Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

Desigualdades Matemáticas e Aplicações

Rebeca Cristina Bonelli

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientadora
Profa. Dra. Suzete Maria Silva Afonso

510 Bonelli, Rebeca Cristina
B712d Desigualdades matemáticas e aplicações / Rebeca Cristina Bonelli. - Rio Claro, 2017
114 f. : il., figs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Suzete Maria Silva Afonso

1. Matemática. 2. Ensino médio 3. Análise. 4. Geometria. 5. Álgebra. I. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

TERMO DE APROVAÇÃO

Rebeca Cristina Bonelli
Desigualdades Matemáticas e Aplicações

Dissertação aprovada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Suzete Maria Silva Afonso
Orientadora

Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti
IGCE/ Unesp - Rio Claro/ SP

Profa. Dra. Ana Paula Tremura Galves
Faculdade de Matemática / UFU - Uberlândia/MG

Rio Claro, 14 de Julho de 2017

Às razões da minha vida:
Meus pais, Eduardo e Maria Helena,
minhas irmãs, Débora e Izabel, e
meu noivo, José Roberto.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente a Deus pelo dom da vida, pela minha família, por me permitir viver mais esta experiência e por ter me capacitado para que eu pudesse cumprí-la.

Agradeço a minha Orientadora, Profa. Dra. Suzete Maria Silva Afonso, pela paciência e compromisso em fazer com que este trabalho pudesse ser realizado da melhor maneira possível, e por muitas vezes, ter me acalmado nos momentos de ansiedade.

Agradeço a minha família, meus pais, Eduardo e Maria Helena, minhas irmãs, Débora e Izabel, e ao meu noivo, José Roberto, por toda paciência que tiveram e têm para comigo, por terem me apoiado e me proporcionado viver mais esta experiência acadêmica. Por isso, dedico este trabalho à vocês, que são a base da minha existência.

Resumo

Este trabalho apresenta um estudo sobre importantes desigualdades matemáticas e explora aplicações na resolução de problemas de Geometria, Álgebra e Análise, que podem ser abordados no Ensino Médio.

Palavras-chave: Desigualdades Matemáticas, Análise, Geometria, Álgebra.

Abstract

This work presents a study on important mathematical inequalities and explores applications in solving problems of Geometry, Algebra and Analysis, which can be approached in High School.

Keywords: Mathematical Inequalities, Analysis, Geometry, Algebra.

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

Este trabalho visa destacar o estudo de desigualdades matemáticas, ilustradas pelas relações de ordem: $>$(maior), $<$(menor) e $=$(igual). Somente a partir do século IV a.C, data não muito precisa, os primeiros problemas sobre desigualdades surgiram, pois sentiu-se a necessidade de ordenar números, fazer medições e aproximações. A partir disso, as desigualdades matemáticas foram ganhando espaço e tornaram-se objeto de estudo de importantes matemáticos, como Euclides, Arquimedes, Jacques Bernoulli, Cauchy, Schwarz, Chebyshev, Surányi, entre outros.

Um dos problemas mais antigos sobre desigualdades foi proposto por Euclides por volta do século IV a.C, que consiste num problema de otimização. Este problema é uma adaptação da Proposição 27 do livro VI de *Os Elementos* de Euclides. O enunciado simplificado de tal problema é: "*De todos os retângulos com o mesmo perímetro, qual tem área máxima*?" No presente trabalho, apresentaremos uma solução para este problema usando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica. Além deste problema, Euclides também propôs a Desigualdade Triangular. Esta desigualdade é muito importante, embora não seja abordada aqui; ela diz respeito à condição de existência de um triângulo: a soma de dois lados de um triângulo deve sempre ser maior que o seu terceiro lado.

Além de desigualdades matemáticas no campo geométrico, há também desigualdades no campo algébrico. Este trabalho apresenta importantes desigualdades matemáticas, advindas principalmente da estrutura de corpo dos números reais, tais como: Desigualdades entre as médias, Desigualdades Geométricas, Desigualdades de Bernoulli, Cauchy-Schwarz, Chebyshev, Surányi e Jensen, as quais são demonstradas e utilizadas na demonstração de outros importantes resultados presentes neste trabalho.

Além disso, ao final do trabalho, exibiremos um apêndice em que apresentaremos os conceitos de relação de ordem, corpo e corpo ordenado, a fim de concluirmos que o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos é um corpo não-ordenado, embora haja relações de ordem definidas nele.

Este trabalho está dividido em quatro capítulos. O Capítulo 2 traz uma breve exposição sobre desigualdades elementares que serão úteis para os próximos capítulos. No Capítulo 3, são apresentadas e demonstradas desigualdades matemáticas importantes, como as Desigualdades entre as médias, as Desigualdades Geométricas, Desigualdades de Bernoulli, Cauchy-Schwarz, Triangular, Chebyshev, Surányi, Jensen, Young e Hölder. O Capítulo 4 está destinado a aplicações, em problemas de matemática do Ensino Médio, das desigualdades matemáticas abordadas nos capítulos precedentes.

As principais referências utilizadas para a confecção deste trabalho foram [1], [3], [4], [5], [7], [9] e [10].

2 Desigualdades elementares e suas aplicações

Iniciamos nosso estudo sobre desigualdades matemáticas com a apresentação de algumas desigualdades advindas das propriedades de corpo dos números reais. São a partir delas que demonstrações de desigualdades mais complexas podem ser realizadas.

A principal referência para este capítulo é [5].

No que segue, denotaremos por $\mathbb{R}^+$ o conjunto dos números reais não-negativos e por $\mathbb{R}^+_*$ o conjunto dos números reais positivos.

1. Se $x \geq y$ e $y \geq z$ então $x \geq z$, para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$;

2. Se $x \geq y$ e $a \geq b$ então $x + a \geq y + b$, para quaisquer $x, y, a, b \in \mathbb{R}$;

3. Se $x \geq y$ então $x + z \geq y + z$, para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$;

4. Se $x \geq y$ e $a \geq b$ então $x \cdot a \geq y \cdot b$, para quaisquer $x, y, a, b \in \mathbb{R}^+$;

5. Se $x \in \mathbb{R}$ então $x^2 \geq 0$ e $x^2 = 0$ quando $x = 0$. Mais geralmente, para $A_i \in \mathbb{R}^+_*$ e $x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, ...n$, tem-se $A_1x_1^2 + A_2x_2^2 + ... + A_nx_n^2 \geq 0$, em que a igualdade ocorre se, e somente se, $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$.

A primeira desigualdade diz respeito à propriedade transitiva dos números reais; a segunda desigualdade diz respeito à propridade aditiva dos números reais; a terceira desigualdade diz respeito à propriedade do cancelamento; a quarta desigualdade trata da propriedade da multiplicação; e por fim, a quinta desigualdade diz respeito ao quadrado de um número real, o qual é sempre maior ou igual a zero.

Na sequência serão apresentados alguns resultados que são demonstrados com o auxílio das desigualdades vistas acima. Eles também auxiliarão na demonstração das desigualdades presentes nos próximos capítulos.

Proposição 2.1. *A desigualdade*

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

é verdadeira para todo $x \in \mathbb{R}_*^+$. *A igualdade ocorre para* $x = 1$.

Demonstração. Para $x \in \mathbb{R}$, temos que $(x-1)^2 \geq 0$. Assim,

$$(x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 2x.$$

Logo, para $x > 0$, segue que

$$x^2 + 1 \geq 2x \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

Além disso, para $x = 1$, a igualdade é satisfeita. □

Proposição 2.2. *A desigualdade*

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

é verdadeira para $a, b \in \mathbb{R}_*^+$. *A igualdade ocorre se* $a = b$.

Demonstração. Para $a, b \in \mathbb{R}_*^+$, temos que $(a-b)^2 \geq 0$. Então,

$$(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab.$$

Como $a, b \in \mathbb{R}_*^+$, então $ab > 0$. Assim,

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

Agora, se $a - b = 0$, isto é, $a = b$, então $\frac{a}{b} = \frac{b}{a} = 1$ e, consequentemente, a igualdade é satisfeita. □

Teorema 2.1 (Desigualdade de Nesbitt)**.** *Para $a, b, c \in \mathbb{R}_*^+$, a desigualdade*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

é verdadeira. A igualdade ocorre se $a = b = c$.

Demonstração. Pela Proposição 2.2, segue que, para $a, b, c \in \mathbb{R}_*^+$,

$$\frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{a+b} \geq 2, \quad \frac{a+c}{c+b} + \frac{c+b}{a+c} \geq 2, \quad \frac{b+a}{a+c} + \frac{a+c}{b+a} \geq 2.$$

Então:

$$\frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{a+b} + \frac{a+c}{c+b} + \frac{c+b}{a+c} + \frac{b+a}{a+c} + \frac{a+c}{b+a} \geq 2+2+2$$

$$\left(\frac{a+b}{b+c} + \frac{a+c}{c+b}\right) + \left(\frac{b+c}{a+b} + \frac{a+c}{b+a}\right) + \left(\frac{c+b}{a+c} + \frac{b+a}{a+c}\right) \geq 6$$

$$\frac{2a+(b+c)}{b+c} + \frac{(a+b)+2c}{a+b} + \frac{(a+c)+2b}{a+c} \geq 6$$

$$\frac{2a}{b+c} + \frac{b+c}{b+c} + \frac{a+b}{a+b} + \frac{2c}{a+b} + \frac{a+c}{a+c} + \frac{2b}{a+c} \geq 6$$

$$\frac{2a}{b+c} + 1 + 1 + \frac{2c}{a+b} + 1 + \frac{2b}{a+c} \geq 6$$

$$\frac{2a}{b+c} + \frac{2c}{a+b} + \frac{2b}{a+c} \geq 3$$

$$2\left(\frac{a}{b+c} + \frac{c}{a+b} + \frac{b}{a+c}\right) \geq 3$$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{c}{a+b} + \frac{b}{a+c} \geq \frac{3}{2}.$$

Agora, se $a = b = c$, então $\frac{a+b}{b+c} = \frac{b+c}{a+b}$, $\frac{a+c}{c+b} = \frac{c+b}{a+c}$ e $\frac{b+a}{a+c} = \frac{a+c}{b+a}$ e, portanto, a igualdade é satisfeita. □

Proposição 2.3. *A desigualdade $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ é verdadeira para $a, b, c \in \mathbb{R}$. A igualdade ocorre se, e somente se, $a = b = c$.*

Demonstração. Para $a, b, c \in \mathbb{R}$, temos que

$$(a-b)^2 \geq 0,\ (b-c)^2 \geq 0,\ (c-a)^2 \geq 0,$$

de onde segue que

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$$

$$a^2 + b^2 - 2ab + b^2 + c^2 - 2bc + c^2 + a^2 - 2ca \geq 0$$

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \geq 0$$

$$2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ca)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

Além disso, a igualdade é satisfeita se, e somente se, $(a-b)^2 = 0,\ (b-c)^2 = 0$ e $(c-a)^2 = 0$, isto é, quando $a = b$, $b = c$ e $c = a$, ou seja, quando $a = b = c$. □

Proposição 2.4. *Para $a, b, c \in \mathbb{R}$, a desigualdade*

$$3(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

é verdadeira. A igualdade ocorre se, e somente se, $a = b = c$.

Demonstração. Pela Proposição 2.3, temos:

$$\begin{aligned} 3(ab + bc + ca) &= ab + bc + ca + 2ab + 2bc + 2ca \\ &\leq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a + b + c)^2 \\ &\leq a^2 + b^2 + c^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2) \\ &= 3(a^2 + b^2 + c^2). \end{aligned}$$

Além disso, a igualdade é satisfeita se, e somente se, $a = b = c$. □

Proposição 2.5. *Para $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $a, b, c > 1$, a desigualdade*

$$abc + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > a + b + c + \frac{1}{abc}$$

é verdadeira.

Demonstração. Como $b > 1$, segue que $\frac{1}{b} < 1$. Agora, como $a > 1$, temos que $a > 1 > \frac{1}{b}$ e, assim, $a > \frac{1}{b}$. Do mesmo modo, temos que $b > \frac{1}{c}$ e $c > \frac{1}{a}$.

Então:

$$\begin{aligned} a > \frac{1}{b} &\Rightarrow a - \frac{1}{b} > 0 \\ b > \frac{1}{c} &\Rightarrow b - \frac{1}{c} > 0 \\ c > \frac{1}{a} &\Rightarrow c - \frac{1}{a} > 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\left(a - \frac{1}{b}\right)\left(b - \frac{1}{c}\right)\left(c - \frac{1}{a}\right) > 0.$$

Consequentemente, usando a propriedade distributiva entre os números reais, obtemos

$$\begin{aligned} &\left(a - \frac{1}{b}\right)\left(b - \frac{1}{c}\right)\left(c - \frac{1}{a}\right) > 0 \\ &abc - \frac{ab}{a} - \frac{ac}{c} + \frac{a}{ac} - c + \frac{1}{a} + \frac{c}{bc} - \frac{1}{abc} > 0 \\ &abc - b - a + \frac{1}{c} - c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{abc} > 0 \\ &abc + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > a + b + c + \frac{1}{abc}. \end{aligned}$$

□

Proposição 2.6. *Para todo $x \in \mathbb{R}$, a desigualdade*

$$x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 > 0.$$

é verdadeira.

Demonstração. Temos dois casos a considerar em relação aos valores de x:

1. $x < 1$;
2. $x \geq 1$.

Considerando o primeiro caso, temos:

- $1 - x > 0$;
- $x^4 > x^9$ ou equivalentemente $x^4 - x^9 > 0$.

Então, $x^{12} > 0$, $x^4 - x^9 > 0$, $1 - x > 0$ e, portanto,

$$x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 = x^{12} + (x^4 - x^9) + (1 - x) > 0.$$

Vamos, agora, considerar o segundo caso. Note que

$$\begin{aligned} x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 &= x^8(x^4 - x) + (x^4 - x) + 1 \\ &= (x^4 - x)(x^8 + 1) + 1 \\ &= x(x^3 - 1)(x^8 + 1) + 1. \end{aligned}$$

Como $x \geq 1$, temos:
- $x^3 - 1 \geq 0$;
- $x^8 + 1 \geq 2$.

Então, $x(x^3 - 1)(x^8 + 1) \geq 0$ e, assim,

$$x(x^3 - 1)(x^8 + 1) + 1 \geq 1 > 0 \Leftrightarrow x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 > 0.$$

□

Proposição 2.7. *Para $x, y, z \in \mathbb{R}$, a desigualdade*

$$x^4 + y^4 + z^2 + 1 \geq 2x(xy^2 - x + z + 1)$$

é verdadeira. A igualdade ocorre se, e somente se, $x = y = z = 1$ ou $x = z = 1$ e $y = -1$.

Demonstração. Temos que:

$$x^4 + y^4 + z^2 + 1 - 2x(xy^2 - x + z + 1) = x^4 + y^4 + z^2 + 1 - 2x^2y^2 + 2x^2 - 2xz - 2x =$$

$$= (x^4 - 2x^2y^2 + y^4) + (z^2 - 2xz + x^2) + (x^2 - 2x + 1) = (x^2 - y^2)^2 + (z - x)^2 + (x - 1)^2 \geq 0.$$

Portanto, $x^4 + y^4 + z^2 + 1 \geq 2x(xy^2 - x + z + 1)$. Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, $(x^2 - y^2)^2 = 0$, $(z - x)^2 = 0$ e $(x - 1)^2 = 0$, o que equivale a $|x| = |y|$, $x = z$ e $x = 1$, isto é, ou $x = y = z = 1$ ou $x = z = 1$ e $y = -1$. $\square$

Proposição 2.8. *Para $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ tais que $x + y + z = 1$, a desigualdade*

$$xy + yz + 2zx \leq \frac{1}{2}$$

é verdadeira. A igualdade ocorre se, e somente se, $x = z = \dfrac{1}{2}$ e $y = 0$.

Demonstração. Como por hipótese, $x + y + z = 1$, demonstraremos a desigualdade acima provando que

$$2xy + 2yz + 4zx \leq (x + y + z)^2.$$

Pois bem, note que

$$\begin{aligned}(x + y + z)^2 &= (x + y)^2 + 2(x + y)z + z^2 \\ &= x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + z^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz.\end{aligned}$$

Portanto,

$$(x + y + z)^2 - 2xy - 2yz - 2zx = x^2 + y^2 + z^2 \geq 0.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}(x + y + z)^2 - 2xy - 2yz - 4zx &= (x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz) - 2xy - 2yz - 4zx \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - 2zx.\end{aligned}$$

Mas,

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2zx = x^2 - 2zx + z^2 + y^2 = (x - z)^2 + y^2 \geq 0.$$

Assim,

$$(x + y + z)^2 - 2xy - 2yz - 4zx = (x - z)^2 + y^2 \geq 0,$$

de onde obtemos:

$$2xy + 2yz + 4zx \leq (x + y + z)^2.$$

Logo, como $x+y+z=1$, segue que $(x+y+z)^2=1$ e

$$2xy+2yz+4zx \leq 1 \Leftrightarrow 2(xy+yz+2zx) \leq 1 \Leftrightarrow xy+yz+2zx \leq \frac{1}{2}.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $(x-z)^2=0$ e $y^2=0$, isto é, $x=z$ e $y=0$. Por conseguinte, usando que $x+y+z=1$, a igualdade ocorre se, e somente se, $x=z=\dfrac{1}{2}$ e $y=0$. $\square$

Proposição 2.9. *A desigualdade*

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \geq xy+yz+zx,$$

é verdadeira para $x,y,z \in \mathbb{R}_*^+$ *tais que* $x+y+z=3$*. A igualdade ocorre se, e somente se,* $x=y=z=1$*.*

Demonstração. Como $x+y+z=3$, segue que

$$\begin{aligned}
3(x+y+z) = 3\cdot 3 = 9 &= (x+y+z)^2 \\
&= (x+y)^2+2(x+y)z+z^2 \\
&= x^2+2xy+y^2+2xz+2yz+z^2 \\
&= x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx \\
&= x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx).
\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
&3x+3y+3z = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) \\
&\Leftrightarrow 2(xy+yz+zx) = 3x+3y+3z-x^2-y^2-z^2 \\
&\Leftrightarrow xy+yz+zx = \frac{1}{2}(3x-x^2+3y-y^2+3z-z^2).
\end{aligned}$$

Então,

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-(xy+yz+zx)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-\frac{1}{2}(3x-x^2)-$$
$$-\frac{1}{2}(3y-y^2+3z-z^2)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}+\frac{1}{2}(x^2-3x+y^2-3y+z^2-3z)=$$
$$=\frac{2}{2}\sqrt{x}+\frac{2}{2}\sqrt{y}+\frac{2}{2}\sqrt{z}+\frac{1}{2}(x^2-3x+y^2-3y+z^2-3z),$$

de onde segue que

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-(xy+yz+zx)=\frac{1}{2}\Bigg((x^2-3x+2\sqrt{x})+(y^2-3y+2\sqrt{y})+(z^2-3z+2\sqrt{z})\Bigg)=$$

$$=\frac{1}{2}\Bigg(\sqrt{x}(\sqrt{x}\cdot x-3\sqrt{x}+2)+\sqrt{y}(\sqrt{y}\cdot y-3\sqrt{y}+2)+\sqrt{z}(\sqrt{z}\cdot z-3\sqrt{z}+2)\Bigg)=$$
$$=\frac{1}{2}\Bigg(\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2(\sqrt{x}+2)+\sqrt{y}(\sqrt{y}-1)^2(\sqrt{y}+2)+\sqrt{z}(\sqrt{z}-1)^2(\sqrt{z}+2)\Bigg).$$

Agora, como $x, y, z \in \mathbb{R}_*^+$ temos:

- $\sqrt{x}>0$, $\sqrt{y}>0$, $\sqrt{z}>0$;
- $(\sqrt{x}-1)^2\geq 0$, $(\sqrt{y}-1)^2\geq 0$, $(\sqrt{z}-1)^2\geq 0$;
- $\sqrt{x}+2>0$, $\sqrt{y}+2>0$, $\sqrt{z}+2>0$,

Daí,

$$\frac{1}{2}\Bigg(\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2(\sqrt{x}+2)+\sqrt{y}(\sqrt{y}-1)^2(\sqrt{y}+2)+\sqrt{z}(\sqrt{z}-1)^2(\sqrt{z}+2)\Bigg)\geq 0$$

e, portanto, $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-(xy+yz+zx)\geq 0$, ou seja, $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\geq$ $\geq(xy+yz+zx)$.

A igualdade ocorre se, e somente se, $(\sqrt{x}-1)^2=0$, $(\sqrt{y}-1)^2=0$ e $(\sqrt{z}-1)^2=0$, isto é, se, e somente se, $x=y=z=1$. □

Importantes desigualdades matemáticas serão tratadas no próximo capítulo. É fundamental que o leitor tenha as desigualdades elementares em mente para obter um bom entendimento das mais complexas que virão.

3 Desigualdades Matemáticas

As desigualdades a serem estudadas neste capítulo são: Desigualdades entre as médias com duas e três variáveis, Desigualdades Geométricas, Desigualdades de Bernoulli, Cauchy-Schwarz, Triangular, Chebyshev e Surányi. Além disso, provaremos o caso geral das Desigualdades entre as médias, as Desigualdades de Jensen, Young e Hölder, a generalização da Desigualdade de Cauchy-Schwarz e a generalização das Desigualdades entre as médias.

As principais referências para este capítulo são [1], [3], [5] e [9].

3.1 Desigualdades entre as médias com duas e três variáveis

Nesta seção, serão enunciados e demonstrados teoremas relativos às desigualdades entre médias quadrática (QM), aritmética (AM), geométrica (GM) e harmônica (HM) com duas e três variáveis.

Teorema 3.1. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}_*^+$,*

$$QM = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}, \ AM = \frac{a+b}{2}, \ GM = \sqrt{ab} \ \ e \ \ HM = \frac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}.$$

Então,

$$QM \geq AM \geq GM \geq HM.$$

As igualdades ocorrem se, e somente se, $a = b$.

Demonstração. Primeiramente, demonstraremos que $QM \geq AM$. Para $a, b \in \mathbb{R}_*^+$ temos:

$$\begin{aligned}
(a-b)^2 \geq 0 &\Leftrightarrow a^2+b^2-2ab \geq 0\\
&\Leftrightarrow a^2+b^2 \geq 2ab\\
&\Leftrightarrow 2(a^2+b^2) \geq a^2+b^2+2ab\\
&\Leftrightarrow 2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2\\
&\Leftrightarrow \frac{a^2+b^2}{2} \geq \frac{(a+b)^2}{4}\\
&\Leftrightarrow \frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\\
&\Leftrightarrow \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}\\
&\Leftrightarrow \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}.
\end{aligned}$$

Portanto, $QM \geq AM$. A igualdade se verifica se, e somente se, $(a-b)^2 = 0$, isto é, $a = b$.

Demonstraremos agora que $AM \geq GM$. Com efeito, para $a, b \in \mathbb{R}_*^+$, temos:

$$\begin{aligned}
(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0 &\Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0\\
&\Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab}\\
&\Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.
\end{aligned}$$

Note que a igualdade se verifica se, e somente se, $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = 0$, isto é, $a = b$.

Por fim, provaremos que $GM \geq HM$. De fato, para $a, b \in \mathbb{R}_*^+$, temos:

$$\begin{aligned}
(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad a+b-2\sqrt{ab} \geq 0\\
&\Leftrightarrow \quad a+b \geq 2\sqrt{ab}\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{a+b}{a+b} \geq \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\\
&\Leftrightarrow \quad 1 \geq \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{ab}} \geq \frac{2}{a+b}\\
&\Leftrightarrow \frac{\sqrt{ab}}{ab} \geq \frac{2}{a+b}\\
&\Leftrightarrow \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}\\
&\Leftrightarrow \sqrt{ab} \geq \frac{\frac{2}{1}}{\frac{a+b}{ab}}\\
&\Leftrightarrow \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{a+b}{ab}}\\
&\Leftrightarrow \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.
\end{aligned}$$

A igualdade se verifica se, e somente se, $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = 0$, ou melhor, $a = b$. $\square$

Tal como fizemos no Teorema 3.1, podemos definir as médias quadrática, aritmética, geométrica e harmônica com três variáveis, como:

$$QM = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}},\ AM = \frac{a+b+c}{3},\ GM = \sqrt[3]{abc}\ \ e\ \ HM = \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}. \tag{3.1}$$

Assim, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.2. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}_*^+$ e QM, AM, GM e HM definidos em* (3.1). *Então,*

$$QM \geq AM \geq GM \geq HM.$$

Além disso, as igualdades ocorrem se, e somente se, $a = b = c$.

Demonstração. Primeiramente, demonstraremos que $QM \geq AM$. Sejam, então, $a, b, c \in \mathbb{R}_*^+$. Pela Proposição 2.3, segue que $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$. Portanto,

$$3(a^2+b^2+c^2) = a^2+b^2+c^2+2(a^2+b^2+c^2)$$

$$3(a^2+b^2+c^2) \geq a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$

$$\begin{aligned}3(a^2+b^2+c^2) &\geq (a+b+c)^2\\ \frac{a^2+b^2+c^2}{3} &\geq \frac{(a+b+c)^2}{9}\\ \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} &\geq \sqrt{\frac{(a+b+c)^2}{9}}\\ \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} &\geq \frac{a+b+c}{3},\end{aligned}$$

de onde segue que $QM \geq AM$.

A igualdade se verifica se, e somente se, $a = b = c$, conforme a demonstração da Proposição 2.3.

As demonstrações de que $AM \geq GM$ e $GM \geq HM$ serão feitas na Seção 3.4, usando o Princípio de Indução Finita (veja o Teorema 3.9). □

A seguir, exibiremos alguns resultados que utilizam as desigualdades entre as médias nas suas demonstrações.

Proposição 3.1. *Para $x, y, z \in \mathbb{R}_*^+$ tais que $x + y + z = 1$, a desigualdade*

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq 1$$

é verdadeira. A igualdade ocorre se, e somente se, $x = y = z = \dfrac{1}{3}$.

Demonstração. Temos:

$$\begin{aligned}\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} &= \frac{1}{2}\frac{xy}{z} + \frac{1}{2}\frac{xy}{z} + \frac{1}{2}\frac{yz}{x} + \frac{1}{2}\frac{yz}{x} + \frac{1}{2}\frac{zx}{y} + \frac{1}{2}\frac{zx}{y}\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{zx}{y} + \frac{xy}{z}\right)\end{aligned}$$

Pelo Teorema 3.1 segue que

$$\frac{1}{2}\left(\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x}\right) \geq \sqrt{\frac{xy}{z}\cdot\frac{yz}{x}} = \sqrt{y^2} = y.$$

Do mesmo modo, segue que

$$\frac{1}{2}\left(\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}\right) \geq \sqrt{\frac{yz}{x}\cdot\frac{zx}{y}} = \sqrt{z^2} = z \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}\left(\frac{zx}{y} + \frac{xy}{z}\right) \geq \sqrt{\frac{zx}{y}\cdot\frac{xy}{z}} = \sqrt{x^2} = x.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y} &= \frac{1}{2}\left(\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}\right)\\ &\geq y+z+x\\ &= x+y+z\\ &= 1.\end{aligned}$$

Agora, de acordo com o Teorema 3.1, segue que a igualdade ocorre se, e somente se, $\frac{xy}{z}=\frac{yz}{x}=\frac{zx}{y}$, o que implica em $x=y=z$. Mas, por hipótese, $x+y+z=1$. Assim, a igualdade ocorre se, e somente se, $x=y=z=\frac{1}{3}$. □

Proposição 3.2. *Para $a,b,c\in\mathbb{R}_*^+$, a desigualdade*

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right)\geq 8$$

é verdadeira. A igualdade ocorre se, e somente se, $a=b=c$.

Demonstração. Pela desigualdade $AM\geq GM$, entre as médias aritmética e geométrica ($AM\geq GM$), no Teorema 3.1, e pelo fato de que $a,b,c\in\mathbb{R}_*^+$ e, portanto, $\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\in\mathbb{R}_*^+$, segue que:

$$a+\frac{1}{b}\geq 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{b}}=2\sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$b+\frac{1}{c}\geq 2\sqrt{b\cdot\frac{1}{c}}=2\sqrt{\frac{b}{c}}$$

$$c+\frac{1}{a}\geq 2\sqrt{c\cdot\frac{1}{a}}=2\sqrt{\frac{c}{a}}.$$

Então,

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right)\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot 2\sqrt{\frac{b}{c}}\cdot 2\sqrt{\frac{c}{a}}=8\sqrt{\frac{abc}{abc}}=8.$$

Agora, pela demonstração do Teorema 3.1, temos que a igualdade ocorre se, e somente se, $a = \frac{1}{b}$, $b = \frac{1}{c}$ e $c = \frac{1}{a}$, o que implica em $a \cdot b = 1$, $b \cdot c = 1$ e $c \cdot a = 1$, de onde concluímos que $a = b = c$. $\square$

Proposição 3.3. *Para $a, b, c \in \mathbb{R}_*^+$, a desigualdade*

$$\frac{ab}{a+b+2c} + \frac{bc}{b+c+2a} + \frac{ca}{c+a+2b} \leq \frac{a+b+c}{4}$$

é verdadeira.

Demonstração. Pela desigualdade entre as médias aritmética e harmônica, $AM \geq HM$, isto é

$$\frac{a+b}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \Leftrightarrow \frac{a+b}{ab} \geq \frac{4}{a+b} \Leftrightarrow \frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{a+b}{ab},$$

temos que:

$$\begin{aligned}
\frac{ab}{a+b+2c} &= \frac{ab}{(a+c)+(b+c)} \\
&= \frac{ab}{1}\frac{1}{(a+c)+(b+c)} \\
&\leq ab \cdot \frac{1}{4}\frac{(a+c)+(b+c)}{(a+c)(b+c)} \\
&= \frac{ab}{4} \cdot \left[\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c}\right].
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\frac{bc}{b+c+2a} \leq \frac{bc}{4} \cdot \left[\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c}\right]$$

e

$$\frac{ca}{c+a+2b} \leq \frac{ca}{4} \cdot \left[\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b}\right].$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{ab}{a+b+2c}+\frac{bc}{b+c+2a}+\frac{ca}{c+a+2b} &\leq \frac{ab}{4}\cdot\left[\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right]+\frac{bc}{4}\cdot\left[\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}\right]\\
&+\frac{ca}{4}\cdot\left[\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}\right]\\
&=\frac{1}{4}\left[\frac{ab}{a+c}+\frac{ab}{b+c}+\frac{bc}{a+b}+\frac{bc}{a+c}+\frac{ca}{b+c}+\frac{ca}{a+b}\right]\\
&=\frac{1}{4}\left[\frac{ab+bc}{a+c}+\frac{ab+ca}{b+c}+\frac{bc+ca}{a+b}\right]\\
&=\frac{1}{4}\left[\frac{b(a+c)}{a+c}+\frac{a(b+c)}{b+c}+\frac{c(b+a)}{a+b}\right]\\
&=\frac{1}{4}[b+a+c]\\
&=\frac{a+b+c}{4}.
\end{aligned}$$

Agora, a igualdade ocorre se, e somente se, $a+c=b+c, a+b=a+c$ e $b+c=a+b$, isto é, $a=b=c$. $\square$

Proposição 3.4. *A desigualdade $ab+bc+ca \geq 9abc$ é verdadeira, para $a,b,c \in \mathbb{R}_*^+$ tais que $a+b+c=1$. A igualdade ocorre se, e somente se, $a=b=c$.*

Demonstração. Sabendo que $AM \geq GM$ pelo Teorema 3.2, isto é,

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \Leftrightarrow a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$$

e que, neste caso, $a+b+c=1$, temos que:

$$\begin{aligned}
ab+bc+ca &= (ab+bc+ca).1\\
&= (ab+bc+ca)(a+b+c)\\
&\geq 3\sqrt[3]{(ab)(bc)(ca)}\cdot 3\sqrt[3]{abc}\\
&= 9\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\cdot\sqrt[3]{abc}\\
&= 9\sqrt[3]{a^3b^3c^3}=9abc.
\end{aligned}$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $a=b=c$. Mas usando a hipótese de que $a+b+c=1$, concluímos que a igualdade ocorre se, e somente se, $a=b=c=\frac{1}{3}$. $\square$

Proposição 3.5. *A desigualdade*

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\geq\frac{3}{2},$$

é verdadeira para $a, b, c \in \mathbb{R}_*^+$ tais que $a^2+b^2+c^2=3$. A igualdade ocorre se, e somente se, $a=b=c=1$.

Demonstração. Pelo Teorema 3.2, temos que $AM \geq HM$, isto é,

$$\frac{x+y+z}{3}\geq\frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}},\quad \text{para } x,y,z\in\mathbb{R}_*^+.$$

Portanto, para $x=\dfrac{1}{1+ab}$, $y=\dfrac{1}{1+bc}$ e $z=\dfrac{1}{1+ca}$, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca} &\geq \frac{9}{\frac{1}{\frac{1}{1+ab}}+\frac{1}{\frac{1}{1+bc}}+\frac{1}{\frac{1}{1+ca}}}\\
&= \frac{9}{1+ab+1+bc+1+ca}\\
&= \frac{9}{3+ab+bc+ca}.
\end{aligned}$$

Agora, pela Proposição 2.3, obtemos:

$$\frac{9}{3+ab+bc+ca}\geq\frac{9}{3+(a^2+b^2+c^2)}=\frac{9}{3+3}=\frac{3}{2}.$$

Logo,

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\geq\frac{3}{2}.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $ab=bc=ca$, isto é, $a=b=c$. Mas, como $a^2+b^2+c^2=3$, então a igualdade ocorre se, e somente se, $a=b=c=1$. □

Proposição 3.6. *Para $a,b,c\in\mathbb{R}_*^+$, a desigualdade*

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}}+\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}}\geq 3\sqrt{2}$$

é válida. A igualdade ocorre se, e somente se, $a = b = c$.

Demonstração. Pelos Teoremas 3.1 e 3.2, temos que:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} &\geq 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{a+b}{c}} \cdot \sqrt{\frac{b+c}{a}} \cdot \sqrt{\frac{c+a}{b}}} \\
&= 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}}} \\
&= 3\sqrt[6]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}} \\
&\geq 3\sqrt[6]{\frac{2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca}}{abc}} \\
&= 3\sqrt[6]{\frac{8\sqrt{a^2b^2c^2}}{abc}} \\
&= 3\sqrt[6]{\frac{8\sqrt{(abc)^2}}{abc}} \\
&= 3\sqrt[6]{\frac{8abc}{abc}} \\
&= 3\sqrt[6]{8} \\
&= 3\sqrt[6]{2^3} \\
&= 3\sqrt{2},
\end{aligned}$$

o que prova o desejado. Além disso, pelas demonstrações dos Teoremas 3.1 e 3.2, a igualdade ocorre se, e somente se, $a = b = c$. □

Proposição 3.7. *A desigualdade*

$$\frac{a^2+b^2}{c} + \frac{b^2+c^2}{a} + \frac{c^2+a^2}{b} \geq 2$$

é verdadeira para $a, b, c \in \mathbb{R}_*^+$ tais que $a + b + c = 1$. A igualdade ocorre se, e somente se, $a = b = c = \dfrac{1}{3}$.

Demonstração. Para $a, b, c \in \mathbb{R}_*^+$ segue que

$$(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$(b-c)^2 \geq 0 \Rightarrow b^2 + c^2 \geq 2bc$$

$$(c-a)^2 \geq 0 \Rightarrow c^2 + a^2 \geq 2ca.$$

Pelas desigualdades acima e usando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica $(AM \geq GM)$, vem que:

$$\begin{aligned}
\frac{a^2+b^2}{c} + \frac{b^2+c^2}{a} + \frac{c^2+a^2}{b} &\geq \frac{2ab}{c} + \frac{2bc}{a} + \frac{2ca}{b} \\
&= 2\left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}\right) \\
&= 2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{ab}{c} + \frac{ca}{b}\right)\right] \\
&\geq 2\left[\frac{1}{2}\left(2\sqrt{\frac{abbc}{ca}}\right) + \frac{1}{2}\left(2\sqrt{\frac{bcca}{ab}}\right) + \frac{1}{2}\left(2\sqrt{\frac{abca}{cb}}\right)\right] \\
&= 2(\sqrt{b^2} + \sqrt{c^2} + \sqrt{a^2}) \\
&= 2(b+c+a) = 2(a+b+c) = 2 \cdot 1 = 2.
\end{aligned}$$

Ademais, a igualdade ocorre se, e somente se, $\dfrac{ab}{c} = \dfrac{bc}{a} = \dfrac{ca}{b}$, isto é, $a = b = c$. Agora, através da hipótese de que $a+b+c=1$, vemos que a igualdade ocorre se, e somente se, $a = b = c = \dfrac{1}{3}$. □

Proposição 3.8. *Para $a, b, c \in \mathbb{R}_*^+$ tais que $abc = 1$, é verdadeira a seguinte desigualdade:*

$$\frac{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}} \geq 2.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $a = b = c = 1$.

Demonstração. Usando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica

$(AM \geq GM)$ e a hipótese de que $abc = 1$, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}} &= \frac{(a^2+bc)+(b^2+ca)+(c^2+ab)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}} \geq \\
\geq \frac{2\sqrt{a^2bc}+2\sqrt{b^2ca}+2\sqrt{c^2ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}} &= \frac{2(\sqrt{a^2bc}+\sqrt{b^2ca}+\sqrt{c^2ab})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \\
= \frac{2(\sqrt{a\cdot(abc)}+\sqrt{b\cdot(bca)}+\sqrt{c\cdot(cab)})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}} &= \frac{2(\sqrt{a\cdot 1}+\sqrt{b\cdot 1}+\sqrt{c\cdot 1})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \\
= \frac{2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}} &= 2\cdot 1 = 2.
\end{aligned}$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, $a^2 = bc, b^2 = ca$ e $c^2 = ab$, isto é, $a^3 = abc = 1, b^3 = cab = 1$ e $c^3 = abc = 1$. Por conseguinte, a igualdade ocorre se, e somente se, $a^3 = b^3 = c^3 = 1$, o que implica em $a = b = c = 1$. □

Proposição 3.9. *A desigualdade*

$$\frac{9abc}{2(a+b+c)} \leq \frac{ab^2}{a+b} + \frac{bc^2}{b+c} + \frac{ca^2}{c+a} \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

é verdadeira para $a, b, c \in \mathbb{R}^+_*$. *A igualdade ocorre se, e somente se,* $a = b = c$.

Demonstração. Usando a desigualdade entre as médias aritmética e harmônica e a desigualdade estabelecida na Proposição 2.3, obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{ab^2}{a+b} + \frac{bc^2}{b+c} + \frac{ca^2}{c+a} &= \frac{1}{\frac{1}{b^2}+\frac{1}{ab}} + \frac{1}{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{bc}} + \frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{ca}} \\
&\leq \frac{b^2+ab}{4} + \frac{c^2+bc}{4} + \frac{a^2+ca}{4} \\
&= \frac{a^2+b^2+c^2+(ab+bc+ca)}{4} \\
&\leq \frac{a^2+b^2+c^2+(a^2+b^2+c^2)}{4} \\
&= \frac{2(a^2+b^2+c^2)}{4} \\
&= \frac{a^2+b^2+c^2}{2}.
\end{aligned}$$

Agora, usando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica ($AM \geq GM$) para três variáveis, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{ab^2}{a+b}+\frac{bc^2}{b+c}+\frac{ca^2}{c+a} &\geq 3\sqrt[3]{\frac{ab^2}{a+b}\cdot\frac{bc^2}{b+c}\cdot\frac{ca^2}{c+a}}\\
&= 3\sqrt[3]{\frac{a^3b^3c^3}{(a+b)(b+c)(c+a)}}\\
&= 3\sqrt[3]{\frac{(abc)^3}{(a+b)(b+c)(c+a)}}\\
&= \frac{3abc}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}}.
\end{aligned}$$

Ainda, como $\dfrac{1}{a+b+c} \leq \dfrac{1}{3\sqrt[3]{abc}}$ e, portanto, $\dfrac{1}{\sqrt[3]{abc}} \geq \dfrac{3}{a+b+c}$, concluímos que

$$\frac{3abc}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}} \geq 3abc\cdot\frac{3}{(a+b)+(b+c)+(c+a)} = \frac{9abc}{2(a+b+c)}.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $a=b=c$. □

Proposição 3.10. *Para $a,b,c \in \mathbb{R}_*^+$, a seguinte desigualdade*

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geq a+b+c$$

é verdadeira. A igualdade ocorre se, e somente se, $a=b=c$.

Demonstração. Usando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica ($AM \geq GM$), temos:

$$\frac{\frac{a^2}{b}+b}{2} \geq \sqrt{\frac{a^2\cdot b}{b}} \Leftrightarrow \frac{a^2}{b}+b \geq 2\sqrt{a^2} = 2a.$$

De modo análogo, segue que

$$\frac{b^2}{c}+c \geq 2b \qquad \text{e} \qquad \frac{c^2}{a}+a \geq 2c.$$

Portanto,

$$\frac{a^2}{b} + b + \frac{b^2}{c} + c + \frac{c^2}{a} + a \geq 2a + 2b + 2c,$$

de onde segue que

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c.$$

Agora, a igualdade ocorre se, e somente se, $a = b, b = c$ e $c = a$, isto é, se, e somente se $a = b = c$. $\square$

Proposição 3.11. *A desigualdade*

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c,$$

é verdadeira para $a, b, c \in \mathbb{R}_*^+$. *A igualdade ocorre se, e somente se,* $a = b = c$.

Demonstração. Usando as desigualdades entre as médias aritmética e geométrica $(AM \geq GM)$, obtemos:

$$\frac{\frac{a^3}{bc} + b + c}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{a^3}{bc} \cdot b \cdot c} \Leftrightarrow \frac{a^3}{bc} + b + c \geq 3\sqrt[3]{a^3} = 3a,$$

visto que $a, b, c \in \mathbb{R}_*^+$.

De modo análogo temos:

$$\frac{b^3}{ca} + c + a \geq 3b \qquad \text{e} \qquad \frac{c^3}{ab} + a + b \geq 3c.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
&\frac{a^3}{bc} + b + c + \frac{b^3}{ca} + c + a + \frac{c^3}{ab} + a + b \geq 3a + 3b + 3c \\
&\Leftrightarrow \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} + 2a + 2b + 2c \geq 3a + 3b + 3c \\
&\Leftrightarrow \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c.
\end{aligned}$$

Além disso, a igualdade se verifica se, e somente se, $a = b = c$. $\square$

3.2 Desigualdades Geométricas

Nesta seção, serão apresentadas as desigualdades geométricas, que têm como variáveis as medidas dos lados de um triângulo dado. Porém, outras variáveis também podem aparecer, como a medida dos ângulos, por exemplo. Para demonstrar tais desigualdades, usamos as desigualdades entre as médias, como veremos.

Sejam a, b e c as medidas dos lados de um triângulo e sejam

$$x = \frac{a+c-b}{2},\ y = \frac{a+b-c}{2},\ z = \frac{c+b-a}{2}, \qquad a, b, c > 0.$$

Então,

$$x + y = \frac{2a}{2} = a,\ y + z = \frac{2b}{2} = b,\ z + x = \frac{2c}{2} = c.$$

Dessa forma, podemos afirmar que existem números reais positivos x, y, z tais que $a = x + y, b = y + z$ e $c = z + x$. Esta substituição é conhecida como *Substituição de Ravi*.

A seguir, veremos alguns resultados sobre desigualdades geométricas. A variável s representará o semiperímetro do triângulo de lados a, b e c, isto é, $s = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Proposição 3.12 (Desigualdade de Nesbitt)**.** *Sejam a, b e c as medidas dos lados de um triângulo. A seguinte desigualdade é verdadeira:*

$$\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

A igualdade $\dfrac{3}{2} = \dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b}$ ocorre se, e somente se, $a = b = c$.

Demonstração. Como a, b e c são as medidas dos lados de um triângulo, segue que $a + b > c, b + c > a$ e $a + c > b$. Portanto,

$$2(a+b) = (a+b) + (a+b) > a + b + c \Leftrightarrow (a+b) > \frac{a+b+c}{2} = s.$$

Do mesmo modo, temos:

$$(b+c) > s \qquad \text{e} \qquad (a+c) > s.$$

Logo,

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}<\frac{a}{s}+\frac{b}{s}+\frac{c}{s}=\frac{a+b+c}{s}=\frac{2s}{s}=2.$$

Provemos agora, a primeira desigualdade. Para tanto, tomemos $b+c=x,\ a+c=$ $=y$ e $a+b=z$.

Assim,

$$2a+c+b=y+z\Rightarrow 2a=y+z-(c+b)\Rightarrow a=\frac{y+z-(c+b)}{2}=\frac{y+z-x}{2}.$$

De forma análoga, obtemos:

$$b=\frac{z+x-y}{2}\qquad \text{e}\qquad c=\frac{x+y-z}{2}.$$

Agora, usando a Proposição 2.2 do Capítulo 1, temos:

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}&=\frac{y+z-x}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{z+x-y}{2}\cdot\frac{1}{y}+\frac{x+y-z}{2}\cdot\frac{1}{z}\\&=\frac{y+z-x}{2x}+\frac{z+x-y}{2y}+\frac{x+y-z}{2z}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{x}-1+\frac{z}{y}+\frac{x}{y}-1+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}-1\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}-3\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)+\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)-3\right)\\&\geq\frac{1}{2}(2+2+2-3)\\&=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, $x=y=z$, o que implica em $a=b=c$. □

Proposição 3.13. *A desigualdade*

$$\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}\geq\frac{9}{s},$$

é verdadeira sempre que a,b e c são as medidas dos lados de um triângulo. A *igualdade ocorre se, e somente se, $a = b = c$.*

Demonstração. Usando a desigualdade entre as médias aritmética e harmônica $(AM \geq HM)$, temos:

$$\frac{\dfrac{1}{s-a}+\dfrac{1}{s-b}+\dfrac{1}{s-c}}{3} \geq \frac{3}{s-a+s-b+s-c},$$

de onde segue que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c} &\geq \frac{9}{3s-(a+b+c)} \\
&= \frac{9}{3(\dfrac{a+b+c}{2})-(a+b+c)} \\
&= \frac{9}{\dfrac{a+b+c}{2}} \\
&= \frac{9}{s}.
\end{aligned}$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $s-a = s-b, s-b = s-c$ e $s-c = s-a$, isto é, $a = b = c$, ou seja, a igualdade ocorre somente no triângulo equilátero. □

Proposição 3.14. *A desigualdade $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc$ é verdadeira, em que a, b e c são as medidas dos lados de um triângulo. A igualdade ocorre se, e somente se, $a = b = c$.*

Demonstração. Para $a, b, c \in \mathbb{R}_*^+$, temos $(a-b)^2 \geq 0$, $(b-c)^2 \geq 0$ e $(c-a)^2 \geq 0$.

Assim,

$$a^2 \geq a^2 - (b-c)^2 = a^2 - b^2 - c^2 + 2bc = (a+b-c)(a+c-b).$$

Analogamente,

$$b^2 \geq b^2 - (c-a)^2 = b^2 - a^2 - c^2 + 2ca = (b+a-c)(b+c-a)$$

e

$$c^2 \geq c^2 - (a-b)^2 = c^2 - a^2 - b^2 + 2ab = (c+a-b)(c+b-a).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} a^2b^2c^2 &\geq (a+b-c)(a+c-b)(b+a-c)(b+c-a)(c+a-b)(c+b-a) \\ &= (a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2, \end{aligned}$$

de onde segue que

$$abc = \sqrt{a^2b^2c^2} \geq \sqrt{(a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2} = (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

Agora, a igualdade ocorre se, e somente se, $a^2 = a^2 - (b-c)^2$, $b^2 = b^2 - (c-a)^2$ e $c^2 = c^2 - (a-b)^2$, isto é, a igualdade ocorre se, e somente se, $a = b = c$, ou seja, quando o triângulo é equilátero. □

Proposição 3.15. *Sejam a, b e c as medidas dos lados de um triângulo. A seguinte desigualdade é verdadeira:*

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca).$$

Demonstração. Usando a Substituição de Ravi, temos:

$$a = x + y,\ b = y + z \text{ e } c = z + x, \quad x, y, z > 0.$$

Então,

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= (x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 \\ &= x^2 + y^2 + 2xy + y^2 + z^2 + 2yz + z^2 + x^2 + 2zx \\ &= 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2yz + 2zx \\ &= 2(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx) \\ &< 2(x^2 + y^2 + z^2 + 3xy + 3yz + 3zx) \\ &= 2((x+y)(y+z) + (y+z)(z+x) + (z+x)(x+y)) \\ &= 2(ab + bc + ca), \end{aligned}$$

de onde segue o resultado. □

Proposição 3.16. *A desigualdade*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}$$

é válida quando a, b e c são as medidas dos lados de um triângulo. A igualdade ocorre se, e somente se, $a=b=c$.

Demonstração. Usando a desigualdade entre as médias aritmética e harmônica ($AM \geq HM$), temos:

$$\frac{\dfrac{1}{a+b-c}+\dfrac{1}{b+c-a}}{2}\geq\frac{2}{a+b-c+b+c-a}=\frac{2}{2b}=\frac{1}{b}.$$

Analogamente,

$$\frac{\dfrac{1}{a+b-c}+\dfrac{1}{c+a-b}}{2}\geq\frac{1}{a}$$

e

$$\frac{\dfrac{1}{b+c-a}+\dfrac{1}{c+a-b}}{2}\geq\frac{1}{c}.$$

Portanto,

$$\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{a+b-c}+\frac{2}{b+c-a}+\frac{2}{c+a-b}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}\right)+\left(\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{c+a-b}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}\right)\right)\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $a=b=c$, ou seja, quando o triângulo é equilátero. ☐

Proposição 3.17. *Sejam a,b e c as medidas dos lados de um triângulo, e α,β e γ os ângulos respectivos deste triângulo. A seguinte desigualdade é verdadeira:*

$$\frac{\pi}{3}\leq\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c}<\frac{\pi}{2}.$$

A igualdade $\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a+b+c}$ *ocorre se, e somente se,* $a = b = c$.

Demonstração. Primeiramente, demonstraremos que $\dfrac{\pi}{3} \leq \dfrac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a+b+c}$. Para isso, assumiremos, sem perda de generalidade, $a \geq b \geq c$. Assim, $\alpha \geq \beta \geq \gamma$, e $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Portanto, temos:

$$a - b \geq 0 \quad \text{e} \quad \alpha - \beta \geq 0$$

$$b - c \geq 0 \quad \text{e} \quad \beta - \gamma \geq 0$$

$$c - a \leq 0 \quad \text{e} \quad \gamma - \alpha \leq 0,$$

de onde segue que

$$(a-b)(\alpha - \beta) \geq 0$$

$$(b-c)(\beta - \gamma) \geq 0$$

$$(c-a)(\gamma - \alpha) \geq 0.$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}
&(a-b)(\alpha-\beta) + (b-c)(\beta-\gamma) + (c-a)(\gamma-\alpha) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow a\alpha - a\beta - b\alpha + b\beta + b\beta - b\gamma - c\beta + c\gamma + c\gamma - c\alpha - a\gamma + a\alpha \geq 0 \\
&\Leftrightarrow 2a\alpha + 2b\beta + 2c\gamma - \alpha(b+c) - \beta(a+c) - \gamma(a+b) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow 2(a\alpha + b\beta + c\gamma) \geq \alpha(b+c) + \beta(a+c) + \gamma(a+b) \\
&\Leftrightarrow 3a\alpha + 3b\beta + 3c\gamma \geq a\alpha + \alpha(b+c) + b\beta + \beta(a+b) + c\gamma + \gamma(a+b) \\
&\Leftrightarrow 3(a\alpha + b\beta + c\gamma) \geq \alpha(a+b+c) + \beta(a+b+c) + \gamma(a+b+c) \\
&\Leftrightarrow 3(a\alpha + b\beta + c\gamma) \geq (a+b+c)(\alpha+\beta+\gamma) \\
&\Leftrightarrow \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a+b+c} \geq \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} \\
&\Leftrightarrow \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a+b+c} \geq \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $a = b = c$.

Mostraremos, agora, que $\dfrac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a+b+c} < \dfrac{\pi}{2}$.

De fato, como a, b e c são medidas dos lados de um triângulo, segue que

$$b + c > a \Rightarrow a + b + c > 2a$$

$$a + b > c \Rightarrow a + b + c > 2c$$

$$c + a > b \Rightarrow a + b + c > 2b.$$

Assim,

$$\alpha(a + b + c) > 2a\alpha$$

$$\beta(a + b + c) > 2b\beta$$

$$\gamma(a + b + c) > 2c\gamma$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta + \gamma)(a + b + c) &= \alpha(a + b + c) + \beta(a + b + c) + \gamma(a + b + c)\\ &> 2a\alpha + 2b\beta + 2c\gamma\\ &= 2(a\alpha + b\beta + c\gamma),\end{aligned}$$

de onde se obtém:

$$\alpha + \beta + \gamma > \frac{2(a\alpha + b\beta + c\gamma)}{a + b + c} \Leftrightarrow \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a + b + c} < \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

□

3.3 Desigualdades de Bernoulli, Cauchy-Schwarz, Triangular, Chebyshev e Surányi

As desigualdades apresentadas e demonstradas nesta seção são muito importantes e estão entre as desigualdades mais conhecidas. Elas envolvem várias variáveis e também ajudam na demonstração de outras desigualdades. Além disso, para demonstrá-las, usaremos as desigualdades já vistas neste trabalho, como por exemplo, as Desigualdades entre as médias.

Inicialmente, apresentaremos a Desigualdade de Bernoulli, a qual será provada com o auxílio do Princípio de Indução Finita. Na sequência, exibiremos uma consequência desta.

Teorema 3.3 (Desigualdade de Bernoulli)**.** *Sejam $x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n$ tais que $x_i > -1$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ e têm o mesmo sinal. Então,*

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \ldots (1 + x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n. \tag{3.2}$$

Demonstração. Provaremos este resultado usando o Princípio de Indução Finita.

Para $n = 1$, temos: $1 + x_1 \geq 1 + x_1$.

Suponhamos que, para algum k natural maior do que 1 e para quaisquer $x_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, ..., k\}$, com o mesmo sinal, seja verdadeira a desigualdade (3.2), ou seja,

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \ldots (1 + x_k) \geq 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_k.$$

Para completar a prova, vamos verificar que o resultado é válido para $n = k + 1$. Sejam, então, $x_i > -1, i \in \{1, \ldots, k + 1\}$, números reais quaisquer com o mesmo sinal. Então, como $x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}$ têm o mesmo sinal, segue que:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)x_{k+1} \geq 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
(1 + x_1)(1 + x_2) \ldots (1 + x_{k+1}) &\geq (1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_k)(1 + x_{k+1}) \\
&= (1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_k) + x_{k+1} + x_1x_{k+1} + x_2x_{k+1} + \ldots \\
&\quad \cdots + x_kx_{k+1} \\
&= 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1} + (x_1 + x_2 + \cdots + x_k)x_{k+1} \\
&\geq 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1}.
\end{aligned}$$

Logo, pelo Princípio de Indução Finita, para $x_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, ..., n\}$, tais que $x_i > -1$ e têm o mesmo sinal, a desigualdade (3.2) é verdadeira. □

Corolário 3.1. *(Desigualdade de Bernoulli): Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $x > -1$. Então,*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Demonstração. Pelo Teorema 3.3, fazendo $x_i = x$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, temos:

$$(1+x)(1+x)\ldots(1+x) \geq 1 + \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n-vezes}$$

ou seja,

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

□

A seguir, será apresentada a Desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Teorema 3.4 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** *Sejam* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *e* $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *números reais. Então,*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2,$$

isto é,

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, as sequências $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *e* $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *forem proporcionais, isto é,* $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \cdots = \dfrac{a_n}{b_n}$.

Demonstração. Consideremos o trinômio quadrado

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i x)^2 = \sum_{i=1}^{n}(a_i^2 - 2a_i b_i x + b_i^2 x^2) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 2x\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + x^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

Como

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i x)^2 \geq 0, \tag{3.3}$$

então o delta da equação do segundo grau (3.3) deve ser não-positivo, ou seja,

$$(-2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 - 4(\sum_{i=1}^{n} b_i^2)(\sum_{i=1}^{n} a_i^2) \leq 0$$

$$4(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 \leq 4(\sum_{i=1}^{n} b_i^2)(\sum_{i=1}^{n} a_i^2)$$

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^{n} b_i^2)(\sum_{i=1}^{n} a_i^2).$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $a_i - b_i x = 0$, para todo $i = 1, 2, ..., n$, isto é, se, e somente se, $x = \dfrac{a_i}{b_i}$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, o que é equivalente a $x = \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \cdots = \dfrac{a_n}{b_n}$. □

Serão apresentados e demonstrados, agora, corolários da Desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Corolário 3.2. *: Sejam $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x, y > 0$. Então,*

i) $\dfrac{a^2}{x} + \dfrac{b^2}{y} \geq \dfrac{(a+b)^2}{x+y}$;

ii) $\dfrac{a^2}{x} + \dfrac{b^2}{y} + \dfrac{c^2}{z} \geq \dfrac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$.

Demonstração. Primeiramente, provaremos $i)$. A desigualdade dada é equivalente a seguinte desigualdade:

$$\frac{(x+y)a^2}{x(x+y)} + \frac{(x+y)b^2}{y(x+y)} \geq \frac{xy(a+b)^2}{xy(x+y)}.$$

Mas, vemos que:

$$\frac{y(x+y)a^2 + x(x+y)b^2}{xy(x+y)} \geq \frac{xy(a+b)^2}{xy(x+y)} \Leftrightarrow y(x+y)a^2 + x(x+y)b^2 \geq xy(a+b)^2$$
$$\Leftrightarrow yxa^2 + y^2a^2 + x^2b^2 + xyb^2 \geq xya^2 + 2abxy + xyb^2$$
$$\Leftrightarrow y^2a^2 + x^2b^2 - 2abxy \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (ay - bx)^2 \geq 0$$

e a última desigualdade é sempre verdadeira.

Note que a igualdade ocorre se, e somente se, $ay - bx = 0 \Leftrightarrow ay = bx \Leftrightarrow \dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y}$.

Agora, provaremos $ii)$. Por $i)$, temos:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \left(\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y}\right) + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{((a+b)+c)^2}{(x+y)+z} = \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

e a prova está completa. □

Generalizando o Corolário 3.2, temos o seguinte resultado:

Corolário 3.3. *Sejam* $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ *números reais tais que* $b_i > 0$, *para* $i = 1, 2, \ldots, n$. *Então,*

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}. \tag{3.4}$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \cdots = \dfrac{a_n}{b_n}$.

Demonstração. Provaremos este resultado usando o Princípio de Indução Finita.

Para $n = 1$, temos: $\dfrac{a_1^2}{b_1} = \dfrac{a_1^2}{b_1}$ e, portanto, $\dfrac{a_1^2}{b_1} \geq \dfrac{a_1^2}{b_1}$.

Suponhamos agora que, para algum k natural maior do que 1, a desigualdade (3.4) é verdadeira, isto é,

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b^2} + \ldots + \frac{a_k^2}{b_k} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^2}{b_1 + b_2 + \ldots + b_k}.$$

Para completar a prova, vamos verificar que a desigualdade (3.4) é verdadeira para $n = k + 1$. Com efeito, da hipótese de indução, segue que:

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_k^2}{b_k} + \frac{a_{k+1}^2}{b_{k+1}} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_k} + \frac{a_{k+1}^2}{b_{k+1}} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1})^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_k + b_{k+1}}.$$

□

Corolário 3.4. *Sejam* $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ *números reais. Então,*

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + \cdots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \geq \sqrt{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)^2}.$$

Demonstração. A prova deste resultado será feita usando o Princípio de Indução Finita.

Para $n = 1$, temos: $\sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$ e, portanto, $\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \geq \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$.

Para $n = 2$, temos:

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \geq \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}$$

$$(\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2})^2 \geq (\sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2})^2$$

$$a_1^2+b_1^2+2\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}+a_2^2+b_2^2 \geq (a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2$$

$$a_1^2+b_1^2+2\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}+a_2^2+b_2^2 \geq a_1^2+2a_1a_2+a_2^2+b_1^2+2b_1b_2+b_2^2$$

$$2\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2} \geq 2(a_1a_2+b_1b_2)$$

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2} \geq a_1a_2+b_1b_2$$

$$(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2) \geq (a_1a_2+b_1b_2)^2,$$

em que a última desigualdade é sempre verdadeira (Veja o Teorema 3.4 - Desigualdade de Cauchy-Schwarz).

Suponhamos que, para algum k natural maior do que 2, o resultado seja válido, ou seja, que seja verdadeira a desigualdade:

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+...+\sqrt{a_k^2+b_k^2} \geq \sqrt{(a_1+a_2+...+a_k)^2+(b_1+b_2+...+b_k)^2}.$$

Para completar a prova, basta verificar que o resultado é válido para $n=k+1$. Com efeito, usando a hipótese de indução, obtemos:

$$\begin{aligned}&\sqrt{a_1^2+b_1^2}+...+\sqrt{a_k^2+b_k^2}+\sqrt{a_{k+1}^2+b_{k+1}^2} \geq \sqrt{(a_1+...+a_k)^2+(b_1+...+b_k)^2}+\\ &+\sqrt{a_{k+1}^2+b_{k+1}^2} \geq \sqrt{(a_1+...+a_k+a_{k+1})^2+(b_1+...+b_k+b_{k+1})^2}.\end{aligned}$$

□

A seguir, apresentaremos e demonstraremos a Desigualdade Triangular. Para isso, consideraremos a função real $|\cdot|:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ dada por

$$|x| = \begin{cases} x, & se\ x \geq 0 \\ -x, & se\ x < 0. \end{cases}$$

Teorema 3.5 (Desigualdade Triangular)**.** *Sejam $a,b\in\mathbb{R}_*$. Então*

$$|a+b| \leq |a|+|b|.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, a e b tiverem o mesmo sinal.

Demonstração. Para provar a Desigualdade Triangular, faremos uso do resultado seguinte.

Resultado auxiliar: Para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se $-|x| \leq x \leq |x|$.

De fato:

- se $x \geq 0$, então $|x| = x$. Assim, $-|x| \leq x$, já que $-|x| \leq 0$ e $x \geq 0$. Portanto, $-|x| \leq x \leq |x|$.

- se $x < 0$, então $|x| = -x > 0$. Assim, $-|x| = -(-x) = x < 0$ e então $x \leq |x|$. Portanto, $-|x| \leq x \leq |x|$.

Por este resultado segue que $x \leq |x|$ e $-x \leq |x|$.

Agora, voltando a demonstração da Desigualdade Triangular, temos que:

- se $a + b \geq 0$, então $|a + b| = a + b \leq |a| + |b|$, pela propriedade acima;

- se $a + b < 0$ então $|a + b| = -(a + b) = -a - b \leq |a| + |b|$, também pela propriedade acima.

□

A seguir, apresentaremos e demonstraremos o caso geral da Desigualdade Triangular.

Teorema 3.6 (Caso Geral da Desigualdade Triangular)**.** *Sejam $a_1, a_2, ..., a_n$ números reais não-nulos, com $n \in \mathbb{N}$. Então,*

$$|a_1 + a_2 + ... + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + ... + |a_n|,$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, $a_1, a_2, ..., a_n$ tiverem o mesmo sinal.

Demonstração. Usaremos o Princípio de Indução Finita para demonstrar o resultado apresentado.

- Para $n = 1$, temos que $|a_1| = |a_1|$ e então o resultado é verdadeiro.

- Para $n = 2$, segue do teorema anterior, tomando $a = a_1$ e $b = a_2$.

- Suponhamos agora que o resultado seja válido para algum k natural maior do que 2. Desta forma, para $a_1, a_2, \ldots, a_k$ números reais não-nulos, temos:

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_k| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_k|.$$

- Tomemos agora $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}$ números reais não-nulos. Concluímos, então, que

$$\begin{aligned}|a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1}| &= |(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) + a_{k+1}| \\ &\leq |a_1 + a_2 + \cdots + a_k| + |a_{k+1}| \\ &\leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_k| + |a_{k+1}|,\end{aligned}$$

usando a validade do teorema para $n = 2$ e a hipótese de indução. $\square$

Agora, apresentaremos a Desigualdade de Chebyshev.

Teorema 3.7 (Desigualdade de Chebyshev)**.** *Sejam* $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ *números reais tais que* $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ *e* $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$. *Então:*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \leq n \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i b_i,$$

isto é,

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \leq n \cdot (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n).$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ *ou* $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$.

Demonstração. Para $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, com $i > j$, temos que $a_i \geq a_j$ e $b_i \geq b_j$, o que implica que $a_i - a_j \geq 0$ e $b_i - b_j \geq 0$. Assim,

$$(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0,$$

isto é,

$$a_i b_i - a_i b_j - a_j b_i + a_j b_j \geq 0 \Leftrightarrow a_i b_i + a_j b_j \geq a_i b_j + a_j b_i.$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) &= a_1(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) + a_2(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) + \cdots + \\
&\quad a_n(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \\
&= (a_1b_1 + a_1b_2 + \cdots + a_1b_n) + (a_2b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_2b_n) + \cdots + \\
&\quad (a_nb_1 + a_nb_2 + \cdots + a_nb_n) \\
&\leq a_1b_1 + a_2b_2 + a_2b_2 + a_1b_1 + a_3b_3 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_3b_3 + \cdots + \\
&\quad a_1b_1 + a_nb_n + a_2b_2 + a_nb_n + \cdots + a_nb_n \\
&= n \cdot \sum_{i=1}^{n} a_ib_i.
\end{aligned}$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $(a_i - a_j)(b_i - b_j) = 0$, isto é, $a_i = a_j$ ou $b_i = b_j$, para $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$. □

Observação 3.1. A Desigualdade de Chebyshev também é verdadeira para $a_1 \geq \geq a_2 \geq ... \geq a_n$ e $b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_n$, pois também temos, para quaisquer $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, $(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0$. Agora, se $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$ e $b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_n$, então temos a seguinte desigualdade:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \geq n \cdot \sum_{i=1}^{n} a_ib_i.$$

No que segue, serão apresentadas consequências da Desigualdade de Chebyshev.

Corolário 3.5. *Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{Q}$ tais que $x > -1$ e $\alpha \geq 1$. Então,*

$$(1 + x)^\alpha \geq 1 + \alpha x.$$

Demonstração. Defina $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ por $f(x) = (1 + x)^\alpha - 1 - \alpha x$, para $x \in (-1, +\infty)$.

A derivada de f é dada por

$$f'(x) = \alpha(1 + x)^{\alpha - 1} - \alpha.$$

Observe que

$$f'(0) = 0$$

$$f'(x) < 0 \text{ se } -1 < x < 0$$

e

$$f'(x) > 0 \text{ se } x > 0.$$

Portanto, f tem um mínimo global em $x = 0$. Como $f(0) = 0$, concluímos que

$$f(x) \geq f(0) = 0, \quad \text{para todo } x \in (-1, +\infty),$$

ou seja,

$$(1+x)^\alpha - 1 - \alpha x \geq 0, \quad \text{para todo } x \in (-1, +\infty),$$

de onde segue que

$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x, \quad \text{para todo } x \in (-1, +\infty).$$

□

Corolário 3.6. *Sejam $x, \alpha \in \mathbb{R}$ tais que $x > -1$ e $\alpha \geq 1$. Então,*

$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x.$$

Demonstração. Dado $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \geq 1$, como $\mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}}$, existe uma sequência $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q} \cap [1, +\infty)$ tal que $\lim \alpha_n = \alpha$. Sendo assim,

$$(1+x)^\alpha = \lim_{n\in\mathbb{N}} (1+x)^{\alpha_n} \geq \lim_{n\in\mathbb{N}} (1 + \alpha_n x) = 1 + \alpha x.$$

□

Nas próximas linhas, exibiremos a Desigualdade de Surányi. Mas antes, veremos os conceitos de desigualdade homogênea e desigualdade simétrica; conceitos preliminares para demonstrar a Desigualdade de Surányi.

Definição 3.1. *Uma desigualdade é* homogênea *quando não se altera ao multiplicarmos cada variável pelo mesmo número real t.*

Definição 3.2. *Uma desigualdade é* simétrica *quando não se altera ao permutarmos as variáveis.*

Teorema 3.8 (Desigualdade de Surányi)**.** *Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reais não-negativos e $n \in \mathbb{Z}^+$. Então,*

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i^n + n\prod_{i=1}^{n} a_i \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{n-1}\right) \tag{3.5}$$

isto é,

$$(n-1)(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_n^n)+na_1a_2\ldots a_n \geq (a_1+a_2+\cdots+a_n)(a_1^{n-1}+a_2^{n-1}+\cdots+a_n^{n-1}).$$

Demonstração. Provaremos este resultado usando o Princípio de Indução Finita. Note que a desigualdade (3.5) é homogênea e simétrica. Por esta razão, podemos supor que

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \quad \text{e} \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1. \tag{3.6}$$

Para $n = 1$, o resultado é válido, pois:

$$(1-1)a_1^1 + 1 \cdot a_1 = a_1 \geq a_1 \cdot 1 = a_1 \cdot a_1^0.$$

Para $n = 2$, o resultado também é válido, visto que:

$$(2-1)(a_1^2+a_2^2)+2\cdot(a_1\cdot a_2) = a_1^2+a_2^2+2a_1a_2 = (a_1+a_2)^2 = (a_1+a_2)\cdot(a_1^{2-1}+a_2^{2-1}).$$

Suponhamos que, para algum k natural maior do que 2, a desigualdade seja verdadeira. Então, para $a_1, a_2, \ldots, a_k$ números reais não-negativos, é verdade que

$$(k-1)\sum_{i=1}^{k} a_i^k + k\prod_{i=1}^{k} a_i \geq \left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{k} a_i^{k-1}\right) = \left(\sum_{i=1}^{k} a_i^{k-1}\right), \tag{3.7}$$

em que a igualdade se deve à (3.6).

Para completar a prova, devemos mostrar que a desigualdade (3.5) é válida para $k+1$. Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}$ números reais não-negativos que cumprem (3.6). Devemos mostrar que

$$k\sum_{i=1}^{k+1} a_i^{k+1} + (k+1)\prod_{i=1}^{k+1} a_i \geq \left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i^{k}\right). \tag{3.8}$$

Porém, mostrar (3.8) é equivalente a mostrar que a desigualdade seguinte é válida:

$$k\sum_{i=1}^{k+1} a_i^{k+1} + (k+1)\prod_{i=1}^{k+1} a_i \geq (1+a_{k+1})\left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i^k\right),$$

a qual, por sua vez, é equivalente a:

$$k\sum_{i=1}^{k} a_i^{k+1} + ka_{k+1}^{k+1} + ka_{k+1}\prod_{i=1}^{k} a_i + a_{k+1}\prod_{i=1}^{k} a_i - (1+a_{k+1})\left(\sum_{i=1}^{k} a_i^k + a_{k+1}^k\right) \geq 0. \quad (3.9)$$

Agora, pela hipótese de indução, temos:

$$ka_{k+1}\prod_{i=1}^{k} a_i \geq a_{k+1}\cdot 1\cdot\left(\sum_{i=1}^{k} a_i^{k-1}\right) - (k-1)a_{k+1}\sum_{i=1}^{k} a_i^k \quad (3.10)$$

Por (3.9) e (3.10), concluímos que para verificar a validade da desigualdade (3.9), basta mostrar que:

$$\left(k\sum_{i=1}^{k} a_i^{k+1} - \sum_{i=1}^{k} a_i^k\right) - a_{k+1}\left(k\sum_{i=1}^{k} a_i^k - \sum_{i=1}^{k} a_i^{k-1}\right) + a_{k+1}\left((k-1)a_{k+1}^k + \prod_{i=1}^{k} a_i - a_{k+1}^{k-1}\right) \geq 0. \quad (3.11)$$

Para mostrar que a desigualdade acima é válida, mostraremos que

$$\left(k\sum_{i=1}^{k} a_i^{k+1} - \sum_{i=1}^{k} a_i^k\right) - a_{k+1}\left(k\sum_{i=1}^{k} a_i^k - \sum_{i=1}^{k} a_i^{k-1}\right) \geq 0$$

e

$$a_{k+1}\left((k-1)a_{k+1}^k + \prod_{i=1}^{k} a_i - a_{k+1}^{k-1}\right) \geq 0.$$

De fato, $a_{k+1}\left((k-1)a_{k+1}^k + \prod_{i=1}^{k} a_i - a_{k+1}^{k-1}\right) \geq 0$, pois:

$$a_{k+1}\left((k-1)a_{k+1}^k + \prod_{i=1}^{k} a_i - a_{k+1}^{k-1}\right) = a_{k+1}\left(\prod_{i=1}^{k}(a_i - a_{k+1} + a_{k+1}) + (k-1)a_{k+1}^k - a_{k+1}^{k-1}\right)$$

$$\geq a_{k+1}\left(a_{k+1}^k + a_{k+1}^{k-1}\cdot\sum_{i=1}^{k}(a_i - a_{k+1}) + (k-1)a_{k+1}^k - a_{k+1}^{k-1}\right) = 0.$$

Agora, pela Desigualdade de Chebyshev, segue que

$$k\sum_{i=1}^{k} a_i^k \geq \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \sum_{i=1}^{k} a_i^{k-1} = \sum_{i=1}^{k} a_i^{k-1},$$

isto é,

$$k\sum_{i=1}^{k} a_i^k - \sum_{i=1}^{k} a_i^{k-1} \geq 0.$$

Como $a_1 + a_2 + ... + a_k + a_{k+1} = 1$ e $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_{k+1}$ temos que $a_{k+1} \leq \dfrac{1}{k}$. Portanto, para mostrar a desigualdade

$$\left(k\sum_{i=1}^{k} a_i^{k+1} - \sum_{i=1}^{k} a_i^k\right) - a_{k+1}\left(k\sum_{i=1}^{k} a_i^k - \sum_{i=1}^{k} a_i^{k-1}\right) \geq 0,$$

é suficiente mostrar que

$$\left(k\sum_{i=1}^{k} a_i^{k+1} - \sum_{i=1}^{k} a_i^k\right) \geq \frac{1}{k}\left(k\sum_{i=1}^{k} a_i^k - \sum_{i=1}^{k} a_i^{k-1}\right),$$

que é equivalente a

$$k\sum_{i=1}^{k} a_i^{k+1} + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i^{k-1} \geq 2\sum_{i=1}^{k} a_i^k. \tag{3.12}$$

Usando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica ($AM \geq GM$), temos:

$$ka_i^{k+1} + \frac{1}{k}a_i^{k-1} \geq 2\sqrt{ka_i^{k+1} \cdot \frac{1}{k}a_i^{k-1}} = 2\sqrt{a_i^{2k}} = 2a_i^k,$$

para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$, de onde segue (3.12). Com isso, a prova está completa. $\square$

A seguir, veremos alguns exemplos de como as desigualdades vistas nesta seção podem ser usadas para provar outras desigualdades.

Exemplo 3.1. Sejam $a, b, c > 0$. A Desigualdade de Nesbitt:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

pode ser verificada a partir da Desigualdade de Chebyshev.

De fato, assumiremos que $a \geq b \geq c$ e, assim, $a + b \geq c + b, a + c \geq b + c$ e

$b+a \geq c+a$. Portanto, $\dfrac{1}{c+b} \geq \dfrac{1}{a+b}$, $\dfrac{1}{b+c} \geq \dfrac{1}{a+c}$ e $\dfrac{1}{c+a} \geq \dfrac{1}{b+a}$, de onde segue que $\dfrac{1}{b+c} \geq \dfrac{1}{c+a} \geq \dfrac{1}{a+b}$.

Pela Desigualdade de Chebyshev (Teorema 3.7), temos:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right) \leq 3\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right).$$

Porém,

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right) = \frac{1}{2}((b+c)+(c+a)+(a+b))\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right).$$

Agora, pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica ($AM \geq GM$), obtemos:

$$(b+c)+(c+a)+(a+b) \geq \frac{9}{\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}+\dfrac{1}{a+b}}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}&(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right) \geq \\ &\geq \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}+\dfrac{1}{a+b}}\cdot\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right) = \frac{9}{2}\end{aligned}$$

e, consequentemente,

$$\begin{aligned}&\frac{9}{2} \leq (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right) \leq 3\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right) \\ &\Leftrightarrow 3\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right) \geq \frac{9}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Além disso, pelo Teorema 3.7, concluímos que a igualdade ocorre se, e somente se, $b+c=c+a=a+b$, isto é, $a=b=c$.

Exemplo 3.2. Sejam $a,b,c \in \mathbb{R}_*^+$ tais que $ab+bc+ca=1$. Podemos provar a

desigualdade
$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$$
utilizando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz.

De fato, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos
$$\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right)((b+c)+(c+a)+(a+b))\geq$$
$$\geq\left(\frac{a}{\sqrt{b+c}}\cdot\sqrt{b+c}+\frac{b}{\sqrt{c+a}}\cdot\sqrt{c+a}+\frac{c}{\sqrt{a+b}}\cdot\sqrt{a+b}\right)^2=(a+b+c)^2$$

Então,
$$\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right)(2(a+b+c))\geq(a+b+c)^2,$$
de onde segue que
$$\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right)\geq\frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)}=\frac{a+b+c}{2}.$$

Porém, $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ e, pela Proposição 2.3, temos que $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$. Portanto,
$$(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)=3,$$
pela hipótese. Assim, $a+b+c\geq\sqrt{3}$.

Logo,
$$\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right)\geq\frac{(a+b+c)}{2}\geq\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $a=b=c$, o que implica $a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Exemplo 3.3. Sejam a,b,c medidas dos lados de um triângulo e α,β,γ seus ângulos, em radianos, respectivamente. Seja s o semiperímetro do triângulo. A seguinte desigualdade:

$$\frac{b+c}{\alpha}+\frac{c+a}{\beta}+\frac{a+b}{\gamma}\geq\frac{12s}{\pi}$$

é verdadeira.

De fato, sem perda de generalidade, podemos assumir que $a\leq b\leq c$. Daí, $\alpha\leq\beta\leq\gamma$, isto é, $\dfrac{1}{\gamma}\leq\dfrac{1}{\beta}\leq\dfrac{1}{\alpha}$. E ainda, $a+b\leq b+c$, $a+c\leq b+c$ e $a+b\leq a+c$, de onde segue que $a+b\leq a+c\leq b+c$.

Pela Desigualdade de Chebyshev, temos:

$$\begin{aligned}
&((a+b)+(b+c)+(c+a))\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)=\\
&=((a+b)+(c+a)+(b+c))\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}\right)\leq\\
&\leq 3\left(\frac{a+b}{\gamma}+\frac{c+a}{\beta}+\frac{b+c}{\alpha}\right).
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned}
(2a+2b+2c)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)&=(2(a+b+c))\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\\
&=2\cdot 2s\cdot\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\\
&=4s\cdot\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$4s\cdot\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\leq 3\left(\frac{a+b}{\gamma}+\frac{c+a}{\beta}+\frac{b+c}{\alpha}\right),$$

ou seja,

$$\frac{b+c}{\alpha}+\frac{c+a}{\beta}+\frac{a+b}{\gamma}\geq\frac{4s}{3}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right).$$

Agora, como $AM \geq HM$, segue que

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma} \geq \frac{9}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Assim,

$$\frac{b+c}{\alpha}+\frac{c+a}{\beta}+\frac{a+b}{\gamma} \geq \frac{4s}{3}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right) \geq \frac{4s}{3}\cdot\frac{9}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{12s}{\pi}.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $a+b=b+c=c+a$, isto é, $a=b=c$.

Exemplo 3.4. Dados $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_*^+$ tais que $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$, temos que

$$\frac{a_1}{2-a_1}+\frac{a_2}{2-a_2}+\cdots+\frac{a_n}{2-a_n} \geq \frac{n}{2n-1}.$$

Com efeito, sem perda de generalidade, podemos assumir $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$. Então, por consequência, segue que $2-a_1 \leq 2-a_2 \leq \cdots \leq 2-a_n$, o que implica $\dfrac{1}{2-a_1} \geq \dfrac{1}{2-a_2} \geq \cdots \geq \dfrac{1}{2-a_n}$.

Usando a Desigualdade de Chebyshev e $AM \geq HM$, temos:

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{2-a_1}+\frac{1}{2-a_2}+\cdots+\frac{1}{2-a_n}\right) \leq n\cdot\left(\frac{a_1}{2-a_1}+\frac{a_2}{2-a_2}+\cdots+\frac{a_n}{2-a_n}\right)$$

$$1\cdot\left(\frac{1}{2-a_1}+\frac{1}{2-a_2}+\cdots+\frac{1}{2-a_n}\right) \leq n\cdot\left(\frac{a_1}{2-a_1}+\frac{a_2}{2-a_2}+\cdots+\frac{a_n}{2-a_n}\right)$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a_1}{2-a_1}+\frac{a_2}{2-a_2}+\cdots+\frac{a_n}{2-a_n}\right) &\geq \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2-a_1}+\frac{1}{2-a_2}+\cdots+\frac{1}{2-a_n}\right)\\
&\geq \frac{1}{n}\cdot\frac{n\cdot n}{2-a_1+2-a_2+\cdots+2-a_n}\\
&= \frac{1}{n}\cdot\frac{n^2}{2n-(a_1+a_2+\cdots+a_n)}\\
&= \frac{1}{n}\cdot\frac{n^2}{2n-1}\\
&= \frac{n}{2n-1}.
\end{aligned}$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. Mas, como temos a hipótese de que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$, concluímos que a igualdade ocorre se, e somente se, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \dfrac{1}{n}$.

3.4 Caso geral das Desigualdades entre as médias

Provamos, na Seção 2, as desigualdades entre as médias para 2 variáveis. Nesta seção, estudaremos as desigualdades entre as médias para n variáveis.

Teorema 3.9 (Desigualdades entre médias)**.** *Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_*^+$. Os números*

$$QM = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}, \; AM = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$
$$GM = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \quad e \quad HM = \frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}},$$

são chamados, respectivamente, de médias quadrática, aritmética, geométrica e harmônica nas variáveis $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Tem-se:

$$QM \geq AM \geq GM \geq HM.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Demonstração. (I) Primeiramente, demonstraremos a desigualdade $AM \geq GM$, ou seja,

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Com efeito, seja $x_i = \dfrac{a_i}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}}$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Note que

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n &= \frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}} \cdot \frac{a_2}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}} \cdot \cdots \cdot \frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}} \\ &= \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{(\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n})^n} \\ &= \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{a_1 a_2 \ldots a_n} = 1. \end{aligned}$$

Agora, observe que:

$$\begin{aligned}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} &\Leftrightarrow \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}} \geq n\\ &\Leftrightarrow \frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}} + \frac{a_2}{\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}} + \cdots +\\ &+ \frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}} \geq n\\ &\Leftrightarrow x_1+x_2+\cdots+x_n \geq n,\end{aligned}$$

em que $x_1x_2\ldots x_n = 1$. Assim, a igualdade ocorre quando $x_1 = x_2 = \ldots \cdots = x_n = 1$.

Provemos a desigualdade

$$x_1+x_2+\cdots+x_n \geq n \tag{3.13}$$

usando o Princípio de Indução Finita. Para $n=1$, temos: $x_1 = 1$ e, portanto, $x_1 \geq 1$. Para $n=2$, temos: $x_1 \cdot x_2 = 1$. Como $x_1 + x_2 \geq 2\sqrt{x_1x_2}$, pelo Teorema 3.1, e $x_1 \cdot x_2 = 1$, segue que $x_1 + x_2 \geq 2$. Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, $x_1 = x_2$.

Suponhamos agora que, para algum k natural maior do que 2, a desigualdade (3.13) seja verdadeira, isto é, para $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathbb{R}_*^+$, com $x_1x_2\ldots x_k = 1$, a desigualdade

$$x_1+x_2+\cdots+x_k \geq k$$

seja válida e que a igualdade ocorra se, e somente se, $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 1$.

Para concluir que a desigualdade (3.13) é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, devemos verificar que (3.13) vale para $k+1$.

Com efeito, sejam $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1} \in \mathbb{R}_*^+$ com $x_1x_2\ldots x_kx_{k+1} = 1$. Se $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = x_{k+1} = 1$, então:

$$x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1} = \underbrace{1+1+\cdots+1+1}_{k+1 \text{ vezes}} = k+1$$

e, portanto, a igualdade ocorre.

Então, para que a desigualdade ocorra, podemos assumir que existem números menores do que 1 e também maiores do que 1. Sem perda de generalidade, assumiremos que $x_1 < 1$ e $x_2 > 1$. Para a sequência $x_1x_2, x_3, \ldots, x_{k+1}$ que contém k termos, temos:

$$(x_1x_2)x_3 \ldots x_{k+1} = 1,$$

e pela hipótese de indução segue que:

$$x_1x_2 + x_3 + \cdots + x_{k+1} \geq k$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, $x_1x_2 = x_3 = \cdots = x_{k+1}$.

Então:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1} &= x_1x_2 + x_3 + \cdots + x_{k+1} + 1 + x_1 + x_2 - x_1x_2 - 1 \\ &= x_1x_2 + x_3 + \cdots + x_{k+1} + 1 + (x_2 - 1)(1 - x_1) \\ &\geq k + 1 + (x_2 - 1)(1 - x_1) \geq k + 1. \end{aligned}$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, $x_1x_2 = x_3 = \cdots = x_{k+1} = 1$ e $(x_2 - 1)(1 - x_1) = 0$, isto é, $x_1 = x_2 = \cdots = x_{k+1} = 1$. Mas, como $x_i = \dfrac{a_i}{\sqrt[k+1]{a_1a_2 \ldots a_{k+1}}}$, temos que a igualdade ocorre se, e somente se, $\dfrac{a_1}{\sqrt[k+1]{a_1a_2 \ldots a_{k+1}}} = \dfrac{a_2}{\sqrt[k+1]{a_1a_2 \ldots a_{k+1}}} = \cdots = \dfrac{a_{k+1}}{\sqrt[k+1]{a_1a_2 \ldots a_{k+1}}}$, isto é, $a_1 = a_2 = \cdots = a_{k+1}$. Isto completa a prova de (I).

(II) Mostraremos agora que $GM \geq HM$, isto é,

$$\sqrt[n]{a_1a_2 \ldots a_n} \geq \frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}}.$$

Por (I) $(AM \geq GM)$, segue que

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \geq n\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\frac{1}{a_2} \cdots \frac{1}{a_n}} = \frac{n}{\sqrt[n]{a_1a_2 \ldots a_n}}.$$

Assim,

$$\frac{1}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots\frac{1}{a_n}} \leq \frac{\sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n}}{n} \Leftrightarrow \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots\frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots\frac{1}{a_n}}.$$

Por (I) e sabendo que a igualdade ocorre se, e somente se, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$, então também para $GM \geq HM$ temos que a igualdade ocorre se, e somente se, $\frac{1}{a_1} = \frac{1}{a_2} = \cdots = \frac{1}{a_n}$ o que implica $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

(III) Agora, mostraremos que $QM \geq AM$, isto é,

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

Usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz (Teorema 3.4) para as sequências $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ e $(1, 1, \dots, 1)$, com n termos, temos:

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(1^2+1^2+\cdots+1^2) \geq (a_1\cdot 1+a_2\cdot 1+\cdots+a_n\cdot 1)^2$$

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(1^2+1^2+\cdots+1^2) \geq (a_1+a_2+\cdots+a_n)^2$$

$$n\cdot(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2) \geq (a_1+a_2+\cdots+a_n)^2$$

$$\frac{n\cdot(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)}{n^2} \geq \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{n^2}$$

$$\frac{(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)}{n} \geq \left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^2$$

$$\sqrt{\frac{(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)}{n}} \geq \sqrt{\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^2} = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

Assim, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, a igualdade ocorre se, e somente se, as sequências $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e $(1, 1, \ldots, 1)$ forem proporcionais, isto é, $\dfrac{a_1}{1} = \dfrac{a_2}{1} = \cdots = \dfrac{a_n}{1}$, de onde segue que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

$\square$

Abaixo segue um exemplo de desigualdade que pode ser demonstrada através da desigualdade entre as médias aritmética e geométrica $(AM \geq GM)$.

Exemplo 3.5. Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_*^+$ tais que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$. A seguinte desigualdade é verdadeira.

$$a_1^{-k} + a_2^{-k} + \cdots + a_n^{-k} \geq n^{k+1}.$$

De fato, como $AM \geq GM$ e $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$, temos:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \frac{1}{n}.$$

Então, $n \leq \dfrac{1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}}$, o que é equivalente a $n \leq \sqrt[n]{\dfrac{1}{a_1}\dfrac{1}{a_2} \ldots \dfrac{1}{a_n}}$.
Desse modo,

$$\begin{aligned}
n^k \leq \left(\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\frac{1}{a_2}\ldots\frac{1}{a_n}}\right)^k &\Leftrightarrow n^k \leq \sqrt[n]{\left(\frac{1}{a_1}\frac{1}{a_2}\ldots\frac{1}{a_n}\right)^k} \\
&\Leftrightarrow n^k \leq \sqrt[n]{\left(\frac{1}{a_1}\right)^k\left(\frac{1}{a_2}\right)^k\ldots\left(\frac{1}{a_n}\right)^k} \\
&\Leftrightarrow n^k \leq \sqrt[n]{a_1^{-k} a_2^{-k} \ldots a_n^{-k}}.
\end{aligned}$$

Agora, usando novamente a desigualdade $AM \geq GM$, obtemos:

$$\begin{aligned}
& n^k \leq \sqrt[n]{a_1^{-k} a_2^{-k} \ldots a_n^{-k}} \leq \frac{a_1^{-k} + a_2^{-k} + \cdots + a_n^{-k}}{n} \\
& \Leftrightarrow n \cdot n^k \leq a_1^{-k} + a_2^{-k} + \cdots + a_n^{-k} \\
& \Leftrightarrow n^{k+1} \leq a_1^{-k} + a_2^{-k} + \cdots + a_n^{-k} \\
& \Leftrightarrow a_1^{-k} + a_2^{-k} + \cdots + a_n^{-k} \geq n^{k+1}.
\end{aligned}$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \dfrac{1}{n}$.

3.5 Convexidade e Desigualdades de Jensen, Young e Hölder

Nesta seção, apresentaremos a Desigualdade de Jensen, a qual é amplamente usada na demonstração de outras desigualdades. Trata-se de uma desigualdade em relação às chamadas funções convexas. O conceito de função convexa será exposto a seguir.

Definição 3.3. *Uma função* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é* convexa *no intervalo* $[a, b]$ *se, para quaisquer* $x, y \in [a, b]$ *e* $\alpha \in [0, 1]$*, vale a desigualdade:*

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y).$$

Quando apenas a desigualdade (<) ocorre, f *é dita* estritamente convexa*.*

Esta definição pode ser interpretada geometricamente através do gráfico da função. Veremos adiante.

Definição 3.4. *Um conjunto* X *é* convexo *se, para quaisquer* $x, y \in X$ *e* $t \in [0, 1]$*, tem-se:*

$$(1 - t)x + ty \in X.$$

Definição 3.5. *Uma função* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é* convexa *se a região sobre o seu gráfico, ou seja, o conjunto* $\{(x, y) \in [a, b] : y \geq f(x)\}$*, é um conjunto convexo.*

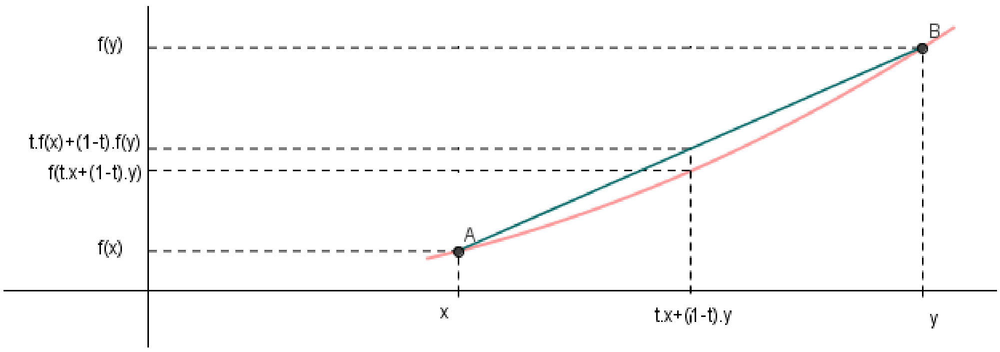

Figura 3.1: Função convexa

Definição 3.6. *Uma função* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é* côncava *quando* $-f$ *é uma função convexa.*

Na sequência veremos alguns exemplos de funções convexas.

Exemplo 3.6. A função $f(x) = |x|$ é convexa em $\mathbb{R}$.

De fato, dados $x, y \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in [0, 1]$, temos, pela Desigualdade Triangular (Teorema 3.5)

$$\begin{aligned} f(\alpha x + (1-\alpha)y) &= |\alpha x + (1-\alpha)y| \\ &\leq |\alpha x| + |(1-\alpha)y| \\ &= \alpha|x| + (1-\alpha)|y| \\ &= \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y). \end{aligned}$$

Exemplo 3.7. A função $f(x) = \operatorname{sen} x$, para $x \in (\pi, 2\pi)$, é convexa. Porém, para $x \in (0, \pi)$, a função $\operatorname{sen} x$ é côncava, pois $-f$ em $(0, \pi)$ é convexa, conforme aponta o gráfico abaixo.

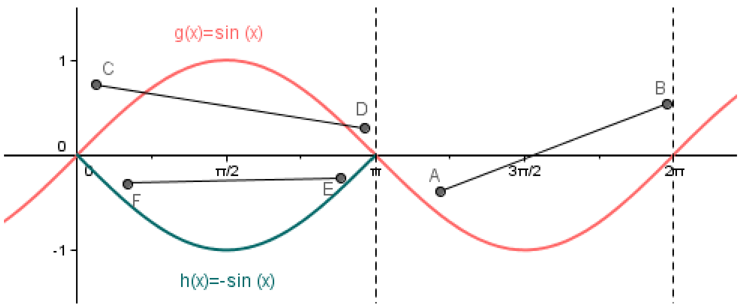

Figura 3.2: Função seno

O teorema seguinte nos fornece um critério para determinar quando uma função é convexa. Para analisar a demonstração deste resultado, o leitor pode consultar a referência [6].

Teorema 3.10. *Um função* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *duas vezes derivável é convexa em* (a, b) *se, e somente se,* $f''(x) \geq 0$ *para todo* $x \in (a, b)$*. Se* $f''(x) > 0$ *para todo* $x \in (a, b)$*, então* f *é estritamente convexa em* (a, b)*.*

Como consequência do Teorema 3.10, temos que uma função duas vezes derivável f é côncava em (a, b) se, e somente se, $f''(x) \leq 0$ para todo $x \in (a, b)$.

Levando em conta o critério acima, veremos mais exemplos de funções convexas.

Exemplo 3.8. Seja $f : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}_*^+$ a função definida por $f(x) = x^\alpha$.

Temos:

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \quad \text{e} \quad f''(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2}.$$

- Para $\alpha > 1$ ou $\alpha < 0$, temos $f''(x) > 0$.

- Para $0 < \alpha < 1$, temos que $f''(x) < 0$.

Portanto, para $\alpha > 1$ ou $\alpha < 0$, f é estritamente convexa. E, para $0 < \alpha < 1$, f é estritamente côncava.

Exemplo 3.9. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \ln(1 + e^x)$.

Temos:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + e^x} \cdot (1 + e^x)' = \frac{e^x}{1 + e^x}$$

e

$$f''(x) = \left(\frac{e^x}{1 + e^x}\right)' = \frac{e^x(1 + e^x) - e^x.e^x}{(1 + e^x)^2} = \frac{e^x + e^{2x} - e^{2x}}{(1 + e^x)^2} = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}.$$

Logo, $f''(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e, assim, f é estritamente convexa em $\mathbb{R}$.

Teorema 3.11. *Sejam $f_1, f_2, \ldots, f_n$ funções convexas em (a, b). Então, a função $c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n$ é convexa em (a, b), para quaisquer $c_1, c_2, \ldots, c_n \in (0, +\infty)$.*

Demonstração. Como $f_1, f_2, \ldots, f_n$ são funções convexas em (a, b), segue que

$$\begin{gathered} f_1''(x) \geq 0 \\ f_2''(x) \geq 0 \\ \vdots \\ f_n''(x) \geq 0, \end{gathered}$$

para todo $x \in (a, b)$. Assim, tomando $f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x)$, temos:

$$f''(x) = c_1 f_1''(x) + c_2 f_2''(x) + \cdots + c_n f_n''(x)$$

e, portanto, $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in (a,b)$, uma vez que $c_i \in (0,+\infty)$ e f_i é convexa para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Logo, f é convexa em (a,b). $\square$

Neste momento, estamos prontos para provar a Desigualdade de Jensen.

Teorema 3.12 (Desigualdade de Jensen)**.** *Seja* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *uma função convexa no intervalo* (a,b)*. Sejam* $n \in \mathbb{N}$ *e* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in [0,1]$ *números reais tais que* $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$*. Então, para quaisquer* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a,b)$*, tem-se:*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i), \tag{3.14}$$

isto é,

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \cdots + \alpha_n f(x_n).$$

A igualdade ocorre quando $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$*.*

Demonstração. Usaremos o Princípio de Indução Finita para demonstrar este resultado.

Se $n = 1$, temos $\alpha_1 = 1$, visto que, por hipótese, $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$. Assim,

$$f(\alpha_1 x_1) = f(1 \cdot x_1) = f(x_1) = 1 \cdot f(x_1) = \alpha_1 \cdot f(x_1).$$

Se $n = 2$, temos $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$, por hipótese. Agora, como f é convexa em (a,b), segue que:

$$\begin{aligned} f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) &= f(\alpha_1 x_1 + (1-\alpha_1)x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + (1-\alpha_1) f(x_2) \\ &= \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2). \end{aligned}$$

Logo,

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2).$$

Suponhamos, agora, que para algum $k \in \mathbb{N}$ e para números reais $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in [0,1]$ tais que $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = 1$, tenhamos:

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \cdots + \alpha_k f(x_k),$$

para $x_1, x_2, \ldots, x_k \in (a, b)$.

Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1} \in [0, 1]$ tais que $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{k+1} = 1$, ou equivalentemente, $1 - \alpha_{k+1} = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k$. Para $x_1, x_2, \ldots, x_{k+1} \in (a, b)$, temos:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k + \alpha_{k+1} x_{k+1} = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k) + \alpha_{k+1} x_{k+1}$$
$$= (1 - \alpha_{k+1}) \left(\frac{\alpha_1}{1 - \alpha_{k+1}} x_1 + \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_{k+1}} x_2 + \cdots + \frac{\alpha_k}{1 - \alpha_{k+1}} x_k \right) + \alpha_{k+1} x_{k+1}$$

Chamemos $y_{k+1} = \dfrac{\alpha_1}{1 - \alpha_{k+1}} x_1 + \dfrac{\alpha_2}{1 - \alpha_{k+1}} x_2 + \cdots + \dfrac{\alpha_k}{1 - \alpha_{k+1}} x_k$.
Agora, como $a < x_i < b$, para todo $i = 1, 2, \ldots, k$, temos

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_{k+1}} x_1 + \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_{k+1}} x_2 + \cdots + \frac{\alpha_k}{1 - \alpha_{k+1}} x_k \\ &< \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_{k+1}} b + \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_{k+1}} b + \cdots + \frac{\alpha_k}{1 - \alpha_{k+1}} b \\ &= \frac{b}{1 - \alpha_{k+1}} (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k) \\ &= \frac{b}{1 - \alpha_{k+1}} (1 - \alpha_{k+1}) = b. \end{aligned}$$

De modo análogo, podemos concluir que $y_{k+1} > a$. Portanto, $y_{k+1} \in (a, b)$.
Agora, como f é convexa em (a, b), temos:

$$\begin{aligned} f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{k+1} x_{k+1}) &= f((1 - \alpha_{k+1}) y_{k+1} + \alpha_{k+1} x_{k+1}) && (3.15) \\ &\leq (1 - \alpha_{k+1}) f(y_{k+1}) + \alpha_{k+1} f(x_{k+1}). && (3.16) \end{aligned}$$

Para completar a prova de que a desigualdade (3.14) é válida para todo $n \in \mathbb{N}$, vamos mostrar que

$$(1 - \alpha_{k+1}) f(y_{k+1}) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \cdots + \alpha_k f(x_k). \tag{3.17}$$

Mas, como $1 - \alpha_{k+1} = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k$, temos:

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k}{1 - \alpha_{k+1}} = 1,$$

ou seja,

$$\frac{\alpha_1}{1-\alpha_{k+1}} + \frac{\alpha_2}{1-\alpha_{k+1}} + \cdots + \frac{\alpha_k}{1-\alpha_{k+1}} = 1.$$

Usando a hipótese de indução, obtemos:

$$f(y_{k+1}) = f\left(\frac{\alpha_1}{1-\alpha_{k+1}}x_1 + \frac{\alpha_2}{1-\alpha_{k+1}}x_2 + \cdots + \frac{\alpha_k}{1-\alpha_{k+1}}x_k\right) \tag{3.18}$$

$$\leq \frac{\alpha_1}{1-\alpha_{k+1}}f(x_1) + \frac{\alpha_2}{1-\alpha_{k+1}}f(x_2) + \cdots + \frac{\alpha_k}{1-\alpha_{k+1}}f(x_k). \tag{3.19}$$

Por (3.15) e (3.18), verificamos a validade de (3.17) e, com isso, completamos a demonstração do resultado. □

Agora, se $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ é côncava, então, na Desigualdade de Jensen, teremos:

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n) \geq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \cdots + \alpha_n f(x_n). \tag{3.20}$$

É importante notar que a Desigualdade de Jensen pode ser reescrita da seguinte forma:

Se $f : I \to \mathbb{R}$ é convexa em I, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ e $m_1, m_2, \ldots, m_n$ são números reais não-negativos tais que $m_1 + m_2 + \cdots + m_n > 0$, então:

$$f\left(\frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}\right) \leq \frac{m_1f(x_1) + m_2f(x_2) + \cdots + m_nf(x_n)}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}.$$

A seguir, veremos como a Desigualdade de Jensen nos auxilia na demonstração de outras desigualdades.

Exemplo 3.10. Considere a função $f(x) = -\ln x$ definida no intervalo $(0, +\infty)$.

Note que:

$$f'(x) = \frac{-1}{x} \quad \text{e} \quad f''(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Sendo assim, $f''(x) > 0$, para todo $x \in (0, +\infty)$, de onde segue que f é estritamente convexa em $(0, +\infty)$.

Pela Desigualdade de Jensen (Teorema 3.12), para $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n = \frac{1}{n}$ $(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1)$ e $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (0, +\infty)$, segue que:

$$
\begin{aligned}
-\ln(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n) &= -\ln\left(\frac{1}{n}x_1 + \frac{1}{n}x_2 + \cdots + \frac{1}{n}x_n\right) \\
&= -\ln\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \\
&\leq \frac{-(\ln x_1 + \ln x_2 + \cdots + \ln x_n)}{n}.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\ln\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) &\geq \frac{\ln x_1 + \ln x_2 + \cdots + \ln x_n}{n} \\
\frac{\ln x_1 + \ln x_2 + \cdots + \ln x_n}{n} &\leq \ln\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \\
\frac{1}{n} \cdot (\ln x_1 + \ln x_2 + \cdots + \ln x_n) &\leq \ln\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \\
\frac{1}{n} \cdot (\ln x_1 x_2 \ldots x_n) &\leq \ln\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \\
\ln(x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} &\leq \ln\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \\
(x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} &\leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \\
\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} &\leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.
\end{aligned}
$$

Dessa forma, provamos a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, usando a convexidade da função ln e a Desigualdade de Jensen (Teorema 3.12).

Exemplo 3.11. Seja $f(x) = x^2$, para $x \in \mathbb{R}$. Como $f''(x) = 2 > 0$, segue que f é estritamente convexa em $\mathbb{R}$. Então, pela Desigualdade de Jensen, para $m_1, m_2, \ldots, m_n$ números reais não-negativos tais que $m_1 + m_2 + \cdots + m_n > 0$, temos:

$$f\left(\frac{m_1x_1+m_2x_2+\cdots+m_nx_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}\right)\leq\frac{m_1f(x_1)+m_2f(x_2)+\cdots+m_nf(x_n)}{m_1+m_2+\cdots+m_n}$$
$$\left(\frac{m_1x_1+m_2x_2+\cdots+m_nx_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}\right)^2\leq\frac{m_1x_1^2+m_2x_2^2+\cdots+m_nx_n^2}{m_1+m_2+\cdots+m_n},$$

ou seja,

$$\frac{(m_1x_1+m_2x_2+\cdots+m_nx_n)^2}{(m_1+m_2+\cdots+m_n)^2}\leq\frac{m_1x_1^2+m_2x_2^2+\cdots+m_nx_n^2}{m_1+m_2+\cdots+m_n},$$

de onde se obtém

$$(m_1x_1+m_2x_2+\cdots+m_nx_n)^2\leq(m_1x_1^2+m_2x_2^2+\cdots+m_nx_n^2)(m_1+m_2+\cdots+m_n).$$

Tomando $m_i=b_i^2$ e $x_i=\dfrac{a_i}{b_i}$, para todo $i=1,2,\ldots,n$, obtemos:

$$\left(b_1^2\frac{a_1}{b_1}+b_2^2\frac{a_2}{b_2}+\cdots+b_n^2\frac{a_n}{b_n}\right)^2\leq\left(b_1^2\frac{a_1^2}{b_1^2}+b_2^2\frac{a_2^2}{b_2^2}+\cdots+b_n^2\frac{a_n^2}{b_n^2}\right)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)$$
$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\leq(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2),$$

de onde segue que

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2.$$

Assim, provamos a Desigualdade de Cauchy-Schwarz usando a convexidade da função x^2 em $\mathbb{R}$ e a Desigualdade de Jensen.

A seguir, provaremos algumas desigualdades usando como artifício a Desigualdade de Jensen (Teorema 3.12).

Exemplo 3.12. Sejam α,β,γ os três ângulos de um triângulo. É verdadeira a seguinte desigualdade:

$$\operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta.\operatorname{sen}\gamma\leq\frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

De fato, como $\alpha,\beta,\gamma\in(0,\pi)$, segue que $\operatorname{sen}\alpha,\operatorname{sen}\beta,\operatorname{sen}\gamma>0$. Agora, como

$AM \geq GM$, temos:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\gamma}{3} \geq \sqrt[3]{\operatorname{sen}\alpha . \operatorname{sen}\beta . \operatorname{sen}\gamma}.$$

A função $f(x) = \operatorname{sen} x$ é côncava no intervalo $(0, \pi)$. Tomando $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dfrac{1}{3}$ e usando a desigualdade (3.20), obtemos:

$$f\left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}\right) \geq \frac{1}{3}\operatorname{sen}\alpha + \frac{1}{3}\operatorname{sen}\beta + \frac{1}{3}\operatorname{sen}\gamma,$$

ou seja,

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\gamma}{3} \leq \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Logo,

$$\sqrt[3]{\operatorname{sen}\alpha . \operatorname{sen}\beta . \operatorname{sen}\gamma} \leq \frac{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\gamma}{3} \leq \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

de onde segue que

$$\operatorname{sen}\alpha . \operatorname{sen}\beta . \operatorname{sen}\gamma \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

A igualdade ocorre quando $\alpha = \beta = \gamma = \dfrac{\pi}{3}$, isto é, quando o triângulo é equilátero.

Exemplo 3.13. A desigualdade $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} + \sqrt{z^2+1} \geq \sqrt{6(x+y+z)}$ é verdadeira para x, y e z números reais não-negativos.

Com efeito, consideremos a função $f(t) = \sqrt{t^2+1}$ para $t \geq 0$. Para qualquer $t \geq 0$, temos:

$$f'(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$$

e

$$f''(t) = \frac{1}{\sqrt{(t^2+1)^3}} > 0.$$

Portanto, $f(t) = \sqrt{t^2+1}$ é convexa em $\mathbb{R}_*^+$.

Usando a Desigualdade de Jensen, com $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dfrac{1}{3}$, obtemos:

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) &\leq \frac{1}{3}f(x) + \frac{1}{3}f(y) + \frac{1}{3}f(z) \\
\sqrt{\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2 + 1} &\leq \frac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} + \sqrt{z^2+1}}{3} \\
\sqrt{\frac{(x+y+z)^2}{9} + \frac{9}{9}} &\leq \frac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} + \sqrt{z^2+1}}{3} \\
\frac{\sqrt{(x+y+z)^2 + 9}}{3} &\leq \frac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} + \sqrt{z^2+1}}{3} \\
\sqrt{(x+y+z)^2 + 9} &\leq \sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} + \sqrt{z^2+1}.
\end{aligned}$$

Agora, como $((x+y+z)-3)^2 \geq 0$, ou seja, $(x+y+z)^2 + 9 - 6(x+y+z) \geq 0$, temos:

$$(x+y+z)^2 + 9 \geq 6(x+y+z),$$

de onde segue que

$$\sqrt{6(x+y+z)} \leq \sqrt{(x+y+z)^2 + 9} \leq \sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} + \sqrt{z^2+1}.$$

Logo,

$$\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} + \sqrt{z^2+1} \geq \sqrt{6(x+y+z)}.$$

A igualdade ocorre quando $x = y = z = 1$.

Corolário 3.7 (Desigualdade de Young)**.** *Sejam $p, q \geq 1$ números reais tais que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}_*^+$, tem -se:*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração. Sejam $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}_*^+$, com $y_1 + y_2 = 1$. Como a função logaritmo natural é côncava em $(0, +\infty)$ (veja o Exemplo 3.10), segue que

$$\ln(y_1 x_1 + y_2 x_2) \geq y_1 \ln x_1 + y_2 \ln x_2,$$

pela Desigualdade de Jensen (Equação 3.20). Fazendo $x_1 = a^p$, $x_2 = b^q$, $y_1 = \dfrac{1}{p}$ e $y_2 = \dfrac{1}{q}$, temos que:

$$\ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \geq \frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q = \ln(a.b).$$

Como a função logaritmo é crescente, concluímos que

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

□

Corolário 3.8 (Desigualdade de Young com ε)**.** *Sejam a e b números reais não-negativos, $p, q > 1$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Então,*

$$ab \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q,$$

em que $\varepsilon > 0$ e $C(\varepsilon)$ é uma constante real positiva que depende de ε.

Demonstração. Tomemos $\xi \in \mathbb{R}$, com $\xi > 0$. Então, pela Desigualdade de Young (Corolário 3.7), temos

$$ab = \xi a \cdot \frac{b}{\xi} \leq \frac{1}{p}(\xi a)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{b}{\xi}\right)^q = \frac{\xi^p}{p}a^p + \frac{1}{q\xi^q}b^q.$$

Seja então $\varepsilon = \dfrac{\xi^p}{p}$, isto é, $\xi = (\varepsilon p)^{\frac{1}{p}}$. Sendo assim,

$$ab \leq \varepsilon a^p + \frac{1}{q(\varepsilon p)^{\frac{q}{p}}} \cdot b^q = \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q.$$

□

Apresentaremos e demonstraremos, a seguir, a Desigualdade de Hölder, a qual utiliza em sua demonstração a Desigualdade de Young.

Corolário 3.9 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam* $a_1, a_2, \cdots, a_n$ *e* $b_1, b_2, \cdots, b_n$ *números reais positivos, com* $n \in \mathbb{N}$*, e* $p, q \geq 1$ *tais que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Então,*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Demonstração. Sejam A e B números reais positivos dados por $A = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$ e $B = \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$. Note que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq AB \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{A} \cdot \frac{b_i}{B} \leq 1.$$

Vamos, então, provar que $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{A} \cdot \frac{b_i}{B} \leq 1$. Com efeito, fazendo $x_i = \frac{a_i}{A}$ e $y_i = \frac{b_i}{B}$, para $i \in \{1, ..., n\}$, temos

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^p = \frac{1}{A^p} \sum_{i=1}^{n} a_i^p = \frac{1}{A^p} \cdot A^p = 1$$

e

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^q = \frac{1}{B^q} \sum_{i=1}^{n} b_i^q = \frac{1}{B^q} \cdot B^q = 1.$$

Assim, pela Desigualdade de Young, segue que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i &\leq \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i^p}{p} + \frac{y_i^q}{q}\right) \\ &= \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{n} x_i^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{n} y_i^q \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \end{aligned}$$

□

Outra consequência conhecida da Desigualdade de Young é a Desigualdade de Minkowski, a qual não será abordada aqui. O leitor pode consultar a referência [5] para estudá-la.

3.6 Generalização da Desigualdade de Cauchy-Schwarz e das Desigualdades entre as médias

Nesta seção, serão apresentadas as formas mais gerais da Desigualdade de Cauchy-Schwarz e das desigualdades entre as médias.

Teorema 3.13 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Sejam $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ e $m_i \in \mathbb{R}^+_*$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Então,*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i m_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 m_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 m_i\right).$$

A igualdade ocorre quando $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \cdots = \dfrac{a_n}{b_n}$.

Demonstração. Como $m_i > 0$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, podemos considerar o trinômio do quadrado perfeito:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(a_i\sqrt{m_i} - xb_i\sqrt{m_i})^2 &= \sum_{i=1}^{n}(a_i^2 m_i - 2xa_ib_im_i + x^2b_i^2m_i)\\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 m_i - 2x\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_im_i\right) + x^2\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 m_i\right)\end{aligned}$$

Sabemos que $\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i\sqrt{m_i} - xb_i\sqrt{m_i})^2 \geq 0$. Portanto, o delta da equação do segundo grau em x, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 m_i - 2x(\sum\limits_{i=1}^{n} a_ib_im_i) + x^2(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2m_i)$, deve ser menor do que ou igual a zero, ou seja, devemos ter

$$\begin{aligned}\left[-2\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_im_i\right)\right]^2 - 4\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2m_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2m_i\right) &\leq 0\\ 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_im_i\right)^2 &\leq 4\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2m_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2m_i\right),\end{aligned}$$

de onde se conclui que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i m_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 m_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 m_i\right).$$

A igualdade ocorre quando $a_i\sqrt{m_i} - xb_i\sqrt{m_i} = 0, i = 1, 2, \ldots, n$, o que implica $x = \dfrac{a_i\sqrt{m_i}}{b_i\sqrt{m_i}} = \dfrac{a_i}{b_i}, i = 1, 2, \ldots, n.$ □

Observação 3.2. Se tivermos, no Teorema 3.13, a hipótese adicional de que $m_1 = m_2 = \cdots = m_n = m$ então obteremos a primeira Desigualdade de Cauchy-Schwarz estudada (veja Teorema 3.4), pois:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i m_i\right)^2 &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 m_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 m_i\right) \\
\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i m\right)^2 &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 m\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 m\right) \\
\left[m\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)\right]^2 &\leq m\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \cdot m\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \\
m^2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 &\leq m^2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \\
\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)
\end{aligned}$$

A prova do próximo resultado é extensa, mas pode ser feita, sem dificuldades, usando o Princípio de Indução Finita. Por esta razão, não a apresentaremos aqui. O leitor pode encontrá-la em [5], Teorema 10.2, página 107.

Teorema 3.14. *Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e $b_1, b_2, \ldots, b_n$ números reais não-negativos e $c_1, c_2, \ldots, c_n$ números reais positivos tais que $\dfrac{a_1}{c_1} \geq \dfrac{a_2}{c_2} \geq \cdots \geq \dfrac{a_n}{c_n}$ e $\dfrac{b_1}{c_1} \geq \dfrac{b_2}{c_2} \geq \ldots$ $\cdots \geq \dfrac{b_n}{c_n}$. Então,*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i b_i}{c_i} \geq \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i},$$

isto é,

$$\frac{a_1b_1}{c_1}+\frac{a_2b_2}{c_2}+\cdots+\frac{a_nb_n}{c_n}\geq\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n)}{c_1+c_2+\cdots+c_n}.$$

A seguir, apresentaremos um problema que pode ser resolvido com o auxílio do Teorema 3.14.

Exemplo 3.14. Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ as medidas dos lados de um polígono, em que $n \geq 3$, e seja $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Então,

$$\frac{a_1}{s-2a_1}+\frac{a_2}{s-2a_2}+\cdots+\frac{a_n}{s-2a_n}\geq\frac{n}{n-2}.$$

Com efeito, sem perda de generalidade, podemos assumir que $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \cdots \geq a_n > 0$. Sendo assim,

$$\begin{aligned}2a_1\geq 2a_2\geq\cdots\geq 2a_n>0 \quad&\Leftrightarrow\quad -2a_1\leq -2a_2\leq\cdots\leq -2a_n\\ &\Leftrightarrow\quad 0<s-2a_1\leq s-2a_2\leq\cdots\leq s-2a_n.\end{aligned}$$

Pelo Teorema 3.14, tomando $b_i = 1$ e $c_i = s - 2a_i$, para $i = 1, 2, \ldots, n$, temos:

$$\begin{aligned}\frac{a_1\cdot 1}{s-2a_1}+\frac{a_2\cdot 1}{s-2a_2}+\cdots+\frac{a_n\cdot 1}{s-2a_n}&\geq\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)(1+1+\cdots+1)}{s-2a_1+s-2a_2+\cdots+s-2a_n}\\ &=\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)\cdot n}{n\cdot s-2(a_1+a_2+\cdots+a_n)}\\ &=\frac{s\cdot n}{n\cdot s-2s}\\ &=\frac{n}{n-2}.\end{aligned}$$

Observação 3.3. Se na hipótese do Teorema 3.14 tivermos $\frac{a_1}{c_1}\geq\frac{a_2}{c_2}\geq\cdots\geq\frac{a_n}{c_n}$ e $\frac{b_1}{c_1}\leq\frac{b_2}{c_2}\leq\cdots\leq\frac{b_n}{c_n}$, então a seguinte desigualdade será válida:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ib_i}{c_i}\leq\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}c_1}.$$

Este fato pode ser percebido especialmente quando $n = 2$, pois se $\dfrac{a_1}{c_1} \geq \dfrac{a_2}{c_2}$ e $\dfrac{b_1}{c_1} \leq \dfrac{b_2}{c_2}$, então $a_1c_2 - a_2c_1 \geq 0$ e $b_1c_2 - b_2c_1 \leq 0$ e, portanto, $(a_1c_2 - a_2c_1)(b_1c_2 - b_2c_1) \leq 0$.

Observação 3.4. Para $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 0$, $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \geq 0$ e $0 < c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_n$, temos:

$$\frac{a_1}{c_1} \geq \frac{a_2}{c_1} \geq \frac{a_2}{c_2} \geq \cdots \geq \frac{a_n}{c_n} \text{ e } \frac{b_1}{c_1} \geq \frac{b_2}{c_1} \geq \frac{b_2}{c_2} \geq \cdots \geq \frac{b_n}{c_n}.$$

Portanto, pelo Teorema 3.14, concluímos que:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i b_i}{c_i} \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i}{\sum_{i=1}^{n} c_1}.$$

Para exibirmos a generalização das desigualdades entre as médias, precisaremos da seguinte definição:

Definição 3.7. *Sejam $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ uma n-úpla de números reais positivos e $r \neq 0$ um número real. A média $M_r(a)$, de ordem r, é definida por*

$$M_r(a) = \left(\frac{a_1^r + a_2^r + \cdots + a_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Para $r = 1$, temos:

$$M_1(a) = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n},$$

que equivale a média aritmética.

Para $r = 2$, temos:

$$M_2(a) = \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}},$$

que equivale a média quadrática.

Agora, para $r=-1$, temos a média harmônica, já que

$$\begin{aligned} M_{-1}(a) &= \left(\frac{a_1^{-1}+a_2^{-1}+\cdots+a_n^{-1}}{n}\right)^{\frac{1}{-1}} \\ &= \left(\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n}\right)^{-1} \\ &= \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}. \end{aligned}$$

E quando $r\to 0$ temos que $M_r(a)$ tende a média geométrica dos números $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Com efeito, como

$$\left(\frac{a_1^r+a_2^r+\cdots+a_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}} = e^{\frac{1}{r}\ln\left(\frac{a_1^r+\cdots+a_n^r}{n}\right)} = e^{\frac{\ln\left(\frac{a_1^r+\cdots+a_n^r}{n}\right)}{r}},$$

temos que

$$\lim_{r\to 0} M_r(a) = e^{\lim\limits_{r\to 0^+}\frac{\ln\left(\frac{a_1^r+\cdots+a_n^r}{n}\right)}{r}}.$$

Mas,

$$\begin{aligned} \lim_{r\to 0^+}\frac{\ln\left(\frac{a_1^r+\cdots+a_n^r}{n}\right)}{r} &= \lim_{r\to 0^+}\frac{\ln\left(\frac{a_1^r+\cdots+a_n^r}{n}\right)-\ln 1}{r} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dr}}\left(\ln\left(\frac{a_1^r+\cdots+a_n^r}{n}\right)\right)_{r=0} \\ &= \frac{1}{n}\ln(a_1a_2\ldots a_n). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{r\to 0} M_r(a) = e^{\ln(a_1a_2\ldots a_n)^{\frac{1}{n}}} = (a_1a_2\ldots a_n)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}.$$

O próximo resultado é uma consequência do Teorema 3.16, que será demonstrado na sequência. Por esta razão, omitiremos a sua prova aqui. Porém, adiantamos que esta se baseia no fato de que a função x^α é convexa em $\mathbb{R}_*^+$, quando $\alpha>1$ ou

$\alpha < 0$, e côncava em $\mathbb{R}_*^+$ quando $0 < \alpha < 1$ (veja o Exemplo 3.8). A prova é feita com o auxílio da Desigualdade de Jensen (Teorema 3.12).

Teorema 3.15 (Desigualdades entre as médias)**.** *Sejam $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ uma n-úpla de números reais positivos e $r \neq 0$ um número real. Então,*

$$M_r(a) \leq M_s(a), \quad se \;\; r \leq s.$$

No exemplo a seguir, usaremos o Teorema 3.15 para demonstrar uma desigualdade não-trivial.

Exemplo 3.15. Para $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, a desigualdade

$$(a^2 + b^2 + c^2)^3 \leq 3(a^3 + b^3 + c^3)^2$$

é verdadeira.

De fato, pelo Teorema 3.15, temos:

$$M_2(a, b, c) \leq M_3(a, b, c),$$

isto é,

$$\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}\right)^{\frac{1}{3}},$$

de onde segue que

$$(a^2 + b^2 + c^2)^3 \leq 3(a^3 + b^3 + c^3)^2.$$

A seguir, temos uma outra definição a cerca da generalização das Desigualdades entre as médias.

Definição 3.8. *Seja $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ uma n-úpla de números reais não-negativos tal que $m_1 + m_2 + \cdots + m_n = 1$. Então, a média $M_r^m(a)$, de ordem $r(r \neq 0)$, para a n-úpla $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ é definida por*

$$M_r^m(a) = (a_1^r m_1 + a_2^r m_2 + \cdots + a_n^r m_n)^{\frac{1}{r}}.$$

Note que se $m_1 = m_2 = \cdots = m_n = \dfrac{1}{n}$, então $M_r^m(a) = M_r(a)$. E se $n = 3$,

$r = 4$, $m_1 = \dfrac{1}{2}$, $m_2 = \dfrac{1}{3}$ e $m_3 = \dfrac{1}{6}$, então

$$M_4^m(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}y^4 + \frac{1}{6}z^4\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Teorema 3.16 (Generalização das Desigualdades entre as médias)**.** *Seja $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ uma n-úpla de números reais positivos e $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ também uma n-úpla de números reais positivos tal que $m_1 + m_2 + \cdots + m_n = 1$. Então, para $r \leq s$, temos:*

$$M_r^m(a) \leq M_s^m(a),$$

isto é,

$$(a_1^r m_1 + a_2^r m_2 + \cdots + a_n^r m_n)^{\frac{1}{r}} \leq (a_1^s m_1 + a_2^s m_2 + \cdots + a_n^s m_n)^{\frac{1}{s}}.$$

Demonstração. Para provar este resultado, usaremos o fato de que a função $f(x) = x^\alpha$ é convexa em $\mathbb{R}_*^+$ para $\alpha > 1$ ou $\alpha < 0$ e côncava em $\mathbb{R}_*^+$ para $0 < \alpha < 1$ (veja o Exemplo 3.8).

Provaremos o resultado para o caso em que $r < s$, com $r, s \neq 0$. Dividiremos a prova em três casos.

Caso 1: $0 < r < s$.

Neste caso, temos $1 < \dfrac{s}{r}$. Então, a função $f(x) = x^{\frac{s}{r}}$ é convexa em $\mathbb{R}_*^+$ e, pela Desigualdade de Jensen, segue que

$$f(m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n) \leq m_1f(x_1) + m_2f(x_2) + \cdots + m_nf(x_n),$$

com $m_1 + m_2 + \cdots + m_n = 1$ e $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$(m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n)^{\frac{s}{r}} \leq m_1x_1^{\frac{s}{r}} + m_2x_2^{\frac{s}{r}} + \cdots + m_nx_n^{\frac{s}{r}}.$$

Agora, fazendo $x_i = a_i^r$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, temos:

$$\begin{aligned}
(m_1a_1^r + m_2a_2^r + \cdots + m_na_n^r)^{\frac{s}{r}} &\leq m_1a_1^s + m_2a_2^s + \cdots + m_na_n^s \\
((m_1a_1^r + m_2a_2^r + \cdots + m_na_n^r)^{\frac{s}{r}})^{\frac{1}{s}} &\leq (m_1a_1^s + m_2a_2^s + \cdots + m_na_n^s)^{\frac{1}{s}} \\
(m_1a_1^r + m_2a_2^r + \cdots + m_na_n^r)^{\frac{1}{r}} &\leq (m_1a_1^s + m_2a_2^s + \cdots + m_na_n^s)^{\frac{1}{s}},
\end{aligned}$$

de onde se conclui que $M_r^m(a) \leq M_s^m(a)$.

Caso 2: $r < 0 < s$.

Neste caso, temos $\dfrac{s}{r} < 0$, pois r e s têm sinais contrários. Então, a função $f(x) = x^{\frac{s}{r}}$ é convexa em $\mathbb{R}_*^+$ e a prova do resultado segue como no caso anterior.

Caso 3: $r < s < 0$.

Como $r < s < 0$, temos:

i) $r < s < 0 \Rightarrow 0 < \dfrac{s}{r} < 1$, pois $|s| < |r|$;

ii) $r < 0$ e $s < 0 \Rightarrow \dfrac{s}{r} > 0$.

Portanto, por *i)* e *ii)*, temos $0 < \dfrac{s}{r} < 1$ e, sendo assim, a função $f(x) = x^{\frac{s}{r}}$ é côncava em $\mathbb{R}_*^+$. Usando a desigualdade contrária na Desigualdade de Jensen (veja (3.20)), por f ser côncava, obtemos:

$$\begin{aligned}
&f(m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n) \geq m_1f(x_1) + m_2f(x_2) + \cdots + m_nf(x_n)\\
&(m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n)^{\frac{s}{r}} \geq m_1x_1^{\frac{s}{r}} + m_2x_2^{\frac{s}{r}} + \cdots + m_nx_n^{\frac{s}{r}},
\end{aligned}$$

para $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

Fazendo $x_i = a_i^r$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, segue que:

$$(m_1a_1^r + m_2a_2^r + \cdots + m_na_n^r)^{\frac{s}{r}} \geq m_1a_1^s + m_2a_2^s + \cdots + m_na_n^s.$$

Agora, como $r < s < 0$, obtemos:

$$\begin{aligned}
((m_1a_1^r + m_2a_2^r + \cdots + m_na_n^r)^{\frac{s}{r}})^{\frac{1}{s}} &\leq (m_1a_1^s + m_2a_2^s + \cdots + m_na_n^s)^{\frac{1}{s}}\\
(m_1a_1^r + m_2a_2^r + \cdots + m_na_n^r)^{\frac{1}{r}} &\leq (m_1a_1^s + m_2a_2^s + \cdots + m_na_n^s)^{\frac{1}{s}},
\end{aligned}$$

de onde se obtém $M_r^m(a) \leq M_s^m(a)$.

Os casos em que $r = 0$ ou $s = 0$ seguem do fato de que a função $t \mapsto M_t^m(a)$ é contínua e do que foi constatado nos casos anteriores. $\square$

A seguir, demonstraremos desigualdades com o auxílio do Teorema 3.16.

Exemplo 3.16. Para $a, b, c \in \mathbb{R}_*^+$, é verdadeira a seguinte desigualdade:

$$\frac{(a + 2b + 3c)^2}{a^2 + 2b^2 + 3c^2} \leq 6.$$

Com efeito, tomando $m_1 = \dfrac{1}{6}, m_2 = \dfrac{2}{6}$ e $m_3 = \dfrac{3}{6}$, temos $m_1 + m_2 + m_3 = 1$. Pelo Teorema 3.16, temos que, para $r = 1$ e $s = 2$, vale:

$$M_1^m(a,b,c) \leq M_2^m(a,b,c).$$

Portanto,

$$\left(\frac{1}{6}a^1+\frac{2}{6}b^1+\frac{3}{6}c^1\right)^{\frac{1}{1}} \leq \left(\frac{1}{6}a^2+\frac{2}{6}b^2+\frac{3}{6}c^2\right)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \left(\frac{a+2b+3c}{6}\right)^2 \leq \left(\left(\frac{a^2+2b^2+3c^2}{6}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2,$$

de onde segue que

$$(a+2b+3c)^2 \leq \frac{36(a^2+2b^2+3c^2)}{6} \quad \text{e, portanto,} \quad \frac{(a+2b+3c)^2}{a^2+2b^2+3c^2} \leq 6.$$

Exemplo 3.17. Para $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}$, é válida a seguinte desigualdade:

$$a^n + b^n + c^n \geq \left(\frac{a+2b}{3}\right)^n + \left(\frac{b+2c}{3}\right)^n + \left(\frac{c+2a}{3}\right)^n.$$

De fato, tomando $m_1 = m_2 = m_3 = \dfrac{1}{3}$, temos $m_1 + m_2 + m_3 = 1$. Pelo Teorema 3.16, segue que:

$$M_1^m(a,b,c) \leq M_n^m(a,b,c),$$

uma vez que $n \geq 1$.

Então,

$$\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt[n]{\frac{a^n+b^n+c^n}{3}},$$

de onde segue que

$$\frac{a^n+b^n+c^n}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^n. \tag{3.21}$$

Como a desigualdade (3.21) vale para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, podemos afirmar que

$$\frac{a^n+b^n+b^n}{3} \geq \left(\frac{a+b+b}{3}\right)^n = \left(\frac{a+2b}{3}\right)^n,$$

bem como

$$\frac{b^n + c^n + c^n}{3} \geq \left(\frac{b + 2c}{3}\right)^n \quad \text{e} \quad \frac{c^n + a^n + a^n}{3} \geq \left(\frac{c + 2a}{3}\right)^n.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{3(a^n + b^n + c^n)}{3} &= \frac{(a^n + b^n + b^n) + (b^n + c^n + c^n) + (c^n + a^n + a^n)}{3} \\ &\geq \left(\frac{a + 2b}{3}\right)^n + \left(\frac{b + 2c}{3}\right)^n + \left(\frac{c + 2a}{3}\right)^n.\end{aligned}$$

4 Aplicações de desigualdades matemáticas no Ensino Médio

Finalizaremos este trabalho com algumas aplicações das desigualdades matemáticas, vistas nos capítulos anteriores, no Ensino Médio. Vamos exibir problemas relacionados a geometria, funções, análise combinatória, álgebra e cálculo diferencial. As desigualdades entre as médias, muito úteis na resolução de problemas de otimização, serão abordadas neste capítulo.

As principais referências para este capítulo são [4], [5], [9] e [10].

Aplicação 4.1. *Esta aplicação, sugerida por [5], é destinada aos alunos que desejam participar de Olimpíadas de Matemática.*

Problema: *Sejam a, b e c números reais positivos tais que $a+b+c=1$. Prove a seguinte desigualdade:*

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2 \geq \frac{100}{3}.$$

Solução: Vamos considerar a função $f(x)=x^2$, para $x \in (0,+\infty)$. Como $f''(x)=2>0$, então f é uma função convexa no intervalo $(0,+\infty)$. Usando a Desigualdade de Jensen (Teorema 3.12) com $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\dfrac{1}{3}$, temos:

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{3}\left(a+\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{3}\left(b+\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{3}\left(c+\frac{1}{c}\right)\right) &\leq \frac{1}{3}f\left(a+\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{3}f\left(b+\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{3}f\left(c+\frac{1}{c}\right)\\
\left(\frac{1}{3}\left[\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)+\left(c+\frac{1}{c}\right)\right]\right)^2 &\leq \frac{1}{3}\left[\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2\right]\\
\frac{1}{9}\left(a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}+c+\frac{1}{c}\right)^2 &\leq \frac{1}{3}\left[\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2\right]\\
\frac{1}{3}\left(a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 &\leq \left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2,
\end{aligned}$$

de onde segue que

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2 \geq \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2.$$

Agora, usando a desigualdade entre as médias aritmética e harmônica ($AM \geq HM$), obtemos:

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{\frac{1}{a}}+\frac{1}{\frac{1}{b}}+\frac{1}{\frac{1}{c}}} \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} = \frac{9}{1} = 9.$$

Portanto,

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2 \geq \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 \geq \frac{1}{3}(1+9)^2 = \frac{1}{3}(10)^2 = \frac{100}{3}.$$

Aplicação 4.2. *Esta aplicação relaciona desigualdades e Análise Combinatória.*
Problema: *Mostre que, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}_*^+$,*

$$\left(\frac{x}{y}+2+\frac{y}{x}\right)^4 \geq C_{8,4},$$

em que $C_{8,4}$ é a combinação de 8 elementos tomados 4 a 4.

Solução: Sabendo que $C_{8,4} = \frac{8!}{4!4!} = 70$, devemos mostrar a seguinte desigual-

dade:

$$\left(\frac{x}{y}+2+\frac{y}{x}\right)^4 \geq 70.$$

Usando a desigualdade entre as médias quadrática e geométrica ($QM \geq GM$), *temos:*

$$x^2+y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2}{xy} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2,$$

de onde se obtém

$$\frac{x}{y}+2+\frac{y}{x} \geq 2+2=4.$$

Por conseguinte, $\left(\frac{x}{y}+2+\frac{y}{x}\right)^4 \geq (4)^4 = 256 \geq 70.$

Aplicação 4.3. *O problema exposto abaixo pode ser resolvido com o auxílio do Princípio de Indução Finita. Porém, usaremos a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica* ($AM \geq GM$) *para resolvê-lo, tornando sua solução mais acessível aos alunos do Ensino Médio.*

Problema: *Prove que, para qualquer inteiro* $n > 1$*, a desigualdade*

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

é verdadeira.

Solução: Usando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica ($AM \geq GM$)*, isto é,* $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}$*, com* $x_1=1, x_2=2, \ldots, x_n=n$*,* $n>1$*, temos:*

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n} > \sqrt[n]{1\cdot 2\cdot \cdots \cdot n} = \sqrt[n]{n!}.$$

Note que a igualdade não ocorre, pois $x_1 \neq x_2 \neq \cdots \neq x_n$.

Agora, como a sequência $(1,2,\ldots,n), n>1$*, é uma progressão aritmética de razão 1, temos que* $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Portanto,

$$\sqrt[n]{n!} < \frac{1+2+\cdots+n}{n} = \frac{n(n+1)}{2n},$$

de onde segue que

$$n! = (\sqrt[n]{n!})^n < \left(\frac{n(n+1)}{2n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Aplicação 4.4. *Esta aplicação, proposta por Korovkin em [9], relaciona desigualdades e o conceito de volume de um prisma.*

Problema: *De todos os paralelepípedos, conhecida a soma das três arestas perpendiculares entre si, qual é o de maior volume?*

Solução: Seja $m = a + b + c$, em que a, b, c são as medidas das arestas perpendiculares de um parelelepípedo. Sendo assim, o volume deste paralelepípedo é dado por $V = a \cdot b \cdot c$.

Usando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica ($AM \geq GM$), temos:

$$\sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c} \leq \frac{a+b+c}{3} = \frac{m}{3}.$$

Então,

$$V = (\sqrt[3]{V})^3 \leq \left(\frac{m}{3}\right)^3 = \frac{m^3}{27}.$$

Portanto, o volume máximo do paralelepípedo considerado é dado por $\frac{m^3}{27}$ e ocorre quando as variáveis envolvidas são iguais, ou seja, $a = b = c$. Logo, o paralelepípedo de maior volume é o cubo.

Aplicação 4.5. *Esta aplicação envolve geometria e a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica ($AM \geq GM$).*

Problema: *Se $1200\,cm^2$ de material estiverem disponíveis para confeccionar uma caixa com uma base quadrada e sem tampa, qual é o maior volume possível da caixa e quais as dimensões para que isso ocorra?*

Solução: Tomemos um paralelepípedo como na figura a seguir.

A área total da caixa sem tampa é $4xh + x^2 = 2xh + 2xh + x^2$. Assim, $2xh + 2xh + x^2 = 1200$. Já o volume da caixa é dado por $V = x^2h$.

Usando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica ($AM \geq GM$),

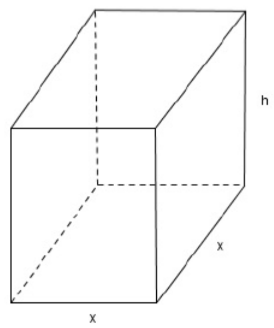

Figura 4.1: Problema da caixa

temos:

$$\begin{aligned}\frac{2xh + 2xh + x^2}{3} &\geq \sqrt[3]{2xh \cdot 2xh \cdot x^2}\\ &= \sqrt[3]{4x^4h^2}\\ &= \sqrt[3]{4(x^2h)^2}\\ &= \sqrt[3]{4V^2}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$400 = \frac{1200}{3} = \frac{2xh + 2xh + x^2}{3} \geq \sqrt[3]{4V^2}.$$

Mas,

$$400 \geq \sqrt[3]{4V^2} \Leftrightarrow V \leq 4000.$$

Sendo assim, o volume máximo da caixa é $4000\ cm^3$ *e ocorre quando as variáveis envolvidas são iguais, ou seja, quando* $2xh = x^2$*. Então,* $x^2 + x^2 + x^2 = 1200$*, o que implica* $x^2 = 400$ *e, consequentemente,* $x = 20\ cm$*. Daí,* $2 \cdot 20 \cdot h = 400$*, de onde segue que* $h = 10\ cm$*.*

Logo, as dimensões da caixa devem ser $x = 20\ cm$ *e* $h = 10\ cm$*.*

Aplicação 4.6. *Esta aplicação também relaciona desigualdades entre as médias e geometria, e explora os conceitos de área e volume.*

Problema: *Se uma lata de zinco de volume* $16\pi cm^3$ *deve ter a forma de um cilindro circular reto, quais devem ser a altura e o raio do cilindro para que a quantidade de material necessário para a sua fabricação seja a menor possível?*

Solução: Suponhamos que r seja o raio da base da lata, h a altura e S a área da superfície total da lata.

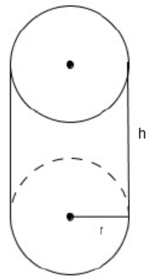

Figura 4.2: Problema da lata de zinco

Como $V = 16\pi$, temos que $\pi r^2 h = 16\pi$, de onde segue que $r^2 h = 16$.

Além disso, como $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$, usando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica ($AM \geq GM$), obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{S}{3} = \frac{\pi rh + \pi rh + 2\pi r^2}{3} &\geq \sqrt[3]{\pi rh \cdot \pi rh \cdot 2\pi r^2}\\ &= \sqrt[3]{2\pi^3 r^4 h^2}\\ &= \sqrt[3]{2\pi^3 (r^2 h)^2}\\ &= \sqrt[3]{2\pi^3 \cdot 16^2}\\ &= \sqrt[3]{2\pi^3 2^8}\\ &= \sqrt[3]{2^9 \pi^3}\\ &= 2^3\pi\\ &= 8\pi.\end{aligned}$$

Sendo assim, $\dfrac{S}{3} \geq 8\pi$ e, portanto, $S \geq 24\pi$. Mas, a área mínima ocorre quando a igualdade ocorre, isto é, quando $S = 24\pi$. Então, devemos ter $\pi rh = 2\pi r^2$, já que a igualdade ocorre quando as variáveis envolvidas na desigualdade $AM \geq GM$ são iguais. Assim, como $r^2 h = 16$, segue que

$$h \cdot \pi rh = 2\pi r^2 \cdot h$$

$$\pi r h^2 = 2\pi \cdot 16$$

$$rh^2 = 32.$$

Portanto, $r^2h^2 = 16 \cdot h$ *e* $r^2h^2 = 32 \cdot r$*, de onde segue que* $16 \cdot h = 32 \cdot r$ *e, consequentemente,* $r = \dfrac{h}{2}$*. Porém, como* $r^2h = 16$*, temos* $h^3 = 64$ *e, então,* $h = 4$ *e* $r = 2$*.*

Logo, a altura e o raio do cilindro para que a quantidade de material necessário para a fabricação da lata seja a menor possível devem ser $h = 4\,cm$ *e* $r = 2\,cm$*, respectivamente.*

Aplicação 4.7. *Esta aplicação tem por objetivo determinar o valor máximo de uma função usando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica,* $AM \geq GM$*.*

Problema: *Determine o valor máximo da função* $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x(1-x)$*.*

Solução: Usando a desigualdade $AM \geq GM$ *para os números* x *e* $(1-x)$*, temos:*

$$\frac{x + (1-x)}{2} \geq \sqrt{x(1-x)}$$

$$\frac{1}{2} \geq \sqrt{x(1-x)},$$

de onde segue que

$$x(1-x) \leq \frac{1}{4}.$$

Então, o valor máximo da função ocorre quando $x(1-x) = \dfrac{1}{4}$ *e ocorre quando as variáveis envolvidas são iguais, ou seja, quando* $x = 1 - x$ *e, portanto,* $x = \dfrac{1}{2}$*. Então,* $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$ *é o valor máximo da função* $f(x) = x(1-x)$ *definida em* $(0,1)$*.*

Aplicação 4.8. *Esta aplicação é uma adaptação do problema de Euclides mencionado na introdução do trabalho. Vamos resolvê-lo usando uma desigualdade entre médias.*

Problema: *De todos os retângulos com o mesmo perímetro, qual tem área máxima?*

Solução: Seja R um retângulo de lados x e y. Seja p o perímetro de R, ou seja, $p = 2x + 2y$. Assim, $\frac{p}{2} = x + y$. Além disso, a área de R é dada por $A = x \cdot y$.

Agora, usando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica ($AM \geq GM$), temos:

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{x \cdot y}$$
$$\frac{p}{4} \geq \sqrt{A},$$

de onde segue que

$$A \leq \frac{p^2}{16}.$$

Sendo assim, a área máxima é $\frac{p^2}{16}$ e ocorre quando $x = y$, isto é, quando o retângulo é, na verdade, um quadrado.

Aplicação 4.9. *Esta aplicação é conhecida como Desigualdade Isoperimétrica para Triângulos. Mostraremos esta desigualdade utilizando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica ($AM \geq GM$).*

Problema: *Prove que entre todos os triângulos de perímetro constante p, o equilátero é o de maior área.*

Solução: Consideremos um triângulo de lados a, b e c com $a + b + c = p$. A área S desse triângulo é dada pela fórmula de Heron:

$$S = \sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2} - a\right)\left(\frac{p}{2} - b\right)\left(\frac{p}{2} - c\right)}.$$

Usando a desigualdade $AM \geq GM$, temos:

$$S \leq \sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{\frac{p}{2} - a + \frac{p}{2} - b + \frac{p}{2} - c}{3}\right)^3} = \frac{p^2}{12\sqrt{3}}.$$

Então, a maior área possível é $\frac{p^2}{12\sqrt{3}}$, a qual se obtém quando

$$\frac{p}{2} - a = \frac{p}{2} - b = \frac{p}{2} - c,$$

ou seja, quando $a = b = c$. O triangulo é, então, equilátero e neste caso

$$S = \frac{p^2}{12\sqrt{3}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Aplicação 4.10. *Esta aplicação envolve círculos e polígonos e faz uso da Desigualdade de Jensen.*

Problema: *Sejam dados no plano um semicírculo Γ de raio R e um diâmetro A_0A_1 de Γ. Para cada inteiro $n > 2$, existe um único n-ágono $A_0A_1...A_{n-1}$ que satisfaz as seguintes condições:*

1. *$A_2, \ldots, A_{n-1} \in \Gamma$;*

2. *A área de $A_0A_1 \ldots A_{n-1}$ é a maior possível.*

Solução: Representaremos esta aplicação através da seguinte figura:

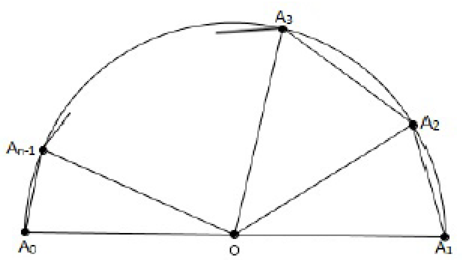

Figura 4.3: Problema do n-ágono

Seja $\widehat{A_iOA_{i+1}} = \alpha_i, 1 \leq i \leq n-1$, com $A_n = A_0$. Então, $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1} = \pi$, já que Γ é um semicírculo. A fórmula do seno para a área de um triângulo nos fornece:

$$\boldsymbol{A}(A_0A_1...A_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} \boldsymbol{A}(A_iOA_{i+1}) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2}R^2 \operatorname{sen}(\widehat{A_iOA_{i+1}}) = \frac{1}{2}R^2 \sum_{i=1}^{n-1} \operatorname{sen} \alpha_i,$$

em que $\boldsymbol{A}(A_0A_1...A_{n-1})$ denota a área de $A_0A_1...A_{n-1}$ e $\boldsymbol{A}(A_iOA_{i+1})$ denota a área de A_iOA_{i+1}. Agora, como a função $f(x) = \operatorname{sen} x$ é côncava em $[0, \pi]$ (veja Exemplo 3.7), pela Desigualdade de Jensen, segue que:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-1} \operatorname{sen}(\alpha_i) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n-1}{n-1} \operatorname{sen}(\alpha_i) &\leq \operatorname{sen}\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{n-1}{n-1}\alpha_i\right) \\ &= (n-1)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\right) \\ &= (n-1)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n-1}\right).\end{aligned}$$

Logo,

$$\boldsymbol{A}(A_0A_1...A_{n-1}) \leq \frac{1}{2}R^2(n-1)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n-1}\right).$$

E a igualdade ocorre se, e somente se, $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_{n-1} = \dfrac{\pi}{n-1}$. *Desta maneira, há um único polígono satisfazendo as condições do problema.*

Aplicação 4.11. *Esta aplicação faz uso da desigualdade entre as médias aritmética e geométrica.*

Problema: *Dada uma folha de cartolina de dimensões* $2m$ *por* $3m$, *deve-se construir, com a mesma, uma caixa aberta com o maior volume possível. Quais devem ser as dimensões da caixa?*

Solução: Tomemos a figura abaixo como uma representação para este problema.

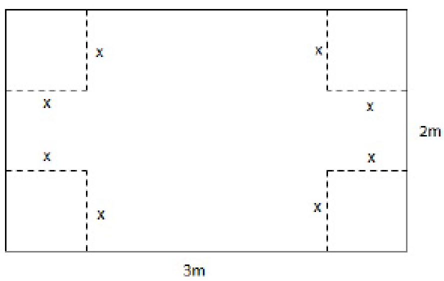

Figura 4.4: Problema da folha de cartolina

Sendo assim, seja x *a medida do comprimento do lado do quadrado que deve ser recortado de cada canto da folha de cartolina. Dessa forma, temos uma caixa* *com dimensões* $2-2x$, $3-2x$ *e* x, *em que* $0<x<1$. *Portanto, o volume da caixa é dado por* $V=(2-2x)(3-2x)x$.

Agora, como $AM \geq GM$, *considerando as variáveis* $2(2-2x)$, $(3-2x)$ *e* $6x$, *obtemos:*

$$\sqrt[3]{2(2-2x)(3-2x)6x} \leq \frac{2(2-2x)+(3-2x)+6x}{3}$$

$$\sqrt[3]{12(2-2x)(3-2x)x} \leq \frac{7}{3}$$

$$\sqrt[3]{12V} \leq \frac{7}{3},$$

de onde segue que

$$V \leq \frac{343}{324}.$$

Portanto, o volume máximo é $\frac{343}{324}m^2$ *e ocorre quando as variáveis forem iguais, isto é,* $2(2-2x)=3-2x=6x$, *o que implica* $x=0,375m$. *Logo, as dimensões da caixa devem ser, aproximadamente,* $1,2m$, $2,2m$ *e* $0,4m$.

Aplicação 4.12. *Esta aplicação faz uso da Desigualdade de Cauchy-Schwarz e aborda propriedades do triângulo retângulo.*

Problema: *Entre todos os triângulos retângulos de catetos* a *e* b *e hipotenusa* c *fixada, o que tem maior soma dos catetos* $s=a+b$ *é o triângulo isósceles.*

Solução: De fato, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz (Teorema 3.4) para as sequências de números reais (a,b) *e* $(1,1)$, *temos:*

$$s^2=(a+b)^2=(a\cdot 1+b\cdot 1)^2 \leq (a^2+b^2)(1^2+1^2)=2c^2.$$

Assim,

$$s=\sqrt{2c^2}=\sqrt{2}c.$$

E ainda, a igualdade ocorre quando as sequências forem proporcionais, isto é, quando $\frac{a}{1}=\frac{b}{1}$, *o que equivale a* $a=b$. *Logo, o triângulo deve ser retângulo e isósceles.*

Aplicação 4.13. *Esta aplicação envolve a Desigualdade Triangular.*

Problema: *Duas torres de alturas* h_1 *e* h_2, *respectivamente, estão separadas a uma distância* d. *As torres são amarradas por uma corda* APB *que vai do topo* A

da primeira torre para um ponto P no chão entre as torres, e então, até o topo B da segunda torre, como indicado na figura abaixo. Qual a posição do ponto P para que o comprimento da corda seja o menor possível?

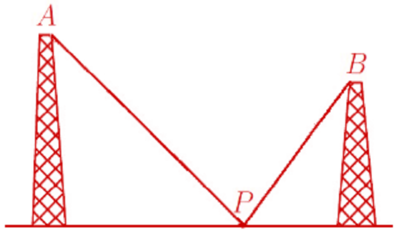

Figura 4.5: Problema das torres

Solução: Resolveremos o problema proposto, utilizando a seguinte representação:

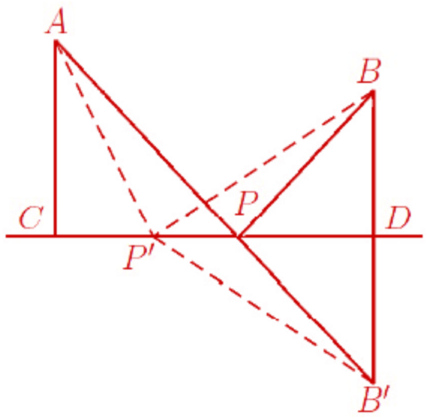

Figura 4.6: Resolução geométrica do problema das torres

Como representado na figura, o ponto B' é a reflexão do ponto B em relação ao segmento CD. Deste modo, mostraremos que o ponto P, como representado na figura, é exatamente o ponto que nos dá o comprimento mínimo da corda. Para isso, suponhamos que exista um outro ponto P' situado entre as torres que também nos dá o comprimento mínimo da corda.

Então, como

$$\triangle BPD \cong \triangle B'PD \text{ e } \triangle BP'D \cong \triangle B'P'D,$$

temos que

$$BP = B'P \text{ e } BP' = B'P'.$$

Desta forma, usando o triângulo $AB'P'$ e a Desigualdade Triangular, obtemos:

$$AP' + P'B = AP' + P'B' > AB' = AP + PB' = AP + PB.$$

Portanto, o ponto P' não torna o comprimento da corda mínimo, e assim, o ponto P é o ponto desejado e o comprimento da corda é dado por e $AP + PB$.

Agora, calcularemos a distância de P à D. Como $AC = h_1$, $BD = h_2$ e $CD = d$, temos

$$\operatorname{tg}(\widehat{BPD}) = \frac{BD}{PD} = \frac{h_2}{PD} = \frac{h_1}{d - PD},$$

de onde segue que

$$PD = \frac{dh_2}{h_1 + h_2}.$$

Aplicação 4.14. *Veremos agora uma aplicação da Desigualdade de Hölder. Esta pode ser encontrada em [5].*

Problema: *Sejam x, y, z números reais positivos. Prove a seguinte desigualdade:*

$$\frac{x}{x + \sqrt{(x+y)(x+z)}} + \frac{y}{y + \sqrt{(y+z)(y+x)}} + \frac{z}{z + \sqrt{(z+y)(z+x)}} \leq 1.$$

Solução: Usando a Desigualdade de Hölder (Corolário 3.9) para $n = 2$ e números reais positivos p e q, com $p = q = 2$ e, então, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, temos:

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x+y)\cdot(x+z)} = \sqrt{x+y}\cdot\sqrt{x+z} &= \sqrt{(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2}\cdot\sqrt{(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{z})^2} \\
&= ((\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2)^{\frac{1}{2}} \cdot ((\sqrt{z})^2 + (\sqrt{x})^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\geq \sqrt{x}\cdot\sqrt{y} + \sqrt{z}\cdot\sqrt{x} \\
&= \sqrt{xy} + \sqrt{zx}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{1}{\sqrt{(x+y)\cdot(x+z)}} \leq \frac{1}{\sqrt{xy}+\sqrt{zx}} = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{y}+\sqrt{z})}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned}\frac{x}{x+\sqrt{(x+y)\cdot(x+z)}} \leq \frac{x}{x+\sqrt{x}(\sqrt{y}+\sqrt{z})} &= \frac{\sqrt{x}\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}+\sqrt{x}(\sqrt{y}+\sqrt{z})}\\ &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}.\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\frac{y}{y+\sqrt{(y+z)\cdot(y+x)}} \leq \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}$$

$$e$$

$$\frac{z}{z+\sqrt{(z+y)\cdot(z+x)}} \leq \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}.$$

Portanto,

$$\begin{gathered}\frac{x}{x+\sqrt{(x+y)\cdot(x+z)}}+\frac{y}{y+\sqrt{(y+z)\cdot(y+x)}}+\frac{z}{z+\sqrt{(z+y)\cdot(z+x)}}\\ \leq \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}} = 1.\end{gathered}$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $x = y = z$.

Referências

[1] BECKENBACH, E., BELLMAN, R. *An Introduction to inequalities.* Los Angeles: University of California, 1961.

[2] BIRKHOFF, G., MACLANE, S., *A Survey of Modern Algebra*, New York: Macmillan, 3rd Edition, 1965.

[3] CARLSON, J. W. *Inequalities.* Manhattan, Kansas: A master's report, B. S., 1963.

[4] CARVALHO, L. M. A. C. *Problemas com Desigualdades para o Ensino Secundário.* Portugal: Universidade de Lisboa, 2012.

[5] CEVTKOVSKI, Z. *Inequalities: Theorems, Techniques and Selected Problems.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012.

[6] LIMA, E. L. *Curso de Análise.* Rio de Janeiro: IMPA, vol. 1, 14ª Edição, 2016.

[7] FINK, A. M. An Essay on the History of Inequalities. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 249, p. 118-134, 2000.

[8] HRBACEK, K., JECH, T., *Introduction to Set Theory*, 2nd Edition Revised and Expanded, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics # 85, Marcel Dekker, Inc., 1984.

[9] KOROVKIN, P. P. *Inequalities.* Moscow: Mir Publishers, 1975.

[10] VELAME, G. C. *Uma abordagem sobre Desigualdades e suas aplicações.* Cruz das Almas: Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, 2014.

A Sobre desigualdades no conjunto dos números complexos

Este capítulo de caráter complementar tem por finalidade responder a seguinte pergunta: "É possível afirmar que $2 + 3i$ é menor do que $4 + i$?". Para respondê-la, estudaremos os conceitos de relação de ordem, corpo e corpo ordenado. Veremos que a existência de uma relação de ordem em um conjunto não faz desse conjunto um corpo ordenado, isto é, uma relação de ordem não é suficiente para tornar um conjunto um corpo ordenado.

Este apêndice foi elaborado com o auxílio das referências [2] e [8].

A.1 Relação de ordem

Nesta seção, veremos a definição de relação de ordem em um conjunto e alguns exemplos cuja relação existente seja uma relação de ordem no conjunto dos números complexos.

Definição A.1. *Uma relação $*$ definida em X é uma* relação de ordem *em X se as seguintes propriedades são satisfeitas:*

1. *Dados $x, y \in X$, então ou $x * y$ ou $y * x$ ou $x = y$;*

2. *Se $x * y$ e $y * z$ então $x * z$, para todo $x, y, z \in X$.*

A primeira propriedade diz respeito à propriedade da tricotomia, satisfeita em uma relação de ordem; e a segunda diz respeito à propriedade transitiva de uma relação de ordem.

No conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos podem ser definidas várias relações de ordem. Uma das mais conhecidas segue abaixo.

Exemplo A.1. Seja $\lhd$ a seguinte relação de ordem: $(a,b) \lhd (c,d) \Leftrightarrow a < c$ ou $a = c$ e $b < d$. Afirmamos que $\lhd$ é uma relação de ordem em $\mathbb{C}$. De fato:

- Se $(a,b) \lhd (c,d)$, então ou $a < c$ ou $a = c$ e $b < d$. Assim, se $c < a$ então $(c,d) \lhd (a,b)$. Agora, se $a = c$, então ou $b < d$ ou $d < b$. Dessa forma, se $b < d$ então $(a,b) \lhd (c,d)$, e se $d < b$ então $(c,d) \lhd (a,b)$. Portanto, ocorre apenas uma das desigualdades: $(a,b) \lhd (c,d)$ ou $(c,d) \lhd (a,b)$.

- Se $(a,b) \lhd (c,d)$ e $(c,d) \lhd (e,f)$, então:

$$a < c \text{ ou } a = c \text{ e } b < d \qquad \text{e} \qquad c < e \text{ ou } c = e \text{ e } d < f.$$

  Assim, $a < e$ ou $a = e$ e $b < f$, o que implica $(a,b) \lhd (e,f)$.

Por conseguinte, $\lhd$ é uma relação de ordem em $\mathbb{C}$.

Sendo assim, temos que:

$\star$ $0 \lhd i$, pois $0 = 0$ e $0 < 1$ e então $0 = (0,0) \lhd (0,1) = i$;

$\star$ $2+3i \lhd 2+16i$, pois $2 = 2$ e $3 < 16$ e então $2+3i = (2,3) \lhd (3,16) = 3+16i$;

$\star$ $-3-i \lhd 4$, pois $-3 < 4$ e então $-3-i = (-3,-1) \lhd (4,0) = 4$.

Exemplo A.2. Não é difícil verificar que a relação $\triangle$ dada por

$$(a,b) \triangle (c,d) \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2} < \sqrt{c^2+d^2} \text{ ou}$$

$$\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{c^2+d^2} \text{ e } \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) < \operatorname{arctg}\left(\frac{d}{c}\right)$$

é uma relação de ordem em $\mathbb{C}$.

Temos que:

$\star$ $1+2i \triangle 2+3i$, pois $1+2i = (1,2)$ e $2+3i = (2,3)$ e assim

$$\sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5} < \sqrt{13} = \sqrt{2^2+3^2}.$$

$\star$ $\sqrt{3}+i \triangle \sqrt{2}+\sqrt{2}i$, pois $\sqrt{3}+i = (\sqrt{3},1)$ e $\sqrt{2}+\sqrt{2}i = (\sqrt{2},\sqrt{2})$ e então

$$\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2 = \sqrt{4} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} \quad \text{e}$$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right).$$

Porém, as relações de ordem em $\mathbb{C}$ exibidas acima não tornam o conjunto dos números complexos um corpo ordenado. E para provarmos tal fato, precisamos primeiramente definir corpo e, em seguida, corpo ordenado.

A.2 Corpo e corpo ordenado

Definição A.2. *Um conjunto X munido de duas operações, denotadas por $+$ e $\cdot$, chamadas respectivamente de adição e multiplicação, é um* corpo *se para $x, y, z \in X$ tem-se:*

1. $(x + y) + z = x + (y + z)$*;*
2. $x + y = y + x$*;*
3. *Existe* $0 \in X$ *tal que* $x + 0 = 0 + x = x$*;*
4. *Para todo* $x \in X$*, existe* $-x \in X$ *tal que* $x + (-x) = (-x) + x = 0$*;*
5. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$*;*
6. $x \cdot y = y \cdot x$*;*
7. *Existe* $1 \in X$ *com* $1 \neq 0$*, tal que* $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$*;*
8. *Para todo* $x \in X$*, existe* $x^{-1} \in X$ *tal que* $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$*;*
9. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$*;*
10. $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$*.*

Estas propriedades dizem que as operações de adição e multiplicação num corpo X são associativas e comutativas; existe o elemento neutro na adição e o elemento neutro na multiplicação; existe o elemento oposto na adição e o inverso na multiplicação; e satisfazem a propriedade distributiva à direita e à esquerda.

Como dito no início deste trabalho, o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, munido das operações de adição e multiplicação conhecidas, é um corpo. E é por este motivo que o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos também é um corpo. Com efeito: se $z, w \in \mathbb{C}$, então podemos escrever $z = a + bi$ e $w = c + di$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Portanto, podemos definir:

$$z \boxplus w = (a, b) \boxplus (c, d) = (a + c, b + d) = (a + c) + (b + d)i,$$

$$z \boxdot w = (a, b) \boxdot (c, d) = (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + c \cdot b).$$

E como $+$ e $\cdot$ são operações em $\mathbb{R}$ que satisfazem todas as dez propriedades da definição anterior, temos então que $\boxplus$ e $\boxdot$ também as cumprem. Consequentemente, $(\mathbb{C}, \boxplus, \boxdot)$ é um corpo.

Estudaremos agora o fato de que $\mathbb{C}$ não é corpo ordenado. Para tanto, apresentaremos o conceito de corpo ordenado.

Definição A.3. *Um corpo $(X, +, \cdot)$ é* ordenado *se existe um subconjunto não vazio $P \subset X$, chamado o conjunto dos elementos positivos de X, com as seguintes propriedades:*

$P1$. A soma e o produto de elementos positivos são positivos. Ou seja, se $x, y \in P$, então $x + y \in P$ e $x.y \in P$;

$P2$. Dado $x \in X$, exatamente uma das três alternativas ocorre:

i. ou $x = 0$,

ii. ou $x \in P$,

iii. ou $-x \in P$.

Assim, se indicarmos com $-P$ o conjunto dos elementos $-x$, em que $x \in P$, temos $X = -P \cup P \cup \{0\}$, sendo os conjuntos $-P$, P e $\{0\}$ dois a dois disjuntos. Os elementos de $-P$ são denominados negativos.

Proposição A.1. *Num corpo ordenado, se $a \neq 0$, então $a^2 \in P$.*

Demonstração. Sendo $a \neq 0$, temos que $a \in P$ ou $-a \in P$ (propriedade P2 - Definição A.3). No primeiro caso, $a^2 = a.a \in P$ e, no segundo caso, $a^2 = = a.a = (-a).(-a) \in P$. $\square$

Observação A.1. Em particular, num corpo ordenado, $1 = 1.1$ é sempre positivo e, portanto, $-1 \in -P$. Logo, num corpo ordenado, -1 não é quadrado de elemento algum.

Também podemos definir corpo ordenado da seguinte forma:

Definição A.4. *Um corpo* $(X, +, \cdot)$*, munido de uma relação de ordem* $*$*, é um* corpo ordenado *se as seguintes propriedades são satisfeitas:*

P1′. Para quaisquer $x, y, z \in X$*, se* $x * y$ *e* $z * 0$*, então* $x.z * y.z$*;*

P2′. Para quaisquer $x, y, z \in X$*, se* $x * y$*, então* $x + z * y + z$*.*

Exemplo A.3. Com a relação de ordem $\lhd$ definida no Exemplo A.1, $\mathbb{C}$ não é um corpo ordenado. De fato, temos que $0 \lhd i$. Tomando $z = 0$, $w = i$ e $y = i$, temos que

$$z \lhd w \qquad \text{e} \qquad 0 \lhd y.$$

Portanto, por $P1'$, deveríamos ter $z \boxdot y = 0 \lhd w \boxdot y = i \boxdot i = i^2 = -1$, o que não ocorre.

Podemos usar outras relações de ordem definidas em $\mathbb{C}$; porém, nenhuma delas torna $\mathbb{C}$ um corpo ordenado, conforme constataremos a seguir.

Teorema A.1. $\mathbb{C}$ *não é um corpo ordenado.*

Demonstração. Pela Proposição A.1, se $\mathbb{C}$ fosse um corpo ordenado, existiria um conjunto P para o qual se teria $z^2 \in P$ para todo $z \in \mathbb{C} - \{0\}$. Porém, $z = i \in \mathbb{C} - \{0\}$ é tal que $z^2 = -1$ e $-1 \notin P$ (veja Observação A.1). $\square$

Apesar de $\mathbb{C}$ não ser um corpo ordenado, podemos comparar, através de relações de ordem, certos números complexos, não todos, já que acabamos de concluir que este conjunto não é corpo ordenado.

Índice Remissivo