $|A|$.

Figura 2.2: Orientação do bivetor.

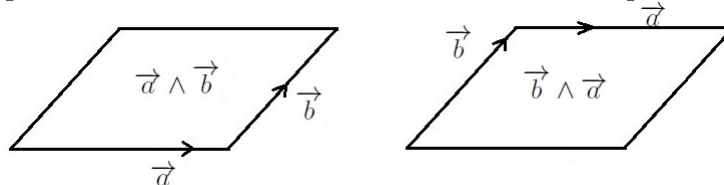


O bivetor é unitário, de modo que $A = \alpha\beta\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ representa um fragmento de plano de área dado por $|\alpha\beta|$. Um bivetor arbitrário em $\bigwedge^2(\mathbb{R}^3)$ é da forma

$$\bigwedge^2(\mathbb{R}^3) \ni \mathbf{A} = A_{12}\mathbf{e}_{12} + A_{13}\mathbf{e}_{13} + A_{23}\mathbf{e}_{23}, \quad (2.16)$$

onde vamos denotar o produto de vetores da base como $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_{ij}$ e A_{12} , A_{13} e A_{23} são escalares, tais que $A_{ij} = -A_{ji}$, ($i \neq j$). Olhando a equação (2.16), podemos ver que a dimensão de $\bigwedge^2(\mathbb{R}^3)$ é três. Sabendo que é possível representar um bivetor como um paralelogramo orientado, isto sugere pensar que o bivetor é um produto geométrico de vetores ao longo de seus lados. Com isso em mente vamos introduzir o produto exterior $\vec{a} \wedge \vec{b}$ de dois vetores \vec{a} e \vec{b} , como a varredura de \vec{a} ao longo de \vec{b} . Os bivetores

Figura 2.3: Produto exterior do ponto de vista geométrico.

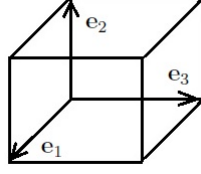


$\vec{a} \wedge \vec{b}$ e $\vec{b} \wedge \vec{a}$ tem a mesma área, mas tem sentidos opostos de rotação. Podemos expressar esta última afirmação da seguinte maneira

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}. \quad (2.17)$$

No espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 , podemos também definir um elemento de volume de uma maneira geométrica, se tomarmos os seguintes segmentos de reta \overline{OA} , \overline{OB} e \overline{OC} , os quais são representados pelos vetores \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 e \mathbf{e}_3 e estão orientados como mostra a Figura 2.4. Um tal vetor será dito um 3-*vetor* e o espaço vetorial será denotado por $\bigwedge^3(\mathbb{R}^3)$. Note que existem duas possíveis orientações para um 3-*vetor*, de acordo com a regra da mão direita, orientação positiva no sentido anti-horário e negativa no sentido horário. Daqui em diante interpretaremos o objeto $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ como um 3-*vetor*. Notemos que a dimensão

Figura 2.4: O elemento de volume expresso geometricamente.



de $\bigwedge^3(\mathbb{R}^3)$ é 1, de modo que qualquer 3-*vetor*, Z , pode ser escrito como

$$\bigwedge^3(\mathbb{R}^3) \ni Z = \alpha \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3, \quad (2.18)$$

onde α é um escalar. Notar que se $\alpha > 0$, então Z representa um elemento de volume na orientação $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$. Para $\alpha < 0$, Z representa um elemento de volume com orientação oposta. Podemos também expressar um elemento de volume fazendo uso do produto exterior de três vetores, $\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c}$, onde $\vec{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3$, $\vec{b} = b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3$ e $\vec{c} = c_1 \mathbf{e}_1 + c_2 \mathbf{e}_2 + c_3 \mathbf{e}_3$, o qual representa a orientação do volume de um paralelepípedo com arestas \vec{a} , \vec{b} , \vec{c}

$$\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3, \quad (2.19)$$

e a norma ou volume $|\vec{V}|$ de um 3-*vetor* é dada por

$$\vec{V} = V \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3, \quad (2.20)$$

onde $|\vec{V}| = V$, o qual é definido por $|V \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3| = V$.

Como vimos até agora, em um espaço tridimensional encontramos, escalares, 1-*vetor* ou vetores, 2-*vetor* ou bivector e por último o elemento de volume 3-*vetor*, os quais podemos expressar como seções do próprio espaço \mathbb{R}^3 , como segue; $\bigwedge^0(\mathbb{R}^3)$, $\bigwedge^1(\mathbb{R}^3)$, $\bigwedge^2(\mathbb{R}^3)$ e $\bigwedge^3(\mathbb{R}^3)$. É importante definir um nova estrutura, chamada multivetor, a qual contém todas essas seções do espaço $\bigwedge(\mathbb{R}^3)$. Desta afirmação, podemos dizer então que uma estrutura multivetorial ou multivetor é a soma direta de cada uma das seções anteriores, ou seja $\bigwedge(\mathbb{R}^3) = \bigoplus_{k=0}^3 \bigwedge^k(\mathbb{R}^3)$. Assim, um multivetor arbitrário A é da forma

$$\begin{aligned} \bigwedge(\mathbb{R}^3) \ni A = & \underbrace{a}_{\text{Escalar}} + \underbrace{a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3}_{\text{vetor}} + \underbrace{a_{12} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + a_{13} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + a_{23} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3}_{\text{bivector}} \\ & + \underbrace{a_{123} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3}_{\text{volume}}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

O espaço vetorial $\bigwedge(\mathbb{R}^3)$ dotado do produto definido nas equações (2.11) e (2.12), é o que se denomina álgebra geométrica, no caso do espaço Euclidiano tridimensional. Denotaremos a álgebra associada com o espaço Euclidiano tridimensional por \mathcal{Cl}_3 . O produto geométrico é justamente uma generalização do produto quaterniônico, o qual vamos definir mais adiante, enquanto a estrutura multivetorial de \mathcal{Cl}_3 é justamente a estrutura da álgebra de extensão de Grassmann.

2.2 Álgebra exterior e álgebra de Clifford

Como vimos o objeto matemático $\bigwedge(\mathbb{R}^3)$ é usado para abarcar seções do espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 . Esse objeto engendra a álgebra exterior do espaço linear \mathbb{R}^3 e representa uma soma direta de

Subespaços de	com base	
escalares	\mathbb{R}	1
vetores	\mathbb{R}^3	$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$
bivetores	$\bigwedge^2(\mathbb{R}^3)$	$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$
elemento de volume	$\bigwedge^3(\mathbb{R}^3)$	$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$.

Assim, podemos expressar a álgebra exterior como

$$\bigwedge(\mathbb{R}^3) = \bigwedge^0(\mathbb{R}^3) \oplus \bigwedge^1(\mathbb{R}^3) \oplus \bigwedge^2(\mathbb{R}^3) \oplus \bigwedge^3(\mathbb{R}^3),$$

ou simplesmente

$$\bigwedge(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3 \oplus \bigwedge^2(\mathbb{R}^3) \oplus \bigwedge^3(\mathbb{R}^3).$$

As dimensões de $\mathbb{R}, \mathbb{R}^3, \bigwedge^2(\mathbb{R}^3), \bigwedge^3(\mathbb{R}^3)$ e $\bigwedge(\mathbb{R}^3)$ são 1, 3, 3, 1 e 2³, respectivamente.

A álgebra exterior $\bigwedge(\mathbb{R}^3)$ é uma álgebra associativa com o elemento unidade, satisfazendo

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j &= -\mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_i, & \forall i \neq j, \\ \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_i &= 0, \end{aligned}$$

sendo $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ a base do espaço linear \mathbb{R}^3 . Por outro lado, definimos o produto exterior de dois elementos homogêneos como

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \in \bigwedge^{i+j}(\mathbb{R}^3) \quad \forall \quad \mathbf{a} \in \bigwedge^i, \mathbf{b} \in \bigwedge^j(\mathbb{R}^3). \quad (2.22)$$

O produto de dois elementos u e v na álgebra de Clifford \mathcal{Cl}_3 do espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 é dotado por justaposição, uv , para diferenciar do produto exterior $u \wedge v$. Uma base

ortonormal $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3 \subset \mathcal{Cl}_3$ satisfaz

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j &= -\mathbf{e}_j \mathbf{e}_i, \quad \forall \quad i \neq j, \\ \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i &= \mathbf{e}_i^2 = 1, \end{aligned} \quad (2.23)$$

a qual gera a base de \mathcal{Cl}_3 , que também corresponde com a base de $\bigwedge \mathbb{R}^3$:

\mathcal{Cl}_3	$\bigwedge \mathbb{R}^3$
1	1
$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$

Esta correspondência entre estas duas álgebras nos induz a representar o espaço linear \mathcal{Cl}_3 como

$$\mathcal{Cl}_3 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3 \oplus \bigwedge^2(\mathbb{R}^3) \oplus \bigwedge^3(\mathbb{R}^3). \quad (2.24)$$

Tal como definimos a estrutura multivetorial dentro do produto exterior, dada pela equação (2.21), podemos dizer que a álgebra de Clifford pode ser definida como uma estrutura multivetorial.

Produto de Clifford de dois vetores: O produto de Clifford entre dois vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} é obtido pela adição do produto escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ com o bivector $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, ou seja

$$\mathbf{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}. \quad (2.25)$$

Lembrando que no produto escalar a regra de comutação, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$, é satisfeita, enquanto a regra de anti-comutação para o produto exterior, $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$, também tem que ser considerada, temos a seguinte relação entre \mathbf{ab} e \mathbf{ba}

$$\mathbf{ba} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \wedge \mathbf{a}, \quad (2.26)$$

$$= \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}. \quad (2.27)$$

Como podemos ver o produto de Clifford não é comutativo. Por outro lado, o produto de Clifford é composto de uma parte simétrica, expressa pelo produto escalar, e parte antissimétrica, expressa pelo produto exterior.

Definição da Álgebra de Clifford versus álgebra exterior: Ambas as álgebras, a álgebra de Clifford \mathcal{Cl}_3 e a álgebra exterior $\bigwedge \mathbb{R}^{3,1}$ contêm uma cópia de \mathbb{R}^3 , que permite aplicações para fazer cálculos geométricos em \mathbb{R}^3 . A diferença entre as duas álgebras consiste basicamente na multiplicação, já que a multiplicação de Clifford de dois vetores preserva a norma, $|\mathbf{ab}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$, para todo $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, enquanto a multiplicação no produto

exterior não preserva a norma, $|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$.

Considerações Gerais

Seja $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ uma base ortogonal do espaço vetorial V , tal que

$$e_i e_j = e_i \wedge e_j, \quad (i \neq j), \quad (2.28)$$

com a qual podemos generalizar a seguinte relação

$$e_{\mu_1} e_{\mu_2} \cdots e_{\mu_p} = e_{\mu_1} \wedge e_{\mu_2} \wedge \cdots \wedge e_{\mu_p}, \quad (\mu_1 \neq \mu_2 \neq \cdots \neq \mu_p). \quad (2.29)$$

A dimensão de $\mathcal{C}\ell(V, g)$ é obviamente dada por $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p}$, ou seja,

$$\dim \mathcal{C}\ell(V, g) = 2^{\dim V}. \quad (2.30)$$

É importante mencionar a existência do isomorfismo entre a álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell(V, g)$ e a álgebra exterior $\bigwedge(V)$ ou a álgebra de Grassmann $\mathcal{G}(V)$. É evidente que este isomorfismo não é um isomorfismo algébrico (do fato que tínhamos mencionado anteriormente, sobre a preservação da norma) mas sim um isomorfismo de espaços vetoriais,

$$\mathcal{C}\ell(V, g) \cong \bigwedge(V). \quad (2.31)$$

Por isso é normal que encontremos em muitos livros-texto o uso da mesma notação tanto para a álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell(V, g)$, como para as operações de espaço vetorial que é definida para a álgebra exterior. Deste modo o subespaço dos p -vetores continuará sendo denotado por $\bigwedge_p(V)$, de modo, que como espaço vetorial, podemos representar $\mathcal{C}\ell(V, g)$ como

$$\mathcal{C}\ell(V, g) = \bigoplus_{p=0}^n \bigwedge_p(V). \quad (2.32)$$

Definiremos os operadores de projeção em termos da álgebras de Clifford

$$\langle \rangle_p : \mathcal{C}\ell(V, g) \rightarrow \bigwedge_p(V). \quad (2.33)$$

Cabe mencionar que o operador projeção na parte escalar $\langle \rangle_0$ possui uma utilidade muito grande dentro do formalismo das álgebras de Clifford. Fazemos uma observação sobre as álgebras de Clifford. A estrutura multivetorial por detrás da álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell(V, g)$, a qual é dada pela equação (2.29), tem uma base ortogonal. Tentar ver esta estrutura multivetorial utilizando uma base que não seja ortogonal, leva a usar uma

álgebra de Clifford \mathbb{Z}_2 -graduada [24], enquanto as álgebras exterior e de Grassmann são \mathbb{Z}_n -graduadas, que é o que permite identificar a estrutura multivetorial. Entretanto, a estrutura multivetorial é independente de bases. O fato de se trabalhar com álgebras de Clifford com uma base ortogonal é devido a que todos os cálculos ficam mais simplificados [25].

2.2.1 Representação matricial de \mathcal{Cl}_3

Denotamos o conjunto de matrizes 2×2 , com números complexos como entrada, por $Mat(2, \mathbb{C})$. Esse é o conjunto das matrizes de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.34)$$

que satisfazem as seguintes regras de multiplicação

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \mathbb{I}, \quad (2.35)$$

$$\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3 = -\sigma_2\sigma_1, \quad (2.36)$$

$$\sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2 = -\sigma_1\sigma_3, \quad (2.37)$$

$$\sigma_2\sigma_3 = i\sigma_1 = -\sigma_3\sigma_2. \quad (2.38)$$

É importante salientar que as matrizes de Pauli são geradores da álgebra $Mat(2, \mathbb{C})$. Assim, podemos identificar a seguinte correspondência entre os geradores da álgebra $Mat(2, \mathbb{C})$ com os geradores ou base da álgebra de Clifford, $e_1 \simeq \sigma_1$, $e_2 \simeq \sigma_2$, $e_3 \simeq \sigma_3$. Tal identificação estabelece um isomorfismo entre as álgebras reais $\mathcal{Cl}_3 \simeq Mat(2, \mathbb{C})$, com a seguinte correspondência dos elementos da base:

$Mat(2, \mathbb{C})$	\mathcal{Cl}_3
\mathbb{I}	\mathbb{I}
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	e_1, e_2, e_3
$\sigma_1\sigma_2, \sigma_1\sigma_3, \sigma_2\sigma_3$	e_1e_2, e_1e_3, e_2e_3
$\sigma_1\sigma_2\sigma_3$	$e_1e_2e_3$

lembrando que $e_i e_j = -e_j e_i$, para $i \neq j$. Em função do isomorfismo, podemos representar os vetores $\{e_1, e_2, e_3\}$ pelas matrizes $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ e trabalhar com a álgebra $Mat(2, \mathbb{C})$ ao invés de \mathcal{Cl}_3 . Por um lado, é certo que muitas vezes é mais útil trabalhar com a álgebra $Mat(2, \mathbb{C})$ ao invés de \mathcal{Cl}_3 , mas devemos evitar esse abuso sempre que possível, já que usando só a álgebra $Mat(2, \mathbb{C})$ perdemos a estrutura multivetorial de \mathcal{Cl}_3 , a qual é de extrema importância e utilidade. Exemplificaremos melhor o isomorfismo quando definirmos, na seguinte seção, os quatérnions dentro de \mathcal{Cl}_3 .

Sub-álgebra par \mathcal{Cl}_3^+ : Os elementos \mathbb{I} e e_1e_2 , e_1e_3 e e_2e_3 , são chamados pares, porque eles são produto de número par de vetores. Desta maneira podemos representar um

elemento de $\mathcal{C}\ell_3^+$ como

$$\omega + xe_2e_3 + ye_3e_1 + ze_1e_2. \quad (2.39)$$

Os elementos pares formam um subespaço real

$$\mathbb{R} \oplus \bigwedge^2(\mathbb{R}^3) = \{\omega + xe_2e_3 + ye_3e_1 + ze_1e_2/\omega, x, y, z \in \mathbb{R}\}, \quad (2.40)$$

$$\simeq \{\omega + xi\sigma_1 + yi\sigma_2 + zi\sigma_3/\omega, x, y, z \in \mathbb{R}\}, \quad (2.41)$$

o qual é fechado sob a multiplicação. Com isso, podemos afirmar que o subespaço $\mathbb{R} \oplus \bigwedge^2(\mathbb{R}^3)$ é uma sub-álgebra, chamada sub-álgebra par de Clifford. Daqui em adiante denotaremos a sub-álgebra par por $\mathcal{C}\ell_3^+$. É importante mencionar que $\mathcal{C}\ell_3^+$ é isomorfa à álgebra dos quatérnions \mathbb{H} , que abordaremos na seguinte seção.

2.3 Quatérnions

Como é sabido, empregamos os números complexos para representar rotações no plano \mathbb{R}^2 . Para estudar rotações em \mathbb{R}^3 , definiremos uma nova estrutura matemática chamada de quatérnions \mathbb{H} . A composição espacial de rotações não é comutativa, porém precisamos definir uma multiplicação que seja não comutativa para representar o grupo de rotações $SO(3)$. Para fazer essa abordagem podemos empregar a álgebra real de matrizes 3×3 ($Mat(3, \mathbb{R})$), ou a álgebra real dos quatérnions \mathbb{H} . Os quatérnions são uma generalização dos números complexos, e tem a seguinte estrutura

$$q = \omega + ix + jy + kz, \quad (2.42)$$

onde ω, x, y e z são números reais, e as unidades imaginárias i, j, k , satisfazem as seguintes regras de multiplicação

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 = -1, \\ ij = k = -ji, \quad jk = i = -kj, \quad ki = j = -ik. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Notemos que a multiplicação é por definição não comutativa. Entretanto pode-se mostrar que a multiplicação entre quatérnions é associativa

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 = (ij)k = i(jk). \quad (2.44)$$

Parte pura e o produto cruzado entre quatérnions: Dado um quatérnion q , podemos ver que o mesmo é formado pela soma de um escalar e um vetor. Chamaremos a parte real do quatérnion por $Re(q) = \omega \in \mathbb{R}$, e a parte pura do quatérnion por $Pu(q) = ix + jy + kz \in$

\mathbb{R}^3 . Os quatérnions formam um espaço linear real de 4-dimensões \mathbb{H} , o qual contém um eixo real \mathbb{R} e um espaço linear de 3 dimensões \mathbb{R}^3 , assim podemos representar o espaço dos quatérnions como $\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3$. O produto de dois quatérnions $a = a_0 + \vec{a}$ e $b = b_0 + \vec{b}$, pode ser escrito como

$$ab = a_0b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b} + a_0\vec{b} + \vec{a}b_0 + \vec{a} \times \vec{b}. \quad (2.45)$$

Conjugação de quatérnions, norma e inversa: Dado um quatérnion $q = \omega + ix + jy + kz$, o conjugado \bar{q} , nada mais é do que q com parte pura conjugada, ou seja

$$\bar{q} = \omega - ix - jy - kz. \quad (2.46)$$

A multiplicação de um quatérnion q e seu conjugado \bar{q} , resulta em um número escalar $q\bar{q} = \omega^2 + x^2 + y^2 + z^2$, chamado de norma ao quadrado de q . Assim a norma $|q|$ é dada por $|q| = \sqrt{q\bar{q}}$

$$|\omega + ix + jy + kz| = \sqrt{\omega^2 + x^2 + y^2 + z^2}. \quad (2.47)$$

A norma do produto de dois quatérnions a e b é o produto de suas normas, $|ab| = |a||b|$, para a e $b \in \mathbb{H}$. A inversa q^{-1} , de um quatérnion não nulo q , é obtida de maneira simples, a partir de uma manipulação algébrica de $q\bar{q} = |q|^2$, assim, temos

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}, \quad (2.48)$$

de forma explícita, podemos representar a equação anterior como

$$\frac{1}{\omega + \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z} = \frac{\omega - \hat{i}x - \hat{j}y - \hat{k}z}{\omega^2 + x^2 + y^2 + z^2}. \quad (2.49)$$

Vejam agora as rotações em 3 dimensões, usando os quatérnions.

Rotações em 3 dimensões: Consideremos um quatérnion puro ou em outras palavras um vetor

$$\vec{r} = ix + jy + kz \in \mathbb{R}^3, \quad (2.50)$$

de comprimento $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Para um quatérnion a não nulo, a expressão $a\vec{r}a^{-1}$ é também um quatérnion puro com o mesmo comprimento $|\vec{r}|$

$$a\vec{r}a^{-1} \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad |a\vec{r}a^{-1}| = |\vec{r}|. \quad (2.51)$$

Em outras palavras, existe o seguinte mapeamento

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (2.52)$$

$$\vec{r} \mapsto a \vec{r} a^{-1}, \quad (2.53)$$

o qual representa uma rotação no espaço quadrático \mathbb{R}^3 de quatérnions puros. Como é sabido, cada rotação em $SO(3) = \{U \in Mat(3, \mathbb{R}) / U^T U = \mathbb{I}, \det(U) = 1\}$, pode ser representado por dois quatérnions, a e $-a$, os quais representam a mesma rotação, $a \vec{r} a^{-1} = (-a) \vec{r} (-a)^{-1}$. Em outras palavras, uma esfera unitária

$$S^3 = \{q \in \mathbb{H} / |q| = 1\}, \quad (2.54)$$

é um recobrimento duplo do grupo $SO(3)$, ou seja, $SO(3) \simeq S^3 / \{\pm 1\}$.

2.4 Isomorfismo entre $\mathcal{C}\ell_3^+$ e quatérnions

Como tínhamos definido anteriormente, um elemento da sub-álgebra $\mathcal{C}\ell_3^+$ é representado por

$$A = \omega + x e_2 e_3 + y e_3 e_1 + z e_1 e_2. \quad (2.55)$$

Vamos introduzir a seguinte notação

$$\hat{i} = e_2 e_3, \quad \hat{j} = e_3 e_1, \quad \hat{k} = e_1 e_2, \quad (2.56)$$

de maneira que

$$A = \omega - \hat{i}x - \hat{j}y - \hat{k}z. \quad (2.57)$$

Notemos que, usando as relações (2.11) e (5.32)

$$\hat{i}^2 = \hat{j}^2 = \hat{k}^2 = -1, \quad (2.58)$$

$$\hat{i}\hat{j} = -\hat{j}\hat{i} = \hat{k}, \quad (2.59)$$

$$\hat{j}\hat{k} = -\hat{k}\hat{j} = \hat{i}, \quad (2.60)$$

$$\hat{k}\hat{i} = -\hat{i}\hat{k} = \hat{j}, \quad (2.61)$$

observando as relações (2.43) e (2.60)-(2.61) ambas são idênticas. É possível então afirmar que $\mathcal{C}\ell_3^+$ é uma álgebra isomorfa a dos quatérnions, $\mathcal{C}\ell_3^+ \simeq \mathbb{H}$, desde que identifiquemos $\{i, j, k\} \leftrightarrow \{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$.

É importante mencionar que os quatérnions são de muita importância para caracte-

rizar espinores, uma vez que os espinores poderão ser definidos como matrizes 2×2 com entradas quaterniônicas representadas pela álgebra $Mat(2, \mathbb{H})$, como veremos na aplicação no teorema da inversão.

Capítulo 3

Espinores

Definir espinores não é uma tarefa simples, e de fato existem diferentes definições na literatura. Um fator determinante para tal é a não unicidade na definição sob a teoria de espinores, devido ao desenvolvimento independente de físicos e matemáticos. Mencione-mos três definições de espinores, que são as que consideramos mais importantes e as quais foram usadas no escopo desta tese. Cada uma destas definições tem um enfoque diferente. Cabe mencionar, que duas destas estão bem definidas, enquanto a outra vem tomando bastante importância, devido a sua aplicação. As três definições de espinores são *i*) Clássica, *ii*) Algébrica e *iii*) Operatorial [14]-[28]. Tanto a definição Clássica quanto a Algébrica são as bem estabelecidas. O termo “clássico” de espinores clássicos não está relacionado ao aparecimento desses objetos dentro da mecânica clássica.

Espinores Clássicos: Do ponto de vista matemático, um espinor Clássico é um elemento de \mathbb{C}^2 . Tais espinores foram utilizados por Pauli na descrição do comportamento de um elétron segundo a mecânica quântica não relativista, considerando o spin do elétron. A grande diferença entre a teoria de Pauli e Schrödinger é basicamente a consideração do spin. Dentro da mecânica quântica esses objetos são conhecidos como espinores de Pauli. Mais adiante falaremos com mais detalhe sobre tais espinores. Do ponto de vista relativístico, as rotações no espaço-tempo são descritas por elementos do grupo $SO_+(1, 3)$, chamado grupo de Lorentz ortócrono próprio ou simplesmente grupo de Lorentz. Existe um grupo de simetria que tem um papel análogo ao anterior, esse grupo é $SL(2, \mathbb{C})$, grupo de matrizes complexas de ordem dois e determinante igual a um. O grupo $SL(2, \mathbb{C})$ é o recobrimento duplo de $SO_+(1, 3)$. Porém existe um isomorfismo $SL(2, \mathbb{C}) \simeq Spin_+(1, 3)$, e como é sabido \mathbb{C}^2 é o espaço de representação do grupo Spin. Assim fica óbvio que \mathbb{C}^2 é também o espaço de representação de $SL(2, \mathbb{C})$. Existem duas representações não equivalentes de $SL(2, \mathbb{C})$, essas representações são denotadas por $D(1/2, 0)$ e $D(0, 1/2)$. Elementos de um espaço que carregam só uma dessas representações são chamados espinores de Weyl. Assim os espinores de Weyl são elementos do espaço de representação de um grupo de Spin, ou seja, $Spin_+(1, 3) \simeq SL(2, \mathbb{C})$, e eles estão dentro da definição dos chamados espinores clássicos. Por outro lado, os espinores de Dirac, segundo a definição clássica

são elementos de \mathbb{C}^4 e carregam uma representação irredutível de $Spin_+(1, 3) \simeq SL(2, \mathbb{C})$, formada por dois espinores de Weyl, um para cada uma das representações irredutíveis $D(1/2, 0)$ e $D(0, 1/2)$. Assim, podemos dizer que do ponto de vista clássico, os espinores são objetos que carregam uma representação irredutível do grupo $Spin_+(1, 3)$ [2].

Espinores Algébricos: Um espinor algébrico é um elemento de um ideal minimal à esquerda de uma álgebra de Clifford. A representação da álgebra de Clifford obtida do argumento anterior é chamada representação espinorial.

Espinor Operatorial: O espinor operatorial, o qual tem uma abordagem diferente de outra representação da álgebra de Clifford. Essa representação utiliza como espaço de representação a sub-álgebra par de uma álgebra de Clifford [8] .

Como podemos ver existem diversas definições, porém devemos tomar muito cuidado e deixar bem claro que definição ou com que tipo de espinor estamos trabalhando.

3.1 Espinor de Pauli

Na teoria não relativística já era considerada a existência do spin do elétron, cuja descrição requeria a função de onda como uma matriz coluna. Esse objeto matemático é chamado de espinor de Pauli o qual é dado por

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2, \quad \text{onde} \quad \psi_1, \psi_2 \in \mathbb{C}. \quad (3.1)$$

Um isomorfismo de um espaço linear complexo é obtido substituindo o espinor de Pauli por um espinor representado por uma matriz quadrática, assim como segue

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 & 0 \\ \psi_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Cabe mencionar que desse modo a representação matricial do espinor de Pauli tem a característica que só a primeira coluna é não nula. Desse fato podemos definir o seguinte

$$\psi \in Mat(2, \mathbb{C})f, \quad (3.3)$$

onde

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

lembrando que $Mat(2, \mathbb{C})$ é a álgebra das matrizes complexas 2×2 gerada por $\{\mathbb{I}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$. Vimos a existência da correspondência entre $e_1 \simeq \sigma_1, e_2 \simeq \sigma_2, e_3 \simeq \sigma_3$, explicitando o isomorfismo entre \mathcal{Cl}_3 e $Mat(2, \mathbb{C})$. Agora, se multiplicamos $\psi \in \mathbb{C}$ pela esquerda por um

elemento arbitrário $\mathbf{u} \in \mathcal{Cl}_3 \simeq \text{Mat}(2, \mathbb{C})$, o resultado dessa multiplicação nos fornece uma matriz com as mesmas características

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_{11} & \mathbf{u}_{12} \\ \mathbf{u}_{21} & \mathbf{u}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 & 0 \\ \varphi_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

onde

$$\varphi_1 = \mathbf{u}_{11}\psi_1 + \mathbf{u}_{12}\psi_2, \quad (3.6)$$

$$\varphi_2 = \mathbf{u}_{21}\psi_1 + \mathbf{u}_{22}\psi_2. \quad (3.7)$$

Tal conjunto de matrizes, das quais só a primeira coluna é não nula, é o ideal pela esquerda S de \mathcal{Cl}_3 , tal que

$$\mathbf{u}\psi \in S, \quad \text{para todo } \mathbf{u} \in \mathcal{Cl}_3 \text{ e } \psi \in S \subset \mathcal{Cl}_3. \quad (3.8)$$

Agora, vamos procurar uma definição equivalente do espinor de Pauli em termos de \mathcal{Cl}_3 , o qual deve fornecer uma interpretação geométrica. Consideremos o multivetor f dado por

$$f = \frac{1}{2}(1 + e_3) \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

O multivetor f tem a característica de ser um idempotente, uma vez que $f^2 = f$. Assim podemos concluir que \mathbb{C}^2 é isomorfo ao ideal minimal pela esquerda de forma $\mathcal{Cl}_3(1/2)(1 + e_3)$, ou seja

$$\mathbb{C}^2 \ni \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \psi_1 & 0 \\ \psi_2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{Cl}_3 \frac{1}{2}(1 + e_3). \quad (3.10)$$

Notemos que os elementos da sub-álgebra par \mathcal{Cl}_3^+ são representados por matrizes da seguinte forma

$$\begin{pmatrix} \psi_1 & -\psi_2^* \\ \psi_2 & \psi_1^* \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Como podemos ver, as estruturas matriciais dadas por (3.10) e (3.11) tem os mesmos graus de liberdade, e pode-se estabelecer o isomorfismo $\mathcal{Cl}_3^+ \simeq \mathcal{Cl}_3(1/2)(1 + e_3) \simeq \mathbb{C}^2$. Devido ao isomorfismo podemos representar os espinores de Pauli como matrizes, o que é de muito auxílio na manipulação do espinor, já que há casos nos quais a manipulação algébrica do espinor é muito trabalhosa. Ao final, caso trabalhemos com a representação matricial e queiramos recuperar a representação algébrica, devemos simplesmente lembrar

que

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 & -\psi_2^* \\ \psi_2 & \psi_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Portanto, devido ao isomorfismo, podemos observar que $Spin(3) \simeq SU(2)$ e é dado por

$$Spin(3) = \{A \in \mathcal{Cl}_3^+ / A\tilde{A} = \tilde{A}A = 1\}. \quad (3.13)$$

3.2 Espinor de Dirac

Como é sabido a equação de Schrödinger não descreve fenômenos quânticos e relativísticos. Para levar em conta fenômenos relativísticos devemos considerar a equação de dispersão $E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$, na qual as grandezas energia e momento são tratados como operadores. Dessa consideração é que surge a equação de Klein-Gordon

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\psi = 0. \quad (3.14)$$

A equação de Klein-Gordon trata o espaço e tempo em mesmo pé de igualdade, mas apresenta um problema: a densidade de probabilidade não positiva definida. Esse fato, motivou Dirac em 1928, a linearizar a equação de Klein-Gordon. O resultado da linearização é a bem conhecida equação de Dirac

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0. \quad (3.15)$$

Cabe mencionar que a equação de Dirac é obtida dado que as matrizes γ satisfaçam a condição das álgebras de Clifford

$$\begin{aligned} \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} &= 2g_{\mu\nu}\mathbb{I}, & \text{onde } \mu, \nu &= 0, 1, 2, 3 \text{ e} \\ \gamma_0^2 &= \mathbb{I}, & \gamma_1^2 &= \gamma_2^2 = \gamma_3^2 = -\mathbb{I}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Das relações anteriores, Dirac encontrou o conjunto de matrizes quadradas e de dimensão 4 que as satisfazem, as matrizes de Dirac, dadas por

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

$$\gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

na representação de Weyl (chiral). É possível expressar as matrizes de Dirac de uma maneira mais elegante e reduzida, em termos das matrizes de Pauli σ_κ , assim

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & -\mathbb{I} \end{pmatrix}, \quad \gamma_\kappa = -\gamma^\kappa = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & -\sigma_\kappa \\ \sigma_\kappa & \mathbb{O} \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Com essas considerações, devemos definir a “função de onda” ψ , como um espinor coluna dado por

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4 \quad \text{onde} \quad \psi_\alpha \in \mathbb{C}. \quad (3.20)$$

A grande diferença entre a equação de Schrödinger-Pauli e a equação de Dirac (5.27), é que a equação de Dirac leva em conta o fenômeno relativístico e também o spin para o caso de partículas de spin-1/2, tipo o elétron. Por outro lado, a função de onda ψ , além de poder ser representada por um espinor coluna $\psi \in \mathbb{C}^4$, pode também ser representada em termos de uma matriz quadrada de dimensão quatro de entradas complexas. Para que a afirmação anterior seja válida, será necessário que a primeira coluna de tal matriz seja não nula. Sendo assim, o espinor ψ ficaria definido em uma outra álgebra, a álgebra definida por $Mat(4, \mathbb{C})$. Após desta definição, surge uma pergunta intuitiva: como podemos conectar elementos de \mathbb{C}^4 com os elementos definidos como matrizes quadradas de dimensão quatro? A resposta é simples, precisamos definir um elemento f , chamado idempotente primitivo, tal que, $f^2 = f$. Cabe mencionar que caso os espinores estejam definidos no espaço-tempo de Minkowski ($\mathbb{R}^{1,3}$), o idempotente primitivo estará associado aos operadores de projeção de energia $1/2(\mathbb{I} + \gamma_0)$ e com o operador projeção associado com o spin $1/2(\mathbb{I} + i\gamma_1\gamma_2)$. Em outras palavras, o spin é quantizado na direção dada por γ_3 ou mais precisamente no

plano formado pelos vetores γ_1 e γ_2 . Desta maneira um elemento definido em \mathbb{C}^4 , ou seja o espinor ψ , pode também ser representado como $\psi \in Mat(4, \mathbb{C})f$, onde f é definido por

$$f = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \gamma_0)\frac{1}{2}(1 + i\gamma_1\gamma_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Assim, podemos afirmar que o espinor de Dirac pode ser representado como um espinor coluna, ou de maneira análoga como um espinor representado por uma matriz quadrada

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4, \quad \text{ou} \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_2 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_3 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in Mat(4, \mathbb{C})f. \quad (3.22)$$

Vamos definir o espinor $\psi \in \mathbb{C}^4$, da seguinte maneira

$$\psi = \psi_1 f_1 + \psi_2 f_2 + \psi_3 f_3 + \psi_4 f_4, \quad (3.23)$$

onde ψ expressa uma base do espaço linear complexo do espinor, o qual denotaremos por $S = (\mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\ell_{1,3})f$. Definamos os f_i como

$$f_1 = \frac{1}{4}(\mathbb{I} + \gamma_0 + i\gamma_{12} + i\gamma_{012}) = f, \quad (3.24)$$

$$f_2 = \frac{1}{4}(-\gamma_{13} + i\gamma_{23} - \gamma_{013} + i\gamma_{023}) = -\gamma_{13}f, \quad (3.25)$$

$$f_3 = \frac{1}{4}(\gamma_3 - \gamma_{03} + i\gamma_{123} - i\gamma_{0123}) = -\gamma_{03}f, \quad (3.26)$$

$$f_4 = \frac{1}{4}(\gamma_1 - i\gamma_2 - \gamma_{01} + i\gamma_{02}) = -\gamma_{01}f, \quad (3.27)$$

onde $\gamma_{12} = \gamma_1\gamma_2$ e $\gamma_{0123} = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$.

Como vimos o espinor ψ pode ser representado como diferentes estruturas algébricas sem perda de generalidade. Isto é de muita importância desde que nos fornece uma diversidade de opções para abordar os espinores. É claro que devemos fazer a escolha correta, de tal maneira que os cálculos a realizar com os espinores sejam mais simples e mais familiares. Tal diversidade de opções de abordar os espinores do ponto de vista matemático são garantidas pelos isomorfismos relacionados com a estrutura algébrica do espinor

$$\mathbb{C}^4 \simeq Mat(4, \mathbb{C})f \simeq (\mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\ell_{1,3})f. \quad (3.28)$$

Da última equação observamos que

$$Mat(4, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\ell_{1,3}. \quad (3.29)$$

Devemos enfatizar o seguinte, embora sejam álgebras isomorfas, ambas álgebras possuem diferentes definições. Mostraremos essas diferenças na seguinte Tabela 3.1. Portanto, se

Tabela 3.1: Diferenças entre as álgebras $\mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\ell_{1,3}$ e $Mat(4, \mathbb{C})$

	$\mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\ell_{1,3}$	$Mat(4, \mathbb{C})$	
complexo conjugado	u^*	$\gamma_{013} u^* \gamma_{013}^{-1}$	
conjugação de Clifford	$\gamma_{013} u^* \gamma_{013}^*$	u^*	complexo conjugado
	\bar{u}	$\gamma_{02} u^T \gamma_{02}^{-1}$	
	$\gamma_{13} \tilde{u} \gamma_{13}^{-1}$	u^T	Transposta
	$\gamma_0 \tilde{u}^* \gamma_0^{-1}$	$u^\dagger = u^{*T}$	Conjugado Hermitiano
	\tilde{u}^*	$\gamma_0 u^\dagger \gamma_0^{-1}$	Adjunto de Dirac

consideramos um elemento u que pertence a álgebra das matrizes $Mat(4, \mathbb{C})$, o complexo conjugado associado é definido por $u^* = (u_{jk})^* = u_{kj}^*$, enquanto um elemento $u \in \mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\ell_{1,3}$ tem seu complexo conjugado definido por $u^* = (a+ib)^* = a-ib$ para $a, b \in \mathcal{C}\ell_{1,3}$. Por outro lado, u^T na álgebra $Mat(4, \mathbb{C})$ é definido como a transposta conjugada de u , enquanto seu análogo nas álgebras $\mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\ell_{1,3}$ é dado pelo elemento \tilde{u} o qual é chamado de reverso.

Finalmente podemos afirmar que o espinor de Dirac pode ser representado como um espinor coluna $\psi \in \mathbb{C}^4$ ou como uma matriz quadrada $\psi \in Mat(4, \mathbb{C})f$ ou também dentro das álgebras de Clifford ele aparece como $\psi \in (\mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\ell_{1,3})f$.

Uma outra forma de se representar os espinores de Dirac é através das matrizes de dimensão $2 \otimes 2$ com entradas quaterniônicas definida por $Mat(2, \mathbb{H})$, essa abordagem será utilizada no capítulo final da tese, quando abordaremos a construção de novos espinores via o teorema da inversão [25].

3.3 O espinor Elko

É bem conhecido que todos os espinores no espaço-tempo de Minkowski são dados, do ponto de vista clássico, como elementos que carregam as representações do espaço, $(D^{(1/2,0)} \oplus D^{(0,1/2)})$, ou $D^{(1/2,0)}$, ou $(D^{(0,1/2)})$, do grupo $SL(2, \mathbb{C})$. No entanto, o espinor Elko pode ser entendido como um objeto que carrega a representação linear do subgrupo do grupo de Lorentz $SIM(2)$ ou $HOM(2)$ [29, 30]. Sendo assim, usaremos outros ingredientes para definir e construir o espinor Elko.

Como é sabido, Ettore Majorana em 1937 propôs autoespinores do operador conjugação de carga [31], com autovalor positivo, os quais descrevem partículas sem carga elétrica. A primeira modificação, no que concerne ao Elko, é a consideração dos autovalores negativos da atuação do operador conjugação de carga. Desta maneira, pode-se

definir inicialmente os espinores Elko como satisfazendo

$$C\lambda(\mathbf{p}) = \pm\lambda(\mathbf{p}), \quad (3.30)$$

onde C é o operador conjugação de carga

$$C = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & \mathbb{O} \end{pmatrix}. \quad (3.31)$$

Portanto, o espinor Elko possui autovalores ± 1 , sob atuação do operador conjugação de carga, formando um conjunto completo espinores autoconjugados (autovalor $+1$) e anti-autoconjugados (com autovalor -1). Os espinores Elko tem intrinsecamente helicidade dual. Ao se definir a helicidade de uma das componentes espinoriais como positiva ou negativa a outra componente automaticamente adota helicidade oposta. Esse fenômeno está relacionado a algumas propriedades do operador de Wigner, Θ , que mostraremos a seguir.

3.3.1 Estrutura dos espinores Elko

Para definir a estrutura dos espinores Elko é necessário rever algumas propriedades dos operadores de boost e do operador de Wigner. Na representação do espaço $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ com a estrutura do grupo de Lorentz, podemos afirmar que existe uma relação entre os operadores de boost $\kappa^{(1/2,0)}$ e $\kappa^{(0,1/2)}$, dada pelo operador de paridade, pois é possível construir $\kappa^{(1/2,0)}$ a partir de $\kappa^{(0,1/2)}$ apenas pela aplicação de P [29]. Vamos definir os operadores de boost como

$$\kappa^{(1/2,0)} = e^{\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{\varphi}} = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left(\mathbb{I} + \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \right), \quad (3.32)$$

$$\kappa^{(0,1/2)} = e^{\frac{-\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{\varphi}} = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left(\mathbb{I} - \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \right).$$

Tais operadores satisfazem as seguintes relações

$$(\kappa^{(0,1/2)})^{-1} = (\kappa^{(1/2,0)})^\dagger, \quad (\kappa^{(1/2,0)})^{-1} = (\kappa^{(0,1/2)})^\dagger. \quad (3.33)$$

O operador de Wigner ou também chamado de operador reversão temporal, Θ , é dado por

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

Combinando o operador de Wigner com as matrizes de Pauli, encontrarmos a seguinte propriedade (neste caso para a representação de spin 1/2)

$$\Theta\sigma_i\Theta^{-1} = -\sigma_i^*. \quad (3.35)$$

Tal relação nos permite a construção das componentes do espinor Elko em termos de componentes de mão direita, $\phi_R(\mathbf{p})$, e componente de mão esquerda, $\phi_L(\mathbf{p})$. Assim $\phi_R(\mathbf{p})$ se transforma como objeto de $(1/2, 0)$ no espaço de representações e a componente $\phi_L(\mathbf{p})$ como um objeto de $(0, 1/2)$:

$$\begin{aligned} \phi_R(\mathbf{p}) &\rightarrow e^{\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\vec{\varphi}}\phi_R(\mathbf{0}), \\ \phi_L(\mathbf{p}) &\rightarrow e^{-\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\vec{\varphi}}\phi_L(\mathbf{0}). \end{aligned} \quad (3.36)$$

O raciocínio para construir os espinores Elko é usar a relação (3.35) para expressar a transformação das componentes de mão direita em mão esquerda e vice-versa. Para conseguir atingir nosso objetivo precisamos conjugar a equação (3.36) e em seguida multiplicamos pela esquerda por Θ , o que nos leva a

$$\begin{aligned} \Theta\phi_R^*(\mathbf{p}) &= e^{-\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\vec{\varphi}}\Theta\phi_R^*(\mathbf{0}), \\ \Theta\phi_L^*(\mathbf{p}) &= e^{\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\vec{\varphi}}\Theta\phi_L^*(\mathbf{0}). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Quando comparamos as transformações (3.36) e (3.37), podemos concluir o seguinte:

- Se $\phi_L(\mathbf{p})$ se transforma como componente de mão esquerda, então $(\Xi(\mathbf{p})_\lambda\Theta)\phi_L^*(\mathbf{p})$ se transforma como componente de mão direita, onde $\Xi(\mathbf{p})_\lambda$ é um fator de fase, o qual ainda não está especificado.
- Se $\phi_R(\mathbf{p})$ se transforma como componente de mão direita, então $(\zeta_\rho\Theta)^*\phi_R^*(\mathbf{p})$ se transforma como mão esquerda, com o fator de fase ζ_ρ a ser definido mais adiante.

Na construção do espinor Elko a expressão (3.35) representa o único relação entre os espaços de representação. Já no caso do espinor de Dirac quem está encarregado de fazer o elo entre os espaços de representação é o operador paridade. Por outro lado, é nosso dever deixar claro que no caso do espinor Elko, devido ao fato da não consideração do operador paridade na sua construção, pode não obedecer a dinâmica de Dirac, uma vez que o operador paridade e o operador de Dirac estão relacionados [32, 33].

Limitando-nos apenas a autovalores reais pela atuação do operador conjugação de carga temos que as fases devem tomar os valores $\pm i$. Por simplicidade e com o intuito de obter a forma explícita os espinores $\lambda^{S/A}(\mathbf{p})$, vamos escrevê-los no referencial de repouso e

uma vez tenhamos encontrado sua forma explícita aplicamos um boost para obter $\lambda^{S/A}(\mathbf{p})$ [18]. Assim, definimos o conjunto dos $\lambda^{S/A}(\mathbf{p})$, no referencial em repouso, como segue

$$\lambda^S(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} i\Theta\phi_L^*(\mathbf{0}) \\ \phi_L(\mathbf{0}) \end{pmatrix}, \quad \lambda^A(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} -i\Theta\phi_L^*(\mathbf{0}) \\ \phi_L(\mathbf{0}) \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

A forma explícita é implementada via atuação do operador helicidade [34]. Para representar tal operador, usaremos as matrizes de Pauli. Usaremos também o vetor unitário do momento, $\hat{p} = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$, assim a equação de autovalor para o operador helicidade fica dada por

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{p} |\phi_{R/L}\rangle = \pm |\phi_{R/L}\rangle, \quad (3.39)$$

onde o vetor unitário \hat{p} na forma parametrizada em coordenadas esféricas é

$$\hat{p} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta). \quad (3.40)$$

Para resolver a equação (3.39), definiremos ϕ_L como um espinor de duas componentes

$$\phi_L^\pm(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} \phi_{L1}^\pm(\mathbf{0}) \\ \phi_{L2}^\pm(\mathbf{0}) \end{pmatrix}, \quad (3.41)$$

de modo que

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\phi} \\ \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{L1}^+(\mathbf{0}) \\ \phi_{L2}^+(\mathbf{0}) \end{pmatrix} = + \begin{pmatrix} \phi_{L1}^+(\mathbf{0}) \\ \phi_{L2}^+(\mathbf{0}) \end{pmatrix}, \quad (3.42)$$

e finalmente, após algumas manipulações, obtemos

$$\phi_L^+(\mathbf{0}) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \cos \theta / 2 e^{-i\phi/2} \\ \sin \theta / 2 e^{i\phi/2} \end{pmatrix}. \quad (3.43)$$

Procedendo de maneira análoga para a componente com helicidade negativa, chegamos a

$$\phi_L^-(\mathbf{0}) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \sin \theta / 2 e^{-i\phi/2} \\ -\cos \theta / 2 e^{i\phi/2} \end{pmatrix}. \quad (3.44)$$

É importante mencionar que o fator de massa m é escolhido de forma que no limite de partículas sem massa ($m \rightarrow 0$), os espinores em repouso no espaço de representação desapareçam, pois não podem existir partículas sem massa em repouso [35].

De maneira análoga, podemos calcular os autoestados de helicidade para a componente que se transforma como mão direita $\Theta\phi_L^{\pm*}$. Para tanto, conjugamos a equação

$\sigma \cdot \hat{p} \phi_L^\pm(\vec{0}) = \pm \phi_L^\pm(\vec{0})$, obtendo

$$\sigma^* \cdot \hat{p} [\phi_L^\pm(\mathbf{0})]^* = \pm [\phi_L^\pm(\mathbf{0})]^*. \quad (3.45)$$

Substituindo σ^* dado na equação (3.35), a expressão anterior fica

$$\Theta \sigma \Theta^{-1} \cdot \hat{p} [\phi_L^\pm(\mathbf{0})]^* = \mp [\phi_L^\pm(\mathbf{0})]^* \quad (3.46)$$

e usando a propriedade do operador de Wigner $\Theta^{-1} = -\Theta$, temos

$$-\Theta \sigma \cdot \Theta \hat{p} [\phi_L^\pm(\mathbf{0})]^* = \mp [\phi_L^\pm(\mathbf{0})]^*. \quad (3.47)$$

Finalmente multiplicamos Θ pela esquerda em ambos os lados da equação (3.47), obtendo

$$\sigma \cdot \hat{p} \Theta [\phi_L^\pm(\mathbf{0})]^* = \mp \Theta [\phi_L^\pm(\mathbf{0})]^*. \quad (3.48)$$

Como podemos observar da equação anterior, a componente $\Theta [\phi_L^\pm(\mathbf{0})]^*$ pela ação do operador helicidade troca de helicidade com relação a $\phi_L^\pm(\mathbf{0})$. Esse resultado contrasta com os espinores de Dirac e Majorana, pois ambos possuem helicidade única [29]. Com todas essas considerações, podemos definir os espinores autoconjugados como

$$\lambda_{\{-+\}}^S(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} i\Theta[\phi_L^+(\mathbf{0})]^* \\ \phi_L^+(\mathbf{0}) \end{pmatrix}, \quad \lambda_{\{+-\}}^S(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} i\Theta[\phi_L^-(\mathbf{0})]^* \\ \phi_L^-(\mathbf{0}) \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

e de maneira análoga escrevemos os espinores anti-autoconjugados como

$$\lambda_{\{-+\}}^A(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} -i\Theta[\phi_L^+(\mathbf{0})]^* \\ \phi_L^+(\mathbf{0}) \end{pmatrix}, \quad \lambda_{\{+-\}}^A(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} -i\Theta[\phi_L^-(\mathbf{0})]^* \\ \phi_L^-(\mathbf{0}) \end{pmatrix}. \quad (3.50)$$

Neste ponto é importante fazermos uma pausa para entender a estrutura dos espinores que escrevemos (3.49) e (3.50). As quantidades entre chaves $\{\pm, \mp\}$, estão relacionadas com a helicidade: a primeira entrada corresponde a helicidade da componente superior, enquanto a segunda entrada refere-se a helicidade da componente inferior. Uma vez definidos os espinores Elko no referencial em repouso, é fácil obtê-los em um referencial arbitrário, aplicando o boost de Lorentz completo

$$\lambda_{\{h-h\}}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \kappa^{(1/2,0)} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \kappa^{(0,1/2)} \end{pmatrix} \lambda_{\{h-h\}}(\mathbf{0}). \quad (3.51)$$

A expressão anterior pode ser escrita de uma forma mais explícita, usando a expressão estendida do operador de boost dado na equação (3.32) e trocando $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}$ por $p\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}$:

$$\lambda(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left(\mathbb{I} - \frac{p\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}}{E+m} \right) \begin{pmatrix} i\Theta[\phi_L^+(\mathbf{0})]^* \\ \phi_L^+(\mathbf{0}) \end{pmatrix}. \quad (3.52)$$

Da equação (3.39), sabemos como age o operador $\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}$ sobre as componentes do espinor. Com essa consideração é possível escrever de uma maneira mais completa os espinores em termos das helicidades e para um momento arbitrário

$$\lambda_{\{\mp\pm\}}^S(\mathbf{p}) = \frac{E+m}{2m} \left(1 \mp \frac{p}{E+m} \right) \lambda_{\{\mp\pm\}}^S(\mathbf{0}). \quad (3.53)$$

Cabe mencionar que a expressão anterior não possui mais o operador helicidade, já que ele atuou sobre as componentes do espinor $\lambda_{\{\mp\pm\}}^S(\mathbf{0})$. Da mesma maneira podemos proceder com os cálculos para encontrar os $\lambda_{\{\mp\pm\}}^A(\mathbf{p})$,

$$\lambda_{\{\mp\pm\}}^A(\mathbf{p}) = \frac{E+m}{2m} \left(1 \mp \frac{p}{E+m} \right) \lambda_{\{\mp\pm\}}^A(\mathbf{0}). \quad (3.54)$$

Uma vez definida a forma explícita dos espinores Elko em um referencial arbitrário, precisamos definir a estrutura dual. Diferentemente dos espinores de Dirac, a estrutura dual do Elko é bem complexa. Baseados no critério que a norma dos espinores seja real e invariante por transformações de Lorentz, é necessário considerar que o dual do Elko troque de helicidade [36]. Assim, vamos definir inicialmente a estrutura dual como segue

$$\bar{\lambda}_\alpha^{-S}(\mathbf{p}) \stackrel{def.}{=} [\Xi(\mathbf{p})\lambda_\alpha(\mathbf{p})]^\dagger \eta, \quad (3.55)$$

onde o operador $\Xi(\mathbf{p})$ está encarregado de trocar a helicidade de $\lambda_\alpha(\mathbf{p})$ para algum espinor $\lambda_\beta(\mathbf{p})$ que pertença ao conjunto dos autoespinores de C . Requeremos apenas que $\Xi(\mathbf{p})^2 = \mathbb{I}$, para garantir um mapa invertível. Para o caso do espinor Elko o operador $\Xi(\mathbf{p})$ é dado por [37]

$$\Xi(\mathbf{p}) \stackrel{def.}{=} \frac{1}{2m} \left\{ \begin{aligned} & \lambda_{\{+-\}}^S(\mathbf{p})\bar{\lambda}_{\{+-\}}^S(\mathbf{p}) + \lambda_{\{-+-\}}^S(\mathbf{p})\bar{\lambda}_{\{-+-\}}^S(\mathbf{p}) \\ & - \lambda_{\{+-\}}^A(\mathbf{p})\bar{\lambda}_{\{+-\}}^A(\mathbf{p}) - \lambda_{\{-+-\}}^A(\mathbf{p})\bar{\lambda}_{\{-+-\}}^A(\mathbf{p}) \end{aligned} \right\}. \quad (3.56)$$

Devemos dizer que na equação anterior os espinores $\bar{\lambda}_{\{\alpha\}}^{-S/A}(\mathbf{p})$ representam o dual a la Dirac. Justificamos a necessidade de que o dual tenha helicidade trocada, apreciando as relações

de ortogonalidade usuais

$$\begin{aligned}
\bar{\lambda}_{\{\pm\mp\}}^S(\mathbf{p})\lambda_{\{\pm\mp\}}^S(\mathbf{p}) &= 0, \\
\bar{\lambda}_{\{\pm\mp\}}^S(\mathbf{p})\lambda_{\{\pm\mp\}}^A(\mathbf{p}) &= 0, \\
\bar{\lambda}_{\{\pm\mp\}}^S(\mathbf{p})\lambda_{\{\mp\pm\}}^A(\mathbf{p}) &= 0, \\
\bar{\lambda}_{\{\pm\mp\}}^A(\mathbf{p})\lambda_{\{\pm\mp\}}^A(\mathbf{p}) &= 0, \\
\bar{\lambda}_{\{\pm\mp\}}^A(\mathbf{p})\lambda_{\{\pm\mp\}}^S(\mathbf{p}) &= 0, \\
\bar{\lambda}_{\{\pm\mp\}}^A(\mathbf{p})\lambda_{\{\mp\pm\}}^S(\mathbf{p}) &= 0.
\end{aligned}$$

Ainda, outras duas relações de ortogonalidade estão associadas com as “normas” imaginárias

$$\bar{\lambda}_{\{\pm\mp\}}^S(\mathbf{p})\lambda_{\{\mp\pm\}}^S(\mathbf{p}) = \mp 2im, \quad (3.57)$$

$$\bar{\lambda}_{\{\pm\mp\}}^A(\mathbf{p})\lambda_{\{\mp\pm\}}^A(\mathbf{p}) = \pm 2im. \quad (3.58)$$

Essa situação indesejável é evitada com a nova estrutura do dual. Antes de calcularmos as novas relações, vejamos um exemplo de como age o operador $\Xi(\mathbf{p})$ sobre o espinor $\bar{\lambda}_{\{+-\}}^S(\mathbf{p})$:

$$\begin{aligned}
\Xi(\mathbf{p})\lambda_{\{+-\}}^S(\mathbf{p}) &= \frac{1}{2m}\lambda_{\{-+-\}}^S(\mathbf{p})\underbrace{\bar{\lambda}_{\{-+-\}}^S(\mathbf{p})\lambda_{\{+-\}}^S(\mathbf{p})}_{2im}, \\
\Xi(\mathbf{p})\lambda_{\{+-\}}^S(\mathbf{p}) &= i\lambda_{\{-+-\}}^S(\mathbf{p}).
\end{aligned} \quad (3.59)$$

Essa simples mudança atuará de maneira importante. Para expressar de maneira formal a estrutura dual do espinor $\lambda_{\{+-\}}^S(\mathbf{p})$, substituímos (3.59) em (3.55) e obtemos

$$\bar{\lambda}_{\{+-\}}^S(\mathbf{p}) = -i[\lambda_{\{-+-\}}^S(\mathbf{p})]^\dagger \eta. \quad (3.60)$$

Como havíamos mencionado, a função do operador $\Xi(\mathbf{p})$ é trocar a helicidade do espinor. O próximo passo será encontrar a matriz η , lembrando que a norma $[\lambda_\alpha(\mathbf{p})]^\dagger \eta \lambda_{\alpha'}(\mathbf{p})$ do espinor deve ser real e invariante por transformações de Lorentz [18, 38]. Para determinar η , notemos que tal matriz deve comutar com os operadores de rotação e anticomutar com os operadores de boosts [36]

$$[\vec{J}, \eta] = 0, \quad \{\vec{K}, \eta\} = 0. \quad (3.61)$$

Considerando as duas relações anteriores, e levando em conta que os espaços de representação $(1/2, 0)$ e $(0, 1/2)$ devem ser tratados da mesma maneira, é possível ver que

$$\eta = \gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \quad (3.62)$$

a menos de uma constante irrelevante. Sendo assim, estrutura completa do dual de Elko é definida da seguinte maneira

$$\overset{-S}{\lambda}_\alpha(\mathbf{p}) = [\Xi(\mathbf{p})\lambda_\alpha(\mathbf{p})]^\dagger \gamma_0 \equiv i\epsilon_\alpha^\beta \lambda_\beta^\dagger(\mathbf{p})\gamma_0, \quad (3.63)$$

onde o fator ϵ está associado com os valores de helicidade, $\epsilon_{\{+-\}}^{\{-+\}} := -1 = -\epsilon_{\{-+\}}^{\{+-\}}$. Tal fator deve ser entendido apenas como um compensador de sinal entre as quantidades indicadas pelos índices superiores e inferiores, sem fazer referência alguma a qualquer tipo de métrica para subir ou descer índices. Finalmente, podemos escrever a estrutura dual dada em (3.63) como

$$\begin{aligned} \overset{-S/A}{\lambda}_{\{-+\}}(\mathbf{p}) &= i[\lambda_{\{+-\}}^{S/A}(\mathbf{p})]^\dagger \gamma_0, \\ \overset{-S/A}{\lambda}_{\{+-\}}(\mathbf{p}) &= -i[\lambda_{\{-+\}}^{S/A}(\mathbf{p})]^\dagger \gamma_0, \end{aligned} \quad (3.64)$$

e estabelecer as novas relações de ortogonalidade

$$\begin{aligned} \overset{-S}{\lambda}_\alpha(\mathbf{p})\lambda_{\alpha'}^S(\mathbf{p}) &= 2m\delta_{\alpha'\alpha}, \\ \overset{-A}{\lambda}_\alpha(\mathbf{p})\lambda_{\alpha'}^A(\mathbf{p}) &= -2m\delta_{\alpha'\alpha}. \end{aligned}$$

Destas duas relações, podemos obter a relação de completeza para o Elko, dada por

$$\frac{1}{2m} \sum_\alpha \left[\lambda_\alpha^S \overset{-S}{\lambda}_\alpha(\mathbf{p}) - \lambda_\alpha^A \overset{-A}{\lambda}_\alpha(\mathbf{p}) \right] = \mathbb{I}. \quad (3.65)$$

3.3.2 Somas de spin

Nesta subseção falaremos de uma característica importante do espinor Elko, a relação entre a soma de spin e o operador de onda associado. Para tanto, vamos escrever a forma estendida de $\sum_\alpha \lambda_\alpha^S \overset{-S}{\lambda}_\alpha(\mathbf{p})$:

$$\sum_\alpha \lambda_\alpha^S(\mathbf{p}) \overset{-S}{\lambda}_\alpha(\mathbf{p}) = \lambda_{\{+-\}}^S(\mathbf{p}) \overset{-S}{\lambda}_{\{-+\}}(\mathbf{p}) + \lambda_{\{-+\}}^S(\mathbf{p}) \overset{-S}{\lambda}_{\{+-\}}(\mathbf{p}), \quad (3.66)$$

pois

$$\lambda_{\{+-\}}^S(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_{\{+-\}}^S(\mathbf{p}) = 0, \quad (3.67)$$

$$\lambda_{\{-+\}}^S(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_{\{-+\}}^S(\mathbf{p}) = 0. \quad (3.68)$$

Utilizando a forma explícita dos espinores pode se mostrar que

$$\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^S(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_{\alpha}^S(\mathbf{p}) = m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -ie^{-i\phi} \\ 0 & 1 & ie^{i\phi} & 0 \\ 0 & -ie^{-i\phi} & 1 & 0 \\ ie^{i\phi} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.69)$$

De maneira análoga, calculamos a somatório para os espinores anti autoconjugados

$$\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^A(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_{\alpha}^A(\mathbf{p}) = m \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -ie^{-i\phi} \\ 0 & -1 & ie^{i\phi} & 0 \\ 0 & -ie^{-i\phi} & -1 & 0 \\ ie^{i\phi} & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.70)$$

e com a finalidade de simplificar a expressão final da soma de spin definiremos uma matriz, $G(\phi)$, como

$$G(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -ie^{-i\phi} \\ 0 & 0 & ie^{i\phi} & 0 \\ 0 & -ie^{-i\phi} & 0 & 0 \\ ie^{i\phi} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.71)$$

Considerando a matriz $G(\phi)$, podemos escrever as expressões (3.69) e (3.70) de uma forma compacta

$$\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^S(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_{\alpha}^S(\mathbf{p}) = m(\mathbb{I} + G(\phi)), \quad (3.72)$$

$$\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^A(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_{\alpha}^A(\mathbf{p}) = -m(\mathbb{I} - G(\phi)).$$

Como podemos ver, a soma de spin para o conjunto de espinores Elko está associada ao operador $(\mathbb{I} \pm G(\phi))$. Cabe mencionar que a atuação do operador soma de spin aniquila os espinores Elko. Entretanto esse operador não representa um operador de onda, diferentemente do caso usual de Dirac, pois não tem dependência temporal. Portanto, a soma de spin para o Elko só tem dependência espacial, mas essa dependência tem uma peculiaridade, já que apresenta explícita e não covariantemente uma direção de parame-

trização do momento contida em $G(\phi)$: há uma violação explícita da simetria de Lorentz. Uma vez que entendemos que soma de spin está no centro da estrutura do propagador associado ao campo, e está relacionada com a interpretação de partícula e localidade, o fato da soma de spin do espinor Elko violar a simetria de Lorentz afetará a localidade do campo quântico [30]. Na seguinte subseção, vamos analisar a dinâmica do espinor Elko.

3.3.3 Dinâmica

Mostraremos que o espinor Elko não é aniquilado pela atuação do operador de Dirac no espaço dos momentos. Para explicitar esse fato vamos escolher o espinor $\lambda_{\{-+\}}^S(\mathbf{p})$ do conjunto de espinores Elko, e veremos que acontece se o operador de Dirac atua sobre ele:

$$\gamma_\mu p^\mu \lambda_{\{-+\}}^S(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left(1 - \frac{p}{E+m}\right) \left[E\gamma_0 + p \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \\ -\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} & 0 \end{pmatrix} \right] \lambda_{\{-+\}}^S(\mathbf{0}). \quad (3.73)$$

Atentando para as equações (3.45) e (3.48), e após alguma manipulação algébrica, podemos escrever

$$\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \\ -\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} & 0 \end{pmatrix} \lambda_{\{-+\}}^S(\mathbf{0}) = \gamma_0 \lambda_{\{-+\}}^S(\mathbf{0}). \quad (3.74)$$

Como consequência da equação anterior, podemos escrever (3.73) como

$$\gamma_\mu p^\mu \lambda_{\{-+\}}^S(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left(1 - \frac{p}{E+m}\right) (E+m) \gamma_0 \lambda_{\{-+\}}^S(\mathbf{p}). \quad (3.75)$$

É fácil mostrar a seguinte relação

$$\gamma_0 \lambda_{\{-+\}}^S(\mathbf{0}) = -i \lambda_{\{+-\}}^S(\mathbf{0}), \quad (3.76)$$

e evocando a relação de dispersão temos

$$\left(1 - \frac{p}{E+m}\right) (E+p) = \left(1 + \frac{p}{E+m}\right). \quad (3.77)$$

Finalmente podemos escrever

$$\gamma_\mu p^\mu \lambda_{\{-+\}}^S(\mathbf{p}) = -im \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left(1 + \frac{p}{E+m}\right) (E+m) \gamma_0 \lambda_{\{+-\}}^S(\mathbf{p}), \quad (3.78)$$

e recorrendo a equação (3.53) chegamos a

$$\gamma_\mu p^\mu \lambda_{\{-+\}}^S(\mathbf{p}) = -im \lambda_{\{+-\}}^S(\mathbf{p}). \quad (3.79)$$

De maneira similar podemos atuar com $\gamma_\mu p^\mu$ nos outros espinores Elko, cujo resultado é

$$\gamma_\mu p^\mu \lambda_{\{-+\}}^S(\mathbf{p}) = -im \lambda_{\{-+\}}^S(\mathbf{p}), \quad (3.80)$$

$$\gamma_\mu p^\mu \lambda_{\{+-\}}^S(\mathbf{p}) = im \lambda_{\{+-\}}^S(\mathbf{p}), \quad (3.81)$$

$$\gamma_\mu p^\mu \lambda_{\{-+\}}^A(\mathbf{p}) = -im \lambda_{\{-+\}}^A(\mathbf{p}), \quad (3.82)$$

$$\gamma_\mu p^\mu \lambda_{\{+-\}}^A(\mathbf{p}) = im \lambda_{\{+-\}}^A(\mathbf{p}). \quad (3.83)$$

As relações contidas de (3.80) a (3.83) podem ser escritas sob a forma matricial como se segue [29, 38]

$$\begin{pmatrix} \gamma_\mu p^\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_\mu p^\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_\mu p^\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_\mu p^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\{-+\}}^S(\mathbf{p}) \\ \lambda_{\{+-\}}^S(\mathbf{p}) \\ \lambda_{\{-+\}}^A(\mathbf{p}) \\ \lambda_{\{+-\}}^A(\mathbf{p}) \end{pmatrix} - im \mathbb{I} \begin{pmatrix} -\lambda_{\{-+\}}^S(\mathbf{p}) \\ \lambda_{\{-+\}}^S(\mathbf{p}) \\ \lambda_{\{-+\}}^A(\mathbf{p}) \\ -\lambda_{\{-+\}}^A(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = 0. \quad (3.84)$$

É ainda possível escrever de uma maneira mais compacta a última expressão

$$(\gamma_\mu p^\mu \delta_\alpha^\beta + im \mathbb{I} \epsilon_\alpha^\beta) \lambda_\beta^S(\mathbf{p}) = 0, \quad (3.85)$$

$$(\gamma_\mu p^\mu \delta_\alpha^\beta - im \mathbb{I} \epsilon_\alpha^\beta) \lambda_\beta^A(\mathbf{p}) = 0. \quad (3.86)$$

Na equação (3.85) o símbolo δ_α^β é responsável por fazer a troca da helicidade do espinor que aparece à sua direita e ϵ_α^β é definido como anteriormente. É importante enfatizar que a presença de δ_α^β e ϵ_α^β nestas equações mostra que o Elko não satisfaz a equação de Dirac. O passo a seguir será analisar a relação de covariância das equações (3.85) e (3.86). Para tanto vamos considerar uma transformação linear sobre os campos dada por

$$\lambda'(\mathbf{x}') = S(\Lambda) \lambda(\mathbf{x}), \quad (3.87)$$

onde a transformação $S(\Lambda)$ é representada por uma matriz 4×4 não nula e não singular, porque deve admitir inversa. Desta maneira, substituindo a transformação dos campos (3.87) em (3.85) vamos definir a equação transformada por

$$\begin{aligned} & (i\gamma^\mu \partial_\mu \delta_\alpha^\beta + im \mathbb{I} \epsilon_\alpha^\beta) \lambda_\beta(\mathbf{x}), \\ & i\gamma^\mu \partial'_\mu \delta'_\alpha{}^\beta S^{-1}(\Lambda) \lambda'_\beta(\mathbf{x}') + im \mathbb{I} \epsilon'_\alpha{}^\beta S^{-1}(\Lambda) \lambda'_\beta(\mathbf{x}') = 0. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Lembremos que estamos abordando o caso geral do espinor Elko, por conseguinte os cálculos valem para os casos de espinores autoconjugados e anti-autoconjugados. Introduzindo $S^{-1}(\Lambda)S(\Lambda) = 1$ na equação (3.88) e sabendo que $\partial'_\mu = \Lambda^\nu_\mu \partial_\nu$, multiplicamos pela esquerda

da equação (3.88) por $S(\Lambda)$ temos

$$iS(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda)S(\Lambda)\partial'_\mu S^{-1}(\Lambda)S(\Lambda)\delta'^\beta_\alpha S^{-1}(\Lambda)\lambda'_\beta(\mathbf{x}') + im\mathbb{I}S(\Lambda)\epsilon'^\beta_\alpha S^{-1}(\Lambda)\lambda'_\beta(\mathbf{x}') = 0.$$

Sabendo que as quantidades δ'^β_α e ϵ'^β_α se mantêm invariantes, a expressão anterior fica

$$(i \underbrace{S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda)\Lambda^\nu_\mu}_{\gamma^\mu} \partial'_\nu \delta'^\beta_\alpha + im\mathbb{I}\epsilon'^\beta_\alpha)\lambda'_\beta(\mathbf{x}') = 0. \quad (3.89)$$

Portanto, a equação na forma covariante fica escrita como

$$(i\gamma^\mu \partial'_\mu \delta'^\beta_\alpha + im\mathbb{I}\epsilon'^\beta_\alpha)\lambda'_\beta(\mathbf{x}') = 0. \quad (3.90)$$

Como consequência, temos que para qualquer $\lambda^{S/A}_\beta(\mathbf{x})$

$$S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) = \gamma^\nu \Lambda^\mu_\nu. \quad (3.91)$$

Desta maneira, se Λ for uma rotação, então a transformação aplicada em $\lambda(\mathbf{x})$ é unitária, mas no caso em que Λ represente um boost de Lorentz a transformação não será unitária. Sendo assim, os espinores Elko não podem representar um estado quântico, mas servirão como coeficientes de expansão do campo quântico, o qual, transformar-se-á de maneira unitária [39].

A atuação (novamente) de $\gamma^\mu p_\mu$ nas equações (3.85) e (3.86) mostra que o Elko satisfaz a equação de KG. De fato, novamente utilizando $\lambda^S_{\{-+\}}(\mathbf{p})$ para ilustração

$$\gamma_\nu p^\nu \gamma_\mu p^\mu \lambda^S_{\{-+\}}(\mathbf{p}) = im\gamma_\nu p^\mu \lambda^S_{\{-+\}}(\mathbf{p}). \quad (3.92)$$

Escrevendo o momento como $p^\mu = -i\partial^\mu$ e usando a identidade $\gamma_\mu \gamma_\nu = \frac{1}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] + \frac{1}{2}\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\}$, a equação (3.92) fica

$$-\frac{1}{2}\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\}\partial^\mu \partial^\nu \lambda^S_{\{-+\}}(\mathbf{p}) = \underbrace{im\gamma_\nu p^\mu \lambda^S_{\{-+\}}(\mathbf{p})}_{m^2 \lambda^S_{\{-+\}}(\mathbf{p})}. \quad (3.93)$$

Finalmente usando a identidade das álgebras de Clifford (3.16), obtemos

$$(\square + m^2)\lambda^S_{\{-+\}}(\mathbf{p}) = 0. \quad (3.94)$$

A equação anterior representa a equação de Klein-Gordon. Assim, conseguimos provar que os espinores Elko só satisfazem a equação de Klein-Gordon. Uma vez que a equação de Klein-Gordon é uma relação que expressa conservação de energia, ela deve ser satisfeita por qualquer campo independentemente do spin. Como no caso do campo escalar, a

densidade de probabilidade não é positivo definida. Portanto isso deve ser resolvido se deixarmos de lado a interpretação de uma única partícula descrita por uma função de onda e passarmos a pensar em um campo quântico.

Capítulo 4

Construção dos covariantes bilineares e estrutura multivetorial

Neste capítulo apresentamos as estruturas bilineares, chamadas também de densidades bispinoriais. Como mencionamos anteriormente, os espinores são estruturas matemáticas que fornecem uma rica informação sobre o espaço de representação, mas quando eles são inseridos na física é necessário definir estruturas bilineares, uma vez que os espinores sozinhos não são invariantes mediante rotações de 2π , haja visto que mediante tal transformação o espinor ganha um sinal [40]. Diante disso a conjugação de dois espinores pela mesma transformação faz com que esse sinal seja compensado, ou seja, os bilineares não são alterados por uma rotação completa. A forma explícita das estruturas bilineares podem ser encontradas em qualquer livro texto como [41, 42]. Entretanto neste capítulo mostraremos a construção deles a partir das álgebras de Clifford. Tal construção, fornece um melhor entendimento sobre o espaço de representação associado com as estruturas bilineares [9, 10].

4.1 Estruturas bilineares para os espinores de Dirac

É sabido que as propriedades geométricas do campo espinorial de Dirac sobre o espaço-tempo de dimensão par são explorados com o objetivo de formular uma associação com o modelo sigma [9]. Um campo espinorial ψ pode ser construído apenas em termos de suas densidades bilineares $\rho_i = \bar{\psi}\Gamma_i\psi$, mais um fator de fase; onde ρ_i constitui uma representação das informações físicas contidas nos espinores ψ . Essa afirmação é conhecida como “Teorema da Inversão” que abordaremos no último capítulo. Considerando o espaço-tempo de dimensão $N = 2n$, o espinor de Dirac correspondente tem $D = 2^n$ componentes complexas e as densidades bispinoriais satisfazem um sistema algébrico de $(D - 1)^2$ equações quadráticas homogêneas, conhecidas como identidades de Fierz-Pauli-Kofink. Para a construção dos bilineares, usaremos a definição das álgebras de Clifford reais. Um ponto

importante será a condição física de realidade destas estruturas e a normalização de Dirac, que vai nos permitir deformar os elementos da álgebra, de modo que nos possibilite encontrar uma regra para construir novos elementos de vetores da base.

4.1.1 Álgebra de Clifford real

Como vimos anteriormente, a definição da álgebra de Clifford está associada com a condição de que os vetores da base devam satisfazer a relação

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}\mathbb{I}, \quad \mu, \nu = 0, 1, \dots, N-1, \quad (4.1)$$

onde $g_{\mu\nu}$ representa a métrica do espaço-tempo de dimensão par, $N = 2n$, que em coordenadas Cartesianas tem a forma $diag(1, -1, -1, \dots, -1)$. Entretanto, os elementos γ_μ e \mathbb{I} , são os principais blocos constituintes da álgebra de Clifford. Denotaremos a álgebra real de Clifford como $\mathcal{R}_{1,N-1}$, cuja base pode ser construída a partir das diferentes combinações entre as matrizes γ_μ e a identidade. Os elementos que derivam de tais combinações são definidos como

$$\tilde{\gamma}_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{N-M}} \equiv \frac{1}{M!} \epsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_N} \gamma^{\mu_{N-M+1}} \gamma^{\mu_{N-M+2}} \dots \gamma^{\mu_N}, \quad (4.2)$$

onde, $M = 2, 3, \dots, N$. Assim, o conjunto de elementos que forma a base da álgebra real de Clifford será dado por

$$\{\Gamma_i\} \equiv \{\mathbb{I}, \gamma_\mu, \tilde{\gamma}_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{N-2}}, \dots, \tilde{\gamma}_\mu, \tilde{\gamma}\}, \quad (4.3)$$

onde utilizamos $\tilde{\gamma} \equiv \tilde{\gamma}_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{N-N}}$. O próximo passo será usar a condição de normalização para calcular os elementos que advêm da deformação. A partir dos elementos principais da base, \mathbb{I} e γ_μ , construiremos as duas primeiras estruturas bilineares:

$$\sigma \equiv \psi^\dagger \gamma \mathbb{I} \psi \equiv \bar{\psi} \psi, \quad (4.4)$$

$$J_\mu \equiv \bar{\psi} \gamma_\mu \psi. \quad (4.5)$$

As quantidades (4.4) e (4.5) podem ser interpretadas como comprimento invariante σ e densidade de corrente J_μ para o caso específico de espinores de Dirac. Da condição de realidade das quantidades (4.4) e (4.5), mostraremos quais relações devem satisfazer as matrizes de Dirac, γ . Para o primeiro caso teremos

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma^*, \\ \bar{\psi} \psi &= (\bar{\psi} \psi)^*, \\ \psi^\dagger \gamma \psi &= \psi^\dagger \gamma^\dagger \psi, \end{aligned} \quad (4.6)$$

e da equação (4.6) obtemos a seguinte condição $\gamma = \gamma^\dagger$. Entretanto, a única matriz que satisfaz essa condição é a matriz γ_0 . De modo análogo, imporemos que a quantidade J_μ seja real

$$\begin{aligned} J_\mu &= J_\mu^*, \\ \psi^\dagger \gamma \gamma_\mu \psi &= (\psi^\dagger \gamma \gamma_\mu \psi)^*, \\ \psi^\dagger \gamma \gamma_\mu \psi &= \psi^\dagger \gamma_\mu^\dagger \gamma^\dagger \psi, \\ \psi^\dagger \gamma \gamma_\mu \psi &= \bar{\psi} \gamma^\dagger \gamma_\mu^\dagger \gamma \psi. \end{aligned} \quad (4.7)$$

É fácil ver que para garantir a realidade do bilinear J_μ , deve existir a seguinte relação

$$\gamma^{-1} \gamma_\mu^\dagger \gamma = \gamma_\mu, \quad (4.8)$$

mas como já havíamos visto na equação (4.6), $\gamma = \gamma_0$ e podemos reescrever a equação (4.8). Usando então a seguinte propriedade $\gamma_0 = \gamma_0^\dagger = \gamma_0^{-1}$, segue-se que

$$\gamma_\mu = \gamma_0 \gamma_\mu^\dagger \gamma_0. \quad (4.9)$$

Desta maneira encontramos duas relações para as matrizes de Dirac que nos garantem duas quantidades reais σ e J_μ . O próximo passo será construir novos bilineares a partir da “deformação” dos vetores da base $\{\Gamma_i\}$. Para isso, precisaremos da normalização de Dirac com o intuito de encontrá-los. Esses novos vetores da base fornecerão novas estruturas bilineares, as quais também devem ser reais, uma vez que estão associadas a observáveis físicos. Sendo assim, definirmos a normalização de Dirac para o caso das densidades biespinoriais construídas a partir dos elementos da base dadas em (4.2):

$$\bar{\psi} \tilde{\gamma}_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{N-M}} \psi = (\bar{\psi} \tilde{\gamma}_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{N-M}} \psi)^*. \quad (4.10)$$

Usando a condição (4.1) para as matrizes de Dirac obtemos

$$(\bar{\psi} \tilde{\gamma}_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{N-M}} \psi)^* = (-1)^{M(M-1)/2} \bar{\psi} \tilde{\gamma}_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{N-M}} \psi, \quad (4.11)$$

onde o termo $(-1)^{M(M-1)/2}$ é um regulador de sinal proveniente das relações de comutação entre as matrizes de Dirac. Para evidenciar esse fato, faremos um exemplo para o caso onde $M = 2$ e $N = 4$, obtendo a seguinte relação

$$(\bar{\psi} \tilde{\gamma}_{\mu_1 \mu_2} \psi)^* = \psi \tilde{\gamma}_{\mu_1 \mu_2}^\dagger \gamma_0 \psi. \quad (4.12)$$

Vamos usar a equação (4.2) para definir $\tilde{\gamma}_{\mu_1\mu_2}$,

$$\tilde{\gamma}_{\mu_1\mu_2} = \frac{1}{2!} \epsilon_{\mu_3\mu_0\mu_4} \gamma^{\mu_3} \gamma^{\mu_0} \gamma^{\mu_4}. \quad (4.13)$$

Agora, calculando o adjunto de (4.13) obtemos

$$\tilde{\gamma}_{\mu_1\mu_2}^\dagger = \frac{1}{2!} \epsilon_{\mu_3\mu_0\mu_4} \gamma^{\dagger\mu_4} \gamma^{\dagger\mu_0} \gamma^{\dagger\mu_3}. \quad (4.14)$$

Usando a relação (4.9) e $(\gamma^0)^2 = \mathbb{I}$, encontraremos que $\tilde{\gamma}_{\mu_1\mu_2}^\dagger$ é dado por

$$\tilde{\gamma}_{\mu_1\mu_2}^\dagger = -\frac{1}{2!} \epsilon_{\mu_3\mu_0\mu_4} \gamma^0 \gamma^{\mu_3} \gamma^{\mu_0} \gamma^{\mu_4} \gamma^0. \quad (4.15)$$

Finalmente, substituindo a equação (4.15) em (4.12), obtemos

$$(\bar{\psi} \tilde{\gamma}_{\mu_1\mu_2} \psi)^* = -\bar{\psi} \tilde{\gamma}_{\mu_1\mu_2} \psi. \quad (4.16)$$

Como podemos ver há um fator (-1) compatível com o termo $(-1)^{M(M-1)/2}$ da equação (4.11), já que para o caso de nosso exemplo $M = 2$. Assim, temos justificado a presença do fator $(-1)^{M(M-1)/2}$.

Contudo, isso ainda não é garantia de que os novos bilineares que surgirão da normalização de Dirac serão reais, uma vez que o termo $(-1)^{M(M-1)/2}$ não assegura a realidade para certos valores de M . Portanto, vamos impor a seguinte relação

$$\tilde{\gamma}_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{N-M}} \equiv (i^{M(M-1)/2} / M!) \epsilon_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N} \gamma^{\mu_{N-M+1}} \gamma^{\mu_{N-M+2}} \dots \gamma^{\mu_N}. \quad (4.17)$$

Da normalização (4.10), podemos dizer que o conjunto de vetores da base devem satisfazer a equação (4.9) e que os bilineares construídos da consideração da equação (4.17) deverão ser reais. Com essas considerações podemos afirmar que

$$\bar{\Gamma}_i \equiv \gamma_0 \Gamma_i^\dagger \gamma_0 = \Gamma_i, \quad (4.18)$$

$$\rho_i \equiv \bar{\psi} \Gamma_i \psi = \rho_i^*. \quad (4.19)$$

Desta maneira, definimos o caminho para encontrar todos os elementos (combinações) possíveis da base $\{\Gamma_i\}$, a partir das relações encontradas para as matrizes de Dirac e da consideração que as estruturas bilineares devem ser reais.

Consideraremos um caso familiar como exemplo, o espaço de Minkowski $N = 4$. Usaremos a normalização de Dirac nos elementos da base e finalmente o leitor poderá comparar os resultados que vamos obter com as estruturas bilineares fornecidas em diversos livros textos, como o Bjorken e Drell [41] por exemplo. Para o caso de $N = 4$, os valores de M vão de 2 até 4, ou seja, $M = 2, 3, 4$. Obviamente estamos partindo do

pressuposto que as quantidades σ e J_μ são reais, desde que satisfaçam as equações (4.6) e (4.9). Assim, devemos analisar os casos nos quais $M = 4$, $M = 3$ e finalmente para completar o conjunto de elementos da base, calcularemos as quantidades relevantes quando $M = 2$.

Para $M = 4$, temos

$$\tilde{\gamma}_{\mu_4-4} = (i^6/4!) \epsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} \gamma^{\mu_4}. \quad (4.20)$$

Como sabemos as matrizes γ^{μ_i} podem tomar os valores γ^0 , γ^1 , γ^2 e γ^3 , mas devido ao símbolo de Levi-Civita podemos ver que o denominador, $4!$, na expressão anterior deve se cancelar quando consideramos todas as possíveis combinações das matrizes γ^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$), de modo que a expressão anterior fica simplesmente

$$\tilde{\gamma} = -\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3, \quad (4.21)$$

onde, $\tilde{\gamma}_{\mu_4-4} = \tilde{\gamma}$. Definindo $\gamma_5 = i\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$, a equação (4.21) leva ao resultado usual

$$\tilde{\gamma} = -i\gamma_5. \quad (4.22)$$

Para $M = 3$, temos

$$\tilde{\gamma}_{\mu_4-3} = (i^3/3!) \epsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3} \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3}. \quad (4.23)$$

Da mesma maneira que no caso anterior, o símbolo de Levi-Civita e o denominador, $3!$, vão se cancelar, e a equação (4.23) fica

$$\tilde{\gamma}_\mu = \gamma_5 \gamma_\mu. \quad (4.24)$$

Por último, para $M = 2$, obtemos

$$\tilde{\gamma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\lambda\kappa} \sigma^{\lambda\kappa}, \quad \text{onde} \quad \sigma^{\lambda\kappa} = (i/2) [\gamma^\lambda, \gamma^\kappa]. \quad (4.25)$$

Desta maneira o conjunto completo de vetores da base Γ_i é dado por

$$\{\Gamma_i\} = \{\mathbb{I}, \gamma_\mu, \tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}_\mu, \tilde{\gamma}_{\mu\nu}\}. \quad (4.26)$$

Definiremos então as densidades bilineares $\rho_i \equiv \bar{\psi} \Gamma_i \psi = \rho_i^*$, associadas a cada valor de M :

Para $M = 4$, vamos chamar o bilinear associado por ω . Assim

$$\omega = -\bar{\psi} \gamma_5 \psi. \quad (4.27)$$

Para $M = 3$,

$$K_\mu = -\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi, \quad (4.28)$$

e por último, para $M = 2$, temos

$$\begin{aligned} S_{\mu\nu} &= \bar{\psi}\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\lambda\kappa}\sigma^{\lambda\kappa}\psi, & \text{ou} \\ S_{\mu\nu} &= \bar{\psi}i\gamma_\mu\gamma_\nu\psi. \end{aligned} \quad (4.29)$$

4.1.2 Identidades de Fierz-Pauli-Kofink

As identidades de Fierz-Pauli-Kofink são relações quadráticas entre os covariantes bilineares [12, 11, 13]. Uma vez que os covariantes bilineares de um determinado espinor satisfaçam as identidades de FPK, podemos dizer que será possível recuperar um espinor a partir de seus covariantes bilineares mais um fator de fase. Com respeito às identidades de FPK devemos acrescentar a seguinte afirmação: as identidades podem se dividir em dois blocos, o primeiro para o caso de espinores regulares e o segundo para espinores singulares. Para os espinores singulares será necessário reescrever as identidades de FPK em termos de uma nova estrutura, chamada de multivetor que será definida em breve. Chamamos de espinores regulares aqueles cujos covariantes bilineares σ ou ω são simultaneamente não nulos ou quando apenas um deles é não nulo. Para esse caso as identidades de FPK são as seguintes [12, 11, 13]

$$\begin{aligned} J_\mu J^\mu &= \sigma^2 + \omega^2, & J_\mu J^\mu &= -K_\mu K^\mu, \\ J_\mu K^\mu &= 0, & J_\mu K_\nu - K_\mu J_\nu &= -\omega S_{\mu\nu} - \frac{\sigma}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}S^{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Vamos verificar as identidades de FPK para um caso abstrato e ilustrativo onde definiremos um espinor algébrico geral, o qual será dado por

$$\psi = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}, \quad (4.31)$$

onde as componentes a, b, c e $d \in \mathbb{C}$. O espinor adjunto é

$$\bar{\psi} = \left(c^* \quad d^* \quad a^* \quad b^* \right). \quad (4.32)$$

Diante disso, podemos calcular os covariantes bilineares em termos das componentes do espinor (4.31) e (4.32); comecemos com σ

$$\begin{aligned}\sigma &= \bar{\psi}\psi, \\ &= a^*c + b^*d + c^*a + d^*b, \\ &= \Delta + \rho,\end{aligned}\tag{4.33}$$

onde, $\Delta = c^*a + d^*b$ e $\rho = a^*c + b^*d$. De forma similar para ω temos

$$\begin{aligned}\omega &= -\bar{\psi}\gamma_{0123}\psi, \\ &= i\{c^*a + d^*b - a^*c - b^*d\}, \\ &= i\{\Delta - \rho\},\end{aligned}\tag{4.34}$$

onde $\gamma_{0123} = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$. O quadri-vetor J_μ tem componentes dadas por

$$\begin{aligned}J_0 &= \bar{\psi}\gamma_0\psi, & J_2 &= \bar{\psi}\gamma_2\psi \\ &= |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2, & &= i\{-c^*d + d^*c + a^*b - b^*a\} \\ & & &= i\{\nabla - \pi\} \\ J_1 &= \bar{\psi}\gamma_1\psi, & J_3 &= \bar{\psi}\gamma_3\psi \\ &= c^*d + d^*c - a^*b - b^*a, & &= |c|^2 - |d|^2 - |a|^2 + |b|^2 \\ &= \pi + \nabla, & &= \kappa - \tau,\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}\tau &= |d|^2 + |a|^2, & \kappa &= |c|^2 + |b|^2, \\ \pi &= c^*d - a^*b, & \nabla &= d^*c - b^*a,\end{aligned}$$

enquanto as componentes de K_μ são

$$\begin{aligned}K_0 &= \bar{\psi}i\gamma_{0123}\gamma_0\psi, & K_2 &= \bar{\psi}i\gamma_{0123}\gamma_2\psi, \\ &= |c|^2 + |d|^2 - |a|^2 - |b|^2, & &= i\{-c^*d + d^*c - a^*b + b^*a\}, \\ &= \Gamma + \Lambda, & &= i\{\lambda - \Xi\}, \\ K_1 &= \bar{\psi}i\gamma_{0123}\gamma_1\psi, & K_3 &= \bar{\psi}i\gamma_{0123}\gamma_3\psi, \\ &= c^*d + d^*c + a^*b + b^*a, & &= |c|^2 - |d|^2 + |a|^2 - |b|^2, \\ &= \Xi + \lambda, & &= \Gamma - \Lambda,\end{aligned}$$

com as seguintes definições

$$\Gamma = |c|^2 - |d|^2, \quad \Lambda = |d|^2 - |a|^2,\tag{4.35}$$

$$\lambda = d^*c + b^*a, \quad \Xi = c^*d + a^*b.\tag{4.36}$$

Finalmente, calculamos as componentes para o bivetor $S_{\mu\nu}$ levando em conta que tal covariante bilinear é antissimétrico pelo troca $\mu \rightarrow \nu$:

$$\begin{aligned}
S_{01} &= \bar{\psi}i\gamma_{01}\psi, & S_{12} &= \bar{\psi}i\gamma_{12}\psi, \\
&= i\{-c^*b - d^*a + a^*d + b^*c\}, & &= -\{-c^*a + d^*b - a^*c + b^*d\}, \\
&= i\{g + \eta\}, & &= -\{f - m\}, \\
S_{02} &= \bar{\psi}i\gamma_{02}\psi, & S_{13} &= \bar{\psi}i\gamma_{13}\psi, \\
&= -\{c^*b - d^*a - a^*d + b^*c\}, & &= i\{c^*b - d^*a + a^*d - b^*c\}, \\
&= -\{g - \eta\}, & &= i\{\tilde{\eta} + \tilde{g}\}, \\
S_{03} &= \bar{\psi}i\gamma_{03}\psi, & S_{23} &= \bar{\psi}i\gamma_{23}\psi, \\
&= i\{-c^*a + d^*b + a^*c - b^*d\}, & &= \{c^*b + d^*a + a^*d + b^*c\}, \\
&= i\{f + m\}, & &= \{\tilde{\eta} - \tilde{g}\},
\end{aligned}$$

com os parâmetros das equações anteriores escritos da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
g &= -d^*a + b^*c, & \eta &= -c^*b + a^*d, \\
f &= -c^*a + d^*b, & m &= a^*c - b^*d, \\
\tilde{\eta} &= c^*b + a^*d, & \tilde{g} &= -d^*a - b^*c.
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Uma vez definidos todos os bilineares covariantes em termos das componentes do espinor ψ e seu respectivo adjunto, $\bar{\psi}$, procedemos com a verificação das identidades FPK, começando com a identidade

$$J_\mu J^\mu = \sigma^2 + \omega^2, \tag{4.38}$$

que de acordo com as definições anteriores fica

$$4\{\tau\kappa - \nabla\pi\} = 4\Delta\rho. \tag{4.39}$$

Após algumas manipulações simples encontrarmos

$$J_\mu J^\mu = 4\{|a|^2|c|^2 + |d|^2|b|^2 + d^*ca^*b + b^*ac^*d\}, \tag{4.40}$$

$$\sigma^2 + \omega^2 = 4\{|a|^2|c|^2 + |d|^2|b|^2 + d^*ca^*b + b^*ac^*d\}. \tag{4.41}$$

Como podemos notar, as equações (4.40) e (4.41) são equivalentes. Consequentemente, podemos afirmar que a identidade $J_\mu J^\mu = \sigma^2 + \omega^2$ é de fato válida para esse caso. A próxima identidade a ser verificada será $-K_\mu K^\mu = J_\mu J^\mu$, calcularemos apenas $K_\mu K^\mu$, pois a quantidade $J_\mu J^\mu$ pode ser encontrada em (4.40). Assim

$$K_\mu K^\mu = 4\{\Gamma\Lambda - \Xi\lambda\} \tag{4.42}$$

e é fácil mostrar que

$$\Gamma\Lambda - \Xi\lambda = -\{|c|^2|a|^2 + c^*db^*a + |b|^2|d|^2 + a^*bd^*c\}, \tag{4.43}$$

de modo que verifica-se $J_\mu J^\mu = -K_\mu K^\mu$. Para verificar as identidades restantes basta seguir com o mesmo procedimento.

A fim de estudarmos melhor a estrutura algébrica em questão, devemos definir uma nova quantidade chamada de multivetor Z . Como veremos no próximo capítulo a estrutura multivetorial tem um papel importante na classificação de espinores, pois traz informação geométrica sobre os covariantes bilineares. A estrutura multivetorial é dada por

$$Z = \sigma + \mathbf{J} + i\mathbf{S} + i\mathbf{K}\gamma_{0123} + \omega. \quad (4.44)$$

Vejamos agora algumas propriedades e características relevantes de Z

Definição 1: Se os bilineares $\sigma, \omega, \mathbf{J}, \mathbf{K}$ e \mathbf{S} , satisfazem as identidades de FPK, então nesse caso o multivetor Z será dito ser um agregado de Fierz.

Definição 2: Um multivetor Z será adjunto de Dirac se e somente se $\tilde{Z}^* = Z$ (onde \sim e $*$ são definidas na Tabela 3.1), nesse caso diremos que é um boomerang se as estruturas bilineares $\sigma, \omega, \mathbf{J}, \mathbf{K}, \mathbf{S}$ são covariantes por transformações de Lorentz.

Aqui temos um lugar para fazermos um preâmbulo ao teorema da inversão. Vamos abordar o algoritmo de Takahashi [23], o qual diz o seguinte: seja $\eta \in \mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\ell_{1,3}$ um espinor tal que $\tilde{\eta}^* \psi \neq 0$, ou, equivalentemente, $\eta \in \text{Mat}(4, \mathbb{C})$ um espinor tal que $\eta^\dagger \gamma^0 \psi \neq 0$. O espinor ψ difere apenas por uma fase de $Z\eta$. Desta maneira, o espinor original, ψ , pode ser recuperado a partir de seus covariantes bilineares. É importante se observar que no caso de espinores regulares, Z será um boomerang, se somente se Z é um agregado de Fierz. No caso de espinores singulares, desde o princípio poderíamos dizer que Z é um agregado de Fierz mas não é um boomerang. Por exemplo, se $Z = \mathbf{J}$ e $\mathbf{J}^2 = 0$ e claro $\mathbf{J} \neq 0$. Neste exemplo podemos ver que Z é um agregado de Fierz. Entretanto isso não é suficiente para garantir que o agregado seja um boomerang [44]. Esses tipos de casos serão abordados quando definirmos as identidades de FPK em termos do multivetor Z . Antes disso, analisaremos o multivetor associado com espinores singulares, onde \mathbf{J}, \mathbf{K} e \mathbf{S} satisfazem as identidades de FPK. Nesse caso o espinor pode ser construído como

$$\psi = \frac{1}{4N} Z\eta, \quad Z = \mathbf{J} + i\mathbf{S} + i\mathbf{K}\gamma_{0123}, \quad (4.45)$$

e para o caso de espinores singulares tais que $Z \neq 4\psi\tilde{\psi}^*$ as identidades de FPK se reduzem a

$$\mathbf{J}^2 = \mathbf{K}^2 = 0, \quad \mathbf{J} \cdot \mathbf{K} = \mathbf{J} \wedge \mathbf{K} = 0. \quad (4.46)$$

Podemos definir condições mais restritivas das identidades de FPK, as quais estão associadas diretamente com a estrutura multivetorial Z e são válidas tanto para espinores

regulares como para espinores singulares:

$$\begin{aligned} Z^2 &= 4\sigma Z, & Z\gamma_\mu Z &= 4J_\mu Z, & Zi\gamma_{\mu\nu}Z &= 4S_{\mu\nu}Z, \\ Zi\gamma_{0123}\gamma_\mu Z &= 4K_\mu Z, & Z\gamma_{0123}Z &= -4\omega Z. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Checar as identidades anteriores é um trabalho extremamente árduo. Caso o leitor tenha interesse em verificar as identidades anteriores, damos como sugestão utilizar os espinores operatoriais, reduzindo assim os cálculos.

Agora, partimos do pressuposto que $Z = \mathbf{J} + i\mathbf{S} + i\mathbf{K}\gamma_{0123}$ seja um boomerang, de modo que $Z^2 = 0$. Desta afirmação encontraremos as seguintes relações

$$\langle Z^2 \rangle_0 = \mathbf{J}^2 - \mathbf{S} \cdot \mathbf{S} - \mathbf{K}^2, \quad (4.48)$$

$$\langle Z^2 \rangle_1 = 2\gamma_{0123}(\mathbf{S} \wedge \mathbf{K}), \quad (4.49)$$

$$\langle Z^2 \rangle_2 = 2i\gamma_{0123}(\mathbf{J} \wedge \mathbf{K}), \quad (4.50)$$

$$\langle Z^2 \rangle_3 = 2i\mathbf{J} \wedge \mathbf{S}, \quad (4.51)$$

$$\langle Z^2 \rangle_4 = -\mathbf{S} \wedge \mathbf{S}. \quad (4.52)$$

Vamos analisar a informação que está contida em cada uma das relações anteriores. Da equação (4.49), podemos ver que o vetor axial \mathbf{K} é definido dentro do plano formado pelo bivetor \mathbf{S} . De (4.50) afirmamos que \mathbf{J} e \mathbf{K} , são paralelos. Porém, podemos inferir que \mathbf{J} é um vetor que está também definido no plano de \mathbf{S} , essa afirmação é confirmada pela equação (4.51). Com todas essas considerações, podemos reescrever o agregado da seguinte maneira

$$Z = \mathbf{J}(1 + is + ih\gamma_{0123}), \quad (4.53)$$

onde h é um número real, o qual pode ser interpretado como a helicidade associada a um tipo de espinor particular [45], como veremos no capítulo relacionado com a classificação de Lounesto. O vetor \mathbf{s} é um vetor tipo-espaço ortogonal a \mathbf{J} , isto é, $\mathbf{J} \cdot \mathbf{s} = 0$, tal que $\mathbf{S} = \mathbf{J} \wedge \mathbf{s}$. Para garantir que Z seja um boomerang $Z^2 = \mathbf{J}^2(1 + (\mathbf{s} + h\gamma_{0123})^2) = 0$, lembrando que o produto ZZ é dada pelo produto de Clifford (ver equação (2.25)), concluímos que temos dois casos

1. $\mathbf{J}^2 = 0$, ou
2. $(\mathbf{s} + h\gamma_{0123})^2 = -1$.

Para que Z seja um agregado de Fierz e seja um boomerang, ambas as condições devem ser satisfeitas simultaneamente [44].

4.2 Deformação da álgebra de Clifford para o espinor Elko

A motivação de deformar os elementos da base da álgebra de Clifford para o caso de espinores de dimensão de massa 1 surge do fato que a estrutura dual desses espinores é totalmente diferente da estrutura dual do espinor de Dirac. Desse fato surgem imediatamente as seguintes questões: os espinores de dimensão de massa 1 possuem as mesmas estruturas bilineares que os espinores de Dirac? Seriam as estruturas bilineares associadas ao espinor Elko reais? As estruturas bilineares do espinor Elko satisfazem as identidades de FPK?

1. Para responder a primeira questão, consideremos que as estruturas bilineares associadas ao espinor Elko tenham a mesma estrutura que os bilineares associados ao espinor de Dirac, assim

$$\rho_i \equiv \overline{\lambda_h^{S/A}(\mathbf{p})} \Gamma_i \lambda_h^{S/A}(\mathbf{p}), \quad (4.54)$$

com Γ_i dado em (4.3), que representa o conjunto de elementos da base da álgebra de Clifford real. Da equação (4.54) nos deparamos com um grande problema, alguns ρ_i não serão reais nem covariantes.

2. Para responder a segunda questão basta analisar as estruturas construídas a partir dos elementos “primitivos” da álgebra de Clifford $\{\mathbb{I}, \gamma_\mu\}$. Para a estrutura σ que é construída a partir do elemento \mathbb{I} , temos que dada quantidade está associada com a norma do espinor, $\sigma = \pm 2m$, que necessariamente é um número real e ademais é um invariante de Lorentz. Assim, devemos agora analisar o próximo bilinear, J_μ , construído a partir do elemento da base γ_μ , o qual é definido por

$$J_\mu = \lambda_h^{-S/A}(\mathbf{p}) \gamma_\mu \lambda_h^{S/A}(\mathbf{p}). \quad (4.55)$$

Substituindo os espinores dados nas equações (3.53) e (3.54) na equação anterior, encontraremos as seguintes componentes

$$\begin{aligned} J_0 &= 0, \\ J_1 &= 2im \cos \theta \cos \phi, \\ J_2 &= 2im \cos \theta \sin \phi, \\ J_3 &= -2im \sin \theta. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Como podemos ver, por construção, o bilinear J_μ não é real, mas é covariante por transformações de Lorentz. Portanto, a segunda questão foi resolvida parcialmente, já que devemos analisar se as outras quantidades bilineares, porventura, também são reais.

Para isto, usaremos o mesmo critério para definir os bilineares do espinor de Dirac, com a diferença que consideraremos ao invés do dual de Dirac o dual do Elko. Assim, definimos as seguintes quantidades

$$\omega = -\lambda_h^{-S/A}(\mathbf{p})i\gamma_{0123}\lambda_h^{S/A}(\mathbf{p}), \quad (4.57)$$

$$K_\mu = -\lambda_h^{-S/A}(\mathbf{p})\gamma_5\gamma_\mu\lambda_h^{S/A}(\mathbf{p}), \quad (4.58)$$

$$S_{\mu\nu} = i\frac{1}{2}\lambda_h^{-S/A}(\mathbf{p})\gamma_{\mu\nu}\lambda_h^{S/A}(\mathbf{p}). \quad (4.59)$$

Substituindo os espinores (3.53) e (3.54) nas quantidades anteriores, encontraremos as seguintes relações

$$\omega = 0, \quad (4.60)$$

$$K_0 = 0,$$

$$K_1 = -2m \sin \phi,$$

$$K_2 = 2m \cos \phi,$$

$$K_3 = 0, \quad (4.61)$$

$$S_{01} = -2im \sin \theta \cos \phi,$$

$$S_{02} = -2im \sin \theta \sin \phi,$$

$$S_{03} = -2im \cos \theta,$$

$$S_{12} = S_{13} = S_{23} = 0. \quad (4.62)$$

Assim, deparamo-nos com o fato de outra quantidade não real.

O próximo passo importante será verificar se as formas bilineares satisfazem as identidades de FPK (4.30). Mostraremos que, de fato, a primeira identidade $J^2 = \sigma^2 + \omega^2$ é satisfeita. Como podemos ver para o caso em que $\omega = 0$ a primeira identidade se reduz a

$$J^2 = \sigma^2. \quad (4.63)$$

Para tanto vamos considerar os valores dos cálculos anteriores para σ e J_μ . Sendo assim, encontramos de maneira simples o valor para $\sigma^2 = 4m^2$. Após algumas manipulações simples verifica-se

$$J^2 = 4m^2. \quad (4.64)$$

Portanto a identidade (4.63) é satisfeita.

A próxima identidade a ser mostrada será $J_\mu K^\mu = 0$, a qual pode ser escrita de

maneira estendida como:

$$J_\mu K^\mu = J_0 K^0 + J_1 K^1 + J_2 K^2 + J_3 K^3. \quad (4.65)$$

Das expressões (4.56) e (4.61) temos que

$$J_\mu K^\mu = -2im^2 \cos \theta \sin 2\phi + 2im^2 \cos \theta \sin 2\phi, \quad (4.66)$$

desta maneira temos verificado que

$$J_\mu K^\mu = 0. \quad (4.67)$$

A próxima identidade a ser examinada é $J_\mu J^\mu = -K_\mu K^\mu$. $K_\mu K^\mu$ fornece

$$K_\mu K^\mu = K_0 K^0 + K_1 K^1 + K_2 K^2 + K_3 K^3, \quad (4.68)$$

substituindo as componentes de K_μ verifica-se

$$K_\mu K^\mu = -4m^2 \sin^2 \phi - 4m^2 \cos^2 \phi, \quad (4.69)$$

que se reduz a

$$K_\mu K^\mu = -4m^2. \quad (4.70)$$

Por outro lado, as equações (4.64) e (4.70) fornecem

$$J_\mu J^\mu = -K_\mu K^\mu. \quad (4.71)$$

Portanto, a identidade anterior é satisfeita.

Finalmente calcularemos a identidade $J_\mu K_\nu - K_\mu J_\nu = -\frac{\sigma}{2} \epsilon_{\mu\nu\lambda\kappa} S^{\lambda\kappa}$, considerando que $\omega = 0$. Veremos apenas dois casos para mostrar que esta identidade não é totalmente satisfeita:

Primeiro caso: Para $\mu = 0$ e $\nu = 1$, teremos

$$J_0 K_1 - K_0 J_1 = -\frac{\sigma}{2} \epsilon_{01\lambda\kappa} S^{\lambda\kappa}. \quad (4.72)$$

A fim de verificar se a identidade anterior é satisfeita, recorreremos aos valores calculados anteriormente para (4.56), (4.61) e (4.62). Uma consideração importante que devemos levar em conta são as propriedades do símbolo de Levi-Civita [43]. Com tudo isto, a equação (4.72) fica dada por

$$(0)(-2m \sin \phi) - (0)(2im \cos \theta \cos \phi) = -2m S^{23}, \quad (4.73)$$

como sabemos $S^{23} = S_{23} = 0$, assim verifica-se que a identidade anterior é satisfeita.

Segundo caso: Quando $\mu = 1$ e $\nu = 2$, temos

$$J_1 K_2 - K_1 J_2 = -\frac{\sigma}{2} \epsilon_{12\lambda\kappa} S^{\lambda\kappa}. \quad (4.74)$$

De maneira análoga ao primeiro caso, substituindo os valores dados em (4.56), (4.61) e (4.62) na expressão anterior e após de algumas manipulações simples encontramos

$$4im^2 \cos \theta \neq -4im^2 \cos \theta. \quad (4.75)$$

Como podemos observar, a última identidade não é satisfeita. Por outro lado, sabemos que as identidades de FPK são muito importantes, já que a partir delas é possível recuperar o espinor original em termos de seus bilineares via o algoritmo de Takahashi, por exemplo. Assim, precisamos reformular as estruturas bilineares associadas ao Elko de tal maneira que seus bilineares satisfaçam as identidades de FPK. Para alcançar esse objetivo, usaremos a deformação dos elementos da base. Nesta etapa não teremos como foco que as formas bilineares associados a Elko sejam todas reais, isto por que a princípio já nos deparamos com o bilinear J_μ não real, por construção.

A partir dos elementos “primitivos”, \mathbb{I} e γ_μ , podemos encontrar novos elementos da base, desde que consideremos todas as combinações possíveis entre eles. Essas possíveis combinações são representadas pela equação (4.2). Como vimos, M representa o número de combinações possíveis dos elementos “primitivos” da base. Por tal motivo, o valor mínimo de M deve ser dois, já que é o mínimo de combinações possíveis das matrizes γ_μ , e o limite superior é N , a dimensão do espaço-tempo, ou seja, $M = 2, \dots, N$. Com tais considerações os elementos da base são dados por (4.3). Como havíamos mencionado, a deformação dos elementos da base da álgebra de Clifford é feita com a finalidade de encontrar novas estruturas bilineares, com forte consideração que essas quantidades sejam reais, já que fornecem informação física associada aos espinores. Mas como vimos, no caso dos espinores Elko a deformação dos elementos da base visará obter estruturas bilineares que satisfaçam as identidades de FPK.

Vamos começar mostrando a impossibilidade da quantidade J_μ ser real. De fato, impondo a condição de realidade para σ , temos

$$\sigma = \sigma^* = ([\Xi(\mathbf{p})\lambda_h(\mathbf{p})]^\dagger \gamma_0 \lambda_h(\mathbf{p}))^*, \quad (4.76)$$

$$= \lambda_h^\dagger(\mathbf{p}) \gamma_0 \Xi(\mathbf{p}) \lambda_h(\mathbf{p}), \quad (4.77)$$

com Ξ definido em (3.56). Valendo-nos do fato que $\Xi(\mathbf{p})^\dagger \Xi(\mathbf{p}) = \mathbb{I}$, temos

$$\sigma^* = [\Xi(\mathbf{p})\lambda_h(\mathbf{p})]^\dagger \Xi(\mathbf{p}) \gamma_0 \Xi(\mathbf{p}) \lambda_h(\mathbf{p}). \quad (4.78)$$

Portanto, do requerimento que $\sigma = \sigma^*$ obtemos automaticamente

$$\gamma_0 = \Xi(\mathbf{p})\gamma_0\Xi(\mathbf{p}). \quad (4.79)$$

Para verificar se a relação anterior é satisfeita, é necessário se utilizar o operador $\Xi(\mathbf{p})$ na forma matricial. Usando a equação (3.56), após alguns cálculos simples, pode-se ver que $\Xi(\mathbf{p})$ é dado por

$$\Xi(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \frac{ip \sin(\theta)}{m} & \frac{-i(E+p \cos(\theta))e^{-i\phi}}{m} & 0 & 0 \\ \frac{i(E-p \cos(\theta))e^{i\phi}}{m} & \frac{-ip \sin(\theta)}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-ip \sin(\theta)}{m} & \frac{-i(E-p \cos(\theta))e^{-i\phi}}{m} \\ 0 & 0 & \frac{i(E+p \cos(\theta))e^{i\phi}}{m} & \frac{ip \sin(\theta)}{m} \end{pmatrix}. \quad (4.80)$$

Considerando a expressão matricial (4.80) e γ_0 podemos mostrar que a equação (4.79) é satisfeita, logo podemos afirmar que σ é real.

Faremos a mesma abordagem para o bilinear J_μ . Assim, vamos impor a seguinte condição de realidade $J_\mu = J_\mu^*$:

$$\gamma_0\gamma_\mu = \Xi^\dagger(\mathbf{p})\gamma_\mu^\dagger\gamma_0\Xi(\mathbf{p}). \quad (4.81)$$

A última relação não é satisfeita por nenhuma das matrizes de Dirac. Por tal motivo, confirmamos o que tínhamos encontrado em (4.56). Esse resultado é importante. Se comparamos com a relação obtida para o caso do espinor de Dirac ($\gamma_\mu = \gamma_0^{-1}\gamma_\mu^\dagger\gamma_0$), existe uma grande diferença devido ao fato que o espinor Elko possui uma estrutura dual bastante mais complexa. Tal resultado não deve, entretanto, causar espécie, pois J_μ não está associado à corrente conservada para o caso do espinor Elko. Exploraremos esse fato mais adiante na tese.

Por completeza, mencionamos que qualquer alteração em γ^μ , de modo a se tentar obter γ^μ real, leva a uma mudança na relação constitutiva da álgebra de Clifford. Em geral, tal mudança leva a inconsistências.

Vamos agora deformar a base usual para redefinir os covariantes bilineares que satisfazem as identidades FPK. Fazendo uso da equação (4.2) e considerando que a norma para o espinor de Elko é real, obtemos

$$[\bar{\lambda}_h(\mathbf{p})\tilde{\gamma}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{N-M}}\lambda_h(\mathbf{p})]^\dagger = (-1)^{M(M-1)/2} \bar{\lambda}_h(\mathbf{p})\Xi(\mathbf{p})\tilde{\gamma}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{N-M}}\Xi(\mathbf{p})\lambda_h(\mathbf{p}).$$

Pode ser facilmente verificado que a seguinte redefinição de $\tilde{\gamma}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{N-M}}$ é apropriada para que possamos garantir que a quantidade K_μ seja real, assim

$$\tilde{\gamma}_{\mu_1\dots\mu_{N-M}} = (i^{M(M-1)/2}/M!)\Xi(\mathbf{p})\epsilon_{\mu_1\dots\mu_N}\gamma^{\mu_{N-M+1}\dots\mu_N}\Xi(\mathbf{p}). \quad (4.82)$$

Com a redefinição anterior, é possível definir um conjunto completo de elementos da base da álgebra de Clifford como em (4.3). Com tal conjunto encontramos os bilineares associados. Como exemplo, consideremos o espaço-tempo de quatro dimensões. Neste caso, a base é dada, conseqüentemente, por

$$M = 4 \Rightarrow \tilde{\gamma} = -i\Xi(\mathbf{p})\gamma_5\Xi(\mathbf{p}) =, -i\gamma_5 \quad \text{onde } [\Xi(\mathbf{p}), \gamma_5] = 0, \quad (4.83)$$

$$M = 3 \Rightarrow \tilde{\gamma}_\mu = -\Xi(\mathbf{p})\gamma_5\gamma_\mu\Xi(\mathbf{p}), \quad (4.84)$$

$$M = 2 \Rightarrow \tilde{\gamma}_{\mu\nu} = \frac{i}{2}\Xi(\mathbf{p})\gamma_\mu\gamma_\nu\Xi(\mathbf{p}), \quad (4.85)$$

onde $\gamma_5 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$. Agora, com esse conjunto de elementos da base da álgebra de Clifford em mente, é possível construir os bilineares, os quais são definidos por

$$\begin{aligned} \text{I} &\Rightarrow \sigma_E = \overline{\lambda}_h(\mathbf{p})\text{I}\lambda_h(\mathbf{p}), \\ \gamma_\mu &\Rightarrow J_{\mu E} = \overline{\lambda}_h(\mathbf{p})\gamma_\mu\lambda_h(\mathbf{p}), \\ \tilde{\gamma} &\Rightarrow \omega_E = -i\overline{\lambda}_h(\mathbf{p})\gamma_5\lambda_h(\mathbf{p}), \\ \tilde{\gamma}_\mu &\Rightarrow K_{\mu E} = -\overline{\lambda}_h(\mathbf{p})\Xi(\mathbf{p})\gamma_5\gamma_\mu\Xi(\mathbf{p})\lambda_h(\mathbf{p}), \\ \tilde{\gamma}_{\mu\nu} &\Rightarrow S_{\mu\nu E} = i\overline{\lambda}_h(\mathbf{p})\Xi(\mathbf{p})\gamma_\mu\gamma_\nu\Xi(\mathbf{p})\lambda_h(\mathbf{p}). \end{aligned} \quad (4.86)$$

A partir da construção acima, garantimos que as ligeiras modificações dos bilineares são suficientes para satisfazer as identidades FPK (4.30). Finalmente, concluímos que σ e K^μ são as únicas quantidades reais não nulas.

4.3 Covariância das estruturas bilineares para o Elko

Até agora trabalhamos as quantidades definidas em (4.86) alegando que elas devem ser encaradas como covariantes bilineares. Embora sejam quantidades bilineares, sua estrutura covariante deve ser evidenciada. Toda a questão está relacionada com a presença (necessária) do operador $\Xi(\mathbf{p})$.

Suponhamos que o espinor Elko pertença a uma representação linear do grupo de simetria em questão, que é o grupo de Lorentz ortócrono próprio (L_+^\uparrow), de tal maneira que o campo espinorial sofre uma transformação do tipo

$$\lambda_h^{S/A}(\mathbf{p}') = S(\Lambda)\lambda_h^{S/A}(\mathbf{p}). \quad (4.87)$$

Analisaremos a covariância da equação que “aniquila” os espinores Elko [46], dada por

$$(\gamma_\mu p^\mu \Xi(\mathbf{p}) \pm m)\lambda_h^{S/A}(\mathbf{p}) = 0. \quad (4.88)$$

É da equação anterior que vamos extrair a condição de covariância. Substituindo a transformação (4.87) na equação (4.88), temos

$$(\gamma_\mu p'^\mu \Xi(\mathbf{p}) \pm m) S^{-1} \lambda_h^{S/A}(\mathbf{p}') = 0. \quad (4.89)$$

Como sabemos, o momento pode ser escrito como $p^\mu \leftrightarrow i\partial^\mu$ e a derivada parcial se transforma como $\partial'^\mu = \Lambda^\mu{}_\beta \partial^\beta$. Destas considerações, reescrevemos a equação (4.89) como segue

$$(i\gamma_\mu \Lambda^\mu{}_\beta \partial'^\beta \Xi(\mathbf{p}) \pm m) S^{-1} \lambda_h^{S/A}(\mathbf{p}') = 0. \quad (4.90)$$

Agora, multiplicamos por S pela esquerda na equação anterior ficamos com

$$(iS(\Lambda)\gamma_\mu S^{-1}(\Lambda)\Lambda^\mu{}_\beta \gamma'_\mu \partial'^\beta S(\Lambda)\Xi(\mathbf{p})S^{-1}(\Lambda) \pm m)\lambda_h^{S/A}(\mathbf{p}') = 0. \quad (4.91)$$

Visando obter a equação (4.88), será necessário definir as seguintes relações para as matrizes de Dirac e para o operador $\Xi(\mathbf{p})$

$$\gamma'_\beta = S(\Lambda)\gamma_\mu S^{-1}(\Lambda)\Lambda^\mu{}_\beta, \quad (4.92)$$

$$\Xi'(\mathbf{p}') = S(\Lambda)\Xi(\mathbf{p})S^{-1}(\Lambda). \quad (4.93)$$

Como podemos ver a equação (4.92) é a mesma transformação encontrada para o caso da covariância da equação de Dirac. O requerimento dado por (4.93) é o novo ingrediente na teoria do Elko. Curiosamente, a partir da expressão (3.56) vemos que a transformação para o operador $\Xi(\mathbf{p})$ se dá por

$$\begin{aligned} \Xi'(\mathbf{p}') &= \frac{1}{2m} \left(\lambda_{\{+-\}}^{S'}(\mathbf{p}') \bar{\lambda}_{\{+-\}}^{S'}(\mathbf{p}') + \lambda_{\{-+\}}^{S'}(\mathbf{p}') \bar{\lambda}_{\{-+\}}^{S'}(\mathbf{p}') - \lambda_{\{+-\}}^{A'}(\mathbf{p}') \bar{\lambda}_{\{+-\}}^{A'}(\mathbf{p}') \right. \\ &\quad \left. - \lambda_{\{-+\}}^{A'}(\mathbf{p}') \bar{\lambda}_{\{-+\}}^{A'}(\mathbf{p}') \right). \end{aligned}$$

Considerando a transformação (4.87) e a identidade $S^{-1} = \gamma_0 S^\dagger \gamma_0$ [42] na equação anterior encontrarmos a seguinte expressão [32, 46]

$$\begin{aligned} \Xi'(\mathbf{p}') &= \frac{1}{2m} S(\Lambda) \left(\lambda_{\{+-\}}^S(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_{\{+-\}}^S(\mathbf{p}) + \lambda_{\{-+\}}^S(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_{\{-+\}}^S(\mathbf{p}) - \lambda_{\{+-\}}^A(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_{\{+-\}}^A(\mathbf{p}) \right. \\ &\quad \left. - \lambda_{\{-+\}}^A(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_{\{-+\}}^A(\mathbf{p}) \right) \underbrace{\gamma_0 S^\dagger(\Lambda) \gamma_0}_{S^{-1}}. \end{aligned}$$

Por conseguinte, ficamos com

$$\Xi'(\mathbf{p}') = S(\Lambda)\Xi(\mathbf{p})S^{-1}(\Lambda), \quad (4.94)$$

exatamente como apontado anteriormente. Uma vez definida a transformação correta para o operador $\Xi(\mathbf{p})$, estamos aptos a estudar a covariância por transformações de Lorentz dos bilineares associados. Começamos por σ

$$\begin{aligned}
\sigma'_E &= \lambda_h^{-S/A}(\mathbf{p}') \lambda_h^{S/A}(\mathbf{p}') \\
&= \lambda_h^{\dagger S/A}(\mathbf{p}) S^\dagger(\Lambda) S^{-1\dagger}(\Lambda) \Xi^\dagger(\mathbf{p}) \gamma_0 \gamma_0 S^\dagger(\Lambda) \gamma_0 S(\Lambda) \lambda_h^{S/A}(\mathbf{p}) \\
&= \lambda_h^{\dagger S/A}(\mathbf{p}) \Xi^\dagger(\mathbf{p}) \gamma_0 S^{-1}(\Lambda) S(\Lambda) \lambda_h^{S/A}(\mathbf{p}), \\
&= \lambda_h^{-S/A}(\mathbf{p}) \lambda_h^{S/A}(\mathbf{p}), \\
&= \sigma_E,
\end{aligned}$$

e portanto σ é um escalar. Repetindo o mesmo procedimento para calcular a covariância das restantes formas bilineares. Assim, para J_μ temos

$$J'_{\mu E} = \lambda_h^{-S/A'}(\mathbf{p}') \gamma'_\nu \lambda_h^{S/A'}(\mathbf{p}'),$$

e para analisar como se transforma o bilinear J_μ utilizarmos (4.92). Desta maneira a relação anterior fica

$$\begin{aligned}
J'_{\mu E} &= \lambda_h^{-S/A}(\mathbf{p}) S^{-1}(\Lambda) \Lambda_\mu^\beta S(\Lambda) \gamma_\beta S^{-1}(\Lambda) S(\Lambda) \lambda_h^{S/A}(\mathbf{p}), \\
&= \Lambda_\mu^\beta \lambda_h^{-S/A}(\mathbf{p}) \gamma_\beta \lambda_h^{S/A}(\mathbf{p}), \\
&= \Lambda_\mu^\beta J_{\beta E}.
\end{aligned}$$

O fator Λ_μ^β revela que $J_{\mu E}$ é um vetor. Para ω_E , temos

$$\begin{aligned}
\omega'_E &= -i \lambda_h^{-S/A'}(\mathbf{p}') \gamma'_5 \lambda_h^{S/A'}(\mathbf{p}'), \\
&= -i \lambda_h^{-S/A}(\mathbf{p}) \underbrace{S^{-1}(\Lambda) \gamma_5 S(\Lambda)}_{\det(\Lambda) \gamma_5} \lambda_h^{S/A}(\mathbf{p}), \\
&= -i \det(\Lambda) \lambda_h^{-S/A}(\mathbf{p}) \gamma_5 \lambda_h^{S/A}(\mathbf{p}), \\
&= \det(\Lambda) \omega_E.
\end{aligned}$$

Assim, ω_E se transforma como um (pseudo) escalar. Para $K_{\mu E}$, temos

$$K'_{\mu E} = \lambda_h^{-S/A'}(\mathbf{p}') \Xi'(\mathbf{p}') \gamma'_5 \gamma'_\nu \Xi'(\mathbf{p}') \lambda_h^{S/A'}(\mathbf{p}'), \quad (4.95)$$

substituindo as transformações (4.92) e (4.93) na expressão anterior temos

$$\begin{aligned}
K'_{\mu E} &= -\lambda_h^{-S/A}(\mathbf{p})S^{-1}(\Lambda)S(\Lambda)\Xi(\mathbf{p})\underbrace{S^{-1}(\Lambda)\gamma_5 S(\Lambda)\Lambda^\beta_\mu\gamma_\beta}_{\det(\Lambda)\gamma_5}S^{-1}(\Lambda)S(\Lambda)\Xi(\mathbf{p})S^{-1}(\Lambda)S(\Lambda)\lambda_h^{S/A}(\mathbf{p}), \\
&= -\det(\Lambda)\Lambda^\beta_\mu\lambda_h^{-S/A}(\mathbf{p})\Xi(\mathbf{p})\gamma_5\gamma_\beta\Xi(\mathbf{p})\lambda_h^{S/A}(\mathbf{p}), \\
&= \det(\Lambda)\Lambda^\beta_\mu K_{\mu E},
\end{aligned}$$

o que implica que $K_{\mu E}$ se transforma como um (pseudo) vetor. Finalmente, para $S_{\mu\nu E}$, teremos

$$S'_{\mu\nu E} = \frac{i}{2}\lambda_h^{-S/A'}(\mathbf{p}')\Xi'(\mathbf{p}')\gamma'_\mu\gamma'_\nu\Xi'(\mathbf{p}')\lambda_h^{S/A'}(\mathbf{p}'),$$

utilizando as transformações (4.92) e (4.93), a equação anterior fica

$$\begin{aligned}
S'_{\mu\nu E} &= \frac{i}{2}\Lambda^\beta_\mu\Lambda^\alpha_\nu\lambda_h^{-S/A}(\mathbf{p})\Xi(\mathbf{p})\gamma_\beta\gamma_\alpha\Xi(\mathbf{p})\lambda_h^{S/A}(\mathbf{p}), \\
&= \Lambda^\beta_\mu\Lambda^\alpha_\nu S_{\mu\nu E}.
\end{aligned}$$

Portanto $S_{\mu\nu E}$ se transforma como um bivector. Como podemos ver, a nomenclatura que adotamos para definir a transformação dos bilineares é adequada. Para analisar a covariância das estruturas bilineares com respeito aos subgrupos de Lorentz que acomodam o Elko, será necessário realizar uma abordagem a respeito aos subgrupos de Lorentz, $SIM(2)$ e $HOM(2)$, como mostraremos a seguir. A análise é bastante análoga e as afirmações físicas são essencialmente as mesmas.

4.4 Espinores Elko na VSR

Como é amplamente mostrado nas referências [29, 30], o espinor Elko pode ser entendido como um objeto que carrega a representação linear do subgrupo do grupo de Lorentz $SIM(2)$ ou $HOM(2)$. Neste sentido, seria importante explorar uma possível deformação da base de álgebra de Clifford nesse cenário.

Para ilustrar esta situação, faremos uso dos espinores Elko encontrados em [47]. Por outro lado, devemos notar que, em geral, o operador helicidade não comuta com os boost da VSR. Diante deste fato, não podemos escolher os espinores em repouso como base de tal operador. Essa é a diferença principal entre o Elko de Lorentz e o Elko da VSR.

Considerando um momento arbitrário, é possível definir como protótipo do espinor

Elko (considerando os boosts da VSR) o espinor

$$\chi_{\{-,+\}}^S(\mathbf{p}) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} i \frac{p_x - ip_y}{\sqrt{m(p_0 - p_z)}} e^{i\phi/2} \\ i \sqrt{\frac{p_0 - p_z}{m}} e^{i\phi/2} \\ \sqrt{\frac{p_0 - p_z}{m}} e^{-i\phi/2} \\ -\frac{p_x + ip_y}{\sqrt{m(p_0 - p_z)}} e^{-i\phi/2} \end{pmatrix}, \quad (4.96)$$

e também seu respectivo dual

$$\bar{\chi}_{\{-,+\}}^S(\mathbf{p}) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} 0 & -i \frac{e^{-i\phi/2}}{\sqrt{\frac{p_0 - p_z}{m}}} & \frac{e^{i\phi/2}}{\sqrt{\frac{p_0 - p_z}{m}}} & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.97)$$

cuja construção obedece a mesma prescrição anterior, i. e., $\chi_h^{S/A}(\mathbf{p}) = [\Xi(\mathbf{p})_{VSR} \chi_h^{S/A}(\mathbf{p})]^\dagger \gamma_0$. Cabe mencionar que todos os aspectos antes investigados no caso do Elko considerando o grupo de Lorentz têm um paralelo aqui. A única e grande diferença está na consideração do boost da VSR, o qual é dado por [30]

$$\mathcal{V}_{VSR} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{m}{p_0 - p_z}} & \frac{p_1 - ip_2}{\sqrt{m(p_0 - p_3)}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{p_0 - p_z}{m}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{p_0 - p_z}{m}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{p_1 + ip_2}{\sqrt{m(p_0 - p_3)}} & \sqrt{\frac{m}{p_0 - p_z}} \end{pmatrix}. \quad (4.98)$$

O enfoque dos espinores Elko na VSR, leva a redefinir o operador $\Xi(\mathbf{p})_{VSR}$. Para escrevermos esse operador, será necessário usar o equivalente da equação (3.56), considerando os espinores definidos em (4.96). O resultado fica

$$\Xi(\mathbf{p})_{VSR} = \begin{pmatrix} \frac{i(p_x - ip_y)e^{i\phi}}{m} & \frac{-i(p_x - ip_y)^2 e^{i\phi}}{m(p_0 - p_z)} - \frac{ime^{-i\phi}}{p_0 - p_z} & 0 & 0 \\ \frac{i(p_0 - p_z)e^{i\phi}}{m} & -\frac{i(p_x - ip_y)e^{i\phi}}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{i(p_x + ip_y)e^{-i\phi}}{m} & \frac{-i(p_0 - p_z)e^{-i\phi}}{m} \\ 0 & 0 & \frac{i(p_x + ip_y)^2 e^{-i\phi}}{m(p_0 - p_z)} + \frac{ie^{i\phi}m}{p_0 - p_z} & \frac{i(p_x + ip_y)e^{-i\phi}}{m} \end{pmatrix}.$$

Este operador atua nos espinores definidos na VSR de maneira análoga ao que acontece para o caso de Lorentz, ou seja, muda o tipo de espinor e também obedece as mesmas identidades, $\Xi^2(\mathbf{p})_{VSR} = 1$ e possui determinante igual a um garantindo a existência da matriz inversa. Com tais ingredientes, é possível ver que todos os passos anteriores são repetidos aqui, a saber: as identidades FPK não são respeitadas, exceto se a base de Clifford sofrer a mesma deformação (considerando $\Xi(\mathbf{p})_{VSR}$ ao invés de $\Xi(\mathbf{p})$); σ_{VSR} e K_{VSR}^μ são as únicas quantidades não nulas e reais; ω_{VSR} é nulo, e os demais

bilineares são imaginários.

Capítulo 5

Classificação de Lounesto e Teorema da inversão

No presente capítulo abordaremos dois grandes protagonistas dessa tese: a classificação de Lounesto e o teorema da inversão. A classificação de Lounesto foi proposta em 1993. Mostra-se completa porque consegue classificar todos os espinores conhecidos na literatura. Ela possui uma grande vantagem sobre suas antecessoras devido ao fato que tal classificação providencia um caráter geométrico [16]. O teorema da inversão foi proposto por J. Crawford em 1985 e é uma consequência direta do algoritmo desenvolvido por Takahashi [23]. Crawford teve a intuição de sintetizar a idéia principal do algoritmo de Takahashi e conseguiu mostrar que existe uma outra maneira de construir os espinores a partir dos covariantes bilineares. Tal método é conhecido como teorema da inversão [22]. Neste capítulo apresentaremos uma maneira detalhada dos principais ingredientes que compõem o teorema da inversão. Finalmente, ilustraremos uma aplicação deste teorema e construiremos três novas classes de espinores.

5.1 Classificação de Lounesto

Usualmente os espinores são classificados de acordo a representação irredutível do grupo $Spin(1, 3)$. Dentro desse contexto é possível encontrar os espinores classicamente conhecidos como: Dirac, Majorana e Weyl [14, 15]. Em contraste, a classificação de Lounesto traz em seu âmago uma rica informação geométrica, afirmação que está relacionada ao fato de que Lounesto considerou como requisitos indispensáveis e primordiais os covariantes bilineares e também a estrutura multivetorial Z .

Sendo assim, dado um espinor ψ o qual pertença a uma representação linear do grupo de Lorentz $SU(2, \mathbb{C})$, cujos covariantes bilineares necessariamente deverão satisfazer as identidades de FPK (4.30) e a estrutura multivetorial, Z , satisfazendo a condição de boomerang (vista nas definições 1 e 2 da seção 4.1.3). Podemos ver que das dife-

rentes combinações dos covariantes bilineares é possível encontrar apenas seis classes de espinores, as quais são:

1. $\sigma \neq 0, \quad \omega \neq 0;$
2. $\sigma \neq 0, \quad \omega = 0;$
3. $\sigma = 0, \quad \omega \neq 0;$
4. $\sigma = 0 = \omega, \quad \mathbf{K} \neq 0, \quad \mathbf{S} \neq 0;$
5. $\sigma = 0 = \omega, \quad \mathbf{K} = 0, \quad \mathbf{S} \neq 0;$
6. $\sigma = 0 = \omega, \quad \mathbf{K} \neq 0, \quad \mathbf{S} = 0.$

Cabe mencionar que na classificação de Lounesto é crucial que J seja não nulo, uma vez que permite definir o chamado boomerang (4.53), o que garante a possibilidade de apenas seis classes diferentes de espinores. A classificação de Lounesto abarca dois tipos de espinores, regulares e singulares. Espinores regulares caracterizam-se por ter $\sigma \neq 0$ ou $\omega \neq 0$ ou ambas essas condições simultaneamente enquanto espinores singulares são aqueles onde $\sigma = 0 = \omega$. Desta classificação os espinores regulares são dados por: espinores tipo-(1), (2) e (3), os quais são chamados espinores de Dirac. Os espinores singulares são dados por: espinor tipo-4, o qual é chamado de *flag-dipole* [17], e o espinor tipo-5, chamado de *flag-pole* [14]. O espinor de Majorana deve ser considerado como um elemento dos espinores *flag-pole*. Finalmente, os espinores tipo-6 são exemplificados por espinores de Weyl.

5.1.1 Caracterização algébrica dos espinores

Como podemos ver, a classificação de Lounesto apresenta um conjunto de equações restritivas em relação aos covariantes bilineares, as quais definem cada classe de espinor. Com ajuda de tais equações vamos calcular as relações que devem satisfazer as componentes de cada classe de espinor com o intuito de distinguir os espinores a partir de suas componentes. Por questões de didática vamos escrever novamente as componentes dos covariantes bilineares calculadas quando verificamos as identidades de FPK. Assim, dado

$$\psi = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

temos

$$\sigma = 2\text{Re}(ac^* + bd^*), \quad \omega = -2\text{Im}(ac^* + bd^*),$$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \|a\|^2 + \|b\|^2 + \|c\|^2 + \|d\|^2 \\ 2\text{Re}(ab^* - cd^*) \\ 2\text{Im}(ab^* - cd^*) \\ \|b\|^2 + \|c\|^2 - \|a\|^2 - \|d\|^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} \|c\|^2 + \|d\|^2 - \|a\|^2 - \|b\|^2 \\ -2\text{Re}(ab^* + cd^*) \\ 2\text{Im}(ab^* - cd^*) \\ \|b\|^2 + \|c\|^2 - \|a\|^2 - \|d\|^2 \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

$$\mathbf{S} = \begin{cases} S_{01} = -2\text{Im}(ad^* + bc^*), & S_{02} = 2\text{Re}(ad^* - bc^*) \\ S_{03} = 2\text{Im}(ac^* - bd^*), & S_{12} = -2\text{Re}(ac^* - bd^*) \\ S_{23} = 2\text{Re}(ad^* + bc^*), & S_{13} = -2\text{Im}(ad^* - bc^*) \end{cases}. \quad (5.3)$$

Como havíamos mencionado, os espinores singulares são caracterizados por

$$\sigma = 0 = \omega, \quad (5.4)$$

o que leva à

$$ac^* = -bd^*, \quad (5.5)$$

e finalmente

$$a = -\frac{bcd^*}{\|c\|^2}. \quad (5.6)$$

Espinores tipo-6: Como sabemos esses espinores pertencem ao que se denomina espinores singulares e possuem a característica $S_{\mu\nu} = 0$. Sendo assim, analisaremos todas as combinações possíveis das componentes do espinor ψ de tal maneira que as condições para o espinor tipo-6 sejam satisfeitas:

- Se $a = 0 = c$, esta consideração leva a $K_0 = \|d\|^2 - \|b\|^2$, $K_1 = -\|b\|^2 - \|d\|^2$ e $K_2 = 0 = K_3$; por conseguinte $\mathbf{K} \neq 0$, enquanto $\mathbf{S} = 0$. Note, entretanto, que esta escolha não é adequada, pois não caracteriza um espinor do tipo-6, já que $\mathbf{S} \neq 0$.
- Se $a = 0 = b$ então $\mathbf{K} \neq 0$ e $\mathbf{S} = 0$, conseqüentemente essa escolha representa um espinor tipo-6.
- Se $c = 0 = d$ então $\mathbf{K} \neq 0$ e $\mathbf{S} = 0$, assim, esta escolha também representa um espinor tipo-6.

Ademais, podemos concluir que apenas nos casos em que $a = 0 = b$ ou $c = 0 = d$ poderemos descrever espinores do tipo-6. Com estas considerações os espinores tipo-6 são

dados por

$$\psi_{(6)}^{(1)} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \psi_{(6)}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \\ d \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

Espinores tipo-5: Como vimos, os espinores do tipo-5 são espinores singulares, portanto satisfazem as relações (4.33) e (4.34), além de possuir a condição $\mathbf{K} = 0$. Como no caso de espinores do tipo-6 analisaremos aqui todas as diferentes condições que deverão satisfazer as componentes do espinor ψ para que este retrate um espinor tipo-5. Desta maneira, apresentamos os seguintes casos:

- Se $a = 0 = d$, será necessário que a relação $\|b\|^2 = \|c\|^2$ seja satisfeita para garantir que $\mathbf{K} = 0$ e $\mathbf{S} \neq 0$. Desta forma, o espinor associado com essa escolha representa um espinor tipo-5.
- Se $b = 0 = c$, teremos a necessidade que a relação $\|a\|^2 = \|d\|^2$ seja satisfeita de modo a garantir $\mathbf{K} = 0$ e $\mathbf{S} \neq 0$. Portanto, o espinor associado a esta escolha representa também um espinor tipo-5.
- Por último, se todas as componentes do espinor são não nulas, teremos apenas uma maneira de representar o espinor usando a relação $a = -\frac{bcd^*}{\|c\|^2}$ a qual é válida para todo espinor singular.

Sendo assim, encontramos três representações para espinores do tipo-5 e são dadas por

$$\psi_{(5)}^1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix}, \quad \psi_{(5)}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad \psi_{(5)}^3 = \begin{pmatrix} -\frac{bcd^*}{\|c\|^2} \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

Espinores tipo-4: Esses espinores possuem as mesmas equações restritivas que os espinores singulares anteriores, mas isto não impossibilita que possamos ter um novo conjunto de espinores, uma vez que as condições $K_\mu \neq 0$ e $S_{\mu\nu} \neq 0$ são satisfeitas se consideramos que apenas uma de suas componentes seja não nula. Por conseguinte, mostraremos as diferentes configurações que podem tomar as componentes do espinor ψ de modo que ele represente um espinor tipo-4:

- Se $c = 0 = b$ teremos que $K_1 = 0 = K_2$. Para garantir que $\mathbf{K} \neq 0$ será necessário impor $\|a\|^2 \neq \|d\|^2$ de modo que $K_0 = K_3 \neq 0$. Ademais é fácil mostrar que $\mathbf{S} \neq 0$.
- Se $a = 0 = d$, este caso é similar ao caso anterior, apenas com a sutil diferença que aqui para garantir $\mathbf{K} \neq 0$ será necessário impor $\|b\|^2 \neq \|c\|^2$ e $\mathbf{S} \neq 0$.

- No caso em que todas as componentes de ψ sejam não nulas teremos a relação geral para todo espinor singular $a = -\frac{bcd^*}{\|c\|^2}$.

À vista disso, teremos o conjunto de espinores tipo-4 representados por

$$\psi_{(4)}^1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix}, \quad \psi_{(4)}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_{(4)}^3 = \begin{pmatrix} -\frac{bcd^*}{\|c\|^2} \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

É importante mencionar que até o presente momento não foi possível associar o espinor tipo-4 com alguma partícula física. No entanto, foram encontrados casos particulares de tais espinores, $\psi_{(4)}^1$ e $\psi_{(4)}^2$, em cenários de geometria de Riemann-Cartan como base nas equações de Einstein-Sciama-Kibble acopladas com campos espinoriais [17].

Espinores Regulares: Os espinores regulares estão associados com apenas a restrição $ac^* + bd^*$, que já serve como ponto de partida para construir um conjunto de espinores regulares do tipo-1. Sendo assim, apresentamos as condições nas quais surgem esses espinores

- Se $b = 0 = d$ temos que $\sigma \neq 0 \neq \omega$ e $\|c\|^2 \neq \|a\|^2$ devem ser satisfeitas para garantir $\mathbf{K} \neq 0$.
- Se $a = 0 = c$ temos que $\sigma \neq 0 \neq \omega$ e $\|b\|^2 \neq \|d\|^2$ devem ser satisfeitas para garantir $\mathbf{K} \neq 0$.
- Por último, destacamos que no caso em que todas as componentes de ψ sejam não nulas, a condição $a = -\frac{bcd^*}{\|c\|^2}$ não será satisfeita, já que apenas é satisfeita para espinores singulares.

Desse modo, podemos apresentar os espinores regulares como:

$$\psi_{(1)}^1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ c \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_{(1)}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \\ d \end{pmatrix}, \quad \psi_{(3)} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

Apresentamos assim a caracterização dos espinores de maneira pictórica na Tabela 5.1 [48]

Tabela 5.1: Forma geral de espinores Singulares e Regulares.

n° de coeficientes nulos:	1	2	3	4
Classes				
Tipo-(4)	-	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \\ 0 \end{pmatrix}$ $\frac{\ a\ ^2}{\ b\ ^2} \neq \frac{\ d\ ^2}{\ c\ ^2}$	-	$\begin{pmatrix} -\frac{bcd^*}{\ c\ ^2} \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ $\ b\ ^2 \neq \ c\ ^2$
Tipo-(5)	-	$\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \\ 0 \end{pmatrix}$ $\frac{\ a\ ^2}{\ b\ ^2} = \frac{\ d\ ^2}{\ c\ ^2}$	-	$\begin{pmatrix} -\frac{bcd^*}{\ c\ ^2} \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$
Tipo-(6)	Arbitrário	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \\ d \end{pmatrix}$	-	-
Regular	-	$\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ c \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \\ d \end{pmatrix}$	Arbitrário	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ $a \neq -\frac{bcd^*}{\ c\ ^2}$

5.2 Teorema da inversão

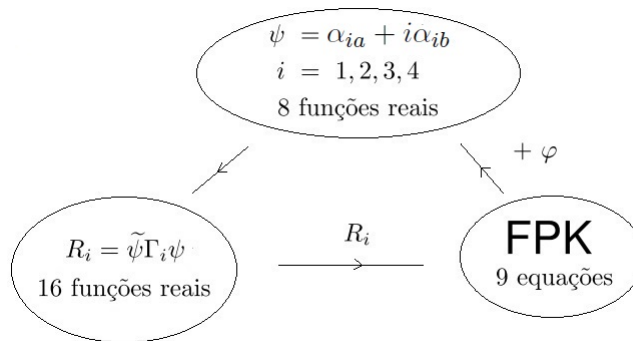
É bem sabido no contexto da mecânica quântica que os observáveis físicos (os covariantes bilineares) são apresentados como quantidades quadráticas da função de onda. No caso específico de espinores de Dirac representados como uma função de onda de quatro componentes, como foi visto em (3.20), podem ser construídas dezesseis formas quadráticas reais como vimos nas equações (4.4)-(4.29). Tais covariantes bilineares satisfazem um conjunto de equações dadas em (4.30). Por outro lado, os covariantes bilineares não são quantidades independentes. Crawford usou o argumento anterior e as identidades de FPK para definir o teorema da inversão, que afirma de maneira geral que um dado espinor arbitrário ψ pode ser expresso em termos de seus covariantes bilineares, assim

$$\begin{aligned}
 \psi &= e^{-i\varphi} \left(\Sigma - i\Pi\gamma_5 + J_\mu\gamma^\mu - K_\mu\gamma_5\gamma^\mu + \frac{1}{2}S_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} \right) \xi, \\
 &= e^{-i\varphi} R^i\Gamma_i\xi,
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

onde o conjunto $\{\varphi, R^i\}$ contém dezessete funções reais ou graus de liberdade, sendo φ uma fase arbitrária e R^i representando os covariantes bilineares. Γ_i denota a base de Clifford em questão e ξ é um espinor constante arbitrário. Sabemos que o espinor ψ possui apenas oito funções reais. Então, a princípio, parece incoerente representar uma estrutura que possui menos graus de liberdade em termos de outras que possuem o dobro e além disso devemos adicionar um grau de liberdade associado a φ . Crawford conseguiu resolver essa “incoerência” impondo que os covariantes bilineares satisfaçam as identidades de FPK (4.30), pois tais identidades criam vínculos que reduzem o número de funções reais associadas aos covariantes bilineares, de tal forma que o argumento sustentado em (5.11) seja válido.

É importante mencionar que a inversão não é única, pois podemos escolher uma fase arbitrária φ e o espinor constante ξ arbitrário. Assim, podemos afirmar que o teorema da inversão é muito útil dentro de um contexto algébrico formal.

Figura 5.1: Diagrama esquemático do teorema da inversão



Mostraremos na seguinte seção a aplicação do teorema da inversão para construir novos espinores. Tais espinores surgirão da asserção que o covariante bilinear J_μ seja sempre nulo. Como consequência de tal consideração, os novos espinores não poderão ser classificados na classificação usual de Lounesto, devido a estrutura multivetorial Z não representar mais um boomerang.

5.3 Construção algébrica de novos espinores

Nesta seção faremos uso do teorema da inversão para construir novos espinores. Para tal construção será necessário definir a álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell_{1,3}$ a qual possui os vetores da base $\{e_\mu\}$ no espaço-tempo de Minkowski, que estão sujeitos as seguintes relações

$$\begin{aligned}
 e_0^2 &= 1, & e_i^2 &= -1 & (i = 1, 2, 3), \\
 e_\mu e_\nu &= -e_\nu e_\mu & (\mu \neq \nu).
 \end{aligned}
 \tag{5.12}$$

É importante salientar que a álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell_{1,3}$ é isomorfa à álgebra das matrizes 2×2 com entradas quaterniônicas $Mat(2, \mathbb{H})$. Na representação $Mat(2, \mathbb{H})$ os vetores da base são definidos como

$$e_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.13)$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{j} \\ \mathbf{j} & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{k} \\ \mathbf{k} & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.14)$$

onde, $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$ e $\mathbf{ij} = \mathbf{k}$, $\mathbf{jk} = \mathbf{i}$, $\mathbf{ki} = \mathbf{j}$, ou seja, são quatérnions. Vale ressaltar que o espaço representado pelos quatérnions \mathbb{H}^2 é isomorfo ao minimal pela esquerda da forma $\mathcal{C}\ell_{1,3}(1/2)(1 + e_0)$ e este último é isomorfo à sub-álgebra par $\mathcal{C}\ell_{1,3}^+$. Para mostrar tais isomorfismos vamos considerar um multivetor arbitrário Γ de $\mathcal{C}\ell_{1,3}$ o qual é definido por

$$\Gamma = \alpha + \alpha^\mu e_\mu + \alpha^{\mu\nu} e_{\mu\nu} + \alpha^{\mu\nu\sigma} e_{\mu\nu\sigma} + \alpha^{0123} e_{0123}, \quad (5.15)$$

que na forma estendida é dado por

$$\begin{aligned} \Gamma &= \alpha + \alpha^0 e_0 + \alpha^1 e_1 + \alpha^2 e_2 + \alpha^3 e_3 + \alpha^{01} e_{01} + \alpha^{02} e_{02} + \alpha^{03} e_{03} + \alpha^{12} e_{12} + \alpha^{13} e_{13} \\ &+ \alpha^{23} e_{23} + \alpha^{012} e_{012} + \alpha^{013} e_{013} + \alpha^{023} e_{023} + \alpha^{123} e_{123} + \alpha^{0123} e_{0123}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

O passo seguinte será mostrar o isomorfismo $\mathcal{C}\ell_{1,3} \simeq Mat(2, \mathbb{H})$. Para tanto faremos uso dos elementos da base (5.14), assim é possível escrever Γ como uma matriz 2×2 . Após cálculos simples (mas tediosos) encontramos a forma matricial de Γ , a qual possui componentes quaterniônicas que chamaremos q_i para $i = 1, 2, 3, 4$ dada por

$$\Gamma = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ q_3 & q_4 \end{pmatrix}, \quad (5.17)$$

onde

$$q_1 = \alpha + \alpha^0 + (\alpha^{23} + \alpha^{023})\mathbf{i} - (\alpha^{13} + \alpha^{013})\mathbf{j} + (\alpha^{12} + \alpha^{012})\mathbf{k}, \quad (5.18)$$

$$q_2 = \alpha^{0123} - \alpha^{123} + (\alpha^1 + \alpha^{01})\mathbf{i} + (\alpha^2 + \alpha^{02})\mathbf{j} + (\alpha^3 + \alpha^{03})\mathbf{k}, \quad (5.19)$$

$$q_3 = -(\alpha^{123} - \alpha^{0123}) + (\alpha^1 - \alpha^{01})\mathbf{i} - (\alpha^{02} - \alpha^2)\mathbf{j} - (\alpha^{03} - \alpha^3)\mathbf{k}, \quad (5.20)$$

$$q_4 = \alpha - \alpha^0 + (\alpha^{23} - \alpha^{023})\mathbf{i} + (\alpha^{013} - \alpha^{13})\mathbf{j} + (\alpha^{12} - \alpha^{012})\mathbf{k}. \quad (5.21)$$

Como podemos ver a matriz (5.17) pertence a $Mat(2, \mathbb{H})$. Desta maneira temos estabelecido o isomorfismo $\mathcal{C}\ell_{1,3} \simeq Mat(2, \mathbb{H})$. Resta agora demonstrar o isomorfismo das álgebras anteriores com a sub-álgebra par de Clifford $\mathcal{C}\ell_{1,3}^+$. Para tal demonstração será necessário

lembrar que um elemento Ψ é chamado de espinor operatorial se ele pertence a $\mathcal{C}\ell_{1,3}^+$ e é dado por (2.40)

$$\Psi = \alpha + \alpha^{\mu\nu} e_{\mu\nu} + \alpha^{0123} e_{0123}. \quad (5.22)$$

Considerando os elementos da base (5.14) é fácil encontrar a forma matricial de Ψ desde que desconsideremos o produto ímpar dos vetores da base na equação (5.18), sendo assim, obtemos

$$\Psi = \begin{pmatrix} q_1 & -q_2 \\ q_2 & q_1 \end{pmatrix} \in Mat(2, \mathbb{H}). \quad (5.23)$$

A expressão anterior evidencia $\mathcal{C}\ell_{1,3}^+ \simeq Mat(2, \mathbb{H})$ e é claro que neste caso q_1 e q_2 são definidos como

$$q_1 = \alpha + \alpha^0 + \alpha^{23}\mathbf{i} - \alpha^{13}\mathbf{j} + \alpha^{12}\mathbf{k}, \quad (5.24)$$

$$q_2 = \alpha^{0123} + \alpha^{01}\mathbf{i} + \alpha^{02}\mathbf{j} + \alpha^{03}\mathbf{k}, \quad (5.25)$$

onde $\mathcal{C}\ell_{1,3}^{\frac{1}{2}}(1 + e_0) \simeq \mathcal{C}\ell_{1,3}^+ \simeq \mathbb{H}^2 \simeq \mathbb{C}^4$ [49], revelam uma correspondência entre espinores algébricos, operatoriais e clássicos definidos no espaço-tempo de Minkowski. De fato, um espinor no espaço \mathbb{H}^2 carrega a representação irredutível do grupo de Lorentz e é isomorfo a ambas definições dos espinores. O espinor definido como minimal ideal pela esquerda $\mathcal{C}\ell_{1,3}^{\frac{1}{2}}(1 + e_0)$ é equivalente ao espinor advindo da definição de espinores algébricos e também ao espinor pertencente à sub-álgebra par $\mathcal{C}\ell_{1,3}^+$ que corresponde à definição dos espinores operatoriais. Assim, o espinor de Dirac pode ser expresso de cada uma das formas já mencionadas, as quais como vimos são equivalentes

$$\begin{pmatrix} q_1 & -q_2 \\ q_2 & q_1 \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ q_2 & 0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \alpha^0 + \alpha^{23}\mathbf{i} - \alpha^{13}\mathbf{j} + \alpha^{12}\mathbf{k} \\ \alpha^{0123} + \alpha^{01}\mathbf{i} + \alpha^{02}\mathbf{j} + \alpha^{03}\mathbf{k} \end{pmatrix} \in \mathcal{C}\ell_{1,3} f \simeq \mathbb{H}^2.$$

Agora escreveremos os vetores 1 , \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} na representação usual

$$1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{i} \rightarrow \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix},$$

substituindo essas matrizes na equação (5.23) conseguimos expressar o espinor operatorial Ψ como uma matriz 4×4 , como segue

$$\Psi = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha^{01} \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha^{02} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& + \alpha^{03} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & & 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha^{12} \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} - \alpha^{13} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
& + \alpha^{23} \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} - \alpha^{0123} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.26}
\end{aligned}$$

Após manipulações simples a expressão anterior fica

$$\begin{pmatrix} \alpha + \alpha^{23}i & -\alpha^{13} + \alpha^{12}i & -\alpha^{0123} + \alpha^{01}i & \alpha^{02} + \alpha^{03}i \\ \alpha^{13} + \alpha^{12}i & c - \alpha^{23}i & -\alpha^{02} + \alpha^{03}i & -\alpha^{0123} - \alpha^{01}i \\ \alpha^{0123} - \alpha^{01}i & -\alpha^{02} - \alpha^{03}i & \alpha + \alpha^{23}i & -\alpha^{13} + \alpha^{12}i \\ \alpha^{02} - \alpha^{03}i & \alpha^{0123} + \alpha^{01}i & \alpha^{13} + \alpha^{12}i & \alpha - \alpha^{23}i \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \psi_1 & -\psi_2^* & -\psi_3 & \psi_4^* \\ \psi_2 & \psi_1^* & -\psi_4 & -\psi_3^* \\ \psi_3 & -\psi_4^* & \psi_1 & -\psi_2^* \\ \psi_4 & \psi_3^* & \psi_2 & \psi_1^* \end{pmatrix}.$$

Como havíamos visto no Capítulo 3, um espinor ψ pode ser definido como um minimal ideal pela esquerda $(\mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\ell_{1,3})f$ com f definido em (3.21) o qual é um idempotente igual a $\text{diag}(1, 0, 0, 0)$ na representação de Dirac, dado que $e_\mu \mapsto \gamma_\mu \in \text{Mat}(4, \mathbb{C})$. Então

$$\psi \simeq \begin{pmatrix} \psi_1 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_2 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_3 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in (\mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\ell_{1,3})f, \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4, \tag{5.27}$$

ilustrando a prescrição habitual entre ψ e os espinores clássicos de Dirac. Portanto, é possível definir um mapeamento entre os elementos de \mathbb{C}^4 e $\mathcal{C}\ell_{1,3}^+$ dado por

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 & -\psi_2^* & -\psi_3 & \psi_4^* \\ \psi_2 & \psi_1^* & -\psi_4 & -\psi_3^* \\ \psi_3 & -\psi_4^* & \psi_1 & -\psi_2^* \\ \psi_4 & \psi_3^* & \psi_2 & \psi_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5.28}$$

Nesse contexto aplicamos o teorema da inversão nos espinores operatoriais Ψ e devido ao mapeamento (5.28) encontramos também o espinor clássico ψ . O motivo de aplicarmos o teorema da inversão nos espinores operatoriais é devido ao fato de que manipular os elementos de $\mathcal{C}\ell_{1,3}^+$ é bem menos trabalhoso. Portanto, nosso trabalho agora será escrever Ψ em termos de seus covariantes bilineares fazendo uso do teorema da inversão dado em

(5.11). Vamos definir tais covariantes bilineares da seguinte maneira [44]

$$\begin{aligned}\sigma &= \langle \Psi \tilde{\Psi} \rangle_0, & \omega &= -\langle \Psi e_5 \tilde{\Psi} \rangle_0, & J &= \Psi e_0 \tilde{\Psi}, \\ S &= \Psi e_1 e_2 \tilde{\Psi}, & K &= \Psi e_3 \tilde{\Psi},\end{aligned}\tag{5.29}$$

onde $e_5 = e_0 e_1 e_2 e_3$ e $\langle \rangle_0$ são os operadores de projeção os quais foram dadas em (2.33).

Segundo o algoritmo de Takahashi, é possível expressar um espinor em termos de seus covariantes bilineares mais uma fase arbitrária. Definimos a seguinte relação

$$\alpha \exp(e_{12}\theta) \cong \frac{1}{4} \left(\Psi + e_0 \Psi e_0 + e_{21} \Psi e_{12} + e_{210} \Psi e_{012} \right),\tag{5.30}$$

para se reduzir os graus de liberdade do espinor Ψ , α é uma constante real e θ é uma fase arbitrária. Para calcular o valor de α devemos definir o complexo conjugado da expressão anterior, que é dado por

$$\alpha \exp(e_{21}\theta) \cong \frac{1}{4} \left(\tilde{\Psi} + e_0 \tilde{\Psi} e_0 + e_{12} \tilde{\Psi} e_{21} + e_{012} \tilde{\Psi} e_{210} \right).\tag{5.31}$$

O passo seguinte será multiplicar as equações (5.30) e (5.31), tendo como resultado

$$\begin{aligned}\alpha^2 &= \frac{1}{16} \left(\sigma + e_5 \omega + \mathbf{J}e_0 + \mathbf{S}e_{21} - e_{0123} \mathbf{K}e_{210} + \mathbf{J}e_0 + \sigma + e_5 \omega - e_0 e_{0123} \mathbf{K}e_{21} \right. \\ &\quad + e_0 \mathbf{S}e_{210} - e_{21} (\sigma + e_5 \omega) e_{21} + e_{21} \mathbf{S} - e_{21} e_{0123} \mathbf{K}e_0 - e_{21} \mathbf{J}e_{210} - e_{210} e_{0123} \mathbf{K} \\ &\quad \left. + e_{210} \mathbf{S}e_0 - e_{210} \mathbf{J}e_{21} - e_{210} (\sigma + e_5 \omega) e_{210} \right).\end{aligned}$$

Usando a relação da álgebra de Clifford e as relações dos vetores da base (3.16) e (5.12), encontramos o seguinte valor para α

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\sigma + e_5 \omega + \mathbf{J}e_0 - \mathbf{K}e_3 - \mathbf{S}e_{12} \right)^{1/2}.\tag{5.32}$$

Com o valor de α em mãos procederemos ao cálculo de Ψ . Usaremos a relação (5.31) e multiplicamos $\tilde{\Psi}$ pela esquerda, de tal forma que temos

$$\tilde{\Psi} \alpha \exp(e_{21}\theta) \cong \frac{1}{4} \left(\tilde{\Psi} \tilde{\Psi} + \tilde{\Psi} e_0 \tilde{\Psi} e_0 + \tilde{\Psi} e_{12} \tilde{\Psi} e_{21} + \tilde{\Psi} e_{012} \tilde{\Psi} e_{210} \right).\tag{5.33}$$

De (5.29), multiplicamos e_{0123} pela direita de $K = \Psi e_3 \tilde{\Psi}$ de modo que obtemos

$$K e_{0123} = \Psi e_3 e_{0123} \tilde{\Psi},\tag{5.34}$$

após usar as relações (5.12) é fácil mostrar que $K e_{0123} = \Psi e_{012} \tilde{\Psi}$. Substituindo essa

relação em (5.33) e usando a definição dos covariante bilineares (5.29) encontramos a expressão para Ψ :

$$\Psi = \frac{1}{4\alpha} \left(\sigma + e_5\omega + \mathbf{J}e_0 - \mathbf{K}e_3 - \mathbf{S}e_{12} \right) \exp(e_{12}\theta).$$

Uma vez obtido o espinor operatorial em termos de seus covariantes bilineares é possível também se escrever o espinor clássico usando o mapeamento (5.28). Assim o espinor ψ é dado por

$$\psi = \frac{1}{4\alpha} \left(\sigma + e_5\omega + \mathbf{J}e_0 - \mathbf{K}e_3 - \mathbf{S}e_{12} \right) \exp(e_{12}\theta) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.35)$$

A expressão anterior mostra que é possível recuperar o espinor algébrico em função de seus covariantes bilineares via o teorema da inversão. Tendo completado o programa acima mostrado para um caso geral, faremos uma aplicação deste para o caso de novos espinores de dimensão de massa 1. Tais espinores surgem da premissa que o covariante bilinear J_μ seja nulo. Como consequência desta asserção esses novos espinores não poderão ser classificados dentro da classificação de Lounesto, já que em tal classificação J_μ é não nulo para garantir que a estrutura multivetorial seja um boomerang, como tínhamos mencionado na primeira parte deste capítulo. Por outro lado, os novos espinores de dimensão de massa 1 que surgem desta consideração deverão ser classificados como espinores singulares de tal maneira a garantir que as identidades de FPK sejam satisfeitas. As considerações anteriores revelam três novas classes de espinores. Mostraremos a seguir esses novos espinores:

Caso 1: $\sigma = 0 = \omega$, $\mathbf{J} = 0$, $\mathbf{K} \neq 0$ e $\mathbf{S} \neq 0$. Podemos ver que as identidades (4.30) são satisfeitas. Além disso, o agregado Z é dado por

$$\mathbf{Z} = i(\mathbf{S} + \mathbf{K}e_{0123}). \quad (5.36)$$

Finalmente, para calcular o espinor operatorial associado a este caso devemos substituir os valores dos covariantes bilineares na equação (5.35), levando a

$$\Psi \cong \frac{1}{2\sqrt{-K_3 - S_{21}}} (-K e_3 - S e_{21}) \exp(e_{12}\theta),$$

para determinar o espinor clássico ψ devemos fazer uso do mapeamento (5.28):

$$\psi = \frac{1}{2\sqrt{-K_3 - S_{21}}}(-Ke_3 - Se_{21}) \exp(e_{12}\theta) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

O procedimento para encontrar os próximos espinores é análogo ao caso anterior.

Caso 2: $\sigma = 0 = \omega$, $\mathbf{J} = 0$, $\mathbf{K} = 0$ e $\mathbf{S} \neq 0$. Aqui, as identidades de FPK também são satisfeitas e o agregado é dado por

$$\mathbf{Z} = i\mathbf{S}. \quad (5.37)$$

Substituindo os valores dos bilineares desse caso na equação (5.35), encontramos o espinor operatorial

$$\Psi \cong \frac{1}{2\sqrt{-S_{21}}}(-Se_{21}) \exp(e_{12}\theta),$$

e o espinor clássico é dado por

$$\psi = \frac{1}{2\sqrt{-S_{21}}}(-Se_{21}) \exp(e_{12}\theta) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Caso 3: Finalmente para $\sigma = 0 = \omega$, $\mathbf{J} = 0$, $\mathbf{K} \neq 0$ e $\mathbf{S} = 0$, neste caso as identidades de FPK também são satisfeitas, e o espinor operatorial tem a seguinte forma:

$$\Psi \cong \frac{1}{2\sqrt{-K_3}}(-Ke_3) \exp(e_{12}\theta),$$

usando o mapeamento (5.28) encontramos o espinor clássico

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{-K_3}}(-Ke_3) \exp(e_{12}\theta) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esses casos exibem a possibilidade de três novas classes de espinores não catalogadas anteriormente, os quais apresentam dimensão de massa 1 no espaço-tempo de Minkowski, uma vez que esses espinores não poderão representar um estado quântico, mas servirão como coeficientes de expansão do campo quântico. Esses espinores surgem devido ao fato

de se considerar o covariante bilinear \mathbf{J} igual a zero. Desta maneira, tais espinores não possuem a dinâmica de Dirac, pois \mathbf{J} não representa a corrente conservada, e os novos espinores apenas satisfazem a equação de Klein-Gordon. Notemos que o fato anterior é uma consequência natural, pois dado um espinor nesse contexto ele representa uma seção do fibrado constituído pelo grupo de Lorentz $SL(2, \mathbb{C})$ e \mathbb{C}^4 . Desta maneira, esses espinores devem respeitar dinâmica relativista. Do ponto de vista matemático, o fato de \mathbf{J} ser nulo leva a condição de que o agregado de Fierz não seja um boomerang. Portanto, a classificação de tais espinores não possui um caráter geométrico, isto é essencial para reduzir o número de diferentes classes de espinores na classificação de Lounesto. Com a consideração que $\mathbf{J} = 0$ a própria classificação é reconstruída e novos espinores surgem.

Capítulo 6

Conclusões e Comentários

Na presente tese mostramos a importância dos covariantes bilineares, tanto na classificação de espinores quanto no teorema da inversão. Como vimos, os covariantes bilineares tem um papel preponderante na classificação de Lounesto, desde que eles satisfaçam as identidades de FPK. Cabe mencionar que dentro da classificação de Lounesto o covariante bilinear J_μ é não nulo e representa a corrente conservada para o caso específico dos espinores de Dirac associados ao elétron. Tal classificação possui um caráter geométrico devido ao fato que foi considerada uma nova estrutura chamada de multivetor. Esta nova estrutura deverá satisfazer a condição de ser um boomerang para garantir que os covariantes bilineares associados aos espinores singulares dentro da classificação de Lounesto satisfaçam as identidades de FPK.

Exploramos o fato que a estrutura multivetorial não seja um boomerang, quando consideramos que o bilinear J_μ seja nulo, mas mantemos a necessidade que as identidades de FPK sejam satisfeitas. Com isto em mãos e usando o teorema da inversão foi possível a construção de três novos espinores. Uma característica destes novos espinores é que não possuem a dinâmica de Dirac, já que na teoria de Dirac J_μ representa a corrente conservada, portanto, os novos espinores apenas deverão satisfazer a equação de Klein-Gordon. Outro aspecto importante a salientar sobre os novos espinores, é que devido ao fato do termo de massa (σ) ser nulo, leva-nos a concluir que tais espinores não são dotados de massa e auto-interação. É importante enfatizar que a construção dos novos espinores é eminentemente algébrica, por conseguinte as possíveis interpretações físicas ficam ainda em aberto.

Outro ponto importante que apresentamos é a construção das estruturas bilineares associadas ao espinor Elko. Vimos a necessidade de deformar os elementos primordiais da base da álgebra de Clifford real com a finalidade que as identidades de FPK sejam satisfeitas por tais estruturas. Com todas estas considerações conseguimos encontrar que apenas um subconjunto de bilineares são reais. Também foi possível mostrar que os novos elementos que completam a base da álgebra de Clifford dependem do operador encarregado de trocar a helicidade do espinor Elko. Estudamos também a covariância

tanto por transformações de Lorentz como por transformações pelos grupos $HOM(2)$ e $SIM(2)$ dentro da teoria da VSR.

Como podemos ver, as estruturas bilineares do espinor Elko são totalmente diferentes das já conhecidas na literatura, isto é devido a nova estrutura dual que apresenta. Por conseguinte, devemos enfatizar que o espinor Elko não pertence à classificação usual de Lounesto, embora tenha algumas características similares com o espinor de Majorana. Este é um ponto importante, já que anteriormente acreditava-se que o Elko poderia ser classificado como um espinor do tipo-5 dentro da classificação de Lounesto, mas isso implicava que o termo de massa (σ) à ele associado fosse nulo, o que apresenta uma forte contradição. Desta maneira, acreditamos na relevância de nosso trabalho uma vez que estabelece os critérios para uma futura classificação para espinores de dimensão de massa um que possuem estrutura dual idêntica a do Elko. Com isso em mente, esperamos fazer uma construção similar a classificação de Lounesto com a grande diferença que agora o objetivo seria classificar espinores com dimensão de massa um. Outro ponto fundamental para um próximo trabalho é construir o espinor Elko do ponto de vista algébrico, ou seja, definir o espinor algébrico dentro do grupo de simetria $HOM(2)$ e $SIM(2)$ na teoria da VSR. Sendo isto possível, implementaríamos o método da inversão para recuperar os espinores Elko em termos das estruturas bilineares associadas. Por último, pensamos em implementar um paralelo ao modelo sigma aplicado para espinores de Dirac no caso do espinor Elko de tal maneira que seja possível analisar a estrutura geométrica envolvida com o espaço de representação dos covariantes bilineares.

Referências Bibliográficas

- [1] W. Clifford, **Applications of Grassman's extensive algebra**, Am. Journal Math., v. 1, 1878.
- [2] E. Cartan, **The Theory of Spinors**, Dover Publications, Primeira Edição, Nova York, 1981.
- [3] P. A. M. Dirac, **The Quantum Theory of the Electron**, Proc. R. Soc. Lond. A, v. 117, p. 610, 1928.
- [4] R. Brauer and H. Weyl, **Spinors in n dimensions**, Am. Journal Math., v. 57, p. 425, 1935.
- [5] C. Chevalley, **The Algebraic Theory of Spinors**, Columbia University Press, Primeira Edição, Nova York, 1954.
- [6] M. Riesz, **Clifford Numbers and Spinors**, Lecture Notes No. 38, Institute for Fluid Mechanics and Applied Mathematics, University of Maryland, 1958.
- [7] W. Graf, **Differential forms as spinors**, Annales de l'Institut Henry Poincaré, v. 85, 1978.
- [8] D. Hestenes and G. Sobczyk, **Clifford Algebra to Geometrical Calculus**, Editorial D. Reidel, Primeira Edição, Dordrecht, 1984.
- [9] J. P. Crawford, **Bispinor geometry for even-dimensional space-time**, J. Math. Phys., v. 31, p. 1991, 1990.
- [10] J. P. Crawford, **Clifford algebra: Notes on the spinor metric and Lorentz, Poincaré, and conformal groups**, J. Math. Phys., v. 32, p. 576, 1991.
- [11] M. Fierz, **Zur Fermischen theorie des β -zerfalls**, Z. Phys., v. 104, p. 553, 1937.
- [12] W. Pauli, **Contributions mathématiques à la théorie des matrices de Dirac**, Ann. Inst. H. Poincaré, v. 6, p. 109, 1936.
- [13] V. B. Berestetskii, E. M. Lifshitz, L. P. Pitaevskii, **Relativistic Quantum Theory**, Editorial Addison-Wesley, Reading, 1971.

- [14] I. M. Benn and Tucker, **An Introduction to Spinors and Geometry with Applications in Physics**, Editorial Bristol, 1987.
- [15] A. Crumeyrolle, **Orthogonal and Symplectic Clifford Algebras, Spinor Structures**, Editorial Kluwer, Dordrecht, 1990.
- [16] P. Lounesto, **Clifford Algebras and Hestenes Spinors**, Foundations of Phys., v. 23, p. 9, 1993.
- [17] R. da Rocha, L. Fabbri, J. M. Hoff da Silva, R. T. Cavalcanti and J. A. Silva-Neto, **Flag-dipole spinor fields in ESK gravities**, J. Math. Phys., v. 54, p. 102505, 2013.
- [18] D. V. Ahluwalia-Khalilova e D. Grumiller, **Dark matter: A spin one half fermion field with mass dimension one?**, Phys. Rev. D, v. 72, p. 067701, 2005.
- [19] Andrew G. Cohen and Sheldon L. Glashow, **Very Special Relativity**, Phys. Rev. Lett., v. 97, p. 021601, 2006.
- [20] A. B. Gillard e B. M. S. Martin, **Quantum Fields, Dark Matter and non-standard Wigner classes**, Astrophysics and Particle Physics, v. 451, 2009.
- [21] C. G. Boehmer, **The Einstein-ELKO system-can Dark Matter Drive Inflation?**, Annalen Der Physik, v. 16, p. 325, 2007.
- [22] J. P. Crawford, **On the algebra of Dirac bispinor densities: Factorization and inversion theorems**, J. Math. Phys., v. 26, p. 1439, 1985.
- [23] Y. Takahashi, **Reconstruction of a spinor via Fierz identities**, Phys. Rev. D, v. 26, p. 2169, 1982.
- [24] J. Vaz Jr., **A Álgebra Geométrica do Espaço Euclideano e a Teoria de Pauli**, Rev. Brasileira de Ensino de Física, v. 19, p. 234, 1997.
- [25] J. Vaz e R. da Rocha, **Álgebras de Clifford & Espinores**, Editora Livraria da Física, Primeira edição, São Paulo, 2012.
- [26] R. A. Mosna e W. A. Rodrigues, Jr., **The bundles of algebraic and Dirac-Hestenes spinors fields**, J. Math. Phys., v. 45, p. 2945, 2004.
- [27] W. A. Rodrigues, Jr., **Algebraic and Dirac Hestenes Spinors and Spinors Fields**, J. Math. Phys., v. 45, p. 2908, 2004.
- [28] V. Figueiredo, E. Capela de Oliveira e W. A. Rodrigues, Jr., **Covariant, algebraic, and operator spinors**, Int. J. Theor. Phys., v. 29, p. 371, 1990.

- [29] D. V. Ahluwalia-Khalilova e D. Grumiller, **Spin-half fermions with mass dimension one: Theory, phenomenology, and dark matter**, *JACP*, v. 12, p. 0507, 2005.
- [30] S. P. Horvath, **On the Relativity of Elko dark matter**, *Dissertação de Mestrado*, University of Canterbury, New Zealand, 2011.
- [31] E. Majorana, **Theory of the symmetry of electrons and positrons**, *Nuovo Cim.*, v.14, p. 171, 1937.
- [32] L. D. Sperança, **An identification of the Dirac operator with the parity operator**, *Int. J. Mod. Phys. D*, v. 2, p. 1444003, 2014.
- [33] C. H. Coronado Villalobos and R. J. Bueno Rogerio, **The connection between Dirac dynamic and parity symmetry**, *EPL*, v. 116, p. 60007, 2017.
- [34] C. G. Böhrmer and L. Corpe, **Helicity-from Clifford to Graphene**, *J. of Phys. A*, v. 45, p. 205206, 2012.
- [35] D. V. Ahluwalia, M. B. Johnson and T. Goldman, **Majorana-Like Representation Spaces: Construction and Physical Intepretation**, *Mod. Phys. Lett. A*, v. 9, p. 439, 1994.
- [36] D. V. Ahluwalia, **On a local mass dimension one Fermi field of spin one-half and the theoretical crevice that allows it**, *hep-th/arXiv:1305.7509v2*, p. 1, 2013.
- [37] J. M. Hoff da Silva, C. H. Coronado Villalobos, R. J. Bueno Rogerio and E. Scatena, **On the bilinear covariants associated to mass dimension one spinors**, *Eur. Phys. J. C*, v. 76, p. 563, 2016.
- [38] D. V. Ahluwalia-Khalilova, Cheng-Yang Lee e D. Schritt, **Elko as self-interacting fermionic dark matter with axis of locality**, *Phys. Lett. B*, v. 687, p. 248, 2010.
- [39] R. J. Bueno Rogerio, **Dissertação de Mestrado: Campos Espinoriais Elko**, 2014.
- [40] S. Weinberg, **The Quantum Theory of Fields**, Editorial Cambridge University, New York, 1995.
- [41] J. D. Bjorken and S. Drell, **Relativistic Quantum Mechanics**, Editorial McGraw, New York, 1964.
- [42] A. Zee, **Quantum Field Theory in a Nutshell**, Princeton Univerty Press, Primeira Edição, New Jersey, 2003.

- [43] L. H. Ryder, **Quantum Field Theory**, Editorial Cambridge University Press, Segunda Edição, Cambridge, 1996.
- [44] P. Lounesto, **Clifford Algebras and Spinors**, Cambridge University Press, Segunda Edição, Cambridge, 2001.
- [45] C. G. Böhmer e L. Corpe, **Helicity from Clifford to graphene**, J. Phys. A: Math. Theor., v. 45, p. 205206, 2012.
- [46] D. V. Ahluwalia, **The theory of local mass dimension one fermions of spin one half**, hep-th/arXiv:1601.03188, v. 2, p. 1, 2016.
- [47] D.V. Ahluwalia, S.P. Horvath, **Very special relativity as relativity of dark matter: the Elko connection**, JHEP, v. 11, p. 78, 2010.
- [48] R. T. Cavalcanti, **Classification of Singular Spinor Field and Other Mass Dimension One Fermions**, Int. J. Mod. Phys. D, v. 23, p. 1444002, 2014.
- [49] C. H. Coronado Villalobos, J. M. Hoff da Silva and Roldão da Rocha, **Questing mass dimension 1 spinor fields**, Eur. Phys. J. C, v. 75, p. 266, 2015.
- [50] J. Vaz Jr, **Construction of monopoles and instantons by using spinors and the inversion theorem**, in **Clifford Algebras and Their Application in Mathematical Physics, Fundamental Theories of Physics**, Vol. 94, Editorial Kluwer Academic Publisher, Amsterdam, 1998.