



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

Alisson de Carvalho Reinol

Integrabilidade e Dinâmica Global de Sistemas Diferenciais
Polinomiais Definidos em \mathbb{R}^3 com Superfícies Algébricas
Invariantes de Graus 1 e 2

São José do Rio Preto

2017

Alisson de Carvalho Reinol

**Integrabilidade e Dinâmica Global de Sistemas Diferenciais
Polinomiais Definidos em \mathbb{R}^3 com Superfícies Algébricas
Invariantes de Graus 1 e 2**

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Financiadora:

FAPESP - Proc. 2013/26602-7.

Orientador:

Prof. Dr. Marcelo Messias.

São José do Rio Preto

2017

Reinol, Alisson de Carvalho.

Integrabilidade e dinâmica global de sistemas diferenciais polinomiais definidos em \mathbb{R}^3 com superfícies algébricas invariantes de graus 1 e 2 / Alisson de Carvalho Reinol . -- São José do Rio Preto, 2017
125 f. : il., tabs.

Orientador: Marcelo Messias

Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Teoria dos sistemas dinâmicos . 3. Equações diferenciais ordinárias. 4. Superfícies algébricas . 5. Teoria do caos . I. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. II. Título.

CDU – 517.93

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Alisson de Carvalho Reinol

**Integrabilidade e Dinâmica Global de Sistemas Diferenciais
Polinomiais Definidos em \mathbb{R}^3 com Superfícies Algébricas
Invariantes de Graus 1 e 2**

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Financiadora:

FAPESP - Proc. 2013/26602-7.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Marcelo Messias (Orientador)

UNESP - Presidente Prudente

Prof. Dr. Paulo Ricardo da Silva

UNESP - São José do Rio Preto

Prof. Dr. João Carlos da Rocha Medrado

UFG - Goiânia

Prof^a. Dr^a. Regilene Delazari dos Santos Oliveira

USP - São Carlos

Prof. Dr. Fábio Scalco Dias

UNIFEI - Itajubá

São José do Rio Preto

05 de julho de 2017

*À minha mãe, Conceição,
à minha avó, Maria de Lourdes
e ao meu tio, José Elias, dedico.*

Agradecimentos

É difícil agradecer em poucas palavras a todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho. Portanto, desde já, gostaria de deixar aqui meus sinceros agradecimentos a todos aqueles que estiveram ao meu lado nas horas serenas e apreensivas e que me ajudaram a vencer mais esta etapa.

Dediquei este trabalho à minha mãe, Conceição, à minha avó, Maria de Lourdes, e ao meu tio, José Elias. Embora os dois últimos não estejam mais entre nós, gostaria, também, de agradecê-los pela paciência, pelo incentivo, pelo carinho e por estarem comigo durante minha caminhada. Gostaria de agradecer a toda minha família tios, tias, primos, primas, e à minha bisavó.

Agradeço ao meu orientador, professor Marcelo Messias, por partilhar comigo seus ensinamentos, que levarei pelo resto da vida. Quero expressar minha gratidão pela sua amizade e por fazer parte de várias das minhas conquistas como meu orientador desde a graduação. Agradeço, também, ao professor Jaume Llibre, pela oportunidade de estagiar na Universidade Autônoma de Barcelona (UAB) sob sua orientação.

Gostaria de agradecer a todos os meus professores, desde aqueles da educação básica até os da pós-graduação, pelos ensinamentos e dedicação. A todos eles minha profunda gratidão e respeito.

Agradeço a todos os meus colegas dos Programas de Pós-Graduação em Matemática do IBILCE/UNESP e em Matemática Aplicada e Computacional da FCT/UNESP e aos colegas de outros programas de pós-graduação que conheci durante este período pelos sonhos, expectativas e risos compartilhados.

Gostaria de agradecer à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - FAPESP pelo apoio financeiro, a partir da bolsa de Doutorado (Processo número 2013/26602-7), sem o qual este projeto não seria possível. Aproveito para agradecer também pelas bolsas de Iniciação Científica, Mestrado e BEPE's a mim concedidas e que foram de fundamental importância para a minha formação profissional.

Finalmente, e acima de tudo, agradeço a Deus por me guiar e iluminar durante minha caminhada, dirigindo-me os passos e pensamentos para o alcance de meus objetivos e por ter me permitido vivenciar esta fase de grande aprendizagem. A Nossa Senhora Aparecida, por sua constante intercessão.

*“De tudo ficaram três coisas...
A certeza de que estamos começando...
A certeza de que é preciso continuar...
A certeza de que podemos ser interrompidos antes de terminar...
Façamos da interrupção um caminho novo...
Da queda, um passo de dança...
Do medo, uma escada...
Do sonho, uma ponte...
Da procura, um encontro!”*

FERNANDO SABINO, *O Encontro Marcado*.

Resumo

Neste trabalho, consideramos aspectos algébricos e dinâmicos de alguns problemas envolvendo superfícies algébricas invariantes em sistemas diferenciais polinomiais definidos em \mathbb{R}^3 . Determinamos o número máximo de planos invariantes que um sistema diferencial quadrático pode ter e estudamos a realização e integrabilidade de tais sistemas. Fornecemos a forma normal para sistemas diferenciais com quádricas invariantes e estudamos de forma mais detalhada a dinâmica e integrabilidade de sistemas diferenciais quadráticos com um parabolóide elíptico como superfície algébrica invariante. Por fim, estudamos as consequências dinâmicas ao se perturbar um sistema diferencial, cujo espaço de fase é folheado por superfícies algébricas invariantes. Para tal, consideramos o sistema diferencial quadrático conhecido como sistema Sprott A, que depende de um parâmetro real a e apresenta comportamento caótico mesmo sem ter pontos de equilíbrio, tendo, assim, um *hidden attractor* para valores adequados do parâmetro a . Provamos que, para $a = 0$, o espaço de fase desse sistema é folheado por esferas concêntricas invariantes. Utilizando a Teoria do *Averaging* e o Teorema KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser), provamos que, para $a > 0$ suficientemente pequeno, uma órbita periódica orbitalmente estável emerge de um equilíbrio do tipo zero-Hopf não isolado localizado na origem e que formam-se toros invariantes em torno desta órbita periódica. Concluímos que a ocorrência de tais fatos tem um papel importante na formação do *hidden attractor*.

Palavras-chave: Superfícies algébricas invariantes. Sistemas diferenciais polinomiais. Teoria de Integrabilidade de Darboux. Planos invariantes. Quádricas invariantes. Sistemas caóticos. Teoria do *Averaging*. Teorema KAM.

Abstract

In this work, we consider algebraic and dynamical aspects of some problems involving invariant algebraic surfaces in polynomial differential systems defined in \mathbb{R}^3 . We determine the maximum number of invariant planes that a quadratic differential system can have and we study the realization and integrability of such systems. We provide the normal form for differential systems having an invariant quadric and we study in more detail the dynamics and integrability of quadratic differential systems having an elliptic paraboloid as invariant algebraic surface. Finally, we study the dynamic consequences of perturbing differential system whose phase space is foliated by invariant algebraic surfaces. For this we consider the quadratic differential system known as Sprott A system, which depends on one real parameter a and presents chaotic behavior even without having any equilibrium point, thus having a hidden attractor for suitable values of parameter a . We prove that, for $a = 0$, the phase space of this system is foliated by invariant concentric spheres. By using the Averaging Theory and the KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) Theorem, we prove that, for $a > 0$ sufficiently small, an orbitally stable periodic orbit emerges from a zero-Hopf nonisolated equilibrium point located at the origin and that invariant tori are formed around this periodic orbit. We conclude that the occurrence of these facts has an important role in the formation of the hidden attractor.

Keywords: *Invariant algebraic surfaces. Polynomial differential systems. Darboux Theory of Integrability. Invariant planes. Invariant quadrics. Chaotic systems. Averaging Theory. KAM Theorem.*

Sumário

1	Introdução	1
2	Planos invariantes em sistemas diferenciais quadráticos	6
2.1	Conceitos preliminares	7
2.2	Sistemas diferenciais quadráticos em \mathbb{R}^3 com nove planos invariantes	10
2.3	Tabelas 2.1 – 2.6	18
3	Quádricas invariantes em sistemas diferenciais polinomiais	24
3.1	Formas normais para sistemas diferenciais polinomiais com uma quádrlica invariante	25
3.2	Um exemplo de sistema diferencial com quádrlicas invariantes: O sistema de Chen	39
3.3	Integrabilidade de sistemas diferenciais quadráticos com um parabolóide invariante	43
3.4	Paralelos invariantes e meridianos invariantes sobre o parabolóide invariante	52
3.5	Dinâmica global e bifurcações de uma classe de sistemas diferenciais quadráticos com um parabolóide invariante	60
3.6	Estudo do sistema de Rabinovich com parabolóides invariantes	74
4	Dinâmica e integrabilidade do sistema Sprott A	78
4.1	Sistemas caóticos com <i>hidden attractors</i>	80
4.2	Existência de uma estrutura compacta no sistema Sprott A quando $a = 0$.	81
4.3	Integrabilidade do sistema Sprott A quando $a \neq 0$	85
4.4	Dinâmica do sistema Sprott A quando $a > 0$ suficientemente pequeno . . .	88
4.5	Estudo do sistema Sprott A no infinito	106
5	Conclusões	112
	Referências Bibliográficas	115
	Apêndice A – Compactificação de Poincaré em \mathbb{R}^3	123

Lista de Figuras

3.1	Quádricas não-degeneradas.	27
3.2	Paralelos e meridianos de um parabolóide elíptico.	53
3.3	(a) Dinâmica do campo vetorial \mathcal{X} restrito ao parabolóide invariante $\mathcal{G} = 0$ quando este tem exatamente um paralelo invariante (vermelho) e um meridiano invariante (azul), considerando os valores dos parâmetros do sistema (3.22) de acordo com o Teorema 8 e tomando $\alpha = 1$, $e_3 = -e_0 = 1$ e $d_2 > 0$; e (b) retrato de fase campo vetorial $\mathcal{X} _{\mathcal{G}}$ neste caso.	57
3.4	(a) Dinâmica do campo vetorial \mathcal{X} restrito ao parabolóide invariante $\mathcal{G} = 0$ e (b) retrato de fase do campo vetorial $\mathcal{X} _{\mathcal{G}}$, ambos sob as hipóteses do Teorema 9, com $e_0 = 1$. Neste caso, o paralelo invariante (preto) é um ciclo limite.	58
3.5	Extensão do parabolóide invariante $\mathcal{G} = 0$ do sistema (3.18) até a fronteira \mathbb{S}^2 da bola de Poincaré.	59
3.6	Meridiano invariante do campo vetorial $\mathcal{X} _{\mathcal{G}}$ obtido no Teorema 10.	60
3.7	(a) Retrato de fase do sistema restrito (3.29) e (b) fluxo do sistema (3.28) sobre o parabolóide invariante $\mathcal{G} = 0$, quando $d \neq 0$	62
3.8	Espaço de fase do sistema (3.28) numa vizinhança de p quando p é um ponto de equilíbrio isolado e $\lambda_3 < 0$	62
3.9	Parabolóide invariante $\mathcal{G} = 0$ e curva de equilíbrios γ_1 , a qual é formada por uma curva de centros ou focos fracos (azul) e uma curva de selas (verde) conectadas por um ponto de equilíbrio degenerado.	63
3.10	Posições relativas entre o parabolóide invariante $\mathcal{G} = 0$ e os planos invariantes $z - k = 0$ e retrato de fase do sistema (3.28) restrito aos planos invariantes $z - k = 0$ dependendo do valor de k : (i) $k < -d^2/(a^2 + b^2)$; (ii) $k = -d^2/(a^2 + b^2)$; (iii) $k > -d^2/(a^2 + b^2)$	64
3.11	Parabolóides invariantes e retrato de fase do sistema (3.28) sobre um dos planos invariantes.	65
3.12	(a) Parabolóide de equilíbrios $\mathcal{G} = x^2 + y^2 - z = 0$ e planos invariantes $x - k_1 = 0$, com $k_1 \in \mathbb{R}$, do sistema (3.30) considerando $e = f = 0$ e (b) retrato de fase do sistema (3.31).	66

3.13	(a) Retrato de fase do sistema restrito (3.29) com $d = 0$ e (b) fluxo do sistema (3.28) sobre o parabolóide invariante $\mathcal{G} = 0$ quando o sistema não tem pontos de equilíbrio.	67
3.14	Dinâmica do sistema (3.28) na fronteira \mathbb{S}^2 da bola de Poincaré dependendo do valor dos parâmetros reais a, b e c	69
3.15	Retrato de fase do sistema (3.28) na carta local U_1 dependendo do valor do parâmetros real a	70
3.16	Descrição da bifurcação que ocorre sobre o parabolóide invariante $\mathcal{G} = 0$ do sistema (3.28) quando d tende a zero.	72
3.17	Espaço de fase do sistema (3.28) na carta U_3 da compactificação de Poincaré numa vizinhança da origem de U_3 com $a = 1, b = -0.2, c = 0.5, d = 0, e = -0.5$ e $f = 1$ (caso $af + be + cd \neq 0$ e $d = 0$); e $a = b = d = 0, c = f = 1$ e $e = -1$ (caso $af + be + cd = 0, a = b = d = 0$ e $e \neq 0$ ou $f \neq 0$), respectivamente, com condições iniciais $(0, 0, 1), (0, 0, 2)$ e $(0, 0, 3)$. No segundo caso, note que o plano $fz_1 + ez_2 = 0$ (ou seja, $z_1 - z_2 = 0$, para $e = -1$ e $f = 1$) é invariante pelo fluxo do sistema.	73
3.18	Retrato de fase do sistema (3.36) para os casos (a) $k < -4$, (b) $k = -4$, (c) $-4 < k < 4$, (d) $k = 4$, (e) $k > 4$	76
3.19	Posições relativas entre os parabolóides invariantes $x^2 + y^2 - 4z = k$ e as retas de equilíbrios l_1, l_2 e l_3 para $k < -4, -4 < k < 4$ e $k > 4$, respectivamente. Note que as retas l_1, l_2 e l_3 estão numa posição fixa e o que varia é o parabolóide invariante considerado.	77
4.1	Fluxo do sistema (4.1) restrito às esferas invariantes $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ para (a) $0 < r < 2$, (b) $r = 2$ e (c) $r > 2$	79
4.2	Retrato de fase do sistema (4.1) restrito às esferas invariantes $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ sobre as cartas locais $z > 0$ (acima) e $z < 0$ (abaixo) para $0 < r < 2, r = 2$ e $r > 2$	84
4.3	Órbita do sistema (4.1) com condição inicial sobre a esfera centrada na origem e de raio $r = 0.1$. Aqui, $a = 10^{-4}$. A estrutura de esfera invariante é preservada, exceto numa vizinhança tubular do eixo- z	90
4.4	Comportamento da órbita dada pela Figura 4.3 numa vizinhança tubular do eixo- z . Ela espirala em torno do eixo- z em direção à origem para tempos positivos e negativos.	90

4.5	(a) Órbita periódica do sistema (4.1) para $a = 10^{-4}$ e (b) sua coordenada x em função do tempo t	93
4.6	Toros invariantes em torno da órbita periódica do sistema (4.1) com $a = 10^{-4}$	94
4.7	(a) Órbita do sistema (4.1) com condição inicial sobre um dos toros invariantes do sistema e (b) sua coordenada x em função do tempo t . Note que o movimento da órbita é quase-periódico sobre o toro invariante. Aqui $a = 10^{-4}$	98
4.8	Órbita do sistema (4.1) com condição inicial $(0.04, 0, 0)$ para (a) $a = 0$, (b) $a = 10^{-6}$ e (c) $a = 10^{-2}$. A esfera invariante (a) transforma-se em um toro invariante (b), que persiste conforme o valor de a aumenta (c).	99
4.9	Seção de Poincaré do sistema (4.1) numa vizinhança da órbita periódica para (a) $a = 0.01$, (b) $a = 0.25$ e (c) $a = 0.4$	101
4.10	Ilhas existentes na seção de Poincaré do sistema (4.1) para $a = 0.4$ (Figura 4.9 (c)).	101
4.11	(a) Órbita do sistema (4.1) com condição inicial $(0, 1, 0)$. (b) Estrutura de “maçã” formada pelas órbitas com condições iniciais sobre a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Em ambos os casos, as órbitas tendem para o conjunto limite (vermelho) quando $t \rightarrow \pm\infty$. Aqui, $a = 10^{-4}$	102
4.12	Projeção da órbita do sistema (4.1) com condição inicial $(0, 1, 0)$ (Figura 4.11 (a)) no (a) plano- xy , (b) plano- xz e (c) plano- yz . Note que em (a) e em (c) ocorre uma rotação em torno do eixo- y invertendo o tempo; e em (b) uma rotação em torno do eixo- z preservando o tempo e em torno do eixo- x invertendo o tempo. Aqui, as rotações são de 180° e $a = 10^{-4}$ no sistema (4.1).	103
4.13	Órbita com condição inicial $(0, 5, 0)$ para (a) $a = 10^{-4}$, (b) $a = 10^{-2}$, (c) $a = 0.1$, (d) $a = 0.25$ e (e) $a = 0.4$. O conjunto limite (vermelho) expande-se e evolui para um <i>hidden attractor</i>	104
4.14	Coordenada x em função do tempo t de duas órbitas do sistema (4.1) com condições iniciais $(0, 5, 0)$ (vermelho) e $(0, 5.0001, 0)$ (azul) para $a = 0.4$, mostrando dependência sensível com relação às condições iniciais.	105
4.15	Órbitas do sistema (4.1) com condições iniciais sobre as esferas de raios $r = 10$ (vermelho), $r = 20$ (azul) e $r = 30$ (verde), para $a = 0.4$. Estas órbitas são homoclínicas ao <i>hidden attractor</i> . Note que a estrutura compacta esférica é preservada por continuidade, longe do eixo- z	106

4.16	(a) Órbitas do sistema (4.1), para $a = 0.4$, com condições iniciais sobre um dos toros invariantes (azul) e no <i>hidden attractor</i> (vermelho) e suas projeções (b) no plano- xy e (c) no plano- xz	107
4.17	Dinâmica do sistema (4.1) sobre a fronteira \mathbb{S}^2 da bola de Poincaré (no infinito): grande circunferência de equilíbrios (vermelho) e órbitas heteroclínicas conectando pares destes pontos de equilíbrio.	108
4.18	Retrato de fase do sistema (4.1) nas cartas locais U_1, U_2 e U_3 restritas ao plano invariante $z_3 = 0$	110
4.19	Fluxo do sistema (4.1) numa vizinhança interior da fronteira \mathbb{S}^2 da bola de Poincaré nas cartas locais U_3 e V_3	111
4.20	Dinâmica global do sistema Sprott A quando $a > 0$ pequeno.	111
5.1	Cartas locais $U_i, i = 1, 2, 3$, usadas para desenhar o retrato de fase do sistema (5.1) na esfera de Poincaré \mathbb{S}^2 . As cartas $V_i, i = 1, 2, 3$, são diametralmente opostas a U_i	125

Lista de Tabelas

2.1	Todas as configurações possíveis para o sistema diferencial (2.2) com exatamente nove planos invariantes, levando-se em consideração a multiplicidade destes planos.	18
2.2	Exemplos de sistemas diferenciais quadráticos para as configurações (9), (8,1), (7,2), (7,1,1) e (6,3).	19
2.3	Exemplos de sistemas diferenciais quadráticos para as configurações (6,2,1), (6,1,1,1), (5,3,1), (5,2,2) e (5,2,1,1).	20
2.4	Exemplos de sistemas diferenciais quadráticos para as configurações (4,4,1), (4,3,2), (4,3,1,1), (4,2,2,1) e (4,2,1,1,1).	21
2.5	Exemplos de sistemas diferenciais quadráticos para as configurações (4,1,1,1,1,1), (3,3,3), (3,3,2,1), (3,2,2,2) e (3,2,2,1,1).	22
2.6	Exemplos de sistemas diferenciais quadráticos para as configurações (3,2,1,1,1,1), (2,2,2,1,1,1) e (1,1,1,1,1,1,1,1,1).	23
3.1	Classificação das quádricas não-degeneradas.	26
3.2	Classificação das quádricas degeneradas.	26
3.3	Superfícies algébricas invariantes do sistema (3.9), dependendo da escolha dos parâmetros α , β e γ .	40

Introdução

Seja $\mathbb{K}[x, y, z]$ o anel dos polinômios nas variáveis x , y e z com coeficientes em \mathbb{K} , onde \mathbb{K} é \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Considere o sistema diferencial

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y, z), \\ \dot{y} &= Q(x, y, z), \\ \dot{z} &= R(x, y, z),\end{aligned}\tag{1.1}$$

onde P , Q e R são polinômios relativamente primos em $\mathbb{R}[x, y, z]$ e o ponto denota a derivada em relação à variável independente t , geralmente chamada de *tempo*. Podemos associar naturalmente ao sistema diferencial (1.1) o campo vetorial polinomial em \mathbb{R}^3

$$\mathcal{X} = P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y} + R \frac{\partial}{\partial z}.$$

Dizemos que $m = \max\{\text{grau}(P), \text{grau}(Q), \text{grau}(R)\}$ é o *grau* do sistema diferencial (1.1) ou do campo vetorial \mathcal{X} , onde $\text{grau}(P)$, $\text{grau}(Q)$, $\text{grau}(R)$ são os graus dos polinômios P , Q e R , respectivamente. Se $m = 1, 2$ ou 3 , então o sistema (1.1) é chamado de *linear*, *quadrático* ou *cúbico*, respectivamente.

Além de sua importância teórica, sistemas do tipo (1.1) frequentemente aparecem na modelagem matemática de fenômenos naturais provenientes da Física, Química, Biologia, Engenharias e outras ciências. Alguns exemplos de aplicações são dados em [23, 76, 86] e nas referências neles contidas.

Em geral, encontrar as soluções do sistema (1.1) pode ser uma tarefa muito difícil. Porém, é possível obter informações importantes sobre o comportamento dinâmico destas soluções mesmo sem resolver o sistema. Deste modo, muitos livros e artigos têm sido publicados com o objetivo de descrever esse comportamento. Porém, a dinâmica deste tipo de sistema ainda está longe de ser completamente compreendida, mesmo no caso

quadrático. De fato, quando $m \geq 2$, a dinâmica do sistema (1.1) é, em geral, bem difícil de ser estudada, devido à existência de pontos de equilíbrio degenerados, órbitas periódicas e quase-periódicas, órbitas homoclínicas e heteroclínicas, toros invariantes, atratores estranhos ou caóticos, entre outros, veja, por exemplo, [35, 57, 76, 85].

Uma das estratégias utilizadas para estudar a dinâmica do sistema (1.1) é determinar superfícies algébricas mergulhadas em \mathbb{R}^3 que sejam invariantes pelo fluxo do sistema. A estas superfícies chamamos *superfícies algébricas invariantes*, cuja definição é a seguinte:

Definição 1 (Superfície algébrica invariante) *Seja $f = f(x, y, z)$ um polinômio não-constante em $\mathbb{C}[x, y, z]$. A superfície $f = 0$ é uma superfície algébrica invariante do sistema (1.1) se, para algum polinômio $K = K(x, y, z)$ em $\mathbb{C}[x, y, z]$, tivermos*

$$\mathcal{X}(f) = P \frac{\partial f}{\partial x} + Q \frac{\partial f}{\partial y} + R \frac{\partial f}{\partial z} = K f. \quad (1.2)$$

Neste caso, dizemos que f é um polinômio de Darboux e K é o cofator da superfície algébrica invariante $f = 0$. Se m é o grau do sistema (1.1), então o grau do cofator K é no máximo $m - 1$.

Se f é um polinômio irreduzível em $\mathbb{C}[x, y, z]$, dizemos que $f = 0$ é uma *superfície algébrica invariante irreduzível*. Quando f é um polinômio real de grau 1 ou 2, a superfície $f = 0$ é um *plano* ou uma *quádrica*, respectivamente, em \mathbb{R}^3 . Segue da definição que, se uma órbita do sistema (1.1) tem um ponto sobre a superfície algébrica invariante $f = 0$, então a órbita inteira está contida nesta superfície. Por isso, dizemos que $f = 0$ é invariante pelo fluxo do sistema (1.1).

O uso mais simples de superfícies algébricas invariantes é separar o espaço de fase do sistema (1.1) em partes invariantes, isto é, em partes cujas órbitas ficam inteiramente contidas nelas. Além disso, as superfícies algébricas invariantes permitem controlar melhor regiões interessantes do espaço de fase do sistema diferencial. Por exemplo, em [20] os autores utilizaram superfícies algébricas invariantes para fornecer uma região limitada contendo o atrator de Lorenz.

A existência de superfícies algébricas invariantes ajuda bastante no estudo da dinâmica de sistemas diferenciais com comportamento complicado, como foi feito para os sistemas de Rikitake em [39], de Chen em [40], de Lorenz em [42] e de Rabinovich em [43], pois permite a redução da dimensão do espaço de fase, uma vez que o fluxo de um sistema diferencial em \mathbb{R}^3 restrito a uma superfície algébrica invariante é bidimensional.

De modo geral, há duas abordagens quando trabalhamos com superfícies algébricas invariantes. Uma delas é, dado um sistema diferencial da forma (1.1), encontrar todas as superfícies algébricas invariantes que este sistema possui. É o que foi feito, por exemplo, em [50] para os sistemas de Chen e Lü, em [54] para o sistema de Lorenz e em [87] para o sistema de Rabinovich. Trata-se de um problema algébrico que envolve a resolução de equações diferenciais parciais provenientes da definição de superfícies algébricas invariantes (equação (1.2)). A outra é determinar os sistemas diferenciais que possuem uma dada superfície (ou um conjunto de superfícies) invariante pelo fluxo do sistema. Foi o que os autores fizeram, por exemplo, em [45] ao fornecer a forma normal de todos os sistemas diferenciais polinomiais em \mathbb{R}^3 que possuem uma quádrica como superfície algébrica invariante (um estudo análogo foi feito em [44] para sistemas diferenciais em \mathbb{R}^2 com uma cônica invariante). A esta abordagem chamamos *problema inverso de equações diferenciais ordinárias*. O conceito de problema inverso foi introduzido por Galiullin [19] e consiste em encontrar o sistema diferencial mais geral satisfazendo um determinado conjunto de propriedades. Até onde sabemos, Erugin [18] foi o primeiro a estudar um problema inverso nesse sentido. Mais recentemente, em [48] os autores obtiveram a forma normal de todos os sistemas diferenciais em \mathbb{R}^n que possuem um dado conjunto de hipersuperfícies invariantes pelo fluxo do sistema (Teorema 1.3.1). Uma versão simplificada deste resultado é apresentada no Capítulo 3 deste trabalho (Teorema 2).

Na Definição 1, permitimos que a superfície algébrica invariante $f = 0$ seja complexa mesmo no caso em que o sistema (1.1) é real. Isto se deve ao fato de que, algumas vezes, a existência de integrais primeiras reais pode ser obtida a partir da existência de superfícies algébricas invariantes complexas. Integrais primeiras são funções analíticas não-constantas que são constantes sobre todas as soluções $(x(t), y(t), z(t))$ do sistema (1.1). Mais precisamente:

Definição 2 (Integral primeira) *Uma integral primeira do sistema (1.1) em um subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^3$ é uma função analítica não-constante $H : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\mathcal{X}(H) = P \frac{\partial H}{\partial x} + Q \frac{\partial H}{\partial y} + R \frac{\partial H}{\partial z} \equiv 0 \quad \text{em } U.$$

Se H pode ser escrita da forma $H = f_1^{\alpha_1} \cdots f_r^{\alpha_r} \exp(g/h)$, onde $f_1, \dots, f_r, g, h \in \mathbb{C}[x, y, z]$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{C}$, então H é dita integral primeira de Darboux. Se H for um polinômio, então H é dita integral primeira polinomial. Se H for uma função racional, então H é dita integral primeira racional.

Note que, se $K \equiv 0$ na equação (1.2) da Definição 1, então f é uma integral primeira polinomial do sistema (1.1). Em \mathbb{R}^3 , quando um sistema diferencial tem duas integrais primeiras H_1 e H_2 funcionalmente independentes, dizemos que ele é *integrável*. Um sistema diferencial ser integrável significa que seu espaço de fase pode ser completamente determinado, embora esta não seja uma tarefa simples, mesmo neste caso.

O estudo apresentado aqui está no contexto da Teoria de Integrabilidade de Darboux. Este tipo de integrabilidade fornece uma ligação entre a integrabilidade de sistemas diferenciais polinomiais e a existências de superfícies algébricas invariantes. Mais detalhes sobre esta teoria no caso planar podem ser encontrados no Capítulo 2 de [8], no Capítulo 8 de [17] e em [37]. Porém, os resultados obtidos em \mathbb{R}^2 podem ser naturalmente estendidos para \mathbb{R}^n e \mathbb{C}^n , conforme foi feito em [29, 53, 55, 56].

Este trabalho está organizado da seguinte forma.

No Capítulo 2, estudamos a realização de sistemas diferenciais quadráticos com nove planos como superfícies algébricas invariantes, levando-se em consideração a multiplicidade algébrica destes planos e sem considerar o plano no infinito, que é o número máximo de planos invariantes que este tipo de sistema pode ter. Mostramos que existem trinta configurações possíveis para estes planos, sendo, destas, pelo menos vinte e três realizáveis. É fornecido um exemplo de sistema diferencial quadrático para cada um dos casos realizáveis e, por fim, mostramos quais, dentre todas as configurações possíveis, possuem uma integral primeira construída unicamente utilizando a equação dos planos.

No Capítulo 3, determinamos as formas normais de sistemas diferenciais polinomiais de grau arbitrário com uma quádriga como superfícies algébrica invariante. Como um exemplo, utilizamos o fato do sistema de Chen apresentar este tipo de superfície algébrica invariante para escolhas adequadas dos parâmetros e mostramos que, nestes casos, ele é equivalente às formas normais apresentadas anteriormente. Em seguida, estudamos a integrabilidade de sistemas diferenciais quadráticos que tem como superfície algébrica invariante um parabolóide elíptico. Neste caso, verificamos sob quais condições sobre os parâmetros o sistema possui integrais primeiras, fatores exponenciais, invariantes de Darboux e multiplicadores de Jacobi inverso. Além disso, caracterizamos todas as configurações possíveis de paralelos e meridianos invariantes sobre o parabolóide invariante e estudamos a dinâmica global de uma classe de sistemas diferenciais quadráticos com um parabolóide invariante. Por fim, consideramos o caso em que o sistema de Rabinovich tem um parabolóide invariante e fazemos um estudo detalhado da dinâmica deste sistema

restrito a esta superfície.

No Capítulo 4, estudamos as consequências dinâmicas no espaço de fase de um sistema diferencial folheado por superfícies algébricas invariantes quando tais superfícies deixam de ser invariantes pelo fluxo do sistema. Para tal, consideramos o sistema diferencial

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x - yz, \\ \dot{z} &= y^2 - a,\end{aligned}\tag{1.3}$$

onde $a \in \mathbb{R}$. Em [75], Sprott mostrou que o sistema (1.3) apresenta comportamento caótico mesmo sem ter pontos de equilíbrio e o chamou de caso A. Por este motivo, este sistema ficou conhecido como *sistema Sprott A*. Mostramos que, para $a = 0$, o eixo- z é uma reta de equilíbrios do sistema e que, devido a existência de uma integral primeira polinomial, o seu espaço de fase é folheado pelas esferas invariantes $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, com $r > 0$, que são formadas por um conjunto de infinitas órbitas heteroclínicas do tipo polo sul - polo norte. Além disso, fazemos um estudo detalhado da dinâmica e integrabilidade do sistema (1.3) para $a > 0$ pequeno, ou seja, quando as esferas não são mais invariantes pelo fluxo do sistema e as órbitas heteroclínicas são “destruídas”. Provamos que, neste caso, o sistema Sprott A não possui superfícies algébricas invariantes nem integrais primeiras polinomiais. Utilizando a Teoria do *Averaging* e o Teorema KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser), provamos que uma órbita periódica orbitalmente estável emerge de um equilíbrio do tipo zero-Hopf não isolado localizado na origem e que, em torno dela, forma-se uma sequência encaixante de toros invariantes, sendo que o mais externo deles é englobado por uma região “turbulenta” de atração/repulsão que conduz a uma estrutura homoclínica das órbitas no espaço de fase do sistema. Para valores adequados do parâmetro a , observa-se a ocorrência de comportamento caótico no sistema Sprott A e a existência de um *hidden attractor* dentro dessa região, que coexiste com os toros invariantes. Por fim, apresentamos uma análise global das soluções do sistema (1.3), incluindo sua dinâmica no infinito via compactificação de Poincaré.

Algumas considerações finais são feitas no Capítulo 5.

Planos invariantes em sistemas diferenciais quadráticos

Considere o sistema diferencial polinomial

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y, z), \\ \dot{y} &= Q(x, y, z), \\ \dot{z} &= R(x, y, z).\end{aligned}\tag{2.1}$$

Neste capítulo, vamos considerar o caso em que o sistema (2.1) é quadrático. Assim, podemos escrevê-lo da forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 x^2 + a_5 y^2 + a_6 z^2 + a_7 xy + a_8 xz + a_9 yz, \\ \dot{y} &= b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4 x^2 + b_5 y^2 + b_6 z^2 + b_7 xy + b_8 xz + b_9 yz, \\ \dot{z} &= c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 z + c_4 x^2 + c_5 y^2 + c_6 z^2 + c_7 xy + c_8 xz + c_9 yz,\end{aligned}\tag{2.2}$$

onde $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$, para $i = 0, 1, \dots, 9$. Conforme vimos no Capítulo 1, o sistema (2.2) pode ser naturalmente associado ao campo vetorial quadrático em \mathbb{R}^3

$$\mathcal{X} = P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y} + R \frac{\partial}{\partial z}.$$

O tipo mais simples de superfície algébrica invariante que o sistema (2.2) pode ter são planos. Neste capítulo, obtemos que o número máximo de planos invariantes que o sistema (2.2) pode ter, levando-se em consideração a multiplicidade algébrica destes planos e sem considerar o plano no infinito, é nove. Provamos que, quando o sistema (2.2) tem nove planos invariantes, existem trinta configurações possíveis para estes planos, das quais pelos menos vinte e três são realizáveis. Fornecemos um exemplo de sistema diferencial quadrático para cada uma dessas vinte e três configurações realizáveis. Por fim,

mostramos que, dentre as trinta configurações possíveis, aquelas com cinco ou mais planos invariantes distintos possuem uma integral primeira construída unicamente utilizando a equação destes planos.

Antes de enunciar e provar os resultados principais deste capítulo, precisaremos dos conceitos preliminares que estão na próxima seção.

2.1 Conceitos preliminares

A noção de polinômio extático aparece no trabalho de Lagutinskii, veja [15] e as referências nele contidas, e foi usada como definida em [63] em diferentes trabalhos, como, por exemplo, em [9, 38, 47, 49]. Aqui, a definição de polinômio extático e suas principais propriedades tem um papel importante na prova de um dos principais resultados deste capítulo, o Teorema 1.

Definição 3 (Polinômio extático) *Sejam \mathcal{X} o campo vetorial associado ao sistema diferencial (2.1), W um subespaço \mathbb{R} -vetorial de $\mathbb{R}[x, y, z]$ tal que $\dim(W) = N$ e $\{v_1, \dots, v_N\}$ uma base de W . O polinômio extático de \mathcal{X} associado a W é o polinômio*

$$\xi_W(\mathcal{X}) = \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_N \\ \mathcal{X}(v_1) & \mathcal{X}(v_2) & \dots & \mathcal{X}(v_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{X}^{N-1}(v_1) & \mathcal{X}^{N-1}(v_2) & \dots & \mathcal{X}^{N-1}(v_N) \end{pmatrix},$$

onde $\mathcal{X}(v_i) = \langle (P, Q, R), \nabla v_i \rangle$ e $\mathcal{X}^{k+1}(v_i) = \mathcal{X}(\mathcal{X}^k(v_i))$, para $k = 1, \dots, N - 2$. Se $W = \mathbb{R}_m[x, y, z]$, onde $\mathbb{R}_m[x, y, z]$ é o subespaço \mathbb{R} -vetorial dos polinômios em $\mathbb{R}[x, y, z]$ de grau no máximo m , dizemos que $\xi_W(\mathcal{X})$ é o m -ésimo polinômio extático de \mathcal{X} , que denotamos por $\xi_W^m(\mathcal{X})$.

Note que a dimensão de $\mathbb{R}_m[x, y, z]$ é $N = \binom{m+3}{3}$. Devido às propriedades de derivação e do determinante, a definição do polinômio extático $\xi_W(\mathcal{X})$ não depende da escolha da base de W , uma vez que para diferentes bases o polinômio extático difere por uma constante não-nula. O conceito de polinômio extático é importante para detectar quando uma superfície $f = 0$, com f pertencendo a um subespaço \mathbb{R} -vetorial finito, é invariante pelo fluxo do sistema diferencial (2.1), como veremos no próximo resultado.

Além disso, utilizando este conceito, podemos definir a multiplicidade (algébrica) de uma superfície algébrica invariante.

Proposição 1 *Seja W um subespaço \mathbb{R} -vetorial finito de $\mathbb{R}[x, y, z]$, com $\dim(W) > 1$. Dado $f \in W$, se $f = 0$ é uma superfície algébrica invariante do sistema diferencial (2.1), então f é um fator do polinômio extático $\xi_W(\mathcal{X})$.*

Prova. Seja $f = 0$ uma superfície algébrica invariante do sistema (2.1), tal que $f \in W$. Como a definição do polinômio extático $\xi_W(\mathcal{X})$ não depende da escolha da base de W , considere a base $\{f, v_2, \dots, v_N\}$ de W . Neste caso, temos que

$$\xi_W(\mathcal{X}) = \det \begin{pmatrix} f & v_2 & \dots & v_N \\ \mathcal{X}(f) & \mathcal{X}(v_2) & \dots & \mathcal{X}(v_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{X}^{N-1}(f) & \mathcal{X}^{N-1}(v_2) & \dots & \mathcal{X}^{N-1}(v_N) \end{pmatrix},$$

onde $\mathcal{X}(f) = Kf$, $\mathcal{X}^2(f) = (\mathcal{X}(K) + K^2)f, \dots$, $\mathcal{X}^{N-1}(f) = (\text{polinômio})f$. Então f é um fator de $\xi_W(\mathcal{X})$. \square

Este resultado também está provado em [47] e uma prova para \mathbb{C}^n pode ser encontrada em [38]. Note que não vale a recíproca da Proposição 1, ou seja, se f é um fator do polinômio extático $\xi_W(\mathcal{X})$, com $f \in W$, então $f = 0$ não é necessariamente uma superfície algébrica do sistema diferencial (2.1). De fato, seja

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2\alpha xy + \beta xz, \\ \dot{y} &= 2\alpha y^2, \\ \dot{z} &= \alpha xz, \end{aligned} \tag{2.3}$$

com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\alpha\beta \neq 0$. Supondo $W = \mathbb{R}_1[x, y, z]$ e considerando a base $\{1, x, y, z\}$, temos que

$$\xi_W^1(\mathcal{X}) = -8\alpha^4\beta^2x^2y^3z^3(x-y).$$

Logo, $f = x - y$ é um fator do polinômio extático $\xi_W^1(\mathcal{X})$, com $f \in W$. Porém, pode-se verificar que $f = 0$ não é uma superfície algébrica invariante do sistema (2.3).

Pela Proposição 1, temos que se $f = 0$ é um plano invariante do campo vetorial \mathcal{X} , então o polinômio f é um fator do polinômio extático $\xi_W^1(\mathcal{X})$, já que $f \in \mathbb{R}_1[x, y, z]$.

A seguir, definimos o conceito de multiplicidade (algébrica) de uma superfície algébrica invariante, conforme feito em [9].

Definição 4 (Multiplicidade algébrica) *Seja $f(x, y, z) = 0$ uma superfície algébrica invariante irredutível de grau m do sistema diferencial (2.1). Dizemos que $f = 0$ tem multiplicidade (algébrica) k se $\xi_W^m(\mathcal{X}) \neq 0$ e k é o maior inteiro positivo tal que f^k divide $\xi_W^m(\mathcal{X})$. Se $\xi_W^m(\mathcal{X}) \equiv 0$, dizemos que f tem multiplicidade (algébrica) indefinida.*

Em particular, se $f = 0$ é um plano invariante de multiplicidade k do sistema diferencial (2.1), então f^k deve ser um fator do polinômio extático $\xi_W^1(\mathcal{X})$, com $\xi_W^1(\mathcal{X}) \neq 0$. Em [9] são dadas as diferentes interpretações de multiplicidade para curvas algébricas invariantes em \mathbb{R}^2 , mas estes resultados podem ser naturalmente estendidos para dimensões maiores e, em particular, para superfícies algébricas invariantes em \mathbb{R}^3 . Veja também [53, 56].

Observe que a multiplicidade (algébrica) de uma superfície algébrica invariante não interfere na dinâmica do sistema diferencial, já que na prática o que importa do ponto de vista dinâmico é o número de superfícies algébricas invariantes distintas que esse sistema possui. Porém, se um sistema diferencial tem uma superfície algébrica invariante de multiplicidade k , uma perturbação deste sistema pode resultar em k superfícies algébricas invariantes distintas. Para exemplificar, considere o sistema diferencial quadrático

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(x, y, z), \\ \dot{y} &= Q(x, y, z), \\ \dot{z} &= -z^2, \end{aligned} \tag{2.4}$$

onde P e Q são polinômios de grau menor ou igual a 2 em $\mathbb{R}[x, y, z]$. Note que o plano $f = z = 0$ é uma superfície algébrica invariante do sistema (2.4) de multiplicidade 2. Dado $\varepsilon > 0$, se perturbamos o sistema (2.4) com o termo ε^2 , então $\dot{z} = -z^2 + \varepsilon^2 = (z + \varepsilon)(-z + \varepsilon)$ e, a partir do plano invariante $f = z = 0$ de multiplicidade 2, obtemos dois planos invariantes paralelos distintos. Analogamente, se perturbamos o sistema (2.4) com o termo $\varepsilon^2 x^2$, então $\dot{z} = -z^2 + \varepsilon^2 x^2 = (z + \varepsilon x)(-z + \varepsilon x)$ e, a partir do plano invariante $f = z = 0$ de multiplicidade 2, obtemos dois planos invariantes concorrentes.

Neste capítulo, consideramos sistema diferenciais quadráticos com nove planos invariantes, que é o número máximo de planos invariantes que este tipo de sistema pode ter, levando-se em consideração a multiplicidade destes planos. Neste caso, dada uma

perturbação de tais sistemas, até nove planos invariantes distintos podem aparecer em seu espaço de fase.

2.2 Sistemas diferenciais quadráticos em \mathbb{R}^3 com nove planos invariantes

Começamos esta seção com um resultado que fornece o número máximo de planos invariantes que o sistema diferencial (2.2) pode ter, levando-se em consideração a multiplicidade destes planos e sem considerar o plano no infinito. Além disso, são dados o número máximo de planos invariantes paralelos distintos e o número máximo de planos invariantes distintos passando pelo mesmo ponto. Uma prova deste resultado em \mathbb{C}^n para sistemas diferenciais de grau $m \geq 2$ pode ser encontrada em [38].

Proposição 2 *Assuma que o sistema diferencial (2.2) tem um número finito de planos invariantes. Então, valem as seguintes afirmações.*

- (a) *O número de planos invariantes do sistema (2.2), levando-se em consideração a multiplicidade destes planos, é no máximo nove.*
- (b) *O número de planos invariantes paralelos distintos do sistema (2.2) é no máximo dois.*
- (c) *O número de planos invariantes distintos do sistema (2.2) passando pelo mesmo ponto é no máximo seis.*

Além disso, todas estas cotas superiores são atingidas.

Prova. Sejam $f_i = 0$ planos invariantes de multiplicidade n_i do sistema (2.2), para $i = 1, \dots, k$. Note que $f_i \in \mathbb{R}_1[x, y, z]$ para cada $i = 1, \dots, k$. Então, pela definição de multiplicidade algébrica, $f_i^{n_i}$ são fatores do polinômio extático $\xi_W^1(\mathcal{X})$. Considere a base $\{1, x, y, z\}$ do subespaço \mathbb{R} -vetorial $\mathbb{R}_1[x, y, z]$. O grau máximo dos polinômios $\mathcal{X}(v)$, $\mathcal{X}^2(v)$ e $\mathcal{X}^3(v)$, onde $v \in \{1, x, y, z\}$, é 2, 3 e 4, respectivamente. Pela definição de determinante e das propriedades das operações com polinômios, segue que o grau máximo do polinômio $\xi_W^1(\mathcal{X})$ é 9. Logo, podemos fatorar o polinômio extático $\xi_W^1(\mathcal{X})$ em fatores da forma $f_1^{n_1} \cdots f_k^{n_k}$ tal que $n_1 + \dots + n_k \leq 9$. Isto prova o item (a).

Agora suponha que o sistema (2.2) tem k planos invariantes paralelos distintos. Após uma mudança afim de coordenadas, podemos assumir que as equações destes planos invariantes são da forma $f_i = z - \alpha_i$, onde $\alpha_i \in \mathbb{R}$, para $i = 1, \dots, k$. Da definição de superfície algébrica invariante, temos que $\dot{z} = \beta f_1 \cdots f_k$ no sistema (2.2), onde $\beta \in \mathbb{R}$. Como o sistema (2.2) tem grau 2, então $k \leq 2$, o que prova o item (b).

Por fim, suponha que $f_i = 0$ são planos invariantes distintos do sistema (2.2) passando pelo mesmo ponto, para $i = 1, \dots, k$. Fazendo uma translação de coordenadas (se necessário), assuma que este ponto é a origem. Logo, as equações dos planos invariantes $f_i = 0$ são da forma $f_i = A_i x + B_i y + C_i z$, onde $A_i, B_i, C_i \in \mathbb{R}$, para $i = 1, \dots, k$. Note que $f_i \in W$ para cada $i = 1, \dots, k$, onde W é o subespaço \mathbb{R} -vetorial gerado por $\{x, y, z\}$. Então, pela Proposição 1, f_i é um fator do polinômio extático

$$\xi_W = \det \begin{pmatrix} x & y & z \\ \mathcal{X}(x) & \mathcal{X}(y) & \mathcal{X}(z) \\ \mathcal{X}^2(x) & \mathcal{X}^2(y) & \mathcal{X}^2(z) \end{pmatrix}$$

onde $\mathcal{X}(v)$ e $\mathcal{X}^2(v)$, com v percorrendo as variáveis x, y e z , são polinômios de graus 2 e 3, respectivamente. Pela definição de determinante e das propriedades das operações com polinômios, segue que o grau máximo do polinômio $\xi_W(\mathcal{X})$ é 6. Note que, como estamos interessados no número máximo de planos invariantes $f_i = 0$ distintos, então eles têm multiplicidade algébrica igual a 1. Logo, o polinômio extático $\xi_W(\mathcal{X})$ pode ser fatorado em fatores da forma $f_1 \cdots f_k$ com $k \leq 6$. Assim, provamos o item (c).

Além disso, estas cotas superiores são atingidas. De fato, considere o sistema diferencial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + x^2, \\ \dot{y} &= y + y^2, \\ \dot{z} &= z + z^2, \end{aligned} \tag{2.5}$$

Note que o sistema (2.5) tem nove planos invariantes dados por: $f_1 = x = 0$, $f_2 = y = 0$, $f_3 = z = 0$, $f_4 = x + 1 = 0$, $f_5 = y + 1 = 0$, $f_6 = z + 1 = 0$, $f_7 = x - y = 0$, $f_8 = x - z = 0$ e $f_9 = y - z = 0$. Destes, $f_1 = 0$ e $f_4 = 0$ são paralelos (também é o caso de $f_2 = 0$ e $f_5 = 0$ e de $f_3 = 0$ e $f_6 = 0$) e $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$, $f_7 = 0$, $f_8 = 0$ e $f_9 = 0$ passam pelo mesmo ponto, a origem. \square

Observe que nos itens (b) e (c) da Proposição 2 não é levada em consideração a multiplicidade dos planos invariantes. De fato, é possível encontrar sistemas diferenciais quadráticos cuja soma da multiplicidade de planos invariantes paralelos distintos seja maior do que 2, por exemplo, considere o sistema

$$\dot{x} = xy + 2xz,$$

$$\dot{y} = y + y^2,$$

$$\dot{z} = z + z^2.$$

Temos que $f_1 = z = 0$ e $f_2 = z+1 = 0$ são planos invariantes paralelos distintos do sistema anterior de multiplicidades 4 e 1, respectivamente. Além disso, também é possível encontrar sistemas diferenciais quadráticos cuja soma das multiplicidades de planos invariantes distintos passando pelo mesmo ponto seja maior do que 6. De fato, basta considerar o sistema

$$\dot{x} = x^2,$$

$$\dot{y} = y^2,$$

$$\dot{z} = z^2,$$

e observar que todos os planos invariantes deste sistema, ou seja, $f_1 = x = 0$, $f_2 = y = 0$, $f_3 = z = 0$, $f_4 = x - y = 0$, $f_5 = x - z = 0$ e $f_6 = y - z = 0$, passam pela origem e a soma das multiplicidades destes planos é 9.

É fácil provar que, se $f = 0$ é um plano invariante do sistema diferencial (2.2), então $f^\alpha = 0$ também é um plano invariante do sistema (2.2), com α um inteiro positivo não-nulo. De fato,

$$\mathcal{X}(f^\alpha) = \alpha f^{\alpha-1} \mathcal{X}(f) = \alpha f^{\alpha-1} K f = \alpha K f^\alpha,$$

onde K é o cofator de $f = 0$. Porém, é importante observar que, isto não significa que $f^\alpha = 0$ seja um plano invariante de multiplicidade α do sistema (2.2). Para obtermos a multiplicidade dos planos invariantes, é preciso trabalhar com o polinômio extático $\xi_W^1(\mathcal{X})$, conforme a Definição 4.

Agora, assuma que o sistema diferencial (2.2) tem $k \leq 9$ planos invariantes distintos $f_i = A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$, com $A_i, B_i, C_i, D_i \in \mathbb{R}$ e $A_i^2 + B_i^2 + C_i^2 \neq 0$, para $i = 1, \dots, k$, de multiplicidades n_i tais que $n_1 + \dots + n_k = 9$, isto é, o sistema (2.2) tem o

número máximo de planos invariantes, levando-se em consideração a multiplicidade destes planos. Dado $f_1 = A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$, com $A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 \neq 0$, sem perda de generalidade, suponha $C_1 \neq 0$. Considerando a mudança afim de coordenadas

$$(x, y, z) \rightarrow \left(x, y, -\frac{1}{C_1} (A_1 x + B_1 y - z + D_1) \right)$$

podemos sempre tomar $f_1 = z = 0$. Pela definição de superfície algébrica invariante (Definição 1), $f_1 = z$ tem que ser um fator de

$$\mathcal{X}(f_1) = c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 z + c_4 x^2 + c_5 y^2 + c_6 z^2 + c_7 xy + c_8 xz + c_9 yz,$$

o que implica que $c_0 = c_1 = c_2 = c_4 = c_5 = c_7 = 0$.

Aqui, diremos que o sistema (2.2) tem uma *configuração da forma* (n_1, \dots, n_k) se ele tem k planos invariantes distintos f_1, \dots, f_k de multiplicidades n_1, \dots, n_k , respectivamente. O próximo teorema, que é o principal resultado deste capítulo, fornece todas as configurações possíveis para o sistema (2.2) e uma cota inferior para o número de configurações realizáveis.

Teorema 1 *Os sistemas diferenciais quadráticos em \mathbb{R}^3 com exatamente nove planos invariantes, levando-se em consideração a multiplicidade destes planos, admitem trinta configurações possíveis, das quais pelos menos vinte e três são realizáveis.*

Prova. Suponha que o sistema diferencial (2.2) tem exatamente nove planos invariantes, levando-se em consideração a multiplicidade destes planos, isto é, $f_i = 0$ são planos invariantes de multiplicidades n_i do sistema (2.2), para $i = 1, \dots, k \leq 9$, com $n_1 + \dots + n_k = 9$.

Obtemos todas as configurações (n_1, \dots, n_k) para o sistema (2.2) da seguinte maneira. Consideramos todas as combinações dos dígitos 0, 1, ..., 9 tomando 9 destes dígitos (com possíveis repetições) de modo que sua soma seja 9. É fácil verificar que existem 30 combinações possíveis. Omitimos todos os zeros nas combinações, isto é, ao invés de escrever $(8, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, por exemplo, escrevemos simplesmente $(8, 1)$. Desta forma, cada combinação obtida corresponde a uma configuração possível para o sistema (2.2), onde os dígitos 1, ..., 9 correspondem às multiplicidades dos planos invariantes. Na Tabela 2.1 no final deste capítulo, estão listadas todas as configurações possíveis para o sistema (2.2).

Após obtermos todas as configurações possíveis para o sistema (2.2), buscamos por exemplos de sistemas diferenciais quadráticos para cada uma destas configurações. Como já observamos anteriormente, sempre podemos considerar $f_1 = z = 0$ como um plano invariante do sistema (2.2) e, conseqüentemente, $c_0 = c_1 = c_2 = c_4 = c_5 = c_7 = 0$. Logo, suponha que $f_1 = z = 0$ seja um plano invariante de multiplicidade n_1 do sistema (2.2), com $n_1 \leq 9$. Da definição de multiplicidade algébrica, z^{n_1} deve ser um fator do polinômio extático $\xi_W^1(\mathcal{X})$, uma vez que todos os planos invariantes do sistema (2.2) pertencem a $\mathbb{R}_1[x, y, z]$. Considerando a base $\{1, x, y, z\}$ do subespaço \mathbb{R} -vetorial $\mathbb{R}_1[x, y, z]$, temos que o polinômio extático $\xi_W^1(\mathcal{X})$ é dado por

$$\begin{aligned} \xi_W^1(\mathcal{X}) &= \mathcal{X}(x) \mathcal{X}^2(y) \mathcal{X}^3(z) + \mathcal{X}(y) \mathcal{X}^2(z) \mathcal{X}^3(x) \\ &+ \mathcal{X}(z) \mathcal{X}^3(y) \mathcal{X}^2(x) - \mathcal{X}(z) \mathcal{X}^2(y) \mathcal{X}^3(x) \\ &- \mathcal{X}^2(z) \mathcal{X}^3(y) \mathcal{X}(x) - \mathcal{X}^3(z) \mathcal{X}^2(x) \mathcal{X}(y) \\ &= \sum_{\substack{0 \leq i, j, l \leq 9, \\ i+j+l=9}} \alpha_{ijl} x^i y^j z^l, \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde α_{ijl} são valores reais que dependem dos 24 parâmetros restantes do sistema (2.2). Neste caso, podemos facilmente verificar que z sempre é um fator de $\xi_W^1(\mathcal{X})$. Assumindo que $f_1 = z = 0$ tem multiplicidade $n_1 \geq 2$, precisamos trabalhar com os 24 parâmetros do sistema (2.2) para obter o fator z^{n_1} na expressão do polinômio extático $\xi_W^1(\mathcal{X})$. Por exemplo, considere as configurações (9) e (8, 1).

- *Configuração (9)*: Devemos ter z^9 como um fator do polinômio extático $\xi_W^1(\mathcal{X})$. Seja $r(x, y, z)$ o resto da divisão polinomial de $\xi_W^1(\mathcal{X})$ por z^9 . Observe que os coeficientes do polinômio $r(x, y, z)$ dependem dos 24 parâmetros do sistema (2.2). Logo, após trabalhar com esses 24 parâmetros, uma das maneiras de se obter $r(x, y, z) \equiv 0$ é considerando $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_7 = a_9 = 0$, $b_0 = b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = b_6 = b_7 = 0$, $c_3 = c_8 = c_9 = 0$ e $b_9 = c_6 = a_8$. Deste modo, temos que z^9 é um fator de $\xi_W^1(\mathcal{X})$. Além disso, é necessário considerar $a_6 a_8 b_8 \neq 0$, pois, caso contrário, $\xi_W^1(\mathcal{X}) \equiv 0$ e o plano invariante $f_1 = z = 0$ tem multiplicidade indefinida. O sistema obtido para estes valores de parâmetros é o exemplo para a configuração (9) que está na Tabela 2.2 ao final deste capítulo.

- *Configuração (8, 1)*: Devemos ter z^8 como um fator de $\xi_W^1(\mathcal{X})$. Se $r(x, y, z)$ é o resto da divisão polinomial de $\xi_W^1(\mathcal{X})$ por z^8 , então, após trabalhar com os 24 parâmetros do sistema (2.2), uma das maneiras de se obter $r(x, y, z) \equiv 0$ é tomando $a_0 = a_1 = a_2 =$

$a_3 = a_4 = a_5 = a_7 = 0$, $b_0 = b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = b_7 = b_8 = 0$, $c_3 = c_8 = c_9 = 0$, $b_6 = c_6 = a_8$ e $b_9 = 2a_8$. Neste caso, devemos considerar $a_8 \neq 0$ e $a_6 \neq a_9$, pois, caso contrário, $\xi_W^1(\mathcal{X}) \equiv 0$. Observe que, para esta escolha de parâmetros, $y + z$ também é um fator de $\xi_W^1(\mathcal{X})$ e, além disso, pode-se verificar facilmente que $f = y + z = 0$ é um plano invariante do sistema obtido. Então, este sistema tem dois planos invariantes $f_1 = z = 0$ e $f_2 = y + z = 0$ de multiplicidades 8 e 1, respectivamente. O sistema obtido para estes valores de parâmetros é o exemplo dado na Tabela 2.2 para a configuração (8, 1).

Para as demais configurações, quando consideramos z^{n_1} como um fator do polinômio extático $\xi_W^1(\mathcal{X})$, então podemos escrever $\xi_W^1(\mathcal{X})$ da forma $\xi_W^1(\mathcal{X}) = z^{n_1} F(x, y, z)$, onde F é um polinômio real de grau $9 - n_1$. Daí, trabalhamos com os parâmetros restantes do sistema (2.2) para escrever F como sendo a multiplicação de fatores da forma $f_2^{n_2} \cdots f_k^{n_k}$, onde $f_2 = 0, \dots, f_k = 0$ são os outros planos invariantes do sistema (2.2) de multiplicidades n_2, \dots, n_k , respectivamente, com $n_2 + \dots + n_k = 9 - n_1$. Como exemplo, considere a configuração (7, 1, 1).

- *Configuração (7, 1, 1)*: Devemos ter z^7 como um fator de $\xi_W^1(\mathcal{X})$. Sendo $r_1(x, y, z)$ o resto da divisão polinomial de $\xi_W^1(\mathcal{X})$ por z^7 temos que, após trabalhar com os 24 parâmetros do sistema (2.2), uma das maneiras de se obter $r_1(x, y, z) \equiv 0$ é tomando $a_0 = a_1 = a_2 = a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = a_9 = 0$, $b_0 = b_1 = b_2 = b_4 = b_5 = b_6 = b_7 = 0$ e $c_3 = c_8 = c_9 = 0$. Assim, o polinômio extático $\xi_W^1(\mathcal{X})$ pode ser escrito da forma $\xi_W^1(\mathcal{X}) = z^7 F(x, y, z)$, onde F é um polinômio real de grau 2. Agora, considerando $r_2(x, y, z)$ como sendo o resto da divisão polinomial de F por y , temos que $r_2(x, y, z)$ depende dos parâmetros restantes do sistema (2.2). Trabalhando com esses parâmetros, observe que se tomarmos $a_3 = b_3 = b_8 = 0$, então $r_2(x, y, z) \equiv 0$ e podemos escrever $F(x, y, z) = \beta x y$, onde $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Conseqüentemente, x e y são fatores de $\xi_W^1(\mathcal{X})$ e é fácil verificar que $f_2 = x = 0$ e $f_3 = y = 0$ são planos invariantes do sistema obtido. Neste caso, devemos considerar $a_8 b_9 c_6 \neq 0$ e a_8, b_9 e c_6 distintos entre si, pois, caso contrário, $\xi_W^1(\mathcal{X}) \equiv 0$. Logo, $f_1 = z = 0$, $f_2 = x = 0$ e $f_3 = y = 0$ são planos invariantes do sistema obtido de multiplicidades 7, 1 e 1, respectivamente. Este sistema é o exemplo dado na Tabela 2.2 para a configuração (7, 1, 1).

Deste modo, após vários cálculos, obtemos exemplos de sistemas diferenciais quadráticos para vinte e três das trinta configurações possíveis para o sistema (2.2). Estes exemplos estão nas Tabelas 2.2 – 2.6. Assim, pelo menos vinte e três das trinta configurações possíveis para o sistema (2.2) são realizáveis. \square

As Tabelas 2.1 – 2.6 estão na Seção 2.3. Observe que os exemplos de sistemas diferenciais quadráticos dados nas Tabelas 2.2 – 2.6 para cada uma das vinte e três configurações não são únicos, ou seja, é possível encontrar sistemas diferentes destes e que tenham a mesma configuração para os planos invariantes. De fato, o sistema

$$\dot{x} = a_7 xy + a_8 xz,$$

$$\dot{y} = b_7 xy + a_8 yz,$$

$$\dot{z} = a_8 z^2 + b_7 xz + a_7 yz,$$

com $a_7 a_8 b_7 \neq 0$, tem os planos invariantes $f_1 = z = 0$, $f_2 = x = 0$, $f_3 = y = 0$ e $f_4 = b_7 x - a_7 y = 0$ de multiplicidades 4, 2, 2 e 1, respectivamente. Logo, trata-se de um outro exemplo para a configuração $(4, 2, 2, 1)$, diferente daquele apresentado na Tabela 2.4. Além disso, note que o Teorema 1 fornece apenas uma cota inferior para o número de configurações realizáveis. Deste modo, podem existir exemplos de sistemas diferenciais quadráticos para as outras configurações que não estão listadas nas Tabelas 2.2 – 2.6. Porém, encontrar esses exemplos pode ser uma tarefa difícil devido ao grande número de parâmetros envolvidos.

Sabe-se que, se um campo vetorial polinomial \mathcal{X} tem um número suficiente de superfícies algébricas invariantes, então ele tem uma integral primeira. No próximo resultado, mostraremos quais, dentre todas as trinta configurações possíveis para o sistema (2.2) listadas na Tabela 2.1, possuem integral primeira, levando-se em consideração apenas o número de planos invariantes distintos.

Proposição 3 *Considere todas as configurações possíveis para sistemas diferenciais quadráticos em \mathbb{R}^3 com exatamente nove planos invariantes, levando-se em consideração a multiplicidade destes planos, dadas na Tabela 2.1. As configurações com cinco ou mais planos invariantes distintos, ou seja,*

$$\begin{aligned} &(4, 2, 1, 1, 1), & (3, 3, 1, 1, 1), & (3, 2, 2, 1, 1), & (2, 2, 2, 2, 1), \\ &(5, 1, 1, 1, 1), & (4, 1, 1, 1, 1, 1), & (3, 2, 1, 1, 1, 1), & (2, 2, 2, 1, 1, 1), \\ &(3, 1, 1, 1, 1, 1, 1), & (2, 2, 1, 1, 1, 1, 1), & (2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1), & (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1), \end{aligned}$$

têm uma integral primeira dada pela função

$$H = f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \cdots f_j^{\alpha_j},$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j$ são constantes reais não todas nulas e $f_1 = 0, f_2 = 0, \dots, f_j = 0$ são os planos invariantes do sistema diferencial em cada caso, com $5 \leq j \leq 9$.

Prova. Sejam $f_1 = 0, f_2 = 0, \dots, f_j = 0$, com $5 \leq j \leq 9$, planos invariantes distintos do sistema diferencial quadrático (2.2) e K_1, K_2, \dots, K_j os seus respectivos cofatores. Neste caso, o sistema (2.2) tem uma das configurações listadas no enunciado da proposição. Como o sistema (2.2) é quadrático, temos que os cofatores K_1, K_2, \dots, K_j têm grau no máximo um, ou seja, $K_1, K_2, \dots, K_j \in \mathbb{R}_1[x, y, z]$. Observe que o subespaço \mathbb{R} -vetorial $\mathbb{R}_1[x, y, z]$ tem dimensão 4. Logo, o conjunto $\{K_1, K_2, \dots, K_j\}$ é linearmente dependente, pois $5 \leq j \leq 9$. Assim, existem constantes reais não todas nulas $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j$ tais que

$$\alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 + \dots + \alpha_j K_j = 0.$$

Lembrando que \mathcal{X} é o campo vetorial associado ao sistema (2.2), segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(H) &= \mathcal{X}(f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \cdots f_j^{\alpha_j}) \\ &= \alpha_1 f_1^{\alpha_1-1} \mathcal{X}(f_1) f_2^{\alpha_2} \cdots f_j^{\alpha_j} + \dots + \alpha_i f_i^{\alpha_i-1} \mathcal{X}(f_i) f_1^{\alpha_1} \cdots f_{i-1}^{\alpha_{i-1}} f_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \cdots f_j^{\alpha_j} + \dots \\ &+ \alpha_j f_j^{\alpha_j-1} \mathcal{X}(f_j) f_1^{\alpha_1} \cdots f_{j-1}^{\alpha_{j-1}} \\ &= (f_1^{\alpha_1} \cdots f_j^{\alpha_j}) (\alpha_1 K_1 + \dots + \alpha_j K_j) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $H = f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \cdots f_j^{\alpha_j}$ é uma integral primeira do sistema (2.2), onde $f_1 = 0, f_2 = 0, \dots, f_j = 0$ são planos invariantes distintos deste sistema, com $5 \leq j \leq 9$. \square

Note que na definição de superfície algébrica invariante (Definição 1), permitimos que o polinômio de Darboux f e o cofator K fossem polinômios complexos. Porém, quando consideramos planos em \mathbb{R}^3 , que é o espaço no qual o sistema diferencial (2.2) está definido, então f é um polinômio real de grau 1. Logo, o cofator K também é um polinômio real. Por isso que, na prova anterior, consideramos os cofatores K_1, K_2, \dots, K_j polinômios reais.

2.3 Tabelas 2.1 – 2.6

(9)	(4,2,2,1)
(8,1)	(4,2,1,1,1)
(7,2)	(4,1,1,1,1,1)
(7,1,1)	(3,3,3)
(6,3)	(3,3,2,1)
(6,2,1)	(3,3,1,1,1)
(6,1,1,1)	(3,2,2,2)
(5,4)	(3,2,2,1,1)
(5,3,1)	(3,2,1,1,1,1)
(5,2,2)	(3,1,1,1,1,1,1)
(5,2,1,1)	(2,2,2,2,1)
(5,1,1,1,1)	(2,2,2,1,1,1)
(4,4,1)	(2,2,1,1,1,1,1)
(4,3,2)	(2,1,1,1,1,1,1,1)
(4,3,1,1)	(1,1,1,1,1,1,1,1,1)

Tabela 2.1: Todas as configurações possíveis para o sistema diferencial (2.2) com exatamente nove planos invariantes, levando-se em consideração a multiplicidade destes planos.

Configuração	Exemplo de sistema diferencial quadrático	Plano invariante (multiplicidade)
(9)	$\dot{x} = a_6 z^2 + a_8 xz,$ $\dot{y} = b_8 xz + a_8 yz,$ $\dot{z} = a_8 z^2,$ com $a_6 a_8 b_8 \neq 0$.	$f_1 = z = 0$ (9)
(8,1)	$\dot{x} = a_6 z^2 + a_8 xz + a_9 yz,$ $\dot{y} = a_8 z^2 + 2 a_8 yz,$ $\dot{z} = a_8 z^2,$ com $a_8 \neq 0$ e $a_6 \neq a_9$.	$f_1 = z = 0$ (8) $f_2 = y + z = 0$ (1)
(7,2)	$\dot{x} = a_8 xz + a_9 yz,$ $\dot{y} = a_8 yz,$ $\dot{z} = c_6 z^2,$ com $a_8 a_9 c_6 \neq 0$ e $a_8 \neq c_6$.	$f_1 = z = 0$ (7) $f_2 = y = 0$ (2)
(7,1,1)	$\dot{x} = a_8 xz,$ $\dot{y} = b_9 yz,$ $\dot{z} = c_6 z^2,$ com $a_8 b_9 c_6 \neq 0$, $a_8 \neq b_9$, $a_8 \neq c_6$ e $b_9 \neq c_6$.	$f_1 = z = 0$ (7) $f_2 = x = 0$ (1) $f_3 = y = 0$ (1)
(6,3)	$\dot{x} = a_6 z^2 + a_8 xz,$ $\dot{y} = a_8 yz,$ $\dot{z} = a_8 z^2 + c_9 yz,$ com $a_6 a_8 c_9 \neq 0$.	$f_1 = z = 0$ (6) $f_2 = y = 0$ (3)

Tabela 2.2: Exemplos de sistemas diferenciais quadráticos para as configurações (9), (8,1), (7,2), (7,1,1) e (6,3).

Configuração	Exemplo de sistema diferencial quadrático	Plano invariante (multiplicidade)
(6,2,1)	$\dot{x} = a_4x^2 + 2a_8xz,$ $\dot{y} = a_4xy - a_8yz,$ $\dot{z} = 2a_8z^2,$ com $a_4 a_8 \neq 0$.	$f_1 = z = 0$ (6) $f_2 = x = 0$ (2) $f_3 = y = 0$ (1)
(6,1,1,1)	$\dot{x} = a_8xz,$ $\dot{y} = -a_8yz,$ $\dot{z} = 2a_8z^2 + c_8xz,$ com $a_8 c_8 \neq 0$.	$f_1 = z = 0$ (6) $f_2 = x = 0$ (1) $f_3 = y = 0$ (1) $f_4 = c_8x + a_8z = 0$ (1)
(5,3,1)	$\dot{x} = a_4x^2 + a_8xz,$ $\dot{y} = a_4xy,$ $\dot{z} = a_8z^2,$ com $a_4 a_8 \neq 0$.	$f_1 = z = 0$ (5) $f_2 = x = 0$ (3) $f_3 = y = 0$ (1)
(5,2,2)	$\dot{x} = a_6z^2 + a_7xy + a_8xz,$ $\dot{y} = a_7y^2,$ $\dot{z} = a_8z^2,$ com $a_6 a_7 a_8 \neq 0$.	$f_1 = z = 0$ (5) $f_2 = y = 0$ (2) $f_3 = a_7y - a_8z = 0$ (2)
(5,2,1,1)	$\dot{x} = a_7xy + a_8xz,$ $\dot{y} = a_7y^2,$ $\dot{z} = c_6z^2,$ com $a_7 a_8 c_6 \neq 0$ e $a_8 \neq \pm c_6$.	$f_1 = z = 0$ (5) $f_2 = y = 0$ (2) $f_3 = x = 0$ (1) $f_4 = a_7y - c_6z = 0$ (1)

Tabela 2.3: Exemplos de sistemas diferenciais quadráticos para as configurações (6,2,1), (6,1,1,1), (5,3,1), (5,2,2) e (5,2,1,1).

Configuração	Exemplo de sistema diferencial quadrático	Plano invariante (multiplicidade)
(4,4,1)	$\dot{x} = a_7xy,$ $\dot{y} = 2c_6yz,$ $\dot{z} = c_6z^2,$ com $a_7c_6 \neq 0$.	$f_1 = y = 0$ (4) $f_2 = z = 0$ (4) $f_3 = x = 0$ (1)
(4,3,2)	$\dot{x} = a_5y^2 + 2b_9xz,$ $\dot{y} = b_9yz,$ $\dot{z} = 2b_9z^2 + c_9yz,$ com $a_5b_9c_9 \neq 0$.	$f_1 = y = 0$ (4) $f_2 = z = 0$ (3) $f_3 = c_9y + b_9z = 0$ (2)
(4,3,1,1)	$\dot{x} = a_4x^2,$ $\dot{y} = b_9yz,$ $\dot{z} = -b_9z^2$ com $a_4b_9 \neq 0$.	$f_1 = z = 0$ (4) $f_2 = x = 0$ (3) $f_3 = y = 0$ (1) $f_4 = a_4x + b_9z = 0$ (1)
(4,2,2,1)	$\dot{x} = a_7xz,$ $\dot{y} = b_5y^2 + b_7xy + a_7yz,$ $\dot{z} = a_7z^2 + b_7xz + 2b_5yz,$ com $a_7b_5b_7 \neq 0$.	$f_1 = z = 0$ (4) $f_2 = y = 0$ (2) $f_3 = b_7x + b_5y = 0$ (2) $f_4 = x = 0$ (1)
(4,2,1,1,1)	$\dot{x} = x + x^2,$ $\dot{y} = y + y^2$ $\dot{z} = c_2y + z + c_2xy + yz,$ com $c_2 \neq 0$.	$f_1 = x + 1 = 0$ (4) $f_2 = y = 0$ (2) $f_3 = x = 0$ (1) $f_4 = y + 1 = 0$ (1) $f_5 = x - y = 0$ (1)

Tabela 2.4: Exemplos de sistemas diferenciais quadráticos para as configurações (4,4,1), (4,3,2), (4,3,1,1), (4,2,2,1) e (4,2,1,1,1).

Configuração	Exemplo de sistema diferencial quadrático	Plano invariante (multiplicidade)
(4,1,1,1,1,1)	$\dot{x} = a_7xy + a_8xz,$ $\dot{y} = b_2y + a_7y^2,$ $\dot{z} = b_2z + c_6z^2,$ com $a_7 a_8 b_2 c_6 \neq 0$ e $a_8 \neq \pm c_6$.	$f_1 = z = 0 \quad (4)$ $f_2 = x = 0 \quad (1)$ $f_3 = y = 0 \quad (1)$ $f_4 = a_7 y + b_2 = 0 \quad (1)$ $f_5 = c_6 z + b_2 = 0 \quad (1)$ $f_6 = a_7 y - c_6 z = 0 \quad (1)$
(3,3,3)	$\dot{x} = a_6z^2,$ $\dot{y} = b_5y^2 + b_9yz,$ $\dot{z} = 2b_9z^2 + 2b_5yz,$ com $a_6 b_5 b_9 \neq 0$.	$f_1 = y = 0 \quad (3)$ $f_2 = z = 0 \quad (3)$ $f_3 = b_5 y + b_9 z = 0 \quad (3)$
(3,3,2,1)	$\dot{x} = 2c_8xy + a_8xz,$ $\dot{y} = 2c_8y^2,$ $\dot{z} = c_8xz,$ com $a_8 c_8 \neq 0$.	$f_1 = y = 0 \quad (3)$ $f_2 = z = 0 \quad (3)$ $f_3 = x = 0 \quad (2)$ $f_4 = x - y = 0 \quad (1)$
(3,2,2,2)	$\dot{x} = a_4x^2 + a_7xy + a_8xz,$ $\dot{y} = 2a_7y^2 + 2a_4xy,$ $\dot{z} = 2a_7yz,$ com $a_4 a_7 a_8 \neq 0$.	$f_1 = x = 0 \quad (3)$ $f_2 = y = 0 \quad (2)$ $f_3 = z = 0 \quad (2)$ $f_4 = a_4 x + a_7 y + a_8 z = 0 \quad (2)$
(3,2,2,1,1)	$\dot{x} = a_7xy + a_8xz,$ $\dot{y} = b_7xy,$ $\dot{z} = 2a_8z^2 + b_7xz + a_7yz,$ com $a_7 a_8 b_7 \neq 0$.	$f_1 = z = 0 \quad (3)$ $f_2 = x = 0 \quad (2)$ $f_3 = a_7 y + 2a_8 z = 0 \quad (2)$ $f_4 = y = 0 \quad (1)$ $f_5 = b_7 x + a_8 z = 0 \quad (1)$

Tabela 2.5: Exemplos de sistemas diferenciais quadráticos para as configurações (4,1,1,1,1,1), (3,3,3), (3,3,2,1), (3,2,2,2) e (3,2,2,1,1).

Configuração	Exemplo de sistema diferencial quadrático	Plano invariante (multiplicidade)
(3,2,1,1,1,1)	$\dot{x} = a_7xy,$ $\dot{y} = b_2y - a_7y^2,$ $\dot{z} = b_2z + c_6z^2,$ com $a_7 b_2 c_6 \neq 0.$	$f_1 = y = 0 \quad (3)$ $f_2 = z = 0 \quad (2)$ $f_3 = x = 0 \quad (1)$ $f_4 = a_7y - b_2 = 0 \quad (1)$ $f_5 = c_6z + b_2 = 0 \quad (1)$ $f_6 = a_7y + c_6z = 0 \quad (1)$
(2,2,2,1,1,1)	$\dot{x} = a_4x^2,$ $\dot{y} = b_5y^2,$ $\dot{z} = c_6z^2,$ com $a_4 b_5 c_6 \neq 0.$	$f_1 = x = 0 \quad (2)$ $f_2 = y = 0 \quad (2)$ $f_3 = z = 0 \quad (2)$ $f_4 = a_4x - b_5y = 0 \quad (1)$ $f_5 = a_4x - c_6z = 0 \quad (1)$ $f_6 = b_5y - c_6z = 0 \quad (1)$
(1,1,1,1,1,1,1,1)	$\dot{x} = a_1x + a_4x^2,$ $\dot{y} = a_1y + b_5y^2,$ $\dot{z} = a_1z + c_6z^2,$ com $a_1 a_4 b_5 c_6 \neq 0.$	$f_1 = x = 0 \quad (1)$ $f_2 = y = 0 \quad (1)$ $f_3 = z = 0 \quad (1)$ $f_4 = a_4x + a_1 = 0 \quad (1)$ $f_5 = b_5y + a_1 = 0 \quad (1)$ $f_6 = c_6z + a_1 = 0 \quad (1)$ $f_7 = a_4x - b_5y = 0 \quad (1)$ $f_8 = a_4x - c_6z = 0 \quad (1)$ $f_9 = b_5y - c_6z = 0 \quad (1)$

Tabela 2.6: Exemplos de sistemas diferenciais quadráticos para as configurações (3,2,1,1,1,1), (2,2,2,1,1,1) e (1,1,1,1,1,1,1,1).

Quádricas invariantes em sistemas diferenciais polinomiais

Seja

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(x, y, z), \\ \dot{y} &= Q(x, y, z), \\ \dot{z} &= R(x, y, z), \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde P , Q e R são polinômios relativamente primos em $\mathbb{R}[x, y, z]$, o sistema diferencial naturalmente associado ao campo vetorial polinomial em \mathbb{R}^3

$$\mathcal{X} = P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y} + R \frac{\partial}{\partial z}.$$

Suponha que o sistema diferencial (3.1) tem grau arbitrário e que $f(x, y, z) = 0$ seja uma superfície algébrica invariante do sistema, onde f é um polinômio real de grau 2. Neste caso, dizemos que a superfície $f = 0$ é uma *quádrica*. Neste capítulo, denotaremos as quádricas por $\mathcal{G} = 0$ e deixaremos a notação $f = 0$ para superfícies algébricas em geral.

Seja $\mathcal{G} = 0$ uma quádrica em \mathbb{R}^3 . Embora \mathcal{G} seja um polinômio real, temos que \mathcal{G} pode ou não ser um polinômio irredutível em $\mathbb{C}[x, y, z]$. Este fato permite classificar as quádricas em degeneradas ou não-degeneradas. Dizemos que a quádrica $\mathcal{G} = 0$ é *não-degenerada* se \mathcal{G} é um polinômio irredutível em $\mathbb{C}[x, y, z]$. Caso contrário, dizemos que a quádrica $\mathcal{G} = 0$ é *degenerada*. As quádricas não-degeneradas são classificadas como esfera (ou elipsoide), cilindro parabólico, cilindro hiperbólico, cilindro elíptico, parabolóide elíptico, parabolóide hiperbólico, hiperboloide de uma ou de duas folhas e cone. Na Tabela 3.1 estão listadas cada uma dessas quádricas com suas respectivas equações normalizadas e na Figura 3.1 temos a representação geométrica de cada uma delas. As quádricas degeneradas são classificadas como dois planos reais paralelos, dois planos complexos paralelos, um plano real duplo, dois planos reais interceptando-se numa reta, dois

planos complexos interceptando-se numa reta real e um ponto real. Note que esta nomenclatura das quádricas degeneradas leva em consideração os polinômios resultantes da decomposição de \mathcal{G} em $\mathbb{C}[x, y, z]$. Na Tabela 3.2 estão listadas cada uma dessas quádricas com suas respectivas equações normalizadas.

Nas Tabelas 3.1 e 3.2 a sigla após o nome de cada quádrica está associada às iniciais do seu nome em inglês. Assim, por exemplo, a sigla (EP) após parabolóide elíptico corresponde às iniciais de ‘*elliptic paraboloid*’. Apenas nos casos (r) e (s) as siglas estão relacionadas com a notação usual de reta e no caso (P) com a notação usual de ponto.

Iniciamos este capítulo determinando a forma normal de sistemas diferenciais polinomiais com uma quádrica como superfície algébrica invariante. Em seguida, utilizamos o fato do sistema de Chen [7] apresentar este tipo de superfície algébrica invariante para escolhas adequadas de seus parâmetros e mostramos que, nestes casos, ele é equivalente às formas normais apresentadas anteriormente. Também estudamos a integrabilidade de sistemas diferenciais quadráticos que tem como superfície algébrica invariante um parabolóide elíptico (caso (EP)). Provamos, para este tipo de sistemas, a existência de integrais primeiras, fatores exponenciais, invariantes de Darboux e multiplicadores de Jacobi inversos para escolhas adequadas dos parâmetros. Além disso, caracterizamos todas as configurações possíveis de paralelos invariantes e meridianos invariantes sobre o parabolóide invariante e estudamos a dinâmica global (órbitas finitas e no infinito) via compactificação de Poincaré de uma classe de sistemas diferenciais quadráticos com um parabolóide invariante. Por fim, consideramos o sistema de Rabinovich [66] no caso em que este possui um parabolóide invariante, realizando um estudo detalhado de sua dinâmica restrita a esta superfície.

3.1 Formas normais para sistemas diferenciais polinomiais com uma quádrica invariante

Em [45], os autores fornecem as formas normais de sistemas diferenciais polinomiais em \mathbb{R}^3 com uma quádrica como superfície algébrica invariante, de acordo com a classificação desta quádrica. Antes de enunciarmos e provarmos os resultados referentes a essas formas normais, será útil a seguinte definição.

Definição 5 (Matriz jacobiana e jacobiano) *Sejam f_1, f_2 e f_3 funções reais defini-*

Quádrlica não-degenerada	Equação normalizada
Esfera (ou elipsoide) (S)	$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$
Cilindro parabólico (PC)	$z^2 - x = 0$
Cilindro hiperbólico (HC)	$x^2 - z^2 - 1 = 0$
Cilindro elíptico (EC)	$x^2 + z^2 - 1 = 0$
Paraboloides elíptico (EP)	$y^2 + z^2 - x = 0$
Paraboloides hiperbólico (HP)	$y^2 - z^2 - x = 0$
Hiperboloides de uma folha (HOS)	$x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$
Hiperboloides de duas folhas (HTS)	$x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$
Cone (C)	$x^2 + y^2 - z^2 = 0$

Tabela 3.1: Classificação das quádrlicas não-degeneradas.

Quádrlica degenerada	Equação normalizada
Dois planos reais paralelos (RPP)	$x^2 - 1 = 0$
Dois planos complexos paralelos (CPP)	$x^2 + 1 = 0$
Um plano real duplo (DP)	$x^2 = 0$
Dois planos reais interceptando-se numa reta (r)	$xy = 0$
Dois planos complexos interceptando-se numa reta real (s)	$x^2 + y^2 = 0$
Ponto real (P)	$x^2 + y^2 + z^2 = 0$

Tabela 3.2: Classificação das quádrlicas degeneradas.

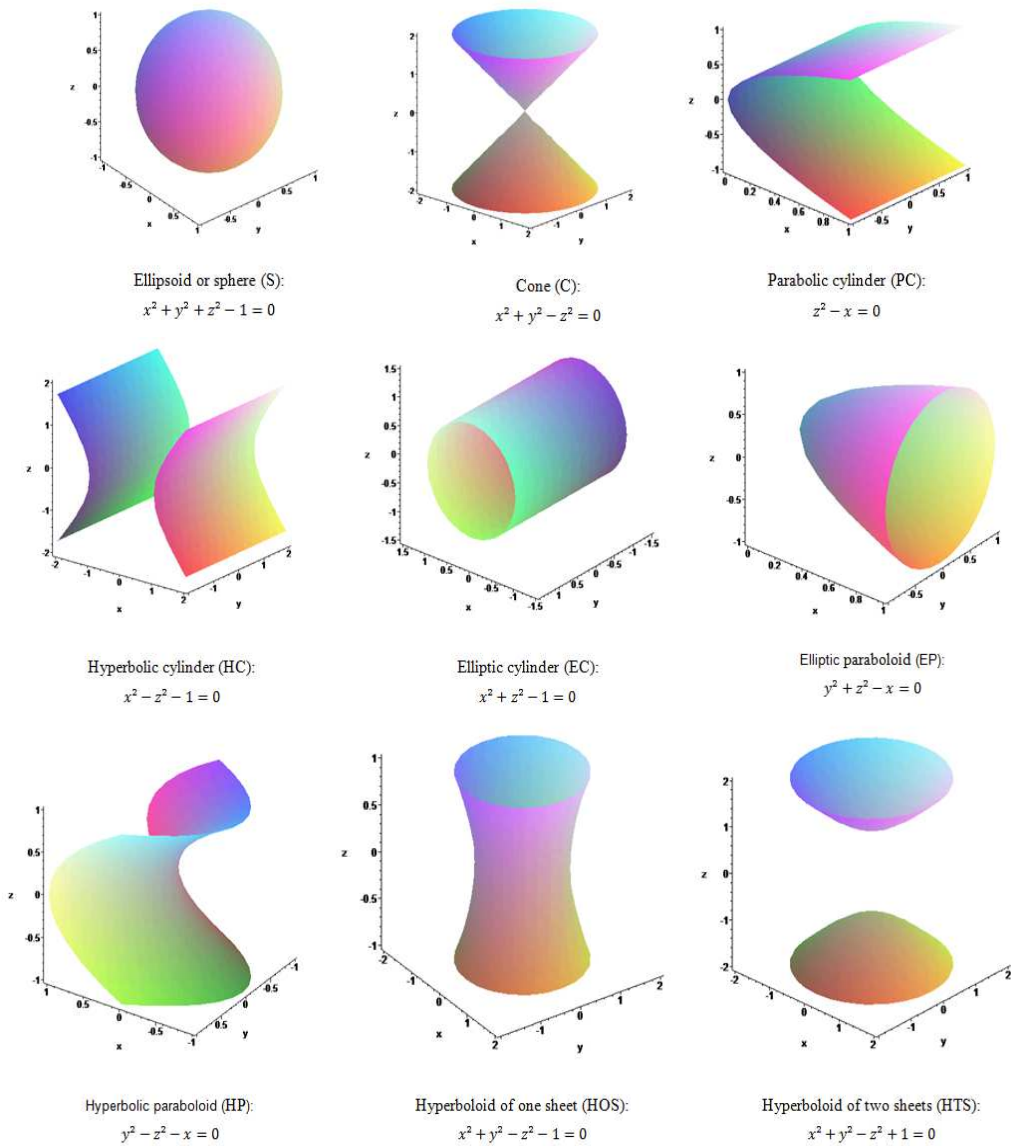


Figura 3.1: Quádricas não-degeneradas.

das num subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^3$. A matriz jacobiana das funções f_1 , f_2 e f_3 é definida por

$$J = \begin{pmatrix} f_{1x} & f_{1y} & f_{1z} \\ f_{2x} & f_{2y} & f_{2z} \\ f_{3x} & f_{3y} & f_{3z} \end{pmatrix},$$

onde $f_{iv} = \partial f_i / \partial v$ são as derivadas parciais de f_i em relação a v , com v percorrendo as variáveis x , y e z , para $i = 1, 2, 3$. O jacobiano das funções f_1 , f_2 e f_3 é o determinante da matriz J , e aqui será denotado por

$$\{f_1, f_2, f_3\} = \det(J).$$

O próximo resultado é um caso particular do Teorema 1.3.1 de [48] e caracteriza todos os sistemas diferenciais polinomiais em \mathbb{R}^3 com uma superfície algébrica invariante. Este resultado é fundamental para a prova dos Teoremas 3 e 4, que estão entre os principais resultados deste capítulo.

Teorema 2 *Seja f_1 um polinômio em $\mathbb{R}[x, y, z]$. Então, qualquer sistema diferencial polinomial em \mathbb{R}^3 que admita $f_1 = 0$ como superfície algébrica invariante pode ser escrito da forma*

$$\dot{v} = \frac{1}{\{f_1, f_2, f_3\}} (\lambda_1 \{v, f_2, f_3\} + \lambda_2 \{f_1, v, f_3\} + \lambda_3 \{f_1, f_2, v\}), \quad (3.2)$$

onde v percorre as variáveis x , y e z ; $\lambda_1 = \varphi f_1$; e φ , λ_2 , λ_3 , f_2 e f_3 são polinômios arbitrários em $\mathbb{R}[x, y, z]$ escolhidos de tal forma que o jacobiano $\{f_1, f_2, f_3\} \neq 0$.

Prova. Seja \mathcal{X} o campo vetorial associado ao sistema diferencial (3.2). Dado $g = g(x, y, z)$ um polinômio arbitrário em $\mathbb{R}[x, y, z]$, defina

$$\{g, f_2, f_3\} = \det \begin{pmatrix} g_x & g_y & g_z \\ f_{2x} & f_{2y} & f_{2z} \\ f_{3x} & f_{3y} & f_{3z} \end{pmatrix},$$

onde $g_v = \partial g / \partial v$ e $f_{iv} = \partial f_i / \partial v$ são as derivadas parciais de g e f_i , respectivamente, em relação a v , com v percorrendo as variáveis x , y e z , para $i = 2, 3$. Analogamente, defina

$\{f_1, g, f_3\}$ e $\{f_1, f_2, g\}$. Temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}(g) &= g_x \left[\frac{1}{\{f_1, f_2, f_3\}} (\lambda_1 \{x, f_2, f_3\} + \lambda_2 \{f_1, x, f_3\} + \lambda_3 \{f_1, f_2, x\}) \right] \\
&+ g_y \left[\frac{1}{\{f_1, f_2, f_3\}} (\lambda_1 \{y, f_2, f_3\} + \lambda_2 \{f_1, y, f_3\} + \lambda_3 \{f_1, f_2, y\}) \right] \\
&+ g_z \left[\frac{1}{\{f_1, f_2, f_3\}} (\lambda_1 \{z, f_2, f_3\} + \lambda_2 \{f_1, z, f_3\} + \lambda_3 \{f_1, f_2, z\}) \right] \\
&= \frac{1}{\{f_1, f_2, f_3\}} [\lambda_1 (g_x(f_{2y}f_{3z} - f_{2z}f_{3y}) + g_y(f_{2z}f_{3x} - f_{3z}f_{2x}) + g_z(f_{3y}f_{2x} - f_{2y}f_{3x}))] \\
&+ \frac{1}{\{f_1, f_2, f_3\}} [\lambda_1 (g_x(f_{1z}f_{3y} - f_{3z}f_{1y}) + g_y(f_{1x}f_{3z} - f_{1z}f_{3x}) + g_z(f_{1y}f_{3x} - f_{3y}f_{1x}))] \\
&+ \frac{1}{\{f_1, f_2, f_3\}} [\lambda_1 (g_x(f_{1y}f_{2z} - f_{1z}f_{2y}) + g_y(f_{1z}f_{2x} - f_{2z}f_{1x}) + g_z(f_{1x}f_{2y} - f_{2x}f_{1y}))] \\
&= \frac{1}{\{f_1, f_2, f_3\}} (\lambda_1 \{g, f_2, f_3\} + \lambda_2 \{f_1, g, f_3\} + \lambda_3 \{f_1, f_2, g\}).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\mathcal{X}(f_1) = \frac{1}{\{f_1, f_2, f_3\}} (\lambda_1 \{f_1, f_2, f_3\} + \lambda_2 \{f_1, f_1, f_3\} + \lambda_3 \{f_1, f_2, f_1\}) = \varphi f_1,$$

pois $\{f_1, f_1, f_3\} = \{f_1, f_2, f_1\} = 0$ e $\lambda_1 = \varphi f_1$. Logo, $f_1 = 0$ é uma superfície algébrica invariante do campo vetorial \mathcal{X} com cofator $K = \varphi$.

Agora, devemos provar que \mathcal{X} é o campo vetorial mais geral que admite $f_1 = 0$ como superfície algébrica invariante. De fato, seja

$$\mathcal{Y} = (Y_1(x, y, z), Y_2(x, y, z), Y_3(x, y, z))$$

outro campo vetorial polinomial tal que $f_1 = 0$ é uma superfície algébrica invariante de \mathcal{Y} . Então, tomando

$$\lambda_j = \mathcal{Y}(f_j), \quad \text{para } j = 1, 2, 3,$$

e F um polinômio arbitrário em $\mathbb{R}[x, y, z]$, temos que

$$\mathcal{X}(F) = \frac{1}{\{f_1, f_2, f_3\}} (\mathcal{Y}(f_1) \{F, f_2, f_3\} + \mathcal{Y}(f_2) \{f_1, F, f_3\} + \mathcal{Y}(f_3) \{f_1, f_2, F\}).$$

Substituindo

$$\mathcal{Y}(f_j) = Y_1 \frac{\partial f_j}{\partial x} + Y_2 \frac{\partial f_j}{\partial y} + Y_3 \frac{\partial f_j}{\partial z},$$

na expressão de $\mathcal{X}(F)$, obtemos, após alguns cálculos, que $\mathcal{X}(F) = \mathcal{Y}(F)$. Logo, $\mathcal{Y} \equiv \mathcal{X}$, pois F foi tomado de forma arbitrária. Isto finaliza a prova do teorema. \square

O teorema anterior também está provado em [45] e será de fundamental importância para provar os próximos resultados. Embora o sistema diferencial (3.2) esteja numa forma racional no enunciado do Teorema 2, note que sempre podemos escolher os polinômios λ_j , com $j = 1, 2, 3$, de maneira que o sistema (3.2) seja polinomial. Esta propriedade ficará clara na prova dos Teoremas 3 e 4. Diremos que um sistema diferencial é do tipo (\mathcal{G}) quando $\mathcal{G} = 0$ for uma quádrlica invariante deste sistema. Por exemplo, se um sistema diferencial é do tipo (PC), então ele possui um cilindro parabólico como superfície algébrica invariante.

Teorema 3 *Assuma que a quádrlica não-degenerada $\mathcal{G} = 0$ é uma superfície algébrica invariante do sistema diferencial (3.1). Então, após uma mudança afim de coordenadas, a equação \mathcal{G} da quádrlica e o sistema (3.1) podem ser escritos em uma das oitos formas normais abaixo, onde A, B, C, D, E, F e Q são polinômios arbitrários em $\mathbb{R}[x, y, z]$.*

(i) *Se o sistema (3.1) é do tipo (S), então podemos escrever $\mathcal{G} = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ e o sistema (3.1) pode ser escrito da forma*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mathcal{G}A - 2yD + 2zE, \\ \dot{y} &= \mathcal{G}B + 2xD - 2zF, \\ \dot{z} &= \mathcal{G}C - 2xE + 2yF. \end{aligned} \tag{S}$$

(ii) *Se o sistema (3.1) é do tipo (PC), então podemos escrever $\mathcal{G} = z^2 - x$ e o sistema (3.1) pode ser escrito da forma*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mathcal{G}A + 2zE, \\ \dot{y} &= Q, \\ \dot{z} &= \mathcal{G}C + E. \end{aligned} \tag{PC}$$

(iii) *Se o sistema (3.1) é do tipo (HC), então podemos escrever $\mathcal{G} = x^2 - z^2 - 1$ e o sistema (3.1) pode ser escrito da forma*

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \mathcal{G}A - 2zE, \\
\dot{y} &= Q, \\
\dot{z} &= \mathcal{G}C - 2xE.
\end{aligned} \tag{HC}$$

(iv) Se o sistema (3.1) é do tipo (EC), então podemos escrever $\mathcal{G} = x^2 + z^2 - 1$ e o sistema (3.1) pode ser escrito da forma

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \mathcal{G}A + 2zE, \\
\dot{y} &= Q, \\
\dot{z} &= \mathcal{G}C - 2xE.
\end{aligned} \tag{EC}$$

(v) Se o sistema (3.1) é do tipo (EP), então podemos escrever $\mathcal{G} = y^2 + z^2 - x$ e o sistema (3.1) pode ser escrito da forma

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \mathcal{G}A - 2yD + 2zE, \\
\dot{y} &= \mathcal{G}B - 2zF - D, \\
\dot{z} &= \mathcal{G}C + 2yF + E.
\end{aligned} \tag{EP}$$

(vi) Se o sistema (3.1) é do tipo (HP), então podemos escrever $\mathcal{G} = y^2 - z^2 - x$ e o sistema (3.1) pode ser escrito da forma

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \mathcal{G}A - 2yD - 2zE, \\
\dot{y} &= \mathcal{G}B + 2zF - D, \\
\dot{z} &= \mathcal{G}C + 2yF + E.
\end{aligned} \tag{HP}$$

(vii) Se o sistema (3.1) é do tipo (HOS) ou (HTS), então podemos escrever $\mathcal{G} = x^2 + y^2 - z^2 - 1$, no caso (HOS), ou $\mathcal{G} = x^2 + y^2 - z^2 + 1$, no caso (HTS), e o sistema (3.1) pode ser escrito da forma

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \mathcal{G}A - 2yD - 2zE, \\
\dot{y} &= \mathcal{G}B + 2xD + 2zF, \\
\dot{z} &= \mathcal{G}C - 2xE + 2yF.
\end{aligned} \tag{HOS, HTS}$$

(viii) Se o sistema (3.1) é do tipo (C), então podemos escrever $\mathcal{G} = x^2 + y^2 - z^2$ e o sistema (3.1) pode ser escrito da forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mathcal{G}A - 2yD - 2zE, \\ \dot{y} &= \mathcal{G}B + 2xD + 2zF, \\ \dot{z} &= \mathcal{G}C - 2xE + 2yF.\end{aligned}\tag{C}$$

Prova. Suponha que o sistema diferencial (3.1) é do tipo (S), isto é, que ele possui uma esfera (ou elipsoide) como superfície algébrica invariante. Após uma mudança afim de coordenadas, podemos assumir que $\mathcal{G} = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ é a equação da esfera invariante do sistema (3.1).

Considerando $f_1 = \mathcal{G}$ no Teorema 2, podemos escrever o sistema (3.2) como

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{1}{2(xJ_1 + yJ_2 + zJ_3)} [\varphi \mathcal{G} J_1 + \lambda_2 (2z f_{3y} - 2y f_{3z}) + \lambda_3 (2y f_{2z} - 2z f_{2y})], \\ \dot{y} &= \frac{1}{2(xJ_1 + yJ_2 + zJ_3)} [\varphi \mathcal{G} J_2 + \lambda_2 (2x f_{3z} - 2z f_{3x}) + \lambda_3 (2z f_{2x} - 2x f_{2z})], \\ \dot{z} &= \frac{1}{2(xJ_1 + yJ_2 + zJ_3)} [\varphi \mathcal{G} J_3 + \lambda_2 (2y f_{3x} - 2x f_{3y}) + \lambda_3 (2x f_{2y} - 2y f_{2x})].\end{aligned}\tag{3.3}$$

onde $f_{iv} = \partial f_i / \partial v$ são as derivadas parciais de f_i em relação a v , com v percorrendo as variáveis x , y e z , para $i = 2, 3$; φ , λ_2 , λ_3 , f_2 e f_3 são polinômios arbitrários em $\mathbb{R}[x, y, z]$ satisfazendo a condição $\{f_1, f_2, f_3\} \neq 0$; e

$$\begin{aligned}J_1 &= f_{2y}f_{3z} - f_{2z}f_{3y}, \\ J_2 &= f_{3x}f_{2z} - f_{2x}f_{3z}, \\ J_3 &= f_{2x}f_{3y} - f_{3x}f_{2y}.\end{aligned}\tag{3.4}$$

De acordo com o Teorema 2, o sistema (3.3) é o sistema diferencial polinomial em \mathbb{R}^3 mais geral que admite a esfera $\mathcal{G} = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ como superfície algébrica invariante. De fato, sejam \mathcal{X} o campo vetorial associado ao sistema (3.3) e \mathcal{Y} o campo vetorial associado ao sistema (S). Vamos mostrar que $\mathcal{Y} \equiv \mathcal{X}$. Assim como na prova do Teorema 2, considere

$$\lambda_j = \mathcal{Y}(f_j), \quad \text{para } j = 1, 2, 3,\tag{3.5}$$

com $f_1 = \mathcal{G} = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ e $\lambda_1 = \varphi \mathcal{G}$. Deste modo, obtemos

$$\begin{aligned}
\varphi &= 2(xA + yB + zC), \\
\lambda_2 &= 2D(xf_{2y} - yf_{2x}) + 2E(zf_{2x} - xf_{2z}) + 2F(yf_{2z} - zf_{2y}) \\
&\quad + \mathcal{G}(Af_{2x} + Bf_{2y} + Cf_{2z}), \\
\lambda_3 &= 2D(xf_{3y} - yf_{3x}) + 2E(zf_{3x} - xf_{3z}) + 2F(yf_{3z} - zf_{3y}) \\
&\quad + \mathcal{G}(Af_{3x} + Bf_{3y} + Cf_{3z}),
\end{aligned} \tag{3.6}$$

onde A, B, C, D, E e F , são polinômios arbitrários em $\mathbb{R}[x, y, z]$. Substituindo φ, λ_2 e λ_3 no sistema (3.3), obtemos o sistema (S) do item (i), cuja esfera $\mathcal{G} = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ é uma superfície algébrica invariante com cofator $K = \varphi$. De fato,

$$\begin{aligned}
X(\mathcal{G}) &= 2xP + 2yQ + 2zR \\
&= 2x(\mathcal{G}A - 2yD - 2zE) + 2y(\mathcal{G}B + 2xD - 2zF) + 2z(\mathcal{G}C - 2xE + 2yF) \\
&= 2x\mathcal{G}A + 2y\mathcal{G}B + 2z\mathcal{G}C = (2xA + 2yB + 2zC)\mathcal{G} \\
&= \varphi\mathcal{G}.
\end{aligned}$$

Agora, seja \mathcal{Z} o campo vetorial associado a um sistema diferencial polinomial arbitrário que tem como superfície algébrica invariante uma esfera $\mathcal{G} = 0$. Vamos mostrar que $\mathcal{Z} \equiv \mathcal{Y}$. Após uma mudança afim de coordenadas, podemos considerar $\mathcal{G} = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Como vimos anteriormente, pelo Teorema 2, o sistema (3.3) é o sistema diferencial polinomial mais geral em \mathbb{R}^3 que admite $\mathcal{G} = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ como superfície algébrica invariante e, portanto, para escolhas adequadas dos polinômios φ, λ_2 e λ_3 , é possível obter $\mathcal{X}(G) = \mathcal{Z}(G)$, onde G é um polinômio arbitrário de $\mathbb{R}[x, y, z]$, conforme vimos na prova do Teorema 2. Analogamente, para a escolha (3.6) dos parâmetros φ, λ_2 e λ_3 , temos que $\mathcal{X}(G) = \mathcal{Y}(G)$. Então, por transitividade, $\mathcal{Z}(G) = \mathcal{Y}(G)$. Desde modo, qualquer sistema diferencial polinomial em \mathbb{R}^3 com uma esfera como superfície algébrica invariante é equivalente ao sistema (S), a menos de mudanças afins de coordenadas. Assim, provamos o item (i) do teorema.

Seguindo os mesmos passos, provamos os demais itens. Em cada caso, após uma mudança afim de coordenadas, podemos considerar a equação da quádrlica invariante como sendo uma daquelas fornecidas na Tabela 3.1, dependendo da classificação desta

quádrica. Em seguida, conseguimos determinar os polinômios φ , λ_2 e λ_3 no sistema (3.2) do Teorema 2 para cada um dos casos e obter suas respectivas formas normais.

Note que, em cada um dos casos, podemos mostrar facilmente que a quádrica $\mathcal{G} = 0$ é uma superfície algébrica invariante do sistema obtido com cofator $K = \varphi$. \square

Observe que, se um sistema diferencial polinomial arbitrário possui uma das quádricas do teorema anterior como superfície algébrica invariante, então, após uma mudança afim de coordenadas, ele pode ser colocado em uma das formas normais dos itens (i) – (viii) do Teorema 3. Considere, por exemplo, um sistema diferencial polinomial com uma esfera invariante $\mathcal{G} = 0$. Então, após uma mudança afim de coordenadas, podemos considerar $\mathcal{G} = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ como sendo a equação da esfera invariante e o sistema pode ser colocado na forma normal do item (i) do Teorema 3. De fato, ser colocado na forma normal do item (i) significa que podemos determinar os polinômios A, \dots, F de modo que ao substituí-los no sistema (S) obtemos o sistema dado. Porém, nem sempre esta é uma tarefa fácil. Em alguns casos, precisamos observar que substituindo $f_1 = \mathcal{G} = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ no sistema (3.2) do Teorema 2, que é o sistema mais geral que possui a superfície algébrica invariante $f_1 = 0$ (neste caso, obtemos o sistema (3.3) da prova do Teorema 3), e agrupando convenientemente os termos das equações podemos escrevê-lo da forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{1}{2(xJ_1 + yJ_2 + zJ_3)} [\varphi \mathcal{G} J_1 + 2y(\lambda_3 f_{2z} - \lambda_2 f_{3z}) + 2z(\lambda_2 f_{3y} - \lambda_3 f_{2y})], \\ \dot{y} &= \frac{1}{2(xJ_1 + yJ_2 + zJ_3)} [\varphi \mathcal{G} J_2 + 2x(\lambda_2 f_{3z} - \lambda_3 f_{2z}) + 2z(\lambda_3 f_{2x} - \lambda_2 f_{3x})], \\ \dot{z} &= \frac{1}{2(xJ_1 + yJ_2 + zJ_3)} [\varphi \mathcal{G} J_3 + 2x(\lambda_3 f_{2y} - \lambda_2 f_{3y}) + 2y(\lambda_2 f_{3x} - \lambda_3 f_{2x})].\end{aligned}$$

Comparando os termos das equações do sistema obtido acima com os termos das equações do sistema (S), note que os polinômios A, \dots, F do sistema (S) satisfazem as igualdades

$$\begin{aligned}2(xJ_1 + yJ_2 + zJ_3)A &= \varphi J_1, \\ 2(xJ_1 + yJ_2 + zJ_3)B &= \varphi J_2, \\ 2(xJ_1 + yJ_2 + zJ_3)C &= \varphi J_3, \\ 2(xJ_1 + yJ_2 + zJ_3)D &= \lambda_2 f_{3z} - \lambda_3 f_{2z}, \\ 2(xJ_1 + yJ_2 + zJ_3)E &= \lambda_2 f_{3y} - \lambda_3 f_{2y}, \\ 2(xJ_1 + yJ_2 + zJ_3)F &= \lambda_2 f_{3x} - \lambda_3 f_{2x}.\end{aligned}$$

Em seguida, determinamos φ , λ_2 e λ_3 no sistema (3.3) utilizando a relação

$$\lambda_j = \mathcal{Y}(f_j),$$

para $j = 1, 2, 3$, onde $\lambda_1 = \varphi \mathcal{G}$ e \mathcal{Y} é o campo vetorial associado ao sistema diferencial dado. Assim, obtemos o sistema dado ao substituir A, \dots, F no sistema (S), com A, \dots, F satisfazendo as igualdades acima e considerando os valores de φ , λ_2 e λ_3 encontrados anteriormente. Esta ideia será utilizada quando analisarmos os casos (b) e (c) do sistema de Chen na Seção 3.2.

O próximo teorema trata do caso das quádricas degeneradas. Porém, para prová-lo precisaremos da seguinte proposição, que também pode ser encontrada em [17].

Proposição 4 *Suponha que $f \in \mathbb{C}[x, y, z]$ e seja $f = f_1 f_2$ sua fatoração em fatores irredutíveis em $\mathbb{C}[x, y, z]$. Então, $f = 0$ é uma superfície algébrica invariante do sistema diferencial (3.1) com cofator K se, e somente se, $f_1 = 0$ e $f_2 = 0$ são superfícies algébricas invariantes do sistema (3.1) com cofatores K_1 e K_2 , respectivamente. Além disso, $K = K_1 + K_2$.*

Prova. Seja \mathcal{X} o campo vetorial associado ao sistema diferencial (3.1). É fácil verificar que

$$\mathcal{X}(f_1 f_2) = \mathcal{X}(f_1) f_2 + f_1 \mathcal{X}(f_2). \quad (3.7)$$

Suponha que $f = f_1 f_2 = 0$ seja uma superfície algébrica invariante do sistema (3.1) com cofator K . Então, por definição, $\mathcal{X}(f) = K f$ e, da igualdade acima, obtemos $K f_1 f_2 = \mathcal{X}(f_1) f_2 + f_1 \mathcal{X}(f_2)$. Como f_1 e f_2 são relativamente primos em $\mathbb{C}[x, y, z]$ e K é um polinômio, então f_1 divide $\mathcal{X}(f_1)$ e f_2 divide $\mathcal{X}(f_2)$. Denotando por K_1 o quociente $\mathcal{X}(f_1)/f_1$ e por K_2 o quociente $\mathcal{X}(f_2)/f_2$, temos que $f_1 = 0$ e $f_2 = 0$ são superfícies algébricas invariantes do sistema (3.1) com cofatores K_1 e K_2 , respectivamente. Além disso,

$$K_1 + K_2 = \frac{\mathcal{X}(f_1)}{f_1} + \frac{\mathcal{X}(f_2)}{f_2} = \frac{\mathcal{X}(f_1) f_2 + f_1 \mathcal{X}(f_2)}{f_1 f_2} = \frac{\mathcal{X}(f)}{f} = K.$$

Quanto à recíproca, se $f_1 = 0$ e $f_2 = 0$ são superfícies algébricas invariantes do sistema (3.1) com cofatores K_1 e K_2 , respectivamente, então $\mathcal{X}(f_1) = K_1 f_1$ e $\mathcal{X}(f_2) = K_2 f_2$. Utilizando a igualdade (3.7), obtemos que

$$\mathcal{X}(f_1 f_2) = (K_1 + K_2) f_1 f_2,$$

ou seja, $f = f_1 f_2 = 0$ é superfície algébrica invariante do sistema (3.1) com cofator $K = K_1 + K_2$. \square

A proposição anterior pode ser utilizada para provar um resultado análogo para o caso em que o polinômio $f \in \mathbb{C}[x, y, z]$ é fatorado em n fatores irredutíveis $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{C}[x, y, z]$, isto é, $f = f_1 \cdots f_n$ (veja Proposição 8.4 de [17]).

Teorema 4 *Assuma que a quádrlica degenerada $\mathcal{G} = 0$ seja uma superfície algébrica invariante do sistema diferencial (3.1). Então, após uma mudança afim de coordenadas, a equação \mathcal{G} da quádrlica e o sistema (3.1) podem ser escritos em uma das quatro formas normais abaixo, onde A, B, C, D, E, F, Q e R são polinômios arbitrários em $\mathbb{R}[x, y, z]$.*

- (i) *Se o sistema (3.1) é do tipo (RPP), (CPP) ou (DP), então podemos escrever $\mathcal{G} = x^2 - 1$, no caso (RPP), $\mathcal{G} = x^2 + 1$, no caso (CPP), ou $\mathcal{G} = x^2$, no caso (DP), e o sistema (3.1) pode ser escrito da forma*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mathcal{G}M, \\ \dot{y} &= Q, \\ \dot{z} &= R. \end{aligned} \tag{RPP, CPP, DP}$$

- (ii) *Se o sistema (3.1) é do tipo (r), então podemos escrever $\mathcal{G} = xy$ e o sistema (3.1) pode ser escrito da forma*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= xK_1, \\ \dot{y} &= yK_2, \\ \dot{z} &= R, \end{aligned} \tag{r}$$

onde K_1 e K_2 são os cofatores dos planos invariantes $x = 0$ e $y = 0$, respectivamente.

- (iii) *Se o sistema (3.1) é do tipo (s), então podemos escrever $\mathcal{G} = x^2 + y^2$ e o sistema (3.1) pode ser escrito da forma*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mathcal{G}A - 2yD, \\ \dot{y} &= \mathcal{G}B + 2xD, \\ \dot{z} &= R. \end{aligned} \tag{s}$$

(iv) Se o sistema (3.1) é do tipo (P), então podemos escrever $\mathcal{G} = x^2 + y^2 + z^2$ e o sistema (3.1) pode ser escrito da forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mathcal{G}A - 2yD + 2zE, \\ \dot{y} &= \mathcal{G}B + 2xD - 2zF, \\ \dot{z} &= \mathcal{G}C - 2xE + 2yF.\end{aligned}\tag{P}$$

Prova. Seja \mathcal{X} o campo vetorial associado ao sistema diferencial (3.1) e suponha que o sistema (3.1) é do tipo (RPP). Após uma mudança afim de coordenadas, podemos assumir que $\mathcal{G} = x^2 - 1 = 0$ é a equação da quádrlica invariante do sistema (3.1). Note que $\mathcal{G} = g_1 g_2$, onde $g_1 = x - 1$ e $g_2 = x + 1$ são polinômios irredutíveis em $\mathbb{C}[x, y, z]$. Então, de acordo com a Proposição 4, $g_1 = x - 1 = 0$ e $g_2 = x + 1 = 0$ são planos invariantes do sistema (3.1) com cofatores K_1 e K_2 , respectivamente. Lembrando que $\mathcal{X} = (P, Q, R)$ e usando a definição de superfícies algébricas invariantes, temos que

$$\mathcal{X}(g_1) = K_1 g_1 \Rightarrow P = K_1 (x - 1).$$

Analogamente,

$$\mathcal{X}(g_2) = K_2 g_2 \Rightarrow P = K_2 (x + 1).$$

Como K_1 e K_2 são polinômios, segue que P é divisível por $x - 1$ e por $x + 1$. Logo, $P = (x^2 - 1)M = \mathcal{G}M$, onde M é um polinômio em $\mathbb{R}[x, y, z]$ tal que $K = 2xM$ é o cofator da quádrlica invariante $\mathcal{G} = x^2 + 1 = 0$. Observe que, como \mathcal{G} depende apenas da variável x , então suas derivadas parciais em relação a y e a z são nulas. Deste modo, os polinômios Q e R no sistema (3.1) podem ser arbitrários. Assim, obtemos a forma normal do item (i) para o caso (RPP).

Se o sistema (3.1) é do tipo (CPP), então, após uma mudança afim de coordenadas, podemos considerar $\mathcal{G} = x^2 + 1 = 0$ como sendo a sua quádrlica invariante. Pela Proposição 4, $g_1 = x - i = 0$ e $g_2 = x + i = 0$ são superfícies algébricas invariantes do sistema (3.1). Usando os mesmos argumentos do caso anterior, obtemos $P = \mathcal{G}M$, onde M é um polinômio em $\mathbb{R}[x, y, z]$ tal que $K = 2xM$ é o cofator da quádrlica $\mathcal{G} = 0$. Deste modo, obtemos a forma normal do item (i) para o caso (CPP).

Suponha que o sistema (3.1) é do tipo (DP). Após uma mudança afim de coordenadas, podemos considerar $\mathcal{G} = x^2 = 0$ como sendo a quádrlica invariante do sistema (3.1). Note que, neste caso, $g = x = 0$ é um plano invariante do sistema (3.1) de multiplicidade

2 (para a definição de multiplicidade (algébrica) de superfícies algébricas invariantes, veja a Definição 4 no Capítulo 2). Considere uma pequena perturbação no sistema (3.1) com a qual o plano invariante $g = x = 0$ de multiplicidade 2 bifurca-se em dois planos paralelos $g_1 = x - \varepsilon = 0$ e $g_2 = x + \varepsilon = 0$ (veja as diferentes interpretações de multiplicidade de curvas algébricas invariantes em \mathbb{R}^2 em [9], cujos resultados podem ser naturalmente estendidos para dimensões maiores e, em particular, para superfícies algébricas invariantes em \mathbb{R}^3 , veja também [53, 56]). Do caso (RPP), podemos escrever $P = (x^2 - \varepsilon^2) M$, com M como anteriormente. Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, obtemos $P = x^2 M = \mathcal{G} M$ e podemos escrever o sistema (3.1) na forma normal do item (i). Por fim, é fácil verificar que a quádrlica $\mathcal{G} = x^2 = 0$ é uma superfície algébrica invariante da forma normal do item (i). Isto completa a prova do item (i) do teorema.

Analogamente aos casos (RPP) e (CPP), se o sistema (3.1) é do tipo (r), então, após uma mudança afim de coordenadas, podemos tomar $\mathcal{G} = xy = 0$ como sendo a quádrlica invariante do sistema (3.1) e, conseqüentemente, pela Proposição 4, $g_1 = x = 0$ e $g_2 = y = 0$ são planos invariantes do sistema (3.1). Usando a definição de superfícies algébricas invariantes, obtemos $P = x K_1$ e $Q = y K_2$, onde K_1 e K_2 são os cofatores de $g_1 = x = 0$ e $g_2 = y = 0$, respectivamente. Assim, obtemos a forma normal do item (ii) do teorema.

Agora, suponha que o sistema (3.1) seja do tipo (s). Após uma mudança afim de coordenadas, podemos considerar $\mathcal{G} = x^2 + y^2 = 0$ como sendo a quádrlica invariante do sistema (3.1). Para provar este caso, seguiremos o que foi feito na prova do Teorema 3. Considerando $f_1 = \mathcal{G} = x^2 + y^2$ no Teorema 2, podemos escrever o sistema (3.2) como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{2(x J_1 + y J_2)} [\varphi \mathcal{G} J_1 - \lambda_2 2y f_{3z} + \lambda_3 2y f_{2z}], \\ \dot{y} &= \frac{1}{2(x J_1 + y J_2)} [\varphi \mathcal{G} J_2 + \lambda_2 2x f_{3z} - \lambda_3 2x f_{2z}], \\ \dot{z} &= \frac{1}{2(x J_1 + y J_2)} [\varphi \mathcal{G} J_3 + \lambda_2 (2y f_{3x} - 2x f_{3y}) + \lambda_3 (2x f_{2y} - 2y f_{2x})], \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde $f_{iv} = \partial f_i / \partial v$ são as derivadas parciais de f_i em relação a v , com v percorrendo as variáveis x , y e z , para $i = 2, 3$; φ , λ_2 , λ_3 , f_2 e f_3 são polinômios arbitrários em $\mathbb{R}[x, y, z]$ satisfazendo a condição $\{f_1, f_2, f_3\} \neq 0$; e J_1 , J_2 e J_3 são dados em (3.4). Como a quádrlica $\mathcal{G} = x^2 + y^2 = 0$ não depende de z , então podemos tomar $\dot{z} = R$, com R um polinômio arbitrário em $\mathbb{R}[x, y, z]$. Considerando \mathcal{Y} o campo vetorial associado ao sistema (s) e tomando λ_1 , λ_2 e λ_3 como na prova do Teorema 2, com $\lambda_1 = \varphi \mathcal{G}$, obtemos

$$\begin{aligned}\varphi &= 2(xA + yB), \\ \lambda_2 &= 2D(xf_{2y} - yf_{2x}) + Rf_{2z} + \mathcal{G}(Af_{2x} + Bf_{2y}), \\ \lambda_3 &= 2D(xf_{3y} - yf_{3x}) + Rf_{3z} + \mathcal{G}(Af_{3x} + Bf_{3y}),\end{aligned}$$

onde A , B , D e R são polinômios arbitrários em $\mathbb{R}[x, y, z]$. Substituindo φ , λ_2 e λ_3 no sistema (3.8), obtemos o sistema (s) do item (iii), cuja quádrlica $\mathcal{G} = x^2 + y^2 = 0$ é uma superfície algébrica invariante com cofator $K = \varphi$. Deste modo, provamos o item (iii) do teorema.

Por fim, suponha que o sistema (3.1) seja do tipo (P). Após uma mudança afim de coordenadas, podemos considerar $\mathcal{G} = x^2 + y^2 + z^2 = 0$ como sendo a quádrlica invariante. Realizando cálculos análogos ao caso anterior, obtemos a forma normal (P) do item (iv). Isto finaliza a prova do Teorema 4. \square

Os Teoremas 3 e 4 também estão provados em [45]. Deste modo, se o sistema diferencial (3.1) tem uma quádrlica como superfície algébrica invariante, então o sistema (3.1) pode ser escrito em uma das formas normais dadas pelos Teoremas 3 e 4 de acordo com a classificação desta quádrlica.

3.2 Um exemplo de sistema diferencial com quádrlicas invariantes: O sistema de Chen

O sistema de Chen é a família de equações diferenciais quadráticas dadas por

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \alpha(v - u), \\ \dot{v} &= (\gamma - \alpha)u - uw + \gamma v, \\ \dot{w} &= uv - \beta w,\end{aligned}\tag{3.9}$$

onde α , β e γ são parâmetros reais. O sistema (3.9) foi estudado pela primeira vez por Chen e Ueta em [7] e, para escolhas adequadas dos parâmetros α , β e γ , ele exibe comportamento caótico. O próximo resultado foi provado em [50, 59] e caracteriza todos os valores dos parâmetros α , β e γ para os quais o sistema de Chen possui uma superfície algébrica invariante.

Proposição 5 *Se $\alpha \neq 0$, então o sistema diferencial (3.9) tem uma das seis superfícies algébricas invariantes $F_i = F_i(u, v, w) = 0$ com cofatores K_i , para $i = 1, \dots, 6$, dependendo da escolha dos parâmetros α , β e γ , conforme pode ser visto na Tabela 3.3.*

Caso	Parâmetros	Superfície algébrica invariante	Cofator
(a)	$\beta = 2\alpha$	$F_1 = u^2 - 2\alpha w = 0$	$K_1 = -2\alpha$
(b)	$\alpha = -\beta = \gamma$	$F_2 = v^2 + w^2 = 0$	$K_2 = 2\alpha$
(c)	$\alpha = \beta = -\gamma$	$F_3 = 2u^2 + v^2 + w^2 = 0$	$K_3 = -2\alpha$
(d)	$\beta = 0, \gamma = -3\alpha$	$F_4 = u^4 + \frac{4}{3}\gamma u^2 w - \frac{4}{9}\gamma^2 v^2 - \frac{8}{9}\gamma^2 uv - \frac{16}{9}\gamma^2 u^2 = 0$	$K_4 = -4\alpha$
(e)	$\beta = 4\alpha, \gamma = -\alpha$	$F_5 = u^4 + 4\gamma u^2 w - 4\gamma^2 v^2 + 8\gamma^2 uv + 8\gamma^2 u^2 + 48\gamma^3 w = 0$	$K_5 = -4\alpha$
(f)	$\beta = \gamma = 0$	$F_6 = v^2 + w^2 + 2\alpha w = 0$	$K_6 = 0$

Tabela 3.3: Superfícies algébricas invariantes do sistema (3.9), dependendo da escolha dos parâmetros α , β e γ .

Em [40], os autores fizeram uma análise global da dinâmica do sistema (3.9) para cada um dos casos apresentados na Tabela 3.3.

Note que as superfícies algébricas invariantes $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$ e $F_6 = 0$ dadas pela Tabela 3.3 são quádricas. Então, mostraremos que o sistema de Chen é equivalente a uma das formas normais dos Teoremas 3 e 4 nos casos (a), (b), (c) e (f) da Tabela 3.3. Esta análise foi apresentada em [45].

Caso (a): Se $\beta = 2\alpha$ no sistema (3.9), então $F_1 = u^2 - 2\alpha w = 0$ é uma superfície algébrica invariante do sistema (3.9) com cofator $K_1 = -2\alpha$. Após a mudança de coordenadas $x = 2\alpha w$, $y = v$ e $z = u$, podemos escrever o sistema (3.9) como

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= 2\alpha(yz - x), \\
 \dot{y} &= (\gamma - \alpha)z - \frac{1}{2\alpha}xz + \gamma y, \\
 \dot{z} &= \alpha(y - z),
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

e o cilindro parabólico $\mathcal{G} = z^2 - x = 0$ é uma superfície algébrica invariante do sistema (3.10) com cofator $K = -2\alpha$. Note que o sistema (3.10) é da forma (PC) do Teorema 3. De fato, basta considerarmos

$$\begin{aligned} A &= 2\alpha, \\ C &= 0, \\ E &= \alpha(y - z), \\ Q &= (\gamma - \alpha)z - \frac{1}{2\alpha}xz + \gamma y, \end{aligned}$$

no sistema (PC).

Caso (b): Se tomamos $\alpha = -\beta = \gamma$ no sistema (3.9), então $F_2 = v^2 + w^2 = 0$ é uma superfície algébrica invariante do sistema (3.9) com cofator $K_2 = 2\alpha$. Após a mudança de coordenadas $x = w$, $y = v$ e $z = u$, podemos escrever o sistema (3.9) como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= yz + \alpha x, \\ \dot{y} &= -xz + \alpha y, \\ \dot{z} &= \alpha(y - z), \end{aligned} \tag{3.11}$$

e $\mathcal{G} = x^2 + y^2 = 0$ é uma quádrlica invariante do sistema (3.11) com cofator $K = 2\alpha$. Note que o sistema (3.11) é do tipo (s) e pode ser escrito na forma normal do item (iii) do Teorema 4. Para isto, temos que determinar os polinômios A , B , D e R de modo a obter o sistema (3.11) ao substituí-los no sistema (s). Tomando $R = \alpha(y - z)$ e, comparando os termos das duas primeiras equações do sistema obtido ao se considerar $f_1 = \mathcal{G} = x^2 + y^2$ no sistema (3.2) do Teorema 2 com os termos das duas primeiras equações do sistema (s), tem-se que os polinômios A , B e D satisfazem as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} 2(x J_1 + y J_2) A &= \varphi J_1, \\ 2(x J_1 + y J_2) B &= \varphi J_2, \\ 2(x J_1 + y J_2) D &= \lambda_2 f_{3z} - \lambda_3 f_{2z}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

onde $J_1 = f_{2y}f_{3z} - f_{2z}f_{3y}$ e $J_2 = f_{3x}f_{2z} - f_{2x}f_{3z}$, com f_2 e f_3 polinômios arbitrários em $\mathbb{R}[x, y, z]$ tais que $\{\mathcal{G}, f_2, f_3\} \neq 0$ e $f_{iv} = \partial f_i / \partial v$ são as derivadas parciais de f_i em relação v , para $i = 2, 3$ e v percorrendo as variáveis x , y e z . Em seguida, determinamos φ , λ_2 e λ_3 utilizando a relação $\lambda_j = \mathcal{Y}(f_j)$, para $j = 1, 2, 3$, onde $\lambda_1 = \varphi \mathcal{G}$ e \mathcal{Y} é o campo vetorial

associado ao sistema (3.11). Deste modo, obtemos

$$\begin{aligned}\varphi &= 2a, \\ \lambda_2 &= (yz + \alpha x) f_{2x} + (-xz + \alpha y) f_{2y} + \alpha(y - z) f_{2z}, \\ \lambda_3 &= (yz + \alpha x) f_{3x} + (-xz + \alpha y) f_{3y} + \alpha(y - z) f_{3z}.\end{aligned}\tag{3.13}$$

Assim, considerando $R = \alpha(y - z)$ e A, B e D satisfazendo as relações (3.12) no sistema (s), com φ, λ_2 e λ_3 dados por (3.13), obtemos o sistema (3.11).

Caso (c): Se $\alpha = \beta = -\gamma$ no sistema (3.9), então $F_3 = 2u^2 + v^2 + w^2 = 0$ é uma superfície algébrica invariante do sistema com cofator $K_3 = -2\alpha$. Fazendo a mudança de coordenadas $x = \sqrt{2}u, y = v$ e $z = w$, o sistema (3.9) pode ser escrito como

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sqrt{2}\alpha y - \alpha x, \\ \dot{y} &= -\sqrt{2}\alpha x - \frac{\sqrt{2}}{2}xz - \alpha y, \\ \dot{z} &= \frac{\sqrt{2}}{2}xy - \alpha z,\end{aligned}\tag{3.14}$$

e $\mathcal{G} = x^2 + y^2 + z^2 = 0$ é sua quádrlica invariante com cofator $K = -2\alpha$. Note que o sistema (3.14) é do tipo (P) e podemos escrevê-lo na forma normal do item (iv) do Teorema 4. Para isto, temos que determinar os polinômios A, \dots, F de modo a obter o sistema (3.14) ao substituí-los no sistema (P). Comparando os termos das equações do sistema obtido ao se considerar $f_1 = \mathcal{G} = x^2 + y^2 + z^2$ no sistema (3.2) do Teorema 2 com os termos das equações do sistema (P), tem-se que os polinômios A, \dots, F satisfazem as seguintes igualdades

$$\begin{aligned}2(xJ_1 + yJ_2 + zJ_3)A &= \varphi J_1, \\ 2(xJ_1 + yJ_2 + zJ_3)B &= \varphi J_2, \\ 2(xJ_1 + yJ_2 + zJ_3)C &= \varphi J_3, \\ 2(xJ_1 + yJ_2 + zJ_3)D &= \lambda_2 f_{3z} - \lambda_3 f_{2z}, \\ 2(xJ_1 + yJ_2 + zJ_3)E &= \lambda_2 f_{3y} - \lambda_3 f_{2y}, \\ 2(xJ_1 + yJ_2 + zJ_3)F &= \lambda_2 f_{3x} - \lambda_3 f_{2x},\end{aligned}\tag{3.15}$$

onde $J_1 = f_{2y}f_{3z} - f_{2z}f_{3y}$, $J_2 = f_{3x}f_{2z} - f_{2x}f_{3z}$ e $J_3 = f_{2x}f_{3y} - f_{3x}f_{2y}$, com f_2 e f_3 polinômios arbitrários em $\mathbb{R}[x, y, z]$ tais que $\{\mathcal{G}, f_2, f_3\} \neq 0$ e $f_{iv} = \partial f_i / \partial v$ são as derivadas parciais de f_i em relação a v , para $i = 2, 3$ e v percorrendo as variáveis x, y e z . Agora,

utilizando a relação $\lambda_j = \mathcal{Y}(f_j)$, para $j = 1, 2, 3$, onde $\lambda_1 = \varphi \mathcal{G}$ e \mathcal{Y} é o campo vetorial associado ao sistema (3.14), obtemos

$$\begin{aligned}\varphi &= -2\alpha, \\ \lambda_2 &= f_{2x} (\sqrt{2}\alpha y - \alpha x) + f_{2y} \left(-\sqrt{2}\alpha x - \frac{\sqrt{2}}{2}xz - \alpha y \right) + f_{2z} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}xy - \alpha z \right), \\ \lambda_3 &= f_{3x} (\sqrt{2}\alpha y - \alpha x) + f_{3y} \left(-\sqrt{2}\alpha x - \frac{\sqrt{2}}{2}xz - \alpha y \right) + f_{3z} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}xy - \alpha z \right).\end{aligned}\tag{3.16}$$

Assim, considerando A, \dots, F satisfazendo as relações (3.15) no sistema (P), com φ , λ_2 e λ_3 dados por (3.16), obtemos o sistema (3.14).

Caso (f): Se tomarmos $\beta = \gamma = 0$ no sistema (3.9), então o cilindro elíptico $F_6 = v^2 + w^2 + 2\alpha w = v^2 + (w + \alpha)^2 - \alpha^2 = 0$ é uma superfície algébrica invariante do sistema (3.9) com cofator $K_6 = 0$. Note que, neste caso, F_6 é uma integral primeira polinomial do sistema (3.9) e o seu espaço de fase é folheado por cilindros elípticos invariantes. Fazendo a mudança de coordenadas $x = v$, $y = u$ e $z = w + \alpha$ e considerando $\alpha = 1$, podemos escrever o sistema (3.9) como

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -yz, \\ \dot{y} &= x - y, \\ \dot{z} &= xy,\end{aligned}\tag{3.17}$$

e o cilindro elíptico $\mathcal{G} = x^2 + z^2 - 1 = 0$ é sua superfície algébrica invariante com cofator $K = 0$. Logo, o sistema (3.17) é do tipo (EC) e para escrevê-lo na forma normal do item (iv) do Teorema 3, basta considerar $A = C = 0$, $E = -y/2$ e $Q = x - y$ no sistema (EC). A dinâmica global do sistema de Chen neste caso foi estudada em [40], onde os autores mostraram que este sistema tem infinitas conexões heteroclínicas, cada par pertencendo a um dos cilindros invariantes.

3.3 Integrabilidade de sistemas diferenciais quadráticos com um parabolóide invariante

Nesta seção, estudamos a integrabilidade e a dinâmica de sistemas diferenciais quadráticos definidos em \mathbb{R}^3 com um parabolóide elíptico como superfície algébrica in-

variante, conforme feito em [60]. Utilizando o item (v) do Teorema 3 e considerando $\mathcal{G} = x^2 + y^2 - z = 0$ como sendo a equação normalizada do parabolóide (ao invés de $\mathcal{G} = y^2 + z^2 - x = 0$ como no Teorema 3), temos que este tipo de sistema, após uma mudança afim de coordenadas, é dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(x^2 + y^2 - z) - 2yD(x, y, z) - E(x, y, z), \\ \dot{y} &= b(x^2 + y^2 - z) + 2xD(x, y, z) + F(x, y, z), \\ \dot{z} &= c(x^2 + y^2 - z) - 2xE(x, y, z) + 2yF(x, y, z),\end{aligned}\tag{3.18}$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$; D, E e F são polinômios arbitrários em $\mathbb{R}[x, y, z]$ de grau menor ou igual a um, para $i = 1, 2, 3$; e $\mathcal{G} = x^2 + y^2 - z = 0$ é o parabolóide invariante do sistema (3.18). Considere

$$D(x, y, z) = d_0 + d_1x + d_2y + d_3z,$$

$$E(x, y, z) = e_0 + e_1x + e_2y + e_3z,$$

$$F(x, y, z) = f_0 + f_1x + f_2y + f_3z,$$

onde $d_i, e_i, f_i \in \mathbb{R}$, para $i = 0, 1, 2, 3$.

Utilizando o parabolóide invariante $\mathcal{G} = 0$, conseguimos provar a existência de integrais primeiras, fatores exponenciais, invariantes de Darboux e multiplicadores de Jacobi inversos do sistema (3.18), para escolhas adequadas dos parâmetros. Porém, antes de fazermos isto, precisaremos das seguintes definições e resultados preliminares.

A definição de integral primeira foi dada no Capítulo 1 (Definição 2). A seguir, damos a definição de fator exponencial, invariante de Darboux e multiplicador de Jacobi inverso. Seja \mathcal{X} o campo vetorial polinomial de grau m associado ao sistema diferencial (3.1).

Definição 6 (Fator exponencial) *Sejam $g, h \in \mathbb{C}[x, y, z] \setminus \{0\}$ e assumamos que g e h são relativamente primos em $\mathbb{C}[x, y, z]$ ou que $h = 1$. A função $F = \exp(g/h)$ é um fator exponencial do sistema (3.1) se, para algum polinômio $L = L(x, y, z)$ em $\mathbb{C}[x, y, z]$ de grau no máximo $m - 1$, temos*

$$\mathcal{X}(F) = P \frac{\partial F}{\partial x} + Q \frac{\partial F}{\partial y} + R \frac{\partial F}{\partial z} = LF.$$

Definição 7 (Invariante de Darboux) *Um invariante do sistema (3.1) em um subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^3$ é uma função analítica não-constante I nas variáveis x, y, z e t tal que I é constante sobre todas as soluções $(x(t), y(t), z(t))$ do sistema (3.1) contidas em U , isto é,*

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial x} P + \frac{\partial I}{\partial y} Q + \frac{\partial I}{\partial z} R + \frac{\partial I}{\partial t} \equiv 0 \quad \text{em } U.$$

Dizemos que um invariante I do campo vetorial \mathcal{X} é de Darboux, se ele pode ser escrito da forma

$$I(x, y, z, t) = f_1^{\alpha_1} \cdots f_p^{\alpha_p} F_1^{\beta_1} \cdots F_q^{\beta_q} e^{st},$$

onde $f_i = 0$ são superfícies algébricas invariantes de \mathcal{X} , para $i = 1, \dots, p$; F_j são fatores exponenciais de \mathcal{X} , para $j = 1, \dots, q$; $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{C}$; e $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

De certa maneira, um invariante I do sistema (3.1) é uma integral primeira que depende do tempo t .

Seja $\varphi_p(t)$ a solução do sistema (3.1) passando pelo ponto $p \in \mathbb{R}^3$, definida em seu intervalo maximal (α_p, ω_p) tal que $\varphi_p(0) = p$. Se $\omega_p = \infty$ definimos o conjunto

$$\omega(p) = \{q \in \mathbb{R}^3 : \text{existe } (t_n)_{n=0}^{\infty} \text{ com } t_n \rightarrow \infty \text{ e } \varphi_p(t_n) \rightarrow q \text{ quando } n \rightarrow \infty\},$$

onde $(t_n)_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência infinita de pontos. Analogamente, se $\alpha_p = -\infty$ definimos o conjunto

$$\alpha(p) = \{q \in \mathbb{R}^3 : \text{existe } (t_n)_{n=0}^{\infty} \text{ com } t_n \rightarrow -\infty \text{ e } \varphi_p(t_n) \rightarrow q \text{ quando } n \rightarrow \infty\}.$$

Os conjuntos $\omega(p)$ e $\alpha(p)$ são chamados de *conjunto ω -limite* e *conjunto α -limite* de p , respectivamente.

O conhecimento de um invariante de Darboux fornece informações a respeito dos conjuntos α - e ω -limite de todas as órbitas do sistema (3.1). Em outras palavras, dada um órbita do sistema (3.1), conhecendo-se um invariante de Darboux deste sistema é possível determinar onde ela “nasce” e onde ela “morre”. Mais precisamente, temos o seguinte resultado, provado em [46] para o caso planar, mas que provamos aqui para \mathbb{R}^3 .

Proposição 6 *Seja $I(x, y, z, t) = f(x, y, z) e^{st}$, com $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, um invariante de Darboux do sistema (3.1). Se $p \in \mathbb{R}^3$ e $\varphi_p(t)$ é a solução do sistema (3.1) com intervalo maximal (α_p, ω_p) tal que $\varphi_p(0) = p$, então valem as seguintes afirmações.*

- (a) *Se $\omega_p = \infty$, então $\omega(p) \subset \overline{W} \cup \mathbb{S}^2$;*

(b) Se $\alpha_p = -\infty$, então $\alpha(p) \subset \overline{W} \cup \mathbb{S}^2$,

onde $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; f(x, y, z) = 0\}$ e \mathbb{S}^2 é a fronteira da bola de Poincaré, que corresponde aos pontos do espaço de fase do sistema no infinito.

Prova. Seja $\varphi_p(t) = (x_p(t), y_p(t), z_p(t))$. Como $I(x, y, z, t) = f(x, y, z) e^{st}$ é um invariante do sistema (3.1), segue que $I(\varphi_p(t), t) = k \in \mathbb{R}$, para todo $t \in (\alpha_p, \omega_p)$. Então,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(\varphi_p(t)) e^{st} = \lim_{t \rightarrow \infty} I(\varphi_p(t), t) = k \in \mathbb{R}.$$

Se $s > 0$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{st} = \infty$ e, conseqüentemente, $\lim_{t \rightarrow \infty} f(\varphi_p(t)) = 0$. Agora, se $s < 0$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{st} = 0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} f(\varphi_p(t)) = \infty$. Portanto, da definição de conjunto ω -limite e da continuidade de f , segue que $\omega(p) \subset \overline{W} \cup \mathbb{S}^2$.

Analogamente, mostramos que $\alpha(p) \subset \overline{W} \cup \mathbb{S}^2$. □

A definição precisa de bola de Poincaré é dada no Apêndice A. A Proposição 6 será importante para provar o Corolário 1 do Teorema 5.

Definição 8 (Multiplicador de Jacobi inverso) *A função de classe C^1 e não localmente constante $V : U \rightarrow \mathbb{R}$, onde U é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^3 , é um multiplicador de Jacobi inverso de \mathcal{X} em U se satisfaz a equação diferencial parcial de primeira ordem*

$$\mathcal{X}(V) = V \operatorname{div}(\mathcal{X}) \quad \text{em } U,$$

onde

$$\operatorname{div}(\mathcal{X}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

é o divergente do campo vetorial \mathcal{X} .

No caso planar, multiplicadores de Jacobi inversos são chamados de fatores integrantes inversos, os quais são importantes para a obtenção de integrais primeiras. Em [5], os autores estudaram a relação entre os multiplicadores de Jacobi inversos do sistema (3.1) e as variedades centrais. Mais precisamente, eles discutiram sob quais condições uma variedade central local está contida no conjunto de zeros de um multiplicador de Jacobi inverso e deram outra solução para o problema do foco-centro em \mathbb{R}^3 , formulado em termos de multiplicadores de Jacobi inversos.

A próxima proposição será útil para provar os itens (c) e (d) do Teorema 5 adiante e explica como encontrar invariantes de Darboux e multiplicadores de Jacobi inversos. Sua

prova para o caso planar pode ser encontrada em [17] (itens (iv) e (vi) do Teorema 8.7), mas o resultado pode ser trivialmente estendido para \mathbb{R}^n .

Proposição 7 *Suponha que o sistema diferencial polinomial (3.1) de grau m possui p superfícies algébricas invariantes $f_i = 0$ com cofatores K_i , para $i = 1, \dots, p$, e q fatores exponenciais $F_j = \exp(g_j/h_j)$ com cofatores L_j , para $j = 1, \dots, q$.*

(a) *Existem $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{C}$ não todos nulos tais que*

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i K_i + \sum_{j=1}^q \beta_j L_j = \operatorname{div}(\mathcal{X}), \quad (3.19)$$

onde $\operatorname{div}(\mathcal{X})$ é o divergente do campo vetorial \mathcal{X} , se, e somente se, a função real (multivaluada) $V = f_1^{\alpha_1} \dots f_p^{\alpha_p} F_1^{\beta_1} \dots F_q^{\beta_q}$ é um multiplicador de Jacobi inverso do sistema (3.1).

(b) *Existem $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{C}$ não todos nulos tais que*

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i K_i + \sum_{j=1}^q \beta_j L_j = -s, \quad (3.20)$$

para algum $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, se, e somente se, a função real (multivaluada) $I = f_1^{\alpha_1} \dots f_p^{\alpha_p} F_1^{\beta_1} \dots F_q^{\beta_q} e^{st}$ é um invariante de Darboux do sistema (3.1).

Estamos agora em condições de enunciar e provar o seguinte resultado, que fornece informações a respeito da existência de integrais primeiras, fatores exponenciais, invariantes de Darboux e multiplicadores de Jacobi inversos para o sistema (3.18).

Teorema 5 *Seja $\mathcal{G} = x^2 + y^2 - z = 0$ o parabolóide invariante do sistema diferencial (3.18). Valem as seguintes afirmações.*

(a) *O parabolóide invariante $\mathcal{G} = 0$ é uma integral primeira polinomial do sistema (3.18), se, e somente se, $a = b = c = 0$.*

(b) *Considere a função $F = \exp(g/\mathcal{G})$, onde $g \in \mathbb{R}[x, y, z]$, tal que \mathcal{G} e g são relativamente primos em $\mathbb{R}[x, y, z]$. Temos que F é um fator exponencial do sistema (3.18) se g satisfaz a equação $\mathcal{X}(g) = gK + \mathcal{G}L$, onde K é o cofator de $\mathcal{G} = 0$. Além disso, L será o cofator do fator exponencial F .*

(c) O sistema (3.18) tem um invariante de Darboux construído unicamente usando o parabolóide invariante $\mathcal{G} = 0$ se, e somente se, $a = b = 0$ e $c \neq 0$. Além disso, tal invariante de Darboux é dado por $I(x, y, z, t) = (x^2 + y^2 - z) e^{ct}$.

(d) O sistema (3.18) tem um multiplicador de Jacobi inverso $V = V(x, y, z)$, onde V é definido pela equação do parabolóide invariante, isto é $V = x^2 + y^2 - z$, se, e somente se, $d_1 = f_3$, $d_2 = e_3$ e $e_1 = f_2$.

Prova. (a) Para provar este item do teorema, basta observar que o parabolóide $\mathcal{G} = x^2 + y^2 - z = 0$ é uma superfície algébrica invariante do sistema (3.18) com cofator $K = 2ax + 2by - c$ e que $K \equiv 0$ se, e somente se, $a = b = c = 0$.

(b) Como $\mathcal{G} = 0$ é uma superfície algébrica invariante do sistema (3.18), então $\mathcal{X}(\mathcal{G}) = K\mathcal{G}$, onde K é o cofator de $\mathcal{G} = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} X(F) &= \exp\left(\frac{g}{\mathcal{G}}\right) \mathcal{X}\left(\frac{g}{\mathcal{G}}\right) \\ &= \exp\left(\frac{g}{\mathcal{G}}\right) \frac{\mathcal{X}(g)\mathcal{G} - g\mathcal{X}(\mathcal{G})}{\mathcal{G}^2} \\ &= \exp\left(\frac{g}{\mathcal{G}}\right) \frac{\mathcal{X}(g) - gK}{\mathcal{G}} = LF. \end{aligned}$$

Portanto, F é um fator exponencial do sistema (3.18) com cofator L .

(c) Assuma que o sistema (3.18) possui um invariante de Darboux $I = I(x, y, z, t)$ construído unicamente usando o parabolóide invariante $\mathcal{G} = 0$. Pelo item (b) da Proposição 7, existe $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ satisfazendo (3.20). Como o cofator do parabolóide invariante $\mathcal{G} = 0$ é $K = 2ax + 2by - c$ e da igualdade (3.20), temos que $\alpha_2 = 0$, pois, caso contrário, $a = b = c = 0$ e, conseqüentemente, $s = 0$. Então, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e, da igualdade (3.20), segue que $a = b = 0$ e $c = s/\alpha \neq 0$. Além disso, ainda pelo item (b) da Proposição 7, $I = \mathcal{G}^\alpha e^{st} = [(x^2 + y^2 - z) e^{ct}]^\alpha$ é uma família de invariantes de Darboux do sistema (3.18). Em particular, podemos considerar $I = (x^2 + y^2 - z) e^{ct}$. De fato,

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= (2xP + 2yQ - zR) e^{ct} + c(x^2 + y^2 - z) e^{ct} \\ &= (K + c)(x^2 + y^2 - z) e^{ct} = 0, \end{aligned}$$

pois $K = -c$ quando $a = b = 0$.

(d) Considere $V = x^2 + y^2 - z$. Pelo item (a) da Proposição 7, existe $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ satisfazendo (3.19) se, e somente se, $V_1 = (x^2 + y^2 - z)^\alpha$ é um multiplicador de Jacobi inverso do sistema (3.18). Como o cofator do parabolóide invariante $\mathcal{G} = 0$ é $K = 2ax + 2by - c$ e da igualdade (3.19), se $\alpha_2 \neq 0$, então $a = b = c = 0$ e V é uma integral primeira polinomial do sistema (3.18), pelo que provamos no item (a). Então, considere $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Da igualdade (3.19) segue que

$$(2ax + 2by - c)\alpha = 2x(a + d_2 - e_3) + 2y(b - d_1 + f_3) - c - e_1 + f_2.$$

Logo, α satisfaz

$$\begin{aligned} \alpha a &= a + d_2 - e_3, \\ \alpha b &= b - d_1 + f_3, \\ \alpha c &= c + e_1 - f_2. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Como $V_1 = V^\alpha$, obtemos que V é um multiplicador de Jacobi inverso do sistema (3.18) tomando $\alpha = 1$. Então, de (3.21), $d_1 = f_3$, $d_2 = e_3$ e $e_1 = f_2$. \square

Uma consequência do item (c) do teorema anterior é que, sob suas hipóteses, o sistema (3.18) não exibe comportamento caótico. Sistemas diferenciais com comportamento caótico têm sido intensamente estudados desde que Lorenz encontrou, em 1963, o primeiro sistema diferencial tridimensional autônomo a exibir este tipo de comportamento [57, 74]. Abordaremos este assunto no Capítulo 4.

Corolário 1 *Suponha que $a = b = 0$ e $c \neq 0$ no sistema (3.18) e que há um número finito de pontos de equilíbrio sobre o parabolóide invariante $\mathcal{G} = x^2 + y^2 - z = 0$ e na fronteira \mathbb{S}^2 da bola de Poincaré. Então, o sistema (3.18) não exibe comportamento caótico.*

Prova. Considere $a = b = 0$ e $c \neq 0$ no sistema (3.18). Então, de acordo com o item (c) do Teorema 5, $I = \mathcal{G}e^{ct}$ é um invariante de Darboux do sistema (3.18). Pela Proposição 6, dada uma órbita do sistema (3.18) seu conjunto ω -limite está contido em $\overline{W} \cup \mathbb{S}^2$, onde $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 - z = 0\}$ e \mathbb{S}^2 é a fronteira da bola de Poincaré. Considerando o parabolóide invariante e sua extensão até \mathbb{S}^2 , a qual é um ponto de equilíbrio (conforme provaremos na próxima seção, veja Figura 3.5), temos que, após a compactificação de Poincaré do sistema (3.18), o conjunto $\overline{W} \cup \mathbb{S}^2$ é compacto e tem um número finito de pontos de equilíbrio, por hipótese. Aplicando o Teorema de Poincaré-Bendixson em $\overline{W} \cup \mathbb{S}^2$, temos que o conjunto ω -limite das órbitas do sistema

(3.18) é um ponto de equilíbrio, uma órbita periódica ou um conjunto formado por pontos de equilíbrio e pontos regulares. O mesmo é verdade para o conjunto α -limite das órbitas do sistema (3.18). Portanto, não há possibilidade do sistema (3.18) exibir comportamento caótico. \square

Para mais detalhes sobre o Teorema de Poincaré-Bendixson, veja Seção 1.7 de [17].

Muitas vezes é importante considerar o fluxo do sistema (3.18) restrito ao parabolóide invariante $\mathcal{G} = 0$, já que esta superfície é invariante pelo fluxo do sistema e, por isso, fornece informações importantes a respeito da sua dinâmica. O sistema (3.18) restrito ao parabolóide invariante $\mathcal{G} = 0$ é dado por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2d_3 y (x^2 + y^2) - e_3 (x^2 + y^2) - 2d_2 y^2 - 2d_1 xy - e_1 x - (e_2 + 2d_0) y - e_0, \\ \dot{y} &= 2d_3 x (x^2 + y^2) + f_3 (x^2 + y^2) + 2d_1 x^2 + 2d_2 xy + (2d_0 + f_1) x + f_2 y + f_0, \end{aligned} \quad (3.22)$$

onde $d_i, e_i, f_i \in \mathbb{R}$, para $i = 0, 1, 2, 3$. Denotemos por $\mathcal{X}|_{\mathcal{G}}$ o campo vetorial polinomial associado ao sistema restrito (3.22). Temos que, para escolhas adequadas dos parâmetros, o sistema restrito (3.22) tem uma integral primeira racional, como enunciado no próximo teorema.

Teorema 6 *Para a escolha de parâmetros (i) – (iv) abaixo, o sistema restrito (3.22) tem uma integral primeira racional.*

$$(i) \quad d_1 = d_2 = d_3 = e_0 = e_1 = e_3 = 0, \quad e_2 = -2d_0;$$

$$(ii) \quad d_1 = d_2 = d_3 = f_0 = f_2 = f_3 = 0, \quad f_1 = -2d_0;$$

$$(iii) \quad d_3 = e_0 = f_0 = 0, \quad e_2 = f_1 = -2d_0, \quad e_3 = -2d_2, \quad f_2 = -e_1, \quad f_3 = -2d_1;$$

$$(iv) \quad d_1 = d_2 = d_3 = e_0 = e_1 = e_3 = 0, \quad e_2 = -2d_0.$$

Antes de provar o Teorema 6, precisaremos do seguinte resultado.

Proposição 8 *Assuma que o campo vetorial polinomial \mathcal{X} tem p superfícies algébricas invariantes irredutíveis $f_i = 0$, para $i = 1, \dots, p$, tais que f_i são duas a duas relativamente primas. Se uma destas superfícies algébricas invariantes ou o plano invariante no infinito tem multiplicidade algébrica indefinida, então o campo vetorial \mathcal{X} tem uma integral primeira racional.*

A Proposição 8 está provada em [52]. Note que, na Proposição 8, usamos o infinito de \mathbb{R}^3 como um plano invariante adicional para estudarmos a integrabilidade do campo vetorial \mathcal{X} . Dizemos que o plano no infinito de \mathcal{X} tem multiplicidade algébrica indefinida (veja definição de multiplicidade algébrica no Capítulo 2, Definição 4) se o plano invariante $z_3 = 0$ da carta local U_1 (veja Apêndice A) tem multiplicidade algébrica indefinida para o campo vetorial definido na carta local U_1 .

Prova. (Teorema 6) As escolhas de parâmetros (i) e (ii) são triviais. De fato, para a escolha (i) a função $H(x, y, z) = x$ é uma integral primeira do sistema (3.22) e para a escolha (ii) a função $H(x, y, z) = y$ é uma integral primeira do sistema (3.22).

Agora, seja $\mathcal{X}|_{\mathcal{G}}$ o campo vetorial associado ao sistema (3.22). Para provar que o sistema (3.22) tem uma integral primeira racional para as escolhas de parâmetros (iii) e (iv), usaremos a Proposição 8. Usando a compactificação de Poincaré, temos que a expressão do sistema (3.22) na carta local U_1 é

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= 2d_3 z_1^4 + (e_3 + 2d_2) z_2 z_1^3 + (2d_0 + e_2) z_1^2 z_2^2 + (f_3 + 2d_1) z_1^2 z_2 + 4d_3 z_1^2 \\ &+ e_0 z_1 z_2^3 + (f_2 + e_1) z_1 z_2^2 + (e_3 + 2d_2) z_1 z_2 + f_0 z_2^3 + (f_1 + 2d_0) z_2^2 \\ &+ (f_3 + 2d_1) z_2 + 2d_3, \\ \dot{z}_2 &= 2d_3 z_2 z_1^3 + (e_3 + 2d_2) z_2^2 z_1^2 + (2d_0 + e_2) z_1 z_2^3 + 2d_1 z_1 z_2^2 + 2d_3 z_1 z_2 + e_0 z_2^4 \\ &+ e_1 z_2^3 + e_3 z_2^2. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Note que, como o sistema (3.22) está definido em \mathbb{R}^2 , a multiplicidade algébrica da reta invariante no infinito de $\mathcal{X}|_{\mathcal{G}}$ está relacionada com a multiplicidade algébrica da reta invariante $z_2 = 0$ do sistema (3.23). Sejam $W = \mathbb{R}_1[x, y, z]$ e $\tilde{\mathcal{X}}|_{\mathcal{G}}$ o campo vetorial associado ao sistema (3.23). Então, precisamos determinar o polinômio extático

$$\xi_W^1(\tilde{\mathcal{X}}|_{\mathcal{G}}) = \det \begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_2 \\ 0 & \tilde{\mathcal{X}}|_{\mathcal{G}}(z_1) & \tilde{\mathcal{X}}|_{\mathcal{G}}(z_2) \\ 0 & (\tilde{\mathcal{X}}|_{\mathcal{G}})^2(z_1) & (\tilde{\mathcal{X}}|_{\mathcal{G}})^2(z_2) \end{pmatrix},$$

onde $\tilde{\mathcal{X}}|_{\mathcal{G}}(v) = \langle (\dot{z}_1, \dot{z}_2), \nabla v \rangle$ e $(\tilde{\mathcal{X}}|_{\mathcal{G}})^2(v) = \tilde{\mathcal{X}}|_{\mathcal{G}}(\tilde{\mathcal{X}}|_{\mathcal{G}}(v))$, com v percorrendo as variáveis z_1 e z_2 . Para a escolha de parâmetros (iii), temos que $\tilde{\mathcal{X}}|_{\mathcal{G}}(z_1) = \dot{z}_1 = 0$. Então, $(\tilde{\mathcal{X}}|_{\mathcal{G}})^2(z_1) = 0$ e $\xi_W^1(\tilde{\mathcal{X}}|_{\mathcal{G}}) \equiv 0$. Analogamente, para a escolha de parâmetros (iv), temos que $\tilde{\mathcal{X}}|_{\mathcal{G}}(z_2) = \dot{z}_2 = 0$. Então, $(\tilde{\mathcal{X}}|_{\mathcal{G}})^2(z_2) = 0$ e $\xi_W^1(\tilde{\mathcal{X}}|_{\mathcal{G}}) \equiv 0$. Portanto, a reta no infinito

de $\mathcal{X}|_{\mathcal{G}}$ tem multiplicidade algébrica indefinida nestes dois casos. Pela Proposição 8, o campo vetorial $\mathcal{X}|_{\mathcal{G}}$ tem uma integral primeira racional. \square

É importante notar que o Teorema 6 dá condições necessárias, mas não suficientes, sobre os parâmetros do sistema restrito (3.22) para a existência de integrais primeiras racionais. Portanto, é possível que para outras escolhas de parâmetros o sistema (3.22) tenha integral primeira racional.

3.4 Paralelos invariantes e meridianos invariantes sobre o parabolóide invariante

Algumas das quádricas não-degeneradas são *superfícies de revolução*, como é o caso do parabolóide. Sobre este tipo de superfície, podemos definir paralelos e meridianos da seguinte maneira.

Definição 9 (Paralelos e meridianos) *Sobre uma superfície de revolução, definimos paralelos e meridianos como as curvas obtidas pela intersecção da superfície com os planos $z = k$, para escolhas adequadas de $k \in \mathbb{R}$, e $z = \alpha x + \beta y$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, respectivamente.*

Em outras palavras, os paralelos e meridianos de uma superfície de revolução são as curvas obtidas pela intersecção desta superfície com os planos ortogonais ao eixo- z e com os planos que contêm o eixo- z , respectivamente. Para uma ilustração dos paralelos e meridianos de um parabolóide elíptico, por exemplo, veja a Figura 3.2. Nesta seção, estudaremos os paralelos e meridianos sobre o parabolóide invariante do sistema (3.18) quando estas curvas são invariantes pelo fluxo do sistema. Neste caso, elas são chamadas de paralelos invariantes e meridianos invariantes, cuja definição precisa damos a seguir.

Definição 10 (Paralelos invariantes e meridianos invariantes) *Suponha que o sistema (3.1) possui uma superfície algébrica invariante dada por uma superfície de revolução. Se os planos $z = k$ e $z = \alpha x + \beta y$, com $k, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, também são invariantes pelo fluxo do sistema (3.1), então dizemos que os paralelos obtidos pela intersecção da superfície com o plano $z = k$, para escolhas adequadas de k , são paralelos invariantes e os meridianos obtidos pela intersecção da superfície com o plano $z = \alpha x + \beta y$ são meridianos invariantes.*

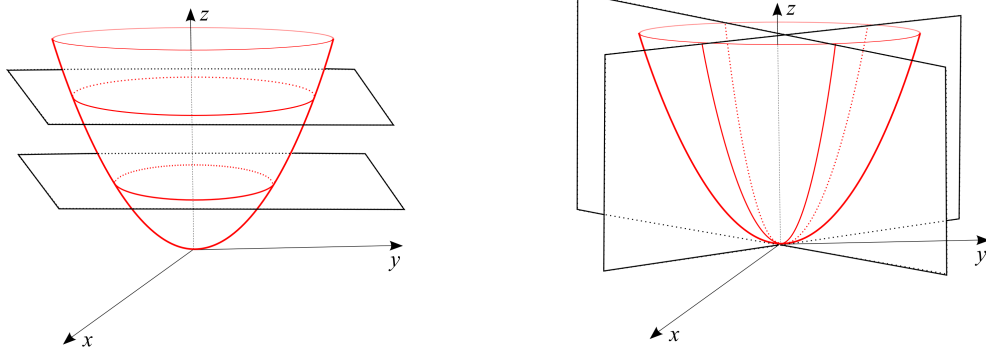


Figura 3.2: Paralelos e meridianos de um parabolóide elíptico.

Em [14] os autores caracterizaram todas as configurações possíveis de paralelos invariantes e meridianos invariantes sobre quádricas de revolução invariantes para campos vetoriais polinomiais de grau m . Aqui, estudaremos o caso do parabolóide invariante do sistema (3.18). Começamos fornecendo o número máximo de paralelos invariantes e meridianos invariantes que podem haver sobre esta superfície. Porém, para provarmos esse resultado, precisaremos da seguinte proposição.

Proposição 9 *Seja \mathcal{X} o campo vetorial polinomial associado ao sistema diferencial (3.1).*

- (a) *Se $z - k$, com $k \in \mathbb{R}$, é um fator do polinômio extático $\xi_{W_1}(\mathcal{X})$, onde W_1 é o subespaço \mathbb{R} -vetorial cuja base é $\{1, z\}$, então $z - k = 0$ é um plano invariante de \mathcal{X} ;*
- (b) *Se $\alpha x + \beta y$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, é um fator do polinômio extático $\xi_{W_2}(\mathcal{X})$, onde W_2 é o subespaço \mathbb{R} -vetorial cuja base é $\{x, y\}$, então $\alpha x + \beta y = 0$ é um plano invariante de \mathcal{X} .*

Prova. Sejam $f = z - k$ e $\xi_{W_1}(\mathcal{X}) = f K_1$, com K_1 um polinômio em $\mathbb{R}[x, y, z]$. É fácil verificar que

$$\xi_{W_1}(\mathcal{X}) = \det \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & \mathcal{X}(z) \end{pmatrix} = \mathcal{X}(z) = R,$$

onde $\dot{z} = R$ no sistema (3.1). Logo, $\mathcal{X}(f) = R = f K_1$. Isto prova o item (a).

Agora, sejam $g = \alpha x + \beta y$ e $\xi_{W_2}(\mathcal{X}) = gF$, com F um polinômio em $\mathbb{R}[x, y, z]$. Note que

$$\xi_{W_2}(\mathcal{X}) = \det \begin{pmatrix} x & y \\ \mathcal{X}(x) & \mathcal{X}(y) \end{pmatrix} = x \mathcal{X}(y) - y \mathcal{X}(x) = xQ - yP,$$

onde $\dot{x} = P$ e $\dot{y} = Q$ no sistema (3.1). Então, $xQ - yP = gF = (\alpha x + \beta y)F$. Logo, $x(Q - \alpha F) = y(P + \beta F)$. Como x e y não têm fatores em comum, então existe um polinômio K_2 em $\mathbb{R}[x, y, z]$ tal que $Q - \alpha F = K_2 y$ e $P + \beta F = K_2 x$. Logo,

$$\mathcal{X}(g) = \alpha P + \beta Q = \alpha(K_2 x - \beta F) + \beta(K_2 y + \alpha F) = gK_2,$$

completando a prova da proposição. \square

A Proposição 9 também está provada em [49]. A Proposição 1 do Capítulo 2 e o item (a) da proposição anterior transformam o estudo de paralelos invariantes do campo vetorial \mathcal{X} associado ao sistema diferencial (3.1) no estudo dos fatores da forma $z - k$ do polinômio extático $\xi_{W_1}(\mathcal{X})$, onde W_1 é o subespaço \mathbb{R} -vetorial cuja base é $\{1, z\}$. Analogamente, A Proposição 1 do Capítulo 2 e o item (b) da proposição anterior transformam o estudo de meridianos invariantes de \mathcal{X} no estudo dos fatores da forma $\alpha x + \beta y$ do polinômio extático $\xi_{W_2}(\mathcal{X})$, onde W_2 é o subespaço \mathbb{R} -vetorial cuja base é $\{x, y\}$.

Teorema 7 *Seja \mathcal{X} o campo vetorial polinomial associado ao sistema diferencial (3.18) e assumamos que \mathcal{X} tem um número finito de paralelos invariantes e meridianos invariantes. Então, o número de paralelos invariantes sobre o parabolóide invariante $\mathcal{G} = 0$ do sistema (3.18) é no máximo um e o número de meridianos invariantes sobre $\mathcal{G} = 0$ também é no máximo um.*

Prova. Por definição, os paralelos invariantes sobre o parabolóide invariante $\mathcal{G} = 0$ do sistema (3.18) são obtidos pela intersecção de $\mathcal{G} = 0$ com os planos invariantes $z - k = 0$, para escolhas adequadas de $k \in \mathbb{R}$. Pela Proposição 1 do Capítulo 2 e pelo item (a) da Proposição 9, basta estudarmos os fatores da forma $z - k$ do polinômio extático $\xi_{W_1}(\mathcal{X})$, onde W_1 é o subespaço \mathbb{R} -vetorial cuja base é $\{1, z\}$. Logo,

$$\xi_{W_1}(\mathcal{X}) = \mathcal{X}(z) = -2x(e_1 x + e_2 y + e_3 z + e_0) + 2y(f_1 x + f_2 y + f_3 z + f_0). \quad (3.24)$$

Aqui, tomamos, sem perda de generalidade, $c = 0$ no sistema (3.18), pois $z = x^2 + y^2$ em $\mathcal{G} = 0$. Assim, o polinômio $\xi_{W_1}(\mathcal{X})$ admite no máximo um fator da forma $z - k$, para escolhas adequadas dos parâmetros e_i, f_i , com $i = 0, 1, 2, 3$.

Agora, os meridianos invariantes sobre $\mathcal{G} = 0$ são obtidos pela intersecção de $\mathcal{G} = 0$ com os planos invariantes $\alpha x + \beta y = 0$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pela Proposição 1 do Capítulo 2 e pelo item (b) da Proposição 9, basta estudarmos os fatores da forma $\alpha x + \beta y$ do polinômio extático $\xi_{W_2}(\mathcal{X})$, onde W_2 é o subespaço \mathbb{R} -vetorial cuja base é $\{x, y\}$. Logo,

$$\begin{aligned} \xi_{W_2}(\mathcal{X}) &= x \mathcal{X}(y) - y \mathcal{X}(x) \\ &= 2(x^2 + y^2)(d_1 x + d_2 y + d_3 z + d_0) \\ &\quad + y(e_1 x + e_2 y + e_3 z + e_0) + x(f_1 x + f_2 y + f_3 z + f_0). \end{aligned} \tag{3.25}$$

Aqui, tomamos, sem perda de generalidade, $a = b = 0$ no sistema (3.18), pois $z = x^2 + y^2$ em $\mathcal{G} = 0$. Utilizando coordenadas esféricas ou cilíndricas, temos que $\xi_{W_2}(\mathcal{X}|_{\mathcal{G}}) = (x^2 + y^2)g$, onde $g = g(x, y, z)$ é um polinômio em $\mathbb{R}[x, y, z]$. Como $\xi_{W_2}(\mathcal{X})$ tem grau no máximo 3, então $\xi_{W_2}(\mathcal{X})$ admite no máximo um fator da forma $\alpha x + \beta y$, obtido quando $g = \alpha x + \beta y$.

Portanto, o número de paralelos invariantes sobre $\mathcal{G} = 0$ é no máximo um e o número de meridianos invariantes sobre $\mathcal{G} = 0$ também é no máximo um. \square

No próximo resultado, fornecemos condições necessárias e suficientes sobre os parâmetros do sistema restrito (3.22) para que exista exatamente um paralelo invariante e um meridiano invariante sobre o parabolóide $\mathcal{G} = 0$.

Teorema 8 *O campo vetorial $\mathcal{X}|_{\mathcal{G}}$ tem exatamente um paralelo invariante e um meridiano invariante se, e somente se, $d_3 = e_1 = f_2 = 0$, $f_1 = e_2 = -2d_0$, $d_1 = \alpha d_2$, $f_0 = \alpha e_0$ e $f_3 = \alpha e_3$ no sistema diferencial (3.22), com $e_0 e_3 < 0$ e $\alpha = f_3/e_3$.*

Prova. Para que o campo vetorial $\mathcal{X}|_{\mathcal{G}}$ tenha exatamente um paralelo invariante, o polinômio extático $\xi_{W_1}(\mathcal{X})$, dado por (3.24), precisa ter um fator da forma $z - k$, com $k > 0$. O resto da divisão de $\xi_{W_1}(\mathcal{X})$ por $z - k$ é o polinômio

$$r(x, y) = 2[-e_1 x^2 + f_2 y^2 + (f_1 - e_2)xy - (e_0 + k e_3)x + (f_0 + k f_3)y].$$

Logo, $\xi_{W_1}(\mathcal{X})$ tem um fator da forma $z - k$ se, e somente se, $r(x, y) \equiv 0$, ou seja, $e_1 = f_2 = 0$, $f_1 = e_2$, $e_0 = -k e_3$ e $f_0 = -k f_3$. Considerando $e_0 e_3 < 0$ e $\alpha = f_3/e_3$, então

$k = -e_0/e_3 > 0$, $f_0 = \alpha e_0$ e $f_3 = \alpha e_3$. Substituindo e_1 , f_0 , f_1 , f_2 e f_3 na expressão de $\xi_{W_2}(\mathcal{X})$, dada por (3.25), obtemos

$$\xi_{W_2}(\mathcal{X}) = (x^2 + y^2) [2(d_1 x + d_2 y + d_3 z + d_0) + e_2] + (\alpha x + y)(e_3 z + e_0).$$

Note que a única possibilidade de um fator da forma $\alpha x + \beta y$ em $\xi_{W_2}(\mathcal{X})$ é obtida considerando $\beta = 1$, e $\alpha x + y$ é um fator de $\xi_{W_2}(\mathcal{X})$ se, e somente se, $d_1 = \alpha d_2$, $d_3 = 0$ e $e_2 = -2d_0$.

Portanto, para esta escolha de parâmetros o campo vetorial $\mathcal{X}|_{\mathcal{G}}$ tem exatamente um paralelo invariante e um meridiano invariante obtidos pela intersecção do paraboloide invariante $\mathcal{G} = 0$ com os planos invariantes $z - k = 0$ e $\alpha x + y = 0$, respectivamente, com $k = -e_0/e_3 > 0$ e $\alpha = f_3/e_3$. \square

A Figura 3.3 ilustra a dinâmica do campo vetorial $\mathcal{X}|_{\mathcal{G}}$ com exatamente um paralelo invariante e um meridiano invariante, obtido considerando os valores dos parâmetros do sistema (3.22) de acordo com o Teorema 8 e tomando $\alpha = 1$, $e_3 = -e_0 = 1$ e $d_2 > 0$. Assim, o paralelo invariante e o meridiano invariante são obtidos pela intersecção de $\mathcal{G} = 0$ com os planos invariantes $z - 1 = 0$ e $x + y = 0$, respectivamente. Neste caso, os pontos de equilíbrio do sistema (3.22) são

$$M_{\pm} = \left(\mp \frac{1}{2} \sqrt{2}, \pm \frac{1}{2} \sqrt{2} \right) \quad \text{e} \quad N_{\pm} = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{4d_2 + 2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{4d_2 + 2}} \right).$$

Note que $4d_2 + 2 > 0$, pois $d_2 > 0$. É fácil verificar que os pontos de equilíbrio M_{\pm} estão na intersecção do paralelo invariante com o meridiano invariante. Os autovalores da parte linear do sistema (3.22) em M_{\pm} são $\lambda_1 = \pm 2\sqrt{2}$ e $\lambda_2 = \mp 2d_2\sqrt{2}$. Logo, M_{\pm} são pontos de sela. Os autovalores da parte linear do sistema (3.22) em N_{\pm} são $\lambda_1 = 2i\sqrt{2d_2}$ e $\lambda_2 = -2i\sqrt{2d_2}$. Logo, N_{\pm} são centros ou focos fracos. Além disso, os centros ou focos fracos N_{\pm} estão no interior de um conjunto compacto cuja fronteira é formada por parte do paralelo invariante e por parte do meridiano invariante, como pode ser visto na Figura 3.3.

Um assunto importante no estudo de sistemas de equações diferenciais é determinar quando eles têm ciclos limites ou oscilações não-lineares. No próximo teorema, impomos condições necessárias sobre os parâmetros do sistema (3.18) para que o campo vetorial $\mathcal{X}|_{\mathcal{G}}$ tenha exatamente um paralelo invariante, o qual será um ciclo limite.

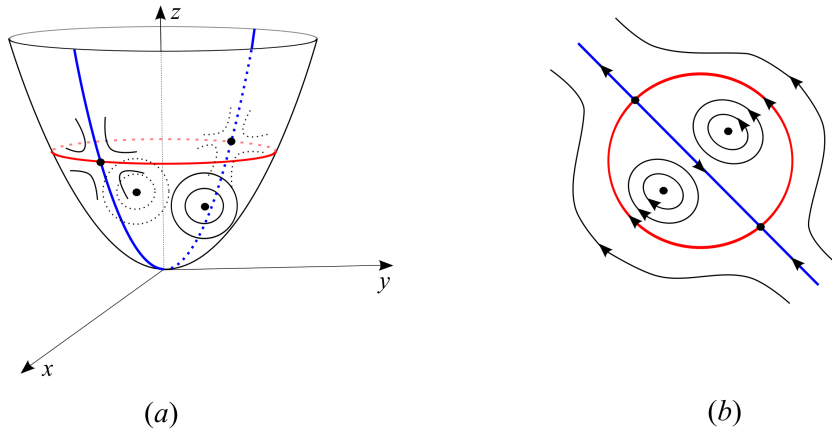


Figura 3.3: (a) Dinâmica do campo vetorial \mathcal{X} restrito ao parabolóide invariante $\mathcal{G} = 0$ quando este tem exatamente um paralelo invariante (vermelho) e um meridiano invariante (azul), considerando os valores dos parâmetros do sistema (3.22) de acordo com o Teorema 8 e tomando $\alpha = 1$, $e_3 = -e_0 = 1$ e $d_2 > 0$; e (b) retrato de fase campo vetorial $\mathcal{X}|_{\mathcal{G}}$ neste caso.

Teorema 9 *Se $c = d_0 = d_2 = d_3 = e_1 = f_0 = f_2 = f_3 = 0$, $d_1 = -1$, $e_2 = f_1 = 4$ e $e_3 = -e_0$ no sistema (3.18), com $e_0 \neq 0$, então o campo vetorial $\mathcal{X}|_{\mathcal{G}}$ tem exatamente um paralelo invariante, o qual é um ciclo limite de $\mathcal{X}|_{\mathcal{G}}$.*

Prova. Seja $r(x, y, z)$ o resto da divisão do polinômio extático $\xi_{W_1}(\mathcal{X})$ por $z - 1$, onde W_1 é o subespaço \mathbb{R} -vetorial cuja base é $\{1, z\}$. Uma das maneiras de obtermos $r(x, y, z) \equiv 0$ é considerando $c = d_0 = d_2 = d_3 = e_1 = f_0 = f_2 = f_3 = 0$, $d_1 = -1$, $e_2 = f_1 = 4$ e $e_3 = -e_0$ no sistema (3.18). Então, ele pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(x^2 + y^2 - z) + 2y(x - 2) + e_0(z - 1), \\ \dot{y} &= b(x^2 + y^2 - z) - 2x(x - 2), \\ \dot{z} &= 2e_0x(z - 1). \end{aligned} \tag{3.26}$$

Note que o plano $z - 1 = 0$ é uma superfície algébrica invariante do sistema (3.26) com cofator $K(x, y, z) = 2e_0x$. A circunferência \mathcal{C} obtida pela intersecção do plano invariante $z - 1 = 0$ com o parabolóide invariante $\mathcal{G} = 0$ é o paralelo invariante do campo vetorial $\mathcal{X}|_{\mathcal{G}}$. Considere $e_0 \neq 0$, pois, caso contrário, $\mathcal{X}|_{\mathcal{G}}$ tem infinitos paralelos invariantes. Agora, precisamos provar que o paralelo invariante \mathcal{C} é um ciclo limite de $\mathcal{X}|_{\mathcal{G}}$. Impondo as mesmas condições sobre os parâmetros do sistema restrito (3.22) e considerando a

mudança para coordenadas polares $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, podemos escrevê-lo como

$$\begin{aligned}\dot{r} &= e_0 (r^2 - 1) \cos \theta, \\ \dot{\theta} &= 4 - 2r \cos \theta - \frac{e_0}{r} (r^2 - 1) \sin \theta.\end{aligned}$$

Logo, se $r = 1$, então $\dot{r} \equiv 0$ e $\dot{\theta} = 4 - 2 \cos \theta > 0$, para todo $\theta \in \mathbb{R}$. Como $r = 1$ é a equação do paralelo invariante \mathcal{C} de $\mathcal{X}|_{\mathcal{G}}$ em coordenadas polares, então \mathcal{C} é uma órbita periódica de $\mathcal{X}|_{\mathcal{G}}$. Além disso, como $\dot{r} \neq 0$ e $\dot{\theta} > 0$ numa vizinhança anelar de \mathcal{C} , então \mathcal{C} é um ciclo limite do campo vetorial $\mathcal{X}|_{\mathcal{G}}$. \square

Na Figura 3.4 está ilustrado um dos casos em que o paralelo invariante do campo vetorial $\mathcal{X}|_{\mathcal{G}}$ é um ciclo limite.

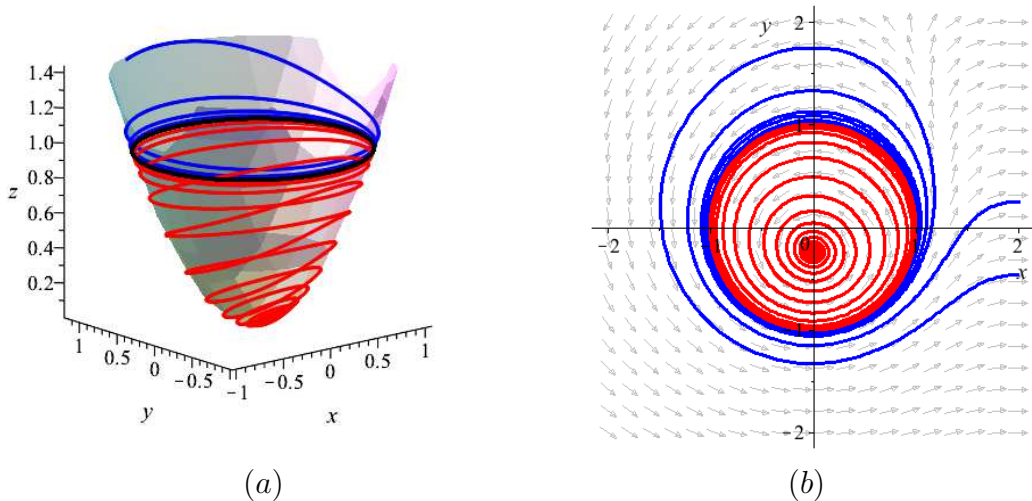


Figura 3.4: (a) Dinâmica do campo vetorial \mathcal{X} restrito ao parabolóide invariante $\mathcal{G} = 0$ e (b) retrato de fase do campo vetorial $\mathcal{X}|_{\mathcal{G}}$, ambos sob as hipóteses do Teorema 9, com $e_0 = 1$. Neste caso, o paralelo invariante (preto) é um ciclo limite.

Outro tópico interessante no estudo de sistemas diferenciais é determinar quando o sistema (3.1) tem órbitas homoclínicas e heteroclínicas, cuja existência é, em geral, muito difícil de ser analiticamente provada. Aqui, usando a existência do meridiano invariante sobre o parabolóide invariante $\mathcal{G} = 0$, obtemos condições necessárias sobre os parâmetros do sistema (3.18) para as quais o campo vetorial $\mathcal{X}|_{\mathcal{G}}$ tenha órbitas heteroclínicas conectando um ponto de equilíbrio em $\mathcal{G} = 0$ a um ponto de equilíbrio no infinito, dado pela extensão de $\mathcal{G} = 0$ até a fronteira \mathbb{S}^2 da bola de Poincaré (para a definição de bola de

Poincaré, veja Apêndice A). Obtemos a extensão de $\mathcal{G} = 0$ até \mathbb{S}^2 , aplicando diretamente o seguinte resultado, cuja prova pode ser encontrada em [42].

Proposição 10 *Seja $f(x, y, z) = 0$ uma superfície algébrica invariante do sistema diferencial (3.1) de grau m . A extensão desta superfície até a fronteira \mathbb{S}^2 da bola de Poincaré está contida na curva definida por*

$$z_4^m f\left(\frac{x}{z_4}, \frac{y}{z_4}, \frac{z}{z_4}\right) = 0, \quad z_4 = 0.$$

Tomando $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ e $m = 2$ na Proposição 10, obtemos que a extensão do parabolóide invariante $\mathcal{G} = 0$ do sistema (3.18) até a fronteira \mathbb{S}^2 da bola de Poincaré é um ponto de equilíbrio p_0 , que corresponde ao ponto final positivo do eixo $-z$, como pode ser visto na Figura 3.5.

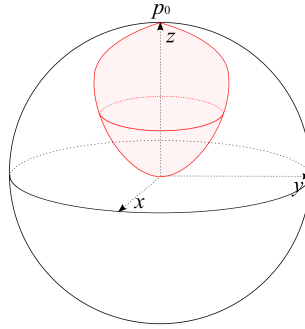


Figura 3.5: Extensão do parabolóide invariante $\mathcal{G} = 0$ do sistema (3.18) até a fronteira \mathbb{S}^2 da bola de Poincaré.

Teorema 10 *Se $a = b = d_0 = d_3 = e_0 = e_2 = e_3 = f_0 = f_1 = f_3 = 0$ e $f_2 = -e_1 = 1$ no sistema (3.18), então o campo vetorial $\mathcal{X}|_{\mathcal{G}}$ tem exatamente um meridiano invariante, que é formado por um ponto de equilíbrio do sistema (3.18) e duas órbitas heteroclínicas conectando este ponto ao ponto de equilíbrio no infinito p_0 , após compactificado, como mostrado na Figura 3.6.*

Prova. Seja $r(x, y, z)$ o resto da divisão do polinômio extático $\xi_{W_2}(\mathcal{X})$ por $d_1x + d_2y$, onde W_2 é o subespaço \mathbb{R} -vetorial cuja base é $\{x, y\}$. Uma das maneiras de obtermos

$r(x, y, z) \equiv 0$ é considerando $a = b = d_0 = d_3 = e_0 = e_2 = e_3 = f_0 = f_1 = f_3 = 0$ e $f_2 = -e_1 = 1$ no sistema (3.18). Então, ele pode ser escrito como

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -2y(d_1x + d_2y) + x, \\ \dot{y} &= 2x(d_1x + d_2y) + y, \\ \dot{z} &= c(x^2 + y^2 - z) + 2(x^2 + y^2).\end{aligned}\tag{3.27}$$

Note que o plano $d_1x + d_2y = 0$ é uma superfície algébrica invariante do sistema (3.27) com cofator $K(x, y, z) = 2(d_2x - d_1y) + 1$. A curva obtida pela intersecção do plano invariante $d_1x + d_2y = 0$ com o parabolóide invariante $\mathcal{G} = 0$ é o meridiano invariante do campo vetorial $\mathcal{X}|_{\mathcal{G}}$. A extensão do meridiano invariante até a fronteira \mathbb{S}^2 da bola de Poincaré é o ponto de equilíbrio p_0 , que também é a extensão de $\mathcal{G} = 0$ até \mathbb{S}^2 . Há apenas um ponto de equilíbrio finito sobre o meridiano invariante: a origem, que é um nó instável. Logo, o meridiano invariante tem duas órbitas heteroclínicas que conectam estes pontos de equilíbrio, conforme pode ser visto na Figura 3.6. \square

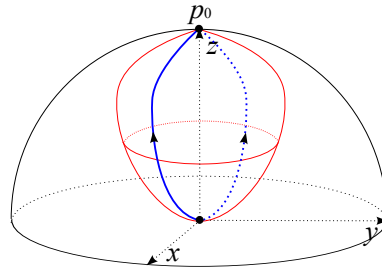


Figura 3.6: Meridiano invariante do campo vetorial $\mathcal{X}|_{\mathcal{G}}$ obtido no Teorema 10.

3.5 Dinâmica global e bifurcações de uma classe de sistemas diferenciais quadráticos com um parabolóide invariante

Devido ao grande número de parâmetros envolvidos, a dinâmica e as bifurcações do sistema diferencial (3.18) são muito difíceis de serem estudadas. Para tornar este estudo possível, consideramos a classe do sistema (3.18) obtida tomando os polinômios D , E

e F como constantes reais, isto é, $D(x, y, z) = d$, $E(x, y, z) = e$ e $F(x, y, z) = f$, com $d, e, f \in \mathbb{R}$. Assim, o sistema (3.18) pode ser escrito como

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(x^2 + y^2 - z) - 2y d - e, \\ \dot{y} &= b(x^2 + y^2 - z) + 2x d + f, \\ \dot{z} &= c(x^2 + y^2 - z) - 2x e + 2y f.\end{aligned}\tag{3.28}$$

Mesmo neste caso a dinâmica do sistema pode ser bem complicada de ser estudada. Porém, podemos determinar alguns de seus aspectos, como a localização e a estabilidade local de pontos de equilíbrio, a existência de famílias de órbitas homoclínicas e de centros, e também estudar sua dinâmica no infinito via compactificação de Poincaré.

Considere $d \neq 0$ e $af + be + cd \neq 0$ no sistema (3.28). Então,

$$p = \left(-\frac{f}{2d}, -\frac{e}{2d}, \frac{e^2 + f^2}{4d^2} \right)$$

é um ponto de equilíbrio isolado do sistema (3.28). Os autovalores da parte linear do sistema (3.28) em p são $\lambda_{1,2} = \pm 2i d$ e $\lambda_3 = -(af + be + cd)/d$. É fácil verificar que o ponto de equilíbrio p pertence ao parabolóide invariante $\mathcal{G} = x^2 + y^2 - z = 0$. O fluxo do sistema (3.28) restrito a $\mathcal{G} = 0$ é dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -2d y - e, \\ \dot{y} &= 2d x + f.\end{aligned}\tag{3.29}$$

Note que $\tilde{p} = (-f/2d, -e/2d)$ é o único ponto de equilíbrio do sistema linear (3.29) e seus autovalores são $\lambda_{1,2} = \pm 2i d$. Então, \tilde{p} é um centro do sistema restrito (3.29). Logo, o parabolóide invariante $\mathcal{G} = 0$ é a variedade central do ponto de equilíbrio p . Assim, $\mathcal{G} = 0$ é formado por um anel de órbitas periódicas em torno de p . Do mesmo modo que em [22], chamaremos de *centro em \mathbb{R}^3* um ponto de equilíbrio pertencendo a uma superfície invariante bidimensional que é cercado por um anel de órbitas periódicas também contido nesta superfície, como ocorre com o ponto p . Na Figura 3.7 estão representados o retrato de fase do sistema (3.29) e o fluxo correspondente do sistema (3.28) sobre o parabolóide invariante $\mathcal{G} = 0$, quando $d \neq 0$.

Na Figura 3.8 temos o espaço de fase do sistema (3.28) numa vizinhança de p quando ele é um ponto de equilíbrio isolado e $\lambda_3 < 0$, o que conduz à existência de uma

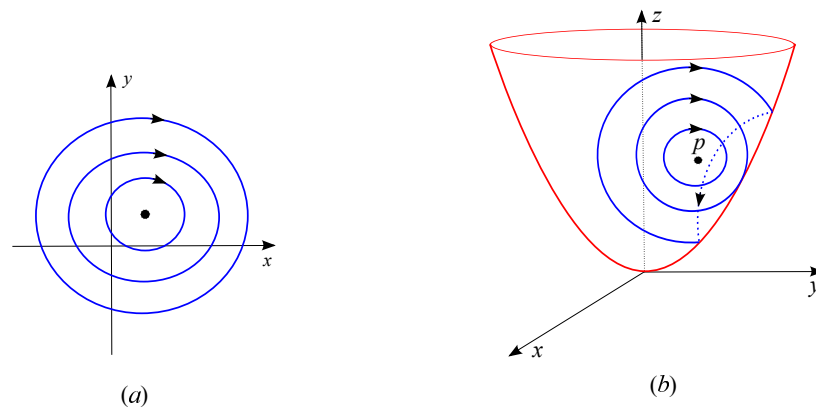


Figura 3.7: (a) Retrato de fase do sistema restrito (3.29) e (b) fluxo do sistema (3.28) sobre o parabolóide invariante $\mathcal{G} = 0$, quando $d \neq 0$.

variedade local estável de p . Neste caso, as órbitas periódicas em torno de p também são assintoticamente estáveis. Deste modo, uma órbita que está numa vizinhança do ponto de equilíbrio p tende para ele ou para alguma das órbitas periódicas em torno dele quando $t \rightarrow \infty$, como podemos observar na Figura 3.8.

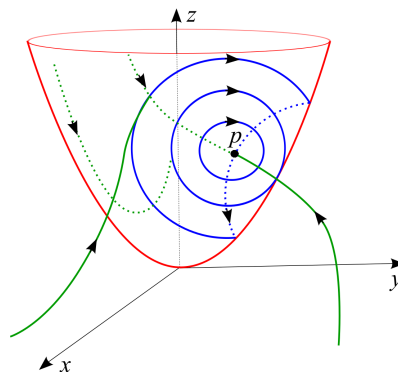


Figura 3.8: Espaço de fase do sistema (3.28) numa vizinhança de p quando p é um ponto de equilíbrio isolado e $\lambda_3 < 0$.

Porém, nem sempre p é um ponto de equilíbrio isolado do sistema (3.28). Nos casos seguintes, o sistema (3.28) tem uma curva de equilíbrios. Assuma que $af + be + cd = 0$.

Caso (a): Se $a \neq 0$, então podemos tomar $f = -(be + cd)/a$ no sistema (3.28) e, neste

caso,

$$\gamma_1 = \left(-\frac{b}{a}\alpha + \frac{c}{2a}, \alpha, \frac{a^2 + b^2}{a^2}\alpha^2 - \frac{bc + 2ad}{a^2}\alpha + \frac{c^2 - 4ae}{4a^2} \right),$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$, é uma curva de equilíbrios do sistema (3.28). Os autovalores da parte linear do sistema (3.28) nos pontos de equilíbrio em γ_1 são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_{2,3} = \pm\sqrt{2\omega}/a$, onde $\omega = 2ad(a^2 + b^2)\alpha + a((a^2 + b^2)e - 2ad^2)$. Logo, temos os seguintes casos a considerar:

- (a.i) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm i\omega_0$, onde $\omega_0 = \sqrt{-2\omega}/a \in \mathbb{R}$: se $2ad(a^2 + b^2) < 0$ e $\alpha > -[(a^2 + b^2)e - 2ad^2]/[2d(a^2 + b^2)]$ ou $2ad(a^2 + b^2) > 0$ e $\alpha < -[(a^2 + b^2)e - 2ad^2]/[2d(a^2 + b^2)]$;
- (a.ii) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$: se $\alpha = -[(a^2 + b^2)e - 2ad^2]/[2d(a^2 + b^2)]$;
- (a.iii) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 < 0$: se $2ad(a^2 + b^2) < 0$ e $\alpha < -[(a^2 + b^2)e - 2ad^2]/[2d(a^2 + b^2)]$ ou $2ad(a^2 + b^2) > 0$ e $\alpha > -[(a^2 + b^2)e - 2ad^2]/[2d(a^2 + b^2)]$.

Portanto, γ_1 é uma curva de equilíbrios do sistema (3.28) formada por uma curva de centros ou focos fracos (a.i) e uma curva de selas (a.iii) conectadas por um ponto de equilíbrio degenerado (a.ii), como pode ser visto na Figura 3.9.

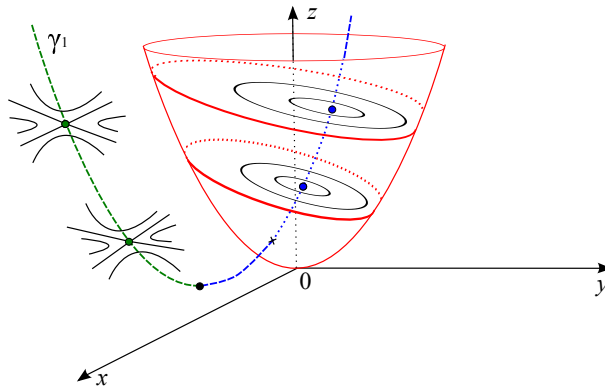


Figura 3.9: Parabolóide invariante $\mathcal{G} = 0$ e curva de equilíbrios γ_1 , a qual é formada por uma curva de centros ou focos fracos (azul) e uma curva de selas (verde) conectadas por um ponto de equilíbrio degenerado.

Se considerarmos $c = e = 0$, então $f = 0$. Neste caso, γ_1 passa pela origem, que é o único ponto de intersecção entre a curva de equilíbrios γ_1 e o parabolóide invariante $\mathcal{G} = 0$. É fácil verificar que $H(x, y, z) = z$ é uma integral primeira do sistema (3.28). Logo, o espaço de fase do sistema (3.28) é folheado pelos planos invariantes $z - k = 0$, com $k \in \mathbb{R}$. O fluxo do sistema (3.28) restrito a estes planos invariantes está ilustrado na

Figura 3.10. Observe que existe uma órbita homoclínica a um ponto de sela (caso *(iii)* da Figura 3.10).

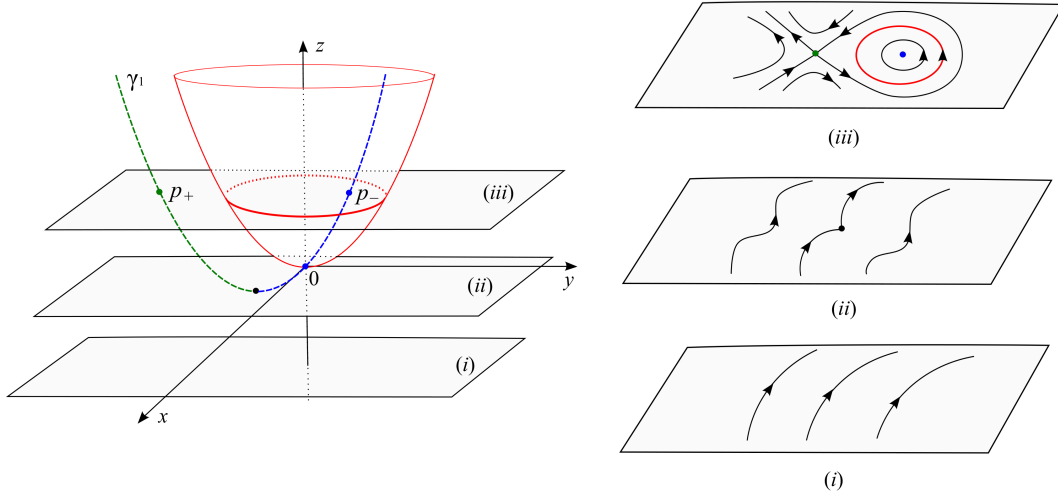


Figura 3.10: Posições relativas entre o parabolóide invariante $\mathcal{G} = 0$ e os planos invariantes $z - k = 0$ e retrato de fase do sistema (3.28) restrito aos planos invariantes $z - k = 0$ dependendo do valor de k : (i) $k < -d^2/(a^2 + b^2)$; (ii) $k = -d^2/(a^2 + b^2)$; (iii) $k > -d^2/(a^2 + b^2)$.

Caso (b): Se $a = 0$ e $b \neq 0$, então podemos tomar $e = -cd/b$ no sistema (3.28) e

$$\gamma_2 = \left(\alpha, \frac{c}{2b}, \alpha^2 + \frac{2d}{b}\alpha + \frac{c^2 + 4bf}{4b^2} \right),$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$, é uma curva de equilíbrios do sistema (3.28). Os autovalores da parte linear do sistema (3.28) nos pontos de equilíbrio em são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_{2,3} = \pm\sqrt{-2\omega}$, onde $\omega = 2bd\alpha + bf + 2d^2$. Logo, temos os seguintes casos a considerar:

- (b.i) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm i\omega_0$, onde $\omega_0 = \sqrt{2\omega} \in \mathbb{R}$: se $bd < 0$ e $\alpha < -(bf + 2d^2)/(2bd)$ ou $bd > 0$ e $\alpha > -(bf + 2d^2)/(2bd)$;
- (b.ii) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$: se $\alpha = -(bf + 2d^2)/(2bd)$;
- (b.iii) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 < 0$: se $bd < 0$ e $\alpha > -(bf + 2d^2)/(2bd)$ ou $bd > 0$ e $\alpha < -(bf + 2d^2)/(2bd)$.

Assim, analogamente ao caso (a), γ_2 é uma curva de equilíbrios do sistema (3.28) formada por uma curva de centros ou focos fracos (b.i) e uma curva de selas (b.iii) conectadas por um ponto de equilíbrio degenerado (b.ii).

Caso (c): Se $a = b = 0$ e $d \neq 0$, então podemos tomar $c = 0$ no sistema (3.28) e

$$\gamma_3 = \left(-\frac{f}{2d}, -\frac{e}{2d}, \alpha \right),$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$, é uma curva de equilíbrios do sistema (3.28). Note que γ_3 é uma reta paralela ao eixo- z . Os autovalores da parte linear do sistema (3.28) nos pontos de equilíbrio em γ_3 são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_{2,3} = \pm 2id$. É fácil verificar que, neste caso, $H_1(x, y, z) = (f/d)x + (e/d)y + z$ e $H_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ são integrais primeiras independentes do sistema (3.28). Logo, o sistema (3.28) é integrável e seu espaço de fase é folheado pelos planos invariantes $(f/d)x + (e/d)y + z = k_1$ e pelos paraboloides invariantes $x^2 + y^2 - z = k_2$, com $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Sobre cada parabolóide invariante $x^2 + y^2 - z = k_2$ há apenas um ponto de equilíbrio, que está na intersecção do parabolóide com a curva de equilíbrios γ_3 , e o fluxo do sistema (3.28) restrito a esses paraboloides invariantes é topologicamente equivalente àquele mostrado na Figura 3.7. Agora, o sistema (3.28) restrito aos planos invariantes $(f/d)x + (e/d)y + z = k_1$ é dado por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2dy - e, \\ \dot{y} &= 2dx + f, \end{aligned}$$

onde $d, e, f \in \mathbb{R}$ e $d \neq 0$. Note que $(-f/2d, -e/2d)$ é o único ponto de equilíbrio deste sistema e trata-se de um centro linear. Portanto, cada parabolóide invariante é a variedade central do ponto de equilíbrio sobre ele. O espaço de fase do sistema (3.28) neste caso está ilustrado na Figura 3.11.

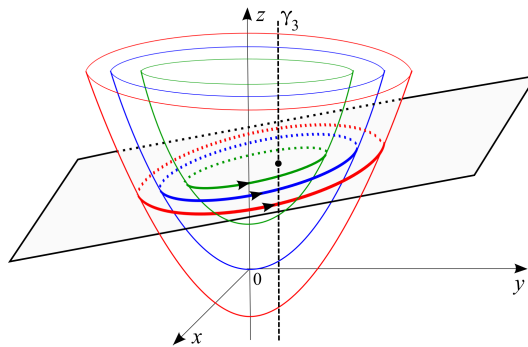


Figura 3.11: Paraboloides invariantes e retrato de fase do sistema (3.28) sobre um dos planos invariantes.

Caso (d): Se $a = b = d = 0$, então o sistema (3.28) pode ser escrito como

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -e, \\ \dot{y} &= f, \\ \dot{z} &= (x^2 + y^2 - z)c - 2ex + 2fy,\end{aligned}\tag{3.30}$$

onde $c, e, f \in \mathbb{R}$. Como estamos considerando os casos em que o sistema (3.28) tem uma curva de equilíbrios, assumamos que $e = f = 0$ no sistema (3.30), pois, caso contrário, o sistema não tem pontos de equilíbrio. Neste caso, o parabolóide invariante $\mathcal{G} = 0$ é formado por pontos de equilíbrio e o sistema (3.30) é integrável, já que $H_1(x, y, z) = x$ e $H_2(x, y, z) = y$ são integrais primeiras independentes. Deste modo, o espaço de fase do sistema (3.30) é folheado pelos planos invariantes $x - k_1 = 0$ e $y - k_2 = 0$, com $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Dado $k_1 \in \mathbb{R}$, o fluxo do sistema (3.30) restrito a $x - k_1 = 0$ é

$$\begin{aligned}\dot{y} &= 0, \\ \dot{z} &= (k_1^2 + y^2 - z)c,\end{aligned}\tag{3.31}$$

onde $c \in \mathbb{R}$ e $c \neq 0$. O retrato de fase do sistema (3.31) está desenhado na Figura 3.12 (a), onde observa-se que o fluxo do sistema é constante na direção do eixo- z . Além disso, ele possui uma parábola $z = y^2 - k_1^2$ formada por pontos de equilíbrio. O espaço de fase do sistema (3.30) restrito aos planos invariantes $y - k_2 = 0$, com $k_2 \in \mathbb{R}$, é topologicamente equivalente àquele mostrado na Figura 3.12 (b).

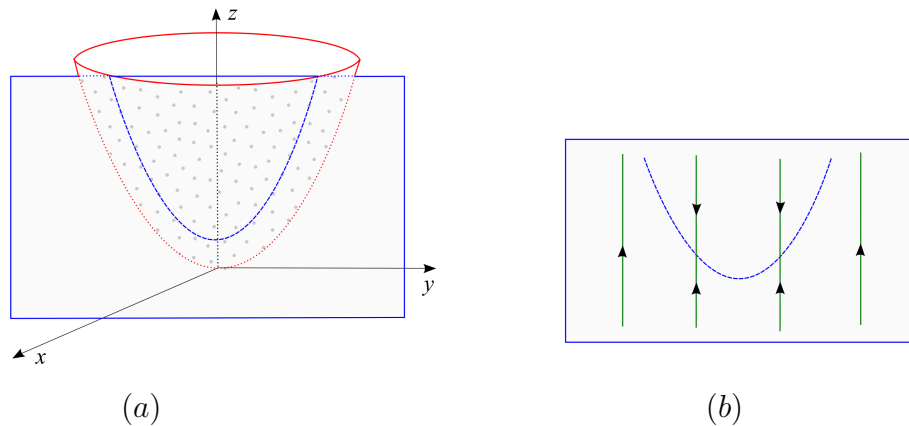


Figura 3.12: (a) Parabolóide de equilíbrios $\mathcal{G} = x^2 + y^2 - z = 0$ e planos invariantes $x - k_1 = 0$, com $k_1 \in \mathbb{R}$, do sistema (3.30) considerando $e = f = 0$ e (b) retrato de fase do sistema (3.31).

É fácil verificar que o ponto de equilíbrio p está sobre as curvas de equilíbrios γ_i , para $i = 1, 2, 3$. Além disso, ele é o único ponto na intersecção da curva γ_i com o parabolóide invariante $\mathcal{G} = 0$ do sistema (3.28).

Agora, se $af + be + cd \neq 0$ e $d = 0$; ou $af + be + cd = 0$, $a = b = d = 0$ e $e \neq 0$ ou $f \neq 0$, então o sistema (3.28) não tem pontos de equilíbrio. O fluxo do sistema (3.28) restrito ao parabolóide invariante $\mathcal{G} = 0$, neste caso, é dado pelo sistema (3.29) com $d = 0$. As órbitas do sistema restrito (3.29) estão em uma família de retas paralelas de inclinação $-\arctan(f/e)$ se $e \neq 0$, ou $\pi/2$ se $e = 0$. Na Figura 3.13 estão desenhados o retrato de fase do sistema restrito (3.29) com $d = 0$ e o fluxo do sistema (3.28) sobre o parabolóide invariante $\mathcal{G} = 0$ quando o sistema (3.29) não tem pontos de equilíbrio. Neste caso, a dinâmica das órbitas finitas do sistema (3.28) é diretamente influenciada pelos pontos de equilíbrio no infinito. Daremos uma melhor descrição do fluxo do sistema (3.28) neste caso mais adiante.

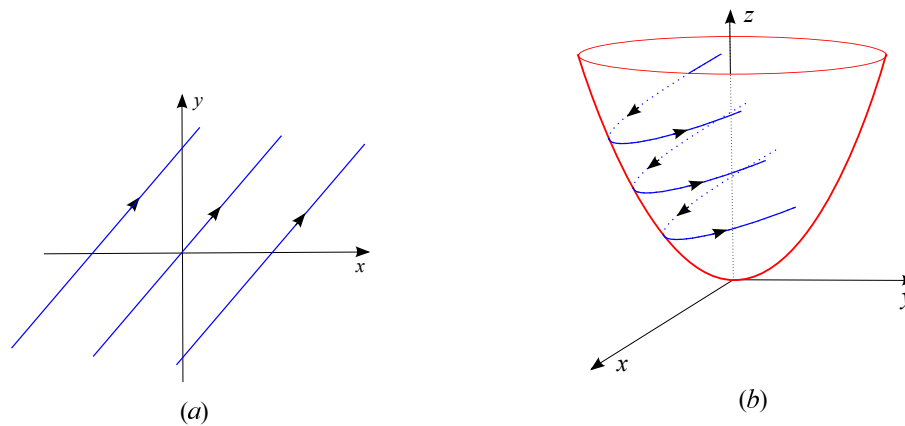


Figura 3.13: (a) Retrato de fase do sistema restrito (3.29) com $d = 0$ e (b) fluxo do sistema (3.28) sobre o parabolóide invariante $\mathcal{G} = 0$ quando o sistema não tem pontos de equilíbrio.

Os resultados obtidos até agora nesta seção, podem ser resumidos no seguinte teorema.

Teorema 11 *Se $d \neq 0$ e $af + be + cd \neq 0$, então*

$$p = \left(-\frac{f}{2d}, -\frac{e}{2d}, \frac{e^2 + f^2}{4d^2} \right)$$

é um ponto de equilíbrio isolado do sistema (3.28), que pertence ao parabolóide invariante $\mathcal{G} = x^2 + y^2 - z = 0$ e é um centro. Porém, nem sempre p é um ponto de equilíbrio

isolado do sistema (3.28), já que, em alguns casos, o sistema (3.28) possui uma curva de equilíbrios (ou superfície de equilíbrios - caso (d)) passando por p , como descrito abaixo. Assuma que $af + be + cd = 0$, então valem as seguintes afirmações.

(a) Se $a \neq 0$, então

$$\gamma_1 = \left(-\frac{b}{a}\alpha + \frac{c}{2a}, \alpha, \frac{a^2 + b^2}{a^2}\alpha^2 - \frac{bc + 2ad}{a^2}\alpha + \frac{c^2 - 4ae}{4a^2} \right),$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$, é uma curva de equilíbrios do sistema (3.28), formada por uma curva de centros ou focos fracos e uma curva de selas conectadas por um ponto de equilíbrio degenerado.

(b) Se $a = 0$ e $b \neq 0$, então

$$\gamma_2 = \left(\alpha, \frac{c}{2b}, \alpha^2 + \frac{2d}{b}\alpha + \frac{c^2 + 4bf}{4b^2} \right),$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$, é uma curva de equilíbrios do sistema (3.28), formada por uma curva de centros ou focos fracos e uma curva de selas conectadas por um ponto de equilíbrio degenerado.

(c) Se $a = b = 0$ e $d \neq 0$, então

$$\gamma_3 = \left(-\frac{f}{2d}, -\frac{e}{2d}, \alpha \right),$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$, é uma curva de equilíbrios do sistema (3.28), paralela ao eixo- z e formada por centros.

(d) Se $a = b = d = 0$ e $e = f = 0$, então o parabolóide $\mathcal{G} = 0$ é formado por pontos de equilíbrios do sistema (3.28).

O ponto de equilíbrio p , que está sobre as curvas de equilíbrios γ_i , para $i = 1, 2, 3$, é o único ponto na intersecção da curva γ_i com o parabolóide invariante $\mathcal{G} = 0$ do sistema (3.28). Por fim, se $af + be + cd \neq 0$ e $d = 0$; ou $af + be + cd = 0$, $a = b = d = 0$ e $e \neq 0$ ou $f \neq 0$, então o sistema (3.28) não tem pontos de equilíbrio.

Usando a compactificação de Poincaré para sistemas diferenciais polinomiais em \mathbb{R}^3 (veja Apêndice A), estudamos a dinâmica do sistema (3.28) no infinito, isto é, na fronteira \mathbb{S}^2 da bola de Poincaré, com o que obtemos o seguinte resultado.

Teorema 12 *A dinâmica do sistema (3.28) na fronteira \mathbb{S}^2 da bola de Poincaré é topologicamente equivalente a um dos oito casos descritos na Figura 3.14, dependendo do valor dos parâmetros reais a , b e c .*

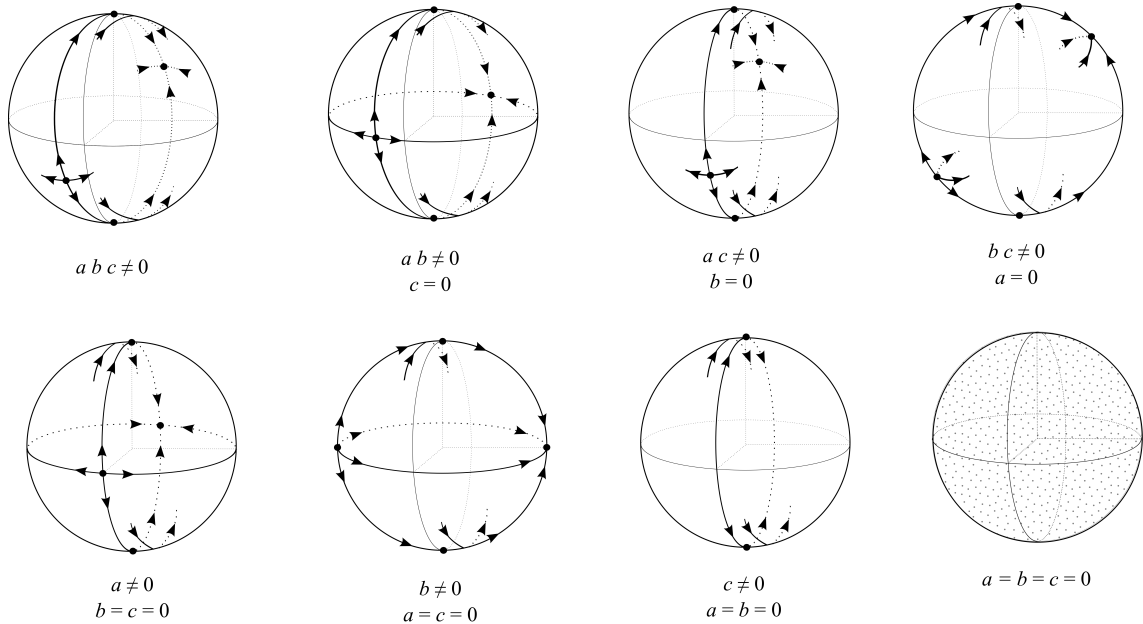


Figura 3.14: Dinâmica do sistema (3.28) na fronteira \mathbb{S}^2 da bola de Poincaré dependendo do valor dos parâmetros reais a , b e c .

Para provar o Teorema 12, precisamos estudar a dinâmica do sistema (3.28) nas cartas locais U_i , V_i , para $i = 1, 2, 3$, da compactificação de Poincaré.

Compactificação nas cartas locais U_1 e V_1 . A expressão da compactificação de Poincaré do sistema (3.28) na carta local U_1 é dada por

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= (b - a z_1) (1 + z_1^2 - z_2 z_3) + 2 d z_3 (1 + z_1^2) + z_3^2 (e z_1 + f), \\ \dot{z}_2 &= (c - a z_2) (1 + z_1^2 - z_2 z_3) + z_3 (2 d z_1 z_2 + e z_2 z_3 + 2 f z_1 - 2 e), \\ \dot{z}_3 &= -z_3 ((1 + z_1^2 - z_2 z_3) a - 2 d z_1 z_3 - e z_3^2).\end{aligned}$$

Considerando $z_3 = 0$ no sistema anterior, que corresponde aos pontos na fronteira \mathbb{S}^2 da bola de Poincaré, ele pode ser escrito como

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= (b - a z_1) (1 + z_1^2), \\ \dot{z}_2 &= (c - a z_2) (1 + z_1^2).\end{aligned}\tag{3.32}$$

Se $a \neq 0$, então o único ponto de equilíbrio do sistema (3.32) é $p_1 = (b/a, c/a)$. Os autovalores da parte linear do sistema (3.32) em p_1 são $\lambda_1 = \lambda_2 = -(a^2 + b^2)/a$. Logo, p_1 é um nó estável se $a > 0$ ou um nó instável se $a < 0$. Se $a = 0$, então o sistema (3.32) não tem pontos de equilíbrio e suas órbitas estão em uma família de retas paralelas de inclinação $\arctan(c/b)$ se $b \neq 0$, ou $\pi/2$ se $b = 0$. Na Figura 3.15 está ilustrado o retrato de fase do sistema (3.28) na carta local U_1 dependendo do valor do parâmetro real a .

O retrato de fase do sistema (3.28) na carta local V_1 é o mesmo que na carta U_1 invertendo o tempo, pois o sistema (3.28) é quadrático.

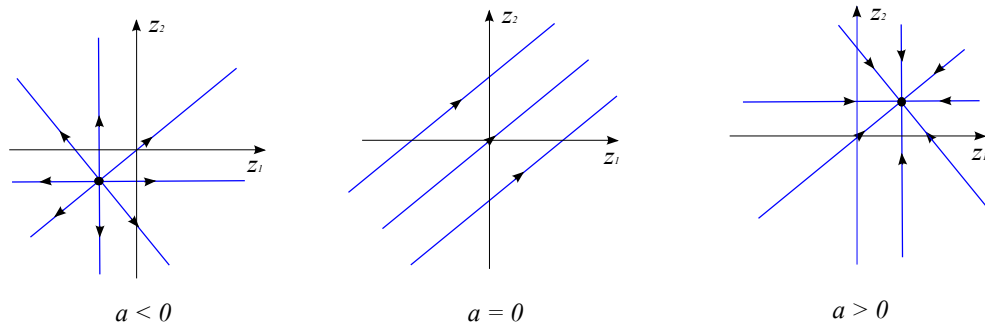


Figura 3.15: Retrato de fase do sistema (3.28) na carta local U_1 dependendo do valor do parâmetro real a .

Compactificação nas cartas locais U_2 e V_2 . A expressão da compactificação de Poincaré do sistema (3.28) na carta local U_2 é dada por

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= (a - b z_1) (1 + z_1^2 - z_2 z_3) - 2 d z_3 (1 + z_1^2) - z_3^2 (f z_1 + e), \\ \dot{z}_2 &= (c - b z_2) (1 + z_1^2 - z_2 z_3) - z_3 (2 d z_1 z_2 + f z_2 z_3 + 2 e z_1 - 2 f), \\ \dot{z}_3 &= -z_3 ((1 + z_1^2 - z_2 z_3) b + 2 d z_1 z_3 + f z_3^2).\end{aligned}$$

Considerando $z_3 = 0$ no sistema anterior, podemos escrevê-lo como

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= (a - b z_1) (1 + z_1^2), \\ \dot{z}_2 &= (c - b z_2) (1 + z_1^2).\end{aligned}\tag{3.33}$$

Se $b \neq 0$, então o único ponto de equilíbrio do sistema (3.33) é $p_2 = (a/b, c/b)$. Os autovalores da parte linear do sistema (3.33) em p_2 são $\lambda_1 = \lambda_2 = -(a^2 + b^2)/b$. Logo, p_2 é um nó estável se $b > 0$ ou um nó instável se $b < 0$. Se $b = 0$, então o sistema (3.33)

não tem pontos de equilíbrio e suas órbitas estão em uma família de retas paralelas de inclinação $\arctan(c/a)$ se $a \neq 0$, ou $\pi/2$ se $a = 0$.

O retrato de fase do sistema (3.28) na carta local V_2 é o mesmo que na carta U_2 invertendo o tempo.

Compactificação nas cartas locais U_3 e V_3 . A expressão da compactificação de Poincaré do sistema (3.28) na carta local U_3 é dada por

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= (a - c z_1) (z_1^2 + z_2^2 - z_3) + z_3 (2e z_1^2 - 2f z_1 z_2 - 2d z_2 - e z_3), \\ \dot{z}_2 &= (b - c z_2) (z_1^2 + z_2^2 - z_3) - z_3 (2f z_2^2 - 2e z_1 z_2 - 2d z_1 - f z_3), \\ \dot{z}_3 &= -z_3 ((z_1^2 + z_2^2 - z_3) c - 2e z_1 z_3 + 2f z_2 z_3).\end{aligned}$$

Considerando $z_3 = 0$ no sistema anterior, podemos escrevê-lo como

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= (a - c z_1) (z_1^2 + z_2^2), \\ \dot{z}_2 &= (b - c z_2) (z_1^2 + z_2^2).\end{aligned}\tag{3.34}$$

Se $c \neq 0$, então os pontos de equilíbrio do sistema (3.34) são a origem, $p_0 = (0, 0)$, e $p_3 = (a/c, b/c)$. Os autovalores da parte linear do sistema (3.34) em p_3 são $\lambda_1 = \lambda_2 = -(a^2 + b^2)/c$. Logo, p_3 é um nó estável se $c > 0$ ou um nó instável se $c < 0$. Os autovalores da parte linear do sistema (3.34) em p_0 são $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Logo, p_0 é um ponto de equilíbrio degenerado. Porém, podemos determinar o comportamento do sistema (3.34) numa vizinhança da origem, já que sua dinâmica fora da origem é a mesma que a do sistema $\dot{z}_1 = a - c z_1$, $\dot{z}_2 = b - c z_2$.

Se $c = 0$, então p_0 é o único ponto de equilíbrio do sistema (3.34). Novamente, p_0 é um ponto de equilíbrio degenerado. Porém, fora da origem a dinâmica do sistema (3.34) é a mesma que a do sistema $\dot{z}_1 = a$, $\dot{z}_2 = b$. Logo, neste caso, as órbitas do sistema (3.34) estão na família de retas paralelas de inclinação $\arctan(b/a)$ se $a \neq 0$, ou $\pi/2$ se $a = 0$.

Observe que o ponto de equilíbrio p_0 , que é a origem da carta local U_3 , coincide com a extensão do parabolóide invariante $\mathcal{G} = 0$ do sistema (3.28) até a fronteira \mathbb{S}^2 da bola de Poincaré.

Os retratos de fase do sistema (3.28) nas cartas locais U_2 e U_3 dependendo do valor dos parâmetros b e c , respectivamente, são topologicamente equivalentes àqueles mostrados na Figura 3.15. Novamente, o fluxo do sistema (3.28) na carta local V_3 é o mesmo que na carta local U_3 invertendo o tempo.

Agrupando os resultados obtidos nas seis cartas locais estudadas, obtemos os retratos de fase mostrados na Figura 3.14, que representam a dinâmica do sistema (3.28) na esfera de Poincaré \mathbb{S}^2 (no infinito), dependendo do valor dos parâmetros reais a , b e c . Podemos observar que apenas os parâmetros aparecendo nos termos de maior grau do sistema (3.28) afetam sua dinâmica no infinito.

Levando em consideração as afirmações dos Teoremas 11 e 12, obtemos uma bifurcação interessante sobre o parabolóide invariante $\mathcal{G} = 0$ do sistema (3.28) quando d tende a zero: o centro p do enunciado do Teorema 11 tende para o ponto p_0 no infinito, que corresponde à extensão de $\mathcal{G} = 0$ até a fronteira \mathbb{S}^2 da bola de Poincaré (Figura 3.5) e trata-se de um ponto de equilíbrio degenerado com setores elípticos formados por infinitas órbitas homoclínicas pertencendo a $\mathcal{G} = 0$, conforme pode ser visto na Figura 3.16.

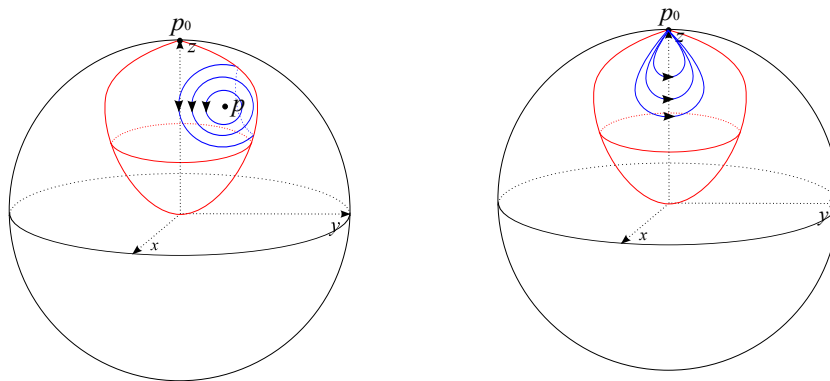


Figura 3.16: Descrição da bifurcação que ocorre sobre o parabolóide invariante $\mathcal{G} = 0$ do sistema (3.28) quando d tende a zero.

Mais precisamente, se $d \neq 0$ então

$$p = \left(-\frac{f}{2d}, -\frac{e}{2d}, \frac{e^2 + f^2}{4d^2} \right)$$

é o único ponto de equilíbrio do sistema (3.28) sobre o parabolóide invariante $\mathcal{G} = 0$ e ele é um centro, de acordo com o Teorema 11. Se $e \neq 0$ ou $f \neq 0$, então quando d tende a zero, temos que p tende a p_0 , onde p_0 é o ponto no infinito que corresponde à extensão de $\mathcal{G} = 0$ até a fronteira \mathbb{S}^2 da bola de Poincaré e trata-se de um ponto de equilíbrio degenerado, conforme vimos no Teorema 12, com setores elípticos sobre $\mathcal{G} = 0$, formados por infinitas órbitas homoclínicas, já que as órbitas sobre $\mathcal{G} = 0$ estão em uma família de órbitas paralelas quando $d = 0$ e $e \neq 0$ ou $f \neq 0$ (Figura 3.13). Este tipo de bifurcação também aparece no sistema diferencial polinomial estudado em [22].

Neste contexto, um problema interessante seria estudar o comportamento das órbitas do sistema (3.28) no interior do parabolóide invariante $\mathcal{G} = 0$ quando o sistema (3.28) não tem pontos de equilíbrio e considerando o espaço de fase compactificado, já que, neste caso, estas órbitas estariam contidas numa região compacta do espaço. De fato, poderíamos detectar a presença de órbitas periódicas ou até mesmo de um atrator estranho contido no interior de $\mathcal{G} = 0$.

Para este propósito, consideramos a origem da carta local U_3 da compactificação de Poincaré, que corresponde ao ponto de equilíbrio p_0 (extensão de $\mathcal{G} = 0$ até o infinito). Conforme vimos no Teorema 12, p_0 é um ponto de equilíbrio degenerado com todos os autovalores nulos. Assim, realizando algumas simulações numéricas considerando órbitas numa vizinhança de p_0 e com condições iniciais no interior de $\mathcal{G} = 0$, detectamos a existência de uma classe de infinitas órbitas no interior de $\mathcal{G} = 0$ homoclínicas ao ponto de equilíbrio degenerado p_0 . Na Figura 3.17 estão representadas algumas dessas órbitas.

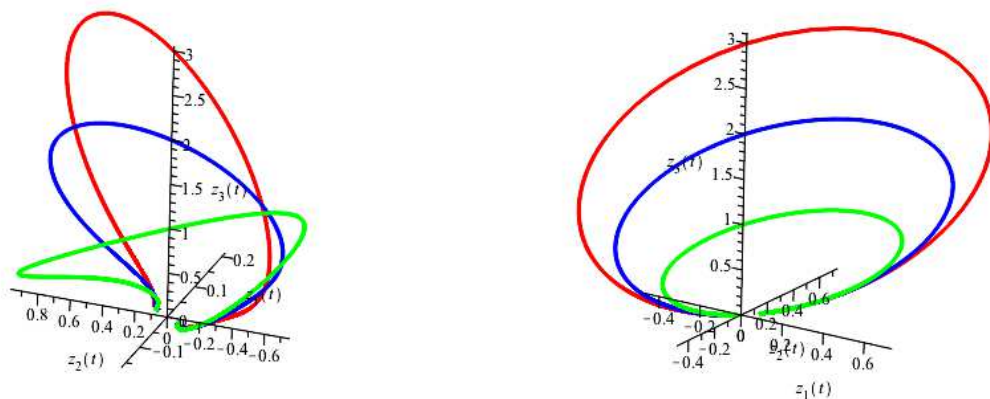


Figura 3.17: Espaço de fase do sistema (3.28) na carta U_3 da compactificação de Poincaré numa vizinhança da origem de U_3 com $a = 1$, $b = -0.2$, $c = 0.5$, $d = 0$, $e = -0.5$ e $f = 1$ (caso $af + be + cd \neq 0$ e $d = 0$); e $a = b = d = 0$, $c = f = 1$ e $e = -1$ (caso $af + be + cd = 0$, $a = b = d = 0$ e $e \neq 0$ ou $f \neq 0$), respectivamente, com condições iniciais $(0, 0, 1)$, $(0, 0, 2)$ e $(0, 0, 3)$. No segundo caso, note que o plano $f z_1 + e z_2 = 0$ (ou seja, $z_1 - z_2 = 0$, para $e = -1$ e $f = 1$) é invariante pelo fluxo do sistema.

3.6 Estudo do sistema de Rabinovich com paraboloides invariantes

É importante observar que sistemas diferenciais como o sistema (3.18), ou seja, com um parabolóide elíptico como superfície algébrica invariante, também aparecem em alguns problemas aplicados, como, por exemplo, no sistema de Rabinovich, que é dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= h y - \nu_1 x + yz, \\ \dot{y} &= h x - \nu_2 y - xz, \\ \dot{z} &= -\nu_3 z + xy,\end{aligned}\tag{3.35}$$

com $h, \nu_1, \nu_2, \nu_3 \in \mathbb{R}$. O sistema de Rabinovich aparece como um modelo matemático para três ondas acopladas ressonantemente e parametricamente excitadas [66] e, para escolhas adequadas dos valores dos parâmetros, apresenta comportamento caótico, incluindo um atrator estranho de “quatro-asas”, como mostrado em [43]. Observe que, para $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0$ e $h \neq 0$, $H_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4hz$ e $H_2(x, y, z) = y^2 + z^2 - 2hz$ são integrais primeiras independentes do sistema (3.35), veja [6, 43, 87]. Logo, o sistema (3.35) é integrável e o seu espaço de fase é folheado pelos paraboloides invariantes $x^2 + y^2 - 4hz = k$, com $k \in \mathbb{R}$. A existência de paraboloides invariantes permite entender melhor a dinâmica complicada deste sistema.

Podemos escrever o sistema (3.18) como o sistema (3.35) tomando $A = B = C = D = 0$, $E = -hy - yz$ e $F = hx - xz$ e considerando $h = 1/4$. Neste caso, o espaço de fase do sistema (3.35) é folheado pelos paraboloides invariantes $x^2 + y^2 - z = k$, com $k \in \mathbb{R}$. Nesta seção, daremos uma descrição detalhada do fluxo do sistema (3.35) restrito a esses paraboloides invariantes.

Quando $h \neq 0$ no sistema (3.35), então, de acordo com o item (a) da Proposição 6 de [43], podemos considerar $h = 1$. O fluxo do sistema (3.35), com $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0$, restrito aos paraboloides invariantes $x^2 + y^2 - 4z = k$, com $k \in \mathbb{R}$, após um rescalonamento de tempo, é dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y(x^2 + y^2 - k + 4), \\ \dot{y} &= x(x^2 + y^2 - k - 4).\end{aligned}\tag{3.36}$$

Os pontos de equilíbrio do sistema restrito (3.36) são $p_0 = (0, 0)$, $p_{1,2} = (\pm\sqrt{k+4}, 0)$ e $p_{3,4} = (0, \pm\sqrt{k-4})$. Temos os seguintes casos a considerar.

-
- (a) Se $k < -4$, então p_0 é o único ponto de equilíbrio do sistema (3.36) e os seus autovalores são $\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{k^2 - 16}$. Logo, p_0 é um centro.
- (b) Se $k = -4$, então p_0 é o único ponto de equilíbrio do sistema (3.36) e trata-se de um centro degenerado.
- (c) Se $-4 < k < 4$, então p_0 e $p_{1,2}$ são pontos de equilíbrio do sistema (3.36) e os seus autovalores são $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{16 - k^2}$ e $\lambda_{1,2} = \pm 4i \sqrt{k + 4}$, respectivamente. Logo, p_0 é uma sela e $p_{1,2}$ são centros.
- (d) Se $k = 4$, então p_0 e $p_{1,2}$ são pontos de equilíbrio do sistema (3.36). Temos que $p_{1,2}$ são centros, como no caso anterior, e p_0 é um ponto de equilíbrio degenerado.
- (e) Se $k > 4$, então p_0 , $p_{1,2}$ e $p_{3,4}$ são pontos de equilíbrio do sistema (3.36) e os seus autovalores são $\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{k^2 - 16}$, $\lambda_{1,2} = \pm 4i \sqrt{k + 4}$ e $\lambda_{1,2} = \pm 4 \sqrt{k - 4}$, respectivamente. Logo, p_0 e $p_{1,2}$ são centros e $p_{3,4}$ são selas.

Na Figura 3.18 estão desenhados os retratos de fase do sistema (3.36) para cada um dos casos anteriores. Note que os pontos de equilíbrio do sistema (3.36) estão na intersecção dos paraboloides invariantes $x^2 + y^2 - 4z = k$ com as retas $l_1 = (0, 0, z)$, $l_2 = (0, y, -1)$ e $l_3 = (x, 0, 1)$, que são formadas por pontos de equilíbrio do sistema (3.35) quando $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0$. A Figura 3.19 ilustra as posições relativas entre os paraboloides invariantes $x^2 + y^2 - 4z = k$ e as retas de equilíbrios l_1 , l_2 e l_3 .

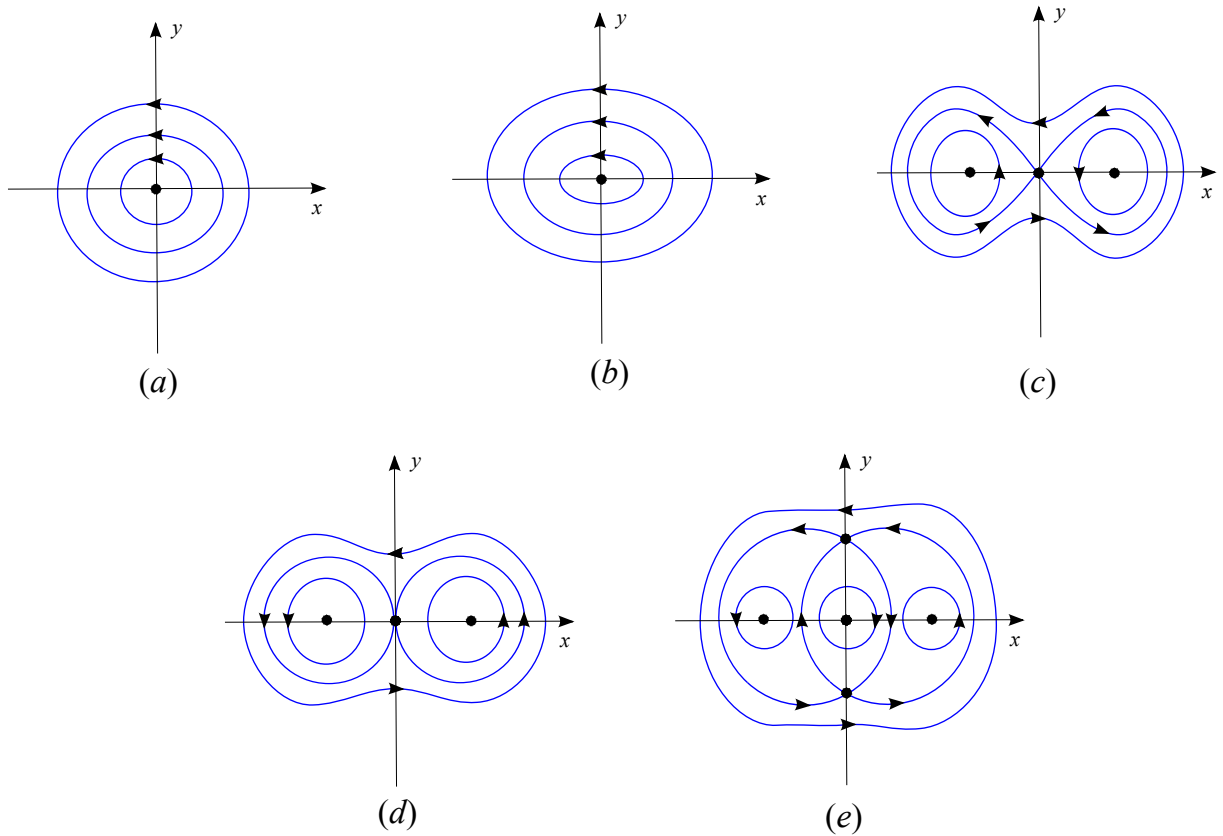


Figura 3.18: Retrato de fase do sistema (3.36) para os casos (a) $k < -4$, (b) $k = -4$, (c) $-4 < k < 4$, (d) $k = 4$, (e) $k > 4$.

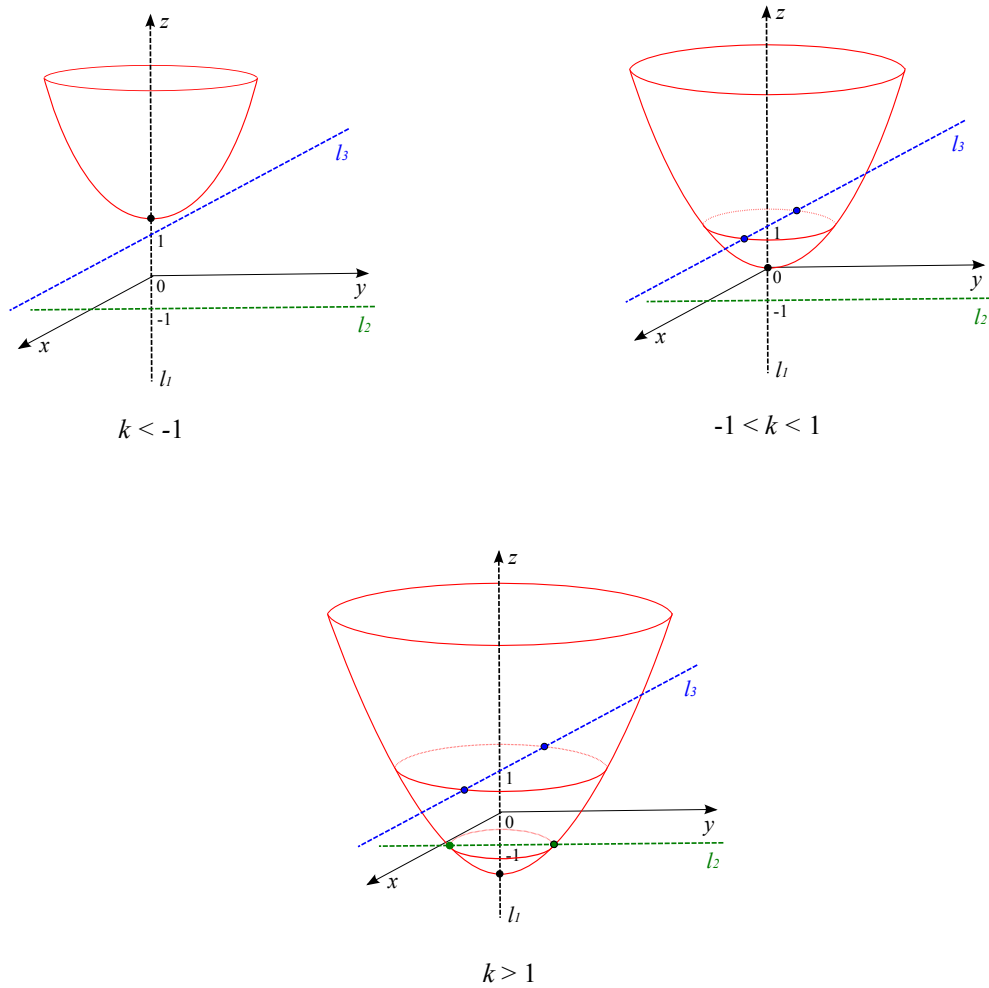


Figura 3.19: Posições relativas entre os paraboloides invariantes $x^2 + y^2 - 4z = k$ e as retas de equilíbrios l_1, l_2 e l_3 para $k < -4, -4 < k < 4$ e $k > 4$, respectivamente. Note que as retas l_1, l_2 e l_3 estão numa posição fixa e o que varia é o parabolóide considerado.

Dinâmica e integrabilidade do sistema Sprott A

A existência de superfícies algébricas invariantes auxilia bastante no estudo da dinâmica de sistemas diferenciais, uma vez que órbitas com condições iniciais sobre estas superfícies ficam inteiramente contidas nela. Um problema interessante é estudar quais as consequências dinâmicas no espaço de fase de um sistema diferencial folheado por superfícies algébricas invariantes quando tais superfícies deixam de ser invariantes pelo fluxo do sistema. Neste capítulo, veremos que estas perturbações podem gerar fenômenos complicados no espaço de fase do sistema, inclusive resultando no surgimento de *hidden attractors*. Falaremos com mais detalhes sobre sistemas diferenciais com este tipo de atratores na seção 4.1.

Para estudar tal problema, vamos considerar o sistema diferencial

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x - yz, \\ \dot{z} &= y^2 - a,\end{aligned}\tag{4.1}$$

onde $a \in \mathbb{R}$. O sistema (4.1) é um caso especial do oscilador de Nosé-Hoover [25], que descreve muitos fenômenos naturais, como mostrado em [67], tendo tanto importância prática quanto teórica. Em [75], Sprott apresentou o sistema (4.1), com $a = 1$, como sendo o caso A em uma lista de A a S de sistemas diferenciais que apresentam comportamento caótico mesmo sem ter pontos de equilíbrio. Por este motivo, o sistema (4.1) é comumente chamado de *sistema Sprott A*.

Neste capítulo, realizamos uma análise da dinâmica e da integrabilidade do sistema Sprott A quando variamos o valor do parâmetro real a . Mostramos que, para $a = 0$, o eixo- z é uma reta de equilíbrios do sistema (4.1) constituída por focos, nós e um equilíbrio do tipo zero-Hopf não isolado na origem. Além disso, devido a existência da integral primeira polinomial $H(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, o seu espaço de fase é folheado pelas esferas

invariantes $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, com $r > 0$, que são formadas por um conjunto de infinitas órbitas heteroclínicas do tipo polo sul – polo norte, como pode ser visto na Figura 4.1 para $0 < r < 2$, $r = 2$ e $r > 2$.

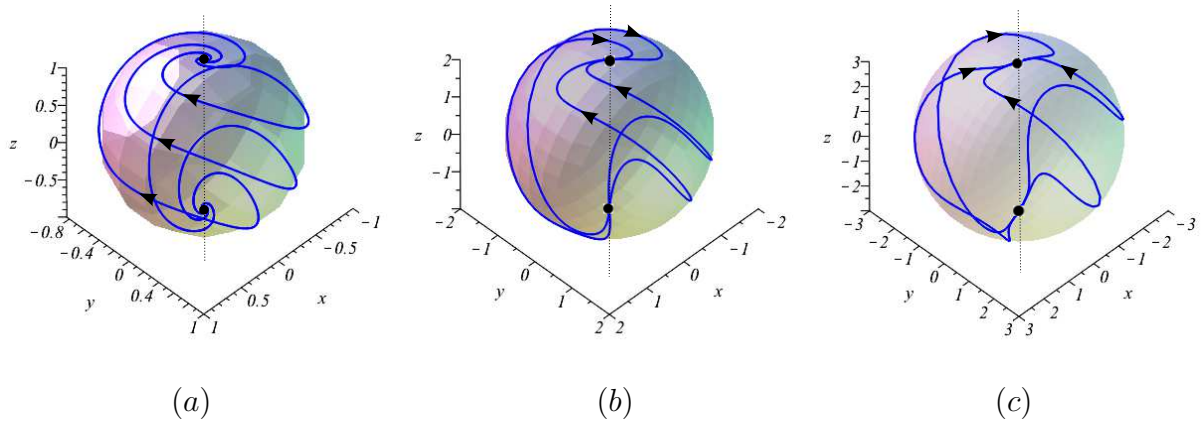


Figura 4.1: Fluxo do sistema (4.1) restrito às esferas invariantes $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ para (a) $0 < r < 2$, (b) $r = 2$ e (c) $r > 2$.

Quando $a \neq 0$, as esferas deixam de ser invariantes pelo fluxo do sistema (4.1) e as órbitas heteroclínicas são “destruídas”. Provamos que, neste caso, o sistema Sprott A não tem superfícies algébricas invariantes nem integrais primeiras polinomiais. Em seguida, realizamos um estudo detalhado da dinâmica do sistema (4.1) para $a > 0$ pequeno, combinando resultados analíticos e numéricos. Utilizando a Teoria do *Averaging*, provamos que uma órbita periódica orbitalmente estável emerge do equilíbrio zero-Hopf não isolado localizado na origem e, em torno desta órbita, forma-se uma sequência encaixante de toros invariantes, cujo mais externo deles é englobado por uma região “turbulenta” de atração/repulsão que conduz a uma estrutura homoclínica das órbitas no espaço de fase do sistema (4.1). A prova da existência destes toros é feita utilizando o Teorema KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser). Para valores adequados do parâmetro $a > 0$, observa-se que o sistema Sprott A apresenta comportamento caótico e podemos detectar a existência de um *hidden attractor* dentro da região “turbulenta”, que coexiste com os toros invariantes. Por fim, fazemos uma análise da dinâmica do sistema (4.1) no infinito via compactificação de Poincaré. Mostramos que, na fronteira \mathbb{S}^2 da bola de Poincaré, a dinâmica do sistema Sprott A independe do valor do parâmetro a e que, sobre \mathbb{S}^2 , há uma “grande” circunferência formada por pontos de equilíbrio e um conjunto infinito de órbitas heteroclínicas conectando pares destes pontos. Além disso, existem órbitas numa vizinhança de \mathbb{S}^2 , ou

seja, com grande amplitude, que fazem parte da estrutura homoclínica formada no espaço de fase do sistema (4.1) para $a > 0$ pequeno.

4.1 Sistemas caóticos com *hidden attractors*

Sistemas diferenciais com comportamento caótico caracterizam-se por ter um atrator caótico. Um *atrator* A de um sistema diferencial é um conjunto compacto e conexo no espaço de fase deste sistema para o qual todas as soluções numa vizinhança aberta do conjunto tendem para ele quando $t \rightarrow +\infty$. Embora não haja um consenso a respeito da definição de atrator caótico, muitos autores, como Devaney [12, 13], dizem que o atrator A é *caótico* se, em A , o sistema diferencial satisfaz as seguintes propriedades:

- (a) *exibe dependência sensível com relação as condições iniciais*, ou seja, pequenas mudanças nas condições iniciais das órbitas do sistema em A podem produzir grandes mudanças no comportamento dessas órbitas;
- (b) *apresenta transitividade topológica*, isto é, escolhendo-se dois pontos quaisquer em A , existe uma órbita do sistema que passa tão próximo quanto se queira desses dois pontos;
- (c) *suas órbitas periódicas são densas*, ou seja, para qualquer ponto $p \in A$, existe uma órbita periódica tão próxima deste ponto quanto se queira.

Para uma definição formal de atrator caótico, veja [12, 13]. Em 1963, Edward Lorenz encontrou o primeiro atrator caótico em um sistema diferencial autônomo tridimensional enquanto estudava a convecção térmica de fluidos na atmosfera [57, 74]. Desde então, sistemas caóticos têm sido intensamente estudados e vários destes sistemas foram encontrados nos últimos anos, como o sistema de Chen [7], o sistema de Lü [58], o sistema de Rabinovich [66], o sistema de Rössler [69], entre outros.

Recentemente há um interesse especial em encontrar e estudar sistemas caóticos com *hidden attractors*, que são atratores cuja bacia de atração não intercepta-se com pequenas vizinhanças de nenhum ponto de equilíbrio do sistema, para mais detalhes sobre este tipo de atratores veja [16, 34] e as referências neles contidas. Atratores caóticos em sistemas diferenciais sem pontos de equilíbrio [27, 80], como é o caso do sistema Sprott A, com apenas um ponto de equilíbrio estável [30, 33, 62, 79, 81, 82, 83] ou com um

número infinito de equilíbrios [21, 26, 36] são *hidden attractors*. Sistema diferenciais com *hidden attractors* são raramente encontrados. Por isso, existem poucos exemplos deste tipo de sistemas na literatura e pouco se sabe a respeito da formação desses atratores e até mesmo uma prova analítica de sua existência ainda é necessária. De fato, enquanto os atratores caóticos clássicos, como os atratores de Lorenz e de Chen, têm algumas rotas conhecidas para sua formação, como a bifurcação de órbitas homoclínicas (Teoremas de Shilnikov) ou as cascatas de duplicação de período, até o momento muito pouco é relatado na literatura no caso dos *hidden attractors*. Do ponto de vista de aplicações, *hidden attractors* são importantes na Engenharia, pois permitem respostas inesperadas e potencialmente desastrosas a perturbações em estruturas como a de uma ponte ou asa de avião, como citado em [26, 28, 62]. Outras aplicações e implementações recentes de sistemas diferenciais com *hidden attractors* podem ser encontradas em [11, 35, 64, 65, 73, 84].

4.2 Existência de uma estrutura compacta no sistema Sprott A quando $a = 0$

Considere $a = 0$ no sistema (4.1). Neste caso, o eixo- z é uma reta de equilíbrios e o polinômio $H(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ é uma integral primeira do sistema. Consequentemente, o seu espaço de fase é folheado pelas esferas invariantes $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, com $r > 0$.

Os pontos de intersecção de cada esfera invariante $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ com o eixo- z são $P_- = (0, 0, -r)$ e $P_+ = (0, 0, r)$, ou seja, o polo sul e o polo norte, respectivamente, de cada esfera. Os autovalores da parte linear do sistema (4.1) nos pontos de equilíbrio P_{\pm} são

$$\lambda_1 = \mp \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}\sqrt{r^2 - 4}, \quad \lambda_2 = \mp \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}\sqrt{r^2 - 4}, \quad \lambda_3 = 0,$$

com autovetores correspondentes

$$v_1 = \left(\frac{2}{\mp r + \sqrt{r^2 - 4}}, 1, 0 \right), \quad v_2 = \left(\frac{2}{\mp r - \sqrt{r^2 - 4}}, 1, 0 \right), \quad v_3 = (0, 0, 1).$$

Temos os seguintes casos a considerar.

(i) Se $0 < r < 2$, então os autovalores $\lambda_{1,2}$ são complexos conjugados com parte real positiva para P_- e negativa para P_+ . Logo, para cada esfera invariante $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$,

P_- é um foco instável e P_+ é um foco estável. Considerando também os autovetores correspondentes, é fácil observar que as órbitas espiralam localmente em direção ao ponto de equilíbrio P_+ , quando $t \rightarrow \infty$, sobre uma superfície tangente ao plano gerado pelos autovetores $v_{1,2}$, logo, em uma direção normal ao eixo- z . O mesmo é verdade para o ponto de equilíbrio P_- quando $t \rightarrow -\infty$. (veja Figura 4.1 (a)).

(ii) Se $r = 2$, então os autovalores $\lambda_{1,2}$ são reais e $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ para P_- e $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ para P_+ . Logo, P_- é um nó impróprio instável e P_+ é um nó impróprio estável. Considerando os autovetores $v_{1,2}$ podemos concluir que P_- e P_+ são nós impróprios normalmente hiperbólicos ao eixo- z . (veja Figura 4.1 (b)).

(iii) Se $r > 2$, então os autovalores $\lambda_{1,2}$ são reais e positivos para P_- e negativos para P_+ . Logo, P_- é um nó instável e P_+ é um nó estável. Levando-se em consideração os autovetores $v_{1,2}$, temos que os nós P_- e P_+ são normalmente hiperbólicos ao eixo- z . (veja Figura 4.1 (c)).

A seguir, damos a definição de equilíbrio zero-Hopf.

Definição 11 (Equilíbrio zero-Hopf) *Um ponto de equilíbrio (isolado) de um sistema diferencial em \mathbb{R}^3 é um equilíbrio do tipo zero-Hopf se a matriz Jacobiana do sistema calculada neste ponto tem um autovalor nulo e um par de autovalores complexos conjugados.*

Sabe-se que, genericamente, uma *bifurcação zero-Hopf* ocorre em um equilíbrio do tipo zero-Hopf com o desdobramento de uma família a dois parâmetros de sistemas diferenciais autônomos tridimensionais. Numa pequena vizinhança deste ponto de equilíbrio isolado, o desdobramento pode exibir diferentes tipos topológicos de dinâmica conforme os dois parâmetros variam. Dependendo do sistema, até mesmo um ramo de bifurcações de toros (bifurcação de Neimark-Sacker) pode emanar deste equilíbrio e, em alguns casos, a bifurcação zero-Hopf pode implicar no surgimento local de caos, como afirmado, por exemplo, em [3, 4, 72]. A teoria da bifurcação zero-Hopf foi analisada em [23, 24, 31, 72].

Observe que, para $a = 0$, a origem do sistema (4.1) é um ponto de equilíbrio não isolado cujos autovalores são $\lambda_{1,2} = \pm i$ e $\lambda_3 = 0$. Por este motivo, dizemos que este equilíbrio é *do tipo zero-Hopf não isolado*. Por ter um equilíbrio do tipo zero-Hopf não isolado e depender apenas de um parâmetro real, o sistema (4.1) não pode exibir um desdobramento completo de uma bifurcação do tipo zero-Hopf clássica. Em [51], usando técnicas da Análise e a Teoria de *Averaging* de Segunda Ordem, os autores provaram a existência de um ou dois ciclos limites bifurcando de um equilíbrio do tipo zero-Hopf não

isolado. Na próxima seção, provaremos que uma órbita periódica emerge da origem do sistema (4.1) quando $a > 0$ pequeno. A bifurcação descrita aqui é uma das possíveis bifurcações que podem ocorrer no desdobramento deste tipo de equilíbrio. Em particular, esta bifurcação é diferente daquelas descritas em [51].

O tipo e a estabilidade dos pontos de equilíbrio P_{\pm} descritos acima são apenas locais. Para obter o comportamento das órbitas do sistema (4.1) sobre as esferas invariantes $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, devemos estudar o fluxo do sistema restrito a estas esferas. Para isto, consideramos as cartas locais $z > 0$ e $z < 0$.

Assuma que $z > 0$. Tomando $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ no sistema (4.1), obtemos o sistema diferencial planar

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x - y\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}.\end{aligned}\tag{4.2}$$

A origem é o único ponto de equilíbrio do sistema (4.2) e os autovalores da parte linear deste sistema na origem são

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}r \pm \frac{1}{2}\sqrt{r^2 - 4}.$$

Logo, a origem é um foco estável se $0 < r < 2$, um nó impróprio estável se $r = 2$ ou um nó estável se $r > 2$. Analogamente, quando $z < 0$, tomamos $z = -\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ no sistema (4.1). O único ponto de equilíbrio do sistema obtido é a origem, que é um foco instável se $0 < r < 2$, um nó impróprio instável se $r = 2$ ou um nó instável se $r > 2$. Na Figura 4.2 estão os retratos de fase do sistema (4.1) nas cartas locais $z > 0$ (acima) e $z < 0$ (abaixo) para $0 < r < 2$, $r = 2$ e $r > 2$.

Não há órbitas periódicas do sistema (4.1) sobre as esferas invariantes $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. De fato, considerando o fluxo do sistema (4.1) restrito às esferas invariantes nas cartas locais $z > 0$ e $z < 0$ estudadas acima, a única possibilidade de existência de uma órbita periódica seria sobre o equador das esferas invariantes. Porém, $\dot{z} > 0$ para $z = 0$. Então, o fluxo do sistema (4.1) sobre o equador de cada esfera invariante é crescente. Logo, não há órbita periódica contida nele.

Como em cada esfera invariante o polo sul P_- e o polo norte P_+ são os únicos pontos de equilíbrio e não há órbitas periódicas, pelo Teorema de Poincaré-Bendixson, o conjunto α -limite de todas as órbitas sobre cada esfera invariante é o ponto de equilíbrio instável P_- e o conjunto ω -limite é o ponto de equilíbrio estável P_+ . Em outras palavras, todas

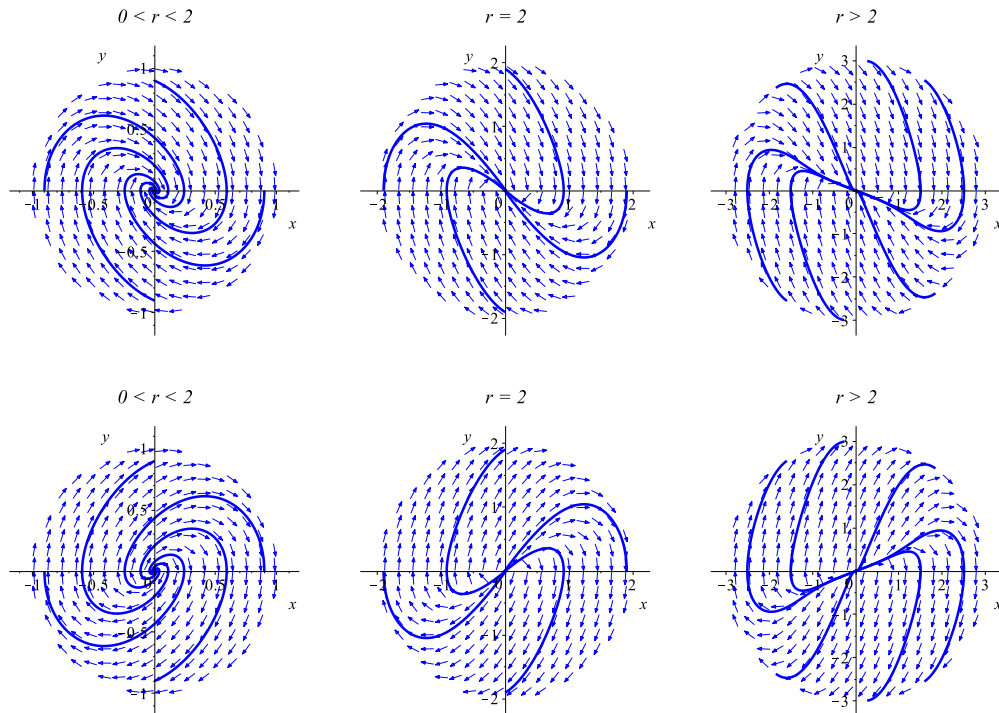


Figura 4.2: Retrato de fase do sistema (4.1) restrito às esferas invariantes $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ sobre as cartas locais $z > 0$ (acima) e $z < 0$ (abaixo) para $0 < r < 2$, $r = 2$ e $r > 2$.

as órbitas sobre cada esfera invariante (exceto P_- e P_+) tendem em direção ao polo sul P_- quando $t \rightarrow -\infty$ e tendem em direção ao polo norte P_+ quando $t \rightarrow \infty$, formando um conjunto de infinitas órbitas heteroclínicas do tipo polo sul – polo norte. Note que cada esfera invariante $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ é a variedade instável de P_- e a variedade estável de P_+ . Com isso, obtemos a Figura 4.1, que fornece o fluxo do sistema (4.1) restrito às esferas invariantes para $0 < r < 2$, $r = 2$ e $r > 2$. Para mais detalhes sobre o Teorema de Poincaré-Bendixson, veja a Seção 1.7 de [17].

Os resultados obtidos nesta seção, podem ser sintetizados no seguinte teorema.

Teorema 13 *Para $a = 0$, o sistema (4.1) tem uma reta de equilíbrios dada pela eixo- z , cuja origem é um equilíbrio do tipo zero-Hopf não isolado, e o seu espaço de fase é folheado pelas esferas invariantes $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, com $r > 0$. Logo, o polo sul P_- e o polo norte P_+ de cada uma dessas esferas são pontos de equilíbrio e valem as seguintes afirmações:*

- (i) *Se $0 < r < 2$, então P_- e P_+ são focos;*

(ii) Se $r = 2$, então P_- e P_+ são nós impróprios;

(iii) Se $r > 2$, então P_- e P_+ são nós.

Além disso, para todo $r > 0$, P_- é um ponto de equilíbrio instável e P_+ é um ponto de equilíbrio estável, ambos normalmente hiperbólicos ao eixo- z e o conjunto α -limite de qualquer órbita do sistema (4.1) sobre cada uma das esferas invariantes $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ (exceto P_- e P_+) é o ponto de equilíbrio P_- e o conjunto ω -limite é o ponto de equilíbrio P_+ . Portanto, cada esfera invariante é formada por um conjunto de infinitas órbitas heteroclínicas do tipo polo sul – polo norte, como pode ser observado na Figura 4.1.

Note que o teorema anterior descreve a existência de uma estrutura compacta das órbitas no espaço de fase do sistema (4.1) quando $a = 0$, determinada pela existência de esferas invariantes concêntricas.

4.3 Integrabilidade do sistema Sprott A quando $a \neq 0$

Conforme vimos na Seção 4.2, quando $a = 0$, o sistema Sprott A possui uma integral primeira polinomial dada por $H(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ e, conseqüentemente, o seu espaço de fase é folheado por esferas invariantes concêntricas. Nesta seção, provamos o seguinte resultado.

Teorema 14 *Se $a \neq 0$, então o sistema diferencial (4.1) não possui superfícies algébricas invariantes nem integrais primeiras polinomiais.*

Prova. Considere $a \neq 0$ no sistema (4.1) e suponha que $f = 0$ seja uma superfície algébrica invariante de grau $n \geq 1$ deste sistema com cofator $K = k_0 + k_1 x + k_2 y + k_3 z$, com $k_0, k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{C}$, já que o sistema (4.1) tem grau 2. Inicialmente, assumamos que o cofator K não é identicamente nulo. Escreva f como a soma de suas partes homogêneas, isto é, $f = \sum_{i=0}^n f_i$, onde cada f_i é um polinômio homogêneo de grau i . Considere $n > 1$ (pode-se verificar diretamente da definição que o sistema (4.1) não possui planos invariantes). Da definição de superfície algébrica invariante (Definição 1 do Capítulo 1), temos que f satisfaz a equação diferencial parcial

$$y \frac{\partial f}{\partial x} + (-x - yz) \frac{\partial f}{\partial y} + (y^2 - a) \frac{\partial f}{\partial z} = (k_0 + k_1 x + k_2 y + k_3 z) f. \quad (4.3)$$

Considerando os termos de grau $n + 1$ em (4.3), obtemos

$$-y z \frac{\partial f_n}{\partial y} + y^2 \frac{\partial f_n}{\partial z} = (k_1 x + k_2 y + k_3 z) f_n. \quad (4.4)$$

Resolvendo esta equação diferencial parcial, temos que

$$f_n(x, y, z) = C_n(x, y^2 + z^2) \left(\frac{2y^2 + 2z^2 + 2z\sqrt{y^2 + z^2}}{y} \right)^{g(x, y, z)} \exp \left(-k_2 \arctan \left(\frac{y}{z} \right) \right) y^{-k_3},$$

onde C_n é uma função arbitrária nas variáveis x e $y^2 + z^2$ e $g(x, y, z) = k_1 x / \sqrt{y^2 + z^2}$. Como f_n é um polinômio homogêneo, então devemos ter $k_1 = k_2 = 0$ e $k_3 = -m$, onde m é um inteiro tal que $0 \leq m \leq n$. Logo, $f_n(x, y, z) = C_n(x, y^2 + z^2) y^m$.

Agora, considerando os termos de grau n na igualdade (4.3), obtemos

$$-y z \frac{\partial f_{n-1}}{\partial y} + y^2 \frac{\partial f_{n-1}}{\partial z} + y \frac{\partial f_n}{\partial x} - x \frac{\partial f_n}{\partial y} = k_0 f_n - m z f_{n-1}. \quad (4.5)$$

Temos dois casos para considerar: $m = 0$ e $m \neq 0$. Assumindo que $m = 0$ em (4.5) e resolvendo a equação diferencial parcial obtida para f_{n-1} , temos que

$$f_{n-1}(x, y, z) = C_{n-1}(x, y^2 + z^2) + \frac{\partial f_n}{\partial x} \arctan \left(\frac{y}{z} \right) + h(y, z) \left(x \frac{\partial f_n}{\partial y} + k_0 f_n \right),$$

onde C_{n-1} é uma função arbitrária nas variáveis x e $y^2 + z^2$ e

$$h(y, z) = \frac{1}{\sqrt{y^2 + z^2}} \ln \left(\frac{2y^2 + 2z^2 + 2z\sqrt{y^2 + z^2}}{y} \right). \quad (4.6)$$

Como f_{n-1} é um polinômio homogêneo, devemos ter

$$x \frac{\partial f_n}{\partial y} + k_0 f_n = 0,$$

cujas soluções são

$$f_n(x, y, z) = C_n(x, z) \exp \left(-\frac{k_0 y}{x} \right),$$

onde C_n é uma função arbitrária nas variáveis x e z . Logo $k_0 = 0$, pois f_n é um polinômio homogêneo. Deste modo, $K \equiv 0$, o que é absurdo, pois estamos assumindo K não identicamente nulo.

Agora, considere $m \neq 0$ na equação diferencial parcial (4.5). Sem perda de generalidade, podemos tomar $m = 1$ em (4.5). Resolvendo a equação diferencial parcial para f_{n-1} , obtemos

$$f_{n-1}(x, y, z) = C_{n-1}(x, y^2 + z^2) y - h(y, z) y \frac{\partial f_n}{\partial x} + \frac{z}{y^2 + z^2} \left(x \frac{\partial f_n}{\partial y} + k_0 f_n \right),$$

onde C_{n-1} é uma função arbitrária nas variáveis x e $y^2 + z^2$, e $h(y, z)$ é dada por (4.6). Como f_{n-1} é um polinômio homogêneo, devemos ter

$$x \frac{\partial f_n}{\partial y} + k_0 f_n = F(x, y, z) (y^2 + z^2),$$

onde F é um polinômio arbitrário. A solução desta equação diferencial parcial é

$$f_n(x, y, z) = C_n(x, z) \exp\left(-\frac{k_0 y}{x}\right) + F(x, y, z) \frac{k_0^2 (y^2 + z^2) + 2x^2 - 2k_0 x y}{k_0^3},$$

onde C_n é uma função arbitrária nas variáveis x e z . Note que f_n não é um polinômio para $k_0 \neq 0$. Considere $F(x, y, z) = k_0^3 \tilde{F}(x, y, z)$, onde \tilde{F} é um polinômio arbitrário. Então, tomando $k_0 = 0$, obtemos que $f_n(x, y, z) = C_n(x, z)$. Como também temos que $f_n(x, y, z) = C_n(x, y^2 + z^2) y^m$ (solução da equação diferencial parcial (4.4)) e estamos considerando $m \neq 0$, segue que $f_n \equiv 0$, o que é absurdo, pois f é um polinômio de grau n .

Agora, suponha que o cofator K seja identicamente nulo, isto é, f é uma integral primeira polinomial do sistema (4.1). Logo, f satisfaz a igualdade (4.3), com $k_0 = k_1 = k_2 = k_3 = 0$. Neste caso, considerando os termos de grau n na igualdade (4.3), com $k_0 = k_1 = k_2 = k_3 = 0$, obtemos a equação diferencial parcial

$$-y z \frac{\partial f_{n-1}}{\partial y} + y^2 \frac{\partial f_{n-1}}{\partial z} + y \frac{\partial f_n}{\partial x} - x \frac{\partial f_n}{\partial y} = 0.$$

Resolvendo esta equação diferencial parcial para f_{n-1} , temos que

$$f_{n-1}(x, y, z) = C_{n-1}(x, y^2 + z^2) + \frac{\partial f_n}{\partial x} \arctan\left(\frac{y}{z}\right) + h(y, z) x \frac{\partial f_n}{\partial y},$$

onde C_{n-1} é uma função arbitrária nas variáveis x e $y^2 + z^2$, e $h(y, z)$ é dada por (4.6). Como f_{n-1} é um polinômio homogêneo, devemos ter $\partial f_n / \partial x \equiv \partial f_n / \partial y \equiv 0$. Assim, $f_n(x, y, z) = c z^n$, com $c \in \mathbb{C}$, pois f_n é um polinômio homogêneo de grau n que depende

apenas da variável z . Agora, considerando os termos de grau $n - 1$ na igualdade (4.3), com $k_0 = k_1 = k_2 = k_3 = 0$, obtemos

$$-y z \frac{\partial f_{n-2}}{\partial y} + y^2 \frac{\partial f_{n-2}}{\partial z} + y \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x} - x \frac{\partial f_{n-1}}{\partial y} + \frac{\partial f_n}{\partial z} a = 0.$$

Resolvendo esta equação diferencial parcial para f_{n-2} , temos que

$$f_{n-2}(x, y, z) = C_{n-2}(x, y^2 + z^2) + \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x} \arctan\left(\frac{y}{z}\right) + h(y, z) \left(x \frac{\partial f_{n-1}}{\partial y} - a \frac{\partial f_n}{\partial z} \right),$$

onde C_{n-2} é uma função arbitrária nas variáveis x e $y^2 + z^2$ e $h(y, z)$ é dada por (4.6). Lembrando que $f_n(x, y, z) = c z^n$ e como f_{n-2} é um polinômio homogêneo, devemos resolver a equação diferencial parcial

$$x \frac{\partial f_{n-1}}{\partial y} - a c n z^{n-1} = 0,$$

cuja solução é

$$f_{n-1}(x, y, z) = C_{n-1}(x, z) - a c n \frac{y z^{n-1}}{x}.$$

Como f_{n-1} é um polinômio homogêneo e estamos assumindo $a \neq 0$ (por hipótese) e $n > 1$, devemos ter $c = 0$ e, conseqüentemente, $f_n \equiv 0$, o que é absurdo, pois f é um polinômio de grau n .

Portanto, quando $a \neq 0$, o sistema (4.1) não tem superfícies algébricas invariantes nem integrais primeiras polinomiais. \square

4.4 Dinâmica do sistema Sprott A quando $a > 0$ suficientemente pequeno

Em [75], Sprott encontrou um *hidden attractor* para o sistema (4.1) com $a = 1$ e tomando a órbita com condição inicial $(0, 5, 0)$, já que, para estes valores, ele detectou a presença de comportamento caótico no sistema a partir do cálculo dos expoentes de Lyapunov e da dimensão de Lyapunov. Baseados nisto e nos resultados obtidos na seção anterior, fazemos um estudo analítico/numérico detalhado da dinâmica do sistema (4.1) para $a > 0$ suficientemente pequeno, ou seja, quando as esferas $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, com

$r > 0$, deixam de ser superfícies algébricas invariantes e as órbitas heteroclínicas são destruídas. Os resultados encontrados estão descritos a seguir.

4.4.1 Persistência da estrutura compacta.

Conforme provamos na Seção 4.2, quando $a = 0$, o sistema (4.1) tem uma reta de equilíbrios dada pelo eixo- z e há um conjunto de infinitas órbitas heteroclínicas do tipo polo sul – polo norte sobre esferas invariantes concêntricas. Quando $a > 0$, o sistema (4.1) não tem pontos de equilíbrio e o eixo- z passa a ser invariante pelo seu fluxo. De fato, se $x = y = 0$ no sistema (4.1), então $\dot{z} = -a < 0$. Logo, dada uma órbita com condição inicial sobre o eixo- z , ela fica inteiramente contida nele e movimenta-se em seu sentido negativo. Porém, para $a > 0$ suficientemente pequeno, a estrutura compacta do espaço de fase do sistema (4.1) é preservada, exceto numa vizinhança tubular do eixo- z , no seguinte sentido: dado um ponto no espaço de fase do sistema (4.1) suficientemente distante do eixo- z , a órbita passando por este ponto gira sobre uma das esferas $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, com $r > 0$, as quais, por continuidade, preservam sua invariância com uma pequena deformação, até atingir uma vizinhança tubular do eixo- z , quando então esta órbita passa a oscilar em torno do eixo- z em direção à origem, como pode ser observado nas Figuras 4.3 e 4.4. Isto vale para tempos positivos e negativos. Este tipo de comportamento dinâmico das órbitas conduz à formação de toros invariantes e de órbitas homoclínicas a um “conjunto limite” (ou *hidden attractor*), conforme veremos adiante.

4.2.2 Bifurcação de uma órbita periódica da origem.

Na Seção 4.2, vimos que, para $a = 0$, a origem é um ponto de equilíbrio do tipo zero-Hopf não isolado do sistema (4.1). Utilizando a Teoria de *Averaging* de Primeira Ordem, mostraremos que quando $a > 0$ suficientemente pequeno uma órbita periódica orbitalmente estável emerge da origem. A seguir apresentamos uma breve introdução sobre esta teoria. Para mais detalhes, veja [70].

Considere os problemas de valor inicial

$$\dot{\mathbf{x}} = \varepsilon F_1(t, \mathbf{x}) + \varepsilon^2 F_2(t, \mathbf{x}, \varepsilon), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (4.7)$$

e

$$\dot{\mathbf{y}} = \varepsilon g(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (4.8)$$

com \mathbf{x} , \mathbf{y} e \mathbf{x}_0 em algum aberto Ω de \mathbb{R}^n , $t \in [0, \infty)$ e $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, para algum $\varepsilon_0 > 0$ fixo

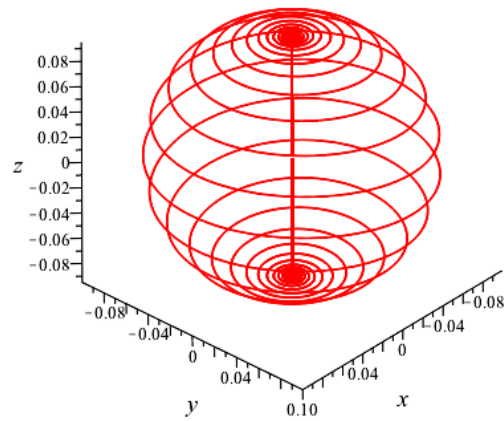


Figura 4.3: Órbita do sistema (4.1) com condição inicial sobre a esfera centrada na origem e de raio $r = 0.1$. Aqui, $a = 10^{-4}$. A estrutura de esfera invariante é preservada, exceto numa vizinhança tubular do eixo- z .

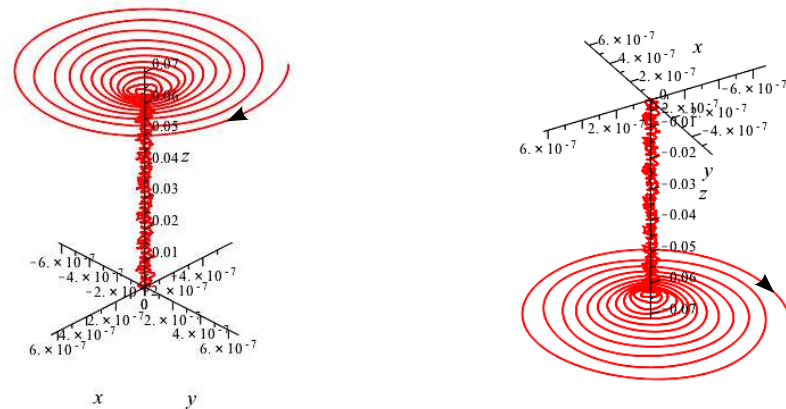


Figura 4.4: Comportamento da órbita dada pela Figura 4.3 numa vizinhança tubular do eixo- z . Ela espirala em torno do eixo- z em direção à origem para tempos positivos e negativos.

e suficientemente pequeno. Assuma que F_1 e F_2 são funções periódicas de período T na variável t , e fixe

$$g(\mathbf{y}) = \frac{1}{T} \int_0^T F_1(t, \mathbf{y}) dt.$$

Denote por $D_{\mathbf{x}}g$ todas as derivadas primeiras de g e por $D_{\mathbf{xx}}g$ todas as derivadas segundas de g .

Teorema 15 *Assuma que F_1 , $D_{\mathbf{x}}F_1$, $D_{\mathbf{xx}}F_1$ e $D_{\mathbf{x}}F_2$ são contínuas e limitadas por uma constante independente de ε em $[0, \infty) \times \Omega \times (0, \varepsilon_0]$, e que $\mathbf{y}(t) \in \Omega$ para $t \in [0, 1/\varepsilon]$. Então, valem as seguintes afirmações.*

1. *Para $t \in [0, 1/\varepsilon]$, temos $\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t) = \mathcal{O}(\varepsilon)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.*
2. *Se $p \neq 0$ é um ponto de equilíbrio do sistema (4.8) tal que $\det D_{\mathbf{y}}g(p) \neq 0$, então existe uma solução periódica $\phi(t, \varepsilon)$ de período T para o sistema (4.7) que está próxima de p e tal que $\phi(0, \varepsilon) - p = \mathcal{O}(\varepsilon)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.*
3. *A estabilidade da solução periódica $\phi(t, \varepsilon)$ é dada pela estabilidade do ponto de equilíbrio p .*

O teorema anterior está provado em [23, 78].

Antes de aplicar o Teorema 15 no estudo do sistema diferencial (4.1), temos que escrever a sua parte linear na origem na forma normal de Jordan. Após o rescalonamento de tempo $t = -T$, onde T é o novo tempo, o sistema (4.1) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y, \\ \dot{y} &= x + yz, \\ \dot{z} &= -y^2 + a. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Agora, escrevendo o sistema (4.9) em coordenadas cilíndricas (r, θ, z) , onde $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, obtemos

$$\begin{aligned} \dot{r} &= rz \sin^2 \theta, \\ \dot{\theta} &= z \sin \theta \cos \theta + 1, \\ \dot{z} &= a - r^2 \sin^2 \theta. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Considerando a mudança de variáveis $r = \varepsilon R$, $z = \varepsilon Z$, onde $\varepsilon = \sqrt{a} > 0$, podemos escrever o sistema (4.10) como

$$\begin{aligned}\dot{R} &= \varepsilon R Z \sin^2 \theta, \\ \dot{\theta} &= \varepsilon Z \sin \theta \cos \theta + 1, \\ \dot{Z} &= \varepsilon (1 - R^2 \sin^2 \theta).\end{aligned}\tag{4.11}$$

Tomando θ como variável independente no sistema (4.11) e fazendo a expansão em série de Taylor de ordem 2 com relação a ε em torno de 0 em cada uma das equações obtidas, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{dR}{d\theta} &= \varepsilon R Z \sin^2 \theta + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \frac{dZ}{d\theta} &= (1 - R^2 \sin^2 \theta) \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2).\end{aligned}\tag{4.12}$$

Usando a notação do Teorema 15, considere

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} R \\ Z \end{pmatrix}, \quad t = \theta, \quad T = 2\pi, \quad F_1(\theta, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} R Z \sin^2 \theta \\ 1 - R^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$g(\mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(\theta, \mathbf{y}) d\theta = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} R Z \\ 1 - \frac{1}{2} R^2 \end{pmatrix}.$$

Lembrando que $R > 0$, temos que $g(\mathbf{y}) = 0$ tem uma única solução dada por $p = (R, Z) = (\sqrt{2}, 0)$, a qual satisfaz $\det D_{\mathbf{y}}g(p) = 1 \neq 0$. Então, pelo Teorema 15, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, o sistema (4.12) tem uma solução periódica $\phi(\theta, \varepsilon) = (R(\theta, \varepsilon), Z(\theta, \varepsilon))$ tal que $\phi(0, \varepsilon) \rightarrow (\sqrt{2}, 0)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Além disso, os autovalores da matriz $D_{\mathbf{y}}g(p)$ são $\pm i$. Logo, a solução periódica obtida é orbitalmente estável, isto é, qualquer solução suficientemente próxima dela permanece suficientemente próxima quando $t \rightarrow \infty$, porém sem tender para ela.

Voltando para o sistema diferencial (4.1) temos que, para $a > 0$ suficientemente pequeno, tal sistema tem uma solução periódica de período aproximadamente 2π dada por

$$\begin{aligned}x(t) &= -(\sqrt{2a} \cos t + \mathcal{O}(a)), \\ y(t) &= -(\sqrt{2a} \sin t + \mathcal{O}(a)), \\ z(t) &= -\mathcal{O}(a),\end{aligned}$$

e que tende para a origem quando $a \rightarrow 0$.

Portanto, para $a > 0$ suficientemente pequeno, o sistema (4.1) tem uma órbita periódica orbitalmente estável e de pequena amplitude que emerge da origem. Na Figura 4.5 está representada esta órbita e sua coordenada x em função do tempo t .

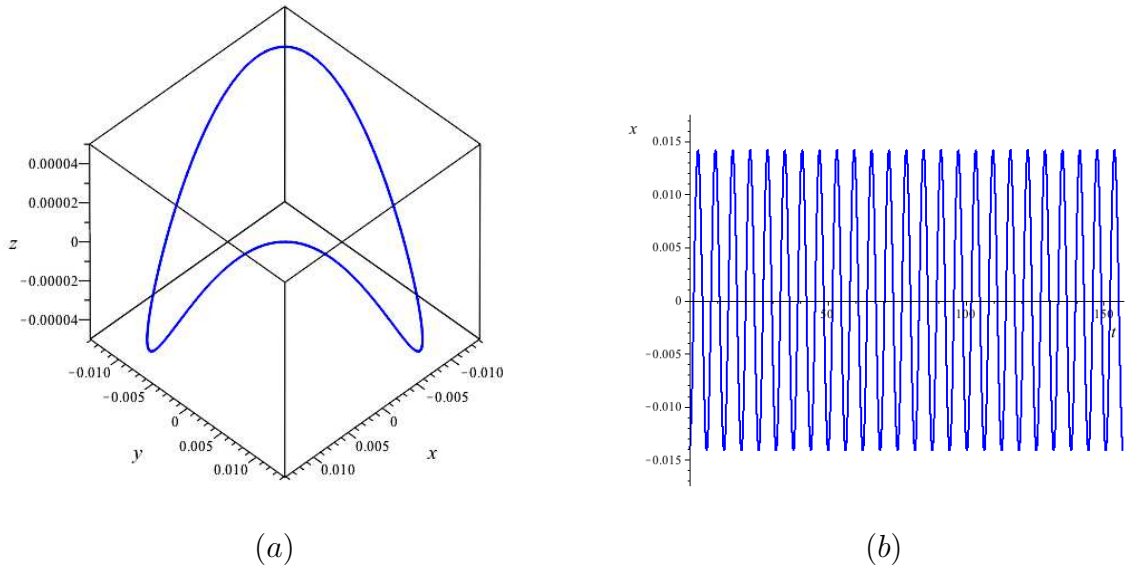


Figura 4.5: (a) Órbita periódica do sistema (4.1) para $a = 10^{-4}$ e (b) sua coordenada x em função do tempo t .

4.4.3 Existência de toros invariantes.

Conforme vimos no item anterior, quando $a > 0$ suficientemente pequeno no sistema diferencial (4.1), uma órbita periódica orbitalmente estável emerge da origem. Esta órbita periódica, que persiste sob pequenas variações do parâmetro a , tem um papel importante na dinâmica do sistema (4.1). De fato, a partir de um detalhado estudo numérico observa-se a formação de uma sequência encaixante de toros invariantes em torno dela, como pode ser visto na Figura 4.6.

Para comprovar a existência de tais toros, faremos uso da versão clássica do Teorema KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser), o qual fornece um ponto de partida para uma explicação da transição do movimento regular ou quase-periódico para o tipo caótico em sistemas Hamiltonianos. Aqui, apresentamos brevemente alguns aspectos da teoria e enunciamos este resultado sem prová-lo. Para mais detalhes veja, por exemplo, [68],

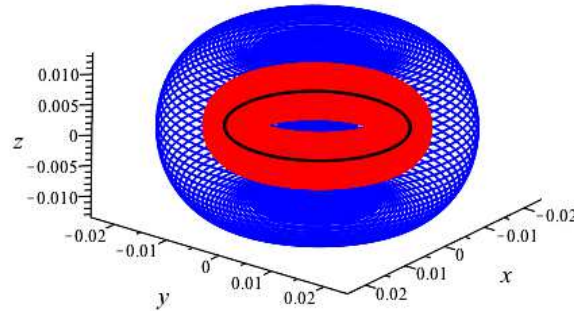


Figura 4.6: Toros invariantes em torno da órbita periódica do sistema (4.1) com $a = 10^{-4}$.

o Capítulo 15 de [78], o Capítulo 7 de [32] ou o Capítulo 6 de [2]. A seguir, damos a definição de sistema Hamiltoniano.

Definição 12 (Sistema Hamiltoniano) Dizemos que um sistema diferencial em \mathbb{R}^{2n} é Hamiltoniano se existe uma função analítica não-constante $H : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, onde Ω é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, tal que

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \\ \dot{\mathbf{y}} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}),\end{aligned}\tag{4.13}$$

com $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Além disso, dizemos que H é a função Hamiltoniana do sistema (4.13).

Se $n = 1$, o sistema Hamiltoniano (4.13) é integrável, pois é planar e tem uma integral primeira dada pela função Hamiltoniana H . Pelo Teorema de Liouville-Arnold, existe uma transformação $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow (I, \varphi)$, com $(I, \varphi) \in U \times [0, 2\pi]$, onde U é um intervalo aberto de \mathbb{R} , tal que, nas novas variáveis I e φ , o sistema obtido ainda é Hamiltoniano. Para mais detalhes sobre o Teorema de Liouville-Arnold, veja o Capítulo 14 de [86]. Esta transformação conduz ao sistema diferencial

$$\begin{aligned}\dot{I} &= 0, \\ \dot{\varphi} &= \omega(I),\end{aligned}\tag{4.14}$$

onde I e φ são chamadas *coordenadas ação-ângulo*. Seja $H_0(I)$ a função Hamiltoniana do sistema (4.14). Segue que $\omega(I) = \partial H_0 / \partial I$. O sistema (4.14) é facilmente integrável e sua solução geral é

$$\begin{aligned} I(t) &= I_0, \\ \varphi(t) &= \omega(I_0)t + \varphi_0, \end{aligned}$$

onde $I(0) = I_0$ e $\varphi(0) = \varphi_0$. Logo, as soluções do sistema (4.14) são retas que, devido à identificação da coordenada angular φ módulo 2π , estão enrolando-se em torno dos toros invariantes

$$\mathbb{T}^1 = \{I_0\} \times [0, 2\pi]$$

com frequências (ou velocidade angulares) constantes $\omega(I_0)$, com $I_0 \in U$. Assim, todo o espaço de fase do sistema (4.14) é folheado por toros invariantes com fluxo linear, também chamados de *toros de Kronecker*.

A frequência ω com que uma órbita enrola-se em torno de um toro invariante é classificada como *ressonante* ou *não-ressonante* de acordo com a seguinte definição.

Definição 13 (Ressonância) *Seja \mathbb{T}^n um toro n -dimensional cujas órbitas enrolam-se em torno dele com frequência $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$. O vetor frequência ω é dito ressonante (ou racionalmente dependente) se existe $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ tal que $k \cdot \omega = \langle (k_1, \dots, k_n), (\omega_1, \dots, \omega_n) \rangle = 0$. Caso contrário, dizemos que ω é não-ressonante (ou racionalmente independente).*

No caso $n = 1$, ressonância implica em que $\omega = 0$.

Um toro cujas órbitas enrolam-se em torno dele com frequência não-ressonante tem a propriedade de cada órbita ser densa sobre ele. Mais precisamente, dado um ponto p sobre um toro não-ressonante e uma vizinhança qualquer V_p deste ponto, a órbita ϕ_p que passa por p voltará a interceptar a vizinhança V_p em um tempo futuro após sair dela. Além disso, dado qualquer outro ponto q sobre o toro e uma vizinhança V_q deste ponto, a órbita ϕ_p também interceptará V_q . Este resultado clássico remete a Kronecker (o fluxo sobre um toro não-ressonante é frequentemente referido como fluxo de Kronecker).

A introdução de variáveis ação-ângulo geralmente é feita utilizando uma *função geradora* $S = S(I, \mathbf{y})$ (veja o Capítulo 10 de [1]). Em geral, não é possível encontrar a função geradora S . Porém, essas transformações são especialmente úteis se o sistema (4.13) é *quase-integrável* no seguinte sentido. Suponha que a função Hamiltoniana $H(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ do

sistema (4.13) contenha um parâmetro $\varepsilon > 0$ pequeno e que a introdução de coordenadas ação-ângulo produza o sistema

$$\begin{aligned}\dot{I} &= \varepsilon f(I, \varphi), \\ \dot{\varphi} &= \omega(I) + \varepsilon g(I, \varphi).\end{aligned}\tag{4.15}$$

Se $\varepsilon = 0$, o sistema (4.15) é integrável; se $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, o sistema (4.15) é dito quase-integrável. Seja

$$H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi)\tag{4.16}$$

a função Hamiltoniana do sistema (4.15), isto é

$$\varepsilon f(I, \varphi) = -\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \varphi}(I, \varphi) \quad \text{e} \quad \omega(I) + \varepsilon g(I, \varphi) = \frac{\partial H_0}{\partial I}(I) + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial I}(I, \varphi).$$

O Teorema KAM garante que muitos dos toros invariantes que existem no caso integrável $\varepsilon = 0$, também existem para o caso $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, mesmo que um pouco deformados pela perturbação.

Teorema 16 (KAM) *Considere o sistema diferencial (4.15) induzido pela função Hamiltoniana (4.16). Se H_0 é não-degenerada, isto é,*

$$\det \left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} \right) \neq 0,$$

então a maioria dos toros invariantes que existem para o sistema não perturbado ($\varepsilon = 0$) também existem, embora um pouco deformados, para o sistema perturbado ($\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno). Além disso, a medida de Lebesgue do complementar do conjunto dos toros invariantes tende a zero quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Agora, voltemos ao caso do sistema Sprott A. Escrevendo o sistema (4.1) em coordenadas cilíndricas (r, θ, y) , onde $x = r \cos \theta$, $z = r \sin \theta$, obtemos

$$\begin{aligned}\dot{r} &= y \cos \theta + (y^2 - a) \sin \theta, \\ \dot{\theta} &= -\frac{1}{r} (y \sin \theta - (y^2 - a) \cos \theta), \\ \dot{y} &= -r (y \sin \theta + \cos \theta).\end{aligned}\tag{4.17}$$

Considerando a mudança de variáveis $r = \varepsilon R$, $\theta = \varepsilon \Theta$, $y = \varepsilon^2 Y$, onde $\varepsilon = a > 0$, podemos escrever o sistema (4.17) como

$$\begin{aligned}\dot{R} &= \varepsilon Y \cos(\varepsilon \Theta) + (\varepsilon^3 Y^2 - 1) \sin(\varepsilon \Theta), \\ \dot{\Theta} &= -\frac{1}{\varepsilon R} [\varepsilon Y \sin(\varepsilon \Theta) - (\varepsilon^3 Y^2 - 1) \cos(\varepsilon \Theta)], \\ \dot{Y} &= -\frac{R}{\varepsilon} [\varepsilon^2 Y \sin(\varepsilon \Theta) + \cos(\varepsilon \Theta)].\end{aligned}\tag{4.18}$$

Tomando Y como variável independente no sistema (4.18) e fazendo a expansão em série de Taylor de ordem 2 com relação a ε em torno de 0 em cada uma das equações obtidas, temos que

$$\begin{aligned}\frac{dR}{dY} &= \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \frac{d\Theta}{dY} &= \frac{1}{R^2} + \mathcal{O}(\varepsilon^2).\end{aligned}\tag{4.19}$$

Considere $\varepsilon = 0$ no sistema (4.19), temos que o sistema é integrável e, neste caso, a sua solução geral é

$$R(Y) = R_0, \quad \Theta(Y) = \frac{1}{R_0^2} Y + \Theta_0,$$

com $R(0) = R_0$ e $\Theta(0) = \Theta_0$. Logo, todas as soluções são retas que, devido à identificação da coordenada angular Θ módulo 2π , estão enrolando-se em torno dos toros invariantes

$$\mathbb{T}^1 = \{R_0\} \times [0, 2\pi]$$

com frequências constantes $\omega(R_0) = 1/R_0^2$. Deste modo, todo o espaço de fase do sistema (4.19) com $\varepsilon = 0$ é folheado por toros de Kronecker. Além disso, as frequências das órbitas que estão enrolando-se em torno destes toros são não-ressonantes. Logo, cada órbita é densa sobre estes toros.

Usando a notação do Teorema 16, temos que $I = R$ é a variável de ação e $\varphi = \Theta$ é a variável angular. Além disso,

$$H_0(R) = -\frac{1}{R} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 H_0}{\partial R^2} = -\frac{2}{R^3} \neq 0,$$

para todo $R > 0$. Pelo Teorema 16, a maioria dos toros invariantes do caso não perturbado ($\varepsilon = 0$) são preservados, embora um pouco deformados, no espaço do fase do sistema (4.19)

para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Considerando mudanças de variáveis adequadas, temos que o sistema inicial (4.1) tem toros invariantes cujas órbitas são densas e giram de maneira quase-periódica sobre eles, isto é, o comportamento dessas órbitas é regular, mas nunca se repete exatamente igual. Na Figura 4.7 estão desenhadas uma órbita do sistema (4.1), para $a = 10^{-4}$, com condição inicial sobre um dos toros invariantes e sua coordenada x em função do tempo t .

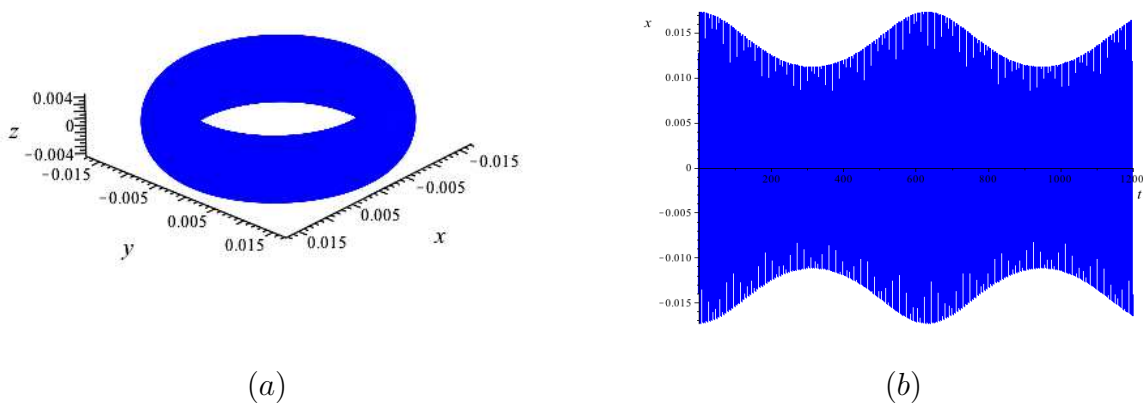


Figura 4.7: (a) Órbita do sistema (4.1) com condição inicial sobre um dos toros invariantes do sistema e (b) sua coordenada x em função do tempo t . Note que o movimento da órbita é quase-periódico sobre o toro invariante. Aqui $a = 10^{-4}$.

Reunindo os resultados obtidos nas Subseções 4.4.2 e 4.4.3, provamos o seguinte teorema.

Teorema 17 *Quando $a > 0$ suficientemente pequeno, uma órbita periódica orbitalmente estável emerge de um ponto de equilíbrio do tipo zero-Hopf não isolado localizado na origem do sistema (4.1) para $a = 0$. Em torno desta órbita periódica, forma-se uma seqüência encaixante de toros invariantes, cujas órbitas são densas e movem-se quase-periodicamente sobre eles.*

O teorema anterior confirma o que é dito em [78] (pág. 244), que em torno de uma órbita periódica orbitalmente estável há toros invariantes nos quais as órbitas movimentam-se quase-periodicamente. A órbita periódica persiste sob pequenas variações do parâmetro $a > 0$. Porém, conforme aumentamos o valor de a no sistema (4.1), um número cada vez maior de toros invariantes são “destruídos”, sendo aqueles que estão numa vizinhança da

órbita periódica os que mais resistem a estas perturbações. Na Figura 4.8 temos uma esfera invariante do sistema (4.1) para $a = 0$, que transforma-se em um toro invariante para $a = 10^{-6}$ e tal toro persiste para $a = 10^{-2}$. Observe que estes toros não são superfícies algébricas, pois provamos no Teorema 14 que o sistema (4.1) não tem superfícies algébricas invariantes para $a \neq 0$. Devido à destruição de alguns toros invariantes, uma região “turbulenta” de atração/repulsão é formada englobando os toros invariantes restantes, a qual conduzirá a criação de uma estrutura homoclínica no espaço de fase do sistema (4.1) para $a > 0$ suficientemente pequeno. Para escolhas adequadas do parâmetro $a > 0$, é possível detectar comportamento caótico no sistema (4.1) (veja [61, 75]) e, conseqüentemente, um *hidden attractor* é formado nesta região. Nas próximas subseções veremos com mais detalhes a formação da estrutura homoclínica e do *hidden attractor*.

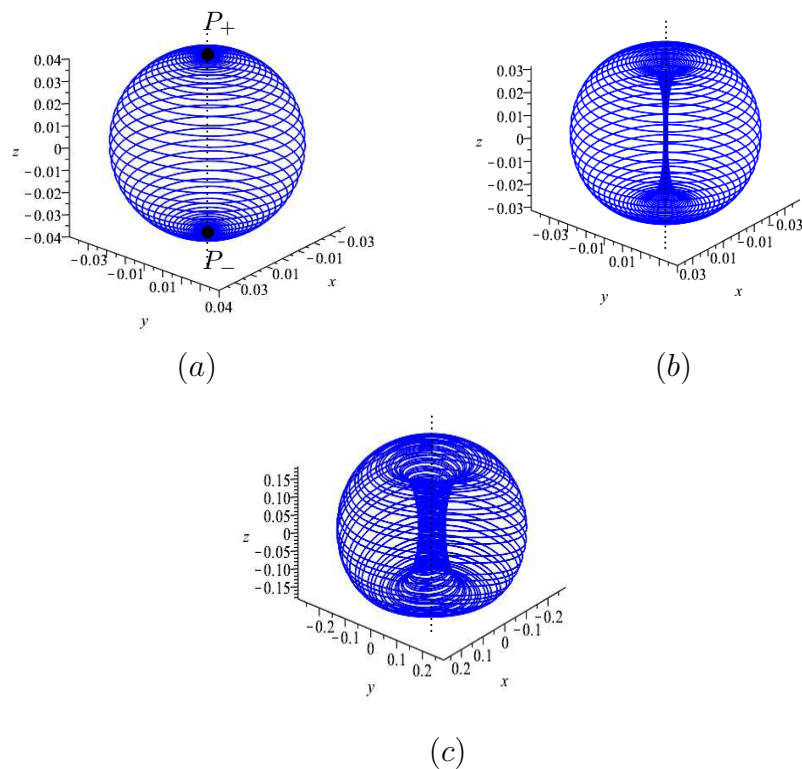


Figura 4.8: Órbita do sistema (4.1) com condição inicial $(0.04, 0, 0)$ para (a) $a = 0$, (b) $a = 10^{-6}$ e (c) $a = 10^{-2}$. A esfera invariante (a) transforma-se em um toro invariante (b), que persiste conforme o valor de a aumenta (c).

Na Figura 4.9, temos a seção de Poincaré do sistema (4.1) numa vizinhança da órbita

periódica, para $a = 0.01$, $a = 0.25$ e $a = 0.4$. Em todos os casos foram consideradas as mesmas condições iniciais e cada uma delas está representada com uma cor diferente. Note que a Figura 4.9 comprova a existência de uma sequência encaixante de toros invariantes em torno da órbita periódica, representada por um ponto fixo no centro das curvas fechadas, que representam os toros invariantes. Conforme o valor do parâmetro a aumenta, a quantidade de curvas fechadas diminui, sendo aquelas mais próximas do ponto fixo (órbita periódica), as que mais persistem às variações de a . Além disso, um novo tipo de comportamento é observado na dinâmica do sistema (4.1) para $a = 0.25$ e $a = 0.4$ (Figuras 4.9 (b) e (c), respectivamente). Aparecem cinco pequenos “*loops*” em torno das curvas fechadas formados pela mesma órbita, como a cor sugere, para $a = 0.25$. O mesmo é verdade para $a = 0.4$, no qual aparecem sete pequenos “*loops*” . As regiões determinadas por tais “*loops*” são chamadas de *ilhas*. Conforme observa-se nas Figuras 4.9 (b) e (c), estas ilhas são cercadas por um “mar” de órbitas que movimentam-se de maneira aleatória. Isto evidencia o comportamento complicado do sistema (4.1) para estes valores do parâmetro a : no espaço de fase do sistema há regiões com órbitas regulares e regiões densamente preenchidas por órbitas sem evidência de regularidade. Portanto, para valores adequados de a no sistema (4.1), a seção de Poincaré releva que, no entorno dos toros invariantes, há um mar de órbitas com movimento aparentemente aleatório cercadas por pequenas ilhas de órbitas com comportamento regular. Para $a = 0.4$ (Figura 4.9 (c)), estas ilhas são menores e uma análise mais detalhada é necessária para fazê-las mais aparentes, veja a Figura 4.10.

4.4.4 Formação de uma estrutura homoclínica.

Considere uma órbita do sistema (4.1), para $a > 0$ suficientemente pequeno, com condição inicial suficientemente distante da órbita periódica descrita na Subseção 4.4.2. Conforme vimos na Subseção 4.4.1, para tempos positivos e negativos, essa órbita gira sobre uma esfera (centrada na origem e de raio suficientemente grande), que preserva sua invariância com uma pequena deformação, e, em seguida, passa a oscilar em torno do eixo- z em direção à origem (Figuras 4.3 e 4.4). Por fim, ela tenderá para a região “turbulenta” proveniente da destruição de toros invariantes, que descrevemos na Subseção 4.4.3, conforme pode ser visto na Figura 4.11 (a). Deste modo, dizemos que há um *conjunto limite* que envolve os toros invariantes e que, conforme mostraremos adiante, quase todas as órbitas do espaço de fase do sistema (4.1), com $a > 0$ suficientemente pequeno, tendem para este conjunto quando $t \rightarrow \pm\infty$. A união de órbitas com condições

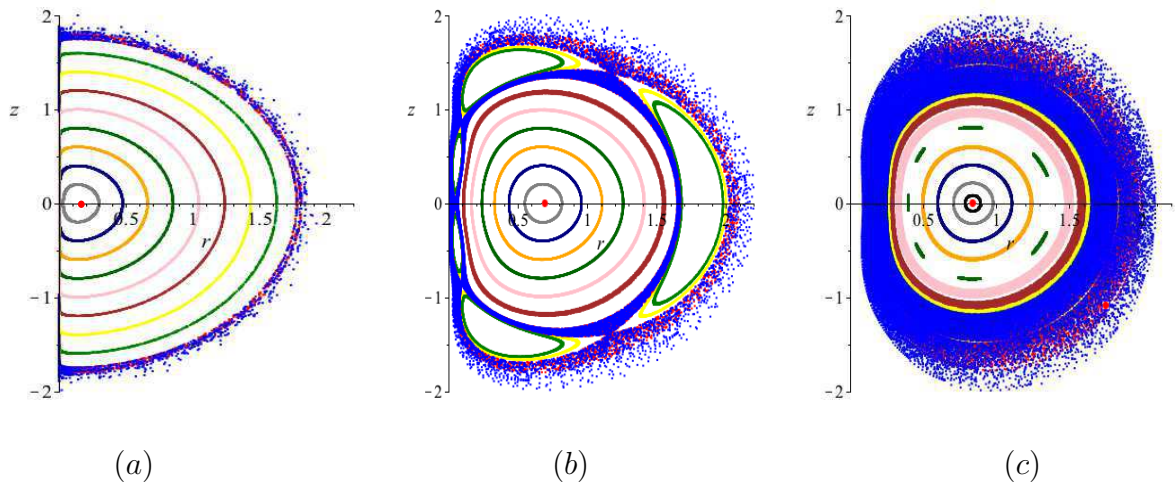


Figura 4.9: Seção de Poincaré do sistema (4.1) numa vizinhança da órbita periódica para (a) $a = 0.01$, (b) $a = 0.25$ e (c) $a = 0.4$.

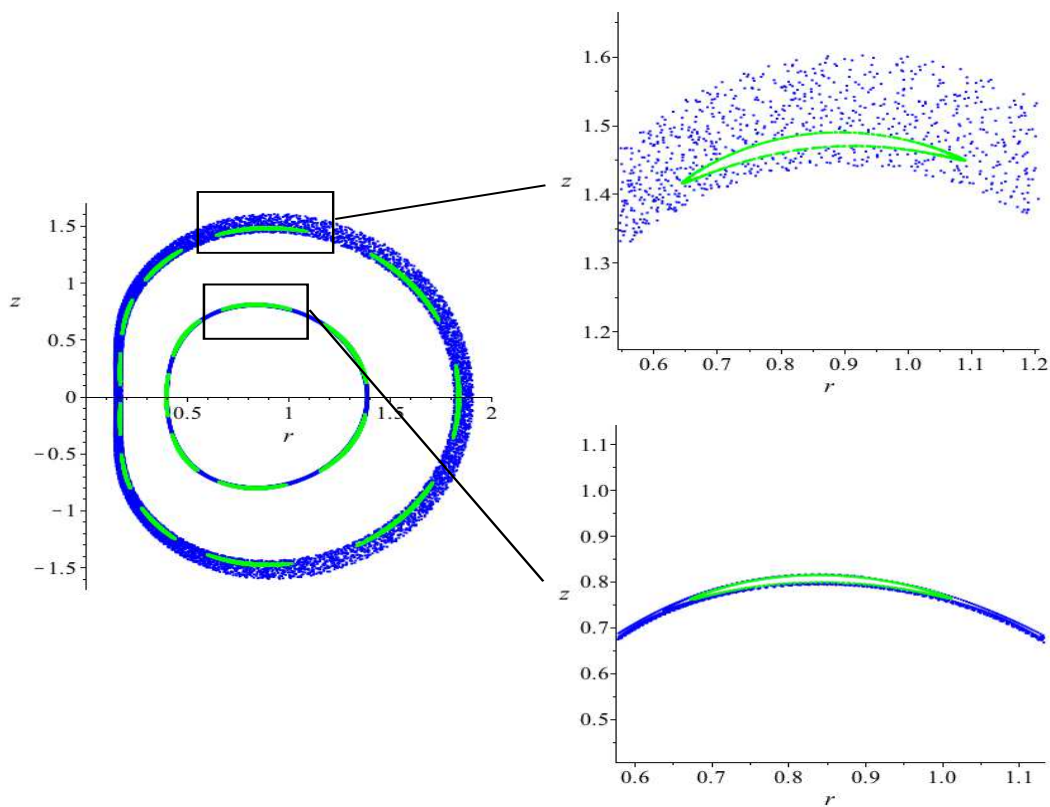


Figura 4.10: Ilhas existentes na seção de Poincaré do sistema (4.1) para $a = 0.4$ (Figura 4.9 (c)).

iniciais sobre a mesma esfera e tendendo para o conjunto limite forma uma estrutura que se assemelha a uma “maçã”, como pode ser observado na Figura 4.11 (b).

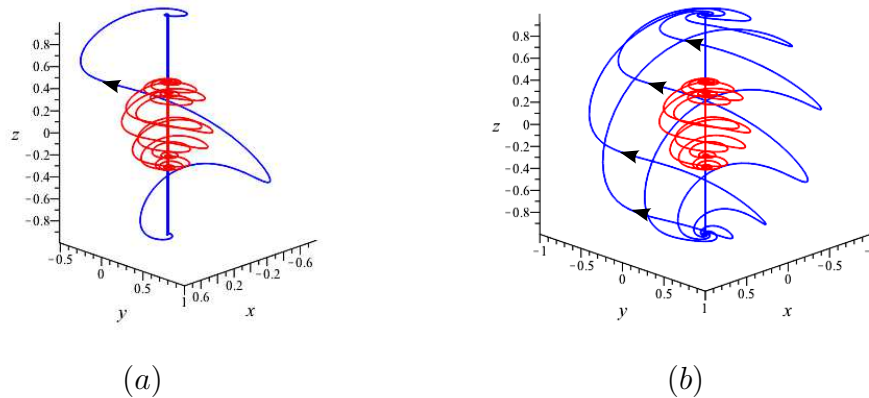


Figura 4.11: (a) Órbita do sistema (4.1) com condição inicial $(0, 1, 0)$. (b) Estrutura de “maçã” formada pelas órbitas com condições iniciais sobre a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Em ambos os casos, as órbitas tendem para o conjunto limite (vermelho) quando $t \rightarrow \pm\infty$. Aqui, $a = 10^{-4}$.

Podemos observar que o sistema (4.1) apresenta as seguintes simetrias: $(x, y, z, t) \mapsto (-x, -y, z, t)$ – rotação de 180° em torno do eixo- z que preserva o tempo; $(x, y, z, t) \mapsto (x, -y, -z, -t)$ – rotação de 180° em torno do eixo- x de tempo reversível; e $(x, y, z, t) \mapsto (-x, y, -z, -t)$ – rotação de 180° em torno do eixo- y de tempo reversível. Estas rotações podem ser observadas na Figura 4.12 a partir das projeções da órbita com condição inicial $(0, 1, 0)$ (Figura 4.11 (a)) nos planos coordenados. Devido a estas simetrias, temos que as órbitas tendem para o mesmo conjunto limite quando $t \rightarrow \pm\infty$. Por este motivo, dizemos que as órbitas são *homoclínicas ao conjunto limite*.

Na Figura 4.13 está ilustrada a órbita do sistema (4.1) com condição inicial $(0, 5, 0)$ para diferentes valores do parâmetro $a > 0$, mais especificamente, $a = 10^{-4}$, $a = 10^{-2}$, $a = 0.1$, $a = 0.25$ e $a = 0.4$. Para cada valor de a , esta órbita é homoclínica a um conjunto limite específico. Conforme o valor do parâmetro a aumenta, o conjunto limite expande-se e, para $a = 0.4$, há indícios de que este conjunto torna-se um *hidden attractor*, como veremos na próxima subseção.

4.4.5 Surgimento de um *hidden attractor* para $a < 1$.

Em [75], Sprott encontrou um *hidden attractor* para o sistema (4.1) com $a = 1$ e

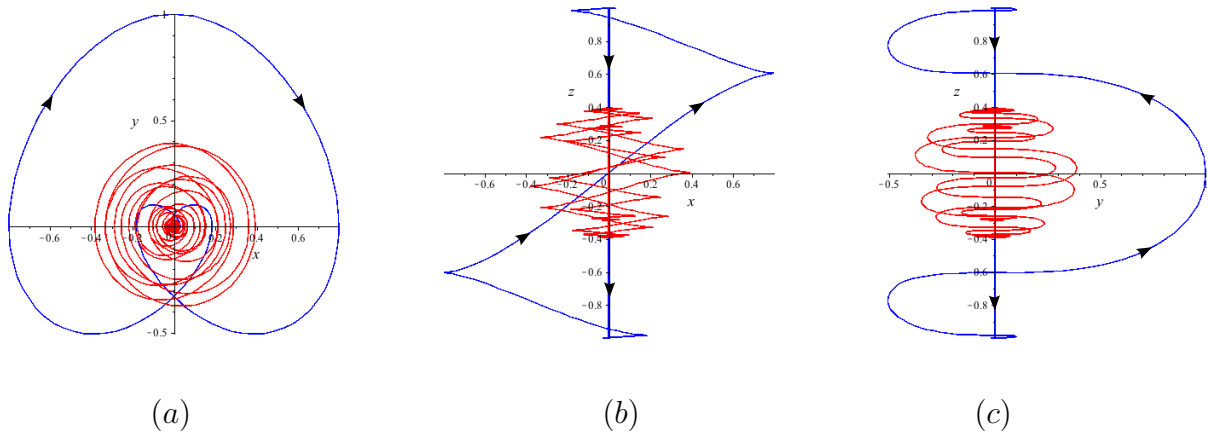


Figura 4.12: Projeção da órbita do sistema (4.1) com condição inicial $(0, 1, 0)$ (Figura 4.11 (a)) no (a) plano- xy , (b) plano- xz e (c) plano- yz . Note que em (a) e em (c) ocorre uma rotação em torno do eixo- y invertendo o tempo; e em (b) uma rotação em torno do eixo- z preservando o tempo e em torno do eixo- x invertendo o tempo. Aqui, as rotações são de 180° e $a = 10^{-4}$ no sistema (4.1).

tomando a órbita com condição inicial $(0, 5, 0)$. Considerando essa mesma órbita, temos que o sistema (4.1) possui um *hidden attractor* para $a < 1$, mais precisamente para $a = 0.4$.

Vimos que, conforme o valor do parâmetro a aumenta, alguns toros invariantes são destruídos e forma-se uma região “turbulenta” que envolve os toros invariantes restantes. Para $a > 0$ suficientemente pequeno, a órbita com condição inicial $(0, 5, 0)$ é homoclínica a um conjunto limite, que expande-se conforme o valor de a aumenta, como pode ser visto na Figura 4.13. Finalmente, para $a = 0.4$ (Figura 4.13 (e)), há indícios de que o sistema (4.1) apresenta comportamento caótico e que, desta maneira, o conjunto limite evolui para um *hidden attractor*. De fato, a seção de Poincaré do sistema Sprott A para $a = 0.4$, Figura 4.10, já evidenciava o comportamento complicado do sistema para este valor de parâmetro. Uma importante ferramenta para verificar se um sistema diferencial apresenta comportamento caótico é o cálculo dos *expoentes de Lyapunov*, que medem a separação de duas órbitas com condições iniciais suficientemente próximas, e da *dimensão de Lyapunov*, que avalia a dimensão fractal do sistema a partir do espectro dos expoentes de Lyapunov. Utilizando o algoritmo descrito em [71], ao calcularmos os expoentes de Lyapunov LE_i , para $i = 1, 2, 3$, e a dimensão de Lyapunov D_L da órbita com condição

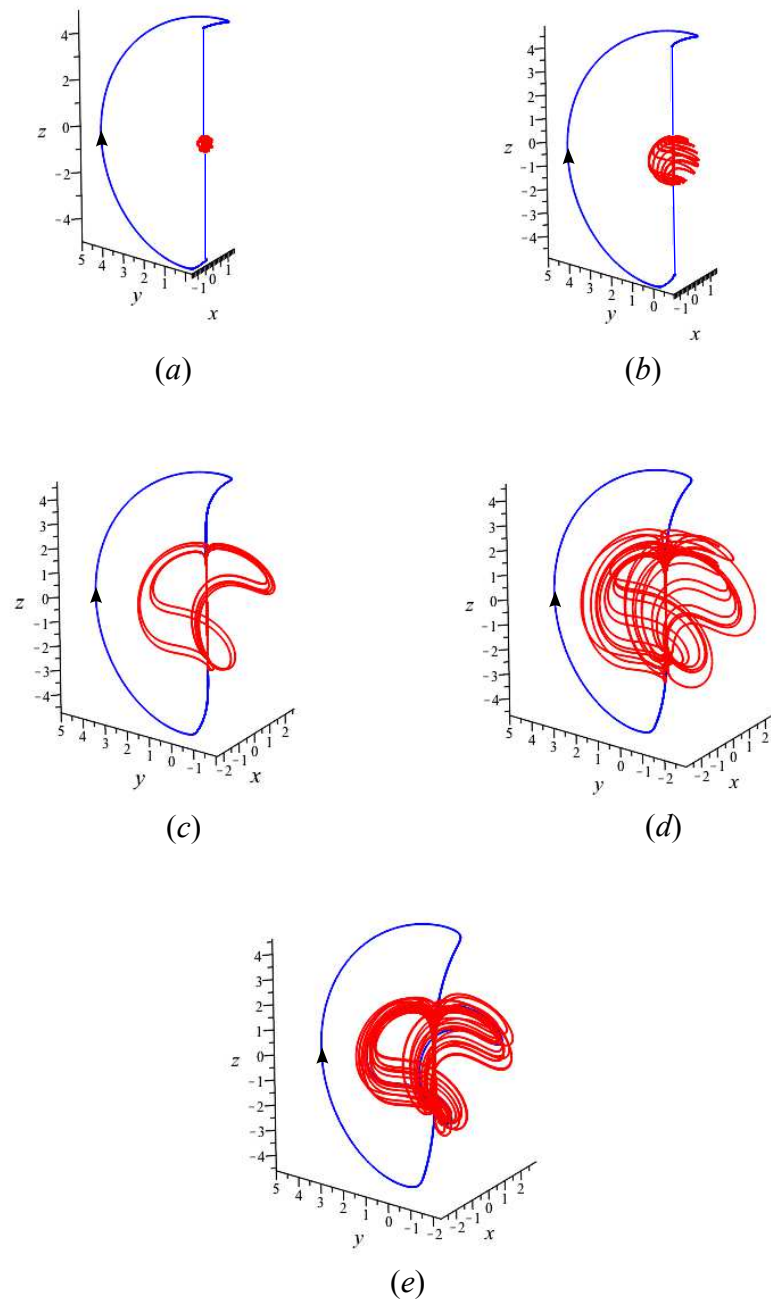


Figura 4.13: Órbita com condição inicial $(0, 5, 0)$ para (a) $a = 10^{-4}$, (b) $a = 10^{-2}$, (c) $a = 0.1$, (d) $a = 0.25$ e (e) $a = 0.4$. O conjunto limite (vermelho) expande-se e evolui para um *hidden attractor*.

inicial $(0, 5, 0)$ para $a = 0.4$, obtemos

$$LE_1 = 0.0219, \quad LE_2 \approx 0, \quad LE_3 = -0.0219 \quad \text{e} \quad D_L = 2.9908.$$

De acordo com [71], como $LE_1 > 0$, $LE_2 = 0$, $LE_3 < 0$ e $2 < D_L < 3$, então o sistema (4.1) apresenta comportamento caótico para esse valor do parâmetro a .

Na Figura 4.14 está representada a coordenada x em função do tempo t de duas soluções do sistema (4.1) com condições iniciais muito próximas, dadas por $(0, 5, 0)$ e $(0, 5.0001, 0)$, para $a = 0.4$. Observe que elas divergem exponencialmente conforme o valor de t aumenta, evidenciando dependência sensível com relação às condições iniciais.

Também há indícios de comportamento caótico no sistema (4.1) para outros valores do parâmetro $a < 1$, por exemplo, para $a = 0.55$.

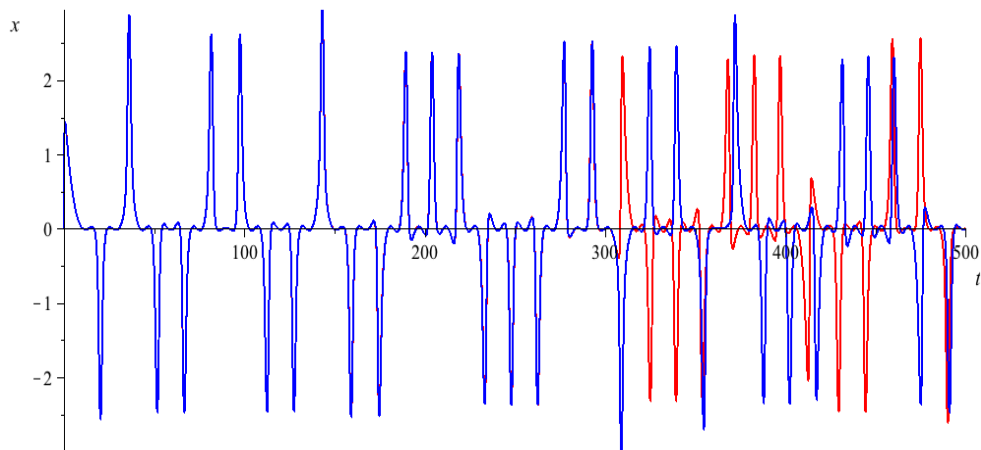


Figura 4.14: Coordenada x em função do tempo t de duas órbitas do sistema (4.1) com condições iniciais $(0, 5, 0)$ (vermelho) e $(0, 5.0001, 0)$ (azul) para $a = 0.4$, mostrando dependência sensível com relação às condições iniciais.

Logo, para valores adequados do parâmetro a , as órbitas do sistema (4.1) que são homoclínicas a um conjunto limite passam a ser homoclínicas a um *hidden attractor*, como podemos observar nas Figuras 4.13 (e) e 4.15. Além disso, existem toros invariantes no espaço de fase do sistema (4.1) com $a = 0.4$, isto é, o *hidden attractor* coexiste com estes toros invariantes, como pode ser visto na Figura 4.16. Esse mesmo fato foi observado em [28] para $a = 1$. Desse modo, observa-se a coexistência de componentes conservativos com componentes dissipativos no sistema (4.1).

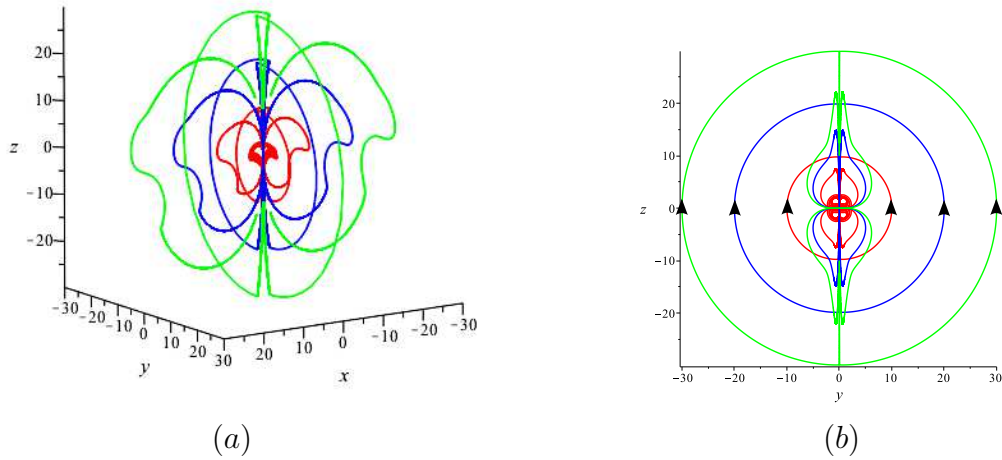


Figura 4.15: Órbitas do sistema (4.1) com condições iniciais sobre as esferas de raios $r = 10$ (vermelho), $r = 20$ (azul) e $r = 30$ (verde), para $a = 0.4$. Estas órbitas são homoclínicas ao *hidden attractor*. Note que a estrutura compacta esférica é preservada por continuidade, longe do eixo- z .

4.5 Estudo do sistema Sprott A no infinito

Para melhor entender a dinâmica complicada do sistema Sprott A, realizamos uma análise global de suas órbitas, incluindo o estudo da dinâmica no infinito via compactificação de Poincaré (veja Apêndice A). Deste modo, conseguimos determinar o comportamento do sistema sobre a fronteira \mathbb{S}^2 da bola de Poincaré e numa vizinhança dela. Os resultados obtidos estão resumidos no seguinte teorema.

Teorema 18 *Para qualquer valor do parâmetro $a \in \mathbb{R}$, o retrato de fase do sistema (4.1) na fronteira \mathbb{S}^2 da bola de Poincaré (no infinito) é mostrado na Figura 4.17: existe uma grande circunferência formada por pontos de equilíbrio e um conjunto de infinitas órbitas heteroclínicas conectando pares destes pontos de equilíbrio. Além disso, para $a > 0$ suficientemente pequeno, existem órbitas de grande amplitude que são homoclínicas ao conjunto limite descrito no item (d) da seção anterior.*

O Teorema 18 será provado no decorrer desta seção.

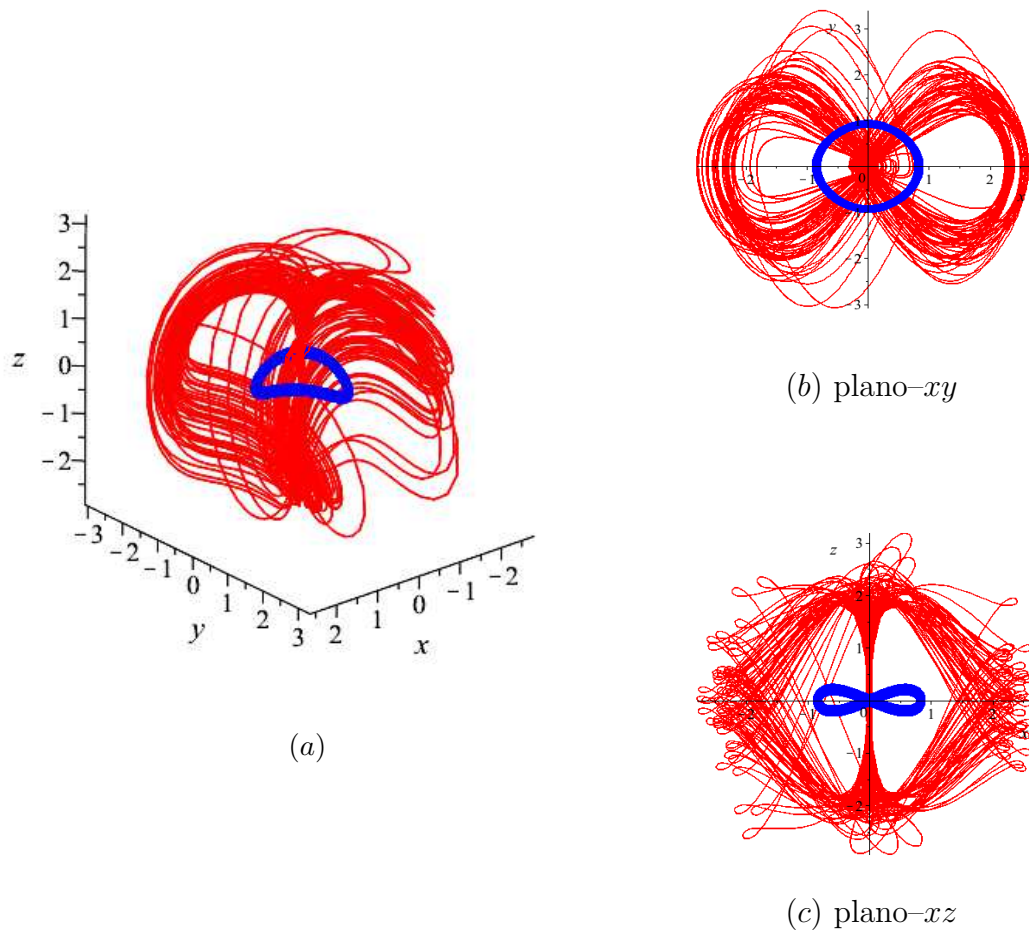


Figura 4.16: (a) Órbitas do sistema (4.1), para $a = 0.4$, com condições iniciais sobre um dos toros invariantes (azul) e no *hidden attractor* (vermelho) e suas projeções (b) no plano- xy e (c) no plano- xz .

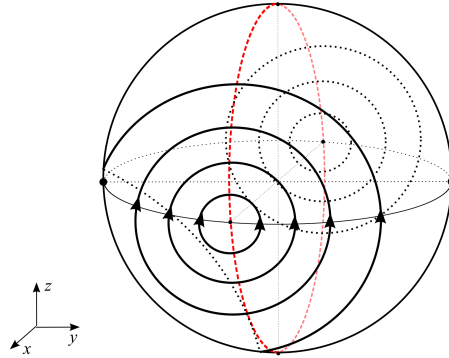


Figura 4.17: Dinâmica do sistema (4.1) sobre a fronteira \mathbb{S}^2 da bola de Poincaré (no infinito): grande circunferência de equilíbrios (vermelho) e órbitas heteroclínicas conectando pares destes pontos de equilíbrio.

A expressão do sistema (4.1) na carta local U_1 é

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= -z_1^2 z_3 - z_1 z_2 - z_3, \\ \dot{z}_2 &= -z_1 z_2 z_3 + z_1^2 - a z_3^2, \\ \dot{z}_3 &= -z_1 z_3^2.\end{aligned}\tag{4.20}$$

O sistema (4.20) restrito ao plano invariante $z_3 = 0$, que corresponde aos pontos na fronteira \mathbb{S}^2 da bola de Poincaré, é dado por

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_1 z_2, \\ \dot{z}_2 &= z_1^2.\end{aligned}\tag{4.21}$$

O eixo- z_2 é uma reta de equilíbrios do sistema (4.21) e os autovalores da parte linear do sistema (4.21) nestes pontos de equilíbrio são 0 e $-z_2$. Considerando o sistema (4.21) em coordenadas polares, a partir da mudança de variáveis $z_1 = r \cos \theta$, $z_2 = r \sin \theta$, podemos escrevê-lo como

$$\begin{aligned}\dot{r} &= 0, \\ \dot{\theta} &= r \cos \theta.\end{aligned}$$

Logo, o fluxo do sistema (4.21) é constante na direção radial e as órbitas giram no sentido anti-horário para $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ e no sentido horário para $\pi/2 < \theta < 3\pi/2$. O retrato de fase do sistema (4.21) pode ser visto na Figura 4.18 (a).

O fluxo do sistema (4.1) na carta local V_1 coincide com o seu fluxo na carta local U_1 multiplicado por -1 . Logo, o retrato de fase do sistema (4.1) em V_1 restrito ao plano invariante $z_3 = 0$ é dado pela Figura 4.18 (a), invertendo o sentido das órbitas.

A expressão do sistema (4.1) na carta local U_2 é dada por

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_1^2 z_3 + z_1 z_2 + z_3, \\ \dot{z}_2 &= z_1 z_2 z_3 + z_2^2 - a z_3^2 + 1, \\ \dot{z}_3 &= z_3 (z_1 z_3 + z_2).\end{aligned}\tag{4.22}$$

Considere o sistema (4.22) restrito ao plano invariante $z_3 = 0$. O sistema restrito não tem pontos de equilíbrio. Note que $\dot{z}_1 > 0$ para $z_1 > 0$ e $z_2 > 0$ ou $z_1 < 0$ e $z_2 < 0$; $\dot{z}_1 = 0$ sobre os eixos $-z_1$ e z_2 ; e $\dot{z}_1 < 0$ para $z_1 < 0$ e $z_2 > 0$ ou $z_1 > 0$ e $z_2 < 0$. Logo, o fluxo deste sistema na direção do eixo $-z_1$ é crescente no 1º e 3º quadrantes; constante sobre os eixos $-z_1$ e z_2 ; e decrescente no 2º e 4º quadrantes. Além disso, $\dot{z}_2 > 0$ no sistema restrito. Então, o fluxo é sempre crescente na direção do eixo $-z_2$. O retrato de fase do sistema (4.22) restrito ao plano invariante $z_3 = 0$ é mostrado na Figura 4.18 (b).

O fluxo do sistema (4.1) na carta local V_2 restrito ao plano invariante $z_3 = 0$ também é dado pela Figura 4.18 (b), invertendo o sentido das órbitas.

A expressão do sistema (4.1) na carta local U_3 é dada por

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= -z_1 z_2^2 + a z_1 z_3^2 + z_2 z_3, \\ \dot{z}_2 &= -z_2^3 + a z_2 z_3^2 - z_1 z_3 - z_2, \\ \dot{z}_3 &= z_3 (-z_2^2 + a z_3^2).\end{aligned}\tag{4.23}$$

Considere o sistema (4.23) restrito ao plano invariante $z_3 = 0$. O eixo $-z_1$ é uma reta de equilíbrios do sistema restrito e os autovalores da parte linear do sistema nestes pontos de equilíbrio são 0 e -1 . Note que $\dot{z}_1 > 0$ para $z_1 < 0$; $\dot{z}_1 = 0$ sobre o eixo $-z_2$; e $\dot{z}_1 < 0$ para $z_1 > 0$. Logo, o fluxo deste sistema na direção do eixo $-z_1$ é crescente para $z_1 < 0$, constante sobre o eixo $-z_2$ e decrescente para $z_1 > 0$. Além disso, $\dot{z}_2 > 0$ para $z_2 < 0$ e $\dot{z}_2 < 0$ para $z_2 > 0$. Então, o fluxo na direção do eixo $-z_2$ é crescente para $z_2 < 0$, decrescente para $z_2 > 0$, e as órbitas tendem para o eixo $-z_1$, que é uma reta de equilíbrios, quando $t \rightarrow \infty$. O retrato de fase do sistema (4.23) restrito ao plano invariante $z_3 = 0$ é mostrado na Figura 4.18 (c).

O fluxo do sistema (4.1) na carta local V_3 restrito a $z_3 = 0$ também é dado pela Figura 4.18 (c), invertendo o sentido das órbitas.

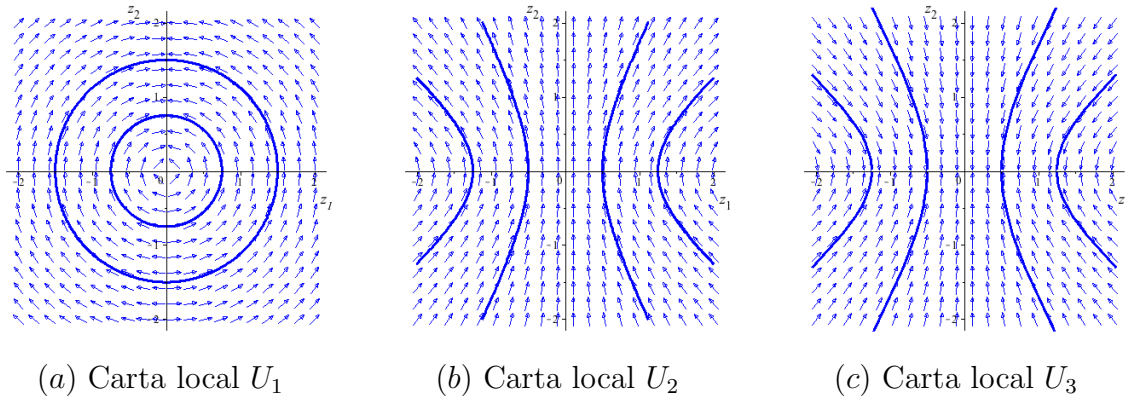


Figura 4.18: Retrato de fase do sistema (4.1) nas cartas locais U_1 , U_2 e U_3 restritas ao plano invariante $z_3 = 0$.

Considerando o estudo feito nas cartas locais U_i e V_i , com $i = 1, 2, 3$, restritas ao plano invariante $z_3 = 0$, obtemos a dinâmica do sistema (4.1) sobre a fronteira \mathbb{S}^2 da bola de Poincaré (ou seja, no infinito), que é mostrado na Figura 4.17. Existe uma grande circunferência de equilíbrios sobre \mathbb{S}^2 e um conjunto de infinitas órbitas heteroclínicas conectando pares destes pontos de equilíbrio. Note que o fluxo do sistema (4.1) no infinito não depende do parâmetro $a \in \mathbb{R}$. Logo, o conjunto de órbitas heteroclínicas sobre \mathbb{S}^2 existe para todos os valores de a , mesmo quando o sistema (4.1) apresenta comportamento caótico.

Quando $a > 0$ pequeno, quase todas as órbitas do sistema (4.1) são homoclínicas ao conjunto limite descrito na Subseção 4.4.4, incluindo aquelas que estão numa vizinhança da fronteira \mathbb{S}^2 da bola de Poincaré (infinito). De fato, considerando o fluxo do sistema (4.1) na carta local U_3 , dado pelo sistema (4.23), o eixo- z_1 é uma reta de equilíbrios e todas as órbitas sobre o plano invariante $z_3 = 0$ tendem para estes pontos de equilíbrio quando $t \rightarrow \infty$, como mostrado na Figura 4.18 (c). Além disso, o eixo- z_3 (que corresponde ao eixo- z em \mathbb{R}^3) é invariante pelo fluxo do sistema compactificado na carta local U_3 e a órbita com condição inicial sobre ele segue em seu sentido positivo (sentido negativo do eixo- z em \mathbb{R}^3 , veja Figura 5.1 do Apêndice A), pois $\dot{z}_3 = a z_3^3 > 0$, já que estamos considerando $a > 0$ e $z_3 > 0$ (que corresponde aos pontos no interior da bola de Poincaré, isto é, o \mathbb{R}^3 , veja Apêndice A). Logo, de acordo com o estudo apresentado na seção anterior e pela continuidade do fluxo, as órbitas numa vizinhança $0 < z_3 < \varepsilon$, com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, do plano invariante $z_3 = 0$ vão em direção ao eixo- z_3 e, numa vizinhança tubular

deste eixo, oscilam em torno dele em seu sentido positivo, como ilustrado na Figura 4.19 (a). O mesmo é verdade na carta local V_3 , invertendo apropriadamente o sentido das órbitas (veja Figura 4.19 (b)). Assim, quase todas as órbitas no espaço de fase do sistema (4.1), incluindo aquelas numa vizinhança do infinito (ou seja, com grande amplitude), são homoclínicas ao conjunto limite descrito na Subseção 4.4.4. Isto finaliza a prova do Teorema 18.

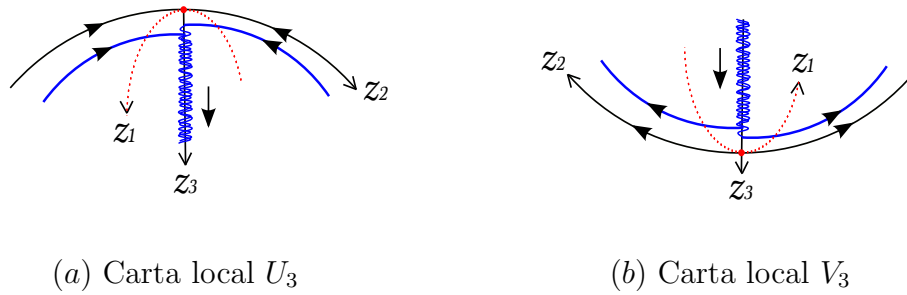


Figura 4.19: Fluxo do sistema (4.1) numa vizinhança interior da fronteira \mathbb{S}^2 da bola de Poincaré nas cartas locais U_3 e V_3 .

A Figura 4.20 mostra esquematicamente a dinâmica global do sistema Sprott A quando $a > 0$ pequeno: suficientemente longe da origem quase todas as órbitas são homoclínicas ao conjunto limite, incluindo aquelas numa vizinhança da fronteira \mathbb{S}^2 da bola de Poincaré.

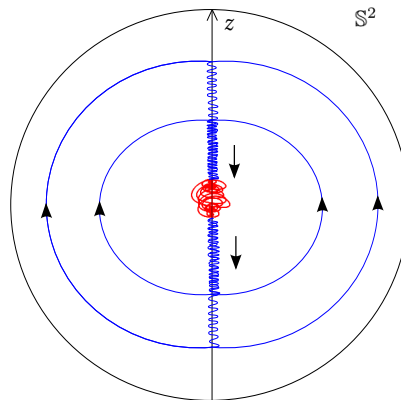


Figura 4.20: Dinâmica global do sistema Sprott A quando $a > 0$ pequeno.

Conclusões

Conforme vimos neste trabalho, o estudo de superfícies algébricas invariantes em sistemas diferenciais polinomiais em \mathbb{R}^3 é um tópico importante na Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias, uma vez que elas podem ser usadas como uma ferramenta para melhor compreender a dinâmica de sistemas diferenciais que, em geral, apresentam comportamento muito complicado.

No Capítulo 2, estudamos a realização de sistemas diferenciais quadráticos com o número máximo de planos invariantes, levando-se em consideração a multiplicidade destes planos e sem considerar o plano no infinito, e a existência de integrais primeiras nestes sistemas. Os resultados apresentados naquele capítulo foram reunidos no *preprint*:

LLIBRE, J., MESSIAS, M., REINOL, A. C. *Quadratic polynomial differential systems in \mathbb{R}^3 having invariant planes with total multiplicity nine*. Preprint (2017).

Os resultados apresentados no Capítulo 2 são puramente algébricos e fornecem um ponto de partida para o estudo dinâmico de sistemas diferenciais quadráticos com planos invariantes. De fato, como foi observado no decorrer do capítulo, do ponto de vista dinâmico, o que importa é o número de planos invariantes distintos que esses sistemas possuem. Deste modo, seria interessante estudar a realização de todos os casos com planos invariantes distintos, levando-se em consideração as posições relativas destes planos. Esta não é uma tarefa fácil, visto que o número de casos a se considerar aumenta exponencialmente conforme aumentamos o número de planos invariantes distintos no sistema. No Capítulo 2, fornecemos exemplos para vinte e três das trinta configurações possíveis para sistemas diferenciais quadráticos com nove planos invariantes, levando-se em consideração a multiplicidade destes planos, veja Tabelas 2.2 – 2.6. Porém, fica em aberto a questão da realização (ou não) das sete configurações restantes. Dado o grande número de parâmetros envolvidos nos cálculos, acreditamos que estes casos sejam realizáveis, mas isso deve ser provado.

No Capítulo 3, apresentamos de forma mais detalhada os resultados que obtivemos em [45] e em [60]. Neste capítulo, fornecemos as formas normais de todos os sistemas diferenciais polinomiais definidos em \mathbb{R}^3 com uma quádrlica como superfície algébrica invariante e aplicamos os resultados obtidos no famoso sistema de Chen. Em seguida, estudamos a integrabilidade de sistemas diferenciais quadráticos com uma superfície algébrica invariante dada por um parabolóide elíptico, verificando a existência de integrais primeiras, fatores exponenciais, invariantes de Darboux e multiplicadores de Jacobi inverso. Além disso, caracterizamos todas as configurações possíveis de paralelos e meridianos invariantes sobre o parabolóide invariante e fazemos um estudo da dinâmica global (órbitas finitas e no infinito) de uma classe de sistemas diferenciais quadráticos com um parabolóide invariante. Por fim, consideramos o caso em que o sistema de Rabinovich possui um parabolóide invariante e fizemos um estudo detalhado de sua dinâmica sobre esta superfície. Vale ressaltar que um estudo análogo ao feito neste capítulo para sistemas diferenciais quadráticos com um parabolóide invariante, pode ser realizado para sistemas com outros tipos de quádrlicas como superfícies algébricas invariantes, dadas as formas normais apresentadas nos Teoremas 3 e 4. De fato, esse é um caminho interessante de estudos, que tem por objetivo utilizar os resultados algébricos obtidos no estudo da dinâmica dos sistemas.

No Capítulo 4, estudamos as consequências dinâmicas no espaço de fase de um sistema diferencial folheado por superfícies algébricas invariantes quando estas deixam de ser invariantes pelo fluxo do sistema. Para tal, foi feito um estudo da dinâmica e integrabilidade do sistema Sprott A, que depende do parâmetro real a e apresenta comportamento caótico, embora não tenha pontos de equilíbrio, para valores adequados de a . Vimos que, para $a = 0$, este sistema possui uma reta de equilíbrios dada pelo eixo- z e, devido à existência de uma integral primeira polinomial, o seu espaço de fase é folheado pelas esferas invariantes $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, com $r > 0$, formadas por um conjunto de infinitas órbitas heteroclínicas do tipo polo sul - polo norte. Provamos que, para $a \neq 0$, o sistema Sprott A não possui superfícies algébricas invariantes nem integrais primeiras polinomiais. Utilizando a Teoria de *Averaging* e o Teorema KAM provamos que, quando $a > 0$ suficientemente pequeno, uma órbita periódica orbitalmente estável emerge de um ponto de equilíbrio do tipo zero-Hopf não isolado localizado na origem e que, em torno dela, forma-se uma sequência encaixante de toros invariantes, cujo mais externo deles é englobado por uma região “turbulenta” de atração/repulsão que conduz a uma estrutura homoclínica das órbitas no espaço de fase do sistema. Deste modo, observamos que estes

fatos tem um papel importante na existência de um *hidden attractor* no sistema Sprott A. Neste capítulo, exibimos de forma mais detalhada os resultados que obtivemos em [61] e constatamos analiticamente alguns dos fenômenos observados (numericamente) naquele artigo. Os resultados originais apresentados neste capítulo foram reunidos no *preprint*:

MESSIAS, M., REINOL, A. C. *Analytical results on the existence of periodic orbits and invariant tori in the Sprott A system*. Preprint (2017).

Em [27], além do sistema Sprott A, os autores listaram outros 16 exemplos de sistemas diferenciais quadráticos, os quais chamaram de $NE_1 - NE_{17}$, dependendo de um parâmetro real a e apresentando comportamento caótico sem ter pontos de equilíbrio. Em estudos preliminares, verificamos que alguns destes sistemas (mais precisamente, NE_6 , NE_8 e NE_9) possuem uma dinâmica muito semelhante a do sistema Sprott A, com existência de uma reta de equilíbrios dada por um dos eixos coordenados e de uma estrutura compacta formada por infinitas órbitas heteroclínicas conectando pares destes equilíbrios quando $a = 0$, bifurcação de uma órbita periódica de um equilíbrio do tipo zero-Hopf localizado na origem e, para valores adequados do parâmetro a , observa-se a existência de um *hidden attractor*, que coexiste com toros invariantes. Os resultados obtidos deste estudo estão sendo sistematizados para compor um capítulo do livro:

Nonlinear Dynamical Systems with Self-Excited and Hidden Attractors. Series: Studies in Systems, Decision and Control (SSDC) by Springer-Verlag, Germany (Series Ed.: Kacprzyk, Janusz). Book Editors: Viet-Thanh Pham, Sundarapandian Vaidyanathan, Christos Volos, Tomasz Kapitaniak.

Todos os cálculos e figuras envolvendo simulações numéricas apresentados neste trabalho foram feitos utilizando o *software* Maple 16, exceto os cálculos dos expoentes de Lyapunov e dimensão de Lyapunov da Subseção 4.4.5 do Capítulo 4, que foram feitos utilizando o *software* Mathematica 10.

Referências Bibliográficas

- [1] ARNOLD, V. I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, New York: Springer-Verlag, 1978.
- [2] ARNOLD, V. I., KOZLOV, V. V., NEIHSSTADT, A. I. *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics*. Berlin: Springer-Verlag, 2006.
- [3] BALDOMÁ, I., SEARA, T.M. *Breakdown of heteroclinic orbits for some analytic unfoldings of the Hopf-Zero singularity*. J. Nonlinear Sci. **16** (2006), 543–582.
- [4] BROER, H. W., VEGTER, G. *Subordinate Sil’nikov bifurcations near some singularities of vector fields having low codimension*. Ergod. Theory Dyn. Syst. **4** (1984), 509–525.
- [5] BUICĂ, A., GARCÍA, I. A., MAZA, S. *Existence of inverse Jacobi multipliers around Hopf points in \mathbb{R}^3 : emphasis on the center problem*. J. Differ. Equations **252** (2012), 6324–6336.
- [6] CHEN, C., CAO, J., ZHANG, X. *The topological structure of the Rabinovich system having an invariant algebraic surface*. Nonlinearity **21** (2008), 211–220.
- [7] CHEN, G., UETA, T. *Yet another chaotic attractor*, Int. J. Bifurcat. Chaos **9** (1999), 1465–1466.
- [8] CHRISTOPHER, C., LI, C. *Limit Cycles of Differential Equations*. Basel: Birkhäuser-Verlag, 2007.
- [9] CHRISTOPHER, C., LLIBRE, J., PEREIRA, J. V. *Multiplicity of invariant algebraic curves in polynomial vector fields*. Pacific J. Math. **229** (2007), 63–117.
- [10] CIMA, A., LLIBRE, J. *Bounded polynomial vector fields*. Trans. Amer. Math. Soc. **318** (1990), 557–579.
- [11] DANCA, M. F. *Hidden transient chaotic attractors of Rabinovich-Fabrikant system*. Nonlin. Dyn. **86** (2016), 1263–1270.

-
- [12] DEVANEY, R. L. *A First Course In Chaotic Dynamical Systems: Theory And Experiment*. Westview Press, 1992.
- [13] DEVANEY, R. L. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Westview Press, 2003.
- [14] DIAS, F. S., LLIBRE, J., MELLO, L. F. *When parallels and meridians are limit cycles for polynomial vector fields on quadrics of revolution in the Euclidean 3-space*. Int. J. Bifurcat. Chaos **26** (2016), 1650160 (14 pages).
- [15] DOBROVOL'SKII, V. A., LOKOT', N. V., STRELCYN, J. M. *Mikhail Nikolaevich Lagutinskii (1871–1915): an unrecognized mathematician*. Historia Math. **25** (1998), 245–264.
- [16] DUDKOWSKI, D., JAFARI, S., KAPITANIAK, T., KUZNETSOV, N., LEONOV, G. A., PRASAD, A. *Hidden attractors in dynamical systems*. Phys. Rep. **637** (2016), 1–50.
- [17] DUMORTIER, F., LLIBRE, J., ARTÉS, J. C. *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*. New York: Springer-Verlag, 2006.
- [18] ERUGIN, N. P. *Construction of the whole set of differential equations having a given integral curve*. Akad. Nauk SSSR. Prikl. Mat. Meh. **16** (1952), 659–670 (in Russian).
- [19] GALIULLIN, A. S. *Inverse Problems of Dynamics*. Moscow: Mir Publishers, 1984.
- [20] GIACOMINI, H. J., NEUKIRCH, S. *Integrals of motion and the shape of the attractor for the Lorenz model*. Phys. Lett. A **227** (1997), 309–318.
- [21] GOTTHANS, T., PETRŽELA, J. *New class of chaotic systems with circular equilibrium*. Nonlin. Dyn. **73** (2015), 429–436.
- [22] GOUVEIA, M. R. A., MESSIAS, M., PESSOA, C. *Bifurcations at infinity, invariant algebraic surfaces, homoclinic and heteroclinic orbits and centers of a new Lorenz-like chaotic system*, Nonlin. Dyn. **84** (2016), 703–713.
- [23] GUCKENHEIMER, J., HOLMES, P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. New York: Springer-Verlag, 2002.

-
- [24] HAN, M. *Existence of periodic orbits and invariant tori in codimension two bifurcations of three-dimensional systems*. J. Syst. Sci. Math. Sci. **18** (1998), 403–409.
- [25] HOOVER, W. G. *Remark on ‘Some simple chaotic flows’*. Phys. Rev. E **51** (1995), 759–760.
- [26] JAFARI, S., SPROTT, J. C. *Simple chaotic flows with a line equilibrium*. Chaos Solitons Fract. **57** (2013), 79–84.
- [27] JAFARI, S., SPROTT, J. C., GOLPAYEGANI, S. M. R. H. *Elementary quadratic chaotic flows with no equilibria*. Phys. Lett. A **377** (2013), 699–702.
- [28] JAFARI, S., SPROTT, J. C., NAZARIMEHR, F. *Recent new examples of hidden attractors*. Eur. Phys. J. Special Topics **224** (2015), 1469–1476.
- [29] JOUANOLOU, J. P. *Équations de pfaff algébriques*. In: Lecture Notes in Mathematics, vol. 708. New York/Berlin: Springer-Verlag, 1979.
- [30] KINGNI, S. T., JAFARI, S., SIMO, H., WOAFO, P. *Three-dimensional chaotic autonomous system with only one stable equilibrium: Analysis, circuit design, parameter estimation, control, synchronization and its fractional-order form*. Eur. Phys. J. Plus **129** (2014), 76.
- [31] KUZNETSOV, YU. A. *Elements of applied bifurcation theory*. New York: Springer, 2004.
- [32] LAKSHMANAN, M., RAJASEKAR, S. *Nonlinear Dynamics: Integrability, Chaos and Patterns*. Berlin: Springer-Verlag, 2003.
- [33] LAO, S. K., SHEKOFTEH, Y., JAFARI, S., SPROTT, J. C. *Cost function based on Gaussian mixture model for parameter estimation of a chaotic circuit with a hidden attractor*. Int. J. Bifurcat. Chaos **24** (2014), 1450010 (11 pages).
- [34] LEONOV, G. A., KUZNETSOV, N. V. *Hidden attractors in dynamical systems: From hidden oscillations in Hilbert-Kolmogorov, Aizerman and Kalman problems to hidden chaotic attractor in Chua circuits*. Int. J. Bifurcat. Chaos **23** (2013), 1330002 (69 pages).

-
- [35] LEONOV, G. A., KUZNETSOV, N. V., MOKAEV, T. N. *Homoclinic orbits, and self-excited and hidden attractors in a Lorenz-like system describing convective fluid motion*. Eur. Phys. J. Special Topics **224** (2015), 1421–1458.
- [36] LI, C., SPROTT, J. C. *Coexisting hidden attractors in a 4-D simplified Lorenz system*. Int. J. Bifurcat. Chaos **24** (2014), 1450034 (12 pages).
- [37] LLIBRE, J. *Integrability of polynomial differential systems*. Handbook of differential equations. Amsterdam: Elsevier/North-Holland, 2004, pp. 437–532.
- [38] LLIBRE, J., MEDRADO, J. C. *On the invariant hyperplanes for d-dimensional polynomial vector fields*. J. Phys. A: Math. Gen. **40** (2007), 8385–8391.
- [39] LLIBRE, J., MESSIAS, M. *Global dynamics of the Rikitake system*. Phys. D: Nonlinear Phenomena **238** (2009), 241–252.
- [40] LLIBRE, J., MESSIAS, M., DA SILVA, P. R. *Global dynamics in the Poincaré ball of the Chen system having invariant algebraic surfaces*. Int. J. Bifurcat. Chaos **22** (2012), 1250154 (17 pages).
- [41] LLIBRE, J., MESSIAS, M., DA SILVA, P. R. *Global dynamics of stationary solutions of the extended Fisher-Kolmogorov equation*. J. Math. Phys. **52** (2011), 112701 (12 pages).
- [42] LLIBRE, J., MESSIAS, M., DA SILVA, P. R. *Global dynamics of the Lorenz system with invariant algebraic surfaces*. Int. J. Bifurcat. Chaos **20** (2010), 3137–3155.
- [43] LLIBRE, J., MESSIAS, M., DA SILVA, P. R. *On the global dynamics of the Rabinovich system*. J. Phys. A: Math. Theor. **41** (2008), 275210 (21 pages).
- [44] LLIBRE, J., MESSIAS, M., REINOL, A. C. *Darboux invariants for planar polynomial differential systems having an invariant conic*. Z. Angew. Math. Phys. ZAMP **41**, 1127–1136.
- [45] LLIBRE, J., MESSIAS, M., REINOL, A. C. *Normal forms for polynomial differential systems in \mathbb{R}^3 having an invariant quadric and a Darboux invariant*. Int. J. Bifurcat. Chaos **25** (2015), 1550015 (16 pages).

-
- [46] LLIBRE, J., OLIVEIRA, R. D. S. *Quadratic systems with invariant straight lines with total multiplicity two having Darboux invariants*. Commun. Contemp. Math. **17** (2015), 1450018 (17 pages).
- [47] LLIBRE, J., PESSOA, C. *Invariant circles for homogeneous polynomial vector fields on the 2-dimensional sphere*. Rend. Circ. Mat. Palermo **55** (2006), 63–81.
- [48] LLIBRE, J., RAMÍREZ, R. *Inverse Problems in Ordinary Differential Equations and Applications*. Basel: Birkhäuser-Verlag, 2016.
- [49] LLIBRE, J., REBOLLO-PERDOMO, S. *Invariant parallels, invariant meridians and limit cycles of polynomial vector fields on some 2-dimensional algebraic tori in \mathbb{R}^3* . J. Dyn. Differ. Equ. **25** (2013), 777–793.
- [50] LLIBRE, J., VALLS, C. *Polynomial first integrals for the Chen and Lü systems*. Int. J. Bifurcat. Chaos **22** (2012), 125–262.
- [51] LLIBRE, J., XIAO, D. *Limit cycles bifurcating from a non-isolated zero-Hopf equilibrium of three-dimensional differential systems*. Proc. Am. Math. Soc. **142** (2014), 2047–2062.
- [52] LLIBRE, J., ZHANG, X. *Darboux theory of integrability for polynomial vector fields in \mathbb{R}^n taking into account the multiplicity at infinity*. Bull. Sci. Math. **133** (2009), 765–778.
- [53] LLIBRE, J., ZHANG, X. *Darboux theory of integrability in \mathbb{C}^n taking into account the multiplicity*. J. Differ. Equations **246** (2009), 541–551.
- [54] LLIBRE, J., ZHANG, X. *Invariant algebraic surfaces of the Lorenz system*. J. Math. Phys. **43** (2002), 1622–1645.
- [55] LLIBRE, J., ZHANG, X. *On the Darboux integrability of the polynomial differential systems*. Qualit. Th. Dyn. Syst. **11** (2012), 129–144.
- [56] LLIBRE, J., ZHANG, X. *Rational first integrals in the Darboux theory of integrability in \mathbb{C}^n* . Bull. Sci. Math. **134** (2010), 189–195.
- [57] LORENZ, E. N. *Deterministic nonperiodic flow*. J. Atmos. Sci. **20** (1963), 130–141.

-
- [58] LÜ, J. H., CHEN, G. R. *A new chaotic attractor coined*. Int. J. Bifurcat. Chaos **12** (2002), 659–661.
- [59] LÜ, T., ZHANG, X. *Darboux polynomials and algebraic integrability of the Chen system*, Int. J. Bifurcat. Chaos **17** (2007), 2739–2748.
- [60] MESSIAS, M., REINOL, A. C. *Integrability and dynamics of quadratic three-dimensional differential systems having an invariant paraboloid*, Int. J. Bifurcat. Chaos **26** (2016), 1650134 (23 pages).
- [61] MESSIAS, M., REINOL, A. C. *On the formation of hidden chaotic attractors and nested invariant tori in the Sprott A system*, Nonlin. Dyn. **88** (2017), 807–821.
- [62] MOLAIE, M., JAFARI, S., SPROTT, J. C., GOLPAYEGANI, S. M. R. H. *Simple chaotic flows with one stable equilibrium*. Int. J. Bifurcat. Chaos **23** (2013), 1350188 (7 pages).
- [63] PEREIRA, J. V. *Vector fields, invariant varieties and linear systems*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **51**:5 (2001), 1385–1405.
- [64] PHAM, V. T., JAFARI, S., VAIDYANATHAN, S., VOLOS, C., WANG, X. *A novel memristive neural network with hidden attractors and its circuitry implementation*. Sci. China Tech. Sci. **59** (2016), 1–6.
- [65] PHAM, V. T., VOLOS, C., JAFARI, S., VAIDYANATHAN, S., KAPITANIAK, T., WANG, X. *A chaotic system with different families of hidden attractors*. Int. J. Bifurcat. Chaos **8** (2016), 1650139 (9 pages).
- [66] PIKOVSKII, A. S., RABINOVICH, M. I., TRAKHTENGERTS, V. YU. *Onset of stochasticity in decay confinement of parametric instability*. Sov. Phys. JETP **47** (1978), 715–719.
- [67] POSCH, H. A., HOOVER, W.G., VESELY, F. J. *Canonical dynamics of the Nosé oscillator: Stability, order, and chaos*. Phys. Rev. A **33** (1986), 4253–4265.
- [68] PÖSCHEL, J. *A lecture on the classical KAM theorem*. Proc. Symp. Pure Math. **69** (2001), 707–732.
- [69] RÖSSLER, O. *An equation for continuous chaos*. Phys. Lett. A **57** (1976), 397–398.

-
- [70] SANDERS, J. A., VERHULST, F., MURDOCK, J. *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems*. New York: Springer, 2007.
- [71] SANDRI, M. *Numerical calculation of Lyapunov exponents*. Math J. **6** (1998), 79–84.
- [72] SCHEURLE, J., MARSDEN, J. *Bifurcation to quasi-periodic tori in the interaction of steady state and Hopf bifurcations*. SIAM J. Math. Anal. **15** (1984), 1055–1074.
- [73] SHAHZAD, M., PHAM, V. T., AHMAD, M. A., JAFARI, S., HADAEGHI, F. *Synchronization and circuit design of a chaotic system with coexisting hidden attractors*. Eur. Phys. J. Special Topics **224** (2015), 1637–1652.
- [74] SPARROW, C. *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos and Strange Attractors*. New York: Springer-Verlag, 1982.
- [75] SPROTT, J. C. *Some simple chaotic flows*. Phys. Rev. E **50** (1994), R647–R650.
- [76] STROGATZ, S. H. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*. New York: Westview Press, 2014.
- [77] VELASCO, E. A. G. *Generic properties of polynomial vector fields at infinity*. Trans. Amer. Math. Soc. **143** (1969), 201–221.
- [78] VERHULST, F. *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*. Berlin: Springer-Verlag, 1996.
- [79] WANG, X., CHEN, G. *A chaotic system with only one stable equilibrium*. Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simulat. **17** (2012), 1264–1272.
- [80] WANG, Z., CANG, S., OCHOLA, E. O., SUN, Y. *A hyperchaotic system without equilibrium*. Nonlin. Dyn. **69** (2012), 531–537.
- [81] WEI, Z., PEHLIVAN, I. *Chaos, coexisting attractors, and circuit design of the generalized Sprott C system with only two stable equilibria*. Optoelectron. Adv. Mater. Rapid Commun. **6** (2012), 742–745.
- [82] WEI, Z., YANG, Q. *Dynamical analysis of a new autonomous 3-D chaotic system only with stable equilibria*. Nonlin. Anal.: Real World Appl. **12** (2011), 106–118.

- [83] WEI, Z., ZHANG, W. *Hidden hyperchaotic attractors in a modified Lorenz-Stenflo system with only one stable equilibrium*. Int. J. Bifurcat. Chaos **24** (2014), 1450127 (14 pages).
- [84] WEI, Z., ZHANG, W., WANG, Z., YAO, M. *Hidden attractors and dynamical behaviors in an extended Rikitake system*. Int. J. Bifurcat. Chaos **25** (2015), 1550028 (11 pages).
- [85] WIGGINS, S. *Global Bifurcation and Chaos*. New York: Springer-Verlag, 1988.
- [86] WIGGINS, S. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. New York: Springer-Verlag, 2003.
- [87] XIE, F., ZHANG, X. *Invariant algebraic surfaces of the Rabinovich system*. J. Phys. A: Math. Gen. **36** (2003), 499–516.

Apêndice A – Compactificação de Poincaré em \mathbb{R}^3

Seja \mathcal{X} o campo vetorial polinomial associado ao sistema diferencial

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= P^1(x_1, x_2, x_3), \\ \dot{x}_2 &= P^2(x_1, x_2, x_3), \\ \dot{x}_3 &= P^3(x_1, x_2, x_3),\end{aligned}\tag{5.1}$$

onde $P^i \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$, para $i = 1, 2, 3$. O grau do sistema (5.1) (ou do campo vetorial \mathcal{X}) é definido como sendo $n = \max\{\text{grau}(P^i); i = 1, 2, 3\}$.

Assim como qualquer sistema diferencial polinomial, o sistema (5.1) pode ser analiticamente estendido para um sistema diferencial definido em uma bola fechada \mathbb{D}^3 de raio um e centrada na origem de \mathbb{R}^3 , cujo interior é difeomorfo a \mathbb{R}^3 e sua fronteira, a esfera bidimensional $\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$, é invariante pelo fluxo do sistema e corresponde aos pontos no infinito. A bola fechada \mathbb{D}^3 é chamada de *bola de Poincaré* e sua fronteira \mathbb{S}^2 de *esfera de Poincaré*, pois a técnica utilizada para obter essa extensão do sistema diferencial (5.1) é a *compactificação de Poincaré*, que está descrita em detalhes em [10, 77]. Aqui, apresentamos um sumário da compactificação de Poincaré para sistemas diferenciais polinomiais definidos em \mathbb{R}^3 . O mesmo foi feito em [22, 40, 41, 42].

Sejam $\mathbb{S}^3 = \{y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4; \|y\| = 1\}$ a esfera unitária em \mathbb{R}^4 , $\mathbb{S}_+ = \{y \in \mathbb{S}^3; y_4 > 0\}$ e $\mathbb{S}_- = \{y \in \mathbb{S}^3; y_4 < 0\}$ os hemisférios norte e sul de \mathbb{S}^3 , respectivamente. Identifiquemos o espaço tangente a \mathbb{S}^3 no ponto $(0, 0, 0, 1)$ com \mathbb{R}^3 , isto é,

$$T_{(0,0,0,1)}\mathbb{S}^3 = \{(x_1, x_2, x_3, 1) \in \mathbb{R}^4; (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\}.$$

Considere as projeções centrais

$$f_+ : \mathbb{R}^3 = T_{(0,0,0,1)}\mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}_+ \quad \text{e} \quad f_- : \mathbb{R}^3 = T_{(0,0,0,1)}\mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}_-,$$

definidas por $f_{\pm} = \pm(x_1, x_2, x_3, 1)/\Delta x$, onde $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ e $\Delta x = (1 + \sum_{i=1}^3 x_i^2)^{1/2}$. Através destas projeções centrais, \mathbb{R}^3 é identificado com o hemisfério norte e o hemisfério sul de \mathbb{S}^3 . O equador de \mathbb{S}^3 é $\mathbb{S}^2 = \{y \in \mathbb{R}^4; y_4 = 0\}$. Observe que \mathbb{S}^2 pode ser claramente identificado com o infinito de \mathbb{R}^3 .

As projeções f_+ e f_- determinam duas cópias de \mathcal{X} em \mathbb{S}^3 : uma $Df_+ \circ \mathcal{X}$ no hemisfério norte e outra $Df_- \circ \mathcal{X}$ no hemisfério sul. Denote por $\bar{\mathcal{X}}$ o campo vetorial em

$\mathbb{S}^3 \setminus \mathbb{S}^2 = \mathbb{S}_+ \cup \mathbb{S}_-$ que restrito a \mathbb{S}_+ coincide com $Df_+ \circ \mathcal{X}$ e restrito a \mathbb{S}_- coincide com $Df_- \circ \mathcal{X}$.

O campo vetorial $\bar{\mathcal{X}}(y)$ pode ser analiticamente estendido para toda a esfera \mathbb{S}^3 através da multiplicação pelo fator positivo y_4^{n-1} , onde n é o grau de \mathcal{X} . Assim, obtemos o campo vetorial estendido $p(\mathcal{X})(y) = y_4^{n-1} \bar{\mathcal{X}}(y)$, que é chamado de compactificação de Poincaré de \mathcal{X} em \mathbb{S}^3 .

Como \mathbb{S}^3 é uma variedade diferenciável, para calcular a expressão de $p(\mathcal{X})$, podemos considerar oito cartas locais (U_i, F_i) , (V_i, G_i) , para $i = 1, 2, 3, 4$, onde $U_i = \{y \in \mathbb{S}^3; y_i > 0\}$ e $V_i = \{y \in \mathbb{S}^3; y_i < 0\}$ e os difeomorfismos $F_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $G_i : V_i \rightarrow \mathbb{R}^3$ são as aplicações inversas das projeções centrais da origem aos hiperplanos tangentes a \mathbb{S}^3 nos pontos $(\pm 1, 0, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0, 0)$, $(0, 0, \pm 1, 0)$ e $(0, 0, 0, \pm 1)$, respectivamente.

Façamos os cálculos para a obtenção da expressão de \mathcal{X} na carta local U_1 . Suponha que a origem de \mathbb{R}^4 , o ponto $(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{S}^3$ e o ponto $(1, z_1, z_2, z_3) \in T_{(1,0,0,0)}\mathbb{S}^3$ sejam colineares. Então, temos que $1/y_1 = z_1/y_2 = z_2/y_3 = z_3/y_4$ e, conseqüentemente, $F_1(y) = (y_2/y_1, y_3/y_1, y_4/y_1) = (z_1, z_2, z_3)$ define as coordenadas em U_1 . Como

$$DF_1(y) = \begin{pmatrix} -y_2/y_1^2 & 1/y_1 & 0 & 0 \\ -y_3/y_1^2 & 0 & 1/y_1 & 0 \\ -y_4/y_1^2 & 0 & 0 & 1/y_1 \end{pmatrix}$$

e $y_4^{n-1} = (z_3/\Delta z)^{n-1}$, o campo vetorial analítico $p(\mathcal{X})$ é escrito como

$$\frac{z_3^n}{(\Delta z)^{n-1}} (-z_1 P^1 + P^2, -z_2 P^1 + P^3, -z_3 P^1),$$

onde $P^i = P^i(1/z_3, z_1/z_3, z_2/z_3)$.

De maneira análoga, podemos deduzir as expressões de $p(\mathcal{X})$ nas cartas U_2 e U_3 , que são dadas por

$$\frac{z_3^n}{(\Delta z)^{n-1}} (-z_1 P^2 + P^1, -z_2 P^2 + P^3, -z_3 P^2),$$

onde $P^i = P^i(z_1/z_3, 1/z_3, z_2/z_3)$ em U_2 , e

$$\frac{z_3^n}{(\Delta z)^{n-1}} (-z_1 P^3 + P^1, -z_2 P^3 + P^2, -z_3 P^3),$$

onde $P^i = P^i(z_1/z_3, z_2/z_3, 1/z_3)$ em U_3 .

A expressão de $p(\mathcal{X})$ na carta U_4 é $z_3^{n+1}(P^1, P^2, P^3)$, onde $P^i = P^i(z_1, z_2, z_3)$. Por simetria, as expressões para $p(\mathcal{X})$ nas cartas locais V_i , para $i = 1, 2, 3, 4$, são as mesmas que nas cartas U_i , multiplicadas por $(-1)^{n-1}$, onde n é o grau de \mathcal{X} .

Quando trabalhamos com a expressão do campo vetorial compactificado $p(\mathcal{X})$ nas cartas locais, geralmente omitimos o fator $1/(\Delta z)^{n-1}$. Fazemos isso a partir de um rescalonamento de tempo, já que $\Delta z > 0$.

Usualmente, considera-se a projeção ortogonal do campo vetorial compactificado $p(X)$ do hemisfério norte fechado $\bar{S}_+ = \{y \in S^3 : y_4 \geq 0\}$ em $y_4 = 0$. Tal projeção consiste de uma bola fechada \mathbb{D}^3 centrada na origem de \mathbb{R}^4 e de raio um, cujo interior é difeomorfo a \mathbb{R}^3 e cuja fronteira S^2 corresponde aos pontos de \mathbb{R}^3 no infinito. Assim, $p(\mathcal{X})$ fica definido na bola fechada \mathbb{D}^3 , de tal maneira que a fronteira S^2 é invariante pelo fluxo de $p(\mathcal{X})$.

Todos os pontos sobre a esfera invariante S^2 no infinito nas coordenadas (z_1, z_2, z_3) de cada uma das cartas locais U_i e V_i têm $z_3 = 0$. Os pontos no interior da bola de Poincaré \mathbb{D}^3 , que correspondem aos pontos em \mathbb{R}^3 , são dados nas cartas locais U_1, U_2 e U_3 por $z_3 > 0$ e nas cartas locais V_1, V_2 e V_3 por $z_3 < 0$. Veja a Figura 5.1 para uma ilustração da esfera de Poincaré S^2 e as cartas locais U_i e V_i com suas orientações.

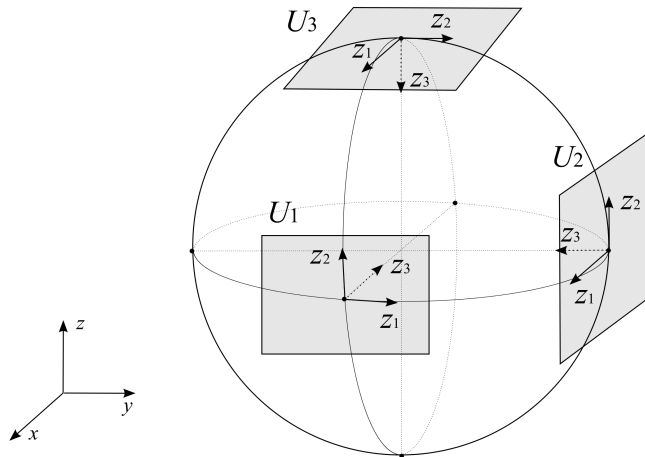


Figura 5.1: Cartas locais U_i , $i = 1, 2, 3$, usadas para desenhar o retrato de fase do sistema (5.1) na esfera de Poincaré S^2 . As cartas V_i , $i = 1, 2, 3$, são diametralmente opostas a U_i .