



**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**  
**“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”**  
Campus de São José do Rio Preto

Robson Alexandrino Trevizan Santos

Regularização de Singularidades de Sistemas Descontínuos e  
Retratos de Fase de Sistemas de Lotka-Volterra Tridimensionais

São José do Rio Preto  
2017



Robson Alexandrino Trevizan Santos

Regularização de Singularidades de Sistemas Descontínuos e  
Retratos de Fase de Sistemas de Lotka-Volterra Tridimensionais

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES 33004153071P0  
CAPES/PDSE 6888/2015-01

Orientador: Prof. Dr. Claudio Aguinaldo  
Buzzi

São José do Rio Preto  
2017

Santos, Robson Alexandrino Trevizan .

Regularização de singularidades de sistemas descontínuos e retratos de fase de Sistemas de Lotka Volterra Tridimensionais / Robson Alexandrino Trevizan Santos. -- São José do Rio Preto, 2017  
110 f. : il., tabs.

Orientador: Claudio Aguinaldo Buzzi

Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Teoria da bifurcação. 3. Campos vetoriais. 4. Estabilidade. 5. Equações diferenciais não lineares. 6. Sistema dinâmico diferencial. 7. Sistemas diferenciais polinomiais. I. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. II. Título.

CDU – 517.911

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE  
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Robson Alexandrino Trevizan Santos

Regularização de Singularidades de Sistemas Descontínuos e  
Retratos de Fase de Sistemas de Lotka-Volterra Tridimensionais

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciência da Computação, junto ao Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES 33004153071P0  
CAPES/PDSE 6888/2015-01

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Claudio Aguinaldo Buzzi  
UNESP – São José do Rio Preto  
Orientador

Prof. Dr. João Carlos da Rocha Medrado  
UFG – Goiânia

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Regilene Delazari dos Santos Oliveira  
USP – São Carlos

Prof. Dr. Maurício Firmino Silva Lima  
UFABC – São Bernardo do Campo

Prof. Dr. Paulo Ricardo da Silva  
UNESP – São José do Rio Preto

São José do Rio Preto  
07 de julho de 2017



# Agradecimentos

---

---

Muitas pessoas contribuíram para que este trabalho se concretizasse. A cada uma delas minha mais sincera gratidão. Em especial, agradeço:

À minha mãe Eva, e aos demais membros da minha querida família, entre eles: Suelen, Marlon, João, Vital, Romilda, Luiz, por todo o amor e incentivo, pela compreensão dos momentos de ausência, e pela confiança depositada em mim, sem os quais eu jamais teria conseguido concluir este trabalho.

Ao meu orientador Claudio Aguinaldo Buzzi por tudo o que fez por mim durante o doutorado e o mestrado: por todos os ensinamentos, pela confiança, pelo apoio e dedicação ao meu trabalho, pelas oportunidades, por sua enorme bondade, e principalmente por sua amizade.

Ao professor Jaume Llibre, por todo o conhecimento científico transmitido durante o período de intercâmbio em Barcelona.

Aos professores dos Departamentos de Matemática do IBILCE/UNESP e FEIS/UNESP, pelos conhecimentos transmitidos durante todo o período que compreende doutorado, mestrado e graduação.

Aos amigos de doutorado Letícia, Marta, Willian, Rubens e todos os outros colegas da pós-graduação que estiveram envolvidos comigo durante este trabalho, pelo agradável convívio acadêmico, pelas incontáveis horas de estudos em grupo, e por compartilharem conhecimento, expectativas, frustrações e vitórias. Acima de tudo, pela amizade.

Aos amigos Alex, Natália, Núbia, Leonardo, Tainã, Luis Fernando, Alisson e Camila, que me apoiaram durante o período de intercâmbio e que guardo enorme

carinho.

A todos os demais familiares, amigos, colegas, e professores que, direta ou indiretamente, contribuíram para que eu chegasse até aqui.

À CAPES pelo apoio financeiro.

A Deus, por tudo.



Aos meus pais, dedico.

# Resumo

---

---

Esta tese está relacionada ao estudo de bifurcações de campos de vetores descontínuos bidimensionais e a compreensão da dinâmica de uma classe de sistemas diferenciais polinomiais tridimensionais. Primeiramente, o trabalho concentra-se no estudo de algumas bifurcações de codimensão um e dois que ocorrem em certas famílias de campos de vetores descontínuos planares, aplicando o método de regularização introduzido por Sotomayor e Teixeira. A técnica de regularização foi utilizada para obter resultados que comparam, através dos resultados da teoria clássica suave, as bifurcações que ocorrem nas famílias de campos regularizados associadas. Posteriormente, foi feito um estudo de uma classe específica de sistemas de Lotka-Volterra tridimensionais que dependem de dois parâmetros reais, conhecida como sistemas de May-Leonard. É apresentada uma classificação dos retratos de fase através da descrição da dinâmica global na compactificação do octante positivo do espaço tridimensional.

**Palavras-chave:** Campos de vetores descontínuos. Bifurcações. Regularização. Sistemas de Lotka-Volterra.

# Abstract

---

---

*This thesis is related to the study of bifurcations of two-dimensional discontinuous vector fields and the understanding of the dynamics of a class of three-dimensional polynomial differential systems. First, the work focuses on the study of some codimension one and two bifurcations that occur in certain families of planar discontinuous vector fields, applying the regularization method introduced by Sotomayor and Teixeira. The regularization technique was used to obtain results that compare, through the results of classical smooth theory, the bifurcations that occur in families of associated regularized vector fields. Later, a study was made for a specific class of three-dimensional Lotka-Volterra systems that depend on two real parameters, known as May-Leonard systems. A classification of the phase portraits is presented by describing the global dynamics in the compactification of the positive octant of the three-dimensional space.*

**Keywords:** *Discontinuous vector fields. Bifurcations. Regularization. Lotka-Volterra systems.*

# Sumário

---

---

<b>Introdução</b>	<b>12</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>23</b>
1.1 Campos de vetores contínuos e descontínuos . . . . .	23
1.2 Regularização de campos de vetores descontínuos . . . . .	31
<b>2 Colisões de Pseudo-Equilíbrios via Regularização</b>	<b>37</b>
2.1 Bifurcação Pseudo-Sela-Nó . . . . .	37
2.2 Regularização da Bifurcação Pseudo-Sela-Nó . . . . .	39
<b>3 Colisões de Pontos de Tangência via Regularização</b>	<b>43</b>
3.1 Colisão de Tangências Quadráticas . . . . .	43
3.2 Regularização de Tangência Dupla . . . . .	44
3.3 Regularização de Duas Tangências Visíveis . . . . .	47
3.4 Tangência Visível versus Tangência Invisível . . . . .	51
3.4.1 Bifurcação VI1 via Regularização . . . . .	53
3.4.2 Bifurcação VI2 via Regularização . . . . .	54
3.4.3 Bifurcação VI3 via Regularização . . . . .	60
<b>4 Singularidade Sela-Dobra via Regularização</b>	<b>67</b>
4.1 A singularidade Sela-Dobra . . . . .	67
4.2 Bifurcação de Bogdanov-Takens . . . . .	69
4.3 Regularização . . . . .	71

---

<b>5</b>	<b>Estudo de Singularidades via Regularização Sotomayor-Teixeira</b>	<b>80</b>
5.1	Colisões de Pseudo-Equilíbrios . . . . .	80
5.2	Colisões de Pontos de Tangência Quadrática . . . . .	82
5.2.1	Tangência Dupla . . . . .	82
5.2.2	Duas Tangências Visíveis . . . . .	83
5.2.3	Tangência Visível versus Tangência Invisível . . . . .	84
5.3	Singularidade Sela-Dobra . . . . .	89
<b>6</b>	<b>Sistemas de Lotka-Volterra Tridimensional</b>	<b>95</b>
6.1	Sistemas de May-Leonard . . . . .	95
6.2	A Compactificação de Poincaré em $\mathbb{R}^3$ . . . . .	96
6.3	Retratos de Fase do Sistema de May-Leonard . . . . .	98
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>107</b>

# Introdução

---

A Teoria dos Sistemas Dinâmicos é fruto de um longo desenvolvimento científico, e encontra-se em constante amadurecimento e transformação. Podemos identificar rudimentos desta Teoria ainda no século XVI, nos trabalhos de mecânica celeste do astrônomo alemão Johannes Kepler e na formalização da mecânica clássica do físico e matemático Isaac Newton. Porém, foi apenas no fim do século XVIII e início do século XIX que os fundamentos da Análise Matemática passaram por uma grande reformulação e permitiram um maior rigor em conceitos como limites e derivadas. Não por acaso, a Teoria das Equações Diferenciais consolidou-se numa das principais ferramentas para a pesquisa científica. Considerados os fundadores da teoria moderna dos sistemas dinâmicos, os matemáticos Aleksandr Lyapunov e Henri Poincaré fundamentaram, simultaneamente, vários conceitos da análise qualitativa das equações diferenciais, tais como estabilidade de soluções e comportamento assintótico. Estava configurada, assim, a base da *Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias*.

Um campo vetorial em  $\mathbb{R}^n$  de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , é uma aplicação  $X : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^r$  definida em um subconjunto aberto  $\mathcal{D}$  do espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ . A seguinte equação diferencial ordinária está associada ao campo vetorial  $X$

$$\dot{x} = X(x), \tag{1}$$

onde  $x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ . As soluções desta equação, também chamadas *órbitas* ou *trajetórias* de  $X$ , são curvas diferenciáveis  $\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{D}$  satisfazendo

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = X(\varphi(t)),$$

para todo  $t \in I$ . A Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias consiste de um

estudo qualitativo das órbitas do campo vetorial  $X$  associado à equação diferencial ordinária (1). A relevância desta Teoria se deve ao fato de não precisarmos resolver explicitamente a equação diferencial ordinária para obter resultados precisos sobre o comportamento da equação.

A Teoria dos Sistemas Dinâmicos, que é desenvolvida tendo como ponto de partida a Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias, abrange o estudo de uma grande variedade de sistemas diferenciais e de campos vetoriais: lineares, suaves (ou contínuos), planares e não-planares, polinomiais, suaves por partes (ou descontínuos), etc. Uma das razões para este interesse na comunidade matemática é que tais sistemas podem ser usados para modelar problemas aplicados como circuitos eletrônicos, sistemas biológicos, dispositivos mecânicos, etc; veja por exemplo o livro [2]. No entanto, outro incentivo para este estudo, tão importante quanto as aplicações, é o interesse puramente matemático de analisar e compreender tais sistemas, sendo este o principal motivador deste trabalho.

A teoria clássica dos sistemas dinâmicos para campos vetoriais suaves no plano e nas superfícies está muito bem estabelecida. As teorias de estabilidade para tais sistemas foram feitas principalmente por Andronov–Pontryagin [1] e Peixoto [18]. Um campo vetorial é dito *estruturalmente estável* se seu retrato de fase não mudar sob pequenas perturbações. Andronov–Pontryagin–Peixoto forneceram condições necessárias e suficientes para que um campo de vetores suave seja estruturalmente estável. Em contraste com o estudo da estabilidade estrutural, temos o conceito de bifurcações. Uma *bifurcação* ocorre em uma família de campos vetoriais quando observamos uma mudança abrupta no retrato de fase dos elementos da família quando o parâmetro que governa a família cruza um certo valor, chamado *ponto de bifurcação*. A grosso modo, o número mínimo de parâmetros em uma família que explica o comportamento de todos os campos vetoriais em uma vizinhança de um elemento fixado da família é chamado de *codimensão* do elemento.

O estudo de campos vetoriais suaves por partes planares é mais recente, e a teoria de sistemas dinâmicos descontínuos tem avançado desde os primeiros trabalhos de Andronov [1] e Filippov [8]. Dizemos que uma aplicação  $Z : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é um *campo vetorial descontínuo*, ou um *campo suave por partes*, quando o conjunto aberto  $\mathcal{D}$  for dividido em duas regiões,  $\Sigma^+$  e  $\Sigma^-$ , por uma curva regular  $\Sigma$ , chamada *conjunto de descontinuidade*. O campo vetorial descontínuo é denotado por  $Z = (X, Y)$ , onde  $X = Z|_{\Sigma^+}$  e  $Y = Z|_{\Sigma^-}$  são campos de vetores suaves.

Na subvariedade  $\Sigma$  existem três regiões genéricas: Costura, Escape e Deslize. Para as

definições ver Seção 1.1. Nas regiões de Escape e Deslize podemos definir um campo de vetores através das Convenções de Filippov (veja [8]) que é denotado por  $F(Z)$ . As órbitas do campo vetorial descontínuo  $Z = (X, Y)$  serão formadas pela concatenação de órbitas de  $X$ , de  $Y$  e de  $F(Z)$ . Para mais detalhes ver seção 1.1.

Na teoria clássica a equivalência dos retratos de fase é dada pelo conceito de equivalência topológica, isto é, dois campos de vetores suaves  $X$  e  $Y$  são topologicamente equivalentes quando existe um homeomorfismo que leva órbita de  $X$  em órbita de  $Y$  preservando orientação. De maneira natural este conceito é estendido para o espaço dos sistemas suaves por partes, isto é, dois campos de vetores descontínuos  $Z_1 = (X_1, Y_1)$  e  $Z_2 = (X_2, Y_2)$  são topologicamente equivalentes quando existe um homeomorfismo que envia trajetórias de  $Z_1$  em trajetórias de  $Z_2$  preservando orientação e o conjunto de descontinuidade  $\Sigma$ .

O espaço dos campos vetoriais descontínuos,  $\mathcal{X}^r(\mathcal{D})$ , é munido da topologia produto. O conceito de estabilidade estrutural em  $\mathcal{X}^r(\mathcal{D})$  é dado de forma natural, isto é, um campo descontínuo  $Z_0 = (X_0, Y_0)$  é estruturalmente estável se existe uma vizinhança  $\mathcal{W}$  de  $Z_0$  em  $\mathcal{X}^r(\mathcal{D})$  tal que todo campo  $Z = (X, Y) \in \mathcal{W}$  é topologicamente equivalente a  $Z_0 = (X_0, Y_0)$ . Dizemos que um campo vetorial descontínuo está no conjunto de bifurcação quando ele não é estruturalmente estável.

No mesmo espírito da teoria clássica, podemos classificar os pontos de bifurcação  $Z_0 = (X_0, Y_0)$  pela sua codimensão, isto é, pelo número mínimo de parâmetros em uma família que explica o comportamento dos campos vetoriais descontínuos em uma vizinhança de  $Z_0 = (X_0, Y_0)$ .

Kuznetsov, Rinaldi e Gragnani, por exemplo, listaram as bifurcações locais da codimensão um e algumas bifurcações globais de campos de vetores descontínuos no plano. Tal estudo pode ser conferido no trabalho [12]. Posteriormente, Guardia, Seara e Teixeira complementaram este estudo fornecendo uma classificação e caracterização de singularidades de codimensão dois para sistemas de Filippov planares. Consulte [9].

No artigo [23] publicado na década de 1990, Sotomayor e Teixeira descrevem matematicamente um método para regularizar campos de vetores descontínuos. A importância deste método está no fato de que podemos interpretar a dinâmica dos campos de vetores descontínuos através da teoria já existente para campos de vetores regulares. De forma resumida apresentamos o método de regularização de Sotomayor e Teixeira.



Seja  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$  um aberto. Supomos, sem perda de generalidade, que existe uma função suave  $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que 0 é valor regular de  $f$  e  $\Sigma = f^{-1}(0)$ . Vamos supor que a subvariedade  $\Sigma$  divide o conjunto aberto  $\mathcal{D}$  em duas regiões  $\Sigma^+ = \{x \in \mathcal{D} : f(x) \geq 0\}$  e  $\Sigma^- = \{x \in \mathcal{D} : f(x) \leq 0\}$ . Dessa forma, se  $Z = (X, Y)$  é um campo vetorial descontínuo definido em  $\mathcal{D}$  então  $X$  está definido em  $\Sigma^+$  e  $Y$  em  $\Sigma^-$ . O método de regularização consiste em considerar uma combinação convexa dos campos de vetores  $X$  e  $Y$  utilizando funções de transição. Uma função  $C^\infty$   $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dita uma *função de transição* quando  $\varphi(x) = 0$  se  $x \leq -1$ ,  $\varphi(x) = 1$  se  $x \geq 1$  e  $\varphi'(x) > 0$  se  $x \in (-1, 1)$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , uma *regularização* do campo de vetores descontínuo  $Z$  é a família a um parâmetro de campos de vetores suaves, ou regulares,  $Z_\varepsilon$ , definida por

$$Z_\varepsilon(p) = (1 - \varphi_\varepsilon(f(p)))Y(p) + \varphi_\varepsilon(f(p))X(p),$$

onde  $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(x/\varepsilon)$ .

O valor  $\varepsilon$  é dito *parâmetro de regularização*. Além disso, o conjunto  $\Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon)$  é chamado *faixa de regularização*. No exterior da faixa de regularização o campo de vetores regularizado  $Z_\varepsilon$  reduz-se ao campo  $Y$  ou ao campo  $X$ , conforme a função de transição  $\varphi$  assumia valor zero ou um, respectivamente.

A estabilidade estrutural de campos vetoriais descontínuos planares pode ser estudada através do método de regularização introduzido por Sotomayor-Teixeira, veja [22]. Este método foi utilizado por Maciel em [16] para explicar as bifurcações locais de codimensão um listadas por Kuznetsov [12], através de comparação com as bifurcações das respectivas famílias regularizadas. Precisamente, considere  $Z_\lambda = (X_\lambda, Y_\lambda)$  uma família a um parâmetro de campos de vetores descontínuos com conjunto de descontinuidade  $\Sigma$  uma reta. Em cada semiplano determinado por  $\Sigma$  está definido um campo,  $X_\lambda$  ou  $Y_\lambda$ . Os casos considerados em [16] consistem em tomar  $\Sigma$  como o eixo- $x$ , o campo de vetores  $Y_\lambda$  constante e transversal a  $\Sigma$ , e  $X_\lambda$  um campo de vetores com um ponto de equilíbrio hiperbólico (foco, sela, nó), que ainda podem ser visíveis ou invisíveis. Para cada tipo de equilíbrio hiperbólico de  $X_\lambda$  existem bifurcações para o campo vetorial descontínuo  $Z_\lambda$ , resultantes da colisão desses pontos de equilíbrio com o conjunto de descontinuidade  $\Sigma$ , sob a variação do parâmetro real  $\lambda$ . A função de classe  $C^\infty$

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x^2 + 1}} \tag{2}$$

foi utilizada em [16] para obter a família de campos de vetores regularizados e concluir que as bifurcações dos campos de vetores descontínuos  $Z_\lambda$  são completamente conhecidos através das bifurcações obtidas por suas famílias regularizadas. No entanto, existem outras bifurcações locais de codimensão um classificadas em [12] que precisam ser explicadas do ponto de vista da regularização. Precisamente, estudaremos via regularização as bifurcações de codimensão um descritas em [12] que nascem após a colisão de pseudo-equilíbrios ou de pontos de tangência quadrática, principalmente. Veja as Figuras 1 e 2.

Para estes casos e subcasos, os resultados que obtemos estão reunidos no seguinte teorema.

**Teorema A:** *Sejam  $Z_\lambda = (X_\lambda, Y_\lambda)$  uma família a um parâmetro de campos de vetores descontínuos, e  $Z_R$  a respectiva família de campos regularizados. Então:*

- a) *Se  $Z_\lambda$  apresenta colisão de pseudo-equilíbrios no conjunto de descontinuidade e pertence ao caso PE, então  $Z_R$  admite a bifurcação sela-nó clássica para campos de vetores regulares.*

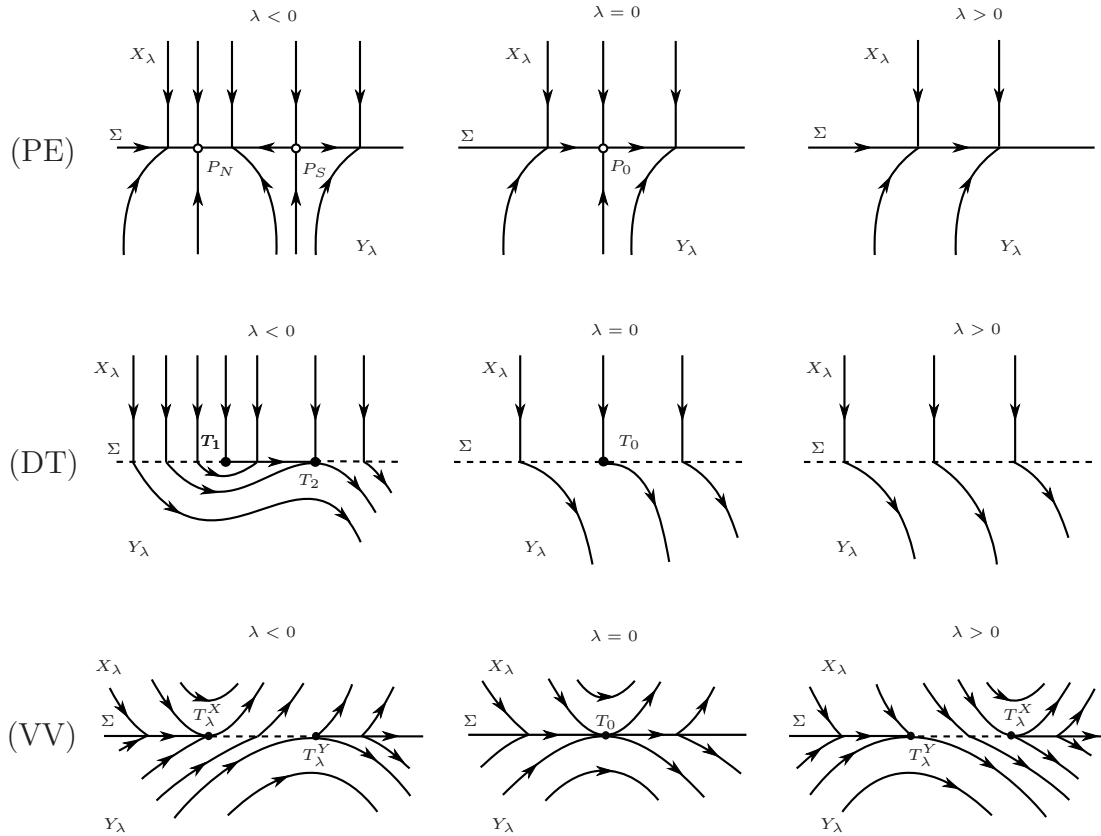


Figura 1: Colisão de pseudo-equilíbrios (PE). Colisão de duas tangências de um mesmo campo de vetores (DT). Colisão de duas tangências visíveis (VV)

b) Se  $Z_\lambda$  apresenta colisões de pontos de tangência quadrática no conjunto de descontinuidade  $\Sigma$ , então:

b1) O campo de vetores regularizado  $Z_R$  é estruturalmente estável quando  $Z_\lambda$  pertence aos casos DT, VV e VII.

b2) Se  $Z_\lambda$  pertence ao caso VI2, então  $Z_R$  admite uma bifurcação do tipo sela-nó.

b3) Se  $Z_\lambda$  pertence ao caso VI3, então  $Z_R$  admite uma bifurcação de Hopf de codimensão dois.

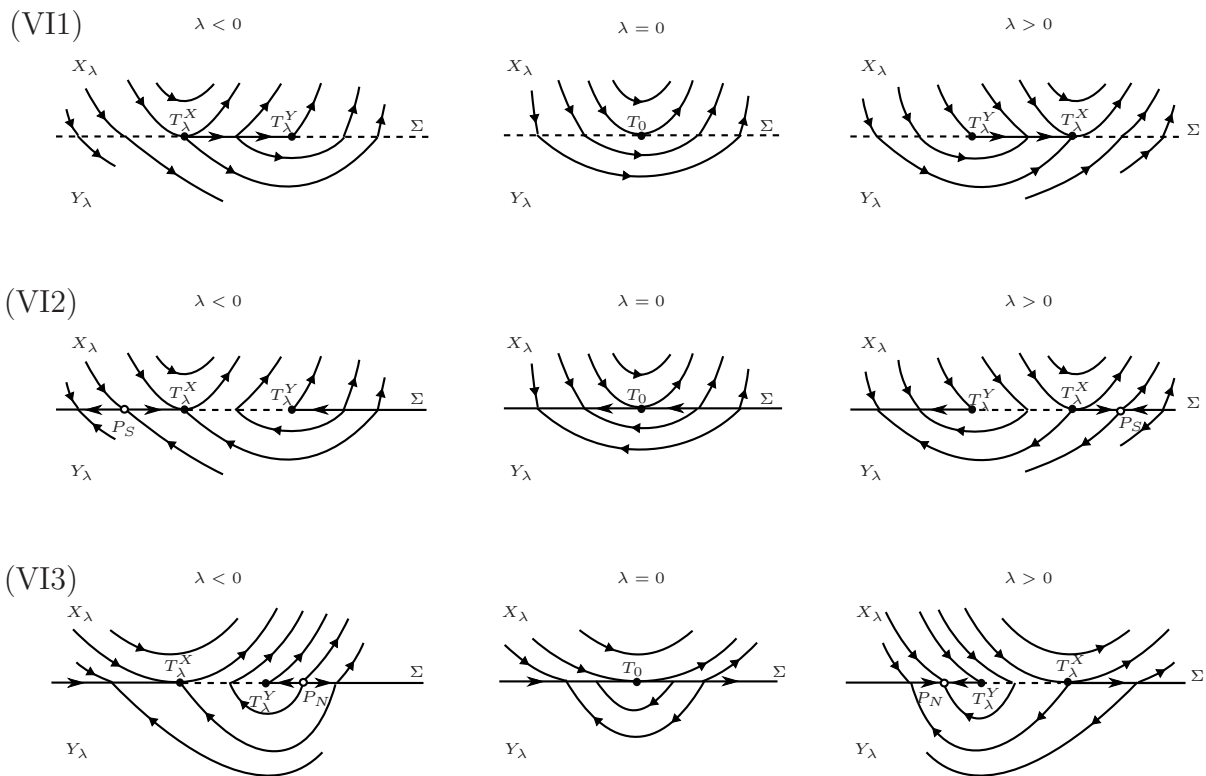


Figura 2: Colisões de tangências visível e invisível (VI). Subcasos VI1, VI2 e VI3.

Além das bifurcações locais de codimensão um listadas acima, as bifurcações locais para singularidades de codimensão dois classificadas em [9] podem ser explicadas do ponto de vista da regularização. Assim, voltamos nossa atenção a estudar a singularidade *Sela-Dobra* descrita em [9]. Se  $Z = (X, Y)$  é um campo vetorial descontínuo, onde os campos de vetores  $X$  e  $Y$  têm, respectivamente, uma sela hiperbólica e uma tangência quadrática em um mesmo ponto  $p \in \Sigma$ , dizemos que  $p$  é uma singularidade Sela-Dobra. Dado  $\alpha > 0$ , consideramos a seguinte

forma normal para a singularidade Sela-Dobra

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y) = (x + y, 4x + y) & \text{se } y > 0 \\ Y(x, y) = (\alpha, x) & \text{se } y < 0 \end{cases},$$

para a qual o desdobramento da posição relativa entre os pontos de sela e de dobra (tangência quadrática) em uma vizinhança do conjunto de descontinuidade é descrito por uma família de campos descontínuos  $Z_{\lambda, \mu} = (X_{\mu}, Y_{\lambda})$  a dois parâmetros  $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ . Nossa abordagem consiste novamente em aplicar o método da regularização à família  $Z_{\lambda, \mu}$  e trabalhar com a família de campos regularizados associada. O resultado principal que obtemos é o seguinte.

**Teorema B:** *Seja  $Z_{\lambda, \mu} = (X_{\mu}, Y_{\lambda})$  uma família a dois parâmetros de campos de vetores descontínuos associada ao desdobramento da singularidade Sela-Dobra. Então, a respectiva família de campos regularizados,  $Z_{\mathbb{R}}$ , admite uma bifurcação clássica de Bogdanov-Takens.*

Com o objetivo de simplificar as demonstrações dos Teoremas A e B, tornando-as mais concretas, optamos por fazê-las considerando inicialmente uma regularização do tipo transição dada pela função (2), a qual foi utilizada no trabalho [16]. Além disso, dedicamos um capítulo deste trabalho para responder a questão: Os resultados alcançados para as bifurcações estudadas continuam válidos ao considerar a regularização Sotomayor-Teixeira, dada por uma função de transição arbitrária? Essa questão está respondida positivamente na tese. Ou seja, os resultados apresentados nos Teoremas A e B são verdadeiros independente da regularização do tipo transição tomada para regularizar os campos de vetores descontínuos, e estão organizados de maneira esquemática na Tabela 1.

Esta tese está organizada em duas partes. A primeira parte trata da regularização de algumas famílias de campos de vetores descontínuos planares a um ou dois parâmetros, cujos resultados principais estão descritos nos Teoremas A e B. Já a segunda parte desta tese trata dos sistemas diferenciais ordinários polinomiais, em que estudamos uma categoria de sistemas Lotka-Volterra tridimensional conhecida como modelo de May-Leonard.

Os sistemas diferenciais ordinários polinomiais também são frequentemente utilizados em vários ramos da matemática aplicada, física, química, engenharia, etc. Modelos que estudam a interação entre espécies do tipo predador-presa têm sido extensivamente analisados, como os

Caso	Descrição Filippov	Codim (CVD)	Explicação via Regularização	Codim (CVR)
PE	1 sela de Filippov 1 nó de Filippov	1	Bifurcação sela-nó	1
DT1 e DT2	2 tangências de $Y_\lambda$ (1 visível e 1 invisível)	1	Estruturalmente Estável	0
VV1 e VV2	1 tangência visível de $X_\lambda$ 1 tangência visível de $X_\lambda$ sela de Filippov (p/ VV2)	1	Deslocamento de selas	0
VI1	1 tangência visível de $X_\lambda$ 1 tangência invisível de $Y_\lambda$	1	Estruturalmente Estável	0
VI2	1 tangência visível de $X_\lambda$ 1 tangência invisível de $Y_\lambda$ sela de Filippov	1	Bifurcação sela-nó	1
VI3	1 tangência visível de $X_\lambda$ 1 tangência invisível de $Y_\lambda$ nó de Filippov	1	Bifurcação de Hopf degenerada	2
Sela-Dobra	1 tangência invisível de $Y_\lambda$	2	Bifurcação de Bogdanov-Takens	2

Tabela 1: Tabela dos resultados obtidos nos Teoremas A e B, comparando a codimensão (Codim) das bifurcações dos campos de vetores descontínuos (CVD) com a codimensão das bifurcações das respectivas famílias de campos de vetores regularizados (CVR).

clássicos sistemas Lotka-Volterra. Para mais informações sobre os sistemas Lotka-Volterra veja por exemplo [15] e as referências lá citadas. Em particular, um destes modelos de competição entre três espécies dentro da classe dos sistemas Lotka-Volterra tridimensionais é o *modelo de May-Leonard* dado pelo sistema diferencial polinomial em  $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= x(1 - x - ay - bz), \\
 \dot{y} &= y(1 - bx - y - az), \\
 \dot{z} &= z(1 - ax - by - z),
 \end{aligned} \tag{3}$$

onde  $a$  e  $b$  são parâmetros reais e as derivadas são calculadas em relação ao tempo  $t$ . Veja mais detalhes sobre sistemas de May-Leonard nos artigos [17] e [4].

Em [4], o sistema (3) foi estudado para  $a > 0, b > 0$ , com  $a + b = 2$  ou  $a = b$ . Nesta tese descrevemos sua dinâmica global em função dos parâmetros  $a$  e  $b$  quando  $a + b = -1$ . O sistema (3) está definido em  $\mathbb{R}^3$ . De modo a estudar a dinâmica de suas órbitas no infinito estenderemos analiticamente seu fluxo usando a compactificação de Poincaré de  $\mathbb{R}^3$ . A região de interesse em nosso estudo é o octante positivo de  $\mathbb{R}^3$ , isto é, onde  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ . Assim, estudaremos

o fluxo da compactificação de Poincaré na região

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

da bola de Poincaré.

Observamos que a dinâmica global do sistema May-Leonard (3) com  $a + b = -1$  pode ser estudado porque este sistema diferencial tem um invariante de Darboux. Os resultados obtidos estão descritos nos Teoremas C e D.

**Teorema C.** *Para o sistema diferencial de May-Leonard (3) no octante  $R$  as seguintes afirmações são válidas quando  $a + b = -1$ .*

- a) *O retrato de fase da compactificação de Poincaré  $p(X)$  do sistema (3) nas fronteiras  $x = 0$ ,  $y = 0$  e  $z = 0$  de  $R$  é topologicamente equivalente ao descrito na Figura 3(a) se  $a \leq -2$  ou  $a \geq 1$ , e na Figura 3(c) se  $-2 < a < 1$ .*
- b) *O retrato de fase da compactificação de Poincaré  $p(X)$  do sistema (3) em  $R^\infty = \partial R \cap \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  (i.e. o retrato de fase no infinito do octante positivo de  $\mathbb{R}^3$ ) é topologicamente equivalente ao descrito na Figura 3(b) se  $a \leq -2$  ou  $a \geq 1$ , Figura 3(d) se  $-2 < a < -1/2$ , Figura 3(e) se  $a = -1/2$ , e Figura 3(f) se  $-1/2 < a < 1$ .*
- c) *Quando  $a = -1/2$  os planos  $x = y$ ,  $x = z$  e  $y = z$  são invariantes pelo fluxo do sistema (3), e os retratos de fase da compactificação de Poincaré  $p(X)$  do sistema (3) em  $R \cap \{x = y\}$ ,  $R \cap \{x = z\}$  e  $R \cap \{y = z\}$  são topologicamente equivalentes aos descritos em (g), (h) e (i) da Figura 3, respectivamente.*

**Teorema D.** *Seja  $\gamma$  uma órbita do sistema (3) com  $a + b = -1$  tal que  $p(\gamma)$  está contido no interior de  $R$ . Então, para qualquer valor  $a \in \mathbb{R}$  as seguintes afirmações são válidas.*

- a) *O conjunto  $\alpha$ -limite de  $p(\gamma)$  é a origem de  $\mathbb{R}^3$ .*
- b) *O conjunto  $\omega$ -limite de  $p(\gamma)$  é o ponto singular no infinito  $\{(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})\} \in R^\infty$ .*

A tese está organizada da seguinte forma.

No Capítulo 1 apresentamos conceitos preliminares que serão utilizados no decorrer da tese; entre eles, um método de regularização de campos de vetores descontínuos.

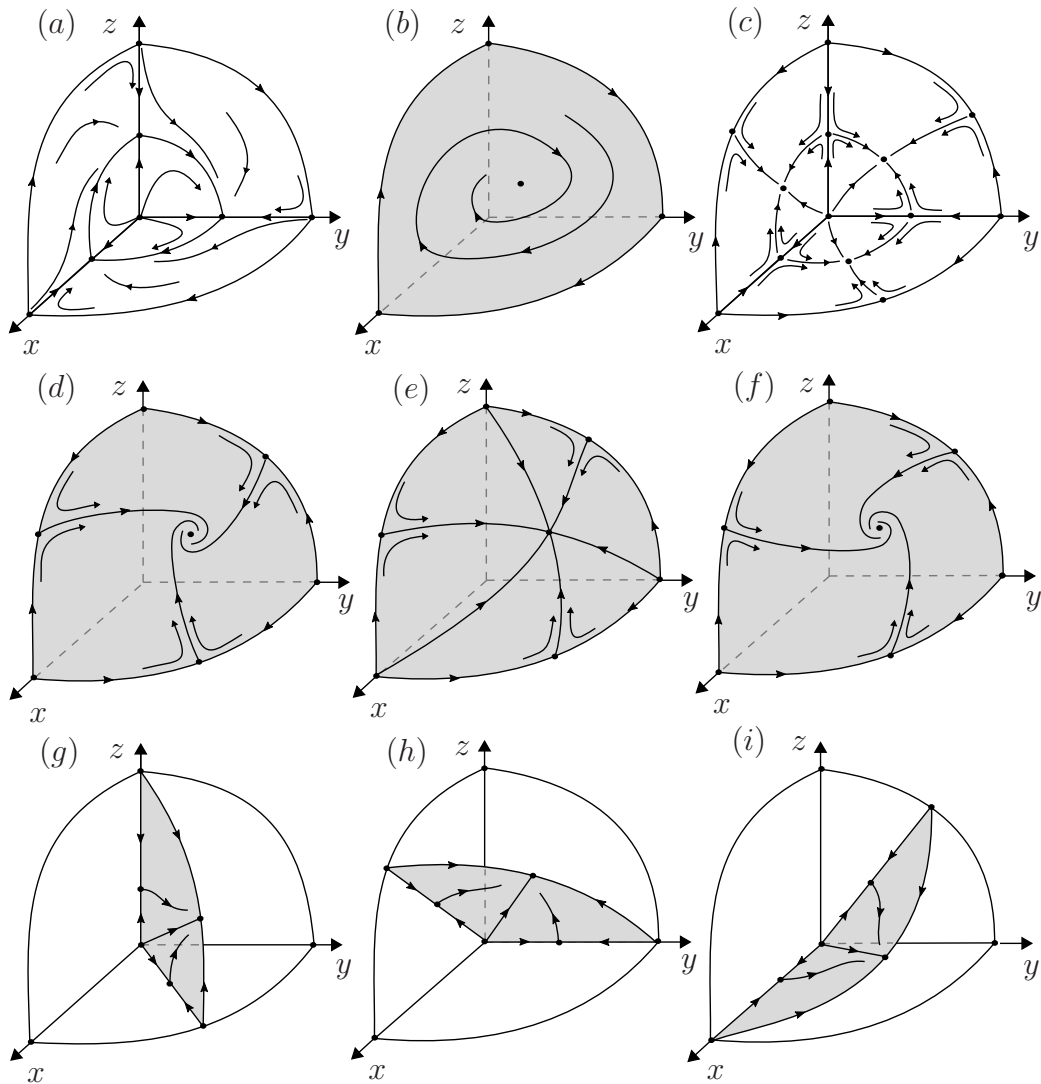


Figura 3: A dinâmica na fronteira de  $R$  para  $a+b = -1$  incluindo  $R^\infty$ , e em  $R \cap \{x = y\}$ ,  $R \cap \{x = z\}$  e  $R \cap \{y = z\}$  quando  $a = b = -1/2$ .

No Capítulo 2 estudamos uma bifurcação de codimensão um que nasce da colisão de dois pseudo-equilíbrios, conhecida como *bifurcação pseudo-sela-nó*, e provamos o item a) do Teorema A.

No Capítulo 3 continuamos o estudo das bifurcações de codimensão um, mas que apresentam agora colisões de tangência quadrática no conjunto de descontinuidade, e completamos a prova do Teorema A.

No Capítulo 4 estudamos a singularidade Sela-Dobra para campos de vetores descontínuos. O resultado provado neste capítulo está descrito no Teorema B.

O Capítulo 5 está concentrado em provar os Teoremas A e B para o caso em que a regularização é do tipo Sotomayor-Teixeira, considerando uma função de transição arbitrária.

Por fim, no Capítulo 6 estudamos uma classe particular de sistemas Lotka-Volterra tridimensional, conhecida como sistemas May-Leonard, de modo a descrever a dinâmica global de tais sistemas no octante positivo de  $\mathbb{R}^3$ , incluindo seu infinito. Neste capítulo constam as provas dos Teoremas C e D.



---

# Preliminares

---

Neste capítulo apresentamos conceitos preliminares que serão utilizados no decorrer da tese. Entre eles, alguns resultados da teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias e campos de vetores suaves, e uma breve introdução aos campos de vetores descontínuos. Além disso, apresentamos, com mais detalhes, o método de regularização Sotomayor-Teixeira e discutimos sobre a escolha da função  $\varphi(x) = 1/2 + x/(2\sqrt{x^2 + 1})$  como boa aproximação para uma função de transição.

## 1.1 Campos de vetores contínuos e descontínuos

Um *campo de vetores contínuo*, ou, um *campo vetorial*  $X$  suave de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , é uma aplicação  $X : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^r$  definida em um subconjunto aberto  $\mathcal{D}$  do plano  $\mathbb{R}^2$ . A seguinte equação diferencial ordinária está associada ao campo vetorial  $X$

$$\dot{x} = X(x), \tag{1.1}$$

onde  $x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$  e  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ . As soluções desta equação, também chamadas *órbitas* ou *trajetórias* de  $X$ , são curvas diferenciáveis  $\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{D}$  satisfazendo  $\varphi'(t) = X(\varphi(t))$  para todo  $t \in I$ . O intervalo aberto da reta  $I$  é chamado *intervalo máximo de solução*. O *retrato de fase* do campo de vetores  $X$  é o conjunto de todas as trajetórias de  $X$  em  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ . É bem conhecido o Teorema da Existência e Unicidade de Soluções para campos de vetores de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ .

Assim, para cada  $x \in \mathcal{D}$ , existe um intervalo máximo  $I_x$  onde está bem definida uma solução única  $\varphi_x$  de (1.1) tal que  $\varphi_x(t_0) = x$ . A aplicação de classe  $C^r$ ,  $\varphi : \mathcal{D} \times I_x \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $\varphi(x, t) = \varphi_x(t)$  é chamada *fluxo gerado* por  $X$ .

Um ponto  $p \in \mathcal{D}$  é dito um *ponto singular*, ou uma *singularidade*, ou ainda um *ponto de equilíbrio* do campo de vetores  $X$  quando  $X(p) = 0$ . Um ponto de equilíbrio é chamado *hiperbólico* se todos os autovalores da matriz Jacobiana  $DX(p)$  têm parte real não nula. Caso  $X(p) \neq 0$ ,  $p$  é dito *ponto regular*, ou *não singular*, do campo vetorial  $X$ .

Vamos denotar por  $\Omega^r(\mathcal{D})$  o conjunto dos campos vetoriais  $X : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^r$  definidos em  $\mathcal{D}$ , onde  $\mathcal{D}$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^2$ . Dizemos que dois campos de vetores  $X, Y \in \Omega^r(\mathcal{D})$  são *topologicamente equivalentes* se existe um homeomorfismo  $h : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  que leva as órbitas do campo  $X$  nas órbitas do campo  $Y$ , preservando a orientação das trajetórias. Quando o homeomorfismo  $h$  também tem a propriedade

$$\varphi(x, t) = h^{-1}(\psi(h(x), t)), \quad x \in \mathcal{D}, t \in I_x,$$

onde  $\varphi(x, t)$  e  $\psi(y, t)$  são os fluxos gerados pelos campos  $X$  e  $Y$  respectivamente, dizemos que  $X$  e  $Y$  são campos de vetores *topologicamente conjugados*. Neste caso,  $I_y = I_{h(x)}$  para cada  $x \in \mathcal{D}$ , e o homeomorfismo  $h$  recebe o nome de *conjugação topológica*. Observe que uma conjugação topológica entre dois campos de vetores preserva o tempo de percurso das trajetórias. Ainda, se a conjugação topológica  $h$  é um difeomorfismo de classe  $C^r$ , dizemos que os campos  $X$  e  $Y$  são  *$C^r$ -conjugados*.

Enunciaremos a seguir dois resultados clássicos da teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias que envolvem conjugação topológica. O primeiro diz que, localmente, em uma vizinhança de um ponto regular, todo campo de vetores “se comporta” como um campo vetorial constante. Para enunciá-lo precisamos estabelecer o conceito de seção transversal local. Uma aplicação diferenciável  $s : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \Sigma = s(A)$  de classe  $C^r$  é uma *seção transversal local* de  $X \in \Omega^r(\mathcal{D})$  quando, para todo  $a \in A$ ,  $Ds(a)(\mathbb{R})$  e  $X(s(a))$  geram o espaço  $\mathbb{R}^2$ .

**Teorema 1.1 (Fluxo tubular)** *Sejam  $p$  um ponto regular de  $X \in \Omega^r(\mathcal{D})$ , e  $s : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$  uma seção transversal local de  $X$  de classe  $C^r$  com  $s(0) = p$ . Então, existe uma vizinhança  $\mathcal{V}$  de  $p$  em  $\mathcal{D}$  e um difeomorfismo  $h : \mathcal{V} \rightarrow (-\epsilon, \epsilon) \times B$  de classe  $C^r$ , onde  $\epsilon > 0$  e  $B$  é uma bola aberta em  $\mathbb{R}$  centrada na origem  $0 = s^{-1}(p)$  tal que*

$$a) h(\Sigma \cap \mathcal{V}) = \{0\} \times B$$

$$b) h \text{ é uma } C^r\text{-conjugação entre } X|_{\mathcal{V}} \text{ e o campo constante } Y : (-\epsilon, \epsilon) \times B \rightarrow \mathbb{R}^2, Y = (1, 0).$$

O segundo resultado garante que, localmente, em uma vizinhança de um ponto de equilíbrio hiperbólico, o comportamento de um campo de vetores é sempre modelado pelo comportamento de sua parte linear.

**Teorema 1.2 (Grobman-Hartman)** *Seja  $p \in \mathcal{D}$  um ponto de equilíbrio hiperbólico do campo de vetores  $X : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^1$ . Então, existem vizinhanças  $\mathcal{V}$  de  $p$  em  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{W}$  de  $0 \in \mathbb{R}^2$  tais que  $X|_{\mathcal{V}}$  é topologicamente conjugado a  $DX(p)|_{\mathcal{W}}$ .*

As demonstrações dos dois teoremas anteriores constam em [21] para campos de vetores em  $\mathbb{R}^n$ . Como já temos alguns resultados básicos da teoria qualitativa de equações diferenciais ordinárias e campos de vetores planares, apresentaremos agora os conceitos e alguns resultados básicos da teoria de campos de vetores descontínuos no plano.

Seja  $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável de classe  $C^r$ , com  $r \geq 1$ . Considere o conjunto  $\Sigma = f^{-1}(0) = \{x \in \mathcal{D} : f(x) = 0\}$ . Vamos assumir que 0 é valor regular da função  $f$ , isto é, o vetor gradiente de  $f$  é não-nulo em todos os pontos de  $\Sigma$ . Neste caso, a subvariedade  $\Sigma$  é uma curva regular em  $\mathcal{D}$ . Vamos supor também que o conjunto  $\mathcal{D}$  é simplesmente conexo, e que a curva  $\Sigma = f^{-1}(0)$  divide o conjunto aberto  $\mathcal{D}$  em duas regiões  $\Sigma^+ = \{x \in \mathcal{D} : f(x) \geq 0\}$  e  $\Sigma^- = \{x \in \mathcal{D} : f(x) \leq 0\}$ . Assim, podemos definir um campo de vetores descontínuo.

**Definição 1.1** *Sejam  $X, Y \in \Omega^r(\mathcal{D})$  e  $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável de classe  $C^r$  tal que 0 é seu valor regular. Um campo vetorial descontínuo, ou um campo suave por partes,  $Z = (X, Y)$ , definido em  $\mathcal{D}$ , é uma aplicação dada por*

$$Z(x) = \begin{cases} X(x), & \text{se } x \in \Sigma^+ \\ Y(x), & \text{se } x \in \Sigma^-. \end{cases} \quad (1.2)$$

O conjunto  $\Sigma$  é chamado *conjunto de descontinuidade*. O conjunto dos campos vetoriais descontínuos  $Z = (X, Y)$  definidos em  $\mathcal{D}$  será denotado por  $\mathcal{X}^r(\mathcal{D})$ . Sem perda de generalidade, a Forma Local das Imersões permite considerar, sempre que necessário, a fronteira de

descontinuidade como o eixo- $x$  numa vizinhança da origem, isto é,  $\Sigma = \{(x, 0) \in \mathcal{D} : x \in \mathbb{R}\}$  com  $f(x, y) = y$ .

Observamos que a Definição 1.1 não especifica como a dinâmica de um campo vetorial descontínuo  $Z = (X, Y)$  evolui ao atingir o conjunto de descontinuidade  $\Sigma$ . Isto depende basicamente de como as órbitas dos campos de vetores  $X$  e  $Y$  se comportam numa vizinhança de  $\Sigma$ . Dessa forma, para descrever a transição das órbitas de um campo de vetores descontínuo entre as regiões  $\Sigma^+$  e  $\Sigma^-$ , intersectando o conjunto de descontinuidade, utilizamos as *convenções de Filippov* [8], cujas regras estão definidas a seguir.

Vamos denotar por  $Xf(p)$  o seguinte objeto matemático

$$Xf(p) = \langle \nabla f(p), X(p) \rangle,$$

onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é o produto interno usual do  $\mathbb{R}^2$ . Assim,  $Xf(p)$  significa a derivada direcional de  $f$  na direção  $X(p)$ . Podemos identificar as seguintes regiões genéricas em  $\Sigma$ :

1. *Região de Costura*:  $\Sigma_c = \{p \in \Sigma : Xf(p)Yf(p) > 0\}$ .

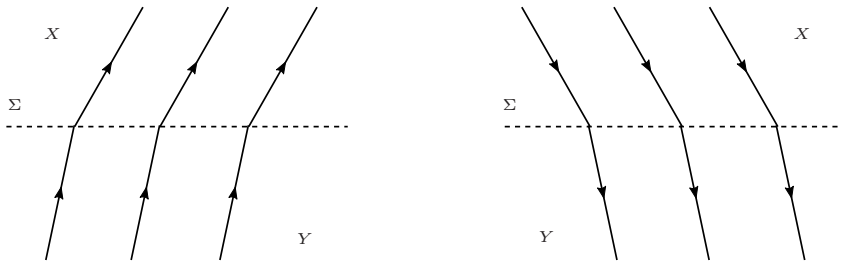


Figura 1.1: Regiões de Costura  $\Sigma_c$ .

2. *Região de Deslize*:  $\Sigma_d = \{p \in \Sigma : Xf(p) < 0, Yf(p) > 0\}$ .

3. *Região de Escape*:  $\Sigma_e = \{p \in \Sigma : Xf(p) > 0, Yf(p) < 0\}$ .

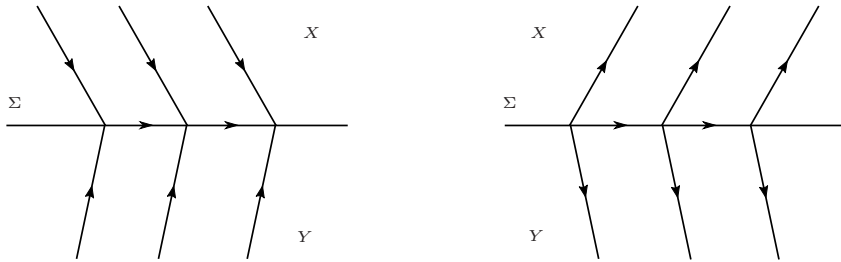


Figura 1.2: (a) Região de Deslize  $\Sigma_d$ , (b) Região de Escape  $\Sigma_e$ .

Nas regiões de deslize e escape, a convenção de Filippov fornece um campo de vetores deslizante  $F(Z)$  associado ao campo vetorial descontínuo  $Z = (X, Y)$ , chamado *campo de Filippov*. O campo de Filippov em  $\Sigma$  consiste de uma combinação convexa dos campos de vetores  $X$  e  $Y$ . Precisamente, dado um ponto  $p \in \Sigma_d \cup \Sigma_e$ , considere a reta  $r$  que liga  $p + X(p)$  a  $p + Y(p)$ . Seja  $q$  o único ponto de interseção da reta  $r$  com o hiperplano tangente a  $\Sigma$  em  $p$ . Então o campo de Filippov é definido como  $F(Z)(p) = \vec{p}q$ . Em outras palavras,  $F(Z)(p)$  denota o único vetor tangente a  $\Sigma$  contido no cone gerado por  $X(p)$  e  $Y(p)$ .

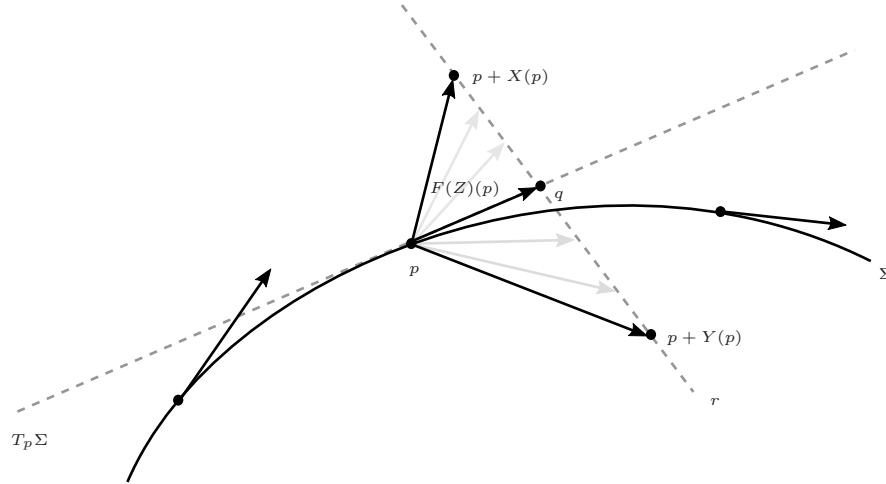


Figura 1.3: Campo de Filippov.

**Definição 1.2** *Sejam  $Z = (X, Y) \in \mathcal{X}^r(\mathcal{D})$  com conjunto de descontinuidade  $\Sigma$ , e  $p \in \Sigma$  um ponto de deslize ou de escape. O campo de Filippov no ponto  $p$ , associado ao campo de vetores descontínuo  $Z$ , é definido por*

$$F(Z)(p) = (1 - l)Y(p) + lX(p), \quad (1.3)$$

onde  $l = Yf(p)/(Yf(p) - Xf(p))$ .

Escrevendo  $X(p) = (f_1(p), g_1(p))$  e  $Y(p) = (f_2(p), g_2(p))$  denotamos

$$\det[X, Y](p) = \det \begin{pmatrix} f_1(p) & g_1(p) \\ f_2(p) & g_2(p) \end{pmatrix} = f_1(p)g_2(p) - f_2(p)g_1(p).$$

Podemos então definir os pontos regulares e os pontos críticos de um campo de Filippov.

**Definição 1.3** Um ponto  $p \in \Sigma$  é um ponto regular de  $F(Z)$  se

- 1)  $p$  é de costura (i.e.,  $Xf(p)Yf(p) > 0$ ), ou
- 2)  $p$  é de deslize ou escape ( $Xf(p)Yf(p) < 0$ ) e  $\det[X, Y](p) \neq 0$ , isto é, os vetores  $X(p)$  e  $Y(p)$  são linearmente independentes.

**Definição 1.4** Um ponto  $p \in \Sigma$  é um ponto crítico do campo de Filippov  $F(Z)$  se

$$Xf(p)Yf(p) < 0 \quad e \quad \det[X, Y](p) = 0.$$

Note que em um ponto crítico  $p$  de  $F(Z)$  os vetores  $X(p)$  e  $Y(p)$  são linearmente dependentes. Além disso, dizemos que um ponto crítico  $p$  é *hiperbólico* se  $\frac{d}{dt}(\det[X, Y]_{|\Sigma})(p) \neq 0$ . Um ponto crítico hiperbólico do campo de Filippov  $F(Z)$  também é comumente chamado na literatura de *pseudo-equilíbrio* do campo vetorial descontínuo  $Z = (X, Y)$ . Existe uma classificação para os pontos críticos hiperbólicos de  $F(Z)$ .

**Definição 1.5** Seja  $p$  um ponto crítico hiperbólico de  $F(Z)$ . Dizemos que

- 1)  $p$  é uma sela de Filippov, ou uma pseudo-sela de  $Z = (X, Y)$ , se
  - 1.a)  $p \in \Sigma_d$  é um ponto crítico repulsor para  $F(Z)$ , ou seja,  $\frac{d}{dt}(\det[X, Y]_{|\Sigma})(p) > 0$ .

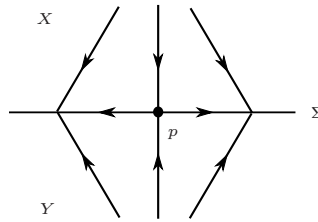


Figura 1.4: Sela de Filippov.

- 1.b)  $p \in \Sigma_e$  é um ponto crítico atrator para  $F(Z)$ , ou seja,  $\frac{d}{dt}(\det[X, Y]_{|\Sigma})(p) < 0$ .
- 2)  $p$  é um nó de Filippov, ou um pseudo-nó de  $Z = (X, Y)$ , se
  - 2.a)  $p \in \Sigma_d$  é um ponto crítico atrator para  $F(Z)$ , ou seja,  $\frac{d}{dt}(\det[X, Y]_{|\Sigma})(p) < 0$ . Neste caso  $p$  é um nó atrator de  $F(Z)$  (ou pseudo-nó atrator de  $Z$ ).
  - 2.b)  $p \in \Sigma_e$  é um ponto crítico repulsor para  $F(Z)$ , ou seja,  $\frac{d}{dt}(\det[X, Y]_{|\Sigma})(p) > 0$ . Neste caso  $p$  é um nó repulsor de  $F(Z)$  (ou pseudo-nó repulsor de  $Z$ ).

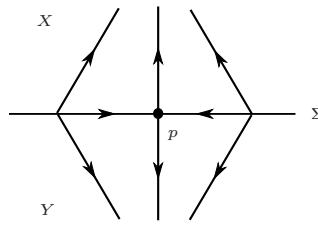


Figura 1.5: Sela de Filippov.

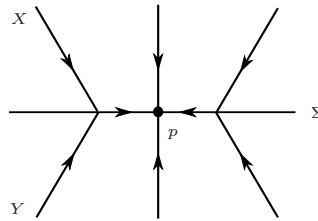


Figura 1.6: Nó atrator de Filippov.

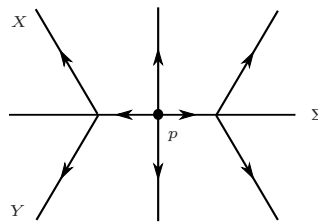


Figura 1.7: Nó repulsor de Filippov.

Outra caracterização de pontos em  $\Sigma$  são as tangências de trajetórias dos campos  $X$  ou  $Y$  com o conjunto de descontinuidade. Neste trabalho trataremos apenas das tangências quadráticas no conjunto de descontinuidade. Por simplicidade muitas vezes escreveremos apenas a palavra “dobra” quando não houver perigo de confusão. Denotamos  $X^2f(p) = X(Xf)(p) = \langle \nabla(Xf)(p), X(p) \rangle$ .

**Definição 1.6** Um ponto  $p \in \Sigma$  é dito um ponto de dobra de  $Z$  em  $\Sigma$  se  $p$  é um ponto de contato quadrático do campo  $X$  com  $\Sigma$ , ou do campo  $Y$  com  $\Sigma$ . Dizemos que uma dobra de  $Z$  é

- i) uma dobra visível se  $p$  for um ponto de tangência quadrática interna do campo  $X$  com  $\Sigma$ , ou seja se  $Xf(p) = 0$ ,  $Yf(p) \neq 0$  e  $X^2f(p) > 0$ .
- ii) uma dobra invisível se  $p$  for um ponto de tangência quadrática externa do campo  $X$  com  $\Sigma$ , ou seja se  $Xf(p) = 0$ ,  $Yf(p) \neq 0$  e  $X^2f(p) < 0$ .

Analogamente definimos dobra visível e dobra invisível de  $Z$  para contato quadrático do

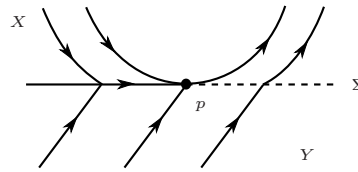


Figura 1.8: Dobra visível.

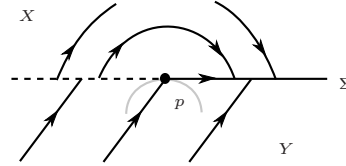


Figura 1.9: Dobra invisível.

campo  $Y$  com o conjunto  $\Sigma$ , isto é,  $Yf(p) = 0$ ,  $Xf(p) \neq 0$ , e  $Y^2f(p) \neq 0$ . Além disso, se  $p \in \Sigma$  é um ponto de tangência (quadrática) invisível tanto para  $X$  quanto para  $Y$ , então  $p$  é chamado um *ponto de tangência singular*. Por outro lado,  $p$  é um *ponto de tangência regular* se não for singular. Reunindo todos esses conceitos definimos uma singularidade de um campo de vetores descontínuo como segue.

**Definição 1.7** Um ponto  $p \in \mathcal{D}$  é uma singularidade de um campo de vetores descontínuo  $Z = (X, Y)$  se

- i)  $p \in \Sigma^+ \cup \Sigma^-$  é um ponto de equilíbrio do campo  $X$  ou do campo  $Y$ ; ou
- ii)  $p \in \Sigma_d \cup \Sigma_e$  é um pseudo-equilíbrio (isto é, um ponto crítico hiperbólico de  $F(Z)$ ); ou
- iii)  $p \in \Sigma$  é um ponto de dobra de  $Z$ .

Assim como ocorre para campos de vetores suaves, também devemos definir o que vem a ser uma órbita de um campo de vetores descontínuo.

**Definição 1.8** A órbita (ou trajetória local) de um campo de vetores descontínuo da forma (1.2) passando por um ponto  $p$  é definida como segue:

- i) Para  $p \in \Sigma^+ \setminus \Sigma$  e  $p \in \Sigma^- \setminus \Sigma$  a trajetória é dada por  $\varphi_Z(p, t) = \varphi_X(p, t)$  e  $\varphi_Z(p, t) = \varphi_Y(p, t)$  respectivamente, onde  $t \in I_p$ .
- ii) Para  $p \in \Sigma_c$  tal que  $Xf(p), Yf(p) > 0$  e tomando a origem do tempo em  $p$ , a trajetória é definida como  $\varphi_Z(p, t) = \varphi_Y(p, t)$  para  $t \in I_p \cap \{t \leq 0\}$  e  $\varphi_Z(p, t) = \varphi_X(p, t)$  para



$t \in I_p \cap \{t \geq 0\}$ . Para o caso  $Xf(p), Yf(p) < 0$  a definição é a mesma revertendo o tempo.

iii) Para  $p \in \Sigma_d \cup \Sigma_e$  tal que  $F(Z)(p) \neq 0$ ,  $\varphi_Z(p, t) = \varphi_{F(Z)}(p, t)$  para  $t \in I_p$ , onde  $F(Z)$  é o campo de Filippov dado em (1.3).

iv) Para  $p$  um ponto de tangência regular e tomando a origem do tempo em  $p$ , a trajetória é definida como  $\varphi_Z(p, t) = \varphi_1(p, t)$  para  $t \in I_p \cap \{t \leq 0\}$  e  $\varphi_Z(p, t) = \varphi_2(p, t)$  para  $t \in I_p \cap \{t \geq 0\}$ , onde cada  $\varphi_1, \varphi_2$  é  $\varphi_X$  ou  $\varphi_Y$  ou  $\varphi_{F(Z)}$ .

v) Para  $p$  um ponto de tangência singular,  $\varphi_Z(p, t) = p$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Observamos que se  $p \in \Sigma_d \cup \Sigma_e$  é uma tangência regular, a trajetória  $\varphi_Z$  passando através de  $p$  pode ser escolhida de diversas maneiras distintas. Além disso, a definição de trajetória local para campos vetoriais descontínuos também pode ser encontrada em [9]. Encerrando esta seção, damos a definição de equivalência topológica pra campos de vetores descontínuos.

**Definição 1.9** *Dois campos de vetores descontínuos  $Z$  e  $\tilde{Z}$  definidos em conjuntos abertos  $\mathcal{D}$  e  $\tilde{\mathcal{D}}$  e com fronteiras de descontinuidade  $\Sigma$  e  $\tilde{\Sigma}$  são topologicamente equivalentes se existe um homeomorfismo  $h : \mathcal{D} \rightarrow \tilde{\mathcal{D}}$  que leva as órbitas do primeiro sistema nas órbitas do segundo preservando a orientação das trajetórias, e a fronteira de descontinuidade, isto é,  $h(\Sigma) = \tilde{\Sigma}$ .*

## 1.2 Regularização de campos de vetores descontínuos

Nesta seção apresentamos a definição geral de regularização de um campo de vetores descontínuo e também definimos quando a regularização é do tipo transição. Dentre os exemplos, destacamos uma regularização do tipo transição bem conhecida, a saber, a regularização Sotomayor-Teixeira. Destacamos também alguns resultados já estabelecidos para a regularização de campos de vetores descontínuos.

**Definição 1.10** *Seja  $Z = (X, Y) \in \mathcal{X}^r(\mathcal{D})$  um campo de vetores descontínuo, com conjunto de descontinuidade  $\Sigma$ . Uma regularização de  $Z$  é uma família a um parâmetro  $Z_\varepsilon$  de campos de vetores suaves satisfazendo a propriedade de que  $Z_\varepsilon$  converge para  $Z$  simplesmente em  $\mathcal{D} \setminus \Sigma$ .*

**Definição 1.11** Seja  $Z = (X, Y) \in \mathcal{X}^r(\mathcal{D})$  um campo de vetores descontínuo, onde  $\Sigma = f^{-1}(0)$  é definida pela função diferenciável  $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Dados  $\varepsilon > 0$  e  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função monótona de classe  $C^\infty$  tal que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 0 \quad e \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 1,$$

dizemos que

$$Z_\varepsilon(p) = (1 - \varphi_\varepsilon(f(p)))Y(p) + \varphi_\varepsilon(f(p))X(p), \quad (1.4)$$

é uma regularização do tipo transição, onde  $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(x/\varepsilon)$ . O valor  $\varepsilon$  é dito parâmetro de regularização.

**Exemplo 1.1** Considere  $Z = (X, Y)$  um campo de vetores descontínuo,  $\Sigma = f^{-1}(0)$  com  $f(x, y) = y$ , e  $\varphi$  a função de classe  $C^\infty$

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Assim, dado  $\varepsilon > 0$ , a regularização

$$Z_\varepsilon(x, y) = \left( \frac{1}{2} - \frac{y}{2\sqrt{y^2 + \varepsilon^2}} \right) Y(x, y) + \left( \frac{1}{2} + \frac{y}{2\sqrt{y^2 + \varepsilon^2}} \right) X(x, y),$$

é uma regularização do tipo transição.

**Exemplo 1.2 (Regularização Sotomayor-Teixeira)** Considere uma função  $C^\infty \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo as propriedades  $\varphi(x) = 0$  se  $x \leq -1$ ,  $\varphi(x) = 1$  se  $x \geq 1$  e  $\varphi'(x) > 0$  se  $x \in (-1, 1)$ .

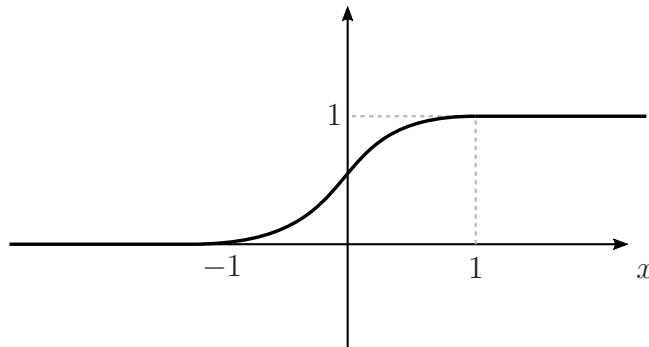


Figura 1.10: Função de transição na regularização Sotomayor-Teixeira.

Neste caso, a regularização do tipo transição (1.4) é chamada regularização Sotomayor-Teixeira, e a função  $\varphi$  satisfazendo as propriedades acima é dita uma função de transição. Em [23] Sotomayor e Teixeira descrevem com detalhes um método para regularizar campos de vetores descontínuos. Dado um campo de vetores descontínuo  $Z = (X, Y)$ , o método consiste em considerar a combinação convexa dos campos de vetores  $X$  e  $Y$  descrita em (1.4) utilizando funções de transição.

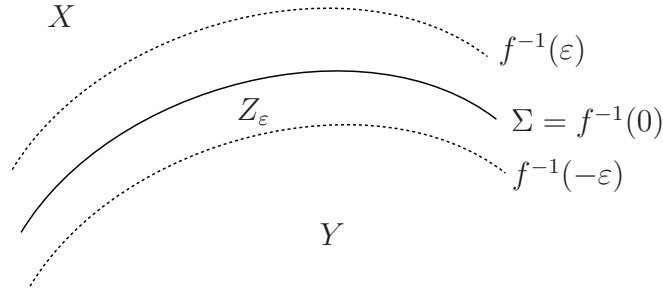


Figura 1.11: Faixa de regularização.

Na regularização Sotomayor-Teixeira, o conjunto  $\Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon)$  é chamado faixa de regularização. No exterior da faixa de regularização o campo de vetores regularizado  $Z_\varepsilon$  reduz-se ao campo  $Y$  ou ao campo  $X$ , conforme a função de transição  $\varphi$  assumira valor zero ou um, respectivamente. Em particular, quando  $\Sigma = f^{-1}(0)$  e  $f(x, y) = y$ , temos

$$Z_\varepsilon(p) = \begin{cases} X(p) & \text{se } y \geq \varepsilon \\ (1 - \varphi(\frac{y}{\varepsilon}))Y(p) + \varphi(\frac{y}{\varepsilon})X(p) & \text{se } y \in (-\varepsilon, \varepsilon) \\ Y(p) & \text{se } y \leq -\varepsilon \end{cases} . \quad (1.5)$$

Já estão estabelecidos alguns resultados para a regularização Sotomayor-Teixeira de campos de vetores descontínuos em vizinhanças de pseudo-equilíbrios, pontos regulares de  $F(Z)$  e dobras de  $Z$  em  $\Sigma$ . Assim, enunciaremos tais resultados indicando as referências para suas demonstrações.

**Proposição 1.1** Dado  $Z = (X, Y) \in \mathcal{X}^r(\mathcal{D})$ , seja  $p \in \Sigma$  um ponto crítico hiperbólico de  $F(Z)$ . Então, dada uma função de transição  $\varphi$ , existem uma vizinhança  $\mathcal{V}$  de  $p$  em  $\mathcal{D}$  e  $\varepsilon_0 > 0$  tais que para  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  o campo de vetores regularizado  $Z_\varepsilon$  tem uma única singularidade  $p_\varepsilon$  em  $\mathcal{V}$ , a qual é uma sela hiperbólica ou um nó hiperbólico, conforme  $p$  o for para  $F(Z)$ .

*Demonstração.* Veja [22].

□

**Proposição 1.2** *Sejam  $Z = (X, Y) \in \mathcal{X}^r(\mathcal{D})$  e  $p \in \Sigma$  um ponto regular de  $F(Z)$ . Então, dada uma função de transição  $\varphi$ , existem uma vizinhança  $\mathcal{V}$  de  $p$  em  $\mathcal{D}$  e  $\varepsilon_0 > 0$  tais que para  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  o campo de vetores regularizado  $Z_\varepsilon$  não tem singularidades em  $\mathcal{V}$ .*

*Demonstração.* Veja [22]. □

**Proposição 1.3** *Seja  $p \in \Sigma$  um ponto de dobra de  $Z = (X, Y) \in \mathcal{X}^r(\mathcal{D})$ . Então, dada uma função de transição  $\varphi$ , existem uma vizinhança  $\mathcal{V}$  de  $p$  em  $\mathcal{D}$  e  $\varepsilon_0 > 0$  tais que para  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  o campo de vetores regularizado  $Z_\varepsilon$  não possui singularidades em  $\mathcal{V}$ .*

*Demonstração.* Veja [22]. □

A Proposição 1.1 também pode ser provada usando a teoria das perturbações singulares da seguinte maneira. Considere a família a um parâmetro  $Z_\varepsilon$  de campos de vetores suaves dada pela regularização do tipo transição (1.4).

Suponha, sem perda de generalidade, que  $f(x, y) = y$ . Assim, as trajetórias de (1.4) são as soluções do sistema de equações

$$\begin{cases} \dot{x} = f_2 + \varphi(y/\varepsilon)(f_1 - f_2) \\ \dot{y} = g_2 + \varphi(y/\varepsilon)(g_1 - g_2) \end{cases}, \quad (1.6)$$

onde  $X = (f_1, g_1)$ ,  $Y = (f_2, g_2)$  e  $\Sigma = \{y = 0\}$ .

Buzzi, da Silva e Teixeira [3] aplicaram técnicas da Teoria Geométrica das Perturbações Singulares para estudar a família (1.6). Considere a seguinte mudança de coordenadas

$$x = \bar{x}, \quad y = \varepsilon \bar{y}.$$

Assim, o sistema (1.6) se escreve da seguinte forma

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = f_2 + \varphi(\bar{y})(f_1 - f_2) \\ \varepsilon \dot{\bar{y}} = g_2 + \varphi(\bar{y})(g_1 - g_2) \end{cases}, \quad (1.7)$$

onde  $f_1, f_2, g_1$  e  $g_2$  são calculados em  $(\bar{x}, \varepsilon \bar{y})$ .

O sistema (1.7) é o que chamamos de um *problema de perturbação singular* com parâmetro  $\varepsilon \geq 0$ . Para mais detalhes sobre esta teoria veja [7]. Ao problema de perturbação singular (1.7)

está associado o seguinte sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = f_2 + \varphi(\bar{y})(f_1 - f_2) \\ 0 = g_2 + \varphi(\bar{y})(g_1 - g_2) \end{cases}, \quad (1.8)$$

chamado de *problema reduzido*. O conjunto  $S$  definido implicitamente por

$$g_2 + \varphi(\bar{y})(g_1 - g_2) = 0$$

é conhecido como *variedade lenta*. Em [14] os autores provaram que a região  $\Sigma_d \cup \Sigma_e$  é homeomorfa a variedade lenta  $S$  e, além disso, que o sistema reduzido tem dinâmica topologicamente equivalente a dinâmica do campo de Filippov  $F(Z)$ .

Considere então  $p$  um ponto crítico hiperbólico de  $F(Z)$ , isto é,  $p \in \Sigma_d \cup \Sigma_e$ . Logo,  $h(p)$  também é um ponto crítico hiperbólico na variedade lenta  $S$ , onde  $h : \Sigma_d \cup \Sigma_e \rightarrow S$  é o homeomorfismo que leva as órbitas de  $F(Z)$  em  $\Sigma_d \cup \Sigma_e$  nas órbitas do sistema reduzido em  $S$ . Além disso, a regularização do tipo transição leva a problemas de perturbação singular onde todos os pontos da variedade lenta  $S$  são normalmente hiperbólicos. Assim, a teoria de Fenichel [7] pode ser aplicada para garantir a existência da singularidade hiperbólica  $p_\varepsilon$  de  $Z_\varepsilon$  tal que  $p_\varepsilon \rightarrow p$ . De maneira análoga, pode-se provar as Proposições 1.2 e 1.3 usando a teoria de perturbações singulares.

Nos Capítulos 2, 3 e 4 vamos utilizar a seguinte função para o cálculo das regularizações do tipo transição de campos de vetores descontínuos

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x^2 + 1}}. \quad (1.9)$$

Assim, dado  $\varepsilon > 0$ , a regularização de um campo de vetores descontínuo será descrita através da família de funções

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(x/\varepsilon) = \frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x^2 + \varepsilon^2}}.$$

Esta função, apresentada no Exemplo 1.1, não é uma função de transição de acordo com a definição de Sotomayor e Teixeira; ver Exemplo 1.2. No entanto, existem algumas justificativas para considerarmos a função (1.9) nas regularizações dos campos descontínuos.

Esta função já foi utilizada anteriormente em [16] para obter a regularização de certas famílias de campos de vetores descontínuos  $Z_\lambda = (X_\lambda, Y_\lambda)$  que apresentavam bifurcações de codimensão um provenientes da colisão de um ponto de equilíbrio hiperbólico de um dos campos  $X_\lambda$  ou  $Y_\lambda$  com a fronteira de descontinuidade  $\Sigma$ . Na verdade, um dos nossos objetivos é, inspirados na abordagem realizada em [16], complementar os resultados lá alcançados, mas considerando famílias de campos descontínuos a um ou dois parâmetros que apresentam bifurcações oriundas de colisões de tangências quadráticas, pseudo-equilíbrios e também do desdobramento de uma singularidade sela-dobra.

A escolha da função (1.9) utilizada em [16] mostrou ser acertada. Primeiro, a função (1.9) está tão próxima de uma função de transição qualquer quanto quisermos, bastando tomarmos valores positivos de  $\varepsilon$  cada vez menores na família de funções  $\varphi_\varepsilon$  correspondente; Figura 1.12.

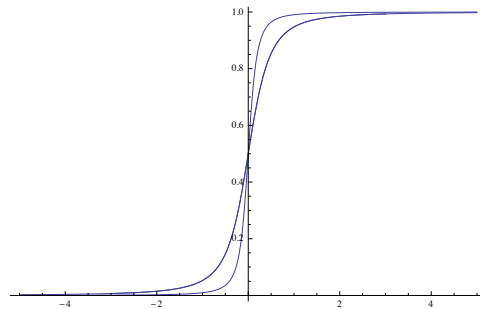


Figura 1.12: Gráficos de  $\varphi_\varepsilon$ , para  $\varepsilon = 0.5$  e  $\varepsilon = 0.2$ .

O segundo motivo está na simplicidade da expressão de (1.9), a qual possibilita maior facilidade na manipulação algébrica e cálculo das regularizações. Por fim, a função (1.9) mantém as propriedades essenciais e já estabelecidas da teoria das regularizações dadas pelas Proposições 1.1, 1.2 e 1.3. As demonstrações deste fato podem ser encontradas em [16].

---

# Colisões de Pseudo-Equilíbrios via Regularização

---

Neste capítulo estudaremos a bifurcação que ocorre na regularização da família de campos descontínuos que apresenta colisões de pseudo-equilíbrios, descrita na seção 3.3 de [12]. Na seção 3.3 do artigo citado essa bifurcação recebe o nome de *bifurcação pseudo-sela-nó*. Trata-se de uma bifurcação de codimensão um, a qual ocorre quando dois pseudo-equilíbrios colidem e desaparecem sob a variação do parâmetro de bifurcação.

## 2.1 Bifurcação Pseudo-Sela-Nó

Como estabelecido no capítulo anterior, vamos considerar que  $f(x, y) = y$  é a função que define os conjuntos  $\Sigma$ ,  $\Sigma^+$  e  $\Sigma^-$  na vizinhança  $\mathcal{D}$  da origem. Dessa forma, o conjunto de descontinuidade,  $\Sigma$ , é o eixo- $x$ . Seja  $Z_\lambda = (X_\lambda, Y_\lambda)$  uma família a um parâmetro,  $\lambda$ , de campos vetoriais descontínuos definida em  $\mathcal{D}$ . Sob a variação do parâmetro  $\lambda$  dois pseudo-equilíbrios da família  $Z_\lambda$  podem colidir e em seguida desaparecer, dando origem a uma bifurcação de codimensão um. Para compreender melhor essa bifurcação suponha que a família de campos vetoriais  $X_\lambda$  é  $C^r$ -conjugada ao campo  $\hat{X}(x, y) = (0, -1)$ , e que para valores negativos e pequenos do parâmetro as órbitas da família  $Y_\lambda$  atingem a reta de descontinuidade dando origem a dois pseudo-equilíbrios, um pseudo-nó atrator e uma pseudo-sela com variedade instável contida em  $\Sigma$ , ambos pertencentes a região de deslize  $\Sigma_d = \Sigma$ . A Figura 2.1 ilustra esta bifurcação, e invertendo o sentido das flechas obtém-se um retrato de fase topologicamente equivalente, com pseudo-nó repulsor, pseudo-sela com variedade estável contida em  $\Sigma$ , e  $\Sigma_c = \Sigma$ .

Para uma definição formal de retratos de fase topologicamente equivalentes veja [6].

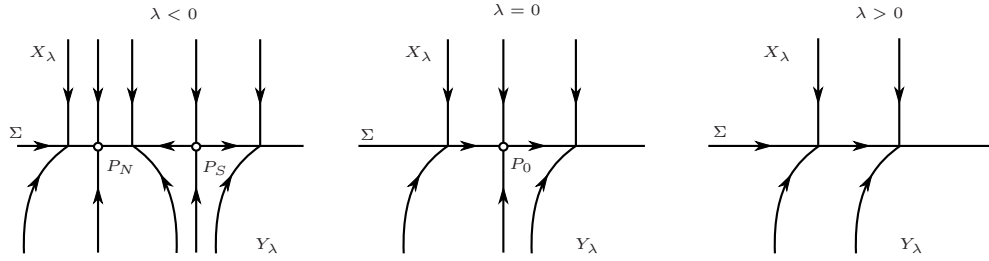


Figura 2.1: Colisões pseudo-equilíbrios. Bifurcação pseudo-sela-nó.

Uma forma normal topológica para esta bifurcação descrita em [12] é dada por  $Z_\lambda = (X_\lambda, Y_\lambda)$ ,

$$Z_\lambda(x, y) = \begin{cases} X_\lambda(x, y) = (0, -\alpha) & \text{se } y > 0 \\ Y_\lambda(x, y) = (\lambda + x^2, \alpha) & \text{se } y < 0 \end{cases}, \quad (2.1)$$

com  $\alpha > 0$ . O campo de Filippov,  $F(Z_\lambda)$ , associado ao campo descontínuo  $Z_\lambda$ , é dado por

$$\begin{aligned} F(Z_\lambda)(x, 0) &= lX_\lambda(x, 0) + (1 - l)Y_\lambda(x, 0) \\ &= \frac{1}{2}(\lambda + x^2, 0) \end{aligned}$$

onde

$$l = \frac{Y_\lambda f(x, 0)}{(Y_\lambda - X_\lambda) f(x, 0)} = \frac{1}{2}.$$

Os pontos críticos do campo de Filippov, isto é, os pseudo-equilíbrios de  $Z_\lambda$ , são os pontos  $P_N = (-\sqrt{-\lambda}, 0)$  e  $P_S = (\sqrt{-\lambda}, 0)$ , pseudo-nó atrator e pseudo-sela respectivamente. Observe que esses pseudo-equilíbrios estão definidos e coexistem apenas para valores negativos do parâmetro  $\lambda$ , e a medida que  $\lambda$  se aproxima de zero, os pontos  $P_N$  e  $P_S$  se aproximam e colidem em um mesmo ponto  $P_0 = (0, 0)$ , quando  $\lambda = 0$ . O ponto  $P_0$  é chamado *pseudo-sela-nó*, dando origem ao nome da bifurcação em [12].



## 2.2 Regularização da Bifurcação Pseudo-Sela-Nó

Nesta seção vamos analisar a bifurcação que ocorre na regularização do campo de vetores descontínuo  $Z_\lambda$  dado em (2.1) no caso em que a regularização do tipo transição é dada por

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}, \quad (2.2)$$

onde  $\varphi(\frac{x}{\varepsilon}) = \varphi_\varepsilon(x)$ , com  $\varepsilon > 0$ . Assim, se  $Z_\lambda = (X_\lambda, Y_\lambda)$  é uma família de campos descontínuos a um parâmetro, a família de campos regularizados é dada por

$$Z_{\lambda,\varepsilon}(x, y) = (1 - \varphi_\varepsilon(y))Y_\lambda(x, y) + \varphi_\varepsilon(y)X_\lambda(x, y),$$

onde estamos considerando que a função que define o conjunto de descontinuidade  $\Sigma$  é  $f(x, y) = y$ . Portanto, se  $Z_\lambda = (X_\lambda, Y_\lambda)$  é a família de campos descontínuos onde

$$\begin{aligned} X_\lambda(x, y) &= (0, -\alpha), \\ Y_\lambda(x, y) &= (\lambda + x^2, \alpha), \end{aligned}$$

a família de campos regularizados associada é dada por

$$Z_{\lambda,\varepsilon}(x, y) = \left( \left( \frac{1}{2} - \frac{y}{2\sqrt{y^2 + \varepsilon^2}} \right) (\lambda + x^2), -\frac{\alpha y}{\sqrt{y^2 + \varepsilon^2}} \right). \quad (2.3)$$

Note que em (2.3) temos uma família de campos vetoriais regulares a dois parâmetros.

Assim, vamos efetuar a seguinte mudança de variáveis e reescalonamento de parâmetros

$$x = \bar{x}, \quad y = \varepsilon \bar{y}, \quad \lambda = \bar{\lambda}, \quad \alpha = \varepsilon \bar{\alpha},$$

na família de campos regularizados  $Z_{\lambda,\varepsilon}$  dada em (2.3). Este procedimento é bastante útil pois permite desconsiderar o parâmetro  $\varepsilon$  no cálculo das bifurcações da família de campos regularizados, simplificando sua expressão. Uma vez efetuados esses cálculos, podemos retornar às variáveis e parâmetros iniciais, analisando e interpretando os resultados alcançados.

Assim, efetuando a mudança de variáveis e reescalonamento de parâmetros indicados acima na família de campos regularizados (2.3), e por simplicidade voltando a denotar  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}, \bar{\alpha})$  por

$(x, y, \lambda, \alpha)$ , obtemos o campo de vetores regularizado  $Z_R$

$$Z_R(x, y) = \left( \left( \frac{1}{2} - \frac{y}{2\sqrt{y^2 + 1}} \right) (\lambda + x^2), -\frac{\alpha y}{\sqrt{y^2 + 1}} \right). \quad (2.4)$$

O resultado a seguir prova o item *a*) do Teorema A, no caso em que a regularização do tipo transição é dada pela função  $\varphi(x) = 1/2 + x/(2\sqrt{x^2 + 1})$ .

**Proposição 2.1** *Seja  $Z_\lambda = (X_\lambda, Y_\lambda)$  uma família de campos descontínuos dada por (2.1). Então, a família de campos regularizados associada  $Z_R$ , dada por (2.4), admite uma bifurcação do tipo sela-nó no ponto de equilíbrio  $P_0 = (0, 0)$  para o valor de bifurcação  $\lambda_0 = 0$ .*

Para provar a Proposição 2.1 utilizaremos o teorema a seguir, devido a Sotomayor. Para mais detalhes veja [10], [19] e [20]. Em [10] o teorema está descrito para campos de vetores em  $\mathbb{R}^n$ , mas vamos enunciá-lo para o caso bidimensional.

**Teorema 2.1 (Sotomayor)** *Seja  $\dot{x} = F(x, \lambda)$  uma família a um parâmetro de um sistema diferencial em  $\mathbb{R}^2$ . Quando  $\lambda = \lambda_0$ , suponha que exista uma singularidade  $p_0 = (x_0, y_0)$  para a qual as seguintes hipóteses são satisfeitas:*

(SN<sub>1</sub>) *A matriz Jacobiana  $D_x F(p_0, \lambda_0)$  tem um autovalor simples  $\delta_0 = 0$  com autovetor à direita  $\vec{v}$  e autovetor à esquerda  $\vec{w}$ .*

(SN<sub>2</sub>) *Vale a desigualdade*

$$\left\langle \vec{w}, \frac{\partial F}{\partial \lambda}(p_0, \lambda_0) \right\rangle \neq 0,$$

onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota o produto interno usual de  $\mathbb{R}^2$ .

(SN<sub>3</sub>) *Vale a seguinte desigualdade*

$$\langle \vec{w}, D_x^2 F(p_0, \lambda_0)(\vec{v}, \vec{v}) \rangle \neq 0.$$

*Então existe uma curva suave de singularidades em  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$  passando por  $(p_0, \lambda_0)$ , tangente ao hiperplano  $\mathbb{R}^2 \times \{\lambda_0\}$ . Dependendo dos sinais das expressões em (SN<sub>2</sub>) e (SN<sub>3</sub>), não existem singularidades próximas a  $(p_0, \lambda_0)$  quando  $\lambda < \lambda_0$  ( $\lambda > \lambda_0$ ) e duas singularidades próximas a  $(p_0, \lambda_0)$  para cada valor do parâmetro  $\lambda > \lambda_0$  ( $\lambda < \lambda_0$ ). As duas singularidades de  $\dot{x} = F(x, \lambda)$  próximas a  $(p_0, \lambda_0)$  são hiperbólicas.*

Segue então a prova da Proposição 2.1.

*Demonstração.* Seja  $Z_\lambda = (X_\lambda, Y_\lambda)$  a família de campos descontínuos dada por (2.1), com respectiva família de campos regularizados  $Z_R$  indicada em (2.4). Os pontos de equilíbrio de  $Z_R$  são dados por  $Z_R(x, y) = (0, 0)$ . Como  $\alpha > 0$  e para todo  $y \in \mathbb{R}$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{y}{2\sqrt{y^2 + 1}}\right) \neq 0,$$

então as singularidades da família de campos regularizados  $Z_R$  são da forma  $(\pm\sqrt{-\lambda}, 0)$ . Os valores do parâmetro  $\lambda$  são considerados em uma vizinhança de zero. Assim, existem valores de parâmetros para os quais a família de campos regularizados,  $Z_R$ , possui uma, duas ou nenhuma singularidade. Denote por  $A = (a_{ij})$ ,  $1 \leq i, j \leq 2$ , a matriz Jacobiana  $DZ_R(x, \lambda)$  de  $Z_R$ , cujos elementos são

$$\begin{aligned} a_{11} &= x - \frac{xy}{\sqrt{y^2 + 1}}, & a_{12} &= -\frac{x^2 + \lambda}{2(y^2 + 1)^{3/2}}, \\ a_{21} &= 0, & a_{22} &= -\frac{\alpha}{(y^2 + 1)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Em  $P_0 = (0, 0)$  com  $\lambda_0 = 0$  temos  $DZ_R(P_0, \lambda_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$ . Logo, a matriz Jacobiana  $DZ_{R,\lambda}(P_0, \lambda_0)$  tem um único autovalor  $\delta_0$  nulo. Vamos determinar os autovetores à direita e à esquerda associados ao autovalor  $\delta_0$ , de acordo com  $(SN_1)$ . Um autovetor à direita é o vetor não-nulo  $\vec{v} = (v_1, v_2)$  satisfazendo a igualdade

$$A(P_0, \lambda_0)\vec{v} = \delta_0\vec{v} = 0.$$

Analogamente, o autovetor à esquerda, associado ao autovalor  $\delta_0 = 0$ , é a solução não-nula de  $\vec{w}^T A(P_0, \lambda_0) = 0$ . Assim,  $\vec{v} = \vec{w} = (1, 0)$ . Isso completa a verificação da hipótese  $(SN_1)$  do Teorema 2.1. Vejamos as outras hipóteses. Devemos verificar que o seguinte produto escalar é não-nulo

$$\left\langle \vec{w}, \frac{\partial Z_R}{\partial \lambda}(P_0, \lambda_0) \right\rangle.$$

Inicialmente, temos que

$$\frac{\partial Z_R}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = \left( \frac{1}{2} - \frac{y}{2\sqrt{y^2 + 1}}, 0 \right),$$

de modo que  $\frac{\partial Z_R}{\partial \lambda}(P_0, \lambda_0) = \left( \frac{1}{2}, 0 \right)$ . Multiplicando escalarmente por  $\vec{w}$ , resulta em

$$\left\langle \vec{w}, \frac{\partial Z_R}{\partial \lambda}(P_0, \lambda_0) \right\rangle = \frac{1}{2},$$

o que prova a hipótese ( $SN_2$ ). Agora, resta verificar que o seguinte produto escalar é não-nulo

$$\left\langle \vec{w}, D_x^2 Z_R(P_0, \lambda_0)(\vec{v}, \vec{v}) \right\rangle.$$

Para calcular  $D_x^2 Z_R(x, y, \lambda)(\vec{v}, \vec{v})$  vamos utilizar a seguinte notação  $(x, y) = (x_1, x_2)$ , ou seja

$$D_x^2 Z_R(x, y, \lambda)(\vec{v}, \vec{v}) = \left( \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 Z_{R_1}}{\partial x_i \partial x_j}(x_i, x_j, \lambda) v_j v_i, \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 Z_{R_2}}{\partial x_i \partial x_j}(x_i, x_j, \lambda) v_j v_i \right).$$

A primeira componente da derivada segunda em relação a  $x \in \mathbb{R}^2$  da família de campos regularizados  $Z_R = (Z_{R_1}, Z_{R_2})$  é

$$\sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 Z_{R_1}}{\partial x_i \partial x_j}(x_i, x_j, \lambda) v_j v_i = 1 - \frac{y}{\sqrt{y^2 + 1}},$$

e a segunda componente da derivada segunda é nula. Assim, avaliando em  $(P_0, \lambda_0)$  temos  $D_x^2 Z_R(P_0, \lambda_0)(\vec{v}, \vec{v}) = (1, 0)$ . Agora, multiplicando escalarmente pelo autovetor  $\vec{w}$  obtemos

$$\left\langle \vec{w}, D_x^2 Z_R(P_0, \lambda_0)(\vec{v}, \vec{v}) \right\rangle = 1.$$

Isto prova a hipótese ( $SN_3$ ) e a proposição. □

---

# Colisões de Pontos de Tangência via Regularização

---

Neste capítulo vamos estudar, usando o método da regularização, as bifurcações de famílias de campos de vetores descontínuos que apresentam colisões de pontos de tangência quadrática no conjunto de descontinuidade, descritos na seção 3.2 de [12]. A seção 3.2 do artigo citado apresenta quatro casos principais, cada um dividido em subcasos. Analisaremos três casos principais com os respectivos subcasos, todos de codimensão um. Observamos que ao regularizar tais famílias de campos descontínuos pode ocorrer uma mudança na codimensão da bifurcação das respectivas famílias de campos regularizados. Destacamos o subcaso VI3 descrito na subseção 3.2.3 de [12], cuja família de campos regularizados apresenta uma bifurcação de codimensão dois.

## 3.1 Colisão de Tangências Quadráticas

Vamos considerar a família a um parâmetro  $Z_\lambda = (X_\lambda, Y_\lambda)$  de campos de vetores descontínuos definida na vizinhança  $\mathcal{D}$  da origem de  $\mathbb{R}^2$  e vamos supor que o conjunto de descontinuidade  $\Sigma$  em  $\mathcal{D}$  é dado por  $\{y = 0\}$ . A presença de um único ponto de tangência quadrática de  $X_\lambda$  ou  $Y_\lambda$  com  $\Sigma$  não acarreta em bifurcações locais de codimensão um para família de campos descontínuos  $Z_\lambda$ . Mas, é verdade que se um dos campos de vetores,  $X_\lambda$  ou  $Y_\lambda$ , tem uma tangência quadrática no conjunto de descontinuidade  $\Sigma$  em um ponto  $T_\lambda$ ,

então, sob a variação do parâmetro  $\lambda$ , este ponto pode se mover. Dessa forma, se o campo de vetores descontínuo  $Z_\lambda$  apresentar dois pontos de tangência quadrática em  $\Sigma$ , então essas duas tangências podem colidir. Ressaltamos que se as duas tangências em  $\Sigma$  são de um mesmo campo de vetores ( $X_\lambda$  ou  $Y_\lambda$ ) então elas não podem colidir se ambas forem visíveis ou invisíveis; por outro lado, se as duas tangências em  $\Sigma$  são de campos de vetores distintos, então elas colidem, não importando sua natureza.

A definição a seguir categoriza os casos possíveis para colisões de pontos de tangência quadrática em uma família de campos descontínuos de modo que apresentem bifurcações locais de codimensão um, como consta em [12].

**Definição 3.1** *Seja  $Z_\lambda = (X_\lambda, Y_\lambda)$  uma família de campos descontínuos definida em uma vizinhança  $\mathcal{D}$  da origem de  $\mathbb{R}^2$  com  $\Sigma = f^{-1}(0)$  onde  $f(x, y) = y$ . Dizemos que*

- a)  $Z_\lambda$  pertence ao caso DT (de double tangency ou tangência dupla) quando ocorre a colisão de uma tangência visível com uma tangência invisível, ambas do mesmo campo de vetores ( $X_\lambda$  ou  $Y_\lambda$ ).
- b)  $Z_\lambda$  pertence ao caso VV quando ocorre a colisão de uma tangência visível de  $X_\lambda$  com uma tangência visível de  $Y_\lambda$ .
- c)  $Z_\lambda$  pertence ao caso VI quando ocorre a colisão de uma tangência visível (invisível) de  $X_\lambda$  com uma tangência invisível (visível) de  $Y_\lambda$ .
- d)  $Z_\lambda$  pertence ao caso II quando ocorre a colisão de uma tangência invisível de  $X_\lambda$  com uma tangência invisível de  $Y_\lambda$ .

Trataremos nesta tese apenas dos casos DT, VV e VI e seus respectivos subcasos. Cada um desses casos principais será estudado em uma seção distinta deste capítulo. De modo a investigar as bifurcações locais que podem surgir nas respectivas famílias regularizadas, procederemos como no capítulo anterior, utilizando o método de regularização de campos descontínuos de Sotomayor e Teixeira.

## 3.2 Regularização de Tangência Dupla

Vamos tratar nesta seção do caso DT, ou tangência dupla, descrito em [12]. Tomando  $Z_\lambda = (X_\lambda, Y_\lambda)$  a família de campos descontínuos, podemos supor sem perda de generalidade

que para  $\lambda < 0$  o campo de vetores  $Y_\lambda$  tem dois pontos de tangência quadrática com  $\Sigma$ , um visível e outro invisível. Essas duas tangências colidem em  $\lambda = 0$  formando um ponto de tangência dupla  $T_0$ . O ponto  $T_0$  é um ponto de inflexão cúbica para a órbita de  $Y_\lambda$  em  $\lambda = 0$ . Quando  $\lambda > 0$  não há pontos de tangência de  $Y_\lambda$  e então podemos assumir que  $Y_\lambda$  é localmente transversal a  $\Sigma$  para  $\lambda > 0$ . Também podemos assumir que o campo de vetores  $X_\lambda$  é localmente transversal a  $\Sigma$  em  $T_0$  para todo  $\lambda$  pequeno. Podemos supor ainda que  $X_\lambda$  é ortogonal a  $\Sigma$ , isto é, que  $X_\lambda$  é  $C^r$ -conjugado ao campo  $\hat{X}(x, y) = (0, -1)$ .

Com essas hipóteses existem dois subcasos críticos, DT1 e DT2, que se distinguem pelas inflexões opostas da órbita de  $Y_\lambda$  passando por  $T_0$ . Veja a Figura 3.4.2.

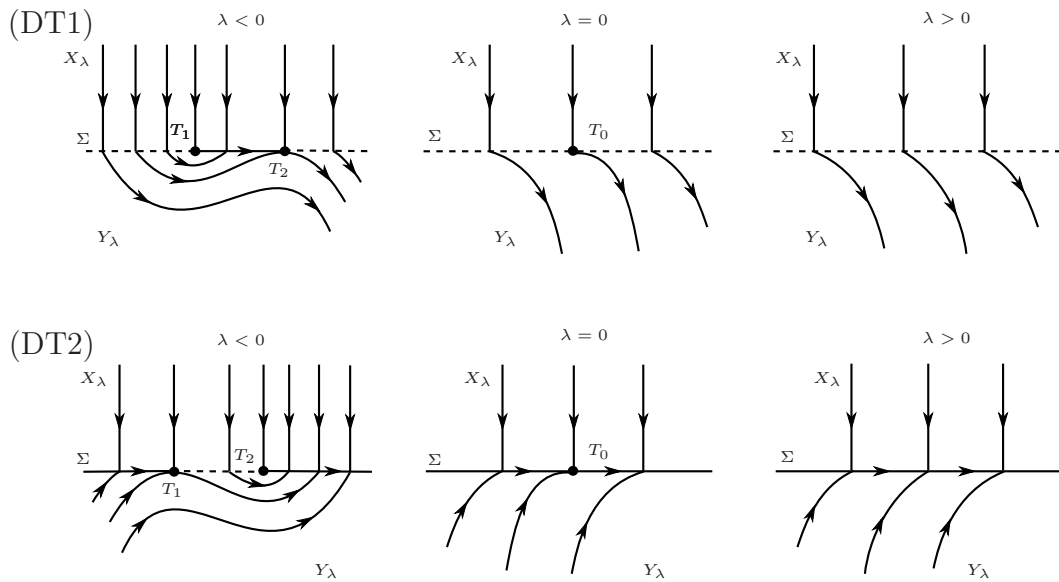


Figura 3.1: Tangência Dupla. Subcasos DT1 e DT2.

No subcaso DT2 observamos que, para  $\lambda < 0$ , a região de desliz  $\Sigma_d$  é formada por duas componentes desconexas, enquanto que em DT1 tem-se  $\Sigma_d$  uma região simples. Além disso, para  $\lambda \geq 0$ , temos que  $\Sigma = \Sigma_c$  em DT1 e  $\Sigma = \Sigma_d$  em DT2. Invertendo o sentido das flechas obtém-se retratos de fase topologicamente equivalentes aos casos DT1 e DT2, com as regiões de desliz em  $\Sigma$  sendo substituídas por regiões de escape. O mesmo ocorre caso escolhêssemos  $X_\lambda$   $C^r$ -conjugado ao campo  $\hat{X}(x, y) = (0, 1)$ .

Uma forma normal topológica para as bifurcações descritas em [12] DT1 e DT2 é dada por

$Z_\lambda = (X_\lambda, Y_\lambda)$ , onde

$$Z_\lambda(x, y) = \begin{cases} X_\lambda(x, y) = (0, -\alpha) & \text{se } y > 0 \\ Y_\lambda(x, y) = (\alpha, \pm(\lambda + \beta x^2)) & \text{se } y < 0 \end{cases}, \quad (3.1)$$

onde  $\alpha, \beta > 0$ . Aqui DT1 corresponde ao sinal “-” e DT2 corresponde ao sinal “+” na expressão (3.1). O campo de Filippov  $F(Z_\lambda)$ , associado ao campo descontínuo  $Z_\lambda$ , é dado por

$$F(Z_\lambda)(x, 0) = \left( \frac{\alpha^2}{\alpha \pm (\lambda + \beta x^2)}, 0 \right).$$

Note que neste caso não existem singularidades para o campo de Filippov associado, pois  $F(Z_\lambda)(x, 0) = (0, 0)$  apenas quando  $\alpha$  se anula, e estamos supondo  $\alpha > 0$ . Além disso, as tangências do campo  $Y_\lambda$  são os pontos  $(-\sqrt{-\lambda/\beta}, 0)$  e  $(\sqrt{-\lambda/\beta}, 0)$ . Observe que essas tangências estão bem definidas e coexistem apenas para  $\lambda < 0$ , e a medida que  $\lambda$  se aproxima de zero elas colidem no ponto  $T_0 = (0, 0)$ . Vamos prosseguir a análise considerando o subcaso DT2. A família de campos regularizados é dada por

$$Z_{\lambda, \varepsilon}(x, y) = (1 - \varphi_\varepsilon(y))Y_\lambda(x, y) + \varphi_\varepsilon(y)X_\lambda(x, y),$$

onde estamos considerando que a função que define  $\Sigma$  é  $f(x, y) = y$ , e

$$\varphi_\varepsilon(y) = \frac{1}{2} + \frac{y}{2\sqrt{y^2 + \varepsilon^2}}.$$

Assim, se  $Z_\lambda = (X_\lambda, Y_\lambda)$  é a família de campos descontínuos onde

$$\begin{aligned} X_\lambda(x, y) &= (0, -\alpha), \\ Y_\lambda(x, y) &= (\alpha, \lambda + \beta x^2), \end{aligned}$$

a respectiva família de campos regularizados é dada por

$$Z_{\lambda, \varepsilon}(x, y) = \left( \left( \frac{1}{2} - \frac{y}{2\sqrt{y^2 + \varepsilon^2}} \right) \alpha, \frac{(\lambda + \beta x^2 - \alpha)}{2} - \frac{(\lambda + \beta x^2 + \alpha)y}{2\sqrt{y^2 + \varepsilon^2}} \right).$$



Efetuando a seguinte mudança de variáveis e reescalonamento dos parâmetros,

$$x = \varepsilon \bar{x}, \quad y = \varepsilon \bar{y}, \quad \lambda = \varepsilon \bar{\lambda}, \quad \alpha = \varepsilon \bar{\alpha}, \quad \beta = \frac{\bar{\beta}}{\varepsilon},$$

na família de campos regularizados  $Z_{\lambda, \varepsilon}$ , a qual denotaremos por  $Z_R = (Z_{R_1}, Z_{R_2})$ , obtemos

$$Z_R(\bar{x}, \bar{y}) = \left( \left( \frac{1}{2} - \frac{\bar{y}}{2\sqrt{\bar{y}^2 + 1}} \right) \bar{\alpha}, \frac{(\bar{\lambda} + \bar{\beta}\bar{x}^2 - \bar{\alpha})}{2} - \frac{(\bar{\lambda} + \bar{\beta}\bar{x}^2 + \bar{\alpha})\bar{y}}{2\sqrt{\bar{y}^2 + 1}} \right). \quad (3.2)$$

Note que a família de campos regularizados,  $Z_R$ , não possui singularidades, independentemente dos valores do parâmetro  $\lambda$ , uma vez que a coordenada  $Z_{R_1}$  nunca se anula. Assim, em cada um de seus pontos regulares, e qualquer que seja o valor do parâmetro  $\lambda$ , o campo  $Z_R$  é  $C^r$ -conjugado ao campo constante  $W(x, y) = (1, 0)$  numa vizinhança de  $T_0 = (0, 0)$ . Analogamente, obtemos a mesma conclusão considerando o caso DT1. Dessa forma concluímos que, do ponto de vista da regularização de campos descontínuos, os casos de dupla tangência DT1 e DT2 não apresentam bifurcações. Portanto, obtemos o seguinte resultado, que prova o item b1) do Teorema A para o caso DT e regularização do tipo transição dada pela função  $\varphi(x) = 1/2 + x/(2\sqrt{x^2 + 1})$ .

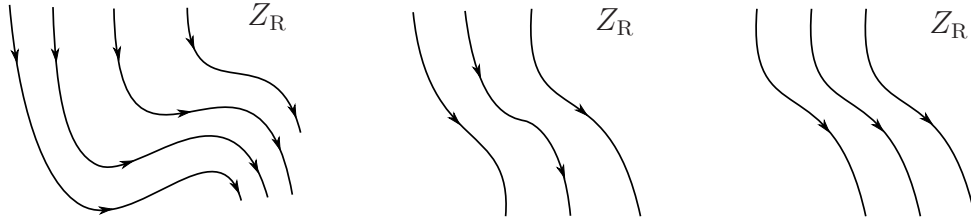


Figura 3.2: Retratos de fase da família regularizada  $Z_R$  associada ao subcaso DT1.

**Proposição 3.1** *O campo de vetores regularizado  $Z_R$  dado em (3.2) é estruturalmente estável.*

### 3.3 Regularização de Duas Tangências Visíveis

Nesta seção analisamos o caso VV, onde ocorre a colisão de duas tangências quadráticas visíveis, como consta na subseção 3.2.2 de [12].

Dada a família de campos de vetores descontínuos  $Z_\lambda = (X_\lambda, Y_\lambda)$ , vamos supor que  $X_\lambda$  tem um ponto de tangência quadrática visível  $T_\lambda^X \in \Sigma$  e que  $Y_\lambda$  tem um ponto de tangência quadrática visível  $T_\lambda^Y \in \Sigma$ . Podemos assumir, sem perda de generalidade, que para  $\lambda < 0$

o ponto  $T_\lambda^X$  está localizado à esquerda de  $T_\lambda^Y$ . Em  $\lambda = 0$  essas duas tangências colidem em um ponto de tangência dupla  $T_0$ , e invertem suas posições iniciais quando  $\lambda > 0$ , isto é,  $T_\lambda^X$  localiza-se à direita de  $T_\lambda^Y$  para valores positivos e pequenos do parâmetro  $\lambda$ . Sob essas hipóteses existem dois subcasos críticos, VV1 e VV2, que correspondem aos vetores  $X_0(T_0)$  e  $Y_0(T_0)$  serem colineares ou anti-colineares. A Figura 3.2 mostra o desdobramento dessas singularidades para os dois subcasos.

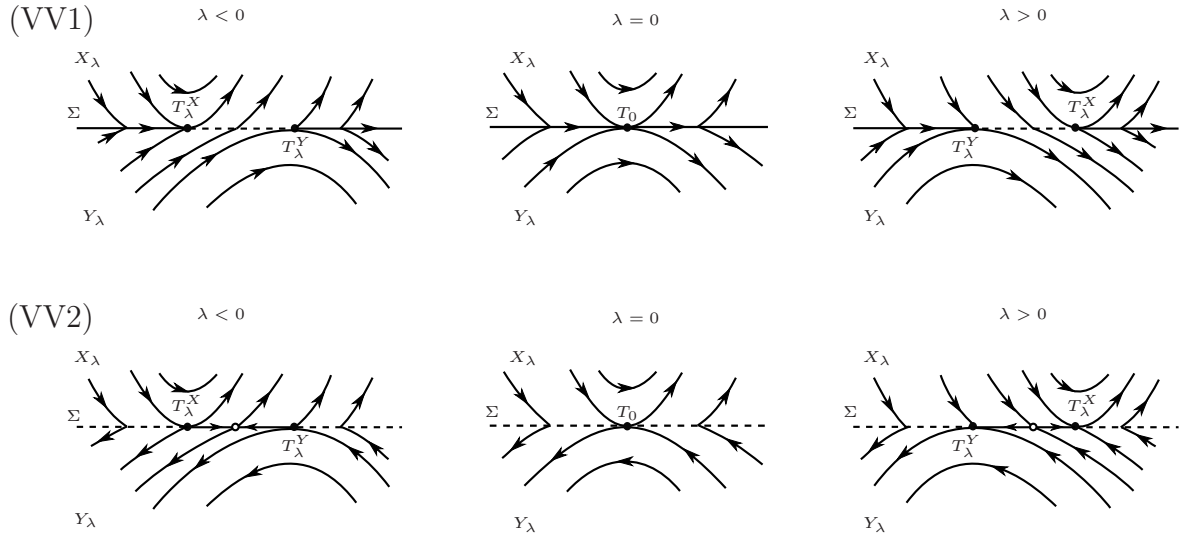


Figura 3.3: Colisão de duas tangências visíveis. Subcasos VV1 e VV2.

No subcaso VV1 temos que para  $\lambda = 0$  a região de deslize  $\Sigma_d = \Sigma$  contém o ponto  $T_0$ , enquanto que no subcaso VV2 não há região de deslize e  $\Sigma = \Sigma_c \setminus \{T_0\}$  para  $\lambda = 0$ . Além disso, quando  $\lambda \neq 0$ , no subcaso VV1 a região de deslize  $\Sigma_d$  é constituída por duas componentes desconexas e não existem pseudo-equilíbrios. Já no subcaso VV2 a região de deslize é formada por uma única componente conexa delimitada pelas tangências  $T_\lambda^X$  e  $T_\lambda^Y$ ; neste caso também há o surgimento de singularidades para o campo de Filippov, precisamente uma pseudo-sela  $P_S$  com variedade estável contida em  $\Sigma$  para  $\lambda < 0$  e variedade instável contida em  $\Sigma$  para  $\lambda > 0$ . Retratos de fase topologicamente equivalentes aos subcasos VV1 e VV2 são obtidos ao inverter o sentido das flechas na Figura 3.2.

Uma forma normal topológica para as bifurcações VV1 e VV2 descritas em [12] é dada por  $Z_\lambda = (X_\lambda, Y_\lambda)$ , onde

$$Z_\lambda(x, y) = \begin{cases} X_\lambda(x, y) = (\alpha - x, x) & \text{se } y > 0 \\ Y_\lambda(x, y) = (\pm \alpha, \mp(\lambda + x)) & \text{se } y < 0 \end{cases}, \quad (3.3)$$

com  $\alpha > 0$ . O campo de vetores  $Y_\lambda(x, y) = (\alpha, -(\lambda + x))$  corresponde ao caso VV1, e  $Y_\lambda(x, y) = (-\alpha, \lambda + x)$  corresponde ao caso VV2. Em ambos os casos, as tangências dos campos  $X_\lambda$  e  $Y_\lambda$  são  $T_\lambda^X = (0, 0)$  e  $T_\lambda^Y = (-\lambda, 0)$ , respectivamente. Note que, sob a variação do parâmetro  $\lambda$ , a tangência do campo  $X_\lambda$  está fixa na origem, enquanto que a tangência de  $Y_\lambda$  altera sua posição em relação ao ponto  $T_\lambda^X$ . O campo de Filippov,  $F(Z_\lambda)$ , associado ao campo descontínuo  $Z_\lambda$  para o subcaso VV1, é dado por

$$F(Z_\lambda)(x, 0) = \left( \frac{-x^2 + (2\alpha - \lambda)x + \lambda\alpha}{\lambda + 2x}, 0 \right).$$

Não existem pseudo-equilíbrios neste caso uma vez que as soluções reais do polinômio quadrático  $-x^2 + (2\alpha - \lambda)x + \lambda\alpha$  não pertencem ao conjunto  $\Sigma_d \cup \Sigma_e$ , onde o campo de Filippov  $F(Z_\lambda)$  está definido. Por outro lado, no subcaso VV2 o campo de Filippov  $F(Z_\lambda)$  associado a  $Z_\lambda$  é

$$F(Z_\lambda)(x, 0) = \left( \frac{-x^2 + (2\alpha - \lambda)x + \lambda\alpha}{\lambda}, 0 \right), \quad \lambda \neq 0,$$

o qual possui como singularidade a pseudo-sela  $P_S = \frac{1}{2}((2\alpha - \lambda) - \sqrt{4\alpha^2 + \lambda^2}, 0)$ . Neste caso, se  $\lambda < 0$  então  $P_S \in \Sigma_e = (0, -\lambda)$ , e se  $\lambda > 0$  tem-se  $P_S \in \Sigma_d = (-\lambda, 0)$ .

Considerando o subcaso VV1, obtemos a seguinte família de campos regularizados

$$Z_{\lambda, \varepsilon}^1(x, y) = \alpha - \left( \frac{1}{2} + \frac{y}{2\sqrt{y^2 + \varepsilon^2}} \right) x,$$

$$Z_{\lambda, \varepsilon}^2(x, y) = -\frac{\lambda}{2} + \frac{(\lambda + 2x)y}{2\sqrt{y^2 + \varepsilon^2}}.$$

Efetuada a mudança de variáveis e reescalonamento dos parâmetros,

$$x = \varepsilon \bar{x}, \quad y = \varepsilon \bar{y}, \quad \lambda = \varepsilon \bar{\lambda}, \quad \alpha = \varepsilon \bar{\alpha},$$

e voltando a denotar  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}, \bar{\alpha})$  por  $(x, y, \lambda, \alpha)$ , obtemos o campo de vetores regularizado  $Z_R =$

$(Z_{R_1}, Z_{R_2})$

$$\begin{aligned} Z_{R_1}(x, y) &= \alpha - \left( \frac{1}{2} + \frac{y}{2\sqrt{y^2+1}} \right) x, \\ Z_{R_2}(x, y) &= -\frac{\lambda}{2} + \frac{(\lambda + 2x)y}{2\sqrt{y^2+1}}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

As singularidades de  $Z_R = (Z_{R_1}, Z_{R_2})$  são os pontos  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  satisfazendo

$$x = \frac{2\alpha\sqrt{y^2+1}}{y + \sqrt{y^2+1}} \quad \text{e} \quad \lambda = 4\alpha y\sqrt{y^2+1}. \tag{3.5}$$

Seja  $A = (a_{ij}) = DZ_R(x, \lambda)$ ,  $1 \leq i, j \leq 2$ , a matriz Jacobiana da família de campos regulares (3.4), cujos elementos são

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\left( \frac{1}{2} + \frac{y}{2\sqrt{y^2+1}} \right), & a_{12} &= -\frac{-x}{2(y^2+1)^{3/2}}, \\ a_{21} &= \frac{y}{\sqrt{y^2+1}}, & a_{22} &= \frac{2x + \lambda}{2(y^2+1)^{3/2}}. \end{aligned}$$

O determinante da matriz Jacobiana da família (3.4) é dado por

$$\det(A) = -\frac{2x\sqrt{y^2+1} + (y + \sqrt{y^2+1})\lambda}{4(y^2+1)^2}.$$

Para investigar a ocorrência de bifurcações na família de campos regularizados (3.4) vamos considerar no plano  $(y, \lambda)$  a curva  $\lambda(y)$  dada pela segunda equação em (3.5), e também a curva  $\det_S(A)(y)$  dada pela substituição dos valores de  $x$  e  $\lambda$  na expressão do determinante de  $A$ , isto é

$$\det_S(A)(y) = -\frac{\alpha(2y^2+1)}{(y^2+1)^{3/2}}$$

No plano  $(y, \lambda)$  verifica-se que a curva  $\lambda(y)$  é o gráfico de uma função estritamente crescente, uma vez que

$$\frac{d\lambda}{dy} = \frac{4\alpha(2y^2+1)}{\sqrt{y^2+1}} > 0,$$

para todo  $y \in \mathbb{R}$ . Isto estabelece uma correspondência biunívoca entre as singularidades da família de campos regularizados (3.4) e os valores do parâmetro  $\lambda$ . Em outras palavras, cada valor do parâmetro  $\lambda$  está associado a uma, e apenas uma, singularidade da família de campos

regulares (3.4). Assim, observando que

$$\det_S(A)(y) = -\frac{\alpha(2y^2 + 1)}{(y^2 + 1)^{3/2}} < 0, \quad \text{para todo } y \in \mathbb{R},$$

podemos afirmar que a cada parâmetro  $\lambda$  tomado arbitrariamente pequeno, a singularidade da família (3.4) é um ponto do tipo sela. Portanto, observamos que no caso VV1 há o surgimento de pontos de equilíbrio (selas) para a família de campos regularizados associada  $Z_R$ . Por outro lado, a família  $Z_R$  não apresenta bifurcação sob a variação do parâmetro  $\lambda$ . O que ocorre neste caso é apenas o deslocamento de uma sela. Procedendo de maneira análoga, para o subcaso VV2 temos

$$\frac{d\lambda}{dy} = -\frac{\alpha(2y^2 + 1)}{\sqrt{y^2 + 1}} < 0 \quad \text{e} \quad \det_S(A)(y) = -\frac{\alpha(2y^2 + 1)}{2(y^2 + 1)^{3/2}} < 0,$$

para todo  $y \in \mathbb{R}$ , de onde notamos a mesma conclusão do subcaso VV1. Isto prova o item b1) do Teorema A para o caso VV e regularização do tipo transição dada pela função  $\varphi(x) = 1/2 + x/(2\sqrt{x^2 + 1})$ .

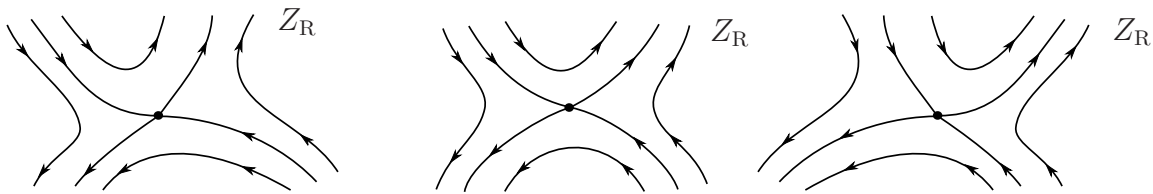


Figura 3.4: Retratos de fase da família regularizada  $Z_R$  associada ao subcaso VV2.

### 3.4 Tangência Visível versus Tangência Invisível

Estudaremos agora o caso VI, descrito na subseção 3.2.3 em [12], quando ocorre a colisão de uma tangência visível com uma tangência invisível, cada uma de um campo de vetores distinto.

De maneira semelhante ao caso VV da seção anterior, dada a família  $Z_\lambda = (X_\lambda, Y_\lambda)$ , vamos supor que para  $\lambda < 0$  a tangência quadrática  $T_\lambda^X$  do campo de vetores  $X_\lambda$  é visível e está localizada à esquerda de  $T_\lambda^Y$ , tangência invisível de  $Y_\lambda$ . O deslocamento desses pontos de tangência sob a variação do parâmetro também é análogo ao caso anterior, isto é, em  $\lambda = 0$  os pontos  $T_\lambda^X$  e  $T_\lambda^Y$  colidem em um mesmo ponto  $T_0$ , e invertem sua posição inicial para  $\lambda > 0$ . Agora existem três subcasos críticos, VI1, VI2 e VI3. Veja Figura 3.3.

No subcaso VI1 os vetores  $X_0(T_0)$  e  $Y_0(T_0)$  são colineares em  $\lambda = 0$ , enquanto que nos

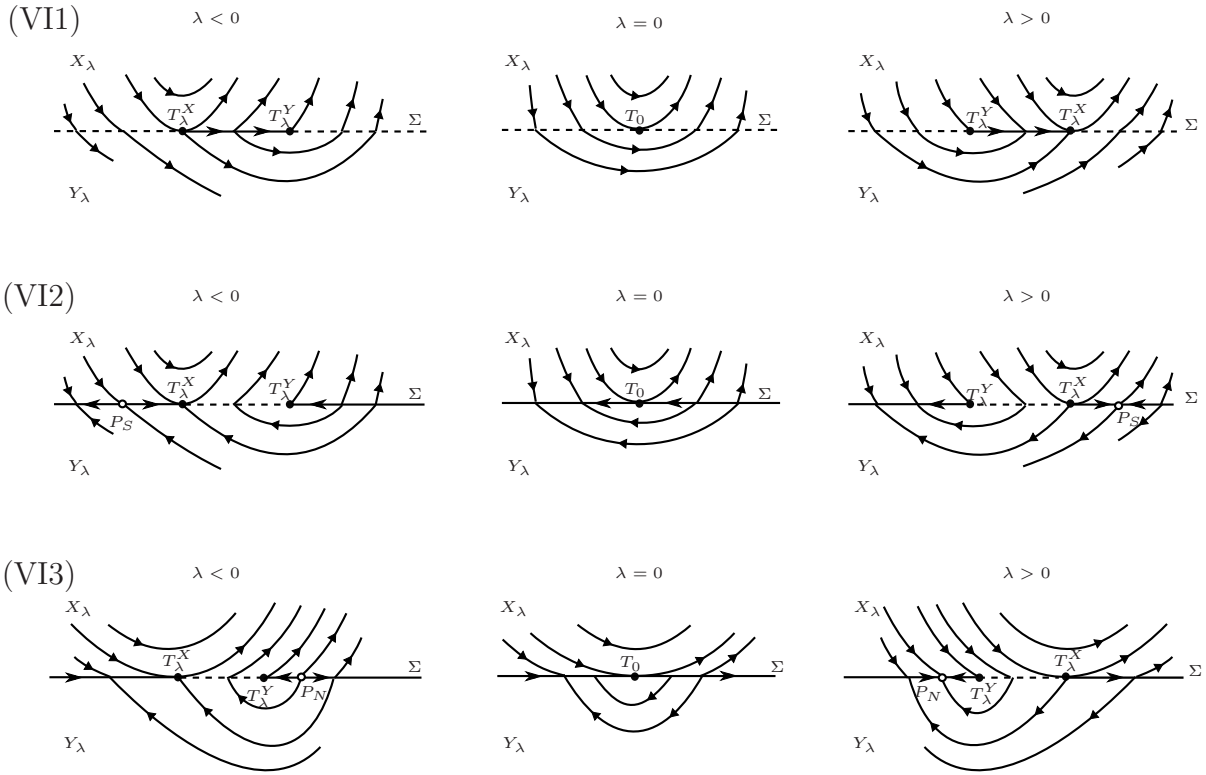


Figura 3.5: Colisões de tangências visível e invisível. Subcasos VI1, VI2 e VI3.

subcasos VI2 e VI3 eles são anti-colineares. A região de deslize  $\Sigma_d$ , para o subcaso VI1, está definida apenas quando  $\lambda \neq 0$  e é formada por uma única componente conexa delimitada pelas tangências  $T_\lambda^X$  e  $T_\lambda^Y$ . Não existem pseudo-equilíbrios neste subcaso, e em  $\lambda = 0$  todas as órbitas que encontram  $\Sigma$ , exceto uma, cruzam o conjunto de descontinuidade, ou seja,  $\Sigma_c = \Sigma \setminus \{T_0\}$ .

Nos subcasos VI2 e VI3, quando  $\lambda = 0$ , não há região de costura no conjunto de descontinuidade  $\Sigma$ . Além disso, para  $\lambda \neq 0$  a região onde está definido o campo de Filippov,  $\Sigma_d \cup \Sigma_e$ , é formada por duas componentes desconexas, e existem pseudo-equilíbrios em ambos os subcasos: pseudo-sela  $P_S$  em VI2, e pseudo-nó  $P_N$  em VI3. Sob a variação do parâmetro  $\lambda$  a variedade da pseudo-sela  $P_S$  contida em  $\Sigma$  inverte sua estabilidade. O mesmo ocorre com o pseudo-nó  $P_N$  do caso VI3, que de repulsor para  $\lambda < 0$  passa a ser atrator para  $\lambda > 0$ .

Ainda, os subcasos VI2 e VI3 se distinguem ao observar o comportamento das órbitas no ponto de tangência dupla  $T_0$ . Genericamente, as órbitas de  $X_\lambda$  e  $Y_\lambda$  por  $T_\lambda^X$  e  $T_\lambda^Y$ , respectivamente, não possuem a mesma curvatura nesses pontos. No subcaso VI2, quando  $\lambda = 0$  e  $T_\lambda^X = T_\lambda^Y = T_0$ , pode-se observar que a órbita de  $X_\lambda$  passando por  $T_0$  tem curvatura maior do que a curvatura da órbita de  $Y_\lambda$  no mesmo ponto; e o contrário ocorre no subcaso VI3. Isto acarreta em regiões de deslize e escape com direções opostas nesses dois subcasos. Invertendo

o sentido das flechas na Figura 3.3 obtém-se retratos de fase topologicamente equivalentes.

### 3.4.1 Bifurcação VI1 via Regularização

Uma forma normal topológica para a bifurcação VI1 descrita em [12] é dada por  $Z_\lambda = (X_\lambda, Y_\lambda)$ , onde

$$Z_\lambda(x, y) = \begin{cases} X_\lambda(x, y) = (\alpha - x, 2x) & \text{se } y > 0 \\ Y_\lambda(x, y) = (\alpha - x, \lambda + x) & \text{se } y < 0 \end{cases}, \quad (3.6)$$

com  $\alpha > 0$ . As tangências quadráticas de  $X_\lambda$  e  $Y_\lambda$  em  $\Sigma$  são  $T_\lambda^X = (0, 0)$  e  $T_\lambda^Y = (-\lambda, 0)$ , respectivamente. Além disso, a região de deslize  $\Sigma_d = \{(x, 0) : -\lambda < x < 0\}$  está definida apenas para  $\lambda > 0$ , e a região de escape  $\Sigma_e = \{(x, 0) : 0 < x < -\lambda\}$  apenas para  $\lambda < 0$ . Nessas regiões define-se o campo de Filippov,  $F(Z_\lambda)$ , associado ao campo descontínuo  $Z_\lambda$ ,

$$F(Z_\lambda)(x, 0) = (x^2 - (\alpha + \lambda)x + \alpha\lambda, 0).$$

Neste caso, não existem singularidades para o campo de Filippov associado, pois  $F(Z_\lambda)(x, 0) = (0, 0)$  se, e somente se, o ponto  $(x, 0)$  é tal que  $x = \alpha$  ou  $x = \lambda$ . No entanto,  $(\alpha, 0), (\lambda, 0) \notin \Sigma_s \cup \Sigma_e$ .

Seja  $Z_\lambda = (X_\lambda, Y_\lambda)$  a família de campos descontínuos onde

$$\begin{aligned} X_\lambda(x, y) &= (\alpha - x, 2x), \\ Y_\lambda(x, y) &= (\alpha - x, \lambda + x). \end{aligned}$$

Assim, considerando a função de transição  $\varphi$  dada por (2.2), temos a regularização

$$Z_{\lambda, \varepsilon}(x, y) = \left( \alpha - x, \frac{(\lambda + 3x)}{2} - \frac{(x - \lambda)y}{2\sqrt{y^2 + \varepsilon^2}} \right).$$

Ao efetuar a seguinte mudança de variáveis e reescalonar parâmetros,

$$x = \varepsilon\bar{x}, \quad y = \varepsilon\bar{y}, \quad \lambda = \varepsilon\bar{\lambda}, \quad \alpha = \varepsilon\bar{\alpha},$$

e voltando a denotar  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}, \bar{\alpha})$  por  $(x, y, \lambda, \alpha)$ , obtemos a família de campos regularizados a

um parâmetro

$$Z_R(x, y) = \left( \alpha - x, \frac{(\lambda + 3x)}{2} - \frac{(x - \lambda)y}{2\sqrt{y^2 + 1}} \right). \quad (3.7)$$

As singularidades da família de campos regularizados em (3.7) são dadas pelas soluções do sistema

$$\begin{cases} \alpha - x & = 0, \\ \frac{(\lambda + 3x)}{2} - \frac{(x - \lambda)y}{2\sqrt{y^2 + 1}} & = 0, \end{cases}$$

Substituindo  $x = \alpha$  na segunda equação obtemos as expressões que dão os valores da coordenada  $y$  para os pontos de equilíbrio de (3.7), ou seja

$$y = \pm \frac{\sqrt{-(3\alpha + \lambda)^2}}{2\sqrt{2}\sqrt{\alpha(\alpha + \lambda)}}.$$

Como  $\alpha > 0$  está fixado e o parâmetro  $\lambda$  é tomado suficientemente pequeno numa vizinhança de zero, a coordenada  $y$  assume apenas valores complexos. Assim, a família de campos regularizados,  $Z_R$ , não possui singularidades. Logo, em cada um de seus pontos regulares, e qualquer que seja o valor do parâmetro  $\lambda$ , o campo  $Z_R$  é  $C^r$ -conjugado ao campo constante  $W(x, y) = (1, 0)$ . Dessa forma concluímos que, do ponto de vista da regularização de campos descontínuos, a colisão de uma tangência visível com uma invisível para o caso VII não apresenta bifurcações. Assim, obtemos a seguinte proposição, que completa a prova do item b1) do Teorema A para o caso VII e regularização do tipo transição dada pela função  $\varphi(x) = 1/2 + x/(2\sqrt{x^2 + 1})$ .

**Proposição 3.2** *O campo de vetores regularizado  $Z_R$  dado em (3.7) é estruturalmente estável.*

### 3.4.2 Bifurcação VI2 via Regularização

Uma forma normal topológica para a bifurcação VI2 descrita em [12] é dada por  $Z_\lambda = (X_\lambda, Y_\lambda)$ , onde

$$Z_\lambda(x, y) = \begin{cases} X_\lambda(x, y) = (\alpha - x, 2x) & \text{se } y > 0 \\ Y_\lambda(x, y) = (-(\alpha + x), -(\lambda + x)) & \text{se } y < 0 \end{cases}, \quad (3.8)$$

com  $\alpha > 0$ . Os pontos de tangência quadrática dos campos de vetores  $X_\lambda$  e  $Y_\lambda$  em  $\Sigma$  também são  $T_\lambda^X = (0, 0)$  e  $T_\lambda^Y = (-\lambda, 0)$ , respectivamente. Nas regiões  $\Sigma_d \cup \Sigma_e$  está bem definido o



campo de Filippov  $F(Z_\lambda)(x, 0) = (3x^2 + (\alpha + \lambda)x - \alpha\lambda, 0)$ .

Se  $Z_\lambda = (X_\lambda, Y_\lambda)$  é a família de campos descontínuos onde

$$\begin{aligned} X_\lambda(x, y) &= (\alpha - x, 2x), \\ Y_\lambda(\bar{x}, \bar{y}) &= (-(\alpha + x), -(\lambda + x)), \end{aligned}$$

então a família de campos regularizados associada é dada por

$$Z_{\lambda, \varepsilon}(x, y) = \left( -x + \frac{\alpha y}{\sqrt{y^2 + \varepsilon^2}}, \frac{(x - \lambda)}{2} + \frac{(3x + \lambda)y}{2\sqrt{y^2 + \varepsilon^2}} \right).$$

Assim, efetuando a seguinte mudança de variáveis e reescalonamento dos parâmetros,

$$x = \varepsilon\bar{x}, \quad y = \varepsilon\bar{y}, \quad \lambda = \varepsilon\bar{\lambda}, \quad \alpha = \varepsilon\bar{\alpha},$$

na família de campos regularizados  $Z_{\lambda, \varepsilon}$ , e voltando a denotar  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}, \bar{\alpha})$  por  $(x, y, \lambda, \alpha)$ , obtemos

$$Z_R(x, y) = \left( -x + \frac{\alpha y}{\sqrt{y^2 + 1}}, \frac{(x - \lambda)}{2} + \frac{(3x + \lambda)y}{2\sqrt{y^2 + 1}} \right). \quad (3.9)$$

**Lema 3.1** *Seja  $Z_\lambda = (X_\lambda, Y_\lambda)$  uma família a um parâmetro de campos de vetores descontínuos dada por (3.8). Existem valores de parâmetro  $\lambda$  para os quais a respectiva família de campos regularizados  $Z_R$ , dada por (3.9), possui duas, uma ou nenhuma singularidade.*

*Demonstração.* As seguintes expressões fornecem os valores de  $x$  e  $\lambda$  das singularidades da família de campos regularizados (3.9)

$$\begin{aligned} x(y) &= \frac{\alpha y}{\sqrt{y^2 + 1}}, \\ \lambda(y) &= \frac{\alpha y(1 + 4y(y + \sqrt{y^2 + 1}))}{\sqrt{y^2 + 1}}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

No plano  $(y, \lambda)$  a curva  $\lambda(y)$  é uma curva regular satisfazendo

$$\lambda(-\sqrt{2}/4) = 0 = \lambda(0).$$

Assim, o Teorema de Rolle garante a existência um ponto  $y^*$  no intervalo aberto  $(-\sqrt{2}/4, 0)$

onde  $\frac{d\lambda}{dy}(y^*) = 0$ . A derivada de  $\lambda$  em função de  $y$  é dada por

$$\frac{d\lambda}{dy} = \frac{(1 + 12y^2 + 8y^4 + 8(y + y^3)\sqrt{y^2 + 1})\alpha}{(y^2 + 1)^{3/2}}.$$

Portanto, é único o ponto crítico

$$y^* = -\sqrt{\frac{3\sqrt{3} - 5}{8}} \approx -0,156586.$$

Além disso, o limite de  $\lambda(y)$  quando  $y$  vai a infinito é  $+\infty$ , e quando  $y$  tende a  $-\infty$  o parâmetro  $\lambda$  tende a  $\alpha > 0$ . A segunda derivada de  $\lambda$  em função de  $y$  é dada por

$$\frac{d^2\lambda}{dy^2} = \alpha \left( 8 + \frac{y(21 + 20y^2 + 8y^4)}{(y^2 + 1)^{5/2}} \right).$$

Como  $\frac{d^2\lambda}{dy^2}(y^*) = \frac{128}{9}(9 - 5\sqrt{3})\alpha \approx 4,831943\alpha > 0$ , concluímos que  $y^*$  é um ponto de mínimo, e existe um único valor crítico do parâmetro,  $\lambda^* = \lambda(y^*)$ , obtido pela substituição de  $y$  por  $y^*$  na expressão de  $\lambda$  dada em (3.10). Ver Figura 3.6.  $\square$

Seja  $A = DZ_R(x, \lambda)$  a matriz Jacobiana da família de campos regularizados (3.9). Para o próximo resultado vamos considerar as curvas  $\text{tr}_S(A)(y)$  e  $\det_S(A)(y)$  dadas pela substituição dos valores de  $x$  e  $\lambda$  indicados em (3.10) na expressão do traço e do determinante de  $A$ , respectivamente. Ou seja,

$$\text{tr}_S(A)(y) = -1 + \frac{2\alpha y(y + \sqrt{y^2 + 1})}{(y^2 + 1)^{3/2}}, \quad (3.11)$$

$$\det_S(A)(y) = -\frac{\alpha(7y + 4y^3 + \sqrt{y^2 + 1}(1 + 4y^2))}{2(\sqrt{y^2 + 1})^2}. \quad (3.12)$$

**Lema 3.2** *Seja  $Z_\lambda = (X_\lambda, Y_\lambda)$  uma família a um parâmetro de campos vetoriais descontínuos dada por (3.8). Então,*

- a) *o determinante Jacobiano (3.12) da família de campos regularizados se anula em  $y^*$ , é positivo quando  $y < y^*$ , e para valores estritamente maiores que  $y^*$  as singularidades são selas.*
- b) *existe uma vizinhança  $\mathcal{V}^*$  de  $y^*$  em que a função  $D(y) = (\text{tr}_S(A)(y))^2 - 4\det_S(A)(y)$  é*

*estritamente positiva.*

c) *na região  $\mathcal{V}^* \cap \{y < y^*\}$  as singularidades da família de campos regularizados são nós atratores.*

*Demonstração.* Ao calcular os zeros reais da função  $\det_S(A)(y)$  dada em (3.12) concluímos que o determinante Jacobiano se anula exatamente no ponto crítico  $y^*$ , o qual já vimos ser único no lema anterior. O limite do determinante Jacobiano quando  $y$  tende a  $\pm\infty$  vale zero. Além disso, a derivada de  $\det_S(A)(y)$  no ponto  $y^*$  é negativa. Logo, como é única a raiz  $y^*$  do determinante Jacobiano, se  $y < y^*$  o determinante é positivo, e para  $y > y^*$  o determinante será negativo, o que prova o item a).

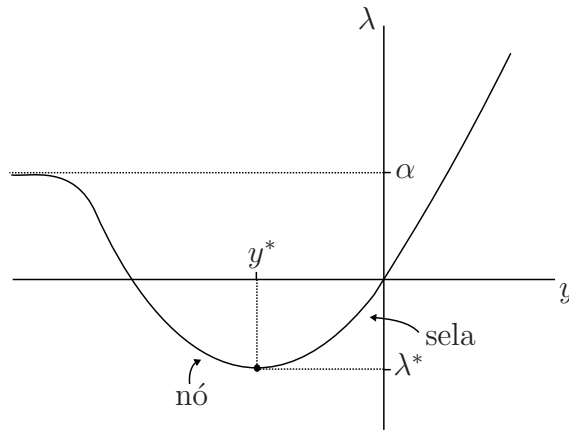
A função contínua  $D(y)$  é o discriminante do polinômio característico da matriz Jacobiana  $A$ , aplicado na curva de singularidades. Calculando o discriminante e avaliando no ponto crítico  $y^*$  vemos que  $D(y^*) > 0$ . Logo, pelo Teorema da Permanência de Sinal para funções contínuas podemos obter uma vizinhança  $\mathcal{V}^* = (y^* - \delta, y^* + \delta)$ ,  $\delta > 0$ , tal que  $D(y)$  é estritamente positivo em  $\mathcal{V}^*$ . O item b) está provado.

Considere agora o intervalo aberto  $I = (-\sqrt{2}/4, 0)$  utilizado no lema anterior, em que os pontos extremos são as raízes de  $\lambda(y)$ . Avaliando o traço dado em (3.11) nesses extremos obtemos  $\text{tr}_S(A)(0) = -1$  e  $\text{tr}_S(A)(-\sqrt{2}/4) = -(1 + \frac{8\sqrt{2}\alpha}{27}) < -1$ . Além disso, como a derivada de  $\text{tr}_S(A)(y)$  é positiva no intervalo  $I$ , a função traço  $\text{tr}_S(A)(y)$  é estritamente crescente em  $I$ , e assume, portanto, apenas valores negativos nesse intervalo. Assim, pelos itens anteriores, é fácil ver que as singularidades da família de campos regularizados são nós atratores na região  $\mathcal{V}^* \cap \{y < y^*\}$ , bastando diminuir  $\mathcal{V}^*$  se necessário.  $\square$

Na figura abaixo fornecemos o esquema gráfico que sintetiza os dois lemas anteriores.

Os dois lemas anteriores mostram que existe uma alteração na natureza dos pontos de equilíbrio da família de campos regularizados  $Z_R$ , sob a variação do parâmetro  $\lambda$ . Em outras palavras, a família  $Z_R$  exibe uma curva de singularidades sela-nó. Assim, é natural esperar que a família  $Z_R$  admita uma bifurcação do tipo sela-nó em  $(x^*, y^*)$  quando  $\lambda = \lambda^*$ , onde  $x^*$  é obtido pela substituição de  $y$  por  $y^*$  na expressão de  $x$  dada em (3.10). Isso será provado no próximo resultado. Novamente iremos utilizar o Teorema (2.1) devido a Sotomayor; veja [20], [10] e [18].

**Proposição 3.3** *Seja  $Z_\lambda = (X_\lambda, Y_\lambda)$  a família de campos vetoriais descontínuos dada por*

Figura 3.6: Gráfico da curva  $\lambda(y)$ .

(3.8). Então a família de campos regularizados associada,  $Z_R$ , admite uma bifurcação do tipo sela-nó.

*Demonstração.* Seja  $Z_\lambda = (X_\lambda, Y_\lambda)$  a família de campos descontínuos dada por (3.8), com respectiva família de campos regularizados  $Z_R$  indicada em (3.9).

Denotamos por  $A = (a_{ij})$ ,  $1 \leq i, j \leq 2$ , a matriz Jacobiana  $DZ_R(x, y)$ , cujos elementos são

$$\begin{aligned} a_{11} &= -1, & a_{12} &= \frac{\alpha}{(y^2 + 1)^{3/2}}, \\ a_{21} &= \frac{1}{2} + \frac{3y}{2\sqrt{y^2 + 1}}, & a_{22} &= \frac{3x + \lambda}{2(y^2 + 1)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Considere  $x^* = x(y^*)$  e  $\lambda^* = \lambda(y^*)$ , que são obtidos pela substituição do valor  $y^*$  nas expressões dadas em (3.10). Os autovalores da matriz  $A(x^*, y^*, \lambda^*) = D(Z_R)(x^*, y^*, \lambda^*)$  são dados por

$$\delta_0 = 0 \quad \text{e} \quad \delta_1 = -\frac{1}{9} \left( 9 + 16\alpha \sqrt{\frac{3}{71 + 41\sqrt{3}}} \right).$$

Logo, a matriz Jacobiana  $A(x^*, y^*, \lambda^*)$  tem um único autovalor  $\delta_0$  nulo. Vamos determinar os autovetores à direita e à esquerda associados ao autovalor nulo  $\delta_0$ , de acordo com  $(SN_1)$  do Teorema (2.1). Um autovetor à direita é o vetor não-nulo  $\vec{v} = (v_1, v_2)$  satisfazendo a igualdade

$$A(x^*, y^*, \lambda^*)\vec{v} = \delta_0\vec{v} = 0.$$

E um autovetor à esquerda, associado ao autovalor  $\delta_0 = 0$ , é a solução não-nula de

$\vec{w}^T A(x^*, y^*, \lambda^*) = 0$ . Assim,

$$\vec{v} = \left( 1, \frac{3\sqrt{\frac{3}{2}}(1 + \sqrt{3})^{3/2}}{16\alpha} \right) \quad \text{e} \quad \vec{w} = \left( 1, \frac{2}{1 - \sqrt{3(7 - 4\sqrt{3})}} \right).$$

Devemos agora verificar que o seguinte produto escalar é não-nulo

$$\left\langle \vec{w}, \frac{\partial Z_R}{\partial \lambda}(x^*, y^*, \lambda^*) \right\rangle.$$

Inicialmente, temos que

$$\frac{\partial Z_R}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = \left( 0, -\frac{1}{2} + \frac{y}{2\sqrt{y^2 + 1}} \right),$$

de modo que  $\frac{\partial Z_R}{\partial \lambda}(x^*, y^*, \lambda^*) = \left( 0, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ . Multiplicando escalarmente por  $\vec{w}$ , resulta em

$$\left\langle \vec{w}, \frac{\partial Z_R}{\partial \lambda}(x^*, y^*, \lambda^*) \right\rangle = -\frac{2}{\sqrt{3}(1 - \sqrt{3(7 - 4\sqrt{3})})} \neq 0,$$

o que mostra a hipótese ( $SN_2$ ) do Teorema (2.1).

Agora, resta verificar que o seguinte produto escalar é não-nulo

$$\left\langle \vec{w}, D_x^2 Z_R(x^*, y^*, \lambda^*)(\vec{v}, \vec{v}) \right\rangle.$$

Para calcular  $D_x^2 Z_R(x^*, y^*, \lambda^*)(\vec{v}, \vec{v})$  utilizamos a notação  $(x, y) = (x_1, x_2)$ , ou seja

$$D_x^2 Z_R(x_1, x_2, \lambda)(v, v) = \left( \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 Z_{R_1}}{\partial x_i \partial x_j}(x_i, x_j, \lambda) v_j v_i, \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 Z_{R_2}}{\partial x_i \partial x_j}(x_i, x_j, \lambda) v_j v_i \right).$$

Logo, a primeira componente da derivada segunda em relação a  $x \in \mathbb{R}^2$  da família de campos regularizados  $Z_R = (Z_{R_1}, Z_{R_2})$  é

$$\sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 Z_{R_1}}{\partial x_i \partial x_j}(x_i, x_j, \lambda) v_j v_i = -\frac{81(1 + \sqrt{3})^3 y}{512\alpha(y^2 + 1)^{5/2}},$$

e a segunda componente da derivada segunda é

$$\sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 Z_{R_2}}{\partial x_i \partial x_j}(x_i, x_j, \lambda) v_j v_i = \frac{9 \left( 32\sqrt{6}(1 + \sqrt{3})^{3/2}(y^2 + 1)\alpha - 9(1 + \sqrt{3})^3 y(3x + \lambda) \right)}{1024\alpha^2(y^2 + 1)^{5/2}}$$

Assim, avaliando em  $(x^*, y^*)$  para  $\lambda = \lambda^*$  obtemos

$$D_x^2 Z_R(x^*, y^*, \lambda^*)(\vec{v}, \vec{v}) = \left( -\frac{3(\sqrt{3} - 3)}{8\alpha}, \frac{3(-1 + 5\sqrt{3})}{8\alpha} \right).$$

Agora, multiplicando escalarmente pelo autovetor  $\vec{w}$

$$\langle \vec{w}, D_x^2 Z_R(x^*, y^*, \lambda^*)(\vec{v}, \vec{v}) \rangle = \frac{3(2 + \sqrt{3})}{\alpha} \neq 0.$$

Isto prova a hipótese  $(SN_3)$ . Portanto, temos uma bifurcação do tipo sela-nó no ponto crítico não-hiperbólico  $(x^*, y^*)$  para o valor do parâmetro  $\lambda^*$ .  $\square$

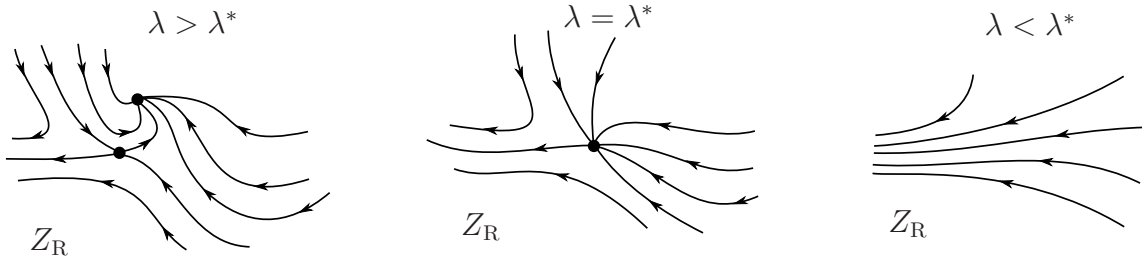


Figura 3.7: Diagrama de bifurcação da família regularizada  $Z_R$  associada ao subcaso VI2.

A proposição anterior prova o Teorema A, item b2), quando consideramos a regularização do tipo transição dada pela função  $\varphi(x) = 1/2 + x/(2\sqrt{x^2 + 1})$ .

### 3.4.3 Bifurcação VI3 via Regularização

Uma forma normal topológica para a bifurcação VI3 descrita em [12] é dada por

$$Z_\lambda(x, y) = \begin{cases} X_\lambda(x, y) = (\alpha - x, x) & \text{se } y > 0 \\ Y_\lambda(x, y) = (-\alpha + x, -(\lambda + 2x)) & \text{se } y < 0 \end{cases}, \quad (3.13)$$

com  $\alpha > 0$ . Nos pontos  $T_\lambda^X = (0, 0)$  e  $T_\lambda^Y = (-\lambda/2, 0)$  ocorre o contato quadrático dos campos de vetores  $X_\lambda$  e  $Y_\lambda$  com  $\Sigma$ , respectivamente.

Considerando uma regularização do tipo transição em que a função  $\varphi$  é dada por (2.2), a

família de campos regularizados associada se escreve como

$$Z_{\lambda,\varepsilon}(x, y) = \left( \frac{(\alpha - x)y}{\sqrt{y^2 + \varepsilon^2}}, -\frac{(x + \lambda)}{2} + \frac{(3x + \lambda)y}{2\sqrt{y^2 + \varepsilon^2}} \right).$$

Através da seguinte mudança de variáveis e reescalonamento de parâmetros

$$x = \varepsilon\bar{x}, \quad y = \varepsilon\bar{y}, \quad \lambda = \varepsilon\bar{\lambda}, \quad \alpha = \varepsilon\bar{\alpha},$$

obtemos

$$Z_R(x, y) = \left( \frac{(\alpha - x)y}{\sqrt{y^2 + 1}}, -\frac{(x + \lambda)}{2} + \frac{(3x + \lambda)y}{2\sqrt{y^2 + 1}} \right), \quad (3.14)$$

onde voltamos a denotar  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}, \bar{\alpha})$  por  $(x, y, \lambda, \alpha)$ .

As singularidades da família de campos regularizados em (3.14) são dadas por

$$p_0 = (-\lambda, 0) \quad \text{e} \quad q_0 = \left( \alpha, \frac{\alpha + \lambda}{2\sqrt{\alpha(2\alpha + \lambda)}} \right).$$

Como  $\alpha > 0$  está fixado, o ponto de equilíbrio  $q_0$  é um ponto de sela qualquer que seja o valor de  $\lambda$  numa vizinhança de zero. Além disso, nosso estudo é local. Portanto, vamos analisar apenas o comportamento da singularidade  $p_0$  sob a variação do parâmetro  $\lambda$ . Seja  $A = (a_{ij})$ ,  $1 \leq i, j \leq 2$ , a matriz Jacobiana  $DZ_R(x, y)$ . Avaliando na singularidade  $p_0$  obtemos

$$A(p_0) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha + \lambda \\ -\frac{1}{2} & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Logo, existe um único valor do parâmetro,  $\lambda = 0$ , onde  $\text{tr}(A(p_0)) = 0$  e  $\det(A(p_0)) > 0$ . E, neste caso,  $p_0 = (0, 0)$ . Seja  $A_0 = A(p_0)$  a matriz Jacobiana da família de campos de vetores (3.14) avaliada em  $p_0$  para  $\lambda = 0$ . Seus autovalores são imaginários puros  $\pm i\sqrt{\frac{\alpha}{2}}$ . Os autovetores associados são  $\vec{v}$  e  $\vec{\bar{v}}$ , onde

$$\vec{v} = (-i\sqrt{2\alpha}, 1) = (0, 1) + i(-\sqrt{2\alpha}, 0) = \vec{v}_1 + i\vec{v}_2,$$

e  $\vec{\bar{v}}$  é o vetor conjugado a  $\vec{v}$ . Portanto, denotando por  $M$  a matriz cujas colunas são  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$ , acarreta que  $M.A_0.M^{-1}$  está na forma de Jordan.

Assim, ao efetuar a mudança de variáveis  $w = Mz$ ,  $z = M^{-1}w$ , onde  $z = (x, y)$  e  $w = (x_1, y_1)$ , a família de campos regularizados (3.14) se escreve

$$\begin{aligned}\dot{w} &= M.A.M^{-1}w + O(|w|^2) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \\ -\sqrt{\frac{\alpha}{2}} & 0 \end{pmatrix} w + O(|w|^2).\end{aligned}\quad (3.15)$$

No que segue mostraremos que o sistema (3.15) tem um foco de multiplicidade dois na origem. Fazendo a mudança para coordenadas polares  $x_1 = r \cos \theta$ ,  $y_1 = r \sin \theta$ , o sistema (3.15) torna-se

$$\begin{cases} \dot{r} = P(r, \theta) \\ \dot{\theta} = Q(r, \theta), \end{cases}\quad (3.16)$$

onde

$$\begin{aligned}P(r, \theta) &= \frac{1}{64\alpha^{5/2}} \left( r \cos \theta \sin \theta \left( \sqrt{\alpha} (32\sqrt{2}\alpha^{5/2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 96r\alpha^2 \cos \theta - 24r^3\alpha \cos^3 \theta + 9r^5 \cos^5 \theta) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sqrt{2} (32\alpha^2 - 8r^2\alpha \cos^2 \theta + 3r^4 \cos^4 \theta) (-\alpha + r \sin \theta) \right) \right),\end{aligned}\quad (3.17)$$

e

$$\begin{aligned}Q(r, \theta) &= \frac{1}{64\alpha^{5/2}} \left( -\sqrt{\alpha} \sin^2 \theta \left( \sqrt{\alpha} (32\sqrt{2}\alpha^{5/2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 96r\alpha^2 \cos \theta - 24r^3\alpha \cos^3 \theta + 9r^5 \cos^5 \theta) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sqrt{2} \cos^2 \theta (32\alpha^2 - 8r^2\alpha \cos^2 \theta + 3r^4 \cos^4 \theta) (-\alpha + r \sin \theta) \right) \right).\end{aligned}\quad (3.18)$$

Tomando  $\theta$  como a nova variável independente, o retrato de fase de (3.16) é composto pelos gráficos de  $r = g_\rho(\theta)$  com  $g_\rho(0) = \rho$ , soluções do sistema diferencial

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{P(r, \theta)}{Q(r, \theta)} = R(r, \theta) = R_1(\theta)r + R_2(\theta)r^2 + \dots + R_k(\theta)r^k + \dots \quad (3.19)$$

onde  $R_k(\theta) = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k R}{\partial r^k}(r, \theta) \Big|_{r=0}$ . A expansão em série de Taylor de  $r = g_\rho(\theta)$  em torno de  $\rho_0 = 0$  é dada por

$$r = g_\rho(\theta) = u_1(\theta)\rho + u_2(\theta)\rho^2 + u_3(\theta)\rho^3 + \dots \quad (3.20)$$



cuja derivada em relação a  $\theta$  é

$$\frac{dr}{d\theta} = u'_1(\theta)\rho + u'_2(\theta)\rho^2 + u'_3(\theta)\rho^3 \dots \quad (3.21)$$

Por outro lado, substituindo  $r = g_\rho(\theta)$  dada em (3.20) na expressão (3.19), obtemos

$$\frac{dr}{d\theta} = R_1(\theta)(u_1(\theta)\rho + u_2(\theta)\rho^2 + \dots) + R_2(\theta)(u_1(\theta)\rho + u_2(\theta)\rho^2 + \dots)^2 + \dots \quad (3.22)$$

Assim, comparando (3.21) e (3.22) termo a termo, pode-se determinar as funções  $u_k(\theta)$  em (3.20) através das equações diferenciais lineares

$$\begin{aligned} u'_1(\theta) &= R_1(\theta)u_1(\theta) \\ u'_2(\theta) &= R_1(\theta)u_2(\theta) + R_2(\theta)u_1(\theta)^2 \\ u'_3(\theta) &= R_1(\theta)u_3(\theta) + 2R_1(\theta)u_1(\theta)u_2(\theta) + R_3(\theta)u_1(\theta)^3 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.23)$$

Uma vez que  $g_\rho(0) = \rho$ , a expressão em (3.20) fornece as condições iniciais

$$u_1(0) = 1, \quad u_2(0) = u_3(0) = \dots = u_k(0) = 0. \quad (3.24)$$

Portanto, usando as condições iniciais (3.24), pode-se determinar as funções  $u_k(\theta)$  resolvendo por integração as equações diferenciais lineares dadas em (3.23).

Considerando então as soluções  $r = g_\rho = u_1\rho + u_2\rho^2 + \dots$  do sistema diferencial (3.19), a aplicação de primeiro retorno  $\Pi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  é definida por

$$\Pi(\rho) = g_\rho(2\pi) - \rho.$$

Observe que

$$\Pi(\rho) = (u_1(2\pi) - 1)\rho + u_2(2\pi)\rho^2 + u_3(2\pi)\rho^3 + \dots$$

onde as funções  $u_k(\theta)$  são obtidas pelas soluções de (3.23). Os números de Lyapunov são dados por

$$V_k = \frac{\Pi^{(k)}(0)}{k!}.$$

Como consta em [1], se existir  $n \in \mathbb{N}$  tal que

$$\Pi'(0) = \Pi''(0) = \dots = \Pi^{(n-1)}(0) = 0, \quad \text{e} \quad \Pi^n(0) \neq 0,$$

então  $n$  é um número ímpar. Neste caso, dizemos que  $m = \frac{n-1}{2}$  é a multiplicidade do foco. Se  $m = 0$ , então o foco é chamado de foco simples. Por outro lado, se  $\Pi'(0) = 0$ , ou seja  $V_1 = 0$ , então o sistema (3.15) terá um foco múltiplo ou centro na origem. O sinal do primeiro número de Lyapunov não nulo define a estabilidade do foco. Mais precisamente, se  $V_k < 0$  temos um foco atrator na origem, e se  $V_k > 0$  temos um foco repulsor na origem.

O teorema a seguir, enunciado conforme consta em [1], será utilizado para provar que a família de campos regularizados (3.14) admite uma bifurcação de Hopf de codimensão 2.

**Teorema 3.1 (Bifurcação de Ciclos Limites de um Foco Múltiplo)** *Considere um campo de vetores em  $\mathbb{R}^2$  que tenha a seguinte forma canônica em uma vizinhança da singularidade  $(0, 0)$*

$$\begin{cases} \dot{x} = \beta y + p(x, y) \\ \dot{y} = -\beta x + q(x, y) \end{cases} \quad (3.25)$$

onde  $\beta > 0$  e  $p, q$  são funções analíticas que se anulam no ponto  $(0, 0)$  juntamente com suas derivadas parciais de primeira ordem. Se  $(0, 0)$  é um foco múltiplo de multiplicidade  $k$  ( $k \geq 1$ ) de (3.25), então

- a) existem  $\epsilon_0 > 0$  e  $\zeta_0 > 0$  tais que qualquer sistema  $\zeta_0$ -próximo ao sistema (3.25) tem no máximo  $k$  ciclos limites em uma  $\epsilon_0$ -vizinhança de  $(0, 0)$ .
- b) para quaisquer  $\epsilon < \epsilon_0$  e  $\zeta < \zeta_0$ , existe um sistema analítico que é  $\zeta$ -próximo a (3.25) e tem exatamente  $k$  ciclos limites em uma  $\epsilon$ -vizinhança de  $(0, 0)$ .

Para calcular os números de Lyapunov do sistema (3.15) vamos expandir  $R(r, \theta) = \frac{P(r, \theta)}{Q(r, \theta)}$  em série de Taylor em uma vizinhança de  $r = 0$  até ordem cinco, com  $P(r, \theta)$  e  $Q(r, \theta)$  dados por (3.17) e (3.18). Assim,  $R(r, \theta) = R_1(\theta)r + R_2(\theta)r^2 + R_3(\theta)r^3 + R_4(\theta)r^4 + R_5(\theta)r^5 + \dots$ ,

onde

$$\begin{aligned}
R_1(\theta) &= 0 \\
R_2(\theta) &= -\frac{\sin(2\theta)(3\sqrt{2\alpha}\cos\theta + 2\sin\theta)}{4\alpha} \\
R_3(\theta) &= \frac{\cos^2\theta\sin\theta}{8\alpha^2} \left( (7\alpha - 2)\cos\theta + (2 - 9\alpha)\cos(3\theta) + 6\sqrt{2\alpha}(\sin\theta - \sin(3\theta)) \right) \\
R_4(\theta) &= -\frac{\cos^3\theta\sin^2\theta}{16\sqrt{2\alpha}^3} \left( \sqrt{2}(2 + 9\alpha) - 32\sqrt{2\alpha}\cos(2\theta) + (27\alpha - 2)\sqrt{2}\cos(4\theta) \right. \\
&\quad \left. - 6\sqrt{\alpha}(2 - 7\alpha + (9\alpha - 6)\cos(2\theta))\sin(2\theta) \right) \\
R_5(\theta) &= \frac{\cos^4\theta\sin\theta}{32\alpha^4} \left( \alpha^2\cos^7\theta + \alpha(5\alpha - 8)\cos^5\theta\sin^2\theta - 101\alpha^2\cos^5\theta\sin^4\theta + \right. \\
&\quad 48\sqrt{2\alpha}(3 - 13\alpha)\cos^2\theta\sin^5\theta + \alpha(543\alpha - 416)\cos\theta\sin^6\theta + 192\sqrt{2\alpha}^3\sin^7\theta \\
&\quad \left. + (55\alpha - 4)\sin\theta\sin^3(3\theta) + 3\sqrt{2\alpha}(\alpha - 1)\csc\theta\sin^4(2\theta) \right).
\end{aligned}$$

Substituindo essas funções nas equações diferenciais lineares (3.23) e utilizando um software para cálculos extensos, como o MATHEMATICA, podemos obter os números de Lyapunov como segue

$$\begin{aligned}
u1 &= \text{Exp}[\text{Integrate}[R1, \{\theta, 0, \Theta\}]]; \\
V1 &= \text{Simplify}[u1-1 /. \{\Theta \rightarrow 2Pi\}]; \\
u2 &= \text{Integrate}[R2, \{\theta, 0, \Theta\}]; \\
V2 &= \text{Simplify}[u2 /. \{\Theta \rightarrow 2Pi\}]; \\
u3 &= \text{Integrate}[2R2u2+R3, \{\theta, 0, \Theta\}]; \\
V3 &= \text{Simplify}[u3 /. \{\Theta \rightarrow 2Pi\}]; \\
u4 &= \text{Integrate}[R2(2u3+(u2)^2)+3R3u2+R4, \{\theta, 0, \Theta\}]; \\
V4 &= \text{Simplify}[u4 /. \{\Theta \rightarrow 2Pi\}]; \\
u5 &= \text{Integrate}[R2(2u2u3+u4)+R3(3u3+3(u2)^2)+4R4u2+R5, \{\theta, 0, \Theta\}]; \\
V5 &= \text{Simplify}[u5 /. \{\Theta \rightarrow 2Pi\}];
\end{aligned}$$

Com esses comandos obtemos

$$V_1 = V_2 = V_3 = V_4 = 0, \quad \text{e} \quad V_5 = \frac{\pi(17\alpha - 4)}{128\sqrt{2\alpha}^{7/2}}.$$

Provamos, assim, o seguinte teorema. Consequentemente, também está provado o item b3) do Teorema A ao considerar a regularização do tipo transição dada pela função  $\varphi(x) =$

$$1/2 + x/(2\sqrt{x^2 + 1}).$$

**Teorema 3.2** *Seja  $Z_\lambda = (X_\lambda, Y_\lambda)$  uma família de campos vetoriais descontínuos dada por (3.13), com  $\alpha \neq \frac{4}{17}$ . Então, a respectiva família de campos regularizados  $Z_R$  admite uma bifurcação de Hopf de codimensão dois. Existem dois ciclos limites (o interior está atraindo e o exterior está repelindo) para  $0 < \alpha < \frac{4}{17}$ , e existem dois ciclos limites (o interior está repelindo e o exterior está atraindo) para  $\alpha > \frac{4}{17}$ .*

# Singularidade Sela-Dobra via Regularização

Este capítulo trata da singularidade Sela-Dobra, que é uma singularidade de codimensão dois para campos de vetores descontínuos planares. A abordagem consiste novamente em aplicar o método da regularização ao desdobramento da singularidade Sela-Dobra para obter uma família a dois parâmetros de campos vetoriais regulares. Provaremos que a família regularizada admite uma bifurcação clássica de Bogdanov-Takens.

## 4.1 A singularidade Sela-Dobra

A singularidade Sela-Dobra é uma das singularidades de codimensão dois para campos de vetores descontínuos que estão classificadas em [9]. Considere um campo de vetores descontínuo planar  $Z = (X, Y)$ . Quando os campos de vetores planares  $X$  e  $Y$  têm, respectivamente, uma sela hiperbólica (com variedades invariantes transversais a  $\Sigma$ ) e uma tangência quadrática (ou dobra) no mesmo ponto  $p \in \Sigma$ , dizemos que  $p$  é uma *singularidade Sela-Dobra*.

Existem dois tipos de singularidade Sela-Dobra, que se distinguem por  $p \in \partial\Sigma_c$  (fronteira de  $\Sigma_c$ ) ou  $p \in \partial\Sigma_d \cap \partial\Sigma_e$ . Em [9] são fornecidas condições genéricas sobre um campo de vetores descontínuo de modo a se obter uma singularidade sela-dobra  $p \in \partial\Sigma_c$  de codimensão dois.

Tomamos a singularidade sela-dobra  $p = (0, 0)$  com a forma normal

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y) = (x + y, 4x + y) & \text{se } y > 0 \\ Y(x, y) = (\alpha, x) & \text{se } y < 0 \end{cases}, \quad (4.1)$$

onde  $\alpha > 0$  é uma constante fixada.

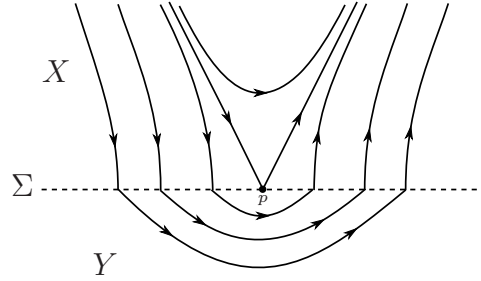


Figura 4.1: Singularidade Sela-Dobra.

A forma normal (4.1) foi adaptada da forma normal descrita em [9] através de uma rotação no sistema que transforma a fronteira de descontinuidade  $\{(x, y) : f(x, y) = x + y = 0\}$  na reta  $y = 0$  e de modo que as condições genéricas estabelecidas em [9] continuam válidas, isto é, os autovalores (em módulo) da matriz Jacobiana no ponto de sela são distintos, e as variedades invariantes da sela são transversais a  $\Sigma$ . Além disso,  $p \in \partial\Sigma_c = \Sigma \setminus \{(0, 0)\}$ .

O desdobramento da posição relativa entre os pontos de sela e de dobra (tangência quadrática) em uma vizinhança do conjunto de descontinuidade é descrito pela seguinte família a dois parâmetros de campos de vetores descontínuos  $Z_{\lambda, \mu} = (X_\mu, Y_\lambda)$

$$Z_{\lambda, \mu}(x, y) = \begin{cases} X_\mu(x, y) = (x + y - \mu, 4x + y) & \text{se } y > 0 \\ Y_\lambda(x, y) = (\alpha, x - \lambda) & \text{se } y < 0 \end{cases}, \quad (4.2)$$

com  $\alpha > 0$  fixado e  $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ . Os retratos de fase de (4.2) podem ser vistos na Figura 4.2.

Assim, o ponto de sela  $S_\mu = (-\mu/3, 4\mu/3)$  do campo de vetores  $X_\mu$  é visível ( $\mu > 0$ ), invisível ( $\mu < 0$ ), ou está sobre a fronteira  $\Sigma$  ( $\mu = 0$ ), dependendo do sinal de  $\mu$ . E o parâmetro  $\lambda$  no sistema (4.2) age movendo a dobra (tangência quadrática) do campo de vetores  $Y_\lambda$ , mudando sua posição em relação a dobra do campo de vetores  $X_\mu$ , quando esta existe. Para valores  $\mu > 0$  temos o nascimento de uma órbita periódica para  $\lambda < 0$ , a qual é repulsora e persiste ao longo da região 2 do espaço de parâmetros  $(\lambda, \mu)$ . Esta órbita periódica quebra quando atinge as variedades invariantes da sela (curva  $\eta = \{(\lambda, \mu); \mu = -3\lambda/2\}$  na Figura 4.2), tornando-se um laço homoclínico.

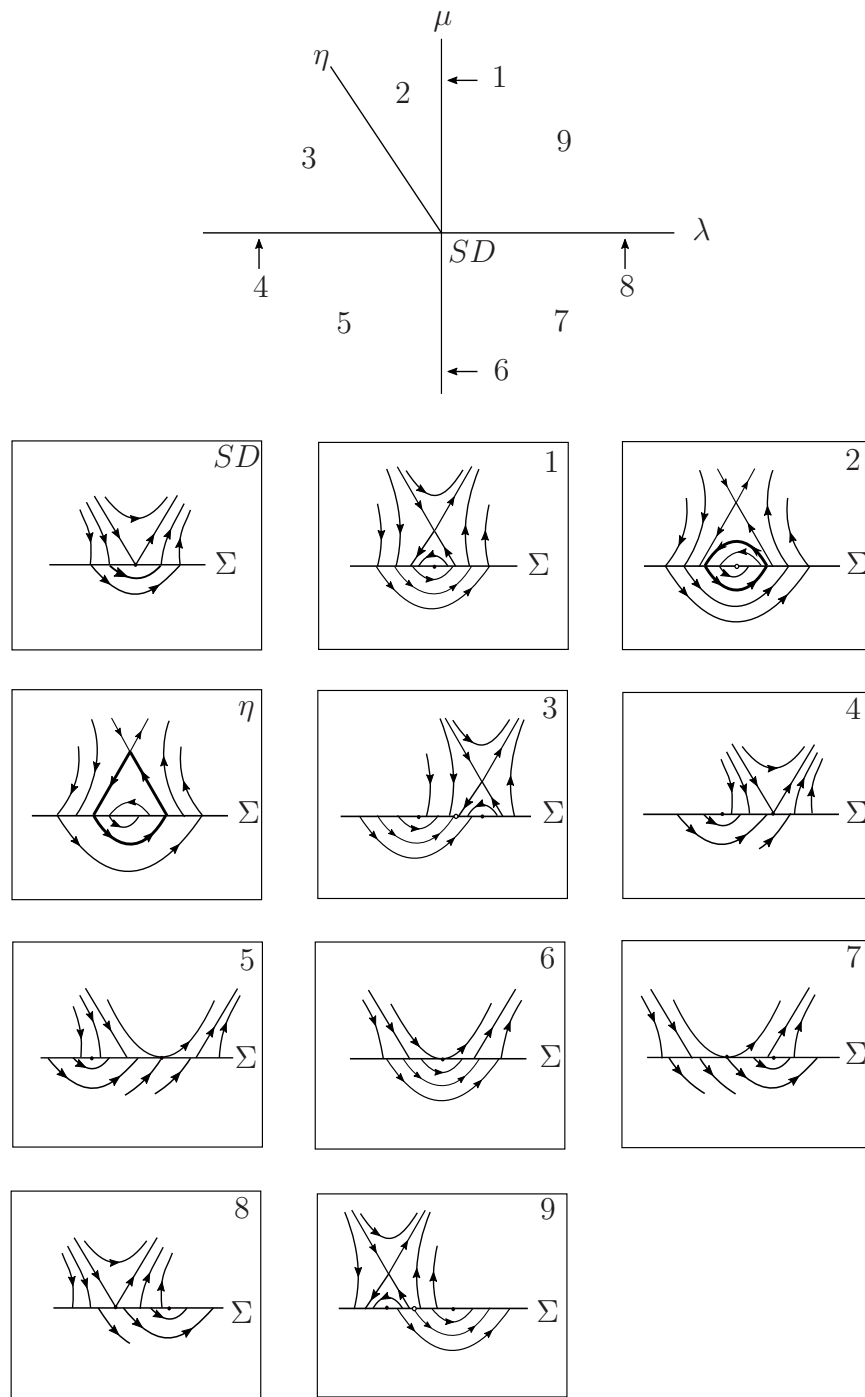


Figura 4.2: Diagrama de Bifurcação: desdobramento da singularidade Sela-Dobra.

## 4.2 Bifurcação de Bogdanov-Takens

Apresentamos agora o clássico Teorema de Bogdanov-Takens, que está demonstrado em [11].

**Teorema 4.1 (Bogdanov-Takens)** *Suponha que um sistema planar*

$$\dot{x} = F(x, \beta), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \beta \in \mathbb{R}^2,$$

*tem uma singularidade  $x_0 = (0, 0)$  onde a parte linear tem um autovalor zero duplo em  $\beta_0 = (0, 0)$ . Assuma que as seguintes condições genéricas são satisfeitas:*

*(BT.0) a matriz Jacobiana  $A_0 = JF(x_0, \beta_0) \neq 0$*

*(BT.1)  $a_{20}(\beta_0) + b_{11}(\beta_0) \neq 0$*

*(BT.2)  $b_{20}(\beta_0) \neq 0$*

*(BT.3) a aplicação*

$$(x, \beta) \mapsto \left( F(x, \beta), \operatorname{tr}(JF(x, \beta)), \det(JF(x, \beta)) \right)$$

*é regular em  $(x_0, \beta_0)$ . Então, o sistema planar admite uma bifurcação de Bogdanov-Takens em  $(x_0, \beta_0)$ .*

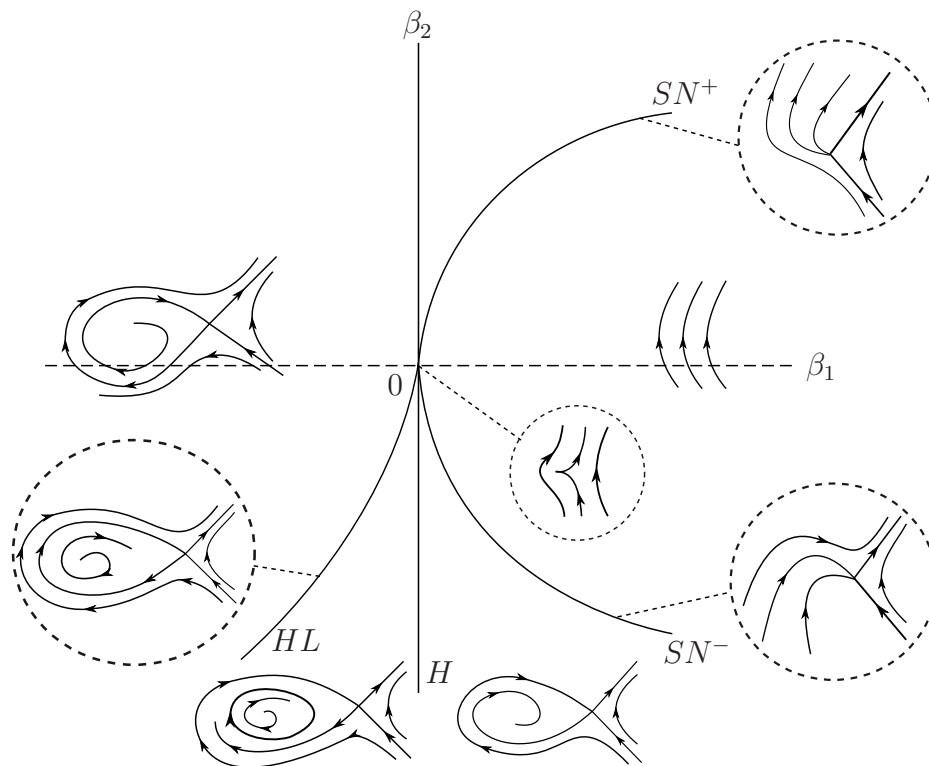


Figura 4.3: Bifurcação de Bogdanov-Takens.



**Observação 4.1** *No teorema acima,*

$$a_{20}(\beta) = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \langle F(y_1 v_0 + y_2 v_1, \beta), w_0 \rangle \Big|_{x=0},$$

$$b_{20}(\beta) = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \langle F(y_1 v_0 + y_2 v_1, \beta), w_1 \rangle \Big|_{x=0},$$

$$b_{11}(\beta) = \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} \langle F(y_1 v_0 + y_2 v_1, \beta), w_1 \rangle \Big|_{x=0},$$

onde  $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$  e  $v_0, v_1$  (respectivamente  $w_0, w_1$ ) são os autovetores e autovetores generalizados de  $A_0$  (respectivamente, de  $A_0^T$ ),

$$A_0 v_0 = 0, \quad A_0 v_1 = v_0, \quad A_0^T w_1 = 0, \quad A_0^T w_0 = w_1,$$

satisfazendo  $\langle v_0, w_0 \rangle = \langle v_1, w_1 \rangle = 1$  e  $\langle v_1, w_0 \rangle = \langle v_0, w_1 \rangle = 0$ .

### 4.3 Regularização

Queremos reduzir o estudo da família de campos de vetores descontínuos a dois parâmetros dada pelo desdobramento (4.2) para o caso contínuo, isto é, transferir a análise para campos de vetores planares sem conjuntos de descontinuidade. Para regularizar a família de campos de vetores descontínuos (4.2) vamos considerar a regularização do tipo transição dada pela função (2.2). Assim, a família de campos de vetores regularizados é

$$Z_{\lambda, \mu, \varepsilon}(x, y) = (1 - \varphi_\varepsilon(y)) Y_\lambda(x, y) + \varphi_\varepsilon(y) X_\mu(x, y),$$

$$\text{com } \varphi_\varepsilon(y) = \frac{1}{2} + \frac{y}{2\sqrt{y^2 + \varepsilon^2}}.$$

Denote por  $Z_{\lambda, \mu, \varepsilon} = (Z_{\lambda, \mu, \varepsilon}^1, Z_{\lambda, \mu, \varepsilon}^2)$ . Então

$$Z_{\lambda, \mu, \varepsilon}^1(x, y) = \left( \frac{1}{2} - \frac{y}{2\sqrt{y^2 + \varepsilon^2}} \right) \alpha + \left( \frac{1}{2} + \frac{y}{2\sqrt{y^2 + \varepsilon^2}} \right) (x + y - \mu),$$

$$Z_{\lambda, \mu, \varepsilon}^2(x, y) = \left( \frac{1}{2} - \frac{y}{2\sqrt{y^2 + \varepsilon^2}} \right) (x - \lambda) + \left( \frac{1}{2} + \frac{y}{2\sqrt{y^2 + \varepsilon^2}} \right) (4x + y).$$

Através da seguinte mudança de variáveis e reescalonamento de parâmetros:  $x = \varepsilon\bar{x}$ ,  $y = \varepsilon\bar{y}$ ,  $\alpha = \varepsilon\bar{\alpha}$ ,  $\lambda = \varepsilon\bar{\lambda}$ ,  $\mu = \varepsilon\bar{\mu}$ , obtemos a família de campos de vetores regularizados  $Z_R = (Z_1, Z_2)$

$$\begin{aligned} Z_1(x, y) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{2\sqrt{y^2+1}}\right)\alpha + \left(\frac{1}{2} + \frac{y}{2\sqrt{y^2+1}}\right)(x + y - \mu), \\ Z_2(x, y) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{2\sqrt{y^2+1}}\right)(x - \lambda) + \left(\frac{1}{2} + \frac{y}{2\sqrt{y^2+1}}\right)(4x + y), \end{aligned} \tag{4.3}$$

onde voltamos a usar a notação  $(x, y, \lambda, \mu, \alpha)$  no lugar de  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{\alpha})$ .

Nosso principal objetivo é encontrar condições sobre  $\alpha$  para que o sistema  $Z_R$  admita uma bifurcação de Bogdanov-Takens, em algum valor específico de parâmetros  $\lambda = \lambda_0$  e  $\mu = \mu_0$ . Será visto na prova do Teorema 4.2 que isso é possível se  $\alpha$  não é uma raiz de um dos três polinômios  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$ , dados a seguir:

$$\begin{aligned} R_1(t) &= -32768t^{14}(9 + 512t^2)(245 + 16t^2(199 + 688t^2 + 256t^4)) \\ &\quad (-1125 + 16t^2(-130 + 1279t^2 + 14656t^4 + 256t^6)), \\ R_2(t) &= 2592t^{10}(361 + 129074t^2 + 7793725t^4 + 191102976t^6) \\ &\quad (-33768075 - 194462570t^2 + 7722010973t^4 + \\ &\quad 113346222160t^6 + 537224695680t^8 + 883362299904t^{10} + \\ &\quad 154241335296t^{12} + 14495514624t^{14}), \\ R_3(t) &= 324t^5(16 + 5816t^2 + 393649t^4 + 8847360t^6) \\ &\quad (2178000 + 13491800t^2 + 26866125t^4 + 32019984t^6 + \\ &\quad 682112t^8). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Defina o conjunto  $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ , onde  $S_k = \{t : R_k(t) = 0\}$  para  $k = 1, 2, 3$ . Provaremos o seguinte teorema.

**Teorema 4.2** *Seja  $Z_{\mu,\lambda}$  uma família de campos de vetores descontínuos a dois parâmetros dada por (4.2), com  $\alpha > 0$  e  $\alpha \notin S$ . Então existem parâmetros  $\lambda = \lambda_0$  e  $\mu = \mu_0$  para os quais a respectiva família de campos regularizados  $Z_R$  admite uma bifurcação de Bogdanov-Takens em  $(\lambda_0, \mu_0)$ .*

O primeiro passo para provar o Teorema 4.2 é a validade da seguinte Proposição.

**Proposição 4.1** *Existe um ponto de equilíbrio  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$  do sistema (4.3) e parâmetros  $\beta_0 = (\lambda_0, \mu_0)$  para os quais  $\text{tr}_S(A)(\mathbf{x}_0, \beta_0) = \det_S(A)(\mathbf{x}_0, \beta_0) = 0$ , onde  $\text{tr}_S(A)$  e  $\det_S(A)$  são o traço e o determinante da matriz Jacobiana de (4.3) em  $(\mathbf{x}_0, \beta_0)$ .*

Antes de iniciarmos a prova da Proposição 4.1, observamos o seguinte. Determinar as singularidades do sistema (4.3) é o primeiro passo para detectar possíveis bifurcações locais de campos de vetores contínuos a um ou mais parâmetros. Então, é natural que os pontos de equilíbrio dependam dos parâmetros, isto é,  $x(\lambda, \mu)$  e  $y(\lambda, \mu)$ . No entanto, devido a expressão  $\sqrt{y^2 + 1}$  em (4.3), determinar as singularidades do sistema resolvendo  $(Z_1, Z_2) = (0, 0)$  para  $x$  e  $y$  é impraticável. De modo a provar a Proposição 4.1, usaremos o fato de que  $\pm y + \sqrt{y^2 + 1} \neq 0$  para todo  $y \in \mathbb{R}$ , para expressar os valores dos parâmetros  $\lambda$  e  $\mu$  em termos de  $x$  e  $y$ .

*Demonstração.* Para cada  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  o sistema (4.3) tem um ponto de equilíbrio para os seguintes valores de parâmetros

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{y(y + \sqrt{y^2 + 1}) + x(3y + 5\sqrt{y^2 + 1})}{-y + \sqrt{y^2 + 1}}, \\ \mu &= \frac{y^2 + x(y + \sqrt{y^2 + 1}) + y(\sqrt{y^2 + 1} - \alpha) + \alpha\sqrt{y^2 + 1}}{y + \sqrt{y^2 + 1}}.\end{aligned}\tag{4.5}$$

Denotando a matriz Jacobiana  $DZ_{\mathbb{R}}(x, y) = A = (a_{ij})$ ,  $1 \leq i, j \leq 2$ , temos

$$\begin{aligned}a_{11} &= \frac{1}{2} + \frac{y}{2\sqrt{y^2 + 1}}, & a_{12} &= \frac{x + 2y + y^3 + (y^2 + 1)^{3/2} - (\alpha + \mu)}{2(y^2 + 1)^{3/2}}, \\ a_{21} &= \frac{5}{2} + \frac{3y}{2\sqrt{y^2 + 1}}, & a_{22} &= \frac{3x + 2y + y^3 + (y^2 + 1)^{3/2} + \lambda}{2(y^2 + 1)^{3/2}},\end{aligned}$$

para a qual

$$\begin{aligned}\text{tr}(A) &= \frac{3(x + y) + 2y^3 + 2(y^2 + 1)^{3/2} + \lambda}{2(y^2 + 1)^{3/2}}, \\ \det(A) &= \frac{p(y) + \hat{y}q(x, y)}{4(y^2 + 1)^2},\end{aligned}$$

onde  $p(y) = -6y^4 - 12y^2 + (3\alpha + \lambda + 3\mu)y - 4$ ,  $q(x, y) = -6y^3 - 10y - 2x + 5\alpha + 5\mu + \lambda$ , e  $\hat{y} = \sqrt{y^2 + 1}$ . Investigamos a existência de bifurcações locais de codimensão 2 sob a variação dos parâmetros  $(\lambda, \mu)$  considerando no plano- $xy$  as superfícies  $\lambda(x, y)$  e  $\mu(x, y)$  dadas pelas

expressões em (4.5), além das superfícies  $\det_S(A)(x, y)$  e  $\text{tr}_S(A)(x, y)$  dadas pela substituição de (4.5) nas expressões do traço e determinante da matriz Jacobiana, isto é

$$\begin{aligned}\text{tr}_S(A)(x, y) &= \frac{1 + y^2 + (4x + y)\hat{y}}{(y^2 + 1)^{3/2}(-y + \hat{y})}, \\ \det_S(A)(x, y) &= \frac{r(x, y) + \hat{y}s(x, y)}{2(y^2 + 1)^{3/2}},\end{aligned}$$

onde  $r(x, y) = -y^3 + 8xy^2 + 2\alpha y^2 + 4x - 2y + 5\alpha$ , e  $s(x, y) = -y^2 + 8xy - 2\alpha y - 2$ .

A equação  $\text{tr}_S(A)(x, y) = 0$  nos dá  $x = -\frac{1}{4}(y + \sqrt{y^2 + 1})$ . Substituindo na equação  $\det_S(A)(x, y) = 0$ , obtemos

$$\frac{-5y^3 - 3\sqrt{1 + y^2} + 5\alpha + y^2(-5\sqrt{1 + y^2} + 2\alpha) - y(5 + 2\sqrt{1 + y^2}\alpha)}{2(1 + y^2)^{3/2}} = 0.$$

Simplificando o numerador temos

$$-5y - 5y^3 + 5\alpha + 2y^2\alpha + \sqrt{1 + y^2}(-3 - 5y^2 - 2y\alpha) = 0,$$

ou equivalentemente  $-5y - 5y^3 + 5\alpha + 2y^2\alpha = -\sqrt{1 + y^2}(-3 - 5y^2 - 2y\alpha)$ . Ao aplicar quadrados em ambos os lados obtemos a equação polinomial

$$40\alpha y^5 + 5y^4 + 102\alpha y^3 + (14 - 16\alpha^2)y^2 + 62\alpha y + (9 - 25\alpha^2) = 0.$$

Para cada  $\alpha$  fixado,  $P(y, \alpha) = 40\alpha y^5 + 5y^4 + 102\alpha y^3 + (14 - 16\alpha^2)y^2 + 62\alpha y + (9 - 25\alpha^2)$  é um polinômio de grau 5 na variável  $y$ . Portanto, a solução do sistema não-linear

$$\begin{cases} \text{tr}_S(A)(x, y) = 0 \\ \det_S(A)(x, y) = 0 \end{cases}$$

é dada pelo par ordenado  $(x, y)$  satisfazendo  $P(y, \alpha) = 0$  e  $x = -\frac{1}{4}(y + \sqrt{y^2 + 1})$ , onde  $P$  é o polinômio com coeficientes reais  $P(t) = 40\alpha t^5 + 5t^4 + 102\alpha t^3 + (14 - 16\alpha^2)t^2 + 62\alpha t + (9 - 25\alpha^2)$ . Como  $\alpha > 0$  e  $P$  tem grau ímpar, então existe  $y_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $P(y_0) = 0$ . A prova segue ao considerar  $x_0 = -\frac{1}{4}(y_0 + \sqrt{y_0^2 + 1})$  e  $(\lambda_0, \mu_0)$  dados por  $\lambda_0 = \lambda(x_0, y_0)$ ,  $\mu_0 = \mu(x_0, y_0)$ .  $\square$

Provaremos agora que as condições genéricas do Teorema 4.1 são satisfeitas para o sistema dado pela família de campos de vetores regularizados (4.3). Primeiro, a Proposição 4.1 garante

que no ponto de equilíbrio  $x_0 = (x_0, y_0)$ , o sistema  $\dot{x} = Z_R(x, \beta)$  tem, em  $\beta_0 = (\lambda_0, \mu_0)$ , matriz Jacobiana  $A_0 = DZ_R(x_0, \beta_0)$  com duplo autovalor nulo. Além disso, a matriz  $A_0$  é não nula pois

$$a_{11}(x_0, \beta_0) = \frac{1}{2} + \frac{y_0}{2\sqrt{y_0^2 + 1}} \neq 0.$$

Assim, resta verificar as condições genéricas (BT.1), (BT.2) and (BT.3). A validade desses itens é garantida pelos lemas a seguir.

**Lema 4.1** *Considere  $Z_R$  a família de campos de vetores regularizados dada por (4.3) onde  $\alpha > 0$  não é raiz do polinômio  $R_1$ , com  $R_1$  dado em (4.4). Então, a condição genérica de Bogdanov-Takens (BT.1) é satisfeita em  $\lambda_0 = \lambda(x_0, y_0)$ ,  $\mu_0 = \mu(x_0, y_0)$ .*

*Demonstração.* Denote  $A_0 = DZ_R(x_0, \beta_0)$  simplesmente por  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Como  $\text{tr}(A_0) = \det(A_0) = 0$  podemos reescrever  $A_0 = \begin{pmatrix} a & b \\ -a^2/b & -a \end{pmatrix}$ . O cálculo dos autovetores e autovetores generalizados fornece

$$\vec{v}_0 = (1, -a/b), \quad \vec{v}_1 = (0, 1/b), \quad \vec{w}_0 = (1, 0), \quad \vec{w}_1 = (a, b).$$

Portanto, considerando o deslocamento de eixos

$$x \mapsto x - x_0, \quad y \mapsto y - y_0$$

para o sistema (4.3), obtemos

$$\begin{aligned} a_{20}(\beta_0) &= \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \langle Z_R(y_1 \vec{v}_0 + y_2 \vec{v}_1, \beta_0), \vec{w}_0 \rangle \Big|_{x_0} \\ &= \frac{(y_0 + \hat{y}_0)^2 (3y_0 + 3y_0^3 + 2\hat{y}_0 + 3y_0^2 \hat{y}_0) \alpha}{(\hat{y}_0 (1 + 3y_0^2 + 2y_0^4 + 2y_0 \hat{y}_0 + 2y_0^3 \hat{y}_0 - 2\hat{y}_0 \alpha))^2}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} b_{11}(\beta_0) &= \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} \langle Z_R(y_1 \vec{v}_0 + y_2 \vec{v}_1, \beta_0), \vec{w}_1 \rangle \Big|_{x_0} \\ &= \frac{B_1 + \hat{y}_0 B_2}{\hat{y}_0 (1 + 3y_0^2 + 2y_0^4 + 2y_0 \hat{y}_0 + 2y_0^3 \hat{y}_0 - 2\hat{y}_0 \alpha)^2}, \end{aligned}$$

onde  $\hat{y}_0 = \sqrt{1 + y_0^2}$ ,  $x_0 = (x_0, y_0)$  e

$$B_1 = -15y_0^2 - 75y_0^4 - 108y_0^6 - 48y_0^8 - 7y_0\alpha + 5y_0^3\alpha + 12y_0^5\alpha + 6\alpha^2,$$

$$B_2 = -3y_0 - 39y_0^3 - 84y_0^5 - 48y_0^7 - 5\alpha - y_0^2\alpha + 12y_0^4\alpha.$$

Assim, obtemos a condição genérica de Bogdanov-Takens (BT.1)

$$a_{20}(\beta_0) + b_{11}(\beta_0) = -3 \frac{N_1 + N_2}{(y_0^2 + 1)^{3/2} (-4\alpha^2 + 8\alpha(y_0^2 + 1)y_0 + y_0^2 + 1)},$$

onde

$$N_1 = \hat{y}_0(y_0 + y_0^3 + \alpha + 8y_0^2\alpha + 8y_0^4\alpha),$$

$$N_2 = y_0^2 + y_0^4 + 8y_0^3\alpha + 8y_0^5\alpha + 2\alpha^2.$$

Suponha que  $N_1 + N_2 = 0$ . Então,  $N_1 = -N_2$ , e aplicando quadrados em ambos os lados obtemos a equação polinomial  $G(y_0, \alpha) = 0$ , sendo  $G$  o polinômio de grau 8 na variável  $y$ :

$$\begin{aligned} G(y, \alpha) &= y^2 + 2y^4 + y^6 + 2y\alpha + 20y^3\alpha + 34y^5\alpha + 16y^7\alpha \\ &\quad + \alpha^2 + 13y^2\alpha^2 + 92y^4\alpha^2 + 144y^6\alpha^2 + 64y^8\alpha^2 \\ &\quad - 32y^3\alpha^3 - 32y^5\alpha^3 - 4\alpha^4. \end{aligned}$$

Assim, juntamente com o polinômio  $P(y, \alpha) = 40\alpha y^5 + 5y^4 + 102\alpha y^3 + (14 - 16\alpha^2)y^2 + 62\alpha y + (9 - 25\alpha^2)$  da Proposição 4.1, o sistema

$$\begin{cases} G(y_0, \alpha) = 0 \\ P(y_0, \alpha) = 0 \end{cases}$$

tem solução. Como  $y_0$  é raiz simultânea dos polinômios  $P$  e  $G$ , então a resultante  $Res(G, P)_{y_0}(\alpha) = -32768\alpha^{14}(9+512\alpha^2)(245+16\alpha^2(199+688\alpha^2+256\alpha^4))(-1125+16\alpha^2(-130+1279\alpha^2+14656\alpha^4+256\alpha^6))$  é nula. Mas,  $Res(G, P)_{y_0}(\alpha) = R_1(\alpha)$ , dada por (4.4), contradizendo a hipótese inicial. Isto conclui-se a prova do Lema 4.1.  $\square$

**Lema 4.2** *Considere  $Z_R$  a família de campos de vetores regularizados dada por (4.3) onde  $\alpha > 0$  não é raiz do polinômio  $R_2$ , com  $R_2$  dado em (4.4). Então, a condição genérica de Bogdanov-Takens (BT.2) é satisfeita em  $\lambda_0 = \lambda(x_0, y_0)$ ,  $\mu_0 = \mu(x_0, y_0)$ .*

*Demonstração.* Analogamente ao Lema 4.1, calculamos

$$\begin{aligned} b_{20}(\beta_0) &= \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \langle Z_R(y_1 \vec{v}_0 + y_2 \vec{v}_1, \beta_0), \vec{w}_1 \rangle \Big|_{x_0} \\ &= \frac{M_0 + M_1 \hat{y}_0 + M_2 \hat{y}_0^2}{2\hat{y}_0(1 + 3y_0^2 + 2y_0^4 + 2y_0 Y_0 + 2y_0^3 Y_0 - 2Y_0 \alpha)^2}, \end{aligned}$$

onde  $\hat{y}_0 = \sqrt{1 + y_0^2}$ ,  $x_0 = (x_0, y_0)$  e

$$M_0 = y_0(-2 - 3y_0^2 + 43y_0^4 + 92y_0^6 + 48y_0^8 + 21y_0\alpha + 9y_0^3\alpha - 12y_0^5\alpha - 12\alpha^2),$$

$$M_1 = -2 - 8y_0^2 + 58y_0^4 + 160y_0^6 + 96y_0^8 + 33y_0\alpha + 24y_0^3\alpha - 24y_0^5\alpha - 12\alpha^2,$$

$$M_2 = -5y_0 + 15y_0^3 + 68y_0^5 + 48y_0^7 + 12\alpha + 15y_0^2\alpha - 12y_0^4\alpha.$$

Supondo  $M_0 + M_1 \hat{y}_0 + M_2 \hat{y}_0^2 = 0$  e manipulando essa equação, obtemos  $H(y_0, \alpha) = 0$ , onde  $H$  é o polinômio:

$$\begin{aligned} H(y, \alpha) &= 4 - 13y^2 - 38y^4 - 21y^6 + 36y\alpha - 252y^3\alpha - 612y^5\alpha \\ &\quad - 324y^7\alpha - 96\alpha^2 + 9y^2\alpha^2 - 951y^4\alpha^2 - 2208y^6\alpha^2 - 1152y^8\alpha^2 \\ &\quad - 504y\alpha^3 - 216y^3\alpha^3 + 288y^5\alpha^3 + 144\alpha^4 \end{aligned}$$

Portanto,  $Res(H, P)_{y_0}(\alpha) = -2592\alpha^{10}(361 + 129074\alpha^2 + 7793725\alpha^4 + 191102976\alpha^6) (-33768075 - 194462570\alpha^2 + 7722010973\alpha^4 + 113346222160\alpha^6 + 537224695680\alpha^8 + 883362299904\alpha^{10} + 154241335296\alpha^{12} + 14495514624\alpha^{14}) = 0$ .

Mas,  $Res(H, P)_{y_0}(\alpha) = R_2(\alpha)$ , dado por (4.4), contradizendo a hipótese inicial. Portanto,  $b_{20}(\beta_0) \neq 0$ .  $\square$

**Lema 4.3** *Considere  $Z_R$  a família de campos de vetores regularizados dada por (4.3) onde  $\alpha > 0$  não é raiz do polinômio  $R_3$ , com  $R_3$  dado em (4.4). Então, a condição genérica de Bogdanov-Takens (BT.3) é satisfeita em  $\lambda_0 = \lambda(x_0, y_0)$ ,  $\mu_0 = \mu(x_0, y_0)$ .*

*Demonstração.* De fato, a aplicação em  $\mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned} T(x, y, \lambda, \mu) &= (T_1, T_2, T_3, T_4) \\ &= (Z_1(x, \beta), Z_2(x, \beta), \text{tr}(DZ_R(x, \beta)), \det(DZ_R(x, \beta))) \end{aligned}$$

tem matriz Jacobiana

$$DT(x, y, \lambda, \mu) = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x} & \frac{\partial T_1}{\partial y} & \frac{\partial T_1}{\partial \lambda} & \frac{\partial T_1}{\partial \mu} \\ \frac{\partial T_2}{\partial x} & \frac{\partial T_2}{\partial y} & \frac{\partial T_2}{\partial \lambda} & \frac{\partial T_2}{\partial \mu} \\ \frac{\partial T_3}{\partial x} & \frac{\partial T_3}{\partial y} & \frac{\partial T_3}{\partial \lambda} & \frac{\partial T_3}{\partial \mu} \\ \frac{\partial T_4}{\partial x} & \frac{\partial T_4}{\partial y} & \frac{\partial T_4}{\partial \lambda} & \frac{\partial T_4}{\partial \mu} \end{pmatrix},$$

cujo determinante é

$$\det(JT(x_0, \beta_0)) = \frac{(5Y_0 + 2\alpha + y_0(9 + 9y_0^2 + 9y_0Y_0 + 11y_0\alpha + 13Y_0\alpha))}{(2Y_0^9)}.$$

Assim,  $T$  é regular em  $(x_0, \beta_0)$  se o determinante da parte linear é não nulo. Supondo  $\det(JT(x_0, \beta_0)) = 0$  e manipulando essa equação, obtemos  $K(y_0, \alpha) = 0$ , onde  $K$  é o polinômio

$$K(y, \alpha) = 25 + 34y^2 + 9y^4 + 94y\alpha + 130y^3\alpha + 36y^5\alpha - 4\alpha^2 + 125y^2\alpha^2 + 48y^4\alpha^2.$$

Logo,  $\text{Res}(K, P)_{y_0}(\alpha) = 324\alpha^5(16 + 5816\alpha^2 + 393649\alpha^4 + 8847360\alpha^6)(2178000 + 13491800\alpha^2 + 26866125\alpha^4 + 32019984\alpha^6 + 682112\alpha^8) = 0$ . Mas,  $\text{Res}(K, P)_{y_0}(\alpha) = R_3(\alpha)$ , dado em (4.4), contradizendo a hipótese inicial. Portanto,  $T(x, y, \lambda, \mu)$  é regular em  $(x_0, \beta_0)$ .  $\square$

Os lemas anteriores não são uma grande restrição para que o campo de vetores (4.3) satisfaça os itens (BT.1), (BT.2) e (BT.3) do Teorema 4.1, pois todos os campos de vetores (4.3) tais que  $\alpha > 0$  e  $\alpha \notin S$  admitem uma bifurcação de Bogdanov-Takens, onde  $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$  e



---

$S_k = \{t : R_k(t) = 0\}$  para  $k = 1, 2, 3$ . Observe que  $S$  é um subconjunto finito de  $\mathbb{R}$ . Está provado, assim, o Teorema 4.2 e, portanto, o Teorema B no caso em que a regularização do tipo transição é dada pela função  $\varphi(x) = 1/2 + x/(2\sqrt{x^2 + 1})$ .

---

# Estudo de Singularidades via Regularização

## Sotomayor-Teixeira

---

Nos Capítulos 2, 3 e 4 utilizamos uma regularização do tipo transição generalizada, dada pela função  $\varphi(x) = 1/2 + x/(2\sqrt{x^2 + 1})$ . Neste capítulo nos dedicamos a dar uma demonstração dos Teoremas A e B para o caso em que a regularização é do tipo Sotomayor-Teixeira, dada por uma função de transição  $\varphi$  arbitrária. Naturalmente a demonstração segue as mesmas ideias usadas nos Capítulos 2, 3 e 4. Por esse motivo faremos as demonstrações apenas apontando eventuais diferenças.

### 5.1 Colisões de Pseudo-Equilíbrios

Seja  $Z_\lambda = (X_\lambda, Y_\lambda)$  a forma normal topológica para a *bifurcação pseudo-sela-nó* (2.1) introduzida no Capítulo 2, isto é,  $X_\lambda = (0, -\alpha)$  e  $Y_\lambda = (\lambda + x^2, \alpha)$ , com  $\alpha > 0$ . Considere  $\varepsilon > 0$  e  $\varphi(\cdot/\varepsilon) = \varphi_\varepsilon(\cdot)$  uma função de transição arbitrária. Assim, a família de campos regularizados associada é dada por

$$Z_{\lambda,\varepsilon}(x, y) = ((1 - \varphi_\varepsilon(y)(\lambda + x^2), \alpha(1 - 2\varphi_\varepsilon(y))). \quad (5.1)$$

Podemos considerar a família de campos regularizados (5.1) e em seguida efetuar a mudança de variáveis e reescalonamento de parâmetros  $x = \bar{x}$ ,  $y = \varepsilon\bar{y}$ ,  $\lambda = \bar{\lambda}$ ,  $\alpha = \varepsilon\bar{\alpha}$  para eliminar o

parâmetro  $\varepsilon$  da expressão e obter

$$Z_R(x, y) = ((1 - \varphi(y))(\lambda + x^2), \alpha(1 - 2\varphi(y))). \quad (5.2)$$

A próxima proposição prova o item *a*) do Teorema A para  $\varphi$  uma função de transição arbitrária.

**Proposição 5.1** *Seja  $Z_\lambda = (X_\lambda, Y_\lambda)$  uma família de campos vetoriais descontínuos dada por (2.1). Então, dada uma função de transição  $\varphi$ , a família de campos regularizados associada (5.2) admite uma bifurcação do tipo sela-nó no ponto de equilíbrio  $p_0 = (0, \varphi^{-1}(1/2))$  para o valor de bifurcação  $\lambda_0 = 0$ .*

*Demonstração.* Seja  $Z_\lambda = (X_\lambda, Y_\lambda)$  a família de campos descontínuos dada por (2.1), com respectiva família de campos regularizados  $Z_R$  indicada em (5.2). Sabemos que  $\varphi'(y) > 0$  no intervalo  $(-1, 1)$ . Logo, pelo Teorema da Função Inversa,  $\varphi$  possui inversa  $\varphi^{-1}$  em  $(-1, 1)$ . Observamos que se  $(x, y)$  é um ponto de equilíbrio de  $Z_R$  então  $y \in (-1, 1)$ . Os pontos de equilíbrio de  $Z_R$  são dados por  $Z_R(x, y) = (0, 0)$ . Como  $\alpha > 0$  e  $\varphi(y) \neq 1$  para todo  $y \in (-1, 1)$  então as singularidades da família de campos regularizados  $Z_R$  são da forma  $(\pm\sqrt{-\lambda}, \varphi^{-1}(1/2))$ . Os valores do parâmetro  $\lambda$  são considerados em uma vizinhança de zero. Assim, existem valores de parâmetros para os quais a família de campos regularizados,  $Z_R$ , possui uma, duas ou nenhuma singularidade. Seja  $A = DZ_R$  a matriz Jacobiana de  $Z_R$ ,

$$A = \begin{pmatrix} (1 - \varphi(y))2x & -(x^2 + \lambda)\varphi'(y) \\ 0 & -2\alpha\varphi'(y) \end{pmatrix}.$$

Como  $\alpha > 0$  e  $\varphi'(y) > 0$  em  $(-1, 1)$  então, em  $p_0 = (0, \varphi^{-1}(1/2))$  com  $\lambda_0 = 0$ , a matriz Jacobiana  $A(p_0, \lambda_0)$  tem um único autovalor nulo com autovetores à direita e à esquerda  $\vec{v} = \vec{w} = (1, 0)$ . Além disso,

$$\frac{\partial Z_R}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = (1 - \varphi(y), 0),$$

de modo que  $\frac{\partial Z_R}{\partial \lambda}(p_0, \lambda_0) = (\frac{1}{2}, 0)$ . Multiplicando escalarmente por  $\vec{w}$ , resulta em

$$\left\langle \vec{w}, \frac{\partial Z_R}{\partial \lambda}(p_0, \lambda_0) \right\rangle = \frac{1}{2}.$$

Agora, resta verificar que o produto escalar  $\langle \vec{w}, D_x^2 Z_R(p_0, \lambda_0)(\vec{v}, \vec{v}) \rangle$  é não-nulo, onde

$$D_x^2 Z_R(x, y, \lambda)(\vec{v}, \vec{v}) = \left( \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 Z_{R_1}}{\partial x_i \partial x_j}(x_i, x_j, \lambda) v_j v_i, \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 Z_{R_2}}{\partial x_i \partial x_j}(x_i, x_j, \lambda) v_j v_i \right),$$

com  $(x, y) = (x_1, x_2)$ . Efetuando os cálculos obtemos  $D_x^2 Z_R(x, y, \lambda)(\vec{v}, \vec{v}) = (2(1 - \varphi(y)), 0)$ .

Logo,

$$\langle \vec{w}, D_x^2 Z_R(p_0, \lambda_0)(\vec{v}, \vec{v}) \rangle = \langle (1, 0), (2(1 - \varphi(\varphi^{-1}(1/2))), 0) \rangle = 1.$$

Assim, as hipóteses  $(SN_1)$ ,  $(SN_2)$  e  $(SN_3)$  do Teorema 2.1 estão verificadas.  $\square$

## 5.2 Colisões de Pontos de Tangência Quadrática

### 5.2.1 Tangência Dupla

Considere agora a forma normal topológica  $Z_\lambda = (X_\lambda, Y_\lambda)$  para o subcaso DT1 da *colisão de tangência dupla* (3.1) listada na Seção 3.2, isto é,  $X_\lambda = (0, -\alpha)$  e  $Y_\lambda = (\alpha, -(\lambda + \beta x^2))$ , com  $\alpha, \beta > 0$ . Dados  $\varepsilon > 0$  e  $\varphi(\cdot/\varepsilon) = \varphi_\varepsilon(\cdot)$  uma função de transição arbitrária, podemos prosseguir com o procedimento padrão de efetuar a mudança de variáveis e reescalonamento de parâmetros  $x = \varepsilon \bar{x}$ ,  $y = \varepsilon \bar{y}$ ,  $\lambda = \varepsilon \bar{\lambda}$ ,  $\alpha = \varepsilon \bar{\alpha}$ ,  $\beta = \bar{\beta}/\varepsilon$  na família de campos regularizados  $Z_{\lambda, \varepsilon}$ , para trabalhar com a família de campos regularizados

$$Z_R(x, y) = (\alpha(1 - \varphi(y)), (\lambda + \beta x^2)(\varphi(y) - 1) - \alpha\varphi(y)). \quad (5.3)$$

É fácil ver que a família de campos regularizados (5.3) não possui pontos de equilíbrio, uma vez que  $Z_{R_1} = \alpha(1 - \varphi(y)) > 0$  para todo  $y \in (-1, 1)$ . Assim, em cada um de seus pontos regulares, e qualquer que seja o valor do parâmetro  $\lambda$ , o campo  $Z_R$  é  $C^r$ -conjugado ao campo constante  $W(x, y) = (1, 0)$ . Analogamente, obtemos a mesma conclusão considerando o subcaso DT2. Assim, obtemos o seguinte resultado que prova o item b1) do Teorema A para o caso DT, em que  $\varphi$  é uma função de transição arbitrária.

**Proposição 5.2** *Seja  $Z_\lambda = (X_\lambda, Y_\lambda)$  uma família de campos vetoriais descontínuos dada por (3.1). Então, dada uma função de transição  $\varphi$ , o campo de vetores regularizado associado (5.3) é estruturalmente estável.*

### 5.2.2 Duas Tangências Visíveis

Voltemos a forma normal topológica  $Z_\lambda = (X_\lambda, Y_\lambda)$  para a bifurcação VV1 correspondente à *colisão de duas tangências visíveis* (3.3) indicada na Seção 3.3, isto é,  $X_\lambda = (\alpha - x, x)$  e  $Y_\lambda = (\alpha, -(\lambda + x))$ , com  $\alpha > 0$ . Dado  $\varepsilon > 0$  e considerando uma função de transição arbitrária  $\varphi$  obtemos, após efetuar a mudança de variáveis e reescalonamento de parâmetros  $\bar{x} = \varepsilon x$ ,  $\bar{y} = \varepsilon y$ ,  $\bar{\lambda} = \varepsilon \lambda$ ,  $\bar{\alpha} = \varepsilon \alpha$ , o campo de vetores regularizado

$$Z_R(x, y) = (\alpha - x\varphi(y), -(x + \lambda) + (2x + \lambda)\varphi(y)). \quad (5.4)$$

As singularidades do campo vetorial regularizado  $Z_R$  são os pontos  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , com  $y \in (-1, 1)$ , satisfazendo o par de equações

$$x = \frac{\alpha}{\varphi(y)} \quad \text{e} \quad \lambda = \frac{\alpha(2\varphi(y) - 1)}{\varphi(y)(1 - \varphi(y))}. \quad (5.5)$$

Note que as expressões (5.5) estão bem definidas para  $y$  no intervalo  $(-1, 1)$ . Considere no plano  $(y, \lambda)$  a curva  $\lambda = \lambda(y)$  dada pela segunda equação em (5.5), e também considere a curva  $\det_S(DZ_R)(y)$  dada pela substituição dos valores de  $x$  e  $\lambda$  na expressão do determinante da matriz Jacobiana de  $Z_R$ , isto é

$$\det_S(DZ_R)(y) = \frac{\alpha\varphi'(y)(1 - 2\varphi(y) + 2\varphi(y)^2)}{\varphi(y)(\varphi(y) - 1)}.$$

Sabemos que  $\alpha > 0$  e  $\varphi'(y) > 0$  para  $y \in (-1, 1)$ . Além disso, como  $0 < \varphi(y) < 1$ , temos também  $1 - 2\varphi(y) + 2\varphi(y)^2 > 0$  e  $\varphi(y) - 1 < 0$  para  $y \in (-1, 1)$ . Portanto,

$$\det_S(DZ_R)(y) < 0$$

para todo  $y \in (-1, 1)$ . No plano  $(y, \lambda)$  a curva  $\lambda(y)$  é o gráfico de uma função estritamente crescente, uma vez que

$$\frac{d\lambda}{dy} = \frac{\det_S(DZ_R)(y)}{\varphi(y)(\varphi(y) - 1)} > 0,$$

para todo  $y \in (-1, 1)$ . Logo, cada valor do parâmetro  $\lambda$  está associado a uma, e apenas uma, singularidade do campo vetorial regularizado (5.5). Dessa forma, observamos que no caso VV1 há o nascimento de pontos de equilíbrio (do tipo sela) para a família de campos

regularizados  $Z_R$ . No entanto, não ocorre bifurcação na família  $Z_R$  sob a variação do parâmetro  $\lambda$ . Novamente, o que ocorre é apenas o deslocamento de um ponto de sela. Procedendo de maneira análoga, obtemos a mesma conclusão para o subcaso VV2. Isto prova a seguinte proposição e, conseqüentemente, o item b1) do Teorema A para o caso VV, em que  $\varphi$  é uma função de transição arbitrária.

**Proposição 5.3** *Seja  $Z_\lambda = (X_\lambda, Y_\lambda)$  uma família de campos vetoriais descontínuos dada por (3.3). Então, dada uma função de transição  $\varphi$ , a família de campos regularizados associada (5.4) é estruturalmente estável.*

### 5.2.3 Tangência Visível versus Tangência Invisível

#### Bifurcação VI1

Seja  $Z_\lambda = (X_\lambda, Y_\lambda)$  a forma normal topológica para bifurcação VI1 correspondente à *colisão de tangência visível com tangência invisível* (3.6) indicada na Seção 3.4, isto é,  $X_\lambda = (\alpha - x, 2x)$  e  $Y_\lambda = (\alpha - x, \lambda + x)$ , com  $\alpha > 0$ . Dados  $\varepsilon > 0$  e  $\varphi(\cdot/\varepsilon) = \varphi_\varepsilon(\cdot)$  uma função de transição arbitrária, a família de campos regularizados é dada por  $Z_{\lambda,\varepsilon}(x, y) = (\alpha - x, x + \lambda + (x - \lambda)\varphi_\varepsilon(y))$ , a qual se escreve como

$$Z_R(x, y) = (\alpha - x, x + \lambda + (x - \lambda)\varphi(y)), \quad (5.6)$$

após efetuar a mudança de variáveis e reescalonamento de parâmetros:  $x = \varepsilon\bar{x}$ ,  $y = \varepsilon\bar{y}$ ,  $\lambda = \varepsilon\bar{\lambda}$ ,  $\alpha = \varepsilon\bar{\alpha}$ . As singularidades da família de campos regularizados (5.6) são os pares ordenados  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , com  $y \in (-1, 1)$ , dados pelas soluções do sistema

$$\begin{cases} \bar{\alpha} - \bar{x} & = 0, \\ \bar{x} + \bar{\lambda} + (\bar{x} - \bar{\lambda})\varphi(\bar{y}) & = 0, \end{cases}$$

Suponha  $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$  um ponto de equilíbrio de (5.6). Substituindo  $\bar{x}_0 = \bar{\alpha}$  na segunda equação do sistema acima obtemos

$$\varphi(\bar{y}_0) = -\frac{\bar{\alpha} + \bar{\lambda}}{\bar{\alpha} - \bar{\lambda}} = -\frac{(1/\varepsilon)\alpha + (1/\varepsilon)\lambda}{(1/\varepsilon)\alpha - (1/\varepsilon)\lambda} = -\frac{\alpha + \lambda}{\alpha - \lambda}.$$

Como  $\alpha > 0$  está fixado e o parâmetro  $\lambda$  é tomado numa vizinhança da origem, então  $\varphi(\bar{y}_0) = -1$  para  $\lambda$  suficientemente pequeno. Uma contradição por  $\varphi$  ser função de transição. Assim, a família de campos regularizados,  $Z_R$ , não possui singularidades. Logo, em cada um de seus pontos regulares, e qualquer que seja o valor do parâmetro  $\lambda$ , o campo  $Z_R$  é  $C^r$ -conjugado ao campo constante  $W(x, y) = (1, 0)$ . Está provado, portanto, o seguinte resultado.

**Proposição 5.4** *Seja  $Z_\lambda = (X_\lambda, Y_\lambda)$  uma família de campos vetoriais descontínuos dada por (3.6). Então, dada uma função de transição  $\varphi$ , a família de campos regularizados associada (5.6) é estruturalmente estável.*

A proposição anterior conclui a prova do item b1) do Teorema A.

## Bifurcação VI2

Considere agora a forma normal topológica para a bifurcação VI2 correspondente à *colisão de tangência visível com tangência invisível* (3.8) da Seção 3.4 dada por  $Z_\lambda = (X_\lambda, Y_\lambda)$ , com  $X_\lambda = (\alpha - x, 2x)$ ,  $Y_\lambda = (-(\alpha + x), -(\lambda + x))$  e  $\alpha > 0$ . Dada uma função de transição arbitrária  $\varphi$  e considerando as mesmas mudanças de variáveis e reescalonamento de parâmetros utilizados no subcaso VII, obtemos o campo de vetores regularizado

$$Z_R(x, y) = \left( -(\alpha + x) + 2\alpha\varphi(y), -(\lambda + x) + (3x + \lambda)\varphi(y) \right). \quad (5.7)$$

Provaremos a seguir que a família de campos regularizados (5.7) admite uma bifurcação do tipo sela-nó. A estrutura das demonstrações é semelhante aquela utilizada na Seção 3.4, onde provamos este mesmo resultado mas para uma função de transição particular. Dessa forma, precisamos primeiro do seguinte lema.

**Lema 5.1** *Existem valores de parâmetro  $\lambda$  para os quais a família de campos regularizados  $Z_R$  dada em (5.7) possui duas, uma ou nenhuma singularidade.*

*Demonstração.* As seguintes expressões fornecem os valores de  $x$  e  $\lambda$  das singularidades da família de campos regularizados  $Z_R$

$$\begin{aligned} x(y) &= \alpha(2\varphi(y) - 1), \\ \lambda(y) &= \frac{\alpha(-6\varphi(y)^2 + 5\varphi(y) - 1)}{\varphi(y) - 1}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

No plano  $(y, \lambda)$  a curva regular  $\lambda(y)$  satisfaz

$$\lambda(\varphi^{-1}(1/3)) = 0 = \lambda(\varphi^{-1}(1/2)).$$

Assim, o Teorema de Rolle garante a existência de um ponto  $y^*$  no intervalo  $(\varphi^{-1}(1/3), \varphi^{-1}(1/2))$  onde  $\lambda'(y^*) = 0$ . A derivada de  $\lambda(y)$  em função de  $y$  é dada por

$$\lambda'(y) = -\frac{2\alpha(2 - 6\varphi(y) + 3\varphi(y)^2)\varphi'(y)}{(\varphi(y) - 1)^2},$$

que está bem definida no intervalo  $(-1, 1)$ . Como  $\alpha > 0$ ,  $\varphi'(y) > 0$  e  $0 < \varphi(y) < 1$ , então é único o ponto crítico

$$y^* = \varphi^{-1}\left(\frac{1}{3}(3 - \sqrt{3})\right).$$

Note que  $\varphi^{-1}(1/3) < y^* < \varphi^{-1}(1/2)$ . Além disso,

$$\lim_{y \rightarrow 1} \lambda(y) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{y \rightarrow -1} \lambda(y) = \alpha > 0.$$

A segunda derivada de  $\lambda(y)$  é dada por

$$\lambda''(y) = \frac{-4\alpha\varphi'(y)^2 + 2\alpha(2 + \varphi(y)(-8 - 3(-3 + \varphi(y))\varphi(y)))\varphi''(y)}{(\varphi(y) - 1)^3}.$$

Como  $\lambda''(y^*) = 12\sqrt{3}\alpha\varphi'(y^*)^2 > 0$ , concluímos que  $y^*$  é um ponto de mínimo global, e existe um único valor crítico do parâmetro  $\lambda$ , definido por  $\lambda^* = \lambda(y^*)$ .  $\square$

Considere  $x^* = x(y^*) = \alpha(1 - 2/\sqrt{3})$  dado pela substituição de  $y$  por  $y^*$  na expressão de  $x$  dada por (5.8). A próxima proposição prova o item b2) do Teorema A para uma função de transição arbitrária  $\varphi$ .

**Proposição 5.5** *Seja  $Z_\lambda = (X_\lambda, Y_\lambda)$  uma família de campos vetoriais descontínuos dada por (3.8). Então, dada uma função de transição  $\varphi$ , a família de campos regularizados associada (5.7) admite uma bifurcação do tipo sela-nó em  $(x^*, y^*)$  para  $\lambda = \lambda^*$ .*

*Demonstração.* Denotando por  $A = (a_{ij})$ ,  $1 \leq i, j \leq 2$ , a matriz Jacobiana  $DZ_R$  do campo



vetorial descontínuo (5.7), os autovalores da matriz  $A^* = DZ_R(x^*, y^*, \lambda^*)$  são dados por

$$\delta_0 = 0 \quad \text{e} \quad \delta_1 = -1 + 2(-2 + \sqrt{3})\alpha\varphi'(\varphi^{-1}(y^*)).$$

Logo, a matriz Jacobiana  $A^*$  tem um único autovalor  $\delta_0$  nulo. Os autovetores à direita e à esquerda associados ao autovalor  $\delta_0$  são

$$\vec{v} = \left( 1, \frac{1}{2\alpha\varphi'(\varphi^{-1}(y^*))} \right) \quad \text{e} \quad \vec{w} = \left( 1, \frac{1}{\sqrt{3}-2} \right).$$

Isto completa a verificação da hipótese  $(SN_1)$  do Teorema 2.1. Para as hipóteses  $(SN_2)$  e  $(SN_3)$  temos

$$\begin{aligned} \langle \vec{w}, \frac{\partial Z_R}{\partial \lambda}(x^*, y^*, \lambda^*) \rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)} \neq 0, \\ \langle \vec{w}, D_x^2 Z_R(x^*, y^*, \lambda^*)(\vec{v}, \vec{v}) \rangle &= \frac{3(2+\sqrt{3})}{\alpha} \neq 0, \end{aligned}$$

respectivamente, que finaliza a demonstração.  $\square$

### Bifurcação VI3

Seja  $Z_\lambda = (X_\lambda, Y_\lambda)$  a forma normal topológica para a bifurcação VI3 correspondente à *colisão de tangência visível com tangência invisível* (3.13) da Seção 3.4, isto é,  $X_\lambda = (\alpha - x, x)$ ,  $Y_\lambda = (-\alpha + x, -(\lambda + 2x))$ , com  $\alpha > 0$ . Dada uma função de transição arbitrária  $\varphi$  e considerando as mesmas mudanças de variáveis e reescalonamento de parâmetros utilizados nos subcasos VII e VI2, obtemos o campo de vetores regularizado

$$Z_R(x, y) = ((\alpha - x)(2\varphi(y) - 1), -(2x + \lambda) + (3x + \lambda)\varphi(y)). \quad (5.9)$$

Como  $\varphi$  é uma função inversível em  $(-1, 1)$ , estão bem definidas as singularidades da família de campos regularizados (5.9)

$$p_0 = (-\lambda, \varphi^{-1}(1/2)) \quad \text{e} \quad q_0 = \left( \alpha, \varphi^{-1}\left(\frac{2\alpha + \lambda}{3\alpha + \lambda}\right) \right).$$

Como  $\alpha > 0$  está fixado e nosso estudo é local vamos avaliar apenas o comportamento da singularidade  $p_0$  sob a variação do parâmetro  $\lambda$ . Seja  $A = (a_{ij})$ ,  $1 \leq i, j \leq 2$ , a matriz

Jacobiana  $DZ_R(x, y)$ , que no ponto  $p_0$  se escreve

$$A(p_0) = \begin{pmatrix} 0 & 2(\alpha + \lambda)\varphi'(\varphi^{-1}(1/2)) \\ -\frac{1}{2} & -2\lambda\varphi'(\varphi^{-1}(1/2)) \end{pmatrix}.$$

Logo, existe um único valor do parâmetro,  $\lambda = 0$ , onde  $\text{tr}(A(p_0)) = 0$  e  $\det(A(p_0)) > 0$ . E, neste caso,  $p_0 = (0, \varphi^{-1}(1/2))$ . Seja  $A_0 = A(p_0)$  a matriz Jacobiana da família de campos de vetores (5.9) avaliada em  $p_0$  para  $\lambda = 0$ . Seus autovalores são imaginários puros  $\pm i\sqrt{\alpha\varphi'(\varphi^{-1}(1/2))}$ . Os autovetores associados são  $\vec{v}$  e  $\vec{\bar{v}}$ , onde

$$\vec{v} = (-2i\sqrt{\alpha\varphi'(\varphi^{-1}(1/2))}, 1) = (0, 1) + i(-2\sqrt{\alpha\varphi'(\varphi^{-1}(1/2))}, 0) = \vec{v}_1 + i\vec{v}_2,$$

e  $\vec{\bar{v}}$  é o vetor conjugado a  $\vec{v}$ . Portanto, denotando por  $M$  a matriz cujas colunas são  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$ , acarreta que  $M.A_0.M^{-1}$  está na forma de Jordan. Assim, ao efetuar a mudança de variáveis  $w = Pz$ , onde  $z = (x, y)$  e  $w = (x_1, y_1)$ , a família de campos regularizados (5.9) se escreve

$$\begin{aligned} \dot{w} &= MA_0M^{-1}w + O(|w|^2) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\alpha\varphi'(\varphi^{-1}(1/2))} \\ -\sqrt{\alpha\varphi'(\varphi^{-1}(1/2))} & 0 \end{pmatrix} w + O(|w|^2). \end{aligned} \quad (5.10)$$

O próximo resultado prova o item b3) do Teorema A sem a necessidade de tomar  $\varphi$  a função de transição particular utilizada nos Capítulos 2, 3 e 4.

**Teorema 5.1** *Sejam  $Z_\lambda = (X_\lambda, Y_\lambda)$  uma família de campos vetoriais descontínuos dada por 3.13, com  $\alpha \neq \frac{2}{9}$ , e  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de transição. Se  $\varphi(0) = \varphi'(0) = 1/2$  e  $\varphi^{(k)}(0) = 0$  para  $k \geq 2$ , então a respectiva família de campos regularizados  $Z_R$  admite uma bifurcação de Hopf de codimensão dois.*

*Demonstração.* A prova segue a mesma estrutura utilizada na Seção 3.4 para o subcaso VI3, ou seja, inicialmente fazemos uma mudança para coordenadas polares  $x_1 = r \cos \theta$ ,  $y_1 = r \sin \theta$  no sistema (5.10), e o escrevemos de forma equivalente  $(\dot{r}, \dot{\theta}) = (P(r, \theta), Q(r, \theta))$ . Posteriormente, consideramos uma expansão em série do sistema diferencial

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{P(r, \theta)}{Q(r, \theta)} = R(r, \theta) = R_1(\theta)r + R_2(\theta)r^2 + \dots + R_k(\theta)r^k + \dots$$

para poder obter determinar os coeficientes de Lyapunov  $V_k$ . Veja o procedimento com mais detalhes na Seção 3.4. Utilizando os seguintes comandos em um software para cálculos extensos, como o MATHEMATICA

```
u1 = Exp[Integrate[R1, {θ, 0, Θ}]];
V1 = Simplify[u1-1 /. {Θ → 2Pi}];
u2 = Integrate[R2, {θ, 0, Θ}];
V2 = Simplify[u2 /. {Θ → 2Pi}];
u3 = Integrate[2R2u2+R3, {θ, 0, Θ}];
V3 = Simplify[u3 /. {Θ → 2Pi}];
u4 = Integrate[R2(2u3+(u2)^2)+3R3u2+R4, {θ, 0, Θ}];
V4 = Simplify[u4 /. {Θ → 2Pi}];
u5 = Integrate[R2(2u2u3+u4)+R3(3u3+3(u2)^2)+4R4u2+R5, {θ, 0, Θ}];
V5 = Simplify[u5 /. {Θ → 2Pi}];
```

e considerando a hipótese adicional  $\varphi(0) = \varphi'(0) = 1/2$  e  $\varphi^{(k)}(0) = 0$ ,  $k \geq 2$ , obtemos

$$V_1 = V_2 = V_3 = V_4 = 0, \quad \text{e} \quad V_5 = \frac{\pi(9\alpha - 2)}{64\sqrt{2}\alpha^{7/2}}.$$

Logo, o sistema (5.10) tem um foco de multiplicidade dois na origem. A prova segue utilizando o Teorema 3.25. □

### 5.3 Singularidade Sela-Dobra

Seja  $Z_{\lambda, \mu} = (X_\lambda, Y_\mu)$  a família a dois parâmetros de campos vetoriais descontínuos correspondente ao *desdobramento da singularidade sela-dobra* dado por (4.2) no Capítulo 4, isto é,  $X_\mu = (x + y - \mu, 4x + y)$  e  $Y_\lambda = (\alpha, x - \lambda)$ , onde  $\alpha > 0$  é uma constante fixada e  $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ . Dados  $\varepsilon > 0$  e  $\varphi_\varepsilon$  uma função de transição, podemos efetuar a seguinte mudança de variáveis e reescalonamento de parâmetros  $x = \varepsilon\bar{x}$ ,  $y = \varepsilon\bar{y}$ ,  $\alpha = \varepsilon\bar{\alpha}$ ,  $\lambda = \varepsilon\bar{\lambda}$ ,  $\mu = \varepsilon\bar{\mu}$ , para obter o campo de vetores regularizado

$$Z_R(x, y) = ((1 - \varphi(y))\alpha + \varphi(y)(x + y - \mu), (1 - \varphi(y))(x - \lambda) + \varphi(y)(4x + y)). \quad (5.11)$$

Vamos provar que o campo de vetores regularizado (5.11) com uma função de transição arbitrária também admite uma bifurcação de Bogdanov-Takens. Mas antes, precisaremos do

lema a seguir, que mostra o comportamento de uma função de transição  $\varphi(y)$  numa vizinhança do ponto  $y = -1$ .

**Lema 5.2** *Se  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi(y)$ , é uma função de transição, então  $\lim_{y \rightarrow -1^+} \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} = +\infty$ .*

*Demonstração.* Suponha que exista  $k > 0$  tal que

$$\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} \leq k, \quad \text{para todo } y \in (-1, -1 + \epsilon],$$

onde  $\epsilon > 0$  é dado arbitrariamente. Como  $\varphi(y) > 0$  em  $(-1, -1 + \epsilon]$ , segue que  $\varphi'(y) \leq k\varphi(y)$ . Assim, para cada  $y \in (-1, -1 + \epsilon]$  temos

$$\int_{-1}^y \varphi'(t) dt \leq k \int_{-1}^y \varphi(t) dt.$$

Como  $\varphi(-1) = 0$ , aplicando Teorema Fundamental do Cálculo temos  $\varphi(y) \leq k \int_{-1}^y \varphi(t) dt$ . Agora, como  $\varphi$  é uma função contínua, então pelo Teorema do Valor Médio para Integrais, existe  $\bar{y} \in (-1, y)$  tal que

$$\int_{-1}^y \varphi(t) dt = \varphi(\bar{y})(y + 1).$$

Logo,  $\varphi(y) \leq k\varphi(\bar{y})(y + 1)$ , para todo  $y \in (-1, -1 + \epsilon]$ . Assim, tomando  $y_p$  suficientemente próximo de  $-1$  para que  $k(y_p + 1) < 1$ , pode-se obter  $\bar{y}_p \in (-1, y_p)$  tal que

$$\varphi(y_p) \leq k\varphi(\bar{y}_p)(y_p + 1) < \varphi(\bar{y}_p) \Rightarrow \varphi(y_p) < \varphi(\bar{y}_p),$$

o que contradiz o fato de  $\varphi$  ser crescente no intervalo  $(-1, 1)$ . □

**Proposição 5.6** *Existem um ponto de equilíbrio  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$  do campo de vetores regularizado (5.11) e parâmetros  $\beta_0 = (\lambda_0, \mu_0)$  para os quais  $tr_S(A)(\mathbf{x}_0, \beta_0) = det_S(A)(\mathbf{x}_0, \beta_0) = 0$ , onde  $tr_S(A)$  e  $det_S(A)$  são o traço e o determinante da matriz Jacobiana de (5.11) em  $(\mathbf{x}_0, \beta_0)$ .*

*Demonstração.* Um ponto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  é um ponto de equilíbrio do campo de vetores regularizado (5.11) se satisfazer o par de equações

$$\begin{aligned} (1 - \varphi(y))\alpha + \varphi(y)(x + y - \mu) &= 0, \\ (1 - \varphi(y))(x - \lambda) + \varphi(y)(4x + y) &= 0. \end{aligned}$$

ou ainda, se valer que

$$\varphi(y) = \frac{\alpha}{\alpha - x - y + \mu} = \frac{\lambda - x}{3x + y + \lambda}. \quad (5.12)$$

Além disso,  $y$  deve pertencer ao intervalo  $(-1, 1)$ .

Denotando a matriz Jacobiana  $DZ_R = A = (a_{ij})$ ,  $1 \leq i, j \leq 2$ , temos

$$\begin{aligned} a_{11} &= \varphi(y), & a_{12} &= \varphi(y) + \varphi'(y)(x + y - \alpha - \mu), \\ a_{21} &= 1 + 3\varphi(y), & a_{22} &= \varphi(y) + \varphi'(y)(3x + y + \lambda), \end{aligned}$$

para a qual

$$\text{tr}(A) = 2\varphi(y) + \varphi'(y)(3x + y + \lambda),$$

$$\det(A) = \varphi(y)(\varphi'(y)(3x + y + \lambda) + \varphi(y)) - (1 + 3\varphi(y))(\varphi(y) + \varphi'(y)(x + y - \alpha - \mu)).$$

Das igualdades em (5.12) obtemos as expressões

$$\begin{aligned} x &= x(y, \mu) = \frac{\alpha(\varphi(y) - 1) + \varphi(y)(\mu - y)}{\varphi(y)}, \\ \lambda &= \lambda(y, \mu) = \frac{(3\varphi(y) + 1)(\alpha(\varphi(y) - 1) + \varphi(y)(\mu - y) + \varphi(y)^2 y)}{\varphi(y)(1 - \varphi(y))}, \end{aligned}$$

que estão bem definidas para  $y \in (-1, 1)$ . Substituindo  $x = x(y, \mu)$  e  $\lambda = \lambda(y, \mu)$  na expressão do traço da matriz Jacobiana de  $Z_R$  temos

$$\text{tr}_S(A)(y, \mu) = \frac{2(\varphi(y) - 1)\varphi(y)^2 + \varphi'(y)(-4\alpha(\varphi(y) - 1) + \varphi(y)(-4\mu - \varphi(y) + y(3 + \varphi(y))))}{\varphi(y)(\varphi(y) - 1)}.$$

A equação  $\text{tr}_S(A)(y, \mu) = 0$  permite obter o parâmetro  $\mu$  em função de  $y$

$$\mu = \mu(y) = \frac{2(\varphi(y) - 1)\varphi(y)^2 + \varphi'(y)(-4\alpha(\varphi(y) - 1) + \varphi(y)(y(3 + \varphi(y)) - \varphi(y)))}{4\varphi(y)\varphi'(y)}.$$

Assim, substituindo  $x = x(y, \mu)$ ,  $\lambda = \lambda(y, \mu)$  e depois  $\mu = \mu(y)$  na expressão do determinante da matriz Jacobiana de  $Z_R$  vem

$$\det_S(A)(y) = \frac{\varphi'(y)(\alpha(1 + 3\varphi(y)) + \varphi(y)^2(4 + y(1 - \varphi(y)) + \varphi(y)))}{\varphi(y)} - \varphi(y)(1 + 2\varphi(y) + 2\varphi(y)^2).$$

Como  $\varphi(1) = 1$  e  $\varphi'(1) = 0$  segue que  $\det_S(A)(1) = -5 < 0$ . Além disso, quando  $y$  tende a  $-1$ , a

função de transição  $\varphi(y)$  tende a zero. Consequentemente,  $\lim_{y \rightarrow -1^+} \det_S(A)(y) = \alpha \lim_{y \rightarrow -1^+} \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}$ . Como  $\alpha$  é positivo, pelo Lema 5.2 obtemos então  $\lim_{y \rightarrow -1^+} \det_S(A)(y) = +\infty$ . Portanto, pelo Teorema de Bolzano, existe  $y_0 \in (-1, 1)$  tal que  $\det_S(A)(y_0) = 0$ . A prova segue ao considerar  $\mu_0 = \mu(y_0)$ ,  $x_0 = x(y_0, \mu_0)$  e  $\lambda_0 = \lambda(y_0, \mu_0)$ .  $\square$

Tomando  $y_0 \in (-1, 1)$  obtido na proposição anterior e  $\varphi$  uma função de transição arbitrária, defina o seguinte conjunto de pontos

$$S = \left\{ \frac{\varphi_0^2}{(1 - \varphi_0)\varphi_0'}, -\frac{2\varphi_0^3\varphi_0''}{3(\varphi_0 - 1)(\varphi_0')^3}, -\frac{\varphi_0^2(Q_0 \pm \sqrt{R_0})}{12(\varphi_0')^3(\varphi_0 - 1)^3}, \frac{\varphi_0^2(1 + 8\varphi_0)\varphi_0'}{\varphi_0(1 + 3\varphi_0)\varphi_0'' - (\varphi_0')^2} \right\},$$

onde, por simplicidade, utilizamos a notação  $\varphi_0 = \varphi(y_0)$ ,  $\varphi_0' = \varphi'(y_0)$ ,  $\varphi_0'' = \varphi''(y_0)$ , e

$$Q_0 = 12(\varphi_0 - 1)(\varphi_0')^2 + \varphi_0(2\varphi_0 - 1)\varphi_0'',$$

$$R_0 = 48(\varphi_0 - 1)^2(\varphi_0')^4 + 24\varphi_0(\varphi_0 - 1)(\varphi_0')^2\varphi_0'' + \varphi_0^2(1 - 2\varphi_0)^2(\varphi_0'')^2.$$

O próximo teorema é a versão completa do Teorema B, no caso em que consideramos  $\varphi$  uma função de transição arbitrária.

**Teorema 5.2** *Seja  $Z_{\lambda, \mu}$  uma família de campos de vetores descontínuos a dois parâmetros dada por (4.2), com  $\alpha > 0$  e  $\alpha \notin S$ . Então, dada  $\varphi$  uma função de transição, o campo de vetores regularizado (5.11) admite uma bifurcação de Bogdanov-Takens.*

*Demonstração.* Provaremos que as condições genéricas do Teorema 4.1 são satisfeitas para o campo de vetores regularizado (5.11). Primeiro, a Proposição 5.6 garante que no ponto de equilíbrio  $x_0 = (x_0, y_0)$ , a matriz Jacobiana  $A_0 = DZ_R(x_0, \beta_0)$  tem duplo autovalor nulo. Além disso, como  $y_0 \in (-1, 1)$ , a matriz  $A_0$  é não nula pois  $a_{11} = \varphi(y_0) > 0$ . Assim, resta verificar que as condições genéricas (BT.1), (BT.2) e (BT.3) também são satisfeitas.

Como  $\text{tr}(A_0) = \det(A_0) = 0$  podemos escrever

$$A_0 = \begin{pmatrix} a & b \\ -a^2/b & -a \end{pmatrix}.$$

Os autovetores e autovetores generalizados associados ao duplo autovalor nulo são

$$\vec{v}_0 = (1, -a/b), \quad \vec{v}_1 = (0, 1/b), \quad \vec{w}_0 = (1, 0), \quad \vec{w}_1 = (a, b).$$

Assim, considerando o deslocamento de eixos

$$x \mapsto x - x_0, \quad y \mapsto y - y_0$$

para o campo de vetores regularizado (5.11), obtemos a seguinte expressão, definida pela condição genérica de Bogdanov-Takens (BT.1),

$$a_{20}(\beta_0) + b_{11}(\beta_0) = \frac{3\alpha(\varphi_0 - 1)(\varphi'_0)^3 + 2\varphi_0^3\varphi''_0}{\varphi'_0(\varphi_0^2 + \alpha(\varphi_0 - 1)\varphi'_0)}$$

Analogamente, para a condição genérica de Bogdanov-Takens (BT.2), calculamos

$$\begin{aligned} b_{20}(\beta_0) &= \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \langle Z_R(y_1\vec{v}_0 + y_2\vec{v}_1, \beta_0), \vec{w}_1 \rangle \Big|_{x_0} \\ &= \frac{\varphi_0(M_0 + M_1\varphi'_0 + M_2(\varphi'_0)^2 + M_3(\varphi'_0)^3 + M_4(\varphi'_0)^4)}{\varphi'_0(\varphi_0^2 + \alpha(\varphi_0 - 1)\varphi'_0)^2}, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} M_0 &= 2\varphi_0^5\varphi''_0, \\ M_1 &= \alpha\varphi_0^3(2\varphi_0 - 1)\varphi''_0, \\ M_2 &= 4\varphi_0^4, \\ M_3 &= 12\alpha\varphi_0^2(\varphi_0 - 1), \\ M_4 &= 6\alpha^2(\varphi_0 - 1)^2. \end{aligned}$$

Note que o numerador de  $b_{20}(\beta_0)$  é um polinômio quadrático em  $\alpha$ . Agora, definindo a aplicação em  $\mathbb{R}^4$

$$T(x, y, \lambda, \mu) = (Z_R(x, \beta), \text{tr}(DZ_R(x, \beta)), \det(DZ_R(x, \beta))),$$

a condição genérica de Bogdanov-Takens (BT.3) pode ser verificada pelo sinal do determinante Jacobiano

$$\det(DT(x_0, \beta_0)) = \frac{4\varphi'_0(8\varphi_0^3\varphi'_0 + \alpha(\varphi'_0)^2 - \alpha\varphi_0\varphi''_0 + \varphi_0^2(\varphi'_0 - 3\alpha\varphi''_0))}{\varphi_0}.$$

---

Assim, como o conjunto  $S$  é finito, tomando  $\alpha \notin S$ , as condições genéricas (BT.1), (BT.2) e (BT.3) se verificam.  $\square$



---

## Sistemas de Lotka-Volterra Tridimensional

---

Neste capítulo estudamos uma classe particular de sistemas de Lotka-Volterra tridimensionais chamados sistemas May-Leonard. Esta classe de sistemas depende de dois parâmetros reais  $a$  e  $b$ , satisfazendo  $a + b = -1$ . Para esses valores dos parâmetros, descreveremos sua dinâmica global na compactificação do octante positivo de  $\mathbb{R}^3$  incluindo seu infinito.

### 6.1 Sistemas de May-Leonard

Os sistemas diferenciais ordinários polinomiais são frequentemente utilizados em vários ramos da matemática aplicada, física, química, engenharia, etc. Modelos que estudam a interação entre espécies do tipo predador-presa têm sido extensivamente analisados, como os clássicos sistemas de Lotka-Volterra. Para mais informações sobre os sistemas de Lotka-Volterra veja por exemplo [15] e as referências lá citadas. Em particular, um destes modelos de competição entre três espécies dentro da classe dos sistemas de Lotka-Volterra tridimensionais é o *modelo de May-Leonard* dado pelo sistema diferencial polinomial em  $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(1 - x - ay - bz), \\ \dot{y} &= y(1 - bx - y - az), \\ \dot{z} &= z(1 - ax - by - z),\end{aligned}\tag{6.1}$$

onde  $a$  e  $b$  são parâmetros reais e as derivadas são calculadas em relação ao tempo  $t$ . Veja mais detalhes sobre sistemas de May-Leonard nos artigos [17] e [4].

Os sistemas de Lotka-Volterra em  $\mathbb{R}^3$  têm a propriedade de que os três planos de coordenadas são invariantes pelo fluxo desses sistemas. Além disso, nos pontos da reta  $x = y = z$  o sistema (6.1) se escreve  $\dot{x} = x$ ,  $\dot{y} = y$ ,  $\dot{z} = z$ . Portanto, a bissetriz do octante positivo é uma reta invariante para este sistema diferencial.

O sistema (6.1) já foi estudado no artigo [4] para  $a > 0, b > 0$ , com  $a + b = 2$  ou  $a = b$ . Neste capítulo descrevemos a dinâmica global do sistema (6.1) em função dos parâmetros  $a$  e  $b$  quando  $a + b = -1$  e  $a, b \in \mathbb{R}$ . O sistema (6.1) está definido em  $\mathbb{R}^3$ . De modo a estudar a dinâmica de suas órbitas no infinito estenderemos analiticamente seu fluxo usando a compactificação de Poincaré de  $\mathbb{R}^3$ . A região de interesse em nosso estudo é o octante positivo de  $\mathbb{R}^3$ , isto é, onde  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ . Assim estudaremos o fluxo da compactificação de Poincaré na região

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

da bola de Poincaré.

Observamos que a dinâmica global do sistema de May-Leonard (6.1) com  $a + b = -1$  pode ser estudado porque este sistema diferencial tem um invariante de Darboux. Aqui com este modelo nós ilustramos como se pode usar um invariante de Darboux para obter a dinâmica global de um sistema diferencial.

O sistema diferencial (6.1) foi amplamente estudado para compreender a interação entre espécies e tentar prever uma possível extinção ou superpopulação, por exemplo. No entanto nosso interesse é puramente matemático, e queremos ilustrar como um invariante de Darboux pode ser usado para descrever a dinâmica global de um sistema diferencial. Observe que estamos interessados no estudo do sistema (6.1) para todos os valores reais dos parâmetros  $a$  e  $b$  satisfazendo  $a + b = -1$ , e não apenas por seus valores positivos. Conseqüentemente, nossa análise não tem significado biológico. Este estudo pode ser feito de maneira semelhante nos outros octantes de  $\mathbb{R}^3$ .

## 6.2 A Compactificação de Poincaré em $\mathbb{R}^3$

Em  $\mathbb{R}^3$  consideramos o sistema diferencial polinomial

$$\dot{x} = P_1(x, y, z), \quad \dot{y} = P_2(x, y, z), \quad \dot{z} = P_3(x, y, z),$$

ou equivalentemente seu campo de vetores polinomial associado  $X = (P_1, P_2, P_3)$ . O grau  $n$  de  $X$  é definido como  $n = \max\{\deg(P_i) : i = 1, 2, 3\}$ .

Seja  $\mathbb{S}^3 = \{y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4 : \|y\| = 1\}$  a esfera unitária em  $\mathbb{R}^4$ , e sejam

$$\mathbb{H}_+ = \{y \in \mathbb{S}^3 : y_4 > 0\} \quad \text{e} \quad \mathbb{H}_- = \{y \in \mathbb{S}^3 : y_4 < 0\}$$

os hemisférios norte e sul, respectivamente. O espaço tangente a  $\mathbb{S}^3$  no ponto  $y$  é denotado por  $T_y\mathbb{S}^3$ . Assim, identificamos o hiperplano tangente

$$T_{(0,0,0,1)}\mathbb{S}^3 = \{(x_1, x_2, x_3, 1) \in \mathbb{R}^4 : (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\}$$

com  $\mathbb{R}^3$ .

Consideramos as projeções centrais

$$f_+ : \mathbb{R}^3 = T_{(0,0,0,1)}\mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{H}_+ \quad \text{e} \quad f_- : \mathbb{R}^3 = T_{(0,0,0,1)}\mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{H}_-,$$

definidas por

$$f_+(x) = \frac{1}{\Delta x}(x_1, x_2, x_3, 1) \quad \text{e} \quad f_-(x) = -\frac{1}{\Delta x}(x_1, x_2, x_3, 1),$$

onde  $\Delta x = (1 + \sum_{i=1}^3 x_i^2)^{1/2}$ . Através dessas projeções centrais o  $\mathbb{R}^3$  é identificado com os hemisférios norte e sul, respectivamente. O equador da esfera  $\mathbb{S}^3$  é  $\mathbb{S}^2 = \{y \in \mathbb{S}^3 : y_4 = 0\}$ . Claramente  $\mathbb{S}^2$  pode ser identificado com o *infinito* de  $\mathbb{R}^3$ .

Os difeomorfismos  $f_+$  e  $f_-$  definem duas cópias de  $X$ , uma  $Df_+ \circ X$  no hemisfério norte e outra  $Df_- \circ X$  no hemisfério sul. Denote por  $\bar{X}$  o campo de vetores em  $\mathbb{S}^3 \setminus \mathbb{S}^2 = \mathbb{H}_+ \cup \mathbb{H}_-$  tal que restrito a  $\mathbb{H}_+$  coincide com  $Df_+ \circ X$ , e restrito a  $\mathbb{H}_-$  coincide com  $Df_- \circ X$ . Estendemos analiticamente o campo de vetores polinomial  $\bar{X}$  ao equador de  $\mathbb{S}^3$ , i.e. ao infinito de  $\mathbb{R}^3$ , de maneira que o fluxo sobre a fronteira é invariante. Isso é feito definindo o campo vetorial

$$p(X)(y) = y_4^{n-1} \bar{X}(y),$$

para todo  $y \in \mathbb{S}^3$ . Este campo de vetores estendido  $p(X)$  é chamado a *compactificação de Poincaré de  $X$*  na esfera de Poincaré  $\mathbb{S}^3$ .

No que segue trabalharemos com a projeção ortogonal do hemisfério fechado norte a  $y_4 = 0$ . Observe que essa projeção é uma bola fechada  $B$  de raio um, cujo o interior é difeomorfo a  $\mathbb{R}^3$  e cuja fronteira  $\mathbb{S}^2$  corresponde ao infinito de  $\mathbb{R}^3$ . O campo de vetores projetado em  $B$  é chamado a *compactificação de Poincaré* na bola de Poincaré  $B$ .

Como  $\mathbb{S}^3$  é uma variedade diferenciável, para calcular a expressão para  $p(X)$  podemos considerar as oito cartas locais  $(U_i, F_i)$ ,  $(V_i, G_i)$  onde  $U_i = \{y \in \mathbb{S}^3 : y_i > 0\}$  e  $V_i = \{y \in \mathbb{S}^3 : y_i < 0\}$  para  $i = 1, 2, 3, 4$ ; os difeomorfismos  $F_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $G_i : V_i \rightarrow \mathbb{R}^3$  para  $i = 1, 2, 3, 4$ , são os inversos das projeções centrais da origem aos planos tangentes nos pontos  $(\pm 1, 0, 0, 0)$ ,  $(0, \pm 1, 0, 0)$ ,  $(0, 0, \pm 1, 0)$  e  $(0, 0, 0, \pm 1)$ , respectivamente. A expressão de  $p(X)$  na carta local  $U_1$  é

$$z_3^n(-z_1P_1 + P_2, -z_2P_1 + P_3, -z_3P_1),$$

onde  $P_i = P_i(1/z_3, z_1/z_3, z_2/z_3)$ , e as expressões de  $p(X)$  em  $U_2$  é

$$z_3^n(-z_1P_2 + P_1, -z_2P_2 + P_3, -z_3P_2),$$

onde  $P_i = P_i(z_1/z_3, 1/z_3, z_2/z_3)$  in  $U_2$ , e em  $U_3$  é

$$\frac{z_3^n}{(\Delta z)^{n-1}}(-z_1P_3 + P_1, -z_2P_3 + P_2, -z_3P_3),$$

onde  $P_i = P_i(z_1/z_3, z_2/z_3, 1/z_3)$  em  $U_3$ .

A expressão para  $p(X)$  em  $U_4$  é  $z_3^{n+1}(P_1, P_2, P_3)$  onde a componente  $P_i = P_i(z_1, z_2, z_3)$ . A expressão para  $p(X)$  na carta local  $V_i$  é a mesma que em  $U_i$  multiplicada por  $(-1)^{n-1}$ . Observamos que todos os pontos sobre a esfera no infinito, em coordenadas de qualquer carta local tem  $z_3 = 0$ . Para mais detalhes sobre a compactificação de Poincaré em  $\mathbb{R}^3$  veja [5].

### 6.3 Retratos de Fase do Sistema de May-Leonard

Denotamos por  $X$  o campo de vetores polinomial associado ao sistema diferencial (6.1), e por  $p(X)$  a compactificação de Poincaré de  $X$ . O fluxo do sistema (6.1) na região  $R$  está descrito no seguinte teorema.

**Teorema 6.1** *Para o sistema diferencial de May-Leonard (6.1) no octante  $R$  as seguintes afirmações são válidas quando  $a + b = -1$ .*

- (a) O retrato de fase da compactificação de Poincaré  $p(X)$  do sistema (6.1) nas fronteiras  $x = 0$ ,  $y = 0$  e  $z = 0$  de  $R$  é topologicamente equivalente ao descrito na Figura 6.1(a) se  $a \leq -2$  ou  $a \geq 1$ , e na Figura 6.2(a) se  $-2 < a < 1$ .
- (b) O retrato de fase da compactificação de Poincaré  $p(X)$  do sistema (6.1) em  $R^\infty = \partial R \cap \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  (i.e. o retrato de fase no infinito do octante positivo de  $\mathbb{R}^3$ ) é topologicamente equivalente ao descrito na Figura 6.1(b) se  $a \leq -2$  ou  $a \geq 1$ , Figura 6.2(b) se  $a = -1/2$ , Figura 6.2(c) se  $-2 < a < -1/2$ , e Figura 6.2(d) se  $-1/2 < a < 1$ .
- (c) Quando  $a = -1/2$  os planos  $x = y$ ,  $x = z$  e  $y = z$  são invariantes pelo fluxo do sistema (6.1), e os retratos de fase da compactificação de Poincaré  $p(X)$  do sistema (6.1) em  $R \cap \{x = y\}$ ,  $R \cap \{x = z\}$  e  $R \cap \{y = z\}$  são topologicamente equivalentes aos descritos em (a), (b) e (c) da Figura 6.3 respectivamente.

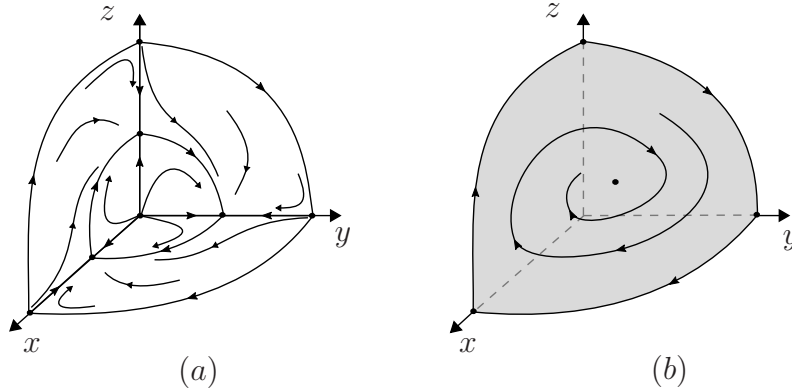


Figura 6.1: A dinâmica global na fronteira de  $R$  para  $a + b = -1$  e  $a \leq -2$ . (a) A dinâmica em  $xyz = 0$ . (b) A dinâmica em  $R^\infty$ . Invertendo o sentido de todas as órbitas, temos a dinâmica na fronteira de  $R$  para  $a + b = -1$  e  $a \geq 1$ .

*Demonstração.* Os pontos singulares finitos do sistema diferencial (6.1) com  $a + b = -1$  são as soluções do sistema

$$P_1(x, y, z) = x(1 - x + z + a(-y + z)) = 0,$$

$$P_2(x, y, z) = y(1 + x - y + a(-z + x)) = 0,$$

$$P_3(x, y, z) = z(1 + y - z + a(-x + y)) = 0,$$

isto é

$$p_0 = (0, 0, 0), \quad p_1 = (1, 0, 0), \quad p_2 = (0, 1, 0), \quad p_3 = (0, 0, 1),$$

$$p_4 = \left(0, \frac{1-a}{A}, \frac{2+a}{A}\right), \quad p_5 = \left(\frac{2+a}{A}, 0, \frac{1-a}{A}\right), \quad p_6 = \left(\frac{1-a}{A}, \frac{2+a}{A}, 0\right),$$

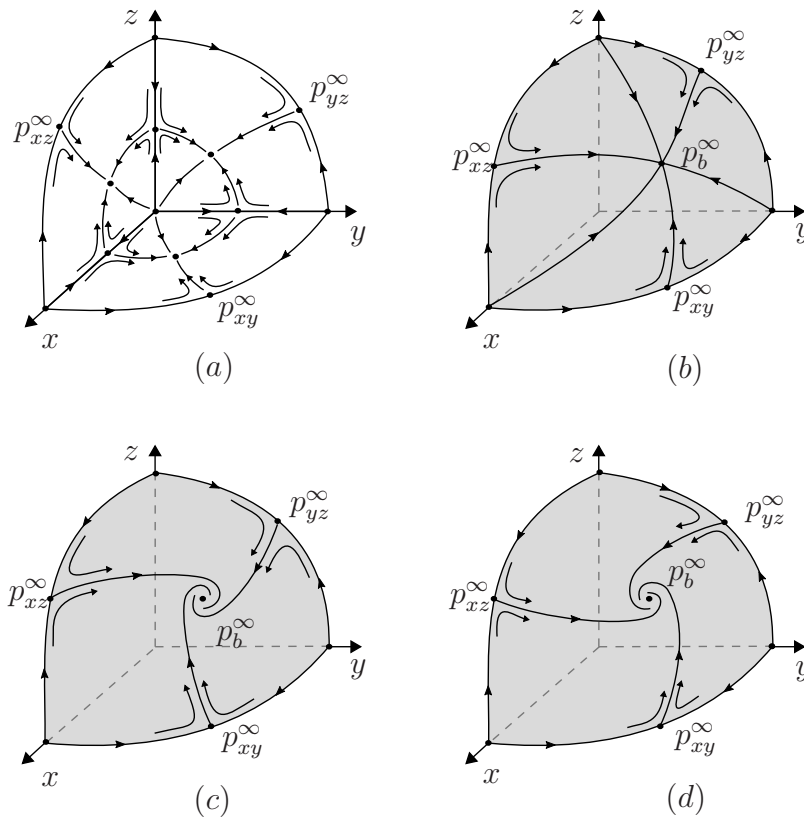


Figura 6.2: A dinâmica na fronteira de  $R$  para  $a + b = -1$  e  $-2 < a < 1$ . (a) A dinâmica em  $xyz = 0$ . A dinâmica em  $R^\infty$  para  $a = -1/2$  em (b), para  $a \in (-2, -1/2)$  em (c), e para  $a \in (-1/2, 1)$  em (d).

onde  $A = 1 + a + a^2$ .

Como  $A > 0$  para  $a \in \mathbb{R}$  e a região de interesse é  $R$ , temos:

- (i) Se  $a \leq -2$  ou  $a \geq 1$ , o sistema (6.1) tem apenas quatro pontos de equilíbrio finitos:  $p_0$ ,  $p_1$ ,  $p_2$  e  $p_3$ .
- (ii) Se  $-2 < a < 1$  o sistema (6.1) tem os sete pontos de equilíbrio finitos  $p_j$  para  $j = 0, 1, \dots, 6$ .

Todos esses pontos de equilíbrio finitos são hiperbólicos se  $a \neq -2, 1$ , e conseqüentemente seu retrato de fase local é topologicamente equivalente ao retrato de fase de sua parte linear pelo Teorema de Hartman–Grobman.

Observamos que quando  $a \in (-2, 1)$  e  $a \rightarrow 1$  temos que  $p_4 \rightarrow p_3$ ,  $p_5 \rightarrow p_1$  e  $p_6 \rightarrow p_2$ ; enquanto se  $a \rightarrow -2$  temos que  $p_4 \rightarrow p_2$ ,  $p_5 \rightarrow p_3$  e  $p_6 \rightarrow p_1$ . Esse comportamento desses equilíbrios permite determinar por continuidade o retrato de fase local na fronteira de  $R$  dos pontos de equilíbrio não-hiperbólicos  $p_1$ ,  $p_2$  e  $p_3$  quando  $a = -2$  e  $a = 1$  dos retratos de fase globais da fronteira de  $R$  quando  $a \in (-2, 1)$ .

Também observamos que quando  $a \in (-2, 1)$  e  $a \rightarrow 1$  temos que  $p_{xz}^\infty \rightarrow$  o ponto extremo positivo do eixo- $x$ ,  $p_{yz}^\infty \rightarrow$  o ponto extremo positivo do eixo- $z$ , e  $p_{xy}^\infty \rightarrow$  o ponto extremo positivo do eixo- $y$ ; enquanto se  $a \rightarrow -2$  temos que  $p_{xz}^\infty \rightarrow$  o ponto extremo positivo do eixo- $z$ ,  $p_{yz}^\infty \rightarrow$  o ponto extremo positivo do eixo- $y$ , e  $p_{xy}^\infty \rightarrow$  o ponto extremo positivo do eixo- $x$ . Assim, o comportamento desses equilíbrios permite determinar por continuidade os retratos de fase locais na fronteira de  $R$  dos equilíbrios não-hiperbólicos que estão nos pontos extremos positivos dos eixos de coordenadas quando  $a = -2$  e  $a = 1$  dos retratos de fase globais da fronteira de  $R$  quando  $a \in (-2, 1)$ . Portanto, no que segue, provamos o Teorema 6.1 apenas para os valores  $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ .

A parte linear do sistema (6.1) no equilíbrio  $p_0$  é a matriz identidade. Portanto  $p_0$  é um equilíbrio repulsor.

Os autovalores da parte linear nos pontos de equilíbrio  $p_1$ ,  $p_2$  e  $p_3$  são  $-1$ ,  $1 - a$ ,  $2 + a$ . Portanto, quando  $a < -2$  ou  $a > 1$  estes equilíbrios possuem uma variedade estável 2-dimensional e uma instável 1-dimensional; e para  $-2 < a < 1$  estes equilíbrios têm uma variedade instável 2-dimensional e uma estável 1-dimensional.

Quando  $-2 < a < 1$  os autovalores da parte linear nos pontos de equilíbrio  $p_4$ ,  $p_5$  e  $p_6$  são  $3$ ,  $-1$  e  $(-2 + a + a^2)/A$ . Como  $-2 + a + a^2 < 0$  para  $-2 < a < 1$  então estes equilíbrios tem uma variedade estável 2-dimensional e uma instável 1-dimensional. Além disso,  $p_4$  (respectivamente  $p_5$  e  $p_6$ ) é um atrator restrito a fronteira invariante  $x = 0$  (respectivamente  $y = 0$  e  $z = 0$ ).

Agora vamos estudar os pontos de equilíbrio infinitos. Para o estudo da dinâmica no infinito  $R^\infty$  de  $R$  vamos usar a compactificação de Poincaré do sistema diferencial (6.1). Assim, o sistema diferencial (6.1) na carta local  $U_1$  torna-se

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= 2z_1 + az_1 - z_1^2 + az_1^2 - z_1z_2 - 2az_1z_2, \\ \dot{z}_2 &= z_2 - az_2 + z_1z_2 + 2az_1z_2 - 2z_2^2 - az_2^2, \\ \dot{z}_3 &= z_3 + az_1z_3 - z_2z_3 - az_2z_3 - z_3^2. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Então, o sistema (6.1) tem dois pontos de equilíbrio no infinito:  $(0, 0, 0)$  e  $(1, 1, 0)$ . A parte linear no equilíbrio  $(0, 0, 0)$  tem os autovalores  $1 - a$  e  $2 + a$  no infinito e autovalor 1 em sua direção finita. Portanto, no infinito  $(0, 0, 0)$  é uma sela tal que sua separatriz estável está contida no eixo- $z_1$  quando  $a < -2$  (respectivamente eixo- $z_2$  quando  $a > 1$ ).

Os autovalores da parte linear no equilíbrio  $(1, 1, 0)$  são  $(-3 \pm i\sqrt{3}(1+2a))/2$  e  $-1$ . Portanto,

no infinito  $(1, 1, 0)$  é um foco estável girando no sentido horário se  $a < -2$  (respectivamente no sentido anti-horário se  $a > 1$ ).

Agora o sistema (6.1) na carta local  $U_2$  escreve

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_1 - az_1 - 2z_1^2 - az_1^2 + z_1z_2 + 2az_1z_2, \\ \dot{z}_2 &= 2z_2 + az_2 - z_1z_2 - 2az_1z_2 - z_2^2 + az_2^2, \\ \dot{z}_3 &= z_3 - z_1z_3 - az_1z_3 + az_2z_3 - z_3^2. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Como a carta local  $U_2$  cobre a parte final do plano  $x = 0$  no infinito do octante positivo de  $\mathbb{R}^3$ , estamos interessados somente nos pontos de equilíbrio que estão em  $z_1 = 0$  e  $z_3 = 0$ . Neste caso, existe um ponto de equilíbrio no infinito:  $(0, 0, 0)$ . Os autovalores da parte linear no equilíbrio  $(0, 0, 0)$  são  $1 - a$  e  $2 + a$  no infinito e autovalor 1 em sua direção finita. Portanto, no infinito  $(0, 0, 0)$  é uma sela tal que sua separatriz estável está contida no eixo- $z_2$  quando  $a < -2$  (respectivamente eixo- $z_1$  quando  $a > 1$ ).

Agora para  $a \leq -2$  ou  $a \geq 1$  só precisamos estudar o ponto de equilíbrio no ponto extremo do semi-eixo positivo  $z$ , i.e. o ponto de equilíbrio na origem da carta local  $U_3$ . Na carta local  $U_3$  o sistema (6.1) torna-se

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= 2z_1 + az_1 - z_1^2 + az_1^2 - z_1z_2 - 2az_1z_2, \\ \dot{z}_2 &= z_2 - az_2 + z_1z_2 + 2az_1z_2 - 2z_2^2 - az_2^2, \\ \dot{z}_3 &= z_3 + az_1z_3 - z_2z_3 - az_2z_3 - z_3^2. \end{aligned}$$

A parte linear no ponto de equilíbrio  $(0, 0, 0)$  tem autovalores  $1 - a$  e  $2 + a$  no infinito e autovalor 1 em sua direção finita. Portanto, a origem da carta local  $U_3$  é uma sela tal que sua separatriz estável está contida no eixo- $z_1$  quando  $a < -2$  (respectivamente eixo- $z_2$  quando  $a > 1$ ).

Resta estudar os pontos de equilíbrio infinitos do sistema (6.1) no caso  $-2 < a < 1$ . Na carta local  $U_1$  o sistema (6.2) tem quatro pontos de equilíbrio no infinito:  $(0, 0, 0)$ ,  $((2+a)/(1-a), 0, 0)$ ,  $(0, (1-a)/(2+a), 0)$  e  $(1, 1, 0)$ . Os autovalores da parte linear no equilíbrio  $(0, 0, 0)$  são  $1 - a$  e  $2 + a$  no infinito e autovalor 1 em sua direção finita. Então este equilíbrio é um nó instável. A parte linear no equilíbrio  $((2+a)/(1-a), 0, 0)$  (respectivamente  $(0, (1-a)/(2+a), 0)$ ) tem os autovalores  $-(2+a)$ ,  $A/(1-a)$  e  $3A/(a-1)$  (respectivamente  $(a-1)$ ,  $A/(2+a)$  e  $3A/(2+a)$ ). Portanto, os equilíbrios  $((2+a)/(1-a), 0, 0)$  e  $(0, (1-a)/(2+a), 0)$  são selas tais que suas separatrizes estáveis estão contidas no eixo- $z_1$  e eixo- $z_2$ , respectivamente. Os autovalores da



parte linear no equilíbrio  $(1, 1, 0)$  são  $(-3 \pm i\sqrt{3}(1+2a))/2$  e  $-1$ . Portanto, no infinito  $(1, 1, 0)$  é um foco estável girando no sentido horário se  $-2 < a < -1/2$  (respectivamente no sentido anti-horário se  $-1/2 < a < 1$ ). Quando  $a = -1/2$  no infinito  $(1, 1, 0)$  é nó estável.

Agora, uma vez que estamos interessados apenas nos pontos de equilíbrio que estão em  $z_1 = 0$  e  $z_3 = 0$ , na carta local  $U_2$  o sistema (6.3) tem dois pontos de equilíbrio:  $(0, 0, 0)$  e  $(0, (2+a)/(1-a), 0)$ . Os autovalores da parte linear no equilíbrio  $(0, 0, 0)$  são  $1-a$  e  $2+a$  no infinito e autovalor 1 em sua direção finita. Então, no infinito este equilíbrio é um nó instável. A parte linear no equilíbrio  $(0, (2+a)/(1-a), 0)$  tem os autovalores  $-(2+a)$ ,  $A/(1-a)$  e  $3A/(1-a)$  no infinito. Portanto, no infinito  $(0, (2+a)/(1-a), 0)$  é uma sela tal que sua separatriz estável está contida no eixo- $z_2$ .

Na carta local  $U_3$  só precisamos estudar o ponto de equilíbrio  $(0, 0, 0)$ . Os autovalores da parte linear neste equilíbrio são  $1-a$  e  $2+a$  no infinito e autovalor 1 em sua direção finita. Então, no infinito esse equilíbrio é um nó instável. Assim, a prova das afirmações (a) e (b) do Teorema 6.1 está completa.

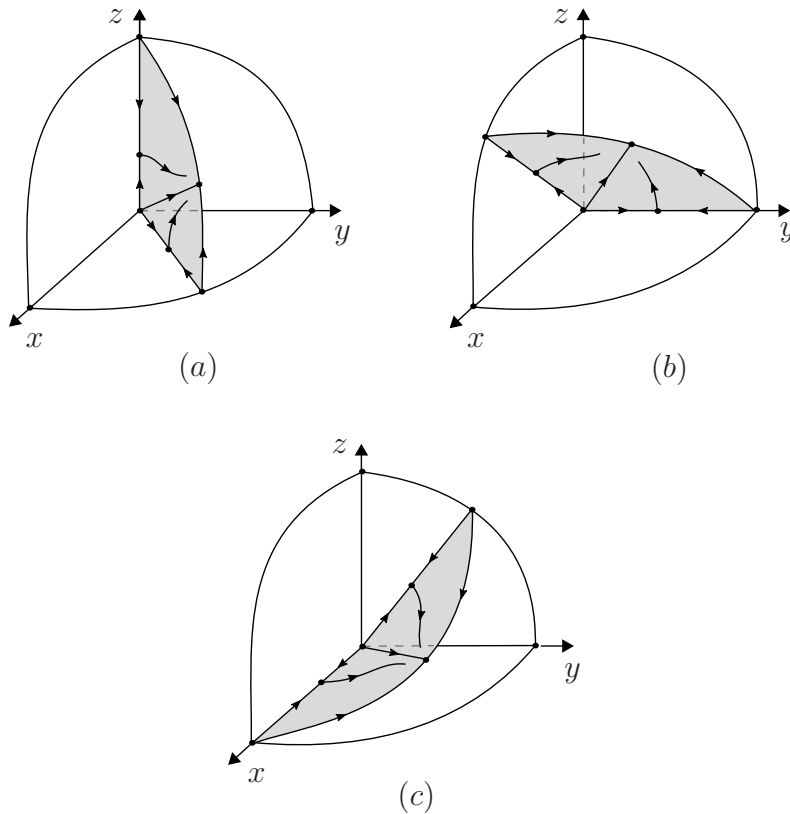


Figura 6.3: A dinâmica em  $R \cap \{x = y\}$ ,  $R \cap \{x = z\}$  e  $R \cap \{y = z\}$  respectivamente, quando  $a = b = -1/2$ .

Agora, como a bissetriz  $x = y = z$  é uma reta invariante para o sistema, é fácil verificar

para  $a = -1/2$  que o retrato de fase global nos planos invariantes  $R \cap \{x = y\}$ ,  $R \cap \{x = z\}$  e  $R \cap \{y = z\}$  são topologicamente equivalentes aos descritos em (a), (b) e (c) da Figura 3 respectivamente. Isso completa a prova do Teorema 6.1.  $\square$

Está provado, portanto, o Teorema C.

Vamos introduzir agora algumas noções básicas da *Teoria de Integrabilidade de Darboux*.

Seja  $f \in \mathbb{R}[x, y, z]$ ,  $f$  não identicamente nula, onde  $\mathbb{R}[x, y, z]$  denota o anel de polinômios nas variáveis  $x, y, z$  com coeficientes em  $\mathbb{R}$ . Dizemos que a superfície algébrica  $f(x, y, z) = 0$  é uma *superfície algébrica invariante* do campo de vetores  $X$  se existe um polinômio  $K \in \mathbb{R}[x, y, z]$  tal que  $Xf = Kf$ , onde  $Xf = \langle X, \nabla f \rangle$ . O polinômio  $K = K(x, y, z)$  é chamado *cofator* de  $f$ . É fácil ver que se o campo de vetores polinomial  $X$  tem grau  $n$ , então qualquer cofator tem grau no máximo  $n - 1$ . Portanto, como o campo de vetores associado ao sistema May-Leonard (6.1) tem grau dois, os cofatores terão grau no máximo um.

Observamos que nos pontos da superfície algébrica  $f = 0$ , o gradiente  $\nabla f$  de  $f$  é ortogonal ao campo vetorial  $X$ , uma vez que  $Xf = Kf$ . Consequentemente, o campo vetorial  $X$  é tangente à superfície  $f = 0$ . Portanto, quando uma órbita do campo de vetores  $X$  tem um ponto na superfície  $f = 0$ , toda a órbita está contida na superfície  $f = 0$ .

Dizemos que uma função  $I(x, y, z, t)$  de classe  $C^1$  é um *invariante* do sistema diferencial polinomial (6.1) se  $I(x(t), y(t), z(t), t)$  é constante, para todos valores de  $t$  para os quais a solução  $(x(t), y(t), z(t))$  de (6.1) está definida. Quando a função  $I$  é independente do tempo, então ela é chamada uma *integral primeira* do sistema diferencial (6.1). Também, se um invariante  $I(x, y, z, t)$  é da forma  $f(x, y, z)e^{st}$ , então ele é chamado um *invariante de Darboux*.

**Proposição 6.1** *O sistema (6.1) tem o invariante de Darboux  $I = I(t, x, y, z) = xyz e^{-3t}$ .*

*Demonstração.* É imediato verificar que

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial I}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial I}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial I}{\partial t} = 0,$$

onde  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  e  $\dot{z}$  são dados em (6.1). Portanto  $I$  é um invariante de Darboux do sistema (6.1).  $\square$

Para obter o invariante de Darboux dado na Proposição 6.1 utilizamos a afirmação (vi) do Teorema 8.7 de [6]. Lá a teoria está descrita para campos de vetores polinomiais em  $\mathbb{R}^2$ , mas

os resultados e as provas estendem-se a  $\mathbb{R}^3$ . Precisamente, usamos o seguinte teorema.

**Teorema 6.2** *Suponha que um campo de vetores polinomial  $X$  definido em  $\mathbb{R}^3$  admite  $p$  superfícies algébricas invariantes  $f_i = 0$  com cofatores  $K_i$  para  $i = 1, \dots, p$ . Se existem  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  não todos nulos tais que  $\sum_{i=1}^p \lambda_i K_i = -s$  para algum  $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , então a função*

$$f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} \cdot e^{st}$$

é um invariante do campo de vetores  $X$ .

*Demonstração.* Veja [6]. □

Como já comentamos anteriormente, os três planos coordenados são invariantes pelo fluxo do sistema May-Leonard. Assim, temos três planos invariantes  $f_i = 0$  com cofatores  $K_i$ , a saber

$$\begin{aligned} f_1 &= x, & K_1 &= 1 - x - ay - bz \\ f_2 &= y, & K_2 &= 1 - bx - y - az \\ f_3 &= z, & K_3 &= 1 - ax - by - z. \end{aligned}$$

Como  $\sum_{i=1}^3 \lambda_i K_i = 3$  para  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$  e  $a + b = -1$ , obtemos o invariante de Darboux indicado na Proposição 6.1.

**Proposição 6.2** *Seja  $I(x, y, z, t) = f(x, y, z)e^{st}$  um invariante de Darboux do sistema (6.1). Seja  $p \in \mathbb{R}^3$  e  $\varphi_p(t)$  a solução do sistema (6.1) tal que  $\varphi_p(0) = p$ . Então*

$$\alpha(p), \omega(p) \subset \overline{\{f(x, y, z) = 0\}} \cup \mathbb{S}^2.$$

*Aqui  $\alpha(p)$  e  $\omega(p)$  denotam os conjuntos  $\alpha$ -limite e  $\omega$ -limite de  $p$  respectivamente, e  $\mathbb{S}^2$  denota a fronteira da bola de Poincaré, isto é, o infinito de  $\mathbb{R}^3$ .*

Para uma prova da Proposição 6.2 veja [13]. Seja  $p(\gamma)$  denotando a órbita  $\gamma$  do campo de vetores  $X$  associado ao sistema (6.1) na compactificação de Poincaré  $p(X)$ . O próximo resultado é o Teorema D.

**Teorema 6.3** *Seja  $\gamma$  uma órbita do sistema (6.1) com  $a + b = -1$  tal que  $p(\gamma)$  está contido no interior de  $R$ . Então, para qualquer valor  $a \in \mathbb{R}$ , as seguintes afirmações são válidas.*

(a) O conjunto  $\alpha$ -limite de  $p(\gamma)$  é a origem de  $\mathbb{R}^3$ .

(b) O conjunto  $\omega$ -limite de  $p(\gamma)$  é o ponto singular no infinito  $\{(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})\} \in R^\infty$ .

*Demonstração.* Seja  $p(\gamma) = \{\varphi_p(t) = (x(t), y(t), z(t)) : t \in \mathbb{R}\}$  a órbita da compactificação de Poincaré do sistema (6.1) com  $a + b = -1$  tal que  $\varphi_p(0) = p$  com  $p$  no interior de  $R$ . Lembramos que todas as órbitas de um sistema diferencial definidas em um conjunto compacto estão definidas para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Pelas Proposições 6.1 e 6.2 os conjuntos  $\alpha$ - e  $\omega$ -limite de  $p(\gamma)$  estão contidos na fronteira de  $R$ , i.e. em  $\{(x, y, z) \in R : xyz = 0\} \cup \mathbb{S}^2$ . Além disso, pela Proposição 6.1,  $I(t, x(t), y(t), z(t)) = k$  constante com  $k > 0$ . Assim

$$x(t)y(t)z(t) = ke^{3t}, \quad (6.4)$$

para todo  $t$ . Tomando limite em (6.4) quando  $t \rightarrow -\infty$ , obtemos

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t)y(t)z(t) = 0.$$

Assuma que  $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0$ . Se  $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0$  ou  $\lim_{t \rightarrow -\infty} z(t) = 0$  a prova é completamente análoga. Então os pontos do conjunto  $\alpha$ -limite de  $p(\gamma)$  tem coordenada  $x = 0$ . Distinguimos dois casos.

*Caso 1.* Suponha que  $a \leq -2$  ou  $a \geq 1$ . Portanto, pelo Teorema 6.1(a) e Figura 6.1(a) temos que o conjunto  $\alpha$ -limite de  $p(\gamma)$  pode ser apenas os pontos de equilíbrio  $p_0, p_2, p_3, p_y^\infty$  (o ponto extremo positivo do eixo- $y$ ) ou  $p_z^\infty$  (o ponto extremo positivo do eixo- $z$ ). Exceto a origem  $p_0$ , os pontos de equilíbrio restantes são do tipo sela com a separatriz instável de cada uma delas contida em um dos planos coordenados invariantes. Assim, como  $p(\gamma)$  está no interior de  $R$ , então o conjunto  $\alpha$ -limite de  $p(\gamma)$  é a origem de  $\mathbb{R}^3$ .

*Caso 2.* Assuma que  $-2 < a < 1$ . Pelo Teorema 6.1(a) e Figura 6.2(a) temos que o conjunto  $\alpha$ -limite de  $p(\gamma)$  pode ser apenas um dos pontos de equilíbrio  $p_0, p_2, p_3, p_4, p_y^\infty, p_z^\infty$  ou  $p_{yz}^\infty$ . Novamente  $p_0$  é o único desses pontos de equilíbrio que não é do tipo sela.

Em resumo, o conjunto  $\alpha$ -limite de  $p(\gamma)$  é a origem de  $\mathbb{R}^3$  para qualquer valor  $a \in \mathbb{R}$ . Assim a afirmação (a) está provada.

Agora estudamos o conjunto  $\omega$ -limite de  $p(\gamma)$ . De uma forma semelhante tomando o limite

em (6.4) quando  $t \rightarrow +\infty$  obtemos

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)y(t)z(t) = +\infty.$$

Suponha que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty$ . Os casos  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty$  ou  $\lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = +\infty$  são provados de maneira análoga. Assim pela Proposição 6.2 concluímos que o conjunto  $\omega$ -limite de  $p(\gamma)$  está contido em  $R^\infty$ . Novamente, distinguiamos dois casos.

*Caso 1.* Assuma que  $a \leq -2$  ou  $a \geq 1$ . Pelo Teorema 6.1(b) e Figura 6.1(b) o conjunto  $\alpha$ -limite de  $p(\gamma)$  pode ser apenas o ponto extremo positivo  $p_x^\infty$  do eixo- $x$ , ou o ponto extremo  $p_b^\infty$  da bissetriz invariante. No entanto, o ponto de equilíbrio infinito  $p_x^\infty$  é do tipo sela com separatriz estável contida em  $R^\infty \cap \{z = 0\}$  e a órbita  $p(\gamma)$  está no interior de  $R$ . Portanto o conjunto  $\omega$ -limite de  $p(\gamma)$  é o ponto singular infinito  $p_b^\infty = \{(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})\}$ .

*Caso 2.* Suponha que  $-2 < a < 1$ . Pelo Teorema 6.1(b) e Figuras 6.2(b)(c)(d) temos que o conjunto  $\omega$ -limite de  $P(\gamma)$  pode ser apenas os pontos de equilíbrio  $p_x^\infty$ ,  $p_{xy}^\infty$ ,  $p_{xz}^\infty$  ou  $p_b^\infty$ . Neste caso, o ponto singular infinito  $p_x^\infty$  é um repulsor, e  $p_{xy}^\infty$ ,  $p_{xz}^\infty$  são do tipo sela com separatrizes estáveis contidas em  $R^\infty \cap \{z = 0\}$  e  $R^\infty \cap \{y = 0\}$  respectivamente. Assim o conjunto  $\omega$ -limite de  $p(\gamma)$  é  $p_b^\infty$  porque a órbita  $p(\gamma)$  está no interior de  $R$ .

Em resumo, o conjunto  $\omega$ -limite de  $p(\gamma)$  é o ponto singular infinito  $\{(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})\} \in R^\infty$  qualquer que seja o valor de  $a \in \mathbb{R}$ . Portanto a afirmação (b) do Teorema 6.3 está provada.  $\square$

# Referências Bibliográficas

---

- [1] A. ANDRONOV, I. GORDON, E. LEONTOVICH AND G. MAIER, *Theory of Bifurcations of Dynamical Systems on a Plane, Israel Program for Scientific Translations*, John Wiley, New York (1973).
- [2] DI BERNARDO, M.; BUDDI, C. J.; CHAMPNEYS, A.R; KOWALCZYK, P. *Piecewise-smooth Dynamical Systems: Theory and Applications*. Springer. (2008).
- [3] C. A. BUZZI, P. R. SILVA, M. A. TEIXEIRA. *A singular approach to discontinuous vector fields on the plane*, Journal of Differential Equations, v. 231, n. 2, p. 633-655, (2006).
- [4] G. BLÉ, V. CASTELLANOS, J. LLIBRE, I. QUILANTÁN, *Integrability and global dynamics of the May-Leonard model*, Nonlinear Anal. **14**, 280–293, (2013).
- [5] A. CIMA AND J. LLIBRE, *Bounded polynomial vector fields*, Trans. Amer. Math. Soc. **318**, 557–579, (1990).
- [6] F. DUMORTIER, J. LLIBRE AND J.C. ARTÉS, *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*, Universitext Springer, New York, (2006).
- [7] FENICHEL, N. *Geometric Singular Perturbation Theory for Ordinary Differential Equations*. Journal of Differential Equations, Vol. 31, 53-98, (1979).
- [8] FILIPPOV, A. F. *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*. Mathematics and its Applications (Soviet Series), Kluwer Academic Publishers, Dortrecht, (1988).
- [9] M. GUARDIA, T.M. SEARA, M.A. TEIXEIRA. *Generic Bifurcations of low codimension of planar Filippov Systems*, Journal of Differential Equations, 250, 1967-2023, (2011).

- 
- [10] J. GUCKENHEIMER E P. HOLMES, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcation of Vector Fields*, Springer-Verlag, Nova Iorque, (1983).
- [11] Y. A. KUZNETSOV. *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Springer, 3rd edition, (2004).
- [12] Y. A. KUZNETSOV; S. RINALDI AND A. GRAGNANI. *One-parameter Bifurcations in Planar Filippov Systems*, International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 13, No.8, 2157-2188, (2003).
- [13] J. LLIBRE AND R.D.S. OLIVEIRA, *Quadratic systems with invariant straight lines of total multiplicity two having Darboux invariants*, Communications in Contemporary Mathematics **17**, 145001, pp 17, (2015).
- [14] J. LLIBRE; P.R. SILVA; M.A. TEIXEIRA. *Sliding vector fields via slow fast systems*, Bulletin of the Belgian Mathematical Society Simon Stevin 15, 851–869, (2008).
- [15] J. LLIBRE AND C. VALLS, *Polynomial, rational and analytic first integrals for a family of 3-dimensional Lotka-Volterra systems*, Z. Angew. Math. Phys. **62**, p. 761–777, (2011).
- [16] MACIEL, A. L.. *Bifurcações de Campos Vetoriais Descontínuos* [Phd Thesis]. São Paulo: IME/USP - Universidade de São Paulo, (2009).
- [17] R.M. MAY AND W.J. LEONARD, *Nonlinear aspects of competition between three species*, SIAM J. Appl. Math. **29** p. 243–253, (1975).
- [18] M.M. PEIXOTO, *Structural Stability on Two-dimensional Manifolds*, Topology **1** (1962).
- [19] L. PERKO, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer, 3rd edition, (2001).
- [20] J. SOTOMAYOR, *Generic bifurcations of dynamical systems*, In Dynamical Systems, M.M. Peixoto (ed.), Academic Press, Nova Iorque, p. 561–582, (1971).
- [21] SOTOMAYOR, J. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Rio de Janeiro. IMPA (Projeto Euclides), (1979).
- [22] J. SOTOMAYOR, A.L.F. MACHADO, *Structurally Stable Discontinuous Vector Fields in the Plane*, Qualitative Theory of Dynamical Systems, Lleida, v.3, p. 227–250, (2002).

- [23] J. SOTOMAYOR, M.A. TEIXEIRA, *Regularization of Discontinuous Vector Fields*, International Conference on Differential Equations, Lisboa, p. 207–223, (1996).



## TERMO DE REPRODUÇÃO XEROGRÁFICA

Autorizo a reprodução xerográfica do presente Trabalho de Conclusão, na íntegra ou em partes, para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_

---

Assinatura do autor