UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

João Manoel Soriano Pitot

Controlabilidade Exata para um Sistema de Equações de Onda Acopladas

São José do Rio Preto

2017

João Manoel Soriano Pitot

Controlabilidade Exata para um Sistema de Equações de Onda Acopladas

Tese apresentada como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós Graduação em Matemática, Área de Concentração - Equações Diferenciais Parciais, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Waldemar Donizete Bastos

São José do Rio Preto

2017

Pitot, João Manoel Soriano.
Controlabilidade exata para um sistema de equações de onda acopladas / João Manoel Soriano Pitot. -- São José do Rio Preto, 2017
78 f. : il.

Orientador: Waldemar Donizete Bastos
Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Equações diferenciais parciais. 3. Controle. 4. Klein-Gordon, Equações de. 5. Equação de onda. I. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. II. Título.
CDU – 517.944

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

João Manoel Soriano Pitot

Controlabilidade Exata para um Sistema de Equações de Onda Acopladas

Tese apresentada como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós Graduação em Matemática, Área de Concentração - Equações Diferenciais Parciais, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Waldemar Donizete Bastos
UNESP - São José do Rio Preto
Orientador

Prof^{a}. Dr^{a}. Andréa Cristina Prokopczyk Arita
UNESP - São José do Rio Preto

Prof^{a}. Dr^{a}. Juliana Conceição Precioso Pereira
UNESP - São José do Rio Preto

Prof. Dr. Carlos Alberto Raposo da Cunha
UFSJ - São João del Rei

Prof^{a}. Dr^{a}. Valéria Neves Domingos Cavalcanti
UEM - Maringá

São José do Rio Preto, 15 de agosto de 2017.

Dedico à minha
família e amigos.

Agradecimentos

Ao meu orientador, Prof. Dr. Waldemar Donizete Bastos, pela sua calma e serenidade, pelo conhecimento adquirido através de seus ensinamentos, pela confiança depositada em mim e por estar sempre presente desde o meu primeiro dia em São José do Rio Preto.

A meus pais Juan e Sara, meu irmão Paulo (Dis) por todo amor, força e coragem que me deram nessa minha primeira experiência longe de casa.

Ao Mizael de Melo, que me deu forças para lutar e superar as dificuldades, um parceiro que vou levar para o resto da minha vida.

As grandes amizades que formei nesta cidade: Matheus Nhoato, Gisele Carrocini, Levi Tessari, Mariane Daniella, Bruna Cabral, Danilo Teixeira, Carol Santos, Andrey Guarizo, Raduan Soleman, Aline Moura, Carlos Fossa, Rodrigo Capobianco, Andreza Santos, Adriano Góis, Lidiane Torres, entre outros que me proporcionaram momentos de alegria.

Aos meus amigos Rafael Paulino e Rogério Oliveira pelas conversas e dicas sobre a vida. A Laura Rezzieri e a Marta Suleiman pela ajuda que me deram durante o doutorado.

A minha família do vôlei e da natação da UNESP-Rio Preto pelos ótimos momentos passados nos treinos e nas competições.

A UNESP (campus São José do Rio Preto) e a CAPES, pelo respaldo financeiro.

E a todos que de forma direta ou indireta, contribuíram para a realização deste trabalho.

"Eu sei que o meu trabalho é uma gota no oceano, mas sem ele o oceano seria menor."

(Madre Teresa de Calcutá)

Resumo

Neste trabalho estudamos o problema de controlabilidade exata na fronteira para um sistema de equações de onda acopladas em paralelo, em domínios suave por partes do plano, sob ação de controle do tipo Neuman.

Utilizando o método empregado por D. L. Russell em [33] obtemos controlabilidade em tempo suficientemente grande para dados iniciais de energia finita e controle de quadrado integrável.

A fim de obter tempo de controle próximo a valores ótimos, procedemos como em [21]: estendemos a solução do problema de Cauchy para tempo complexo e provamos que o operador solução associado ao problema de Cauchy é compacto e depende analiticamente do tempo num setor adequado do plano complexo. Utilizando decaimento local de energia, analiticidade e compacidade do operador solução obtemos o resultado desejado.

Palavras-chave: Controlabilidade exata, sistema de equações de onda acopladas, controle tipo Neuman.

Abstract

In this work we study the problem of exact controllability on the boundary for a system of wave equations coupled in parallel, in piecewise smooth domains of the plane, under the action of control of Neuman type.

Using the method employed by D. L. Russell in [33] we obtain controllability in time sufficiently large for initial data of finite energy and square integrable control.

In order to obtain control time close to optimal values, we proceed as in [21]: we extend the solution of the Cauchy problem to complex time and we prove that the solution operator associated with the Cauchy problem is compact and depends analytically of the time in an appropriate sector of the complex plane. Using local decay of energy, analyticity and compactness of the solution operator we obtain the desired result.

Keywords: Exact controllability, coupled wave equation system, Neuman type control.

Sumário

Introdução

A área de pesquisa Controlabilidade para Equações Diferenciais Parciais (ou Sistemas Distribuídos) é uma sub-área da Teoria de Controle que tem se destacado devido à variedade de aplicações que possui na engenharia e nas ciências aplicadas em geral. Muitas vezes um sistema físico produz vibrações inconvenientes que podem causar danos graves e prejuízo de diversos tipos. A questão básica que se coloca frente a essa situação é: como eliminar tais vibrações? A fim de elucidar um pouco a discussão, suponhamos que tais vibrações ocorram numa região Ω do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ que representa o sistema físico e que tais vibrações sejam modeladas por uma equação de onda homogênea: $u_{tt} - \Delta u = 0$. A função $u = u(x,t)$ descreve o deslocamento da partícula $x \in \Omega$ no instante t de modo que $u_t(x,t)$ representa a velocidade de x naquele instante. Suponhamos conhecidas a posição e a velocidade inicial de cada partícula x, isto é; dispomos dos dados $u(x,0) = f(x)$ e $u_t(x,0) = g(x)$, $x \in \Omega$. Um problema de controle que se coloca é o de determinar um instante $T > 0$ e uma forma adequada de atuar na fronteira $\partial\Omega$ da região Ω, expressa pela condição $Bu(x,t) = h(x,t),\ x \in \partial\Omega,\quad 0 < t < T$, de modo que para todo estado inicial (f,g) possamos encontrar um controle h que faça com que a solução do problema de valor inicial e de contorno

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{em } \ \Omega\times]0,T[, \\ u(.,0) = f & \text{em } \ \Omega, \\ u_t(.,0) = g & \text{em } \ \Omega, \\ Bu = h & \text{em } \ \partial\Omega\times]0,T[, \end{cases} \tag{1}$$

satisfaça a condição final

$$u(x,T) = u_t(x,T) = 0 \ \text{ em } \ \Omega. \tag{2}$$

A condição (2) informa que a vibração cessou no instante T. Os espaços funcionais dos estados iniciais são escolhidos entre os espaços de Sobolev em concordância com o tipo de condição de fronteira e de domínio, de modo que se tenha a colocação correta do problema (1).

Nos últimos 50 anos, controlabilidade para equações hiperbólicas tem sido objeto de muito estudo e diversos métodos foram desenvolvidos. Os reviews [26] e [34] sintetizam boa parte das contribuições e métodos desenvolvidos até 1988. Os compêndios [11], [17], [18], [24], [25] e [36] dão suporte à teoria em desenvolvimento e constituem um excelente material de formação na área.

O objeto de estudo deste trabalho é um sistema de equações de onda acopladas em paralelo. A título de motivação, considere o sistema físico formado por m ($m = 2, 3, \dots$) membranas elásticas idênticas, acopladas paralelamente por camadas de molas. Suponha que o sistema vibre sem influência de força externa e que na posição de repouso as membranas se identificam com um domínio Ω do plano suspensas a determinadas alturas. Denotando por $u^i = u^i(x,t)$, $i = 1, \dots, m$, $x = (x_1, x_2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $t \geq 0$, o deslocamento da i-ésima membrana, medido a partir de sua posição de repouso, verifica-se que u^i satisfaz a equação

$$\begin{cases} u^i_{tt} - \Delta u^i + k_{i-1}(u^i - u^{i-1}) + k_i(u^i - u^{i+1}) = 0 & i = 1, \dots, m, \\ \quad u^0 \equiv u^{m+1} \equiv 0, \quad k_i \text{ constante real} & i = 0, 1, \dots, m. \end{cases} \tag{3}$$

A presença do termo $k_{i-1}(u^i - u^{i-1}) + k_i(u^i - u^{i+1})$ na i-ésima equação de onda reflete o efeito sobre a i-ésima membrana da ação das outras, situadas abaixo e acima dela. Para um sistema de duas membranas veja [28] e [32]. As constantes $k_0, \dots, k_m$ são determinadas pelo material que compõe a camada elástica (molas) entre as membranas. Introduzindo a matriz tridiagonal

$$A = \begin{bmatrix} k_0 + k_1 & -k_1 & & & & \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & & & \\ & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & & \\ & & -k_3 & \ddots & & \\ & & & & k_{m-2} + k_{m-1} & -k_{m-1} \\ & & & & -k_{m-1} & k_{m-1} + k_m \end{bmatrix}$$

e a notação $U = (u^1, \dots, u^m)^T$ (^{T} para transposição), $U_{tt} = (u^1_{tt}, \dots, u^m_{tt})^T$ e $\Delta U =$

$(\Delta u^1, \ldots, \Delta u^m)^T$ vemos que (3) se torna

$$U_{tt} - \Delta U + AU = 0. \tag{4}$$

Aqui $_{tt}$ denota a segunda derivada no tempo e Δ denota o Laplaciano em relação à variàvel espacial x. Entre as condições de fronteira que podemos impor às membranas estão aquelas que usualmente se impõe para equações de onda, como por exemplo a condição de Dirichlet: $U(x,t) = f(x,t)$, onde f tem como componentes m funções definidas para $x \in \partial\Omega$, $0 < t < T$; a condição de Neuman: $\frac{\partial U}{\partial \eta} = f$, onde $\frac{\partial}{\partial \eta}$ denota a derivada normal exterior ao longo da superfície cilíndrica $\partial\Omega\times]0,T[$, e a condição de Robin: $\alpha(x,t)U(x,t) + \beta(x,t)\frac{\partial U}{\partial \eta}(x,t) = f(x,t)$, onde α e β são funções conhecidas. É possível ainda colocarmos condições de fronteira diferentes em partes distintas da fronteira, bem como, condições de fronteira diferentes em diferentes membranas do sistema. Na condição de Neuman: $\frac{\partial U}{\partial \eta} = f$, se $f = (f_1, \ldots, f_m)^T$, a componente f_i representa uma força aplicada na borda da i-ésima membrana, perpendicularmente à direção do movimento.

Neste trabalho estudaremos um sistema do tipo (4), num domínio suave por partes do plano, com condições iniciais de energia finita (soluções fortes) e controle de fronteira do tipo Neuman em toda a fronteira ou em parte dela. Os resultados obtidos aqui estendem resultados apresentados em [7], onde foi tratado um sistema de duas membranas e controlabilidade em tempo grande. Aqui, tratamos com sistemas de ordem $m \geq 2$ e obtemos controlabilidade em tempo próximo ao valor ótimo.

Para cada domínio $\Xi \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3, \ldots$, denotamos $L^2(\Xi)$ e $H^1(\Xi)$ os espaços de Lebesgue e Sobolev usuais com suas respectivas normas $\|.\|_{L^2(\Xi)}$ e $\|.\|_{H^1(\Xi)}$. Em todo o trabalho, $A = [a_{ij}]$ é uma matriz real de ordem $m\times m$, a qual assumimos ser diagonalizável com autovalores

$$0 \leq \lambda_1 \leq ... \leq \lambda_m.$$

O principal resultado apresentado aqui é o seguinte Teorema:

Teorema Principal. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um polígono curvo, i.é., um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave por partes e sem cúspides. Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz real de ordem $m \times m$, diagonalizável com autovalores não negativos. Então, dado $T > diam(\Omega)$, para cada estado inicial (U_0, U_1) com $U_0 \in H^1(\Omega)^m$ e $U_1 \in L^2(\Omega)^m$, existe um controle $f \in L^2(\partial\Omega\times]0,T[)^m$ de modo que a solução $U \in H^1(\Omega\times]0,T[)^m$ do problema de valor inicial* *e fronteira*

$$\begin{cases} U_{tt} - \Delta U + AU = 0 \text{ em } \Omega\times]0,T[, \\ U(.,0) = U_0 \text{ em } \Omega, \\ U_t(.,0) = U_1 \text{ em } \Omega, \\ \dfrac{\partial U}{\partial \eta} = f \text{ em } \partial\Omega\times]0,T[, \end{cases} \tag{5}$$

satisfaz a condição final

$$U(x,T) = U_t(x,T) = 0 \text{ em } \Omega. \tag{6}$$

O método empregado é aquele introduzido por D. L. Russell em [33], em que procura-se uma extensão do estado inicial (U_0, U_1) que se anula no exterior de uma δ-vizinhança de Ω e de modo que a solução do problema de Cauchy com esses dados estendidos tenha estado nulo sobre Ω no instante T.

Para utilizar o método de Russell precisamos conhecer algumas propriedades do sistema

$$\begin{cases} U_{tt} - \Delta U + AU = 0 \text{ em } \mathbb{R}^{2+1}, \\ U(.,0) = U_0 \text{ em } \mathbb{R}^2, \\ U_t(.,0) = U_1 \text{ em } \mathbb{R}^2, \end{cases} \tag{7}$$

com $U_0 \in H_0^1(\Xi)^m$, $U_1 \in L^2(\Xi)^m$, U_0 e U_1 nulas no complementar de Ξ, onde $\Xi \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio limitado. Tal sistema está intimamente ligado à equação linear de Klein-Gordon, por isso vamos nos valer do estudo do seguinte problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \mu^2 u = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^{2+1}, \quad \mu \geq 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{em } \mathbb{R}^2, \\ u_t(x,0) = u_1(x) \quad \text{em } \mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{8}$$

Revisitaremos os estudos elaborados em [31] focando a analiticidade das soluções da equação de Klein-Gordon para tempo complexo.

No que se segue, passamos a descrever o presente trabalho. No capítulo 2 obtemos a fórmula explícita da solução u do problema de Cauchy (8) com dados iniciais $u_0, u_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Em seguida, definimos energia de solução, obtemos algumas estimativas à priori e definimos solução generalizada do problema de Cauchy (8) com dados iniciais em $H_0^1(\Xi) \times L^2(\Xi)$, se anulando no exterior de Ξ. Tomando nota de algumas propriedades da solução generalizada e usando a fórmula explícita da solução, conseguimos mostrar que a energia da solução generalizada decai localmente numa razão polinomial em relação aos seus dados iniciais.

No capítulo 3, para $T_0 > \mathrm{diam}(\Xi)$ fixo, associamos ao problema de Cauchy (8) com dados iniciais $(v_0, v_1) \in H_0^1(\Xi) \times L^2(\Xi)$ nulos no exterior de Ξ, o operador linear limitado e compacto

$$S_t : H_0^1(\Xi) \times L^2(\Xi) \longrightarrow H^1(\Xi) \times L^2(\Xi)$$

dado por

$$S_t(v_0, v_1)(x) = (v(x,t), v_t(x,t)), \;\; x \in \Xi, \tag{9}$$

para $t \geq T_0$, onde v é solução de (8) com dados iniciais $(v_0, v_1) \in H_0^1(\Xi) \times L^2(\Xi)$. Na sequência definimos o setor do plano complexo

$$\Sigma_0 = \left\{\xi;\, \xi = T_0 + z,\, z \in \mathbb{C},\, |\arg(z)| \leq \frac{\pi}{4}\right\}$$

e provamos que a aplicação

$$[T_0, \infty) \ni t \longrightarrow S_t \in B(H_0^1(\Xi) \times L^2(\Xi), H^1(\Xi) \times L^2(\Xi)),$$

onde $B(H_0^1(\Xi) \times L^2(\Xi), H^1(\Xi) \times L^2(\Xi))$ é o espaço dos operadores lineares e limitados definidos em $H_0^1(\Xi) \times L^2(\Xi)$ que tomam valores em $H^1(\Xi) \times L^2(\Xi)$, se estende ao parâmetro $\xi \in \Sigma_0$ de forma natural, trocando o parâmetro real t pelo parâmetro complexo $\xi \in \Sigma_0$, isto é,

$$S_\xi(v_0, v_1)(x) = (v(x,t), v_t(x,\xi)), \;\; x \in \Xi.$$

Além disso, provamos que tal extensão é um operador compacto e analítico no interior de Σ_0.

O capítulo 4 é dedicado a prova do Teorema Principal. A princípio, ao diagonalizar A, fazemos uma decomposição do sistema (7) com dados iniciais em $H_0^1(\Omega_\delta)^m \times L^2(\Omega_\delta)^m$, em m problemas de Cauchy para a equação de Klein-Gordon do tipo (8). Com isso, conseguimos aplicar os resultados dos capítulos 2 e 3 no sistema (7), como por exemplo, o decaimento local de energia.

Agora, discorreremos brevemente sobre a demonstração do Teorema Principal. Tomemos $(V_0, V_1) \in H_0^1(\Omega_\delta)^m \times L^2(\Omega_\delta)^m$ arbitrários e seja V a solução de (7)

$$\begin{cases} V_{tt} - \Delta V + AV = 0 \ \text{ em } \ \mathbb{R}^{2+1}, \\ V(.,0) = V_0 \ \text{ em } \ \mathbb{R}^2, \\ V_t(.,0) = V_1 \ \text{ em } \ \mathbb{R}^2, \end{cases} \tag{10}$$

com dados iniciais estedidos por zero em $\mathbb{R}^2 \backslash \Omega_\delta$. Para $T > T_0$ ($T_0 >$ diam(Ω_δ) fixo), considere

$$\mathbf{S}_T : H_0^1(\Omega_\delta)^m \times L^2(\Omega_\delta)^m \longrightarrow H^1(\Omega_\delta)^m \times L^2(\Omega_\delta)^m$$

o operador linear limitado associado ao sistema acima, dado por

$$\mathbf{S}_T(V_0, V_1)(x) = (V(x,t), V_t(x,t)), \ \ x \in \Omega_\delta. \tag{11}$$

Devido ao decaimento local de energia, temos a seguinte estimativa

$$\|\mathbf{S}_T(V_0,V_1)\|^2_{H^1(\Omega_\delta)^m \times L^2(\Omega_\delta)^m} \leq \frac{K}{T}^2 \left\{ \|V_0\|^2_{H^1(\Omega_\delta)^m} + \|V_1\|^2_{L^2(\Omega_\delta)^m} \right\}, \text{ para } T > T_0,$$

onde $K = K(\Omega_\delta, A, T_0)$ é uma constante positiva.

O método de controlabilidade de Russell nos mostra que o problema de controle (5) é equivalente a resolver uma equação da forma

$$(I - \mathbf{K}_T)(V_0, V_1) = (U_0, U_1), \tag{12}$$

onde $(U_0, U_1) \in H^1(\Omega)^m \times L^2(\Omega)^m$ são os dados iniciais como na hipótese do Teorema Principal e o operador $\mathbf{K}_T$ é um operador linear limitado compacto, obtido a partir de $\mathbf{S}_T$ satisfazendo

$$\|\mathbf{K}_T(V_0,V_1)\|^2_{H^1(\Omega)^m \times L^2(\Omega)^m} \leq \frac{Const.}{T^4} \|(V_0,V_1)\|^2_{H^1(\Omega)^m \times L^2(\Omega)^m},$$

para $T > T_0$.

Resulta da desigualdade acima que, para T suficientemente grande, o operador $\mathbf{K}_T$ é uma contração e, portanto, podemos resolver a equação (12). Com a solução (V_0, V_1) de (12) resolve-se um problema de Cauchy para o sistema de equações, cuja solução U tem estado inicial igual aos dados (U_0, U_1) e estado nulo no instante T, sobre o domínio

Ω. Para localizar o controle restringimos U ao cilindro $\Omega\times]0,T[$ e usamos um teorema de traço devido a D. Tataru [35].

O tempo de controle obtido acima não é ótimo, então na seção 4.4 estabelecemos uma relação entre o operador $\mathbf{S}_T$ associado ao problema de Cauchy (10) e o operador S_T associado ao problema de Cauchy (8). Devido a esta relação concluímos que a família de operadores $\{\mathbf{S}_T\}_{T>T_0}$ se estende ao parâmetro complexo $T = \xi \in \Sigma_0$ como uma família de operadores compactos, dependendo analiticamente de ξ. Isto garante que a família $\{\mathbf{K}_T\}_{T>T_0}$ também se estende analiticamente a uma família de operadores lineares compactos $\{\mathbf{K}_\xi\}_{\xi\in\Sigma_0}$. Aplicado o Teorema de Alternativas de Atkinson (Teorema 1.16) à família $\{\mathbf{K}_\xi\}_{\xi\in\Sigma_0}$, garantimos que a equação (12) tem solução em instantes T maiores que o valor $\operatorname{diam}(\Omega)$ e $T \approx \operatorname{diam}(\Omega)$.

Encerramos o capítulo 4 mostrando como o resultado pode ser estendido a um caso em que o controle atua somente numa parte da fronteira. Consideramos o caso em que as membranas são presas aos lados de um setor angular de ângulo central π/n, $n = 2, 3\ldots,$ como considerado no trabalho [6] para uma equação de onda.

Os resultados apresentados neste trabalho foram publicados em [5].

Capítulo

1

Preliminares

Neste capítulo vamos apresentar algumas definições e resultados usuais de Análise Funcional, Distribuições e Espaços de Sobolev que serão utilizados ao longo deste trabalho. Também apresentaremos dois resultados importantes que usaremos na demonstração do nosso resultado principal, um deles é um teorema de alternativas devido a F. V. Atkinson [4] e o outro é um teorema de traço apresentado por D. Tataru em [35].

1.1 Espaço de Sobolev

Seja $n \in \mathbb{N}$ um inteiro positivo e seja $\Xi \subset \mathbb{R}^n$ um domínio. Um multi-índice α é uma $n-$upla $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. Denotamos por

$$\partial^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

a derivada parcial de uma função u definida em Ξ, onde $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ e $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Xi$.

Dada uma função contínua $u : \Xi \longrightarrow \mathbb{R}$, o *suporte* de u, o qual denotamos por $\operatorname{supp}(u)$, é definido como o fêcho do conjunto $\{x \in \Xi;\, u(x) \neq 0\}$ em $\mathbb{R}^n$. Para a definição mais geral de suporte de funções veja [8]. Quando este conjunto for um compacto do $\mathbb{R}^n$, então dizemos que u possui suporte compacto. Vamos denotar por $C_0^\infty(\Xi)$ o conjunto de todas funções infinitamente diferenciáveis em Ξ e que tem suporte compacto contido em Ξ. Dotaremos o espaço $C_0^\infty(\Xi)$ com a topologia limite indutivo $\mathcal{L}$ e denotaremos por $\mathcal{D}(\Xi)$

o espaço topológico $(C_0^\infty(\Xi), \mathcal{L})$ (veja [12]). Desta forma, se $\{\varphi_\nu\}$ é uma sequência em $\mathcal{D}(\Xi)$ e $\varphi \in \mathcal{D}(\Xi)$, então prova-se que

$$\varphi_\nu \longrightarrow \varphi \quad \text{em} \quad D(\Xi) \tag{1.1}$$

se, e somente se, existe um conjunto compacto $K \subset \Xi$ tal que:

(i) supp$\,(\varphi_\nu) \subset K$, para todo $\nu \in \mathbb{N}$, e supp$\,(\varphi) \subset K$;

(ii) para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\partial^\alpha \varphi_\nu \longrightarrow \partial^\alpha \varphi$ uniformemente sobre K.

O espaço $\mathcal{D}(\Xi)$ é denominado o *espaço das funções teste* em Ξ.

Uma *distribuição* em Ξ é toda forma linear T em $\mathcal{D}(\Xi)$ que é contínua no sentido da convergência de $\mathcal{D}(\Xi)$, dada em (1.1). Denotaremos por $\mathcal{D}'(\Xi)$ o espaço vetorial de todas as distribuições em Ξ.

Seja $\{T_\nu\}$ uma sequência em $\mathcal{D}'(\Xi)$ e $T \in \mathcal{D}'(\Xi)$. Diremos que $T_\nu \longrightarrow T$ em $\mathcal{D}'(\Xi)$ se

$$\langle T_\nu, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle, \tag{1.2}$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\Xi)$. Muniremos o espaço $\mathcal{D}'(\Xi)$ com a topologia fraca dada pela convergência em (1.2).

Denotaremos por $L^1(\Xi)$ o espaço de Banach das (classes de equivalência de) funções reais ou complexas integráveis à Lebesgue em Ξ com a norma dada por

$$\|u\|_{L^1(\Xi)} = \int_\Xi |u(x)| dx, \quad u \in L^1(\Xi).$$

Uma função mensurável u definida no domínio Ξ é localmente integrável em Ξ se a restrição $u|_K \in L^1(K)$, para todo compacto K contido em Ξ. Neste caso denotamos $u \in L^1_{loc}(\Xi)$.

Prova-se facilmente que para $u \in L^1_{loc}(\Xi)$, o funcional linear T_u definido por $\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Xi u\varphi dx$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Xi)$, define uma distribuição em Ξ (veja [9]).

Considere uma distribuição T em Ξ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$. A *derivada* (no sentido das distribuições) de ordem α de T, denotada por $\partial^\alpha T$, é a distribuição definida por

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Xi). \tag{1.3}$$

Assim, toda distribuição é infinitamente derivável (veja [9], página 29). Se $u \in$

$L^1_{loc}(\Xi)$, denotamos $\partial^\alpha u$ a derivada $\partial^\alpha T_u$ da distribuição T_u.

Denotaremos por $L^2(\Xi)$ o espaço de Banach das (classes de equivalência de) funções reais ou complexas de quadrado integrável à Lebesgue em Ξ com norma dada por

$$\|u\|^2_{L^2(\Xi)} = \int_\Xi |u(x)|^2 dx, \ \ u \in L^2(\Xi).$$

Prova-se que $L^2(\Xi)$ é um espaço de Hilbert (real ou complexo), com produto interno dado por

$$\langle u, v\rangle_{L^2(\Xi)} = \int_\Xi u\overline{v} dx, \ \ u, v \in L^2(\Xi),$$

onde a barra na última igualdade denota a conjugação quando for o caso. (veja [8]).

Definição 1.1. *Seja m um inteiro positivo. O espaço de Sobolev $H^m(\Xi)$ é o subespaço de $L^2(\Xi)$ definido por*

$$H^m(\Xi) = \{f \in L^2(\Xi); \, \partial^\alpha f \in L^2(\Xi), \, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \, |\alpha| \leq m\}$$

e $H^0(\Xi) = L^2(\Xi)$.

O espaço $H^m(\Xi)$ é um espaço de Hilbert (veja [9]), com norma e produto interno definidos respectivamente por

$$\|u\|^2_{H^m(\Xi)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha u\|^2_{L^2(\Xi)} \quad \text{e} \quad \langle u, v\rangle_{H^m} = \sum_{|\alpha|\leq m} \langle \partial^\alpha u, \partial^\alpha v\rangle_{L^2(\Xi)}.$$

Das definições acima segue que $H^m(\Xi) \subset H^{m-1}(\Xi)$ e $\|.\|_{H^{m-1}(\Xi)} \leq \|.\|_{H^m(\Xi)}$, $m = 1, 2, \ldots$, ou seja, $H^m(\Xi)$ está continuamente imerso em $H^{m-1}(\Xi)$.

Sabemos que $C_0^\infty(\Xi)$ é denso em $L^2(\Xi)$ (veja [9]), mas não é sempre verdade que $C_0^\infty(\Xi)$ é denso em $H^m(\Xi)$ para $m \geq 1$. Motivado por esta razão, temos a seguinte definição.

Definição 1.2. *O espaço $H_0^m(\Xi)$ é o fêcho de $C_0^\infty(\Xi)$ em $H^m(\Xi)$, isto é,*

$$\overline{C_0^\infty(\Xi)}^{H^m(\Xi)} = H_0^m(\Xi).$$

Quando $\Xi = \mathbb{R}^n$, temos $H_0^m(\mathbb{R}^n) = H^m(\mathbb{R}^n)$ (veja [9]).

Definição 1.3. *Dizemos que* $u \in H^1_{loc}(\Xi)$ *se* $u|_A \in H^1(A)$*, para todo aberto* A *tal que* $\overline{A}$ *é compacto e* $\overline{A} \subset \Xi$*.*

Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície (variedade de dimensão $n-1$), de classe C^∞ e orientável. Existe em S o que, na literatura, é denominada "medida natural de S"ou "medida de Lebesgue em S", construída a partir de um atlas de S e da medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^{n-1}$, para maiores detalhes veja [22]. Tal medida independe do atlas considerado. Se

$$(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in O \subset \mathbb{R}^{n-1} \leftrightarrows (x_1, \ldots, x_{n-1}, \varphi(x_1, \ldots, x_n)) \in \Psi \subset S$$

é uma carta local e $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função mesurável com $\mathrm{supp}(f) \subset \Psi$, então

$$\int_S f dS = \int_O f(x_1, \ldots, x_{n-1}, \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})) \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)^2} dx_1 \ldots dx_{n-1},$$

onde a segunda integral é no sentido de Lebesgue. Mais geralmente, sem a hipótese $\mathrm{supp}(f) \subset \Psi$, define-se $\int_S f dS$ usando uma partição da unidade associada ao atlas considerado. Prova-se que tal definição independe da partição da unidade e do atlas considerado, ver [22].

O espaço $L^1(S)$ é o espaço das (classes de equivalência de) funções integráveis à Lebesgue em S com norma dada por

$$\|u\|_{L^1(S)} = \int_S |u| dS, \ \ u \in L^1(S).$$

Dizemos que $u \in L^1_{loc}(S)$ se $u.\chi_K \in L^1(S)$, para todo compacto $K \subset S$, onde χ_K denota a função característica de K.

O espaço $L^2(S)$ é o espaço das (classes de equivalência de) funções de quadrado integráveis à Lebesgue em S, com norma dada por

$$\|u\|^2_{L^2(S)} = \int_S |u|^2 dS, \ \ u \in L^2(S).$$

Dizemos que $u \in L^2_{loc}(S)$ se $|u|^2 \in L^1_{loc}(S)$. Uma superfície $S \subset \mathbb{R}^n$ é *suave por partes* se seu fêcho $\overline{S}$ em $\mathbb{R}^n$ admite uma decomposição

$$\overline{S} = \overline{S}_1 \cup \cdots \cup \overline{S}_k,$$

onde cada S_i, $i = 1, \ldots, k$, é parte aberta e conexa de superfície C^∞ e orientada de $\mathbb{R}^n$, com

$$S_i \cap S_j = \emptyset, \quad \text{para } i \neq j, \quad i, j = 1, \ldots, k.$$

Definição 1.4. *Um domínio limitado $\Xi \subset \mathbb{R}^n$ é* suave por partes *se sua fronteira $\partial\Xi$ é uma superfície suave por partes, sem pontos cuspidais, e Ξ situa-se em um mesmo lado de $\partial\Xi$.*

Domínios suave por partes são domínios Lipschitzianos. Logo, admitem a propriedade do prolongamento, isto é, funções $u \in H^m(\Xi)$ admitem extensão para $\mathbb{R}^n$ mantendo-se a regularidade (veja [29]).

1.2 Um teorema de traço de D. Tataru

Nesta seção vamos apresentar um teorema de traço provado por D. Tataru em [35] e adequa-lo aos nossos propósitos. Antes, apresentaremos algumas definições para nos localizar com os termos empregados no teorema.

Sejam $n \geq 3$ inteiro e $\Xi \subset \mathbb{R}^n$ um domínio. Seja $P(x, D)$ o *operador diferencial parcial hiperbólico*

$$P(x, D) = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) D_i D_j + \sum_{j=1}^{n} b^j(x) D_j + c(x), \;\; D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{1.4}$$

onde $a^{ij} = a^{ji}, b^j, c$ são funções reais de classe C^∞ definidas em Ξ. A *parte principal* do operador $P(x, D)$ é o operador

$$p(x, D) = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) D_i D_j,$$

cujo *símbolo* é o polinômio na variável $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ dado por

$$p(x, \xi) = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) \xi_i \xi_j,$$

Seja Σ a parte contida em Ξ de uma superfície C^∞ e orientável de $\mathbb{R}^n$, com vetor normal $\eta(x)$, $x \in \Sigma$. Dizemos que Σ é *não-característica* em relação ao operador $P(x, D)$ se

$$p(x, \eta(x)) \neq 0, \quad x \in \Sigma.$$

Uma superfície não-característica é do tipo *time-like* se

$$p(x, \eta(x)) < 0, \quad x \in \Sigma.$$

Definição 1.5. *Seja $\Sigma \subset \Xi$ uma superfície C^∞ orientável com vetor normal $\eta(x)$, $x \in \Sigma$, e seja $u \in C^\infty(\Xi)$. A* derivada conormal *de u, relativamente ao operador $P(x, D)$, ao longo de Σ é dada por*

$$\left(\partial_\Sigma^P u\right)(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \eta_j(x), \quad x \in \Sigma.$$

Definição 1.6. *Uma função $u \in H^1_{loc}(\Xi)$ admite traço $\partial_\eta^P u \in L^2_{loc}(\Sigma)$ se existe $g \in L^2_{loc}(\Sigma)$ tal que para toda sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in C^\infty(\Xi)$ e todo aberto O de Σ, com $\overline{O}$ compacto e $\overline{O} \subset \Sigma$, tem-se*

$$\partial_\eta^P u_n|_O \longrightarrow g \;\; em \;\; L^2(O).$$

Neste caso denotaremos

$$g = \partial_\eta^P u,$$

e chamamos $\partial_\eta^P u$ a derivada conormal *de $u \in H^1_{loc}(\Xi)$.*

Teorema 1.7 (D. Tataru [35], Teorema 2)**.** *Sejam $\Xi \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, um aberto, $P(x, D)$ o operador diferencial parcial hiperbólico dado em (1.4), $\Sigma \subset \Xi$ uma superfície orientável, C^∞, não-característica em relação à $P(x, D)$ do tipo time-like, com vetor normal $\eta(x)$, $x \in \Sigma$. Se $u \in H^1_{loc}(\Xi)$ é tal que $P(x, D)u \in L^2_{loc}(\Xi)$, então u admite traço*

$$\partial_\eta^P u \in L^2_{loc}(\Sigma).$$

Observação 1.8. *A título de ilustração e uso posterior, consideremos em $\mathbb{R}^{2+1} = \{(x, t),\, x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\, t \in \mathbb{R}\}$ o operador D'Alembertiano $P = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ e seja Σ uma superfície em $\mathbb{R}^{2+1}$ de classe C^∞ e orientável, com vetor normal $\eta(x, t) = (\eta_1(x, t), \eta_2(x, t), \eta_3(x, t))$ satisfazendo*

$$\eta_3(x, t)^2 < \eta_1(x, t)^2 + \eta_2(x, t)^2, \quad (x, t) \in \Sigma.$$

Se $u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^{2+1})$ é tal que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^{2+1}),$$

então u tem derivada conormal ao longo de Σ satisfazendo:

$$\partial^P_\eta u = \frac{\partial u}{\partial t}\eta_3 - \frac{\partial u}{\partial x_1}\eta_1 - \frac{\partial u}{\partial x_2}\eta_2 \in L^2_{loc}(\Sigma).$$

Se Σ é paralela ao eixo t, então $\eta_3 = 0$ e a derivada conormal reduz-se à derivada normal usual.

1.3 Operadores Lineares

Sejam X e Y espaços normados sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), cujas normas denotaremos por $\|.\|_X$ e $\|.\|_Y$, respectivamente. Representaremos por $B(X,Y)$ o conjunto de todos os operadores lineares limitados definidos em X que tomam valores em Y. Caso $X = Y$, denotamos apenas por $B(X)$. A norma de $T \in B(X,Y)$ é definida por

$$\|T\|_{B(X,Y)} = \sup\{\|Tx\|_Y;\, x \in X,\, \|x\|_X = 1\}.$$

O conjunto $B(X,Y)$ munido com a norma $\|.\|_{B(X,Y)}$ é um espaço vetorial normado. Se Y é um espaço de Banach, então $B(X,Y)$ também o é (veja [20]).

Vamos denotar por Y' o espaço dual de Y, que é o espaço de todos os operadores lineares limitados em Y que tomam valores em $\mathbb{K}$. Logo, Y' é um espaço de Banach munido da norma

$$\|f\|_{Y'} = \sup\{|f(y)|,\, y \in Y,\, \|y\|_Y = 1\}.$$

Um espaço normado Y é espaço de *Hilbert* se Y é espaço de Banach com norma induzida por algum produto interno. Um resultado importante na teoria dos espaços de Hilbert, o qual faremos uso no futuro, é o seguinte teorema:

Teorema 1.9 (Teorema da Representação de Riesz-Fréchet)**.** *Seja Y um espaço de Hilbert com produto interno $\langle .,. \rangle_Y$. Dado $f \in Y'$, existe um único $v \in Y$ tal que*

$$f(y) = \langle v, y\rangle_Y, \text{ para todo } y \in Y,$$

e $\|v\|_Y = \|f\|_{Y'}$.

Demonstração. Veja [10], página 171. □

Definição 1.10. *Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto, X e Y espaços de Banach sobre $\mathbb{C}$. Dizemos que uma função $T : D \longrightarrow B(X,Y)$, $\lambda \longmapsto T(\lambda)$ é* analítica *(ou fortemente analítica) em D se, para cada $\lambda_0 \in D$, existe $T'(\lambda_0) \in B(X,Y)$ tal que*

$$\left\| \frac{T(\lambda_0+\eta)-T(\lambda_0)}{\eta} - T'(\lambda_0) \right\|_{B(X,Y)} \longrightarrow 0, \quad \text{quando } \eta \longrightarrow 0.$$

O operador $T'(\lambda_0)$ é chamada derivada de T em λ_0.

Definição 1.11. *Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto, X e Y espaços de Banach sobre $\mathbb{C}$. Dizemos que $T : D \longrightarrow B(X,Y)$ é* fracamente analítica *em D se, para cada $\lambda_0 \in D$, o limite*

$$\lim_{\eta\to 0} \left| \frac{f(T(\lambda_0+\eta)x) - f(T(\lambda_0)x)}{\eta} \right|,$$

existe para cada $f \in Y'$ e cada $x \in X$.

Observação 1.12. *Sejam $T : D \longrightarrow B(X,Y)$ uma função analítica e $f \in Y'$, então $h := f \circ T : D \longrightarrow \mathbb{C}$ é analítica e vale $h'(\lambda_0) = f(T'(\lambda_0))$. De fato, para todo $x \in X$, vale*

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{f(T(\lambda+\lambda_0)x) - f(T(\lambda_0)x)}{\lambda} - f(T'(\lambda_0)x) \right| \\
&\qquad\qquad \le \|f\|_{Y'} \left\| \frac{T(\lambda+\lambda_0)x - T(\lambda_0)x}{\lambda} - T'(\lambda_0)x \right\|_Y \\
&\qquad\qquad \le \|f\|_{Y'} \left\| \frac{T(\lambda+\lambda_0) - T(\lambda_0)}{\lambda} - T'(\lambda_0) \right\|_{B(X,Y)} \|x\|_X.
\end{aligned}$$

Assim, quando $\lambda \longrightarrow 0$, o lado direito da desigualdade acima tende a zero, o que nos garante o resultado.

O resultado a seguir nos diz que a recíproca da observação acima também é verdadeira.

Teorema 1.13. *Sejam X e Y espaços de Banach sobre $\mathbb{C}$ e D um conjunto aberto de $\mathbb{C}$. Se para cada $x \in X$ e $f \in Y'$, a função $D \ni \lambda \longmapsto f(T(\lambda)x) \in \mathbb{C}$ é analítica, então $D \ni \lambda \longmapsto T(\lambda) \in B(X,Y)$ é analítica.*

Demonstração. Veja T. Kato [14], página 152. □

Em outras palavras, o teorema acima diz que analiticidade fraca acarreta analiticidade forte.

Teorema 1.14. *Seja $T \in B(X)$, onde X é um espaço de Banach. Se $\|T\|_{B(X)} < 1$, então $(I-T)^{-1}$ existe e é um operador linear limitado em todo X. Além disso, vale*

$$(I-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n,$$

onde $T^0 = I$.

Demonstração. Veja [20], página 375. □

Definição 1.15. *Um* autovalor *de $T \in B(X)$ é um escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $Tx = \lambda x$, para algum $x \neq 0$. A este x chamamos de* autovetor *de T correspondente ao autovalor λ.*

Definição 1.16. *Sejam X e Y espaços normados. Um operador $T : X \longrightarrow Y$ é denominado* compacto *se, para todo $M \subset X$ limitado, o fecho de $T(M)$ é compacto em Y. Ou seja, para toda sequência limitada $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, podemos extrair de $\{Tu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma subsequência convergente em Y.*

O próximo resultado, será aplicado aos problemas de controle aqui estudados visando obter tempo de controle próximos a valores ótimos.

Teorema 1.17 (Teorema de Alternativa de Atkinson)**.** *Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto, X um espaço de Banach complexo e*

$$\begin{aligned} T : D &\longrightarrow B(X) \\ \lambda &\longmapsto T(\lambda) \end{aligned}$$

uma função analítica.

Então vale uma e só uma das alternativas:

a) 1 é autovalor de $T(\lambda)$, para todo $\lambda \in D$.

b) Em cada compacto $M \subset D$, 1 é autovalor de $T(\lambda)$ apenas para um número finito de pontos $\lambda \in M$.

Demonstração. Veja T. Kato [14], página 370 ou [4]. □

Eventualmente, como na literatura [21], nos referiremos à analiticidade da função T em D afirmando que a família $\{T(\lambda) : \lambda \in D\}$ é analítica em D.

Capítulo

2

Um breve estudo da Equação de Klein-Gordon

Neste capítulo, consideraremos a equação de Klein-Gordon

$$u_{tt} - \Delta u + \mu^2 u = 0, \quad \mu \geq 0, \tag{2.1}$$

onde $_{tt}$ denota a segunda derivada em relação a variável $t \in \mathbb{R}$ e Δ é o operador Laplaciano em relação à variável espacial $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Deduziremos a fórmula explícita de sua solução e estudaremos algumas propriedades básicas do problema de Cauchy para (2.1).

2.1 A fórmula explícita da solução

O problema de Cauchy para a equação (2.1) consiste em determinar a solução da mesma em todo o espaço $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^{2+1} = \{(x,t); x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ e } t \in \mathbb{R}\}$ quando conhecidas as condições iniciais estabelecidas no instante $t = 0$. O problema de Cauchy para (2.1) é colocado na forma

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \mu^2 u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^{2+1}, \\ u(x,0) = f(x) & \text{em } \mathbb{R}^2, \\ u_t(x,0) = g(x) & \text{em } \mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{2.2}$$

Se $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, o problema de Cauchy acima possui uma única solução $u =$

$u(x,t) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2+1})$ e, para encontrar a sua fórmula explícita vamos definir a seguinte função complexa:

$$v(x_1,x_2,x_3,t) = e^{i\mu x_3}u(x_1,x_2,t).$$

Um cálculo direto nos mostra que v satisfaz o seguinte problema de Cauchy para a equação da onda

$$\begin{cases} v_{tt} - \Delta v = 0 & \text{em } \mathbb{R}^{3+1}, \\ v(x_1,x_2,x_3,0) = e^{i\mu x_3}f(x_1,x_2) & \text{em } \mathbb{R}^3, \\ v_t(x_1,x_2,x_3,0) = e^{i\mu x_3}g(x_1,x_2) & \text{em } \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

A fórmula explícita para este problema é dada pela conhecida fórmula de Kirchhoff (veja [13] pág. 129)

$$v(\overline{x},t) = \frac{1}{4\pi t}\int_{|y-\overline{x}|=t} e^{i\mu y_3}g(y_1,y_2)dS_y + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi t}\int_{|y-\overline{x}|=t} e^{i\mu y_3}f(y_1,y_2)dS_y\right],$$

onde $\overline{x} = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$, $|\,.\,|$ denota a distância euclidiana e dS_y é o elemento da área da esfera $|y-\overline{x}| = t$ em $\mathbb{R}^3$.

Agora procedemos como no método da descida de Hadamard (veja [13]). Observe que $dS_y = \frac{t}{\sqrt{t^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}}dy_1dy_2$. Fazendo $x_3 = 0$ e denotando $r = \sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}$ obtemos

$$\begin{aligned} u(x,t) = v(x,0,t) = \frac{1}{4\pi t}&\int_{r<t}\left[e^{i\mu|y_3|}+e^{-i\mu|y_3|}\right]g(y_1,y_2)\frac{t}{\sqrt{t^2-r^2}}dy_1dy_2 \\ &+\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi t}\int_{r<t}\left[e^{i\mu|y_3|}+e^{-i\mu|y_3|}\right]f(y_1,y_2)\frac{t}{\sqrt{t^2-r^2}}dy_1dy_2\right], \end{aligned}$$

onde $|y_3| = \sqrt{t^2-r^2}$.

Como $e^{i\mu|y_3|}+e^{-i\mu|y_3|} = 2\cos(\mu\sqrt{t^2-r^2})$, obtemos a fórmula que desejávamos, isto é,

$$\begin{aligned} u(x,t) = \frac{1}{2\pi}&\int_{r<t} g(y_1,y_2)\frac{\cos(\mu\sqrt{t^2-r^2})}{\sqrt{t^2-r^2}}dy_1dy_2 \\ &+\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{r<t} f(y_1,y_2)\frac{\cos(\mu\sqrt{t^2-r^2})}{\sqrt{t^2-r^2}}dy_1dy_2\right], \end{aligned} \tag{2.3}$$

para todo $x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ e todo $t > 0$.

Observação 2.1. *Se os dados iniciais $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ são tais que*

$$supp(f),\ supp(g) \subset \Xi,$$

para algum $\Xi \subset \mathbb{R}^2$ limitado, segue da representação (2.3) da solução u do problema de Cauchy (2.2) que

$$supp(u(.,t)),\ supp(u_t(.,t)) \subset \Xi_t,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, onde

$$\Xi_t = \{y \in \mathbb{R}^2 :\ |y-x| <\ |t|,\ x \in \Xi\} \subset \mathbb{R}^2, \quad (\Xi_0 = \Xi).$$

Também vale:

$$supp(u) \subset \Sigma(\Xi),$$

onde

$$\Sigma(\Xi) = \{(y,t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} :\ |y-x| \leq |t|,\ x \in \Xi\} \subset \mathbb{R}^3.$$

2.2 As estimativas de enegia

Na presente seção vamos definir energia da solução do problema de Cauchy (2.2) e obter estimativas que nos permitirão definir solução do mesmo problema quando os dados iniciais estiverem em espaços de Sobolev.

Seja u uma solução C^∞ da equação $u_{tt} - \Delta u + \mu^2 u = 0$. Multiplicando esta equação por u_t obtemos $u_t u_{tt} - u_t \Delta u + \mu^2 u_t u = 0$. Agora, observando que $u_t u_{tt} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}[u_t^2]$, $u_t \Delta u = \mathrm{Div}_x[u_t \nabla u] - [\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}|\nabla u|^2]$, onde Div_x é o divergente relativo à variável x, e $\mu^2 u_t u = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\mu^2}{2}u^2\right]$ temos

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}[u_t^2] - \mathrm{Div}_x[u_t \nabla u] + \left[\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}|\nabla u|^2\right] + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\mu^2}{2}u^2\right] = 0,$$

ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{\mu^2}{2}u^2\right] - \mathrm{Div}_x[u_t \nabla u] = 0. \tag{2.4}$$

A equação (2.4) é denominada equação de Klein-Gordon na forma divergente, pois definindo o campo $\overrightarrow{F} = \left(-u_t \nabla u, \frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{\mu^2}{2}u^2\right)$ podemos reescrever (2.4) na forma

$$\mathrm{Div}_{(x,t)}\overrightarrow{F} = 0,$$

onde $\mathrm{Div}_{(x,t)}$ é o divergente relativo à variável (x,t).

Sejam $B \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado e $t \geq 0$ um real positivo. A quantidade

$$\mathcal{E}(B,u,t) = \frac{1}{2}\int_B \left[u_t^2 + |\nabla u|^2 + \mu^2 u^2\right](x,t)\,dx$$

representa a *energia da solução* u no instante t confinada na região B. A quantidade $\mathcal{E}(\mathbb{R}^2,u,t)$ é a energia total de u no instante t.

Teorema 2.2. *Sejam $f,g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ tais que*

$$supp(f),\ supp(g) \subset \Xi,$$

para algum domínio limitado $\Xi \subset \mathbb{R}^2$ e u solução do problema de Cauchy (2.2) correspondente. Então $\mathcal{E}(\mathbb{R}^2,u,t) = \mathcal{E}(\mathbb{R}^2,u,0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, isto é,

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\left[u_t(x,t)^2 + |\nabla u(x,t)|^2 + \mu^2 u(x,t)^2\right]dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\left[g(x)^2 + |\nabla f(x)|^2 + \mu^2 f(x)^2\right]dx.$$

Demonstração. Suponhamos $t > 0$. Construa o cilindro $\Theta = \Xi_t \times [0,t] \subset \mathbb{R}^3$. Sendo u solução da equação de Klein-Gordon (na forma divergente), então vale $\mathrm{Div}_{(x,t)}\overrightarrow{F} = 0$. O teorema do divergente permite escrever:

$$0 = \iint\limits_{\Theta} \mathrm{Div}_{(x,t)}\ \overrightarrow{F} dydt = \int_{\partial\Theta} \overrightarrow{F}\cdot\nu dS.$$

Como o suporte de u está contido em $\Sigma(\Xi)$, então o campo $\overrightarrow{F}$ se anula numa vizinhança da superfície lateral de Θ. O vetor normal à fronteira de Θ é $\nu = (0,0,1)$ no topo de Θ e, $\nu = (0,0,-1)$ na base de Θ. Daí

$$0 = \int_{\partial\Theta} \overrightarrow{F}\cdot\nu dS = \int\limits_{topo\ de\ \Theta} \overrightarrow{F}\cdot(0,0,1)dS + \int\limits_{base\ de\ \Theta} \overrightarrow{F}\cdot(0,0,-1)dS.$$

Observando que a base e o topo de Θ são parametrizados em Ξ_t e $dS = dy$, segue

$$\int\limits_{topo\ de\ \Theta} \overrightarrow{F}\cdot(0,0,1)dS = \frac{1}{2}\int_{\Xi_t}[u_t^2 + |\nabla u|^2 + \mu^2 u^2](y,t)dy$$

e

$$\int_{base\ de\ \Theta} \overrightarrow{F} \cdot (0,0,-1)dS = -\frac{1}{2}\int_{\Xi_t} [g^2 + |\nabla f|^2 + \mu^2 f^2](y)dy.$$

Observando que $\Xi \subset \Xi_t$ e supp(f), supp$(g) \subset \Xi$, segue das identidades acima:

$$\frac{1}{2}\int_{\Xi_t} [u_t^2 + |\nabla u|^2 + \mu^2 u^2](y,t)dy = \frac{1}{2}\int_{\Xi} [g^2 + |\nabla f|^2 + \mu^2 f^2](y)dy. \qquad (2.5)$$

Por último, como $[u_t^2 + |\nabla u|^2 + \mu^2 u^2](y,t) = 0$ fora de Ξ_t podemos escrever

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} [u_t^2 + |\nabla u|^2 + \mu^2 u^2](y,t)dy = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} [g^2 + |\nabla f|^2 + \mu^2 f^2](y)dy.$$

Se $t < 0$, trocado $u(x,t)$ por $u(x,-t)$ vemos que $u(x,-t)$ satisfaz um problema análogo, logo o resultado vale para $t < 0$. □

Uma consequência de (2.5) é que a energia total da solução u se mantem constante com o passar do tempo. Todavia, o mesmo fenômeno não ocorre quando consideramos a energia confinada em uma região limitada de $\mathbb{R}^2$. A seguir, veremos que a energia local da solução do problema de Cauchy (2.2) decai com o passar do tempo.

Vamos definir para o mesmo terno (Ξ, u, t) a quantidade

$$E(\Xi, u, t) = \int_{\Xi} (u_t^2 + |\nabla u|^2 + u^2)(x,t)dx.$$

Usando as normas do espaço de Sobolev vemos que a expressão acima pode ser escrita como

$$E(\Xi, u, t) = \|u_t(.,t)\|^2_{L^2(\Xi)} + \|u(.,t)\|^2_{H^1(\Xi)}.$$

Claramente, para todo $t \geq 0$, vale

$$C_0 E(\Xi, u, t) \leq \mathcal{E}(\Xi, u, t) \leq C_1 E(\Xi, u, t), \qquad (2.6)$$

onde $C_0 = \min\{\frac{1}{2}, \frac{\mu^2}{2}\}$ e $C_1 = \max\{\frac{1}{2}, \frac{\mu^2}{2}\}$.

Consequentemente, se tomarmos $\Xi = \mathbb{R}^2$, segue de (2.6) e do Teorema 2.2

$$C_0 E(\mathbb{R}^2, u, t) \leq \mathcal{E}(\mathbb{R}^2, u, t) = \mathcal{E}(\mathbb{R}^2, u, 0) \leq C_1 E(\mathbb{R}^2, u, 0).$$

Definindo $C = \frac{C_1}{C_0}$, obtemos

$$E(\mathbb{R}^2, u, t) \leq C\, E(\mathbb{R}^2, u, 0),$$

ou ainda,

$$\|u(.,t)\|^2_{H^1(\mathbb{R}^2)} + \|u_t(.,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C \left(\|u(.,0)\|^2_{H^1(\mathbb{R}^2)} + \|u_t(.,0)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \right). \tag{2.7}$$

Mas, como dito na Observação 2.1, se os dados iniciais do problema de Cauchy possuem suportes contidos em um domínio $\Xi \subset \mathbb{R}^2$, então o suporte de $u(.,t)$ está contido em Ξ_t, para cada $t \neq 0$. Assim, a estimativa (2.7) pode ser reescrita como

$$\|u(.,t)\|^2_{H^1(\Xi_t)} + \|u_t(.,t)\|^2_{L^2(\Xi_t)} \leq C \left(\|u(.,0)\|^2_{H^1(\Xi)} + \|u_t(.,0)\|^2_{L^2(\Xi)} \right), \tag{2.8}$$

onde $C = C(\mu) > 0$ é uma constante que depende apenas de $\mu > 0$.

Nos referiremos à desigualdade (2.8) como estimativa de energia para a equação linear de Klein-Gordon. Ela tem um papel fundamental no estudo do problema de Cauchy para a equação de Klein-Gordon, pois nos permite provar que o problema de Cauchy é bem posto. Provaremos este fato mais adiante, mas antes consideremos o seguinte teorema:

Teorema 2.3. *Sejam $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ funções com suporte contido num domínio $\Xi \subset \mathbb{R}^2$ e $u = u(x,t)$ a solução do problema de Cauchy*

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \mu^2 u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^{2+1}, \\ u(x,0) = f(x) & \text{em } \mathbb{R}^2, \\ u_t(x,0) = g(x) & \text{em } \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Então,

$$\|u\|^2_{H^1(\Xi_T \times]-T,T[)} \leq 2CT \left\{ \|f\|^2_{H^1(\Xi)} + \|g\|^2_{L^2(\Xi)} \right\}, \tag{2.9}$$

para todo $T > 0$.

Demonstração. Seja $T > 0$. Se $|t| < T$, então $\Xi_{|t|} \subset \Xi_T$. A desigualdade (2.8) com $\Xi_t = \Xi_T$, quando integrada em relação à t no intervalo $[-T, T]$ fornece

$$\int_{-T}^{T} \left\{ \|u(.,t)\|^2_{H^1(\Xi_T)} + \|u_t(.,t)\|^2_{L^2(\Xi_T)} \right\} dt \leq 2CT \left\{ \|u(.,0)\|^2_{H^1(\Xi)} + \|u_t(.,0)\|^2_{L^2(\Xi)} \right\}.$$

Por último, usando o teorema de Fubini e a definição das normas dos espaços de Sobolev obtemos (2.9). $\square$

2.3 Solução generalizada

Nesta seção vamos definir e provar a existência de solução generalizada do problema de Cauchy para a equação linear de Klein-Gordon quando os dados iniciais pertencem ao espaço $H^1(\mathbb{R}^2) \times L^2(\mathbb{R}^2)$ e possuem suporte compacto.

Definição 2.4. *Sejam $f \in H^1(\mathbb{R}^2)$ e $g \in L^2(\mathbb{R}^2)$ funções que se anulam no complementar de um domínio limitado $\Xi \subset \mathbb{R}^2$ e, seja $\mu \geq 0$. A função $u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^{2+1})$ é solução generalizada, ou com energia finita, do problema de Cauchy*

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \mu^2 u = 0 & em\ \mathbb{R}^{2+1}, \\ u(x,0) = f(x) & em\ \mathbb{R}^2, \\ u_t(x,0) = g(x) & em\ \mathbb{R}^2, \end{cases} \tag{2.10}$$

se existir uma sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(\mathbb{R}^{2+1})$ tal que:

a) Para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^{2+1}$, com interior não vazio, tem-se

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \ \ em\ H^1(int(K));$$

b) $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}u_n - \Delta u_n + \mu^2 u_n = 0$ em $\mathbb{R}^{2+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

c) $\lim_{n\to\infty} u_n(x,0) = f(x)$ em $H^1(\mathbb{R}^2)$;

d) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\partial}{\partial t}u_n(x,0) = g(x)$ em $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Teorema 2.5. *Sejam $f \in H^1(\mathbb{R}^2)$ e $g \in L^2(\mathbb{R}^2)$ tais que $f \in H^1_0(\Xi)$, f e g se anulam no complementar do domínio limitado $\Xi \subset \mathbb{R}^2$. O problema de Cauchy (2.10) possui uma única solução generalizada $u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^{2+1})$, a qual depende continuamente dos dados iniciais.*

Demonstração. Sejam $f_n \in C_0^\infty(\Xi)$ tal que $f_n \longrightarrow f$ em $H^1(\mathbb{R}^2)$ e $g_n \in C_0^\infty(\Xi)$ tal que $g_n \longrightarrow g$ em $L^2(\mathbb{R}^2)$. Seja $u_n \in C^\infty(\mathbb{R}^{2+1})$ solução de (2.10) com dados iniciais f_n e g_n, respectivamente. Claramente valem $b)$, $c)$ e $d)$ da Definição 2.4.

Agora fixe $T > 0$ e considere $\Omega_T := \Xi_T \times]-T, T[$. Usando linearidade e aplicando (2.9) em $u_m - u_n$ tem-se

$$\|u_m - u_n\|^2_{H^1(\Omega_T)} \leq 2CT \left\{ \|f_m - f_n\|^2_{H^1(\Xi)} + \|g_m - g_n\|^2_{L^2(\Xi)} \right\},$$

de onde segue que exise $u^T \in H^1(\Omega_T)$ tal que

$$u_n \longrightarrow u^T \quad \text{em} \quad H^1(\Omega_T).$$

Se $0 < T_1 < T_2$, então $\Omega_{T_1} \subset \Omega_{T_2}$ e $u^{T_1} = u^{T_2}$ em Ω_{T_1}. Agora definimos u em $\mathbb{R}^{2+1}$ por

$$u(x,t) = u^T(x,t) \quad \text{se} \quad (x,t) \in \Omega_T.$$

Claramente, $u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^{2+1})$. Mais ainda, $u_n \longrightarrow u$ em $H^1(int(K))$ para cada compacto $K \subset \mathbb{R}^{2+1}$ com interior não vazio. Portanto, o problema (2.10) possui solução generalizada $u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^{2+1})$.

A estimativa (2.9) juntamente com a linearidade garante a unicidade de u, bem como a dependência contínua de u em relação aos dados iniciais. □

Vale observar que a solução generalizada se anula no exterior de $\Sigma(\Xi) = \{(y,t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R};\, |y - x| \leq |t|,\, x \in \Xi\}$.

2.4 Propriedades da solução generalizada

Os resultados desta seção mostrarão que o estado da solução do problema de Cauchy (2.10) em um dado instante t tem também energia finita, isto é, $\left(u(.,t), \frac{\partial}{\partial t}u(.,t)\right) \in H^1(\mathbb{R}^2) \times L^2(\mathbb{R}^2)$. Tal fato auxiliará na demonstração do decaimento local de energia da solução para o problema de Cauchy (2.10) com dados iniciais em $H^1(\mathbb{R}^2) \times L^2(\mathbb{R}^2)$.

Proposição 2.6. *Sejam $f \in H^1(\mathbb{R}^2)$ e $g \in L^2(\mathbb{R}^2)$ funções tais que $f \in H^1_0(\Xi)$, f e g se anulam no complementar de um domínio limitado $\Xi \subset \mathbb{R}^2$. Então a solução $u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^{2+1})$ do problema de Cauchy (2.10) tem traço $u(.,t) \in H^1(\mathbb{R}^2)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Por teoremas clássicos de traço (veja [8]), temos a existência do traço $u(.,t) \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Vamos mostrar que $u(.,t) \in H^1(\mathbb{R}^2)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Da Definição 2.4 de solução generalizada para o problema de Cauchy (2.10) existe uma sequência de soluções $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(\mathbb{R}^{2+1})$ de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}u_n + \Delta u_n + \mu^2 u_n = 0 & \text{em } \mathbb{R}^{2+1}, \\ u_n(.,0) = f_n(x) & \text{em } \mathbb{R}^2, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}u_n(.,0) = g_n(x) & \text{em } \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

onde $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$ em $H^1(int(K))$ para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^{2+1}$ com interior não vazio. Mais ainda

$$\lim_{n\to\infty} u_n(.,0) = \lim_{n\to\infty} f_n = f \text{ em } H^1(\mathbb{R}^2),$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\partial}{\partial t}u_n(.,0) = \lim_{n\to\infty} g_n = g \text{ em } L^2(\mathbb{R}^2).$$

Seja $T > 0$ (fixo). Para $m, n \in \mathbb{N}$, temos

$$\|u_m(.,t) - u_n(.,t)\|^2_{H^1(\mathbb{R}^2)} \le C\left\{\|f_m - f_n\|^2_{H^1(\Xi)} + \|g_m - g_n\|^2_{L^2(\Xi)}\right\},$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ tal que $|t| < T$.

Assim, para todo $t \in \mathbb{R}$ tal que $|t| < T$, existe $g_t \in H^1(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} u_n(.,t) = g_t \text{ em } H^1(\mathbb{R}^2).$$

Como este limite também vale em $L^2(\mathbb{R}^2)$ e, da definição de traço tem-se

$$\lim_{n\to\infty} u_n(.,t) = u(.,t) \text{ em } L^2(\mathbb{R}^2),$$

então, $g_t = u(.,t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ tal que $|t| < T$. Como T foi tomado arbitrariamente, então $u(.,t) = g_t \in H^1(\mathbb{R}^2)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. □

Proposição 2.7. *Sejam $\Xi \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado, $f \in H^1(\mathbb{R}^2)$, $g \in L^2(\Xi)$ tais que $f \in H^1_0(\Xi)$, f e g se anulam no complementar de Ξ. Seja $u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^{2+1})$ a solução do problema de Cauchy generalizado (2.10). Então, existe uma função $h \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^{2+1})$, tal que*

$$\mathbb{R} \ni t \longmapsto h(.,t) \in L^2(\mathbb{R}^2)$$

é contínua em todo $t \in \mathbb{R}$ e $\frac{\partial}{\partial t}u = h$, isto é, $\frac{\partial}{\partial t}u(.,t) \in L^2(\mathbb{R}^2)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Sejam $f_n \in C_0^\infty(\Xi)$ tal que $f_n \longrightarrow f$ em $H^1(\mathbb{R}^2)$ e $g_n \in C_0^\infty(\Xi)$ tal que $g_n \longrightarrow g$ em $L^2(\mathbb{R}^2)$. Seja $u_n \in C^\infty(\mathbb{R}^{2+1})$ solução de (2.10) com dados iniciais f_n e g_n respectivamente, e u a solução generalizada de (2.10) com dados iniciais f e g.

Seja $T > 0$ fixado. Usando as desigualdades (2.7) e (2.8) mais uma vez, obtemos

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} u_m(.,t) - \frac{\partial}{\partial t} u_m(.,t) \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C \left\{ \|f_m - f_n\|^2_{H^1(\Xi)} + \|g_m - g_n\|^2_{L^2(\Xi)} \right\},$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, $|t| < T$.

Logo, para cada $t \in \mathbb{R}$, com $|t| < T$, existe $h_t \in L^2(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\partial}{\partial t} u_n(.,t) = h_t \quad \text{em} \quad L^2(\mathbb{R}^2).$$

Definamos $h : [-T, T] \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$ por $h(t) = h_t$. Vamos provar que h é contínua, isto é, $h \in C([-T, T], L^2(\mathbb{R}^2))$. Fixemos $t_1 \in [-T, T]$ e $k \in \mathbb{R}$, $|k|$ pequeno.

Defina

$$U_n(x, t) = u_n(x, t + k) - u_n(x, t), \;\; x \in \mathbb{R}^2, \;\; t \in \mathbb{R}.$$

Observe que U_n satisfaz

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} U_n - \Delta U_n + \mu^2 U_n = 0 & \text{em} \quad \mathbb{R}^{2+1}, \\ U_n(x,0) = u_n(x,k) - u_n(x,0) & \text{em} \quad \mathbb{R}^2, \\ \dfrac{\partial}{\partial t} U_n(x,0) = \dfrac{\partial}{\partial t} u_n(x,k) - \dfrac{\partial}{\partial t}(x,0) & \text{em} \quad \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

e os dados iniciais $U_n(x, 0)$ e $\dfrac{\partial}{\partial t} U_n(x, 0)$ possuem suporte compacto.

Do Teorema 2.2, $\mathcal{E}(\mathbb{R}^2, U_n, t)$ permanece constante em relação ao tempo. Logo, $\mathcal{E}(\mathbb{R}^2, U_n, t_1) = \mathcal{E}(\mathbb{R}^2, U_n, t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Em particular, temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial}{\partial t} U_n(x, t_1) \right|^2 dx \leq \mathcal{E}(\mathbb{R}^2, U_n, t), \;\; t \in \mathbb{R},$$

que integrado em relação à t no intervalo $[-T, T]$ fornece

$$\begin{aligned} 2T \int_{\mathbb{R}^2} & \left| \frac{\partial}{\partial t} U_n(x, t_1) \right|^2 dx \\ & \leq \int_{-T}^{T} \int_{\mathbb{R}^2} \left\{ \left| \frac{\partial}{\partial t} U_n(x,t) \right|^2 + |\nabla U_n(x,t)|^2 + \mu^2 |U_n(x,t)|^2 \right\} dx dt. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Agora observe

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\partial}{\partial t}U_n(.,t_1)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\partial}{\partial t}u_n(.,t_1+k)-\frac{\partial}{\partial t}u_n(.,t_1)\right]=h_{t_1+k}-h_{t_1}\quad \text{em}\quad L^2(\mathbb{R}^2).$$

Temos ainda:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\partial}{\partial t}U_n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\partial}{\partial t}u_n(.,.+k)+\frac{\partial}{\partial t}u_n\right]=\frac{\partial}{\partial t}u(.,.+k)+\frac{\partial}{\partial t}u\quad \text{em}\quad L^2(\mathbb{R}\times[-T,T]),$$

já que $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=u$ em $H^1(\mathbb{R}^2\times]-T,T[)$, $|k|$ é pequeno e, também

$$\lim_{n\to\infty}\nabla U_n=\nabla u(.,.+k)+\nabla u\quad \text{em}\quad L^2(\mathbb{R}^2\times[-T,T])$$

pela mesma razão.

Agora, fazendo $n\longrightarrow\infty$ em (2.11), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2}|h_{t_1+k}(x)-h_{t_1}(x)|dx\le\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\int_{\mathbb{R}^2}\left\{\left|\frac{\partial}{\partial t}u(x,t+k)-\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\right|^2\right.$$
$$\left.+|\nabla u(x,t+k)-\nabla u(x,t)|^2+\mu^2|u(x,t+k)-u(x,t)|^2\right\}dxdt.$$

Usando o teorema da continuidade em L^2 (ver [37]), pág. 134) e fazendo $k\to 0$ vemos que cada parcela no lado direito da desigualdade acima tende a zero.

Logo,

$$\lim_{k\to 0}\int_{\mathbb{R}^2}|h_{t_1+k}(x)-h_{t_1}(x)|^2dx=0.$$

Assim, h é contínua em $t_1\in[-T,T]$. Como T foi tomado arbitrariamente, então h é contínua em $\mathbb{R}$. Denotamos $h(x,t)=h_t(x)$ e observamos que $h(.,t)\in L^2(\mathbb{R}^2)$.

Seja $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2+1})$ uma função teste. Para cada $t\in\mathbb{R}$, $\varphi(.,t)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Como $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\partial}{\partial t}u_n(.,t)=h(.,t)\in L^2(\mathbb{R}^2)$, para todo $t\in\mathbb{R}$, então

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\partial}{\partial t}u_n(x,t)\varphi(x,t)dx=\int_{\mathbb{R}^2}h(x,t)\varphi(x,t)dx$$

para todo $t\in\mathbb{R}$.

Seja $\Phi_n(t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial}{\partial t} u_n(x,t)\varphi(x,t)dx$. Pela desigualdade de Cauchy-Schwartz temos

$$|\Phi_n(t)| \leq \left\| \frac{\partial}{\partial t} u_n(.,t) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|\varphi(.,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Observe que da desigualdade (2.7) obtemos

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} u_n(.,t) \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C \left\{ \|f_n\|^2_{H^1(\Xi)} + \|g_n\|^2_{L^2(\Xi)} \right\},$$

para todo natural n e $t \in \mathbb{R}$. Logo,

$$\left\{ \left\| \frac{\partial}{\partial t} u_n(.,t) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

é limitada uniformemente em $t \in \mathbb{R}$.

Como φ tem suporte compacto em $\mathbb{R}^{2+1}$ concluímos que $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uniformemente limitada em $\mathbb{R}$. Logo, Φ_n é integrável em compactos de $\mathbb{R}$. Como Φ_n converge pontualmente para

$$\Phi(t) = \int_{\mathbb{R}^2} h(x,t)\varphi(x,t)dx,$$

segue que Φ é integrável em cada intervalo limitado I e

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial}{\partial t} u_n(x,t)\varphi(x,t)dxdt = \int_I \int_{\mathbb{R}^2} h(x,t)\varphi(x,t)dxdt.$$

Por outro lado, da definição de solução generalizada, segue que

$$\frac{\partial}{\partial t} u_n \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t} u \text{ em } L^2(K), \text{ com } K = \operatorname{supp}(\varphi).$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial}{\partial t} u_n(x,t)\varphi(x,t)dxdt = \int_I \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial}{\partial t} u(x,t)\varphi(x,t)dxdt,$$

onde I é escolhido de modo que $K \subset \mathbb{R}^2 \times I$. Assim,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{2+1}} \frac{\partial}{\partial t} u_n(x,t)\varphi(x,t)dxdt = \int_{\mathbb{R}^{2+1}} \frac{\partial}{\partial t} u(x,t)\varphi(x,t)dxdt,$$

para todo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2+1})$.

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^{2+1}} h\,\varphi dxdt = \int_{\mathbb{R}^{2+1}} \frac{\partial u}{\partial t}\,\varphi dxdt,$$

isto é, $h = \dfrac{\partial}{\partial t}u(.,t)$. $\square$

2.5 Decaimento de energia

Nesta seção provaremos que a energia local da solução do problema de Cauchy para a equação (2.1) decai numa razão polinomial em relação aos seus dados iniciais, para isso usaremos a sua fórmula explícita e os resultados da seção anterior.

Consideremos o seguinte problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \mu^2 u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^{2+1}, \\ u(x,0) = f(x) & \text{em } \mathbb{R}^2, \\ u_t(x,0) = g(x) & \text{em } \mathbb{R}^2, \end{cases} \tag{2.12}$$

onde $\mu \geq 0$ e os dados iniciais $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ tem suporte compacto contido em um domínio limitado Ξ de $\mathbb{R}^2$.

A fórmula explícita da solução do problema de Cauchy (2.12), para $t > 0$, foi dada em (2.3), a saber,

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial}{\partial t}\int_{|y-x|<t} \frac{\cos(\mu\sqrt{t^2-|y-x|^2})}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}\,f(y)dy \right. \\ \left. + \int_{|y-x|<t} \frac{\cos(\mu\sqrt{t^2-|y-x|^2})}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}g(y)dy\right].$$

Seja $T_0 > \operatorname{diam}(\Xi)$. Então $\Xi \subset \{y \in \mathbb{R}^2 : |y-x| < t,\, x \in \overline{\Xi}\}$, para todo $t \geq T_0$. Como os dados iniciais possuem suporte compacto em Ξ, podemos mudar o domínio de integração da expressão acima por Ξ, isto é,

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Xi} \frac{\cos(\mu\sqrt{t^2-|y-x|^2})}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}\,f(y)dy \right. \\ \left. + \int_{\Xi} \frac{\cos(\mu\sqrt{t^2-|y-x|^2})}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}g(y)dy\right], \tag{2.13}$$

para todo $x \in \overline{\Xi}$ e $t \geq T_0$.

Vamos estudar a fórmula (2.13). Para isso, introduziremos as seguintes funções

$$\gamma_k(x,y,t) = \frac{\cos(\mu\sqrt{t^2 - |y-x|^2})}{(t^2 - |y-x|^2)^{k/2}} \quad \text{e} \quad \theta_k(x,y,t) = \frac{\sin(\mu\sqrt{t^2 - |y-x|^2})}{(t^2 - |y-x|^2)^{k/2}}, \tag{2.14}$$

onde $x, y \in \overline{\Xi}$, $t \geq T_0$ e $k \in \mathbb{N}^*$.

Observe que (2.13) pode ser escrita como

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{\Xi} \gamma_1(x,y,t) g(y) dy + \frac{\partial}{\partial t}\int_{\Xi} \gamma_1(x,y,t) f(y) dy\right],$$

para todo $x \in \overline{\Xi}$ e todo $t \geq T_0$.

Afirmação: Para algum $\rho > 0$ vale

$$|\gamma_k(x,y,t)|,\ |\theta_k(x,y,t)| \leq \frac{\rho^k}{t^k} \leq \frac{\rho^k}{T_0^k}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{2.15}$$

para todo $x, y \in \overline{\Xi}$ e $t \geq T_0$.

De fato, consideremos a função

$$\chi(s) = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}, \quad -1 < s < 1.$$

Note que para $x, y \in \overline{\Xi}$ e todo $t \geq T_0$ temos

$$0 \leq \left|\frac{y-x}{t}\right| \leq \frac{\operatorname{diam}(\Xi)}{t} < 1.$$

Com isso, podemos reescrever as funções de (2.14) da seguinte forma

$$\gamma_k(x,y,t) = \frac{1}{t^k}\cos(\mu\sqrt{t^2 - |y-x|^2})\,\chi\left(\left|\frac{y-x}{t}\right|\right)^k, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{2.16}$$

$$\theta_k(x,y,t) = \frac{1}{t^k}\sin(\mu\sqrt{t^2 - |y-x|^2})\,\chi\left(\left|\frac{y-x}{t}\right|\right)^k, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{2.17}$$

Agora, escolhemos κ (fixo) de modo que

$$\frac{\operatorname{diam}(\Xi)}{T_0} < \kappa < 1$$

e tomamos $\rho = \max\{\chi(s);\ s \in [-\kappa, \kappa]\}$.

Assim, para $x, y \in \overline{\Xi}$ e $t \geq T_0$, tem-se

$$\frac{|y-x|}{t} \leq \frac{\text{diam}(\Xi)}{T_0} < \kappa,$$

o que acarreta

$$\chi\left(\left|\frac{y-x}{t}\right|\right) \leq \rho.$$

Portanto, de (2.16) e (2.17) obtemos

$$|\gamma_k(x,y,t)|,\ |\theta_k(x,y,t)| \leq \frac{\rho^k}{t^k} \leq \frac{\rho^k}{T_0^k},$$

para todo $x, y \in \overline{\Xi}$ e $t \geq T_0$, o que demonstra nossa afirmação.

Um cálculo direto fornece as fórmulas de diferenciação:

$$\frac{\partial}{\partial t}\gamma_k(x,y,t) = -\mu t\theta_{k+1}(x,y,t) - kt\gamma_{k+2}(x,y,t), \tag{2.18}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta_k(x,y,t) = \mu t\gamma_{k+1}(x,y,t) - kt\theta_{k+2}(x,y,t), \tag{2.19}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\gamma_k(x,y,t) = -\mu(y_i-x_i)\theta_{k+1}(x,y,t) - k(y_i-x_i)\gamma_{k+2}(x,y,t), \quad i=1,2, \tag{2.20}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\theta_k(x,y,t) = \mu(y_i-x_i)\gamma_{k+1}(x,y,t) - k(y_i-x_i)\theta_{k+2}(x,y,t), \quad i=1,2, \tag{2.21}$$

para as funções γ_k e θ_k. Observe que as derivadas de γ_k e θ_k são expressas como combinações lineares de funções dessas famílias. Em particular, obtemos derivadas de ordem superior de γ_1. Logo, $x \longmapsto \gamma_1(x,y,t)$ é de classe $C^\infty(\overline{\Xi})$ devido à desigualdade (2.15). Portanto, a derivação de qualquer ordem em (2.13) pode ser efetuada sob o sinal de integral.

Lema 2.8. *Seja $\Xi \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado, $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ funções com suporte compacto em Ξ e $\mu \geq 0$. Seja $u \in C^\infty(\mathbb{R}^{2+1})$ a solução do problema de Cauchy*

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \mu^2 u = 0 & em\ \mathbb{R}^{2+1}, \\ u(x,0) = f(x) & em\ \mathbb{R}^2, \\ u_t(x,0) = g(x) & em\ \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Para cada $T_0 > diam(\Xi)$, existe $C = C(\Xi, T_0, \mu) > 0$ tal que para todo multi-índice

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{N}^3$, *com* $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \leq 1$ *temos*

$$\left| \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial (x,t)^\alpha} u(x,t) \right| \leq \frac{C}{t} \left\{ \|f\|_{H^1(\Xi)} + \|g\|_{L^2(\Xi)} \right\}, \tag{2.22}$$

para todo $x \in \Xi$ *e* $t > T_0$.

Demonstração. Como visto anteriormente, a solução do problema de Cauchy do enunciado pode ser, para $t > T_0$, escrita como

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_\Xi \gamma_1(x,y,t) g(y) dy + \frac{\partial}{\partial t} \int_\Xi \gamma_1(x,y,t) f(y) dy \right].$$

Vamos estimar u e suas derivadas listadas em (2.22). Para isso usaremos as identidades (2.18)-(2.21). Assim, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\gamma_1(x,y,t) &= -\mu t \theta_2(x,y,t) - t\gamma_3(x,y,t), \\
\frac{\partial}{\partial x_i}\gamma_1(x,y,t) &= -\mu(y_i - x_i)\theta_2(x,y,t) - (y_i - x_i)\gamma_3(x,y,t), \quad i = 1,2, \\
\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial t}\gamma_1(x,y,t) &= -\mu^2 t (y_i - x_i)\gamma_3(x,y,t) + 3\mu t (y_i - x_i)\theta_4(x,y,t) \\
&\quad + 3t(y_i - x_i)\gamma_5(x,y,t), \quad i = 1,2, \\
\frac{\partial^2}{\partial t^2}\gamma_1(x,y,t) &= -\mu\theta_2(x,y,t) - \mu^2 t^2 \gamma_3(x,y,t) + 3\mu t^2 \theta_4(x,y,t) \\
&\quad - \gamma_3(x,y,t) + 3t^2\gamma_5(x,y,t).
\end{aligned}$$

Vamos usar as estimativas (2.15) nas identidades acima. Pondo $C_1 = \max\{\rho^\alpha;\ \alpha = 1,2,3,4,5\}$ e pela hipótese de $t > T_0 > \operatorname{diam}(\Xi)$, temos

$$\frac{|y_i - x_i|}{t} \leq \frac{\operatorname{diam}(\Xi)}{t} < 1,$$

o que resulta

$$\begin{aligned}
|\gamma_1(x,y,t)| &\leq \frac{1}{t} C_1, \\
\left| \frac{\partial}{\partial t}\gamma_1(x,y,t) \right| &\leq \frac{1}{t} C_1 \left\{ \mu + \frac{1}{T_0} \right\}, \\
\left| \frac{\partial}{\partial x_i}\gamma_1(x,y,t) \right| &\leq \frac{1}{t} C_1 \left\{ \mu + \frac{1}{T_0} \right\}, \quad i = 1,2, \\
\left| \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial t}\gamma_1(x,y,t) \right| &\leq \frac{1}{t} C_1 \left\{ \mu^2 + \frac{3\mu}{T_0^2} + \frac{3}{T_0^2} \right\}, \quad i = 1,2,
\end{aligned}$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial t^2}\gamma_1(x,y,t)\right| \leq \frac{1}{t}C_1\left\{\mu^2+\frac{4\mu}{T_0}+\frac{4}{T_0^2}\right\},$$

para todo $x, y \in \overline{\Xi}$ e $t > T_0$.

Agora, calculamos cada uma das derivadas de $u = u(x,t)$ para $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ com $|\alpha| \leq 1$ e utilizamos as estimativas acima para obter

$$\left|\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial(x,t)^\alpha}u(x,t)\right| \leq \frac{C_2}{2\pi t}\left\{\int_\Xi |f(y)|dy + \int_\Xi |g(y)|dy\right\},$$

para todo $x \in \overline{\Xi}$ e $t > T_0$, onde $C_2 > 0$ é uma constante que depende de μ, C_1 e T_0.

Usando a desigualdade de Hölder e a majoração $\|.\|_{L^2(\Xi)} \leq \|.\|_{H^1(\Xi)}$ obtemos

$$\left|\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial(x,t)^\alpha}u(x,t)\right| \leq \frac{C_2|\Xi|^{1/2}}{2\pi t}\left\{\|f\|_{H^1(\Xi)}+\|g\|_{L^2(\Xi)}\right\},\ x\in\Xi,\ t>T_0,$$

onde $|\Xi|$ denota a medida de Lebesgue de Ξ. Definindo $C = \dfrac{C_2|\Xi|^{1/2}}{2\pi}$, obtemos (2.22). $\square$

Sob as hipóteses do Lema 2.8, segue

$$\left|\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial(x,t)^\alpha}u(x,t)\right|^2 \leq \frac{\mathbf{C}}{t^2}\{\|f\|^2_{H^1(\Xi)}+\|g\|^2_{L^2(\Xi)}\},\ x\in\Xi,\ t>T_0, \tag{2.23}$$

onde $\mathbf{C} = 2C^2 > 0$.

Da estimativa (2.23) temos as seguintes desigualdades:

$$\begin{aligned} |u(x,t)|^2 &\leq \frac{\mathbf{C}}{t^2}\{\|f\|^2_{H^1(\Xi)}+\|g\|^2_{L^2(\Xi)}\}, \\ \left|\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\right|^2 &\leq \frac{\mathbf{C}}{t^2}\{\|f\|^2_{H^1(\Xi)}+\|g\|^2_{L^2(\Xi)}\}, \\ \left|\frac{\partial}{\partial x_i}u(x,t)\right|^2 &\leq \frac{\mathbf{C}}{t^2}\{\|f\|^2_{H^1(\Xi)}+\|g\|^2_{L^2(\Xi)}\},\ i=1,2. \end{aligned}$$

Integrando as desigualdades acima em Ξ e depois somando-as, obtemos

$$\|u(.,t)\|^2_{H^1(\Xi)}+\|u_t(.,t)\|^2_{L^2(\Xi)} \leq \frac{K}{t^2}\left\{\|f\|^2_{H^1(\Xi)}+\|g\|^2_{L^2(\Xi)}\right\},\ \ t>T_0, \tag{2.24}$$

onde $K = 4\mathbf{C}|\Xi| > 0$.

De posse de (2.24) podemos provar o seguinte teorema:

Teorema 2.9 (Decaimento Local de Energia)**.** *Sejam $f \in H^1(\mathbb{R}^2)$ e $g \in L^2(\mathbb{R}^2)$ funções tais que $f \in H_0^1(\Xi)$, f e g se anulam no complementar do domínio limitado $\Xi \subset \mathbb{R}^2$ e $T_0 > diam(\Xi)$. Então, existe uma constante $K = K(\Xi, T_0, \mu) > 0$ tal que a solução generalizada $u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^{2+1})$ do problema de Cauchy*

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \mu^2 u = 0 & em\ \mathbb{R}^{2+1}, \\ u(x,0) = f(x) & em\ \mathbb{R}^2, \\ u_t(x,0) = g(x) & em\ \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

satisfaz

$$\|u(.,t)\|^2_{H^1(\Xi)} + \|u_t(.,t)\|^2_{L^2(\Xi)} \leq \frac{K}{t^2}\left(\|f\|^2_{H^1(\Xi)} + \|g\|^2_{L^2(\Xi)}\right), \tag{2.25}$$

para todo $t > T_0$.

Demonstração. Como $C_0^\infty(\Xi)$ é denso em $H_0^1(\Xi)$ e $L^2(\Xi)$, existem sequências $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Xi)$ tais que

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \quad \text{em} \quad H^1(\Xi), \tag{2.26}$$

$$\lim_{n\to\infty} g_n = g \quad \text{em} \quad L^2(\Xi). \tag{2.27}$$

Seja $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(\mathbb{R}^{2+1})$, onde para cada $n \in \mathbb{N}$, u_n é a solução clássica do problema de Cauchy para equação linear de Klein-Gordon com dados iniciais f_n e g_n. Da prova do Teorema 2.5 vemos que a solução u satisfaz $u_n \longrightarrow u$ em $H^1(int(K))$ para todo compacto K com interior não vazio. Mais ainda, das Proposições 2.6 e 2.7 temos

$$\lim_{n\to\infty} u_n(.,t) = u(.,t) \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^2), \tag{2.28}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\partial}{\partial t} u_n(.,t) = \frac{\partial}{\partial t} u(.,t) \quad \text{em} \quad L^2(\mathbb{R}^2), \tag{2.29}$$

para cada $t \in \mathbb{R}$.

Aplicando a desigualdade (2.24) na função u_n temos

$$\|u_n(.,t)\|^2_{H^1(\Xi)} + \left\|\frac{\partial}{\partial t} u_n(.,t)\right\|^2_{L^2(\Xi)} \leq \frac{K}{t^2}\left\{\|f_n\|^2_{H^1(\Xi)} + \|g_n\|^2_{L^2(\Xi)}\right\},$$

para todo $x \in \Xi$ e $t > T_0$.

Passando o limite nesta última desigualdade e usando (2.26) - (2.29), obtemos a estimativa (2.25). □

Capítulo

3

Extensão analítica de uma família de operadores

Neste capítulo definiremos uma família parametrizada em $[T_0, \infty)$ de operadores compactos que estão associados ao problema de Cauchy para a equação linear de Klein-Gordon. Em seguida, mostraremos que tal família admite uma extensão ao parâmetro complexo, analítica numa região apropriada. Essas propriedades exercerão um papel fundamental para a resolução do controle exato na fronteira para um sistema de equações de onda.

Comecemos com a definição da família de operadores. Sejam $\Xi \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado e $\mu \geq 0$. Em todo este capítulo consideraremos o seguinte problema de Cauchy

$$\begin{cases} v_{tt} - \Delta v + \mu^2 v = 0 & \text{em } \mathbb{R}^{2+1}, \\ v(x,0) = v_0(x) & \text{em } \mathbb{R}^2, \\ v_t(x,0) = v_1(x) & \text{em } \mathbb{R}^2, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $v_0 \in H^1(\mathbb{R}^2)$, $v_1 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ são tais que $v_0 \in H_0^1(\Xi)$, v_0 e v_1 se anulam no complementar de Ξ.

Como visto no Teorema 2.5, o problema de Cauchy (3.1) possui uma única solução generalizada $v \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^{2+1})$ a qual é obtida como o limite de uma sequência de soluções clássicas

$$v_n(x,t) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial}{\partial t}\int_{|y-x|<t}\gamma_1(x,y,t)v_{0,n}(y)dy + \int_{|y-x|<t}\gamma_1(x,y,t)v_{1,n}(y)dy\right],$$

em que $v_{0,n}, v_{1,n} \in C_0^\infty(\Xi)$, $n = 1, 2, \ldots$ e

$$v_{0,n} \longrightarrow v_0 \text{ em } H^1(\mathbb{R}^2),$$

$$v_{1,n} \longrightarrow v_0 \text{ em } L^2(\mathbb{R}^2).$$

Fixemos $T_0 > \operatorname{diam}(\Xi)$. Como visto na seção 2.5, podemos mudar o domínio de integração da fórmula explícita de $v_n(x,t)$ por Ξ, sempre que $t \geq T_0$. Usando as relações (2.18) - (2.21), a estimativa (2.15) e o teorema da convergência dominada na passagem do limite à sequência de soluções clássicas, vemos que, para todo $t > T_0$, a solução generalizada v e sua derivada v_t podem ser representadas por

$$v(x,t) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial}{\partial t}\int_\Xi \gamma_1(x,y,t)v_0(y)dy + \int_\Xi \gamma_1(x,y,t)v_1(y)dy\right], \quad x \in \overline{\Xi}$$

e

$$v_t(x,t) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial}{\partial t}\int_\Xi \gamma_1(x,y,t)v_1(y)dy + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_\Xi \gamma_1(x,y,t)v_0(y)dy\right], \quad x \in \overline{\Xi}.$$

Mais precisamente temos

$$v(x,t) = \frac{1}{2\pi}\left[-\mu t\int_\Xi \theta_2(x,y,t)v_0(y)dy - t\int_\Xi \gamma_3(x,y,t)v_0(y)dy + \int_\Xi \gamma_1(x,y,t)v_1(y)dy\right], \tag{3.2}$$

e

$$\begin{aligned} v_t(x,t) = \frac{1}{2\pi}\Big[&-\mu\int_\Xi \theta_2(x,y,t)v_0(y)dy - \mu^2t^2\int_\Xi \gamma_3(x,y,t)v_0(y)dy \\ &+ 3\mu t^2\int_\Xi \theta_4(x,y,t)v_0(y)dy - \int_\Xi \gamma_3(x,y,t)v_0(y)dy \\ &+ 3t^2\int_\Xi \gamma_5(x,y,t)v_0(y)dy \\ &-\mu t\int_\Xi \theta_2(x,y,t)v_1(y)dy - t\int_\Xi \gamma_3(x,y,t)v_1(y)dy\Big], \end{aligned} \tag{3.3}$$

para todo $x \in \overline{\Xi}$ e $t > T_0$.

Usado novamente (2.18) - (2.21) juntamente com a estimativa (2.15) vemos que, para todo $t > T_0$, podemos derivar v e v_t indefinidamente em relação à x, para todo $x \in \overline{\Xi}$.

Assim, as funções

$$x \longmapsto v(x,t),$$

$$x \longmapsto v_t(x,t)$$

são de classe $C^\infty(\overline{\Xi})$ para todo $t > T_0$.

Agora, para cada $t > T_0 > \operatorname{diam}(\Xi)$ seja

$$S_t : H_0^1(\Xi) \times L^2(\Xi) \longrightarrow H^1(\Xi) \times L^2(\Xi)$$

dado por

$$S_t(v_0, v_1)(x) = (v(x,t), v_t(x,t)), \quad x \in \Xi. \tag{3.4}$$

A este operador denominamos *operador solução* associado à equação de Klein-Gordon. Como observado acima, a imagem de S_t está em $C^\infty(\overline{\Xi}) \times C^\infty(\overline{\Xi})$. Logo, do Teorema de Rellich, para todo $t > T_0 > \operatorname{diam}(\Xi)$, S_t é um operador compacto.

3.1 Extensão da família $\{S_t\}_{t \geq T_0}$

Nesta seção mostraremos que a família de operadores $\{S_t\}_{t \geq T_0}$, parametrizada na semi-reta $[T_0, +\infty)$, estende ao parâmetro complexo $t = \xi \in \Sigma_0$, onde

$$\Sigma_0 = \left\{ \xi : \ \xi = T_0 + z; \ z \in \mathbb{C}, |\arg(z)| \leq \frac{\pi}{4} \right\}.$$

Para isso usaremos as fórmulas (3.2), (3.3) e um argumento usado por J. Lagnese [21] para a equação da onda. Além disso, provaremos que $\{S_\xi\}_{\xi \in \Sigma_0}$ é uma família de operadores compactos.

Proposição 3.1. *A aplicação*

$$[T_0, \infty) \ni t \longrightarrow S_t \in B(H_0^1(\Xi) \times L^2(\Xi), H^1(\Xi) \times L^2(\Xi))$$

estende-se para $\xi \in \Sigma_0$, da forma natural, trocando o parâmetro real t pelo parâmetro complexo $\xi \in \Sigma_0$, isto é,

$$S_\xi(v_0, v_1)(x) = (v(x,\xi), v_t(x,\xi)), \ \ x \in \Xi. \tag{3.5}$$

Demonstração. Pela definição de S_t em (3.4), basta provar que as aplicações

$$[\, T_0, \infty\,) \ni t \longmapsto \quad v(x,t), \ \text{descrita em (3.2)}$$

$$[\, T_0, \infty\,) \ni t \longmapsto \quad v_t(x,t), \ \text{descrita em (3.3)}$$

se estendem para o parâmetro complexo $\xi \in \Sigma_0$, para todo $x \in \Xi$. De fato, por (3.2) e (3.3) vemos que $v(x,t)$ e $v_t(x,t)$ são combinações lineares de

$$t^p \int_\Xi \gamma_\nu(x,y,t)f(y)dy \quad \text{e} \quad t^q \int_\Xi \theta_k(x,y,t)f(y)dy, \tag{3.6}$$

onde $p, q \in \{0,1,2\}$, $\nu \in \{1,3,5\}$, $k \in \{2,4\}$, $f \in \{v_0, v_1\}$ e $x \in \overline{\Xi}$, $t \geq T_0$.

Verificaremos a regularidade dessas integrais para o parâmetro $t = \xi \in \Sigma_0$. Seja $\xi = T_0 + z \in \Sigma_0$. Como $|\arg(z)| \leq \dfrac{\pi}{4}$, temos

$$\mathrm{Re}(z) \geq 0 \quad \text{e} \quad \left|\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right| \leq 1 \implies |\mathrm{Re}(z)| \geq |\mathrm{Im}(z)|. \tag{3.7}$$

Sejam $x, y \in \overline{\Xi}$. Usando as informações em (3.7), calculamos

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\xi^2 - |y-x|^2) &= T_0^2 + 2T_0\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z)^2 - \mathrm{Im}(z)^2 - |y-x|^2 \\ &\geq T_0^2 - |y-x|^2 = T_0^2\left(1 - \left|\frac{y-x}{T_0}\right|^2\right).\end{aligned}$$

Tomando κ de tal forma que

$$\frac{\mathrm{diam}(\Xi)}{T_0} < \kappa < 1,$$

obtemos

$$\mathrm{Re}(\xi^2 - |y-x|^2) \geq T_0^2(1-\kappa^2). \tag{3.8}$$

Assim, temos

$$|\xi^2 - |y-x|^2| \geq |\mathrm{Re}(\xi^2 - |y-x|^2)| \geq T_0^2(1-\kappa^2) \tag{3.9}$$

e também, por (3.8), garantimos que $\left|\arg(\xi^2 - |x-y|^2)\right| \leq \dfrac{\pi}{2}$.

Fixando $x, y \in \overline{\Xi}$, escolhemos o ramo da função multivalente $(\xi^2 - |y-x|^2)^{1/2}$ em que a parte real é positiva, assim obtemos uma função analítica

$$\Sigma_0 \ni \xi \longmapsto (\xi^2 - |y-x|^2)^{1/2},$$

com valores contidos no setor

$$\Sigma_\kappa = \left\{\xi : \xi = \sqrt{1-\kappa^2}T_0 + z, |\arg(z)| \leq \frac{\pi}{4}\right\}.$$

Agora, das identidades (2.14) ($t=\xi\in\Sigma_0$) em conjunto com a desigualdade (3.9), obtemos as seguintes estimativas:

$$|\gamma_k(x,y,\xi)| \leq \frac{\left|\cos(\mu\sqrt{\xi^2-|y-x|^2})\right|}{T_0^k(1-\kappa^2)^{k/2}} \quad \text{e} \quad |\theta_k(x,y,\xi)| \leq \frac{\left|\sin(\mu\sqrt{\xi^2-|y-x|^2})\right|}{T_0^k(1-\kappa^2)^{k/2}}, \tag{3.10}$$

para todo $x,y\in\overline{\Xi}$, $\xi\in\Sigma_0$ e $k=1,2,\ldots$.

Como visto acima, $(\xi^2-|x-y|^2)^{1/2}$ tomam valores em Σ_κ para todo $x,y\in\overline{\Xi}$, o que implica que as funções

$$\cos(\mu\sqrt{\xi^2-|y-x|^2}) \quad \text{e} \quad \sin(\mu\sqrt{\xi^2-|y-x|^2})$$

são localmente limitadas como funções de ξ, para todo $x,y\in\overline{\Xi}$.

Assim, para $V_{\xi_0}=\{\xi\in\mathbb{C} : |\xi-\xi_0|<r\}$ contida no interior de Σ_0 existe uma constante $C_{V_{\xi_0}}>0$ tal que

$$\left|\cos(\mu\sqrt{\xi^2-|y-x|^2})\right|, \left|\sin(\mu\sqrt{\xi^2-|y-x|^2})\right| \leq C_{V_{\xi_0}},$$

para todo $\xi\in V_{\xi_0}$ e $x,y\in\overline{\Xi}$.

Logo, da estimativa acima junto com (3.10), resulta

$$|\gamma_k(x,y,\xi)|, |\theta_k(x,y,\xi)| \leq \frac{C_{V_{\xi_0}}}{T_0^k(1-\kappa^2)^{k/2}}, \quad k=1,2,..., \tag{3.11}$$

para todo $x,y\in\overline{\Xi}$ e $\xi\in V_{\xi_0}$.

As estimativas (3.11) nos mostram que as integrais (3.6) estão bem definidas para $t=\xi\in\Sigma_0$. Como v e v_t são combinações lineares de integrais do tipo (3.6), então podemos estende-las ao setor complexo Σ_0 trocando o parâmetro real t pelo parâmetro complexo $\xi\in\Sigma_0$. □

Agora, para provar que S_ξ é compacto para todo $\xi\in\Sigma_0$, usaremos o seguinte resultado:

Proposição 3.2. *Para cada $\xi\in\Sigma_0$, as funções*

$$x \longmapsto v(.,\xi),$$
$$x \longmapsto \frac{\partial}{\partial\xi}v(.,\xi),$$

são de classe $C^\infty(\overline{\Xi})$.

Antes de demonstrar a Proposição 3.2 teceremos algumas considerações. Sejam

$$P_0 : H^1(\Xi) \times L^2(\Xi) \longrightarrow \quad H^1(\Xi),$$
$$P_1 : H^1(\Xi) \times L^2(\Xi) \longrightarrow \quad L^2(\Xi),$$

as projeções em relação à primeira e segunda entradas de $H^1(\Xi)\times L^2(\Xi)$, respectivamente.

Como

$$P_0 S_\xi(v_0, v_1) = v(.,\xi),$$
$$P_1 S_\xi(v_0, v_1) = v_\xi(.,\xi),$$

então, segue da Proposição 3.2 que a imagem dos operadores P_0S_ξ e P_1S_ξ estão contidos em $C^\infty(\overline{\Xi})$, para todo $\xi \in \Sigma_0$. Daí, concluímos que $\{P_0S_\xi\}_{\xi\in\Sigma_0}$ e $\{P_1S_\xi\}_{\xi\in\Sigma_0}$ são famílias de operadores compactos e, portanto, $\{S_\xi\}_{\xi\in\Sigma_0}$ também o é.

Para provar a Proposição 3.2, usaremos o resultado abaixo:

Lema 3.3. *As derivadas*

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^l \gamma_k(x,y,\xi),\ \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^l \theta_k(x,y,\xi),\ x,y\in\Xi,\ \xi\in\Sigma_0,$$

são expressas como combinação linear de termos da forma $(y_i-x_i)^m\theta_{k+\nu}$ *e* $(y_i-x_i)^s\gamma_{k+r}$*, onde* $r,s,m,\nu\in\mathbb{N}$ *tais que* $r,\nu\leq 2l$ *e* $m,s\leq l$*.*

Demonstração. Faremos a prova por indução em l. Por (2.20) e (2.21) o resultado segue para $l=1$.

Vamos supor que o resultado vale para $l-1$, isto é, $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{l-1}\gamma_k$ e $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{l-1}\theta_k$ são combinações lineares de termos do tipo

$$(y_i-x_i)^m\theta_{k+\nu} \quad \text{e} \quad (y_i-x_i)^s\gamma_{k+r},$$

onde $r,\nu\leq 2(l-1)$ e $m,s\leq l-1$.

Usando as fórmulas (2.20) e (2.21) segue que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big((y_i-x_i)^m\theta_{k+\nu}\Big) =& -m(y_i-x_i)^{m-1}\theta_{k+\nu}+\mu(y_i-x_i)^{m+1}\gamma_{k+\nu+1}\\ &-(k+\nu)(y_i-x_i)^{m+1}\theta_{k+\nu+2}\end{aligned} \tag{3.12}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big((y_i-x_i)^s\gamma_{k+r}\Big) =& -s(y_i-x_i)^{s-1}\gamma_{k+r}-\mu(y_i-x_i)^{s+1}\theta_{k+r+1}\\ &-(k+r)(y_i-x_i)^{s+1}\gamma_{k+r+2}.\end{aligned} \tag{3.13}$$

Para (3.12), observe que a potenciação do termo (y_i-x_i) é no máximo $m+1$, mas pela hipótese indutiva $m\leq l-1$, então $m+1\leq l$. Note também que os subíndices nas funções do lado direito da igualdade de (3.12) são no máximo $k+\nu+2$, mas sabemos que $\nu\leq 2(l-1)$, então $\nu+2\leq 2l$. De forma análoga, observando (3.13), verifica-se que $s+1\leq l$ e $r+2\leq 2l$.

Assim concluímos que para $x,y\in\Xi$ e $\xi\in\Sigma_0$, as derivadas $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^l\gamma_k$ e $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^l\theta_k$ são combinações lineares de termos

$$(y_i-x_i)^m\theta_{k+\nu}\quad\text{e}\quad(y_i-x_i)^s\gamma_{k+r},$$

com $m,s\leq l$ e $\nu,r\leq 2l$. $\square$

Demonstração da Proposição 3.2. Vamos mostrar que as derivadas parciais $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^l$, $l=1,2,\ldots$, $i=1,2$, das aplicações

$$\begin{aligned}&x\longmapsto v(.,\xi),\\ &x\longmapsto \frac{\partial}{\partial\xi}v(.,\xi),\end{aligned}$$

existem para todo $x\in\Xi$.

De fato, na demonstração da Proposição 3.1, vimos que $v(.,\xi)$ e $\frac{\partial}{\partial\xi}v(.,\xi)$ são combinações lineares das integrais do tipo (3.6) ($t=\xi\in\Sigma_0$), a saber

$$\xi^p\int_\Xi\gamma_\nu(x,y,\xi)f(y)dy\quad\text{e}\quad\xi^q\int_\Xi\theta_k(x,y,\xi)f(y)dy, \tag{3.14}$$

onde $p,q\in\{0,1,2\}$, $\nu\in\{1,3,5\}$, $k\in\{2,4\}$, $f\in\{v_0,v_1\}$ e $x\in\overline{\Xi}$, $\xi\in\Sigma_0$.

No Lema 3.3, foi visto que

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^l\gamma_k(x,y,\xi)\quad\text{e}\quad\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^l\theta_k(x,y,\xi)$$

são combinações lineares de funções da forma

$$(y_i-x_i)^m\gamma_{k+\nu}(x,y,\xi)\quad\text{e}\quad(y_i-x_i)^s\theta_{k+r}(x,y,\xi),$$

onde $r,\nu \leq 2l$ e $m,s \leq l$.

Como Ξ é um domínio limitado e ξ está fixo, segue de (3.11) que $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)^l \gamma_k(x,y,\xi)$ e $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)^l \theta_k(x,y,\xi)$ são limitadas em $\overline{\Xi}$. Assim podemos efetuar a derivada $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)^l$ sob o sinal de integral em cada uma das expressões (3.14).

Como as funções de x

$$x \longmapsto \gamma_k(x,y,\xi),$$

$$x \longmapsto \theta_k(x,y,\xi),$$

são de classe $C^l(\overline{\Xi})$ $(l = 1,2\ldots)$, concluímos que $v(.,\xi)$ e $\dfrac{\partial v}{\partial \xi}(.,\xi)$ são $C^\infty(\overline{\Xi})$. $\square$

3.2 Analiticidade da família $\{S_\xi\}_{\xi\in\Sigma_0}$

Neste parágrafo vamos mostrar que a aplicação

$$\Sigma_0 \ni \xi \longrightarrow S_\xi \in B(H_0^1(\Xi)\times L^2(\Xi), H^1(\Xi)\times L^2(\Xi)),$$

onde S_ξ foi definida em (3.5), é analítica no interior do setor Σ_0. Para isso mostraremos que a família de operadores compactos $\{P_0 S_\xi\}_{\xi\in\Sigma_0}$ e $\{P_1 S_\xi\}_{\xi\in\Sigma_0}$ são analíticas no interior de Σ_0, onde P_0 e P_1 são aplicações projeção, já definidas na seção anterior.

Proposição 3.4. *As aplicações*

$$\Sigma_0 \ni \xi \quad\longmapsto\quad P_0 S_\xi \in B(H_0^1(\Xi)\times L^2(\Xi), H^1(\Xi)), \tag{3.15}$$

$$\Sigma_0 \ni \xi \quad\longmapsto\quad P_1 S_\xi \in B(H_0^1(\Xi)\times L^2(\Xi), L^2(\Xi)), \tag{3.16}$$

são analíticas no interior do setor Σ_0.

Demonstração. Provaremos somente a analiticidade para a aplicação (3.15), pois para a função (3.16) o processo é análogo. Como analiticidade fraca acarreta analiticidade forte (ver Teorema 1.12), basta mostrar que a aplicação

$$\Sigma_0 \ni \xi \longmapsto F\left(P_0 S_\xi(v_0,v_1)\right) \in \mathbb{C}, \;\; (v_0,v_1)\in H_0^1(\Xi)\times L^2(\Xi),$$

é analítica, para todo $F \in (H^1(\Xi))'$.

Pelo Teorema da Representação de Riesz (veja Teorema 1.8), temos a existência de um único $w \in H^1(\Xi)$ tal que

$$F\left(P_0 S_\xi(v_0,v_1)\right) = \left\langle P_0 S_\xi(v_0,v_1), w\right\rangle_{H^1(\Xi)}.$$

Logo, provar a analiticidade de (3.15) se resume a mostrar a analiticidade da seguinte aplicação

$$\Sigma_0 \ni \xi \longmapsto F_0(\xi) := \langle P_0 S_\xi(v_0, v_1), w\rangle_{H^1(\Xi)} \in \mathbb{C}, \quad w \in H^1(\Xi),$$

onde $(v_0, v_1) \in H_0^1(\Xi) \times L^2(\Xi)$.

Sabendo que $P_0 S_\xi(v_0, v_1) = v(., \xi)$, temos

$$\langle P_0 S_\xi(v_0, v_1), w\rangle_{H^1(\Xi)} = \int_\Xi v(x,\xi)\overline{w(x)}dx + \sum_{i=1}^{2}\int_\Xi \frac{\partial}{\partial x_i}v(x,\xi)\overline{\frac{\partial}{\partial x_i}w(x)}dx.$$

Por (3.2), sabemos que $v(x,\xi)$ é uma combinação linear de termos da forma (3.6) (com $t = \xi \in \Sigma_0$), isto é:

$$\xi^p \int_\Xi \gamma_\nu(x,y,\xi)f(y)dy \quad \text{e} \quad \xi^q \int_\Xi \theta_k(x,y,\xi)f(y)dy,$$

onde $p, q \in \{0,1\}$, $\nu \in \{1,3\}$, $k = 2$, $f \in \{v_0, v_1\}$ e $x \in \overline{\Xi}$, $\xi \in \Sigma_0$.

Agora usando as fórmulas (2.20) e (2.21) temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i}\gamma_k(x,y,\xi) &= -\,\mu(y_i - x_i)\theta_{k+1}(x,y,\xi) - k(y_i - x_i)\gamma_{k+2}(x,y,\xi),\\
\frac{\partial}{\partial x_i}\theta_k(x,y,\xi) &= \mu(y_i - x_i)\gamma_{k+1}(x,y,\xi) - k(y_i - x_i)\theta_{k+2}(x,y,\xi),
\end{aligned}$$

mostrando que $\dfrac{\partial}{\partial x_i}v(x,\xi)$ é combinação linear de integrais do tipo

$$\xi^p \int_\Xi \gamma_\nu(x,y,\xi)(y_i - x_i)f(y)dy \quad \text{e} \quad \xi^q \int_\Xi \theta_k(x,y,\xi)(y_i - x_i)f(y)dy,$$

onde $f \in \{v_0, v_1\}$ e $p, q, k, \nu \in \mathbb{N}^*$.

Em geral, $v(x,\xi)$ e $\dfrac{\partial}{\partial x_i}v(x,\xi)$ são combinações lineares de

$$\xi^p \int_\Xi \gamma_\nu(x,y,\xi)(y_i - x_i)^s f(y)dy \quad \text{e} \quad \xi^q \int_\Xi \theta_k(x,y,\xi)(y_i - x_i)^s f(y)dy,$$

onde $s \in \{0,1\}$, $f \in \{v_0, v_1\}$ e $p, q, k, \nu \in \mathbb{N}^*$. Daí, segue que $\langle P_0 S_\xi(v_0, v_1), w\rangle_{H^1(\Xi)}$ é uma combinação linear de

$$\int_\Xi \xi^p \int_\Xi \gamma_\nu(x,y,\xi)(y_i - x_i)^s f(y)\overline{\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^l w(x)}dydx \tag{3.17}$$

e

$$\int_\Xi \xi^q \int_\Xi \theta_k(x,y,\xi)(y_i-x_i)^s f(y)\overline{\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^l w(x)}dydx, \tag{3.18}$$

onde $s,l\in\{0,1\}$, $f\in\{v_0,v_1\}$ e $p,q,k,\nu\in\mathbb{N}^*$.

Tomemos $\psi(x,y)=(y_i-x_i)^s f(y)\overline{\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^l w(x)}$ em (3.17) e (3.18). Deste modo, para provar a analiticidade de F_0 no interior de Σ_0 é suficiente mostrar a analiticidade das seguintes aplicações

$$\begin{aligned}
\Sigma_0 \ni \xi &\longrightarrow \xi^p \int_{\Xi\times\Xi} \psi(x,y)\gamma_\nu(x,y,\xi)dxdy, &(3.19)\\
\Sigma_0 \ni \xi &\longrightarrow \xi^p \int_{\Xi\times\Xi} \psi(x,y)\theta_k(x,y,\xi)dxdy. &(3.20)
\end{aligned}$$

Com efeito, de (2.18) e (2.19) temos as seguintes identidades (com $t=\xi$)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\xi}\gamma_\nu(x,y,\xi) &= -\mu\xi\theta_{\nu+1}(x,y,\xi)-\nu\xi\gamma_{\nu+2}(x,y,\xi),\ \ \nu=1,2,\ldots\\
\frac{\partial}{\partial\xi}\theta_k(x,y,\xi) &= \mu\xi\gamma_{k+1}(x,y,\xi)-k\xi\theta_{k+2}(x,y,\xi),\ \ k=1,2,\ldots,
\end{aligned}$$

para todo $x,y\in\Xi$ e $\xi\in\Sigma_0$.

Seja ξ_0 um ponto arbitrário no interior de Σ_0 e V_{ξ_0} uma bola aberta centrada em ξ_0 e contida no interior de Σ_0. Devido a (3.11), temos a seguinte estimativa

$$|\gamma_k(x,y,\xi)|\,,|\theta_k(x,y,\xi)|\le\frac{C_{V_{\xi_0}}}{T_0^k(1-\kappa^2)^{k/2}},\quad k=1,2,...,$$

para todo $x,y\in\overline{\Xi}$ e $\xi\in V_{\xi_0}$.

Assim, concluímos que $\left|\frac{\partial}{\partial\xi}\gamma_\nu(x,y,\xi)\right|$ e $\left|\frac{\partial}{\partial\xi}\theta_k(x,y,\xi)\right|$ são limitados em $\overline{\Xi}\times\overline{\Xi}\times V_{\xi_0}$. Como ψ é integrável no conjunto limitado $\Xi\times\Xi$ temos

$$\begin{aligned}
\int_{\Xi\times\Xi}\left|\frac{\partial}{\partial\xi}\gamma_\nu(x,y,\xi)\psi(x,y)\right|dxdy &\le Const\int_{\Xi\times\Xi}|\psi(x,y)|\,dxdy,\\
\int_{\Xi\times\Xi}\left|\frac{\partial}{\partial\xi}\theta_k(x,y,\xi)\psi(x,y)\right|dxdy &\le Const\int_{\Xi\times\Xi}|\psi(x,y)|\,dxdy,
\end{aligned}$$

para todo $x,y\in\Xi$, $\xi\in V_{\xi_0}$.

Isto nos garante que a derivada pode ser efetuada sob o sinal de integral em (3.19) e (3.20) com respeito a $\xi\in V_{\zeta_0}$. Portato, F_0 é analítica no interior Σ_0. $\square$

Capítulo

4

Controlabilidade Exata para um Sistema de Equações de Onda

O objetivo deste capítulo é estudar controle para o sistema de m $(m = 2, 3, \dots)$ equações de onda acopladas

$$\begin{cases} U_{tt} - \Delta U + AU = 0 & \text{em } \Omega \times]0, T[, \\ U(., 0) = U_0 & \text{em } \Omega, \\ U_t(., 0) = U_1 & \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial U}{\partial \eta} = f & \text{sob } \partial\Omega \times]0, T[, \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$. O vetor unitário normal exterior η é definido quase sempre em $\partial\Omega$. Denotamos por $\frac{\partial U}{\partial \eta}$ a derivada normal de $U = (u^1, \dots, u^m)^T$, $U_{tt} = (u^1_{tt}, \dots, u^m_{tt})^T$ e $\Delta U = (\Delta u^1, \dots, \Delta u^m)^T$, sendo Δ o operador Laplaciano. $A = [a_{ij}]_{m \times m}$ é uma matriz real diagonalizável com autovalores não negativos.

O sistema (4.1) pode ser utilizado para modelar fenômenos físicos em que corpos elásticos estão conectados por camadas elásticas. Por exemplo, seguindo a idéia de S. Kelly e C. Nicely ([15], vigas), apresentamos um sistema de m membranas idênticas conectadas paralelamente por camadas elásticas.

Suponha que o sistema vibre sem influência de força externa e que na posição de repouso as membranas se identificam com um domínio Ω do plano suspensas a determinadas alturas. Denotando por $u^i = u^i(x,t)$, $i = 1,\dots,m$, $x = (x_1,x_2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $t \geq 0$, o deslocamento da i-ésima membrana medido a partir de sua posição de repouso, verifica-se que u^i satisfaz a equação

$$\begin{cases} u^i_{tt} - \Delta u^i + k_{i-1}(u^i - u^{i-1}) + k_i(u^i - u^{i+1}) = 0 & i = 1,\dots,m, \\ u^0 \equiv u^{m+1} \equiv 0, \quad k_i \ \text{constante real} & i = 0,1,\dots,m. \end{cases}$$

A presença do termo $k_{i-1}(u^i - u^{i-1}) + k_i(u^i - u^{i+1})$ na i-ésima equação de onda reflete o efeito sobre a i-ésima membrana da ação das outras, situadas abaixo e acima dela.

O sistema acima, quando colocado na forma de (4.1), nos fornece a matriz de acoplamento A que é dada por

$$A = \begin{bmatrix} k_0+k_1 & -k_1 & & & & \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 & & & \\ & -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & & \\ & & -k_3 & \ddots & & \\ & & & & k_{m-2}+k_{m-1} & -k_{m-1} \\ & & & & -k_{m-1} & k_{m-1}+k_m \end{bmatrix}$$

e é uma matriz diagonalizável.

Um problema de controle para o sistema (4.1) consiste em encontrar um tempo finito $T > 0$ tal que para cada estado inicial (U_0, U_1) pertencente a um espaço de funções, existe uma função controle f atuando na fronteira $\partial\Omega$, no intervalo de tempo $]0,T[$, de modo que a solução de (4.1) satisfaça $U(.,T) = U_t(.,T) = 0$ em Ω.

Antes de enunciar o resultado principal é necessário estabelecer os espaços de funções que usaremos. Para um domínio limitado arbitrário $\Xi \subset \mathbb{R}^n$ $(n = 1,2,3,\dots)$, vamos introduzir o espaço produto $\mathcal{C}^\infty(\Xi) = C^\infty(\Xi) \times \cdots \times C^\infty(\Xi) = [C^\infty(\Xi)]^m$, o espaço $\mathcal{H}^1(\Xi) = H^1(\Xi) \times \cdots \times H^1(\Xi) = [H^1(\Xi)]^m$ com norma

$$\|U\|_{\mathcal{H}^1(\Xi)} = \left[\|u^1\|^2_{H^1(\Xi)} + \cdots + \|u^m\|^2_{H^1(\Xi)}\right]^{1/2}, \quad U = (u^1,\dots,u^m)^T \in \mathcal{H}^1(\Xi),$$

e o espaço produto $\mathcal{L}^2(\Xi) = L^2(\Xi) \times \cdots \times L^2(\Xi) = [L^2(\Xi)]^m$ com norma

$$\|U\|_{\mathcal{L}^2(\Xi)} = \left[\|u^1\|^2_{L^2(\Xi)} + \cdots + \|u^m\|^2_{L^2(\Xi)}\right]^{1/2}, \quad U = (u^1,\dots,u^m)^T \in \mathcal{L}^2(\Xi).$$

Seguindo o mesmo raciocínio, definimos $\mathcal{H}^1_{loc}(\Xi)$, $\mathcal{L}^2_{loc}(\Xi)$ e $\mathcal{H}^1_0(\Xi)$. O espaço produto $\mathcal{H}^1(\Xi) \times \mathcal{L}^2(\Xi)$ é dotado da norma

$$\|(U,V)\|^2_{\mathcal{H}^1(\Xi)\times\mathcal{L}^2(\Xi)} = \|U\|^2_{\mathcal{H}^1(\Xi)} + \|V\|^2_{\mathcal{L}^2(\Xi)}, \;\; U \in \mathcal{H}^1(\Xi), \;\; V \in \mathcal{L}^2(\Xi).$$

Na seção 2.3 definimos e provamos a existência de solução generalizada para o problema de Cauchy da equação linear de Klein-Gordon com dados iniciais em $H^1(\mathbb{R}^2) \times L^2(\mathbb{R}^2)$ com suporte contidos em um domínio limitado do plano. Agora, vamos definir o que é solução generalizada para um sistema de m equações de ondas acopladas com dados iniciais em $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2) \times \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ com suportes contidos em um domínio limitado de $\mathbb{R}^2$.

Definição 4.1. *Sejam $U_0 \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)$ e $U_1 \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ funções que se anulam no complementar de um domínio limitado $\Xi \subset \mathbb{R}^2$ e seja $A = [a_{ij}]_{m\times m}$ uma matriz real diagonalizável com autovalores não negativos $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_m$. A função $U \in \mathcal{H}^1_{loc}(\mathbb{R}^{2+1})$ é solução generalizada do problema de Cauchy*

$$\begin{cases} U_{tt} - \Delta U + AU = 0 & em \;\; \mathbb{R}^{2+1}, \\ U(.,0) = U_0 & em \;\; \mathbb{R}^2, \\ U_t(.,0) = U_1 & em \;\; \mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{4.2}$$

se existir uma sequência $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2+1})$ tal que

a) Para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^{2+1}$, com interior não vazio, tem-se

$$\lim_{n\to\infty} U_n = U \;\; em \; \mathcal{H}^1(int(K));$$

b) $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}U_n - \Delta U_n + AU_n = 0$ em $\mathbb{R}^{2+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} U_n(x,0) = U_0$ em $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\partial}{\partial t}U_n(x,0) = U_1$ em $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$.

Ficará evidente no que se segue, que a colocação correta do problema de Cauchy (4.2) segue da teoria desenvolvida para a equação de Klein-Gordon nos capítulos anteriores. Nos ocuparemos de estudar o decaimento local de energia e a analiticidade do operador solução associado ao sistema (4.2) visando mostrar o resultado principal deste trabalho, que consiste do teorema que enunciaremos a seguir.

Teorema 4.2. *Sejam $A = [a_{ij}]_{m\times m}$ uma matriz real diagonalizável com autovalores $0 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_m$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio suave por partes simplesmente conexo. Então para qualquer $T_* > diam(\Omega)$ e qualquer $(U_0, U_1) \in \mathcal{H}^1(\Omega) \times \mathcal{L}^2(\Omega)$, existe um controle $f \in \mathcal{L}^2(\partial\Omega\times]0, T_*[)$ tal que a solução $U \in \mathcal{H}^1(\Omega\times]0, T_*[)$ do sistema (4.1) satisfaz*

$$U(., T_*) = U_t(., T_*) = 0 \ em \ \Omega.$$

No decorrer deste capítulo, vamos preparar terreno para provar o teorema acima. Na seção 4.1, diagonalizaremos o sistema (4.2) usando álgebra linear de tal forma que nos permita aplicar em (4.2) os resultados vistos nos capítulos anteriores.

Na seção 4.2, mostraremos o decaimento local de energia da solução generalizada do problema de Cauchy (4.2).

Na seção 4.3, abordaremos a controlabilidade para o sistema (4.1) com tempo T_* suficientemente grande ($>>>$ diam (Ω)) e dados iniciais em $\mathcal{H}^1(\Omega) \times \mathcal{L}^2(\Omega)$.

Na seção 4.4, mostraremos que a família de operadores compactos apresentada na seção 4.3, admite extensão analítica ao parâmetro complexo no setor Σ_0, definido na seção 3.1. E, por fim, na seção 4.5 demonstraremos o Teorema 4.2 e uma extensão do mesmo quando o controle atua somente numa parte da fronteira.

4.1 Diagonalização do sistema de equações

Seja $\Xi \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado. Consideremos o problema de Cauchy (4.2)

$$\begin{cases} U_{tt} - \Delta U + AU = 0 & \text{em } \mathbb{R}^{2+1}, \\ U(., 0) = U_0, \ U_t(., 0) = U_1 & \text{em } \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

onde $A = [a_{ij}]_{m\times m}$ é uma matriz real diagonalizável com autovalores não negativos $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_m$, $U_0 \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)$ e $U_1 \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ são funções que se anulam no complementar de Ξ e $U_0 \in \mathcal{H}_0^1(\Xi)$.

Primeiro, observemos que a matriz transposta A^T é também diagonalizável e possui os mesmos autovalores $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_m$. Seja $\{v^i = (\alpha_1^i, \ldots, \alpha_m^i) : i = 1, 2, \ldots, m\}$ uma base de $\mathbb{R}^m$ cujos elementos v^i são autovetores de A^T associados à λ_i, respectivamente. Assim, para cada $i = 1, 2, \ldots, m$, temos o seguinte conjunto de relações

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1^i + a_{21}\alpha_2^i + \cdots + a_{m1}\alpha_m^i = \lambda_i\alpha_1^i \\ a_{12}\alpha_1^i + a_{22}\alpha_2^i + \cdots + a_{m2}\alpha_m^i = \lambda_i\alpha_2^i \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{1m}\alpha_1^i + a_{2m}\alpha_2^i + \cdots + a_{mm}\alpha_m^i = \lambda_i\alpha_m^i. \end{cases} \tag{4.3}$$

Tomemos $B = [\alpha_j^i]_{m\times m}$. Definamos $W = (w^1, w^2, \ldots, w^m)^T$ o vetor dado por $W = BU$, onde $U = (u^1, u^2, \ldots, u^m)^T$ é a solução do problema de Cauchy (4.2). Com isso temos

$$\begin{cases} w^1 = \alpha_1^1 u^1 + \alpha_2^1 u^2 + \cdots + \alpha_m^1 u^m \\ w^2 = \alpha_1^2 u^1 + \alpha_2^2 u^2 + \cdots + \alpha_m^2 u^m \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ w^m = \alpha_1^m u^1 + \alpha_2^m u^2 + \cdots + \alpha_m^m u^m. \end{cases} \tag{4.4}$$

Para cada $i = 1, 2, \ldots, m$, calculemos

$$\begin{aligned} w_{tt}^i &= \frac{\partial^2}{\partial t^2}\{\alpha_1^i u^1 + \alpha_2^i u^2 + \cdots + \alpha_m^i u^m\} = \alpha_1^i u_{tt}^1 + \alpha_2^i u_{tt}^2 + \cdots + \alpha_m^i u_{tt}^m \\ &= \alpha_1^i(\Delta u^1 - a_{11}u^1 - a_{12}u^2 - \cdots - a_{1m}u^m) \\ &\quad +\alpha_2^i(\Delta u^2 - a_{21}u^1 - a_{22}u^2 - \cdots - a_{2m}u^m) + \cdots + \\ &\quad +\alpha_m^i(\Delta u^m - a_{m1}u^1 - a_{m2}u^2 - \cdots - a_{mm}u^m) \\ &= \Delta(\alpha_1^i u^1 + \alpha_2^i u^2 + \cdots + \alpha_m^i u^m) - (a_{11}\alpha_1^i + a_{21}\alpha_2^i + \cdots + a_{m1}\alpha_m^i)u^1 \\ &\quad -(a_{12}\alpha_1^i + a_{22}\alpha_2^i + \cdots + a_{m2}\alpha_m^i)u^2 - \cdots - (a_{1m}\alpha_1^i + a_{2m}\alpha_2^i + \cdots + a_{mm}\alpha_m^i)u^m. \end{aligned}$$

Usando as relações (4.3) e (4.4) na igualdade acima, obtemos

$$w_{tt}^i = \Delta w^i - \lambda_i w^i,$$

para todo $i = 1, 2, \ldots, m$.

Assim, W satisfaz o problema

$$\begin{cases} W_{tt} - \Delta W + DW = 0, \qquad D = [\delta_{ij}\lambda_i]_{m\times m}, \\ W(.,0) = BU_0, \\ W_t(.,0) = BU_1, \end{cases}$$

onde $U_0 = (u_0^1, u_0^2, \ldots, u_0^m)^T$ e $U_1 = (u_1^1, u_1^2, \ldots, u_1^m)^T$.

Deste modo, cada entrada w^i de W satisfaz o problema de Cauchy

$$\begin{cases} w^i_{tt} - \Delta w^i + \mu_i^2 w^i = 0 & \text{em } \mathbb{R}^{2+1}, \\ w^i(.,0) = \alpha_1^i u_0^1 + \alpha_2^i u_0^2 + \cdots + \alpha_m^i u_0^m := w_0^i & \text{em } \mathbb{R}^2, \\ w^i_t(.,0) = \alpha_1^i u_1^1 + \alpha_2^i u_1^2 + \cdots + \alpha_m^i u_1^m := w_1^i & \text{em } \mathbb{R}^2, \end{cases} \tag{4.5}$$

onde

$$\mu_i^2 = \lambda_i,$$

para todo $i = 1, 2, \ldots, m$.

4.2 Decaimento de energia local para o sistema de equações

O decaimento local de energia da solução do problema de Cauchy (4.2) será uma das ferramentas fundamentais para provar a controlabilidade do problema de Cauchy (4.1).

Teorema 4.3. *Seja $\Xi \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado e seja $T_0 > diam(\Xi)$. Então existe $K = K(\Xi, A, T_0) > 0$ tal que a solução $U \in \mathcal{H}^1_{loc}(\mathbb{R}^{2+1})$ do problema de Cauchy (4.2) satisfaz*

$$\|U(.,t)\|^2_{\mathcal{H}^1(\Xi)} + \|U_t(.,t)\|^2_{\mathcal{L}^2(\Xi)} \leq \frac{K}{t^2} \left\{ \|U_0\|^2_{\mathcal{H}^1(\Xi)} + \|U_1\|^2_{\mathcal{L}^2(\Xi)} \right\}, \tag{4.6}$$

para todo $t > T_0$ sempre que $(U_0, U_1) \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2) \times \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$, $U_0 \in \mathcal{H}^1_0(\Xi)$, U_0 e U_1 se anulam no complementar de Ξ.

Demonstração. Da diagonalização realizada na seção anterior, desacoplamos o sistema (4.2) em m problemas de Cauchy para a equação de Klein-Gordon do tipo (4.5).

Da hipótese sobre U_0 e U_1 segue que $(w_0^i, w_1^i) \in H^1(\mathbb{R}^2) \times L^2(\mathbb{R}^2)$, $w_0^i \in H_0^1(\Xi)$, w_0^i e w_1^i se anulam no complementar de Ξ, para todo $i = 1, 2, \ldots, m$. Aplicando o Teorema 2.9, para $T_0^i > \operatorname{diam}(\Xi)$ existe uma constante $K_i := K_i(\Xi, T_0, \lambda_i) > 0$ tal que a solução $w^i \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^{2+1})$ do problema de Cauchy (4.5) satisfaz

$$\|w^i(.,t)\|^2_{H^1(\Xi)} + \|w^i_t(.,t)\|^2_{L^2(\Xi)} \leq \frac{K_i}{t^2} \left\{ \|w_0^i\|^2_{H^1(\Xi)} + \|w_1^i\|^2_{L^2(\Xi)} \right\}$$

para todo $t > T_0^i$ e $i = 1, 2, \ldots, m$.

Note que T_0^i depende de $\mu_i^2 = \lambda_i$, $i = 1, \ldots, m$.

Usando as definições de w_0^i e w_1^i na desigualdade acima, obtemos

$$\|w^i(.,t)\|^2_{H^1(\Xi)} + \|w^i_t(.,t)\|^2_{L^2(\Xi)} \leq \frac{K_i}{t^2}(|\alpha_1^i|^2 + |\alpha_2^i|^2 + \cdots + |\alpha_m^i|^2)\left\{\|U_0\|^2_{\mathcal{H}^1(\Xi)} + \|U_1\|^2_{\mathcal{L}^2(\Xi)}\right\}, \tag{4.7}$$

para todo $t > T_0^i$ e $i = 1, \ldots, m$.

Tomemos $\|B\|^2 = \sum |\alpha_j^i|^2$, $M = \max\{K_i,\, i = 1, 2, \ldots, m\}$ e $T_0 = \max\{T_0^i,\, i = 1, 2, \ldots, m\}$. Somando as desigualdades (4.7) resulta

$$\|W(.,t)\|^2_{\mathcal{H}^1(\Xi)} + \|W_t(.,t)\|^2_{\mathcal{L}^2(\Xi)} \leq \frac{M}{t^2}\|B\|^2\left\{\|U_0\|^2_{\mathcal{H}^1(\Xi)} + \|U_1\|^2_{\mathcal{L}^2(\Xi)}\right\}, \tag{4.8}$$

para todo $t > T_0$.

Por outro lado, como B possui inversa temos $U = B^{-1}W$, onde tomaremos $B^{-1} = [\beta_j^i]_{m\times m}$. Observe que $u^i(.,t) = \beta_1^i w^1(.,t) + \cdots + \beta_m^i w^m(.,t)$, $i = 1, \ldots, m$. Logo

$$\|U(.,t)\|^2_{\mathcal{H}^1(\Xi)} + \|U_t(.,t)\|^2_{\mathcal{L}^2(\Xi)} \leq \|B^{-1}\|^2\left\{\|W(.,t)\|^2_{\mathcal{H}^1(\Xi)} + \|W_t(.,t)\|^2_{\mathcal{L}^2(\Xi)}\right\}. \tag{4.9}$$

Das desigualdades (4.8) e (4.9) obtemos

$$\|U(.,t)\|^2_{\mathcal{H}^1(\Xi)} + \|U_t(.,t)\|^2_{\mathcal{L}^2(\Xi)} \leq \frac{K}{t^2}\{\|U_0\|^2_{\mathcal{H}^1(\Xi)} + \|U_1\|^2_{\mathcal{L}^2(\Xi)}\},$$

para todo $t > T_0$, onde $K = M\|B\|^2\|B^{-1}\|^2$. □

4.3 Controlabilidade para o sistema (4.1) em tempo grande

Nesta seção vamos resolver o problema de controle para o sistema (4.1) em tempo T suficientemente grande. Para isso, usaremos um método adotado por D. Russell em seu trabalho [33].

Teorema 4.4. *Sejam $A = [a_{ij}]_{m\times m}$ uma matriz real diagonalizável com autovalores $0 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_m$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio suave por partes simplesmente conexo. Então, existe $T >$ diam(Ω)* suficientemente grande *tal que para cada $(U_0, U_1) \in \mathcal{H}^1(\Omega) \times \mathcal{L}^2(\Omega)$ existe um controle $f \in \mathcal{L}^2(\partial\Omega\times]0,T[)$ de modo que a solução $U \in \mathcal{H}^1(\Omega\times]0,T[)$ do sistema (4.1) satisfaz*

$$U(.,T) = U_t(.,T) = 0 \text{ em } \Omega.$$

Demonstração. Antes de usar o método adotado por Russell, vamos apresentar duas famílias de operadores que serão de extrema importância não apenas para a prova deste teorema, mas também para o nosso resultado principal (Teorema 4.2).

Seja $\delta > 0$ fixo. Definimos a δ-vizinhança de Ω por

$$\Omega_\delta = \Omega + B(0,\delta) = \{x + y;\ x \in \Omega,\ |y| < \delta\}.$$

Sejam $(V_0, V_1) \in \mathcal{H}_0^1(\Omega_\delta) \times \mathcal{L}^2(\Omega_\delta)$ arbitrários e seja V a solução generalizada do problema de Cauchy (4.2)

$$\begin{cases} V_{tt} - \Delta V + AV = 0 & \text{em } \mathbb{R}^{2+1}, \\ V(.,0) = V_0, \quad V_t(.,0) = V_1 & \text{em } \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

com dados iniciais estendidos por zero no complementar de Ω_δ.

Para $t > 0$ consideremos o *operador solução* referente ao problema de Cauchy acima

$$\mathbf{S}_t : \mathcal{H}_0^1(\Omega_\delta) \times \mathcal{L}^2(\Omega_\delta) \longrightarrow \mathcal{H}^1(\Omega_\delta) \times \mathcal{L}^2(\Omega_\delta)$$

dado por

$$\mathbf{S}_t(V_0, V_1)(x) = (V(x,t), V_t(x,t)),\ x \in \Omega_\delta. \tag{4.10}$$

Seja $T_0 > \operatorname{diam}(\Omega_\delta)$. Pelo Teorema 4.3, existe $K = K(\Omega_\delta, A, T_0) > 0$ tal que

$$\|\mathbf{S}_T(V_0, V_1)\|^2_{\mathcal{H}^1(\Omega_\delta)\times\mathcal{L}^2(\Omega_\delta)} \leq \frac{K}{T^2}\left\{\|V_0\|^2_{\mathcal{H}^1(\Omega_\delta)} + \|V_1\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega_\delta)}\right\} \tag{4.11}$$

para todo $T > T_0$. Da definição de $\mathbf{S}_T$ e da desigualdade (4.11) resulta que $\mathbf{S}_T$ é um operador linear e limitado, para cada $T > T_0$.

Agora, para $T > 0$ arbitrário, consideremos o *problema retrógrado*

$$\begin{cases} Z_{tt} - \Delta Z + AZ = 0 & \text{em } \mathbb{R}^{2+1}, \\ Z(.,T) = Z_0, \quad Z_t(.,T) = Z_1 & \text{em } \mathbb{R}^2, \end{cases} \tag{4.12}$$

com dados iniciais $(Z_0, Z_1) \in \mathcal{H}_0^1(\Omega_\delta) \times \mathcal{L}^2(\Omega_\delta)$ estendidos por zero no complementar de Ω_δ, no tempo inicial T. Seja

$$\widehat{\mathbf{S}}_T : \mathcal{H}_0^1(\Omega_\delta) \times \mathcal{L}^2(\Omega_\delta) \longrightarrow \mathcal{H}^1(\Omega_\delta) \times \mathcal{L}^2(\Omega_\delta)$$

o operador solução associado ao problema de Cauchy (4.12), dado por

$$\widehat{\mathbf{S}}_T(Z_0, Z_1)(x) = (Z(x, 0), Z_t(x, 0)), \;\; x \in \Omega_\delta. \tag{4.13}$$

Observe que a função $Z(., T-\tau)$ satisfaz a equação $Z_{\tau\tau} - \Delta Z + AZ = 0$ com dados iniciais (Z_0, Z_1) no tempo $\tau = 0$. Usando novamente o Teorema 4.3, obtemos

$$\|Z(.,0)\|^2_{\mathcal{H}^1(\Omega_\delta)} + \|Z_\tau(.,0)\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega_\delta)} \leq \frac{K}{\tau^2}\left\{\|Z_0\|^2_{\mathcal{H}^1(\Omega_\delta)} + \|Z_1\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega_\delta)}\right\},$$

para todo $\tau > T_0$, onde $T_0 > \mathrm{diam}(\Omega_\delta)$. Assim

$$\left\|\widehat{\mathbf{S}}_T(Z_0, Z_1)\right\|^2_{\mathcal{H}^1(\Omega_\delta)\times\mathcal{L}^2(\Omega_\delta)} \leq \frac{K}{T^2}\left\{\|Z_0\|^2_{\mathcal{H}^1(\Omega_\delta)} + \|Z_1\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega_\delta)}\right\}, \tag{4.14}$$

para todo $T > T_0$ e $(Z_0, Z_1) \in \mathcal{H}^1_0(\Omega_\delta) \times \mathcal{L}^2(\Omega_\delta)$.

Com as definições dos operadores lineares e limitados $\mathbf{S}_T$ e $\widehat{\mathbf{S}}_T$ e, das estimativas (4.11) e (4.14), estamos aptos a aplicar o método adotado por Russell.

Seja $E : \mathcal{H}^1(\Omega) \times \mathcal{L}^2(\Omega) \longrightarrow \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2) \times \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ um operador extensão de modo que $(\widetilde{V}_0, \widetilde{V}_1) := E(V_0, V_1)$ é tal que $\widetilde{V}_0$ e $\widetilde{V}_1$ tem suporte em Ω_δ para todo $(V_0, V_1) \in \mathcal{H}^1(\Omega) \times \mathcal{L}^2(\Omega)$.

Primeiro vamos resolver o problema de Cauchy (4.2) com dados iniciais $(\widetilde{V}_0, \widetilde{V}_1)$

$$\begin{cases} \widetilde{V}_{tt} - \Delta\widetilde{V} + A\widetilde{V} = 0 & \text{em } \mathbb{R}^{2+1}, \\ \widetilde{V}(.,0) = \widetilde{V}_0, \;\; \widetilde{V}_t(.,0) = \widetilde{V}_1 & \text{em } \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

e denotamos por $\widetilde{V} \in \mathcal{H}^1_{loc}(\mathbb{R}^{2+1})$ a sua solução.

Agora, seja $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ uma função localizadora em Ω de tal modo

$$\begin{cases} \varphi \equiv 1 & \text{em } \Omega_{\delta/3}, \\ \varphi \equiv 0 & \text{em } \mathbb{R}^2 \backslash \Omega_{2\delta/3}. \end{cases}$$

A seguir resolvemos o problema retrógrado (4.12) com dados iniciais

$$(Z_0, Z_1) = (\,\varphi\widetilde{V}(.,T),\, \varphi\widetilde{V}_t(.,T)\,)$$

e denotamos por $\widetilde{Z} \in \mathcal{H}^1_{loc}(\mathbb{R}^{2+1})$ a sua solução.

Observe que o estado $(\widetilde{Z}(.,0), \widetilde{Z}_t(.,0))$ é expresso em termos dos operadores $\mathbf{S}_T$, $\widehat{\mathbf{S}}_T$ e da extensão E, a saber

$$(\widetilde{Z}(.,0), \widetilde{Z}_t(.,0)) = (\widehat{\mathbf{S}}_T \varphi \mathbf{S}_T E)(V_0, V_1),$$

onde φ denota o operador de multiplicação pela função φ.

Definamos $U^\circ = \widetilde{V} - \widetilde{Z}$. Veja que U° satisfaz

$$U^\circ_{tt} - \Delta U^\circ + AU^\circ = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^{2+1} \tag{4.15}$$

e a condição final

$$U^\circ(.,T) = U^\circ_t(.,T) = 0 \text{ em } \Omega.$$

Agora, consideremos $(U_0, U_1) \in \mathcal{H}^1(\Omega) \times \mathcal{L}^2(\Omega)$ como na hipótese do teorema. Gostaríamos que valessem as igualdades

$$U^\circ(.,0) = U_0 \quad \text{e} \quad U^\circ_t(.,0) = U_1 \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Mas isso é equivalente à:

$$\begin{aligned}
(U_0, U_1) &= \Big(U^\circ(.,0)|_\Omega \, , \, U^\circ_t(.,0)|_\Omega \Big) = \Big(\widetilde{V}(.,0)|_\Omega - \widetilde{Z}(.,0)|_\Omega \, , \, \widetilde{V}_t(.,0)|_\Omega - \widetilde{Z}_t(.,0)|_\Omega \Big) \\
&= \Big(V_0 - \widetilde{Z}(.,0)|_\Omega \, , \, V_1 - \widetilde{Z}_t(.,0)|_\Omega \Big) = (\, V_0, V_1 \,) - \Big(\widetilde{Z}(.,0)|_\Omega \, , \, \widetilde{Z}_t(.,0)|_\Omega \Big) \\
&= (\, V_0, V_1 \,) \, - \, (R\widehat{\mathbf{S}}_T \varphi \mathbf{S}_T E)(V_0, V_1),
\end{aligned}$$

onde R é o operador restrição a Ω.

O ponto chave do método de Russell é resolver a equação

$$(V_0, V_1) - (R\widehat{\mathbf{S}}_T \varphi \mathbf{S}_T E)(V_0, V_1) = (U_0, U_1), \tag{4.16}$$

onde (V_0, V_1) é a incógnita e (U_0, U_1) são dados iniciais do problema de controle.

Denotando $\mathbf{K}_T = R\widehat{\mathbf{S}}_T \varphi \mathbf{S}_T E$, reescrevemos (4.16) por

$$(\mathrm{I} - \mathbf{K}_T)(V_0, V_1) = (U_0, U_1).$$

A fim de resolver a equação (4.16), provaremos que $\mathbf{K}_T$ é uma contração (veja Teorema 1.14). Com efeito, de (4.14) resulta

$$\begin{aligned}
\left\| R\widehat{\mathbf{S}}_T\varphi\mathbf{S}_T E(V_0,V_1)\right\|^2_{\mathcal{H}^1(\Omega)\times\mathcal{L}^2(\Omega)} &\leq \left\|\widehat{\mathbf{S}}_T\varphi(\widetilde{V}(.,T),\widetilde{V}_t(.,T))\right\|^2_{\mathcal{H}^1(\Omega_\delta)\times\mathcal{L}^2(\Omega_\delta)}\\
&\leq \frac{K}{T^2}\left\{\left\|\varphi\widetilde{V}(.,T)\right\|^2_{\mathcal{H}^1(\Omega_\delta)}+\left\|\varphi\widetilde{V}_t(.,T)\right\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega_\delta)}\right\}\\
&\leq \frac{\widetilde{K}}{T^2}\left\{\left\|\widetilde{V}(.,T)\right\|^2_{\mathcal{H}^1(\Omega_\delta)}+\left\|\widetilde{V}_t(.,T)\right\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega_\delta)}\right\}\\
&= \frac{\widetilde{K}}{T^2}\left\{\|\mathbf{S}_T E(V_0,V_1)\|^2_{\mathcal{H}^1(\Omega_\delta)\times\mathcal{L}^2(\Omega_\delta)}\right\},
\end{aligned}$$

onde $\widetilde{K}$ é uma constante que depende de K e φ. E de (2.10), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\widetilde{K}}{T^2}\left\{\|\mathbf{S}_T E(V_0,V_1)\|^2_{\mathcal{H}^1(\Omega_\delta)\times\mathcal{L}^2(\Omega_\delta)}\right\} &\leq \frac{\widetilde{K}}{T^2}\frac{K}{T^2}\left\{\left\|\widetilde{V}_0\right\|^2_{\mathcal{H}^1(\Omega_\delta)}+\left\|\widetilde{V}_1\right\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega_\delta)}\right\}\\
&= \frac{\widetilde{K}K}{T^4}\|E(V_0,V_1)\|^2_{\mathcal{H}^1(\Omega_\delta)\times\mathcal{L}^2(\Omega_\delta)} ,\\
&\leq \frac{Const.}{T^4}\|(V_0,V_1)\|^2_{\mathcal{H}^1(\Omega)\times\mathcal{L}^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

para todo $(V_0,V_1)\in\mathcal{H}^1(\Omega)\times\mathcal{L}^2(\Omega)$ e $T>T_0$, onde $T_0>$ diam(Ω_δ).

Com isso, temos $\|\mathbf{K}_T\|\leq\frac{Const.}{T^2}$. Logo, podemos escolher $T>T_0$ suficientemente grande de modo que $\|\mathbf{K}_T\|<1$. Para tal T, o operador $\mathbf{K}_T$ é uma contração em $\mathcal{H}^1(\Omega)\times\mathcal{L}^2(\Omega)$.

Agora, denotemos por $(\mathcal{V}_0,\mathcal{V}_1)\in\mathcal{H}^1(\Omega)\times\mathcal{L}^2(\Omega)$ a única solução da equação (4.16), isto é,

$$(\mathcal{V}_0,\mathcal{V}_1)-(R\widehat{\mathbf{S}}_T\varphi\mathbf{S}_T E)(\mathcal{V}_0,\mathcal{V}_1)=(U_0,U_1) \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Da construção acima, vemos que $E(\mathcal{V}_0,\mathcal{V}_1)-(\widehat{\mathbf{S}}_T\varphi\mathbf{S}_T E)(\mathcal{V}_0,\mathcal{V}_1)$ é uma extensão de (U_0,U_1) em todo $\mathbb{R}^2$. Definamos

$$(U_0^\circ,U_1^\circ):=E(\mathcal{V}_0,\mathcal{V}_1)-(\widehat{\mathbf{S}}_T\varphi\mathbf{S}_T E)(\mathcal{V}_0,\mathcal{V}_1). \tag{4.17}$$

Como todos os problemas de Cauchy envolvidos na contrução de (U_0°,U_1°) têm propriedade de velocidade finita de propagação e, todos os dados iniciais considerados têm suporte compacto, constatamos que (U_0°,U_1°) também tem suporte compacto.

Uma vez que temos a extensão apropriada dos dados iniciais (U_0,U_1), iniciamos o processo resolvendo o problema de Cauchy (4.2) com dados iniciais (U_0°,U_1°) definidos em (4.17). A seguir, localizamos seu estado no tempo T de forma que obtemos o estado inicial correto para o problema retrógrado (4.12). Com isso, construímos a solução U° para o sistema (4.15). Tal função satisfaz

$$\left|\begin{array}{ll} U^\circ \in \mathcal{H}^1_{loc}(\mathbb{R}^{2+1}) & \\ U^\circ_{tt} - \Delta U^\circ + AU^\circ = 0 & \text{em } \Omega\times]0,T[, \\ U^\circ(.,0) = U_0, \;\; U^\circ_t(.,0) = U_1 & \text{em } \Omega, \\ U^\circ(.,T) = U^\circ_t(.,T) = 0 & \text{em } \Omega. \end{array}\right.$$

Como $U^\circ \in \mathcal{H}^1_{loc}(\mathbb{R}^{2+1})$, então $U^\circ_{tt} - \Delta U^\circ \in \mathcal{L}^2_{loc}(\mathbb{R}^{2+1})$. Se u é uma das componentes de U°, então u satisfaz

$$\Box u := u_{tt} - \Delta u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^{2+1}).$$

Da Observação 1.8 e do Teorema 1.7, segue que o traço da derivada normal de u ao longo de $\partial\Omega\times]0,T[$ está bem definido e $\frac{\partial u}{\partial \eta} \in L^2(\partial\Omega\times]0,T[)$. Portanto, temos

$$\frac{\partial U^\circ}{\partial \eta} \in \mathcal{L}^2(\partial\Omega\times]0,T[).$$

Para concluir a demonstração, definimos

$$U := U^\circ\big|_{\Omega\times]0,T[} \;\; \text{ e } \;\; f := \frac{\partial U^\circ}{\partial \eta},$$

note que U, f e T atendem as condições do teorema. $\square$

4.4 Extensão e Analiticidade da família $\{\mathbf{S}_t\}_{t>T_0}$

Sejam $\Xi \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado, $\mu \geq 0$ e $(v_0, v_1) \in H^1(\mathbb{R}^2) \times L^2(\mathbb{R}^2)$ tal que $v_0 \in H^1_0(\Xi)$, v_0 e v_1 se anulam no complementar de Ξ. Consideremos o problema de Cauchy para a equação de Klein-Gordon

$$\begin{cases} v_{tt} - \Delta v + \mu^2 v = 0 & \text{em } \mathbb{R}^{2+1}, \\ v(.,0) = v_0, \quad v_t(.,0) = v_1 & \text{em } \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

e seja $v \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^{2+1})$ a sua solução.

Fixemos

$$T_0 > \operatorname{diam}(\Xi).$$

No capítulo 3, para $t \geq T_0$, estudamos o operador compacto

$$S_t : H^1_0(\Xi) \times L^2(\Xi) \longrightarrow H^1(\Xi) \times L^2(\Xi)$$

dado por

$$S_t(v_0, v_1)(x) = (v(x,t), v_t(x,t)), \quad x \in \Xi,$$

associado ao problema acima.

Foi provado que a família $\{S_t\}_{t>T_0}$ se estende ao parâmetro complexo $\xi \in \Sigma_0 = \left\{\xi : \xi = T_0 + z;\, z \in \mathbb{C}, |\arg(z)| \leq \frac{\pi}{4}\right\}$, como uma família de operadores compactos, de forma natural trocando o parâmetro real t pelo parâmetro complexo $\xi \in \Sigma_0$, isto é,

$$S_\xi(v_0, v_1)(x) = (v(x,\xi), v_t(x,\xi)), \quad x \in \Xi.$$

Além disso, verificamos que a família $\{S_\xi\}_{\xi\in\Sigma_0}$ é analítica no interior de Σ_0, isto é, a aplicação $\Sigma_0 \ni \xi \longmapsto S_\xi$ é analítica.

Agora para cada $i = 1, 2, \ldots, m$ e $t \geq T_0$, fazemos $\mu^2 = \mu_i^2 = \lambda_i$. Consideremos o problema de Cauchy

$$\begin{cases} w_{tt}^i - \Delta w^i + \mu_i^2 w^i = 0 & \text{em } \mathbb{R}^{2+1}, \\ w^i(.,0) = w_0^i, \quad w_t^i(.,0) = w_1^i & \text{em } \mathbb{R}^2, \end{cases} \tag{4.18}$$

com dados iniciais $(w_0^i, w_1^i) \in H_0^1(\Xi) \times L^2(\Xi)$ estendidos por zero fora de Ξ.

Seja

$$S_t^i : H_0^1(\Xi) \times L^2(\Xi) \longrightarrow H^1(\Xi) \times L^2(\Xi)$$

o operador solução associado ao problema de Cauchy (4.18), para cada $i = 1, 2 \ldots, m$, definido por

$$S_t^i(w_0^i, w_1^i)(x) = (w^i(x,t), w_t^i(x,t)), \quad x \in \Xi.$$

Como visto na discussão acima, a família de operadores $\{S_\xi^i\}_{\xi\in\Sigma_0}$, em que

$$S_\xi^i(w_0^i, w_1^i)(x) = (w^i(x,\xi), w_t^i(x,\xi)), \quad x \in \Xi,$$

para todo $i = 1, 2, \ldots, m$, é analítica no interior de Σ_0.

Neste momento, vamos estabelecer a ligação entre os operadores S_t^i e o operador solução $\mathbf{S}_t$ do sistema (4.2). Para isso, definiremos um novo operador, o qual nos auxiliará a mostrar tal relação. Comecemos tomando $(w_0^1, \ldots, w_0^m) \in \mathcal{H}_0^1(\Xi)$ e $(w_1^1, \ldots, w_1^m) \in \mathcal{L}^2(\Xi)$ e construímos os m pares

$$(w_0^i, w_1^i) \in H_0^1(\Xi) \times L^2(\Xi), \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Agora, criamos um vetor de modo que o elemento da i-ésima entrada é $S^i(w_0^i, w_1^i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, isto é,

$$\Big(S_t^1(w_0^1, w_1^1),\ \ldots\ , S_t^m(w_0^m, w_1^m) \Big) = \Big(\Big(w^1(.,t), w_t^1(.,t)\Big),\ \ldots,\ \Big(w^m(.,t), w_t^m(.,t)\Big) \Big).$$

A partir do lado direito da expressão anterior construímos o vetor

$$\Big(\Big(w^1(.,t), \ldots, w^m(.,t)\Big)\ ,\ \Big(w_t^1(.,t), \ldots, w_t^m(.,t)\Big) \Big),$$

e definimos o operador $\mathbf{S}_t^* : \mathcal{H}_0^1(\Xi) \times \mathcal{L}^2(\Xi) \longrightarrow \mathcal{H}^1(\Xi) \times \mathcal{L}^2(\Xi)$ por

$$\mathbf{S}_t^*\Big((w_0^1, \ldots, w_0^m), (w_1^1, \ldots, w_1^m) \Big) = \Big(\Big(w^1(.,t), \ldots, w^m(.,t)\Big), \Big(w_t^1(.,t), \ldots, w_t^m(.,t)\Big) \Big).$$

Como na seção 3.1, sejam P_0 e P_1 as projeções em relação à primeira e segunda entradas de $H^1(\Xi) \times L^2(\Xi)$, respectivamente. Observe que

$$\begin{aligned} &\mathbf{S}_t^*\Big((w_0^1, \ldots, w_0^m), (w_1^1, \ldots, w_1^m)\Big) \\ &\quad = \Big(\Big(P_0 S_t^1(w_0^1, w_1^1), \ldots, P_0 S_t^m(w_0^m, w_1^m)\Big), \Big(P_1 S_t^1(w_0^1, w_1^1), \ldots, P_1 S_t^m(w_0^m, w_1^m)\Big) \Big). \end{aligned}$$

Como P_0 e P_1 são funções contínuas que não dependem do parâmetro real t, segue que $\{P_0 S_t^i\}_{t>T_0}$ e $\{P_1 S_t^i\}_{t>T_0}$ admitem uma extensão ao setor Σ_0 como uma família de operadores compactos, analíticas em seu interior, para todo $i = 1, 2, \ldots, m$. Logo, da expressão acima, resulta que a família de operadores $\{\mathbf{S}_t^*\}_{t>T_0}$ carrega essas mesmas propriedades.

Com o estudo acima, conseguimos provar o seguinte resultado.

Teorema 4.5. *A família de operadores $\{\boldsymbol{S}_t;\ t > T_0\}$ se estende ao parâmetro complexo $\xi \in \Sigma_0$ como uma família de operadores compactos que é analítica em seu seu interior, isto é, a aplicação*

$$\Sigma_0 \ni \zeta \longrightarrow \boldsymbol{S}_\zeta \in B(\mathcal{H}_0^1(\Xi) \times \mathcal{L}^2(\Xi), \mathcal{H}^1(\Xi) \times \mathcal{L}^2(\Xi))$$

é analítica em Σ_0.

Demonstração. Inicialmente, desacoplamos o sistema de equações do problema de Cauchy (4.2) como visto na seção 4.1 obtendo m problemas de Cauchy para a equação de Klein-

Gordon:

$$\begin{cases} w^i_{tt} - \Delta w^i + \mu_i^2 w^i = 0 & \text{em } \mathbb{R}^{2+1}, \\ w^i(.,0) = \alpha^i_1 u^1_0 + \alpha^i_2 u^2_0 + \cdots + \alpha^i_m u^m_0 := w^i_0 & \text{em } \mathbb{R}^2, \\ w^i_t(.,0) = \alpha^i_1 u^1_1 + \alpha^i_2 u^2_1 + \cdots + \alpha^i_m u^m_1 := w^i_1 & \text{em } \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

onde $\lambda_i = \mu_i^2$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Da definição de $\mathbf{S}^*_t$, para $t \geq T_0$, temos

$$\mathbf{S}^*_t((w^1_0, \ldots, w^m_0), (w^1_1, \ldots, w^m_1)) = (W(.,t), W_t(.,t)) = (BU(.,t), BU_t(.,t)). \tag{4.19}$$

Sejam

$$\mathbf{P}_0 : \mathcal{H}^1(\Xi) \times \mathcal{L}^2(\Xi) \longrightarrow \mathcal{H}^1(\Xi)$$
$$\mathbf{P}_1 : \mathcal{H}^1(\Xi) \times \mathcal{L}^2(\Xi) \longrightarrow \mathcal{L}^2(\Xi)$$

as projeções em relação à primeira e segunda entradas de $\mathcal{H}^1(\Xi) \times \mathcal{L}^2(\Xi)$, respectivamente.

De (4.19) temos

$$BU(.,t) = \mathbf{P}_0\mathbf{S}^*_t((w^1_0, \ldots, w^m_0), (w^1_1, \ldots, w^m_1)) = \mathbf{P}_0\mathbf{S}^*_t(BU_0, BU_1) = \mathbf{P}_0\mathbf{S}^*_t\mathbf{B}(U_0, U_1)$$

e

$$BU_t(.,t) = \mathbf{P}_1\mathbf{S}^*_t((w^1_0, \ldots, w^m_0), (w^1_1, \ldots, w^m_1)) = \mathbf{P}_1\mathbf{S}^*_t(BU_0, BU_1) = \mathbf{P}_1\mathbf{S}^*_t\mathbf{B}(U_0, U_1),$$

onde $\mathbf{B}(U_0, U_1) = (BU_0, BU_1)$.

Assim, obtemos

$$U(.,t) = [B^{-1}\mathbf{P}_0\mathbf{S}^*_t\mathbf{B}](U_0, U_1) \quad \text{e} \quad U_t(.,t) = [B^{-1}\mathbf{P}_1\mathbf{S}^*_t\mathbf{B}](U_0, U_1).$$

Portanto,

$$\mathbf{S}_t(U_0, U_1) = \Big([B^{-1}\mathbf{P}_0\mathbf{S}^*_t\mathbf{B}](U_0, U_1), [B^{-1}\mathbf{P}_1\mathbf{S}^*_t\mathbf{B}](U_0, U_1) \Big) \tag{4.20}$$

para todo $(U_0, U_1) \in \mathcal{H}^1_0(\Xi) \times \mathcal{L}^2(\Xi)$ e $t \geq T_0$.

Como visto anteriomente, sabemos que o operador $\mathbf{S}^*_t$ admite uma extensão ao setor Σ_0 como um operador compacto, analítica em seu interior. Logo, $\mathbf{S}_t$ tem essas mesmas propriedades em virtude da sua relação com o operador $\mathbf{S}^*_t$, expressa em (4.20). $\square$

4.5 Prova do Teorema 4.2

Em [7], a controlabilidade é obtida para um sistema 2×2, que inclui o caso de duas membranas acopladas. O Teorema 4.2 generaliza para m $(m = 2, 3, \dots)$ membranas acopladas. Outra contribuição deste trabalho é na redução do tempo de controlabilidade. Enquanto em [7] o tempo de controlabilidade $T_* > \text{diam}\,(\Omega)$ é suficientemente grande, aqui mostraremos que T_* pode ser qualquer valor próximo de diam(Ω) com $T_* > \text{diam}(\Omega)$.

Demonstração. Seja $T_* > \text{ diam}(\Omega)$. Escolhamos $\delta > 0$ e $T_0 > 0$ que satisfaçam a seguinte cadeia de desigualdades

$$diam(\Omega) < diam(\Omega_\delta) < T_0 < T_*.$$

A fim de usar os resultados deste capítulo, tomemos $\Xi = \Omega_\delta$. A estrutura da demonstração do Teorema 4.2 é a mesma daquela do Teorema 4.4. Muito do que se fez lá será usado aqui em conjunto com a analiticidade dos operadores envolvidos visando a aplicação do teorema de alternativa de Atkinson (Teorema 1.16). Na prova do Teorema 4.4 introduzimos os operadores

$$\mathbf{S}_T,\, \widehat{\mathbf{S}}_T : \mathcal{H}_0^1(\Omega_\delta) \times \mathcal{L}^2(\Omega_\delta) \longrightarrow \mathcal{H}^1(\Omega_\delta) \times \mathcal{L}^2(\Omega_\delta)$$

definidos por (4.10) e (4.13), respectivamente. Também foi definido o operador $\mathbf{K}_T$: $\mathcal{H}^1(\Omega) \times \mathcal{L}^2(\Omega) \longrightarrow \mathcal{H}^1(\Omega) \times \mathcal{L}^2(\Omega)$.

No Teorema 4.5 provamos que a família de operadores compactos $\{\mathbf{S}_T\}_{T>T_0}$ em $B(\mathcal{H}_0^1(\Omega_\delta) \times \mathcal{L}^2(\Omega_\delta), \mathcal{H}^1(\Omega_\delta) \times \mathcal{L}^2(\Omega_\delta))$ estende ao parâmetro complexo $\xi \in \Sigma_0$ como uma família de operadores compactos $\{\mathbf{S}_\xi\}_{\xi \in \Sigma_0}$, analítica no interior de Σ_0, onde $\Sigma_0 = \{\xi : \xi = T_0 + z;\, |\arg(z)| \leq \frac{\pi}{4}\}$. Devido as seguintes relações

$$\mathbf{P}_0 \widehat{\mathbf{S}}_T(V_0, V_1) = \mathbf{P}_0 \mathbf{S}_T(V_0, -V_1) \quad \text{e} \quad \mathbf{P}_1 \widehat{\mathbf{S}}_T(V_0, V_1) = \mathbf{P}_1 \mathbf{S}_T(-V_0, V_1),$$

segue que $\{\widehat{\mathbf{S}}_T\}_{T>T_0}$ estende analiticamente ao parâmetro $\xi \in \Sigma_0$ como família de operadores compactos. Como $\mathbf{K}_T = R\widehat{\mathbf{S}}_T \varphi \mathbf{S}_T E$, então $\{\mathbf{K}_T\}_{T>T_0}$ também estende analiticamente ao parâmetro $\xi \in \Sigma_0$ como família de operadores compactos $\{\mathbf{K}_\xi\}_{\xi \in \Sigma_0}$.

Na prova do Teorema 4.4, vimos que existe $\xi \in \Sigma_0$ $(\xi = T > \text{diam}(\Omega)$ suficientemente grande) tal que $I - \mathbf{K}_\xi$ é invertível. Logo, 1 não é autovalor de $\mathbf{K}_\xi$. Então, o Teorema de Alternativas de Atkinson (veja Teorema 1.16) nos garante que em cada compacto $M \subset \Sigma_0$, 1 é autovalor de $\mathbf{K}_\xi$ apenas para um número finito de pontos $\xi \in M$. Assim, consideremos $M = \left[\frac{T_* + T_0}{2}, T_*\right] \subset \Sigma_0$.

Portanto, existe $T \in \left]\frac{T_* + T_0}{2}, T_*\right[$ tal que 1 não é autovalor de $\mathbf{K}_T$. Concluímos que existe $T \in]T_0, T_*[$ tal que $I - \mathbf{K}_T$ é invertível.

Agora, procedendo como na prova do Teorema 4.4, concluímos que o problema de Cauchy (4.1) é controlável em $T < T_*$. Estendendo U° e f por zero para $t > T$, concluímos a prova do Teorema 4.2. $\square$

4.6 Aplicação

Nesta seção vamos dar uma idéia de como aplicar o procedimento do Teorema 4.2 para uma série de membranas, onde uma parte da fronteira é mantida fixa. Consideremos o domínio

$$\Omega = \{(rcos\theta, rsin\theta);\ 0 < r_1 < r < r_2,\ 0 < \theta < \pi/n\} \tag{4.21}$$

e

$$\Gamma_0 = \{(rcos\theta, rsin\theta);\ r_1 < r < r_2,\ \theta = 0 \text{ ou } \theta = \pi/n\}, \tag{4.22}$$

onde n é um inteiro positivo.

Vamos mostrar que para $T_* > 2r_2$ e qualquer $(U_0, U_1) \in \mathcal{H}^1(\Omega) \times \mathcal{L}^2(\Omega)$ com $U_0 = 0$ em Γ_0, existe um controle $f \in \mathcal{L}^2(\partial\Omega/\Gamma_0 \times]0, T_*[)$ tal que a solução $U \in \mathcal{H}^1(\Omega \times]0, T_*[)$ do sistema

$$\begin{cases} U_{tt} - \Delta U + AU = 0 & \text{em } \Omega \times]0, T[, \\ U(.,0) = U_0 & \text{em } \Omega, \\ U_t(.,0) = U_1 & \text{em } \Omega, \\ U = 0 & \text{em } \Gamma_0 \times]0, T[, \\ \dfrac{\partial U}{\partial \eta} = f & \text{em } \partial\Omega/\Gamma_0 \times]0, T[, \end{cases} \tag{4.23}$$

satisfaz a condição final $U(., T_*) = U_t(., T_*) = 0$ em Ω.

Primeiro, vamos averiguar como é feita a extensão dos dados iniciais em todo o plano. Comecemos, fixando T_0, $\delta > 0$ tais que

$$\delta < r_1 \text{ e } r_2 + \delta/2 < T_0 < T_*.$$

Observe que $T_0 > \text{diam}(\Omega)$. Seja

$$\Omega_\infty = \{(rcos\theta, rsin\theta);\, r > 0,\, 0 < \theta < \pi/n\}.$$

Por técnicas usuais de espaço de Sobolev, podemos estender os dados iniciais $(V_0, V_1) \in \mathcal{H}^1(\Omega) \times \mathcal{L}^2(\Omega)$ com $V_0 = 0$ sob Γ_0 para o setor angular Ω_∞ de tal modo que a extensão $(\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1)$ em $\mathcal{H}^1(\Omega_\infty) \times \mathcal{L}^2(\Omega_\infty)$ é nula em $|x| < r_1 - \delta/2$ e em $|x| > r_2 + \delta/2$ e, mais ainda, $\mathbf{V}_0 \in \mathcal{H}^1_0(\Omega_\infty)$.

O próximo passo é estender cada entrada $(\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1)$ ao plano como função ímpar com respeito a cada linha determinada pelos ângulos $\theta = j(\pi/n)$, $j = 1, \ldots, n$. Denotaremos por $(\widetilde{V}_0, \widetilde{V}_1)$ tal extensão e por E o operador extensão assim construído sobre o espaço dos dados iniciais. Observe que pela construção, segue que $(\widetilde{V}_0, \widetilde{V}_1)$ se anula no complementar da coroa

$$\Omega_\delta =: \{x \in \mathbb{R}^2 : r_1 - \delta < |x| < r_2 + \delta\}.$$

Agora, solucionar o problema de Cauchy (4.2) com dados iniciais $(\widetilde{V}_0, \widetilde{V}_1)$ é equivalente a solucionar uma coleção de problemas de Cauchy para equação de Klein-Gordon desacopladas, onde cada problema é do tipo (4.5) com dados iniciais com a mesma regularidade e ímpar em relação as linhas determinadas pelos ângulos $\theta = j(\pi/n)$, $j = 1, \ldots, n$. Da fórmula explícita da solução da equação de Klein-Gordon (ver 2.13) concluímos que a solução $\widetilde{V}$ de (4.2) é nula nos planos verticais $\theta = j(\pi/n)$, $j = 1, \ldots, n$ e tem traço $(\widetilde{V}(., T), \widetilde{V}_t(., T)) \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2) \times \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ em cada plano $t = T > 2r_2$ como função ímpar em relação às linhas $\theta = j(\pi/n)$, $j = 1, \ldots, n$.

Seja $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ uma função localizadora definida por

$$\begin{cases} \varphi = 1 & \text{em } \Omega_{\delta/2}, \\ \varphi = 0 & \text{em } \mathbb{R}^2 \backslash \Omega_\delta, \end{cases}$$

e radial, isto é, φ é constante em cada circunferência $x^2 + y^2 = r^2$, $r > 0$.

Usando o mesmo raciocínio, observamos que a solução do problema retrógrado (4.12) com dados iniciais $(Z_0, Z_1) = (\varphi\widetilde{V}(., T), \varphi\widetilde{V}_t(., T))$ $(T > 2r_2)$ também é nulo nos planos verticais $\theta = j(\pi/n)$, $j = 1, \ldots, n$, pois $(\widetilde{V}(., T), \widetilde{V}_t(., T))$ é ímpar e φ é radial.

A controlabilidade para (4.23) é obtida nos mesmos moldes da demonstração do Teorema 4.2. Construímos

$$\mathbf{K}_T = R\widehat{\mathbf{S}}_T \varphi \mathbf{S}_T E,$$

com especial atenção ao operador E que mantém nulidade sobre as linhas $\theta = j(\pi/n)$, $j = 1, \ldots, n$, de modo que as soluções dos problemas de Cauchy envolvidos tem seus estados ímpares em relação a tais linhas. Os operadores $\mathbf{S}_T$ e $\widehat{\mathbf{S}}_T$ são exatamente os mesmos do Teorema 4.4 e suas extensões analíticas à Σ_0 são obtidas pelo mesmo processo utilizado o Teorema 4.5.

O restante da demonstração procede da mesma forma que os teoremas 4.2 e 4.4, porém observando que U° se anula sobre os planos verticais $\theta = j(\pi/n)$, $j = 1, \ldots, n$. Logo, sua restrição ao cilindro $\Omega\times]0, T_*[$ também terá tal propriedade. O controle é obtido da mesma forma que nos teoremas 4.2 e 4.4.

Referências Bibliográficas

[1] AASSILA, M. *A note on the boundary stabilization of a compactly coupled system of wave equations.* Appl. Math. Lett. 12 (3), (1999), 19-24.

[2] AASSILA, M. *Strong asymptotic stability of a compactly coupled system of wave equations.* Appl. Math. Lett. 14 (3), (2001), 285-290.

[3] ALABAU-BOUSSOUIRA, F. *A two level energy method for indirect boundary observability and controllability for weakly coupled hyperbolic systems.* SIAM J. Control Optim. 42 (2003), 871-906.

[4] ATKINSON, F. V. *A spectral problem for completely continuous operators.* Acta Math. Hung. 3, (1952), 53-60.

[5] BASTOS, W. D.; NUNES, R. S. O.; PITOT, J. M. S. *Exact boundary controllability for a series of membranes elastically connected.* Elect. Journal of Diff. Equations 06, (2017), 1-16.

[6] BASTOS, W. D.; SPEZAMIGLIO, A. *A note on the controllability for the wave equation on nonsmooth plane domains.* Systems Control Lett. 55, (2006), 17-20.

[7] BASTOS, W. D.; SPEZAMIGLIO, A.; RAPOSO; C. A. *On exact boundary controllability for linearly coupled wave equations.* J. Math. Anal. Appl 381., (2011), 557-564.

[8] BREZIS, H. *Analyse fonctionnelle - Théorie et applications.* Masson, Paris, 1983.

[9] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N. *Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev.* EDUEM, Maringá, 2009.

[10] Cavalcanti, M. M.; Domingos Cavalcanti, V. N.; Komornik, V. *Introdução à Análise Funcional.* EDUEM, Maringá, 2011.

[11] Coron, J. M. *Control and Nonlinearity, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 136.* American Mathematical Society, Providence, 2007.

[12] Horváth, J. *Topological Vector Spaces and Distributions.* Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, 1966.

[13] John, F. *Partial Differential Equations.* Springer-Verlag, New York, 1982.

[14] Kato, T. *Perturbation Theory for Linear Operators.* Springer-Verlag, New York, 1966.

[15] Kelly, S. G.; Nicely, C. *Free Forced Vibrations of a Series of Beams Connected by Viscoelastic Layers, Advances in Acoustics and Vibration.* Vol 14, Article ID 976841, 8 pages.

[16] Khodja, F. A.; Benabdallah, A.; Gonzáles-Burgos A.; De Teresa, L. *Recents results on the controllability of linear coupled parabolic problems: a survey.* Math. Control Relat. Fields, 3, (2011), 267-306.

[17] Komornik, V. *Exact Controllability and Stabilization. The Multiplier Method.* Masson, Paris, 1994.

[18] Komornik, V.; Loreti, P. *Fourier Series in Control Theory.* Springer-Verlag, New York, 2005.

[19] Komornik, V.; Rao, B. *Boundary stabilization of compactly coupled wave equations.* Asymptot Anal., 14, (1997), 339-359.

[20] Kreyszig, E. *Introductory Funcional Analysis with Applications.* John Wiley & Sons, New York, 1978.

[21] Lagnese, J. *A Boundary value control of a class of hyperbolic equations in a general region.* SIAM J. Control Optim. 15, (1977), 973-983.

[22] Lang, S. *Analysis II.* Addison-Wesley, Reading, Massachusets, 1968.

[23] Lasiecka, I. *Mathematical Control Theory of Coupled PDEs, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics.* SIAM - Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2002.

[24] Lions, J. L. *Contrôlabilité Exacte, Perturbations et Stabilisation de Systèmes Distribués, Tome 1- Contrôlabilité Exacte.* Masson, Paris, 1988.

[25] Lions, J. L. *Contrôlabilité Exacte, Perturbations et Stabilisation de Systèmes Distribués, Tome 2- Perturbations.* Masson, Paris, 1988.

[26] Lions, J. L. *Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems.* SIAM Review 30, (1988), 1-68.

[27] Lions, J. L.; Magenes E. *Non-homogeneous Boundary Value Problems and Applications.* Springer-Verlag, Berlim, 1972.

[28] Najafi, M. *Energy Decay estimate for boundary stabilization of the coupled wave equations.* Mathematical and Computer Modeling 48, (2008), 1796-1805.

[29] Necas, J. *Les Méthodes Directes en Théorie des Équations Elliptiques.* Masson, Paris, 1967.

[30] Nunes, R. S. O.; Bastos, W. D. *Energy decay estimate for the linear Klein-Gordon equation and boundary control.* J. Math. Anal. Appl. 414, (2014), 934-944.

[31] Nunes, R. S. O.; Bastos, W. D. *Analyticity and near optimal time boundary controllability for the linear Klein-Gordon equation.* J. Math. Anal. Appl. 445, (2016), 394-406.

[32] Oniszczuk, Z. *Transverse vibrations of elastically connected rectangular double-membrane compound system.* J. Sound Vibrat. 221 (2), (1999), 235-250.

[33] Russell, D. L. *A unified boundary controllability theory for hyperbolic and parabolic partial Differential equation.* Stud. Appl. Math 52, (1973), 189-211.

[34] Russell, D. L. *Controllability and Stabilizability Theory for Linear Partial Differential Equations: Recent Progress and Open Questions.* SIAM Review 20(4), (1978), 639-739.

[35] Tataru, D. *On the regularity of boundary traces for the wave equations.* Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sc. 26, n. 4, (1998), 185-206.

[36] Tucsnak, M.; Weiss, G. *Observation and Control for Operator Semigroups.* Birkhäuser Verlag AG, Berlin, 2009.

[37] Wheeden, R. L.; Zygmund, A. *Measure and Integral: An Introduction to Real Analysis.* Marcel Dekker Inc., New York, 1977.