

Mario Rolando Rodríguez Cadalso

Projeto via LMI de controladores *gain scheduling*  
com restrição de  $\mathcal{D}$ -estabilidade.

Mario Rolando Rodríguez Cadalso  
Mestre em Engenharia Elétrica - FEIS / UNESP

**Projeto via LMI de controladores *gain scheduling*  
com restrição de  $\mathcal{D}$ -estabilidade.**

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia do Campus de Ilha Solteira - UNESP para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área do Conhecimento: Automação.

Prof. Dr. Edvaldo Assunção  
**Orientador**

## FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação.

R696p Rodriguez Cadalso, Mario Rolando.  
Projeto via LMI de controladores gain scheduling com restrição de D-estabilidade. /Mario Rolando Rodriguez Cadalso. – Ilha Solteira: [s.n.], 2016  
75 f.:il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Automação, 2016

Orientador: Edvaldo Assunção  
Inclui bibliografia

1. Desigualdades matriciais lineares. 2. Controle gain scheduling.  
3. Controle com realimentação de estado ou derivativa. 4. D-Estabilidade.



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Câmpus de Ilha Solteira

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Projeto via LMI de controladores gain scheduling com destrição de D-estabilidade

AUTOR: MARIO ROLANDO RODRIGUEZ CADALSO

ORIENTADOR: EDVALDO ASSUNCAO

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em ENGENHARIA ELÉTRICA, área: AUTOMAÇÃO pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. EDVALDO ASSUNCAO  
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA  
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. EDSON ITALO MAINARDI JUNIOR  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia

Ilha Solteira, 24 de agosto de 2016

À minha mãe e pai Ibis T. e Walter

## **AGRADECIMENTOS**

Muito especialmente, desejo agradecer :

- Ao meu orientador professor Doutor Edvaldo Assunção, pela disponibilidade, atenção dispensada, paciência, dedicação e profissionalismo.
- Aos professores Doutores Marcelo C. M. Teixeira e Rodrigo Cardim pelos diálogos construtivos e descontraídos durante este tempo, pelo acompanhamento e pelas sugestões, extremamente valiosas para este trabalho;
- Aos meus amigos e companheiros dos laboratórios LPC, em especial à : Lázaro, Diogo, Alexandre, Uiliam e Leonardo que de forma direta ou indireta me ajudaram;
- A minha mãe e meu pai por sempre me apoiarem no desafio do estudo contínuo.

“O segredo do sucesso é a constância de propósito.”

**Benjamin Disraeli (1804-1881)**

## RESUMO

Neste trabalho são propostas metodologias com base na teoria de estabilidade segundo Lyapunov para projetar controladores *gain scheduling* usando realimentação de estado ou derivativa e o conceito de  $\mathcal{D}$ -estabilidade. As condições de projeto são dadas por desigualdades matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* - LMIs). A metodologia é aplicada em sistemas lineares sujeitos a parâmetros variantes no tempo (do inglês, *Linear Parameter Varying* - LPV). A utilização do Lema de Finsler eliminou a necessidade de inverter uma matriz literal para projetar o ganho de realimentação. Com o objetivo de satisfazer requisitos práticos, foi feito uso da restrição de  $\mathcal{D}$ -estabilidade no projeto de um controlador para um sistema de suspensão ativa. A implementação prática mostra a eficiência da metodologia proposta.

**Palavras-chave:** Desigualdades matriciais lineares. Controle *gain scheduling*. Controle com realimentação de estado ou derivativa.  $\mathcal{D}$ -estabilidade.



## ABSTRACT

In this work are proposed methodologies based on Lyapunov stability theory for designing gain scheduling controller using state-derivative feedback or state feedback and considering  $\mathcal{D}$ -stability constraint. The design conditions are given by Linear Matrix Inequalities. The methodology is applied on system with time-variant parameter. The use of Finsler's Lemma eliminated the problem of inverting a symbolic matrix to calculate the feedback gain. The theory of  $\mathcal{D}$ -stability allowed to get implementable controllers for an active suspension system. The practical implementation showed the efficiency of the proposed methodology.

**Keywords:** Linear Matrix Inequalities (LMIs). Controller *gain scheduling*. Controller using state or derivative feedback.  $\mathcal{D}$ -stability.

## LISTA DE FIGURAS

Figura1 -	Região $S(\gamma, r, \theta)$ para alocação de autovalores.	19
Figura2 -	Sistema de suspensão ativa Quanser.	48
Figura3 -	Modelo esquemático do sistema de suspensão ativa.	49
Figura4 -	Localização da nuvem dos autovalores do sistema.	51
Figura5 -	Elementos de $K(\alpha(t))$ em função do tempo.	52
Figura6 -	Função senoidal $\alpha(t)$ .	52
Figura7 -	Resposta transitória prática de malha aberta (0-12s) e de malha fechada (12,01-30s).	53
Figura8 -	Sinal de controle para $\alpha(t)$ com frequência de $0,01Hz$ .	53
Figura9 -	Função senoidal $\alpha(t)$ .	54
Figura10 -	Resposta transitória prática de malha aberta (0-12s) e de malha fechada (12,01-30s) para $\alpha(t)$ com frequência de $0,1Hz$ .	54
Figura11 -	Sinal de controle para $\alpha(t)$ com frequência de $0,1Hz$ .	55
Figura12 -	Função senoidal $\alpha(t)$ .	55
Figura13 -	Resposta transitória prática de malha aberta (0-12s) e de malha fechada (12,1-30s) para $\alpha(t)$ com frequência de $1Hz$ .	55
Figura14 -	Sinal de controle para $\alpha(t)$ com frequência de $1Hz$ .	56
Figura15 -	Elementos de $K(\alpha(t))$ em função do tempo.	57
Figura16 -	Localização dos autovalores do sistema.	58
Figura17 -	Resposta transitória prática de malha aberta (0-12s) e de malha fechada (12,01-30s).	58
Figura18 -	Sinal de controle para $\alpha(t)$ com frequência de $0,01Hz$ .	59
Figura19 -	Resposta transitória prática de malha aberta (0-12s) e de malha fechada (12,01-30s) para $\alpha(t)$ com frequência de $0,1Hz$ .	59
Figura20 -	Sinal de controle para $\alpha(t)$ com frequência de $0,1Hz$ .	60

Figura21 - Resposta transitória prática de malha aberta (0-12s) e de malha fechada (12,01-30s) para $\alpha(t)$ com frequência de $1Hz$ .	60
Figura22 - Sinal de controle para $\alpha(t)$ com frequência de $1Hz$ .	61
Figura23 - Localização da nuvem dos autovalores do sistema.	63
Figura24 - Elementos de $K(\alpha(t))$ em função do tempo.	64
Figura25 - Resposta transitória prática de malha aberta (0-12s) e de malha fechada (12,01-30s).	64
Figura26 - Sinal de controle para $\alpha(t)$ com frequência de $0,1Hz$ .	64
Figura27 - Resposta transitória prática de malha aberta (0-12s) e de malha fechada (12,01-30s).	65
Figura28 - Sinal de controle para $\alpha(t)$ com frequência de $0,1Hz$ .	65
Figura29 - Localização da nuvem dos autovalores do sistema.	66
Figura30 - Resposta transitória dos estados do sistema.	67
Figura31 - Localização da nuvem dos autovalores do sistema.	68
Figura32 - Resposta transitória dos estados do sistema.	68

## **ABREVIATURAS E ACRÔNIMOS**

LMIs *Linear Matrix Inequalities*

LPV *Linear Parameter Varying*

MIMO *Multi Input Multi Output*

PDLF *Parameter-Dependent Lyapunov Functions*

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	CONTROLE <i>GAIN SCHEDULING</i> PARA SISTEMAS LINEARES CONTÍNUOS COM PARÂMETRO VARIANTE NO TEMPO	16
2.1	CONTROLE <i>GAIN SCHEDULING</i> COM PARÂMETRO VARIANTE NO TEMPO	16
2.1.1	Projeto do controlador com restrição de $\mathcal{D}$ -estabilidade	18
2.1.2	Projeto do controlador com condição de estabilidade e taxa de decaimento $\gamma$	20
2.1.3	Projeto do controlador com condição de estabilidade e restrição de raio $r$	22
2.1.4	Projeto do controlador com condição de estabilidade e restrição de ângulo $\theta$	25
2.1.5	Conclusões parciais	28
3	PROJETO DE CONTROLADOR <i>GAIN SCHEDULING</i> USANDO REALIMENTAÇÃO DERIVATIVA COM RESTRIÇÃO DE $\mathcal{D}$ -ESTABILIDADE	29
3.1	FORMULAÇÃO LMI COM LEMA DE FINSLER	29
3.1.1	Projeto do controlador com condição de estabilidade	30
3.1.2	Projeto do controlador com condição de estabilidade e taxa de decaimento $\gamma$	31
3.1.3	Projeto do controlador com condição de estabilidade e restrição de raio $r$	32
3.1.4	Projeto do controlador com condição de estabilidade e restrição de ângulo $\theta$	38
3.1.5	Conclusões parciais	47
4	IMPLEMENTAÇÃO PRÁTICA	48
4.1	SISTEMA DE SUSPENSÃO ATIVA DE UM VEÍCULO	48
4.1.1	Conclusões parciais	69

<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>70</b>
5.1	SUGESTÕES PARA PESQUISAS FUTURAS	70
5.2	TRABALHOS ACEITOS	71
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>72</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O regulador de velocidade centrífugo de James Whatt para o controle da velocidade de uma máquina a vapor foi o primeiro trabalho relevante conhecido no campo da teoria de controle automático. Desde essa data, tem-se a necessidade de desenvolver técnicas que permitam ajustar seu funcionamento, para se obter desempenho desejado. Os principais avanços na teoria de controle ocorreram durante a década de 1980, tornando-se mais rigorosa em termos matemáticos e mais aplicável a problemas práticos (DOYLE; FRANCIS; TANNENBAUM, 1990). A vantagem do controle realimentado está em sua simplicidade para compensar as perturbações que podem estar presentes na planta. As técnicas mais usadas para realimentar os sistemas são a realimentação da saída e realimentação do vetor de estado. A realimentação da saída é a mais utilizada para implementações práticas, pois muitas vezes não existe disponibilidade de todas as variáveis de estado para realimentação.

Para obter a segunda derivada do vetor de estado (posição), se faz uso de sensores acelerométricos. Estes são populares nas aplicações industriais na atualidade, devido ao seu baixo custo e possibilita de forma precisa obter a derivada do sinal. Muitos trabalhos têm sido apresentados onde se faz uso da realimentação derivativa, desenvolvendo técnicas semelhantes as que já existem empregando realimentação do vetor de estado. Em (CARDIM et al., ) se apresenta uma metodologia para fazer controle digital usando realimentação derivativa dos estados baseado nas técnicas existentes de controle contínuo e realimentação de estado. Em (ABDELAZIZ; VALASEK, 2005), se apresenta uma fórmula similar a Ackerman, generalizada para sistemas lineares MIMO. (MALVIYA et al., 2011) desenvolveram uma metodologia para alocar os polos do sistema na região desejada, baseando-se no trabalho de (ABDELAZIZ; VALASEK, 2004) e (ABDELAZIZ, 2007). Em (MICHIELS et al., 2009), fazem um estudo da estabilização de sistemas aplicando realimentação derivativa e apresentam o conceito de *p-stability*, que leva em consideração os erros de modelagem e implementação.

Muitos trabalhos relatam o uso da realimentação derivativa aplicada a distintos tipos de sistemas, utilizando técnicas baseadas em LMIs. LMI é uma ferramenta matemática

que possibilita resolver problemas de controle de uma forma eficiente. O desenvolvimento das LMIs se associa a Aleksandr Mikhailovich Lyapunov com seu trabalho sobre a estabilidade do movimento, intitulado “*The General Problem of the Stability of Motion*”. Sua aplicação na teoria de controle data do século passado com trabalhos desenvolvidos principalmente pelos pesquisadores Lur’e, Postnikov, Kalman, Yakubovich, Popov e Willems. Um sistema de LMIs define um conjunto convexo e pode ser resolvidas eficientemente aplicando métodos numéricos (ALIZADEH; HAEBERLY; OVERTON, 1998). As LMIs têm sido aplicadas a outros campos como economia, processamento de sinais, identificação de sistemas, etc.

O procedimento de modelagem matemática de um sistema deve-se considerar que ele pode apresentar variações temporais, perturbações ou incertezas nos parâmetros físicos do mesmo, fazendo que o modelo seja incerto. Uma pequena variação num parâmetro pode ter um importante impacto na dinâmica do sistema. A análise e controle de sistemas lineares com parâmetros variantes (LPV, acrônimo inglês para Linear Parameter Varying) tem tomado relevância nos últimos tempos dada sua aplicação em teorias como a de *gain scheduling* e *fuzzy* por exemplo. Um sistema LPV pode assemelhar-se a um sistema linear que depende de um ou mais parâmetros variantes no tempo. Também existem casos nos quais sistemas não lineares podem ser modelados como LPV aplicando a técnica de linearização de Jacobi (REBERGA et al., 2005).

Uma questão importante no projeto de um sistema de controle é manter a estabilidade e desempenho do mesmo perante perturbações e incertezas nos parâmetros do sistema, deseja-se que seja robusto. A estabilidade robusta de sistemas que possuem incertezas variantes no tempo tem maior complexidade do que no caso com incertezas invariantes no tempo. *Gain scheduling* é uma técnica de controle não linear com muitas aplicações no controle de processos. O objetivo é decompor o problema não linear em distintos subproblemas lineares de menor complexidade. Esse tipo de controle tem a vantagem de auto adaptar-se com rapidez, mas precisa de um conhecimento detalhado da dinâmica do funcionamento da planta a controlar. Em função de uma variável conhecida é determinado o controlador.

Muitos trabalhos têm sido desenvolvidos nos últimos tempos, por exemplo (APKARIAN; ADAMS, 1998) faz uso da teoria de *gain scheduling* e da formulação em LMIs sobre um sistema LPV, com o objetivo de obter um controlador menos conservador que garante o desempenho desejado. (SCORLETTI; EL GHAOUI, 1998) propõe condições LMIs suficientes para melhorar o desempenho de um controlador *gain scheduling*. (AP-



KARIAN; GAHINET; BECKER, 1995) projetam um controlador *gain scheduling* com custo garantido  $H_\infty$  para um sistema LPV. (YU; CHEN; WOO, 2002) apresentam uma metodologia para o desenvolvimento de um controlador *gain scheduling* com custo  $H_\infty$  garantido, que permite alocar os polos do sistema na região desejada. Essa metodologia foi aplicada em um braço robótico, modelado como sistema LPV.

Nos sistemas LPV, os parâmetros medidos podem ser afetados por incertezas aditivas e/ou multiplicativas. Modelando convenientemente as incertezas e os parâmetros variantes no tempo, podem ser propostas condições na forma de desigualdades matriciais lineares robustas para assegurar um desempenho satisfatório do sistema. Em (LACERDA et al., 20., 2014) o problema é resolvido por meio de relaxações LMIs baseadas em matrizes polinomiais homogêneas de graus arbitrários. Em (SATO, 2010), é apresentada uma teoria usando uma PDLF, com o objetivo de obter um filtro *gain scheduling*  $H_\infty$  que seja robusto contra incertezas nos parâmetros.

O presente trabalho dá continuidade a outros estudos envolvendo o uso de LMIs utilizando a realimentação de estado e derivativa, acrescentando a aplicação da teoria de *gain scheduling* (HARDY et al., 2015). São propostos projetos envolvendo a teoria de  $\mathcal{D}$ -estabilidade, com o objetivo de garantir que os autovalores do sistema estejam em uma determinada região do plano complexo, e assim garantir que o sistema em malha fechada apresente um desempenho satisfatório. Uma busca bibliográfica mostra que esses resultados para sistemas contínuos são inéditos.

Ao longo desse trabalho foram utilizadas as seguintes notações:  $(\cdot)^T$  indica a transposição de um vetor ou matriz, o símbolo  $(*)$  denota genericamente cada bloco simétrico e  $\mathbf{He}\{\cdot\}$  é o operador hermitiano,  $\mathbf{He}\{U\} = U + U^T$ .

A estrutura desse texto é organizada da seguinte forma:

- Capítulo 2. Apresenta a teoria da estratégia de controle *gain scheduling* considerando o parâmetro variante no tempo com restrição de  $\mathcal{D}$ -estabilidade.
- Capítulo 3. Mostra a teoria proposta para projetar o controlador *gain scheduling* usando realimentação derivativa do vetor de estado via LMIs com restrição de  $\mathcal{D}$ -estabilidade.
- Capítulo 4. Expõe resultados práticos obtidos com o uso do projeto do controlador proposto, aplicado a um sistema de suspensão ativa, com o objetivo de avaliar a nova técnica.

- Capítulo 5. Aponta as conclusões, sugestões para pesquisas futuras e uma lista das bibliografias relacionadas diretamente ou indiretamente com o trabalho.

## 2 CONTROLE *GAIN SCHEDULING* PARA SISTEMAS LINEARES CONTÍNUOS COM PARÂMETRO VARIANTE NO TEMPO

Neste capítulo, é apresentada a proposta de controle *gain scheduling* para sistemas lineares contínuos com parâmetro variante no tempo fazendo uso de uma matriz de Lyapunov única. São dadas as condições suficientes que asseguram a alocação dos autovalores do sistema realimentado fazendo uso da restrição de  $\mathcal{D}$ -estabilidade.

### 2.1 CONTROLE *GAIN SCHEDULING* COM PARÂMETRO VARIANTE NO TEMPO

Dado um sistema linear contínuo com parâmetro variante no tempo  $\alpha(t)$ , que é mensurável:

$$\dot{x}(t) = A(\alpha(t))x(t) + B(\alpha(t))u(t), \quad (1)$$

sendo  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $A(\alpha(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $B(\alpha(t)) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Suponha que as matrizes do sistema  $A(\alpha(t))$  e  $B(\alpha(t))$  pertençam ao politopo  $D$  composto por:

$$D = (A, B)(\alpha(t)) : (A, B)(\alpha(t)) = \sum_{j=1}^N \alpha_j(t)(A_j, B_j); \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) = 1; \alpha_j(t) \geq 0, \quad (2)$$

$$j = 1, 2, \dots, N,$$

Segundo Montagner e Peres (2004), Souza e Trofino (2005), usando a função quadrática de Lyapunov, pode existir um conjunto de matrizes  $K(\alpha(t)) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  de modo que ao realimentar o sistema (1) com as variáveis dos estados, garante a estabilidade do sistema. O sinal de controle é dado por (3).

$$u(t) = -K(\alpha(t))x(t), \quad (3)$$

então:

$$\dot{x}(t) = A(\alpha(t))x(t) - B(\alpha(t))K(\alpha(t))x(t), \quad (4)$$

$$\dot{x}(t) = [A(\alpha(t)) - B(\alpha(t))K(\alpha(t))]x(t). \quad (5)$$

**Teorema 1.** *Supondo que  $|\dot{\alpha}_i(t)| \leq \rho_i$ , considerando o limite  $\rho_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, N-1$ , se existirem matrizes simétricas positivas definidas  $W_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e matrizes  $Z_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$  com  $j=1, 2, \dots, N$ , tais que:*

$$W_j A_j^T + A_j W_j - Z_j^T B_j^T - B_j Z_j + \sum_{i=1}^{N-1} \pm \rho_i (W_i - W_N) < 0, \quad (6)$$

$$j = 1, 2, \dots, N,$$

$$W_j A_k^T + A_k W_j + W_k A_j^T + A_j W_k - Z_k^T B_j^T - Z_j^T B_k^T - B_k Z_j - B_j Z_k + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \pm \rho_i (W_i - W_N) < 0, \quad (7)$$

$$j = 1, 2, \dots, N-1; k = j+1, \dots, N,$$

então a lei de controle através da realimentação de estado com parâmetro variante no tempo,

$$u(t) = -K(\alpha(t))x(t), \quad (8)$$

sendo

$$K(\alpha(t)) = Z(\alpha(t))W(\alpha(t))^{-1}, \quad (9)$$

e

$$Z(\alpha(t)) = \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) Z_j, W(\alpha(t)) = \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) W_j, K(\alpha(t)) = \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) K_j, \quad (10)$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1; \alpha_j(t) \geq 0, j = 1, 2, \dots, N, \quad (11)$$

garante a estabilidade de malha fechada do sistema (1) e (2) por meio da matriz Lyapunov de parâmetro dependente  $P(\alpha(t)) = W(\alpha(t))^{-1}$ .

**Prova:** Vide (MONTAGNER; PERES, 2004).

Segundo o teorema anterior, o projeto do controlador depende da inversão da matriz literal  $W(\alpha(t))$  em (9) que é função dos parâmetros  $\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_N(t)$ , cuja ordem da matriz é igual à quantidade de estados da planta. A complexidade de realizar essa inversão matricial se incrementa quanto maior a ordem da matriz, relacionada à quantidade de estados do sistema.

Na próxima seção são apresentadas as condições LMIs para o projeto do controlador *gain scheduling* usando realimentação dos estados com restrição de  $\mathcal{D}$ -estabilidade que

não necessita de uma inversão de matriz literal.

### 2.1.1 Projeto do controlador com restrição de $\mathcal{D}$ -estabilidade

O Teorema 2 abaixo, proposto por (HARDY, 2015), apresenta condições para garantir a estabilidade do sistema (5), empregando uma matriz única  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , verificando-se as seguintes desigualdades:

$$V(x(t)) = x^T(t)Px(t) > 0, \forall x(t) \neq 0, \quad (12)$$

$$\dot{V}(x(t)) < 0, \forall x(t) \neq 0. \quad (13)$$

**Teorema 2.** *Se existir uma matriz simétrica positiva definida  $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e matrizes  $Z_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$  com  $j=1,2,\dots,N$ , tais que:*

$$WA_j^T + A_jW - Z_j^T B_j^T - B_j Z_j < 0, \quad (14)$$

$$j = 1, 2, \dots, N,$$

$$WA_i^T + A_iW + WA_j^T + A_jW - Z_i^T B_j^T - Z_j^T B_i^T - B_i Z_j - B_j Z_i < 0, \quad (15)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1; j = i+1, \dots, N,$$

então a lei de controle através da realimentação de estado com parâmetro variante no tempo,

$$u(t) = -K(\alpha(t))x(t), \quad (16)$$

sendo

$$K(\alpha(t)) = Z(\alpha(t))W^{-1}, \quad (17)$$

e

$$\begin{aligned} Z(\alpha(t)) &= \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) Z_j; \alpha_j(t) \geq 0, \\ \sum_{j=1}^N \alpha_j &= 1; j = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (18)$$

garante a estabilidade de malha fechada do sistema (1) e (2), por meio da matriz positiva definida  $P = W^{-1}$ .

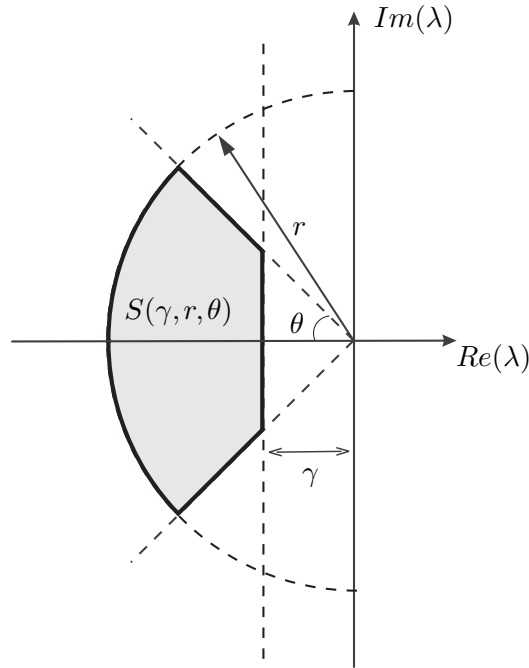
Prova:(HARDY, 2015).

Em (17), o controlador pode ser obtido sem a necessidade de inverter uma matriz literal. A técnica de alocação de autovalores proposta neste trabalho, usa o conceito de  $\mathcal{D}$ -estabilidade. O mesmo permite que a resposta transitória, tais como porcentagem de overshoot  $M_p$ , tempo de subida  $t_s$  e tempo de estabelecimento  $t_e$ , sejam modelados por LMIs (CHILALI; GAHINET, 1996).

A região de interesse está apresentada na Figura 1 (CHILALI; GAHINET, 1996) que pode ser dada por números complexos  $x + jy$ , tal que:

$$x < -\gamma < 0, \quad |x + jy| < r, \quad \tan(\theta)x < -|y| \quad (19)$$

**Figura 1** - Região  $S(\gamma, r, \theta)$  para alocação de autovalores.



Fonte: (SILVA et al., 2012)

A formulação LMI que garante a alocação na região de interesse denominada  $S(\gamma, r, \theta)$  é dada por:

$$A^T P + PA + 2\gamma P < 0, \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} -rP & AP \\ PA^T & -rP \end{bmatrix} < 0, \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} \sin(\theta)(AP + PA^T) & \cos(\theta)(AP - PA^T) \\ \cos(\theta)(PA^T - AP) & \sin(\theta)(AP + PA^T) \end{bmatrix} < 0. \quad (22)$$

Para os parâmetros das restrições (20), (21), (22) a taxa de decaimento  $\gamma > 0$ , o raio  $r > 0$  e ângulo  $0 < \theta < 90$ .

Nos próximos teoremas são propostas condições LMIs que possibilitam a inclusão de  $\mathcal{D}$ -estabilidade no projeto do controlador *gain scheduling*, supondo  $P$  única.

### 2.1.2 Projeto do controlador com condição de estabilidade e taxa de decaimento $\gamma$

É proposto o seguinte teorema que garante condições de existência da matriz  $P$  satisfazendo (12) e (13) e as restrições de  $\mathcal{D}$ -estabilidade. Esse teorema é baseado em (HARDY, 2015) e (MONTAGNER; PERES, 2004), com restrição de uma  $P > 0$  única.

**Teorema 3.** *Dado  $\gamma > 0$ , se existirem uma matriz simétrica positiva definida  $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , matrizes  $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e uma constante real  $\gamma \geq 0$  com  $j=1,2,\dots,N$ , tais que:*

$$WA_j^T + A_jW - Z_j^T B_j^T - B_j Z_j + 2\gamma W < 0, \quad (23)$$

$$j = 1, 2, \dots, N,$$

$$WA_i^T + A_iW + WA_j^T + A_jW - Z_i^T B_j^T - Z_j^T B_i^T - B_i Z_j - B_j Z_i + 4\gamma W < 0, \quad (24)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1; j = i+1, \dots, N,$$

então o sistema (5) é estabilizável, com taxa de decaimento maior ou igual a  $\gamma$  e as matrizes do controlador podem ser dadas por:

$$K(\alpha(t)) = Z(\alpha(t))W^{-1}. \quad (25)$$

**Prova.** Multiplicando (23) por  $\alpha_j^2(t) > 0$  e somando em  $j$ , de  $j = 1$  até  $j = N$ , segue que

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t) WA_j^T + \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t) A_j W - \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t) Z_j^T B_j^T - \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t) B_j Z_j + \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t) 2\gamma W < 0. \quad (26)$$

Multiplicando (24) por  $\alpha_i(t)\alpha_j(t)$  e somando em  $i$ , de  $i = 1$  até  $i = N - 1$  e em  $j$ , de  $j = i + 1$  até  $j = N$ , segue que

$$\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(WA_i^T + WA_j^T + A_iW + A_jW - Z_i^T B_j^T - B_i Z_j - Z_j^T B_i^T - B_j Z_i + 4\gamma W) < 0. \quad (27)$$

Somando (26) e (27)

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)WA_j^T + \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)A_jW - \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)Z_j^T B_j^T - \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)B_j Z_j + \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)2\gamma W + \\ & \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(WA_i^T + WA_j^T + A_iW + A_jW - Z_i^T B_j^T - B_i Z_j - Z_j^T B_i^T - B_j Z_i + 4\gamma W) < 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Genericamente sabemos que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{j=1}^N \alpha_j H_i R_j &= \sum_{j=1}^N \alpha_j^2 H_j R_j + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j (H_i R_j + H_j R_i). \\ \sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{j=1}^N \alpha_j &= \sum_{j=1}^N \alpha_j^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j. \end{aligned}$$

Então, lembrando que  $\sum_{i=1}^N \alpha_i(t) = 1$  e  $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$ :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)WA_j^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(WA_i^T + WA_j^T) &= \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \alpha_j(t)WA_j^T = \sum_{j=1}^N \alpha_j(t)WA_j^T. \\ \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)A_jW + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(A_iW + A_jW) &= \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \alpha_j(t)A_jW = \sum_{j=1}^N \alpha_j(t)A_jW. \\ \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)Z_j^T B_j^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(Z_i^T B_j^T + Z_j^T B_i^T) &= \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \alpha_j(t)Z_i^T B_j^T. \\ \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)B_j Z_j + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(B_i Z_j + B_j Z_i) &= \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \alpha_j(t)B_i Z_j. \\ \sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t)2\gamma W + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(4\gamma W) &= \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \alpha_j(t)2\gamma W = 2\gamma W. \end{aligned}$$

Logo, (28) torna-se:

$$W \left( \sum_{j=1}^N \alpha_j(t)A_j^T \right) + \left( \sum_{j=1}^N \alpha_j(t)A_j \right) W - \sum_{i=1}^N \alpha_i(t)Z_i^T \sum_{j=1}^N \alpha_j(t)B_j^T - \sum_{i=1}^N \alpha_i(t)B_i \sum_{j=1}^N \alpha_j(t)Z_j + 2\gamma W < 0. \quad (29)$$



Consequentemente:

$$WA^T(\alpha(t)) + A(\alpha(t))W - Z^T(\alpha(t))B^T(\alpha(t)) - B(\alpha(t))Z(\alpha(t)) + 2\gamma W < 0, \quad (30)$$

e lembrando que  $Z(\alpha(t)) = K(\alpha(t))W$ , então:

$$WA^T(\alpha(t)) + A(\alpha(t))W - WK^T(\alpha(t))B^T(\alpha(t)) - B(\alpha(t))K(\alpha(t))W + 2\gamma W < 0. \quad (31)$$

Agrupando os termos semelhantes e deixando em evidência  $W$  à direita e à esquerda, a inequação fica,

$$W(A(\alpha(t)) - B(\alpha(t))K(\alpha(t)))^T + (A(\alpha(t)) - B(\alpha(t))K(\alpha(t)))W + 2\gamma W < 0, \quad (32)$$

como  $P^{-1} = W$ , multiplicamos  $P$  à direita e esquerda, temos

$$(A(\alpha(t)) - B(\alpha(t))K(\alpha(t)))^T P + P(A(\alpha(t)) - B(\alpha(t))K(\alpha(t))) + 2\gamma P < 0. \quad (33)$$

Multiplicando por  $x^T(t)$  à esquerda e  $x(t)$  à direita, fica

$$x^T(t)(A(\alpha(t)) - B(\alpha(t))K(\alpha(t)))^T Px(t) + x^T(t)P(A(\alpha(t)) - B(\alpha(t))K(\alpha(t)))x(t) + 2\gamma x^T(t)Px(t) < 0. \quad (34)$$

Substituindo (5) em (34) obtém-se

$$\dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot{x}(t) < -2\gamma x^T(t)Px(t), \quad (35)$$

O qual fica demonstrado o teorema pois:

$$\dot{V}(x(t)) < -2\gamma V(x(t)). \quad (36)$$

□

A seguir são propostas condições LMIs para a inclusão de restrição de raio de  $\mathcal{D}$ -estabilidade.

### 2.1.3 Projeto do controlador com condição de estabilidade e restrição de raio $r$

**Teorema 4.** *Dado  $r > 0$ , se existirem uma matriz simétrica positiva definida  $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , matrizes  $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e uma constante real  $r \geq 0$  com  $j=1,2,\dots,N$ , tais que:*

$$\begin{bmatrix} -rW & A_j W - B_j Z_j \\ * & -rW \end{bmatrix} < 0, \quad (37)$$

$$j = 1, 2, \dots, N,$$

$$\begin{bmatrix} -2rW & A_iW + A_jW - B_iZ_j - B_jZ_i \\ * & -2rW \end{bmatrix} < 0, \quad (38)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1; j = i+1, \dots, N,$$

então o sistema (5) é estabilizável com autovalores, dentro do círculo de raio  $r$ , para todo  $\alpha(t)$ . As matrizes do controlador são dadas por:

$$K(\alpha(t)) = Z(\alpha(t))W^{-1}. \quad (39)$$

**Prova.** Multiplicando (37) por  $\alpha_j^2(t) > 0$  e somando em  $j$ , de  $j = 1$  até  $j = N$ , segue que:

$$\begin{bmatrix} -\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)rW & \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)(A_jW - B_jZ_j) \\ * & -\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)rW \end{bmatrix} < 0, \quad (40)$$

Multiplicando (38) por  $\alpha_i(t)\alpha_j(t)$  e somando em  $i$ , de  $i = 1$  até  $i = N-1$  e em  $j$ , de  $j = i+1$  até  $j = N$ , segue que:

$$\begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)2rW & \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(A_iW + A_jW - B_iZ_j - B_jZ_i) \\ * & -\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)2rW \end{bmatrix} < 0, \quad (41)$$

Somando (40) e (41), os dois elementos da diagonal principal da matriz resultante é:

$$-\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)rW - \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(2rW), \quad (42)$$

O bloco superior fora da diagonal principal da matriz resultante é:

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)A_jW - \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)B_jZ_j + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)[A_iW + A_jW - B_iZ_j - B_jZ_i]. \quad (43)$$

Genericamente sabemos que:

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{j=1}^N \alpha_j H_i R_j = \sum_{j=1}^N \alpha_j^2 H_j R_j + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j (H_i R_j + H_j R_i).$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{j=1}^N \alpha_j = \sum_{j=1}^N \alpha_j^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j.$$

Então, lembrando que  $\sum_{i=1}^N \alpha_i(t) = 1$  e  $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$ :

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t) A_j W + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t) \alpha_j(t) (A_i W + A_j W) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) A_j W = \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) A_j W.$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t) B_j Z_j + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t) \alpha_j(t) (B_i Z_j + B_j Z_i) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) B_i Z_j.$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t) r W + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t) \alpha_j(t) (2r W) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) r W = r W.$$

Logo, a matriz resultante torna-se:

$$\begin{bmatrix} -rW & \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) A_j W - \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) B_i Z_j \\ * & -rW \end{bmatrix} < 0, \quad (44)$$

conseqüentemente:

$$\begin{bmatrix} -rW & A(\alpha(t))W - B(\alpha(t))Z(\alpha(t)) \\ * & -rW \end{bmatrix} < 0. \quad (45)$$

Relembrando que  $Z(\alpha(t)) = K(\alpha(t))W$ , então:

$$\begin{bmatrix} -rW & A(\alpha(t))W - B(\alpha(t))K(\alpha(t))W \\ * & -rW \end{bmatrix} < 0. \quad (46)$$

Agrupando os termos semelhantes e deixando em evidência  $W$  à direita e à esquerda, a inequação fica,

$$\begin{bmatrix} -rW & (A(\alpha(t)) - B(\alpha(t))K(\alpha(t)))W \\ * & -rW \end{bmatrix} < 0, \quad (47)$$

como  $P^{-1} = W$ , multiplicamos por  $\text{diag}(P, P)$  à direita e à esquerda, temos

$$\begin{bmatrix} -rP & P(A(\alpha(t)) - B(\alpha(t))K(\alpha(t))) \\ * & -rP \end{bmatrix} < 0. \quad (48)$$

Assumindo  $A_N = A(\alpha(t)) - B(\alpha(t))K(\alpha(t))$ , fica demonstrado o teorema pois:

$$\begin{bmatrix} -rP & A_N^T P \\ * & -rP \end{bmatrix} < 0. \quad (49)$$

Note que a desigualdade (49) é equivalente a desigualdade (21). A prova do Teorema está demonstrada.  $\square$

A seguir são propostas condições LMIs para a inclusão de restrição de ângulo de  $\mathcal{D}$ -estabilidade.

### 2.1.4 Projeto do controlador com condição de estabilidade e restrição de ângulo $\theta$

**Teorema 5.** *Dado  $0 < \theta < 90$ , se existirem uma matriz simétrica positiva definida  $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , matrizes  $Z_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e uma constante real  $\theta$  com  $j=1,2,\dots,N$ , tais que:*

$$\begin{bmatrix} \text{sen}(\theta)(A_j W - B_j Z_j + W A_j^T - Z_j^T B_j^T) & \cos(\theta)(A_j W - B_j Z_j - W A_j^T + Z_j^T B_j^T) \\ * & \text{sen}(\theta)(A_j W - B_j Z_j + W A_j^T - Z_j^T B_j^T) \end{bmatrix} < 0, \quad (50)$$

$$j = 1, 2, \dots, N,$$

$$\begin{bmatrix} \text{sen}(\theta)(A_i W + A_j W - B_i Z_j - B_j Z_i + W A_i^T + W A_j^T - Z_i^T B_j^T - Z_j^T B_i^T) \\ * \\ \cos(\theta)(A_i W + A_j W - B_i Z_j - B_j Z_i - W A_i^T - W A_j^T + Z_i^T B_j^T + Z_j^T B_i^T) \\ \text{sen}(\theta)(A_i W + A_j W - B_i Z_j - B_j Z_i + W A_i^T + W A_j^T - Z_i^T B_j^T - Z_j^T B_i^T) \end{bmatrix} < 0, \quad (51)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1; j = i+1, \dots, N,$$

então o sistema (5) é estabilizável com autovalores, dentro da região limitada por  $\theta$ , para todo  $\alpha(t)$ . As matrizes do controlador são dadas por:

$$K(\alpha(t)) = Z(\alpha(t))W^{-1}. \quad (52)$$

**Prova.** Multiplicando (50) por  $\alpha_j^2(t) > 0$  e somando em  $j$ , de  $j = 1$  até  $j = N$ , segue que

$$\left[ \begin{array}{c} \text{sen}(\theta) \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)(A_j W - B_j Z_j + W A_j^T - Z_j^T B_j^T) \\ * \\ \cos\theta \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)(A_j W - B_j Z_j - W A_j^T + Z_j^T B_j^T) \\ \text{sen}(\theta) \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)(A_j W - B_j Z_j + W A_j^T - Z_j^T B_j^T) \end{array} \right] < 0, \quad (53)$$

Multiplicando (51) por  $\alpha_i(t)\alpha_j(t)$  e somando em  $i$ , de  $i = 1$  até  $i = N - 1$  e em  $j$ , de  $j = i + 1$  até  $j = N$ , segue que

$$\left[ \begin{array}{c} \text{sen}(\theta) \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(A_i W + A_j W - B_i Z_j - B_j Z_i + W A_i^T + W A_j^T - Z_i^T B_j^T - Z_j^T B_i^T) \\ * \\ \cos(\theta) \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(A_i W + A_j W - B_i Z_j - B_j Z_i - W A_i^T - W A_j^T + Z_i^T B_j^T + Z_j^T B_i^T) \\ \text{sen}(\theta) \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(A_i W + A_j W - B_i Z_j - B_j Z_i + W A_i^T + W A_j^T - Z_i^T B_j^T - Z_j^T B_i^T) \end{array} \right] < 0, \quad (54)$$

Somando (53) e (54) o bloco superior da diagonal principal da matriz resultante é, sendo que  $\text{sen}(\theta)$  e  $\cos(\theta)$  foram omitidos por simplicidade:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t) A_j W + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(A_i W + A_j W) - \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t) B_j Z_j \\ & - \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(B_i Z_j + B_j Z_i) + \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t) W A_j^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(W A_i^T + W A_j^T) \\ & - \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t) Z_j^T B_j^T - \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(Z_i^T B_j^T + Z_j^T B_i^T). \end{aligned} \quad (55)$$

O bloco superior fora da diagonal principal da matriz resultante é:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t) A_j W + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(A_i W + A_j W) - \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t) B_j Z_j \\ & - \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(B_i Z_j + B_j Z_i) - \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t) W A_j^T - \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(W A_i^T + W A_j^T) \\ & + \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t) Z_j^T B_j^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(Z_i^T B_j^T + Z_j^T B_i^T). \end{aligned} \quad (56)$$

Genericamente sabemos que:

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{j=1}^N \alpha_j H_i R_j = \sum_{j=1}^N \alpha_j^2 H_j R_j + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j (H_i R_j + H_j R_i).$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{j=1}^N \alpha_j = \sum_{j=1}^N \alpha_j^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j.$$

Então, lembrando que  $\sum_{i=1}^N \alpha_i(t) = 1$  e  $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$ :

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t) A_j W + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t) \alpha_j(t) (A_i W + A_j W) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) A_j W = \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) A_j W.$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t) B_j Z_j + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t) \alpha_j(t) (B_i Z_j + B_j Z_i) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) B_i Z_j.$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t) W A_j^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t) \alpha_j(t) (W A_i^T + W A_j^T) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) W A_j^T = \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) W A_j^T.$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t) Z_j^T B_j^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t) \alpha_j(t) (Z_i^T B_j^T + Z_j^T B_i^T) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) Z_i^T B_j^T.$$

Logo, a matriz resultante torna-se:

$$\begin{bmatrix} \text{sen}(\theta)(A(\alpha(t))W - B(\alpha(t))Z(\alpha(t)) + W A^T(\alpha(t)) - Z(\alpha(t))^T B(\alpha(t))^T) \\ * \\ \text{cos}(\theta)(A(\alpha(t))W - B(\alpha(t))Z(\alpha(t)) - W A(\alpha(t))^T + Z(\alpha(t))^T B(\alpha(t))^T) \\ \text{sen}(\theta)(A(\alpha(t))W - B(\alpha(t))Z(\alpha(t)) + W A(\alpha(t))^T - Z(\alpha(t))^T B(\alpha(t))^T) \end{bmatrix} < 0. \quad (57)$$

Relembrando que  $Z(\alpha(t)) = K(\alpha(t))W$ , então:

$$\begin{bmatrix} \text{sen}(\theta)(A(\alpha(t))W - B(\alpha(t))K(\alpha(t))W + W A^T(\alpha(t)) - W K(\alpha(t))^T B(\alpha(t))^T) \\ * \\ \text{cos}(\theta)(A(\alpha(t))W - B(\alpha(t))K(\alpha(t))W - W A(\alpha(t))^T + W K(\alpha(t))^T B(\alpha(t))^T) \\ \text{sen}(\theta)(A(\alpha(t))W - B(\alpha(t))K(\alpha(t))W + W A(\alpha(t))^T - W K(\alpha(t))^T B(\alpha(t))^T) \end{bmatrix} < 0. \quad (58)$$

Agrupando os termos semelhantes e deixando em evidência  $W$  à direita e à esquerda, a inequação fica,

$$\begin{bmatrix} \text{sen}(\theta)(A(\alpha(t)) - B(\alpha(t))K(\alpha(t)))W + W(A^T(\alpha(t)) - K(\alpha(t))^T B(\alpha(t))^T) \\ * \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta)(A(\alpha(t)) - B(\alpha(t))K(\alpha(t)))W - W(A(\alpha(t))^T - K(\alpha(t))^T B(\alpha(t))^T) \\ \sin(\theta)(A(\alpha(t)) - B(\alpha(t))K(\alpha(t)))W + W(A(\alpha(t))^T - K(\alpha(t))^T B(\alpha(t))^T) \end{bmatrix} < 0, \quad (59)$$

como  $P^{-1} = W$ , multiplicamos por  $\text{diag}(P, P)$  à direita e à esquerda,

$$\begin{bmatrix} \sin(\theta)(P(A(\alpha(t)) - B(\alpha(t))K(\alpha(t))) + (A^T(\alpha(t)) - K(\alpha(t))^T B(\alpha(t))^T)P) \\ * \\ \cos(\theta)(P(A(\alpha(t)) - B(\alpha(t))K(\alpha(t))) - (A(\alpha(t))^T - K(\alpha(t))^T B(\alpha(t))^T)P) \\ \sin(\theta)(P(A(\alpha(t)) - B(\alpha(t))K(\alpha(t))) + (A(\alpha(t))^T - K(\alpha(t))^T B(\alpha(t))^T)P) \end{bmatrix} < 0. \quad (60)$$

Assumindo  $A_N = A(\alpha(t)) - B(\alpha(t))K(\alpha(t))$ , fica demonstrado o teorema pois:

$$\begin{bmatrix} \sin(\theta)(A_N^T P + P A_N) & \cos(\theta)(P A_N - A_N^T P) \\ \cos(\theta)(A_N^T P - P A_N) & \sin(\theta)(P A_N + A_N^T P) \end{bmatrix} < 0. \quad (61)$$

Note que a desigualdade (61) é equivalente a desigualdade (22). A prova do Teorema está demonstrada.  $\square$

A teoria de  $\mathcal{D}$ -estabilidade é garantida com o conjunto de LMIs propostas nos Teoremas 3, 4 e 5. No Capítulo 4 são mostrados os resultados obtidos de sua implementação prática.

### 2.1.5 Conclusões parciais

Nesta proposta foi apresentado o projeto do controlador *gain scheduling* com restrição de  $\mathcal{D}$ -estabilidade usando realimentação de estado onde se evita a inversão de matriz literal necessário em (MONTAGNER; PERES, 2004). Apenas utiliza-se a inversão de uma matriz numérica, mas tem como limitante o uso de uma função de Lyapunov não dependente de  $\alpha(t)$ , ocasionando condições conservadoras. O próximo capítulo aborda a mesma metodologia mas usando realimentação derivativa dos estados.

### 3 PROJETO DE CONTROLADOR *GAIN SCHEDULING* USANDO REALIMENTAÇÃO DERIVATIVA COM RESTRIÇÃO DE $\mathcal{D}$ -ESTABILIDADE

Nesta seção é apresentada a estratégia de controle *gain scheduling* para sistemas lineares contínuos com parâmetro variante no tempo, usando realimentação derivativa dos estados com restrição de  $\mathcal{D}$ -estabilidade. Para facilitar a obtenção da solução, usa-se o Lema de Finsler. A seguinte propriedade será útil no desenvolvimento do trabalho.

**Propriedade 3.1.** Para toda matriz  $M$  não simétrica ( $M \neq M^T$ ), se  $M + M^T < 0$ , então  $M$  é invertível. **Prova:**(BOYD et al., 1994).

#### 3.1 FORMULAÇÃO LMI COM LEMA DE FINSLER

O objetivo deste projeto do controlador é garantir a estabilidade do sistema

$$\dot{x}(t) = A(\alpha(t))x(t) + B(\alpha(t))u(t) \quad (62)$$

utilizando a realimentação derivativa, dada por:

$$u(t) = -K(\alpha(t))\dot{x}(t). \quad (63)$$

Substituindo (63) em (62) obtem-se

$$\dot{x}(t) = A(\alpha(t))x(t) - B(\alpha(t))K(\alpha(t))\dot{x}(t). \quad (64)$$

e transformando temos

$$0 = A(\alpha(t))x(t) - (I + B(\alpha(t))K(\alpha(t)))\dot{x}(t). \quad (65)$$

É suposto que  $A(\alpha(t))$  seja invertível pois é necessário para a solução do projeto de realimentação derivativa, como suposto em (ABDELAZIZ; VALASEK, 2004).

Para poder usar o Lema de Finsler é necessário partir da igualdade (65), resultado da transformação do sistema (64). O mesmo garante a relaxação do conjunto de LMIs, devido à desassociação de matrizes ou à redução do número de LMIs em projeto de controladores



(MOZELLI; PALHARES; AVELLAR, 2004).

**Lema 3.1** (Lema de Finsler). *Considere  $\mathcal{W} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $\mathcal{B}(\alpha(t)) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  com posto ( $\mathcal{B}(\alpha(t)) < n$  e  $\mathcal{B}(\alpha(t))^\perp$  uma base para o espaço nulo de  $\mathcal{B}(\alpha(t))$  (isto é  $\mathcal{B}(\alpha(t))\mathcal{B}(\alpha(t))^\perp = 0$ ).*

*Então as seguintes condições são equivalentes:*

- (i)  $\mathcal{W}^T \mathcal{D} \mathcal{W} < 0$ ,  $\forall \mathcal{W} \neq 0$ ,  $\mathcal{B}(\alpha(t)) \mathcal{W} = 0$ ,
- (ii)  $\mathcal{B}(\alpha(t))^\perp{}^T \mathcal{D} \mathcal{B}(\alpha(t))^\perp < 0$ ,
- (iii)  $\exists \rho \in \mathbb{R} : \mathcal{D} - \rho \mathcal{B}(\alpha(t))^T \mathcal{B}(\alpha(t)) < 0$ ,
- (iv)  $\exists \mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{n \times m} : \mathcal{D} + \mathcal{Q} \mathcal{B}(\alpha(t)) + \mathcal{B}(\alpha(t))^T \mathcal{Q}^T < 0$ ,

sendo  $\rho$  e  $\mathcal{Q}$  variáveis adicionais (ou multiplicadoras).

**Prova:** Veja (SKELTON; EL; GRIGORIADIS, 1997).

### 3.1.1 Projeto do controlador com condição de estabilidade

Para aplicar o Lema de Finsler é preciso definir os seguintes vetores e matrizes

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}, \\ \mathcal{B}(\alpha(t)) &= \begin{bmatrix} A(\alpha(t)) & -[I + B(\alpha(t))K(\alpha(t))] \end{bmatrix}, \\ \mathcal{D} &= \begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{Q} &= \begin{bmatrix} X \\ X \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

sendo  $X$  uma matriz não singular de dimensão adequada.

Fazendo uso das definições e os itens *i)*, *iv)* do Lema, no Teorema 6 são mostradas condições suficientes para que o sistema (64) seja estabilizável.

**Teorema 6.** *Se existir uma matriz simétrica positiva definida  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , matrizes  $Z_i$ ,  $Z_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tais que:*

$$\begin{bmatrix} A_j Q^T + Q A_j^T & G + Q A_j^T - Q^T - B_j Z_j \\ * & -Q^T - B_j Z_j - Q - Z_j^T B_j^T \end{bmatrix} < 0, \quad (66)$$

$$j = 1, 2, \dots, N,$$

$$\begin{bmatrix} A_i Q^T + A_j Q^T + Q A_i^T + Q A_j^T & 2G + Q A_i^T + Q A_j^T - 2Q^T - B_i Z_j - B_j Z_i \\ * & -2Q^T - B_i Z_j - B_j Z_i - 2Q - Z_i^T B_j^T - Z_j^T B_i^T \end{bmatrix} < 0, \quad (67)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1; j = i+1, \dots, N,$$

então o sistema (64) é estabilizável e as matrizes do controlador podem ser dadas por:

$$K(\alpha(t)) = Z(\alpha(t))Q^{-T}. \quad (68)$$

**Prova:**(HARDY, 2015).

### 3.1.2 Projeto do controlador com condição de estabilidade e taxa de decaimento $\gamma$

No Teorema 7 são apresentadas condições suficientes para que o sistema (64) seja estabilizável com taxa de decaimento maior ou igual a  $\gamma > 0$ .

**Teorema 7.** *Dado  $\gamma > 0$ , se existirem uma matriz simétrica positiva definida  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , matrizes  $Z_i, Z_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tais que:*

$$\begin{bmatrix} 2\gamma G + A_j Q^T + Q A_j^T & G + Q A_j^T - Q^T - B_j Z_j \\ * & -Q^T - B_j Z_j - Q - Z_j^T B_j^T \end{bmatrix} < 0, \quad (69)$$

$$j = 1, 2, \dots, N,$$

$$\begin{bmatrix} 4\gamma G + A_i Q^T + A_j Q^T + Q A_i^T + Q A_j^T & 2G + Q A_i^T + Q A_j^T - 2Q^T - B_i Z_j - B_j Z_i \\ * & -2Q^T - B_i Z_j - B_j Z_i - 2Q - Z_i^T B_j^T - Z_j^T B_i^T \end{bmatrix} < 0, \quad (70)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1; j = i+1, \dots, N,$$

então o sistema (64) é estabilizável, com taxa de decaimento maior ou igual à  $\gamma$ , e as matrizes do controlador podem ser dadas por:

$$K(\alpha(t)) = Z(\alpha(t))Q^{-T}. \quad (71)$$

**Prova:**(HARDY, 2015).

No seguinte teorema, um escalar  $\kappa > 0$  é incorporado no conjunto de LMIs. Com uma escolha adequada de  $\kappa$ , é possível aumentar a taxa de decaimento.

**Teorema 8.** *Dado um escalar arbitrário  $\kappa > 0$ , se existirem uma matriz simétrica positiva definida  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , matrizes  $Z_i, Z_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tais que:*

$$\begin{bmatrix} 2\gamma G + A_j Q^T + Q A_j^T & G + \kappa Q A_j^T - Q^T - B_j Z_j \\ * & -\kappa Q^T - \kappa B_j Z_j - \kappa Q - \kappa Z_j^T B_j^T \end{bmatrix} < 0, \quad (72)$$

$$j = 1, 2, \dots, N,$$

$$\begin{bmatrix} 4\gamma G + A_i Q^T + A_j Q^T + Q A_i^T + Q A_j^T & 2G + \kappa Q A_i^T + \kappa Q A_j^T - 2Q^T - B_i Z_j - B_j Z_i \\ * & -2\kappa Q^T - \kappa B_i Z_j - \kappa B_j Z_i - 2\kappa Q - \kappa Z_i^T B_j^T - \kappa Z_j^T B_i^T \end{bmatrix} < 0, \quad (73)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1; j = i+1, \dots, N,$$

então o sistema (64) é estabilizável, com taxa de decaimento maior ou igual à  $\gamma$ , e as matrizes do controlador podem ser dadas por:

$$K(\alpha(t)) = Z(\alpha(t))Q^{-T}. \quad (74)$$

**Prova:**(HARDY, 2015).

A seguir são propostas condições LMIs para inclusão de restrição de raio de  $\mathcal{D}$ -estabilidade.

### 3.1.3 Projeto do controlador com condição de estabilidade e restrição de raio $r$

**Teorema 9.** *Dado  $r > 0$ , se existir uma matriz simétrica positiva definida  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , matrizes  $Z_i, Z_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tais que:*

$$\begin{bmatrix} -rG + A_j W^T + W A_j^T & -W^T - B_j Z_j + W A_j^T & 0_{n \times n} \\ A_j W^T - W - Z_j^T B_j^T & -W^T - B_j Z_j - W - Z_j^T B_j^T & G \\ 0_{n \times n} & G & -rG \end{bmatrix} < 0, \quad (75)$$

$$j = 1, 2, \dots, N,$$

$$\begin{bmatrix} -2rG + A_i W^T + A_j W^T + W A_i^T + W A_j^T \\ A_i W^T + A_j W^T - 2W - Z_i^T B_j^T - Z_j^T B_i^T \\ 0_{n \times n} \\ -2W^T - B_i Z_j - B_j Z_i + W A_i^T + W A_j^T & 0_{n \times n} \\ -2W^T - B_i Z_j - B_j Z_i - 2W - Z_i^T B_j^T - Z_j^T B_i^T & 2G \\ 2G & -2rG \end{bmatrix} < 0, \quad (76)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1; j = i+1, \dots, N,$$

então o sistema (64) é estabilizável com autovalores, dentro do círculo de raio  $r$ , para todo  $\alpha(t)$ . As matrizes do controlador são dadas por:

$$K(\alpha(t)) = Z(\alpha(t))W^{-T}. \quad (77)$$

Ainda, garante que  $(I + B(\alpha(t))K(\alpha(t)))$  é invertível.

**Prova.** Multiplicando (75) por  $\alpha_j^2(t) > 0$  e somando em  $j$ , de  $j = 1$  até  $j = N$ , segue que:

$$\begin{bmatrix} -\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)(rG + A_j W^T + W A_j^T) \\ \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)(A_j W^T - W - Z_j^T B_j^T) \\ 0_{n \times n} \\ -\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)(W^T - B_j Z_j + W A_j^T) & 0_{n \times n} \\ -\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)(W^T - B_j Z_j - W - Z_j^T B_j^T) & \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)G \\ \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)G & -\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)rG \end{bmatrix} < 0, \quad (78)$$

Multiplicando (76) por  $\alpha_i(t)\alpha_j(t)$  e somando em  $i$ , de  $i = 1$  até  $i = N-1$  e em  $j$ , de  $j = i+1$  até  $j = N$ , segue que:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(-2rG + A_i W^T + A_j W^T + W A_i^T + W A_j^T) \\ \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(A_i W^T + A_j W^T - 2W - Z_i^T B_j^T - Z_j^T B_i^T) \\ 0_{n \times n} \end{bmatrix}$$

$$\left[ \begin{array}{cc} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(-2W^T - B_i Z_j - B_j Z_i + W A_i^T + W A_j^T) & 0_{n \times n} \\ \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(-2W^T - B_i Z_j - B_j Z_i - 2W - Z_i^T B_j^T - Z_j^T B_i^T) & \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)2G \\ \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)2G & - \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)2rG \end{array} \right] < 0, \quad (79)$$

Somando (78) e (79) se obtem uma matriz composta dos elementos descritos abaixo.

Elemento (1,1) da matriz resultante:

$$\begin{aligned} & - \left( \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)rG + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)2rG \right) + \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)A_j W^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(A_i W^T + A_j W^T) + \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)W A_j^T \\ & + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(W A_i^T + W A_j^T). \end{aligned} \quad (80)$$

Elemento (1,2) da matriz resultante:

$$\begin{aligned} & - \left( \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)W^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)2W^T \right) - \left( \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)B_j Z_j + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(B_i Z_j + B_j Z_i) \right) + \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)W A_j^T \\ & + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(W A_i^T + W A_j^T). \end{aligned} \quad (81)$$

Elemento (2,1) da matriz resultante:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)A_j W^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(A_i W^T + A_j W^T) - \left( \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)W + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)2W \right) - \left( \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)Z_j^T B_j^T \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(Z_i^T B_j^T + Z_j^T B_i^T) \right). \end{aligned} \quad (82)$$

Elemento (2,2) da matriz resultante:

$$\begin{aligned} & - \left( \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)W^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)2W^T \right) - \left( \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)B_j Z_j + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(B_i Z_j + B_j Z_i) \right) - \left( \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)W \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)2W \right) - \left( \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)Z_j^T B_j^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(Z_i^T B_j^T + Z_j^T B_i^T) \right). \end{aligned} \quad (83)$$

Elementos (2,3) e (3,2) da matriz resultante:

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)G + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)2G. \quad (84)$$

Elemento (3,3) da matriz resultante:

$$-\left(\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)rG + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)rG\right). \quad (85)$$

Genericamente sabemos que:

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{j=1}^N \alpha_j H_i R_j = \sum_{j=1}^N \alpha_j^2 H_j R_j + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j (H_i R_j + H_j R_i).$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{j=1}^N \alpha_j = \sum_{j=1}^N \alpha_j^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j.$$

Então, lembrando que  $\sum_{i=1}^N \alpha_i(t) = 1$  e  $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$ :

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t) A_j W + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t) \alpha_j(t) (A_i W + A_j W) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) A_j W = \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) A_j W.$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t) B_j Z_j + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t) \alpha_j(t) (B_i Z_j + B_j Z_i) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) B_i Z_j.$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t) W A_j^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t) \alpha_j(t) (W A_i^T + W A_j^T) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) W A_j^T = \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) W A_j^T.$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t) Z_j^T B_j^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t) \alpha_j(t) (Z_i^T B_j^T + Z_j^T B_i^T) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) Z_i^T B_j^T.$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t) G + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t) \alpha_j(t) 2G = G.$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t) rG + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t) \alpha_j(t) 2rG = rG.$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)W + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)2W = W.$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)W^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)2W^T = W^T.$$

Logo obteve-se o seguinte:

$$\begin{bmatrix} -rG + A(\alpha(t))W^T + WA^T(\alpha(t)) \\ A(\alpha(t))W^T - W - Z(\alpha(t))^T B(\alpha(t))^T \\ 0_{n \times n} \\ -W^T - B(\alpha(t))Z(\alpha(t)) + WA^T(\alpha(t)) & 0_{n \times n} \\ -W^T - B(\alpha(t))Z(\alpha(t)) - W - Z(\alpha(t))^T B(\alpha(t))^T & G \\ G & -rG \end{bmatrix} < 0. \quad (86)$$

Realizando as transformações de variáveis  $G = X^{-1}PX^{-T}$ ,  $W = X^{-1}$  e  $Z(\alpha(t)) = K(\alpha(t))X^{-T}$ , temos:

$$\begin{bmatrix} -rX^{-1}PX^{-T} + A(\alpha(t))X^{-T} + X^{-1}A^T(\alpha(t)) \\ A(\alpha(t))X^{-T} - X^{-1} - X^{-1}K(\alpha(t))^T B(\alpha(t))^T \\ 0_{n \times n} \\ -X^{-T} - B(\alpha(t))K(\alpha(t))X^{-T} + X^{-1}A^T(\alpha(t)) & 0_{n \times n} \\ -X^{-T} - B(\alpha(t))K(\alpha(t))X^{-T} - X^{-1} - X^{-1}K(\alpha(t))^T B(\alpha(t))^T & X^{-1}PX^{-T} \\ X^{-1}PX^{-T} & -rX^{-1}PX^{-T} \end{bmatrix} < 0. \quad (87)$$

Multiplicando (87) à esquerda por  $\text{diag}(X, X, X, X)$  e à direita por  $\text{diag}(X^T, X^T, X^T, X^T)$ :

$$\begin{bmatrix} -rP + XA(\alpha(t)) + A^T(\alpha(t))X^T \\ XA(\alpha(t)) - X^T - K(\alpha(t))^T B(\alpha(t))^T X^T \\ 0_{n \times n} \\ -X - XB(\alpha(t))K(\alpha(t)) + A^T(\alpha(t))X^T & 0_{n \times n} \\ -X - XB(\alpha(t))K(\alpha(t)) - X^T - K(\alpha(t))^T B(\alpha(t))^T X^T & P \\ P & -rP \end{bmatrix} < 0. \quad (88)$$

Observe que:

$$-X - X^T - XB(\alpha(t))K(\alpha(t)) - K^T(\alpha(t))B^T(\alpha(t))X^T < 0, \quad (89)$$

$$\Leftrightarrow X(I + B(\alpha(t))K(\alpha(t))) + (I + B(\alpha(t))K(\alpha(t)))^T X^T > 0$$

e segundo a Propriedade 3.1, conclui-se que  $X(I + B(\alpha(t))K(\alpha(t)))$  é invertível, logo  $(I + B(\alpha(t))K(\alpha(t)))$  e  $X$  são invertíveis. Do item (iv) do Lema 3.1, a desigualdade (88) pode ser reescrita como (90).

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -rP & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & P \\ 0_{n \times n} & P & -rP \end{bmatrix}}_{\mathcal{D}} + \mathbf{He} \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} X \\ X \\ 0_{n \times n} \end{bmatrix}}_{\mathcal{Q}} \underbrace{\begin{bmatrix} A(\alpha(t)) & -I - B(\alpha(t))K(\alpha(t)) & 0_{n \times n} \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}(\alpha(t))} \right\} < 0, \quad (90)$$

sendo  $\mathcal{Q}$  a matriz variável adicional.

Como  $\mathcal{B}(\alpha(t))\mathcal{B}(\alpha(t))^\perp = 0_{n \times 2n}$  então:

$$\mathcal{B}(\alpha(t))^\perp = \begin{bmatrix} A(\alpha(t))^{-1} & 0_{n \times n} \\ (I + B(\alpha(t))K(\alpha(t)))^{-1} & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & I \end{bmatrix}.$$

Pelo item (ii) do Lema 3.1 a equivalência é estabelecida

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A(\alpha(t))^{-T} & -(I + B(\alpha(t))K(\alpha(t)))^{-T} & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & I \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}(\alpha(t))^\perp T} \times \underbrace{\begin{bmatrix} -rP & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & P \\ 0_{n \times n} & P & -rP \end{bmatrix}}_{\mathcal{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} A(\alpha(t))^{-1} & 0_{n \times n} \\ (I + B(\alpha(t))K(\alpha(t)))^{-1} & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & I \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}(\alpha(t))^\perp} < 0, \quad (91)$$

ou,

$$\begin{bmatrix} -A(\alpha(t))^{-T} r P A(\alpha(t))^{-1} & (I + B(\alpha(t))K(\alpha(t)))^{-T} P \\ P(I + B(\alpha(t))K(\alpha(t)))^{-1} & -r P \end{bmatrix} < 0. \quad (92)$$

Multiplicando (120) à esquerda por  $\text{diag}(A(\alpha(t))^T, I)$  e à direita por  $\text{diag}(A(\alpha(t)), I)$ ,



$$\begin{bmatrix} -rP & A(\alpha(t))^T(I + B(\alpha(t))K(\alpha(t)))^{-T}P \\ P(I + B(\alpha(t))K(\alpha(t)))^{-1}A(\alpha(t)) & -rP \end{bmatrix} < 0, \quad (93)$$

$$\begin{bmatrix} -rP & A_N^T P \\ PA_N & -rP \end{bmatrix} < 0, \quad (94)$$

sendo

$$A_N = (I + B(\alpha(t))K(\alpha(t)))^{-1}A(\alpha(t)). \quad (95)$$

Note que a desigualdade (94) é equivalente a desigualdade (21). A prova do Teorema está demonstrada.  $\square$

A seguir são propostas condições LMIs para inclusão da restrição do ângulo de  $\mathcal{D}$ -estabilidade.

### 3.1.4 Projeto do controlador com condição de estabilidade e restrição de ângulo $\theta$

**Teorema 10.** *Dado  $0 < \theta < 90$ , se existir uma matriz simétrica positiva definida  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , matrizes  $Z_i, Z_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $0 < \theta < 90$  tais que:*

$$\begin{bmatrix} \begin{matrix} \text{sen}(\theta)(A_j W^T + W A_j^T) & \text{sen}(\theta)(G - W^T + W A_j^T - B_j Z_j) \\ \text{sen}(\theta)(G - W + A_j W^T - Z_j^T B_j^T) & \text{sen}(\theta)(-W^T - B_j Z_j - W - Z_j^T B_j^T) \\ \text{cos}(\theta)(G + A_j W^T + W + Z_j^T B_j^T) & \text{cos}(\theta)(-W^T - B_j Z_j + W + Z_j^T B_j^T) \\ \text{cos}(\theta)(A_j W^T - W A_j^T) & \text{cos}(\theta)(-G - W^T - B_j Z_j - W A_j^T) \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{cos}(\theta)(G + W^T + W A_j^T + B_j Z_j) & \text{cos}(\theta)(-A_j W^T + W A_j^T) \\ \text{cos}(\theta)(W^T + B_j Z_j - W - Z_j^T B_j^T) & \text{cos}(\theta)(-G - A_j W^T - W - Z_j^T B_j^T) \\ \text{sen}(\theta)(-W^T - B_j Z_j - W - Z_j^T B_j^T) & \text{sen}(\theta)(G + A_j W^T - W - Z_j^T B_j^T) \\ \text{sen}(\theta)(G - W^T - B_j Z_j + W A_j^T) & \text{sen}(\theta)(A_j W^T + W A_j^T) \end{matrix} \end{bmatrix} < 0, \quad (96)$$

$$j = 1, 2, \dots, N,$$

$$\left[ \begin{array}{cc}
\begin{array}{l}
\text{sen}(\theta)(A_i W^T + A_j W^T + W A_i^T + W A_j^T) \\
\text{sen}(\theta)(2G - 2W + A_i W^T + A_j W^T - Z_i^T B_j^T - Z_j^T B_i^T) \\
\text{cos}(\theta)(2G - 2W + A_i W^T + A_j W^T - Z_i^T B_j^T - Z_j^T B_i^T) \\
\text{cos}(\theta)(A_i W^T + A_j W^T - W A_i^T - W A_j^T)
\end{array} &
\begin{array}{l}
\text{sen}(\theta)(2G - 2W^T + W A_i^T + W A_j^T - B_i Z_j - B_j Z_i) \\
\text{sen}(\theta)(-2W^T - B_i Z_j - B_j Z_i - 2W - Z_i^T B_j^T - Z_j^T B_i^T) \\
\text{cos}(\theta)(-2W^T - B_i Z_j - B_j Z_i - 2W - Z_i^T B_j^T - Z_j^T B_i^T) \\
\text{cos}(\theta)(-2G - 2W^T - B_i Z_j - B_j Z_i - W A_i^T - W A_j^T)
\end{array} \\
\begin{array}{l}
\text{cos}(\theta)(2G + 2W^T + W A_i^T + W A_j^T + B_i Z_j + B_j Z_i) \\
\text{cos}(\theta)(2W^T + B_i Z_j + B_j Z_i - 2W - Z_i^T B_j^T - Z_j^T B_i^T) \\
\text{sen}(\theta)(-2W^T - B_i Z_j - B_j Z_i - 2W - Z_i^T B_j^T - Z_j^T B_i^T) \\
\text{sen}(\theta)(2G - 2W^T - B_i Z_j - B_j Z_i + W A_i^T + W A_j^T)
\end{array} &
\begin{array}{l}
\text{cos}(\theta)(-A_i W^T - A_j W^T + W A_i^T + W A_j^T) \\
\text{cos}(\theta)(-2G - A_i W^T - A_j W^T - 2W - Z_i^T B_j^T - Z_j^T B_i^T) \\
\text{sen}(\theta)(2G + A_i W^T + A_j W^T - 2W - Z_i^T B_j^T - Z_j^T B_i^T) \\
\text{sen}(\theta)(A_i W^T + A_j W^T + W A_i^T + W A_j^T)
\end{array}
\end{array} \right] < 0, \quad (97)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1; j = i+1, \dots, N,$$

então o sistema (64) é estabilizável com autovalores, dentro da região limitada por  $\theta$ , para todo  $\alpha(t)$ . As matrizes do controlador são dadas por:

$$K(\alpha(t)) = Z(\alpha(t))W^{-T}. \quad (98)$$

Ainda, garante que  $(I + B(\alpha(t))K(\alpha(t)))$  é invertível.

**Prova.** Multiplicando (96) por  $\alpha_j^2(t) > 0$  e somando em  $j$ , de  $j = 1$  até  $j = N$ , segue que

$$\left[ \begin{array}{cc}
\begin{array}{l}
\text{sen}(\theta) \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)(A_j W^T + W A_j^T) \\
\text{sen}(\theta) \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)(G - W + A_j W^T - Z_j^T B_j^T) \\
\text{cos}(\theta) \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)(G + A_j W^T + W + Z_j^T B_j^T) \\
\text{cos}(\theta) \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)(A_j W^T - W A_j^T)
\end{array} &
\begin{array}{l}
\text{sen}(\theta) \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)(G - W^T + W A_j^T - B_j Z_j) \\
\text{sen}(\theta) \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)(-W^T - B_j Z_j - W - Z_j^T B_j^T) \\
\text{cos}(\theta) \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)(-W^T - B_j Z_j + W + Z_j^T B_j^T) \\
\text{cos}(\theta) \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)(-G - W^T - B_j Z_j - W A_j^T)
\end{array} \\
\begin{array}{l}
\text{cos}(\theta) \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)(G + W^T + W A_j^T + B_j Z_j) \\
\text{cos}(\theta) \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)(W^T + B_j Z_j - W - Z_j^T B_j^T) \\
\text{sen}(\theta) \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)(-W^T - B_j Z_j - W - Z_j^T B_j^T) \\
\text{sen}(\theta) \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)(G - W^T - B_j Z_j + W A_j^T)
\end{array} &
\begin{array}{l}
\text{cos}(\theta) \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)(-A_j W^T + W A_j^T) \\
\text{cos}(\theta) \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)(-G - A_j W^T - W - Z_j^T B_j^T) \\
\text{sen}(\theta) \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)(G + A_j W^T - W - Z_j^T B_j^T) \\
\text{sen}(\theta) \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)(A_j W^T + W A_j^T)
\end{array}
\end{array} \right] < 0, \quad (99)$$

$$j = 1, 2, \dots, N,$$

Multiplicando (97) por  $\alpha_i(t)\alpha_j(t)$  e somando em  $i$ , de  $i = 1$  até  $i = N-1$  e em  $j$ , de  $j = i+1$  até  $j = N$ , segue que:

$$M_1^\theta = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
M_{11} &= \begin{bmatrix} \text{sen}(\theta) \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(A_i W^T + A_j W^T + W A_i^T + W A_j^T) \\ \text{sen}(\theta) \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(2G - 2W + A_i W^T + A_j W^T - Z_i^T B_j^T - Z_j^T B_i^T) \\ \text{cos}(\theta) \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(2G + 2W + A_i W^T + A_j W^T + Z_i^T B_j^T + Z_j^T B_i^T) \\ \text{cos}(\theta) \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(A_i W^T + A_j W^T - W A_i^T - W A_j^T) \end{bmatrix}, \\
M_{12} &= \begin{bmatrix} \text{sen}(\theta) \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(2G - 2W^T + W A_i^T + W A_j^T - B_i Z_j - B_j Z_i) \\ \text{sen}(\theta) \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(-2W^T - B_i Z_j - B_j Z_i - 2W - Z_i^T B_j^T - Z_j^T B_i^T) \\ \text{cos}(\theta) \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(-2W^T - B_i Z_j - B_j Z_i + 2W + Z_i^T B_j^T + Z_j^T B_i^T) \\ \text{cos}(\theta) \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(2G - 2W^T - B_i Z_j - B_j Z_i + W A_i^T + W A_j^T) \end{bmatrix}, \\
M_{13} &= \begin{bmatrix} \text{cos}(\theta) \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(2G + 2W^T + W A_i^T + W A_j^T + B_i Z_j + B_j Z_i) \\ \text{cos}(\theta) \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(2W^T + B_i Z_j + B_j Z_i - 2W - Z_i^T B_j^T - Z_j^T B_i^T) \\ \text{sen}(\theta) \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(-2W^T - B_i Z_j - B_j Z_i - 2W - Z_i^T B_j^T - Z_j^T B_i^T) \\ \text{sen}(\theta) \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(2G - 2W^T - B_i Z_j - B_j Z_i + W A_i^T + W A_j^T) \end{bmatrix}, \\
M_{14} &= \begin{bmatrix} \text{cos}(\theta) \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(-A_i W^T - A_j W^T + W A_i^T + W A_j^T) \\ \text{cos}(\theta) \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(-2G - A_i W^T - A_j W^T - 2W - Z_i^T B_j^T - Z_j^T B_i^T) \\ \text{sen}(\theta) \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(2G + A_i W^T + A_j W^T - 2W - Z_i^T B_j^T - Z_j^T B_i^T) \\ \text{sen}(\theta) \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(A_i W^T + A_j W^T + W A_i^T + W A_j^T) \end{bmatrix}. \tag{100}
\end{aligned}$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1; j = i+1, \dots, N,$$

Somando (99) e (100) obtem-se uma matriz composta dos elementos mostrados abaixo, sendo que  $\text{sen}(\theta)$  e  $\text{cos}(\theta)$  foram omitidos por simplicidade.

Elemento (1,1) da matriz resultante:

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t) A_j W^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(A_i W^T + A_j W^T) + \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t) W A_j^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(W A_i^T + W A_j^T). \tag{101}$$

Elemento (1,2) da matriz resultante:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)G + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)2G - \left( \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)W^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)2W^T \right) + \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)WA_j^T \\ & + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(WA_i^T + WA_j^T) - \left( \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)B_jZ_j + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(B_iZ_j + B_jZ_i) \right). \end{aligned} \quad (102)$$

Elemento (1,3) da matriz resultante:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)G + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)2G + \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)W^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)2W^T + \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)WA_j^T \\ & + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(WA_i^T + WA_j^T) + \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)B_jZ_j + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(B_iZ_j + B_jZ_i). \end{aligned} \quad (103)$$

Elemento (1,4) da matriz resultante:

$$-\left( \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)A_jW^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(A_iW^T + A_jW^T) + \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)WA_j^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(WA_i^T + WA_j^T) \right). \quad (104)$$

Elemento (2,1) da matriz resultante:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)G + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)2G - \left( \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)W + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)2W \right) + \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)A_jW^T \\ & + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(A_iW^T + A_jW^T) - \left( \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)Z_j^T B_j^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(Z_i^T B_j^T + Z_j^T B_i^T) \right). \end{aligned} \quad (105)$$

Elemento (2,2) da matriz resultante:

$$\begin{aligned} & -\left( \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)W^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)2W^T + \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)B_jZ_j + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(B_iZ_j + B_jZ_i) \right) \\ & + \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)W + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)2W + \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)Z_j^T B_j^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(Z_i^T B_j^T + Z_j^T B_i^T). \end{aligned} \quad (106)$$

Elemento (2,3) da matriz resultante:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)W^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)2W^T + \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)B_jZ_j + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)[B_iZ_j + B_jZ_i] \\ & - \left( \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)W + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)2W \right) - \left( \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)Z_j^T B_j^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(Z_i^T B_j^T + Z_j^T B_i^T) \right). \end{aligned} \quad (107)$$

Elemento (2,4) da matriz resultante:

$$\begin{aligned}
& -\left(\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)G + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)2G\right) - \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)W + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)2W\right) - \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)A_jW^T\right. \\
& \left. + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(A_iW^T + A_jW^T)\right) - \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)Z_j^T B_j^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(Z_i^T B_j^T + Z_j^T B_i^T)\right). \quad (108)
\end{aligned}$$

Elemento (3,1) da matriz resultante:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)G + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)2G + \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)A_jW^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(A_iW^T + A_jW^T) \\
& + \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)W + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)2W + \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)Z_j^T B_j^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(Z_i^T B_j^T + Z_j^T B_i^T). \quad (109)
\end{aligned}$$

Elemento (3,2) da matriz resultante:

$$\begin{aligned}
& -\left(\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)W^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)2W^T\right) - \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)B_jZ_j + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(B_iZ_j + B_jZ_i)\right) \\
& + \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)W + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)2W + \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)Z_j^T B_j^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(Z_i^T B_j^T + Z_j^T B_i^T). \quad (110)
\end{aligned}$$

Elemento (3,3) da matriz resultante:

$$\begin{aligned}
& -\left(\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)W^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)2W^T\right) - \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)B_jZ_j + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(B_iZ_j + B_jZ_i)\right) \\
& -\left(\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)W + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)2W\right) - \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)Z_j^T B_j^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(Z_i^T B_j^T + Z_j^T B_i^T)\right). \quad (111)
\end{aligned}$$

Elemento (3,4) da matriz resultante:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)G + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)2G + \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)A_jW^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(A_iW^T + A_jW^T) \\
& -\left(\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)W + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)2W\right) - \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)Z_j^T B_j^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(Z_i^T B_j^T + Z_j^T B_i^T)\right). \quad (112)
\end{aligned}$$

Elemento (4,1) da matriz resultante:

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)A_jW^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(A_iW^T + A_jW^T) - \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)WA_j^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(WA_i^T + WA_j^T)\right). \quad (113)$$

Elemento (4,2) da matriz resultante:

$$\begin{aligned}
& -\left(\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)G + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)2G\right) - \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)W^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)2W^T\right) - \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)WA_j^T\right) \\
& + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(WA_i^T + WA_j^T) - \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)B_jZ_j + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(B_iZ_j + B_jZ_i)\right). \tag{114}
\end{aligned}$$

Elemento (4,3) da matriz resultante:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)G + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)2G - \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)W^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)2W^T\right) + \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)WA_j^T \\
& + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(WA_i^T + WA_j^T) - \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)B_jZ_j + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(B_iZ_j + B_jZ_i)\right). \tag{115}
\end{aligned}$$

Elemento (4,4) da matriz resultante:

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)A_jW^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(A_iW^T + A_jW^T) + \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)WA_j^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(WA_i^T + WA_j^T). \tag{116}$$

Genericamente sabemos que:

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{j=1}^N \alpha_j H_i R_j = \sum_{j=1}^N \alpha_j^2 H_j R_j + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j (H_i R_j + H_j R_i).$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{j=1}^N \alpha_j = \sum_{j=1}^N \alpha_j^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j.$$

Então, lembrando que  $\sum_{i=1}^N \alpha_i(t) = 1$  e  $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$ :

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)A_jW + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(A_iW + A_jW) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \alpha_j(t)A_jW = \sum_{j=1}^N \alpha_j(t)A_jW.$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)B_jZ_j + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(B_iZ_j + B_jZ_i) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \alpha_j(t)B_iZ_j.$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t)WA_j^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(WA_i^T + WA_j^T) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \alpha_j(t)WA_j^T = \sum_{j=1}^N \alpha_j(t)WA_j^T.$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t) Z_j^T B_j^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t) \alpha_j(t) (Z_i^T B_j^T + Z_j^T B_i^T) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) Z_i^T B_j^T.$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t) G + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t) \alpha_j(t) 2G = G.$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t) rG + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t) \alpha_j(t) 2rG = rG.$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t) W + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t) \alpha_j(t) 2W = W.$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t) W^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t) \alpha_j(t) 2W^T = W^T.$$

Logo, retornando os termos  $\text{sen}(\theta)$  e  $\text{cos}(\theta)$  ao equacionamento temos:

$$M_2^\theta = \begin{bmatrix} M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \end{bmatrix}$$

$$M_{21} = \begin{bmatrix} \text{sen}(\theta)(A(\alpha(t))W^T + WA(\alpha(t))^T) \\ \text{sen}(\theta)(G - W + A(\alpha(t))W^T - Z(\alpha(t))^T B(\alpha(t))^T) \\ \text{cos}(\theta)(G + A(\alpha(t))W^T + W + Z(\alpha(t))^T B(\alpha(t))^T) \\ \text{cos}(\theta)(A(\alpha(t))W^T - WA(\alpha(t))^T) \end{bmatrix},$$

$$M_{22} = \begin{bmatrix} \text{sen}(\theta)(G - W^T + WA(\alpha(t))^T - B(\alpha(t))Z(\alpha(t))) \\ \text{sen}(\theta)(-W^T - B(\alpha(t))Z(\alpha(t)) - W - Z(\alpha(t))^T B(\alpha(t))^T) \\ \text{cos}(\theta)(-W^T - B(\alpha(t))Z(\alpha(t)) + W + Z(\alpha(t))^T B(\alpha(t))^T) \\ \text{cos}(\theta)(-G - W^T - B(\alpha(t))Z(\alpha(t)) - WA(\alpha(t))^T) \end{bmatrix},$$

$$M_{23} = \begin{bmatrix} \text{cos}(\theta)(G + W^T + WA(\alpha(t))^T + B(\alpha(t))Z(\alpha(t))) \\ \text{cos}(\theta)(W^T + B(\alpha(t))Z(\alpha(t)) - W - Z(\alpha(t))^T B(\alpha(t))^T) \\ \text{sen}(\theta)(-W^T - B(\alpha(t))Z(\alpha(t)) - W - Z(\alpha(t))^T B(\alpha(t))^T) \\ \text{sen}(\theta)(G - W^T - B(\alpha(t))Z(\alpha(t)) + WA(\alpha(t))^T) \end{bmatrix},$$

$$M_{24} = \begin{bmatrix} \text{cos}(\theta)(-A(\alpha(t))W^T + WA(\alpha(t))^T) \\ \text{cos}(\theta)(-G - A(\alpha(t))W^T - W - Z(\alpha(t))^T B(\alpha(t))^T) \\ \text{sen}(\theta)(G + A(\alpha(t))W^T - W - Z(\alpha(t))^T B(\alpha(t))^T) \\ \text{sen}(\theta)(A(\alpha(t))W^T + WA(\alpha(t))^T) \end{bmatrix}, \quad (117)$$

Utilizando as transformações de variáveis  $G = X^{-1} P X^{-T}$ ,  $W = X^{-1}$  e  $Z(\alpha(t)) = K(\alpha(t)) X^{-T}$ :

$$M_3^\theta = \begin{bmatrix} M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
M_{31} &= \begin{bmatrix} \text{sen}(\theta)(A(\alpha(t))X^{-T} + X^{-1}A(\alpha(t))^T) \\ \text{sen}(\theta)(X^{-1}PX^{-T} - X^{-1} + A(\alpha(t))X^{-T} - X^{-1}K(\alpha(t))^TB(\alpha(t))^T) \\ \text{cos}(\theta)(X^{-1}PX^{-T} + A(\alpha(t))X^{-T} + X^{-1} + X^{-1}K(\alpha(t))^TB(\alpha(t))^T) \\ \text{cos}(\theta)(A(\alpha(t))X^{-T} - X^{-1}A(\alpha(t))^T) \end{bmatrix}, \\
M_{32} &= \begin{bmatrix} \text{sen}(\theta)(X^{-1}PX^{-T} - X^{-T} + X^{-1}A(\alpha(t))^T - B(\alpha(t))K(\alpha(t))X^{-T}) \\ \text{sen}(\theta)(-X^{-T} - B(\alpha(t))K(\alpha(t))X^{-T} - X^{-1} - X^{-1}K(\alpha(t))^TB(\alpha(t))^T) \\ \text{cos}(\theta)(-X^{-T} - B(\alpha(t))K(\alpha(t))X^{-T} + X^{-1} + X^{-1}K(\alpha(t))^TB(\alpha(t))^T) \\ \text{cos}(\theta)(-X^{-1}PX^{-T} - X^{-T} - B(\alpha(t))K(\alpha(t))X^{-T} - X^{-1}A(\alpha(t))^T) \end{bmatrix}, \\
M_{33} &= \begin{bmatrix} \text{cos}(\theta)(X^{-1}PX^{-T} + X^{-T} + X^{-1}A(\alpha(t))^T + B(\alpha(t))K(\alpha(t))X^{-T}) \\ \text{cos}(\theta)(X^{-T} + B(\alpha(t))Z(\alpha(t)) - X^{-1} - X^{-1}K(\alpha(t))^TB(\alpha(t))^T) \\ \text{sen}(\theta)(-X^{-T} - B(\alpha(t))K(\alpha(t))X^{-T} - X^{-1} - X^{-1}K(\alpha(t))^TB(\alpha(t))^T) \\ \text{sen}(\theta)(X^{-1}PX^{-T} - X^{-T} - B(\alpha(t))Z(\alpha(t)) + X^{-1}A(\alpha(t))^T) \end{bmatrix}, \\
M_{34} &= \begin{bmatrix} \text{cos}(\theta)(-A(\alpha(t))X^{-T} + X^{-1}A(\alpha(t))^T) \\ \text{cos}(\theta)(-X^{-1}PX^{-T} - A(\alpha(t))X^{-T} - X^{-1} - X^{-1}K(\alpha(t))^TB(\alpha(t))^T) \\ \text{sen}(\theta)(X^{-1}PX^{-T} + A(\alpha(t))X^{-T} - X^{-1} - X^{-1}K(\alpha(t))^TB(\alpha(t))^T) \\ \text{sen}(\theta)(A(\alpha(t))X^{-T} + X^{-1}A(\alpha(t))^T) \end{bmatrix}. \tag{118}
\end{aligned}$$

Multiplicando (118) à esquerda por  $\text{diag}(X, X, X, X)$  e à direita por  $\text{diag}(X^T, X^T, X^T, X^T)$ :

$$\begin{aligned}
M_4^\theta &= \begin{bmatrix} M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{bmatrix} \\
M_{41} &= \begin{bmatrix} \text{sen}(\theta)(XA(\alpha(t)) + A(\alpha(t))^TX^T) \\ \text{sen}(\theta)(P + XA(\alpha(t)) - X^T - K(\alpha(t))^TB(\alpha(t))^TX^T) \\ \text{cos}(\theta)(P + XA(\alpha(t)) + X^T + K(\alpha(t))^TB(\alpha(t))^TX^T) \\ \text{cos}(\theta)(XA(\alpha(t)) - A(\alpha(t))^TX^T) \end{bmatrix}, \\
M_{42} &= \begin{bmatrix} \text{sen}(\theta)(P - X + A(\alpha(t))^TX^T - XB(\alpha(t))K(\alpha(t))) \\ \text{sen}(\theta)(-X - XB(\alpha(t))K(\alpha(t)) - X^T - K(\alpha(t))^TB(\alpha(t))^TX^T) \\ \text{cos}(\theta)(-X - XB(\alpha(t))K(\alpha(t)) + X^T + K(\alpha(t))^TB(\alpha(t))^TX^T) \\ \text{cos}(\theta)(-P - X - XB(\alpha(t))K(\alpha(t)) - A(\alpha(t))^TX^T) \end{bmatrix}, \\
M_{43} &= \begin{bmatrix} \text{cos}(\theta)(P + X + A(\alpha(t))^TX^T + XB(\alpha(t))K(\alpha(t))) \\ \text{cos}(\theta)(X + XB(\alpha(t))K(\alpha(t)) - X^T - K(\alpha(t))^TB(\alpha(t))^TX^T) \\ \text{sen}(\theta)(-X - XB(\alpha(t))K(\alpha(t)) - X^T - K(\alpha(t))^TB(\alpha(t))^TX^T) \\ \text{sen}(\theta)(P - X - XB(\alpha(t))K(\alpha(t)) + A(\alpha(t))^TX^T) \end{bmatrix}, \\
M_{44} &= \begin{bmatrix} \text{cos}(\theta)(-XA(\alpha(t)) + A(\alpha(t))^TX^T) \\ \text{cos}(\theta)(-P - XA(\alpha(t)) - X^T - K(\alpha(t))^TB(\alpha(t))^TX^T) \\ \text{sen}(\theta)(P + XA(\alpha(t)) - X^T - K(\alpha(t))^TB(\alpha(t))^TX^T) \\ \text{sen}(\theta)(XA(\alpha(t)) + A(\alpha(t))^TX^T) \end{bmatrix}. \tag{119}
\end{aligned}$$

Observe que:

$$-X - X^T - XB(\alpha(t))K(\alpha(t)) - K^T(\alpha(t))B^T(\alpha(t))X^T < 0, \tag{120}$$

$$\Leftrightarrow X(I + B(\alpha(t))K(\alpha(t))) + (I + B(\alpha(t))K(\alpha(t)))^TX^T > 0$$

e segundo a Propriedade 3.1, conclui-se que  $X(I + B(\alpha(t))K(\alpha(t)))$  é invertível, logo  $(I + B(\alpha(t))K(\alpha(t)))$  e  $X$  são invertíveis. Do item (iv) do Lema 3.1, a desigualdade (119) pode ser reescrita como (121).



$$\begin{aligned}
& \underbrace{\begin{bmatrix} 0_{n \times n} & \text{sen}(\theta)P & \text{cos}(\theta)P & 0_{n \times n} \\ \text{sen}(\theta)P & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & -\text{cos}(\theta)P \\ \text{cos}(\theta)P & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & \text{sen}(\theta)P \\ 0_{n \times n} & -\text{cos}(\theta)P & \text{sen}(\theta)P & 0_{n \times n} \end{bmatrix}}_{\mathcal{D}} \\
& + \mathbf{He} \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} \text{sen}(\theta)X & -\text{cos}(\theta)X \\ \text{sen}(\theta)X & -\text{cos}(\theta)X \\ \text{cos}(\theta)X & \text{sen}(\theta)X \\ \text{cos}(\theta)X & \text{sen}(\theta)X \end{bmatrix}}_{\mathcal{Q}} \underbrace{\begin{bmatrix} A(\alpha(t)) & -I - B(\alpha(t))K(\alpha(t)) & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & -I - B(\alpha(t))K(\alpha(t)) & A(\alpha(t)) \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}(\alpha(t))} \right\} < 0, \quad (121)
\end{aligned}$$

sendo  $\mathcal{Q}$  a matriz variável adicional.

Como  $\mathcal{B}(\alpha(t))\mathcal{B}(\alpha(t))^\perp = 0_{2n \times 2n}$  então:

$$\mathcal{B}(\alpha(t))^\perp = \begin{bmatrix} A(\alpha(t))^{-1} & 0_{n \times n} \\ (I + B(\alpha(t))K(\alpha(t)))^{-1} & 0_{2n \times 2n} \\ 0_{n \times n} & (I + B(\alpha(t))K(\alpha(t)))^{-1} \\ 0_{n \times n} & A(\alpha(t))^{-1} \end{bmatrix}.$$

Pelo item (ii) do Lema 3.1 a equivalência é estabelecida

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\begin{bmatrix} A(\alpha(t))^{-T} & -(I + B(\alpha(t))K(\alpha(t)))^{-T} & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & -(I + B(\alpha(t))K(\alpha(t)))^{-T} & A(\alpha(t))^{-T} \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}(\alpha(t))^{\perp T}} \\
& \times \underbrace{\begin{bmatrix} 0_{n \times n} & \text{sen}(\theta)P & \text{cos}(\theta)P & 0_{n \times n} \\ \text{sen}(\theta)P & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & -\text{cos}(\theta)P \\ \text{cos}(\theta)P & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & \text{sen}(\theta)P \\ 0_{n \times n} & -\text{cos}(\theta)P & \text{sen}(\theta)P & 0_{n \times n} \end{bmatrix}}_{\mathcal{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} A(\alpha(t))^{-1} & 0_{n \times n} \\ (I + B(\alpha(t))K(\alpha(t)))^{-1} & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & (I + B(\alpha(t))K(\alpha(t)))^{-1} \\ 0_{n \times n} & A(\alpha(t))^{-1} \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}(\alpha(t))^\perp} < 0, \quad (122)
\end{aligned}$$

ou,

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \text{sen}(\theta)(I + B(\alpha(t))K(\alpha(t)))^{-T}PA(\alpha(t))^{-1} + \text{sen}(\theta)A(\alpha(t))^{-T}P(I + B(\alpha(t))K(\alpha(t)))^{-1} \\ \text{cos}(\theta)(I + B(\alpha(t))K(\alpha(t)))^{-T}PA(\alpha(t))^{-1} - \text{cos}(\theta)A(\alpha(t))^{-T}P(I + B(\alpha(t))K(\alpha(t)))^{-1} \\ \text{cos}(\theta)A(\alpha(t))^{-T}P(I + B(\alpha(t))K(\alpha(t)))^{-1} - \text{cos}(\theta)(I + B(\alpha(t))K(\alpha(t)))^{-T}PA(\alpha(t))^{-1} \\ \text{sen}(\theta)A(\alpha(t))^{-T}P(I + B(\alpha(t))K(\alpha(t)))^{-1} + \text{sen}(\theta)(I + B(\alpha(t))K(\alpha(t)))^{-T}PA(\alpha(t))^{-1} \end{bmatrix} < 0. \quad (123)
\end{aligned}$$

Multiplicando (123) à esquerda por  $\text{diag}(A(\alpha(t))^T, A(\alpha(t))^T)$  e à direita por  $\text{diag}(A(\alpha(t)), A(\alpha(t)))$ ,

$$\begin{bmatrix} \text{sen}(\theta)(A(\alpha(t))^T(I + B(\alpha(t))K(\alpha(t)))^{-T}P + P(I + B(\alpha(t))K(\alpha(t)))^{-1}A(\alpha(t))) \\ \text{cos}(\theta)(A(\alpha(t))^T(I + B(\alpha(t))K(\alpha(t)))^{-T}P - P(I + B(\alpha(t))K(\alpha(t)))^{-1}A(\alpha(t))) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta)(P^T(I+B(\alpha(t))K(\alpha(t)))^{-1}A(\alpha(t)) - A(\alpha(t))(I+B(\alpha(t))K(\alpha(t)))^{-T}P) \\ \sin(\theta)(P^T(I+B(\alpha(t))K(\alpha(t)))^{-1}A(\alpha(t)) + A(\alpha(t))(I+B(\alpha(t))K(\alpha(t)))^{-T}P) \end{bmatrix} < 0, \quad (124)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sin(\theta)(A_N^T P + P A_N) & \cos(\theta)(P A_N - A_N^T P) \\ \cos(\theta)(A_N^T P - P A_N) & \sin(\theta)(P A_N + A_N^T P) \end{bmatrix} < 0, \quad (125)$$

sendo

$$A_N = (I + B(\alpha(t))K(\alpha(t)))^{-1}A(\alpha(t)). \quad (126)$$

Note que a desigualdade (125) é equivalente a desigualdade (22). A prova do Teorema está demonstrada.  $\square$

Os teoremas obtidos neste capítulo garantem a validade da teoria de  $\mathcal{D}$ -estabilidade usando a estratégia de controle *gain scheduling* com realimentação derivativa dos estados.

### 3.1.5 Conclusões parciais

O principal resultado deste capítulo foi obter um controlador *gain scheduling*, usando realimentação derivativa com parâmetro variante no tempo e restrição de  $\mathcal{D}$ -estabilidade. Projetou-se o controlador *gain scheduling* aplicando o Lema de Finsler, garantindo um relaxamento ao sistema e que pode-se obter os ganhos do controlador sem inverter uma matriz literal (MONTAGNER; PERES, 2004). Com o emprego da restrição de  $\mathcal{D}$ -estabilidade foi possível incluir restrições de resposta transitória e obter ganhos implementáveis na prática, como será apresentado no próximo capítulo.

## 4 IMPLEMENTAÇÃO PRÁTICA

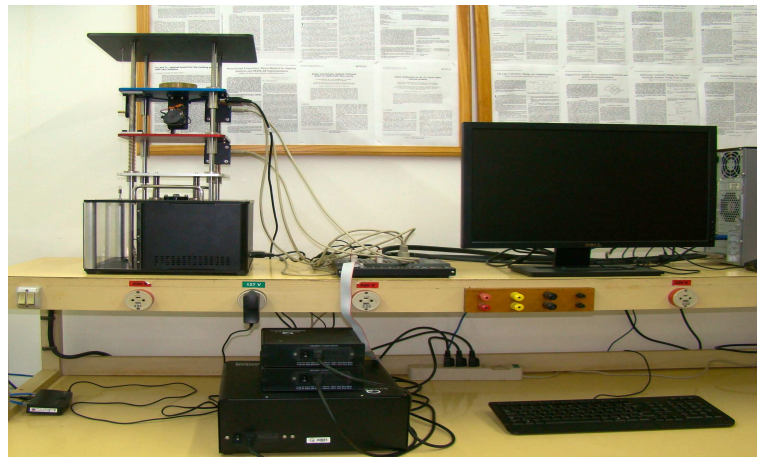
Neste capítulo são testadas de forma prática as metodologias propostas nos Capítulos 2 e 3 desta dissertação. São apresentadas as soluções obtidas das matrizes  $Q$ ,  $Z(\alpha(t))$ ,  $K(\alpha(t))$  e figuras com a resposta dinâmica do sistema no tempo, para os distintos sinais de controle empregados.

Na falta de uma planta com parâmetros variável no LPC, para testar nossas propostas é imposto por software uma variação paramétrica de  $\alpha(t)$ .

### 4.1 SISTEMA DE SUSPENSÃO ATIVA DE UM VEÍCULO

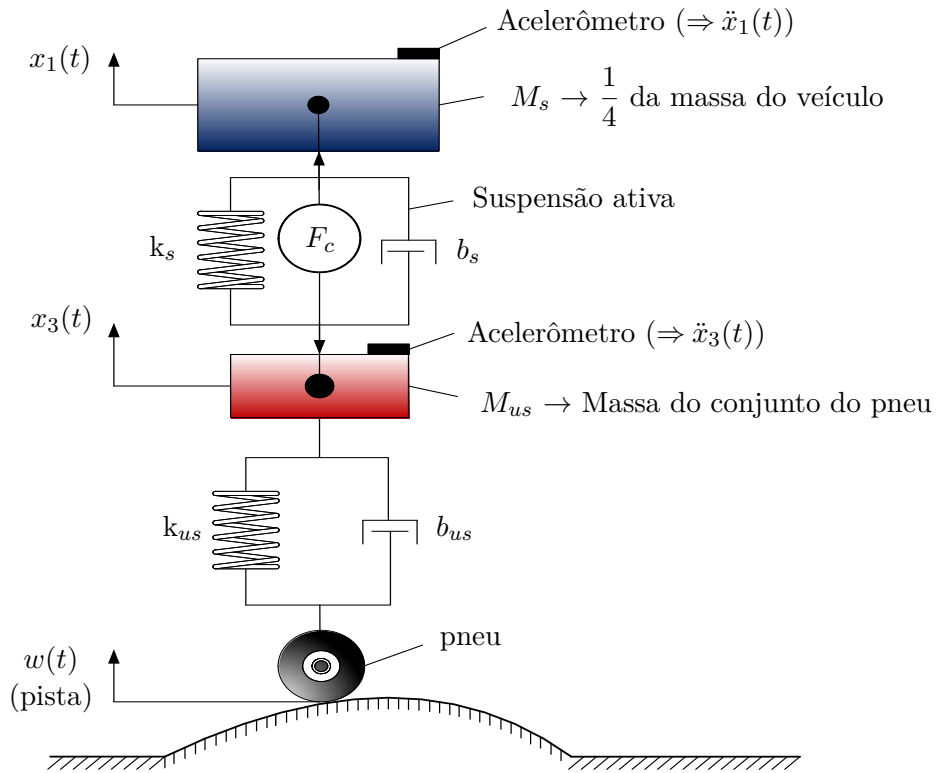
O sistema de suspensão ativa utilizado é fabricado pela Quanser e pode ser visto na Figura 2. O sistema consiste de um conjunto composto por duas massas, denominadas

**Figura 2** - Sistema de suspensão ativa Quanser.



Fonte: Pertencente ao LPC-FEIS-UNESP

$M_s$  e  $M_{us}$ . A massa  $M_s$  representa  $\frac{1}{4}$  do corpo total do veículo e é suportada pela mola  $k_s$  e pelo amortecedor  $b_s$ . A massa  $M_{us}$  corresponde à massa do conjunto do pneu do veículo e é suportada pela mola  $k_{us}$  e pelo amortecedor  $b_{us}$ . Para atenuar as vibrações causadas por irregularidades na pista utiliza-se o sistema de suspensão ativa, representado por um motor (atuador) conectado entre as massas  $M_s$  e  $M_{us}$ , e controlado pela força  $F_c$ . Os

**Figura 3** - Modelo esquemático do sistema de suspensão ativa.

Fonte: (OLIVEIRA et al., 2014)

valores dos parâmetros estão dispostos na Tabela 1.

O modelo esquemático (Quanser, 2009), mostrado na Figura 3 pode ser representado em espaço de estados, como segue:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ \frac{-ks}{Ms} & \frac{-bs}{Ms} & 0 & \frac{bs}{Ms} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-ks}{Mus} & \frac{bs}{Mus} & \frac{-kus}{Mus} & \frac{-(bs+bus)}{Mus} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{Ms} \\ 0 \\ \frac{-1}{Mus} \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t), \quad (127)$$

sendo  $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$  e  $x_4(t) = \dot{x}_3(t)$ , representando as velocidades de cada massa.

**Tabela 1** - Parâmetros da suspensão ativa.

Símbolos	Valor
$M_s$	2,45 (Kg)
$M_{us}$	1 (Kg)
$k_s$	900 (N/m)
$k_{us}$	2500 (N/m)
$b_s$	7,5 (Ns/m)
$b_{us}$	5 (Ns/m)

Fonte: (OLIVEIRA et al., 2014)

Com objetivo de se fazer um teste mais severo do controlador *gain scheduling* é implementada uma variação temporal  $\alpha(t)$  no ganho do canal de saída do sinal de controle  $u(t)$ . Isso é feito via *software*, emulando uma variação ao longo do tempo do ganho do amplificador de potência que alimenta o motor C.C. do atuador. Essa variação paramétrica pode ser representada no modelo considerando-se dois vértices do politopo no vetor de entrada  $B(\alpha(t))$  em (62).

A seguir, são apresentados os resultados obtidos usando realimentação de estados com restrição de  $\mathcal{D}$ -estabilidade.

**Primeiro caso:**

A variação paramétrica  $\alpha(t)$  impõe dois vértices, sendo que um representa o ganho do amplificador com 100% e o outro com 70%. Para realizar o projeto de controle foram considerados os seguintes vértices do politopo:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -367,347 & -3,061 & 0 & 3,061 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 900 & 7,5 & -2500 & -12,5 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = A_1, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,408 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,286 \\ 0 \\ -0,7 \end{bmatrix}.$$

Usando as restrições conjuntas dadas pelas LMIs dos Teoremas 3, 4 e 5 com  $\gamma = 6$ ,  $r = 50$  e  $\theta = 30^\circ$ , os ganhos calculados foram:

$$K_1 = Z_1 Q^{-1} = [-0,9842 \quad 15,8513 \quad 0,3585 \quad -12,9034]$$

$$\times 10^5 \begin{bmatrix} 0,1976 & 0,0245 & -0,6465 & -0,0024 \\ 0,0245 & 0,0037 & -0,1143 & -0,0006 \\ -0,6465 & -0,1143 & 4,5321 & 0,0353 \\ -0,0024 & -0,0006 & 0,0353 & 0,0005 \end{bmatrix}, \quad (128)$$

logo,

$$K_1 = \begin{bmatrix} -656,7971 & 40,2045 & -647,8606 & -64,6902 \end{bmatrix}.$$

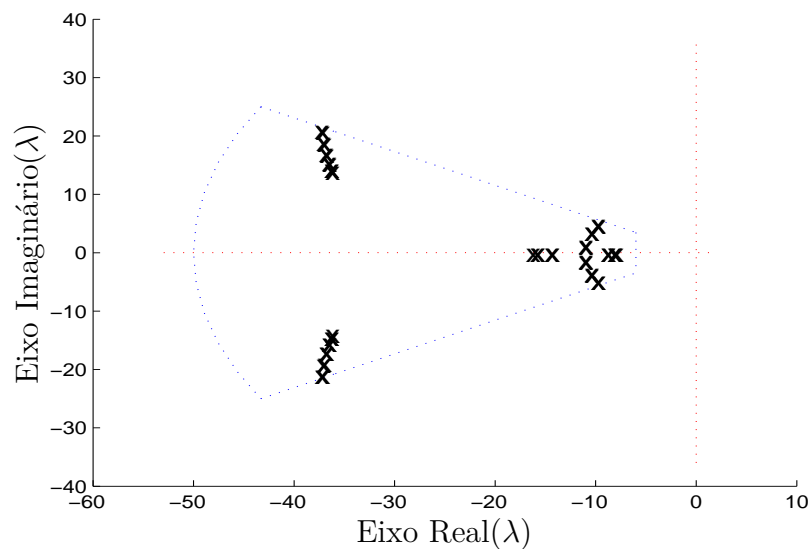
$$K_2 = Z_2 Q^{-1} = \begin{bmatrix} -1,4052 & 22,6322 & 0,5118 & -18,4234 \end{bmatrix} \\ \times 10^5 \begin{bmatrix} 0,1976 & 0,0245 & -0,6465 & -0,0024 \\ 0,0245 & 0,0037 & -0,1143 & -0,0006 \\ -0,6465 & -0,1143 & 4,5321 & 0,0353 \\ -0,0024 & -0,0006 & 0,0353 & 0,0005 \end{bmatrix}, \quad (129)$$

logo,

$$K_2 = \begin{bmatrix} -934,4456 & 57,9660 & -946,6824 & -92,5295 \end{bmatrix}.$$

A nuvem dos autovalores do sistema está ilustrada na Figura 4, para diversos valores de  $0 \leq \alpha(t) \leq 1$ .

**Figura 4** - Localização da nuvem dos autovalores do sistema.



Fonte: Elaboração do próprio autor

A nuvem dos autovalores, mostrados na Figura 4, atesta que todas as restrições de  $\mathcal{D}$ -estabilidade foram respeitadas. Logo o controlador *gain scheduling* com  $\mathcal{D}$ -estabilidade proposto é adequado.

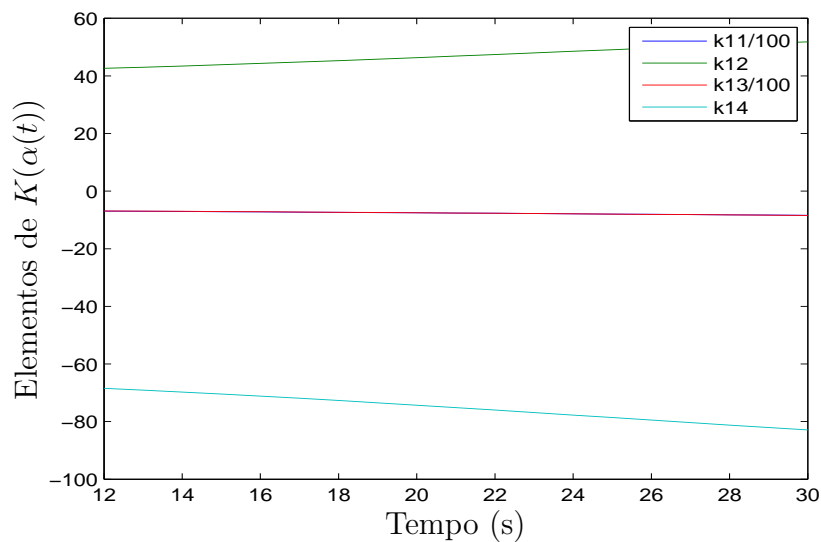
Os valores de  $K(\alpha(t))$  ao longo do tempo são calculados mediante a seguinte equação:

$$K(\alpha(t)) = \alpha_1(t)K_1 + (1 - \alpha_1(t))K_2, \quad (130)$$

Para uma frequência  $f = 0,01Hz$ ,  $\alpha(t)$  é dado por:

$$\alpha_1(t) = 0,5 + 0,5\text{sen}(2\pi 0,01t + \frac{\pi}{2}). \quad (131)$$

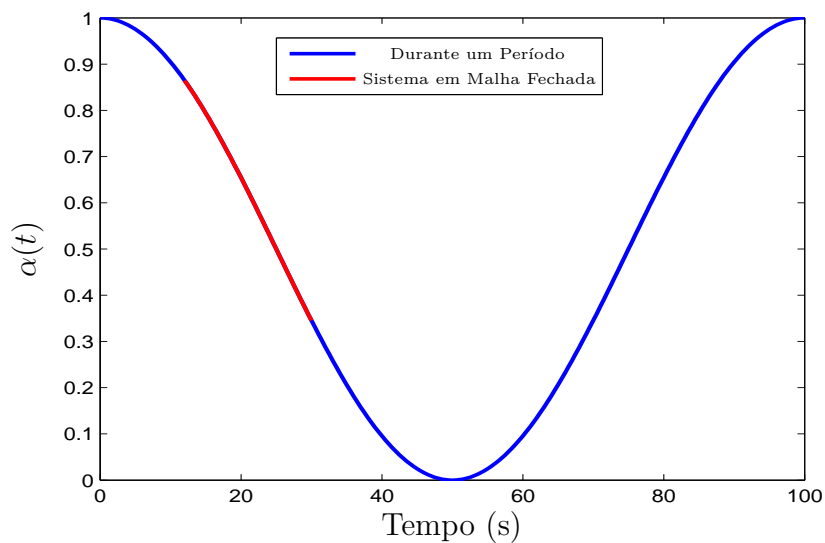
**Figura 5** - Elementos de  $K(\alpha(t))$  em função do tempo.



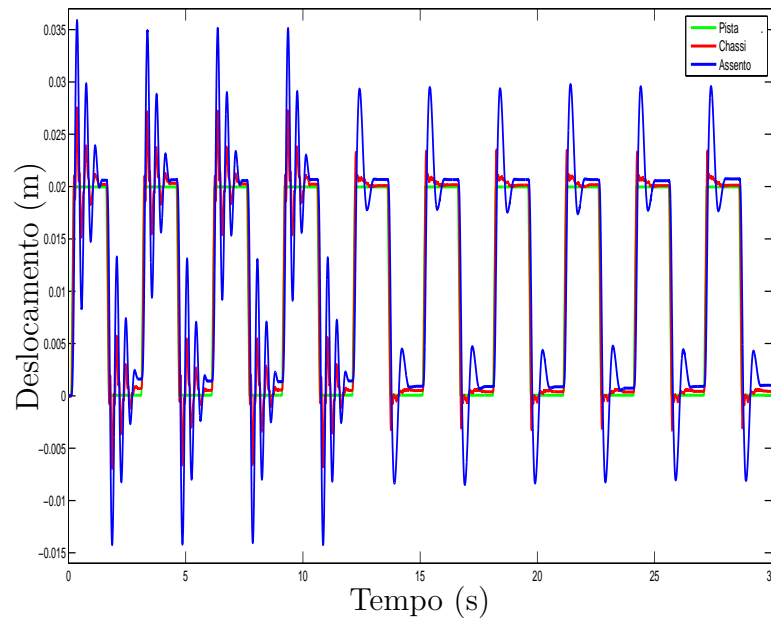
Fonte: Elaboração do próprio autor

A variação do parâmetro  $\alpha(t)$  é ilustrada na Figura 6.

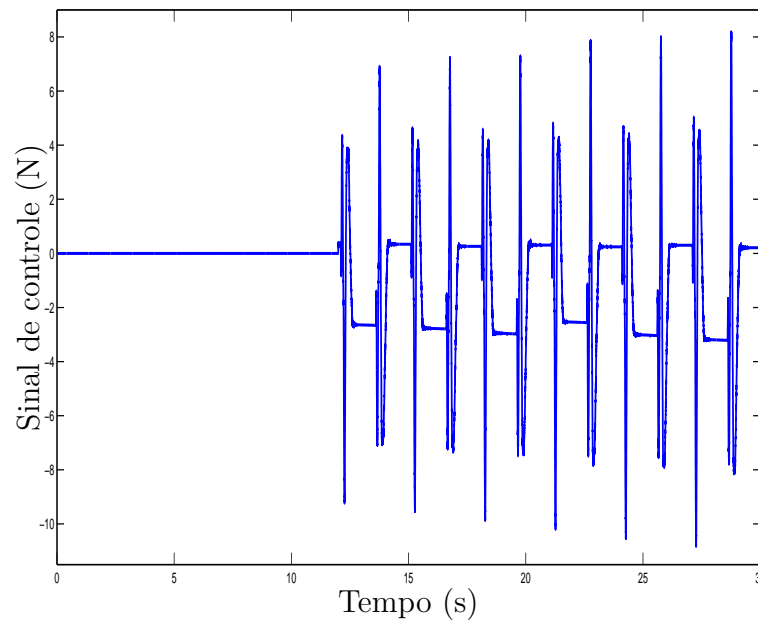
**Figura 6** - Função senoidal  $\alpha(t)$ .



Fonte: Elaboração do próprio autor

**Figura 7** - Resposta transitória prática de malha aberta (0-12s) e de malha fechada (12,01-30s).

Fonte: Elaboração do próprio autor

**Figura 8** - Sinal de controle para  $\alpha(t)$  com frequência de  $0,01Hz$ .

Fonte: Elaboração do próprio autor

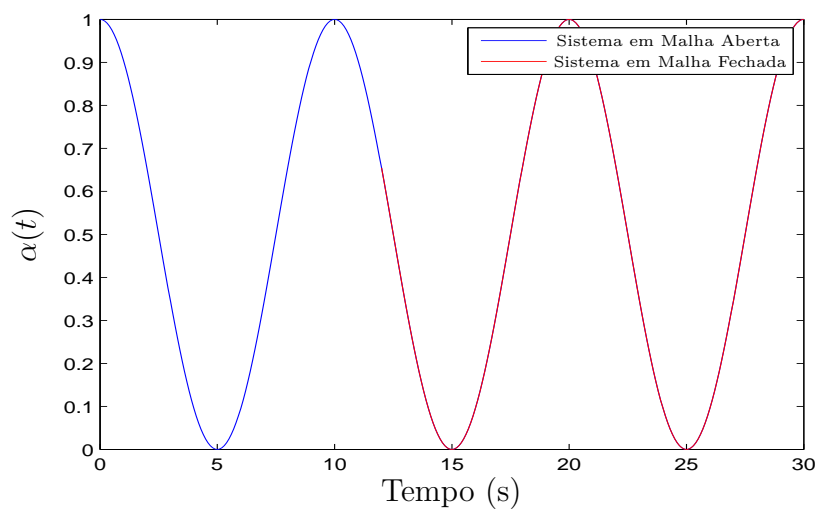
Na Figura 7 nota-se que o sistema atuando em malha fechada garante um bom desempenho ao sistema. O sistema em malha aberta é estável, mas apresenta muitas oscilações. Usando a restrição de  $\mathcal{D}$ -estabilidade foi possível melhorar o desempenho dinâmico do sistema.



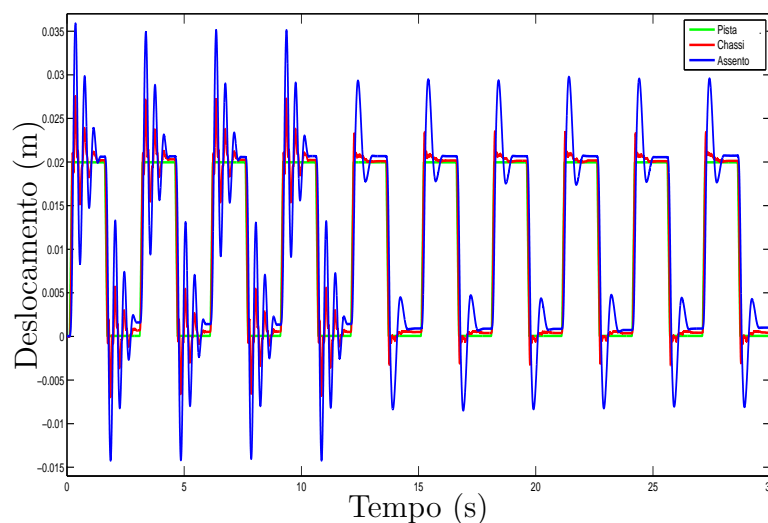
**Segundo caso:**

Aplicando a mesma metodologia com restrição de  $\mathcal{D}$ -estabilidade proposta no primeiro caso, as Figuras de 10 a 14 mostram como o controlador garante um bom desempenho ao sistema para os casos nos quais o parâmetro  $\alpha(t)$  varia com frequência de  $0,1Hz$  e  $1Hz$  respectivamente.

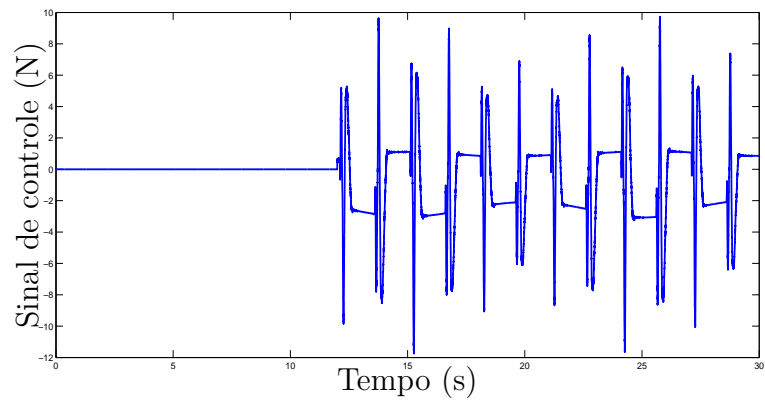
A variação do parâmetro  $\alpha(t)$  para uma frequência de  $0,1Hz$  é ilustrada na Figura 9.

**Figura 9 - Função senoidal  $\alpha(t)$ .**

Fonte: Elaboração do próprio autor

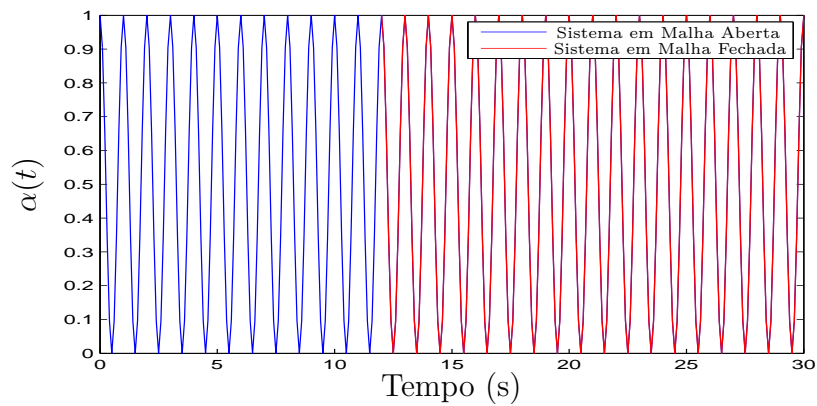
**Figura 10 - Resposta transitória prática de malha aberta (0-12s) e de malha fechada (12,01-30s) para  $\alpha(t)$  com frequência de  $0,1Hz$ .**

Fonte: Elaboração do próprio autor

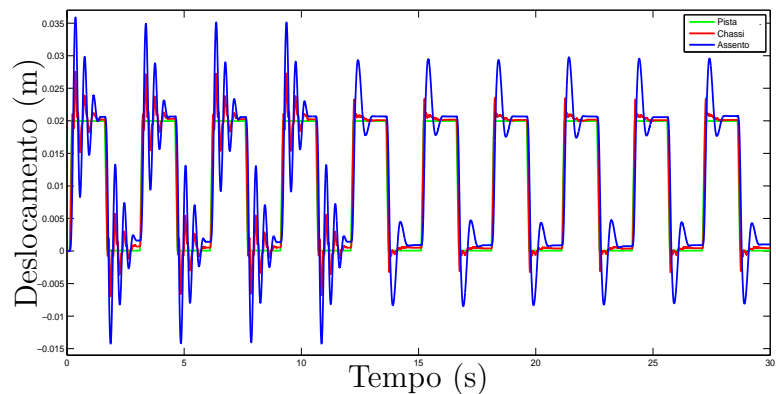
**Figura 11** - Sinal de controle para  $\alpha(t)$  com frequência de  $0,1Hz$ .

Fonte: Elaboração do próprio autor

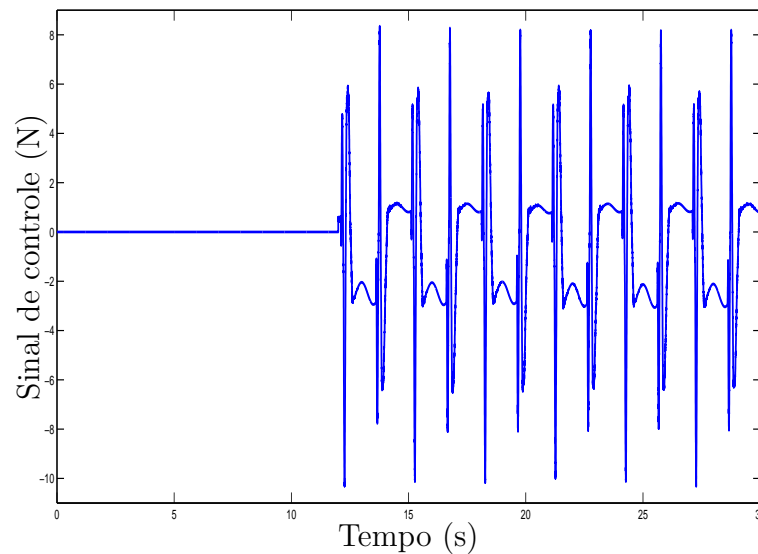
A variação do parâmetro  $\alpha(t)$  para uma frequência de  $1Hz$  é ilustrada na Figura 12.

**Figura 12** - Função senoidal  $\alpha(t)$ .

Fonte: Elaboração do próprio autor

**Figura 13** - Resposta transitória prática de malha aberta (0-12s) e de malha fechada (12,1-30s) para  $\alpha(t)$  com frequência de  $1Hz$ .

Fonte: Elaboração do próprio autor

**Figura 14** - Sinal de controle para  $\alpha(t)$  com frequência de  $1Hz$ .

Fonte: Elaboração do próprio autor

Nas Figuras 11 e 14 mostram-se as respostas do sinal de controle para as diferentes frequências, pode-se notar como a magnitude do valor nunca chega a saturar a saída do amplificador de sinal do sistema de suspensão ativa.

No Teorema 1 (MONTAGNER; PERES, 2004) o projeto *gain scheduling* leva em consideração o limite máximo de  $\dot{\alpha}(t)$ , que não é considerado nos teoremas propostos nessa tese. Porém as várias frequências de  $\alpha(t)$  implementadas nas Figuras 6, 9 e 12, mostram que as propostas desse trabalho sem considerar limitantes para  $\dot{\alpha}(t)$  são viáveis em aplicações práticas.

A seguir são apresentados os resultados obtidos usando realimentação derivativa com restrição de  $\mathcal{D}$ -estabilidade.

### **Terceiro caso:**

Nesta proposta os dois vértices que impõe a variação paramétrica  $\alpha(t)$ , um representa o ganho do amplificador com 100% e o outro com 60%. Foram considerados os seguintes vértices do politopo:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -367,347 & -3,061 & 0 & 3,061 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 900 & 7,5 & -2500 & -12,5 \end{bmatrix}, A_2 = A_1, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,408 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,244 \\ 0 \\ -0,6 \end{bmatrix}.$$

Usando as LMIs dos Teoremas 8, 9 e 10 com  $\gamma = 1,11$ ,  $\kappa = 0,9$ ,  $r = 70$  e  $\theta = 45^\circ$ , os

ganhos calculados foram:

$$K_{d_1} = Z_1 Q^{-T} = \begin{bmatrix} 0,0004 & 0,0411 & -0,0001 & -0,1071 \\ -0,4103 & -0,0728 & 2,3156 & 0,0043 \\ -0,0011 & -0,0014 & 0,0948 & 0,0008 \\ -0,4626 & -0,0756 & 1,8288 & -0,0077 \\ -0,0045 & -0,0010 & 0,0492 & 0,0003 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -0,4103 & -0,0728 & 2,3156 & 0,0043 \\ -0,0011 & -0,0014 & 0,0948 & 0,0008 \\ -0,4626 & -0,0756 & 1,8288 & -0,0077 \\ -0,0045 & -0,0010 & 0,0492 & 0,0003 \end{bmatrix}, \quad (132)$$

logo,

$$K_{d_1} = \begin{bmatrix} 292,7180 & 24,5552 & -466,9545 & 1,5677 \end{bmatrix}.$$

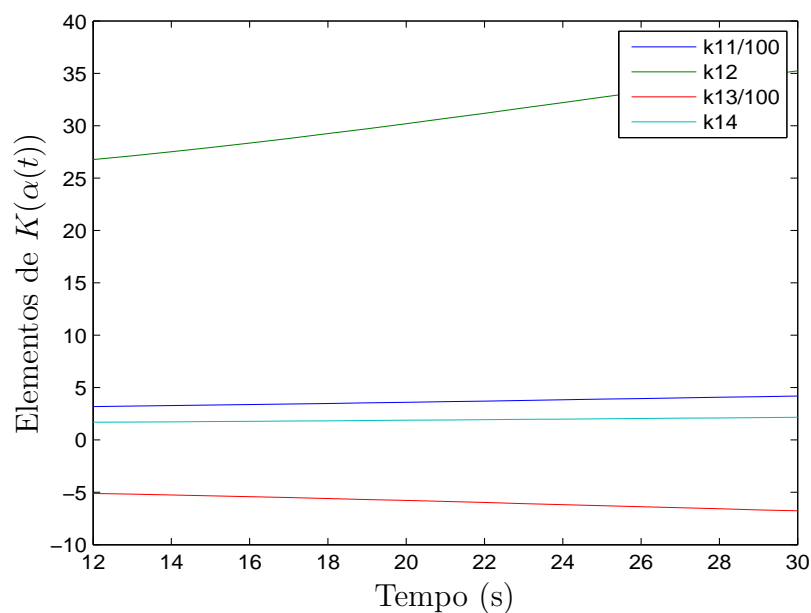
Ainda,

$$K_{d_2} = Z_2 Q^{-T} = \begin{bmatrix} 0,0008 & 0,0683 & -0,0002 & -0,1787 \\ -0,4103 & -0,0728 & 2,3156 & 0,0043 \\ -0,0011 & -0,0014 & 0,0948 & 0,0008 \\ -0,4626 & -0,0756 & 1,8288 & -0,0077 \\ -0,0045 & -0,0010 & 0,0492 & 0,0003 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -0,4103 & -0,0728 & 2,3156 & 0,0043 \\ -0,0011 & -0,0014 & 0,0948 & 0,0008 \\ -0,4626 & -0,0756 & 1,8288 & -0,0077 \\ -0,0045 & -0,0010 & 0,0492 & 0,0003 \end{bmatrix}, \quad (133)$$

logo,

$$K_{d_2} = \begin{bmatrix} 486,0575 & 40,8744 & -787,9186 & 2,4722 \end{bmatrix}.$$

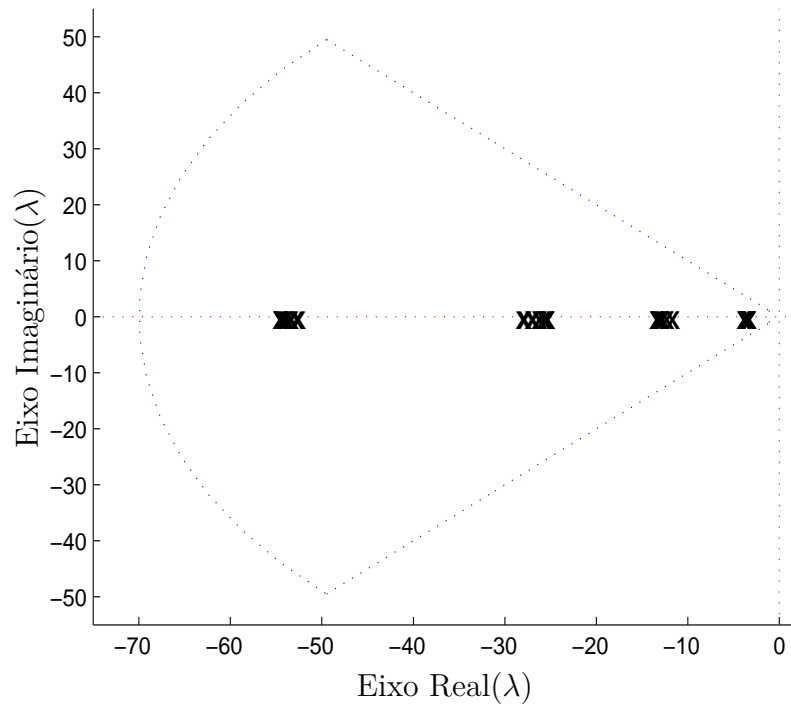
**Figura 15** - Elementos de  $K(\alpha(t))$  em função do tempo.



Fonte: Elaboração do próprio autor

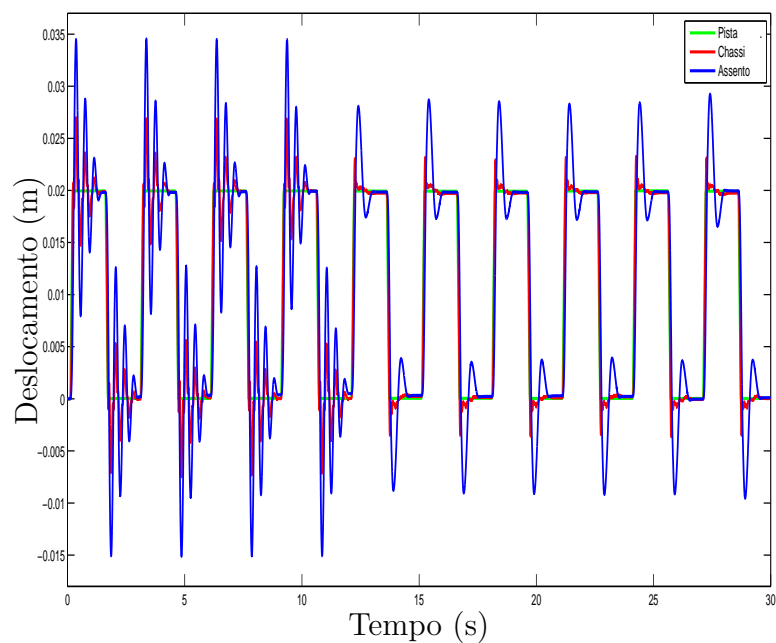
A nuvem dos autovalores do sistema está ilustrada na Figura 16.

**Figura 16** - Localização dos autovalores do sistema.

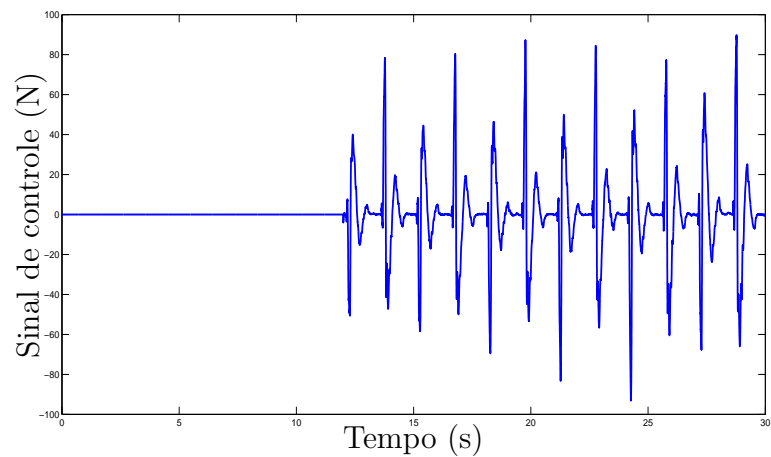


Fonte: Elaboração do próprio autor

**Figura 17** - Resposta transitória prática de malha aberta (0-12s) e de malha fechada (12,01-30s).



Fonte: Elaboração do próprio autor

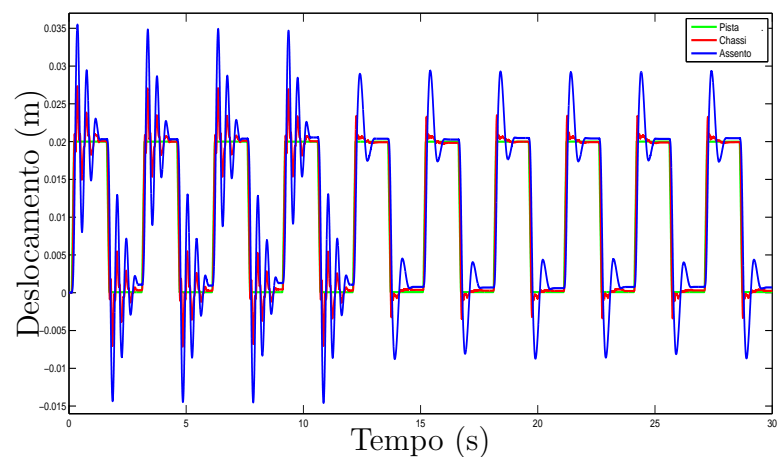
**Figura 18** - Sinal de controle para  $\alpha(t)$  com frequência de  $0,01Hz$ .

Fonte: Elaboração do próprio autor

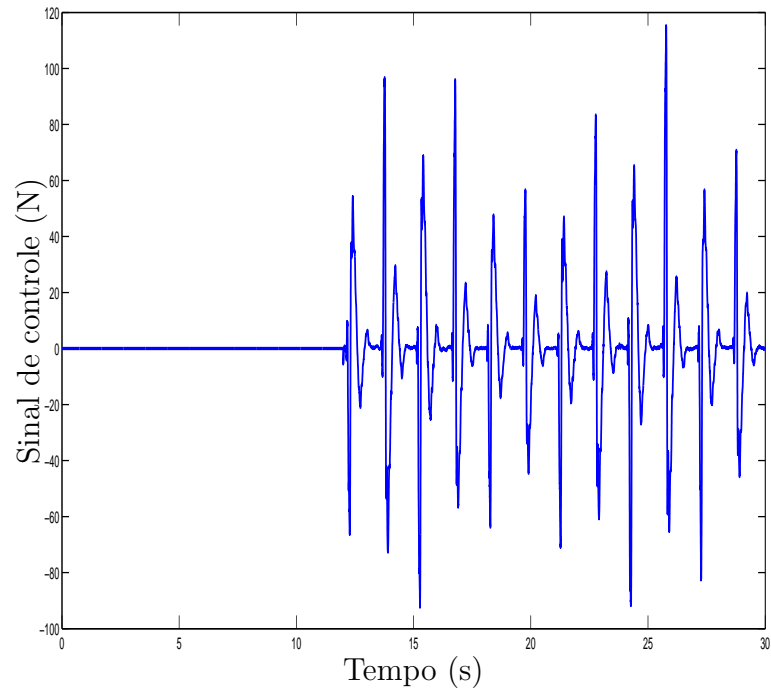
Na Figura 17 nota-se que o sistema atuando em malha fechada garante um bom desempenho ao sistema. Como aconteceu no caso do emprego da realimentação do estados, fazendo uso da restrição de  $\mathcal{D}$ -estabilidade foi possível melhorar o desempenho dinâmico do sistema e mostrou a validade de nossa proposta.

#### **Quarto caso:**

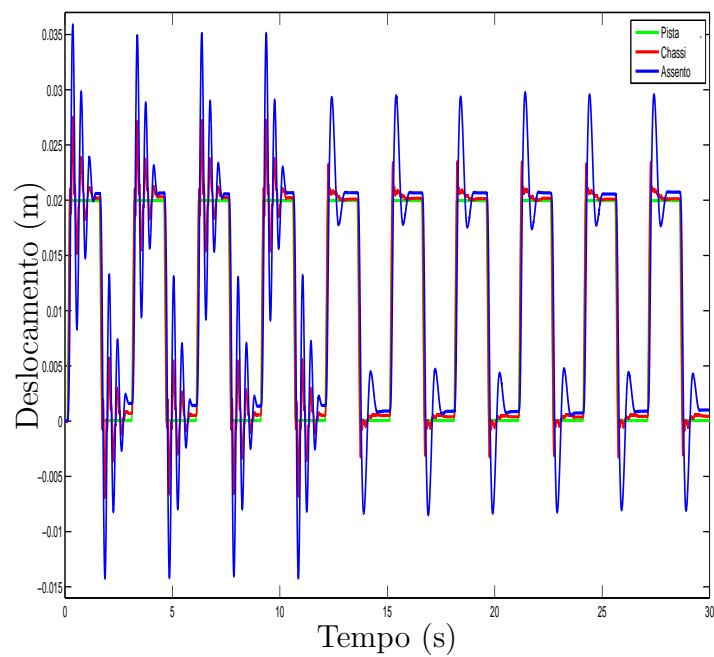
Aplicando a mesma metodologia e restrição de  $\mathcal{D}$ -estabilidade proposta no Terceiro caso, as Figuras 19 e 21 mostram o bom desempenho do sistema para os casos nos quais o parâmetro  $\alpha(t)$  varia com frequência de  $0,1Hz$  e  $1Hz$  respectivamente.

**Figura 19** - Resposta transitória prática de malha aberta (0-12s) e de malha fechada (12,01-30s) para  $\alpha(t)$  com frequência de  $0,1Hz$ .

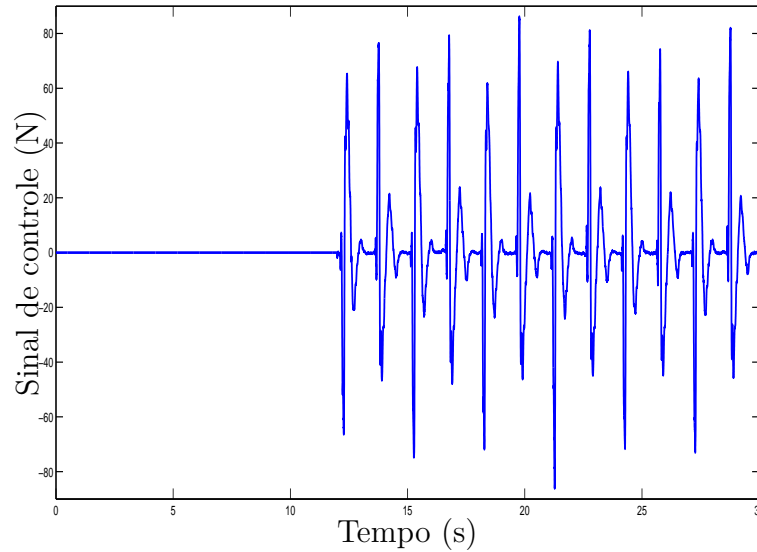
Fonte: Elaboração do próprio autor

**Figura 20** - Sinal de controle para  $\alpha(t)$  com frequência de  $0,1Hz$ .

Fonte: Elaboração do próprio autor

**Figura 21** - Resposta transitória prática de malha aberta (0-12s) e de malha fechada (12,01-30s) para  $\alpha(t)$  com frequência de  $1Hz$ .

Fonte: Elaboração do próprio autor

**Figura 22** - Sinal de controle para  $\alpha(t)$  com frequência de  $1Hz$ .

Fonte: Elaboração do próprio autor

Nas Figuras 20 e 22 mostram-se as respostas do sinal de controle para as diferentes frequências testadas, pode-se notar como a magnitude do valor chega a saturar a saída do amplificador de sinal do sistema de suspensão ativa. Porém, é possível satisfazer requisitos de desempenho para a resposta transitória do sistema.

***Projeto do controlador com condição de estabilidade e incertezas politópicas multiplicativas e aditivas:***

O objetivo é obter uma implementação prática do problema onde os parâmetros incertos, são modelados como (135), metodologia proposta em (LACERDA et al., 20., 2014). Em (HARDY, 2015), apresenta-se uma teoria onde acrescenta-se uma incerteza aditiva ao parâmetro variante no tempo.

Considere um sistema contínuo, controlável, linear e com incertezas descrito da seguinte forma:

$$\dot{x}(t) = A(\alpha(t), \beta, \phi)x(t) + B(\alpha(t), \beta, \phi)u(t), \quad (134)$$

sendo  $A(\alpha(t), \beta, \phi) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  uma matriz que contém  $\alpha(t)$ , parâmetro dependente do tempo e  $\beta, \phi$  as incertezas politópicas. A matriz  $B(\alpha(t), \beta, \phi) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  contém os mesmos parâmetros,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  é a entrada de controle do sistema e  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados. O parâmetro  $\alpha(t)$  é conhecido, enquanto  $\beta$  e  $\phi$  são desconhecidos (modelo de incertezas politópicas, com ou sem falhas estruturais). Uma forma genérica para descrever um parâmetro  $\Gamma$  que contém incertezas multiplicativas e aditivas é dada em (135).



$$\Gamma = (1 + \phi)(\alpha(t) + \beta). \quad (135)$$

No modelo físico do sistema de suspensão ativa existe uma massa de carga útil removível, constituída por duas unidades de peso idênticas, compondo a massa  $M_s$ . Cada unidade pesa 0,4975kg, de tal forma que a massa total corresponde aos 2,45kg informado na Tabela 1. Logo, a massa  $M_s$  pode assumir valores entre 1,455kg (sem as duas unidades de peso) e 2,45kg (com as duas unidades de peso). Sendo assim, a massa  $M_s$  pode ser incerta e pertencer ao intervalo  $1,455 \leq M_s \leq 2,45(\text{kg})$ .

A proposta está baseada em obter o valor mínimo e o máximo das combinações dos parâmetros  $\alpha(t), \beta, \phi$  e empregar as mesmas LMIs propostas no Capítulo 2. Nestas implementações foi usada para o parâmetro  $\alpha(t)$ , uma frequência de  $f = 0,1\text{Hz}$ . Para os parâmetros  $\beta, \phi$  foi considerada uma faixa de variação de 0,7 a 1.

Para realizar o projeto de controle foram considerados os seguintes vértices do polítopo, associados ao mínimo e o máximo da faixa de variação dos parâmetros  $\alpha(t), \beta, \phi$ , que simulam incertezas na massa  $M_s$ :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -756,302 & -6,3025 & 0 & 6,3025 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 900 & 7,5 & -2500 & -12,5 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,8403 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -226,1307 & -1,8844 & 0 & 1,8844 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 900 & 7,5 & -2500 & -12,5 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,2513 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Usando as LMI dos Teoremas 3, 4 e 5 com  $\gamma = 7,7$ ,  $r = 100$  e  $\theta = 60^\circ$ , os ganhos calculados foram:

$$K_1 = Z_1 Q^{-1} = [-1,8870 \quad 18,2838 \quad 0,1756 \quad -5,1898]$$

$$\times \begin{bmatrix} 0,0021 & -0,0181 & -1,2638 \times 10^{-4} & -8,8374 \times 10^{-5} \\ -0,0181 & 0,2202 & -0,003 & -0,0416 \\ -1,2638 \times 10^{-4} & -0,003 & 7,2268 \times 10^{-5} & -0,0016 \\ -8,8374 \times 10^{-5} & -0,0416 & -0,0016 & 0,1387 \end{bmatrix}, \quad (136)$$

logo,

$$K_1 = [-589,7471 \quad 45,8380 \quad -1363,0563 \quad -39,2848].$$

$$K_2 = Z_2 Q^{-1} = [-2,0794 \quad 24,0394 \quad 0,3046 \quad -11,3809]$$

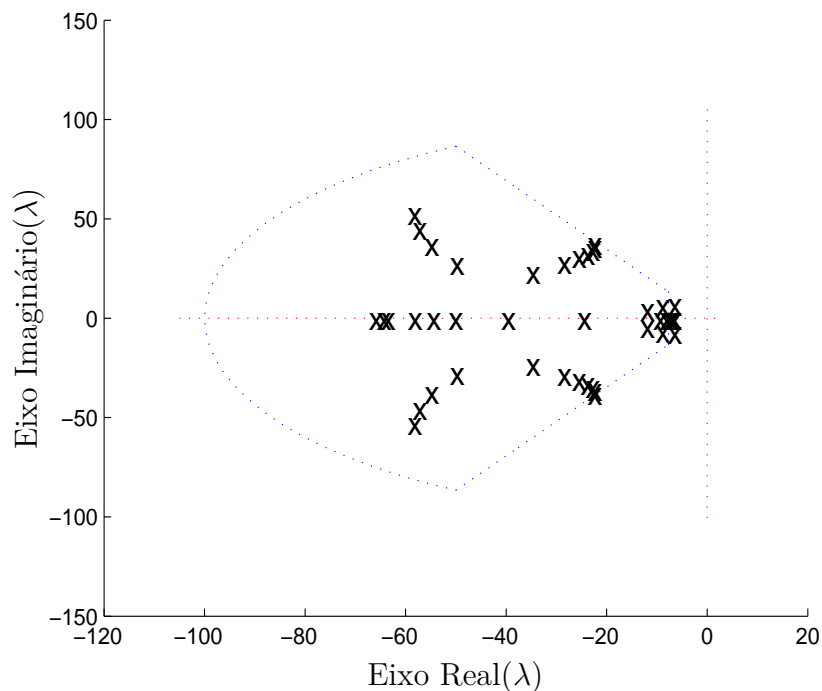
$$\times \begin{bmatrix} 0,0021 & -0,0181 & -1,2638 \times 10^{-4} & -8,8374 \times 10^{-5} \\ -0,0181 & 0,2202 & -0,003 & -0,0416 \\ -1,2638 \times 10^{-4} & -0,003 & 7,2268 \times 10^{-5} & -0,0016 \\ -8,8374 \times 10^{-5} & -0,0416 & -0,0016 & 0,1387 \end{bmatrix}, \quad (137)$$

logo,

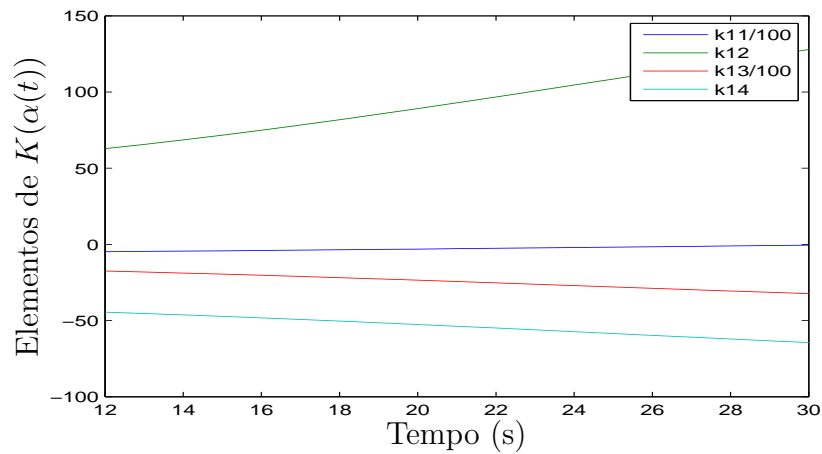
$$K_2 = [229,4082 \quad 171,2047 \quad -4216,1571 \quad -77,6983].$$

A nuvem dos autovalores do sistema está ilustrada na Figura 23, para diversos valores de  $\alpha(t)$ ,  $\beta$  e  $\phi$ .

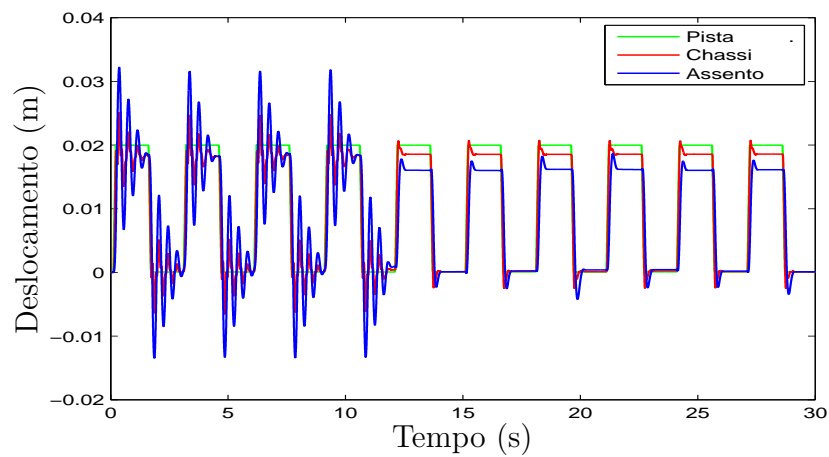
**Figura 23** - Localização da nuvem dos autovalores do sistema.



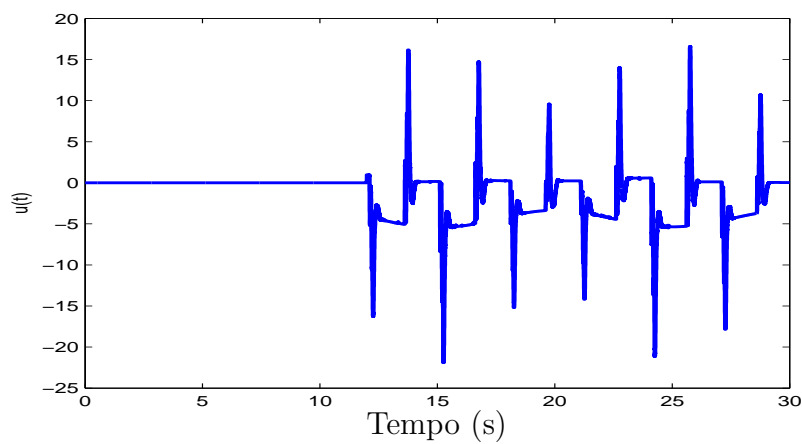
Fonte: Elaboração do próprio autor

**Figura 24** - Elementos de  $K(\alpha(t))$  em função do tempo.

Fonte: Elaboração do próprio autor

**Figura 25** - Resposta transitória prática de malha aberta (0-12s) e de malha fechada (12,01-30s).

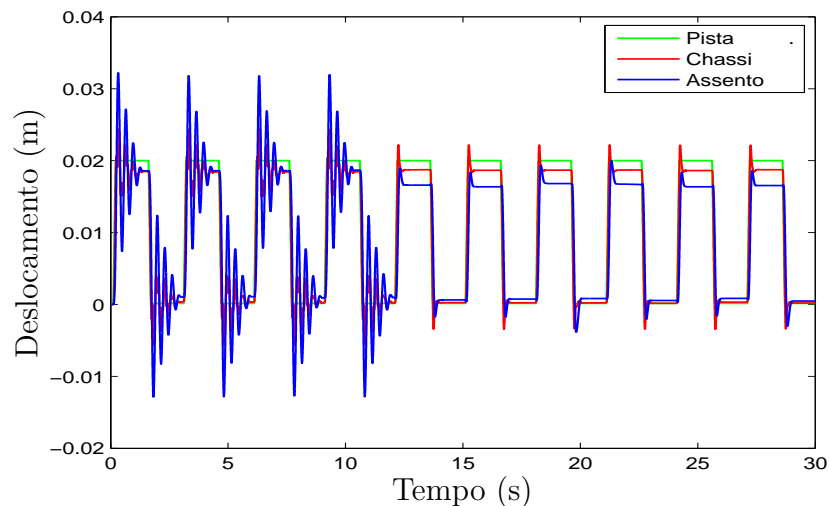
Fonte: Elaboração do próprio autor

**Figura 26** - Sinal de controle para  $\alpha(t)$  com frequência de  $0,1Hz$ .

Fonte: Elaboração do próprio autor

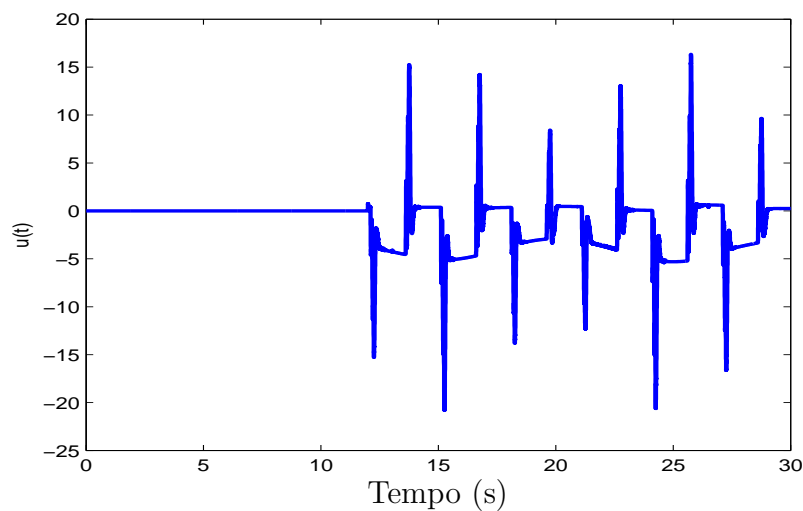
Nas Figuras 27 e 28, mostra-se os resultados da implementação prática tirando a massa removível.

**Figura 27** - Resposta transitória prática de malha aberta (0-12s) e de malha fechada (12,01-30s).



Fonte: Elaboração do próprio autor

**Figura 28** - Sinal de controle para  $\alpha(t)$  com frequência de  $0,1Hz$ .



Fonte: Elaboração do próprio autor

***Comparação com outra metodologia de gain scheduling empregando re-  
alimentação de estados:***

A principal contribuição de nossa proposta é obter resultados mediante a inversão de uma matriz numérica e não literal como em outros trabalhos. Para poder avaliar o alcance da mesma foi implementado a teoria proposta no artigo (MONTAGNER; PERES, 2004) e feito uma comparação com os resultados obtidos fazendo uso dos teoremas propostos no Capítulo 2.

Para realizar o projeto de controle foram considerados os seguintes vértices do politopo dados em (MONTAGNER; PERES, 2004):

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,4886 & 0,1740 \\ 0,8502 & -0,0006 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0,7794 & 0,8577 \\ 0,5147 & -0,0392 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0,5841 \\ 0,0812 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0,2725 \\ 0,7584 \end{bmatrix}.$$

Empregando as LMIs de (MONTAGNER; PERES, 2004) e o parâmetro  $\rho = 1$ , os ganhos calculados foram:

$$K_1 = Z_1 Q^{-1} = \begin{bmatrix} 26,4457 & 1,5173 \end{bmatrix} \times 10^5 \begin{bmatrix} 10,6737 & -9,3709 \\ -9,3709 & 24,2802 \end{bmatrix},$$

logo,

$$K_1 = \begin{bmatrix} -656,7971 & 40,2045 \end{bmatrix}.$$

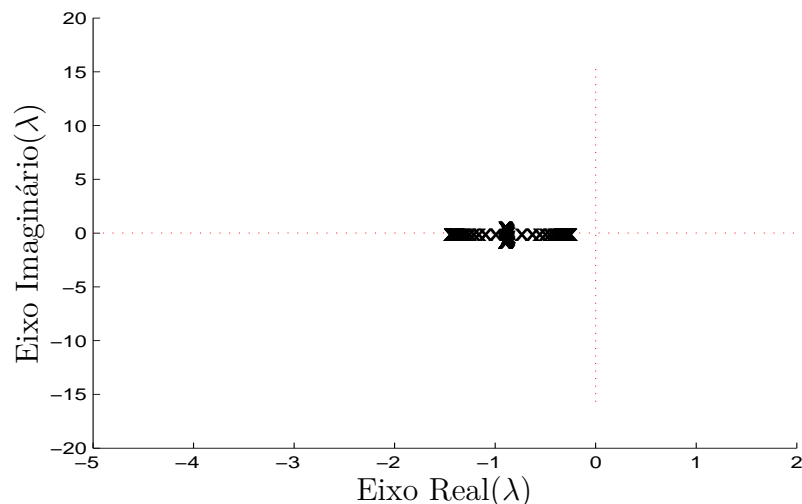
$$K_2 = Z_2 Q^{-1} = \begin{bmatrix} 21,3740 & 9,0744 \end{bmatrix} \times 10^5 \begin{bmatrix} 9,6964 & -9,5912 \\ -9,5912 & 24,4204 \end{bmatrix},$$

logo,

$$K_2 = \begin{bmatrix} 4,2058 & 2,0234 \end{bmatrix}.$$

A nuvem dos autovalores do sistema está ilustrada na Figura 29, para diversos valores de  $0 \leq \alpha(t) \leq 1$ .

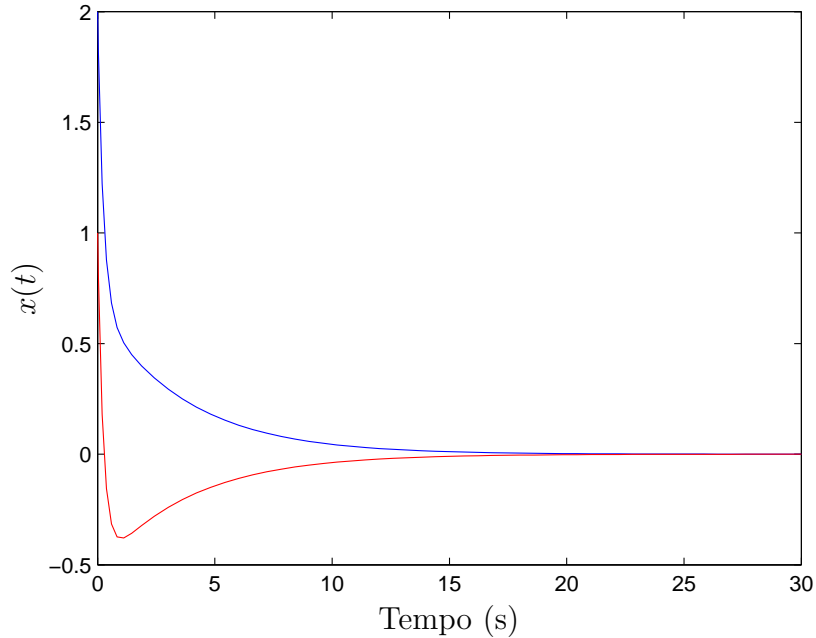
**Figura 29** - Localização da nuvem dos autovalores do sistema.



Fonte: Elaboração do próprio autor

A resposta transitória está mostrada na Figura 30. As condições iniciais testadas são  $x_1(t) = 2$  e  $x_2(t) = 1$ .

**Figura 30** - Resposta transitória dos estados do sistema.



Fonte: Elaboração do próprio autor

Usando as LMIs dos Teoremas 3, 4 e 5 com  $\gamma = 0,3$ ,  $r = 20$  e  $\theta = 35^\circ$ , os ganhos calculados foram:

$$K_1 = Z_1 Q^{-1} = \begin{bmatrix} 17,3171 & 8,3782 \\ 5,9500 & -7,9409 \\ -7,9409 & 16,2535 \end{bmatrix} \times 10^5, \quad (138)$$

logo,

$$K_1 = \begin{bmatrix} 10,3413 & 5,5679 \end{bmatrix}.$$

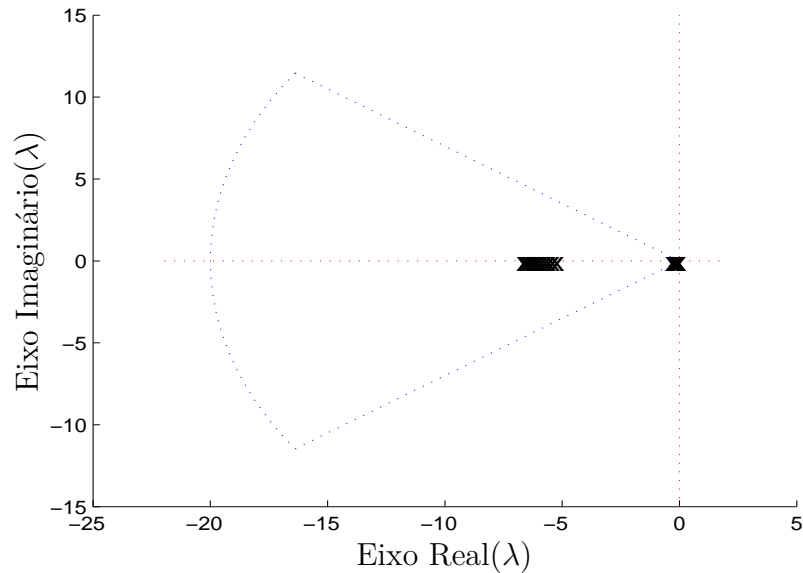
$$K_2 = Z_2 Q^{-1} = \begin{bmatrix} 16,8556 & 15,5273 \\ 5,9500 & -7,9409 \\ -7,9409 & 16,2535 \end{bmatrix} \times 10^5, \quad (139)$$

logo,

$$K_2 = \begin{bmatrix} 11,8055 & 6,7231 \end{bmatrix}.$$

A nuvem dos autovalores do sistema está ilustrada na Figura 31, para diversos valores de  $0 \leq \alpha(t) \leq 1$ .

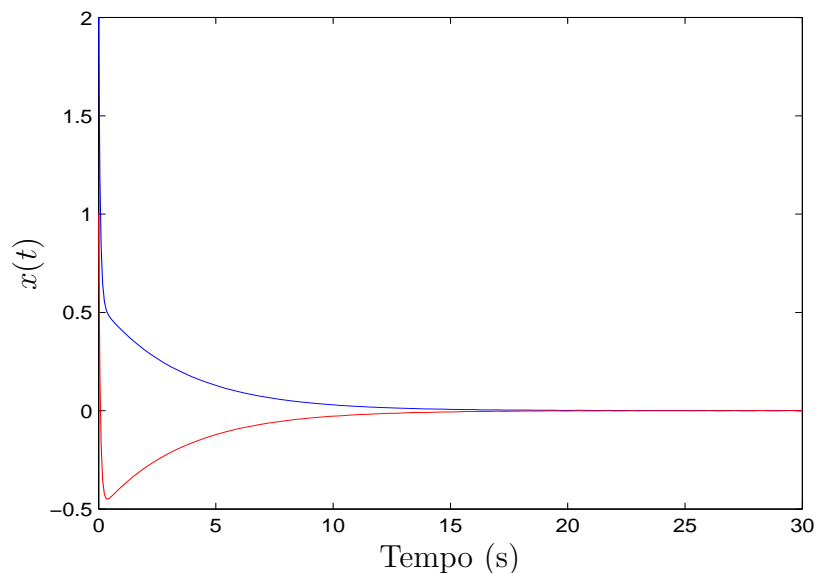
**Figura 31** - Localização da nuvem dos autovalores do sistema.



Fonte: Elaboração do próprio autor

A resposta transitória com esse controlador está mostrada na Figura 32.

**Figura 32** - Resposta transitória dos estados do sistema.



Fonte: Elaboração do próprio autor

Enquanto que o transitório mostrado na Figura 30 (MONTAGNER; PERES, 2004) termina em 23s, na Figura 32 tem-se 18s com o uso da  $\mathcal{D}$ -estabilidade. Essa é uma vantagem da metodologia proposta nessa trabalho.

### 4.1.1 Conclusões parciais

Nesse capítulo testou-se a teoria proposta em capítulos anteriores aplicada em um exemplo prático, demonstrando que as condições obtidas são suficientes para projetar o controlador *gain scheduling* com restrição de  $\mathcal{D}$ -estabilidade usando realimentação de estado ou derivativa. O emprego do Lema de Finsler foi de grande utilidade para garantir a estabilidade do sistema no caso da implementação com realimentação derivativa. A metodologia proposta mostrou bom desempenho ao considerar a frequência de oscilação do parâmetro  $\alpha(t)$  entre  $0,01Hz$  e  $1Hz$ .

A comparação entre as metodologias de *gain scheduling* mostrou que nossa proposta melhorou a resposta transitória dos estados do sistema com respeito aos resultados obtidos empregando (MONTAGNER; PERES, 2004). No mesmo artigo apresenta-se outros exemplos numéricos para os quais não deram factível nossa proposta.

Os resultados obtidos com o novo método prático proposto considerando incertezas aditivas e multiplicativas, provê resultados menos conservadores para o projeto. Foi possível reduzir a dimensão do problema e empregar as mesmas LMIs propostas no Capítulo 2.



## 5 CONCLUSÕES

Neste trabalho se demonstrou que as condições propostas são suficientes para projetar o controlador *gain scheduling* usando realimentação de estado e derivativa via LMIs com restrição de  $\mathcal{D}$ -estabilidade. Projetou-se o controlador *gain scheduling* aplicando o Lema de Finsler, tornando possível obter o valor do controlador sem inverter uma matriz literal (MONTAGNER; PERES, 2004). Com o emprego da restrição de  $\mathcal{D}$ -estabilidade é possível satisfazer requisitos de desempenho para a resposta transitória do sistema, além de obter ganhos implementáveis na prática. Visando avaliar a técnica proposta, variou-se a frequência do parâmetro  $\alpha(t)$ , obtendo, desta forma, resultados satisfatórios em todos os casos. Porém, em alguns casos, o sinal de controle atingiu a saturação do amplificador do sistema de suspensão ativa. A comparação entre as metodologias de *gain scheduling* mostrou que nossa proposta é factível.

Foi proposto uma metodologia para tratar incertezas aditivas e multiplicativas presentes na medição dos parâmetros do sistema. Modelando de forma conveniente os parâmetros medidos e as incertezas (LACERDA et al., 20., 2014), foi possível empregar as LMIs propostas no Capítulo 2, simplificando o abordagem de sistemas LPV com incertezas ou falhas. Os resultados numéricos mostram que as metodologias propostas tem validade e são viáveis na prática, abrindo portas para futuras pesquisas.

### 5.1 SUGESTÕES PARA PESQUISAS FUTURAS

- Projetar o controlador considerando a derivada do parâmetro em função do tempo.
- Sistematizar a proposta considerando incertezas aditivas e multiplicativas.

## 5.2 TRABALHOS ACEITOS

- Projeto de controladores *gain scheduling* usando realimentação derivativa com restrição de  $\mathcal{D}$ -estabilidade.
- Controle *gain scheduling* de um helicóptero 3-DOF usando realimentação de estados.

## REFERÊNCIAS

- ABDELAZIZ, T. Pole assignment by state derivative feedback for single-input linear systems. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part I: Journal Systems Control Engineering*, London, v. 221, n. 7, p. 991 – 1000, 2007.
- ABDELAZIZ, T.; VALASEK, M. Pole-placement for SISO linear systems by state-derivative feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 151, n. 4, p. 377 – 385, 2004.
- ABDELAZIZ, T.; VALASEK, M. Direct algorithm for pole placement by state-derivative feedback for multi-input linear systems-nonsingular case. *Kybernetika*, Prague, v. 41, n. 5, p. 637 – 660, 2005.
- ALIZADEH, F.; HAEBERLY, J. P. A.; OVERTON, M. L. Primal-dual interior-point methods for semidefinite programming: convergence rates, stability and numerical results. *SIAM Journal on Optimization*, Philadelphia, v. 8, n. 3, p. 746–768, 1998.
- APKARIAN, P.; ADAMS, R. Advanced gain-scheduling techniques for uncertain systems. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, Piscataway, v. 6, n. 1, p. 21–32, Jan 1998. ISSN 1063-6536.
- APKARIAN, P.; GAHINET, P.; BECKER, G. Self-scheduled  $\mathcal{H}_\infty$  control of linear parameter-varying systems: a design example. *Automatica*, Kidlington, v. 31, n. 9, p. 1251–1261, 1995.
- BOYD, S.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. *Linear matrix inequalities in systems and control theory*. 2. ed. Philadelphia: SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994. (Studies in Applied Mathematics, 15).
- CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; FARIA, F. A.; ASSUNÇÃO, E. LMI-based digital redesign of linear time-invariant systems with state-derivative feedback. In: IEEE CONTROL APLICATIONS - CCA; INTELLIGENT CONTROL - ISIC, 2009, Saint Petersburg. Proceedings...Saint Petersburg: [s. n.], 2009. p. 745-749.
- CHILALI, M.; GAHINET, P.  $\mathcal{H}_\infty$  design with pole placement constraints: An LMI approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 41, n. 3, p. 358–367, 1996.
- DOYLE, J.; FRANCIS, B.; TANNENBAUM, A. *Feedback control theory*. [S.l.]: Macmillan., 1990. p. 45-59.
- HARDY, L. *Projeto do controlador gain scheduling usando realimentação derivativa via LMI*. 2015. 61 f. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho-UNESP, Ilha Solteira, 2015.

- HARDY, L.; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; OLIVEIRA, D.; SILVA, E. R. P. da. Projeto do controlador gain scheduling usando realimentação derivativa via LMI. Natal: [s.n], 2015.
- LACERDA, M.; TOGNETTI, E.; OLIVEIRA, R.; PERES, P. Filtragem  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas LPV sujeitos a incertezas aditivas e multiplicativas nos parâmetros. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA,. [S.l.], 20., 2014.
- MALVIYA, S.; HOTE, Y. V.; KISHAN, P. K. V.; MALHOTRA, S. Analysis of pole placement problem in control systems using state derivative feedback. In: \_\_\_\_\_. *INTERNATIONAL CONFERENCE COMPUTATIONAL INTELLIGENCE AND INFORMATION TECHNOLOGY-CIIT*, 1., 2011, Pune, 2011. Proceedings... Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 2011. p. 750–754. ISBN 978-3-642-25734-6. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-25734-6\\_31](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-25734-6_31)>.
- MICHIELS, W.; VYHLÍDAL, T.; HUIJBERTS, H.; NIJMEIJER, H. Stabilizability and stability robustness of state derivative feedback controllers. *SIAM Journal on Control and Optimization*, Philadelphia, v. 47, n. 6, p. 3100–3117, 2009.
- MONTAGNER, V. F.; PERES, P. L. D. State feedback gain scheduling for linear systems with time-varying parameters. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 1., 2004. Boston. Conference... Boston: IEEE, 2004. v. 3, n. 1, p. 2004–2009.
- MOZELLI, L. A.; PALHARES, R. M.; AVELLAR, G. S. C. A systematic approach to improve multiple lyapunov function stability and stabilization conditions for fuzzy systems. *Wind Energy*, Chichester, v. 8, n. 1, p. 1–7, 2004.
- OLIVEIRA, D. R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; SOUZA, W. A.; MOREIRA, M. R.; SILVA, J. H. P. Projeto de controle robusto  $\mathcal{H}_\infty$  chaveado: Implementação prática em um sistema de suspensão ativa. In: AUTOMATIC CONTROL, CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 20., 2014. Congreso... Belo Horizonte: SBA, 2014. p. 8. Disponível em: <<http://www.swge.inf.br/CBA2014/anais/PDF/1569934845.pdf>>. Acesso em: 22 set. 2015.
- QUANSER. *Quanser, active suspension: user's manual*. 2. ed. Ontario: Markham, 2009.
- REBERGA, L.; HENRION, D.; BERNUSSOU, J.; VARY, F. *LPV modeling of a turbofan engine*. Acre: IFAC, 2005.
- SATO, M. Gain-scheduled  $\mathcal{H}_\infty$  filters using inexactly measured scheduling parameters. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 2010. Proceedings... [S.l.: s.n.], 2010. p. 3088–3093.
- SCORLETTI, G.; EL GHAOU, L. Improved LMI conditions for gain scheduling and related control problems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Laxenburg, v. 8, p. 845–877, 1998.
- SILVA, E. R. da; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C.; FARIA, F. A.; BUZACHERO, L. F. Less conservative control design for linear systems with polytopic uncertainties via state-derivative feedback. *Mathematical Problems in Engineering*, New York, v. 2012, p. 1–21, 2012.

SKELTON, R. E.; EL, T.; GRIGORIADIS, K. *A unified algebraic approach to control design*. 1. ed. 2&4 Park Square, Milton Park, Abingdon: Bristol: Taylor & Francis, 1997. ISBN 9780748405923.

SOUZA, C. E.; TROFINO, A. Gain-scheduled  $H_2$  controller synthesis for linear parameter varying systems via parameter-dependent Lyapunov functions. *International journal of robust and nonlinear control*, Chichester, v. 2006, n. 16, p. 243–257, 2005.

YU, Z.; CHEN, H.; WOO, P.-Y. Gain scheduled LPV  $\mathcal{H}_\infty$  control based on LMI approach for a robotic manipulator. *Journal of Robotic Systems*, Hoboken, 19, n. 12, p. 585–593, 2002. Disponível em: <[www.interscience.wiley.com](http://www.interscience.wiley.com)>. Acesso em: 18 nov. 2002.