



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Câmpus de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Polinômios que satisfazem uma relação de recorrência de três termos

Maria Cecília Fonçatti

Orientadora: Profa. Dra. Vanessa Avansini Botta Pirani

Presidente Prudente - SP
Fevereiro de 2017

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Polinômios que satisfazem uma relação de recorrência de três termos

Maria Cecília Fonçatti

Orientadora: Profa. Dra. Vanessa Avansini Botta Pirani

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente - SP

Fevereiro de 2017

Aos meus avós, Luzia e Osvaldo.

FICHA CATALOGRÁFICA

F738p Fonçatti, Maria Cecília.
Polinômios que satisfazem uma relação de recorrência de três termos /
Maria Cecília Fonçatti. - Presidente Prudente : [s.n], 2017
104 f.

Orientador: Vanessa Avansini Botta Pirani
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de
Ciências e Tecnologia
Inclui bibliografia

1. Relação de recorrência de três termos. 2. Polinômios. 3. Zeros de
polinômios. I. Botta Pirani, Vanessa Avansini. II. Universidade Estadual
Paulista. Faculdade de Ciências e Tecnologia. III. Título.

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Polinômios que satisfazem uma relação de recorrência de três termos

AUTORA: MARIA CECÍLIA FONÇATTI

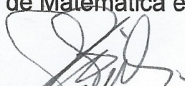
ORIENTADORA: VANESSA AVANSINI BOTTA PIRANI

Aprovada como parte das exigências para obtenção do Título de Mestra em MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, pela Comissão Examinadora:



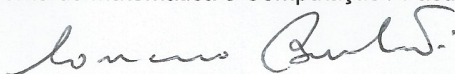
Profa. Dra. VANESSA AVANSINI BOTTA PIRANI

Departamento de Matemática e Computação / Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente



Prof. Dr. JOSE ROBERTO NOGUEIRA

Departamento de Matemática e Computação / Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente



Prof. Dr. LUCIANO BARBANTI

Departamento de Matemática / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Presidente Prudente, 09 de março de 2017

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter chegado até aqui.

Aos meus pais Osvaldo e Creusa por sempre respeitarem minhas escolhas profissionais.

À minha avó e madrinha Luzia por ter me incentivado a fazer uma pós-graduação.

Ao meu namorado Douglas, ao meu amigo Adriano e a todos que sempre me ajudaram e apoiaram durante os momentos difíceis com palavras de incentivo.

À minha orientadora Prof. Dra. Vanessa por tudo o que me ensinou e por todas as oportunidades que me proporcionou.

Aos professores da graduação e da pós-graduação por todos os ensinamentos.

Ao suporte financeiro oferecido pela CAPES.

*“A Matemática, quando a compreendemos
bem, possui não somente a verdade,
mas também a suprema beleza.”*
Bertrand Russel

Resumo

Neste trabalho estudamos as propriedades de algumas classes de polinômios que satisfazem uma relação de recorrência de três termos como, por exemplo, os ortogonais, que já foram muito bem explorados, e os para-ortogonais, cuja nomenclatura tem relação com as deficiências em suas propriedades de ortogonalidade.

Foram apresentados resultados sobre o comportamento dos zeros de tais de polinômios, além de alguns exemplos como aplicações.

Palavras-Chave: *Relação de recorrência de três termos, Polinômios ortogonais, Polinômios auto-inversíveis, Polinômios L-ortogonais, Polinômios para-ortogonais, Zeros de polinômios.*

Abstract

In this work we studied the properties of some classes of polynomials which satisfy a three term recurrence relation as, for example, the orthogonals, that has already been well explored, and the para-orthogonals, whose name is related to the deficiencies in their properties of orthogonality.

Results about the behavior of the zeros of these polynomials was shown, besides some examples as applications.

Keywords: *Three term recurrence relation, Orthogonal polynomials, Self-inversive polynomials, L-orthogonal polynomials, Para-orthogonal polynomials, Zeros of polynomials.*

Lista de Figuras

3.1	Polinômios de Jacobi de graus 1, 2 e 3 com $\alpha = 2$ e $\beta = 1$	34
3.2	Polinômios de Jacobi de grau 3 com $\alpha = 1, 1.5, 2$ e $\beta = 1$	34
3.3	Polinômios de Jacobi de grau 3 com $\alpha = 2$ e $\beta = 0, 0.5, 1$	35
3.4	Polinômios de Gegenbauer de graus 1, 2 e 3 com $\lambda = 1$	35
3.5	Polinômios de Gegenbauer de graus 1, 2 e 3 com $\lambda = 1.5$	36
3.6	Polinômios de Gegenbauer de grau 3 com $\lambda = 1, 1.5, 2$	36
3.7	Polinômios de Legendre de graus 1, 2 e 3.	37
3.8	Polinômios de Chebyshev de graus 1, 2 e 3.	38
3.9	Polinômios de Laguerre de graus 1, 2 e 3 com $\alpha = 0$	40
3.10	Polinômios de Laguerre de grau 3 com $\alpha = 0, 1, 2$	40
3.11	Polinômios de Hermite de graus 1, 2 e 3.	42
4.1	Localização dos zeros dos polinômios (a) $P(z) = 4z^5 + z^4 - 8.5z^3 - 14.5z^2 - 8z - 2$ e (b) $P^*(z) = -2z^5 - 8z^4 - 14.5z^3 - 8.5z^2 + z + 4$	50
7.1	Localização dos zeros dos polinômios (a) $Q_1(z) = z + 5$ e (b) $Q_2(z) = z^2 + 11z + 25$	95
7.2	Localização dos zeros dos polinômios (a) $Q_3(z) = z^3 + 15z^2 + 75z + 125$ e (b) $Q_4(z) = z^4 + 19z^3 + 139z^2 + 475z + 625$	95
7.3	Localização dos zeros dos polinômios (a) $Q_5(z) = z^5 + 23z^4 + 219z^3 + 1095z^2 + 2875z + 3125$ e (b) $Q_6(z) = z^6 + 27z^5 + 315z^4 + 2051z^3 + 7875z^2 + 16875z + 15625$	96
7.4	Localização dos zeros dos polinômios (a) $Q_1(z) = z + 2$ e (b) $Q_2(z) = z^2 - 6z + 4$	99
7.5	Localização dos zeros dos polinômios (a) $Q_3(z) = z^3 - 14z^2 - 28z + 8$ e (b) $Q_4(z) = z^4 - 22z^3 + 4z^2 - 88z + 16$	99

Sumário

Resumo	5
Abstract	7
Lista de Figuras	8
1 Introdução	13
2 Conceitos Preliminares	15
2.1 Integral de Riemann-Stieltjes	15
2.2 Polinômio recíproco	17
2.3 Sequências encadeadas positivas	17
2.4 Fração contínua	18
3 Polinômios Ortogonais	21
3.1 Polinômios ortogonais na reta real	21
3.1.1 Propriedades dos polinômios ortogonais	25
3.1.2 Polinômios ortogonais clássicos	31
3.2 Polinômios ortogonais no círculo unitário	41
4 Polinômios Auto-inversíveis	49
4.1 Resultados importantes	49
5 Polinômios L-ortogonais na reta real	55
5.1 Polinômios de Laurent ortogonais	55
5.2 Polinômios L-ortogonais	60
5.2.1 Polinômios associados aos L-ortogonais	61
5.2.2 Relação de recorrência de três termos	63
5.2.3 Zeros dos polinômios L-ortogonais na reta real	65
5.2.4 Exemplo de uma família de polinômios L-ortogonais	70
6 Polinômios para-ortogonais	73
6.1 Resultados importantes	73
6.2 Polinômios para-ortogonais reais	76
6.2.1 Relação de recorrência de três termos	78
6.2.2 Outras propriedades dos polinômios $R_n^{(1)}$ e $R_n^{(2)}$	78
6.3 Polinômios para-ortogonais complexos	79
6.3.1 Relação de recorrência de três termos	80
6.3.2 Zeros dos polinômios R_n	83
6.3.3 Polinômios associados aos polinômios R_n	87
6.3.4 Outras propriedades dos polinômios R_n	88

6.4	Exemplos de polinômios para-ortogonais	89
7	Propriedades de algumas classes de polinômios	91
7.1	Representação dos zeros de $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ como autovalores	91
7.2	Limitantes para os zeros de $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$	93
8	Considerações Finais	101
	Referências	103

Introdução

Em geral, o estudo de propriedades de polinômios algébricos, apesar de pertencer a uma subárea clássica da Análise, possui diversas aplicações em inúmeros campos da Matemática Aplicada como, por exemplo, no estudo de soluções numéricas de equações diferenciais ordinárias e no estudo de sistemas dinâmicos, entre outros. No caso específico dos polinômios ortogonais, uma aplicação importante está relacionada ao fato de seus zeros serem os nós das mais utilizadas fórmulas de quadratura, as de Gauss. No caso dos polinômios para-ortogonais, como seus zeros estão localizados no círculo unitário $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, temos como exemplo sua utilização na construção de fórmulas de quadratura em C .

É muito bem conhecido que os zeros dos polinômios ortogonais são reais, simples e pertencem ao intervalo de ortogonalidade. Aqui apresentamos também a propriedade que diz que uma sequência de polinômios ortogonais na reta real, denotada por $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$, satisfaz a uma relação de recorrência de três termos da forma

$$P_{n+1}(x) = (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})P_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x), \quad (1.1)$$

$n \geq 1$, com as condições iniciais $P_0(x) = 1$ e $P_1(x) = \gamma_1x - \beta_1$, onde $\beta_n, \gamma_n, \alpha_{n+1} \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$ e $x \in \mathbb{R}$. A partir de definições básicas, como a medida em relação à qual os polinômios são ortogonais, o intervalo de ortogonalidade e o produto interno utilizado, é possível obter uma sequência de polinômios ortogonais utilizando essa relação.

Porém, existem outras classes de polinômios que satisfazem uma relação de recorrência de três termos da forma

$$Q_{m+1}(z) = (z + \delta_{m+1})Q_m(z) - \epsilon_{m+1}zQ_{m-1}(z), \quad m = 1, 2, \dots, \quad (1.2)$$

com $Q_0 = 1$, $Q_1(z) = z + \delta_1$ e ϵ_m e δ_m constantes tal que $\epsilon_m \neq 0$, $m = 2, 3, \dots$ e $\delta_m \neq 0$, $m = 1, 2, \dots$, que difere de (1.1) apenas pela variável $z \in \mathbb{C}$ que multiplica $Q_{m-1}(z)$.

Como veremos nos capítulos seguintes, todos os polinômios apresentados podem ser dados por uma fórmula que envolve determinantes. A importância do estudo dessas relações de recorrência é que elas representam uma maneira muito mais simples de se obter os coeficientes de tais polinômios do que pelo cálculo de determinantes.

O interesse desse trabalho foi realizar uma detalhada pesquisa sobre as propriedades de classes de polinômios que satisfazem relações de recorrência tanto do tipo apresentada em (1.1) quanto do tipo (1.2). Tais classes foram caracterizadas e determinou-se o comportamento dos seus zeros.

O estudo de resultados preliminares se fez necessário para alcançar o objetivo apresentado. Tal assunto é abordado no Capítulo 2. Os Capítulos 3, 4, 5 e 6 apresentam os resultados sobre as classes de polinômios estudadas, que são os ortogonais, auto-inversíveis,

L-ortogonais na reta real e para-ortogonais, bem como exemplos de cada uma delas. No Capítulo 7, propriedades gerais sobre os polinômios que satisfazem a relação de recorrência do tipo (1.2) são apresentadas.

Para a elaboração das figuras apresentadas nos exemplos deste trabalho, foram utilizados os softwares *Mathematica* e *Matlab*.

Conceitos Preliminares

Este capítulo contém as definições e resultados preliminares que serão utilizados nos próximos capítulos. As referências utilizadas aqui foram [3], [15] e [21].

2.1 Integral de Riemann-Stieltjes

Na linguagem de teoria da medida, sendo ψ uma função real, não-decrescente e definida na reta real, ela induz uma medida no intervalo $[a, b]$ e assim é também chamada de medida ou medida positiva no intervalo $[a, b]$.

Definição 1 Um ponto $\xi \in [a, b]$ é chamado de ponto de aumento de ψ se $\psi(\xi + \epsilon) - \psi(\xi - \epsilon) > 0$, $\forall \epsilon > 0$. Em particular, o conjunto $\mathcal{G}(\psi)$ formado por todos os pontos de aumento de ψ é chamado de suporte de ψ .

Consideraremos que os pontos de aumento de ψ estão todos contidos no intervalo fechado $[a, b]$. Dessa forma, o menor intervalo fechado $[\tilde{a}, \tilde{b}]$ que contém o suporte é tal que $[\tilde{a}, \tilde{b}] \subseteq [a, b]$.

Definição 2 Dado o intervalo $[a, b]$, uma partição de $[a, b]$ é um conjunto de pontos $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ tal que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Dada uma função real f definida e limitada em $[a, b]$, sejam $M_j = \sup_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x)$ e $m_j = \inf_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x)$, $j = 1, 2, \dots, n$. A soma superior de Riemann-Stieltjes de f sob a

medida ψ e com relação à partição Δ é dada por $U(\Delta, f, \psi) = \sum_{j=1}^n (\psi(x_j) - \psi(x_{j-1}))M_j$, e

a soma inferior por $L(\Delta, f, \psi) = \sum_{j=1}^n (\psi(x_j) - \psi(x_{j-1}))m_j$.

Definição 3 Sejam f uma função real e limitada definida em $[a, b]$ e $D[a, b]$ o conjunto de todas as partições de $[a, b]$. Se

$$\sup_{\Delta \in D[a, b]} L(\Delta, f, \psi) = \inf_{\Delta \in D[a, b]} U(\Delta, f, \psi) = I$$

dizemos que f é integrável em relação à medida ψ no sentido Riemann-Stieltjes e o valor I da integral é denotado por

$$\int_a^b f(x) d\psi(x).$$

Dois casos particulares em que a integral de Riemann-Stieltjes existe são:

- A função f é contínua em $[a, b]$. Neste caso, se $f(x) \geq 0$ para $x \in \mathcal{G}(\psi)$, então $\int_a^b f(x)d\psi(x) \geq 0$. A integral $\int_a^b f(x)d\psi(x)$ é estritamente positiva se $f(x) > 0$ pelo menos em um ponto x no suporte $\mathcal{G}(\psi)$.
- A função f é monótona em $[a, b]$ e ψ é contínua e estritamente crescente em $[a, b]$.

Se $\psi(x) = x$ ou $\psi(x) = x+k$, para alguma constante k , a integral de Riemann-Stieltjes é idêntica à integral de Riemann:

$$\int_a^b f(x)d\psi(x) = \int_a^b f(x)dx.$$

Se ψ é contínua e derivável em (a, b) e $w(x) = \psi'(x)$, então, pelo Teorema do Valor Médio,

$$\psi(x_k) - \psi(x_{k-1}) = w(x_k^*)(x_k - x_{k-1}),$$

onde $x_k^* \in (x_{k-1}, x_k)$. A função w é chamada de função peso da integral e, pela definição da integral de Riemann, temos

$$\int_a^b f(x)d\psi(x) = \int_a^b f(x)w(x)dx.$$

Observe que, para intervalos infinitos, a definição da integral de Riemann-Stieltjes como, por exemplo,

$$\int_a^\infty f(x)d\psi(x),$$

depende da existência do limite

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)d\psi(b; x),$$

onde $\psi(b; x) = \psi(x)$ para $0 \leq x \leq b$ e $\psi(b; x) = \psi(b)$ para $x \geq b$.

Definição 4 *Os valores*

$$\mu_k = \int_a^b x^k d\psi(x), \quad (2.1)$$

para $k = 0, 1, 2, \dots$, são chamados momentos da medida ψ .

Quando o intervalo $[a, b]$ é limitado, os momentos definidos por (2.1) sempre existem.

Se os momentos μ_k existem para $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, então dizemos que ψ é uma medida forte em (a, b) .

Definição 5 *Dada uma sequência de números $\{\mu_n\}_{n=0}^\infty$ definimos o determinante de Hankel por*

$$H_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \dots & \mu_{2n} \end{vmatrix}, \quad (2.2)$$

com $n \geq 0$.

Para uma sequência de números reais $\{\mu_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, definimos os determinantes generalizados de Hankel por

$$H_n^{(m)} = \begin{vmatrix} \mu_m & \mu_{m+1} & \cdots & \mu_{m+n-1} \\ \mu_{m+1} & \mu_{m+2} & \cdots & \mu_{m+n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mu_{m+n-1} & \mu_{m+n} & \cdots & \mu_{m+2n-2} \end{vmatrix}, \quad (2.3)$$

com $m, n \in \mathbb{Z}$ e $n \geq 0$.

Note que $H_n = H_n^{(0)}$.

Tomando, por exemplo, a medida $d\psi(x) = (1-x^2)dx$ no intervalo $[-1, 1]$, obtemos de (2.1) $\mu_0 = \frac{4}{3}$ e, para $k \geq 1$, $\mu_k = \frac{2}{k+1}$, se k é par e $\mu_k = -\frac{2}{k+3}$, se k é ímpar. Considerando $n = 3$, temos o seguinte determinante de Hankel:

$$H_3 = \begin{vmatrix} 4/3 & -1/2 & 2/3 & -1/3 \\ -1/2 & 2/3 & -1/3 & 2/5 \\ 2/3 & -1/3 & 2/5 & -1/4 \\ -1/3 & 2/5 & -1/4 & 2/7 \end{vmatrix}.$$

2.2 Polinômio recíproco

Definição 6 Se P_n é um polinômio de grau no máximo n , então o seu polinômio recíproco é definido por

$$P_n^*(z) = z^n \overline{P_n\left(\frac{1}{z}\right)},$$

onde $z \in \mathbb{C}$.

Escrevendo P_n em termos de seus coeficientes, $P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_{n,k} z^k$, obtemos

$$\begin{aligned} P_n^*(z) &= z^n \overline{\sum_{k=0}^n a_{n,k} \left(\frac{1}{z^k}\right)} \\ &= z^n \sum_{k=0}^n \bar{a}_{n,k} \left(\frac{1}{z^k}\right) \\ &= z^n \overline{P_n\left(\frac{1}{z}\right)}, \end{aligned}$$

onde $\overline{P_n}$ denota o polinômio obtido conjugando-se apenas os coeficientes de P_n . Note que $(P_n^*)^* = P_n$.

Como exemplo, temos $P(z) = 2iz^5 + iz^4 + 3z^3 + (1+3i)z^2 + iz - 3$, que é um polinômio de grau 5 com coeficientes complexos, cujo recíproco é $P^*(z) = -2i - iz + 3z^2 + (1-3i)z^3 - iz^4 - 3z^5$.

2.3 Sequências encadeadas positivas

Definição 7 Uma sequência $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência encadeada positiva se existe uma sequência $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$, chamada de sequência de parâmetros, tal que $0 \leq g_0 < 1$, $0 < g_n < 1$, $n \geq 1$, e

$$a_n = (1 - g_{n-1})g_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

onde g_0 é o parâmetro inicial.

Como exemplo, temos a sequência constante $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{4}\right\}$, que é uma sequência encadeada com sequência de parâmetros $\{g_n\} = \left\{\frac{n}{2(n+1)}\right\}$.

Se uma sequência de parâmetros $\{m_k\}$ é tal que $m_0 = 0$, ela é chamada sequência minimal de parâmetros. Se tal sequência for única, dizemos que $\{a_n\}$ é unicamente determinada.

Se $\{M_k\}$ é uma sequência de parâmetros de $\{a_n\}$ tal que $M_k > g_k$, $k \geq 0$, para qualquer outra sequência de parâmetros $\{g_k\}$, dizemos que $\{M_k\}$ é a sequência maximal de parâmetros.

Teorema 1 *Seja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência encadeada positiva com sequência de parâmetros $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$. Então*

a) $\{a_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência encadeada com sequência de parâmetros $\{g_{n+1}\}_{n=0}^{\infty}$.

b) Se $\{\hat{m}_n\}_{n=0}^{\infty}$ denota a sequência minimal de parâmetros para $\{a_{n+1}\}$, então $\hat{m}_n < m_{n+1}$, para $n \geq 0$.

c) $\{M_{n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ é sequência maximal de parâmetros para $\{a_{n+1}\}$.

A demonstração desse resultado pode ser encontrada em [5].

Teorema 2 *Seja $\{a_2, a_3, a_4, \dots\}$ uma sequência encadeada positiva e não unicamente determinada cuja sequência maximal de parâmetros é $\{M_1, M_2, M_3, \dots\}$, ou seja, $M_1 \neq 0$. Então, tomando $a_1 = \lambda M_1$, com $0 < \lambda \leq 1$, a sequência $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ também é uma sequência encadeada.*

Demonstração. Da definição de sequência encadeada, temos

$$a_2 = (1 - M_1)M_2,$$

$$a_3 = (1 - M_2)M_3,$$

⋮

Sendo $M_0 = 1 - \lambda$ temos que $0 \leq M_0 < 1$ e assim podemos escrever também

$$a_1 = \lambda M_1 = (1 - M_0)M_1,$$

o que conclui a demonstração. ■

2.4 Fração contínua

Definição 8 *Uma fração contínua é uma expressão da forma*

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \ddots + \frac{a_n}{b_n + \ddots}}},$$

onde $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ são sequências arbitrárias de números complexos ou funções complexas. Uma fração contínua pode ser finita ou infinita.

Como exemplo de uma fração contínua finita temos

$$\frac{344}{77} = 4 + \frac{36}{77} = 4 + \frac{1}{\frac{36}{77}} = 4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{36}{5}}} = 4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{7 + \frac{1}{5}}}.$$

Polinômios Ortogonais

Neste capítulo será desenvolvida a teoria de polinômios ortogonais, tanto na reta real quanto no círculo unitário. As principais referências usadas nesse capítulo foram [3], [5],[6], [18], [19], [21] e [22].

3.1 Polinômios ortogonais na reta real

Nesta seção será definido o conceito de sequências de polinômios ortogonais na reta real. Algumas propriedades desses polinômios, como, por exemplo, a de que eles satisfazem uma relação de recorrência de três termos, e alguns polinômios ortogonais clássicos, como os de Jacobi, serão apresentados. Denotaremos aqui P_n , um polinômio de grau exatamente n , em termos de seus coeficientes, isto é,

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n a_{n,j}x^j,$$

onde $a_{n,n} \neq 0$ e $x \in \mathbb{R}$.

Definição 9 Dada uma medida positiva ϕ em um intervalo (a, b) definimos o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_\phi$ como

$$\langle f, g \rangle_\phi = \int_a^b f(x)g(x)d\phi(x),$$

onde f e g são funções contínuas no intervalo (a, b) .

Definição 10 Uma sequência de polinômios $\{P_n\}_{n=0}^\infty$, com P_n sendo de grau exatamente n , é chamada sequência de polinômios ortogonais com relação à medida ϕ no intervalo (a, b) se

$$\langle P_n, P_m \rangle_\phi = \int_a^b P_n(x)P_m(x)d\phi(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m, \\ \rho_n > 0, & \text{se } n = m. \end{cases}$$

Usando o delta de Kroenecker $\delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & \text{para } m = n \\ 0 & \text{para } m \neq n \end{cases}$, podemos escrever a definição anterior como

$$\langle P_n, P_m \rangle_\phi = \int_a^b P_n(x)P_m(x)d\phi(x) = \rho_n \delta_{m,n}.$$

Se $\rho_n = 1$, então a sequência é chamada de sequência de polinômios ortonormais.

Como $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ é uma sequência de polinômios e P_n é de grau exatamente n , então P_0, P_1, \dots, P_n formam uma base para o espaço dos polinômios de grau n , \mathbb{P}_n .

Teorema 3 As seguintes afirmações são equivalentes:

a) $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de polinômios ortogonais com relação à medida ϕ no intervalo (a, b) .

$$b) \langle P_n, \pi \rangle_{\phi} = \int_a^b P_n(x)\pi(x)d\phi(x) = \begin{cases} 0, & \text{para todo } \pi(x) \text{ de grau } \leq n-1, \\ \alpha_n \rho_n \neq 0, & \text{para todo } \pi(x) \text{ de grau } n. \end{cases}$$

$$c) \langle x^m, P_n \rangle_{\phi} = \int_a^b x^m P_n(x)d\phi(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq m \leq n-1, \\ \tilde{\rho}_n \neq 0, & \text{se } m = n. \end{cases}$$

Demonstração.

a) \Rightarrow b)

Como $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de polinômios ortogonais, temos que P_0, P_1, \dots, P_{n-1} formam uma base para \mathbb{P}_{n-1} . Então, se $\pi(x) \in \mathbb{P}_{n-1}$, podemos escrevê-lo como $\pi(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j P_j(x)$ e assim, pelo item a),

$$\langle P_n, \pi \rangle_{\phi} = \langle P_n, \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j P_j(x) \rangle_{\phi} = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \langle P_n, P_j \rangle_{\phi} = 0.$$

No caso em que $\pi(x)$ é um polinômio de grau exatamente n , podemos escrever $\pi(x) = \sum_{j=0}^n \alpha_j P_j(x)$, onde $\alpha_n \neq 0$. Pelo item a),

$$\langle P_n, \pi \rangle_{\phi} = \langle P_n, \sum_{j=0}^n \alpha_j P_j(x) \rangle_{\phi} = \sum_{j=0}^n \alpha_j \langle P_n, P_j \rangle_{\phi} = \alpha_n \langle P_n, P_n \rangle_{\phi} = \alpha_n \rho_n \neq 0.$$

b) \Rightarrow c)

Se $m < n$, tomando em b) $\pi(x) = x^m$ temos $\langle x^m, P_n \rangle_{\phi} = 0$. Considerando $m = n$, temos $\pi(x) = x^n \in \mathbb{P}_n$. Logo, $x^n = \sum_{j=0}^n \alpha_j P_j(x)$, com $\alpha_n \neq 0$ e assim

$$\langle P_n, x^n \rangle_{\phi} = \sum_{j=0}^n \alpha_j \langle P_n, P_j \rangle_{\phi} = \alpha_n \langle P_n, P_n \rangle_{\phi} \neq 0$$

c) \Rightarrow a)

Se $m < n$ (análogo para $m > n$) e, escrevendo P_m em termos de seus coeficientes, $P_m(x) = \sum_{j=0}^m a_{m,j} x^j$, $a_{m,m} \neq 0$, então

$$\langle P_m, P_n \rangle_{\phi} = \langle \sum_{j=0}^m a_{m,j} x^j, P_n \rangle_{\phi} = \sum_{j=0}^m a_{m,j} \langle x^j, P_n \rangle_{\phi} = 0.$$

Para o caso em que $m = n$, temos

$$\langle P_n, P_n \rangle_{\phi} = \sum_{j=0}^n a_{n,j} \langle x^j, P_n \rangle_{\phi} = a_{n,n} \langle x^n, P_n \rangle_{\phi} = a_{n,n} \tilde{\rho}_n \neq 0.$$

■

Corolário 1 Sejam $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ duas sequências de polinômios ortogonais no intervalo (a, b) com relação à medida ϕ . Então, $T_j(x) = c_j P_j(x)$, $j = 0, 1, \dots$, onde c_j é uma constante que depende apenas de j .

Demonstração. Seja $T_j \in \{T_n\}_{n=0}^\infty$. Como P_0, P_1, \dots, P_j formam uma base para \mathbb{P}_j , podemos escrever $T_j(x)$ da forma

$$T_j(x) = \sum_{i=0}^j c_i P_i(x), \quad c_j \neq 0.$$

Mas $\langle T_j, \pi \rangle_\phi = 0$ para todo $\pi(x) \in \mathbb{P}_{j-1}$. Logo,

$$\langle T_j, P_0 \rangle_\phi = \langle T_j, P_1 \rangle_\phi = \dots = \langle T_j, P_{j-1} \rangle_\phi = 0.$$

Portanto, para $k = 0, 1, \dots, j-1$,

$$0 = \langle T_j, P_k \rangle_\phi = \sum_{i=0}^j c_i \langle P_i, P_k \rangle_\phi = c_k \langle P_k, P_k \rangle_\phi,$$

pois $\langle P_i, P_k \rangle_\phi = 0$ para $i \neq k$.

Como $\langle P_k, P_k \rangle_\phi > 0$, então $c_k = 0$, para $k = 0, 1, \dots, j-1$. Portanto, $T_j(x) = c_j P_j(x)$. ■

Com esse resultado, podemos observar que a unicidade da sequência de polinômios ortogonais com relação a uma medida ϕ vale se for imposta alguma condição de normalização, por exemplo, que são polinômios mônicos, isto é, $a_{n,n} = 1$.

Teorema 4 *Se os momentos μ_k , $k = 0, 1, \dots$, são como em (2.1), então os determinantes de Hankel H_n , definidos por (2.2), são diferentes de zero.*

Demonstração. Tomemos o sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} \mu_0 a_{k,0} + \mu_1 a_{k,1} + \dots + \mu_k a_{k,k} = 0 \\ \mu_1 a_{k,0} + \mu_2 a_{k,1} + \dots + \mu_{k+1} a_{k,k} = 0 \\ \vdots \\ \mu_k a_{k,0} + \mu_{k+1} a_{k,1} + \dots + \mu_{2k} a_{k,k} = 0 \end{cases}.$$

Sendo

$$U_k = \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_k \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mu_k & \mu_{k+1} & \dots & \mu_{2k} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad a = \begin{pmatrix} a_{k,0} \\ a_{k,1} \\ \vdots \\ a_{k,k} \end{pmatrix},$$

temos o sistema na forma matricial

$$U_k \cdot a = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_k \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mu_k & \mu_{k+1} & \dots & \mu_{2k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k,0} \\ a_{k,1} \\ \vdots \\ a_{k,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que o determinante da matriz dos coeficientes U_k é H_k . Mostremos que a única solução do sistema anterior é $a_{k,0} = a_{k,1} = \dots = a_{k,k} = 0$, e dessa forma, $H_n \neq 0$. Substituindo os momentos no sistema pela sua definição, obtemos

$$\begin{cases} a_{k,0} \int_a^b x^0 d\phi(x) + a_{k,1} \int_a^b x d\phi(x) + \dots + a_{k,k} \int_a^b x^k d\phi(x) = 0 \\ a_{k,0} \int_a^b x d\phi(x) + a_{k,1} \int_a^b x^2 d\phi(x) + \dots + a_{k,k} \int_a^b x^{k+1} d\phi(x) = 0 \\ \vdots \\ a_{k,0} \int_a^b x^k d\phi(x) + a_{k,1} \int_a^b x^{k+1} d\phi(x) + \dots + a_{k,k} \int_a^b x^{2k} d\phi(x) = 0 \end{cases}.$$

Multiplicando, respectivamente por $a_{k,0}, a_{k,1}, \dots, a_{k,k}$ as equações do sistema e somando-as, temos

$$\begin{aligned} & a_{k,0}^2 \int_a^b d\phi(x) + a_{k,1}^2 \int_a^b x^2 d\phi(x) + \dots + a_{k,k}^2 \int_a^b x^{2k} d\phi(x) + 2a_{k,0}a_{k,1} \int_a^b x d\phi(x) \\ & + \dots + 2a_{k,0}a_{k,k} \int_a^b x^k d\phi(x) + 2a_{k,1}a_{k,k} \int_a^b x^{k+1} d\phi(x) + \dots = 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_a^b (a_{k,0} + a_{k,1}x + \dots + a_{k,k}x^k)^2 d\phi(x) = 0.$$

Se $P(x) = \sum_{i=0}^k a_{k,i}x^i$, então

$$\int_a^b P^2(x) d\phi(x) = \langle P(x), P(x) \rangle_\phi = 0 \Leftrightarrow P(x) = 0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Logo, $a_{k,0} = a_{k,1} = \dots = a_{k,k} = 0$.

■

Dada uma medida positiva ϕ , o Teorema 4 garante a existência da sequência de polinômios ortogonais, pois, como os determinantes de Hankel são não nulos e $a_{n,n} \neq 0$, utilizando o item (c) do Teorema 3 para $m = 0, 1, \dots, n-1, n$ e escrevendo P_n em termos de seus coeficientes, obtemos o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} \mu_0 a_{n,0} + \mu_1 a_{n,1} + \dots + \mu_n a_{n,n} = 0 \\ \mu_1 a_{n,0} + \mu_2 a_{n,1} + \dots + \mu_{n+1} a_{n,n} = 0 \\ \vdots \\ \mu_n a_{n,0} + \mu_{n+1} a_{n,1} + \dots + \mu_{2n} a_{n,n} = \tilde{\rho}_n \neq 0 \end{cases}.$$

Substituindo a última equação desse sistema por $a_{n,0} + a_{n,1}x + \dots + a_{n,n}x^n = P_n(x)$ e resolvendo o sistema resultante pela Regra de Cramer, segue que

$$P_n(x) = \frac{a_{n,n}}{H_{n-1}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \dots & \mu_{2n-1} \\ 1 & x & \dots & x^n \end{vmatrix}.$$

3.1.1 Propriedades dos polinômios ortogonais

O resultado a seguir é muito bem conhecido, pois traz algumas propriedades dos zeros dos polinômios ortogonais, isto é, que são reais, distintos e pertencem ao intervalo de ortogonalidade.

Teorema 5 *Seja $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios ortogonais no intervalo (a, b) com relação à medida ϕ . Então, os zeros de $P_n(x)$ são reais, distintos e pertencem ao intervalo (a, b) .*

Demonstração. Suponha que $P_n(x)$ não muda de sinal em (a, b) . Temos então dois casos:

- $P_n(x) \geq 0$ (mas não identicamente nulo) em (a, b) , o que implica em

$$\int_a^b P_n(x) d\phi(x) > 0,$$

- $P_n(x) \leq 0$ (mas não identicamente nulo) em (a, b) , de onde segue que

$$\int_a^b P_n(x) d\phi(x) < 0.$$

Mas, da relação de ortogonalidade, temos que

$$\int_a^b P_n(x) d\phi(x) = \int_a^b 1 \cdot P_n(x) d\phi(x) = 0.$$

Logo, temos um absurdo. Portanto, $P_n(x)$ deve mudar de sinal em (a, b) pelo menos uma vez, e assim temos que existe pelo menos um zero real de $P_n(x)$ de multiplicidade ímpar em (a, b) .

Suponha agora que $x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,r}$ ($r < n$) são os zeros distintos de multiplicidade ímpar de $P_n(x)$ em (a, b) . Então,

$$P_n(x) = (x - x_{n,1})(x - x_{n,2}) \dots (x - x_{n,r}) Q(x) = R(x) Q(x),$$

onde $R(x)$ é um polinômio de grau $r < n$ com zeros $x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,r}$ e $Q(x)$ é um polinômio de grau $n - r$ que tem somente zeros complexos ou de multiplicidade par em (a, b) ou fora de (a, b) . Logo, $Q(x)$ não muda de sinal em (a, b) . Porém, como $r < n$, pela relação de ortogonalidade,

$$\int_a^b R_n(x) P_n(x) d\phi(x) = 0. \quad (3.1)$$

Mas,

$$\int_a^b R_n(x) P_n(x) d\phi(x) = \int_a^b R_n^2(x) Q_n(x) d\phi(x) \neq 0. \quad (3.2)$$

Por (3.1) e (3.2), temos um absurdo. Assim, $P_n(x)$ tem $r \geq n$ zeros de multiplicidade ímpar em (a, b) . Mas, como $P_n(x)$ é um polinômio de grau n , então $r = n$. Deste modo, $P_n(x)$ tem n zeros de multiplicidade ímpar em (a, b) da seguinte forma

$$P_n(x) = (x - x_{n,1})^{i_1}(x - x_{n,2})^{i_2} \dots (x - x_{n,n})^{i_n}.$$

Como i_1, i_2, \dots, i_n são índices positivos e ímpares e $i_1 + i_2 + \dots + i_n = n$, temos que $i_1 = i_2 = \dots = i_n = 1$.

■

O teorema a seguir apresenta uma das propriedades mais importantes, que diz que os polinômios ortogonais satisfazem uma relação de recorrência de três termos:

Teorema 6 *Sendo $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma seqüência de polinômios ortogonais no intervalo (a, b) com relação à medida ϕ , temos que*

$$P_{n+1}(x) = (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})P_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x), \quad (3.3)$$

$n \geq 1$, com as condições iniciais $P_0(x) = 1$ e $P_1(x) = \gamma_1x - \beta_1$, onde $\beta_n, \gamma_n, \alpha_{n+1} \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$, e

$$\gamma_{n+1} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}}, \quad \beta_{n+1} = \gamma_{n+1} \frac{\langle xP_n, P_n \rangle_{\phi}}{\langle P_n, P_n \rangle_{\phi}}, \quad n \geq 0,$$

e

$$\alpha_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \frac{\langle P_n, P_n \rangle_{\phi}}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle_{\phi}}, \quad n \geq 1.$$

Observe que $\gamma_n \neq 0$, $n \geq 1$ e $\alpha_n \neq 0$, $n \geq 2$.

Demonstração. Temos que $P_n(x) = \sum_{j=0}^n a_{n,j}x^j$. Como $xP_n(x)$ é um polinômio de grau $n+1$, podemos escrever

$$xP_n(x) = \sum_{i=0}^{n+1} b_i P_i(x).$$

Comparando os coeficientes dos termos de maior grau em ambos os membros da igualdade acima, obtemos

$$a_{n,n} = b_{n+1}a_{n+1,n+1} \Rightarrow b_{n+1} = \frac{a_{n,n}}{a_{n+1,n+1}}.$$

Mas, das relações de ortogonalidade, temos que

$$\langle xP_n, P_k \rangle = \int_a^b P_n(x)xP_k(x)d\phi(x) = 0,$$

para $k \leq n-2$. Assim,

$$0 = \langle xP_n, P_k \rangle_{\phi} = \left\langle \sum_{i=0}^{n+1} b_i P_i, P_k \right\rangle_{\phi} = \sum_{i=0}^{n+1} b_i \langle P_i, P_k \rangle_{\phi} = b_k \langle P_k, P_k \rangle_{\phi},$$

para $k \leq n-2$.

Logo, $b_k = 0$ se $k \leq n-2$. Portanto,

$$xP_n(x) = b_{n+1}P_{n+1}(x) + b_nP_n(x) + b_{n-1}P_{n-1}(x)$$

e, dividindo ambos os lados por b_{n+1} e isolando $P_{n+1}(x)$, temos

$$P_{n+1}(x) = \frac{1}{b_{n+1}}xP_n(x) - \frac{b_{n-1}}{b_{n+1}}P_{n-1}(x) - \frac{b_n}{b_{n+1}}P_n(x).$$

Fazendo

$$\gamma_{n+1} = \frac{1}{b_{n+1}}, \beta_{n+1} = \frac{b_n}{b_{n+1}} \text{ e } \alpha_{n+1} = \frac{b_{n-1}}{b_{n+1}},$$

obtemos

$$P_{n+1}(x) = (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})P_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x).$$

Vamos agora calcular os valores de γ_{n+1} , β_{n+1} e α_{n+1} .

Como $b_{n+1} = \frac{a_{n,n}}{a_{n+1,n+1}}$, temos que $\gamma_{n+1} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}}$. De

$$P_{n+1}(x) = (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})P_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x),$$

obtemos

$$0 = \langle P_{n+1}, P_n \rangle_\phi = \gamma_{n+1} \langle xP_n, P_n \rangle_\phi - \beta_{n+1} \langle P_n, P_n \rangle_\phi - \alpha_{n+1} \langle P_{n-1}, P_n \rangle_\phi$$

e assim

$$\beta_{n+1} = \gamma_{n+1} \frac{\langle xP_n, P_n \rangle_\phi}{\langle P_n, P_n \rangle_\phi}.$$

Analogamente,

$$0 = \langle P_{n+1}, P_{n-1} \rangle_\phi = \gamma_{n+1} \langle xP_n, P_{n-1} \rangle_\phi - \beta_{n+1} \langle P_n, P_{n-1} \rangle_\phi - \alpha_{n+1} \langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle_\phi.$$

Logo,

$$\alpha_{n+1} = \gamma_{n+1} \frac{\langle xP_n, P_{n-1} \rangle_\phi}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle_\phi}.$$

Mas como

$$P_n(x) = (\gamma_n x - \beta_n)P_{n-1}(x) - \alpha_n P_{n-2}(x),$$

obtemos

$$xP_{n-1}(x) = \frac{1}{\gamma_n}P_n(x) + \frac{\beta_n}{\gamma_n}P_{n-1}(x) + \frac{\alpha_n}{\gamma_n}P_{n-2}(x).$$

Porém,

$$\langle xP_n, P_{n-1} \rangle_\phi = \int_a^b P_n(x)xP_{n-1}(x)d\phi(x) = \langle P_n, xP_{n-1} \rangle_\phi,$$

e então,

$$\langle P_n, xP_{n-1} \rangle_\phi = \frac{1}{\gamma_n} \langle P_n, P_n \rangle_\phi + \frac{\beta_n}{\gamma_n} \langle P_n, P_{n-1} \rangle_\phi + \frac{\alpha_n}{\gamma_n} \langle P_n, P_{n-2} \rangle_\phi = \frac{1}{\gamma_n} \langle P_n, P_n \rangle_\phi.$$

Portanto,

$$\alpha_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \frac{\langle P_n, P_n \rangle_\phi}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle_\phi}.$$

■

O resultado a seguir é uma importante consequência do teorema anterior. Maiores detalhes em [2].

Teorema 7 (*Identidade de Christoffel - Darboux*) Seja $\{\hat{P}_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios ortonormais. Então, eles satisfazem a seguinte identidade:

$$\sum_{k=0}^n \hat{P}_k(x)\hat{P}_k(y) = \frac{1}{\gamma_{n+1}} \frac{\hat{P}_{n+1}(x)\hat{P}_n(y) - \hat{P}_n(x)\hat{P}_{n+1}(y)}{x-y}. \quad (3.4)$$

Se somarmos e subtraírmos $\hat{P}_{n+1}(x)\hat{P}_n(x)$ ao numerador do segundo membro da Identidade de Christoffel - Darboux (3.4), obtemos

$$\sum_{k=0}^n \hat{P}_k(x)\hat{P}_k(y) = \frac{1}{\gamma_{n+1}} \frac{\hat{P}_n(x)(\hat{P}_{n+1}(x) - \hat{P}_{n+1}(y)) - \hat{P}_{n+1}(x)(\hat{P}_n(x) - \hat{P}_n(y))}{x-y},$$

e, fazendo $y \rightarrow x$ em ambos os membros da igualdade anterior, concluímos que

$$\sum_{k=0}^n \hat{P}_k^2(x) = \frac{1}{\gamma_{n+1}} [\hat{P}_n(x)(\hat{P}'_{n+1}(x)) - \hat{P}_{n+1}(x)(\hat{P}'_n(x))] > 0, \quad (3.5)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Com (3.5) é possível mostrar a propriedade de entrelaçamento dos zeros dos polinômios ortogonais, enunciada a seguir.

Teorema 8 Se $x_{n,1} < x_{n,2} < \dots < x_{n,n}$ são os zeros do polinômio ortogonal P_n em ordem crescente e $x_{n-1,1} < x_{n-1,2} < \dots < x_{n-1,n-1}$ são os zeros de P_{n-1} , também em ordem crescente, então $x_{n-1,k} < x_{n,k} < x_{n-1,k+1}$, para $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Demonstração. Suponha, sem perda de generalidade, que os polinômios $P_j(x)$ sejam ortonormais, com $a_{j,j} > 0$, $j = 0, 1, \dots$. Tomando dois zeros consecutivos de $P_{n-1}(x)$, $x_{n-1,k}$ e $x_{n-1,k+1}$, $k = 1, 2, \dots, n-2$, e substituindo-os em (3.5), com n substituído por $n-1$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma_n} [P_{n-1}(x_{n-1,k})P'_n(x_{n-1,k}) - P_n(x_{n-1,k})P'_{n-1}(x_{n-1,k})] &> 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow P_n(x_{n-1,k})P'_{n-1}(x_{n-1,k}) &< 0, \end{aligned} \quad (3.6)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma_n} [P_{n-1}(x_{n-1,k+1})P'_n(x_{n-1,k+1}) - P_n(x_{n-1,k+1})P'_{n-1}(x_{n-1,k+1})] &> 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow P_n(x_{n-1,k+1})P'_{n-1}(x_{n-1,k+1}) &< 0. \end{aligned}$$

Como $P'_{n-1}(x_{n-1,k})$ e $P'_{n-1}(x_{n-1,k+1})$ possuem sinais opostos, então $P_n(x_{n-1,k})$ e $P_n(x_{n-1,k+1})$ também possuem. Logo, existe pelo menos um ponto em $(x_{n-1,k}, x_{n-1,k+1})$ onde $P_n(x)$ muda de sinal. Portanto, existe pelo menos um zero de $P_n(x)$ entre $x_{n-1,k}$ e $x_{n-1,k+1}$.

Dois zeros de $P_n(x)$ estão em $(a, x_{n-1,1})$ e $(x_{n-1,n-1}, b)$ respectivamente. Como $a_{j,j} > 0$, $j = 0, 1, \dots$, temos que $P_j(b) > 0$. Logo, $P'_{n-1}(x_{n-1,n-1}) > 0$. De (3.6), $P_n(x_{n-1,n-1}) < 0$. Portanto, $P_n(x)$ muda de sinal entre $x_{n-1,n-1}$ e b .

Analogamente mostra-se que existe um zero de $P_n(x)$ entre a e $x_{n-1,1}$.

Como $P_n(x)$ tem n zeros, está demonstrado. ■

Definição 11 Dada uma sequência de polinômios ortogonais $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$, definimos o polinômio associado a P_n por

$$Q_n(x) = \int_a^b \frac{P_n(t) - P_n(x)}{t - x} d\phi(t), \quad n \geq 0. \quad (3.7)$$

Tais polinômios Q_n são de grau exatamente $n - 1$ para $n \geq 1$ e satisfazem à mesma relação de recorrência dos polinômios ortogonais P_n , mas com as condições iniciais $Q_0(x) = 0$ e $Q_1(x) = \gamma_1 \mu_0$.

De fato, substituindo a relação de recorrência (3.3) em (3.7), obtemos

$$\begin{aligned} Q_{n+1}(x) &= \int_a^b \frac{P_{n+1}(t) - P_{n+1}(x)}{t - x} d\phi(t) \\ &= \gamma_{n+1} \int_a^b \frac{tP_n(t) - xP_n(x)}{t - x} d\phi(t) - \beta_{n+1}Q_n(x) - \alpha_{n+1}Q_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Somando-se e subtraindo-se $xP_n(t)$ na integral acima, temos

$$\begin{aligned} Q_{n+1}(x) &= \gamma_{n+1} \int_a^b \frac{(t - x)P_n(t) + x(P_n(t) - P_n(x))}{t - x} d\phi(t) - \beta_{n+1}Q_n(x) - \alpha_{n+1}Q_{n-1}(x) \\ &= \gamma_{n+1}xQ_n(x) - \beta_{n+1}Q_n(x) - \alpha_{n+1}Q_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Logo,

$$Q_{n+1}(x) = (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})Q_n(x) - \alpha_{n+1}Q_{n-1}(x),$$

para $n \geq 1$.

Sem perda de generalidade, consideraremos a partir de agora os polinômios ortogonais P_n na forma mônica, isto é, o coeficiente do termo de maior grau igual a 1. Nesse caso, os polinômios P_n e Q_n satisfazem, respectivamente, às seguintes relações de recorrência:

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= (x - \beta_{n+1})P_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \\ Q_{n+1}(x) &= (x - \beta_{n+1})Q_n(x) - \alpha_{n+1}Q_{n-1}(x), \end{aligned} \quad (3.8)$$

com $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x - \beta_1$, $Q_0(x) = 0$ e $Q_1(x) = \mu_0$, onde

$$\beta_{n+1} = \frac{\langle xP_n, P_n \rangle_{\phi}}{\langle P_n, P_n \rangle_{\phi}}, \quad n \geq 0 \quad \text{e} \quad \alpha_{n+1} = \frac{\langle P_n, P_n \rangle_{\phi}}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle_{\phi}}, \quad n \geq 1.$$

Observe que $\alpha_n > 0$ para $n \geq 2$.

Como $\alpha_{n+1} = \frac{\rho_n}{\rho_{n-1}}$, podemos escrever

$$\rho_n = \langle P_n, P_n \rangle_{\phi} = \alpha_{n+1}\rho_{n-1} = \alpha_{n+1}\alpha_n \dots \alpha_2\mu_0,$$

para $n \geq 1$, com $\rho_0 = \mu_0$.

Utilizando as fórmulas (3.8), podemos mostrar que

$$P_{n+1}(x)Q_n(x) - P_n(x)Q_{n+1}(x) = -\alpha_{n+1} \dots \alpha_3\alpha_2\mu_0 \neq 0$$

e com esse resultado mostra-se que entre dois zeros consecutivos do polinômio P_n existe um único zero do polinômio Q_n .

Se considerarmos a sequência de polinômios ortonormais $\{\hat{P}_n\}_{n=0}^{\infty}$, com $\hat{P}_n(x) = \sum_{j=0}^n \hat{a}_{n,j}x^j$, como $\langle \hat{P}_n, \hat{P}_n \rangle_{\phi} = 1$, a relação de recorrência (3.3) para os polinômios ortonormais torna-se

$$\hat{P}_{n+1}(x) = (\hat{\gamma}_{n+1}x - \hat{\beta}_{n+1})\hat{P}_n(x) - \hat{\alpha}_{n+1}\hat{P}_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \quad (3.9)$$

onde $\hat{P}_0(x) = 1$, $\hat{P}_{-1}(x) = 0$, $\hat{\alpha}_{n+1}$, $\hat{\beta}_n$, $\hat{\gamma}_n \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$, com

$$\hat{\gamma}_{n+1} = \frac{\hat{\alpha}_{n+1,n+1}}{\hat{\alpha}_{n,n}}, \hat{\beta}_{n+1} = \hat{\gamma}_{n+1} \langle x\hat{P}_n, \hat{P}_n \rangle_\phi \text{ e } \hat{\alpha}_{n+1} = \frac{\hat{\gamma}_{n+1}}{\hat{\gamma}_n}.$$

Usando o fato de que os polinômios ortonormais \hat{P}_n podem ser obtidos dos polinômios mônicos P_n fazendo-se $\hat{P}(x) = \hat{\alpha}_{n,n}P_n(x)$, sua relação de recorrência pode ser escrita como

$$x\hat{P}(x) = \sqrt{\alpha_{n+1}}\hat{P}_{n-1}(x) + \beta_{n+1}\hat{P}_n(x) + \sqrt{\alpha_{n+2}}\hat{P}_{n+1}(x), \quad n \geq 0.$$

Fazendo $n = 0, 1, 2, \dots, m-1$, obtemos

$$x \begin{pmatrix} \hat{P}_0(x) \\ \hat{P}_1(x) \\ \hat{P}_2(x) \\ \vdots \\ \hat{P}_{m-2}(x) \\ \hat{P}_{m-1}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \sqrt{\alpha_2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \sqrt{\alpha_2} & \beta_2 & \sqrt{\alpha_3} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\alpha_3} & \beta_3 & \sqrt{\alpha_4} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \beta_{m-1} & \sqrt{\alpha_m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{\alpha_m} & \beta_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{P}_0(x) \\ \hat{P}_1(x) \\ \hat{P}_2(x) \\ \vdots \\ \hat{P}_{m-2}(x) \\ \hat{P}_{m-1}(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{\hat{\alpha}_{m+1}}\hat{P}_m(x) \end{pmatrix}.$$

Substituindo x por $x_{m,k}$, zero do polinômio \hat{P}_m , o sistema de equações lineares torna-se

$$x_{m,k}u_{m,k} = J_m u_{m,k}, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

onde

$$J_m = \begin{pmatrix} \beta_1 & \sqrt{\alpha_2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \sqrt{\alpha_2} & \beta_2 & \sqrt{\alpha_3} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\alpha_3} & \beta_3 & \sqrt{\alpha_4} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \beta_{m-1} & \sqrt{\alpha_m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{\alpha_m} & \beta_m \end{pmatrix},$$

que é conhecida por matriz de Jacobi.

Portanto, os zeros $x_{m,k}$ dos polinômios ortogonais são os autovalores da matriz J_m .

O teorema a seguir nos garante que, dados polinômios definidos por uma relação de recorrência de três termos do tipo (3.8), é possível encontrar uma medida positiva ϕ com relação à qual esses polinômios são ortogonais, ou seja, garante que somos capazes de fazer o inverso do que fizemos até agora.

Teorema 9 (Teorema de Favard) *Sejam $\{\beta_n\}_{n=1}^\infty$ e $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ sequências de números reais arbitrários, com $\alpha_n > 0$ para $n \geq 0$ e seja $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$ uma sequência de polinômios definida pela fórmula de recorrência*

$$Q_n(x) = (x - \beta_n)Q_{n-1}(x) - \alpha_n Q_{n-2}(x), \quad n \geq 1,$$

com $Q_{-1}(x) = 0$ e $Q_0(x) = 1$. Então, existe uma medida positiva ϕ tal que

$$\int_a^b d\phi(x) = \alpha_1 \text{ e } \int_a^b Q_m(x)Q_n(x)d\phi(x) = 0, \text{ para } m \neq n.$$

ϕ é quase-definida e $\{Q_n\}$ é a correspondente sequência de polinômios ortogonais mônicos se, e somente se, $\alpha_n \neq 0$, enquanto que ϕ é definida positiva se, e somente se, os coeficientes β_n são reais e $\alpha_n > 0$ para $n \geq 1$.

3.1.2 Polinômios ortogonais clássicos

Segundo Chihara (ver [5]), os polinômios ortogonais de Hermite, Laguerre e Jacobi (incluindo Gegenbauer, Legendre e Chebyshev) são os mais estudados e aplicados, por isso são chamados de clássicos. Nesta seção serão apresentadas as relações de ortogonalidade, as fórmulas de recorrência e exemplos gráficos de cada um deles.

- Polinômios de Jacobi¹ ($P_n^{(\alpha,\beta)}$)

São ortogonais no intervalo $(-1, 1)$ com relação à medida $d\phi(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $\alpha, \beta > -1$ e podem ser dados pela fórmula de Rodrigues²

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}].$$

Aplicando a Regra de Leibnitz

$$\frac{d^n}{dx^n} [f(x)g(x)] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)$$

com $f(x) = (1-x)^{\alpha+n}$ e $g(x) = (1+x)^{\beta+n}$ para calcular $\frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}]$ e substituindo o resultado na fórmula de Rodrigues para os polinômios de Jacobi, obtemos

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} (\alpha+n)(\alpha+n-1)\dots(\alpha+k+1) \\ \times (\beta+n)(\beta+n-1)\dots(\beta+n-k+1)(1-x)^k(1+x)^{n-k}.$$

Como $(1-x)^k = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} x^j$ e $(1+x)^{n-k} = \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^j \binom{n-k}{i} x^i$, fazendo o produto de Cauchy em $(1-x)^k(1+x)^{n-k}$, obtemos

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} (\alpha+n)(\alpha+n-1)\dots(\alpha+k+1) \\ \times (\beta+n)(\beta+n-1)\dots(\beta+n-k+1) \left\{ (-1)^k x^n \right. \\ \left. + \left[(-1)^{k-1} \binom{k}{k-1} + (-1)^k \binom{n-k}{n-k-1} \right] x^{n-1} + \dots \right\} \\ = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} (\alpha+n)(\alpha+n-1)\dots(\alpha+k+1)(\beta+n)(\beta+n-1)\dots \\ \times (\beta+n-k+1)x^n + \dots$$

¹De acordo com [14], Carl Gustav Jakob Jacobi (1804-1851) foi um matemático alemão que fez contribuições nas áreas de funções elípticas, equações diferenciais e teoria dos números. Trabalhou também com determinantes e estudou o determinante funcional agora chamado Jacobiano.

²De acordo com [14], Benjamin Olinde Rodrigues (1795-1851) foi um matemático francês cujo artigo contendo a fórmula que leva seu nome foi publicado em 1840 no volume 5 de *Annales de mathématique pures et appliquées*.

Daí, o coeficiente do termo de maior grau dos polinômios de Jacobi é

$$a_{n,n} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} (\alpha+n)(\alpha+n-1)\dots(\alpha+k+1)(\beta+n)(\beta+n-1)\dots(\beta+n-k+1).$$

Podemos representar também tal coeficiente utilizando a função gama definida por

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt,$$

para $\text{Re}(x) > 0$, que tem a seguinte propriedade

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Assim,

$$\Gamma(\alpha+n+1) = (\alpha+n)\Gamma(\alpha+n) = (\alpha+n)(\alpha+n-1)\dots(\alpha+k+1)\Gamma(\alpha+k+1)$$

e

$$(\beta+n)(\beta+n-1)\dots(\beta+n-k+1) = \frac{\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\beta+n-k+1)}.$$

Logo, podemos escrever

$$a_{n,n} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)} \frac{\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\beta+n-k+1)}.$$

Usando o fato de que

$$\sum_{k=0}^n \binom{\alpha+n}{n-k} \binom{\beta+n}{k} = \binom{\alpha+\beta+2n}{n},$$

obtemos

$$\begin{aligned} a_{n,n} &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)} \frac{\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\beta+n-k+1)} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{\alpha+n}{n-k} \binom{\beta+n}{k} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{\alpha+\beta+2n}{n} \\ &= \frac{1}{2^n} \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)} \end{aligned}$$

que é outra forma de representar $a_{n,n}$.

Para a sequência de polinômios de Jacobi na forma mônica, isto é, $\left\{ \frac{P_n^{(\alpha,\beta)}}{a_{n,n}} \right\}_{n=0}^{\infty}$, temos a seguinte relação de ortogonalidade:

$$\langle P_n^{(\alpha,\beta)}, P_n^{(\alpha,\beta)} \rangle_{\phi} = \frac{2^{2n+\alpha+\beta+1} n! \Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(n+\beta+1) \Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+2) \Gamma(2n+\alpha+\beta+1)} \quad (3.10)$$

e a partir dela podemos mostrar que tais polinômios satisfazem à seguinte relação de recorrência de três termos

$$P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) = \left(x - \frac{\beta^2 - \alpha^2}{(2n + \alpha + \beta + 2)(2n + \alpha + \beta)} \right) P_n^{(\alpha,\beta)}(x) - \frac{4n(n + \alpha)(n + \beta)(n + \alpha + \beta)}{(2n + \alpha + \beta + 1)(2n + \alpha + \beta)^2(2n + \alpha + \beta - 1)} P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x), \quad n \geq 1,$$

com $P_0^{(\alpha,\beta)}(x) = 1$ e $P_1^{(\alpha,\beta)}(x) = x - \frac{\beta - \alpha}{\alpha + \beta + 2}$.

De fato, como, de (3.8), $\alpha_{n+1} = \frac{\langle P_n, P_n \rangle_\phi}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle_\phi}$, substituindo a relação de ortogonalidade para P_n e P_{n-1} e fazendo os arranjos necessários, temos que

$$\alpha_{n+1} = \frac{4n(n + \alpha)(n + \beta)(n + \alpha + \beta)}{(2n + \alpha + \beta + 1)(2n + \alpha + \beta)^2(2n + \alpha + \beta - 1)}.$$

Para calcular β_{n+1} , utilizamos o fato de que

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \binom{\alpha + n}{n} = \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{n! \Gamma(\alpha + 1)}.$$

Substituindo $x = 1$ em (3.8), obtemos

$$\begin{aligned} P_n^{(\alpha,\beta)}(1) &= (1 - \beta_{n+1})P_n^{(\alpha,\beta)}(1) - \alpha_{n+1}P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\Gamma(\alpha + n + 2)}{(n + 1)! \Gamma(\alpha + 1)} = (1 - \beta_{n+1}) \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{n! \Gamma(\alpha + 1)} - \alpha_{n+1} \frac{\Gamma(\alpha + n)}{(n - 1)! \Gamma(\alpha + 1)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{(\alpha + n + 1)(\alpha + n)}{(n + 1)n} = (1 - \beta_{n+1}) \frac{\alpha + n}{n} - \alpha_{n+1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \beta_{n+1} = 1 - \frac{\alpha + n + 1}{n + 1} - \frac{n}{\alpha + n} \alpha_{n+1}. \end{aligned}$$

Substituindo α_{n+1} , temos que

$$\beta_{n+1} = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{(2n + \alpha + \beta + 2)(2n + \alpha + \beta)}.$$

Nas Figuras 3.1, 3.2 e 3.3, temos os gráficos de polinômios de Jacobi que foram obtidos para diferentes valores de α e β .

- Polinômios de Gegenbauer³ ($G_n^{(\lambda)}$)

São os polinômios de Jacobi com $\alpha = \beta = \lambda - \frac{1}{2}$, e, portanto, ortogonais no intervalo $(-1, 1)$ com relação à medida $d\phi(x) = (1 - x^2)^{\lambda - \frac{1}{2}} dx$, $\lambda > -\frac{1}{2}$.

Substituindo $\alpha = \beta = \lambda - \frac{1}{2}$ na relação de recorrência de três termos para os polinômios de Jacobi na forma mônica, obtemos a relação de recorrência de três termos para os polinômios de Gegenbauer na forma mônica:

$$G_{n+1}^{(\lambda)}(x) = x G_n^{(\lambda)}(x) - \frac{n(2\lambda + n - 1)}{4(\lambda + n)(\lambda + n - 1)} G_{n-1}^{(\lambda)}, \quad n \geq 1,$$

com $G_0^{(\lambda)}(x) = 1$ e $G_1^{(\lambda)}(x) = x$.

Nas Figuras 3.4, 3.5 e 3.6 temos gráficos de polinômios de Gegenbauer obtidos variando-se os valores de λ .

³De acordo com [14], Leopold Bernhard Gegenbauer (1849-1903) foi um matemático austríaco que teve muito interesse em teoria dos números e teoria da integração, mas que era principalmente um algebrista. Ele é lembrado pelos chamados polinômios de Gegenbauer.

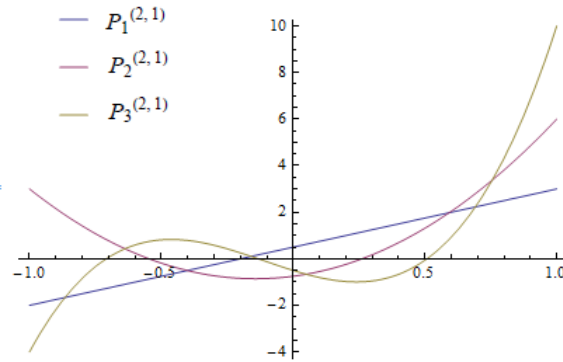


Figura 3.1: Polinômios de Jacobi de graus 1, 2 e 3 com $\alpha = 2$ e $\beta = 1$.

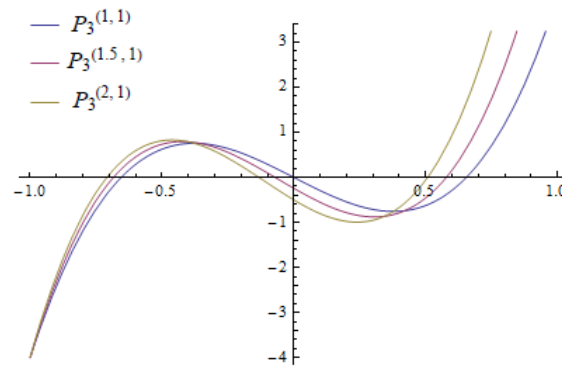


Figura 3.2: Polinômios de Jacobi de grau 3 com $\alpha = 1, 1.5, 2$ e $\beta = 1$.

- Polinômios de Legendre⁴ (P_n)

São os polinômios de Jacobi com $\alpha = \beta = 0$. São ortogonais no intervalo $(-1, 1)$ com relação à medida $d\phi(x) = dx$.

A relação de recorrência de três termos para os polinômios de Legendre na forma mônica é

$$P_{n+1}(x) = xP_n(x) - \frac{n^2}{(2n+1)(2n-1)}P_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

com $P_0(x) = 1$ e $P_1(x) = x$, que pode ser obtida, assim como para os polinômios de Gegenbauer, substituindo-se $\alpha = \beta = 0$ na relação de recorrência de três termos para os polinômios de Jacobi na forma mônica.

Além disso, fazendo $\alpha = \beta = 0$ em (3.10), obtemos

$$\rho_n = \langle P_n, P_n \rangle_\phi = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)!(2n!)}.$$

Na Figura 3.7 temos gráficos dos polinômios de Legendre de graus 1, 2 e 3.

⁴De acordo com [14], Adrien-Marie Legendre (1752-1833) foi um matemático francês que fez importantes contribuições à teoria dos números e teve grande interesse por funções elípticas. Em 1794, publicou *Eléments de géométrie*, onde provou pela primeira vez que π^2 é irracional e conjecturou que π não é raiz de nenhuma equação algébrica de grau finito com coeficientes racionais.

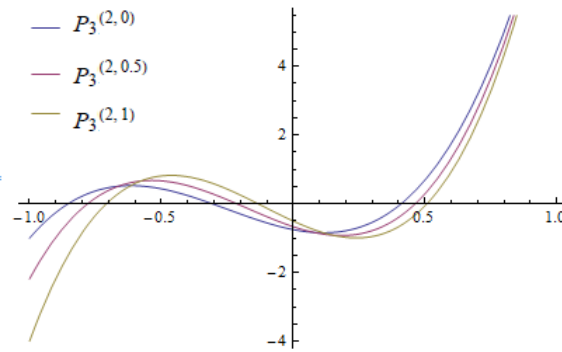


Figura 3.3: Polinômios de Jacobi de grau 3 com $\alpha = 2$ e $\beta = 0, 0.5, 1$.

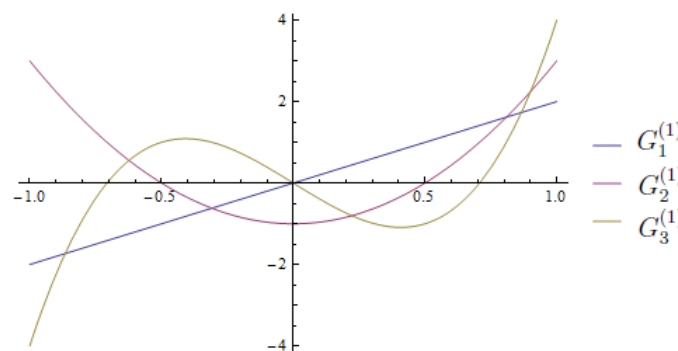


Figura 3.4: Polinômios de Gegenbauer de graus 1, 2 e 3 com $\lambda = 1$.

- Polinômios de Chebyshev⁵ de 1ª espécie (T_n)

São os polinômios de Jacobi com $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$. São ortogonais com relação à medida

$d\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ no intervalo $(-1, 1)$ e podem ser dados por

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in (-1, 1), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Tomando $x = \cos(\theta)$, com $\theta \in (0, \pi)$, podemos escrever $T_n(x) = \cos(n\theta)$, $n \geq 0$, e, usando a seguinte relação trigonométrica

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2 \cos(n\theta) \cos \theta$$

obtemos a relação de recorrência de três termos

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

com $T_0(x) = 1$ e $T_1(x) = x$.

O coeficiente do termo de maior grau de T_n , $n \geq 1$, é 2^{n-1} .

⁵De acordo com [14], Pafnuty Lvovich Chebyshev (1821-1894) foi um matemático russo que estudou principalmente a teoria da aproximação. Os polinômios de Chebyshev apareceram pela primeira vez em seu artigo *Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes*, publicado em 1854.

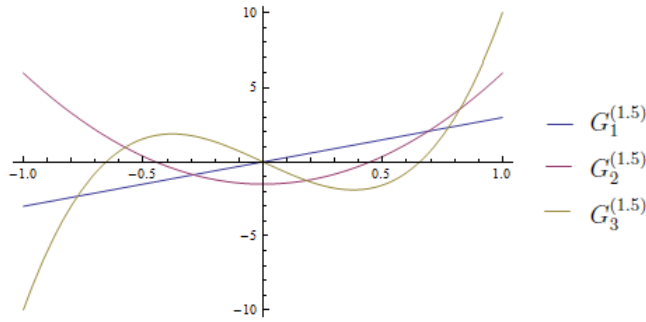


Figura 3.5: Polinômios de Gegenbauer de graus 1, 2 e 3 com $\lambda = 1.5$.

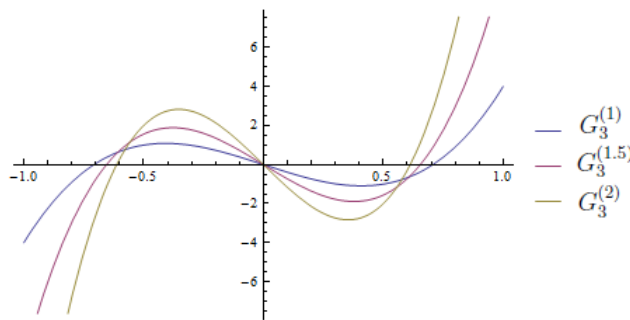


Figura 3.6: Polinômios de Gegenbauer de grau 3 com $\lambda = 1, 1.5, 2$.

De fato, para $n = 1$,

$$T_1(x) = x = 2^{1-1}x.$$

Supondo que vale

$$T_{n-1} = 2^{n-2}x^{n-1} + \dots,$$

obtemos, usando a relação de recorrência de três termos,

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) = 2x(2^{n-2}x^{n-1} + \dots) - T_{n-2}(x) = 2^{n-1}x^n + \dots.$$

Além disso, esses polinômios satisfazem

$$\langle T_n, T_m \rangle_\phi = \int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } m = n \neq 0, \\ \pi, & \text{se } m = n = 0. \end{cases}$$

De fato, temos que

$$\langle T_n, T_m \rangle_\phi = \int_{-1}^1 \frac{\cos(n \arccos x) \cos(m \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Fazendo $\theta = \arccos x \Rightarrow x = \cos \theta \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = -\sin \theta$, $x = 1 \Rightarrow \theta = 0$ e $x = -1 \Rightarrow \theta = \pi$, temos

$$\begin{aligned} \langle T_n, T_m \rangle_\phi &= - \int_{\pi}^0 \frac{\cos(n\theta) \cos(m\theta) \sin \theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}} d\theta \\ &= \int_0^\pi \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta. \end{aligned}$$

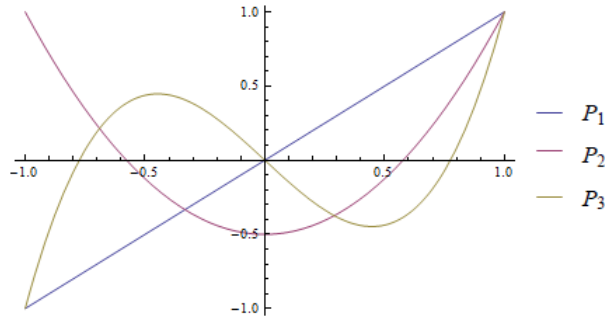


Figura 3.7: Polinômios de Legendre de graus 1, 2 e 3.

Assim, se $m = n = 0$,

$$\langle T_0, T_0 \rangle_\phi = \int_0^\pi \cos^2(0\theta) d\theta = \pi.$$

Se $m = n \neq 0$,

$$\langle T_n, T_n \rangle_\phi = \int_0^\pi \cos^2(n\theta) d\theta.$$

Integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos(n\theta) \cos(n\theta) d\theta &= \int_0^\pi \sin^2(n\theta) d\theta \\ &= \int_0^\pi 1 - \cos^2(n\theta) d\theta \\ &= \int_0^\pi d\theta - \int_0^\pi \cos^2(n\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos^2(n\theta) d\theta &= \int_0^\pi d\theta - \int_0^\pi \cos^2(n\theta) d\theta \Rightarrow \\ \Rightarrow 2 \int_0^\pi \cos^2(n\theta) d\theta &= \int_0^\pi d\theta \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_0^\pi \cos^2(n\theta) d\theta &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Para $m \neq n$ utilizamos as seguintes identidades trigonométricas:

$$\cos(m\theta + n\theta) = \cos(m\theta) \cos(n\theta) - \sin(m\theta) \sin(n\theta)$$

e

$$\cos(m\theta - n\theta) = \cos(m\theta) \cos(n\theta) + \sin(m\theta) \sin(n\theta).$$

Temos então

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos(m\theta + n\theta) + \cos(m\theta - n\theta) d\theta &= 2 \int_0^\pi \cos(m\theta) \cos(n\theta) d\theta \\ &= 2 \langle T_n, T_m \rangle_\phi. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} 2 \langle T_n, T_m \rangle_\phi &= \int_0^\pi \cos(m\theta + n\theta) + \cos(m\theta - n\theta) d\theta \\ &= \frac{\sin(m\theta + n\theta)}{m+n} \Big|_0^\pi + \frac{\sin(m\theta - n\theta)}{m-n} \Big|_0^\pi \\ &= 0. \end{aligned}$$

Na Figura 3.8 temos gráficos dos polinômios de Chebyshev de graus 1, 2 e 3.

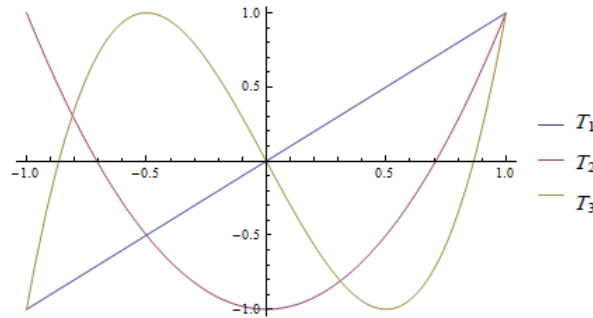


Figura 3.8: Polinômios de Chebyshev de graus 1, 2 e 3.

- Polinômios de Laguerre⁶ ($L_n^{(\alpha)}$)

São ortogonais com relação à medida $d\phi(x) = x^\alpha e^{-x} dx$, $\alpha > -1$, no intervalo $[0, \infty)$ e podem ser dados pela fórmula de Rodrigues

$$L_n^{(\alpha)} = (-1)^n x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n} [x^{\alpha+n} e^{-x}].$$

Nessa forma, os polinômios $L_n^{(\alpha)}$ são mônicos.

De fato, aplicando a Regra de Leibnitz com $f(x) = x^{\alpha+n}$ e $g(x) = e^{-x}$ para calcular $\frac{d^n}{dx^n} [x^{\alpha+n} e^{-x}]$, obtemos

$$\begin{aligned} L_n^{(\alpha)} &= (-1)^n x^{-\alpha} e^x \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (\alpha+n)(\alpha+n-1)\dots(\alpha+j+1) x^{\alpha+j} (-1)^j e^{-x} \\ &= (-1)^n \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} (\alpha+n)(\alpha+n-1)\dots(\alpha+j+1) x^j. \end{aligned}$$

O coeficiente do termo de maior grau aparece quando $j = n$, então

$$\begin{aligned} L_n^{(\alpha)} &= (-1)^n \left[(-1)^n \binom{n}{n} x^n + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} (\alpha+n) x^{n-1} + \dots \right] \\ &= x^n - n(\alpha+n) x^{n-1} + \dots \end{aligned}$$

Logo, $a_{n,n} = 1$.

⁶De acordo com [14], Edmond Nicolas Laguerre (1834-1886) foi um matemático francês cujos trabalhos mais importantes foram nas áreas de análise e geometria. Estudou também métodos de aproximação e é conhecido principalmente pelos polinômios que levam seu nome.

A relação de ortogonalidade para os polinômios de Laguerre é dada por

$$\begin{aligned} \langle L_n^{(\alpha)}, L_m^{(\alpha)} \rangle_\phi &= \int_0^\infty L_n^{(\alpha)} L_m^{(\alpha)} x^\alpha e^{-x} dx \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ n! \Gamma(n + \alpha + 1), & \text{se } m = n. \end{cases} \end{aligned}$$

e eles satisfazem à seguinte relação de recorrência de três termos:

$$L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = [x - (2n + \alpha + 1)]L_n^{(\alpha)}(x) - n(n + \alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad n \geq 1,$$

com $L_0^{(\alpha)}(x) = 1$ e $L_1^{(\alpha)}(x) = x - (\alpha + 1)$.

De fato, como tais polinômios são mônicos, $\gamma_{n+1} = \frac{\alpha_{n+1,n+1}}{\alpha_{n,n}} = 1$. De (3.8),

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &= \frac{\langle L_n^{(\alpha)}, L_n^{(\alpha)} \rangle_\phi}{\langle L_{n-1}^{(\alpha)}, L_{n-1}^{(\alpha)} \rangle_\phi} \\ &= \frac{n! \Gamma(n + \alpha + 1)}{(n-1)! \Gamma(n-1 + \alpha + 1)} \\ &= n(n + \alpha). \end{aligned}$$

Vamos agora calcular $\beta_{n+1} = \frac{\langle xL_n^{(\alpha)}, L_n^{(\alpha)} \rangle_\phi}{\langle L_n^{(\alpha)}, L_n^{(\alpha)} \rangle_\phi}$.

Sabemos que $L_n^{(\alpha)}(x) = x^n - n(\alpha + n)x^{n-1} + \dots$. Logo, obtemos

$$L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = x^{n+1} - (n+1)(\alpha + n + 1)x^n + \dots$$

e

$$xL_n^{(\alpha)}(x) = x^{n+1} - n(\alpha + n)x^n + \dots$$

Daí,

$$xL_n^{(\alpha)}(x) - L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = [(n+1)(\alpha + n + 1) - n(\alpha + n)]x^n + \dots \quad (3.11)$$

Mas,

$$\begin{aligned} [(n+1)(\alpha + n + 1) - n(\alpha + n)]L_n^{(\alpha)}(x) &= [(n+1)(\alpha + n + 1) - n(\alpha + n)]x^n \\ &\quad - [(n+1)(\alpha + n + 1) - n(\alpha + n)] \\ &\quad \times n(\alpha + n)x^{n-1} + \dots \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} [(n+1)(\alpha + n + 1) - n(\alpha + n)]x^n &= [(n+1)(\alpha + n + 1) - n(\alpha + n)]L_n^{(\alpha)}(x) \\ &\quad + n(\alpha + n)n(\alpha + n)x^{n-1} + \dots \end{aligned}$$

Podemos então escrever

$$[(n+1)(\alpha + n + 1) - n(\alpha + n)]x^n = [(n+1)(\alpha + n + 1) - n(\alpha + n)]L_n^{(\alpha)}(x) + q_{n-1}(x),$$

onde $q_{n-1}(x)$ é um polinômio de grau $n-1$. Substituindo em (3.11), temos

$$xL_n^{(\alpha)}(x) = L_{n+1}^{(\alpha)}(x) + [(n+1)(\alpha + n + 1) - n(\alpha + n)]L_n^{(\alpha)}(x) + q_{n-1}(x),$$

e, fazendo o produto interno dessa expressão por $L_n^{(\alpha)}(x)$,

$$\begin{aligned} \langle xL_n^{(\alpha)}(x), L_n^{(\alpha)}(x) \rangle_\phi &= \langle L_{n+1}^{(\alpha)}(x), L_n^{(\alpha)}(x) \rangle_\phi + [(n+1)(\alpha+n+1) - n(\alpha+n)] \\ &\quad \times \langle L_n^{(\alpha)}(x), L_n^{(\alpha)}(x) \rangle_\phi + \langle q_{n-1}(x), L_n^{(\alpha)}(x) \rangle_\phi. \end{aligned}$$

Então

$$\frac{\langle xL_n^{(\alpha)}(x), L_n^{(\alpha)}(x) \rangle_\phi}{\langle L_n^{(\alpha)}(x), L_n^{(\alpha)}(x) \rangle_\phi} = (n+1)(n+\alpha+1) - n(n+\alpha) = 2n + \alpha + 1.$$

Portanto,

$$\beta_{n+1} = 2n + \alpha + 1.$$

As Figuras 3.9 e 3.10 apresentam gráficos de polinômios de Laguerre de diferentes graus, para diferentes valores de α .

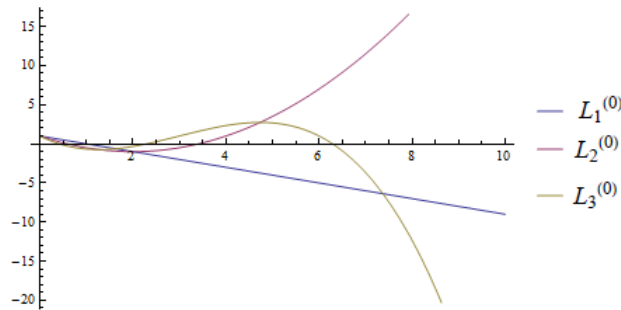


Figura 3.9: Polinômios de Laguerre de graus 1, 2 e 3 com $\alpha = 0$.

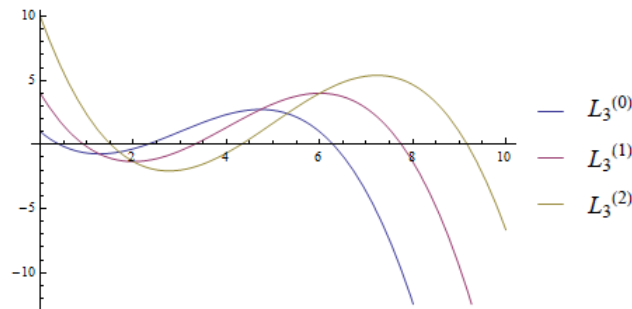


Figura 3.10: Polinômios de Laguerre de grau 3 com $\alpha = 0, 1, 2$.

- Polinômios de Hermite⁷ (H_n)

São ortogonais no intervalo $(-\infty, \infty)$ com relação à medida $d\phi(x) = e^{-x^2} dx$ e dados pela expressão

$$H_n(x) = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^m n! x^{n-2m}}{4^m m! (n-2m)!},$$

⁷De acordo com [14], Charles Hermite (1822-1901) foi um matemático francês de grande contribuição para a teoria dos números, álgebra, polinômios ortogonais, funções elípticas e formas quadráticas.

onde $[z]$ denota o maior inteiro menor ou igual a z . Também podemos obtê-los através da fórmula de Rodrigues

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x^2}].$$

Tais fórmulas nos dão os polinômios de Hermite na forma mônica.

Eles satisfazem à seguinte relação de ortogonalidade:

$$\langle H_n, H_m \rangle_\phi = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ \frac{n! \sqrt{\pi}}{2^n}, & \text{se } m = n. \end{cases}$$

Satisfazem também à relação de recorrência de três termos dada por

$$H_{n+1} = xH_n(x) - \frac{n}{2}H_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

com $H_0(x) = 1$ e $H_1(x) = x$, pois, temos que

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} [e^{-x^2}] = \frac{d^n}{dx^n} [-2xe^{-x^2}]$$

e, aplicando a Regra de Leibnitz com $f(x) = -2x$ e $g(x) = e^{-x^2}$, sabendo que $f^{(j)}(x) = 0$ para $j \geq 2$,

$$\begin{aligned} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} [e^{-x^2}] &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x) + \sum_{k=n-1}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x) \\ &= \binom{n}{n-1} f'(x)g^{(n-1)}(x) + \binom{n}{n} f(x)g^{(n)}(x) = \\ &= -2n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [e^{-x^2}] - 2x \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x^2}]. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} H_{n+1}(x) &= \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} e^{x^2} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (e^{-x^2}) \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} e^{x^2} \left[-2n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [e^{-x^2}] - 2x \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x^2}] \right] \\ &= xH_n(x) - \frac{n}{2}H_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Na Figura 3.11 temos gráficos dos polinômios de Hermite de graus 1, 2 e 3.

3.2 Polinômios ortogonais no círculo unitário

Esta seção contém resultados sobre os polinômios ortogonais no círculo unitário, que também são conhecidos como polinômios de Szegő⁸. Tais polinômios não satisfazem uma

⁸De acordo com [14], Gábor Szegő (1895-1985) foi um matemático húngaro que trabalhou principalmente na teoria de funções (de uma variável complexa), polinômios ortogonais clássicos, desigualdades isoperimétricas e forma de Toeplitz.

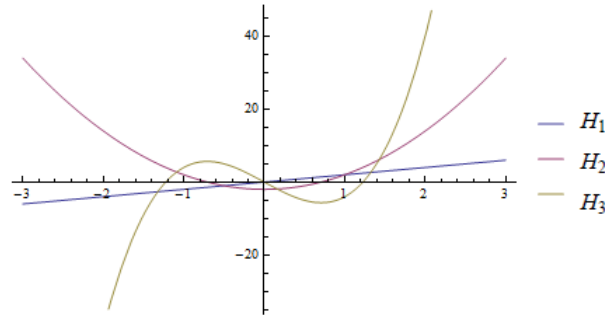


Figura 3.11: Polinômios de Hermite de graus 1, 2 e 3.

relação de recorrência de três termos, mas a apresentação dessa teoria se faz necessária para o posterior estudo sobre os polinômios para-ortogonais, que se encontra no capítulo 6.

Seja ψ uma medida positiva no círculo unitário $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, ou seja, $\psi(e^{i\theta})$, definida em $0 \leq \theta \leq 2\pi$, é uma função real, limitada e não decrescente, com infinitos pontos de aumento em C . Como a medida está definida em C , seus momentos são chamados de trigonométricos e são dados por

$$\mu_m = \int_C z^{-m} d\psi(z) = \int_0^{2\pi} e^{-im\theta} d\psi(e^{i\theta}), \quad (3.12)$$

$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Observe que

$$\bar{\mu}_{-n} = \int_0^{2\pi} \overline{e^{in\theta}} d\psi(e^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} d\psi(e^{i\theta}) = \mu_n, \quad (3.13)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

Denotaremos por $\psi(\theta)$ a medida induzida por $\psi(e^{i\theta})$, que tem suporte em $[0, 2\pi]$. Com ela, podemos definir o seguinte funcional linear

$$\mathcal{L}[z^m] = \int_C z^m d\psi(z) = \mu_{-m}. \quad (3.14)$$

Como o suporte da medida ψ é infinito, ou seja, o número de pontos de aumento de ψ em $[0, 2\pi]$ é infinito, para qualquer $f(e^{i\theta}) \geq 0$, não identicamente nula e contínua em $[0, 2\pi]$, temos

$$\mathcal{L}[f] = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\psi(\theta) > 0.$$

Se f é um polinômio,

$$\mathcal{L}[|f|^2] = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \overline{f(e^{i\theta})} d\psi(\theta) > 0.$$

Utilizando o funcional \mathcal{L} , definimos o seguinte produto interno:

$$\langle f, g \rangle = \mathcal{L}[f(e^{i\theta}) \overline{g(e^{i\theta})}] = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \overline{g(e^{i\theta})} d\psi(\theta). \quad (3.15)$$

Se $f(z) = \sum_{j=p}^q c_j z^j$, com $p \leq q \in \mathbb{Z}$ e $c_j \in \mathbb{C}$, temos, de (3.14),

$$\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}\left[\sum_{j=p}^q c_j z^j\right] = \sum_{j=p}^q c_j \mu_{-j}.$$

A seguinte matriz, conhecida como matriz de Toeplitz, é correspondente à sequência de momentos $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$:

$$T_n = \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n-1} & \cdots & \mu_0 \end{pmatrix},$$

$n = 0, 1, 2, \dots$. Seu determinante, conhecido como determinante de Toeplitz, é definido por

$$\Delta_{-1} = 1 \text{ e } \Delta_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n-1} & \cdots & \mu_0 \end{vmatrix}, n \geq 0. \quad (3.16)$$

Definição 12 *Um funcional linear \mathcal{L} , onde $\mu_m = \mathcal{L}[z^{-m}]$, é positivo-definido se*

$$\Delta_n > 0, n = 0, 1, 2, \dots,$$

e quase-definido se

$$\Delta_n \neq 0, n = 0, 1, 2, \dots$$

Sendo $\pi(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k$, com $c_j \in \mathbb{C}$ e $c_n \neq 0$, um polinômio de grau n , $n \geq 0$, temos, de (3.14) e (3.15), que

$$\begin{aligned} 0 < \|\pi\|^2 &= \langle \pi, \pi \rangle \\ &= \mathcal{L}[\overline{\pi(z)}\pi(z)] \\ &= \mathcal{L}\left[\sum_{k=0}^n \overline{c_k z^k} \sum_{j=0}^n c_j z^j\right] \\ &= \mathcal{L}\left[\sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n \overline{c_k} c_j z^{j-k}\right] \\ &= \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n \overline{c_k} c_j \mu_{k-j}, \end{aligned}$$

e então,

$$\|\pi\| = \left(\sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n \overline{c_k} c_j \mu_{k-j} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Escrevendo $\|\pi\|^2$ na forma matricial, temos

$$\|\pi\|^2 = \begin{pmatrix} \overline{c_0} & \overline{c_1} & \overline{c_2} & \cdots & \overline{c_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \mu_{-2} & \cdots & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n+1} \\ \mu_2 & \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \cdots & \mu_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} > 0,$$

ou seja,

$$\left(\overline{c_0} \quad \overline{c_1} \quad \overline{c_2} \quad \dots \quad \overline{c_n} \right) T_n \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} > 0.$$

Dessa forma, concluímos que a matriz T_n é positiva-definida, e, então, $\Delta_n > 0$, para $n \geq 0$, o que implica que \mathcal{L} é um funcional linear positivo-definido.

Definição 13 Uma sequência $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$ de números complexos é hermitiana se, para $n = 0, 1, 2, \dots$, vale $\mu_n = \overline{\mu_{-n}}$ e é hermitiana positiva-definida se $\Delta_n > 0$, $n \geq 0$.

Temos então, de (3.13), que, dada uma medida positiva no círculo unitário, a sequência de momentos $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$ definidos por (3.12) forma uma sequência hermitiana positiva-definida. Temos também que a matriz T_n é hermitiana, ou seja, $T_n = \overline{T_n^t}$.

Definição 14 Dado um funcional linear \mathcal{L} positivo - definido (quase-definido), uma sequência de polinômios $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ é chamada de sequência de polinômios ortogonais com relação à \mathcal{L} , se

$$\langle S_n, S_m \rangle = \mathcal{L}[S_n(z)\overline{S_m(z)}] = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ \kappa_n^2 \neq 0, & \text{se } m = n. \end{cases} \quad (3.17)$$

Vamos considerar, aqui, somente polinômios S_n mônicos.

É possível provar, assim como para os polinômios ortogonais na reta real, que sendo $\pi_m \in \mathbb{P}_m$, $m \leq n$,

$$\langle S_n, \pi_m \rangle = \mathcal{L}[S_n(z)\overline{\pi_m(z)}] = \begin{cases} 0, & \text{se } m < n, \\ \hat{\kappa}_n \neq 0, & \text{se } m = n. \end{cases} \quad (3.18)$$

Escrevendo

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^n c_{k,n} z^k,$$

para $n \geq 0$, com $c_{k,n} \in \mathbb{C}$ e $c_{n,n} = 1$, e usando (3.17) para $m = 0, 1, 2, \dots, n$, obtemos

$$\langle S_n, z^m \rangle = \mathcal{L} \left[S_n(z) \frac{1}{z^m} \right] = \sum_{k=0}^n c_{k,n} \mu_{m-k} = \begin{cases} 0, & \text{se } m < n, \\ \tilde{\kappa}_n \neq 0, & \text{se } m = n. \end{cases} \quad (3.19)$$

Como

$$\begin{aligned} \langle S_n, S_m \rangle &= \mathcal{L}[S_n(z)\overline{S_m(z)}] \\ &= \mathcal{L} \left[S_n(z) \sum_{k=0}^m c_{k,m} z^k \right] \\ &= \sum_{k=0}^m c_{k,m} \mathcal{L}[S_n(z)z^k] \\ &= \sum_{k=0}^m c_{k,m} \langle S_n, z^m \rangle \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se } m < n, \\ c_{n,n} \tilde{\kappa}_n \neq 0, & \text{se } m = n, \end{cases} \end{aligned}$$

podemos concluir que (3.17) e (3.19) são definições equivalentes para os polinômios de Szegö.

Fazendo $m = 0, 1, 2, \dots, n$ em (3.19), obtemos o sistema de equações lineares

$$\begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n+1} & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+2} & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \cdots & \mu_0 & \mu_{-1} \\ \mu_n & \mu_{n-1} & \cdots & \mu_1 & \mu_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{0,n} \\ c_{1,n} \\ \vdots \\ c_{n-1,n} \\ c_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \tilde{\kappa}_n \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Utilizando a Regra de Cramer para calcular $c_{n,n}$, obtemos

$$1 = c_{n,n} = \frac{\tilde{\kappa}_n \Delta_{n-1}}{\Delta_n} \Rightarrow \tilde{\kappa}_n = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}.$$

Logo,

$$\langle S_n, z^m \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } m = 0, 1, \dots, n-1, \\ \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}, & \text{se } m = n. \end{cases} \quad (3.21)$$

Uma outra maneira de se construir os polinômios de Szegö na forma mônica, e que mostra sua existência e unicidade, é substituindo a última linha do sistema (3.20) por

$S_n(z) = \sum_{k=0}^n c_{k,n} z^k$, obtendo

$$\begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n+1} & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+2} & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \cdots & \mu_0 & \mu_{-1} \\ 1 & z & \cdots & z^{n-1} & z^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{0,n} \\ c_{1,n} \\ \vdots \\ c_{n-1,n} \\ c_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ S_n(z) \end{pmatrix},$$

e depois calculando novamente $c_{n,n}$ pela Regra de Cramer, o que nos dá

$$S_n(z) = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n+1} & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+2} & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \cdots & \mu_0 & \mu_{-1} \\ 1 & z & \cdots & z^{n-1} & z^n \end{vmatrix}, \quad (3.22)$$

que está bem definido, pois $\Delta_{n-1} \neq 0$.

Utilizando a notação $\overline{S_m}(z)$ para denotar o polinômio obtido conjugando-se apenas os coeficientes de $S_m(z)$, podemos escrever

$$\langle S_n, S_m \rangle = \mathcal{L}[S_n(z) \overline{S_m}(z)] = \mathcal{L}[S_n(z) \overline{S_m}(\bar{z})] = \mathcal{L} \left[S_n(z) \overline{S_m} \left(\frac{1}{z} \right) \right].$$

De (3.22), temos que o polinômio recíproco de S_n é dado por

$$S_n^*(z) = \overline{z^n S_n \left(\frac{1}{z} \right)} = \frac{z^n}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} \bar{\mu}_0 & \bar{\mu}_{-1} & \cdots & \bar{\mu}_{-n} \\ \bar{\mu}_1 & \bar{\mu}_0 & \cdots & \bar{\mu}_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\mu}_{n-1} & \bar{\mu}_{n-2} & \cdots & \bar{\mu}_{-1} \\ 1 & \frac{1}{z} & \cdots & \frac{1}{z^n} \end{vmatrix}.$$

Como $\Delta_n > 0$ e $\mu_n = \bar{\mu}_{-n}$, para $n = 0, 1, 2, \dots$, então

$$S_n^*(z) = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_n \\ \mu_{-1} & \mu_0 & \dots & \mu_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{-n+1} & \mu_{-n+2} & \dots & \mu_1 \\ z^n & z^{n-1} & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

De (3.14) e usando a definição de polinômio recíproco, temos

$$\begin{aligned} \langle S_n^*(z), z^m \rangle &= \left\langle z^n \overline{S_n\left(\frac{1}{z}\right)}, z^m \right\rangle \\ &= \mathcal{L} \left[z^n \overline{S_n\left(\frac{1}{z}\right)} \bar{z}^m \right] \\ &= \mathcal{L} \left[z^n \overline{S_n(z)} \frac{1}{z^m} \right] \\ &= \mathcal{L} [z^{n-m} \overline{S_n(z)}] \\ &= \langle z^{n-m}, S_n \rangle. \end{aligned}$$

Logo, de (3.21),

$$\langle S_n^*(z), z^m \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } m = 1, 2, \dots, n, \\ \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}, & \text{se } m = 0. \end{cases}$$

Como $S_m(z) = z^m + \sum_{k=0}^{m-1} c_{m,k} z^k$, então

$$\langle S_n, S_m \rangle = \left\langle S_n, z^m + \sum_{k=0}^{m-1} c_{m,k} z^k \right\rangle = \langle S_n, z^m \rangle + \sum_{k=0}^{m-1} c_{m,k} \langle S_n, z^k \rangle = \langle S_n, z^m \rangle,$$

e assim,

$$\langle S_n, S_m \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } m = 0, 1, \dots, n-1, \\ \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}, & \text{se } m = n. \end{cases}.$$

Considere, agora, os chamados coeficientes de reflexão α_n , definidos por

$$\bar{\alpha}_n = -S_{n+1}(0), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.23)$$

Tais coeficientes também podem ser chamados de coeficientes de Verblunsky, de Schur, de Szegö ou de Geronimus, de acordo com [18] e [19].

De (3.22), obtemos

$$S_{n+1}(0) = \frac{1}{\Delta_n} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \dots & \mu_{-n} & \mu_{-n-1} \\ \mu_1 & \mu_0 & \dots & \mu_{-n+1} & \mu_{-n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \dots & \mu_{-1} & \mu_{-2} \\ \mu_n & \mu_{n-1} & \dots & \mu_0 & \mu_{-1} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Logo,

$$\bar{\alpha}_n = \frac{(-1)^n}{\Delta_n} \begin{vmatrix} \mu_{-1} & \mu_{-2} & \dots & \mu_{-n} & \mu_{-n-1} \\ \mu_0 & \mu_{-1} & \dots & \mu_{-n+1} & \mu_{-n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_{n-2} & \mu_{n-3} & \dots & \mu_{-1} & \mu_{-2} \\ \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \dots & \mu_0 & \mu_{-1} \end{vmatrix}.$$

Teorema 10 *Os polinômios mônicos de Szegő satisfazem às seguintes relações para $n \geq 1$:*

$$S_n^*(z) = S_{n-1}^*(z) - \alpha_{n-1}zS_{n-1}(z), \quad (3.24)$$

$$S_n(z) = (1 - |\alpha_{n-1}|^2)zS_{n-1}(z) - \bar{\alpha}_{n-1}S_n^*(z). \quad (3.25)$$

Maiores detalhes encontram-se em [21].

Substituindo (3.24) em (3.25), obtemos

$$S_n(z) = (1 - |\alpha_{n-1}|^2)zS_{n-1}(z) - \bar{\alpha}_{n-1}[S_{n-1}^*(z) - \alpha_{n-1}zS_{n-1}(z)],$$

ou seja,

$$S_n(z) = zS_{n-1}(z) - \bar{\alpha}_{n-1}S_{n-1}^*(z), \quad n \geq 1. \quad (3.26)$$

Note que os polinômios mônicos de Szegő são completamente determinados pelos coeficientes de reflexão α_n . O teorema a seguir nos dá um outro método para calculá-los.

Teorema 11 *Sejam \mathcal{L} um funcional linear definido positivo, Δ_n o determinante de Toeplitz (3.16) e $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ a sequência definida por (3.23). Então, para $n \geq 1$,*

$$\bar{\alpha}_{n-1} = \frac{\langle zS_{n-1}, 1 \rangle}{\langle S_{n-1}^*, 1 \rangle}, \quad (3.27)$$

$$1 - |\alpha_{n-1}|^2 = \frac{\Delta_n \Delta_{n-2}}{\Delta_{n-1}^2} > 0. \quad (3.28)$$

Demonstração. Fazendo o produto escalar $\langle S_n, 1 \rangle$, por (3.26), obtemos

$$\langle S_n, 1 \rangle = \langle zS_{n-1}, 1 \rangle - \bar{\alpha}_{n-1} \langle S_{n-1}^*, 1 \rangle, \quad n \geq 1.$$

De (3.21), $\langle S_n, 1 \rangle = 0$. Então,

$$\bar{\alpha}_{n-1} = \frac{\langle zS_{n-1}, 1 \rangle}{\langle S_{n-1}^*, 1 \rangle},$$

e (3.27) está provado.

Utilizando (3.21) e (3.25) temos que

$$\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} = \langle S_n, z^n \rangle = (1 - |\alpha_{n-1}|^2) \langle zS_{n-1}(z), z^n \rangle - \bar{\alpha}_{n-1} \langle S_n^*(z), z^n \rangle.$$

Logo,

$$\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} = (1 - |\alpha_{n-1}|^2) \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}}.$$

Como \mathcal{L} é definido positivo, $\Delta_n > 0$, para $n \geq 0$, e então

$$1 - |\alpha_{n-1}|^2 = \frac{\Delta_n \Delta_{n-2}}{\Delta_{n-1}^2} > 0.$$

■

Note que, de (3.28), $|\alpha_n| < 1$, para $n \geq 0$.

Teorema 12 *Os zeros do polinômio de Szegő S_n , $n \geq 1$, estão todos no disco unitário aberto $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.*

Demonstração. Sejam z_1, z_2, \dots, z_n os zeros do polinômios de Szegő S_n , $n \geq 1$. Logo, podemos escrever $S_n(z) = (z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_n)$.

Sem perda de generalidade, escolhemos um zero de S_n , por exemplo, z_1 . Seja π o polinômio de grau $n - 1$ dado por

$$\pi(z) = \frac{S_n(z)}{z - z_1} = (z - z_2)\dots(z - z_n).$$

Assim,

$$S_n(z) = (z - z_1)\pi(z) = z\pi(z) - z_1\pi(z).$$

Logo,

$$\|S_n(z) + z_1\pi(z)\|^2 = \|z\pi(z)\|^2,$$

isto é,

$$\langle S_n(z) + z_1\pi(z), S_n(z) + z_1\pi(z) \rangle = \langle S_n, S_n \rangle + 2 \langle S_n, z_1\pi \rangle + \langle z_1\pi, z_1\pi \rangle = \langle z\pi, z\pi \rangle.$$

Daí, obtemos

$$\|S_n\|^2 + 2 \langle S_n, z_1\pi \rangle + \|z_1\pi\|^2 = \|z\pi\|^2,$$

e, como, por (3.18), $\langle S_n, z_1\pi \rangle = 0$, e

$$\|z\pi\|^2 = \langle z\pi, z\pi \rangle = \mathcal{L}[z\pi\bar{z}\bar{\pi}] = \mathcal{L}\left[z\pi\frac{1}{z}\bar{\pi}\right] = \mathcal{L}[\pi\bar{\pi}] = \langle \pi, \pi \rangle = \|\pi\|^2,$$

então,

$$\|S_n\|^2 + \|z_1\pi\|^2 = \|\pi\|^2.$$

Logo,

$$\|S_n\|^2 = (1 - |z_1|^2)\|\pi\|^2 > 0,$$

e, portanto,

$$1 - |z_1|^2 > 0 \Rightarrow |z_1|^2 < 1 \Rightarrow |z_1| < 1.$$

Assim, para qualquer zero de S_n , $|z_k| < 1$, $k = 1, 2, \dots, n$.

■

O resultado a seguir é semelhante ao Teorema de Favard. Ele usa o fato de que os polinômios ortogonais no círculo unitário são determinados pelos coeficientes de Verblunsky α_n . Maiores detalhes e a demonstração encontram-se em [4].

Teorema 13 *Dada uma sequência de números complexos $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$, onde $|\alpha_n| < 1$, $n \geq 0$, então associada a esta sequência existe uma única medida de probabilidade não-trivial, definida no círculo unitário, tal que os polinômios mônicos $\{S_n\}$ gerados por (3.26) são os respectivos polinômios ortogonais no círculo unitário.*

Polinômios Auto-inversíveis

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados da teoria de polinômios auto-inversíveis. Para este estudo, as referências utilizadas foram [11] e [12].

4.1 Resultados importantes

Até agora estávamos denotando P_n um polinômio de grau exatamente n , em termos de seus coeficientes, mas podemos representá-lo também por

$$P_n(z) = a_{n,n} \prod_{j=1}^n (z - z_j),$$

onde $a_{n,n} \in \mathbb{C}$ é o coeficiente do termo de maior grau e $z_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2, \dots, n$, são os zeros de $P_n(z)$.

Dessa forma, temos que o polinômio recíproco de $P_n(z)$ é dado por

$$P_n^*(z) = a_{n,0} \prod_{j=1}^n (z - z_j^*),$$

cujos zeros $z_j^* = \frac{1}{\bar{z}_j}$ são os inversos conjugados dos zeros z_j .

Definição 15 Dado $P_n(z) = \sum_{j=0}^n a_{n,j} z^j$ um polinômio de grau n . Se existir $u \in \mathbb{C}$, $|u| = 1$, tal que $P_n^*(z) = uP_n(z)$, então P_n é chamado de auto-inversível.

Note que, se P_n é auto-inversível, então todo zero de P_n é zero de P_n^* .

Definição 16 Se $P_n(z) = z^n P_n(\frac{1}{z})$, $P_n(z)$ é chamado de palindrômico e se $P_n(z) = z^n \overline{P_n(\frac{1}{z})}$, $P_n(z)$ é chamado de auto-recíproco.

Os polinômios auto-recíprocos reais são polinômios auto-inversíveis com $u = 1$ e são também palindrômicos. Desta forma, os resultados a seguir que dizem respeito à polinômios auto-inversíveis também valem para polinômios auto-recíprocos reais (palíndromes). Observe que, se $P_n(z) = \sum_{j=0}^n a_{n,j} z^j$, $a_{n,j} \in \mathbb{C}$, é palindrômico, então $a_{n,k} = a_{n,n-k}$, $k = 0, 1, \dots, n$.

Como exemplo, temos o polinômio $P(z) = z^5 - 0.3z^4 - 1.6z^3 - 1.6z^2 - 0.3z + 1$, que é palindrômico, auto-recíproco real e, portanto, auto-inversível com $u = 1$, pois $P(z) = z^5 P(\frac{1}{z}) = P^*(z)$. Já o polinômio $P(z) = iz^5 - 2z^4 + z^3 + z^2 - 2z - i$ é auto-recíproco, auto-inversível com $u = 1$, mas não é palindrômico, pois $P(z) = z^5 \overline{P}(\frac{1}{z}) = P^*(z)$. Por fim, temos o polinômio $P(z) = -iz^4 - z^3 + iz + 1$, que é auto-inversível com $u = i$, pois $P^*(z) = z^4 - iz^3 - z + i$ e assim $P^*(z) = iP(z)$.

O resultado a seguir relaciona os zeros do polinômio $P_n(z)$ com os zeros do seu polinômio recíproco $P_n^*(z)$. Maiores detalhes em [11].

Teorema 14 *Sejam $P_n(z)$ um polinômio de grau n e $P_n^*(z)$ seu polinômio recíproco. Então,*

- qualquer zero de $P_n(z)$ em $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ é também zero de $P_n^*(z)$;
- se todos os zeros de $P_n(z)$ encontram-se fora do disco unitário $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, isto é, $|z| > 1$, então $P_n^*(z)$ possui todos os seus zeros no disco unitário aberto, ou seja, $|z| < 1$;
- supondo que $P_n(z)$ possui p zeros em D , então $P_n^*(z)$ tem $n - p$ zeros no disco unitário aberto.

Nas Figuras 4.1 e 4.2 temos a localização dos zeros do polinômio $P(z) = 4z^5 + z^4 - 8.5z^3 - 14.5z^2 - 8z - 2$, que são $z_1 = -0.75 - 0.66i$, $z_2 = -0.75 + 0.66i$, $z_3 = -0.37 - 0.33i$, $z_4 = -0.37 + 0.33i$ e $z_5 = 2$, e de seu polinômio recíproco $P^*(z) = -2z^5 - 8z^4 - 14.5z^3 - 8.5z^2 + z + 4$, que são $z_1^* = -1.5 - 1.32i$, $z_2^* = -1.5 + 1.32i$, $z_3^* = -0.75 - 0.66i$, $z_4^* = -0.75 + 0.66i$ e $z_5^* = 0.5$. Pelo item a) do Teorema 14, temos que os zeros de $P(z)$ que estão em C são também zeros de $P^*(z)$ e, pelo item c), como $P(z)$ tem quatro zeros em D e é de grau 5, $P^*(z)$ tem um único zero em $|z| < 1$, o que pode ser observado nas figuras.

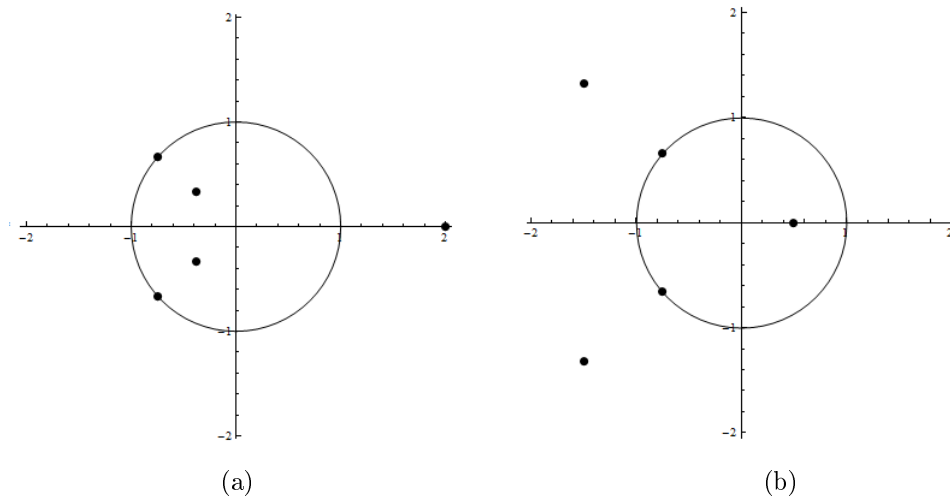


Figura 4.1: Localização dos zeros dos polinômios (a) $P(z) = 4z^5 + z^4 - 8.5z^3 - 14.5z^2 - 8z - 2$ e (b) $P^*(z) = -2z^5 - 8z^4 - 14.5z^3 - 8.5z^2 + z + 4$.

O valor do polinômio $P_n^*(z)$ no círculo unitário é dado por

$$\begin{aligned} P_n^*(e^{i\theta}) &= \bar{a}_{n,0} \prod_{j=1}^n \left(e^{i\theta} - \frac{1}{\bar{z}_j} \right) \\ &= \frac{\bar{a}_{n,0} e^{in\theta} (-1)^n}{\bar{z}_1 \bar{z}_2 \dots \bar{z}_n} \prod_{j=1}^n (e^{-i\theta} - \bar{z}_j) \\ &= e^{in\theta} \overline{P_n(e^{-i\theta})}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$|P_n^*(e^{i\theta})| = |P_n(e^{i\theta})|.$$

Este resultado será utilizado na demonstração dos próximos teoremas.

Teorema 15 Para $P_n(z) = \sum_{j=0}^n a_{n,j}z^j$, $a_{n,n} \neq 0$, as seguintes afirmações são equivalentes:

- a) P_n é auto-inversível;
- b) $\bar{a}_{n,n}P_n(z) = a_{n,0}z^n \overline{P_n\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$ para cada número complexo z ;
- c) $\bar{a}_{n,k} = ua_{n,n-k}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$, onde $|u| = 1$.

Demonstração.

a) \Rightarrow b)

Temos que

$$\begin{aligned} P_n^*(z) &= z^n \overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} \\ &= z^n \bar{a}_{n,n} \prod_{j=1}^n \left(\frac{1}{\bar{z}} - z_j\right) \\ &= \bar{a}_{n,n} \prod_{j=1}^n \bar{z} \left(\frac{1}{\bar{z}} - z_j\right) \\ &= \bar{a}_{n,n} \prod_{j=1}^n (1 - z\bar{z}_j) \\ &= \bar{a}_{n,n} (1 - z\bar{z}_1)(1 - z\bar{z}_2)\dots(1 - z\bar{z}_n) \\ &= \bar{a}_{n,n} \left(\bar{z}_1 \left(\frac{1}{\bar{z}_1} - z\right)\right) \left(\bar{z}_2 \left(\frac{1}{\bar{z}_2} - z\right)\right) \dots \left(\bar{z}_n \left(\frac{1}{\bar{z}_n} - z\right)\right) \\ &= \bar{a}_{n,n} (\bar{z}_1 \bar{z}_2 \dots \bar{z}_n) \left(\frac{1}{\bar{z}_1} - z\right) \left(\frac{1}{\bar{z}_2} - z\right) \dots \left(\frac{1}{\bar{z}_n} - z\right) \\ &= \frac{\bar{a}_{n,n}}{z_1 z_2 \dots z_n} (z_1 - z)(z_2 - z)\dots(z_n - z) \\ &= \frac{\bar{a}_{n,n} (-1)^n}{z_1 z_2 \dots z_n} (z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_n). \end{aligned}$$

Através da fórmula de Viète

$$(-1)^n \frac{a_{n,0}}{a_{n,n}} = z_1 z_2 \dots z_n$$

segue que

$$P_n^*(z) = \frac{\bar{a}_{n,n}}{a_{n,0}} P_n(z),$$

e assim,

$$\bar{a}_{n,n} P_n(z) = a_{n,0} z^n \overline{P_n\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}.$$

b) \Rightarrow c)

Como, para $z \in C$, $|P_n^*(z)| = |P_n(z)|$, fazendo

$$|\bar{a}_{n,n} P_n(z)| = \left| a_{n,0} z^n \overline{P_n\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} \right|,$$

obtemos que $|a_{n,n}| = |a_{n,0}|$.

Temos que $u = \frac{\bar{a}_{n,n}}{a_{n,0}}$, onde $|u| = 1$. Da hipótese, segue que

$$\begin{aligned} \frac{\bar{a}_{n,n}}{a_{n,0}} P_n(z) &= z^n \overline{P_n\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} \\ \frac{\bar{a}_{n,n}}{a_{n,0}} (a_{n,0} + a_{n,1}z + \dots + a_{n,n}z^n) &= z^n \left(\bar{a}_{n,0} + \bar{a}_{n,1}\frac{1}{z} + \dots + \bar{a}_{n,n}\frac{1}{z^n} \right) \\ u(a_{n,0} + a_{n,1}z + \dots + a_{n,n}z^n) &= \bar{a}_{n,0}z^n + \bar{a}_{n,1}z^{n-1} + \dots + \bar{a}_{n,n}. \end{aligned}$$

Logo, $\bar{a}_{n,k} = ua_{n,n-k}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

c) \Rightarrow a)

Note que

$$P_n^*(z) = z^n \overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = \bar{a}_{n,0}z^n + \bar{a}_{n,1}z^{n-1} + \dots + \bar{a}_{n,n}.$$

Como $\bar{a}_{n,k} = ua_{n,n-k}$, para $k = 0, 1, 2, \dots, n$, temos

$$P_n^*(z) = ua_{n,n}z^n + ua_{n,n-1}z^{n-1} + \dots + ua_{n,0} = uP_n(z).$$

Uma vez que $|u| = 1$, $P_n(z)$ é auto-inversível. ■

Teorema 16 *Seja $P_n(z) = \sum_{j=0}^n a_{n,j}z^j$, $a_{n,n} \neq 0$, um polinômio auto-inversível. Então,*

$$\bar{a}_{n,n}[nP_n(z) - zP_n'(z)] = a_{n,0}z^{n-1} \overline{P_n'\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$$

e

$$\left| \frac{nP_n(z)}{zP_n'(z)} - 1 \right| = 1 \text{ para cada } z \in C,$$

onde $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ é o círculo unitário.

Demonstração. Com $P_n(z) = \sum_{j=0}^n a_{n,j}z^j$ é um polinômio auto-inversível, temos, do Teorema 14, que

$$\bar{a}_{n,n}P_n(z) = a_{n,0}z^n \overline{P_n\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}. \quad (4.1)$$

Derivando essa expressão com respeito à z , segue que

$$\begin{aligned} \bar{a}_{n,n}P_n'(z) &= na_{n,0}z^{n-1} \overline{P_n\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} + a_{n,0}z^n \overline{\left(P_n\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)\right)'} \\ &= na_{n,0}z^{n-1} \overline{P_n\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} + a_{n,0}z^n (-1)(z^{-2}) \overline{P_n'\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} \\ &= na_{n,0}z^{n-1} \overline{P_n\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} - a_{n,0}z^{n-2} \overline{P_n'\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}. \end{aligned}$$

Então

$$z\bar{a}_{n,n}P_n'(z) = na_{n,0}z^n \overline{P_n\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} - a_{n,0}z^{n-1} \overline{P_n'\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}. \quad (4.2)$$

Substituindo (4.1) em (4.2),

$$\begin{aligned}
z\bar{a}_{n,n}P'_n(z) &= n\bar{a}_{n,n}P_n(z) - \bar{a}_{n,0}z^{n-1}\overline{P'_n\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} \\
\Rightarrow n\bar{a}_{n,n}P_n(z) - z\bar{a}_{n,n}P'_n(z) &= \bar{a}_{n,0}z^{n-1}\overline{P'_n\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} \\
\Rightarrow \bar{a}_{n,n}[nP_n(z) - zP'_n(z)] &= \bar{a}_{n,0}z^{n-1}\overline{P'_n\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)},
\end{aligned}$$

o que mostra o primeiro resultado.

Sabendo que $|P_n^*(z)| = |P_n(z)|$, para $z \in C$, implica em $|a_{n,n}| = |a_{n,0}|$, temos que $|a_{n,0}| \neq 0$. Tomando, então, o módulo na expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned}
\left|\bar{a}_{n,n}[nP_n(z) - zP'_n(z)]\right| &= \left|\bar{a}_{n,0}z^{n-1}\overline{P'_n\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}\right| \Rightarrow \\
\Rightarrow \frac{|\bar{a}_{n,n}||nP_n(z) - zP'_n(z)|}{|\bar{a}_{n,0}||z^{n-1}\overline{P'_n\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}|} &= 1 \Rightarrow \\
\Rightarrow \frac{|nP_n(z) - zP'_n(z)|}{|(P'_n(z))^*|} &= 1 \Rightarrow \\
\Rightarrow \frac{|nP_n(z) - zP'_n(z)|}{|P'_n(z)|} &= 1 \Rightarrow \\
\Rightarrow \left|\frac{nP_n(z) - zP'_n(z)}{P'_n(z)}\right| &= 1 \Rightarrow \\
\Rightarrow \left|\frac{z nP_n(z) - zP'_n(z)}{z P'_n(z)}\right| &= 1 \Rightarrow \\
\Rightarrow |z| \left|\frac{nP_n(z)}{zP'_n(z)} - 1\right| &= 1 \\
\Rightarrow \left|\frac{nP_n(z)}{zP'_n(z)} - 1\right| &= 1.
\end{aligned}$$

■

Polinômios L-ortogonais na reta real

Neste capítulo serão apresentadas as funções de Laurent ou L-polinômios e, em seguida, resultados sobre os polinômios L-ortogonais. As referências aqui utilizadas foram [10] e [21].

5.1 Polinômios de Laurent ortogonais

Definição 17 Sendo $p \leq q$ dois números inteiros, $\Lambda_{p,q}$ é o espaço das funções definidas por

$$R(z) = \sum_{k=p}^q r_k \cdot z^k, \quad z \in \mathbb{C} \text{ e } r_k \in \mathbb{C}, \quad k = p, \dots, q.$$

Tais funções são conhecidas por polinômios de Laurent ou L-polinômios.

Temos então que, sendo P_n o espaço dos polinômios de grau no máximo n , $P_n = \Lambda_{0,n}$.

Denotaremos $\Lambda_{2n} = \{R \in \Lambda_{-n,n} : r_n \neq 0\}$ e $\Lambda_{2n+1} = \{R \in \Lambda_{-n-1,n} : r_{-n-1,n} \neq 0\}$, onde $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 17 Para todo L-polinômio R , existe um único $i \in \mathbb{N}$ tal que $R \in \Lambda_i$.

Demonstração.

A demonstração será feita apenas para i sendo par, mas para i ímpar é análoga.

Sejam i e j números naturais pares distintos. Suponha que $R \in \Lambda_i$ e $R \in \Lambda_j$. Então,

$$R \in \Lambda_{-\frac{i}{2}, \frac{i}{2}} \Rightarrow R(z) = \sum_{k=-\frac{i}{2}}^{\frac{i}{2}} r_k \cdot z^k, \quad r_{\frac{i}{2}} \neq 0 \quad (5.1)$$

e

$$R \in \Lambda_{-\frac{j}{2}, \frac{j}{2}} \Rightarrow R(z) = \sum_{k=-\frac{j}{2}}^{\frac{j}{2}} r_k \cdot z^k, \quad r_{\frac{j}{2}} \neq 0. \quad (5.2)$$

De (5.1) e (5.2),

$$\sum_{k=-\frac{i}{2}}^{\frac{i}{2}} r_k \cdot z^k = \sum_{k=-\frac{j}{2}}^{\frac{j}{2}} r_k \cdot z^k.$$

Então,

$$r_{-\frac{i}{2}}.z^{-\frac{i}{2}} + \dots + r_{\frac{i}{2}}.z^{\frac{i}{2}} = r_{-\frac{j}{2}}.z^{-\frac{j}{2}} + \dots + r_{-\frac{i}{2}}.z^{-\frac{i}{2}} + \dots + r_{\frac{i}{2}}.z^{\frac{i}{2}} + r_{\frac{j}{2}}.z^{\frac{j}{2}}.$$

Como $r_{\frac{j}{2}} \neq 0$ temos um absurdo. Logo, existe um único i natural par tal que $R \in \Lambda_i$. ■

Um L -polinômio R é de L -grau m se $R \in \Lambda_m$, $m \in N$ e é mônico se o coeficiente principal for igual a 1. Se $R \in \Lambda_{2n}$ o coeficiente principal é o coeficiente do termo t^n e se $R \in \Lambda_{2n+1}$ o coeficiente principal é o coeficiente do termo t^{-n-1} .

Consideremos uma medida forte em (a, b) , $0 \leq a < b \leq \infty$, e os momentos

$$\mu_m^\psi = \int_a^b t^m d\psi(t), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.3)$$

Os determinantes de Hankel, dados em (2.3) são positivos para m e n inteiros e $n > 0$. Para mostrar esse fato, primeiramente precisamos definir o funcional de momento

$$L[t^m] = \int_a^b t^m d\psi(t) = \mu_m^\psi,$$

onde ψ é uma medida forte em (a, b) . Pelo Teorema 3.3 de [5], como

$$L[\pi(t)] = \int_a^b \pi(t) d\psi(t) > 0$$

para todo polinômio $\pi(t)$ que não é identicamente nulo e é não-negativo para todo t real, L é positivo-definido e assim os momentos são reais e existe uma sequência de polinômios ortogonais reais correspondente. Sendo $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ tal sequência, vamos supor que os polinômios ortogonais $P_n(x)$ são mônicos, sem perda de generalidade. Temos então, do Teorema 3.2 de [5], que

$$0 < L[P_n^2(x)] = \frac{H_n^m}{H_{n-1}^m}, \quad n \geq 0.$$

Uma vez que $H_{-1}^{(m)} = 1$, também pelo Teorema 3.2 de [5], segue por indução que $H_n^{(m)} > 0$, $n \geq 0$.

Definição 18 Uma sequência $\{R_n\}_{n=0}^\infty$ é chamada sequência de polinômios de Laurent ortogonais com relação à medida ψ em (a, b) se

a) $R_n \in \Lambda_n$, $n \in N$,

$$a) \int_a^b R_n(t)R_m(t)d\psi(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ \kappa_n \neq 0, & \text{se } m = n. \end{cases}$$

Consideraremos aqui os polinômios de Laurent na forma mônica, isto é,

$$R_{2n}(t) = \sum_{j=-n}^n r_{2n,j}.t^j, \quad \text{com } r_{2n,n} = 1,$$

$$R_{2n+1}(t) = \sum_{j=-n-1}^n r_{2n+1,j}.t^j, \quad \text{com } r_{2n+1,-n-1} = 1.$$

O resultado a seguir é análogo ao Teorema 3 sobre polinômios ortogonais.

Teorema 18 Se $\{R_n\}_{n=0}^{\infty}$ é uma seqüência de L-polinômios tal que R_n é de L-grau n , $n \in \mathbb{N}$, então as seguintes afirmações são equivalentes:

- a) $\{R_n\}_{n=0}^{\infty}$ é uma seqüência de polinômios de Laurent ortogonais;
- b) $\int_a^b R(t)R_n(t)d\psi(t) \begin{cases} = 0, & \text{para todo polinômio } R \text{ de L-grau } \leq n-1, \\ \neq 0, & \text{se } R \text{ tem L-grau } n; \end{cases}$
- c) $\int_a^b t^m R_{2n}(t)d\psi(t) = \sum_{j=-n}^n r_{2n,j} \mu_{j+m}^{\psi} \begin{cases} = 0, & \text{se } -n \leq m \leq n-1, \\ \neq 0, & \text{se } m = n; \end{cases}$
- $\int_a^b t^m R_{2n+1}(t)d\psi(t) = \sum_{j=-n-1}^n r_{2n+1,j} \mu_{j+m}^{\psi} = \begin{cases} = 0, & \text{se } -n \leq m \leq n, \\ \neq 0, & \text{se } m = -n-1. \end{cases}$

Demonstração.

Antes de demonstrar o teorema, é necessário mostrar que $R_0(t), R_1(t), \dots, R_m(t)$ são linearmente independentes e formam uma base para Λ_m .

Sejam $c_j, j = 0, 1, \dots, m$ constantes reais tais que

$$\sum_{j=0}^m c_j R_j(t) = 0.$$

Logo, para cada L-polinômio $R_k(t), 0 \leq k \leq m$, obtemos

$$\sum_a^b \sum_{j=0}^m c_j R_j(t) R_k(t) d\psi(t) = \int_a^b 0 R_k(t) d\psi(t) = 0,$$

ou seja,

$$\sum_{j=0}^m c_j \int_a^b R_j(t) R_k(t) d\psi(t) = 0. \quad (5.4)$$

Por (5.4) e pela definição de polinômios de Laurent ortogonais,

$$0 = \sum_{j=0}^m c_j \int_a^b R_j(t) R_k(t) d\psi(t) = c_k \int_a^b R_k(t) R_k(t) d\psi(t) \Rightarrow c_k = 0,$$

para $k = 0, 1, \dots, m$.

Portanto, $R_0(t), R_1(t), \dots, R_m(t)$ são linearmente independentes e formam uma base para Λ_m .

Estamos aptos agora a demonstrar o teorema:

a) \Rightarrow b)

Se $R(t) \in \Lambda_m, m = 0, 1, \dots, n-1$, podemos escrevê-lo como

$$R(t) = \sum_{j=0}^m \alpha_j R_j(t),$$

$\alpha_j \neq 0$ e $\alpha_j \in \mathbb{R}$.

Assim,

$$\int_a^b R(t) R_n(t) d\psi(t) = \int_a^b \sum_{j=0}^m \alpha_j R_j(t) R_n(t) d\psi(t) = \sum_{j=0}^m \alpha_j \int_a^b R_j(t) R_n(t) d\psi(t) = 0,$$

pois $j < n$.

Se $R(t) \in \Lambda_n$, temos

$$R(t) = \sum_{j=0}^n \alpha_j R_j(t),$$

$\alpha_n \neq 0$ e $\alpha_j \in \mathbb{R}$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_a^b R(t)R_n(t)d\psi(t) &= \int_a^b \sum_{j=0}^n \alpha_j R_j(t)R_n(t)d\psi(t) \\ &= \sum_{j=0}^n \alpha_j \int_a^b R_j(t)R_n(t)d\psi(t) \\ &= \alpha_n \int_a^b R_n(t)R_n(t)d\psi(t) \\ &= \alpha_n \kappa_n \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

b) \Rightarrow c)

Seja $n \in N$, fixo e arbitrário, e $m \in \{0, \pm 1, \dots, \pm(n-1), \pm n\}$ dado.

Se $m \neq n$, $t^m \in \Lambda_k$, para $k < n$, e assim

$$\int_a^b t^m R_{2n}(t)d\psi(t) = 0.$$

Se $m = n$, então $t^m \in \Lambda_{2n}$ e daí

$$\int_a^b t^m R_{2n}(t)d\psi(t) \neq 0.$$

Também, para m qualquer,

$$\int_a^b t^m R_{2n}(t)d\psi(t) = \sum_{j=-n}^n r_{2n,j} \int_a^b t^m t^j d\psi(t) = \sum_{j=-n}^n r_{2n,j} \mu_{j+m}^\psi.$$

Seja agora $m \in \{0, \pm 1, \dots, \pm n, -(n+1)\}$ dado. Se $m \neq -(n+1)$, $t^m \in \Lambda_k$, $k < 2n+1$, implicando em

$$\int_a^b t^m R_{2n+1}(t)d\psi(t) = 0,$$

e se $m = -(n+1)$, $t^m \in \Lambda_{2n+1}$, temos

$$\int_a^b t^m R_{2n+1}(t)d\psi(t) \neq 0.$$

Para m qualquer,

$$\int_a^b t^m R_{2n+1}(t) d\psi(t) = \sum_{j=-n-1}^n r_{2n+1,j} \int_a^b t^m t^j d\psi(t) = \sum_{j=-n-1}^n r_{2n+1,j} \mu_{j+m}^\psi.$$

c) \Rightarrow a)

Temos que $R_{2n}(t) = \sum_{j=-n}^n r_{2n,j} t^j$, $r_{2n,n} \neq 0$ e $R_{2n+1}(t) = \sum_{j=-n-1}^n r_{2n+1,j} t^j$, $r_{2n+1,-n-1} \neq 0$.

Assumindo $m \leq n$, temos

$$\int_a^b R_{2m}(t) R_{2n}(t) d\psi(t) = \sum_{j=-m}^m r_{2m,j} \int_a^b t^j R_{2n}(t) d\psi(t) = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ r_{2m,m} \kappa_{2n}, & \text{se } m = n, \end{cases}$$

e

$$\int_a^b R_{2m+1}(t) R_{2n+1}(t) d\psi(t) = \sum_{j=-(m+1)}^m r_{2m+1,j} \int_a^b t^j R_{2n+1}(t) d\psi(t) = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ r_{2m+1,-(m+1)} \kappa_{2n+1}, & \text{se } m = n. \end{cases}$$

Se $m < n$, $\int_a^b R_{2m+1}(t) R_{2n}(t) d\psi(t) = \sum_{j=-(m+1)}^m r_{2m+1,j} \int_a^b t^j R_{2n}(t) d\psi(t) = 0$ e, se $m \geq n$,

$$\int_a^b R_{2m+1}(t) R_{2n}(t) d\psi(t) = \sum_{j=-n}^n r_{2n,j} \int_a^b t^j R_{2m+1}(t) d\psi(t) = 0.$$

Como $r_{2m,m} \kappa_{2n} \neq 0$ e $r_{2m+1,-(m+1)} \kappa_{2n+1} \neq 0$, o resultado fica demonstrado. ■

Se utilizarmos o item c) com $-n, -n+1, \dots, n-1$ chegamos a um sistema de equações lineares, assim como feito para os polinômios ortogonais. Pela Regra de Cramer, obtemos

$$R_{2n}(t) = \frac{1}{H_{2n}^{(-2n)}} \begin{vmatrix} \mu_{-2n}^\psi & \mu_{-2n+1}^\psi & \cdots & \mu_{-1}^\psi & \mu_0^\psi \\ \mu_{-2n+1}^\psi & \mu_{-2n+2}^\psi & \cdots & \mu_0^\psi & \mu_1^\psi \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_{-1}^\psi & \mu_0^\psi & \cdots & \mu_{2n-2}^\psi & \mu_{2n-1}^\psi \\ t^{-n} & t^{-n+1} & \cdots & t^{n-1} & t^n \end{vmatrix}.$$

Analogamente, fazendo $m = -n, -n+1, \dots, n$ e usando novamente a Regra de Cramer, obtemos

$$R_{2n+1}(t) = \frac{1}{H_{2n+1}^{(-2n)}} \begin{vmatrix} t^{-n-1} & t^{-n} & \cdots & t^{n-1} & t^n \\ \mu_{-2n-1}^\psi & \mu_{-2n}^\psi & \cdots & \mu_{-1}^\psi & \mu_0^\psi \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_{-2}^\psi & \mu_{-1}^\psi & \cdots & \mu_{2n-2}^\psi & \mu_{2n-1}^\psi \\ \mu_{-1}^\psi & \mu_0^\psi & \cdots & \mu_{2n-1}^\psi & \mu_{2n}^\psi \end{vmatrix}.$$

Como $H_n^{(m)} > 0$ garantimos a existência dos polinômios de Laurent ortogonais, que não satisfazem a uma relação de recorrência de três termos.

5.2 Polinômios L-ortogonais

Definição 19 Sendo ψ uma medida forte no intervalo (a, b) , $0 \leq a < b \leq \infty$, $t \in \mathbb{R}$ e B_n um polinômio mônico de grau exatamente n , dizemos que $\{B_n\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de polinômios L-ortogonais com relação a $d\psi$ em (a, b) se

$$\int_a^b t^{-n+s} B_n(t) d\psi(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq s \leq n-1, \\ \rho_n > 0, & \text{se } s = n. \end{cases} \quad (5.5)$$

ou, de maneira equivalente,

$$\int_a^b t^k B_n(t) d\psi(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } k = -1, -1, \dots, -n+1, -n, \\ \rho_n > 0, & \text{para } k = 0. \end{cases} \quad (5.6)$$

Escrevendo B_n em termos de seus coeficientes,

$$B_n(t) = \sum_{k=0}^n b_{n,k} t^k, \text{ com } b_{n,n} = 1, \quad (5.7)$$

obtemos

$$\int_a^b t^{-n+s} B_n(t) d\psi(t) = \sum_{k=0}^n b_{n,k} \mu_{-n+s+k}^{\psi} = \begin{cases} 0, & \text{se } s = 0, 1, \dots, n-1, \\ \rho_n > 0, & \text{se } s = n. \end{cases} \quad (5.8)$$

Fazendo $s = 0, 1, \dots, n-1$ em (5.8), obtemos um sistema linear, e, acrescentando (5.7) como a última linha desse sistema, podemos utilizar a Regra de Cramer para escrever B_n da seguinte forma

$$B_n(t) = \frac{1}{H_n^{(-n)}} \begin{vmatrix} \mu_{-n}^{\psi} & \mu_{-n+1}^{\psi} & \cdots & \mu_{-1}^{\psi} & \mu_0^{\psi} \\ \mu_{-n+1}^{\psi} & \mu_{-n+2}^{\psi} & \cdots & \mu_0^{\psi} & \mu_1^{\psi} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_{-1}^{\psi} & \mu_0^{\psi} & \cdots & \mu_{n-2}^{\psi} & \mu_{n-1}^{\psi} \\ 1 & t & \cdots & t^{n-1} & t^n \end{vmatrix}. \quad (5.9)$$

Como $H_n^{(-n)} > 0$, garantimos a existência dos polinômios L-ortogonais B_n .

Fazendo $s = n$ em (5.8) e substituindo a última linha do sistema anterior pela equação obtida, podemos resolver o sistema resultante usando novamente a Regra de Cramer e assim vamos obter

$$\rho_n = \frac{H_{n+1}^{(-n)}}{H_n^{(-n)}}. \quad (5.10)$$

A partir de (5.9) obtemos que $t = 0$ não é zero de B_n . De fato, fazendo $t = 0$ em (5.9),

$$B_n(0) = \frac{1}{H_n^{(-n)}} \begin{vmatrix} \mu_{-n}^{\psi} & \mu_{-n+1}^{\psi} & \cdots & \mu_{-1}^{\psi} & \mu_0^{\psi} \\ \mu_{-n+1}^{\psi} & \mu_{-n+2}^{\psi} & \cdots & \mu_0^{\psi} & \mu_1^{\psi} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_{-1}^{\psi} & \mu_0^{\psi} & \cdots & \mu_{n-2}^{\psi} & \mu_{n-1}^{\psi} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

e utilizando a Regra de Cramer

$$b_{n,0} = B_n(0) = (-1)^n \frac{H_n^{(-n+1)}}{H_n^{(-n)}} \neq 0. \quad (5.11)$$

Seja

$$\eta_n = \int_a^b t^{-n-1} B_n(t) d\psi(t),$$

obtido fazendo-se $s = -1$ em (5.5). Obtemos de (5.3) e (5.7)

$$\eta_n = b_{n,n} \mu_{-1}^\psi + b_{n,n-1} \mu_{-2}^\psi + \dots + b_{n,1} \mu_{-n}^\psi + b_{n,0} \mu_{-n-1}^\psi.$$

Fazendo $s = -1, 0, 1, \dots, n-1$ na integral em (5.5), obtemos o sistema

$$\begin{cases} \int_a^b t^{-n-1} B_n(t) d\psi(t) = b_{n,n} \mu_{-1}^\psi + \dots + b_{n,0} \mu_{-n-1}^\psi = \eta_n \\ \int_a^b t^{-n} B_n(t) d\psi(t) = b_{n,n} \mu_0^\psi + \dots + b_{n,0} \mu_{-n}^\psi = 0 \\ \vdots \\ \int_a^b t^{-1} B_n(t) d\psi(t) = b_{n,n} \mu_{-1+n}^\psi + \dots + b_{n,0} \mu_{-1}^\psi = 0 \end{cases}$$

que na forma matricial fica

$$\begin{pmatrix} \mu_{-n-1}^\psi & \dots & \mu_{-1}^\psi \\ \mu_{-n}^\psi & \dots & \mu_0^\psi \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_{-1}^\psi & \dots & \mu_{n-1}^\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{n,0} \\ b_{n,1} \\ \vdots \\ b_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resolvendo pela Regra de Cramer,

$$B_n(0) = b_{n,0} = \eta_n \frac{H_n^{(-n+1)}}{H_{n+1}^{-(n+1)}}.$$

De (5.11),

$$\eta_n = (-1)^n \frac{H_{n+1}^{-(n+1)}}{H_n^{(-n)}}. \quad (5.12)$$

5.2.1 Polinômios associados aos L-ortogonais

Definição 20 *Os polinômios*

$$C_n(t) = \int_a^b \frac{B_n(z) - B_n(t)}{z - t} d\psi(z) \quad (5.13)$$

são associados ao polinômio B_n .

O polinômio associado C_n tem grau $n - 1$, $n \geq 1$. De fato, Seja $B_n(t) = \sum_{k=0}^n b_{n,k} t^k$. Assim,

$$B_n(z) - B_n(t) = b_{n,n}(z^n - t^n) + b_{n,n+1}(z^{n-1} - t^{n-1}) + \dots + b_{n,1}(z - t) = \sum_{k=1}^n b_{n,k}(z^k - t^k).$$

Substituindo em (5.13),

$$C_n(t) = \sum_{k=1}^n b_{n,k} \int_a^b \frac{z^k - t^k}{z - t} d\psi(z) = \sum_{k=1}^n b_{n,k} (\mu_{k-1}^\psi + \mu_{k-2}^\psi t + \dots + \mu_1^\psi t^{k-2} + \mu_0^\psi t^{k-1}).$$

Desenvolvendo o somatório, obtemos

$$C_n(t) = b_{n,n} \mu_0^\psi t^{n-1} + (b_{n,n} \mu_1^\psi + b_{n,n-1} \mu_0^\psi) t^{n-1} + \dots + b_{n,1} \mu_0^\psi,$$

ou seja, C_n tem grau $n - 1$.

Teorema 19 *Os polinômios C_n satisfazem*

$$C_n(t) = \int_a^b z^{-m} \frac{t^m B_n(z) - z^m B_n(t)}{z - t} d\psi(z),$$

$m = 0, 1, \dots, n$.

Demonstração. Se $m = 0$, temos (5.13). Consideremos então $m = 1, 2, \dots, n$. De (5.13),

$$C_n(t) = \int_a^b z^{-m} \frac{z^m B_n(z) - z^m B_n(t)}{z - t} d\psi(z).$$

Somando-se e subtraindo-se o termo $t^m B_n(z)$, obtemos

$$C_n(t) = \int_a^b z^{-m} \frac{t^m B_n(z) - z^m B_n(t)}{z - t} d\psi(z) + \int_a^b z^{-m} B_n(z) \frac{z^m - t^m}{z - t} d\psi(z).$$

Como $\frac{z^m - t^m}{z - t} = \sum_{k=0}^{m-1} z^k t^{m-1-k}$, então

$$C_n(t) = \int_a^b z^{-m} \frac{t^m B_n(z) - z^m B_n(t)}{z - t} d\psi(z) + \sum_{k=0}^{m-1} z^k t^{m-1-k} \int_a^b z^{k-m} B_n(z) d\psi(z).$$

Mas, como

$$\int_a^b z^{k-m} B_n(z) d\psi(z) = 0,$$

para $m = 1, 2, \dots, n$ e $k = 0, 1, \dots, m - 1$, temos que

$$C_n(t) = \int_a^b z^{-m} \frac{t^m B_n(z) - z^m B_n(t)}{z - t} d\psi(z),$$

para $0 \leq m \leq n$. ■

5.2.2 Relação de recorrência de três termos

O primeiro resultado que apresentaremos aqui diz respeito ao conjunto de polinômios $\{t_{n-j}B_j\}_{j=0}^n$.

Lema 1 Para $n \geq 1$, o conjunto de polinômios $\{t_{n-j}B_j\}_{j=0}^n$ é linearmente independente.

Demonstração. Note que os polinômios $t_{n-j}B_j$, $j = 0, 1, \dots, n$, são mônicos e de grau n . Sejam γ_j , $j = 0, 1, \dots, n$, constantes tais que

$$\sum_{j=0}^n \gamma_j t^{n-j} B_j(t) = \gamma_0 t_n B_0(t) + \gamma_1 t_{n-1} B_1(t) + \dots + \gamma_n B_n(t) = 0.$$

Se multiplicarmos ambos os lados por t_{s-n} e integrarmos com respeito a ψ no intervalo (a, b) , obtemos

$$\sum_{j=0}^n \gamma_j \int_a^b t^{s-j} B_j(t) dz \psi(t) = 0. \quad (5.14)$$

De (5.5) sabemos que

$$\int_a^b t_{-j+s} B_j(t) d\psi(t) = 0, \text{ para } s = 0, 1, \dots, j-1.$$

Fazendo $s = 0, 1, \dots, n$ em (5.14), obtemos o sistema triangular inferior de equações lineares

$$\sum_{j=0}^s \gamma_j \int_a^b t^{-j+s} B_j(t) d\psi(t) = 0, \text{ para } s = 0, 1, \dots, n.$$

Como $\rho_s = \int_a^b B_s(t) d\psi(t) \neq 0$, então $\gamma_s = 0$, $s = 0, 1, \dots, n$. Assim, para $n \geq 1$, o conjunto de polinômios $\{t_{n-j}B_j\}_{j=0}^n$ é linearmente independente. ■

Teorema 20 Os polinômios B_n e C_n satisfazem às seguintes relações de recorrência de três termos, para $n \geq 1$,

$$B_{n+1}(t) = (t - \beta_{n+1})B_n(t) - \alpha_{n+1}tB_{n-1}(t), \quad (5.15)$$

$$C_{n+1}(t) = (t - \beta_{n+1})C_n(t) - \alpha_{n+1}tC_{n-1}(t), \quad (5.16)$$

com $B_0(t) = 1$, $B_1(t) = t - \beta_1$, $C_0(t) = 0$, $C_1(t) = \mu_0^\psi$ e

$$\beta_1 = \frac{\mu_0^\psi}{\mu_{-1}^\psi}, \quad \alpha_{n+1} = \frac{\rho_n}{\rho_{n-1}}, \quad \beta_{n+1} = -\alpha_{n+1} \frac{\eta_{n-1}}{\eta_n}.$$

Demonstração. Sendo B_n , $n \geq 0$, polinômios mônicos de grau n , o polinômio $B_{n+1}(t) - tB_n(t)$ é de grau no máximo n em t . Dessa forma, pelo Lema 1, podemos escrever

$$B_{n+1}(t) - tB_n(t) = \sum_{j=0}^n \gamma_j t^{n-j} B_j(t), \quad (5.17)$$

e, multiplicando ambos os membros dessa igualdade por t^k e integrando com respeito a ψ em (a, b) , obtemos

$$\int_a^b t^k B_{n+1}(t) d\psi(t) - \int_a^b t^{k+1} B_n(t) d\psi(t) = \sum_{j=0}^n \gamma_j \int_a^b t^{n-j+k} B_j(t) d\psi(t). \quad (5.18)$$

• Fazendo $k = -n$ em (5.18), obtemos

$$\int_a^b t^{-n} B_{n+1}(t) d\psi(t) - \int_a^b t^{-n+1} B_n(t) d\psi(t) = \sum_{j=0}^n \gamma_j \int_a^b t^{-j} B_j(t) d\psi(t).$$

Note que se $k = 1, \dots, n$, a integral do segundo membro é nula, mas se $k = 0$, por (5.6), teremos

$$\sum_{j=0}^n \gamma_j \int_a^b t^{-j} B_j(t) d\psi(t) = \gamma_0 \rho_0,$$

e, ainda por (5.6), $0 = \gamma_0 \rho_0$. Assim, como $\rho_0 > 0$, $\gamma_0 = 0$.

• Fazendo $k = -n + 1$ em (5.18) e usando o fato de que $\gamma_0 = 0$, obtemos

$$\int_a^b t^{-n+1} B_{n+1}(t) d\psi(t) - \int_a^b t^{-n+2} B_n(t) d\psi(t) = \sum_{j=1}^n \gamma_j \int_a^b t^{-j+1} B_j(t) d\psi(t).$$

De (5.6), temos que $0 = \gamma_1 \rho_1$ e, uma vez que $\rho_1 > 0$, então $\gamma_1 = 0$.

• Fazendo $k = -n + 1, -n + 3, \dots, -2$ em (5.18), concluímos que

$$\gamma_2 = \gamma_3 = \dots = \gamma_{n-2} = 0.$$

Substituindo $\gamma_j = 0$, para $j = 0, 1, \dots, n - 2$, em (5.17), obtemos

$$B_{n+1}(t) - tB_n(t) = \gamma_n B_n(t) + \gamma_{n-1} B_{n-1}(t),$$

isto é, os polinômios $\{B_n\}$ satisfazem a uma relação de recorrência de três termos.

Fazendo $k = -1$ em (5.18) podemos determinar o valor de γ_{n-1} , ou seja,

$$\int_a^b t^{-1} B_{n+1}(t) d\psi(t) - \int_a^b B_n(t) d\psi(t) = \gamma_n \int_a^b t^{-1} B_n(t) d\psi(t) + \gamma_{n-1} \int_a^b B_{n-1}(t) d\psi(t).$$

Logo,

$$- \int_a^b B_n(t) d\psi(t) = \gamma_{n-1} \int_a^b B_{n-1}(t) d\psi(t),$$

ou seja,

$$\gamma_{n-1} = -\frac{\rho_n}{\rho_{n-1}}.$$

Para obter o valor de γ_n fazemos $k = -(n + 1)$ em (5.18). Assim,

$$\int_a^b t^{-(n+1)} B_{n+1}(t) d\psi(t) - \int_a^b t^{-n} B_n(t) d\psi(t) = \gamma_n \int_a^b t^{-n-1} B_n(t) d\psi(t) + \gamma_{n-1} \int_a^b t^{-n} B_{n-1}(t) d\psi(t).$$

Logo,

$$0 = \gamma_n \eta_n + \gamma_{n-1} \eta_{n-1} \Rightarrow \gamma_n = -\gamma_{n-1} \frac{\eta_{n-1}}{\eta_n}.$$

Fazendo, para $n \geq 1$, $\alpha_{n+1} = -\gamma_{n-1} = \frac{\rho_n}{\rho_{n-1}}$ e $\beta_{n+1} = -\alpha_{n+1} \frac{\eta_{n-1}}{\eta_n}$, obtemos (5.15).

As condições iniciais $B_0(t) = 1$ e $B_1(t) = t - \beta_1$ são obtidas do fato de B_n ser mônico e usando

$$0 = \int_a^b t^{-1} B_1(t) d\psi(t) = \int_a^b t^{-1} (t - \beta_1) d\psi(t) = \mu_0^\psi - \beta_1 \mu_{-1}^\psi.$$

Para provar (5.16) utilizamos (5.15), de onde obtemos

$$B_{n+1}(z) - B_{n+1}(t) = (z - \beta_{n+1})B_n(z) - \alpha_{n+1}zB_{n-1}(z) - (t - \beta_{n+1})B_n(t) + \alpha_{n+1}tB_{n-1}(t).$$

Somando e subtraindo $tB_n(z)$ e $\alpha_{n+1}tB_{n-1}(z)$ no segundo membro da equação anterior, obtemos

$$\begin{aligned} B_{n+1}(z) - B_{n+1}(t) &= (t - \beta_{n+1})(B_n(z) - B_n(t)) - \alpha_{n+1}t(B_{n-1}(z) - B_{n-1}(t)) \\ &\quad + (z - t)(B_n(z) - \alpha_{n+1}B_{n-1}(z)), \end{aligned}$$

e, dividindo ambos os lados por $(z - t)$ e integrando com relação a ψ no intervalo (a, b) , obtemos

$$C_{n+1}(t) = (t - \beta_{n+1})C_n(t) - \alpha_{n+1}tC_{n-1}(t) + \rho_n - \alpha_{n+1}\rho_{n-1}.$$

Como $\alpha_{n+1} = \frac{\rho_n}{\rho_{n-1}}$, fica demonstrado o resultado. ■

De (5.10) e (5.12) obtemos outras formas de escrever os coeficientes α_{n+1} e β_{n+1} , $n \geq 0$:

$$\alpha_{n+1} = \frac{\rho_n}{\rho_{n-1}} = \frac{H_{n+1}^{(-n)} H_{n-1}^{(-(n-1))}}{H_n^{(-n)} H_n^{(-(n-1))}}$$

e

$$\begin{aligned} \beta_{n+1} &= -\alpha_{n+1} \frac{\eta_{n-1}}{\eta_n} \\ &= \alpha_{n+1} \frac{H_n^{(-n)} H_n^{(-n)}}{H_{n-1}^{(-(n-1))} H_{n+1}^{-(n+1)}} \\ &= \frac{H_{n+1}^{(-n)} H_{n-1}^{(-(n-1))}}{H_n^{(-n)} H_n^{(-(n-1))}} \frac{H_n^{(-n)} H_n^{(-n)}}{H_{n-1}^{(-(n-1))} H_{n+1}^{-(n+1)}} \\ &= \frac{H_{n+1}^{(-n)} H_n^{(-n)}}{H_n^{(-(n-1))} H_{n+1}^{-(n+1)}}. \end{aligned}$$

5.2.3 Zeros dos polinômios L -ortogonais na reta real

Teorema 21 *Os zeros dos polinômios B_n , $n \geq 1$, são reais, distintos e pertencem ao intervalo (a, b) .*

Demonstração.

- B_n possui pelo menos um zero em (a, b) , $0 \leq a < b \leq \infty$:

Suponha que B_n não tem zeros em (a, b) . Então, B_n não muda de sinal em (a, b) , isto é, $B_n(t) > 0$ ou $B_n(t) < 0$, $t \in (a, b)$. Por definição,

$$\int_a^b t^{-n} B_n(t) d\psi(t) = 0.$$

Mas como $t^{-n} > 0$ e B_n não muda de sinal em (a, b) , temos

$$\int_a^b t^{-n} B_n(t) d\psi(t) \neq 0,$$

chegando assim em uma contradição. Portanto, B_n muda de sinal pelo menos uma vez em (a, b) .

• B_n muda de sinal n vezes em (a, b) :

Suponha que B_n muda de sinal r vezes em (a, b) , $r < n$. Sejam $t_{n,1}, t_{n,2}, \dots, t_{n,r}$ os pontos onde B_n muda de sinal em (a, b) . Claramente, $t_{n,1}, t_{n,2}, \dots, t_{n,r}$ são zeros de multiplicidade ímpar de B_n . Logo,

$$(t - t_{n,1})(t - t_{n,2}) \dots (t - t_{n,r}) = \sum_{j=0}^r a_j t^j$$

é um polinômio mônico de grau r . Como $j = 0, 1, \dots, r$ e $r < n$,

$$\sum_{j=0}^r a_j \int_a^b t^{-n+j} B_n(t) d\psi(t) = 0. \quad (5.19)$$

Mas $B_n(t) = \sum_{j=0}^r a_j t^j$ é um polinômio cujos zeros têm multiplicidade par em (a, b) ou são complexos. Assim, não muda de sinal em (a, b) e, portanto,

$$\sum_{j=0}^r a_j \int_a^b t^{-n+j} B_n(t) d\psi(t) \neq 0,$$

o que contradiz (5.19). Logo, B_n muda de sinal $r \geq n$ vezes em (a, b) e como B_n é um polinômio de grau n , temos que $r = n$. Portanto, todos os zeros de B_n são simples e estão em (a, b) . ■

Consideraremos aqui os zeros de B_n ordenados em ordem crescente, ou seja,

$$a < t_{n,1} < t_{n,2} < \dots < t_{n,n} < b.$$

O resultado a seguir é uma consequência das relações de recorrência (5.15) e (5.16).

Teorema 22 *Os polinômios B_n e C_n satisfazem à seguinte relação:*

$$C_n(t)B_{n-1}(t) - C_{n-1}(t)B_n(t) = \alpha_n \alpha_{n-1} \alpha_{n-2} \dots \alpha_2 \mu_0^\psi t^{n-1}, \quad n \geq 2. \quad (5.20)$$

Além disso, o polinômio G_n , definido por

$$G_n(t) = B_n'(t)B_{n-1}(t) - B_{n-1}'(t)B_n(t), \quad n \geq 1, \quad (5.21)$$

satisfaz

$$G_{n+1}(t) = [B_n(t)]^2 + \alpha_{n+1} \beta_n [B_{n-1}(t)]^2 + \alpha_{n+1} \alpha_n t^2 G_{n-1}(t), \quad n \geq 1. \quad (5.22)$$

Demonstração.

- Vamos demonstrar primeiro (5.20). Pelo Teorema 20 temos

$$\begin{aligned} C_n(t)B_{n-1}(t) - C_{n-1}(t)B_n(t) &= [(t - \beta_n)C_{n-1}(t) - \alpha_n t C_{n-2}(t)]B_{n-1}(t) \\ &\quad - C_{n-1}(t)[(t - \beta_n)B_{n-1}(t) - \alpha_n t B_{n-2}(t)] \\ &= \alpha_n t [C_{n-1}(t)B_{n-2}(t) - C_{n-2}(t)B_{n-1}(t)], \end{aligned}$$

que é uma equação de diferenças. Logo,

$$\begin{aligned} C_n(t)B_{n-1}(t) - C_{n-1}(t)B_n(t) &= \alpha_n t [\alpha_{n-1} t (C_{n-2}(t)B_{n-3}(t) - C_{n-3}(t)B_{n-2}(t))] \\ &\quad \vdots \\ &= \alpha_n t \alpha_{n-1} t [\dots (\alpha_2 t (C_1(t)B_0(t) - C_0(t)B_1(t)))] \end{aligned}$$

Como $C_0(t) = 0$, $C_1(t) = \mu_0^\psi$, $B_0(t) = 1$ e $B_1(t) = t - \beta_1$, chegamos em

$$C_n(t)B_{n-1}(t) - C_{n-1}(t)B_n(t) = \alpha_n \alpha_{n-1} \alpha_{n-2} \dots \alpha_2 \mu_0^\psi t^{n-1}, \quad n \geq 2.$$

- Vamos demonstrar agora (5.22): de (5.21) e da relação de recorrência de três termos, obtemos

$$G_n(t) = [(t - \beta_n)B_{n-1}(t) - \alpha_n t B_{n-2}(t)]' B_{n-1}(t) - B_{n-1}'(t) [(t - \beta_n)B_{n-1}(t) - \alpha_n t B_{n-2}(t)].$$

Calculando as derivadas, teremos

$$G_n(t) = B_{n-1}^2(t) - \alpha_n B_{n-2}(t)B_{n-1}(t) + \alpha_n t G_{n-1}(t).$$

Logo,

$$G_{n+1}(t) = B_n^2(t) - \alpha_{n+1} B_{n-1}(t)B_n(t) + \alpha_{n+1} t G_n(t).$$

Como $B_n(t) = (t - \beta_n)B_{n-1}(t) - \alpha_n t B_{n-2}(t)$, obtemos

$$G_{n+1}(t) = B_n^2(t) + \alpha_{n+1} \beta_n B_{n-1}^2(t) + \alpha_{n+1} \alpha_n t^2 G_{n-1}(t).$$

■

De (5.22), obtemos

$$G_{2n+1}(t) = B_{2n}^2(t) + \alpha_{2n+1} \beta_{2n} B_{2n-1}^2(t) + \alpha_{2n+1} \alpha_{2n} t^2 G_{2n-1}(t). \quad (5.23)$$

Mas

$$G_{2n-1}(t) = B_{2n-2}^2(t) + \alpha_{2n-1} \beta_{2n-2} B_{2n-3}^2(t) + \alpha_{2n-1} \alpha_{2n-2} t^2 G_{2n-3}(t)$$

e

$$G_{2n-3}(t) = B_{2n-4}^2(t) + \alpha_{2n-3} \beta_{2n-4} B_{2n-5}^2(t) + \alpha_{2n-3} \alpha_{2n-4} t^2 G_{2n-5}(t).$$

Continuando esse raciocínio e substituindo em (5.23), chegamos em

$$\begin{aligned} G_{2n+1}(t) &= B_{2n}^2(t) + \alpha_{2n+1} \beta_{2n} B_{2n-1}^2(t) + \alpha_{2n+1} \alpha_{2n} t^2 B_{2n-2}^2(t) + \alpha_{2n+1} \alpha_{2n} \alpha_{2n-1} \beta_{2n-2} t^2 B_{2n-3}^2(t) \\ &\quad + \dots + \alpha_{2n+1} \alpha_{2n} \alpha_{2n-1} \dots \alpha_4 \alpha_3 \beta_2 t^{2n-2} B_1^2(t) + \alpha_{2n+1} \alpha_{2n} \alpha_{2n-1} \dots \alpha_3 \alpha_2 t^{2n} B_0^2(t). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Analogamente obtemos

$$\begin{aligned} G_{2n}(t) &= B_{2n-1}^2(t) + \alpha_{2n} \beta_{2n-1} B_{2n-2}^2(t) + \alpha_{2n} \alpha_{2n-1} t^2 B_{2n-3}^2(t) + \alpha_{2n} \alpha_{2n-1} \alpha_{2n-2} \beta_{2n-3} t^2 B_{2n-4}^2(t) \\ &\quad + \dots + \alpha_{2n} \alpha_{2n-1} \alpha_{2n-2} \dots \alpha_4 \alpha_3 t^{2n-2} B_1^2(t) + \alpha_{2n} \alpha_{2n-1} \alpha_{2n-2} \dots \alpha_3 \alpha_2 \beta_1 t^{2n-2} B_0^2(t). \end{aligned} \quad (5.25)$$

Os resultados a seguir são propriedades sobre os zeros dos polinômios B_n e C_n .

Teorema 23 Se $t_{n,k}$ é um zero do polinômio B_n , para $n \geq 1$, então ele é diferente dos zeros de C_n e dos zeros de B_{n-1} .

Demonstração. Por hipótese, $t_{n,k}$ é um zero de B_n . Então, de (5.20),

$$C_n(t_{n,k})B_{n-1}(t_{n,k}) = \alpha_n \alpha_{n-1} \alpha_{n-2} \dots \alpha_2 \mu_0^\psi t_{n,k}^{n-1} \neq 0,$$

pois $t_{n,k} > 0$, para $k = 1, 2, \dots, n$. Assim, como $C_n(t_{n,k})B_{n-1}(t_{n,k}) \neq 0$, $t_{n,k}$ não é um zero do polinômio B_{n-1} e nem de C_n . ■

Teorema 24 Para $n \geq 2$, entre dois zeros consecutivos do polinômio B_{n-1} existe um zero de B_n .

Demonstração. Seja $t_{n-1,k}$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, os zeros de B_{n-1} . Logo, por (5.24) e (5.25), $G_n(t_{n-1,k}) > 0$ e então

$$B'_{n-1}(t_{n-1,k}) \neq 0, \text{ para } k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Sejam $t_{n-1,j}$ e $t_{n-1,j+1}$, $j = 1, 2, \dots, n-2$, dois zeros consecutivos de B_{n-1} . Suponha, sem perda de generalidade, que $B'_{n-1}(t_{n-1,j}) > 0$. Então, $B'_{n-1}(t_{n-1,j+1}) < 0$. Assim, de (5.21), $B_n(t_{n-1,j}) < 0$ e $B_n(t_{n-1,j+1}) > 0$. O resultado do teorema segue do fato de que B_n é uma função contínua e então existe \tilde{t} entre $t_{n-1,j}$ e $t_{n-1,j+1}$ tal que $B_n(\tilde{t}) = 0$. ■

Teorema 25 Para $n \geq 1$, dois polinômios de graus consecutivos B_n e B_{n+1} não possuem zeros em comum.

Demonstração. O resultado será demonstrado por indução:

- Suponha que existe z tal que $B_1(z) = B_2(z) = 0$, então, de (5.15)

$$B_2(z) = (z - \beta_2)B_1(z) - \alpha_2 z B_0(z) \Rightarrow \alpha_2 z = 0.$$

Como $\alpha_2 \neq 0$, temos que $z = 0$, mas, como $z = 0$ não é zero de B_n , $n \geq 1$, isto é uma contradição. Portanto, $B_1(z)$ e $B_2(z)$ não possuem zeros em comum.

- Suponha agora que, para $n \geq 2$, B_{n-1} e B_n não possuem zeros em comum.
- Se $B_n(z) = 0$, então $B_{n-1}(z) \neq 0$. Assim, de (5.15),

$$B_{n+1}(z) = -\alpha_{n+1} z B_{n-1}(z) \neq 0.$$

Logo, B_n e B_{n+1} não tem zeros em comum. ■

Fazendo $m = 1, 2, \dots, n-1$ em (5.15), mostra-se que

$$B_n(t) = \begin{vmatrix} t - \beta_1 & -\alpha_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -t & t - \beta_2 & -\alpha_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t - \beta_{n-1} & -\alpha_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -t & t - \beta_n \end{vmatrix}, \quad n \geq 1. \quad (5.26)$$

De fato, temos que $B_1(t) = |t - \beta_1| = t - \beta_1$. Suponha que

$$B_{n-1}(t) = \begin{vmatrix} t - \beta_1 & -\alpha_2 & \dots & 0 & 0 \\ -t & t - \beta_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -t & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t - \beta_{n-2} & -\alpha_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & -t & t - \beta_{n-1} \end{vmatrix},$$

para $n \geq 2$. Por (5.15), $B_n(t) = (t - \beta_n)B_{n-1}(t) - \alpha_n t B_{n-2}(t)$, e assim

$$\begin{aligned} B_n(t) &= (t - \beta_n) \begin{vmatrix} t - \beta_1 & -\alpha_2 & \dots & 0 & 0 \\ -t & t - \beta_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -t & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t - \beta_{n-2} & -\alpha_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & -t & t - \beta_{n-1} \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)} \\ &\quad - \alpha_n t \begin{vmatrix} t - \beta_1 & -\alpha_2 & \dots & 0 & 0 \\ -t & t - \beta_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -t & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t - \beta_{n-3} & -\alpha_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & -t & t - \beta_{n-2} \end{vmatrix}_{(n-2) \times (n-2)} \\ &= \begin{vmatrix} t - \beta_1 & -\alpha_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -t & t - \beta_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & t - \beta_{n-2} & -\alpha_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -t & t - \beta_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t - \beta_n & 0 \end{vmatrix}_{n \times n} \\ &\quad + \begin{vmatrix} t - \beta_1 & -\alpha_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -t & t - \beta_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t - \beta_{n-3} & -\alpha_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -t & t - \beta_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -\alpha_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -t & 0 \end{vmatrix}_{n \times n} \\ &= \begin{vmatrix} t - \beta_1 & -\alpha_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -t & t - \beta_2 & -\alpha_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -t & t - \beta_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t - \beta_{n-1} & -\alpha_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -t & t - \beta_n \end{vmatrix}_{n \times n}. \end{aligned}$$

Teorema 26 Os zeros dos polinômios B_n são os autovalores da matriz de Hessenberg inferior

$$\begin{pmatrix} \eta_1 & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \eta_1 & \eta_2 & \alpha_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \dots & \alpha_{n-1} & 0 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \dots & \eta_{n-1} & \alpha_n \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \dots & \eta_{n-1} & \eta_n \end{pmatrix},$$

onde $\eta_m = \alpha_m + \beta_m$, $m = 1, 2, \dots, n$, e $\alpha_1 = 0$.

Demonstração. De (5.26), $B_n(t) = \det(tA_n - B_n)$, onde

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B_n = \begin{pmatrix} \beta_1 & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \alpha_3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \beta_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \beta_n \end{pmatrix}.$$

Como $\det(A_n) \neq 0$, podemos escrever

$$B_n(t) = \det(A_n) \det(tI - A_n^{-1}B_n).$$

onde I é a matriz identidade.

Como $\det(A_n) = 1$ e

$$A_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

vemos que B_n é o polinômio característico da matriz de Hessenberg inferior $H_n = A_n^{-1}B_n$, e então os zeros de B_n são os autovalores de tal matriz. ■

5.2.4 Exemplo de uma família de polinômios L -ortogonais

O exemplo a seguir pode ser encontrado com detalhes em [20].

Considere a medida forte no intervalo (a, b) , $d\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{b-t}\sqrt{t-a}} dt$, com $0 < a < b < \infty$. Os coeficientes da relação de recorrência de três termos (5.15) são dados por

$$\alpha_2 = 2\alpha, \alpha_{n+2} = \alpha \text{ e } \beta_n = \beta,$$

$n \geq 1$, com

$$\beta = \sqrt{ab} \text{ e } \alpha = \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})^2}{4}.$$

Tomando, por exemplo, $a = 1$ e $b = 2$, os coeficientes da relação de recorrência de três termos serão da forma $\alpha_2 = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2}$, $\alpha_{n+1} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{4}$, $n \geq 1$, e $\beta_n = \beta = \sqrt{2}$. Assim, teremos a seguinte família de polinômios L -ortogonais:

$$\left\{ 1, t - \sqrt{2}, t^2 - \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2}t + 2, t^3 - \frac{9 + 6\sqrt{2}}{4}t^2 + \frac{12 + 9\sqrt{2}}{4}t - 2\sqrt{2}, \dots \right\}.$$

Polinômios para-ortogonais

Este capítulo traz resultados sobre os polinômios para-ortogonais, tanto reais quanto complexos, que, segundo Jones e outros [9], recebem esse nome devido às deficiências em suas propriedades de ortogonalidade. A principal referência utilizada foi [21].

6.1 Resultados importantes

Vamos continuar utilizando aqui a medida ψ , definida em (3.12), e o produto interno definido em (3.15).

Definição 21 *Uma sequência $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ é uma sequência de polinômios para-ortogonais com respeito a uma medida ψ se, para $n \geq 0$, X_n é um polinômio de grau $n \geq 0$ que satisfaz*

$$\begin{aligned} \langle X_n, 1 \rangle &\neq 0 \\ \langle X_n, z^m \rangle &= 0, \quad m = 1, 2, \dots, n-1 \\ \langle X_n, z^n \rangle &\neq 0. \end{aligned}$$

Observe que $\{S_n\}_{n=0}^\infty$ e $\{S_n^*\}_{n=0}^\infty$ não são sequências de polinômios para-ortogonais com respeito a ψ , uma vez que, de (3.21), $\langle S_n, 1 \rangle = \langle S_n, z^0 \rangle = 0$ e $\langle S_n^*, z^n \rangle = 0$.

Definição 22 *Para $\kappa \in \mathbb{C}$, $\kappa \neq 0$, um polinômio X é κ -invariante se*

$$X^*(z) = \kappa X(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

A sequência $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ é $\{\kappa_n\}_{n=0}^\infty$ -invariante se, para cada n , X_n é κ_n -invariante.

Podemos obter sequências $\{\kappa_n\}_{n=0}^\infty$ -invariantes de polinômios para-ortogonais tomando funções da forma

$$S_n(w_n, z) = S_n(z) + w_n S_n^*(z), \quad (6.1)$$

onde $z, w_n \in \mathbb{C}$, $|w_n| = 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$

De fato, $S_n(w_n, z)$ satisfaz à definição de polinômios para-ortogonais com relação à medida ψ , pois, de (3.21), temos

$$\begin{aligned} \langle S_n(w_n, z), 1 \rangle &= \langle S_n(z), 1 \rangle + w_n \langle S_n^*(z), 1 \rangle = w_n \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \neq 0; \\ \langle S_n(w_n, z), z^m \rangle &= \langle S_n(z), z^m \rangle + w_n \langle S_n^*(z), z^m \rangle = 0; \\ \langle S_n(w_n, z), z^n \rangle &= \langle S_n(z), z^n \rangle + w_n \langle S_n^*(z), z^n \rangle = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \neq 0. \end{aligned}$$

O resultado a seguir nos fornece uma caracterização dos polinômios para-ortogonais κ -invariantes e garante que toda sequência de polinômios para-ortogonais com respeito a uma medida ψ é obtida a partir de (6.1). Maiores detalhes em [21].

Teorema 27 *Seja $\{S_n\}_{n=0}^\infty$ uma sequência de polinômios de Szegő com relação a uma medida ψ .*

a) *Se $c_n, w_n \in \mathbb{C}$, $n \geq 0$, com $c_n \neq 0$ e $|w_n| = 1$, e se $\kappa_n = \bar{c}_n \frac{\bar{w}_n}{c_n}$, então $\{c_n S_n(w_n, z)\}_{n=0}^\infty$ é uma sequência $\{\kappa_n\}_{n=0}^\infty$ -invariante de polinômios para-ortogonais com respeito a ψ e $|\kappa_n| = 1$, $n \geq 0$.*

b) *Se $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ é uma sequência de polinômios para-ortogonais com respeito a ψ , então, para $n \geq 0$,*

$$X_n(z) = c_n S_n(w_n, z), \quad z \in \mathbb{C},$$

onde

$$c_n = \frac{\langle X_n, S_n \rangle}{\langle S_n, S_n \rangle} - d_n \frac{\langle S_n^*, S_n \rangle}{\langle S_n, S_n \rangle} \neq 0 \quad \text{e} \quad w_n = \frac{d_n}{c_n},$$

com

$$d_n = \frac{\langle X_n, 1 \rangle}{\langle S_n^*, 1 \rangle} \neq 0.$$

Para cada $n \geq 0$, se X_n é também κ_n -invariante, então

$$|w_n| = 1, \quad \kappa_n = \frac{\bar{c}_n \bar{w}_n}{c_n} \quad \text{e} \quad |\kappa_n| = 1.$$

Podemos representar os polinômios para-ortogonais dados por (6.1) de outra forma. Substituindo (3.24) e (3.26) em (6.1), temos

$$\begin{aligned} S_n(w_n, z) &= zS_{n-1}(z) - \bar{\alpha}_{n-1}S_{n-1}^*(z) + w_n[S_{n-1}^*(z) - \alpha_{n-1}zS_{n-1}(z)] \\ &= z(1 - w_n\alpha_{n-1})S_{n-1}(z) + (w_n - \bar{\alpha}_{n-1})S_{n-1}^*(z) \\ &= (1 - w_n\alpha_{n-1}) \left[zS_{n-1}(z) + \frac{w_n - \bar{\alpha}_{n-1}}{1 - w_n\alpha_{n-1}} S_{n-1}^*(z) \right]. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Denotando

$$\tau_n = \frac{w_n - \bar{\alpha}_{n-1}}{1 - w_n\alpha_{n-1}} = \frac{w_n(1 - \bar{w}_n\bar{\alpha}_{n-1})}{1 - w_n\alpha_{n-1}},$$

observamos que, como $|w_n| = 1$, então $|\tau_n| = 1$.

Assim, tomando o polinômio (6.2) na forma mônica, obtemos

$$S_n(\tau_n, z) = zS_{n-1}(z) + \tau_n S_{n-1}^*(z), \quad (6.3)$$

com $|\tau_n| = 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$

O resultado a seguir mostra o comportamento dos zeros dos polinômios para-ortogonais.

Teorema 28 *Seja $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ uma sequência $\{\kappa_n\}_{n=0}^\infty$ -invariante de polinômios para-ortogonais com respeito a uma medida positiva ψ . Então, para cada $n \geq 1$, os n zeros de X_n são simples e estão no círculo unitário $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.*

Demonstração. Para $n \geq 1$, podemos escrever

$$X_n(z) = c_{n,0} + c_{n,1}z + \dots + c_{n,n}z^n, \quad c_{n,n} \neq 0, \quad c_{n,k} \in \mathbb{C},$$

$k = 0, 1, \dots, n$. Logo, por hipótese,

$$X_n^*(z) = \bar{c}_{n,0}z^n + \bar{c}_{n,1}z^{n-1} + \dots + \bar{c}_{n,n} = \kappa_n X_n(z), \kappa_n \neq 0.$$

Observe que

$$c_{n,0} = X_n(0) = \kappa_n^{-1} X_n^*(0) = \frac{\bar{c}_{n,n}}{\kappa_n} \neq 0.$$

Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ os zeros de multiplicidade ímpar de X_n em C , contadas as suas multiplicidades. Se esses zeros não existem, então $p = 0$, caso contrário, $1 \leq p \leq n$. Para demonstrar o teorema é suficiente mostrar que $p = n$.

Se β é um zero de X_n que não está em C , então, como X_n é κ -invariante, $\frac{1}{\beta}$ é um zero de X_n e $\frac{1}{\beta}$ também não está em C . Assim, os zeros de X_n que não pertencem a C ocorrem em pares $\left(\beta, \frac{1}{\beta}\right)$.

Se β é um zero de X_n em C , então $\beta = \frac{1}{\beta}$. Existe, assim, um número par de zeros de X_n em C , mas que não estão no conjunto $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p\}$. Segue, então, que os zeros de X_n que não estão em $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p\}$ ocorrem em pares $\left(\beta, \frac{1}{\beta}\right)$.

Denotemos todos os zeros que ocorrem em pares $\left(\beta, \frac{1}{\beta}\right)$ pelos $2q$ números

$$\beta_1, \frac{1}{\beta_1}, \beta_2, \frac{1}{\beta_2}, \dots, \beta_q, \frac{1}{\beta_q},$$

que podem estar em C ou não. Se não existem tais zeros, tomaremos $q = 0$. Claramente, $p + 2q = n$. Como $X_n(0) \neq 0$, temos que $\beta_j \neq 0$ para $j = 1, 2, \dots, q$.

Consideremos os polinômios

$$\begin{aligned} A(z) &= \begin{cases} (z - \alpha_1) \dots (z - \alpha_p), & \text{se } p \geq 1, \\ 1, & \text{se } p = 0, \end{cases} \\ B(z) &= \begin{cases} (z - \beta_1) \dots (z - \beta_q), & \text{se } q \geq 1, \\ 1, & \text{se } q = 0, \end{cases} \\ F(z) &= z^q A(z). \end{aligned}$$

Note que

$$X_n(z) = A(z)B(z) \left(z - \frac{1}{\beta_1}\right) \dots \left(z - \frac{1}{\beta_q}\right).$$

Suponha $p < n$ e, assim, $q \geq 1$. Então, de (3.15) e das expressões anteriores para $X_n(z)$ e $F(z)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle X_n, F \rangle &= \int_C X_n(z) \overline{F(z)} d\psi(z) \\
&= \int_C A(z)B(z) \left(z - \frac{1}{\beta_1}\right) \dots \left(z - \frac{1}{\beta_q}\right) \overline{A(z)} \frac{1}{z^q} d\psi(z) \\
&= \int_C A(z)B(z) \overline{A(z)} (-1)^q \frac{(1 - \overline{\beta_1}z) \dots (1 - \overline{\beta_q}z)}{\overline{\beta_1 \dots \beta_q} z^q} d\psi(z) \\
&= \frac{(-1)^q}{\overline{\beta_1 \dots \beta_q}} \int_C A(z)B(z) \overline{A(z)B(z)} d\psi(z) \\
&= \frac{(-1)^q}{\overline{\beta_1 \dots \beta_q}} \langle AB, AB \rangle \\
&\neq 0.
\end{aligned}$$

Como $F(z)$ é um polinômio de grau $p + q$ e $\langle X_n, F \rangle \neq 0$, as condições de para-ortogonalidade implicam que o grau de $F(z)$ é n . Como tomamos $q \geq 1$, isto é impossível, pois o grau de $F(z)$ é igual a $p + q$ que é menor do que $p + 2q = n$. Portanto, $q = 0$ e $p = n$. ■

Como os zeros dos polinômios para-ortogonais estão no círculo unitário, eles são usados para construir fórmulas de quadratura no círculo unitário.

Nas seções seguintes serão apresentadas propriedades de seqüências de polinômios $\{R_n\}_{n=0}^\infty$ que satisfazem à relação de recorrência de três termos

$$R_{n+1} = [(1 + ic_{n+1})z + (1 - ic_{n+1})]R_n(z) - 4d_{n+1}zR_{n-1}(z), \quad n \geq 1, \quad (6.4)$$

com $R_0(z) = 1$ e $R_1(z) = (1 + ic_1)z + (1 - ic_1)$, onde $c_n \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$ e $\{d_{n+1}\}_{n=1}^\infty$ é uma seqüência encadeada positiva.

6.2 Polinômios para-ortogonais reais

Estudaremos primeiramente o caso particular em que $c_n = 0$, $n \geq 1$, em (6.4), ou seja,

$$R_{n+1}(z) = (z + 1)R_n(z) - 4d_{n+1}zR_{n-1}(z), \quad n \geq 1,$$

com $R_0(z) = 1$ e $R_1(z) = z + 1$, com o objetivo de encontrar a seqüência $\{R_n\}_{n=0}^\infty$ que satisfaz tal relação de recorrência.

Considere o círculo unitário $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Seja ψ uma medida simétrica definida em C , isto é,

$$d\psi\left(\frac{1}{z}\right) = -d\psi(z)$$

ou, de forma equivalente, $\psi(e^{i\theta})$ satisfaz

$$d\psi(e^{i(2\pi-\theta)}) = -d\psi(e^{i\theta}),$$

pois $z = e^{i\theta}$, com $0 < \theta < 2\pi$.

Para uma medida simétrica, os momentos trigonométricos

$$\mu_n = \int_C z^{-n} d\psi(z), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

são reais e $\mu_{-n} = \mu_n$, para $n \geq 1$. De fato,

$$\mu_{-n} = \int_C z^n d\psi(z) = \int_C -\frac{1}{z^n} d\psi\left(\frac{1}{z}\right) = - \int_C z^{-n} (-d\psi(z)) = \int_C z^{-n} d\psi(z) = \mu_n.$$

Assim,

$$\overline{\mu_n} = \int_C \overline{z^{-n}} d\psi(z) = \int_C \frac{1}{\overline{z^n}} d\psi(z) = \int_C z^n d\psi(z) = \mu_{-n} = \mu_n.$$

A sequência de polinômios de Szegö $\{S_n\}_{n=0}^\infty$ associada a ψ , que é ortogonal em C , é definida por

$$\int_C S_n(z) \overline{S_m(z)} d\psi(z) = 0, \quad \text{para } n \neq m.$$

De (3.2), os coeficientes de reflexão $\alpha_n = -S_{n+1}(0)$ também são reais e, conseqüentemente, de (3.24) e (3.25), os polinômios de Szegö associados a ψ são reais.

Consideremos duas seqüências de polinômios para-ortogonais denotadas por

$$\{S_n(1, z)\}_{n=0}^\infty \quad \text{e} \quad \{S_n(-1, z)\}_{n=0}^\infty,$$

obtidas fazendo $w_n = 1$ e $w_n = -1$ em (6.1), respectivamente. A partir delas, construímos outras duas seqüências de polinômios mônicos, $\{R_n^{(1)}(z)\}_{n=0}^\infty$ e $\{R_n^{(2)}(z)\}_{n=0}^\infty$, definidas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} R_n^{(1)}(z) &= \frac{S_n(1, z)}{1 + S_n(0)} = \frac{S_n(z) + S_n^*(z)}{1 + S_n(0)} \\ &\text{e} \\ R_n^{(2)}(z) &= \frac{S_{n+1}(-1, z)}{(z-1)(1 - S_{n+1}(0))} = \frac{S_{n+1}(z) - S_{n+1}^*(z)}{(z-1)(1 - S_{n+1}(0))}. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Pelo Teorema 28 temos que os zeros dos polinômios $R_n^{(1)}(z)$ e $R_n^{(2)}(z)$ são simples e estão no círculo unitário.

O resultado abaixo mostra que os polinômios de Szegö podem ser escritos em termos dos polinômios $R_n^{(1)}(z)$ e $R_{n-1}^{(2)}(z)$.

Teorema 29 *Os polinômios $S_n(z)$, $R_n^{(1)}(z)$ e $R_{n-1}^{(2)}(z)$ satisfazem à seguinte relação:*

$$2zS_{n-1}(z) = R_n^{(1)}(z) + (z-1)R_{n-1}^{(2)}(z), \quad n \geq 1.$$

Demonstração. De (6.5), como $\alpha_{n-1} = -S_n(0)$ é real, temos

$$R_n^{(1)}(z) + (z-1)R_{n-1}^{(2)}(z) = \frac{S_n(z) + S_n^*(z)}{1 - \alpha_{n-1}} + \frac{S_n(z) - S_n^*(z)}{1 + \alpha_{n-1}} = \frac{2}{1 - \alpha_{n-1}^2} (S_n(z) + \alpha_{n-1} S_n^*(z)).$$

Usando o fato de que

$$S_n(z) = (1 - \alpha_{n-1}^2)zS_{n-1}(z) - \alpha_{n-1}S_n^*(z),$$

chegamos ao resultado desejado. ■

6.2.1 Relação de recorrência de três termos

Teorema 30 *Os polinômios mônicos para-ortogonais $R_n^{(i)}$, $i = 1, 2$, satisfazem as relações de recorrência de três termos*

$$R_{n+1}^{(i)}(z) = (z + 1)R_n^{(i)}(z) - 4d_{n+1}^{(i)}zR_{n-1}^{(i)}(z), \quad n \geq 1, \quad (6.6)$$

com condições iniciais $R_0^{(i)}(z) = 1$ e $R_1^{(i)}(z) = z + 1$. Além disso,

$$d_{n+1}^{(1)} = \frac{1}{4}(1 - \alpha_{n-2})(1 + \alpha_{n-1}) \quad e \quad d_{n+1}^{(2)} = \frac{1}{4}(1 + \alpha_{n-1})(1 - \alpha_n).$$

Demonstração. Vamos demonstrar apenas para $R_{n+1}^{(1)}$. Sendo $S_n^{(1)}(z) = \frac{S_n(z) + S_n^*(z)}{1 + S_n(0)}$ um polinômio para-ortogonal mônico, podemos escrever, de (6.5), $R_n^{(1)}(z) = S_n^{(1)}(z)$. Assim, basta mostrar que $S_n^{(1)}$ satisfaz à relação de recorrência

$$S_{n+1}^{(1)}(z) = (z + 1)S_n^{(1)}(z) - (1 - \alpha_{n-2})(1 + \alpha_{n-1})zS_{n-1}^{(1)}(z),$$

para $n \geq 1$, com $\alpha_{-1} = -1$, $S_0^{(1)}(z) = 1$ e $S_1^{(1)}(z) = z + 1$.

Para isso, utilizaremos as relações de recorrência para os polinômios de Szegő dadas em (3.24) e (3.26).

Da definição de $S_n^{(1)}$, obtemos

$$\begin{aligned} S_{n+1}^{(1)}(z) &= \frac{zS_n(z) - \alpha_n S_n^*(z) + S_n^*(z) - \alpha_n z S_n(z)}{1 - \alpha_n} \\ &= zS_n(z) + S_n^*(z) = \frac{(1 - \alpha_{n-1})(zS_n(z) + S_n^*(z))}{1 - \alpha_{n-1}} \\ &= \frac{(z - \alpha_{n-1}z + 1 - 1)S_n(z)}{1 - \alpha_{n-1}} + \frac{(1 - \alpha_{n-1} + z - z)S_n^*(z)}{1 - \alpha_{n-1}} \\ &= (z + 1) \left(\frac{S_n(z) + S_n^*(z)}{1 - \alpha_{n-1}} \right) - \frac{(1 + \alpha_{n-1}z)S_n(z) + (\alpha_{n-1} + z)S_n^*(z)}{1 - \alpha_{n-1}}. \end{aligned}$$

Utilizando novamente (3.24) e (3.26), temos que

$$\begin{aligned} S_{n+1}^{(1)}(z) &= (z + 1) \left(\frac{S_n(z) + S_n^*(z)}{1 - \alpha_{n-1}} \right) - \frac{(1 + \alpha_{n-1}z)[zS_{n-1}(z) - \alpha_{n-1}S_{n-1}^*(z)]}{1 - \alpha_{n-1}} \\ &\quad - \frac{(\alpha_{n-1} + z)[S_{n-1}^*(z) - \alpha_{n-1}zS_{n-1}(z)]}{1 - \alpha_{n-1}}. \end{aligned}$$

Colocando $S_{n-1}(z) + S_{n-1}^*(z)$ em evidência e utilizando a definição de $S_n^{(1)}$, chegamos ao resultado desejado. Para finalizar, basta tomar $4d_{n+1}^{(1)} = (1 - \alpha_{n-2})(1 + \alpha_{n-1})$. A demonstração para $R_{n+1}^{(2)}$ é análoga. ■

6.2.2 Outras propriedades dos polinômios $R_n^{(1)}$ e $R_n^{(2)}$

Os polinômios $R_n^{(i)}$, $i = 1, 2$, satisfazem uma propriedade auto-inversiva, ou seja,

$$z^n R_n^{(i)} \left(\frac{1}{z} \right) = R_n^{(i)}(z).$$

Por isso, são polinômios auto-inversíveis. De fato, das relações de recorrência (6.6), obtemos

$$R_{n+1}^{(i)}\left(\frac{1}{z}\right) = \left(\frac{1}{z} + 1\right) R_n^{(i)}\left(\frac{1}{z}\right) - 4d_{n+1}^{(i)} \frac{1}{z} R_{n-1}^{(i)}\left(\frac{1}{z}\right).$$

Multiplicando ambos os membros por z^{n+1} , obtemos

$$z^{n+1} R_{n+1}^{(i)}\left(\frac{1}{z}\right) = \left(\frac{1}{z} + 1\right) z z^n R_n^{(i)}\left(\frac{1}{z}\right) - 4d_{n+1}^{(i)} \frac{1}{z} z^2 z^{n-1} R_{n-1}^{(i)}\left(\frac{1}{z}\right),$$

ou seja,

$$z^{n+1} R_{n+1}^{(i)}\left(\frac{1}{z}\right) = (z + 1) z^n R_n^{(i)}\left(\frac{1}{z}\right) - 4d_{n+1}^{(i)} \frac{1}{z} z z^{n-1} R_{n-1}^{(i)}\left(\frac{1}{z}\right).$$

Assim, como $z^n R_n^{(i)}\left(\frac{1}{z}\right)$ satisfaz à mesma relação de recorrência de três termos que $R_n^{(i)}(z)$ e com as mesmas condições iniciais, então elas são idênticas.

O teorema a seguir garante que os polinômios $R_n^{(i)}(z)$, $i = 1, 2$ satisfazem relações de L-ortogonalidade. Maiores detalhes e a demonstração encontram-se em [21].

Teorema 31 *Os polinômios mônicos $R_n^{(i)}(z)$, $i = 1, 2$, satisfazem às relações de L-ortogonalidade*

$$\int_C z^{-n+s} R_n^{(1)}(z) \frac{z}{z-1} d\psi(z) = 0, \quad 0 \leq s \leq n-1$$

e

$$\int_C z^{-n+s} R_n^{(2)}(z) (z-1) d\psi(z) = 0, \quad 0 \leq s \leq n-1.$$

6.3 Polinômios para-ortogonais complexos

Nesta seção, estudaremos a sequência de polinômios complexos $\{R_n\}_{n=0}^\infty$ que satisfaz (6.4).

Seja $\psi(z) = \psi(e^{i\theta})$ uma medida de probabilidade no círculo unitário $C = \{z = e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, isto é, $\mu_0 = 1$. Por (3.17), temos que a sequência de polinômios ortogonais mônicos no círculo unitário $\{S_n\}_{n=0}^\infty$, com relação à medida ψ , satisfaz

$$\int_C \overline{S_m(z)} S_n(z) d\psi(z) = \int_0^{2\pi} \overline{S_m(e^{i\theta})} S_n(e^{i\theta}) d\psi(e^{i\theta}) = \delta_{m,n} \kappa_n^2,$$

onde $\delta_{m,n}$ é o delta de Kronecker.

Sejam $\{\hat{S}_n\}_{n=0}^\infty$ os polinômios ortonormais no círculo unitário dados por

$$\hat{S}_n(z) = \frac{S_n(z)}{\kappa_n}, \quad n \geq 0.$$

Consideremos w tal que $|w| = 1$ e

$$\tau_n(w) = \frac{S_n(w)}{S_n^*(w)}, \quad n \geq 0. \quad (6.7)$$

A fórmula de Cristoffel-Darboux (3.4) de ordem $n \geq 0$ associada à sequência $\{S_n\}$ de polinômios de Szegő é dada por

$$K_n(z, w) = \sum_{j=0}^n \overline{\hat{S}_j(w)} \hat{S}_j(z) = \frac{\overline{\hat{S}_{n+1}^*(w)} \hat{S}_{n+1}^*(z) - \overline{\hat{S}_{n+1}(w)} \hat{S}_{n+1}(z)}{1 - \bar{w}z}.$$

Consideremos, também, a sequência de polinômios $\{P_n(w; z)\}_{n=0}^{\infty}$ na variável z dada por

$$P_n(w; z) = \frac{\kappa_{n+1}^2 \bar{w}}{S_{n+1}(w)} \frac{K_n(z, w)}{1 + \tau_{n+1}(w)\alpha_n}, \quad n \geq 0,$$

que é um polinômio mônico de grau n em z que pode ser escrito como

$$P_n(w; z) = \frac{1}{z - w} \frac{S_{n+1}(z) - \tau_{n+1}(w)S_{n+1}^*(z)}{1 + \tau_{n+1}(w)\alpha_n}, \quad n \geq 0, \quad (6.8)$$

e será chamado de polinômio núcleo de grau n em z , no ponto w .

Como $|w| = 1$, então $|\tau_n(w)| = 1$, para $n \geq 0$. Assim, os polinômios $S_{n+1}(z) - \tau_{n+1}(w)S_{n+1}^*(z)$ são polinômios para-ortogonais associados a S_{n+1} . Portanto, tem seus $n + 1$ zeros no círculo unitário $|z| = 1$, sendo w um desses zeros. Dessa forma, por (6.8), $P_n(w; z)$ tem todos os zeros simples no círculo unitário $|z| = 1$. Mas w não é zero de $P_n(w; z)$, pois se $z = w$ chegamos à uma indeterminação em (6.8).

6.3.1 Relação de recorrência de três termos

Note que, de (3.25) e (3.26), valem as seguintes relações para $\{\tau_n(w)\}$, definido em (6.7),

$$\tau_{n+1}(w) = \frac{w\tau_n(w) - \bar{\alpha}_n}{1 - w\tau_n(w)\alpha_n} \text{ e } w\tau_n(w) = \frac{\tau_{n+1}(w) + \bar{\alpha}_n}{1 + \tau_{n+1}(w)\alpha_n}, \quad n \geq 0. \quad (6.9)$$

Temos também que

$$[1 - w\tau_n(w)\alpha_n][1 + \tau_{n+1}(w)\alpha_n] = 1 - |\alpha_n|^2, \quad n \geq 0. \quad (6.10)$$

Utilizando as relações (3.25), (3.26), (6.9) e (6.10), obtemos

$$P_n(w; z) = \frac{S_n(z) - w\tau_n(w)S_n^*(z)}{z - w}, \quad n \geq 0, \quad (6.11)$$

que quando comparada à (6.3), nos leva a concluir que

$$(z - w)P_n(w; z) = zS_n(z) - w\tau_n(w)S_n^*(z), \quad n \geq 0,$$

são polinômios para-ortogonais.

Teorema 32 *A sequência de polinômios núcleo mônicos $\{P_n(w; z)\}$ satisfaz a relação de recorrência de três termos*

$$P_{n+1}(w; z) = (z + b_{n+1}(w))P_n(w; z) - a_{n+1}(w)zP_{n-1}(w; z), \quad (6.12)$$

$n \geq 1$, com $P_0(w; z) = 1$ e $P_1(w; z) = z + b_1(w)$, onde $b_n(w) = \frac{\tau_n(w)}{\tau_{n-1}(w)}$ e $a_{n+1}(w) = (1 + \tau_n(w)\alpha_{n-1})(1 - \overline{w\tau_n(w)\alpha_n}w)$, $n \geq 1$.

Demonstração. Considere o polinômio mônico q_{n+1} de grau $n + 1$, $n \geq 1$, dado por

$$q_{n+1}(z) = P_{n+1}(w; z) + u_n(1 + \tau_n(w)\alpha_{n-1})zP_{n-1}(w; z),$$

onde u_n é uma constante. De (6.8) e (6.11), obtemos

$$(z - w)q_{n+1}(z) = [zS_{n+1}(z) - w\tau_{n+1}(w)S_{n+1}^*(z)] + u_n z[S_n(z) - \tau_n(w)S_n^*(z)].$$

De (3.25) e (3.26), temos

$$(z-w)q_{n+1}(z) = z[zS_n(z) - [\tau_n(w)u_n + \overline{\alpha_n}]S_n^*(z)] \\ + [u_n + w\tau_{n+1}(w)\alpha_n] \left[zS_n(z) - \frac{w\tau_{n+1}(w)}{u_n + w\tau_{n+1}(w)\alpha_n} S_n^*(z) \right].$$

Fazendo $u_n = (1 - \overline{w\tau_n(w)\alpha_n})w$, a relação anterior torna-se

$$(z-w)q_{n+1}(z) = z[zS_n(z) - w\tau_n(w)S_n^*(z)] + \frac{\tau_{n+1}(w)}{\tau_n(w)} [zS_n(z) - w\tau_n(w)S_n^*(z)].$$

Então,

$$q_{n+1}(z) = (z + b_{n+1}(w))P_n(w; z),$$

com $b_{n+1}(z) = \frac{\tau_{n+1}(w)}{\tau_n(w)}$, o que completa a prova do resultado. ■

A partir de (6.9) e (6.10) podemos escrever os coeficientes da relação de recorrência $a_n(w)$ e $b_n(w)$, dados em (6.12), como

$$b_n(w) = \frac{1 - \overline{w\tau_{n-1}(w)\alpha_{n-1}}}{1 - w\tau_{n-1}(w)\alpha_{n-1}} w = \frac{1 + \tau_n(w)\alpha_{n-1}}{1 + \tau_n(w)\alpha_{n-1}} w$$

e (6.13)

$$a_{n+1}(w) = \frac{1 - \overline{w\tau_n(w)\alpha_n}}{1 - w\tau_{n-1}(w)\alpha_{n-1}} (1 - |\alpha_{n-1}|^2) w = \frac{1 + \tau_n(w)\alpha_{n-1}}{1 + \tau_{n+1}(w)\alpha_n} (1 - |\alpha_n|^2) w,$$

$n \geq 1$.

Vamos considerar agora os polinômios $\{P_n(1; z)\}$, ou seja, $w = 1$, dados por

$$P_n(1; z) = \frac{zS_n(z) - \tau_n(w)S_n^*(z)}{z-1}, \quad n \geq 0.$$

Assim, pelo Teorema 32 temos que os polinômios $\{P_n(1; z)\}$ satisfazem

$$P_{n+1}(1; z) = (z + b_{n+1})P_n(1; z) - a_{n+1}zP_{n-1}(1; z), \quad (6.14)$$

$n \geq 1$, onde $P_0(1; z) = 1$ e $P_1(1; z) = z + b_1$, $b_n = \frac{\tau_n}{\tau_{n-1}}$ e

$a_{n+1}(w) = (1 + \tau_n\alpha_{n-1})(1 - \overline{\tau_n(w)\alpha_n})$, $n \geq 1$, e $\tau_j = \tau_j(1)$, para $j \geq 0$.

A partir de (6.13), podemos escrever

$$b_n(w) = \frac{1 - \overline{\tau_{n-1}\alpha_{n-1}}}{1 - \tau_{n-1}\alpha_{n-1}} = \frac{1 + \tau_n\alpha_{n-1}}{1 + \overline{\tau_n}\alpha_{n-1}}$$

e (6.15)

$$a_{n+1}(w) = \frac{1 - \overline{\tau_n}\alpha_n}{1 - \tau_{n-1}\alpha_{n-1}} (1 - |\alpha_{n-1}|^2) = \frac{1 + \tau_n\alpha_{n-1}}{1 + \overline{\tau_{n+1}}\alpha_n} (1 - |\alpha_n|^2),$$

$n \geq 1$.

Considere os polinômios R_n de grau n dados por $R_0(z) = P_0(1; z)$ e

$$R_n(z) = \frac{\prod_{j=0}^{n-1} (1 - \tau_j\alpha_j)}{\prod_{j=0}^{n-1} (1 - \operatorname{Re}(\tau_j\alpha_j))} P_n(1; z), \quad n \geq 1.$$

Podemos então escrever

$$(z-1)R_n(z) = \frac{\prod_{j=0}^{n-1} (1 - \tau_j \alpha_j)}{\prod_{j=0}^{n-1} (1 - \operatorname{Re}(\tau_j \alpha_j))} (zS_n(z) - \tau_n S_n^*(z)),$$

$$n \geq 0, \text{ onde } \tau_n = \frac{S_n(1)}{S_n^*(1)}.$$

Pelo que já foi visto para os polinômios $P_n(w; z)$, temos que os polinômios R_n tem n zeros simples em $|z| = 1$ e 1 não é zero desses polinômios. Dessa forma, vale o seguinte resultado para os polinômios $(z-1)R_n(z)$:

Teorema 33 *Os polinômios R_n satisfazem à relação de recorrência de três termos*

$$R_{n+1}(z) = [(1 + ic_{n+1})z + (1 - ic_{n+1})]R_n(z) - 4d_{n+1}zR_{n-1}(z),$$

com $R_0(z) = 1$ e $R_1(z) = (1 + ic_1)z + (1 - ic_1)$, onde as seqüências de números reais $\{c_n\}$ e $\{d_{n+1}\}$ são dadas por

$$c_n = \frac{-\operatorname{Im}(\tau_{n-1}\alpha_{n-1})}{1 - \operatorname{Re}(\tau_{n-1}\alpha_{n-1})}$$

e

$$d_{n+1} = \frac{1}{4} \frac{(1 - |\tau_{n-1}\alpha_{n-1}|^2)|1 - \tau_n\alpha_n|^2}{(1 - \operatorname{Re}(\tau_{n-1}\alpha_{n-1}))(1 - \operatorname{Re}(\tau_n\alpha_n))},$$

para $n \geq 1$. Além disso $\{d_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$, onde $d_{n+1} = (1 - g_n)g_{n+1}$, é uma seqüência encadeada positiva com seqüência de parâmetros $\{g_{n+1}\}_{n=0}^{\infty}$, dada por

$$g_{n+1} = \frac{1}{2} \frac{|1 - \tau_n\alpha_n|^2}{(1 - \operatorname{Re}(\tau_n\alpha_n))}, \quad n \geq 0.$$

Demonstração. Considere os polinômios $\{\tilde{R}_n\}$ dados por $\tilde{R}_0(z) = P_0(1; z)$ e

$$\tilde{R}_n(z) = (1 - \tau_{n-1}\alpha_{n-1})(1 - \tau_{n-2}\alpha_{n-2})\dots(1 - \tau_0\alpha_0)P_n(1; z), \quad n \geq 1. \quad (6.16)$$

Então, de (6.14) e (6.15), para $n \geq 1$, temos

$$\begin{aligned} P_{n+1}(1; z) &= (z + b_{n+1})P_n(1; z) - a_{n+1}zP_{n-1}(1; z) \\ &= \left(z + \frac{1 - \overline{\tau_n\alpha_n}}{1 - \tau_n\alpha_n}\right)P_n(1; z) - \frac{1 - \overline{\tau_n\alpha_n}}{1 - \tau_{n-1}\alpha_{n-1}}(1 - |\alpha_{n-1}|^2)zP_{n-1}(1; z) \end{aligned}$$

e, fazendo algumas manipulações,

$$\begin{aligned} (1 - \tau_{n-1}\alpha_{n-1})(1 - \tau_n\alpha_n)P_{n+1}(1; z) &= [(1 - \tau_n\alpha_n)z + (1 - \overline{\tau_n\alpha_n})](1 - \tau_{n-1}\alpha_{n-1})P_n(1; z) \\ &\quad - |1 - \tau_n\alpha_n|^2(1 - |\alpha_{n-1}|^2)zP_{n-1}(1; z) \end{aligned}$$

que, de (6.16), se torna

$$\begin{aligned} \frac{(1 - \tau_{n-1}\alpha_{n-1})(1 - \tau_n\alpha_n)}{(1 - \tau_n\alpha_n)(1 - \tau_{n-1}\alpha_{n-1})\dots(1 - \tau_0\alpha_0)}\tilde{R}_{n+1}(z) &= [(1 - \tau_n\alpha_n)z + (1 - \overline{\tau_n\alpha_n})](1 - \tau_{n-1}\alpha_{n-1}) \\ &\quad \times \frac{\tilde{R}_n(z)}{(1 - \tau_{n-1}\alpha_{n-1})(1 - \tau_{n-2}\alpha_{n-2})\dots(1 - \tau_0\alpha_0)} \\ &\quad - |1 - \tau_n\alpha_n|^2(1 - |\alpha_{n-1}|^2)z \\ &\quad \times \frac{\tilde{R}_{n-1}(z)}{(1 - \tau_{n-2}\alpha_{n-2})(1 - \tau_{n-3}\alpha_{n-3})\dots(1 - \tau_0\alpha_0)} \end{aligned}$$

e assim,

$$\tilde{R}_{n+1}(z) = [(1 - \tau_n \alpha_n)z + (1 - \overline{\tau_n \alpha_n})] \tilde{R}_n(z) - |1 - \tau_n \alpha_n|^2 (1 - |\alpha_{n-1}|^2) z \tilde{R}_{n-1}(z), \quad (6.17)$$

com $\tilde{R}_1(z) = (1 - \tau_0 \alpha_0)z + (1 - \overline{\tau_0 \alpha_0})$.

Como $|\tau_n| = 1$ para $n \geq 0$, temos que

$$(1 - |\alpha_{n-1}|^2) = (1 - |\tau_{n-1} \alpha_{n-1}|^2), \quad n \geq 1.$$

Se tomarmos $R_0(z) = \tilde{R}_0(z)$ e

$$R_n(z) = \frac{1}{(1 - \operatorname{Re}(\tau_{n-1} \alpha_{n-1}))(1 - \operatorname{Re}(\tau_{n-2} \alpha_{n-2})) \dots (1 - \operatorname{Re}(\tau_0 \alpha_0))} \tilde{R}_n(z),$$

$n \geq 1$, e substituirmos em (6.17), obtemos

$$R_{n+1}(z) = [(1 + ic_{n+1})z + (1 - ic_{n+1})]R_n(z) - 4d_{n+1}zR_{n-1}(z).$$

Como $(1 - g_n)g_{n+1} = d_{n+1}$, para $n \geq 1$, e $|\alpha_n| < 1$, para $n \geq 0$, segue também que $0 < g_{n+1} < 1$ para $n \geq 0$, o que completa a prova do teorema. ■

Analogamente ao que foi feito para o caso real, podemos demonstrar que os polinômios R_n satisfazem a L-ortogonalidade com relação à medida ψ definida no capítulo anterior, ou seja,

$$\int_C z^{-n+j} R_n(z)(1-z)d\psi(z) = 0, \quad 0 \leq j \leq n-1.$$

6.3.2 Zeros dos polinômios R_n

Considere a transformação

$$x(z) = \frac{1}{2}(z^{\frac{1}{2}} + z^{-\frac{1}{2}}) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (6.18)$$

com $z = e^{i\theta}$, $x \in [-1, 1]$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Desta forma, podemos escrever

$$\frac{1}{2}(z^{\frac{1}{2}} + z^{-\frac{1}{2}}) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = x$$

e

$$\frac{1}{2}(z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}}) = i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = i\sqrt{1-x^2}.$$

Multiplicando a relação de recorrência (6.4) por $(4z)^{-\frac{(n+1)}{2}}$, obtemos

$$(4z)^{-\frac{(n+1)}{2}} R_{n+1} = (4z)^{-\frac{1}{2}} [(1 + ic_{n+1})z + (1 - ic_{n+1})] (4z)^{-\frac{n}{2}} R_n(z) - 4d_{n+1}z(4z)^{-1} (4z)^{-\frac{(n-1)}{2}} R_{n-1}(z),$$

$n \geq 1$.

Consideremos as funções G_n definidas no intervalo $[-1, 1]$ por

$$G_n(x) = (4z)^{-\frac{n}{2}} R_n(z), \quad n \geq 0. \quad (6.19)$$

Claramente, temos que tais funções satisfazem

$$\begin{aligned} G_{n+1}(x) &= \frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}[(1 + ic_{n+1})z + (1 - ic_{n+1})]G_n(x) - d_{n+1}G_{n-1}(x) \\ &= \frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}[(z + 1) + ic_{n+1}(z - 1)]G_n(x) - d_{n+1}G_{n-1}(x) \\ &= \left[\frac{1}{2}(z^{\frac{1}{2}} + z^{-\frac{1}{2}}) + ic_{n+1}\frac{1}{2}(z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}}) \right] G_n(x) - d_{n+1}G_{n-1}(x), \end{aligned}$$

para $n \geq 1$ e, então,

$$G_{n+1}(x) = (x - c_{n+1}\sqrt{1-x^2})G_n(x) - d_{n+1}G_{n-1}(x) \quad (6.20)$$

com as condições iniciais $G_0(x) = 1$ e $G_1(x) = x - c_1\sqrt{1-x^2}$. Daí, temos que as funções G_n são contínuas e deriváveis no intervalo $[-1, 1]$.

A partir da transformação (6.18), podemos ver que os zeros da função G_n em $[-1, 1]$ são $x_{n,j} = \cos\left(\frac{\theta_{n,j}}{2}\right)$, onde $z_{n,j} = e^{i\theta_{n,j}}$, $j = 1, 2, \dots, n$. Como R_n tem no máximo n zeros no círculo unitário, por ser um polinômio de grau n , temos que G_n tem no máximo n zeros no intervalo $[-1, 1]$.

Lema 2 *As funções G_n , $n \geq 1$, definidas por (6.19) têm exatamente n zeros no intervalo $(-1, 1)$. Além disso, se $x_{n,k}$, $k = 1, 2, \dots, n$ são zeros da função G_n ordenados em ordem decrescente, eles satisfazem o entrelaçamento*

$$-1 < x_{n+1,n+1} < x_{n,n} < x_{n+1,n} < \dots < x_{n+1,2} < x_{n,1} < x_{n+1,1} < 1. \quad (6.21)$$

Demonstração. Fazendo $x = 1$ em (6.20), temos $G_0(1) = 1$, $G_1(1) = 1$ e

$$G_{n+1}(1) = G_n(1) - d_{n+1}G_{n-1}(1).$$

Assim,

$$\frac{G_{n+1}(1)}{G_n(1)} = 1 - d_{n+1}\frac{G_{n-1}(1)}{G_n(1)}$$

e, isolando o coeficiente d_{n+1} , temos

$$d_{n+1} = \frac{G_n(1)}{G_{n-1}(1)} \left(1 - \frac{G_{n+1}(1)}{G_n(1)} \right).$$

Como $\{d_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência encadeada positiva, podemos escrever

$$d_{n+1} = (1 - m_{n-1})m_n, \quad n \geq 1,$$

onde $m_n = 1 - \frac{G_{n+1}(1)}{G_n(1)}$. Note que $m_0 = 1 - \frac{G_1(1)}{G_0(1)} = 0$. Logo, a sequência $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ é a sequência minimal de parâmetros para a sequência encadeada $\{d_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$. Da definição de sequência de parâmetros, temos $0 < m_n < 1$, ou seja,

$$0 < \frac{G_{n+1}(1)}{G_n(1)} < 1,$$

o que implica que $G_n(1) > 0$, para $n \geq 0$.

Além disso,

$$(-1)^n G_n(-1) = G_n(1) > 0.$$

De fato, se $x = -1$, temos, para G_0 ,

$$G_0(-1) = 1 = G_0(1) = \frac{G_0(1)}{(-1)^0} \Rightarrow (-1)^0 G_0(-1) = G_0(1)$$

e, para $G_1(x)$,

$$G_1(-1) = -1 = (-1)G_1(1) = \frac{G_1(1)}{(-1)^1} \Rightarrow (-1)^1 G_1(-1) = G_1(1).$$

Suponha que vale para $k < n$, isto é,

$$(-1)^k G_k(-1) = G_k(1) \Rightarrow G_k(-1) = \frac{G_k(1)}{(-1)^k}.$$

Temos então, da relação de recorrência (6.20),

$$\begin{aligned} G_n(-1) &= -G_{n-1}(-1) - d_n G_{n-2}(-1) \\ &= (-1) \frac{G_{n-1}(1)}{(-1)^{n-1}} - d_n \frac{G_{n-2}(1)}{(-1)^{n-2}} \\ &= \frac{G_{n-1}(1)}{(-1)^{n-2}} - d_n \frac{G_{n-2}(1)}{(-1)^{n-2}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$(-1)^n G_n(-1) = G_{n-1}(1) - d_n G_{n-1}(1) = G_n(1).$$

Considere agora as funções de Christoffel-Darboux associadas a G_n dadas por

$$W_{n+1}(x) = G'_{n+1}(x)G_n(x) - G'_n(x)G_{n+1}(x), \quad n \geq 0. \quad (6.22)$$

Usando (6.20), obtemos

$$\begin{aligned} W_{n+1}(x) &= \left[\left(1 + \frac{xc_{n+1}}{\sqrt{1-x^2}} \right) G_n(x) + (x - c_{n+1}\sqrt{1-x^2})G'_n(x) - d_{n+1}G'_{n-1}(x) \right] G_n(x) \\ &\quad - G'_n(x)[(x - c_{n+1}\sqrt{1-x^2})G_n(x) - d_{n+1}G_{n-1}(x)] \\ &= d_{n+1}[G'_n(x)G_{n-1}(x) - G'_{n-1}(x)G_n(x)] + \left(1 + \frac{xc_{n+1}}{\sqrt{1-x^2}} \right) G_n^2(x). \end{aligned}$$

Logo,

$$W_{n+1}(x) = d_{n+1}W_n(x) + \left(1 + \frac{xc_{n+1}}{\sqrt{1-x^2}} \right) G_n^2(x), \quad n \geq 1. \quad (6.23)$$

Vamos analisar os zeros da função G_n para $n \geq 1$.

- Fazendo $G_1(x) = x - c_1\sqrt{1-x^2} = 0$, obtemos um zero de G_1 que pertence ao intervalo $(-1, 1)$, isto é,

$$-1 < x_{1,1} = \frac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}} < 1.$$

Como $G'_1(x) = 1 + \frac{xc_1}{\sqrt{1-x^2}}$, temos que $G'_1(x_{1,1}) = 1 + c_1^2 > 0$. De (6.22), obtemos

$$W_1(x_{1,1}) = G'_1(x_{1,1})G_0(x_{1,1}) - G'_0(x_{1,1})G_1(x_{1,1}) = G'_1(x_{1,1}) > 0.$$

Por (6.23),

$$\begin{aligned} W_2(x_{1,1}) &= d_2 W_1(x_{1,1}) + \left(1 + \frac{x_{1,1} c_2}{\sqrt{1 - x_{1,1}^2}} \right) G_1^2(x_{1,1}) \\ &= d_2 W_1(x_{1,1}). \end{aligned}$$

Novamente de (6.22), podemos escrever a expressão anterior como

$$W_2(x_{1,1}) = G_2'(x_{1,1})G_1(x_{1,1}) - G_1'(x_{1,1})G_2(x_{1,1}) = -G_1'(x_{1,1})G_2(x_{1,1}) > 0.$$

Como $G_1'(x_{1,1}) > 0$, concluímos que $G_2(x_{1,1}) < 0$.

- Agora, considere $n = 2$. Como G_2 é contínua em $[-1, 1]$, $G_2(-1) > 0$, $G_2(x_{1,1}) < 0$, $G_2(1) > 0$ e $-1 < x_{1,1} < 1$. Então, existem pontos $x_{2,1}$ e $x_{2,2}$ que são zeros de G_2 e satisfazem

$$-1 < x_{2,2} < x_{1,1} < x_{2,1} < 1.$$

Além disso, $G_2'(x_{2,2}) < 0$ e $G_2^1(x_{2,1}) > 0$ e ainda $G_1(x_{2,2}) < 0$ e $G_1(x_{2,1}) > 0$.

W_2 , dada por (6.22), quando calculada nos zeros de G_2 , pode ser dada por

$$W_2(x_{2,j}) = G_2'(x_{2,j})G_1(x_{2,j}) > 0, \quad j = 1, 2.$$

De (6.23), obtemos

$$W_3(x_{2,j}) = d_3 W_2(x_{2,j}) > 0, \quad j = 1, 2.$$

Usando novamente (6.22), podemos escrever

$$W_3(x_{2,j}) = -G_2'(x_{2,j})G_3(x_{2,j}) > 0, \quad j = 1, 2.$$

Como $G_2'(x_{2,2}) < 0$ e $G_2'(x_{2,1}) > 0$, concluímos que $G_3(x_{2,2}) > 0$ e $G_3(x_{2,1}) < 0$.

- Considerando agora $n = 3$, temos que, como G_3 é contínua em $[-1, 1]$, $G_3(-1) < 0$, $G_3(x_{2,2}) > 0$, $G_3(x_{2,1}) < 0$, $G_3(1) > 0$ e $-1 < x_{2,2} < x_{2,1} < 1$, então existem pontos $x_{3,3}$, $x_{3,2}$ e $x_{3,1}$ que são zeros de G_3 e satisfazem

$$-1 < x_{3,3} < x_{2,2} < x_{3,2} < x_{2,1} < x_{3,1} < 1.$$

- Procedendo dessa forma para $n = 4, 5, \dots$, mostra-se que as funções $W_n(x)$ não são sempre positivas para $x \in [-1, 1]$, mas são positivas nos zeros de G_n , ou seja,

$$W_n(x_{n,j}) > 0, \quad W_{n+1}(x_{n,j}) = d_{n+1} W_n(x_{n,j}) > 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

para $n \geq 1$. Além disso,

$$W_n(x_{n,j}) = G_n'(x_{n,j})G_{n-1}(x_{n,j}),$$

$$W_{n+1}(x_{n,j}) = -G_n'(x_{n,j})G_{n+1}(x_{n,j}).$$

Portanto, as funções G_n têm exatamente n zeros no intervalo $(-1, 1)$ e eles satisfazem o entrelaçamento dado em (6.21). ■

O teorema a seguir é uma consequência de (6.19) e do Lema 2.

Teorema 34 *Os polinômios R_n , $n \geq 1$, definidos pela relação de recorrência de três termos (6.4), têm seus zeros simples e em $|z| = 1$. Além disso, se denotarmos os zeros de R_n por $z_{n,j} = e^{i\theta}$, $j = 1, 2, \dots, n$, vale o seguinte entrelaçamento*

$$0 < \theta_{n+1,1} < \theta_{n,1} < \theta_{n+1,2} < \dots < \theta_{n+1,n} < \theta_{n,n} < \theta_{n+1,n+1} < 2\pi, \quad n \geq 1.$$

6.3.3 Polinômios associados aos polinômios R_n

Consideremos as funções de Christoffel-Darboux associadas aos polinômios R_n , definidas por

$$V_n(z) = R'_n(z)R_{n-1}(z) - R'_{n-1}(z)R_n(z), \quad n \geq 1.$$

Derivando (6.19) com respeito a z , temos

$$G_n(x(z)) = G'_n(x) \frac{1}{4} (z^{-\frac{1}{2}} - z^{\frac{1}{2}}) \text{ e } (4z)^{-\frac{n}{2}} R_n(z) = (4z)^{-\frac{n}{2}} R'_n(z) - 2nR_n(z)(4z)^{-\frac{(n+2)}{2}}$$

e assim,

$$G'_n(x) = (4z)^{-\frac{(n-1)}{2}} (2zR'_n(z) - nR_n(z)) \frac{1}{z-1}.$$

Dessa forma, conseguimos obter uma relação entre $W_n(x)$, definido em (6.22), e $V_n(z)$:

$$W_n(x) = \frac{(4z)^{-(n-1)}}{z-1} (2zV_n(z) - R_{n-1}(z)R_n(z)), \quad n \geq 1.$$

Portanto, vale

$$\frac{z_{n,j}^{-(n-2)}}{z_{n,j}-1} V_n(z_{n,j}) = 2^{2n-3} W_n(x_{n,j}), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad n \geq 1.$$

Denotando por $\{m_n\}_{n=0}^\infty$ e $\{M_n\}_{n=0}^\infty$ as seqüências de parâmetros minimal e maximal de $\{d_n\}_{n=2}^\infty$, respectivamente, temos que $\{d_{1,n}\}_{n=1}^\infty$, onde $d_{1,n} = d_{n+1}$, $n \geq 0$, é uma seqüência encadeada, pelo Teorema 1. Temos então que $\{m_{1,n}\}_{n=0}^\infty$ e $\{M_{1,n}\}_{n=0}^\infty$ são suas seqüências de parâmetros minimal e maximal, respectivamente, considerando $m_{1,n} = m_{n+1}$ e $M_{1,n} = M_{n+1}$, $n \geq 0$.

Da relação de recorrência de três termos para R_n , temos

$$d_{n+1} = \frac{R_n(1)}{2R_{n-1}(1)} \left(1 - \frac{R_{n+1}(1)}{2R_n(1)} \right), \quad n \geq 1.$$

Assim, $\{\hat{m}_n\}_{n=0}^\infty$, com

$$\hat{m}_n = 1 - \frac{R_{n+1}(1)}{2R_n(1)}, \quad n \geq 0,$$

é a seqüência minimal de parâmetros da seqüência encadeada $\{d_{1,n}\}_{n=1}^\infty$.

Pelo Teorema 1, a seqüência $\{m_{1,n}\}_{n=0}^\infty$ é tal que $\hat{m}_n < m_{1,n}$, $n \geq 0$.

Da seqüência encadeada positiva $\{d_n\}_{n=2}^\infty$, que não é unicamente determinada, utilizando o Teorema 2 podemos definir um valor para d_1 de tal forma que $d_1 \leq M_1$ e $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ seja, também, uma seqüência encadeada. Escolhemos então $d_1 = (1 - M_0)M_1$, onde $0 \leq M_0 < 1$.

Considere a seguinte fração contínua finita

$$\frac{Q_n(z)}{R_n(z)} = \frac{2d_1}{(1+ic_1)z + (1-ic_1) - \frac{4d_2z}{(1+ic_2)z + (1-ic_2) - \dots + \frac{4d_nz}{(1+ic_n)z + (1-ic_n)}}$$

Da teoria de frações contínuas (ver [1]), os polinômios Q_n e R_n satisfazem

$$R_{n+1}(z) = [(1+ic_{n+1})z + (1-ic_{n+1})]R_n(z) - 4d_{n+1}zR_{n-1}(z), \quad (6.24)$$

$$Q_{n+1}(z) = [(1 + ic_{n+1})z + (1 - ic_{n+1})]Q_n(z) - 4d_{n+1}zQ_{n-1}(z), \quad (6.25)$$

para $n \geq 1$, com $R_0(z) = 1$, $R_1(z) = (1 + ic_1)z + (1 - ic_1)$, $Q_0(z) = 0$ e $Q_1(z) = 2d_1$.

Os polinômios Q_n são chamados de polinômios associados a R_n .

Vimos na seção anterior que os polinômios para-ortogonais reais satisfazem uma propriedade auto-inversiva. Os polinômios R_n , para-ortogonais complexos, satisfazem à mesma propriedade:

$$R_n(z) = R_n^*(z) = \overline{z^n R_n\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}.$$

De fato, para $n = 0$, temos que $R_0^*(z) = 1 = R_0(z)$. Para $n = 1$, temos

$$\begin{aligned} R_1(z) &= (1 + ic_1)z + (1 - ic_1) \Rightarrow \\ \Rightarrow R_1\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) &= (1 + ic_1)\frac{1}{\bar{z}} + (1 - ic_1) \Rightarrow \\ \Rightarrow \overline{R_1\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} &= (1 - ic_1)\frac{1}{z} + (1 + ic_1) \Rightarrow \\ \Rightarrow z\overline{R_1\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} &= (1 - ic_1) + (1 + ic_1)z. \end{aligned}$$

Assim, $R_1^*(z) = R_1(z)$.

Da relação de recorrência de três termos para R_n , temos

$$\begin{aligned} R_{n+1}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) &= \left[(1 + ic_{n+1})\frac{1}{\bar{z}} + (1 - ic_{n+1})\right]R_n\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) - 4d_{n+1}\frac{1}{\bar{z}}R_{n-1}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \overline{R_{n+1}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} &= \left[(1 - ic_{n+1})\frac{1}{z} + (1 + ic_{n+1})\right]\overline{R_n\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} - 4d_{n+1}\frac{1}{z}\overline{R_{n-1}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} \Rightarrow \\ \Rightarrow z^{n+1}\overline{R_{n+1}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} &= [(1 - ic_{n+1}) + (1 + ic_{n+1})z]z^n\overline{R_n\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} - 4d_{n+1}z^n\overline{R_{n-1}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} \Rightarrow \\ \Rightarrow R_{n+1}^*(z) &= [(1 + ic_{n+1})z + (1 - ic_{n+1})]R_n^*(z) - 4d_{n+1}zR_{n-1}^*(z), \end{aligned}$$

ou seja,

$$R_{n+1}^*(z) = R_{n+1}(z),$$

pois satisfazem às mesmas relações de recorrência de três termos.

O polinômio Q_n de grau $n - 1$ também satisfaz uma propriedade auto-inversiva:

$$Q_n^*(z) = \overline{z^{n-1}Q_n\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = Q_n(z).$$

A demonstração é análoga ao que foi feito para R_n .

6.3.4 Outras propriedades dos polinômios R_n

Sendo $\{R_n\}$ e $\{Q_n\}$ seqüências de polinômios obtidos da seqüência de números reais $\{c_n\}$, da seqüência encadeada positiva $\{d_n\}$ e das relações de recorrência de três termos (6.24) e (6.25), temos que

$$E_0 = -\sum_{n=1}^{\infty} \nu_n z^{n-1}$$

é a expansão em série na origem da função racional $\frac{Q_n(z)}{R_n(z)}$. Maiores detalhes em [21].

Definimos assim o funcional de momento \mathcal{N} como

$$\mathcal{N}[\zeta^{-n}] = \nu_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6.26)$$

O resultado abaixo garante que para este funcional de momento, os polinômios R_n satisfazem as relações de L-ortogonalidade.

Teorema 35 *Sejam $\{R_n\}$ e $\{Q_n\}$ seqüências de polinômios obtidos da seqüência de números reais $\{c_n\}$, da seqüência encadeada positiva $\{d_n\}$ e das relações de recorrência de três termos (6.24) e (6.25). Então, se o funcional de momento \mathcal{N} é tal como em (6.26), os polinômios R_n satisfazem*

$$\mathcal{N}[\zeta^{-n+j} R_n(\zeta)] = \begin{cases} -\bar{\gamma}_n, & j = -1 \\ 0, & j = 0, 1, \dots, n-1 \\ \gamma_n, & j = n \end{cases},$$

$$n \geq 1, \text{ onde } \gamma_0 = \nu_0 = \frac{2d_1}{1+ic_1} \text{ e } \gamma_n = \frac{4d_{n+1}}{1+ic_{n+1}} \gamma_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

O teorema que apresentaremos a seguir é similar ao Teorema de Favard 9. Maiores detalhes e a demonstração encontram-se em [4].

Teorema 36 *Dadas uma seqüência de números reais $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ e um seqüência encadeada positiva $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$, existe uma medida de probabilidade não-trivial μ no círculo unitário associada a estas seqüências. Se $M_0 > 0$, onde $\{M_n\}$ é a seqüência maximal de parâmetros de $\{d_n\}$, então μ tem um ponto de massa M_0 em $z = 1$. Seja \mathcal{N} o funcional de momento associado com $\{c_n\}$ e $\{d_n\}$ dado em (6.26). Então,*

$$\mathcal{N}[\zeta] = \int_C \zeta^{-n} (1 - \zeta) d\mu(\zeta), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

6.4 Exemplos de polinômios para-ortogonais

Considere a medida de Lebesgue $d\psi(\phi) = \frac{1}{2\pi} d\phi$. Como tal medida é simétrica, seus momentos são reais e assim os coeficientes de Verblunsky também o são. De fato, $\mu_0 = 1$ e $\mu_n = 0$, para $n \geq 1$, e assim

$$\alpha_n = 0, \quad n \geq 0.$$

Portanto, de (3.22), temos que $S_0(z) = 1$ e $S_1(z) = z$, e então, de (3.26), $S_n(z) = zS_{n-1}(z)$, $n \geq 1$, o que nos leva a

$$S_n(z) = z^n, \quad n \geq 0.$$

Logo, $\{1, z, z^2, z^3, \dots\}$ é uma família de polinômios para-ortogonais.

Propriedades de algumas classes de polinômios

Neste capítulo consideraremos a sequência de polinômios $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ gerada pela relação de recorrência de três termos

$$Q_{m+1}(z) = (z + \beta_{m+1})Q_m(z) - \alpha_{m+1}zQ_{m-1}(z), \quad m = 1, 2, \dots, \quad (7.1)$$

com $Q_0(z) = 1$ e $Q_1(z) = z + \beta_1$, onde $\alpha_m, \beta, z \in \mathbb{C}$ e $\alpha_m \neq 0, m = 2, 3, \dots$ e $\beta_m \neq 0, m = 1, 2, 3, \dots$. Serão apresentados alguns resultados sobre os zeros dos polinômios $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ dadas algumas restrições para os coeficientes α_m e β_m .

A principal referência utilizada aqui foi [17].

7.1 Representação dos zeros de $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ como autovalores

Da relação de recorrência dada em (7.1) temos que $z = 0$ não é zero de $Q_m(z)$. De fato, se $m = 1$ então $Q_1(0) = \beta_1 \neq 0$ e, supondo que vale $Q_{m-1}(0) = \beta_1\beta_2\dots\beta_{m-1} \neq 0$, temos que $Q_m(0) = \beta_m Q_{m-1}(0) \neq 0$.

Lema 3 *Para qualquer $m \geq 1$, os polinômios consecutivos Q_m e Q_{m+1} não têm zeros em comum.*

Demonstração. Temos que (7.1) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \alpha_2 z &= (z + \beta_2)Q_1(z) - Q_2(z), \\ \alpha_{m+1} z &= (z + \beta_{m+1}) \frac{Q_m(z)}{Q_{m-1}(z)} - \frac{Q_{m+1}(z)}{Q_{m-1}(z)}, \quad m \geq 2. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Dessa forma, se $w \in \mathbb{C}$ é zero de Q_1 e Q_2 , então $\alpha_2 w = 0$. Como $\alpha_m \neq 0$ para todo m e $w = 0$ não é zero de nenhum Q_m , temos uma contradição. Portanto, $Q_1(z)$ e $Q_2(z)$ não têm zeros em comum.

Suponha que, para $m \geq 2$, Q_{m-1} e Q_m não têm zeros em comum. Se $Q_m(w) = 0$, então $Q_{m-1}(w) \neq 0$ e de (7.2), $Q_{m+1}(w) = -\alpha_{m+1}wQ_{m-1}(w) \neq 0$.

Logo, Q_m e Q_{m+1} não têm zeros em comum. ■

De (7.1) obtemos também que, para $n \geq 1$,

$$Q_n(t) = \begin{vmatrix} z + \beta_1 & -\alpha_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -z & z + \beta_2 & -\alpha_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & z + \beta_{n-1} & -\alpha_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -z & z + \beta_n \end{vmatrix}.$$

Temos então o seguinte resultado

Teorema 37 *Os zeros de Q_n são autovalores da matriz inferior de Hessenberg*

$$H_n = \begin{pmatrix} \eta_1 & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \eta_1 & \eta_2 & \alpha_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \dots & \alpha_{n-1} & 0 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \dots & \eta_{n-1} & \alpha_n \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \dots & \eta_{n-1} & \eta_n \end{pmatrix},$$

onde $\eta_m = \alpha_m - \beta_m$, $m = 1, 2, \dots, n$, e $\alpha_1 = 0$.

Sendo I a matriz identidade, e dadas as matrizes

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad B_n = \begin{pmatrix} \beta_1 & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \alpha_3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \beta_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \beta_n \end{pmatrix}$$

e

$$A_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

temos que $H_n = B_n A_n^{-1}$ e, podemos também escrever $Q_n(z) = \det(zI - B_n A_n^{-1})$. Daí, Q_n é o polinômio característico da matriz $B_n A_n^{-1}$ e também da matriz $(B_n A_n^{-1})^t = (A_n^{-1})^t B_n^t$. Isso significa que os zeros de Q_n são também os autovalores da matriz de Hessenberg superior

$$(A_n^{-1})^t B_n^t = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \dots & \gamma_{n-1} & \beta_n \\ \alpha_2 & \gamma_2 & \gamma_3 & \dots & \gamma_{n-1} & \beta_n \\ 0 & \alpha_3 & \gamma_3 & \dots & \gamma_{n-1} & \beta_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \eta_{n-1} & -\beta_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_n & -\beta_n \end{pmatrix},$$

onde $\gamma_m = \alpha_{m+1} - \beta_m$, $m = 1, 2, \dots$

7.2 Limitantes para os zeros de $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$

Sendo τ , λ_1 e λ_2 constantes tais que $\tau > 0$ e $\lambda_1 \geq \lambda_2$, definimos a região

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \tau) = \{z = x + yi \in \mathbb{C} : |y| \leq \tau, \lambda_1 - \sqrt{\tau^2 - y^2} \leq x \leq \lambda_2 + \sqrt{\tau^2 - y^2}\}.$$

Sendo $D_\delta = \text{diag}(\delta, \delta^2, \dots, \delta^n)$, uma matriz diagonal $n \times n$ onde $\delta \neq 0$, temos que os autovalores da matriz H_n são os mesmos de

$$D_\delta H_n D_\delta^{-1} = \begin{pmatrix} \eta_1 & \alpha_2 \delta^{-1} & \dots & 0 & 0 \\ \eta_1 \delta & \eta_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \eta_1 \delta^{n-3} & \eta_2 \delta^{n-4} & \dots & \alpha_{n-1} \delta^{-1} & 0 \\ \eta_1 \delta^{n-2} & \eta_2 \delta^{n-3} & \dots & \eta_{n-1} & \alpha_n \delta^{-1} \\ \eta_1 \delta^{n-1} & \eta_2 \delta^{n-2} & \dots & \eta_{n-1} \delta & \eta_n \end{pmatrix}.$$

O teorema a seguir será necessário na demonstração do próximo resultado

Teorema 38 (*Círculos de Gerschgorin*) *Seja A uma matriz de ordem n com entradas complexas. Então, todo autovalor de A está em pelo menos um dos círculos C_1, \dots, C_n , onde o i -ésimo círculo C_i tem centro em $(a_{ii}, 0)$ e raio r_i dado por*

$$r_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

onde $a_{i,j}$ é o elemento da i -ésima linha e j -ésima coluna de A .

Maiores detalhes e a demonstração podem ser encontrados em [13].

Teorema 39 *Para qualquer $n \geq 2$, considere*

$$\alpha_n^M = \text{máx}|\alpha_k|, \quad k = 2, 3, \dots, n \quad \text{e} \quad \eta_n^M = \text{máx}|\eta_k|, \quad k = 2, 3, \dots, n.$$

Sejam

$$d_1 = \frac{\sqrt{\alpha_n^M}}{\sqrt{\alpha_n^M} + \sqrt{\eta_n^M}}, \quad d_2 = \frac{\alpha_n^M}{\alpha_n^M + |\eta_1| - \eta_n^M}$$

e

$$d_3 = \frac{2\alpha_n^M}{(\alpha_n^M)^2 + 4\alpha_n^M(|\eta_1| - \eta_n^M) + \alpha_n^M}.$$

Então, os zeros de Q_k , $1 \leq k \leq n$, estão dentro do disco $|z| \leq \hat{\rho}_n$, onde

$$\hat{\rho}_n = \begin{cases} \frac{\alpha_n^M + |\eta_1| - \eta_n^M}{|\eta_1| - \eta_n^M} |\eta_1|, & \text{se } 0 < d_2 < d_1, \\ (\sqrt{\alpha_n^M} + \sqrt{\eta_n^M})^2, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Se os η_k , para $k = 1, 2, \dots, n$, são todos reais, então os zeros de Q_k , $1 \leq k \leq n$, estão dentro da região $W(\eta_{n,1}, \eta_{n,2}, \tilde{\rho}_n)$, onde

$$\eta_{n,1} = \text{mín}\{\eta_k, k = 1, 2, \dots, n\}, \quad \eta_{n,2} = \text{máx}\{\eta_k, k = 1, 2, \dots, n\}$$

e

$$\tilde{\rho}_n = \begin{cases} \frac{\sqrt{(\alpha_n^M)^2 + 4\alpha_n^M(|\eta_1| - \eta_n^M)} + \alpha_n^M}{2(|\eta_1| - \eta_n^M)} |\eta_1|, & \text{se } 0 < d_3 < d_1, \\ (\sqrt{\alpha_n^M} + \sqrt{\eta_n^M})^2 - \eta_n^M, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Demonstração. Vamos considerar aqui $0 < \delta < 1$. Pelo teorema de Gerschgorin temos que os autovalores da matriz $D_\delta H_n D_\delta^{-1}$, que é a matriz H_n , estão dentro de $\bigcup_{k=1}^n \Delta_k^{(n)}(\delta)$,

onde $\Delta_k^{(n)}(\delta)$ é o disco fechado com centro em η_k e raio $\rho_k(\delta) = |\eta_k| \sum_{r=1}^{n-k} \delta^r + |\alpha_k| \delta^{-1}$. Temos então

$$\rho_1(\delta) < \tilde{\rho}_1(\delta) = \frac{\delta}{1-\delta} |\eta_1|$$

e, para $2 \leq k \leq n$,

$$\begin{aligned} \rho_k(\delta) &\leq \frac{\delta}{1-\delta} |\eta_k| + \frac{1}{\delta} |\alpha_k| \leq \tilde{\rho}_n(\delta) = \frac{\delta}{1-\delta} \eta_n^M + \frac{1}{\delta} \alpha_n^M \\ &= -\eta_n^M + \frac{1}{1-\delta} \eta_n^M + \frac{1}{\delta} \alpha_n^M. \end{aligned}$$

Escolhemos um valor de δ que minimiza $\max\{\hat{\rho}_1(\delta), \hat{\rho}_n(\delta)\}$, que acaba sendo d_2 ou d_1 , dependendo se $\eta_n^M \ll |\eta_1|$ ou não. Isso nos dá a primeira parte do teorema.

Note agora que o disco $\Delta_1^{(n)}(\delta)$ está dentro do disco $|z - \eta_1| < \tilde{\rho}_1(\delta)$ e, para qualquer k , $2 \leq k \leq n$, o disco $\Delta_k^{(n)}(\delta)$ está dentro do disco $|z - \eta_k| \leq \tilde{\rho}_n(\delta)$.

Escolhemos δ que minimiza $\max\{\tilde{\rho}_1(\delta), \tilde{\rho}_n(\delta)\}$, que acaba sendo d_3 ou d_1 , dependendo se $\eta_n^M \ll |\eta_1|$ ou não. Uma vez que os centros η_k de todos os discos $\Delta_k^{(n)}(\delta)$ estão em linha reta (nesse caso, na reta real), obtemos a última parte do teorema para o polinômio Q_n .

Uma vez que o zero de $Q_1(z)$ é η_1 , ele está em $\bigcup_{k=1}^n \Delta_k^{(n)}(\delta)$. Se p é tal que $1 < p < n$, então os autovalores de H_p (isto é, os zeros de Q_p) estão em $\bigcup_{k=1}^p \Delta_k^{(p)}(\delta)$. Como $\Delta_k^{(p)}(\delta) \subset \Delta_k^{(n)}(\delta)$ para $1 \leq k \leq p$, notamos que os zeros de Q_p também estão em $\bigcup_{k=1}^n \Delta_k^{(n)}(\delta)$. Então os resultados do teorema são válidos também para todos os polinômios Q_k , $1 \leq k < n$. ■

Como exemplo, aplicaremos os resultados do teorema anterior em um caso específico, onde, dado $\alpha > 0$, $\alpha_2 = -\alpha$ e $\alpha_k = \alpha$, $3 \leq k \leq n$ e $\beta_k = \beta$, $1 \leq k \leq n$. Temos então

$$\alpha_n^M = \alpha \text{ e } \eta_n^M = \alpha + \beta.$$

Assim,

$$d_1 = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha + \beta}}} \text{ e } d_2 = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}.$$

Então, os zeros de Q_k , $1 \leq k \leq n$, estão dentro do disco $|z| \leq \hat{\rho}_n$, onde

$$\hat{\rho}_n = \begin{cases} 0, \text{ se } 0 < \frac{\alpha}{\alpha + \beta} < \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha + \beta}}}, \\ 2\alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha(\alpha + \beta)}, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Mas, como $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha + \beta}}} < \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$, então $|z| \leq 2\alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha(\alpha + \beta)}$.

Escolhendo, por exemplo, $\beta = 5$ e $\alpha = 1$, temos $Q_0(z) = 1$, $Q_1(z) = z + 5$,

$$Q_2(z) = (z + 5)Q_1(z) + zQ_0(z) = z^2 + 11z + 25$$

e

$$Q_{n+1}(z) = (z + 5)Q_n(z) - zQ_{n-1}(z), \quad n \geq 2.$$

Nesse caso, utilizando o Teorema 39, temos que os zeros de Q_k , $1 \leq k \leq n$, estão em $|z| \leq 7 + 2\sqrt{6} \cong 11,9$. Nas Figuras 7.1 até 7.3 temos a representação dos zeros dos polinômios Q_k para $1 \leq k \leq 6$, onde podemos observar que estão todos dentro do disco $|z| \leq 11,9$.

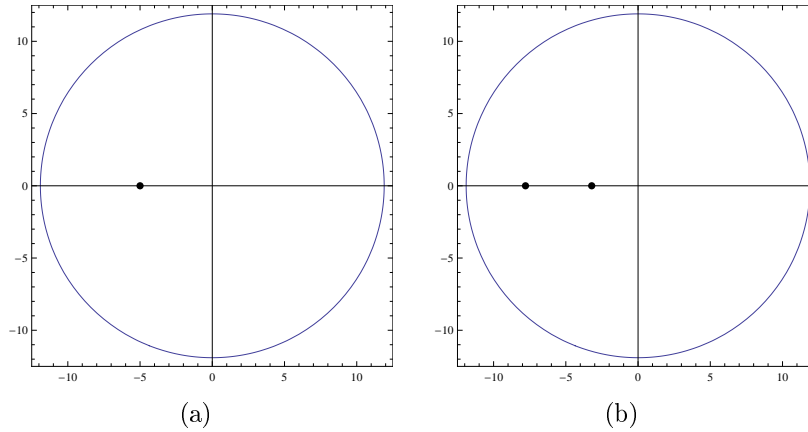


Figura 7.1: Localização dos zeros dos polinômios **(a)** $Q_1(z) = z + 5$ e **(b)** $Q_2(z) = z^2 + 11z + 25$.

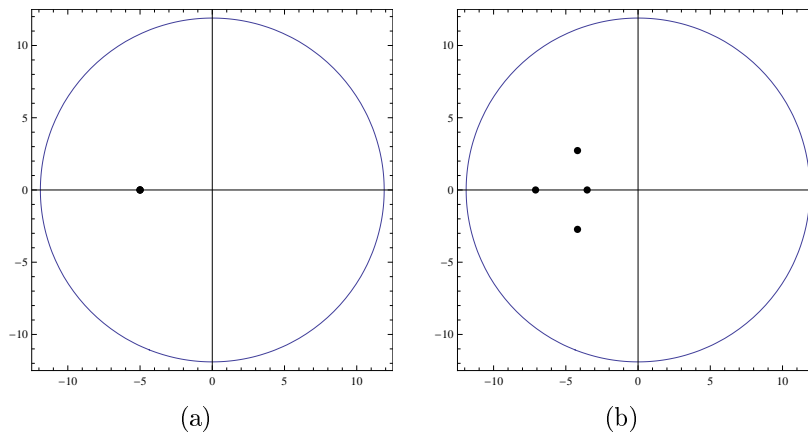


Figura 7.2: Localização dos zeros dos polinômios **(a)** $Q_3(z) = z^3 + 15z^2 + 75z + 125$ e **(b)** $Q_4(z) = z^4 + 19z^3 + 139z^2 + 475z + 625$.

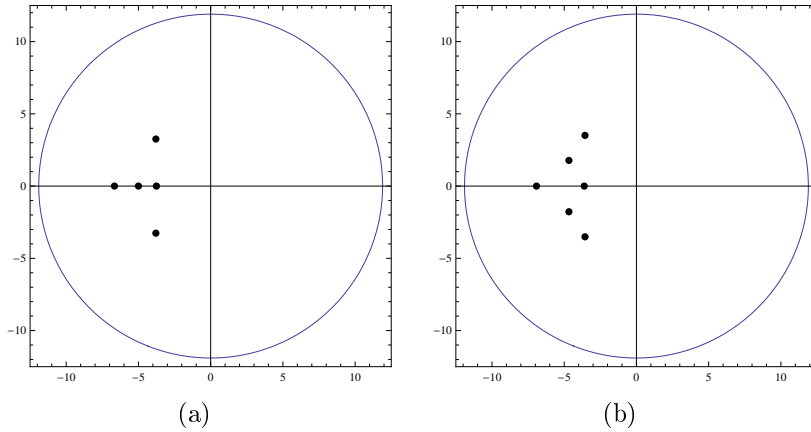


Figura 7.3: Localização dos zeros dos polinômios (a) $Q_5(z) = z^5 + 23z^4 + 219z^3 + 1095z^2 + 2875z + 3125$ e (b) $Q_6(z) = z^6 + 27z^5 + 315z^4 + 2051z^3 + 7875z^2 + 16875z + 15625$.

O resultado abaixo é atribuído a Saff e Varga (ver [16]).

Teorema 40 *Sejam α_k , $k = 2, 3, \dots, n$ e β_k , $k = 1, 2, \dots, n$ números reais positivos. Defina*

$$\tau = \text{mín} \{-\eta_k = \beta_k - \alpha_k : k = 1, 2, \dots, n\},$$

com $\alpha_1 = 0$. Então, se $\tau > 0$, a região parabólica $\mathbb{P}^+(\tau) = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y^2 \leq 4\tau(\tau + x), x > -\tau\}$, não contém zeros dos polinômios Q_1, Q_2, \dots, Q_n .

O resultado a seguir nos fornece um zero dos polinômios Q_k para $1 \leq k \leq n$ e k ímpar.

Teorema 41 *Se $\beta_k = \beta$, $k = 1, 2, \dots, n$, na relação de recorrência (7.1) então todos os polinômios $Q_k(z)$, $1 \leq k \leq n$, de grau ímpar que satisfazem tal relação tem $z = -\beta$ como zero.*

Demonstração. De fato, $Q_1(z) = z + \beta$ e então $z = -\beta$ é zero desse polinômio.

Temos

$$\begin{aligned} Q_3(z) &= (z + \beta)Q_2(z) - \alpha_3 z Q_1(z) \\ &= (z + \beta)Q_2(z) - \alpha_3 z(z + \beta) \\ &= (z + \beta)[Q_2(z) - \alpha_3 z] \end{aligned}$$

e assim, $z = -\beta$ é zero de $Q_3(z)$.

Suponhamos que $z = -\beta$ é zero de $Q_{m-1}(z)$, onde $m - 1$ é ímpar. Podemos então escrever

$$Q_{m-1}(z) = (z + \beta)P(z),$$

onde $P(z)$ é um polinômio de grau $m - 2$.

Logo,

$$\begin{aligned} Q_{m+1}(z) &= (z + \beta)Q_m(z) - \alpha_{m+1} z Q_{m-1}(z) \\ &= (z + \beta)Q_m(z) - \alpha_{m+1} z(z + \beta)P(z) \\ &= (z + \beta)[Q_m(z) - \alpha_{m+1} z P(z)]. \end{aligned}$$

Portanto, $z = -\beta$ é zero de Q_{m+1} , onde $m + 1$ é ímpar.

■

Sendo $\beta_k = \beta > 0$, $1 \leq k \leq n$, e $\alpha_k > 0$, $2 \leq k \leq n$, considere $x = x(\beta; z) = \frac{1}{2}(\beta^{-\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}} + \beta^{\frac{1}{2}}z^{-\frac{1}{2}})$ e os polinômios P_k , $0 \leq k \leq n$, dados por

$$P_k(x) = (4\beta z)^{-\frac{k}{2}} Q_k(z), \quad 0 \leq k \leq n. \quad (7.3)$$

Tais polinômios satisfazem $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ e

$$P_{k+1}(x) = xP_k(x) - \frac{\alpha_{k+1}}{4\beta} P_{k-1}(x), \quad 1 \leq k \leq n, \quad (7.4)$$

e tem zeros simétricos em relação à origem.

De fato, substituindo (7.1) em (7.3) obtemos (7.4). Para mostrar que os zeros são simétricos, basta observar que $P_0(x) = P_0(-x)$, $P_1(x) = -P_1(-x)$ e, supondo que $P_k(x) = (-1)^k P_k(-x)$, obtemos $P_{k+1}(x) = (-1)^{k+1} P_{k+1}(-x)$.

Do Teorema 41 temos que, se k é ímpar, $z = -\beta$ é zero de $Q_k(x)$. Então, como $x = \frac{1}{2}(\beta^{-\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}} + \beta^{\frac{1}{2}}z^{-\frac{1}{2}})$, temos que $x = 0$ é zero de $P_k(x)$.

Teorema 42 *Os zeros dos $P_k(x)$, $1 \leq k \leq n$, definidos em (7.3), são reais e distintos se $\beta_k = \beta > 0$, $k = 1, 2, \dots, n$, e $\alpha_k > 0$ para $k = 2, \dots, n$.*

Demonstração. Temos que $P_1(x) = x$, logo $x_{1,1} = 0$ é zero de P_1 e é real.

De (7.4), $P_2(x) = x^2 - \frac{\alpha_2}{4\beta}$ e assim seus zeros em ordem crescente são $x_{2,1} = -\sqrt{\frac{\alpha_2}{4\beta}}$ e $x_{2,2} = \sqrt{\frac{\alpha_2}{4\beta}}$, ou seja, são reais, pois $\alpha_2 > 0$ e $\beta > 0$, e distintos. Então, os zeros de P_1 e P_2 se entrelaçam, ou seja,

$$x_{2,1} < x_{1,1} < x_{2,2}.$$

Fazendo $k = 2$ em (7.4), obtemos $P_3(x) = xP_2(x) - \frac{\alpha_3}{4\beta} P_1(x)$. Como os zeros são simétricos em relação a origem vamos analisar apenas o intervalo $(0, +\infty)$. Tomando então $x = x_{2,2}$, temos que

$$P_3(x_{2,2}) = -\frac{\alpha_3}{4\beta} P_1(x_{2,2}) < 0$$

e, como $\lim_{x \rightarrow +\infty} P_3(x) > 0$, temos uma mudança de sinal de P_3 em $(x_{2,2}, +\infty)$, ou seja, P_3 tem um zero neste intervalo. Pela propriedade de simetria dos zeros, P_3 também tem um zero em $(-\infty, x_{2,1})$. Como P_3 é de grau ímpar, $x = 0$ é um zero. Logo, P_3 tem três zeros reais e distintos, que se entrelaçam com os zeros de P_2 .

Suponhamos agora que os zeros de P_{n-1} e P_{n-2} são reais, distintos e entrelaçados, sendo n ímpar. Sejam $x_{1,n-1} < x_{2,n-1} < \dots < x_{n-1,n-1}$ os zeros de P_{n-1} , em ordem crescente. Para $x > x_{n-1,n-1}$,

$$P_n(x_{n-1,n-1}) = -\frac{\alpha_n}{4\beta} P_{n-2}(x_{n-1,n-1}) < 0$$

e, como $\lim_{x \rightarrow +\infty} P_n(x) > 0$, temos que no intervalo $(x_{n-1,n-1}, +\infty)$ existe um zero de $P_n(x)$.

Para $x = x_{n-1,n-2}$, temos

$$P_n(x_{n-1,n-2}) = -\frac{\alpha_n}{4\beta} P_{n-2}(x_{n-1,n-2}) > 0.$$

Como $\text{sgn}(P_n(x_{n-1,n-1})) < 0$ e $\text{sgn}(P_n(x_{n-1,n-2})) > 0$, temos que existe um zero de $P_n(x)$ em $(x_{n-1,n-2}, x_{n-1,n-1})$.

Analisando o intervalo $(0, +\infty)$ dessa mesma forma até $x_{n-1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, onde $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ denota o maior inteiro menor ou igual a $\frac{n}{2}$, como definido anteriormente, obtemos que $P_n(x)$ tem $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ zeros nos intervalos $(x_{n-1,j}, x_{n-1,j+1})$, onde $j = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \dots, n-2$, e um zero em $(x_{n-1,n-1}, +\infty)$. Como n é ímpar, $P_n(x)$ tem um zero em $x = 0$. Portanto, $P_n(x)$ tem n zeros reais e distintos que se entrelaçam com os zeros de $P_{n-1}(x)$.

Para o caso par a demonstração é análoga, mas não teremos $x = 0$ como zero de $P_n(x)$. Logo, $P_n(x)$ tem zeros reais e distintos. ■

O seguinte resultado diz respeito ao comportamento dos zeros do polinômio Q_n quando $\alpha_{n+1} > 0$, $\forall n$, e β_n é uma constante positiva.

Teorema 43 *Seja $\beta_k = \beta > 0$ para $k = 1, 2, \dots, n$ e $\alpha_k > 0$ para $k = 2, \dots, n$. Então, os zeros de qualquer Q_k , $1 \leq k \leq n$, são distintos (exceto pela possibilidade de um zero duplo em $z = \beta$) e estão localizados em $C(\beta) \cup (0, \infty)$, onde $C(\beta) := \{z : z = \beta e^{i\theta}, 0 < \theta < 2\pi\}$.*

Em particular, se $\left\{ \frac{\alpha_{k+1}}{4\beta} \right\}_{k=1}^{n-1}$ é uma sequência encadeada positiva, então todos os zeros são distintos e se localizam no círculo aberto $C(\beta)$.

Demonstração. Considere $x = x(\beta; z) = \frac{1}{2}(\beta^{-\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}} + \beta^{\frac{1}{2}}z^{-\frac{1}{2}})$ e os polinômios $P_k(x)$ dados em (7.3). Pelo Teorema 42 temos que os zeros de P_k são reais e distintos, e como visto anteriormente são também simétricos em relação à origem.

Se escrevermos $P_{2k}(x) = \prod_{j=1}^k (x^2 - x_{2k,j}^2)$ e $P_{2k+1}(x) = x \prod_{j=1}^k (x^2 - x_{2k+1,j}^2)$, então, como $Q_k(z) = (4\beta z)^{\frac{k}{2}} P_k(x(\beta; z))$, vemos que

$$Q_{2k}(z) = \prod_{j=1}^k \left[(z - z_{2k,j}) \left(z - \frac{\beta^2}{z_{2k,j}} \right) \right]$$

e

$$Q_{2k+1}(z) = (z + \beta) \prod_{j=1}^k \left[(z - z_{2k+1,j}) \left(z - \frac{\beta^2}{z_{2k+1,j}} \right) \right],$$

onde $\frac{z_{k,j}}{\beta} = (2x_{k,j}^2 - 1) + 2\sqrt{x_{k,j}^2(x_{k,j}^2 - 1)}$. Daí, se $x_{k,j}^2 < 1$, então $z_{k,j}$ e $\frac{\beta^2}{z_{k,j}}$ formam um par conjugado de zeros de Q_k no círculo $C(\beta)$ e se $x_{k,j}^2 > 1$, então eles são dois zeros positivos de Q_k , inversos um do outro em relação ao ponto β . Então, concluímos que os zeros de Q_k estão ou no círculo $C(\beta)$ ou na reta real positiva. Se $z = \beta$ é um zero de Q_k , então é um zero de multiplicidade 2.

Assumimos agora que $\left\{ \frac{\alpha_{k+1}}{4\beta} \right\}_{k=1}^{n-1}$ é uma sequência encadeada positiva. Isso significa que existe uma sequência $\{g_k\}_{k=0}^{n-1}$, onde $0 \leq g_0 < 1$ e $0 < g_k < 1$ para $1 \leq k \leq n-1$, tal que, $\frac{\alpha_{k+1}}{4\beta} = (1 - g_{k-1})g_k$, $1 \leq k \leq n-1$.

De (7.4),

$$\frac{\alpha_{k+1}}{4\beta x^2} = \frac{P_k(x)}{xP_{k-1}(x)} \left(1 - \frac{P_{k+1}(x)}{xP_k(x)} \right)$$

e assim, temos que todos os zeros de P_k , $1 \leq k \leq n$ estão em $(-1, 1)$. Daí, nesse caso, todos os zeros de Q_k , $1 \leq k \leq n$, estão no círculo aberto $C(\beta)$.

■

Como exemplo, vamos tomar $\beta = 2$ e $\alpha_k = 10$, $2 \leq k \leq n$, e assim temos $Q_0(z) = 1$, $Q_1(z) = z + 2$ e

$$Q_{m+1}(z) = (z + 2)Q_m(z) - 10zQ_{m-1}(z).$$

Pelo Teorema 43, os zeros de Q_k , $1 \leq k \leq n$ estão em $C(2) \cup (0, \infty)$, onde

$$C(2) := \{z : z = 2e^{i\theta}, 0 < \theta < 2\pi\}.$$

Nas Figuras 7.4 e 7.5 temos a localização dos zeros dos polinômios Q_k para $k = 1, 2, 3$ e 4 representados juntamente com $C(2)$.

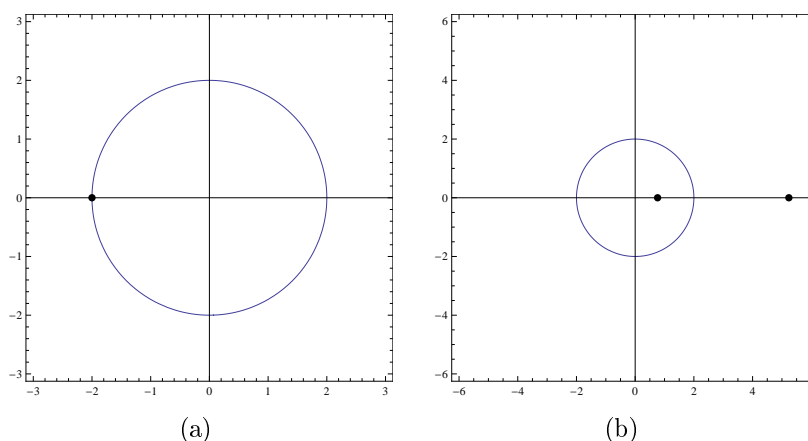


Figura 7.4: Localização dos zeros dos polinômios (a) $Q_1(z) = z + 2$ e (b) $Q_2(z) = z^2 - 6z + 4$.

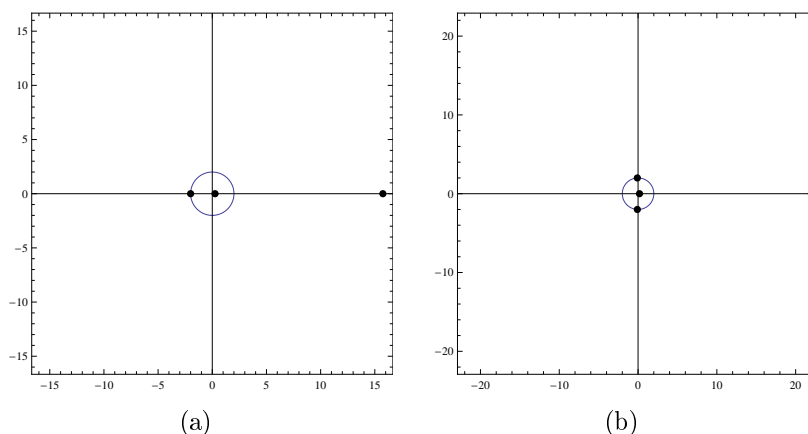


Figura 7.5: Localização dos zeros dos polinômios (a) $Q_3(z) = z^3 - 14z^2 - 28z + 8$ e (b) $Q_4(z) = z^4 - 22z^3 + 4z^2 - 88z + 16$.

Corolário 2 *Seja $\beta_k = \beta > 0$, $1 \leq k \leq n$. Então, vale o seguinte:*

1. *Se $0 < \alpha_{k+1} \leq \beta$, $1 \leq k \leq n - 1$, então todos os zeros de Q_k , $1 \leq k \leq n$, estão em $C(\beta)$.*
2. *Em particular, para $\epsilon > 0$, se $0 < \alpha_{k+1} \leq \beta - \epsilon$, $1 \leq k \leq n - 1$, então os zeros de qualquer Q_k , $1 \leq k \leq n$ estão no arco de $C(\beta)$ que está fora da região parabólica $\mathbb{P}^+(\epsilon) = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y^2 \leq 4\epsilon(\epsilon + x), x > -\epsilon\}$,*

3. Novamente, se $0 < \alpha_{k+1} \leq \beta$, $1 \leq k \leq n-1$, seja $\kappa_n = \max_{1 \leq k \leq n-1} \sqrt{\frac{\alpha_{k+1}}{\beta}}$. Então, todos os zeros de Q_k , $1 \leq k \leq n$, estão no arco aberto

$$C(\beta, \theta_n) := \{z : z = \beta e^{i\theta}, \theta_n < \theta < 2\pi - \theta_n\},$$

onde $\theta_n = 2 \arccos \left(\kappa_n \cos \left(\frac{\pi}{n+1} \right) \right)$.

4. Para $\epsilon > 0$, suponha que $0 < \alpha_{k+1} \leq \beta - \epsilon$, $1 \leq k \leq n-1$. Se Q_n tem algum zero fora de $C(\beta)$, então ele está no intervalo $\left(-\sqrt{\frac{\beta+\epsilon}{b}}, \sqrt{\frac{\beta+\epsilon}{b}} \right)$, onde $b = (\sqrt{\beta + \epsilon} + \sqrt{\epsilon})^2$.

Demonstração.

1. Em [7], encontra-se um resultado que diz que se $\{c_n\}_{n=1}^N$ é uma seqüência encadeada positiva e $0 < d_n < c_n$, $\forall n$, $1 \leq n \leq N$, então $\{d_n\}_{n=1}^N$ é uma seqüência encadeada positiva. Aqui temos que $\left\{ \frac{\alpha_{k+1}}{4\beta} \right\}_{k=1}^{n-1}$ é uma seqüência encadeada positiva, pois

$$\frac{\alpha_{k+1}}{4\beta} \leq \frac{\beta}{4\beta} = \frac{1}{4}$$

e $\left\{ \frac{1}{4} \right\}_{k=1}^{n-1}$ é uma seqüência encadeada positiva.

2. Esse resultado segue diretamente dos teoremas 40 e 43.
3. Considere os polinômios $P_k(x) = (4\beta z)^{-\frac{k}{2}} Q_k(z)$, onde $x = x(\beta; z) = \frac{1}{2}(\beta^{-\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}} + \beta^{\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}})$. como já foi falado, eles satisfazem

$$P_{k+1}(x) = xP_k(x) - \frac{\alpha_{k+1}}{4\beta} P_{k-1}(z), \quad 1 \leq k \leq n-1,$$

com $P_0(x) = 1$ e $P_1(x) = x$. Daí, pelos teoremas 2 e 3 de [8] os zeros de $P_k(x)$, $1 \leq k \leq n$, estão no intervalo $(-\hat{x}, \hat{x})$, onde $\hat{x} = \cos \left(\frac{\pi}{n+1} \right) \max_{1 \leq k \leq n-1} \sqrt{\frac{\alpha_{k+1}}{\beta}}$. Então, a aplicação $Q_k(z) = (4\beta z)^{\frac{k}{2}} P_k(x(\beta; z))$ nos dá o resultado.

4. Note que todos os zeros de $P_k(x) = (4\beta z)^{-\frac{k}{2}} Q_k(z)$ estão no intervalo $\left(-\sqrt{\frac{\beta+\epsilon}{\beta}}, \sqrt{\frac{\beta+\epsilon}{\beta}} \right)$. Daí, como $Q_k(z) = (4\beta z)^{\frac{k}{2}} P_k(x(\beta; z))$, obtemos o resultado.

■

Considerações Finais

A realização desse trabalho possibilitou o estudo das classes de polinômios apresentadas, fazendo um aprofundamento nas características de cada uma delas, o que deixou claro a sua importância.

Destacou-se o estudo da propriedade que diz que tais classes satisfazem a uma relação de recorrência de três termos e também resultados importantes sobre o comportamento de seus zeros. Foram apresentados exemplos de cada uma das classes estudadas para uma melhor compreensão e visualização dos resultados.

Ao meu ver o último capítulo é o mais interessante pois contém propriedades e resultados que se estendem para todas as classes de polinômios que satisfazem a relação (1.2), e não apenas as que foram abordadas nos capítulos anteriores, sendo que o Teorema 41 foi um resultado observado durante a elaboração da dissertação.

Referências

- [1] C. F. Bracciali, E. X. L. Andrade. *Frações contínuas: propriedades e aplicações*. Notas em Matemática Aplicada. SBMAC, 2012. 87
- [2] C. F. Bracciali, E. X. L. Andrade. *Zeros de Polinômios Ortogonais: Interpretação Eletrostática e Análise de Frequências*. Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, 3. Universidade Federal de Goiás, 2006. 27
- [3] C. F. Bracciali, E. X. L. Andrade, F. R. Rafaeli. *Introdução aos polinômios ortogonais*. Notas em Matemática Aplicada. SBMAC, 2012. 15, 21
- [4] K. Castillo, M.S. Costa, A. Sri Ranga, D.O. Veronese. *A Favard type theorem for orthogonal polynomials on the unit circle from a three term recurrence formula*. J. Approx. Theory, 2014. 48, 89
- [5] T. S. Chihara. *An introduction to orthogonal polynomials*. Gordon and Breach, 1978. 18, 21, 31, 56
- [6] W. Gautschi. *Orthogonal polynomials: Computation and Approximation*. Oxford University Press, 2004. 21
- [7] M. E. H. Ismail. *Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in One Variable*. Cambridge University Press, 2005. 100
- [8] M.E.H. Ismail, X. Li. *Bound on the extreme zeros of orthogonal polynomials*. Proc. Amer. Math. Soc. 115 (1992) p.131–140. 100
- [9] W. B. Jones, O. Njåstad, W.J. Thron. *Moment theory, orthogonal polynomials, quadrature rules and continued fractions associated with the unit circle*. Bull. London Math. Soc., 1989. 73
- [10] W. B. Jones, O. Njåstad, W.J. Thron. *Orthogonal Laurent polynomials and a strong Hamburger moment problem*. J. Math. Anal. Appl., 1984. 55
- [11] G. V. Milovanović, D. S. Mitrinović, T. M. Rassias. *Topics in Polynomials: Extremal Problems, Inequalities, Zeros*. World Scientific, 1994. 49, 50
- [12] J. A. Pereira. *Zeros de Polinômios Auto-Recíprocos Reais no Círculo Unitário*. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional), UNESP, 2015. 49
- [13] P. Pulino. *Algebra Linear e suas Aplicações*. Notas de Aula. UNICAMP, 2012. 93
- [14] E. F. Robertson, J. J. O'Connor. *MacTutor History of Mathematics archive*. Disponível em: <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/>. Acesso em: 26 de abr. de 2016. 31, 33, 34, 35, 38, 40, 41

-
- [15] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill Book, 1976. 15
- [16] E.B. Saff, R.S. Varga. *Zero-free parabolic regions for sequences of polynomials*. SIAM J. Math. Anal. 7 (1976) p.344–357. 96
- [17] A. P. da Silva, A. Sri Ranga, *Polynomials generated by a three term recurrence relation: bounds for complex zeros*. Lin. Alg. Appl., 397 (2005), p.299–324. 91
- [18] B. Simon. *Orthogonal Polynomials on the Unit Circle: Part 1: Classical Theory*. Amer. Math. Soc., 2004. 21, 46
- [19] B. Simon. *Orthogonal Polynomials on the Unit Circle: Part 2: Spectral Theory*. Amer. Math. Soc., 2005. 21, 46
- [20] A. Sri Ranga. *Another quadrature rule of highest algebraic degree of precision*. Numer. Math., 1994. 70
- [21] A. Sri Ranga, C. F. Bracciali, E. X. L. Andrade. *Polinômios que satisfazem uma Relação de Recorrência de Três Termos*. Notas em Matemática Aplicada. SBMAC, 2014. 15, 21, 47, 55, 73, 74, 79, 88
- [22] G. Szegő. *Orthogonal Polynomials*. Amer. Math. Soc., 1967. 21