



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
CÂMPUS DE ILHA SOLTEIRA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

LUIS HENRIQUE DE REZENDE CROZARIOL

**ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DE MICROESTRUTURAS
HETEROGÊNEAS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE
CONTORNO CONSIDERANDO-SE NÃO-LINEARIDADE FÍSICA**

Ilha Solteira
2017



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
CÂMPUS DE ILHA SOLTEIRA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

LUIS HENRIQUE DE REZENDE CROZARIOL

**ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DE MICROESTRUTURAS
HETEROGÊNEAS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE
CONTORNO CONSIDERANDO-SE NÃO-LINEARIDADE FÍSICA**

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia - UNESP – Campus de Ilha Solteira, para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Área de Conhecimento: Estruturas.

Orientadora: Prof^a Dr^a Gabriela Rezende Fernandes

Ilha Solteira

2017

FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

C954a Crozariol, Luis Henrique de Rezende.
Análise do comportamento de microestruturas heterogêneas pelo método dos elementos de contorno considerando-se não-linearidade física / Luis Henrique de Rezende Crozariol. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2017
157 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Estruturas, 2017

Orientador: Gabriela Rezende Fernandes
Inclui bibliografia

1. Método dos elementos de contorno. 2. Problema elástico bidimensional. 3. Placa em sub-regiões. 4. Técnicas de homogeneização. 5. Análise em multi-escala. 6. EVR.



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Câmpus de Ilha Solteira

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DE MICROESTRUTURAS HETEROGÊNEAS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTOURNO CONSIDERANDO-SE NÃO-LINEARIDADE FÍSICA

AUTOR: LUIS HENRIQUE DE REZENDE CROZARIOL

ORIENTADORA: GABRIELA REZENDE FERNANDES

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em ENGENHARIA CIVIL, área: ESTRUTURAS pela Comissão Examinadora:

Profa. Dra. GABRIELA REZENDE FERNANDES
Curso de Engenharia Civil / Universidade Federal de Goiás

Prof. Dr. RENATO BERTOLINO JUNIOR
Departamento de Engenharia Civil / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. OSVALDO LUIS MANZOLI
Departamento de Engenharia Civil e Ambiental / Faculdade de Engenharia de Bauri - UNESP

Ilha Solteira, 31 de julho de 2017

Aos meus pais,
Luiz Carlos e Irene
E aos meus avós,
Vicente, Isabel, Nadir, José e Osmaria.

AGRADECIMENTOS

À professora Gabriela Rezende Fernandes, pelos ensinamentos e incentivo que recebi ao longo deste trabalho. Pela dedicada orientação e estímulo em todas as etapas da dissertação, contribuindo para a minha formação profissional.

Aos meus pais: Luiz Carlos e Irene, que me apoiaram incondicionalmente desde o início do mestrado. Por incentivarem os meus estudos e por serem exemplos de pessoas. Ao meu irmão Luis Gustavo, pelo companheirismo dentro da Engenharia Civil.

À minha noiva Mirian pelo carinho e compreensão. A sua presença foi fundamental para a conclusão desse trabalho, sempre me apoiando quando precisei, apesar da distância que nos separa.

Aos amigos do Departamento de Engenharia Civil: Guilherme, Bruno e Marcelo. E aos amigos de república: Eduardo, Isaac, Rafael Oliveira, Moisés, Leonardo e Alex. Pela companhia, apoio e incentivo, principalmente nos momentos difíceis. Cada um de vocês tem uma qualidade que eu aprecio e me espelho. Agradeço por tudo o que fizeram por mim.

Agradeço a todos os professores do DEC que contribuíram direta e indiretamente na execução deste trabalho. Agradeço principalmente aos professores Rogério e Renato pelas observações e sugestões que me propuseram na qualificação e que tornaram esse trabalho melhor.

À CAPES, pela bolsa de estudo que tornou possível minha dedicação à elaboração deste trabalho.

“ Se não pudermos nos sentir felizes aqui, hoje, agora, durante nossas jornadas, em meio à confusão e às lutas que todos nós vivemos, os circuitos abertos, as listas inacabadas de coisas a fazer, as conclusões de que da próxima vez será melhor, talvez nunca sintamos essa felicidade. ”

Ben Saunders – Ted Talks

RESUMO

Neste trabalho é apresentada uma formulação do MEC (Método dos Elementos de Contorno) considerando-se não-linearidade física para analisar microestruturas de materiais heterogêneos no contexto da análise em multi-escala. A microestrutura, também denominada como EVR (Elemento de Volume Representativo), é modelada como uma chapa em sub-regiões onde vazios ou inclusões podem ser considerados dentro da matriz, sendo diferentes propriedades elásticas e modelos constitutivos definidos para cada sub-região. A equação integral para o deslocamento é obtida a partir do Teorema de Betti, onde para considerar o fenômeno dissipativo, um campo de esforços iniciais é considerado. A equação algébrica da chapa é obtida após a discretização do contorno externo e interface em elementos e do domínio das sub-regiões em células. Na análise multi-escala cada ponto da estrutura (macro-contínuo) é representado por um EVR, onde o comportamento do material não é definido por um modelo constitutivo, mas através da solução do problema de equilíbrio do EVR quando sujeito à deformação referente ao ponto do macro-contínuo. O problema de equilíbrio do EVR é definido em termos da flutuação dos deslocamentos, sendo o mesmo satisfeito quando seu campo de forças se encontra em equilíbrio. Após a solução do EVR, os deslocamentos no contorno e as forças dissipativas são atualizados e as forças de superfície sobre o contorno recalculadas para se obter a tensão homogeneizada. O custo computacional obtido com a presente formulação é menor que aquele referente ao modelo desenvolvido pelo Método dos Elementos Finitos, sendo a resposta homogeneizada do EVR comparada ao modelo de elementos finitos a fim de validar a formulação apresentada nesse trabalho.

Palavras-chave: Método dos elementos de contorno. Problema elástico bidimensional. Placa em sub-regiões. Técnicas de homogeneização. Análise em multi-escala. EVR. Plasticidade.

ABSTRACT

A BEM formulation, considering dissipative phenomena, to analyze microstructures of heterogeneous materials in the context of multi-scale analysis is presented. The microstructure, also denoted as RVE (Representative Volume Element), is modelled as a zoned plate where voids or inclusions can be considered inside a matrix, being different elastic properties and constitutive models defined for each sub-region. The integral representation for displacement is obtained from Betti's Theorem, where to consider the dissipative phenomena, an initial forces field is considered. The plate algebraic equation is obtained after discretizing the external boundary and interfaces into elements and the sub-regions domain into cells. In the multi-scale analysis, each macro-continuum point is represented by a RVE, being the material behaviour not governed by a phenomenological constitutive model, but defined after the solution of the RVE equilibrium problem due to the macro strain. The RVE equilibrium problem is defined in terms of displacement fluctuations, being satisfied when the forces field is in equilibrium. After the RVE solution, the boundary displacements and dissipative forces are updated and the boundary tractions recalculated to obtain the homogenized stress. The computational cost obtained with the proposed formulation is smaller than the formulation developed by the Finite Element Method. Besides, the homogenized response is compared to the finite element model to show its accuracy.

Keywords: Boundary elements. Stretching problem. Zoned plates, homogenization techniques, multi-scale analysis, RVE, plasticity.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Elemento cúbico infinitesimal	29
Figura 2 - Comportamento elastoplástico perfeito.....	35
Figura 3 - Modelo elastoplástico perfeito.....	38
Figura 4 - Modelo elasto-plástico com encruamento linear	39
Figura 5 - A elipse de von Mises	46
Figura 6 - Microestrutura heterogênea representada por uma chapa em sub-regiões	48
Figura 7 – Ponto de colocação na interface matriz-inclusão (canto).....	58
Figura 8 - Discretização do contorno externo e da interface em elementos.....	73
Figura 9 - Geometria do elemento aproximada por função linear	74
Figura 10 - Célula triangular com sistema coordenadas homogêneas.....	77
Figura 11 - Sistema de coordenadas cilíndricas nas células triangulares	79
Figura 12 - Integração ao longo do contorno de um domínio qualquer	82
Figura 13 - EVR relacionado ao ponto do macro-contínuo	98
Figura 14 - Definição de EVRs para meios periódicos: célula retangular e hexagonal	106
Figura 15 – Discretizações dos EVRs com volume de inclusão $V_i = 10\%$ ou $V_i = 30\%$	119
Figura 16 - Convergência dos resultados através do MEC ($V_i = 10\%$)	119
Figura 17 - Convergência dos resultados através do MEC ($V_i = 30\%$)	120
Figura 18 – Discretizações para os EVRs com volume de inclusão $V_i = 37\%$, considerando uma inclusão central ou 5 inclusões aleatórias.....	121
Figura 19 - Convergência dos resultados através do MEC ($V_i = 37\%$)	122
Figura 20 – Convergência dos resultados através do MEC (5 inclusões $V_i = 37\%$)	122
Figura 21 - Tensão homogeneizada para os EVRs mais discretizados	124
Figura 22 - EVRs com volume de vazios $V_v = 10\%$ ou $V_v = 30\%$	126
Figura 23 – Convergência dos resultados através do MEC ($V_v = 10\%$)	127
Figura 24 - Convergência dos resultados através do MEC ($V_v = 30\%$)	128
Figura 25 - Discretizações para os EVRs com volume de vazios $V_v = 37\%$, considerando um vazio central ou 5 vazios aleatórios	130
Figura 26 - Convergência dos resultados através do MEC ($V_v = 37\%$)	131
Figura 27 - Convergência dos resultados através do MEC (5 vazios $V_v = 37\%$)	131

Figura 28 - Tensão homogeneizada para os EVRs mais discretizados	133
Figura 29 - Matriz elasto-plástica perfeita e inclusão elástica	135
Figura 30 - Matriz e inclusão com encruamento	137
Figura 31 – Tensões homogeneizadas para os EVRs mais discretizados.....	139
Figura 32 – EVR com 5 vazios e matriz elasto-plástica perfeita	141
Figura 33 - Tensões homogeneizadas para os EVRs mais discretizados.....	142
Figura 34 – Condições de contorno para EVR com 5 inclusões	143
Figura 35 - Condições de contorno para EVR com 5 vazios.....	145

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Tensões homogeneizadas para $V_i = 10\%$ e $V_i = 30\%$	120
Tabela 2 - Valor da tensão homogeneizada para o EVR com $V_i=37\%$, considerando inclusão central ou 5 inclusões aleatórias	123
Tabela 3 - Tensor constitutivo homogeneizado para o EVR mais discretizado (5 inclusões – 37%)	124
Tabela 4 - Tensões homogeneizadas para os EVRs com $V_v = 10\%$ e $V_v = 30\%$...	129
Tabela 5 - Valor da tensão homogeneizada para os EVRs com $V_v=37\%$	132
Tabela 6 - Tensor constitutivo homogeneizado para o EVR mais discretizado (5 vazios – 37%).....	134
Tabela 7 - Valor da tensão homogeneizada para os EVRs com $V_i = 37\%$	136
Tabela 8 – Tensões homogeneizadas para matriz e inclusão com encruamento linear	138
Tabela 9 - Tensões homogeneizadas para matriz elasto-plástica perfeita.....	141
Tabela 10 – Tensões homogeneizada para a deformação de 0,00288	143
Tabela 11 – Tensões homogeneizadas finais com o valor da respectiva deformação	144
Tabela 12 – Tensor homogeneizado para a deformação de 0,00288	144
Tabela 13 - Tensões homogeneizada para a deformação de 0,00288	146
Tabela 14 - Tensões homogeneizadas finais com o valor da respectiva deformação	146
Tabela 15 - Tensor homogeneizado para a deformação de 0,00288	146

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

MEF – Método dos elementos finitos

MEC – Método dos elementos de contorno

EVR – Elemento de volume representativo

LISTA DE SÍMBOLOS

- * : sub-índice que relaciona à solução fundamental
- Γ : coordenada que percorre o contorno
- Ω : coordenada de domínio
- Γ_ξ : contorno infinitesimal
- Ω_ξ : domínio infinitesimal
- σ_{ij} : tensão na direção j na face perpendicular a direção i
- b_i : forças de massa na direção i
- τ_{ij} : tensão de cisalhamento na direção j na face perpendicular à direção i
- $N_{ij,j}$: esforço de membrana interno ao elemento
- ε_{ij} : deformação na direção j na face perpendicular a direção i
- u_i : deslocamento na direção i
- E : módulo de elasticidade longitudinal
- G : módulo de elasticidade transversal
- δ_{ij} : delta de Kronecker
- ν : coeficiente de Poisson
- p : ponto onde se calculam os deslocamentos
- q : ponto onde se aplica a solução fundamental
- p_i : força normal na direção i, em uma superfície de normal n_j
- n_i : cossenos diretores da normal em relação ao eixo i
- n : vetor unitário normal ao contorno ou interface no plano da chapa
- $\delta(q, p)$: delta de Dirac
- μ : sub-índice que relaciona ao EVR
- ξ : coordenada adimensional do ponto
- Ψ : funções de aproximação

- W_{ig} : fator de ponderação
- a_{ks} : comprimento do sub-elemento ks
- N_C : número de nós do contorno
- N_{cel} : número de células
- N_e : número de elementos
- N_g : número de pontos de Gauss
- N_{Sub} : número de sub-elementos
- N_S : número de sub-regiões
- N_{Vazios} : número de vazios
- N_{inc} : número de inclusões
- r : distância do ponto de colocação \mathbf{q} ao ponto \mathbf{p}
- t : espessura da chapa
- C_{ki} : valor do termo livre para uma carga unitária na direção k para um deslocamento na direção i
- β : ângulo do canto da chapa
- L_j : comprimento do elemento j
- V_μ : volume do EVR
- D : módulo tangente constitutivo homogeneizado
- $\tilde{\mathbf{u}}$: campo de flutuação dos deslocamentos
- K_μ^* : conjunto dos deslocamentos microscópicos cinematicamente admissíveis
- \tilde{K}_μ^* : campo de flutuações de deslocamentos microscópicos cinematicamente admissíveis
- R_F : resíduo das forças
- F : vetor das forças
- K : matriz tangente

N^e : vetor das forças normais das células

$\delta \tilde{u}_\mu^{i+1}$: correção das flutuações dos deslocamentos

Ω_μ^h : discretização do domínio do EVR

\mathcal{V}_μ^o : campo de flutuações dos deslocamentos cinematicamente admissíveis

Υ_μ : espaço prescrito das velocidades de flutuação cinematicamente admissíveis

f_y : relação constitutiva dada pelo critério adotado

D^{Taylor} : operador tangente do modelo de Taylor

\tilde{D} : influência da flutuação dos deslocamentos no módulo tangente homogeneizado

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	18
1.1	Tema e motivação.....	18
1.2	Revisão Bibliográfica	23
1.3	Objetivos e Justificativa	25
1.4	Conteúdo do trabalho.....	26
2	EQUAÇÕES BÁSICAS	28
2.1	Introdução	28
2.2	Teoria da elasticidade	28
2.2.1	<i>Estado Tridimensional de Tensão</i>	<i>28</i>
2.3	Tensões e deformações para análise não-linear física	31
3	MODELOS ELASTO-PLÁSTICOS.....	34
3.1	Introdução	34
3.2	Modelo elasto-plástico perfeito para o caso uniaxial	35
3.3	Modelo elasto-plástico com encruamento isótropo para o caso uniaxial	39
3.4	Modelo elasto-plástico com encruamento isótropo para o caso multiaxial	41
3.5	Modelo de von Mises	44
4	EQUAÇÕES INTEGRAIS DA CHAPA DIVIDIDA EM SUB-REGIÕES CONSIDERANDO-SE NÃO-LINEARIDADE FÍSICA	47
4.1	Introdução	47
4.2	Equação integral do deslocamento para um ponto interno.....	47
4.3	Equação integral dos deslocamentos para pontos sobre o contorno ou interface da microestrutura.....	55

4.4	Equação integral da derivada dos deslocamentos u_k para pontos do domínio.....	67
4.4.1	<i>Integral de domínio envolvendo esforços iniciais da equação da derivada dos deslocamentos</i>	<i>69</i>
5	APLICAÇÃO DO MEC ÀS EQUAÇÕES INTEGRAIS	72
5.1	Introdução	72
5.2	Discretização em elementos e células.....	73
5.2.1	<i>Aproximação das variáveis nos elementos</i>	<i>73</i>
5.2.2	<i>Aproximação das variáveis nas células.....</i>	<i>77</i>
5.3	Transformação das equações integrais em equações algébricas	88
5.4	Sistema de Equações Algébricas.....	93
6	O PROBLEMA DE EQUILÍBRIO DO EVR E SUA RELAÇÃO COM O MACROCONTÍNUO.....	97
6.1	Introdução	97
6.2	Definição de EVR e seu Campo de deslocamentos.....	98
6.3	Equação de Equilíbrio do EVR.....	100
6.4	Matriz tangente consistente.....	102
6.5	Condições de contorno em termos flutuação dos deslocamentos.....	104
6.5.1	<i>Deslocamentos Lineares no Contorno do EVR.....</i>	<i>104</i>
6.5.2	<i>Flutuações de Deslocamentos Periódicos sobre o Contorno.....</i>	<i>105</i>
6.5.3	<i>Forças de Superfície Uniformes sobre o Contorno.....</i>	<i>107</i>
6.6	Tensão homogeneizada	108
6.7	Tensor elasto-plástico homogeneizado.....	111
6.8	Algoritmo	113
7	EXEMPLOS NUMÉRICOS	116
7.1	Introdução	116
7.2	EVRs com diferentes volumes de inclusão	117
7.3	EVRs com diferentes volumes de vazios	125

7.4	Diferentes comportamentos do EVR com 5 inclusões.....	134
7.5	Diferente comportamento do EVR com 5 vazios	139
7.6	Comportamento do EVR de acordo com as Condições de Contorno em Termos de Flutuação dos Deslocamentos	142
8	CONCLUSÃO.....	147
	REFERÊNCIA.....	150
	ANEXO A – EQUAÇÕES BÁSICAS E EXPRESSÕES FUNDAMENTAIS....	153
	A1 Estado plano de tensão e deformação	153
	A1.1 Estado plano de tensão	153
	A1.2 Estado plano de deformação	153
	A2 Expressões fundamentais para equação integral do deslocamento para um ponto interno.....	154
	A3 Expressões fundamentais para equação integral da derivada dos deslocamentos para pontos do domínio	155
	A4 Relações trigonométricas.....	157

1 INTRODUÇÃO

1.1 Tema e motivação

A grande maioria dos problemas em engenharia não podem ser resolvidos por métodos analíticos, pois apenas poucos casos simples possuem solução exata. Assim, faz-se necessário obter soluções aproximadas de diversos problemas devido à complexidade na geometria dos sólidos, nos carregamentos, nas leis constitutivas dos materiais e nas condições de contorno. Por isso, surgiram vários métodos numéricos com o objetivo de solucionar problemas na engenharia, dentre eles o mais conhecido é o Método dos Elementos Finitos (MEF). Porém mais recentemente surgiu o Método dos Elementos de Contorno (MEC), que também tem sido muito utilizado na análise de estruturas (Katsikadelis, 2002). Através desses métodos, chega-se à solução dos problemas após a resolução de grandes sistemas de equações que necessitavam de computador para automatizar os cálculos.

De acordo com Cheng e Cheng (2005), a criação do termo 'Método dos Elementos de Contorno' foi proposta por C. A. Brebbia, J. Dominguez, P. K. Banerjee e R. Butterfield na Universidade de Southampton. O termo MEC foi utilizado pela primeira vez em três publicações destes autores em 1977; um artigo por Brebbia e Dominguez (1977), um capítulo em livro por Bannerjee e Butterfield (1977) e na tese de doutorado de Dominguez (1977). No ano seguinte foi publicado o primeiro livro por Brebbia (1978) em que foi deduzida a formulação integral dos problemas da elasticidade a partir da técnica dos resíduos ponderados. Hoje o MEC tem aplicação em diferentes campos, como: elasticidade, termodinâmica, mecânica dos fluídos, acústica e eletrostática.

No final da década de 70, três pesquisadores brasileiros: Webe João Mansur, José Claudio de Faria Telles e Wilson Sergio Venturini desenvolveram suas teses de doutorado na cidade de Southampton (Reino Unido), desenvolvendo modelos numéricos através do Método dos Elementos de Contorno, sob orientação do Prof. Brebbia. Esses professores tiveram uma grande contribuição na pesquisa e divulgação do MEC no Brasil. Ao longo de sua carreira, Mansur orientou 50 dissertações de mestrado e 34 teses de doutorado na COPPE/UFRJ. Possui produção acadêmica e científica de repercussão internacional, e atualmente é

membro do comitê editorial da revista *Engineering Analysis with Boundary Elements*. Também professor da COPPE/UFRJ, Telles atuou principalmente na área de Mecânica Computacional com contribuições e aplicações em vários temas, dentre os quais: desenvolvimento e implementação do método dos elementos de contorno, mecânica da fratura, análise de tensões linear e não linear, estática e dinâmica. Também publicou três livros voltados para o MEC, sendo o mais famoso Brebbia *et al.* (1984), que foi traduzido para russo, chinês e japonês.

Na Escola de Engenharia de São Carlos, EESC-USP, o professor Wilson Sérgio Venturini orientou diversos trabalhos voltados para o MEC, além de publicar artigos e livros. Como exemplo de orientações, pode-se citar a dissertação de Gil Rodriguez (1986) que trata sobre o emprego do Método dos Elementos de Contorno em problemas elásticos bidimensionais, a tese de Paiva (1987) que propõe uma formulação do método dos elementos de contorno para flexão de placas e suas aplicações em engenharia de estruturas e Chueiri (1994) que teve como objetivo a análise elasto-plástica de placas. Fernandes (1998) desenvolveu uma formulação linear de placas através do MEC que foi estendida à análise não-linear de placas de concreto armado em seu mestrado, já no doutorado Fernandes (2003) adaptou a formulação linear do MEC, baseada nas hipóteses de Kirchhoff, para análise não-linear de pavimentos de edifícios e hoje continua sua pesquisa voltada para desenvolvimento de formulações do MEC para modelagem multi-escala de estruturas compostas por materiais heterogêneos.

Uma das vantagens que o MEC possui sobre os métodos de domínio, como o MEF, é a necessidade de discretizar somente o contorno para a maioria dos problemas. Uma desvantagem seria que a matriz final não é simétrica e é totalmente cheia, portanto, as técnicas de banda utilizadas para a matriz de rigidez global da estrutura do MEF, que é simétrica, não terão utilidade no MEC. Por outro lado, em muitos casos, com o MEC necessita-se uma malha bem menos refinada para alcançar bons resultados quando comparado ao MEF, o que compensa o fato da matriz do MEC não ser simétrica. Para casos onde ocorre concentração de tensões e quando o domínio em estudo tende ao infinito ou semi-infinito o MEC é mais indicado (Brebbia; Dominguez, 1994).

Em geral, os materiais envolvidos nos projetos estruturais (aço, concreto e madeira) são heterogêneos na microescala. Porém, em análises convencionais considera-se que o material da macroescala é homogêneo, sendo seu

comportamento regido por um modelo constitutivo fenomenológico. Na análise multi-escala estudada nesse trabalho, por exemplo, a microestrutura do material é modelada considerando-se as diferentes fases do mesmo, sendo a resposta constitutiva do material dada pelos valores homogeneizados da tensão e do tensor constitutivo da microestrutura, denominada de EVR (Elemento de Volume Representativo). Logo, na análise multi-escala tem-se uma melhor precisão da modelagem do comportamento desses materiais.

Devido à importância de se determinar a resposta constitutiva na macroescala através das complexas interações que acontecem na microescala, vários modelos matemáticos multi-escala foram formulados com o objetivo de prever o comportamento mecânico constitutivo dos materiais heterogêneos. Eles são:

- a) As abordagens baseadas em aproximações de campo médio.
- b) Os métodos de dimensionamento variacional.
- c) Os métodos baseados no conceito do EVR.

Segundo Toro (2014), a primeira abordagem (a) adota como hipótese a aproximação de micro-campos (tipicamente tensões e deformações) de elementos uniformes, constantes dentro de cada microconstituente do material compósito. Para cada componente, o campo é aproximado pelo seu valor médio. Já a segunda abordagem (b) utiliza princípios variacionais para determinar os limites superiores e inferiores rigorosos nas propriedades elásticas coletivas do composto (a palavra "coletivo" é usado no sentido de considerar a interação entre todos os componentes). Atualmente muitas pesquisas estão voltadas para essa abordagem. Finalmente, na última abordagem (c) a estratégia de homogeneização usa um elemento volumétrico (EVR) que tenta copiar a microestrutura do material. Este EVR é submetido a diferentes estados de excitação mecânica e, com base em sua resposta, é feita uma tentativa de construir uma descrição do comportamento tensão-deformação na macro escala.

Em geral, os dois primeiros casos (i e ii) são restritos à análise de materiais heterogêneos que apresentam microestruturas de topologia simples e/ou muito específicas. Esta é a razão pela qual grande número de soluções analíticas foram desenvolvidas. Embora o último tipo de aproximação (iii) seja usado para introduzir uma descrição mais detalhada de microestruturas complexas e, portanto, sua

aplicação na grande maioria dos casos é sujeita a soluções computacionais ou a processos de homogeneização do tipo computacional (TORO, 2014, p. 5).

Entre os métodos baseados no conceito de EVR tem-se três grandes classes de metodologia, que podem ser caracterizadas ao se considerar uma classificação de acordo com o critério do grau de acoplamento envolvido entre escalas e a forma como a informação é transferida da microescala (EVR) para a macro-escala. Nestes métodos o EVR é utilizado para modelar a microestrutura e a diferença entre eles é no tratamento dado à transferência de informação entre as duas escalas, utilizando o conceito da micro e macro escala. Eles são:

- a) Modelos hierárquicos
- b) Modelos semiconcorrentes
- c) Modelos concorrentes

A diferença entre esses modelos é o tratamento dado para se fazer a transferência de informações entre as escalas (macrocontínuo e a microestrutura do material). Nos modelos hierárquicos, a resposta mecânica do EVR é analisada previamente a partir de um conjunto de parâmetros predeterminados (que normalmente são os caminhos de deformações), a partir dos quais é obtida a resposta homogeneizada do EVR, que normalmente é dada em termos de tensões homogeneizadas. Então com essa resposta mecânica do EVR se constrói uma base de dados que pode ser utilizada de diversas formas, como por exemplo, para definir um modelo constitutivo quasi-fenomenológico para análise da macro-escala. Este modelo é inadequado para modelar materiais com microestruturas altamente complexas, mas devido a ser computacionalmente muito eficiente, ganhou popularidade (Toro, 2014).

A formulação apresentada neste trabalho é do tipo semiconcorrente, onde deve-se impor condições de contorno que são consistentes com as deformações obtidas na macro escala, dessa maneira o EVR é utilizado para resolver detalhadamente a micro escala, mediante alguma suposição tipicamente energética, tal como o princípio de Hill-Mandel, e a introdução de restrições cinemáticas, conseguindo com isso estabelecer uma transferência adequada de informação da micro para a macro escala (Toro, 2014).

Nos modelos concorrentes o EVR está contido na geometria do modelo macroscópico, ou seja, ele não é definido e analisado de forma separada como ocorre nos modelos semi-concorrentes. De acordo com Toro (2014), são utilizadas técnicas baseadas no multiplicadores de Lagrange, impondo a consistência cinemática e o equilíbrio da quantidade de movimento entre a macro e micro escala, após o EVR ser introduzido (ou absorvido) na geometria do modelo macroscópico. Isto é feito de maneira idêntica às metodologias de decomposição de domínio. A desvantagem desse método é que o mesmo somente é computacionalmente viável quando a separação entre as escalas não é tão grande, ou seja, quando o tamanho do macro contínuo não é muito diferente do tamanho do EVR.

No presente trabalho é apresentada uma formulação do MEC, considerando-se não linearidade física, para resolver o problema na microescala denominada EVR, a qual representa a micro-estrutura do material. Como os materiais, mesmo os metálicos, são heterogêneos na sua escala micro e granular, modelar em diferentes escalas é muito importante para representar melhor o seu comportamento, porque se consegue representar de forma mais precisa sua micro-estrutura.

Na análise em multi-escala, estudada nesse trabalho, necessita-se definir um EVR para cada ponto da estrutura onde os cálculos das tensões e do tensor constitutivo são necessários a fim de verificar o problema de equilíbrio da estrutura, definida como o macro-contínuo. Nesse tipo de análise, o comportamento do material não é governado por um modelo constitutivo, mas definido pelos valores homogeneizados das tensões e do tensor constitutivo, que são obtidos após a solução do problema de equilíbrio do EVR. Como o EVR representa a micro-estrutura do material, assume-se que o mesmo pode ser composto de diferentes fases (ou materiais) que possuem módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson característicos, além de apresentar comportamento não-linear distintos. Nesse tipo de análise, adotando-se modelos constitutivos simples para as fases do EVR, consegue-se modelar comportamentos complexos de materiais heterogêneos, que para serem modelados numa análise não-linear convencional, de forma mais confiável, seriam necessários modelos constitutivos muito complexos. Na modelagem proposta, além de discretizar o contorno e interfaces em elementos, é necessária a discretização do domínio em células, devido ao surgimento de integrais de domínio que envolvem deslocamentos e forças normais iniciais, que são incógnitas do problema. Nesse trabalho não serão feitas análises multi-escala de

estruturas, apenas diferentes EVRs sujeitos a uma deformação serão analisados, com o objetivo de obter seus valores homogeneizados das tensões e do tensor constitutivo, após a solução do seu problema de equilíbrio.

Na análise em multi-escala, a deformação de um ponto no macro-contínuo é imposta ao EVR (micro-escala), sendo que no caso da formulação desenvolvida nesse trabalho, essa deformação é imposta aos nós do contorno do EVR. Devido ao fato do material ser heterogêneo, ou seja, constituído de diferentes fases e/ou vazios, irá surgir um campo de flutuação dos deslocamentos no EVR, que surge quando a deformação microscópica varia ao longo do EVR. Portanto, o problema de equilíbrio do EVR é solucionado quando se encontra o campo de flutuação dos deslocamentos que satisfaz a equação de equilíbrio do mesmo, que ocorre quando o campo de forças do EVR encontra-se em equilíbrio. Observe que se o EVR fosse homogêneo, ou seja, constituído por uma única fase, a flutuação dos deslocamentos seria nula, então a tensão homogeneizada na macro-escala seria igual àquela obtida numa análise não-linear física convencional (sem considerar a modelagem da micro-escala ou EVR). É importante ressaltar que para a solução do problema de equilíbrio do EVR, é necessário impor condições de contorno em termos de flutuação dos deslocamentos, gerando assim diferentes modelos multi-escala, que produzem diferentes valores homogeneizados para as tensões e o tensor constitutivo.

1.2 Revisão Bibliográfica

Os materiais, mesmo os metálicos, apresentam micro-heterogeneidade. O concreto, por exemplo, tem na sua microestrutura a matriz (agregado miúdo, cimento e água), agregado graúdo e vazios. A matriz apresenta comportamento não-linear, porém as inclusões têm comportamento linear. Além disso, tem-se não-linearidade do material causada pela formação e crescimento de microfissuras (Nemat-Nasser e Hori, 1993).

Para prever o comportamento macroscópico dos materiais heterogêneos, várias técnicas de homogeneização são utilizadas. No contexto da multi-escala, a resposta mecânica da macroestrutura pode ser encontrada através da homogeneização de complexas interações micromecânicas que ocorrem nas pequenas escalas de comprimento (TORO et al., 2014). Uma técnica de

homogeneização computacional para análise não-linear em multi-escala onde o MEF foi utilizado para modelar a macro e microescala foi proposta por Kouznetsova (2002) em sua tese de doutorado. Outros pesquisadores também utilizaram o MEF para análise da multi-escala, entre os mais recentes pode-se destacar os trabalhos de Perić et al. (2011) que discutiu uma estratégia computacional para homogeneização da microestrutura com comportamento não-linear do material submetido à pequenas deformações e resolveu o problema de equilíbrio na microescala e Toro et al. (2014) que apresentou uma implementação numérica detalhada das duas escalas para analisar a ruptura de materiais heterogêneos.

No contexto da análise não-linear física de estruturas, vários trabalhos têm considerado o MEC para tratar diferentes tipos de problemas, entre eles Fernandes e De Souza Neto (2013) onde foi desenvolvido uma formulação não-linear do MEC para análise de placas (problemas bidimensional e de flexão), utilizando o operador tangente consistente e obtendo convergência quadrática no processo iterativo de um dado incremento de carga. As integrais de domínio necessárias para calcular os termos plásticos foram executadas utilizando esquemas numéricos precisos, baseado na integração de sub-elementos conforme Fernandes (1998). Em Fernandes *et al.* (2015a; b) é tratado da análise em multi-escala de placas, sendo o primeiro sobre o problema bidimensional e o segundo sobre o problema de flexão. Nesses trabalhos, a formulação não-linear apresentada em Fernandes e Souza Neto (2013) é usada para modelar o macro-contínuo, já para resolver o problema de equilíbrio na microescala é utilizado o MEF de acordo com a teoria apresentada em Perić *et al.* (2011) e Souza Neto e Feijóo (2006).

As propriedades físicas e geométricas da microestrutura são identificadas pelo EVR que é utilizado na maioria das técnicas de homogeneização. A geometria do EVR é baseada na morfologia da microestrutura do material a ser analisado. Como ele é utilizado para obter a resposta no macro-contínuo, a escolha adequada do EVR determina em grande parte a precisão da modelagem de um material heterogêneo (KOUZNETSOVA, 2002). Uma teoria no contexto da multi-escala dos sólidos baseada no conceito do EVR e contabilizando forças de massa foi proposta por Souza Neto et al. (2015), onde é mostrado que as flutuações das forças de massa sobre a média volumétrica do EVR pode afetar o problema de equilíbrio na microescala e a tensão constitutiva homogeneizada. Como em materiais heterogêneos a microestrutura é aleatória, a escolha de um “grande” EVR com

enorme número de inclusões consome muito tempo para a simulação de problemas de valor de contorno macroscópicos, então Schröder et al. (2011) propôs o Elemento de Volume Representativo Estatisticamente Similar (EVRES) que tem menos complexidade mas reflete os atributos morfológicos essenciais da microescala.

O conceito de operador tangente consistente foi implementado por Simo e Taylor (1985) para MEF e Bonnet e Mukherjee (1996) desenvolveu uma formulação implícita para o MEC. Foi utilizado também por De Souza Neto e Feijóo (2006) em seu trabalho sobre modelos constitutivos em multi-escala, onde é apresentada uma formulação cinemática completa dos sólidos com base na média volumétrica das tensões e deformações sobre um EVR. Paulino e Liu (2001) fizeram uma comparação do MEC para elasto-plasticidade usando ambos, o operador tangente consistente e o operador tangente contínuo. Com relação ao comportamento mecânico do material, o colapso mecânico em uma ampla variedade de materiais ocorre devido ao crescimento de descontinuidades internas, denominadas fissuras. Quando a região do processo de fratura é suficientemente grande perante a fissura, efeitos não lineares aparecem e não podem ser negligenciados. No trabalho de Cordeiro e Leonel (2016) tem-se a modelagem da propagação de fissuras na madeira utilizando o MEC e a técnica do operador tangente.

É interessante também citar Ohland (2017) que em seu trabalho de mestrado utiliza o MEC para fazer análise elástica de microestruturas heterogêneas. Nesse trabalho é desenvolvida e validada uma nova formulação do MEC proposta por Fernandes, de acordo com o modelo da micro-escala através do MEF proposto em Fernandes et al. (2015a,b), que foi desenvolvido no seu pós-doutorado com Eduardo de Sousa Neto, em Swansea University.

No presente trabalho, apresenta-se uma extensão da formulação do MEC desenvolvida em Ohland (2017), a fim de se fazer análise de microestruturas de materiais heterogêneos, considerando-se fenômenos dissipativos nas diferentes fases do EVR.

1.3 Objetivos e Justificativa

O objetivo desse trabalho é fazer a análise de microestruturas de materiais heterogêneos através do MEC considerando não-linearidade física, a fim de validar

uma formulação do MEC, que foi desenvolvida e implementada pela Prof. Gabriela Rezende Fernandes, no contexto da análise em multi-escala de estruturas. Não serão feitas análises multi-escala de estruturas, apenas diferentes microestruturas sujeitas a uma deformação representativa serão analisadas com o objetivo de obter seus valores homogeneizados das tensões e do tensor constitutivo. Assim, serão apresentados diferentes exemplos numéricos com diferentes condições de contorno em termos de flutuação dos deslocamentos no EVR, sendo o comportamento não-linear de um determinado material do EVR governado pelo modelo elasto-plástico de von Mises. A fim de validar a formulação proposta do MEC, os valores homogeneizados de tensão e do tensor constitutivo são comparados com aqueles obtidos através do MEF, de acordo com o modelo proposto em Fernandes et al. (2015a,b).

Na modelagem em multi-escala de estruturas pretende-se representar de forma mais confiável o comportamento de materiais heterogêneos, adotando-se modelos constitutivos simples para as fases do EVR. Numa análise não-linear convencional, para melhor representar o comportamento de tais materiais, seria necessário adotar modelos constitutivos complexos, com grande número de variáveis internas. Observe que nesse trabalho não serão feitas análises multi-escala de estruturas, apenas o comportamento mecânico da micro-estrutura do material será analisado. Porém, após validada a formulação proposta, a mesma será utilizada em trabalhos futuros para se fazer a análise multi-escala de estruturas, onde o MEC será adotado para modelar as escalas macro e micro.

1.4 Conteúdo do trabalho

No capítulo 2 apresenta-se um resumo da teoria da elasticidade, demonstrando equações básicas que regem o problema elástico bidimensional, além da equação diferencial de equilíbrio, a fórmula de Cauchy e a equação de Navier. Posteriormente estuda-se o comportamento de materiais que podem apresentar deformações plásticas, onde são definidas as tensões de tentativa, tensões verdadeiras e tensões plásticas.

No capítulo **3** são apresentados dois tipos de modelos elasto-plásticos para o caso uniaxial (elasto-plástico perfeito e com encruamento isótropo) e o modelo de von Mises, que será aquele adotado nas análises planas desse trabalho.

No capítulo **4** é deduzida a equação integral do deslocamento para análise não-linear física da micro-estrutura, chamada de EVR e que é considerada como uma chapa em sub-regiões. Posteriormente, é realizada a dedução da equação integral da derivada dos deslocamentos e dos termos livres para pontos sobre o contorno ou interface. São também demonstradas todas as equações necessárias para resolver o problema da micro-estrutura através do MEC, considerando-se não linearidade física.

No capítulo **5** a equação integral do deslocamento é transformada em equação algébrica, ou seja, é escrita na forma matricial em função dos valores nodais das variáveis. Monta-se então o sistema de equações, onde são escritas duas equações de deslocamentos nas direções x_1 e x_2 (u_1 e u_2) para os pontos internos, sobre as interfaces e sobre o contorno. Os valores da macro-deformação são impostos como condição de contorno no sistema de equações e com isso obtêm-se as incógnitas do problema.

No capítulo **6** é desenvolvido o problema de equilíbrio do EVR em termos de flutuação dos deslocamentos, de acordo com a formulação proposta em Fernandes et al. (2015a, b) e mostrando como o mesmo se relaciona com o macro-contínuo. Assim, trata-se da homogeneização dos campos de tensões e do tensor constitutivo do EVR, além da solução do seu sistema de equações onde são analisadas três condições de contorno em termos de flutuação dos deslocamentos.

No capítulo **7** é demonstrado alguns exemplos numéricos para validar o modelo proposto, onde os resultados encontrados das tensões e do tensor constitutivo homogeneizado são comparados com a formulação do EVR desenvolvida através do MEF descrita em Fernandes et al. (2015a,b). Nos exemplos são adotados EVRs com diferentes volumes de vazios ou inclusões, sendo que em alguns deles são comparadas as respostas numéricas que se obtêm considerando-se as diferentes condições de contorno em termos de flutuação dos deslocamentos.

2 EQUAÇÕES BÁSICAS

2.1 Introdução

Para entender como a formulação do problema elástico é abordada via Método dos Elementos de Contorno, algumas importantes relações utilizadas na dedução das equações integrais, bem como na definição do problema fundamental, são apresentadas nesse capítulo. Mais detalhes em relação à Teoria da Elasticidade podem ser encontrados em diversos trabalhos como: Timoshenko et al. (1951) e no capítulo 5 de Brebbia et al. (1984) e na apostila de Introdução ao Método dos Elementos de Contorno, Fernandes (2005).

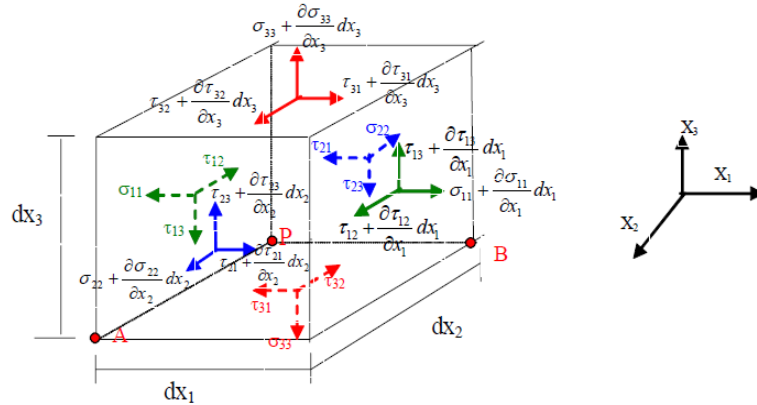
Inicialmente é apresentado um elemento cúbico infinitesimal em que é feito o equilíbrio de forças e momentos e, com isso, obtida a equação diferencial de equilíbrio que representa o problema elástico. Posteriormente, apresentam-se as relações lineares entre as tensões e as deformações, conhecidas como lei de Hooke, considerando que o material é homogêneo e isótropo (Timoshenko *et al.*, 1951). Finalmente, são apresentadas equações necessárias para solucionar o problema elástico bidimensional, como a fórmula de Cauchy e a equação de Navier. Foram definidos no capítulo 1.1 do anexo os casos de estado plano de tensão e deformação, que podem ser considerados na formulação da micro-estrutura apresentada nesse trabalho.

2.2 Teoria da elasticidade

2.2.1 Estado Tridimensional de Tensão

A Figura 1 exibe um elemento cúbico infinitesimal, onde o mesmo é a representação de um ponto p qualquer de um sólido tridimensional elástico linear. O mesmo está sujeito a ações das forças de massa b_1 , b_2 , e b_3 , respectivamente nas direções X_1 , X_2 e X_3 , atuando no centro de gravidade do elemento. As nove componentes de tensão constituem o estado triplo de tensões, onde nas faces opostas do elemento cúbico, as tensões têm sentidos opostos e mesmo valor absoluto, de modo que o elemento fique em equilíbrio.

Figura 1 – Elemento cúbico infinitesimal



Fonte: Fernandes (2005)

A tensão σ_{ij} representa a tensão na direção j da face cuja normal tem direção i . Fazendo-se o equilíbrio das forças nas três direções X_1 , X_2 e X_3 tem-se a seguinte expressão na forma indicial:

$$\sigma_{ji,j}(p) + b_i(p) = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

Desenvolvendo-se o equilíbrio dos momentos em relação às três direções, no centro de gravidade do elemento é obtida a seguinte relação expressa em notação indicial:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.2)$$

Esta relação representa a condição de simetria do tensor das tensões. Assim, considerando a relação em (2.2), a equação (2.1) pode também ser escrita da seguinte maneira:

$$\sigma_{ij,j}(p) + b_i(p) = 0 \quad (2.3)$$

A expressão representada pela equação (2.3) é conhecida como a equação diferencial de equilíbrio que representa o problema elástico.

O tensor das deformações infinitesimal de Cauchy é dado por:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.4)$$

Todas as relações apresentadas até agora são independentes das propriedades dos materiais, e conseqüentemente, elas são válidas para ambos, o comportamento elástico e inelástico do material (Brebba *et al.*, 1984).

A lei de Hooke relaciona tensão e deformação para um material isótropo que não tenha variação de temperatura e tenha comportamento elástico, como indicado abaixo:

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (2.5)$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker e as seguintes constantes elásticas são utilizadas: Módulo de elasticidade longitudinal ou módulo de Young: E ; Coeficiente de Poisson: ν ; Módulo de elasticidade transversal: G dado por $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

Ou inversamente:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left[\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right] \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (2.6)$$

Derivando a equação (2.5) em relação à j , e substituindo na equação (2.3) obtém-se a equação diferencial do problema elástico, escrita em termos de deslocamentos, que é conhecida como equação de Navier:

$$u_{i,jj} + \frac{1}{1-2\nu} u_{j,ij} + \frac{b_i}{G} = 0 \quad (2.7)$$

As tensões ou forças de superfície p_i que atuam em um ponto pertencente a um plano inclinado de normal \vec{n} são obtidas pela fórmula de Cauchy, que é definida pela seguinte expressão:

$$p_i = \sigma_{ni} = \sigma_{ij}n_j \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.8)$$

O estado plano de tensão e deformação está apresentado no capítulo 1.1 do anexo.

2.3 Tensões e deformações para análise não-linear física

Quando se trata de análise de estruturas ou de micro-estruturas considerando-se não-linearidade física do material, que é quando o carregamento gera tensões que ultrapassam o limite elástico do material, é preciso definir um modelo constitutivo para representar o comportamento do material, que nesse trabalho será o modelo de plasticidade de von Mises. Observe que nesse trabalho, não se faz análise de estruturas, mas da micro-estrutura de materiais heterogêneos. Nesse caso, um modelo constitutivo deve ser adotado para as diferentes fases da micro-estrutura (EVR), sendo o comportamento do material que compõe a estrutura (macro-contínuo), ou seja, os valores das tensões e do tensor constitutivo de um ponto do macro-contínuo, definido através da homogeneização dos campos de tensão e do tensor constitutivo no EVR. Portanto, numa análise multi-escala, o comportamento do material não é definido através de um modelo constitutivo fenomenológico, mas através da homogeneização dos campos de tensão e do tensor constitutivo no EVR. Porém, nesse item será feito um estudo geral sobre materiais que apresentam deformações residuais, sendo as equações apresentadas válidas para uma análise não-linear física convencional ou para representar o comportamento de uma determinada fase da micro-estrutura numa análise multi-escala, sendo esse último caso aquele a ser tratado nesse trabalho.

De uma forma geral, na análise não-linear física, definido o modelo constitutivo, para um dado valor de deformação é obtida a tensão e a relação constitutiva do material. Assim, até o limite elástico do material, onde se aplica a lei de Hooke, só

existe a deformação elástica ε_{ij}^e , que é diretamente proporcional à tensão, e quando é removida a carga da estrutura, essa volta a sua forma original. Se a tensão ultrapassar o limite elástico, a deformação não se anula se a carga for retirada, surgindo a deformação inelástica ε_{ij}^0 , que é a deformação residual que a estrutura apresentará caso sua carga seja retirada. Portanto, a deformação total em uma análise não-linear física é dada pela soma da deformação elástica-linear com a deformação residual, como mostra a equação (2.9). Observe que no caso de comportamento elasto-plástico ε_{ij}^0 é a deformação plástica.

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^0 \quad i, j = 1, 2 \quad (2.9)$$

Considerando a lei de Hooke, demonstrada na equação (2.9) pode-se encontrar as tensões elásticas (denominadas de tensões de tentativa no processo incremental-iterativo discutido mais adiante) σ_{ij}^t , as tensões verdadeiras σ_{ij} e as tensões plásticas σ_{ij}^0 .

As tensões elásticas são calculadas considerando-se as deformações totais:

$$\sigma_{ij}^t = 2G\varepsilon_{ij} + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (2.10)$$

As tensões verdadeiras são obtidas após a verificação do modelo constitutivo e estão relacionadas, pela lei de Hooke, com as deformações elásticas (ou são relacionadas com as deformações totais através do tensor constitutivo elasto-plástico):

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij}^e + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk}^e \delta_{ij} \quad (2.11)$$

Finalmente as tensões plásticas estão relacionadas, pela lei de Hooke, com as deformações plásticas, ou seja:

$$\sigma_{ij}^0 = 2G\varepsilon_{ij}^0 + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk}^0 \delta_{ij} \quad (2.12)$$

Portanto, as tensões elásticas podem ser escritas como:

$$\sigma_{ij}^t = \sigma_{ij} + \sigma_{ij}^0 \quad (2.13)$$

Integrando essas tensões ao longo da espessura de uma chapa, considerando o caso de estado plano de tensão, obtêm-se os campos de forças normais constantes ao longo da espessura:

$$N_{ij}^t = N_{ij} + N_{ij}^0 \quad (2.14)$$

Onde o esforço elástico N_{ij}^t em uma sub-região Ω_s é dado por:

$$N_{ij}^t(\Omega_s) = \frac{\bar{E}_s}{(1-\nu_s^2)} \left[\nu_s \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + (1-\nu_s) \varepsilon_{ij} \right] \quad (2.15)$$

sendo que $\bar{E}_s = E_s t_s$.

Logo, a equação (2.3) pode ser escrita como:

$$N_{ij,j}(p) + \bar{b}_i(p) = 0 \quad (2.16)$$

sendo que $\bar{b}_i = b_i t_s$, onde b_i são as forças de massa ou de corpo.

3 MODELOS ELASTO-PLÁSTICOS

3.1 Introdução

Seja uma estrutura à qual são aplicados incrementos gradativos de tensões. Inicialmente, a deformação inicial do elemento é completamente elástica e a forma original do elemento é recuperada quando há ausência de carregamento. Quando as solicitações à que o corpo está sujeito excedem o limite elástico do material, surgem deformações plásticas na estrutura que são irreversíveis. Nesse caso, tem-se o comportamento elasto-plástico, caracterizado pelo aparecimento de deformações plásticas na estrutura.

É importante dizer que nesse item será feito um estudo geral sobre materiais com comportamento elasto-plástico, sendo as equações apresentadas válidas para uma análise não-linear física convencional ou para representar o comportamento de uma determinada fase da micro-estrutura numa análise multi-escala, sendo esse último caso aquele a ser tratado nesse trabalho.

Para modelar o comportamento elasto-plástico, devem-se ter relações explícitas entre tensão e deformação. Na fase elástica a relação é dada pela lei de Hooke, e na fase plástica a relação deve ser definida segundo um modelo constitutivo. É necessária também uma lei de evolução do tensor de deformações plásticas, ou seja, um critério de escoamento (ou plastificação), que define o limite do comportamento elástico sob qualquer combinação possível de tensões, ou seja, indica quando ocorrerá escoamento. No caso de modelos que considerem o encruamento, é necessária uma regra de endurecimento, que governa a variação da tensão de escoamento, em função das deformações plásticas (Fernandes, 1998).

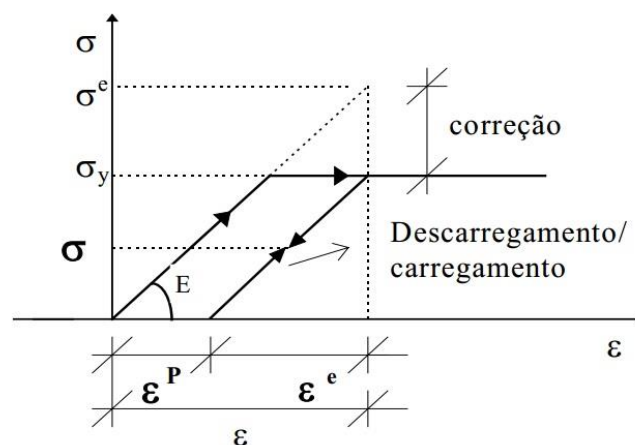
Os critérios podem ser definidos conforme o material que está sendo analisado. Para materiais frágeis, são indicados a Teoria de Rankine ou Teoria de Coulomb quando o material possui resistência à tração igual à resistência à compressão, e critério de Mohr-Coulomb que não possui a limitação anterior, ou seja, as duas resistências podem ser diferentes. Para materiais dúcteis tem-se o critério de Tresca, relacionado à máxima tensão cisalhante e o critério de von Mises, relacionado à máxima energia de distorção.

Para se realizar uma análise não linear física é necessário conhecer o modelo constitutivo, que dado o valor da deformação, fornece a tensão e a relação constitutiva do material em estudo. Porém, para se obter a solução numérica do problema, a carga deve ser dividida em incrementos de carga, sendo a solução obtida para cada incremento de carga. Nesse caso, a deformação total é dada pela deformação no incremento anterior mais o incremento de deformação relacionado ao último incremento de carga. Com isso, a deformação que ocorre em um sólido com comportamento plástico é determinada pela história do carregamento. Logo, o problema da plasticidade é essencialmente de natureza incremental (CHAKRABARTY, 2012).

3.2 Modelo elasto-plástico perfeito para o caso uniaxial

Neste modelo não há o efeito de endurecimento (encruamento) que pode ocorrer após ser atingida a tensão de escoamento σ_y . Admite-se que deformações plásticas ε^p ocorrem quando a tensão alcança o valor da tensão de escoamento, que corresponde à máxima tensão suportada pelo material. Assim, para valores de tensão menores que a tensão de escoamento $\sigma < \sigma_y$, as deformações são totalmente elásticas ε^e . Conforme a Figura 2 o material não suporta tensões superiores à tensão de escoamento, sendo σ^e a tensão elástica, que corresponde à tensão que ocorreria em uma análise elástica linear.

Figura 2 - Comportamento elastoplástico perfeito



Fonte: Fernandes (1998)

Nesse modelo, não se admite tensões maiores que σ_y , ou seja, $f(\sigma) > 0$ (ver equação 3.1) e quando isso ocorre em um determinado ponto, deve-se fazer a correção da tensão. Assim, o mesmo sofre descarregamento, pois não é capaz de suportar o estado de tensão à que está submetido, havendo redistribuição de tensão para os pontos vizinhos e evolução da deformação plástica no ponto considerado. Se houver um novo carregamento, esse será efetuado sobre a mesma reta do último descarregamento.

No caso de comportamento elasto-plástico perfeito, o critério de plastificação é dado por:

$$f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y \leq 0 \quad (3.1)$$

em que σ é a tensão atuante a qual o ponto está submetido.

Considerando-se a equação (2.09) e a Lei de Hooke, que define a relação entre tensão e deformação no caso elástico-linear, tem-se:

$$\sigma = E\varepsilon^e = E(\varepsilon - \varepsilon^p) \quad (3.2)$$

Derivando-se a equação (3.2) em relação ao tempo, obtém-se:

$$\dot{\sigma} = E \dot{\varepsilon}^e = E \left(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p \right) \quad (3.3)$$

onde $\dot{\varepsilon}^p = \frac{\partial \varepsilon^p}{\partial t}$ é a taxa de deformação plástica, sendo que as deformações permanentes ocorrem apenas quando esta taxa é diferente de zero. A deformação plástica acumulada num certo intervalo de tempo é dada pela integral da taxa neste mesmo intervalo. O tempo, neste caso, representa a história do carregamento, que no problema real é sempre incremental, já que as cargas são aplicadas progressivamente nas estruturas.

A equação (3.3) pode ser escrita também, de forma equivalente, em termos de incrementos, obtendo-se:

$$\Delta\sigma = E\Delta\varepsilon^e = E(\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^p) \quad (3.4)$$

Definindo-se $\dot{\lambda}$ como sendo o valor absoluto da velocidade de deformação plástica $\dot{\varepsilon}^p$ e considerando-se um comportamento simétrico em tração e compressão, tem-se:

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \quad \text{se} \quad \sigma > 0 \quad (3.5a)$$

$$\dot{\varepsilon}^p = -\dot{\lambda} \quad \text{se} \quad \sigma < 0 \quad (3.5b)$$

Como não é admitido $f(\sigma)_{t+\Delta t} > 0$ e no caso onde tem-se um descarregamento $f(\sigma)_{t+\Delta t} < 0$, pode-se assumir que:

$$\Delta\lambda = 0 \quad \text{se} \quad f(\sigma)_{t+\Delta t} < 0 \quad (3.6a)$$

$$\Delta\lambda \geq 0 \quad \text{se} \quad f(\sigma)_{t+\Delta t} = 0 \quad (3.6b)$$

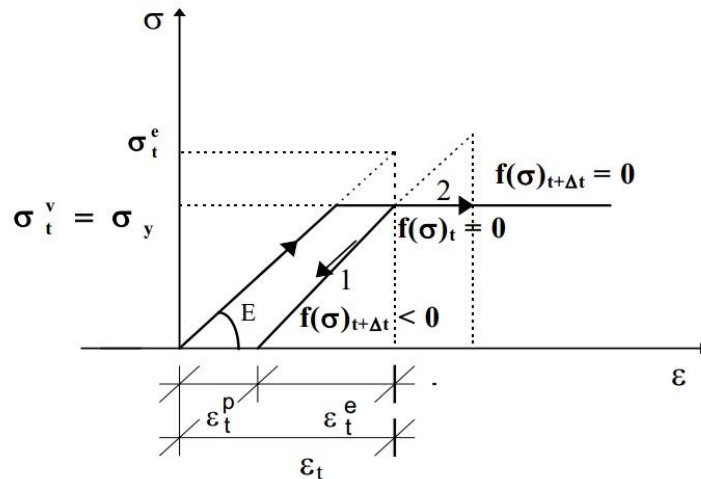
Dessa maneira obtém-se a condição de complementaridade (válida também para comportamento elasto-plástico com encruamento e o critério de von Mises a serem detalhados nos itens seguintes), isto é:

$$\Delta\lambda f(\sigma) = 0 \quad (3.7)$$

Na Figura 3 são ilustrados os casos de evolução ou não da deformação plástica. Considere o instante t , onde $f(\sigma)_t = 0$. A partir dessa posição tem-se três prováveis situações: $\dot{f} > 0$, $\dot{f} < 0$ e $\dot{f} = 0$. A situação $\dot{f} > 0$ implica em $f(\sigma)_{t+\Delta t} > 0$, o que é inadmissível, ou seja, só é permitido $\dot{f} \leq 0$. A deformação plástica não evolui ($\dot{\lambda} = 0$) quando $\dot{f} < 0$, ou seja, tem-se um descarregamento (caminho 1). O mesmo

não acontece quando $\dot{f} = 0$, onde é constatada a evolução da deformação plástica $\dot{\lambda} > 0$ (caminho 2).

Figura 3 - Modelo elastoplástico perfeito



Fonte: Fernandes (1998)

onde: σ_t^e é a tensão de tentativa no instante t , σ_t^v é a tensão verdadeira no instante t e $f(\sigma)_{t+\Delta t}$ é o valor do critério correspondente ao instante $t + \Delta t$.

Considere agora um certo instante t , onde $f(\sigma)_t < 0$. Nesse cenário o ponto pode ser carregado até o limite elástico, sem haver a evolução da deformação plástica. Dessa maneira, no caso de o ponto ser submetido a uma tensão exatamente igual ao limite elástico, ter-se-á $f(\sigma)_{t+\Delta t} = 0$ e $\Delta\lambda = 0$. Já se o ponto for submetido a uma tensão maior que seu limite elástico, ele sofrerá descarregamento e evolução da deformação plástica. Logo no final da iteração ter-se-á $f(\sigma)_{t+\Delta t} = 0$ e $\Delta\lambda > 0$.

Assim, pode-se dizer que:

$$\Delta\lambda = 0 \text{ se } f(\sigma)_{t+\Delta t} < 0 \text{ e } \Delta f < 0 \quad (\text{caso de descarregamento}) \quad (3.8a)$$

$$\Delta\lambda > 0 \text{ se } f(\sigma)_{t+\Delta t} = 0 \text{ e } \Delta f = 0 \quad (\text{caso de carregamento}) \quad (3.8b)$$

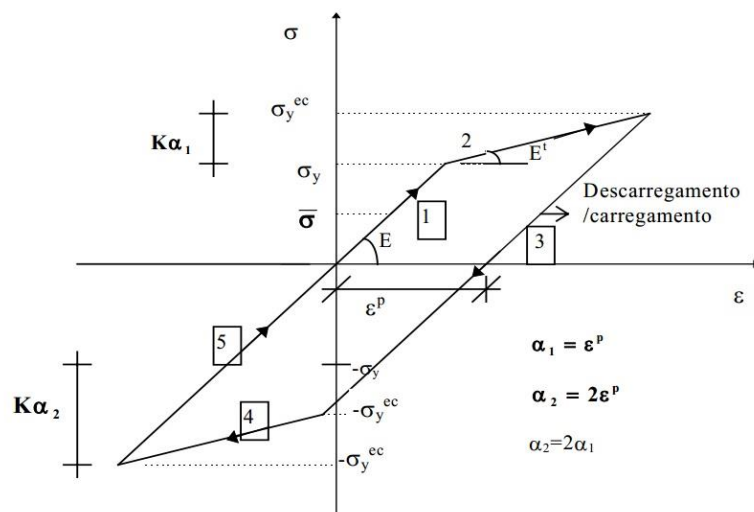
Portanto, observado as equações (3.8a) e (3.8b), tem-se a condição de consistência (válida também para comportamento elasto-plástico com encruamento e o critério de Von Mises a serem detalhados nos itens seguintes):

$$\Delta\lambda\Delta f = 0 \quad (3.9)$$

3.3 Modelo elasto-plástico com encruamento isótropo para o caso uniaxial

Na região plástica, isto é, quando o nível de carregamento corresponde a um valor para a tensão superior à tensão de escoamento, o incremento de deformação plástica é acompanhado de um incremento da tensão, e diz que houve um encruamento do material (Jorge e Dinis, 2004). Nesse modelo, o limite elástico inicial se expande, com a evolução da plastificação. No caso de encruamento isótropo, o centro do intervalo permanece inalterado, mas os limites elásticos de tração e compressão se expandem simetricamente (ver figura 4), mantendo-se as características iniciais de isotropia do material. O modelo é indicado em situações de carregamento crescentes, como é o caso apresentado nesse trabalho.

Figura 4 - Modelo elasto-plástico com encruamento linear



Fonte: Fernandes (1998)

Será adotada a curva bilinear, isto é, após o limite elástico, define-se apenas um valor para o encruamento. Além disso, adota-se um comportamento simétrico em tração e compressão, como mostrado na Figura 4, que mostra um ciclo completo de tensão. Num caso mais geral, poderiam se definir diferentes valores para o encruamento de acordo com o nível de tensão. Na Figura 4 o **trecho 1** representa a fase elástica; no **trecho 2**, o material foi submetido a uma tensão de tração maior que o limite elástico, ocorrendo encruamento e evolução da deformação plástica ao final do descarregamento. Na **fase 3**, após o descarregamento, o material é carregado elasticamente, no sentido inverso, até o novo limite elástico de compressão $-\sigma_y^{enc}$. Na **fase 4**, o mesmo é submetido a uma tensão maior que $-\sigma_y^{enc}$, ocorrendo um novo encruamento e nova evolução da deformação plástica, que é igual à anterior em valor absoluto, mas de sinal contrário. Assim, no final do ciclo, tem-se uma deformação plástica acumulada igual a zero. O critério de plastificação, nesse caso, é dado por:

$$f(\sigma, \alpha) = |\sigma| - (\sigma_y + K\alpha) \leq 0 \quad (3.10)$$

onde K é dado pela tangente à curva $\sigma_x \varepsilon^p$, e é denominado módulo plástico ou parâmetro de endurecimento; e α é a variável interna associada ao encruamento, que é dada por $\dot{\alpha} = \dot{\varepsilon}^p$, ou seja, no caso da hipótese de encruamento por deformação $\dot{\alpha} = \dot{\lambda}$.

Depois que o material sofre encruamento, a tensão de escoamento no incremento n é representada por:

$$\sigma_y^n = (\sigma_y + K\alpha) \quad (3.11)$$

Assim, o modelo elasto-plástico uniaxial com encruamento isotrópico é dado por:

$$\dot{\sigma} = \begin{cases} E \dot{\varepsilon} & se \quad \dot{\lambda} = 0 \\ E^t \dot{\varepsilon} & se \quad \dot{\lambda} \neq 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

Onde E^t é o módulo elásto-plástico tangente dado por:

$$E^t = \frac{EK}{(E + K)} \quad (3.13)$$

3.4 Modelo elásto-plástico com encruamento isótropo para o caso multiaxial

Nesse modelo, o critério de plastificação ou de escoamento, no caso bidimensional ou tridimensional, é dado por:

$$f(\bar{\sigma}, p) = \bar{\sigma} - \sigma_y(p) \leq 0 \quad (3.14)$$

onde $\bar{\sigma}$ é a tensão efetiva, isto é, a tensão equivalente à do estado uniaxial, calculada a partir do critério adotado; $\sigma_y(p)$ é a nova tensão de plastificação que, após o encruamento é dada por:

$$\sigma_y(p) = (\sigma_y - p) \quad (3.15)$$

sendo σ_y a tensão inicial de escoamento. A variável p é relacionada ao encruamento isótropo, dada por:

$$p = -K\bar{\varepsilon}^p \quad (3.16)$$

onde $\bar{\varepsilon}^p$ é a deformação plástica efetiva, ou seja, a deformação plástica equivalente ao estado uniaxial.

Escrevendo o tensor das deformações (equação 2.11) em termos de taxas, tem-se:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^0 \quad (3.17)$$

Na fase elástica a lei incremental é dada por:

$$\Delta\sigma_{ij} = C_{ijkl}\Delta\varepsilon_{kl}^e \quad (3.18)$$

onde C_{ijkl} é o tensor de constantes elásticas para materiais isotrópicos.

Na fase plástica, o caso multiaxial é associado ao caso uniaxial através da tensão e da deformação plástica efetivas. Assim, a lei incremental é dada por:

$$\Delta\bar{\sigma} = K\Delta\bar{\varepsilon}^p \quad (3.19)$$

A relação elasto-plástica entre tensão e deformação é dada por:

$$\Delta\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\Delta\varepsilon_{kl} - \Delta\varepsilon_{kl}^p) = C_{ijkl}^{ep}\Delta\varepsilon_{kl} \quad (3.20)$$

onde C^{ep} é o tensor dos módulos elasto-plásticos tangentes.

No caso multiaxial, o critério de plastificação será representado geometricamente por uma superfície de plastificação, como definido no próximo item para o Critério de Von Mises. Observe que essa superfície se expande com o aumento da deformação plástica, pois há um aumento do limite elástico devido ao encruamento.

Como já comentado, para resolver uma estrutura considerando-se não-linearidade física, deve-se dividir a carga total em incrementos de carga, sendo o equilíbrio da estrutura verificado para cada incremento n . Se algum ponto da estrutura estiver plastificado, a equação de equilíbrio da estrutura não será satisfeita, necessitando-se então de um processo iterativo, onde a cada iteração i calcula-se uma correção a ser dada no vetor das deformações da estrutura $\delta\varepsilon_n^{e(i)}$ e verifica-se o modelo constitutivo para todos os pontos da estrutura. O processo iterativo termina quando se encontra o vetor de deformações que satisfaz a equação de equilíbrio da estrutura. Assim, cada nova iteração representa uma nova estimativa do campo de deformação, a fim de achar aquele que satisfaz a equação de equilíbrio da estrutura. Portanto, a tensão de tentativa $\sigma_n^{e(i)}$, para uma determinada iteração, deve ser

determinada somando-se o incremento de tensão elástica $\Delta\sigma_n^{e(i)}$ à tensão verdadeira do incremento anterior σ_{n-1}^v (que representa um estado de tensão que satisfaz a equação de equilíbrio da estrutura). Diferentemente da tensão, a deformação total $\varepsilon_n^{(i)}$ é uma variável encontrada a partir de seu acúmulo, ou seja, o seu valor será o valor da deformação na iteração anterior $i-1$ mais a correção de deformação dada na iteração atual i . Assim, as deformações totais e as tensões elásticas (ou de tentativa) da iteração i em um determinado incremento n são definidos como:

$$\Delta\varepsilon_n^{e(i)} = \Delta\varepsilon_n^{e(i-1)} + \delta\varepsilon_n^{e(i)} \quad (3.21a)$$

$$\varepsilon_n^{(i)} = \varepsilon_{n-1} + \Delta\varepsilon_n^{e(i)} \quad (3.21b)$$

$$\sigma_n^{e(i)} = E\left(\varepsilon_n^{(i)} - \varepsilon_{n-1}^p\right) = \sigma_{n-1}^v + \Delta\sigma_n^{e(i)} \quad (3.21c)$$

Considerando-se as tensões de tentativa, verifica-se o critério, devendo ser satisfeita a condição $\Delta\lambda f_n = 0$. Pode-se ocorrer três casos:

- Se $f_n < 0$, tem-se descarregamento elástico e o ponto está dentro da superfície de plastificação tem-se que $\Delta\lambda = 0$ e portanto $\sigma_n^{v(i)} = \sigma_n^{e(i)}$;
- Se $\dot{f} = 0$ e $\dot{\lambda} > 0$ (ou $f_n > 0$ e $\Delta\lambda > 0$) tem-se carregamento plástico (o ponto cai fora da superfície de plastificação, quando se soma o incremento de tensão de tentativa à tensão verdadeira do incremento anterior), com evolução da deformação plástica e do encruamento. Portanto, deve-se procurar um novo estado de tensão tal que $f_n = 0$. Calcula-se então $\Delta\lambda$ através da equação e o incremento de deformação plástica $\Delta\varepsilon_n^p$, obtendo-se os valores atualizados das deformações plásticas, das tensões e das deformações plásticas efetivas através das equações:

$$\varepsilon_n^{p(i)} = \varepsilon_{n-1}^p + \Delta\varepsilon_n^{p(i)} \quad (3.22a)$$

$$\sigma_n^{v(i)} = E(\varepsilon_n - \varepsilon_n^{p(i)}) \quad (3.22b)$$

$$\sigma_n^{v(i)} = \sigma_{n-1}^v + \Delta\sigma_n^{e(i)} - \Delta\sigma_n^{p(i)} \quad (3.22c)$$

- Se $\dot{f} = 0$ e $\dot{\lambda} = 0$ tem-se um carregamento neutro, que ocorre em materiais perfeitamente plásticos, onde não há evolução da deformação plástica, ou seja, tem-se $f = 0$ ao final de dois incrementos consecutivos, sem ocorrer encruamento no último incremento considerado, ou seja, a superfície de plastificação permanece inalterada e o ponto 'anda' sobre a mesma.

3.5 Modelo de von Mises

Nesta teoria, considera-se que o escoamento ocorre quando a energia associada à mudança de forma de um corpo sob carregamento multiaxial for igual à energia de distorção em um corpo de prova de tração, para o qual o escoamento ocorre na tensão de escoamento uniaxial $\bar{\sigma}_y$. Será adotada para a tensão de escoamento uniaxial a notação $\bar{\sigma}_y$ a fim de evitar confusão com a tensão normal na direção y , σ_y .

A densidade de energia de distorção para um elemento sujeito a um estado triaxial de tensões pode ser escrita, em termos das tensões principais, como:

$$\bar{u}_d = \frac{(1+\nu)}{6E} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 \right] \quad (3.23)$$

A densidade de energia de distorção pode ser calculada em um ensaio de tração uniaxial, anulando as tensões principais $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ e fazendo $\sigma_1 = \sigma_y$, logo tem-se:

$$\bar{u}_{tração} = \frac{(1+\nu)}{6E} \left[2\sigma_y^2 \right] = \frac{(1+\nu)}{3E} \sigma_y^2 \quad (3.24)$$

Pelo enunciado do critério, tem-se que o escoamento ocorre quando a energia de distorção para um carregamento geral (equação 3.23), iguala à energia de distorção de um corpo de prova submetido a um ensaio uniaxial de tração (equação 3.24). Assim, o critério de falha da energia de distorção máxima pode ser enunciado, segundo o sistema principal (1, 2, 3), em termos das três tensões principais como:

$$\frac{1}{2} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 \right] = \bar{\sigma}_y^2 \quad (3.25)$$

O critério também pode ser expresso em termos das tensões normais e das tensões cisalhantes, segundo o sistema cartesiano (x, y, z) da seguinte forma:

$$\frac{1}{2} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) \right] = \bar{\sigma}_y^2 \quad (3.26)$$

Considerando o estado plano de tensões geral, ou seja, fazendo-se $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_z = 0$, a equação (3.26) fica da seguinte forma:

$$\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\sigma_{xy}^2 = \bar{\sigma}_y^2 \quad (3.27)$$

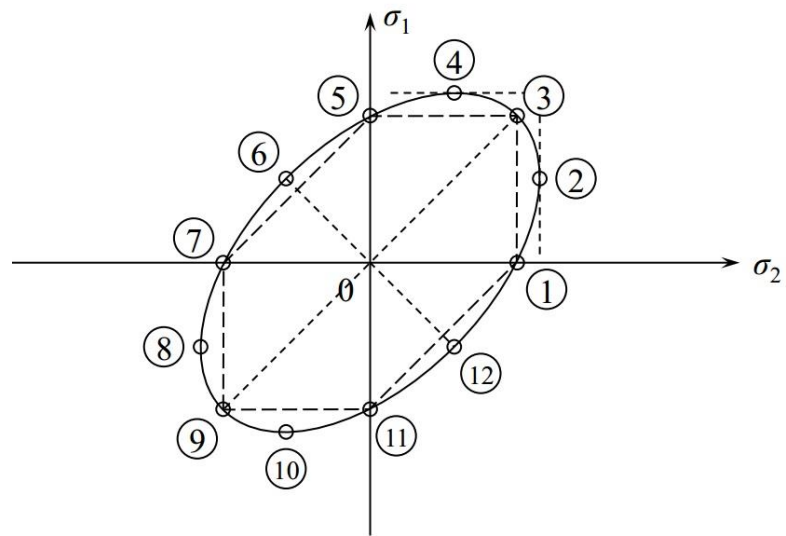
Em particular, no cisalhamento puro tem-se: $\sigma_x = \sigma_y = 0$ e $\sigma_{xy} = \bar{\sigma}_y / \sqrt{3}$. Na literatura $\bar{\sigma}_y / \sqrt{3} = k$ é chamada tensão cisalhante de escoamento correspondente ao critério de escoamento de von Mises (Wierzbicki, 2013).

Para o caso do estado plano de tensões, fazendo-se $\sigma_3 = \sigma_z = \sigma_{yz} = \sigma_{xz} = 0$, para a equação (3.25) ou (3.27), o critério de von Mises em termos das tensões principais fica reduzido a:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 = \bar{\sigma}_y^2 \quad (3.28)$$

A representação gráfica da equação (3.28) é a elipse apresentada na Figura 5, onde o hexágono representa o critério de Tresca, que não será tratado nesse trabalho.

Figura 5 - A elipse de von Mises



Fonte: Wierzbicki (2013)

4 EQUAÇÕES INTEGRAIS DA CHAPA DIVIDIDA EM SUB-REGIÕES CONSIDERANDO-SE NÃO-LINEARIDADE FÍSICA

4.1 Introdução

Para aplicar o Método dos Elementos de Contorno, inicialmente tem-se que obter a equação integral do deslocamento para um ponto interno. A partir dessa equação, podem-se obter as outras equações necessárias à solução do problema. Nesse trabalho a micro-estrutura ou EVR é modelado por uma chapa dividida em sub-regiões, sendo cada sub-região a definição da matriz ou de uma inclusão, podendo ainda conter vazios no interior da matriz. Na dedução da equação integral o Teorema de Reciprocidade de Betti é utilizado, porém com uma abordagem diferente. Nas equações integrais têm-se variáveis definidas ao longo do contorno, interfaces entre sub-regiões e domínio, sendo, portanto necessário a discretização do contorno e interfaces em elementos, assim como o domínio em células (ver detalhes no capítulo 5). Assim, na montagem do sistema de equações, discutida no capítulo 5, são escritas equações de deslocamentos em pontos do contorno e interface. Portanto, a seguir serão apresentados os termos livres para o contorno, interface matriz-inclusão e interface matriz-vazio.

4.2 Equação integral do deslocamento para um ponto interno

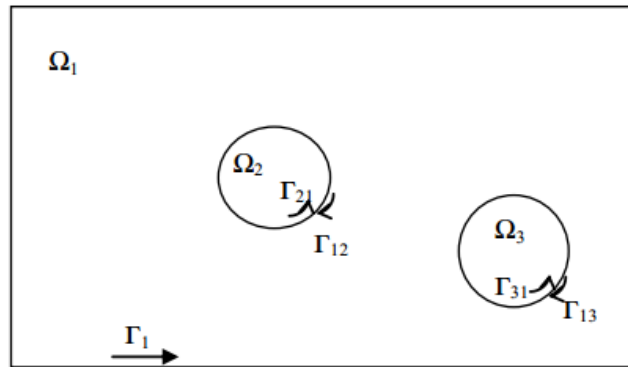
Na Figura 6 tem-se a representação da microestrutura de um material heterogêneo em que o domínio Ω da chapa é a soma do domínio da matriz Ω_1 com o das inclusões Ω_2 e Ω_3 , totalizando três sub-regiões no EVR, podendo as constantes elásticas da matriz e das inclusões, ou seja, módulo de elasticidade E e coeficiente de Poisson ν , serem diferentes. Note que a Figura 6 poderia também representar o caso geral de uma chapa composta por diferentes materiais (como considerado no trabalho de Fernandes e Neto (2015), fora do contexto da análise multi-escala, porém esse caso não será considerado nesse trabalho. A equação relativa ao problema bidimensional é deduzida escrevendo-se a integral sobre todo o domínio Ω da chapa, em função apenas da deformação fundamental ε_{kij}^* da sub-

região onde está o ponto de colocação q . Nesse caso, o teorema de Betti para o problema bidimensional é dado por:

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* N_{ij}^t d\Omega = \int_{\Omega} \varepsilon_{ij} N_{kij}^* d\Omega \quad i, j, k = 1, 2 \quad (4.1)$$

onde os termos com * se referem ao problema fundamental e onde k é a direção da carga fundamental e N_{ij}^t é o esforço normal de tentativa definido na equação (2.15).

Figura 6 - Microestrutura heterogênea representada por uma chapa em sub-regiões



Fonte: FERNANDES (2016)

Considerando o caso da Figura 6, onde se têm três domínios de características diferentes, o primeiro termo da equação (4.1) pode ser escrito da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* N_{ij}^t d\Omega = \int_{\Omega_1} \varepsilon_{kij}^* N_{ij}^t d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \varepsilon_{kij}^* N_{ij}^t d\Omega_2 + \int_{\Omega_3} \varepsilon_{kij}^* N_{ij}^t d\Omega_3 \quad i, j, k = 1, 2 \quad (4.2)$$

onde a solução fundamental ε_{kij}^* é função do \bar{E} da sub-região onde está o ponto de colocação.

Desenvolvendo-se a equação (4.1) apenas para uma sub-região Ω_s qualquer, tem-se que:

$$\int_{\Omega_S} \varepsilon_{kij}^* N_{ij}^t d\Omega_S = \int_{\Omega_S} \varepsilon_{kij}^* \frac{\bar{E}_S}{(1-\nu_S^2)} \left[\nu_S \delta_{ij} \varepsilon_{ll} + (1-\nu_S) \varepsilon_{ij} \right] d\Omega_S \quad (4.3)$$

Multiplicando-se a equação (4.3) por $\frac{\bar{E}}{(1-\nu^2)} \frac{(1-\nu^2)\nu}{\bar{E}\nu}$, o que não altera o valor da mesma, sendo que \bar{E} e ν são valores referentes à sub-região onde está o ponto de colocação, obtém-se a seguinte expressão:

$$\int_{\Omega_S} \varepsilon_{kij}^* N_{ij}^t d\Omega_S = \frac{\bar{E}_S}{\bar{E}} \frac{\nu_S}{\nu} \int_{\Omega_S} \frac{\bar{E}}{(1-\nu^2)} \left[\nu \varepsilon_{kij}^* \delta_{ij} \varepsilon_{ll} + \left(\frac{\nu}{\nu_S} - \nu \right) \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kij}^* \right] d\Omega_S \quad (4.4)$$

sendo que $\bar{\bar{E}}_S = \frac{\bar{E}_S}{(1-\nu_S^2)}$. (4.5)

Observando que: $\varepsilon_{kll}^* = \varepsilon_{kij}^* \delta_{ij}$ e $\varepsilon_{ll} = \varepsilon_{ij} \delta_{ij}$ a equação (4.4) também pode ser reescrita como:

$$\int_{\Omega_S} \varepsilon_{kij}^* N_{ij}^t d\Omega_S = \frac{\bar{\bar{E}}_S}{\bar{E}} \frac{\nu_S}{\nu} \int_{\Omega_S} \varepsilon_{ij} \frac{\bar{E}}{(1-\nu^2)} \left[\nu \varepsilon_{kll}^* \delta_{ij} + \left(\frac{\nu}{\nu_S} - \nu + 1 - 1 \right) \varepsilon_{kij}^* \right] d\Omega_S \quad (4.6)$$

Considerando-se a lei de Hooke (equação 2.17), a expressão (4.6) pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega_S} \varepsilon_{kij}^* N_{ij}^t d\Omega_S = \frac{\bar{\bar{E}}_S}{\bar{E}} \frac{\nu_S}{\nu} \left[\int_{\Omega_S} \varepsilon_{ij} N_{kij}^* d\Omega_S + \bar{\bar{E}} \left(\frac{\nu}{\nu_S} - 1 \right) \int_{\Omega_S} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kij}^* d\Omega_S \right] \quad (4.7)$$

Observe que quando o ponto de colocação pertence à sub-região Ω_S onde se faz a integração, $\bar{\bar{E}}_S = \bar{\bar{E}}$ e $\nu_S = \nu$, logo a equação anterior vai representar o Teorema de Betti escrito para o problema de chapa, sem estar dividida em sub-regiões, ou seja:

$$\int_{\Omega_S} \varepsilon_{kij}^* N_{ij}^t d\Omega_S = \int_{\Omega_S} \varepsilon_{ij} N_{kij}^* d\Omega_S \quad (4.8)$$

Para um caso genérico em que se tenham N_S sub-regiões a equação (4.7) se torna:

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* N_{ij}^t d\Omega_S = \sum_{S=1}^{N_S} \frac{\overline{\overline{E}}_S}{\overline{\overline{E}}} \frac{\nu_S}{\nu} \left[\int_{\Omega_S} \varepsilon_{ij} N_{kij}^* d\Omega_S \right] + \sum_{S=1}^{N_S} \overline{\overline{E}}_S \left(1 - \frac{\nu_S}{\nu} \right) \left[\int_{\Omega_S} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kij}^* d\Omega_S \right] \quad (4.9)$$

Aplicando a equação (2.14) na equação (4.9) tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* (N_{ij} + N_{ij}^0) d\Omega_S &= \sum_{S=1}^{N_S} \frac{\overline{\overline{E}}_S}{\overline{\overline{E}}} \frac{\nu_S}{\nu} \left[\int_{\Omega_S} \varepsilon_{ij} N_{kij}^* d\Omega_S \right] + \\ &+ \sum_{S=1}^{N_S} \overline{\overline{E}}_S \left(1 - \frac{\nu_S}{\nu} \right) \left[\int_{\Omega_S} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kij}^* d\Omega_S \right] \end{aligned} \quad (4.10)$$

Agora, a equação (4.10) será dividida em 3 termos onde serão aplicadas integrações por partes a fim de chegar na expressão do deslocamento u_k para um ponto do domínio da chapa, transformando as integrais de domínio em integrais com incógnitas no contorno, interface e domínio. Observe que não será aplicada integração por partes na integral de domínio que envolve as forças normais iniciais, a qual será resolvida numericamente através da discretização do domínio em células. A fim de facilitar a dedução, serão consideradas apenas duas sub-regiões (matriz com apenas uma inclusão), sendo que para o caso em que tenham mais sub-regiões o processo se torna análogo. A equação (4.10) será dividida da seguinte forma:

$$I_1 = \sum_{S=1}^2 \overline{\overline{E}}_S \left(\frac{\nu_S}{\nu} - 1 \right) \left[\int_{\Omega_S} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kij}^* d\Omega_S \right] \quad (4.11)$$

$$I_2 = \sum_{s=1}^2 \frac{\overline{\overline{E}}_s}{\overline{\overline{E}}} \frac{v_s}{v} \left[\int_{\Omega_s} \varepsilon_{ij} N_{kij}^* d\Omega_s \right] \quad (4.12)$$

$$I_3 = \int_{\Omega_s} \varepsilon_{kij}^* N_{ij} d\Omega_s \quad (4.13)$$

A integração das equações (4.11), (4.12) e (4.13) é feita por partes em relação à x_j . A integração por partes é desenvolvida em cada sub-região, onde a equação a seguir representa a integral I_1 já integrada por partes:

$$\begin{aligned} I_1 = & \overline{\overline{E}}_1 \left(1 - \frac{v_1}{v}\right) \int_{\Gamma_1 + \Gamma_{12}} u_i \varepsilon_{kij}^* n_j d\Gamma - \overline{\overline{E}}_1 \left(1 - \frac{v_1}{v}\right) \int_{\Omega_1} u_i \varepsilon_{kij,j}^* d\Omega + \\ & + \overline{\overline{E}}_2 \left(1 - \frac{v_2}{v}\right) \int_{\Gamma_{21}} u_i \varepsilon_{kij}^* n_j d\Gamma - \overline{\overline{E}}_2 \left(1 - \frac{v_2}{v}\right) \int_{\Omega_2} u_i \varepsilon_{kij,j}^* d\Omega \end{aligned} \quad (4.14)$$

Mas considerando que: $\int_{\Gamma_{12}} d\Gamma = \int_{\Gamma_{21}} d\Gamma$; $u_i(\Gamma_{12}) = u_i(\Gamma_{21})$ e

$n_j(\Gamma_{12}) = -n_j(\Gamma_{21})$, a equação (4.14) fica da seguinte forma:

$$\begin{aligned} I_1 = & \overline{\overline{E}}_1 \left(1 - \frac{v_1}{v}\right) \int_{\Gamma_1} u_i \varepsilon_{ki}^* d\Gamma - \overline{\overline{E}}_1 \left(1 - \frac{v_1}{v}\right) \int_{\Omega_1} u_i \varepsilon_{kij,j}^* d\Omega + \\ & + \left\{ \overline{\overline{E}}_2 \left(1 - \frac{v_2}{v}\right) - \overline{\overline{E}}_1 \left(1 - \frac{v_1}{v}\right) \right\} \int_{\Gamma_{21}} u_i \varepsilon_{ki}^* d\Gamma - \overline{\overline{E}}_2 \left(1 - \frac{v_2}{v}\right) \int_{\Omega_2} u_i \varepsilon_{kij,j}^* d\Omega \end{aligned} \quad (4.15)$$

Generalizando a equação (4.15) para N_s sub-regiões e N_{inc} inclusões, tem-se a seguinte equação integral:

$$I_1 = \overline{\overline{E}}_1 \left(1 - \frac{v_1}{v}\right) \int_{\Gamma_1} (u_1 \varepsilon_{k1}^* + u_2 \varepsilon_{k2}^*) d\Gamma +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^{N_{inc}} \left\{ \overline{\overline{E}}_j \left(1 - \frac{\nu_j}{\nu} \right) - \overline{\overline{E}}_1 \left(1 - \frac{\nu_1}{\nu} \right) \right\} \int_{\Gamma_{j1}} (u_1 \varepsilon_{k1}^* + u_2 \varepsilon_{k2}^*) d\Gamma_{j1} + \\
& - \sum_{S=1}^{N_S} \overline{\overline{E}}_S \left(1 - \frac{\nu_S}{\nu} \right) \int_{\Omega_S} u_i \varepsilon_{kij,j}^* d\Omega_S
\end{aligned} \tag{4.16}$$

onde Γ_1 é o contorno externo de Ω_1 e Γ_{j1} é referente ao contorno da interface relativo à sub-região Ω_S .

Utilizando o mesmo raciocínio, mas agora para a integração da equação (4.12) chega-se a:

$$\begin{aligned}
I_2 = & \frac{\overline{\overline{E}}_1}{\overline{\overline{E}}} \frac{\nu_1}{\nu} \int_{\Gamma_1} (u_1 p_{k1}^* + u_2 p_{k2}^*) d\Gamma + \sum_{j=1}^{N_{inc}} \left\{ \frac{\overline{\overline{E}}_j}{\overline{\overline{E}}} \frac{\nu_j}{\nu} - \frac{\overline{\overline{E}}_1}{\overline{\overline{E}}} \frac{\nu_1}{\nu} \right\} \int_{\Gamma_{j1}} (u_1 p_{k1}^* + u_2 p_{k2}^*) d\Gamma_{j1} + \\
& - \sum_{S=1}^{N_S} \frac{\overline{\overline{E}}_S}{\overline{\overline{E}}} \frac{\nu_S}{\nu} \int_{\Omega_S} u_i N_{kij,j}^* d\Omega_S
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Seja agora apenas o seguinte termo de I_2 :

$$I_4 = \sum_{S=1}^{N_S} \frac{\overline{\overline{E}}_S}{\overline{\overline{E}}} \frac{\nu_S}{\nu} \int_{\Omega_S} u_i N_{kij,j}^* d\Omega \tag{4.18}$$

Utilizando a equação (2.16), pode-se definir a seguinte relação de equilíbrio para o problema fundamental:

$$N_{kij,j}^* + b_i^* = 0 \rightarrow N_{kij,j}^* = -b_i^* \tag{4.19}$$

Onde o termo b_i^* é substituído pela função Delta de Dirac, ou seja:

$b_i^* = \delta(q, p) \delta_{ki}$, sendo que essa função possui a seguinte propriedade:

$$\int_{\Omega_{\infty}} \phi(p)_i \delta(q, p) \delta_{ki} d\Omega_{\infty} = \begin{cases} 0 & \text{se } p \neq q \\ \phi(q)_k & \text{se } p = q \end{cases} \quad (4.20)$$

sendo q o ponto de colocação, p o ponto campo e $\phi(p)$ uma função contínua qualquer.

Considerando-se as equações (4.19) e (4.20), conclui-se que a equação (4.18) apenas será diferente de zero quando o ponto de colocação q pertencer à sub-região s onde se está fazendo a integração. Portanto, a equação (4.18) resulta em:

$$I_4 = 1 \int_{\Omega_s} u_i(p) [-\delta(q, p) \delta_{ki}] d\Omega = -u_k(q) \int_{\Omega_s} \delta(q, p) d\Omega = -u_k(q) \quad (4.21)$$

Desenvolvendo finalmente o trabalho matemático da integração por partes em relação a x_j da equação integral (4.13), tem-se que as forças de superfície das interfaces se cancelam, já que para um mesmo ponto da interface, a força referente à matriz tem mesmo valor com sinal trocado da respectiva força referente ao subdomínio da inclusão (para maiores detalhes ver Ohland (2017), chegando-se a:

$$I_3 = \int_{\Gamma} u_{ki}^* N_{ij} n_j d\Gamma - \int_{\Omega} u_{ki}^* N_{ij,j} d\Omega \quad (4.22)$$

Através da fórmula de Cauchy, equação (2.8), e também da equação (2.16), tem-se:

$$I_3 = \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega \quad (4.23)$$

Nesse trabalho a chapa em sub-regiões representa a microestrutura do material, no contexto da análise multi-escala de estruturas, onde as condições de contorno impostas às equações algébricas são oriundas da macro-deformação, gerando assim deslocamentos lineares em todo o contorno externo. Com isso, para

esse caso particular a força b_i sempre será nula. Assim, substituindo-se as equações (4.16), (4.17), (4.21) e (4.23) na equação (4.10) e considerando-se b_i nulo, obtém-se a seguinte expressão para o deslocamento u_k de um ponto interno, tendo em vista um caso geral da chapa composta de N_S sub-regiões, onde se tem definido na microestrutura N_{inc} inclusões e N_{vazios} vazios, sendo $k, i, j = 1, 2$:

$$\begin{aligned}
u_k(q) = & \int_{\Gamma_1} \left(u_{k1}^*(q, P) p_1(P) + u_{k2}^*(q, P) p_2(P) \right) d\Gamma + \\
& - \frac{\bar{\bar{E}}_1}{\bar{\bar{E}}} \frac{\nu_1}{\nu} \int_{\Gamma_1} \left(u_1(P) p_{k1}^*(q, P) + u_2(P) p_{k2}^*(q, P) \right) d\Gamma + \\
& - \sum_{j=1}^{N_{vazios}} \frac{\bar{\bar{E}}_1}{\bar{\bar{E}}} \frac{\nu_1}{\nu} \int_{\Gamma_{1j}} \left(u_1(P) p_{k1}^*(q, P) + u_2(P) p_{k2}^*(q, P) \right) d\Gamma_{1j} + \\
& - \sum_{j=1}^{N_{inc}} \left\{ \frac{\bar{\bar{E}}_j}{\bar{\bar{E}}} \frac{\nu_j}{\nu} - \frac{\bar{\bar{E}}_1}{\bar{\bar{E}}} \frac{\nu_1}{\nu} \right\} \int_{\Gamma_{j1}} \left(u_1(P) p_{k1}^*(q, P) + u_2(P) p_{k2}^*(q, P) \right) d\Gamma_{j1} + \\
& - \bar{\bar{E}}_1 \left(1 - \frac{\nu_1}{\nu} \right) \int_{\Gamma_1} \left(u_1(P) \varepsilon_{k1}^*(q, P) + u_2(P) \varepsilon_{k2}^*(q, P) \right) d\Gamma + \\
& - \sum_{j=1}^{N_{inc}} \left\{ \frac{\bar{\bar{E}}_j}{\bar{\bar{E}}} \left(1 - \frac{\nu_j}{\nu} \right) - \frac{\bar{\bar{E}}_1}{\bar{\bar{E}}} \left(1 - \frac{\nu_1}{\nu} \right) \right\} \int_{\Gamma_{j1}} \left(u_1(P) \varepsilon_{k1}^*(q, P) + u_2(P) \varepsilon_{k2}^*(q, P) \right) d\Gamma_{j1} + \\
& + \sum_{S=1}^{N_S} \bar{\bar{E}}_S \left(1 - \frac{\nu_S}{\nu} \right) \int_{\Omega_S} u_i(p) \varepsilon_{kij,j}^*(q, p) d\Omega_S + \sum_{S=1}^{N_S} \int_{\Omega_S} \varepsilon_{kij}^*(q, P) N_{ij}^0(p) d\Omega(p) \quad (4.24)
\end{aligned}$$

onde u_1, u_2, p_1 e p_2 são os deslocamentos e forças no plano da chapa, $\bar{\bar{E}}$ e ν são valores referentes à sub-região onde está o ponto de colocação, N_{ij}^0 são os esforços iniciais (ver item 2.3) e $\bar{\bar{E}}$ é dado pela equação 4.5.

Notemos ainda que se na Figura 6 houvessem vazios no lugar das inclusões, os contornos Γ_{21} e Γ_{31} não existiriam e haveria apenas um material que seria

aquele da matriz, sendo a dedução da equação integral análoga ao caso já visto onde se tem inclusões.

Deve-se observar que para se obter a solução do problema de equilíbrio da microestrutura, a ser discutido no capítulo 6, deve-se fazer um processo incremental, onde a deformação total imposta ao EVR é dividida em incrementos de deformação, sendo a solução do problema encontrada para cada incremento. Nesse caso, todas as variáveis relacionadas ao problema real que aparecem na equação (4.24) devem ser substituídas por seus respectivos incrementos.

As expressões fundamentais presentes na equação 4.24 estão apresentadas no capítulo 1.2 do Anexo, após as referências bibliográficas.

4.3 Equação integral dos deslocamentos para pontos sobre o contorno ou interface da microestrutura

Na modelagem numérica feita através do MEC, problemas de singularidade podem ocorrer, isto é, indeterminações do tipo $\ln(r)$, $1/r$ e $1/r^2$, pois quando o ponto de colocação Q pertence ao elemento a ser integrado, o raio é nulo quando Q coincide com P , ou seja, tem-se: $r(Q, P) = 0$. Com isso, é necessário um processo de cálculo algébrico para tratar essa singularidade que ocorre nas expressões fundamentais, obtendo como resultado valores ou expressões que são denominados termos livres. Além disso, deve-se lembrar que quando for integrar os elementos sobre o contorno ou interface ao qual o ponto Q pertence, a integral é feita de forma analítica devido à singularidade existente.

No EVR, têm-se elementos ao longo do contorno externo e nas interfaces entre a matriz e inclusões, ou entre a matriz e vazios. Assim, na montagem do sistema de equações adotam-se pontos de colocação sobre o contorno externo e interfaces. Portanto, este tópico irá tratar sobre os vários casos de termos livres que necessitam ser calculados na microestrutura heterogênea. Não será mostrada a dedução de tais termos livres para todos os casos, apenas para o caso que o ponto de colocação pertence à interface da matriz com uma inclusão e coincide com um canto. A dedução dos outros termos livres está detalhada em Ohland (2017).

De uma forma geral, a equação integral do deslocamento para um ponto sobre o contorno ou interface é dada por:

$$\begin{aligned}
C_{k1}u_1(Q) + C_{k2}u_2(Q) &= \int_{\Gamma_1} (u_{k1}^*(Q,P)p_1(P) + u_{k2}^*(Q,P)p_2(P))d\Gamma + \\
&- \frac{\bar{E}_1}{E} \frac{v_1}{v} \int_{\Gamma_1} (u_1(P)p_{k1}^*(Q,P) + u_2(P)p_{k2}^*(Q,P))d\Gamma + \\
&- \sum_{j=1}^{N_{vazios}} \frac{\bar{E}_1}{E} \frac{v_1}{v} \int_{\Gamma_{1j}} (u_1(P)p_{k1}^*(Q,P) + u_2(P)p_{k2}^*(Q,P))d\Gamma_{1j} + \\
&- \sum_{j=1}^{N_{inc}} \left\{ \frac{\bar{E}_j}{E} \frac{v_j}{v} - \frac{\bar{E}_1}{E} \frac{v_1}{v} \right\} \int_{\Gamma_{j1}} (u_1(P)p_{k1}^*(Q,P) + u_2(P)p_{k2}^*(Q,P))d\Gamma_{j1} + \\
&- \bar{E}_1 \left(1 - \frac{v_1}{v} \right) \int_{\Gamma_1} (u_1(P)\varepsilon_{k1}^*(Q,P) + u_2(P)\varepsilon_{k2}^*(Q,P))d\Gamma + \\
&- \sum_{j=1}^{N_{inc}} \left\{ \bar{E}_j \left(1 - \frac{v_j}{v} \right) - \bar{E}_1 \left(1 - \frac{v_1}{v} \right) \right\} \int_{\Gamma_{j1}} (u_1(P)\varepsilon_{k1}^*(Q,P) + u_2(P)\varepsilon_{k2}^*(Q,P))d\Gamma_{j1} + \\
&+ \sum_{S=1}^{N_S} \bar{E}_S \left(1 - \frac{v_S}{v} \right) \int_{\Omega_S} u_i(p)\varepsilon_{kij,j}^*(Q,p)d\Omega_S + \\
&+ \sum_{S=1}^{N_S} \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^*(Q,p)N_{ij}^0(p)d\Omega(p)
\end{aligned} \tag{4.25}$$

O vetor dos termos livres é dado por:

$$C_{ki}^T = \{C_{k1} \quad C_{k2}\} \tag{4.26}$$

Deve-se observar que são obtidos dois valores de termos livres, C_{k1} e C_{k2} que multiplicam, respectivamente, os deslocamentos nas direções x_1 e x_2 que são calculados quando se considera a carga unitária aplicada na direção k .

$$\text{Para } k=1, \text{ tem-se: } \{C_{1i}\}^T = \{C_{11} \quad C_{12}\} \quad (4.27a)$$

$$\text{Para } k=2, \text{ tem-se: } \{C_{2i}\}^T = \{C_{21} \quad C_{22}\} \quad (4.27b)$$

Para demonstrar como é feita a dedução dos termos livres, abaixo será calculado na situação do ponto de colocação \mathbf{Q} estar sobre a interface matriz-inclusão e sendo coincidente com um canto. Com o objetivo de solucionar os problemas de singularidade deve-se fazer com que o ponto \mathbf{Q} se torne interno ao domínio da inclusão, não se localizando mais sobre o contorno da interface e com isso, pode-se escrever no ponto \mathbf{Q} a equação integral referente a um ponto interno. O procedimento está descrito a seguir (ver Fernandes, 2005) e ilustrado na Figura 7:

- Acrescenta-se um contorno circular Γ_ξ de raio ξ infinitesimal e centro em \mathbf{Q} ;
- Retira-se do contorno Γ_{j1} o trecho de contorno $\bar{\Gamma}$ (linha fina), que contém a singularidade;
- Com o acréscimo do contorno Γ_ξ e a retirada do contorno $\bar{\Gamma}$ obtém-se o novo contorno: $\Gamma_{j1} - \bar{\Gamma} + \Gamma_\xi$;
- Fazem-se então os limites do raio ξ e do contorno tenderem a zero, a fim de que o ponto \mathbf{Q} possa ser considerado sobre o contorno.

Da Figura 7, onde o contorno é circular, as seguintes relações podem ser definidas:

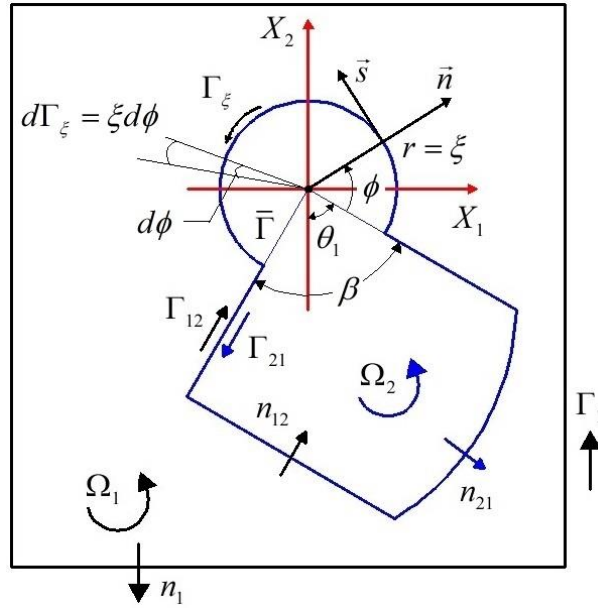
$$r = \xi \quad (4.28a)$$

$$\frac{\partial r}{\partial n} = r_{,i} n_i = 1 \quad (4.28b)$$

$$\frac{\partial r}{\partial s} = r_{,i} s_i = 0 \quad (4.28c)$$

$$d\Gamma_\xi(\mathbf{P}) = \xi d\phi \quad (4.28d)$$

Figura 7 – Ponto de colocação na interface matriz-inclusão (canto)



Fonte: Elaboração do próprio autor

Dessa maneira, aplicando o procedimento acima na equação (4.24), tem-se:

$$\begin{aligned}
 u_k(Q) = & \int_{\Gamma_1} (u_{ki}^*(Q, P) p_i(P)) d\Gamma - \frac{\bar{E}_1}{E} \frac{\nu_1}{\nu} \int_{\Gamma_1} (u_i(P) p_{ki}^*(Q, P)) d\Gamma + \\
 & - \sum_{j=1}^{N_{\text{vazios}}} \frac{\bar{E}_j}{E} \frac{\nu_j}{\nu} \int_{\Gamma_{1j}} (u_i(P) p_{ki}^*(Q, P)) d\Gamma_{1j} - \bar{E}_1 \left(1 - \frac{\nu_1}{\nu}\right) \int_{\Gamma_1} (u_i(P) \varepsilon_{ki}^*(Q, P)) d\Gamma + \\
 & - \sum_{j=1}^{N_{\text{mc}}} \left\{ \frac{\bar{E}_j}{E} \frac{\nu_j}{\nu} - \frac{\bar{E}_1}{E} \frac{\nu_1}{\nu} \right\} \left[\lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{j1} - \bar{\Gamma}} (u_i(P) p_{ki}^*(Q, P)) d\Gamma_{j1} \right] + \\
 & - \left\{ \frac{\bar{E}_j}{E} \frac{\nu_j}{\nu} - \frac{\bar{E}_1}{E} \frac{\nu_1}{\nu} \right\} \left[\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} (u_i(P) p_{ki}^*(q, P)) d\Gamma_\xi \right] + \\
 & - \sum_{j=1}^{N_{\text{mc}}} \left\{ \bar{E}_j \left(1 - \frac{\nu_j}{\nu}\right) - \bar{E}_1 \left(1 - \frac{\nu_1}{\nu}\right) \right\} \left[\lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{j1} - \bar{\Gamma}} (u_i(P) \varepsilon_{ki}^*(Q, P)) d\Gamma_{j1} \right] + \\
 & - \left\{ \bar{E}_j \left(1 - \frac{\nu_j}{\nu}\right) - \bar{E}_1 \left(1 - \frac{\nu_1}{\nu}\right) \right\} \left[\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} (u_i(P) \varepsilon_{ki}^*(q, P)) d\Gamma_\xi \right] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{S=1}^{N_S} \overline{E}_S \left(1 - \frac{\nu_S}{\nu} \right) \left[\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Omega_S + \Omega_\xi} (u_i(P) \varepsilon_{kij,j}^*(Q, P)) d\Omega_S \right] + \\
& + \sum_{S=1}^{N_S} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Omega + \Omega_\xi} \varepsilon_{kij}^*(Q, p) N_{ij}^0(p) d\Omega(p)
\end{aligned} \tag{4.29}$$

onde o domínio Ω_ξ é o domínio infinitesimal de contorno Γ_ξ , ver Figura 7.

As integrais da equação (4.29) sobre o contorno da interface $\Gamma_{j1} - \overline{\Gamma}$ são resolvidas analiticamente fazendo-se o limite de $\overline{\Gamma} \rightarrow 0$, resultando em seus valores principais. Nesse caso as integrais apresentam singularidade do tipo $1/r$ e são interpretadas no sentido do valor principal de Cauchy, ou seja, ao se fazer a integração analítica pode-se provar que os termos com valor infinito se cancelam, com isso a integral resulta num valor finito. Logo as equações ficam:

$$\lim_{\overline{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{j1} - \overline{\Gamma}} (u_i(P) p_{ki}^*(Q, P)) d\Gamma = \int_{\Gamma_{j1}} (u_i(P) p_{ki}^*(Q, P)) d\Gamma \tag{4.30}$$

$$\lim_{\overline{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{j1} - \overline{\Gamma}} (u_i(P) \varepsilon_{ki}^*(Q, P)) d\Gamma = \int_{\Gamma_{j1}} (u_i(P) \varepsilon_{ki}^*(Q, P)) d\Gamma \tag{4.31}$$

Considerando a mudança de coordenada $d\Omega = r dr d\theta$ para as integrais envolvendo domínio, e fazendo-se o limite de ξ tender a zero, como mostrado na equação (4.32), conclui-se que:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Omega_\xi} \varepsilon_{kij}^*(Q, p) N_{ij}^0(p) d\Omega(p) = 0 \tag{4.32a}$$

Deve-se observar que não haverá problemas de singularidade na integral de domínio envolvendo os deslocamentos, pois quando o ponto de colocação pertencer à célula a ser integrada, tem-se que $\nu = \nu_S$ e, portanto, a integral não precisa ser calculada.

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Omega_\xi} u_i(P) \varepsilon_{kij,j}^*(Q, P) d\Omega_S = 0 \quad (4.32b)$$

Na equação (4.29) têm-se algumas integrais que envolvem o contorno infinitesimal Γ_ξ . São a partir destas integrais que os valores para os termos livres são obtidos. Portanto, tem-se as seguintes equações integrais:

$$U_1 = \left\{ \frac{\overline{\overline{E}}_j \nu_j}{\overline{\overline{E}}} - \frac{\overline{\overline{E}}_1 \nu_1}{\overline{\overline{E}}} \right\} \left[\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} (u_i(P) p_{ki}^*(q, P)) d\Gamma_\xi \right] \quad (4.33)$$

$$U_2 = \left\{ \overline{\overline{E}}_j \left(1 - \frac{\nu_j}{\nu} \right) - \overline{\overline{E}}_1 \left(1 - \frac{\nu_1}{\nu} \right) \right\} \left[\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} (u_i(P) \varepsilon_{ki}^*(q, P)) d\Gamma_\xi \right] \quad (4.34)$$

Na dedução do termo livre será adotado que o ponto \mathbf{Q} está sobre a interface do domínio Ω_1 (matriz) com o Ω_2 (inclusão), mas pertence a Ω_2 , ou seja: $E(Q) = E_2 = E$ e $\nu(Q) = \nu_2 = \nu$. Com isso, analisando as integrais sobre o contorno infinitesimal Γ_ξ , equações (4.33) e (4.34), resultam em:

$$U_1 = \left\{ 1 - \frac{\overline{\overline{E}}_1 \nu_1}{\overline{\overline{E}}} \right\} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} (u_i(P) p_{ki}^*(Q, P)) d\Gamma_\xi \quad (4.35)$$

$$U_2 = \left\{ -\overline{\overline{E}}_1 \left(1 - \frac{\nu_1}{\nu} \right) \right\} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} (u_i(P) \varepsilon_{ki}^*(Q, P)) d\Gamma_\xi \quad (4.36)$$

Analisando agora a equação (4.35) que possui a expressão fundamental da força de superfície. Fazendo-se a mudança de coordenada indicada em (4.28d) e utilizando-se como limite de integração $0 \leq \phi \leq 2\pi - \beta$, tem-se:

$$U_1 = \left\{ 1 - \frac{\overline{\overline{E}}_1 \nu_1}{\overline{\overline{E}}} \right\} \left[\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_0^{2\pi - \beta} (u_i(P) p_{ki}^*(Q, P)) \xi d\phi \right] \quad (4.37)$$

Lembrando-se que β é o ângulo formado no canto (ver Figura 7). Observe que para o caso particular do ponto de colocação Q não coincidir com um canto tem-se que $\beta = \pi$, logo o limite de integração seria $0 \leq \phi \leq \pi$. Portanto, para calcular os termos livres quando o ponto de colocação Q pertence à interface matriz-inclusão e não é coincidente com um canto, basta mudar o limite de integração.

A fim de resolver a integral (4.37) em termos de $u_i(Q)$, o valor $u_i(Q)$ será somado e subtraído no integrando, o que não altera o valor da integral. Além disso, como tem-se continuidade da variável u_i , pode-se dizer que $u_i(P)$ no contorno Γ_ξ é igual ao valor de $u_i(Q)$, já que o raio ξ tende à zero. Portanto, o termo $u_i(P) - u_i(Q)$ se anula, restando apenas o deslocamento $u_i(Q)$ no integrando. Logo a equação (4.37) resulta em:

$$\begin{aligned} U_1 &= \left\{ 1 - \frac{\overline{\overline{E}}_1}{\overline{\overline{E}}} \frac{\nu_1}{\nu} \right\} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_0^{2\pi-\beta} \left([u_i(P) - u_i(Q) + u_i(Q)] p_{ki}^*(Q, P) \right) \xi d\phi = \\ &= \left\{ 1 - \frac{\overline{\overline{E}}_1}{\overline{\overline{E}}} \frac{\nu_1}{\nu} \right\} u_i(Q) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_0^{2\pi-\beta} \left(p_{ki}^*(Q, P) \right) \xi d\phi \end{aligned} \quad (4.38)$$

Fazendo-se um processo análogo para equação (4.36), a mesma resulta em:

$$U_2 = \left\{ -\overline{\overline{E}}_1 \left(1 - \frac{\nu_1}{\nu} \right) \right\} u_i(Q) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_0^{2\pi-\beta} \left(\varepsilon_{ki}^*(Q, P) \right) \xi d\phi \quad (4.39)$$

A fim de determinar as expressões fundamentais $p_{ki}^*(Q, P)$ no contorno circular, necessita-se do vetor normal ao contorno circular, que da Figura 7, é definido como:

$$\vec{r} = \vec{n} = \begin{Bmatrix} \text{sen}(\phi + \theta_1) \\ -\text{cos}(\phi + \theta_1) \end{Bmatrix} \quad (4.40)$$

Considerando-se as expressões fundamentais $p_{ki}^*(Q, P)$ dadas na equação (4.38), e considerando-se (4.28a) e (4.28b), tem-se:

$$k = i = 1 \rightarrow p_{11}^*(Q, P) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu')\xi} \left[(1-2\nu') + 2\text{sen}^2(\phi + \theta_1) \right] \quad (4.41a)$$

$$k = i = 2 \rightarrow p_{22}^*(Q, P) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu')\xi} \left[(1-2\nu') + 2\cos^2(\phi + \theta_1) \right] \quad (4.41b)$$

$$k = 1; i = 2 \rightarrow p_{12}^*(Q, P) = \frac{2\cos(\phi + \theta_1)\text{sen}(\phi + \theta_1)}{4\pi(1-\nu')\xi} = p_{21}^*(Q, P) \quad (4.41c)$$

Fazendo o mesmo processo para a equação (4.39), as expressões fundamentais $\varepsilon_{ki}^*(Q, P)$ no contorno circular resultam em:

$$k = i = 1 \rightarrow \varepsilon_{11}^*(Q, P) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu')\bar{G}\xi} \left[(1-2\nu') + 2\text{sen}^2(\phi + \theta_1)(1-\nu') \right] \quad (4.42a)$$

$$k = i = 2 \rightarrow \varepsilon_{22}^*(Q, P) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu')\bar{G}\xi} \left[(1-2\nu') + 2\cos^2(\phi + \theta_1)(1-\nu') \right] \quad (4.42b)$$

$$k = 1; i = 2 \rightarrow \varepsilon_{12}^*(Q, P) = -\frac{2\cos(\phi + \theta_1)\text{sen}(\phi + \theta_1)}{8\pi\bar{G}\xi} = \varepsilon_{21}^*(Q, P) \quad (4.42c)$$

onde ν' é definido no item 2.2.3.

Para calcular os termos livres são consideradas algumas relações trigonométricas que estão apresentadas no capítulo 1.4 do Anexo.

Substituindo-se (4.41a) em (4.38), ou seja, para $k = 1$ e $i = 1$, obtém-se:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} u_i(P) p_{ki}^*(Q, P) d\Gamma_\xi = -\frac{u_1(Q)}{4\pi(1-\nu')} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_0^{2\pi-\beta} \left[(1-2\nu') + 2\text{sen}^2(\phi + \theta_1) \right] d\phi \quad (4.43)$$

Sejam $u = \phi + \theta_1$ e $\text{sen}^2(u) = \frac{1-\cos 2u}{2}$, fazendo-se a integração em ϕ , chega-se

à:

$$\begin{aligned}
\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} u_i(P) p_{ki}^*(Q, P) d\Gamma_\xi &= -\frac{u_1(Q)}{4\pi(1-\nu')} \left[(1-2\nu') \phi \Big|_0^{2\pi-\beta} + \left(u - \frac{\text{sen}2u}{2} \right) \Big|_{\theta_1}^{\theta_1+2\pi-\beta} \right] = \\
&= u_1(Q) \left[\frac{\beta}{2\pi} - 1 - \left(\frac{\cos 2\theta_1 \text{sen}2\beta + \text{sen}2\theta_1 (1 - \cos 2\beta)}{8\pi(1-\nu')} \right) \right] \quad (4.44)
\end{aligned}$$

De forma análoga ao processo anterior, substituindo-se (4.41b) em (4.38), ou seja, para $k = 2$ e $i = 2$, sejam $u = \phi + \theta_1$ e $\cos^2(u) = \frac{1 + \cos 2u}{2}$, fazendo-se a integração em ϕ , chega-se à:

$$\begin{aligned}
\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} u_i(P) p_{ki}^*(Q, P) d\Gamma_\xi &= -\frac{u_2(Q)}{4\pi(1-\nu')} \left[(1-2\nu') \phi \Big|_0^{2\pi-\beta} + \left(u + \frac{\text{sen}2u}{2} \right) \Big|_{\theta_1}^{\theta_1+2\pi-\beta} \right] = \\
&= u_2(Q) \left[\frac{\beta}{2\pi} - 1 + \left(\frac{\cos 2\theta_1 \text{sen}2\beta + \text{sen}2\theta_1 (1 - \cos 2\beta)}{8\pi(1-\nu')} \right) \right] \quad (4.45)
\end{aligned}$$

Finalmente, substituindo-se (4.41c) em (4.38), ou seja, para $k = 1$ e $i = 2$, sejam $u = 2\phi + 2\theta_1$ e $\text{sen}(2u) = 2\text{sen}(u)\cos(u)$, fazendo-se a integração em ϕ , chega-se à:

$$\begin{aligned}
\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} u_i(P) p_{ki}^*(Q, P) d\Gamma_\xi &= -\frac{u_2(Q)}{4\pi(1-\nu')} \frac{\cos(u)}{2} \Big|_{2\theta_1}^{2\theta_1+4\pi-2\beta} = \\
&= u_2(Q) \left(-\frac{\text{sen}2\theta_1 \text{sen}2\beta + \cos 2\theta_1 (1 - \cos 2\beta)}{8\pi(1-\nu')} \right) \quad (4.46)
\end{aligned}$$

O processo de cálculo para $k = 2$ e $i = 1$ é o mesmo utilizado para desenvolver a equação (4.46). Sendo assim, tem-se:

$$\begin{aligned}
\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} u_i(P) p_{ki}^*(Q, P) d\Gamma_\xi &= -\frac{u_1(Q)}{4\pi(1-\nu')} \frac{\cos(u)}{2} \Big|_{2\theta_1}^{2\theta_1+4\pi-2\beta} = \\
&= u_1(Q) \left(-\frac{\text{sen}2\theta_1 \text{sen}2\beta + \cos 2\theta_1 (1 - \cos 2\beta)}{8\pi(1-\nu')} \right) \quad (4.47)
\end{aligned}$$

Agora, sejam as integrais envolvendo as expressões da deformação fundamental, $\varepsilon_{ki}^*(Q, P)$.

Para $k = 1$ e $i = 1$, tem-se:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} u_i(P) \varepsilon_{ki}^*(Q, P) d\Gamma_\xi &= -\frac{u_1(Q)}{8\pi(1-\nu')\bar{G}} \left[(1-2\nu')\phi|_0^{2\pi-\beta} + (1-\nu') \left(u - \frac{\text{sen}2u}{2} \right) \Big|_{\theta_1}^{\theta_1+2\pi-\beta} \right] = \\ &= -\frac{u_1(Q)}{8(1-\nu')\bar{G}} \left\{ (2-3\nu')(2\pi-\beta) + (1-\nu') \left[\frac{\text{sen}2\beta \cos 2\theta_1 + \text{sen}2\theta_1(1-\cos 2\beta)}{2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.48)$$

Para $k = 2$ e $i = 2$, chega-se à:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} u_i(P) \varepsilon_{ki}^*(Q, P) d\Gamma_\xi &= -\frac{u_2(Q)}{8\pi(1-\nu')\bar{G}} \left[(1-2\nu')\phi|_0^{2\pi-\beta} + (1-\nu') \left(u + \frac{\text{sen}2u}{2} \right) \Big|_{\theta_1}^{\theta_1+2\pi-\beta} \right] = \\ &= -\frac{u_2(Q)}{8(1-\nu')\bar{G}} \left\{ (2-3\nu')(2\pi-\beta) - (1-\nu') \left[\frac{\text{sen}2\beta \cos 2\theta_1 + \text{sen}2\theta_1(1-\cos 2\beta)}{2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.49)$$

Para $k = 1$ e $i = 2$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} u_i(P) \varepsilon_{ki}^*(Q, P) d\Gamma_\xi &= -\frac{u_2(Q)}{8\pi\bar{G}} \frac{\cos(u)}{2} \Big|_{2\theta_1}^{2\theta_1+4\pi-2\beta} = \\ &= \frac{u_2(Q)}{8\pi\bar{G}} \left\{ -\frac{\text{sen}2\beta \text{sen}2\theta_1 + \cos 2\theta_1(1-\cos 2\beta)}{2} \right\} \end{aligned} \quad (4.50)$$

Finalmente, para $k = 2$ e $i = 1$, tem-se:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} u_i(P) \varepsilon_{ki}^*(Q, P) d\Gamma_\xi &= -\frac{u_1(Q)}{8\pi\bar{G}} \frac{\cos(u)}{2} \Big|_{2\theta_1}^{2\theta_1+4\pi-2\beta} = \\ &= \frac{u_1(Q)}{8\pi\bar{G}} \left\{ -\frac{\text{sen}2\beta \text{sen}2\theta_1 + \cos 2\theta_1(1-\cos 2\beta)}{2} \right\} \end{aligned} \quad (4.51)$$

Considerando $\mathbf{k} = \mathbf{1}$, substitui-se as equações (4.44), (4.46), (4.48) e (4.50) em (4.29) obtendo os seguintes valores para os termos livres:

$$C_{11} = \frac{\beta}{2\pi} + \left(\frac{\overline{\overline{E_1 v_1}}}{\overline{\overline{E v}}} + \frac{\overline{\overline{E_1}}(2-3\nu')}{4\overline{\overline{G}}(1-\nu')} \left(1 - \frac{\nu_1}{\nu} \right) \right) \left(1 - \frac{\beta}{2\pi} \right) +$$

$$+ \left(\frac{\overline{\overline{E_1 v_1}}}{\overline{\overline{E v}}} - 1 + \frac{\overline{\overline{E_1}}(1-\nu')}{2\overline{\overline{G}}} \left(1 - \frac{\nu_1}{\nu} \right) \right) \left(\frac{\cos 2\theta_1 \sin 2\beta + \sin 2\theta_1 (1 - \cos 2\beta)}{8\pi(1-\nu')} \right) \quad (4.52a)$$

$$C_{12} = \left[\frac{1}{8\pi(1-\nu')} \left(1 - \frac{\overline{\overline{E_1 v_1}}}{\overline{\overline{E v}}} \right) + \right.$$

$$\left. - \frac{\overline{\overline{E_1}}}{16\pi\overline{\overline{G}}} \left(1 - \frac{\nu_1}{\nu} \right) \right] \left[-\sin 2\theta_1 \sin 2\beta + \cos 2\theta_1 (1 - \cos 2\beta) \right] \quad (4.52b)$$

Considerando $\mathbf{k} = \mathbf{2}$, substitui-se as equações (4.45), (4.47), (4.49) e (4.51) em (4.29) obtendo-se:

$$C_{22} = \frac{\beta}{2\pi} + \left(\frac{\overline{\overline{E_1 v_1}}}{\overline{\overline{E v}}} + \frac{\overline{\overline{E_1}}(2-3\nu')}{4\overline{\overline{G}}(1-\nu')} \left(1 - \frac{\nu_1}{\nu} \right) \right) \left(1 - \frac{\beta}{2\pi} \right) +$$

$$- \left(\frac{\overline{\overline{E_1 v_1}}}{\overline{\overline{E v}}} - 1 + \frac{\overline{\overline{E_1}}(1-\nu')}{2\overline{\overline{G}}} \left(1 - \frac{\nu_1}{\nu} \right) \right) \left(\frac{\cos 2\theta_1 \sin 2\beta + \sin 2\theta_1 (1 - \cos 2\beta)}{8\pi(1-\nu')} \right) \quad (4.53a)$$

$$C_{21} = \left[\frac{1}{8\pi(1-\nu')} \left(1 - \frac{\overline{\overline{E_1 v_1}}}{\overline{\overline{E v}}} \right) + \right.$$

$$\left. - \frac{\overline{\overline{E_1}}}{16\pi\overline{\overline{G}}} \left(1 - \frac{\nu_1}{\nu} \right) \right] \left[-\sin 2\theta_1 \sin 2\beta + \cos 2\theta_1 (1 - \cos 2\beta) \right] \quad (4.53b)$$

Os cálculos detalhados dos termos livres onde é considerado o ponto Q situado na interface matriz-inclusão e não é coincidente com um canto e o ponto Q na interface matriz-vazio para ambos os casos (coincidente ou não com um canto), estão desenvolvidos na dissertação de Ohland (2017). Logo abaixo são apresentados os respectivos valores.

Se o ponto Q está situado sobre a interface da matriz com uma inclusão e não é coincidente com um canto, o vetor dos termos livres se torna:

$$\{C_{1i}\}^T = \left\{ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\bar{E}_1 \nu_1}{E\nu} \right) + \frac{\bar{E}_1}{8\bar{G}} \left(1 - \frac{\nu_1}{\nu} \right) \left(\frac{2-3\nu'}{1-\nu'} \right) \quad 0 \right\} \quad (4.54a)$$

$$\{C_{2i}\}^T = \left\{ 0 \quad \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\bar{E}_1 \nu_1}{E\nu} \right) + \frac{\bar{E}_1}{8\bar{G}} \left(1 - \frac{\nu_1}{\nu} \right) \left(\frac{2-3\nu'}{1-\nu'} \right) \right\} \quad (4.54b)$$

Se o ponto Q está situado sobre a interface da matriz com um vazio e não é coincidente com um canto, o vetor dos termos livres se torna:

$$\{C_{1i}\}^T = \left\{ \frac{1}{2} \quad 0 \right\} \quad (4.55a)$$

$$\{C_{2i}\}^T = \left\{ 0 \quad \frac{1}{2} \right\} \quad (4.55b)$$

Se o ponto Q está situado sobre a interface da matriz com um vazio e é coincidente com um canto, o vetor dos termos livres é dado por:

$$C_{11} = 1 - \frac{\beta}{2\pi} + \left(\frac{\cos 2\theta_1 \text{sen} 2\beta + \text{sen} 2\theta_1 (\cos 2\beta - 1)}{8\pi(1-\nu')} \right) \quad (4.56a)$$

$$C_{22} = 1 - \frac{\beta}{2\pi} - \left(\frac{\cos 2\theta_1 \text{sen} 2\beta + \text{sen} 2\theta_1 (\cos 2\beta - 1)}{8\pi(1-\nu')} \right) \quad (4.56b)$$

$$C_{12} = C_{21} = \left(\frac{\cos 2\theta_1 \sin 2\beta + \cos 2\theta_1 (1 - \cos 2\beta)}{8\pi(1 - \nu')} \right) \quad (4.56c)$$

Se o ponto Q está sobre o contorno externo e não é coincidente com um canto, os vetores dos termos livres para esse caso são dados por (ver apostila de Introdução ao Método dos Elementos de Contorno de Fernandes, desenvolvida no ano de 2005):

$$\{C_{1i}\}^T = \left\{ \frac{1}{2} \quad 0 \right\} \quad (4.57a)$$

$$\{C_{2i}\}^T = \left\{ 0 \quad \frac{1}{2} \right\} \quad (4.57b)$$

Observe que como no problema do EVR são prescritos deslocamentos em todos os nós do contorno, todas as incógnitas no contorno externo são relacionadas às forças de superfície, sendo essas dadas pela fórmula de Cauchy, equação (2.8). Portanto, na análise do EVR as forças obtidas do contorno são reações ao campo de deslocamento imposto como condição de contorno no EVR. Além disso, como o vetor normal ao lado anterior ao canto é diferente da direção normal ao lado posterior, para representar a descontinuidade que se tem nos valores das forças anteriores e posteriores aos cantos, são adotados nós duplos em todos os cantos. Assim, no presente trabalho não será considerado o caso em que o ponto de colocação coincide com um canto no contorno externo da chapa. Observe que não há necessidade de se adotar nós duplos em cantos sobre a interface porque nas interfaces têm-se apenas deslocamentos como incógnitas.

4.4 Equação integral da derivada dos deslocamentos u_k para pontos do domínio

A equação da derivada dos deslocamentos é necessária para a solução do problema, pois é a partir da mesma que se obtém a equação algébrica dos esforços de tentativa necessária para solução do problema de equilíbrio do EVR. Derivando-

se a equação (4.24) em relação a uma direção m qualquer se obtém a seguinte expressão, a partir da qual é obtido o valor da derivada do deslocamento u_k em relação à direção m no ponto q :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_k(q)}{\partial m} = & \int_{\Gamma_1} \left(\frac{\partial u_{k1}^*(q, P)}{\partial m} p_1(P) + \frac{\partial u_{k2}^*(q, P)}{\partial m} p_2(P) \right) d\Gamma + \\
& - \frac{\bar{E}_1}{E} \frac{\nu_1}{\nu} \int_{\Gamma_1} \left(u_1(P) \frac{\partial p_{k1}^*(q, P)}{\partial m} + u_2(P) \frac{\partial p_{k2}^*(q, P)}{\partial m} \right) d\Gamma + \\
& - \sum_{j=1}^{N_{\text{eixo}}} \frac{\bar{E}_1}{E} \frac{\nu_1}{\nu} \int_{\Gamma_{1j}} \left(u_1(P) \frac{\partial p_{k1}^*(q, P)}{\partial m} + u_2(P) \frac{\partial p_{k2}^*(q, P)}{\partial m} \right) d\Gamma_{1j} + \\
& - \sum_{j=1}^{N_{\text{mc}}} \left\{ \frac{\bar{E}_j}{E} \frac{\nu_j}{\nu} - \frac{\bar{E}_1}{E} \frac{\nu_1}{\nu} \right\} \int_{\Gamma_{j1}} \left(u_1(P) \frac{\partial p_{k1}^*(q, P)}{\partial m} + u_2(P) \frac{\partial p_{k2}^*(q, P)}{\partial m} \right) d\Gamma_{j1} + \\
& - \bar{E}_1 \left(1 - \frac{\nu_1}{\nu} \right) \int_{\Gamma_1} \left(u_1(P) \frac{\partial \varepsilon_{k1}^*(q, P)}{\partial m} + u_2(P) \frac{\partial \varepsilon_{k2}^*(q, P)}{\partial m} \right) d\Gamma + \\
& - \sum_{j=1}^{N_{\text{inc}}} \left\{ \bar{E}_j \left(1 - \frac{\nu_j}{\nu} \right) - \bar{E}_1 \left(1 - \frac{\nu_1}{\nu} \right) \right\} \int_{\Gamma_{j1}} \left(u_1(P) \frac{\partial \varepsilon_{k1}^*(q, P)}{\partial m} + u_2(P) \frac{\partial \varepsilon_{k2}^*(q, P)}{\partial m} \right) d\Gamma_{j1} + \\
& + \sum_{s=1}^{N_s} \bar{E}_s \left(1 - \frac{\nu_s}{\nu} \right) \int_{\Omega_s} u_i(p) \frac{\partial \varepsilon_{kij,j}^*(q, p)}{\partial m} d\Omega_s + \\
& + \sum_{s=1}^{N_s} \frac{\partial}{\partial m} \int_{\Omega_s} \varepsilon_{kij}^*(q, P) N_{ij}^0(p) d\Omega(p)
\end{aligned} \tag{4.58}$$

As expressões fundamentais presentes na equação 4.58 estão apresentadas no capítulo 1.3 do Anexo, após as referências bibliográficas.

Deve-se lembrar que não haverá problemas de singularidade na integral de domínio envolvendo os deslocamentos, já que quando o ponto de colocação pertencer ao domínio de integração, tem-se $\nu = \nu_s$, o que anula a mesma. O mesmo

não acontece para a integral de domínio envolvendo os esforços normais plásticos, logo o capítulo 4.4.1 foi reservado para desenvolver esse cálculo.

4.4.1 Integral de domínio envolvendo esforços iniciais da equação da derivada dos deslocamentos

Seja a integral de domínio que envolve as forças normais iniciais da equação integral (4.58) da derivada dos deslocamentos, que será designada de I :

$$I = \frac{\partial}{\partial x_m} \int_{\Omega} (N_{ij}^0(p) \varepsilon_{kij}^*(q, p)) d\Omega(p) \quad (4.59)$$

onde a deformação fundamental é dada pela equação:

$$\varepsilon_{kij}^* = -\frac{1}{8\pi(1-\nu')} \bar{G}r \left[(1-2\nu')(r_{,j} \delta_{ki} + r_{,i} \delta_{kj}) - r_{,k} \delta_{ij} + 2r_{,k} r_{,i} r_{,j} \right] \quad (4.60)$$

Para que se possa obter a derivada da integral indicada em (4.59), deve-se tratar a singularidade que ocorre quando o ponto de colocação pertence ao domínio a ser integrado. Como se pode observar na equação (4.60), a integral de domínio da equação (4.59) apresenta singularidade do tipo $(1/r)$. Para tratar tal singularidade: retira-se do domínio Ω um domínio circular Ω_c onde está a singularidade, de pequeno raio ε e com origem no ponto q , obtendo-se o domínio Ω_ε , que é dado por: $\Omega_\varepsilon = \Omega - \Omega_c$. Portanto, a integral sobre o domínio não singular Ω_ε é dada por:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} N_{ij}^0(p) \varepsilon_{kij}^*(q, p) d\Omega_\varepsilon = \int_{\Omega} N_{ij}^0(p) \varepsilon_{kij}^*(q, p) d\Omega - \int_{\Omega_c} N_{ij}^0(p) \varepsilon_{kij}^*(q, p) d\Omega_c \quad (4.61)$$

Assume-se que a função $N_{ij}^0(p)$ e suas primeiras e segunda derivadas são contínuas na vizinhança do ponto q . Assim, expandindo-se a mesma, em torno do ponto q , através da série de Taylor, tem-se que:

$$N_{ij}^0(p) = N_{ij}^0(q) + [x_m(p) - x_m(q)]N_{ij,m}^0(q) + \dots \quad (4.62)$$

onde $x_m(p) - x_m(q) = rr_{,m}$.

Considerando-se a equação (4.62), a integral sobre o domínio singular Ω_c pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_c} N_{ij}^0(p) \varepsilon_{kij}^*(q, p) d\Omega_c(p) &= N_{ij}^0(q) \int_{\Omega_c} \varepsilon_{kij}^*(q, p) d\Omega_c(p) + \\ &+ N_{ij,m}^0(q) \int_{\Omega_c} [x_m(p) - x_m(q)] \varepsilon_{kij}^*(q, p) d\Omega_c(p) \end{aligned} \quad (4.63)$$

Substituindo-se em (4.63) as equações (4.60), (4.28a) e $d\Omega = r dr d\phi$, com $\varepsilon \rightarrow 0$, conclui-se que a expressão (4.63) tende à zero, podendo-se então desprezá-la. Portanto, pode-se dizer que:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} N_{ij}^0(p) \varepsilon_{kij}^*(q, p) d\Omega_\varepsilon(p) = \int_{\Omega} N_{ij}^0(p) \varepsilon_{kij}^*(q, p) d\Omega(p) \quad (4.64)$$

Ou ainda:

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x_m} \int_{\Omega_\varepsilon} N_{ij}^0(p) \varepsilon_{kij}^*(q, p) d\Omega_\varepsilon(p) \quad (4.65)$$

Aplicando-se na equação (4.65) a regra de Leibnitz para diferenciação de integrais, a mesma resulta em:

$$I = \int_{\Omega} N_{ij}^0(p) \frac{\partial \varepsilon_{kij}^*}{\partial x_m}(q, p) d\Omega(p) - N_{ij}^0(q) \int_{\Gamma_\varepsilon} \varepsilon_{kij}^*(q, p) r_{,m} d\Gamma_\varepsilon \quad (4.66)$$

$$\text{onde } \varepsilon_{kijm}^* = \frac{1}{r^2} f(\theta), \quad (4.67)$$

$$\text{sendo } f(\theta) = \frac{1}{8\pi\bar{G}(1-\nu')} \left\{ (1-2\nu') \left[\delta_{jm} \delta_{ki} + \delta_{im} \delta_{kj} - 2\delta_{ki} r_{,j} r_{,m} - 2\delta_{kj} r_{,i} r_{,m} \right] + \right. \\ \left. + \delta_{ij} (2r_{,k} r_{,m} - \delta_{km}) + 2\delta_{km} r_{,i} r_{,j} + 2\delta_{im} r_{,k} r_{,j} + 2\delta_{jm} r_{,i} r_{,k} - 8r_{,i} r_{,j} r_{,k} r_{,m} \right\} \quad (4.68)$$

Seja o segundo termo da expressão (4.66). Considerando-se as equações (4.60) e (4.28a) e (4.28d), o mesmo pode ser escrito como:

$$U_2 = -N_{ij}^0(q) \int_{\Gamma_\varepsilon} \varepsilon_{kij}^*(q, p) r_{,m} d\Gamma_\varepsilon = \\ = -\frac{N_{ij}^0(q)}{8\pi(1-\nu')\bar{G}} \int_0^{2\pi} \left[(1-2\nu')(r_{,k} \delta_{ij} + r_{,j} \delta_{ik}) - r_{,i} \delta_{jk} + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] r_{,m} d\phi \quad (4.69)$$

Considerando-se que $r_{,1}^2 = \cos^2 \phi$, $r_{,2}^2 = \sin^2 \phi$ e $r_{,1} r_{,2} = \cos \phi \sin \phi$. Utilizando as relações trigonométricas apresentadas no capítulo 1.4 do Anexo e fazendo-se a integração em relação à ϕ , a equação (4.69) se torna:

$$U_2 = \frac{1}{16\bar{G}(1-\nu')} \left[(6-8\nu') N_{km}^0(q) - N_{mm}^0(q) \delta_{km} \right] \quad k, m = 1, 2 \quad (4.70)$$

Logo, considerando-se a equação (4.66) e (4.70), a integral de domínio da equação da derivada direcional de u_k , pode ser escrita como:

$$I = \int_{\Omega} N_{ij}^0(p) \varepsilon_{kijm}^*(q, p) d\Omega + \frac{1}{16\bar{G}(1-\nu')} \left[(6-8\nu') N_{km}^0(q) - N_{mm}^0(q) \delta_{km} \right] \quad (4.71)$$

$$k, m, i, j = 1, 2$$

5 APLICAÇÃO DO MEC ÀS EQUAÇÕES INTEGRAIS

5.1 Introdução

No contexto da análise em multi-escala, a solução da chapa é obtida impondo a deformação constante que vem do macro-contínuo em todos os nós do contorno externo do EVR. Assim, as incógnitas do problema são as forças nodais no contorno, os deslocamentos nos nós de interface e internos e os esforços plásticos nos nós internos. Além disso, na microestrutura o campo de deslocamento é definido como a soma de uma parcela linear (calculada a partir da deformação constante do macro-contínuo) mais uma parcela denominada flutuação de deslocamentos. Como esta deformação do macro-contínuo não é imposta aos nós internos e de interface do EVR, inicialmente gera-se automaticamente um campo de flutuação dos deslocamentos em seu interior, caso o EVR seja composto por mais de uma fase ou tenha vazios no seu domínio. Porém, os valores finais das flutuações de deslocamentos apenas serão conhecidos após a solução do problema de equilíbrio do EVR. Observe que no MEF esta deformação do macro-contínuo seria aplicada em todos os nós do EVR como condição de contorno, ou seja, inicialmente a flutuação dos deslocamentos seria nula em todos os nós do EVR. É interessante notar que numa micro-estrutura heterogênea o campo de deformações não é constante, devido ao material ser composto por matriz, inclusões e vazios. Portanto, como no MEC a deformação constante é aplicada exclusivamente no contorno, calculando os deslocamentos dos nós internos a partir dos valores desses no contorno, tem-se uma estimativa inicial melhor com o MEC. É interessante observar que se o EVR fosse homogêneo (constituído por uma única fase), a deformação obtida nos pontos internos seria constante e igual àquela imposta pelo macro-contínuo e, conseqüentemente, o campo de flutuação dos deslocamentos seria nulo, obtendo-se valores homogeneizados de tensão exatamente iguais àqueles resultantes de uma análise não-linear convencional.

Em muitos problemas onde o MEC é aplicado, discretiza-se somente o contorno do domínio estudado, porém no caso tratado nesse trabalho, é necessário discretizar também as interfaces em elementos e o domínio em células já que incógnitas do problema também são definidas nesses locais. Assim, aproximando as

variáveis do problema por funções interpoladoras nos elementos e células, transformam-se as equações integrais em equações algébricas.

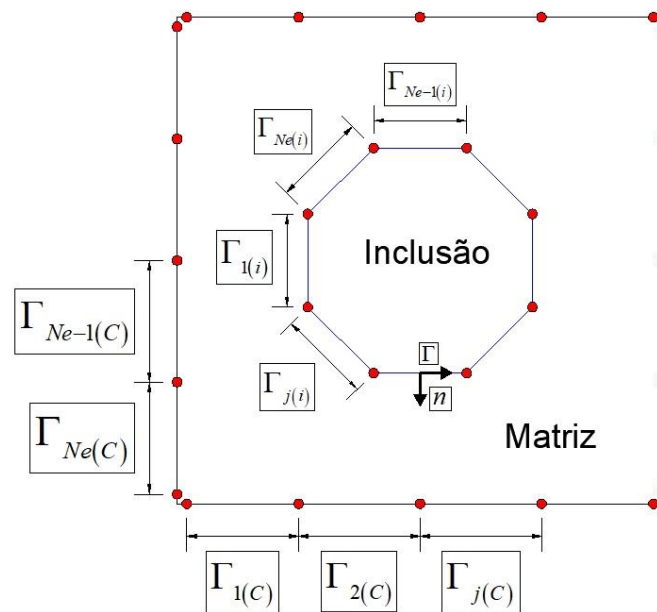
5.2 Discretização em elementos e células

5.2.1 Aproximação das variáveis nos elementos

As integrais sobre o contorno e interfaces são calculadas de maneira aproximada, através da discretização do contorno em elementos (ver Figura 8, onde o contorno foi discretizado em $N_{e(C)}$ elementos e as interfaces em $N_{e(I)}$ elementos). A geometria do elemento pode ser aproximada por uma função qualquer, sendo que a quantidade e a forma destes elementos são escolhidas visando-se representar adequadamente o contorno real estudado de maneira exata ou aproximada.

Como os elementos representados na Figura 8 têm dois nós, a aproximação adotada para as variáveis é linear. Note que nos cantos do contorno são definidos nós duplos, devido à descontinuidade no valor da força de superfície e na interface não há necessidade de se adotar nós duplos porque têm-se apenas deslocamentos como incógnitas.

Figura 8 - Discretização do contorno externo e da interface em elementos



Fonte: Elaboração do próprio autor.

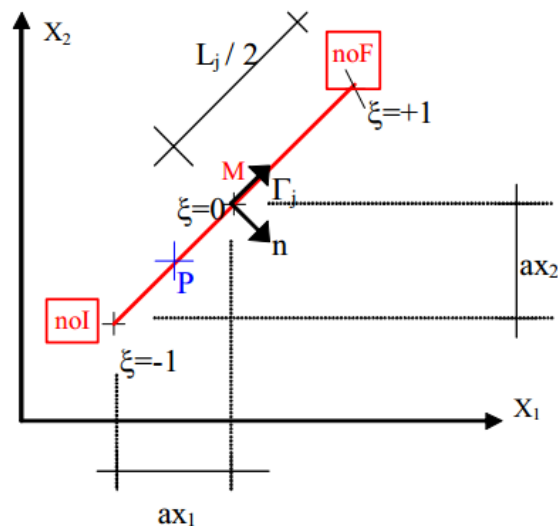
Na Figura 9 tem-se a representação de um elemento reto com apenas dois nós para representar sua geometria. Na Figura 9 noI é o nó inicial, noF o nó final, M é o ponto do meio do elemento, L_j é o comprimento do elemento j , n é a direção normal ao contorno Γ_j .

O contorno do elemento Γ_j e a coordenada homogênea ξ variam da seguinte forma:

$$-1 \leq \xi \leq 1 \quad (5.1)$$

$$-\frac{L_j}{2} \leq \Gamma_j \leq \frac{L_j}{2} \quad (5.2)$$

Figura 9 - Geometria do elemento aproximada por função linear



Fonte: Fernandes (2005)

Como as integrais são resolvidas numericamente, quando o ponto de colocação não pertence ao elemento, a variável Γ e as coordenadas cartesianas (X_1^P e X_2^P) de um ponto P qualquer do elemento, devem ser expressas em função de sua coordenada local homogênea ξ . Logo, da Figura 9, é deduzido que:

$$\Gamma_j = \xi \frac{L_j}{2} \quad (5.3)$$

$$X_1^P = X_1^M + \xi ax_1 \quad (5.4)$$

$$X_2^P = X_2^M + \xi ax_2 \quad (5.5)$$

onde X_i^P é a coordenada na direção i do ponto P (com $i=1,2$) e X_i^M corresponde à coordenada na direção i do ponto M (ponto médio do elemento) e ainda:

$$X_i^M = \frac{(X_i^{noI} + X_i^{noF})}{2} \quad (5.6)$$

$$ax_i = \frac{(X_i^{noF} - X_i^{noI})}{2} \quad (5.7)$$

Substituindo as equações (5.6) e (5.7) nas equações (5.4) ou (5.5), porém na forma indicial, e isolando os termos X_i^{noI} e X_i^{noF} , são obtidas duas funções interpoladoras lineares, representadas pelas seguintes expressões:

$$\phi_1(P) = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (5.8)$$

$$\phi_2(P) = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (5.9)$$

onde ξ é a coordenada local homogênea do ponto P . Assim, pode-se escrever as equações (5.4) e (5.5) numa só equação matricial:

$$\begin{Bmatrix} X_1^P \\ X_2^P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(P) & \phi_2(P) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1(P) & \phi_2(P) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1^{noI} \\ X_1^{noF} \\ X_2^{noI} \\ X_2^{noF} \end{Bmatrix} \quad (5.10)$$

Portanto, a integral ao longo do contorno ou interface é calculada de forma aproximada, com a discretização em um número finito de elementos, sendo que

para fazer a integração numérica, deve-se mudar de coordenadas cartesianas para coordenadas homogêneas, ou seja, a função a ser integrada é dada por:

$$\int_{\Gamma} F(\Gamma) d\Gamma = \sum_{j=1}^{N_e} \int_{-L_j/2}^{L_j/2} F(\Gamma_j) d\Gamma_j = \sum_{j=1}^{N_e} \frac{L_j}{2} \int_{-1}^1 F(\xi) d\xi \quad (5.11)$$

A seguir será mostrado como se faz a aproximação linear das variáveis. A aproximação das variáveis no elemento é feita a fim de se expressar o valor da variável u ou p de um ponto P qualquer de um elemento j em função dos seus valores nodais e de funções de interpolação. Com isso, $U(P)$ e $Q(P)$ são dados por:

$$\underset{\sim}{U}(P) = \underset{\sim}{\phi}^T(P) \underset{\sim}{U}_j \quad (5.12)$$

$$\underset{\sim}{P}(P) = \underset{\sim}{\phi}^T(P) \underset{\sim}{P}_j \quad (5.13)$$

Expandindo as equações anteriores na forma matricial, têm-se:

$$\underset{\sim}{U}(P) = \begin{Bmatrix} u_1^P \\ u_2^P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(P) & 0 & \phi_2(P) & 0 \\ 0 & \phi_1(P) & 0 & \phi_2(P) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \end{Bmatrix}_j \\ \begin{Bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \end{Bmatrix}_j \end{Bmatrix} \quad (5.14)$$

$$\underset{\sim}{P}(P) = \begin{Bmatrix} p_1^P \\ p_2^P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(P) & 0 & \phi_2(P) & 0 \\ 0 & \phi_1(P) & 0 & \phi_2(P) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \end{Bmatrix}_j \\ \begin{Bmatrix} p_1^2 \\ p_2^2 \end{Bmatrix}_j \end{Bmatrix} \quad (5.15)$$

onde u_i^N e p_i^N são os deslocamentos e as forças de superfície do nó N na direção i do elemento j .

5.2.2 Aproximação das variáveis nas células

Na equação (4.24) têm-se duas integrais de domínio para serem resolvidas, uma envolvendo os deslocamentos e a outra envolvendo os esforços iniciais ou plásticos. Para resolvê-las, o domínio será discretizado através de células triangulares, onde a aproximação linear será adotada para os deslocamentos e os esforços iniciais são considerados constantes.

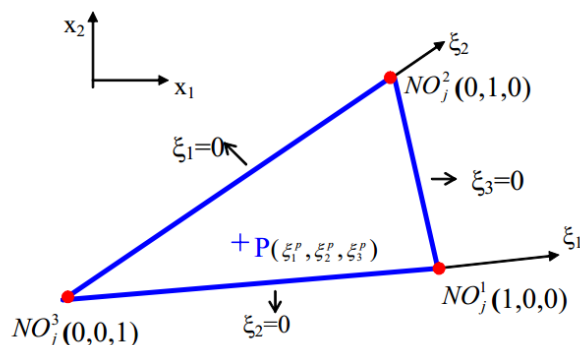
a) Integral de domínio envolvendo deslocamentos

Na equação do deslocamento (4.24), deve-se resolver a seguinte integral de domínio nas sub-regiões:

$$\sum_{S=1}^{N_s} \bar{E}_S \left(1 - \frac{V_S}{V} \right) \int_{\Omega_S} u_i(p) \varepsilon_{kij,j}^*(q, p) d\Omega_S \quad (5.16)$$

Considere a célula representada na Figura 10, cujos nós NO_j^1 , NO_j^2 e NO_j^3 são coincidentes com seus vértices e na qual está representado o sistema de coordenadas homogêneas.

Figura 10 - Célula triangular com sistema coordenadas homogêneas



Fonte: Fernandes (2005)

Os deslocamentos de um ponto P qualquer da célula são obtidos, utilizando-se funções interpoladoras, de maneira aproximada, a partir dos deslocamentos dos nós da mesma, do seguinte modo:

$$\tilde{u}_i = \tilde{\Psi}^T(p) \tilde{u}^{(N)} \quad (5.17)$$

onde Ψ é a função interpoladora e $u^{(N)}$ o vetor dos deslocamentos nodais, dados por:

$$\tilde{u}^{(N)T} = \left\{ \tilde{u}^{(k1)} \quad \tilde{u}^{(k2)} \quad \tilde{u}^{(k3)} \right\} = \left\{ u_1^{k1} \quad u_2^{k1} \quad u_1^{k2} \quad u_2^{k2} \quad u_1^{k3} \quad u_2^{k3} \right\} \quad (5.18)$$

$$\tilde{\Psi}^T = \begin{bmatrix} \xi_1^p & 0 & \xi_2^p & 0 & \xi_3^p & 0 \\ 0 & \xi_1^p & 0 & \xi_2^p & 0 & \xi_3^p \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

Na equação (5.18), as coordenadas homogêneas ξ_α^p referentes a um p qualquer da célula, são dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \xi_1^p \\ \xi_2^p \\ \xi_3^p \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 2A_0^1 & b^1 & a^1 \\ 2A_0^2 & b^2 & a^2 \\ 2A_0^3 & b^3 & a^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ X_1^p \\ X_2^p \end{Bmatrix} \quad (5.20)$$

onde:

$$a^\alpha = X_1^k - X_1^j \quad \alpha = 1, 2, 3; j = 2, 3, 1; k = 3, 1, 2 \quad (5.21)$$

$$b^\alpha = X_2^j - X_2^k \quad (5.22)$$

$$2A_0^\alpha = X_1^j X_2^k - X_1^k X_2^j \quad (5.23)$$

A é a área da célula, que é dada por:

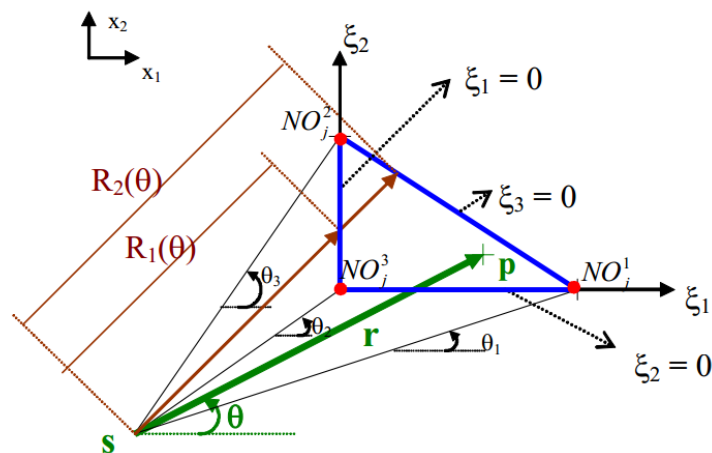
$$A = 0,5(b^1 a^2 - b^2 a^1) \quad (5.24)$$

A integração sobre cada célula pode ser feita através da fórmula de quadratura de Gauss para domínios triangular, a partir das coordenadas homogêneas. Devido à natureza das funções envolvidas, é necessário um grande número de pontos de

integração para se obter uma precisão aceitável. Em consequência da dificuldade citada, adota-se um esquema semi-analítico de integração, utilizado por Telles e Brebbia (1981) e Venturini (1982), no qual apresentam melhores resultados.

Um sistema de coordenadas cilíndricas (r, θ) , centrado no ponto de carregamento q , conforme a Figura 11, é adotado para poder calcular analiticamente a integral sobre a coordenada r .

Figura 11 - Sistema de coordenadas cilíndricas nas células triangulares



Fonte: Fernandes (2005).

As relações entre os sistemas de coordenadas cartesianas (X_1^p, X_2^p) e polares (r, θ) do ponto p , considerando a origem do sistema em q , são dadas por:

$$X_i(p) = X_i(q) + rr_{,i} \quad i=1,2 \quad (5.25)$$

sendo $r_{,1} = \cos \theta$ e $r_{,2} = \sin \theta$

Portanto, para um nó α da célula, têm-se:

$$\xi_\alpha^p = \xi_\alpha^q + \xi_\alpha^r \quad (5.26)$$

sendo ξ_α^q as coordenadas homogêneas relativas ao ponto q e ξ_α^r relativas ao raio r , têm-se:

$$\xi_\alpha^q = \frac{1}{2A} (2A_0^\alpha + b^\alpha X_1^q + a^\alpha X_2^q) \quad (5.27)$$

$$\xi_\alpha^r = \frac{r}{2A} (b^\alpha \cos \theta + a^\alpha \text{sen} \theta) \quad (5.28)$$

A equação (5.26) na forma matricial é dada por:

$$\begin{Bmatrix} \xi_1^p \\ \xi_2^p \\ \xi_3^p \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 2A_0^1 & b^1 & a^1 \\ 2A_0^2 & b^2 & a^2 \\ 2A_0^3 & b^3 & a^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ X_1^s \\ X_2^s \end{Bmatrix} + \frac{r}{2A} \begin{bmatrix} b^1 & a^1 \\ b^2 & a^2 \\ b^3 & a^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \text{sen} \theta \end{Bmatrix} \quad (5.29)$$

Para fazer o cálculo das integrais de domínio, discretiza-se o domínio da microestrutura em N_{cel} e aproxima-se os deslocamentos nas mesmas, através da função (5.12). Com isso, pode-se escrever a integral (5.16) da seguinte forma:

$$\int_{\Omega_s} u_i(p) \varepsilon_{kij,j}^*(q,p) d\Omega_s = \sum_{cel=1}^{N_{cel}} \left[\int_{\Omega_{cel}} \tilde{k}^*(q,p) \tilde{\psi}^T(p) d\Omega_{cel} \right] \tilde{u}_{cel}^{(N)} \quad (5.30)$$

onde $\tilde{k}^*(q,p) = \{ \varepsilon_{k1j,j}^*(q,p) \quad \varepsilon_{k2j,j}^*(q,p) \}$; $\tilde{\psi}$ é a função de interpolação linear dada pela equação (5.19).

Denomina-se de $e_{ki}^{cel}(q)$ a integral sobre cada célula genérica Ω_{cel} , que aparece na equação (5.30). Com isso, determinam-se seis coeficientes a partir de $e_{ki}^{cel}(q)$, pois têm-se duas componentes de deslocamento (u_1 e u_2) em cada nó da célula.

Desse modo, considerando-se um coeficiente relativo a um nó α e à componente de deslocamento na direção i , a equação de $e_{ki}^{cel}(q)$ possui a seguinte forma:

$$e_{ki}^{cel(\alpha)}(q) = \int_{\Omega_S} \varepsilon_{kij,j}^*(q,p) \xi_{\alpha}^p(p) d\Omega_S \quad k,i,j=1,2; \alpha=1,2,3 \quad (5.31)$$

Na equação (5.31) são substituídas a expressão de $\varepsilon_{kij,j}^*(q,p)$, dada pela equação (A.7) e a coordenada homogênea ξ_{α}^p , dada pela equação (5.26). As expressões de r_k e r_i , que aparecem na equação de $\varepsilon_{kij,j}^*(q,p)$, são funções apenas do ângulo θ , indicado na Figura 11.

Fazendo-se a transformação de coordenadas $d\Omega_{cel} = r dr d\theta$, chega-se a seguinte integral:

$$e_{ki}^{cel(\alpha)}(q) = \frac{\nu}{4\pi\bar{G}(1-\nu)} \int_{\theta} \int_r (\delta_{ik} - 2r_{,i} r_{,k}) \frac{1}{r^2} \left[\xi_{\alpha}^q + \frac{r}{2A} (b^{\alpha} \cos \theta + a^{\alpha} \sin \theta) \right] r dr d\theta \quad (5.32)$$

onde $r_{,i}$ são os co-senos diretores de r e δ_{ik} é o delta de Kronecker.

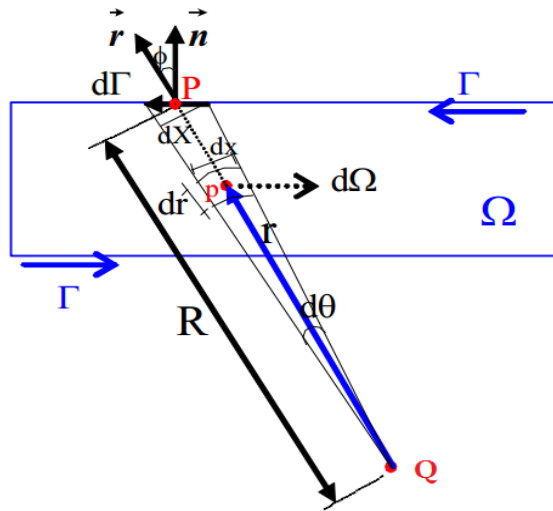
Fazendo-se a integração em relação à r , obtém-se:

$$e_{ki}^{cel(\alpha)}(q) = \frac{\nu}{4\pi\bar{G}(1-\nu)} \int_{\theta} (\delta_{ik} - 2r_{,i} r_{,k}) \left[\ln R \xi_{\alpha}^q + \frac{R}{2A} (b^{\alpha} \cos \theta + a^{\alpha} \sin \theta) \right] d\theta \quad (5.33)$$

A integral (5.33) será transformada em integral ao longo do contorno da célula a fim de facilitar o cálculo da integral e também o emprego da técnica de sub-elementos, que aumenta a precisão do resultado. A fim de se obter as relações para a transformação da integral sobre o domínio em integral de contorno, considere a Figura 12. Na Figura 12, p é um ponto qualquer do domínio Ω_b , P um ponto sobre

o contorno Γ_b , q o ponto de colocação, r a distância entre p e q , e R a distância entre P e q .

Figura 12 - Integração ao longo do contorno de um domínio qualquer



Fonte: Fernandes (2005)

Dessa figura pode-se deduzir que:

$$d\Omega_b = dr dx = r dr d\theta \quad (5.34)$$

$$d\theta = \frac{dX}{R} = \frac{\cos(\phi) d\Gamma_b}{R} = \frac{1}{R} \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma_b \quad (5.35)$$

Aplicando a transformação de coordenada desenvolvida na equação (5.35) para a equação (5.33), tem-se:

$$e_{ki}^{cel(\alpha)}(q) = \frac{\nu}{4\pi G(1-\nu)} \int_{\Gamma} (\delta_{ik} - 2r_{,i} r_{,k}) \left[\ln R \xi_{\alpha}^q + \xi_{\alpha}^R \right] \frac{1}{R} \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma \quad (5.36)$$

onde ξ_{α}^R é dado pela expressão (5.28), fazendo-se $r = R$.

Calculando-se a integral ao longo do contorno em cada um dos três lados da célula, a integral sobre a célula fica:

$$e_{ki}^{cel(\alpha)}(q) = \frac{\nu}{4\pi\bar{G}(1-\nu)} \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_i} (\delta_{ik} - 2r_{,i} r_{,k}) \left[\ln R \zeta_{\alpha}^q + \zeta_{\alpha}^R \right] \frac{1}{R} \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma_i \quad (5.37)$$

Para se integrar numericamente a expressão (5.37) deve-se fazer a mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas homogêneas η , dada por $d\Gamma = \frac{L}{2} d\eta$. Assim, a integral é calculada numericamente através da fórmula da quadratura de Gauss, empregando-se a técnica de sub-elementos, que divide automaticamente o elemento em sub-elementos, quando o ponto de colocação está muito próximo do elemento a ser integrado. Note que isso é feito porque quanto mais perto estiver o ponto de colocação do elemento a ser integrado, maior será a influência desse no valor da variável do ponto considerado.

Logo, a expressão (5.37) fica da seguinte forma:

$$e_{ki}^{cel(\alpha)}(q) = \sum_{l=3}^3 \sum_{ks=1}^{N_{sub}} \sum_{IG=1}^{N_g} \frac{\nu a_{ks}}{8\pi\bar{G}(1-\nu)} (\delta_{ik} - 2r_{,i} r_{,k}) \left[\ln R \zeta_{\alpha}^q + \zeta_{\alpha}^R \right] \frac{1}{R} \frac{\partial r}{\partial n} W_{IG} \quad (5.38)$$

onde N_{sub} é o número de sub-elementos em que o elemento é dividido, N_g é o número de pontos de Gauss, a_{ks} é o comprimento do sub-elemento ks e W_{IG} é o fator de ponderação do ponto de Gauss IG .

As coordenadas adimensionais ζ_{α}^q e ζ_{α}^R da equação (5.38) são calculadas através do seguinte procedimento: as coordenadas cartesianas do ponto \mathbf{p} de integração são obtidas a partir da coordenada adimensional η_{IG} do ponto de Gauss e das coordenadas cartesianas dos nós do sub-elemento. Assim sendo, a partir das coordenadas cartesianas de \mathbf{p} , são calculadas as coordenadas adimensionais ζ_{α}^q e ζ_{α}^R , utilizando as equações (5.27) e (5.28).

No processo de discretização da microestrutura, há células que possuem um de seus lados coincidentes ou com o contorno ou com uma interface. Assim, os nós

que estão presentes nesse lado da célula, possuem coeficientes oriundos da integração das células e também da integração numérica sobre os elementos de contorno ou interface. Estes coeficientes são somados aos respectivos nós que já foram definidos na discretização em elementos da microestrutura. Não havendo, nesse caso, a necessidade do aumento de variáveis no problema. Portanto, quando o nó estiver sobre o contorno ou interface, somam-se diretamente nas colunas da matriz H os coeficientes relativos a u_1 e u_2 , resultantes da integração das células.

Seja agora a equação (4.58), que expressa a derivada do deslocamento $u_{k,m}$, há uma equação integral envolvendo o domínio, que é a seguinte:

$$\sum_{s=1}^{N_s} \bar{E}_s \left(1 - \frac{\nu_s}{\nu}\right) \int_{\Omega_s} u_i(p) \varepsilon_{kij,jm}^*(q,p) d\Omega_s \quad (5.39)$$

onde a expressão fundamental é dada em (A.13).

Fazendo-se analogamente o mesmo processo utilizado na equação (5.26), um coeficiente relativo a um nó α da célula é calculado numericamente a longo dos três lados da mesma da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \bar{e}_{ki}^{cel(\alpha)}(q) = & \sum_{l=3}^3 \sum_{ks=1}^{Nsub} \sum_{IG=1}^{Ng} \frac{\nu' a_{ks}}{4\pi \bar{G}(1-\nu')} \left(\frac{\partial r}{\partial m} (\delta_{ik} - 4r_{,i} r_{,k}) + r_{,1} m_k + r_{,k} m_i \right) \left[-\xi_{\alpha}^q + \right. \\ & \left. + \xi_{\alpha}^R \ln R \right] \frac{1}{R^2} \frac{\partial r}{\partial n} W_{IG} \end{aligned} \quad (5.40)$$

b) Relação entre deformação e deslocamentos na célula

Os deslocamentos têm variação linear nas células, mas as deformações e esforços iniciais ou plásticos têm variação constante, dessa maneira, necessita apenas de 1 nó na célula, que é definido no seu centro. Além disso, o problema de equilíbrio do EVR, a ser descrito no próximo capítulo, é resolvido em termos de deslocamentos e, portanto, a partir das correções de deslocamentos devem-se determinar as correções de deformações para que as tensões sejam obtidas e a equação de equilíbrios do EVR verificada. Portanto, para definir a relação entre

deformações e deslocamentos em um ponto p qualquer dá célula, utiliza-se a equação (2.4), chegando-se a:

$$\{\varepsilon_p\}_{cel} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \gamma_{12} \\ \varepsilon_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} + u_{2,1} \\ u_{2,2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_p = [L] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_p \quad (5.41)$$

Considerando as equações (5.17) a (5.19), a equação (5.41) se torna:

$$\{\varepsilon_p\}_{cel} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1^p & 0 & \xi_2^p & 0 & \xi_3^p & 0 \\ 0 & \xi_1^p & 0 & \xi_2^p & 0 & \xi_3^p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{k1} \\ u_2^{k1} \\ u_1^{k2} \\ u_2^{k2} \\ u_1^{k3} \\ u_2^{k3} \end{Bmatrix} \quad (5.42)$$

Ou seja:

$$\{\varepsilon_p\}_{cel} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_1^p}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial \xi_2^p}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial \xi_3^p}{\partial x_1} & 0 \\ \frac{\partial \xi_1^p}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_1^p}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2^p}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_2^p}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_3^p}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_3^p}{\partial x_1} \\ 0 & \frac{\partial \xi_1^p}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial \xi_2^p}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial \xi_3^p}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{k1} \\ u_2^{k1} \\ u_1^{k2} \\ u_2^{k2} \\ u_1^{k3} \\ u_2^{k3} \end{Bmatrix} = [B]_{cel} \{U\}^N \quad (5.43)$$

Considerando-se a equação (5.20), a matriz $[B]$ é dada por:

$$[B]_{cel} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ a_1 & b_1 & a_2 & b_2 & a_3 & b_3 \\ 0 & a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

c) Integral de domínio envolvendo esforços iniciais

Agora será analisada a integral de domínio que aparece na equação (4.24) do deslocamento u_k , envolvendo esforços iniciais. As sub-regiões são discretizadas através de células triangulares, utilizando-se funções interpoladoras constantes para aproximar os esforços iniciais. Assim, considere a célula representada na Figura 10. A diferença para a outra integral de domínio é a aproximação que é constante na célula, portanto necessita-se de apenas de 1 nó, que será definido no seu centro.

Os esforços de um ponto p qualquer da célula são dados por:

$$\tilde{N}^0(p) = \tilde{\psi}^T(p) \tilde{N}^{0(N)} \quad (5.45)$$

onde $\tilde{\psi}$ é a função interpoladora constante e $\tilde{N}^{0(N)}$ o vetor das forças iniciais nodais, dados por:

$$\tilde{\psi}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

$$\tilde{N}^{0(N)T} = \left\{ \tilde{N}^{0(no)} \right\} = \left\{ N_{11}^{0(no)} \quad N_{12}^{0(no)} \quad N_{22}^{0(no)} \right\} \quad (5.47)$$

Discretizando-se o domínio em N_{cel} células, o mesmo é calculado, de forma aproximada, através da seguinte expressão:

$$I = \sum_{cel=1}^{N_{cel}} \left[\int_{\Omega_{cel}} \tilde{k}^{**}(q, p) d\Omega_{cel}(p) \right] N_{cel}^{0(\bar{N})} \quad (5.48)$$

sendo: $k^{**}(q, p) = \{ \varepsilon_{k11}^*(q, p) \quad 2\varepsilon_{k12}^*(q, p) \quad \varepsilon_{k22}^*(q, p) \}$ onde $k=1,2$, $N_{cel}^{0(N)}$ são as forças normais iniciais nodais da célula e a expressão de ε_{kij}^* é dada pela equação (4.60).

Em cada célula, calculam-se 6 coeficientes, pois para cada equação de u_k $k=1,2$ têm-se 3 coeficientes. Faz-se a transformação da integral (5.48) sobre o domínio Ω_{cel} de uma determinada célula em integral ao longo do contorno da mesma, logo o coeficiente relativo a componente $N_{ij}^{0(\alpha)}$ do nó α é dado por:

$$e_{kij}^{*cel}(q) = -\frac{1}{8\pi\bar{G}(1-\nu')} \sum_{s=1}^3 \left\{ \int_{\Gamma_s} f_{kij}(\theta) \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma \right\} \quad k, i, j = 1, 2 \quad (5.49)$$

$$\text{onde } f_{kij}(\theta) = \left[(1-2\nu)(r_{,j} \delta_{ki} + r_{,i} \delta_{kj}) - r_{,k} \delta_{ij} + 2r_{,k} r_{,i} r_{,j} \right] \quad (5.50)$$

Finalmente, considere a integral sobre o domínio das células da equação (4.58) da derivada do deslocamento $u_{k,m}$. Após a discretização do domínio da EVR em células, a mesma é dada por:

$$I = \sum_{cel=1}^{N_{cel}} \left[\int_{\Omega_{cel}} \bar{k}^{**}(q, p) d\Omega_{cel}(p) \right] N_{cel}^{0(\bar{N})} \quad (5.51)$$

$$\text{sendo: } k^{**}(q, p) = \{ \varepsilon_{k11m}^*(q, p) \quad 2\varepsilon_{k12m}^*(q, p) \quad \varepsilon_{k22m}^*(q, p) \} \quad k, m = 1, 2$$

e a expressão fundamental ε_{kijm}^* é dada pela equação (4.67).

Em uma célula, calculam-se 12 coeficientes, pois são 3 coeficientes para cada equação de $u_{k,m}$. Procedendo-se de forma análoga, o coeficiente da equação (5.51) relativo a componente $N_{ij}^{0(\alpha)}$ do nó α , pertencente a uma célula qualquer, é dado por:

$$\bar{e}_{kijm}^{ncel}(q) = \frac{1}{8\pi\bar{G}(1-\nu')} \sum_{s=1}^3 \left\{ \int_{\Gamma_s} \frac{f_{kijm}(\theta)}{R} \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma_s \right\} \quad k, i, j, m = 1, 2 \quad (5.52)$$

Sendo $f_{kijm}(\theta)$ dado pela equação (4.68).

5.3 Transformação das equações integrais em equações algébricas

A equação (4.24) do deslocamento u_k de um ponto Q sobre o contorno ou uma interface pode ser escrita, ainda sem introduzir nenhuma aproximação, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} C_{k1}u_1(Q) + C_{k2}u_2(Q) &= \int_{\Gamma_1} u_k^*(Q, P) P(P) d\Gamma - \frac{\bar{E}_1 \nu_1}{\bar{E} \nu} \int_{\Gamma_1} p_k^*(Q, P) U(P) d\Gamma + \\ &- \sum_{j=1}^{N_{vazios}} \frac{\bar{E}_1 \nu_1}{\bar{E} \nu} \int_{\Gamma_{1j}} p_k^*(Q, P) U(P) d\Gamma_{1j} - \bar{E}_1 \left(1 - \frac{\nu_1}{\nu} \right) \int_{\Gamma_1} \varepsilon_k^*(Q, P) U(P) d\Gamma + \\ &- \sum_{j=1}^{N_{inc}} \left\{ \frac{\bar{E}_j \nu_j}{\bar{E} \nu} - \frac{\bar{E}_1 \nu_1}{\bar{E} \nu} \right\} \int_{\Gamma_{j1}} p_k^*(Q, P) U(P) d\Gamma_{j1} + \\ &- \sum_{j=1}^{N_{inc}} \left\{ \bar{E}_j \left(1 - \frac{\nu_j}{\nu} \right) - \bar{E}_1 \left(1 - \frac{\nu_1}{\nu} \right) \right\} \int_{\Gamma_{j1}} \varepsilon_k^*(Q, P) U(P) d\Gamma_{j1} + \\ &+ \sum_{S=1}^{N_S} \bar{E}_S \left(1 - \frac{\nu_S}{\nu} \right) \int_{\Omega_S} k_k^*(q, p) U(p) d\Omega_S + \sum_{S=1}^{N_S} \int_{\Omega_S} k_k^*(q, p) N^0(p) d\Omega_S \end{aligned} \quad (5.53)$$

onde:

$$p_k^*(Q, P) = \{ p_{k1}^*(Q, P) \quad p_{k2}^*(Q, P) \} \quad (5.54)$$

$$u_k^*(Q, P) = \{ u_{k1}^*(Q, P) \quad u_{k2}^*(Q, P) \} \quad (5.55)$$

$$\varepsilon_k^*(Q, P) = \{ \varepsilon_{k1}^*(Q, P) \quad \varepsilon_{k2}^*(Q, P) \} \quad (5.56)$$

$$\tilde{k}_k^*(q, p) = \left\{ \varepsilon_{k1j,j}^*(q, p) \quad \varepsilon_{k2j,j}^*(q, p) \right\} \quad (5.57)$$

$$\tilde{k}_k^{**}(q, p) = \left\{ \varepsilon_{k11}^*(q, p) \quad 2\varepsilon_{k12}^*(q, p) \quad \varepsilon_{k22}^*(q, p) \right\} \quad (5.58)$$

$$\tilde{U}^T(P) = \left\{ u_1^P \quad u_2^P \right\} \quad (5.59)$$

$$\tilde{P}^T(P) = \left\{ p_1^P \quad p_2^P \right\} \quad (5.60)$$

$$\tilde{U}_{cel}^T(p) = \left\{ u_1^p \quad u_2^p \right\} \quad (5.61)$$

$$\tilde{N}_{cel}^{0(T)}(P) = \left\{ N_{11}^{0(P)} \quad N_{12}^{0(P)} \quad N_{22}^{0(P)} \right\} \quad (5.62)$$

No capítulo 5.2 foi discutida a aproximação adotada para as variáveis nos elementos e nas células. Assim, fazendo-se a discretização do contorno e interfaces em N_e elementos e do domínio em N_{cel} células e substituindo-se as variáveis por suas aproximações (equações 5.59 a 5.62), a equação (5.53) fica da seguinte forma aproximada:

$$\begin{aligned} C_{k1}u_1(Q) + C_{k2}u_2(Q) &= \sum_{j=1}^{N_e} \left[\int_{\Gamma_j} \tilde{u}_k^*(Q, P) \phi^T(P) d\Gamma_j \right] P_j + \\ &- \frac{\bar{E}_1}{E} \frac{v_1}{\nu} \sum_{j=1}^{N_e} \left[\int_{\Gamma_j} \tilde{p}_k^*(Q, P) \phi^T(P) d\Gamma_j \right] U_j - \frac{\bar{E}_1}{E} \left(1 - \frac{v_1}{\nu} \right) \sum_{j=1}^{N_e} \left[\int_{\Gamma_j} \tilde{\varepsilon}_k^*(Q, P) \phi^T(P) d\Gamma_j + \right] U_j + \\ &- \sum_{m=1}^{N_{vazios}} \frac{\bar{E}_1}{E} \frac{v_1}{\nu} \sum_{j=1}^{N_e} \left[\int_{\Gamma_j} \tilde{p}_k^*(Q, P) \phi^T(P) d\Gamma_{1j} \right] U_j + \\ &- \sum_{m=1}^{N_{inc}} \left\{ \frac{\bar{E}_m}{E} \frac{v_m}{\nu} - \frac{\bar{E}_1}{E} \frac{v_1}{\nu} \right\} \sum_{j=1}^{N_e} \left[\int_{\Gamma_j} \tilde{p}_k^*(Q, P) \phi^T(P) d\Gamma_{1j} \right] U_j + \\ &- \sum_{m=1}^{N_{inc}} \left\{ \bar{E}_m \left(1 - \frac{v_m}{\nu} \right) - \bar{E}_1 \left(1 - \frac{v_1}{\nu} \right) \right\} \sum_{j=1}^{N_e} \left[\int_{\Gamma_j} \tilde{\varepsilon}_k^*(Q, P) \phi^T(P) d\Gamma_{1j} \right] U_j + \\ &+ \sum_{S=1}^{N_S} \bar{E}_S \left(1 - \frac{v_S}{\nu} \right) \sum_{cel=1}^{N_{cel}} \left[\int_{\Omega_{cel}} \tilde{k}_k^*(q, p) \psi^T(p) d\Omega_{cel} \right] U_{cel} + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{S=1}^{N_S} \sum_{cel=1}^{N_{cel}} \left[\int_{\Omega_{cel}} k_k^*(q, p) \psi^T(p) d\Omega_{cel} \right] N_{cel}^0 \quad (5.63)$$

Definindo-se os seguintes vetores, de dimensão $(1 \times 2N_{nos})$, pois têm-se duas variáveis em cada nó, sendo N_{nos} o número de nós necessários no elemento para a aproximação das variáveis, ou seja, nesse trabalho $N_{nos} = 2$:

$$h_k^j(Q) = \int_{\Gamma_j} p_k^*(Q, P) \phi^T(P) d\Gamma_j \quad (5.64)$$

$$\bar{h}_k^j(Q) = \int_{\Gamma_j} \varepsilon_k^*(Q, P) \phi^T(P) d\Gamma_j \quad (5.65)$$

$$g_k^j(Q) = \int_{\Gamma_j} u_k^*(Q, P) \phi^T(P) d\Gamma_j \quad (5.66)$$

Já para os vetores provenientes da integração nas células, tem-se respectivamente, para aproximação dos deslocamentos e esforços normais iniciais no domínio:

$$e_k^{cel}(q) = \int_{\Omega_{cel}} k_k^*(q, p) \psi^T(p) d\Omega_{cel} \quad (5.67)$$

$$e_k^{ncel}(q) = \int_{\Omega_{cel}} k_k^{ncel}(q, p) d\Omega_{cel} \quad (5.68)$$

Logo, a equação (5.63) fica:

$$C_{k1} u_1(Q) + C_{k2} u_2(Q) = \sum_{j=1}^{Ne} g_k^j(Q) P_j +$$

$$- \frac{\bar{E}_1}{E} \frac{v_1}{v} \sum_{j=1}^{Ne} h_k^j(Q) U_j - \bar{E}_1 \left(1 - \frac{v_1}{v} \right) \sum_{j=1}^{Ne} \bar{h}_k^j U_j +$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{m=1}^{N_{vazios}} \frac{\bar{\bar{E}}_1}{\bar{\bar{E}}} \frac{v_1}{v} \sum_{j=1}^{Ne} \underset{\sim}{h}_k^j(Q) \underset{\sim}{U}_j - \sum_{m=1}^{N_{inc}} \left\{ \frac{\bar{\bar{E}}_m}{\bar{\bar{E}}} \frac{v_m}{v} - \frac{\bar{\bar{E}}_1}{\bar{\bar{E}}} \frac{v_1}{v} \right\} \sum_{j=1}^{Ne} \underset{\sim}{h}_k^j(Q) \underset{\sim}{U}_j + \\
& - \sum_{m=1}^{N_{inc}} \left\{ \bar{\bar{E}}_m \left(1 - \frac{v_m}{v} \right) - \bar{\bar{E}}_1 \left(1 - \frac{v_1}{v} \right) \right\} \sum_{j=1}^{Ne} \underset{\sim}{\bar{h}}_k^j(Q) \underset{\sim}{U}_j + \\
& + \sum_{S=1}^{N_S} \bar{\bar{E}}_S \left(1 - \frac{v_S}{v} \right) \sum_{cel=1}^{N_{cel}} \underset{\sim}{e}_k^{cel}(q) \underset{\sim}{U}_{cel} \\
& + \sum_{S=1}^{N_S} \sum_{cel=1}^{N_{cel}} \underset{\sim}{e}_k^{ncel}(q) \underset{\sim}{N}_{cel}^0
\end{aligned} \tag{5.69}$$

Os coeficientes dos vetores dados em (5.64), (5.65) e (5.66), são obtidos, respectivamente, pelas seguintes expressões:

$$h_{ki}^{N(j)}(Q) = \int_{\Gamma_j} p_{ki}^*(Q, P) \phi_N(P) d\Gamma_j \tag{5.70}$$

$$\bar{h}_{ki}^{N(j)}(Q) = \int_{\Gamma_j} \varepsilon_{kij,j}^*(Q, P) \phi_N(P) d\Gamma_j \tag{5.71}$$

$$g_{ki}^{N(j)}(Q) = \int_{\Gamma_j} u_{ki}^*(Q, P) \phi_N(P) d\Gamma_j \tag{5.72}$$

onde k é a direção da carga fundamental, i é a direção (da força fundamental ou do deslocamento fundamental) na qual se calcula o coeficiente e N é o nó local do elemento j . Já o coeficiente relacionado às células é dado pelas equações (5.31) e (5.49), logo a equação 5.69 pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
C_{k1} u_1(Q) + C_{k2} u_2(Q) &= \sum_{j=1}^{Ne} g_{ki}^{N(j)}(Q) p_{i(j)}^N + \\
& - \frac{\bar{\bar{E}}_1}{\bar{\bar{E}}} \frac{v_1}{v} \sum_{j=1}^{Ne} \underset{\sim}{h}_{ki}^{N(j)}(Q) \underset{\sim}{u}_{i(j)}^N - \bar{\bar{E}}_1 \left(1 - \frac{v_1}{v} \right) \sum_{j=1}^{Ne} \underset{\sim}{\bar{h}}_{ki}^{N(j)}(Q) \underset{\sim}{u}_{i(j)}^N +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{m=1}^{N_{\text{vazios}}} \frac{\bar{E}_1}{\bar{E}} \frac{v_1}{v} \sum_{j=1}^{Ne} h_{ki}^{N(j)}(Q) u_{i(j)}^N - \sum_{m=1}^{N_{\text{inc}}} \left\{ \frac{\bar{E}_m}{\bar{E}} \frac{v_m}{v} - \frac{\bar{E}_1}{\bar{E}} \frac{v_1}{v} \right\} \sum_{j=1}^{Ne} h_{ki}^{N(j)}(Q) u_{i(j)}^N + \\
& - \sum_{m=1}^{N_{\text{inc}}} \left\{ \bar{E}_m \left(1 - \frac{v_m}{v} \right) - \bar{E}_1 \left(1 - \frac{v_1}{v} \right) \right\} \sum_{j=1}^{Ne} \bar{h}_{ki}^{N(j)}(Q) u_{i(j)}^N + \\
& + \sum_{S=1}^{N_S} \bar{E}_S \left(1 - \frac{v_S}{v} \right) \sum_{cel=1}^{N_{cel}} e_{ki}^{cel}(q) u_{i(cel)}^N \\
& + \sum_{S=1}^{N_S} \sum_{cel=1}^{N_{cel}} e_{kij}^{ncel}(q) N_{ij(cel)}^{0(N)} \tag{5.73}
\end{aligned}$$

Calculando-se os vetores $\{h^j\}(Q)$ (equação 5.64), $\{\bar{h}^j\}(Q)$ (equação 5.65) e $\{g^j\}(Q)$ (equação 5.66) de todos os elementos, e ainda, os vetores referentes às células do EVR, $\{e^{cel}\}(q)$ (equação 5.67) e $\{e^{ncel}\}(q)$ (equação 5.68) e agrupando-se os coeficientes referentes a um mesmo valor nodal, escreve-se a equação (5.73) matricialmente:

$$\begin{aligned}
C_{k1} u_1(Q) + C_{k2} u_2(Q) &= G(Q) P - \frac{\bar{E}_1}{\bar{E}} \frac{v_1}{v} \hat{H}(Q) U - \bar{E}_1 \left(1 - \frac{v_1}{v} \right) \hat{\bar{H}}(Q) U + \\
& - \sum_{m=1}^{N_{\text{vazios}}} \frac{\bar{E}_1}{\bar{E}} \frac{v_1}{v} \hat{H}(Q) U - \sum_{m=1}^{N_{\text{inc}}} \left\{ \frac{\bar{E}_m}{\bar{E}} \frac{v_m}{v} - \frac{\bar{E}_1}{\bar{E}} \frac{v_1}{v} \right\} \hat{H}(Q) U + \\
& - \sum_{m=1}^{N_{\text{inc}}} \left\{ \bar{E}_m \left(1 - \frac{v_m}{v} \right) - \bar{E}_1 \left(1 - \frac{v_1}{v} \right) \right\} \hat{\bar{H}}(Q) U + \\
& + \sum_{S=1}^{N_S} \bar{E}_S \left(1 - \frac{v_S}{v} \right) E(q) U + \sum_{S=1}^{N_S} \bar{E}^m(q) N^{0(N)} \tag{5.74}
\end{aligned}$$

Observe que os nós das células sobre o contorno ou interface coincidem com aqueles nós já definidos para os elementos de contorno ou interface. Logo, para a montagem da equação algébrica final, são agrupados os coeficientes referentes a um mesmo valor nodal. Além disso, os termos livres devem ser somados às respectivas colunas do vetor H referentes ao ponto de colocação.

$$\underline{H}(Q)\underline{U} = \underline{G}(Q)\underline{P} + \underline{E}(q)\underline{N}^0 \quad (5.75)$$

onde: \underline{U} é o vetor dos valores nodais dos deslocamentos nos nós sobre o contorno, internos e interfaces; \underline{P} é o vetor dos valores nodais das forças de superfície no contorno externo e \underline{N}^0 é o vetor das forças iniciais.

5.4 Sistema de Equações Algébricas

As equações integrais (4.24) e (4.58) são transformadas em equações algébricas através da discretização do contorno em elementos e do domínio em células, onde surgem pontos nodais. No contorno externo, os valores nodais são: duas componentes de deslocamentos (u_1 e u_2) e duas forças de superfície (p_1 e p_2), das quais uma componente em cada direção deve ser dada como condição de contorno. Porém, no caso particular tratado nesse trabalho, os deslocamentos são impostos a todos os nós do contorno e, portanto, as forças obtidas são reações a esses deslocamentos impostos. No domínio os valores nodais são: duas componentes de deslocamentos (u_1 e u_2) e três componentes de forças plásticas (N_{11}^0 , N_{12}^0 e N_{22}^0). Nos elementos sobre o contorno e interfaces será considerada a aproximação linear das variáveis e no domínio serão adotadas células triangulares com aproximação linear para os deslocamentos e aproximação constante para as forças normais. Para facilitar o cálculo, a integral de domínio será transformada em integral ao longo do contorno da célula, que são calculadas numericamente pela técnica de sub-elementos descrita em Fernandes (1998), aumentando com isso a precisão do cálculo.

Organizando as equações na forma matricial, tem-se o seguinte sistema de equações em termos dos valores de contorno, interfaces e domínio:

$$\begin{bmatrix} [H]_{cc} & [H]_{ci} \\ [H]_{ic} & [H]_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [U]_c \\ [U]_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G]_{cc} \\ [G]_{ic} \end{bmatrix} \{P\}_c + [E] \{N^0\} \quad (5.76)$$

Na equação (5.76), o sub-índice C está relacionado com o contorno externo, enquanto o sub-índice i está relacionado com valores da interface e domínio. Os vetores $\{U\}$, $\{P\}$ e $\{N^0\}$ são, respectivamente, os valores nodais dos deslocamentos, forças de superfície e esforços plásticos. A matriz $[H]$ representa os valores da integração dos elementos do contorno e da interface bem como as células definidas na matriz e nas inclusões, sendo estes relacionados com os deslocamentos. A matriz $[G]$ já representa os valores da integração dos elementos do contorno, sendo estes relacionados com as forças de superfície. A matriz $[E]$ representa os valores da integração das células definidas na matriz e nas inclusões, sendo estes relacionados com os esforços plásticos.

Este trabalho estuda o comportamento de uma microestrutura heterogênea no contexto da análise em multi-escala. Como já foi descrito anteriormente, os valores da macro-deformação são impostos no contorno externo da microestrutura, o que implica em impor como condição de contorno em deslocamentos lineares. Impondo-se as condições de contorno, ou seja, isolam-se todas as incógnitas no vetor do lado esquerdo da equação e são trocadas as respectivas colunas da matriz H e G . A equação (5.76) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} -[G]_{CC} & [H]_{Ci} \\ -[G]_{iC} & [H]_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [P]_C \\ [U]_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -[H]_{CC} \\ -[H]_{iC} \end{bmatrix} \{U\}_C + [E] \{N^0\} \quad (5.77)$$

O sistema formado pela equação (5.77) pode ser reduzido para a seguinte forma:

$$[A] \{X\} = \{B\} + [E] \{N^0\} \quad (5.78)$$

onde: $[A] = \begin{bmatrix} -[G]_{CC} & [H]_{Ci} \\ -[G]_{iC} & [H]_{ii} \end{bmatrix}$, $\{B\} = \begin{bmatrix} -[H]_{CC} \\ -[H]_{iC} \end{bmatrix} \{U\}_C$ e $\{X\}$ é o vetor das incógnitas

dado pelas forças de superfície no contorno e dos deslocamentos nas interfaces e

nós internos: $\{X\} = \begin{Bmatrix} \{P\}_C \\ \{U\}_i \end{Bmatrix};$

Isolando o vetor $\{X\}$ a equação (5.78) fica:

$$\{X\} = \{L\} + [R]\{N^0\} \quad (5.79)$$

onde: $\{L\} = [A]^{-1} \{B\}$; $[R] = [A]^{-1} [E]$.

Para resolver o problema de equilíbrio do EVR a somatória das forças nodais em todas as células deve ser nula, ou seja, as forças no EVR devem estar em equilíbrio. As forças são obtidas a partir das tensões ou forças normais verdadeiras $\{N\}$, que por sua vez dependem das forças normais elásticas (de tentativa) $\{N^e\}$ utilizadas para encontrar a resposta elástica linear. Estas são obtidas após escrever a equação da derivada dos deslocamentos em todos os nós centrais das células e aplicar a lei de Hooke, equação (2.15), obtendo-se:

$$\{N^{e(MEC)}\} = -\begin{bmatrix} [H']_C & [H']_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U\}_C \\ \{U\}_i \end{Bmatrix} + [G']_C \{P\}_C + [E'] \{N^0\} \quad (5.80)$$

Após a aplicação das condições de contorno no EVR, a equação (5.80) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\{N^{e(MEC)}\} = \begin{bmatrix} [G']_C & -[H']_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P\}_C \\ \{U\}_i \end{Bmatrix} - [H']_C \{U\}_C + [E'] \{N^0\} \quad (5.81)$$

Podendo também ser escrita a equação (5.81) da seguinte forma:

$$\{N^{e(MEC)}\} = -[A']\{X\} + \{B'\} + [E']\{N^0\} \quad (5.82)$$

Substituindo o vetor $\{X\}$ da equação (5.79) na equação anterior, tem-se:

$$\{N^{e(MEC)}\} = \{K\} + [S]\{N^0\} \quad (5.83)$$

onde: $\{K\} = \{B'\} - [A']\{L\}$; $[S] = [E'] - [A']\{R\}$.

Observe que antes de resolver o problema de equilíbrio do EVR, definido no próximo capítulo, o vetor das incógnitas $\{X\}$ assim como o incremento de forças elásticas $\{\Delta K_N\}$ (necessário para resolver o procedimento iterativo no EVR), são calculados sem considerar os incrementos do campo de flutuação dos deslocamentos, bem como do campo das forças plásticas. Contudo, depois de resolver o problema de equilíbrio do EVR, os deslocamentos dos nós do contorno, bem como as forças plásticas nodais devem ser atualizados e os esforços no contorno recalculados a fim de calcular a tensão homogeneizada.

Também é importante apontar que para calcular os vetores $\{X\}$ e $\{\Delta K_N\}$, as seguintes matrizes devem ser montadas: $[A]^{-1}$; $\begin{bmatrix} -[H]_{BB} \\ -[H]_{iB} \end{bmatrix}$; $[A']^{-1}$; $[R]$ e $[H']_B$.

Entretanto, isso não aumentaria consideravelmente o esforço computacional em uma análise de multi-escala, como todas essas matrizes devem ser montadas apenas uma vez, ou seja, na primeira iteração do primeiro incremento do problema macro-contínuo.

6 O PROBLEMA DE EQUILÍBRIO DO EVR E SUA RELAÇÃO COM O MACRO-CONTÍNUO

6.1 Introdução

A mecânica do contínuo trata de materiais idealizados que consistem de pontos materiais e vizinhança material. É estimado que as tensões e deformações dentro de uma vizinhança infinitesimal de um ponto na macroescala, podem ser consideradas essencialmente uniformes. Na microescala, no entanto, a vizinhança material infinitesimal, em geral, não é uniforme, consistindo de vários materiais com propriedades e formas diferentes, isto é, a microestrutura dos materiais é complexa (matriz, inclusões, vazios, fissuras) e, em geral, em evolução. Conseqüentemente, o campo de tensões e deformações não são uniformes na microescala (NEMAT-NASSER; HORI, 1993).

Com o objetivo de expressar as tensões e deformações de um ponto do macro-contínuo em termos dos parâmetros que caracterizam a microestrutura, deve-se fazer uma modelagem em multi-escala, onde a microestrutura será representada por EVRs. A transição da micro-escala para a macro-escala será feita através de princípios de homogeneidade e conceito de média volumétrica. Nesse trabalho será feita a análise de microestruturas de materiais heterogêneos através do MEC considerando não-linearidade física, a fim de validar uma formulação para ser utilizada posteriormente em uma modelagem em multi-escala, onde a formulação a ser utilizada para modelar o macro-contínuo está apresentada em Fernandes e Souza Neto (2013).

Na modelagem em multi-escala os seguintes princípios, que serão discutidos mais detalhadamente a seguir, devem ser observados:

1. A deformação num ponto qualquer do macro-contínuo é dada pela média volumétrica da deformação na célula local microscópica de domínio (chamada EVR). O mesmo se aplica a tensão, ou seja: a tensão num ponto qualquer do macro-contínuo é dada pela média volumétrica da tensão no EVR;
2. O equilíbrio do EVR deve ser verificado;
3. O princípio da Macro-Homogeneidade de Hill-Mandel deve ser verificado;

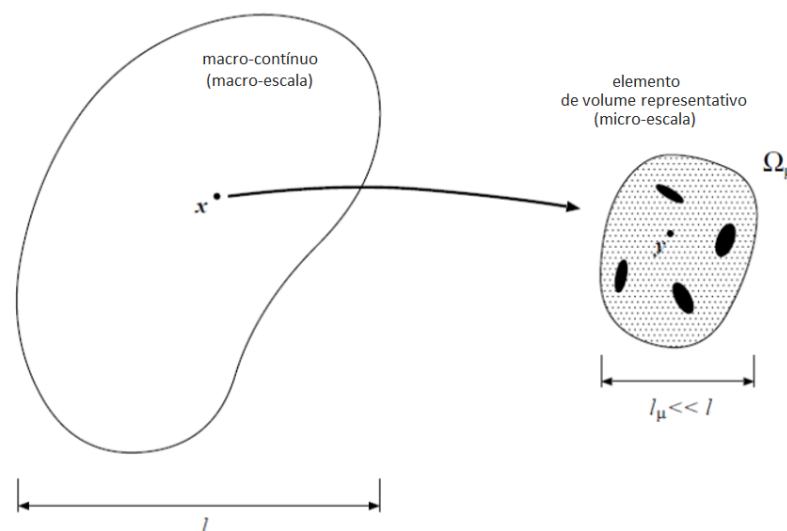
4. O espaço do campo de flutuações dos deslocamentos, cinematicamente admissível do EVR deve ser um sub-espaço do espaço das flutuações de deslocamento que são compatíveis com a hipóteses da média volumétrica das deformações (condição 1 acima).

6.2 Definição de EVR e seu Campo de deslocamentos

Para se fazer a modelagem em multi-escala deve-se definir no domínio do macro-contínuo pontos de interesse que são chamados de EVR (Elemento de Volume Representativo), que representa a micro-estrutura, ao nível dos grãos, do macro-contínuo na vizinhança infinitesimal do ponto (SOUZA NETO; FEIJÓO, 2006). Assim, assume-se que o EVR é composto de diferentes fases (ou materiais) que possuem módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson característicos, além de apresentar comportamento não-linear distintos.

Seja o macro-contínuo apresentado na Figura 13 de comprimento característico l , sendo x um ponto arbitrário do macro-contínuo. A cada ponto x do macro-contínuo deve estar associado um EVR que representa a micro-estrutura do material, que pode ser composto por inclusões e vazios, sendo y um ponto arbitrário do EVR.

Figura 13 - EVR relacionado ao ponto do macro-contínuo



Fonte: Fernandes (2012)

Com essa definição, tem-se que a deformação no ponto x é dada pela média volumétrica da deformação no EVR, ou seja:

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \varepsilon_\mu(y) dV \quad (6.1)$$

De forma análoga, tem-se que a tensão de um ponto x do macro-contínuo é dada por:

$$\sigma(x) = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \sigma_\mu(y) dV \quad (6.2)$$

Onde todos os valores com índice μ se referem ao EVR, ou seja: V_μ é o volume, Ω_μ o seu domínio, σ_μ a tensão, ε_μ a deformação e $\partial\Omega_\mu$ o contorno.

Tem-se então nas equações (6.1) e (6.2) a homogeneização, que é o processo de transformar uma quantidade microscópica em uma quantidade macroscópica. Portanto $\sigma(x)$ e $\varepsilon(x)$ são respectivamente, a tensão macroscópica ou homogeneizada e a deformação macroscópica ou homogeneizada. Já o campo de deslocamentos no EVR é decomposto em duas parcelas:

$$u_\mu(y) = u_\mu^\varepsilon(y) + \tilde{u}_\mu(y) \quad (6.3)$$

onde $u_\mu^\varepsilon(y)$ representa o campo dos deslocamentos obtido a partir da imposição da macro deformação $\varepsilon(x)$ ao contorno do EVR. Observe que para os nós do contorno o deslocamento $u_\mu^\varepsilon(y)$ varia linearmente, ou seja, $u_\mu^\varepsilon(y) = u_\mu^L(y) = \varepsilon(x)y$, onde y representa as coordenadas de um ponto arbitrário do EVR.

Além disso, na equação (6.3) \tilde{u}_μ é a flutuação dos deslocamentos necessária para satisfazer a equação de equilíbrio do EVR. No modelo proposto, inicialmente um campo dos deslocamentos lineares é imposto ao contorno do EVR, que gera automaticamente um campo de flutuação dos deslocamentos no domínio do EVR, se a microestrutura for heterogênea.

É importante notar que na formulação do EVR desenvolvida em De Souza Neto e Feijóo (2006) e Fernandes *et al.* (2015a; b) pelo MEF, o campo de deslocamento linear $u_{\mu}^L(y)$ é imposto a todos os nós do EVR, o que leva inicialmente a um campo de flutuação dos deslocamentos nulo no EVR como a deformação imposta $\varepsilon(x)$ é constante, ou seja, para todos os nós do EVR tem-se $u_{\mu}^{\varepsilon}(y) = u_{\mu}^L(y)$. Como discutido acima, na formulação apresentada neste trabalho a macro deformação $\varepsilon(x)$ é imposta somente aos nós do contorno, sendo os deslocamentos nos nós internos calculados a partir da equação (5.79), considerando essa condição de contorno. Como esses deslocamentos nos nós internos são calculados levando em conta os diferentes materiais (ou fases) da microestrutura, inicialmente já existe um campo de flutuação dos deslocamentos nos nós internos, sendo que o campo de flutuação de deslocamento final só é encontrado após resolver o problema de equilíbrio do RVE.

6.3 Equação de Equilíbrio do EVR

O Princípio de Hill-Mandel deve ser obedecido para que haja equivalência energética entre as escalas micro e macro. Assim, a partir dessa condição, chega-se à equação de equilíbrio do EVR, que define que o somatório das tensões ou das forças nodais em todas as células deve ser nulo. Portanto, o campo de tensões ou forças no EVR são apenas reações devido à deformação macro imposta ao mesmo, sendo a equação de equilíbrio dada por:

$$R_F = \sum_{k=1}^{N_{cel}} \{F_k\} \cong 0 \quad (6.4)$$

Estas forças são obtidas a partir das tensões ou forças normais verdadeiras $\{N\}$, as quais devem satisfazer o modelo constitutivo adotado. O vetor $\{N\}$ tem dimensão $3 \times N_{cel}$ visto que é constante ao longo da célula e possui 3 componentes (N_{11} , N_{12} e N_{22}) que são definidos no centro da célula. Reescrevendo a equação anterior em termos de forças normais tem-se:

$$R_F = \sum_{k=1}^{N_{cel}} [B]_k^T \{N\}_k A_k \cong 0 \quad (6.5)$$

onde $[B]_k$ é a matriz que relaciona deformação e deslocamento na célula, A_k é a área da célula; e N_{cel} , o número de células do EVR. Esta equação para um incremento n de carga pode ser escrita como:

$$R_F = \sum_{k=1}^{N_{cel}} [B]_k^T \left(\{N\}_{n-1} + [C_N^{ep}]_n^k \{\Delta \varepsilon_\mu\}_n^k \right) A_k \cong 0 \quad (6.6)$$

Considerando-se que na célula as deformações podem ser obtidas a partir dos deslocamentos nodais utilizando-se a relação $\{\Delta \varepsilon_\mu\} = [B] \{\Delta u_\mu\}$ e que $\{\Delta \varepsilon_\mu\} = \{\Delta \varepsilon\} + \{\Delta \tilde{\varepsilon}\}$ tem-se que:

$$\{\Delta \varepsilon_\mu\} = \{\Delta \varepsilon\} + [B] \{\Delta \tilde{u}\} \quad (6.7)$$

Logo a equação (6.6) pode ser reescrita como:

$$R_F = \sum_{k=1}^{N_{cel}} [B]_k^T \{N\}_{n-1} + [B]_k^T [C_N^{ep}]_k \left(\{\Delta \varepsilon\}_n + [B] \{\Delta \tilde{u}\}_n \right) A_k \cong 0 \quad (6.8)$$

onde $[C_N^{ep(e)}] = t[C^{ep(e)}]$ é o tensor constitutivo relacionando forças normais e deformações na célula e , obtido a partir do modelo constitutivo adotado para governar o material na célula; $[C^{ep(e)}]$ é o tensor constitutivo.

Observe que para a condição do estado plano de deformações tem-se que substituir as forças de membrana pelas tensões, bem como, o tensor $[C_N^{ep(e)}]$ pelo tensor $[C^{ep(e)}]$, nas equações 6.5 e 6.8.

Por fim, para encontrar o vetor de deformação em todos os nós de célula, primeiro deve-se calcular $\{\Delta K\}$ definido na equação (5.83), devido aos deslocamentos com variação linear no contorno impostos pela deformação constante do macro-contínuo nos nós do contorno. Então, utilizando-se a equação

(2.6, inversa da lei de Hooke) reduzida para o estado plano, obtém-se $\{\Delta\varepsilon\}$. A deformação $\{\Delta\varepsilon\}$ imposta pelo macro-contínuo é constante apenas para os pontos do contorno, diferente da formulação em MEF onde ela é constante em todos os nós do EVR. Portanto, no caso de modelar o EVR com o MEC, a deformação imposta pelo macro-contínuo gera automaticamente um campo de flutuações no interior do EVR. Na equação (6.8), as flutuações dos deslocamentos nos nós do EVR são as incógnitas do problema. Assim, a solução do problema de equilíbrio do EVR consiste em encontrar o incremento de flutuações $\{\Delta\tilde{u}\}$ que anula a equação (6.8).

Quando o EVR é uniforme, todos os pontos possuem as mesmas propriedades elásticas e, portanto, a deformação $\{\Delta\varepsilon\}$ imposta pelo macro-contínuo gera um campo de deformações constante no EVR. Neste caso, o equilíbrio é obtido quando se tem $\{\Delta\tilde{u}\}$ nulo mesmo que haja plastificação em algum nó. Logo não é necessário resolver o processo iterativo, já que a equação de equilíbrio (6.8) é satisfeita para $\{\Delta\tilde{u}\} = 0$, e nesse caso, tem-se que a resposta do problema é idêntica a uma análise não-linear convencional.

6.4 Matriz tangente consistente

Com a linearização da equação de resíduos (6.8) através do Método de Newton-Raphson é obtida a matriz tangente do problema de equilíbrio do EVR. Verificando que para uma determinada iteração i a correção no estado de flutuação dos deslocamentos $\{\delta\Delta\tilde{u}\}_n^i$ é calculada com base na seguinte equação:

$$\{R_F\}_n^{i-1} + \frac{\partial\{R_F\}_n^{i-1}}{\partial\{\Delta\tilde{u}\}_n^{i-1}}\{\delta\Delta\tilde{u}\}_n^i = 0 \quad (6.9)$$

Isolando $\{\delta\Delta\tilde{u}\}_n^i$, tem-se:

$$\{\delta\Delta\tilde{u}\}_n^i = [K^{TC}]^{i-1} \{R_F\}_n^{i-1} \quad (6.10)$$

onde $[K^{TC}]^i = -\frac{\partial \{R_F\}_n^{i-1}}{\partial \{\Delta \tilde{u}\}_n^{i-1}}$ é denominada de matriz tangente consistente e relaciona a correção no estado de flutuação dos deslocamentos $\{\delta \Delta \tilde{u}\}_n^i$ com os resíduos da iteração anterior $\{R_F\}_n^{i-1}$.

Derivando a equação (6.8) em relação ao incremento de flutuação dos deslocamentos, chega-se à expressão da matriz tangente:

$$[K^{TC}]_n^i = -\sum_{k=1}^{N_{cel}} [B^T]_k [C_N^{ep}]_n^i [B]_k A_k \quad (6.11)$$

Para uma célula qualquer k da chapa, a matriz $[C_N^{ep}]_k$ é dada por:

$$[C_N^{ep}]_{k(n)}^{i-1} = \frac{\partial N_n^{(i-1)}}{\partial \Delta(\varepsilon)_n^{i-1}} = \int_{-t/2}^{t/2} \frac{\partial(\sigma)_n^{i-1}}{\partial \Delta(\varepsilon)_n^{i-1}} dx_3 = t [C^{ep}]_{k(n)}^{i-1} \quad (6.12)$$

onde $[C_N^{ep}]_{k(n)}^{i-1}$ é a matriz tangente que relaciona a tensão real com o incremento de deformação e é obtida a partir do modelo constitutivo adotado.

Se os resíduos, equação (6.8), não forem nulos, devem-se calcular as correções de flutuações dos deslocamentos a serem aplicados no EVR, obtendo novos campos de deslocamentos, de deformações e de tensões (após verificação do modelo constitutivo). Então, checka-se novamente a equação de equilíbrio do EVR (equação 6.8). Esse processo de correção continua até que os resíduos de esforços em todos os pontos do EVR se anulem, de acordo com a tolerância adotada para convergência do processo iterativo. Assim, chega-se à solução não-linear através de um procedimento incremental-iterativo, no qual a deformação imposta ao EVR é subdividida em incrementos de deformação. As correções que devem ser dadas aos estados de flutuações dos deslocamentos em uma determinada iteração, são obtidas através do operador tangente consistente que é atualizado a cada iteração, e do resíduo de esforços do EVR, equação (6.8).

6.5 Condições de contorno em termos flutuação dos deslocamentos

A fim de resolver a equação de equilíbrio (6.8), condições de contorno em termos de flutuação dos deslocamentos devem ser impostas ao EVR. De acordo com essas condições de contorno, alguns valores nodais de flutuações são prescritos ou podem ser escritos em função dos valores nodais de outros nós. Assim, a correção no estado de flutuação dos deslocamentos do EVR é calculada a partir do sistema de equações definido em (6.9), que pode ser reduzido de acordo com as condições de contorno a serem aplicadas ao EVR. Para mais detalhes ver Fernandes *et al.* (2015a; b).

Serão consideradas as seguintes condições de contorno no EVR:

- I. Deslocamentos lineares no contorno do EVR;
- II. Flutuações dos deslocamentos periódicos sobre o contorno;
- III. Forças de superfície uniformes sobre o contorno.

Note que cada condição de contorno define um modelo multi-escala diferente, já que reproduz uma diferente estimativa de resposta constitutiva macroscópica. De acordo com cada condição de contorno em flutuação, pode-se reduzir o sistema de equações (6.9), podendo-se escrevê-lo da seguinte forma:

$$\{R_F\}_n^{i-1} - [K^{TC}]_n^{i-1} \{\delta\Delta\tilde{u}\}_n^i = 0 \quad (6.13)$$

6.5.1 Deslocamentos Lineares no Contorno do EVR

Nesse caso, é adotado que as flutuações dos deslocamentos \tilde{u}_μ se anulam no contorno Γ_μ do EVR, portanto, o campo de deslocamento microscópico ao longo do contorno Γ_μ do EVR pode ser dado por:

$$u_\mu(y) = \varepsilon(x)y \quad (6.14)$$

ou seja, ao longo de Γ_μ o deslocamento varia linearmente com o vetor de coordenadas y .

Nesse modelo, as flutuações são nulas no contorno, portanto, deve-se calcular as flutuações no domínio do EVR. Portanto, para uma iteração k , a equação (6.13) será decomposta em parcelas, onde o sub-índice i é relativo aos nós internos e C aos nós do contorno:

$$\begin{Bmatrix} R_{F(C)} \\ R_{F(i)} \end{Bmatrix}^{k-1} - \begin{bmatrix} K_{CC} & K_{Ci} \\ K_{iC} & K_{ii} \end{bmatrix}^{k-1} \begin{Bmatrix} \delta \tilde{u}_C \\ \delta \tilde{u}_i \end{Bmatrix}_\mu^k = 0 \quad (6.15)$$

Considerando-se que $\delta \tilde{u}_C = 0$ e que F_C são apenas forças reativas ao campo de deslocamentos imposto, as flutuações nos pontos internos são dadas por:

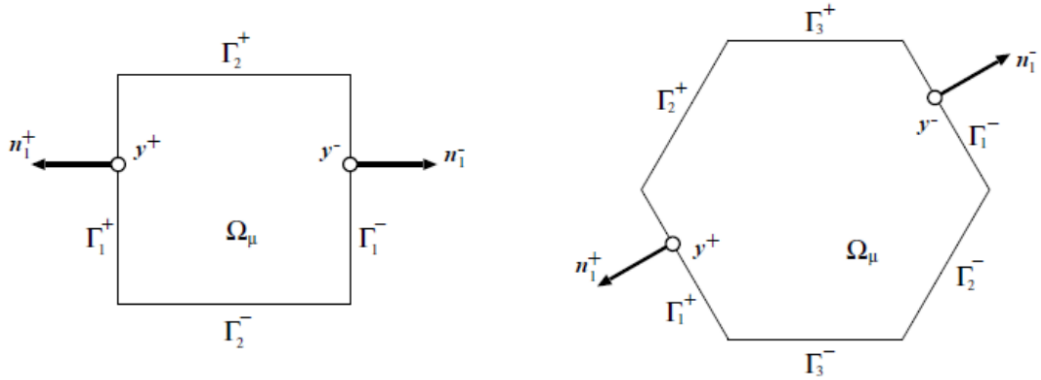
$$\{\delta \tilde{u}_i\}_\mu^k = [K_{ii}]^{-1(k-1)} \{R_{F(i)}\}^{k-1} \quad (6.16)$$

sendo $\{R_{F(i)}\}$ o vetor resíduo das forças nos nós internos.

6.5.2 Flutuações de Deslocamentos Periódicos sobre o Contorno

Esse modelo é adequado para descrever o comportamento de materiais que possuem microestrutura periódica, mas pode-se demonstrar que quando se considera uma discretização fina, qualquer material pode ser modelado por essa condição de contorno. Considere a Figura 14, onde são representados um EVR retangular e outro hexagonal.

Figura 14 - Definição de EVRs para meios periódicos: célula retangular e hexagonal



Fonte: Fernandes (2012)

Observe que nos EVRs definidos na Figura 14, cada lado Γ_i^+ corresponde a um lado igual e oposto Γ_i^- . Desse modo tem-se n_i^+ e n_i^- como direções normais aos contornos Γ_i^+ e Γ_i^- , respectivamente. Portanto, para cada ponto y^+ pertencente ao contorno Γ_i^+ , existe um ponto correspondente y^- do contorno Γ_i^- .

Nessa condição de contorno, adota-se que as flutuações para o par de ponto y^+ e y^- são iguais. Sendo assim:

$$\tilde{u}_\mu(y^+) = \tilde{u}_\mu(y^-) \quad \forall \text{ par de pontos } \{y^+, y^-\} \in \Gamma_\mu \quad (6.17)$$

Para satisfazer o Princípio de Hill-Mandel, a força de superfície t^e deve ser anti-periódica em Γ_μ :

$$t^e(y^+) = -t^e(y^-) \quad \forall \text{ par de pontos } \{y^+, y^-\} \in \Gamma_\mu \quad (6.18)$$

Para uma iteração k , a equação (6.13) será decomposta em parcelas devido às características periódicas desta condição de contorno. O sub-índice i é relativo aos nós internos; p e m se referem aos pares de pontos y^+ e y^- definidos no contorno (sem coincidir com canto). Tem-se então:

$$\begin{Bmatrix} R_{F(p)} \\ R_{F(m)} \\ R_{F(i)} \end{Bmatrix}^{k-1} - \begin{bmatrix} K_{pp} & K_{pm} & K_{pi} \\ K_{mp} & K_{mm} & K_{mi} \\ K_{ip} & K_{im} & K_{ii} \end{bmatrix}^{k-1} \begin{Bmatrix} \delta \tilde{u}_p \\ \delta \tilde{u}_m \\ \delta \tilde{u}_i \end{Bmatrix}_\mu^k = 0 \quad (6.19)$$

Onde $R_{F(p)}$, $R_{F(m)}$ e $R_{F(i)}$ são as forças nos pontos p , m e i .

Ao analisar a equação (6.19), pode-se observar que não são prescritas flutuações nulas nos cantos. Por isso, na equação anterior, não são definidos termos relativos aos cantos. Além disso, tem-se que $\delta \tilde{u}_m = \delta \tilde{u}_p$. Portanto a equação (6.19) se torna:

$$\begin{Bmatrix} R_{F(p)} \\ R_{F(m)} \\ R_{F(i)} \end{Bmatrix}^{k-1} - \begin{bmatrix} K_{pp} & K_{pm} & K_{pi} \\ K_{mp} & K_{mm} & K_{mi} \\ K_{ip} & K_{im} & K_{ii} \end{bmatrix}^{k-1} \begin{Bmatrix} \delta \tilde{u}_p \\ \delta \tilde{u}_p \\ \delta \tilde{u}_i \end{Bmatrix}_\mu^k = 0 \quad (6.20)$$

Desenvolve-se trabalhos algébricos na equação (6.20) e essa pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} R_{F(p)} + R_{F(m)} \\ R_{F(i)} \end{Bmatrix}^{k-1} - \begin{bmatrix} K_{pp} + K_{pm} + K_{mp} + K_{mm} & K_{pi} + K_{mi} \\ K_{ip} + K_{im} & K_{ii} \end{bmatrix}^{k-1} \begin{Bmatrix} \delta \tilde{u}_p \\ \delta \tilde{u}_i \end{Bmatrix}_\mu^k = 0 \quad (6.21)$$

ou seja, as incógnitas do problema são as flutuações nos pontos p do contorno e nós internos.

6.5.3 Forças de Superfície Uniformes sobre o Contorno

Nesse modelo a força de superfície é uniforme ao longo do contorno do EVR. Além disso, para satisfazer o princípio da macro-homogeneidade de Hill-Mandel, devem-se ter forças de volume b nulas no domínio Ω_μ do EVR. Dessa maneira será

visto posteriormente que a tensão homogeneizada também é dada pela equação (6.29).

Será decomposta novamente a equação (6.13) em parcelas, a fim de resolver o problema de equilíbrio. Designando o sub-índice i aos nós internos, f aos nós livres e d aos nós dependentes. Tem-se:

$$\begin{Bmatrix} R_{F(f)} \\ R_{F(d)} \\ R_{F(i)} \end{Bmatrix}^{k-1} - \begin{bmatrix} K_{ff} & K_{fd} & K_{fi} \\ K_{df} & K_{dd} & K_{di} \\ K_{if} & K_{id} & K_{ii} \end{bmatrix}^{k-1} \begin{Bmatrix} \delta\tilde{u}_f \\ \delta\tilde{u}_d \\ \delta\tilde{u}_i \end{Bmatrix}_\mu^k = 0 \quad (6.22)$$

onde $R_{F(f)}$, $R_{F(d)}$ e $R_{F(i)}$ são as forças nos pontos f , d e i .

Considerando-se que os nós livres se relacionam com os nós dependentes pela matriz R , a equação anterior pode possuir a seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} R_{F(f)} \\ R_{F(d)} \\ R_{F(i)} \end{Bmatrix}^{k-1} - \begin{bmatrix} K_{ff} & K_{fd} & K_{fi} \\ K_{df} & K_{dd} & K_{di} \\ K_{if} & K_{id} & K_{ii} \end{bmatrix}^{k-1} \begin{Bmatrix} \delta\tilde{u}_f \\ R\delta\tilde{u}_f \\ \delta\tilde{u}_i \end{Bmatrix}_\mu^k = 0 \quad (6.23)$$

A equação (6.23) pode ser escrita em função apenas das flutuações dos pontos f e i , do seguinte modo:

$$\begin{Bmatrix} F_f + R^T F_d \\ F_i \end{Bmatrix}^k - \begin{bmatrix} K_{ff} + K_{fd}R + R^T K_{dd}R & K_{fi} + R^T K_{di} \\ K_{if} + K_{id}R & K_{ii} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \delta\tilde{u}_f \\ \delta\tilde{u}_i \end{Bmatrix}_\mu^{k+1} = 0 \quad (6.24)$$

ou seja, as incógnitas do problema são as flutuações nos nós livres e internos.

6.6 Tensão homogeneizada

A partir da definição dada na equação (6.2), tem-se que a tensão $\sigma(x, t)$ de um ponto x do macro-contínuo é a homogeneização do campo de tensões

microscópicas $\sigma_\mu = \sigma_\mu(y, t)$ que agem no EVR associado a esse ponto x . Admitindo que o EVR tem partes sólidas e vazias ($\Omega_\mu = \Omega_\mu^v + \Omega_\mu^s$), a equação (6.2) resulta em:

$$\sigma(x) = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \sigma_\mu(y) dV = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu^s} \sigma_\mu(y) dV + \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu^v} \sigma_\mu(y) dV \quad (6.25)$$

Na definição da equação (6.25) o EVR é considerado como um meio contínuo e, portanto, o conceito de tensão permanece válido na escala microscópica. Assim, o EVR deve ser suficientemente grande para que a representação dele como meio contínuo faça sentido.

A fim de escrever a tensão homogeneizada em termos de forças de superfície e de volume do EVR, considere a equação:

$$\int_{\Omega} S (\nabla v)^T dV = \int_{\partial\Omega} S n \otimes v dA - \int_{\Omega} \text{div} S \otimes v dV \quad (6.26)$$

Adotando na equação (6.25): $S = \sigma_\mu$; $v = y$; $\Omega = \Omega_\mu$; $I = \nabla y$; $\Omega_\mu = \Omega_\mu^v \cup \Omega_\mu^s$. E aplicando a equação (6.26), chega-se a:

$$\sigma(x) V_\mu = \int_{\partial\Omega_\mu^s} \sigma_\mu n \otimes y dA - \int_{\partial\Omega_\mu^s} \text{div} \sigma_\mu \otimes y dV + \int_{\partial\Omega_\mu^v} \|\sigma_\mu n\| \otimes y dA - \int_{\partial\Omega_\mu^v} \text{div} \sigma_\mu \otimes y dV \quad (6.27)$$

São consideradas as seguintes relações a fim de se obter a expressão final da tensão homogeneizada:

$$\text{div} \sigma_\mu(y, t) = b(y, t) \quad \forall \quad y \in \Omega_\mu^s \quad (6.28a)$$

$$\text{div} \sigma_\mu(y, t) = b(y, t) \quad \forall \quad y \in \Omega_\mu^v \quad (6.28b)$$

$$\sigma_\mu(y, t) n = t^e(y, t) \quad \forall \quad y \in \Omega_\mu \quad (6.28c)$$

$$\|\sigma_\mu(y, t) n\| = 0 \quad \forall \quad y \in \Omega_\mu^v \quad (6.28d)$$

Assumindo-se que as forças de volume que agem no vazio são nulas e estabelecendo o Princípio de macro-homogeneidade de Hill-Mandel (De Souza Neto e Feijóo, 2006), obtém-se:

$$\sigma(x) = \frac{1}{V_\mu} \int_{\partial\Omega_\mu} t^e(y) \otimes_s y dA \quad (6.29)$$

onde é utilizada a seguinte expressão $u \otimes_s v = \frac{1}{2}(u \otimes v + v \otimes u)$, no cálculo das integrais, válida para quaisquer vetores u e v .

Discretizando o contorno do EVR em elementos pode-se calcular a equação (6.29) de forma aproximada, sendo t^e as forças de superfície dos nós sobre o contorno e y o vetor das coordenadas x_1 e x_2 do ponto y do EVR. Logo o tensor da tensão homogeneizada é dado pela seguinte equação:

$$\sigma(x) = \frac{1}{2V_\mu} (\bar{\sigma} + \bar{\sigma}^T) \quad (6.30)$$

onde:

$$\bar{\sigma} = \sum_{i=1}^{Nb} \{F_c\}_i \{y\}_i^T \quad (6.31)$$

Na equação (6.31) as forças F_c são calculadas a partir das forças nodais do contorno P_c obtidas pela Equação (5.78), onde vetor dos deslocamentos nodais do contorno $\{U_c\}$ é aquele obtido após a solução do problema de equilíbrio do EVR, ou seja, $\{U_c\} = \{U_c^L\} + \{\tilde{U}_c\}$, em que $\{U_c^L\}$ é o campo de deslocamento com variação linear calculado a partir da deformação constante ε imposta pelo macro-contínuo. As forças P_c são dadas por unidade de comprimento, logo para se obterem as forças F_c deve-se multiplicar P_c pelo comprimento de influência do respectivo nó. Além

disso, observe que na equação (5.78) P_c tem uma parcela referente ao campo de esforços inelásticos N^0 , obtido após o equilíbrio no EVR ter sido alcançado.

6.7 Tensor elasto-plástico homogeneizado

A tensão homogeneizada relativa ao macro-contínuo em um incremento n é dada por:

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + \frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} : \Delta \varepsilon_{n+1} \quad (6.32)$$

Onde a equação representada abaixo é o operador tangente constitutivo homogeneizado.

$$D_{n+1} = \frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = C_{n+1}^{ep} \quad (6.33)$$

Numa análise com não-linearidade física, a tensão microscópica $\sigma_\mu = \sigma_\mu(y, t)$ em um ponto y qualquer do EVR é relacionada com a história da deformação microscópica $\varepsilon_\mu = \varepsilon_\mu(y, t)$ por meio de uma função constitutiva $f_y(\varepsilon_\mu(y, t))$ que envolve variáveis internas de acordo com o modelo constitutivo adotado. Logo a tensão microscópica pode ser escrita como:

$$\sigma_\mu(y, t) = f_y(\varepsilon_\mu(y, t)) \quad (6.34)$$

Do campo de deslocamentos e de flutuações dos deslocamentos tem-se que:

$$\varepsilon_\mu(y, t) = \varepsilon(x, t) + \tilde{\varepsilon}_\mu(y, t) \quad (6.35)$$

onde $\varepsilon_\mu(y, t)$ é o deslocamento microscópico, $\varepsilon(x, t)$ é a deformação imposta pelo macro-contínuo e $\tilde{\varepsilon}_\mu(y, t) = \nabla^S \tilde{u}_\mu$ é o campo de flutuações, que varia de forma genérica em y .

Logo, considerando-se as equações (6.2), (6.34), e (6.35), a tensão homogeneizada no incremento $n+1$ é:

$$\sigma_{n+1} = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \sigma_{\mu(n+1)} dV = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} f_y(\varepsilon_{\mu(n+1)}) dV = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} f_y(\varepsilon_{n+1} + \nabla^S \tilde{u}_{\mu(n+1)}) dV \quad (6.36)$$

Portanto, o operador tangente homogeneizado pode ser escrito como:

$$D_{n+1} = C_{n+1}^{ep} = \frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \frac{\frac{1}{V_\mu} \partial \int_{\Omega_\mu} f_y(\varepsilon_{n+1} + B \tilde{u}_{\mu(n+1)}) dV}{\partial \varepsilon_{n+1}} \quad (6.37)$$

Desenvolvendo a equação anterior para um caso geral, (De Souza Neto e Feijóo, 2006) tem-se:

$$\begin{aligned} C_{n+1}^{ep}(x) &= \frac{\partial \sigma(x)_{n+1}}{\partial \varepsilon(x)_{n+1}} = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_{\mu^s}} \frac{\partial \sigma_\mu(y)_{n+1}}{\partial \varepsilon(x)_{n+1}} dV = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_{\mu^s}} \frac{\partial \sigma_\mu(y)_{n+1}}{\partial \varepsilon_\mu(y)_{n+1}} \frac{\partial \varepsilon_\mu(y)_{n+1}}{\partial \varepsilon(x)_{n+1}} dV = \\ &= \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_{\mu^s}} \frac{\partial \sigma_\mu(y)_{n+1}}{\partial \varepsilon_\mu(y)_{n+1}} \frac{\partial (\varepsilon(x)_{n+1} + \nabla^S \tilde{u}_{\mu(n+1)})}{\partial \varepsilon(x)_{n+1}} dV = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_{\mu^s}} \left[\frac{\partial \sigma_\mu(y)}{\partial \varepsilon_\mu(y)} \frac{\partial \varepsilon(x)}{\partial \varepsilon(x)} + \frac{\partial \sigma_\mu(y)}{\partial \varepsilon_\mu(y)} \frac{\partial \nabla^S \tilde{u}_\mu}{\partial \varepsilon(x)} \right]_{n+1} dV \\ &= \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_{\mu^s}} C_{\mu(n+1)}^{ep} dV + \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_{\mu^s}} C_{\mu(n+1)}^{ep} \frac{\partial \nabla^S \tilde{u}_{\mu(n+1)}}{\partial \varepsilon(x)_{n+1}} dV \end{aligned} \quad (6.38)$$

podendo-se apresentar o operador tangente da seguinte forma:

$$C_{n+1}^{ep} = C_{n+1}^{ep(Taylor)} + \tilde{C}_{n+1}^{ep} \quad (6.39)$$

onde:

$$\tilde{C}_{n+1}^{ep} = \frac{1}{V_{\mu}} [G_R] [K_R]^{-1} [G_R]^T \quad (6.40)$$

Sendo que as matrizes $[K_R]$ e $[G_R]$ dependem do modelo de condição de contorno adotado. A matriz $[K_R]$ é uma matriz reduzida obtida a partir da matriz K definida em (6.10) e $[G_R]$ é uma matriz reduzida obtida a partir da matriz $[G]$ total, calculada da seguinte maneira:

$$[G] = \sum_{e=1}^{N_e} [C_{\mu}^{ep}]_e [B]_e V_e \quad (6.41)$$

Sendo $[B]_e$ a matriz que relaciona deslocamento com deformação no elemento.

Agora para calcular o $C_{n+1}^{ep(Taylor)}$ é considerado o modelo de Taylor, onde tem-se campo de flutuações nulo no EVR, portanto: $\nabla^S \tilde{u}_{u(n+1)} = 0$, e a equação (6.37) fica da seguinte forma:

$$C_{n+1}^{ep(Taylor)} = \frac{1}{V_{\mu}} \int_{\Omega_{\mu}} \frac{\partial \sigma_{\mu}}{\partial \varepsilon_{\mu}} \Big|_{n+1} dV = \frac{1}{V_{\mu}} \int_{\Omega_{\mu}} C_{\mu(n+1)}^{ep} dV = \sum_{i=1}^{N_{cel}} \frac{V_i}{V_{Total}} C_{\mu(n+1)}^{ep} \quad (6.42)$$

Onde $C_{n+1}^{ep(Taylor)}$ representa a média volumétrica do tensor constitutivo incremental.

6.8 Algoritmo

Neste item será descrito o algoritmo desenvolvido pela professora Gabriela Rezende Fernandes, na Universidade Federal de Goiás – Regional de Catalão, para resolver o problema de equilíbrio do EVR e calcular a tensão e o tensor elasto-plástico homogeneizados.

Para um incremento n , o algoritmo para obter a tensão e o tensor constitutivo homogeneizado de uma microestrutura heterogênea, considerando fenômenos dissipativos, é:

1. São escritas duas equações algébricas no plano de deslocamentos para cada nó do EVR, para obter o Sistema de equações definido na equação (5.76);
2. A macro deformação ε é imposta ao contorno do EVR e o incremento de deslocamento com variação linear para os nós y do contorno externo são computados:
$$\{\Delta U_B^L\}_n = [\Delta \varepsilon]_n \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_y ;$$
3. O vetor $\{\Delta U_B^L\}$ é imposto ao EVR como condição de contorno, obtendo as incógnitas elásticas $\{\Delta L\} = \begin{Bmatrix} \Delta P_B \\ \Delta U_i \end{Bmatrix}_n^0$ definidas na equação (5.78);
4. Três equações algébricas das forças normais de tentativa são escritas no ponto central de cada célula, obtendo $\{\Delta K\}_n$ definida na equação (5.83). Então, a partir da lei de Hooke (equação 2.17), o incremento de deformação pode ser calculado para cada célula: $\{\Delta \varepsilon_\mu\}_n^0 = [C_N]^{-1} \{\Delta K\}_n ;$
5. Para verificar a (equação 6.5) o seguinte processo iterativo ($i \geq 0$) deve ser considerado para cada célula:
 - a) O incremento de tensões é calculado pela lei de Hooke: $\{\Delta \sigma_\mu\}_n^i = [C] \{\Delta \varepsilon_\mu\}_n^i ;$
 - b) A tensão elástica de tentativa é computada: $\{\sigma_\mu^e\}_n^i = \{\sigma_\mu\}_{n-1} + \{\Delta \sigma_\mu^e\}_n^i ;$
 - c) O modelo constitutivo é verificado, obtendo: $[C_\mu^{ep}]_n^i, \{\sigma_\mu\}_n^i$ e
$$\{\Delta \sigma_\mu\}_n^i = \{\sigma_\mu\}_n^i - \{\sigma_\mu\}_{n-1} ;$$
 - d) As forças de membrana são computadas: $\{N\}_n^i = t \{\sigma_\mu\}_n^i$ e a equação de equilíbrio (6.5) é checada, após a obtenção dessas forças para todas as células. Se a (equação 6.5) é satisfeita para $i = 0$ (caso de um EVR uniforme) ou para $i \geq 1$, seguir para o item 6; se ela não for satisfeita, o seguinte procedimento deve ser considerado para $i = i + 1$:
 - e) A matriz $[K]_n^{i-1}$ (equação 6.11) é atualizada;
 - f) A correção das flutuações dos deslocamentos $\{\tilde{\delta u}\}_n^i$ é obtida (equação 6.13);
 - g) O vetor da flutuação dos deslocamentos é atualizado: $\{\tilde{u}\}_n^i = \{\tilde{u}\}_n^{i-1} + \{\tilde{\delta u}\}_n^i ;$

h) Os incrementos de flutuação dos deslocamentos são atualizados:

$$\{\Delta \tilde{u}_\mu\}_n^i = \{\tilde{u}\}_n^i - \{\tilde{u}\}_{n-1};$$

i) O incremento de deformação é atualizado para cada célula:

$$\{\Delta \varepsilon_\mu\}_n^i = \{\Delta \varepsilon_\mu\}_n^0 + [B]_{cell} \{\Delta \tilde{u}\}_n^i;$$

j) Retornar ao passo a)

6. A tensão homogeneizada σ é computada, seguindo o procedimento:

a) O incremento de deslocamento nodal final ao longo do contorno externo é

$$\text{obtido: } \{\Delta U_B\}_n = \{\Delta U_B^L\}_n + \{\Delta \tilde{u}_B\}_n;$$

b) O incremento das forças de superfície ao longo do contorno $\{\Delta L_B\}_n$ (definido

na equação 5.79) é atualizado considerando $\{\Delta U_B\}_n$;

c) Calcular o incremento de forças normais plásticas: $\{\Delta N^p\}_n = [C_N] \{\Delta \varepsilon_\mu\}_n - \{\Delta N\}_n$

d) Os incrementos das forças ao longo do contorno são atualizados:

$$\{\Delta P_B\}_n = \{\Delta L_B\}_n + [R] \{\Delta N^p\}_n;$$

e) As forças finais são: $\{P_B\}_n = \{P_B\}_{n-1} + \{\Delta P_B\}_n$;

f) Multiplicando $\{P_B\}_n$ pelo comprimento de influência do elemento, o tensor das tensões homogeneizado pode ser calculado pela (equação 6.30)

7. O tensor constitutivo homogeneizado C^{ep} (equação 6.39) é obtido.

7 EXEMPLOS NUMÉRICOS

7.1 Introdução

A fim de mostrar que a formulação acima descrita representa de forma adequada o fenômeno dissipativo em microestruturas apresentando plasticidade, serão apresentados exemplos que tem como objetivo calcular os valores homogeneizados das tensões e do tensor constitutivo. Não serão realizadas análises em multi-escala de uma estrutura, apenas diferentes microestruturas que representam um material heterogêneo idealizado serão analisadas. Os valores homogeneizados encontrados são comparados com aqueles obtidos através da formulação feita pelo MEF por Fernandes *et al.* (2015a; b) a fim de validar a formulação aqui desenvolvida com o MEC. Note que no trabalho de Fernandes *et al.* (2015a; b) são utilizados elementos finitos triangulares, com aproximação linear para os deslocamentos, para discretizar o domínio do EVR. Assim, na comparação dos resultados adotam-se sempre a mesma malha para os dois modelos, já que no modelo proposto o domínio é discretizado por células triangulares, ou seja, as células têm o mesmo formato que os elementos finitos.

É importante ressaltar, que na análise em multi-escala, a resposta constitutiva do ponto do macro-contínuo não é definida por um modelo constitutivo fenomenológico, mas pela resposta homogeneizada do EVR que representa o ponto em questão, quando o EVR é sujeito à deformação do ponto do macro-contínuo. Como nesse trabalho, não serão feitas análises em multi-escala, o EVR será sujeito a uma deformação representativa, que será imposta ao mesmo em incrementos de deformação, a fim de simular o processo incremental-iterativo do macro-contínuo. Porém na análise em multi-escala, a deformação do macro-contínuo (referente a uma iteração qualquer de um incremento de carga do macro-contínuo) é imposta ao EVR de uma só vez.

Em todas as simulações foi considerado o estado plano de tensões em um regime de pequenas deformações. Os EVRs possuem geometria quadrada, com dimensões $L \times L$ e a espessura de $0,1L$, apesar de que o tamanho do EVR não influencia nos resultados numéricos. Diferentes volumes de inclusões ou vazios são analisados, a fim de mostrar como a resposta homogeneizada do EVR muda quando

inclusões ou vazios são considerados dentro da matriz. Além disso, para cada EVR quatro discretizações diferentes são consideradas, a fim de mostrar a convergência dos resultados com o refinamento da malha.

Em quase todos os exemplos, o vetor de tensão homogeneizada é calculado adotando-se condição de contorno de flutuações de deslocamento periódicas. Apenas para o EVR com cinco vazios será analisado o seu comportamento para as diferentes condições de contorno, com o intuito de observar como elas influenciam nos valores homogeneizados das tensões e do tensor constitutivo. Para checar a convergência do processo iterativo do EVR foi adotada um fator de tolerância de 10^{-6} .

Na maioria dos exemplos foi adotado o modelo elastoplástico de von Mises com encruamento linear para representar o comportamento da matriz, e a inclusão com comportamento elástico. Com exceção de um exemplo onde a inclusão também tem encruamento linear e de outro exemplo onde foi adotado o modelo elastoplástico perfeito para a matriz.

7.2 EVRs com diferentes volumes de inclusão

Nesse item será estudado como a resposta homogeneizada do EVR muda, de acordo com o volume (V_i) de inclusões elásticas inserido na matriz. Em três EVRs ($V_i = 10\%$, $V_i = 30\%$ e $V_i = 37\%$), a inclusão elástica será adotada no centro, mas no quarto EVR, com $V_i = 37\%$, o volume de inclusões será distribuído em 5 inclusões dispostas de forma aleatória. Para facilitar a visualização, as propriedades adotadas para a matriz e inclusões de todos os EVRs estão apresentadas no Quadro 1, onde o valor do módulo de encruamento K para a matriz é dado pela seguinte relação $K = 0,032 \times E$ (sendo E é o módulo de Young da matriz). Já o vetor das deformações impostas ao EVR (em 25 incrementos), como condição inicial de contorno, em todos os EVRs, é dado por: $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_{12}\} = \{-0,0015 \quad 0,0048 \quad 0\}$.

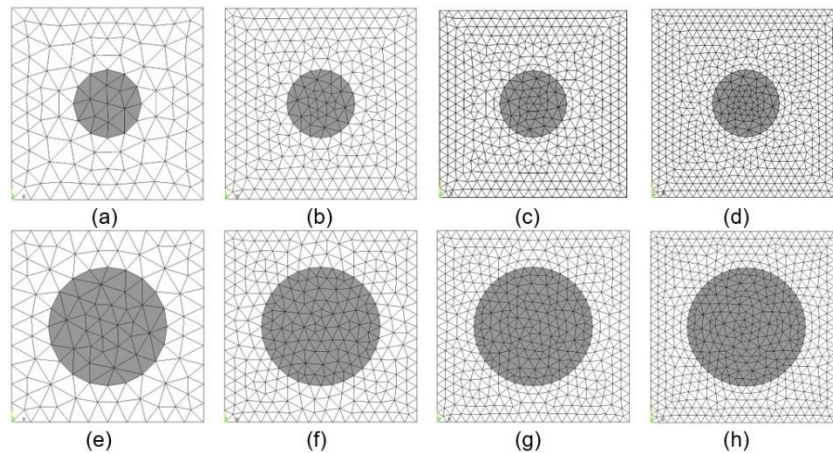
Quadro 1 - Dados dos exemplos numéricos

Condição de contorno	Flutuações periódicas
Módulo de Young da matriz	70 GPa
Coefficiente de Poisson da matriz	0,3
Modelo Constitutivo Adotado para a matriz	Elastoplástico de von Mises com encruamento linear
Tensão de escoamento da matriz	243 MPa
Módulo de encruamento da matriz	2,24 GPa
Módulo de Young da inclusão elástica	200 GPa
Coefficiente de poisson da inclusão	0,2

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Na Figura 15 estão representados os EVRs com volume de inclusão $V_i = 10\%$ e $V_i = 30\%$, onde para cada EVR, 4 discretizações são consideradas, sendo as malhas (a) a (d) referentes ao EVR com $V_i = 10\%$ e as malhas (e) a (h) referentes ao EVR com $V_i = 30\%$. A malha (a) possui 220 células e 131 nós (40 elementos de contorno e 12 de interface); a malha (b) possui 604 células e 335 nós (64 elementos de contorno e 20 de interface); a malha (c) possui 892 células e 487 nós (80 elementos de contorno e 24 de interface) e a malha (d) possui 1224 células e 659 nós (92 elementos de contorno e 28 de interface). Considerando agora $V_i = 30\%$, a malha (e) possui 204 células e 123 nós (40 elementos de contorno e 20 de interface); a malha (f) possui 566 células e 316 nós (64 elementos de contorno e 32 de interface); a malha (g) possui 886 células e 484 nós (80 elementos de contorno e 40 de interface); a malha (h) possui 1094 células e 594 nós (92 elementos de contorno e 44 de interface).

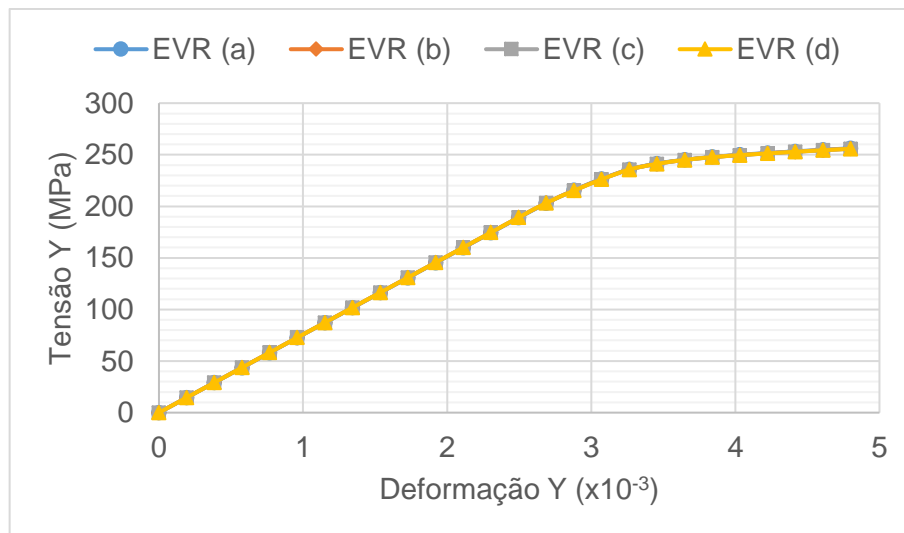
Figura 15 – Discretizações dos EVRs com volume de inclusão $V_i = 10\%$ ou $V_i = 30\%$



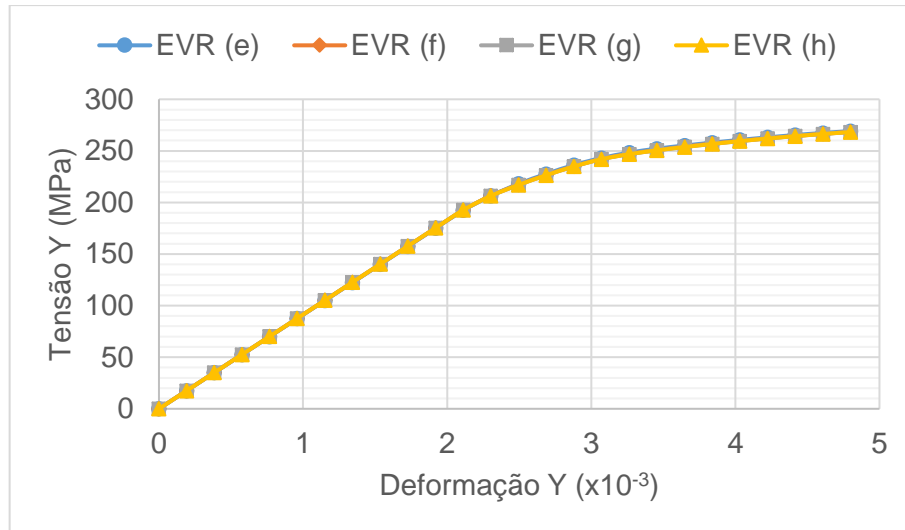
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Na Figura 16 e 17 têm-se a curva tensão homogeneizada x deformação para os EVRs com $V_i = 10\%$ e 30% , respectivamente. Pode-se observar que as curvas tensão x deformação estão sobrepostas, indicando que todas as 4 discretizações têm resultados muito próximos. Outro fator a ser notado é que quando se aumenta o volume de inclusão de $V_i = 10\%$ para $V_i = 30\%$, aumenta a resistência à deformação do EVR, o que leva a um maior valor para a tensão homogeneizada.

Figura 16 - Convergência dos resultados através do MEC ($V_i = 10\%$)



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 17 - Convergência dos resultados através do MEC ($V_i = 30\%$)

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Nesses exemplos os resultados obtidos pelo MEF foram muito similares ao MEC, como se pode notar na Tabela 1, onde estão apresentados os valores finais das tensões homogeneizadas em y, referente à deformação aplicada de 0,0048 em y. Todos os valores referentes ao EVR com $V_i = 10\%$ estão do lado esquerdo e do lado direito têm-se os valores do EVR com $V_i = 30\%$. A partir dos resultados apresentados, percebe-se que a diferença entre os dois métodos é muito pequena. É importante notar que como o volume de inclusão foi aumentado, os valores das tensões do lado direito ($V_i = 30\%$) são maiores que os apresentados no lado esquerdo ($V_i = 10\%$).

Tabela 1 - Tensões homogeneizadas para $V_i = 10\%$ e $V_i = 30\%$

Discretização EVR (Células)	MEC	MEF	Discretização EVR (Células)	MEC	MEF
	(MPa)	(MPa)		(MPa)	(MPa)
$V_i = 10\%$			$V_i = 30\%$		
220	256,26	256,29	204	269,23	269,29
604	255,94	256,04	566	268,42	268,54
892	255,80	255,85	886	268,31	268,35
1224	255,77	255,79	1094	268,25	268,26

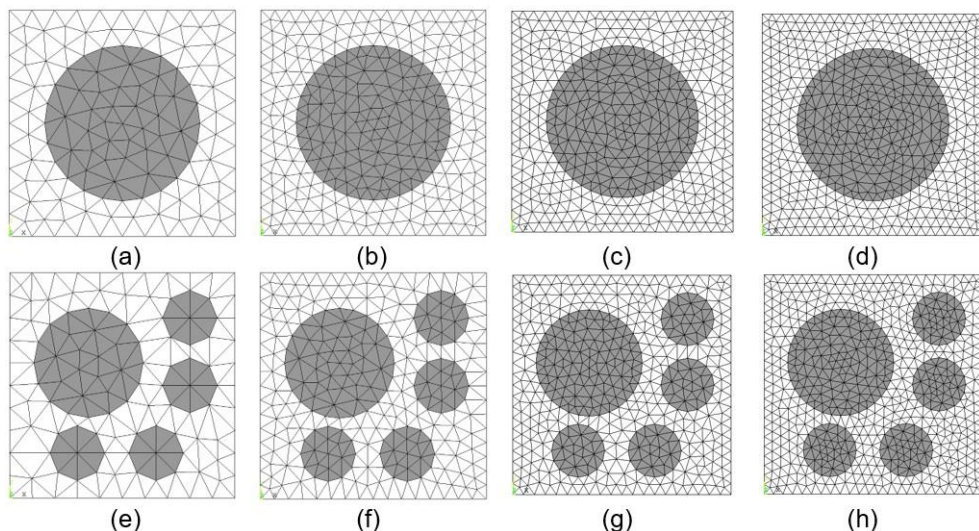
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Agora será analisado o exemplo com volume de inclusão $V_i = 37\%$, mas em distribuições diferentes, com a finalidade de entender como a distribuição das inclusões influencia no comportamento do EVR.

Na Figura 18 as malhas (a) a (d) são referentes ao EVR com inclusão central, já nas malhas (e) a (h) tem-se o caso de 5 inclusões em posições aleatórias. Para o EVR com inclusão central, tem-se os seguintes dados: a malha (a) possui 236 células e 139 nós (40 elementos de contorno e 24 de interface); a malha (b) possui 576 células e 321 nós (64 elementos de contorno e 36 de interface); a malha (c) possui 874 células e 478 nós (80 elementos de contorno e 44 de interface); a malha (d) possui 1084 células e 589 nós (92 elementos de contorno e 48 de interface).

Analogamente, para o EVR com 5 inclusões em posições aleatórias, tem-se: a malha (e) possui 204 células e 123 nós (40 elementos de contorno e 48 de interface); a malha (f) possui 488 células e 277 nós (64 elementos de contorno e 72 de interface); a malha (g) possui 880 células e 481 nós (80 elementos de contorno e 96 de interface); a malha (h) possui 1222 células e 658 nós (92 elementos de contorno e 116 de interface).

Figura 18 – Discretizações para os EVRs com volume de inclusão $V_i = 37\%$, considerando uma inclusão central ou 5 inclusões aleatórias

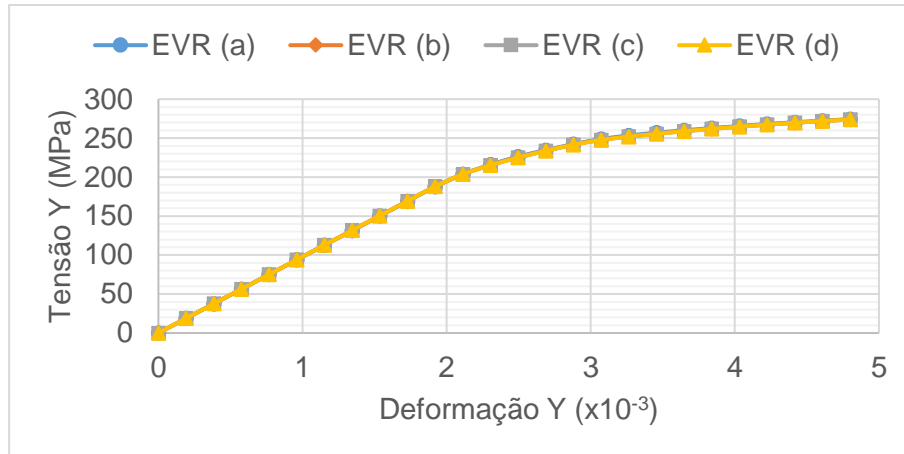


Fonte: Elaboração do próprio autor.

Nas Figuras 19 e 20 tem-se a curva tensão homogeneizada x deformação, respectivamente, para o caso com inclusão central e para o caso das 5 inclusões.

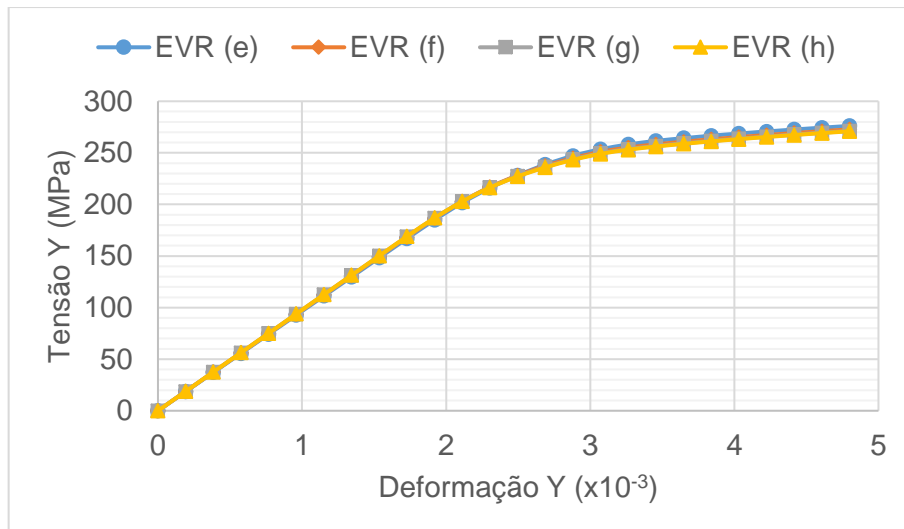
Fazendo uma comparação entre a Figura 19 e a Figura 20 percebe-se que no caso da inclusão central teve uma coincidência entre as curvas. No caso das 5 inclusões, os resultados também foram muito próximos, apesar de apresentarem uma pequena variação.

Figura 19 - Convergência dos resultados através do MEC ($V_i = 37\%$)



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 20 – Convergência dos resultados através do MEC (5 inclusões $V_i = 37\%$)



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Com o objetivo de observar melhor a convergência do MEC e comparar seus resultados com o MEF, foi criada a Tabela 2, onde estão os valores das tensões homogeneizadas finais para cada malha. Observe na tabela relativa à inclusão central, que na discretização do EVR em 874 células, o resultado da tensão coincidiu entre os dois métodos. Note também a proximidade dos valores entre o

EVR com discretização mais pobre para o mais discretizado. Já para o EVR com 5 inclusões obteve-se uma diferença maior, tanto para o MEC como para o MEF, sendo a percentagem entre a malha (e) e (h) de 1,91% para o MEC, e entre a malha (e) e (h) de 2,04% para o MEF. Note que os resultados encontrados com o MEC foram próximos do MEF, principalmente quando a malha é mais discretizada. Outro dado a ser observado é que as tensões homogeneizadas não mudam muito em função do tipo de distribuição das inclusões. A diferença entre a tensão final entre a malha (d) e a malha (h) é de 1,10% e 1,08%, para o MEC e MEF, respectivamente.

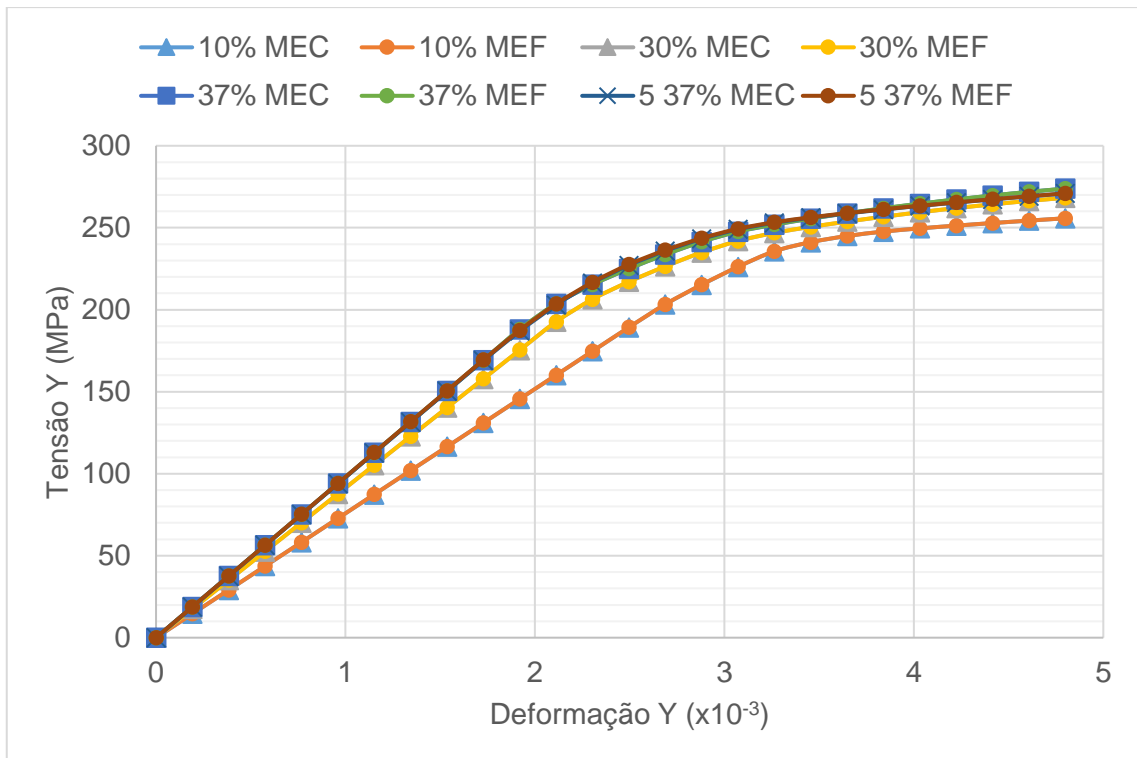
Tabela 2 - Valor da tensão homogeneizada para o EVR com $V_i=37\%$, considerando inclusão central ou 5 inclusões aleatórias

Discretização EVR (Células) Inclusão central	MEC	MEF	Discretização EVR (Células) 5 inclusões	MEC	MEF
	(MPa)	(MPa)		(MPa)	(MPa)
236	274,37	274,48	204	276,09	276,49
576	274,01	274,02	488	272,75	273,10
874	273,94	273,92	880	271,26	271,39
1084	273,89	273,89	1222	270,91	270,96

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Para representar graficamente a diferença entre as tensões homogeneizadas em função do volume da inclusão e comparar os resultados entre o MEC e MEF, foi criada a Figura 21. Nessa figura estão os valores das tensões homogeneizadas para os EVRs mais discretizados de cada caso. Tem-se o EVR (d) com $V_i = 10\%$ e EVR (h) com $V_i = 30\%$, ambos da Figura 15; e também o EVR (d) com $V_i = 37\%$ (central) e EVR (h) com 5 inclusões totalizando $V_i = 37\%$ (5 37%), ambos da Figura 18. Observe a sobreposição das curvas MEC e MEF, representando a similaridade dos resultados, e que a tensão homogeneizada aumenta conforme o crescimento do volume de inclusão.

Figura 21 - Tensão homogeneizada para os EVRs mais discretizados



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Para finalizar as comparações da convergência, estão apresentados na Tabela 3 os valores finais do tensor constitutivo homogeneizado para o MEC e MEF. Esses dados são referentes ao EVR mais discretizado (1222 células) com 5 inclusões, totalizando 37% de volume de inclusão. Analisando os resultados, percebe-se a proximidade entre os dois métodos no valor do tensor constitutivo.

Tabela 3 - Tensor constitutivo homogeneizado para o EVR mais discretizado (5 inclusões – 37%)

Flutuações periódicas (MEC)	Flutuações periódicas (MEF)
Tensor constitutivo (GPa)	Tensor constitutivo (GPa)
$\begin{bmatrix} 88,932 & 33,820 & -0,4803 \\ 33,820 & 19,554 & 0,0968 \\ -0,4803 & 0,0968 & 31,422 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 89,153 & 33,828 & -0,4817 \\ 33,828 & 19,426 & 0,1269 \\ -0,4817 & 0,1269 & 31,560 \end{bmatrix}$

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Por fim, comparou-se o tempo de processamento entre o MEC e MEF para a malha (g), obtendo $t_{MEC} / t_{MEF} = 0,55$, onde t_{MEC} é definido como o tempo necessário para resolver o processo iterativo do EVR pela modelagem proposta e t_{MEF} é o tempo para resolver este processo pelo modelo de elementos finitos.

7.3 EVRs com diferentes volumes de vazios

Nesse item foi considerado um conjunto de RVEs com um vazio ou vários vazios definidos dentro da matriz para modelar o comportamento de materiais porosos. Nos exemplos será estudado como o volume de vazios (V_v) influencia no comportamento do EVR. O processo é análogo aos exemplos com inclusão. Tem-se 4 tipos de EVR: 10% de vazios, 30% de vazios, 37% de vazios (vazio central) e 5 vazios dispostos em posições aleatórias, somando $V_v = 37\%$. No Quadro 2 estão todos os dados utilizados nesse item. Os dados aplicados nesse exemplo são os mesmos do Exemplo 7.1, a diferença é a ausência das inclusões, como mostra o Quadro 2. Lembrando que o vetor das deformações impostas aos EVRs, como condição inicial de contorno, é dado por:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_{12}\} = \{-0,0015 \quad 0,0048 \quad 0,0006\}.$$

Quadro 2 – Dados para os EVRs com vazios

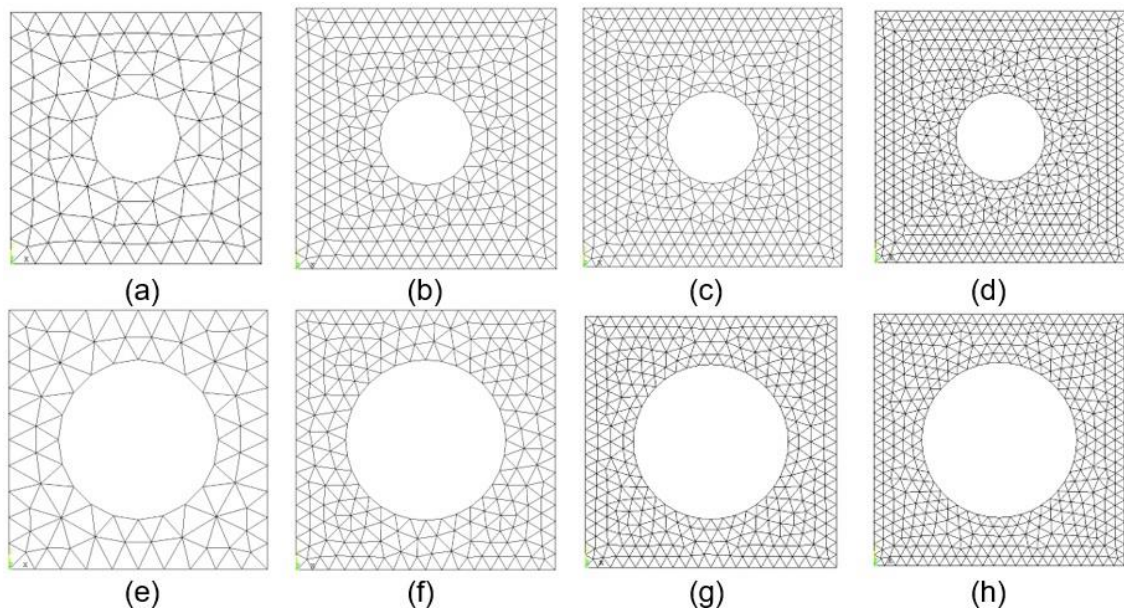
Dimensões do EVR	LxLx0,1L
Condição de contorno	Flutuações periódicas
Fator de tolerância	10^{-6}
Número de incrementos	25
Módulo de Young da matriz	70 GPa
Coefficiente de poisson da matriz	0,2
Modelo Adotado para a Matriz	Elastoplástico de Von Mises com encruamento linear
Tensão de escoamento da matriz	243 MPa
Módulo de encruamento da matriz	2,24 GPa

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Primeiramente são analisados os EVRs com $V_v = 10\%$ e $V_v = 30\%$. Na Figura 22 são apresentados esses EVRs, discretizados de 4 formas diferentes, sendo as malhas (a) a (d) referentes ao EVR com $V_v = 10\%$, que tem os seguintes dados de discretização: a malha (a) possui 196 células e 124 nós (40 elementos de contorno e 12 de interface); a malha (b) possui 540 células e 312 nós (64 elementos de contorno e 20 de interface); a malha (c) possui 808 células e 456 nós (80 elementos de contorno e 24 de interface) e a malha (d) possui 1098 células e 609 nós (92 elementos de contorno e 28 de interface).

As malhas (e) a (h) são referentes ao EVR com $V_v = 30\%$, onde: a malha (e) possui 140 células e 100 nós (40 elementos de contorno e 20 de interface); a malha (f) possui 384 células e 240 nós (64 elementos de contorno e 32 de interface); a malha (g) possui 616 células e 368 nós (80 elementos de contorno e 40 de interface) e a malha (h) possui 776 células e 456 nós (92 elementos de contorno e 44 de interface).

Figura 22 - EVRs com volume de vazios $V_v = 10\%$ ou $V_v = 30\%$

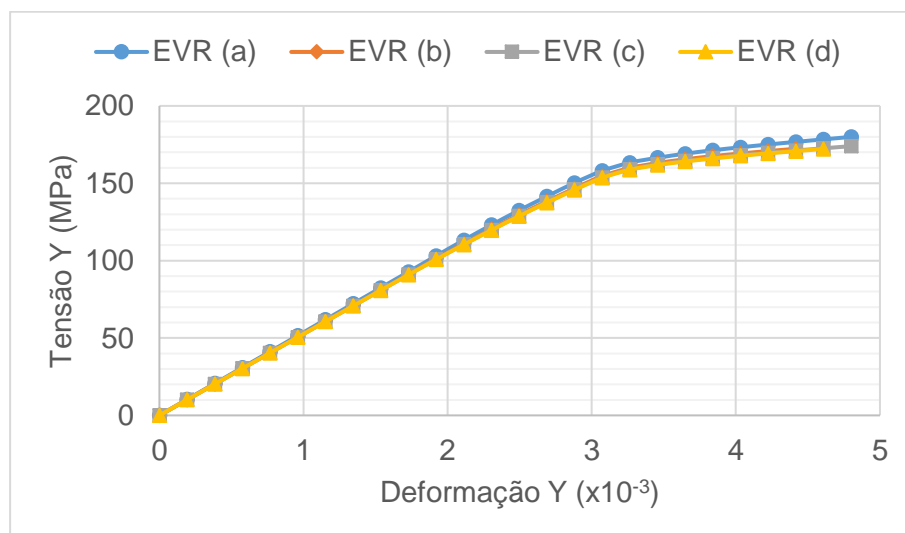


Fonte: Elaboração do próprio autor.

Nas Figuras 23 e 24 estão apresentadas as curvas tensão homogeneizada x deformação para os EVRs com 10% e 30% de volume de vazios, respectivamente. É importante notar o quanto a tensão \bar{Y} diminuiu ao se comparar a Figura 23 com a

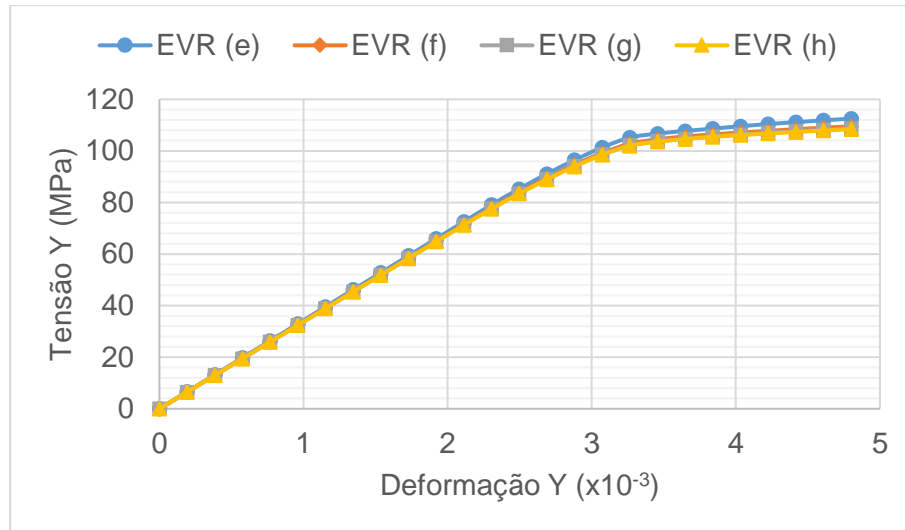
Figura 16. Isso foi devido a substituição de uma inclusão elástica por um vazio, diminuindo a rigidez do EVR. Ainda comparando as Figuras 16 e 23, pode-se reparar o salto de tensão que acontece entre os EVRs (a) e (b). No caso de inclusão o EVR (a) tem resultados próximos dos EVRs (b), (c) e (d). Já no caso de vazios, a discretização mais pobre (EVR (a)) tem resultados de tensão homogeneizada um pouco diferente das outras discretizações. Porém, os resultados dos EVRs (b), (c) e (d), são muito próximos, mostrando a convergência dos resultados. É importante notar que o EVR (d) alcança uma tensão limite um pouco antes de toda a deformação ser aplicada. Comparando as Figuras 23 e 24 é nítida a diferença entre as tensões homogeneizadas, devido ao aumento do volume de vazio, diminuindo a rigidez do EVR.

Figura 23 – Convergência dos resultados através do MEC ($V_v = 10\%$)



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 24 - Convergência dos resultados através do MEC ($V_v = 30\%$)



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Para apresentar as tensões homogeneizadas do EVRs com $V_v = 10\%$ e $V_v = 30\%$, foi criada a Tabela 4, onde se tem os valores das tensões homogeneizadas para as 4 discretizações. Como não foi possível obter a tensão homogeneizada final para os EVRs (b) e (d), os valores de tensão homogeneizada apresentados na Tabela 5 são os resultados referentes à deformação de 0,00422.

No lado direito da Tabela 4, estão os valores das tensões homogeneizadas finais referentes aos EVR com $V_v = 30\%$. A partir desses dados pode-se verificar a convergência do método, que não é tão rápida, sendo apenas os valores referidos as duas malhas mais discretizadas bastante semelhantes. Contudo, os valores encontrados para a modelagem pelo MEC se comparam muito bem com a modelagem do MEF.

Tabela 4 - Tensões homogeneizadas para os EVRs com $V_v = 10\%$ e $V_v = 30\%$

Discretização EVR (Células)	MEC	MEF	Discretização EVR (Células)	MEC	MEF
	(MPa)	(MPa)		(MPa)	(MPa)
$V_v = 10\%$			$V_v = 30\%$		
196	175,05	173,11	140	112,50	110,21
540	170,80	170,11	384	109,55	108,85
808	169,67	169,55	616	108,66	108,30
1098	169,29	169,28	776	108,41	108,18

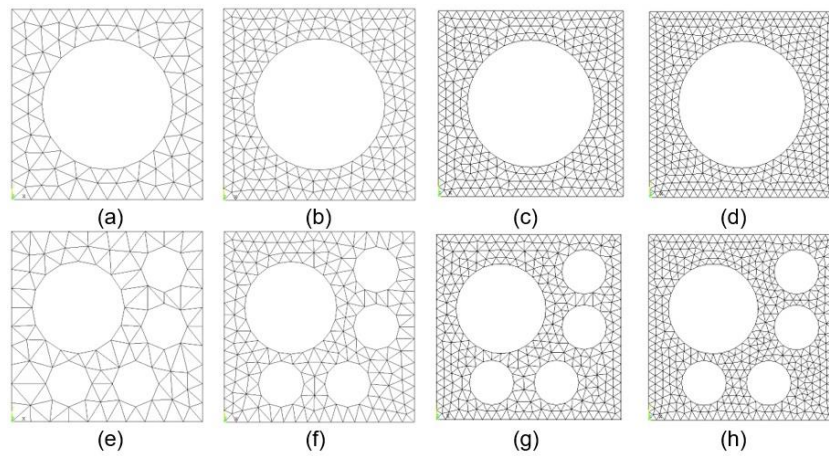
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Considere agora os EVRs apresentados na Figura 25. Com o objetivo de observar como a distribuição de vazios influencia no comportamento do EVR, foi adotado um EVR com vazio central ($V_v = 37\%$) e outro com 5 vazios distribuídos de forma aleatória e um volume total de vazios de 37%.

As malhas (a) a (d) são referentes ao EVR com vazio central, sendo que: a malha (a) possui 152 células e 108 nós (40 elementos de contorno e 24 de interface); a malha (b) possui 356 células e 228 nós (64 elementos de contorno e 36 de interface); a malha (c) possui 556 células e 340 nós (80 elementos de contorno e 44 de interface) e a malha (d) possui 690 células e 415 nós (92 elementos de contorno e 48 de interface).

As malhas (e) a (h) são referentes ao EVR com 5 vazios distribuídos de forma aleatória, onde os dados de cada malha são: a malha (e) possui 134 células e 107 nós (40 elementos de contorno e 48 de interface); a malha (f) possui 308 células e 218 nós (64 elementos de contorno e 72 de interface); a malha (g) possui 546 células e 357 nós (80 elementos de contorno e 96 de interface) e a malha (h) possui 746 células e 473 nós (92 elementos de contorno e 116 de interface).

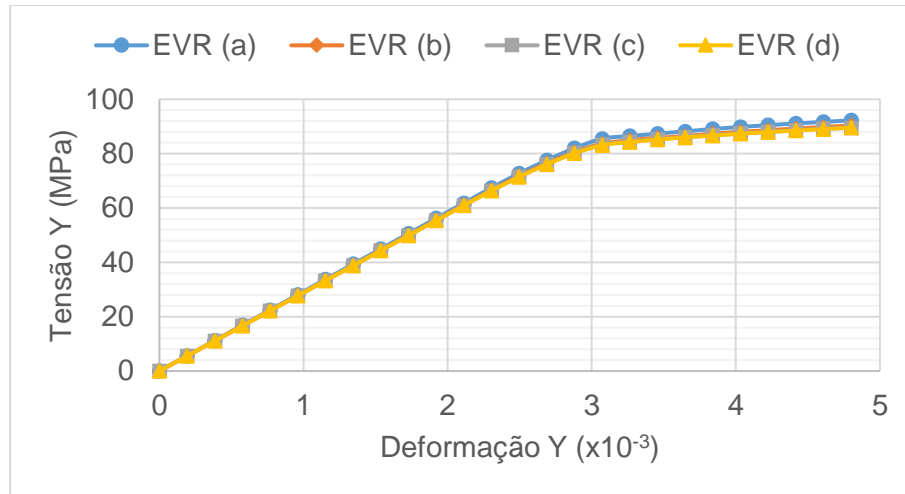
Figura 25 - Discretizações para os EVRs com volume de vazios $V_v = 37\%$, considerando um vazio central ou 5 vazios aleatórios



Fonte: Elaboração do próprio autor.

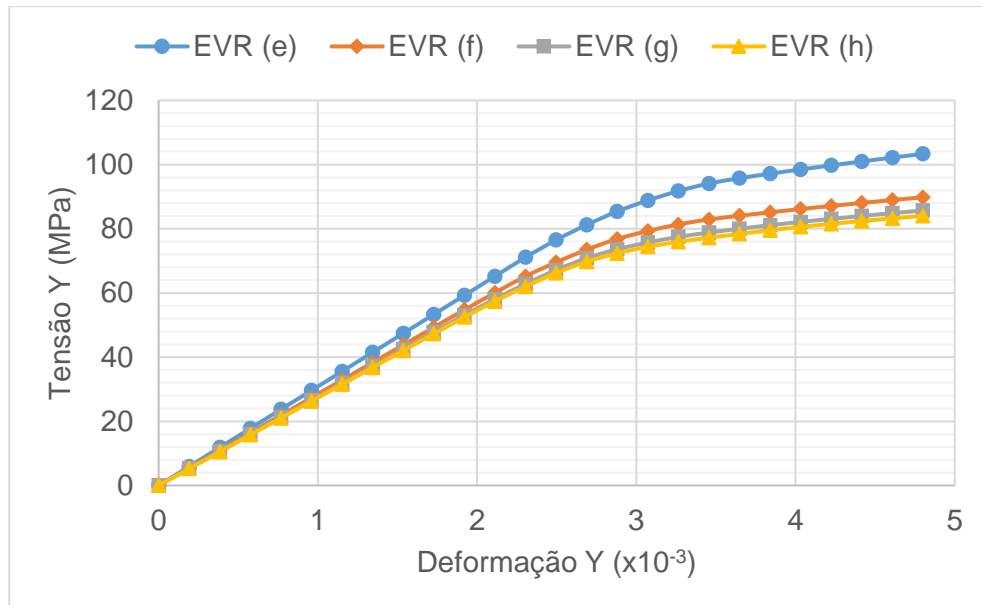
Os gráficos que representam o comportamento mecânico do EVR com vazio central e o EVR com 5 vazios estão apresentados nas Figuras 26 e 27, respectivamente. Comparando-se os resultados àqueles referentes aos EVRs representados na Figura 22 observa-se que pelo aumento do volume de vazios o EVR fica menos rígido e com isso as tensões homogeneizadas são menores. Com o vazio centrado, apenas a malha (a) apresenta resultados um pouco diferentes da malha mais refinada (d) (ver figura 26). Analisando o EVR com 5 vazios (Figura 27), percebe-se que a malha (e) menos refinada apresenta resultados ruins e a malha (f) ainda apresenta diferenças significativas com relação à malha mais refinada, porém as duas malhas mais refinadas apresentam valores muito próximos.

Figura 26 - Convergência dos resultados através do MEC ($V_v = 37\%$)



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 27 - Convergência dos resultados através do MEC (5 vazios $V_v = 37\%$)



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Na Tabela 5 estão valores das tensões homogeneizadas para cada malha apresentada na Figura 25, considerando a modelagem em MEC e MEF. Observe uma diferença grande entre tensões da malha com 134 células para a malha de 308 células (5 vazios), mostrando que uma malha pobre não gera resultados satisfatórios em um EVR com vazios distribuídos. Os valores gerados pela modelagem do MEC são próximos do MEF, mas isso se torna mais evidente com o aumento da discretização. Já, ao se comparar os dados da Tabela 2 com a Tabela 5, percebe-se como a tensão homogeneizada diminuiu devido à substituição da inclusão por vazio.

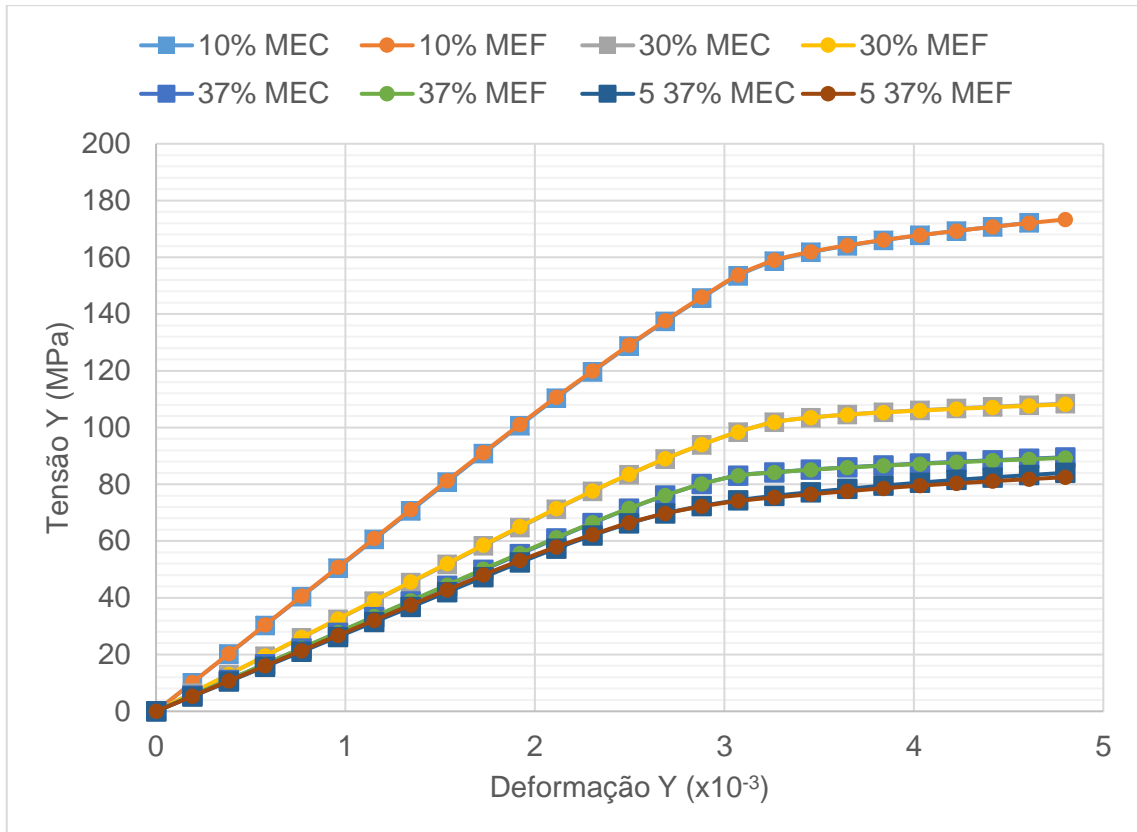
Tabela 5 - Valor da tensão homogeneizada para os EVRs com $V_v=37\%$

Discretização EVR (Células)	MEC	MEF	Discretização EVR (Células)	MEC	MEF
	(MPa)	(MPa)		(MPa)	(MPa)
Vazio central			5 vazios		
152	92,24	90,93	134	103,33	93,43
356	90,36	89,87	308	89,81	85,86
556	89,49	89,42	546	85,69	83,70
690	89,54	89,31	746	84,03	82,51

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Na Figura 28 são apresentadas as tensões obtidas na direção Y, para a malha mais discretizada dos 4 EVRs com volume de vazios. Tem-se o EVR (d) com $V_v = 10\%$ e EVR (h) com $V_v = 30\%$, ambos da Figura 22; e também o EVR (d) com $V_v = 37\%$ (central) e EVR (h) com 5 vazios totalizando $V_v = 37\%$ (5 37%), ambos da Figura 25. Observe que as tensões homogeneizadas mudam muito em função do volume de vazios adotado e, comparando a disposição do volume de vazios a mudança também é grande. O aumento de volume de vazios de $V_v = 10\%$ para $V_v = 30\%$ diminui a tensão em Y na ordem de 37%. Já, a divisão do $V_v = 37\%$ em 5 vazios com a totalidade de volume de 37%, diminui a tensão em Y em 6,15% no MEC e 7,61% no MEF; estes são valores modestos quando se fez a mesma comparação no caso das inclusões. É importante notar na figura (28) a ótima concordância que se tem nos resultados do MEC e MEF.

Figura 28 - Tensão homogeneizada para os EVRs mais discretizados



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Na tabela 6 tem-se o valor do tensor constitutivo homogeneizado para a modelagem no MEC e MEF. A condição de contorno imposta ao EVR é em termos de flutuação dos deslocamentos. Devido ao fato de ser considerado um fenômeno dissipativo no EVR, como plasticidade, os tensores constitutivos nas células obtidos com o MEC e o MEF são semelhantes, mas não exatamente iguais. Isso se deve ao fato de que as correções de flutuações que são calculadas no processo iterativo com o MEC e o MEF não são exatamente iguais, o que geram correções de incrementos de deformações um pouco diferentes e, conseqüentemente, chegam-se a tensores constitutivos nas células também um pouco diferentes. Já, quando é considerado o comportamento elástico dos materiais do EVR, os tensores constitutivos são idênticos para o MEC e MEF.

Com relação ao tempo de processamento, foi feita a mesma comparação entre MEC e MEF. Dessa vez foi analisada a malha (g) da Figura 25. A relação de tempo necessária para resolver o processo iterativo do EVR entre os dois métodos foi

$t_{MEC} / t_{MEF} = 0,46$. Ou seja, o MEC tem um custo computacional menor que o MEF quando a comparação é feita entre EVRs com vazios ou inclusões.

Tabela 6 - Tensor constitutivo homogeneizado para o EVR mais discretizado (5 vazios – 37%)

Flutuação periódicas (MEC)	Flutuações periódicas (MEF)
Tensor constitutivo (GPa)	Tensor constitutivo (GPa)
$\begin{bmatrix} 22,256 & 2,8743 & -0,8230 \\ 2,8743 & 4,6020 & -1,0333 \\ -0,8230 & -1,0333 & 4,4922 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 22,191 & 2,9705 & -0,9432 \\ 2,9705 & 4,5874 & -1,0136 \\ -0,9432 & -1,0136 & 4,5293 \end{bmatrix}$

Fonte: Elaboração do próprio autor.

7.4 Diferentes comportamentos do EVR com 5 inclusões

Nesse item, considerando o EVR com 5 inclusões, diferentes modelos constitutivos serão adotados para a matriz e as inclusões, a fim de verificar como isso influencia na resposta constitutiva homogeneizada do EVR. Para cada caso, será analisada a convergência dos resultados através do MEC da malha menos discretizada (e) até a malha mais discretizada (h) da Figura 18. Primeiramente foi adotado o modelo elasto-plástico perfeito para a matriz, mas a inclusão permanece com comportamento elástico-linear. O vetor das deformações impostas ao EVR, como condição inicial de contorno, é dado por: $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_{12}\} = \{-0,0015 \quad 0,0048 \quad 0\}$. Abaixo está o Quadro 3 que apresenta os principais dados do EVR.

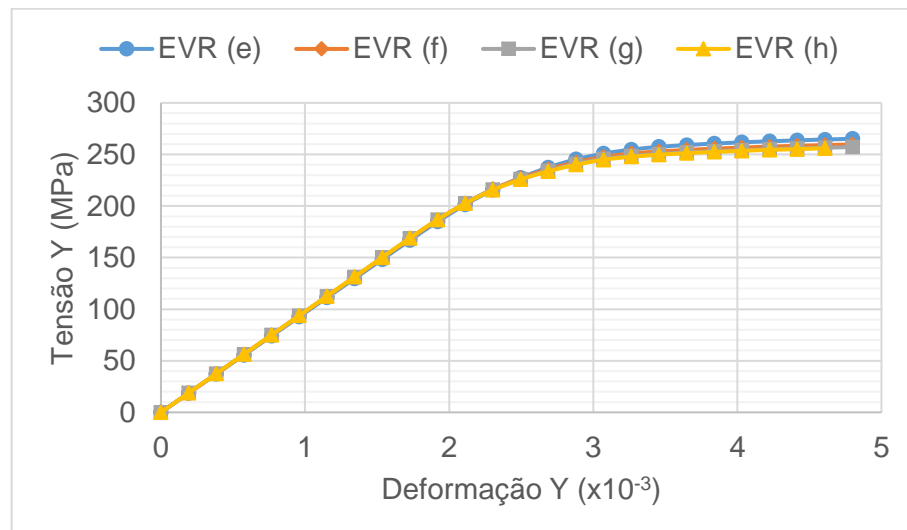
Quadro 3 – EVR com 5 inclusões e matriz no regime elasto-plástico perfeito

Condição de contorno	Flutuações periódicas
Módulo de Young da matriz	70 GPa
Coefficiente de poisson da matriz	0,3
Modelo Adotado para a Matriz	Elasto-plástico de perfeito
Tensão de escoamento da matriz	243 MPa
Módulo de Young da inclusão elástica	200 GPa
Coefficiente de poisson da inclusão	0,2

Fonte: Elaboração do próprio autor.

A curva tensão homogeneizada x deformação em Y para as 4 malhas, está na Figura 29. Perceba que a malha menos refinada (e) já apresenta resultados próximos à malha mais refinada, sendo os resultados das malhas (f), (g) e (h) muito próximos, mostrando a convergência, ou seja, a diferença de tensões é muito pequena com o aumento da discretização.

Figura 29 - Matriz elasto-plástica perfeita e inclusão elástica



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Nesse exemplo o equilíbrio do EVR foi alcançado para todos os incrementos de deformação, mas o mesmo não ocorreu quando a modelagem foi feita pelo MEF, que convergiu até a deformação em y de 0,00442. Para comparar o resultado

encontrado com os dois métodos foi criada a Tabela 7, onde tem-se a tensão em y do 22º incremento, referente à deformação de 0,00442. Note a semelhança dos resultados entre o MEC e MEF, desde a discretização mais pobre até a malha mais discretizada.

Tabela 7 - Valor da tensão homogeneizada para os EVRs com $V_i = 37\%$

Discretização EVR (Células) 5 inclusões	MEC (MPa)	MEF (MPa)
204	263,68	263,52
488	258,40	258,26
880	255,81	255,62
1222	255,18	255,13

Fonte: Elaboração do próprio autor.

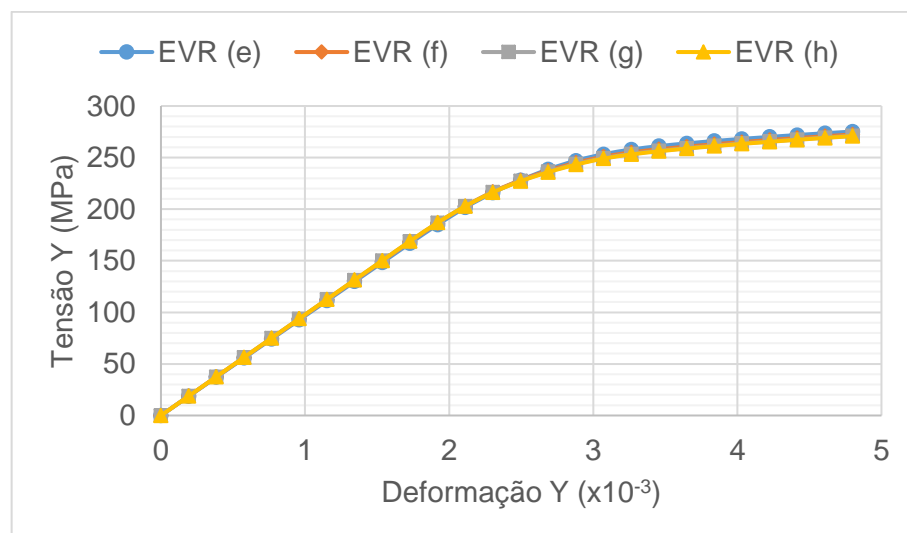
No segundo exemplo o comportamento do EVR com 5 inclusões é governado pelo modelo elasto-plástico de von Mises com encruamento linear, adotado para a matriz e inclusão. Os dados desse exemplo estão apresentados no Quadro 4. Afim de verificar a convergência dos resultados foi criada a Figura 30.

Quadro 4 – Matriz e inclusão com encruamento linear

Condição de contorno	Flutuações periódicas
Módulo de Young da matriz	70 GPa
Coefficiente de poisson da matriz	0,3
Modelo Adotado para a Matriz	Elasto-plástico de von Mises com encruamento linear
Tensão de escoamento da matriz	243 MPa
Módulo de encruamento da matriz	2,24 GPa
Módulo de Young da inclusão	200 GPa
Coefficiente de poisson da inclusão	0,2
Modelo Adotado para a inclusão	Elasto-plástico de von Mises com encruamento linear
Tensão de escoamento da inclusão	350 MPa
Módulo de encruamento da inclusão	6,4 GPa

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 30 - Matriz e inclusão com encruamento



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Para comparar os dados da modelagem feita pelo MEC com o MEF, foi criada a Tabela 8. Como não foi possível obter as tensões homogeneizadas finais com o MEF os dados da tabela são referentes ao 20º incremento, referente à deformação

de 0,00384. Contudo, o resultado entre os dois métodos foi próximo, independente da discretização.

Tabela 8 – Tensões homogeneizadas para matriz e inclusão com encruamento

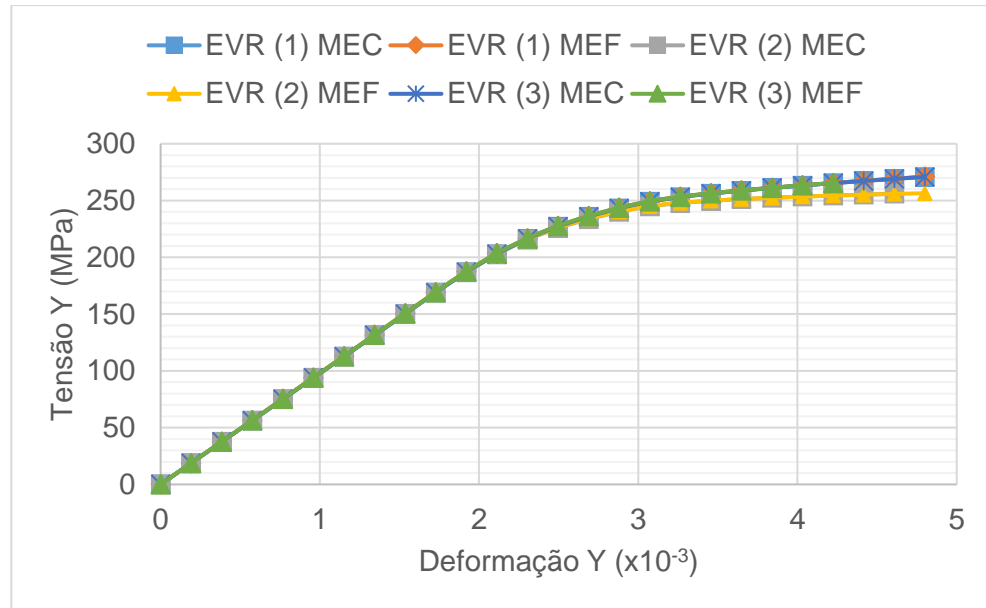
Discretização EVR (Células) 5 inclusões	linear	
	MEC (MPa)	MEF (MPa)
204	266,06	265,94
488	262,93	263,36
880	261,45	261,76
1222	261,09	261,24

Fonte: Elaboração do próprio autor.

A Figura 31 tem as curvas tensão x deformação da malha mais discretizadas do EVR com 5 inclusões. Essas curvas são as apresentadas nas Figuras 20, 29 e 30 e para comparar os resultados foram adicionadas as curvas obtidas pela modelagem no MEF. Para facilitar o entendimento, os EVRs ficaram com a seguinte nomenclatura e definição: no EVR (1) foi adotado o modelo elastoplástico de von Mises com encruamento linear para representar o comportamento da matriz, e a inclusão com comportamento elástico (Figura 20); no EVR (2) tem-se adotado o modelo elasto-plástico perfeito para a matriz, mas a inclusão permanece com comportamento elástico-linear (Figura 29); finalmente, no EVR (3) a matriz e inclusão são governadas pelo modelo elasto-plástico de von Mises com encruamento linear (Figura 30).

Através dessa figura ficou nítida a diferença de tensões quando se adota o comportamento elasto-plástico perfeito para a matriz e também a proximidade dos valores entre o EVR com inclusão elástica e o EVR com encruamento linear.

Figura 31 – Tensões homogeneizadas para os EVRs mais discretizados



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Um ponto a ser observado é que nos exemplos com inclusão a diferença entre a malha menos refinada para a malha mais refinada é menor do que em exemplos com vazios.

7.5 Diferente comportamento do EVR com 5 vazios

Fazendo-se uma análise do EVR com 5 vazios, (ver malhas (e) até (h) da Figura 25), considere agora o modelo elasto-plástico perfeito adotado para a matriz. Analogamente ao exemplo 7.4, o que se espera é que o valor das tensões caia devido a menor rigidez da matriz. Para visualizar melhor os dados do exemplo, foi criado o Quadro 6. O vetor das deformações impostas ao EVR é mesmo que foi adotado para verificar a convergência dos EVRs com diferentes volumes de vazios:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_{12}\} = \{-0,0015 \quad 0,0048 \quad 0,0006\}.$$

Quadro 5 - EVR com 5 vazios e matriz no regime elasto-plástico perfeito

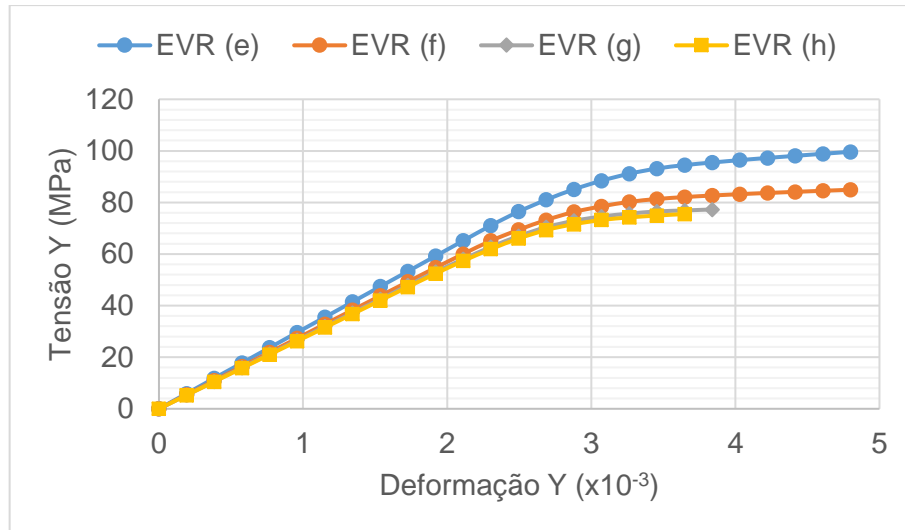
Condição de contorno	Flutuações periódicas
Módulo de Young da matriz	70 GPa
Coefficiente de poisson da matriz	0,2
Modelo Adotado para a Matriz	Elasto-plástico perfeito
Tensão de escoamento da matriz	243 MPa
Módulo de encruamento da matriz	2,24 GPa

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Na Figura 32 está a curva tensão x deformação para as 4 malhas diferentes da Figura 25. Como já foi observado nos exemplos com vazios, a malha menos discretizada tem valores divergentes das demais. Note que para as malhas (g) e (h) não foi possível obter todos os pontos e que as curvas estão praticamente horizontais, significando que o limite de tensão foi alcançado.

Para comparar o resultado das tensões homogeneizadas entre o MEC e MEF foi criada a Tabela 9. Analisando-se as tensões obtidas pelo MEC na malha (g), percebe-se que a tensão final está no 20º incremento, referente a deformação de 0,00384. O mesmo não ocorreu para o MEF, onde a tensão final obtida está no 16º incremento, referente à deformação de 0,00307. Em razão disso, a Tabela 9 está com todas as tensões em função da deformação de 0,00307, afim de comparar os resultados entre os dois métodos.

Figura 32 – EVR com 5 vazios e matriz elasto-plástica perfeita



Fonte: Elaboração do próprio autor.

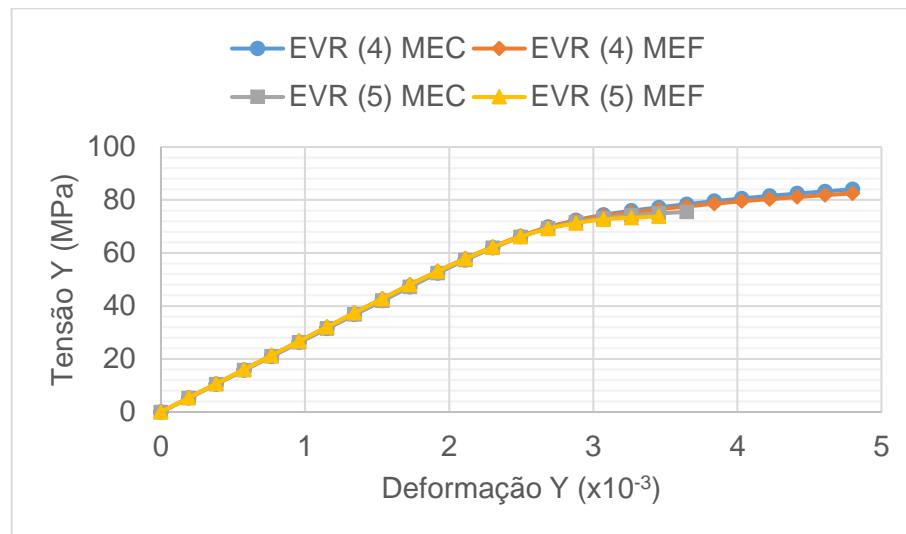
Tabela 9 - Tensões homogeneizadas para matriz elasto-plástica perfeita

Discretização EVR (Células)	MEC (MPa)	MEF (MPa)
5 inclusões		
134	88,44	84,98
308	78,49	77,02
546	74,55	73,38
746	73,20	72,66

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Na Figura 33 estão as curvas tensão x deformação para o caso em que a matriz é governada pela modelo Elastoplástico de Von Mises com encruamento linear (EVR 4), e também para o caso do modelo elasto-plástico perfeito (EVR 5). Esses resultados são referentes a malha mais discretizada da Figura 27 e 32, com o acréscimo dos resultados obtidos na modelagem MEF. A partir do gráfico foi possível perceber a diferença entre as tensões entre o EVR (4) e EVR (5), que em consequência da rigidez menor do EVR (5), observada quando o estado de plastificação é mais intenso, resultou em uma resistência menor do mesmo, ou seja, apresentou tensões finais abaixo do EVR (4).

Figura 33 - Tensões homogeneizadas para os EVRs mais discretizados



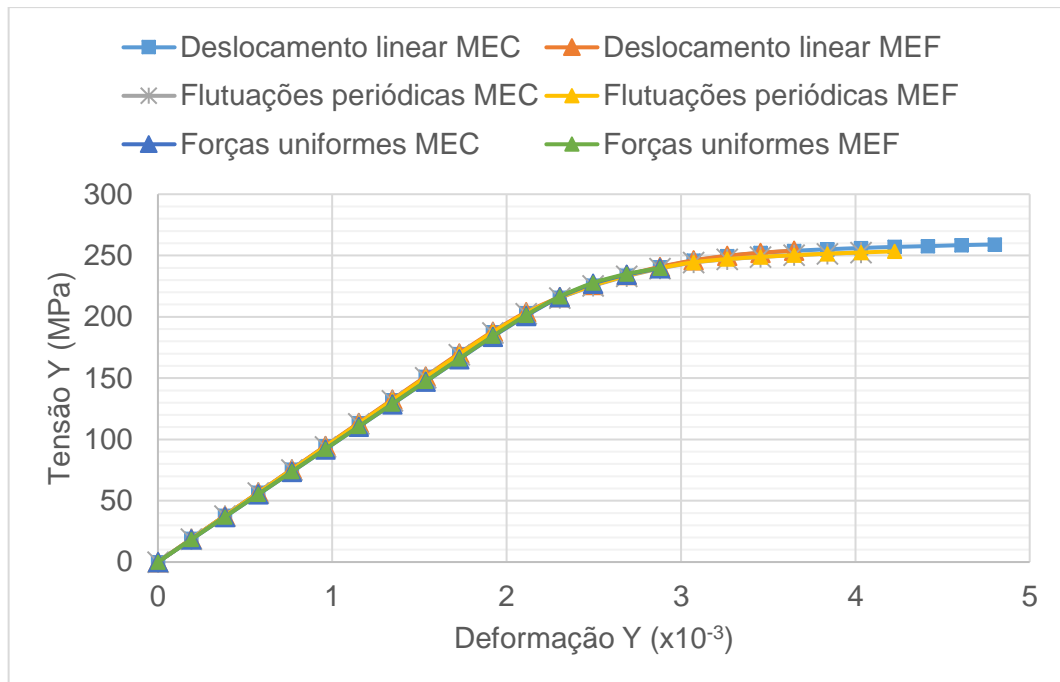
Fonte: Elaboração do próprio autor.

7.6 Comportamento do EVR de acordo com as Condições de Contorno em Termos de Flutuação dos Deslocamentos

Nesse item foi analisado como as diferentes condições de contorno (ver capítulo 6.5) influenciam no comportamento do EVR com 5 inclusões, onde é adotado o modelo elasto-plástico perfeito para a matriz, mas a inclusão tem o comportamento elástico-linear. As propriedades dos materiais desse EVR já estão apresentadas no Quadro 3, com a diferença que as condições de contorno em termos das flutuações dos deslocamentos vão variar entre: deslocamentos lineares no contorno do EVR, flutuações de deslocamentos periódicos sobre o contorno e forças de superfície uniformes sobre o contorno. O gráfico com as curvas tensão x deformação está apresentado na Figura 34. Todas as curvas tensão x deformação são referentes a malha (h) mais discretizada da Figura 18. Nesse caso foi adicionado distorção no vetor das deformações impostas ao EVR, logo, o vetor ficou dessa maneira: $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_{12}\} = \{-0,0015 \quad 0,0048 \quad 0,0006\}$.

Observe a Figura 34 e perceba que existe uma pequena diferença entre as tensões homogeneizadas para cada condição de contorno, sendo em sentido crescente de resistência: forças uniformes, flutuações periódicas e deslocamento linear.

Figura 34 – Condições de contorno para EVR com 5 inclusões



Fonte: Elaboração do próprio autor.

A partir da Figura 34 foi possível perceber que todas as curvas têm o 13º ponto em comum (incremento de deformação), referente à deformação de 0,00288. Dessa forma foi criada a Tabela 10, onde estão os valores das tensões homogeneizadas para todas as condições de contorno, tanto para o MEC e MEF. Além disso foi criada também a Tabela 11, em que está apresentada os valores finais para cada condição de contorno e entre parênteses está o valor da última deformação onde ocorreu o equilíbrio do EVR. Os valores das tensões para essa deformação estão muito próximos, não sendo assim possível observar a diferença de comportamento entre as condições de contorno.

Tabela 10 – Tensões homogeneizada para a deformação de 0,00288

Modelo	Deslocamento Linear	Flutuações Periódicas	Forças Uniformes
	Tensão homogeneizada (MPa)	Tensão homogeneizada (MPa)	Tensão homogeneizada (MPa)
MEC	240,44	239,39	239,52
MEF	240,77	239,78	239,72

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Tabela 11 – Tensões homogeneizadas finais com o valor da respectiva deformação

Modelo	Deslocamento Linear	Flutuações Periódicas	Forças Uniformes
	Tensão constitutiva (MPa)	Tensão constitutiva (MPa)	Tensão constitutiva (MPa)
MEC	259,02 (0,00480)	252,53 (0,00403)	239,52 (0,00288)
MEF	253,95 (0,00365)	253,40 (0,00422)	239,72 (0,00288)

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Na tabela 12 encontra-se os tensores constitutivos obtidos através do MEC, relacionados com as tensões homogeneizadas da Tabela 10.

Tabela 12 – Tensor homogeneizado para a deformação de 0,00288

Modelo	Deslocamento Linear	Flutuações Periódicas	Forças Uniformes
	Tensor homogeneizado (GPa)	Tensor homogeneizado (GPa)	Tensor homogeneizado (GPa)
MEC	$\begin{bmatrix} 100,83 & 32,303 & 0,1035 \\ 32,303 & 42,301 & -2,9089 \\ 0,1035 & -2,9089 & 35,049 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 99,318 & 33,585 & -0,0025 \\ 33,585 & 40,543 & -2,8085 \\ -0,0025 & -2,8085 & 34,599 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 94,532 & 40,157 & 0,4716 \\ 40,157 & 33,813 & -3,9532 \\ 0,4716 & -3,9532 & 34,073 \end{bmatrix}$

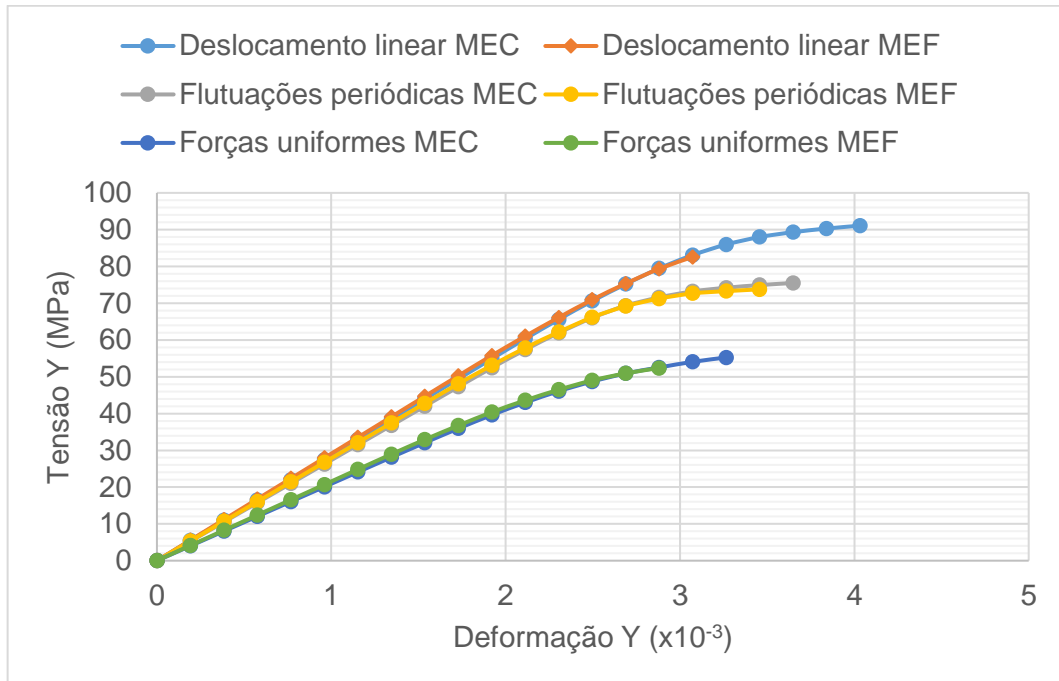
Fonte: Elaboração do próprio autor.

O último exemplo analisa como as diferentes condições de contorno influenciam no comportamento do EVR com 5 vazios (Figura 25). As propriedades físicas dos materiais estão no Quadro 6. Analogamente ao exemplo anterior de 5 inclusões, neste exemplo será utilizada a malha (h) mais refinada e o vetor das deformações impostas ao EVR é: $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_{12}\} = \{-0,0015 \quad 0,0048 \quad 0,0006\}$.

Na Figura 35 estão os resultados obtidos para o MEC e MEF em todas as condições de contorno. A partir das curvas, percebe-se que quando se muda a condição de contorno, para o EVR com 5 vazios, a diferença é bem maior do que a mudança no EVR com 5 inclusões. Ficou mais nítido nesse exemplo como a condição de contorno aplicada no EVR influencia nos resultados. Perceba também que a modelagem do EVR pelo MEC obteve mais pontos na curva tensão x deformação do que o MEF, ou seja, o MEC conseguiu erros menores que a

tolerância e com isso resolveu o problema do equilíbrio do EVR em mais incrementos de deformação.

Figura 35 - Condições de contorno para EVR com 5 vazios



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Pode-se observar que em todos os outros exemplos, a comparação entre os resultados do MEC e MEF foram muito boas, apenas nesse exemplo, que os resultados do MEF apresentam menores valores para a tensão homogeneizada final. No entanto, até esse valor final, os valores do MEF e MEC são praticamente idênticos. Isso pode ser devido ao fato de que o elemento finito utilizado é o triangular, onde os deslocamentos são aproximados de forma linear e, portanto, as deformações são constantes. Acredita-se que essa aproximação pobre para esforços não permite que o cálculo avance mais, como ocorre com o MEC.

Foram criadas tabelas análogas ao exemplo anterior. Na Tabela 13 estão os resultados obtidos na modelagem do MEC e MEF para as condições de contorno, todos referentes a deformação de 0,00288. Na Tabela 14 estão as tensões homogeneizadas finais e a deformação correspondente está entre parênteses. Finalmente, na Tabela 15 está o tensor constitutivo homogeneizado para a modelagem no MEC em todas as condições de contorno.

Tabela 13 - Tensões homogeneizada para a deformação de 0,00288

Modelo	Deslocamento Linear	Flutuações Periódicas	Forças Uniformes
	Tensão homogeneizada (MPa)	Tensão homogeneizada (MPa)	Tensão homogeneizada (MPa)
MEC	79,45	71,57	52,53
MEF	79,34	71,24	52,36

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Tabela 14 - Tensões homogeneizadas finais com o valor da respectiva deformação

Modelo	Deslocamento Linear	Flutuações Periódicas	Forças Uniformes
	Tensão constitutiva (MPa)	Tensão constitutiva (MPa)	Tensão constitutiva (MPa)
MEC	91,07 (0,00403)	75,49 (0,00365)	55,23 (0,00326)
MEF	82,56 (0,00307)	73,76 (0,00346)	52,36 (0,00288)

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Tabela 15 - Tensor homogeneizado para a deformação de 0,00288

Modelo	Deslocamento Linear	Flutuações Periódicas	Forças Uniformes
	Tensor homogeneizado (GPa)	Tensor homogeneizado (GPa)	Tensor homogeneizado (GPa)
MEC	$\begin{bmatrix} 28,861 & 5,0561 & 0,3280 \\ 5,0561 & 21,496 & 0,5643 \\ 0,3280 & 0,5643 & 8,8189 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 28,036 & 4,8134 & -0,2706 \\ 4,8134 & 12,110 & -1,0954 \\ -0,2706 & -1,0954 & 5,6105 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 21,410 & 8,9207 & -0,0322 \\ 8,9207 & 10,452 & 0,0318 \\ -0,0322 & 0,0318 & 4,3571 \end{bmatrix}$

Fonte: Elaboração do próprio autor.

8 CONCLUSÃO

Uma formulação do MEC para analisar microestruturas heterogêneas, considerando fenômenos dissipativos, é apresentada no contexto da análise em multi-escala. Nesse tipo de análise o comportamento do material não é governado por um modelo constitutivo, mas definido pela resposta homogeneizada do EVR (Elemento de Volume Representativo) que representa a microestrutura do material.

Nesse trabalho, não foi realizada uma análise em multi-escala da estrutura, somente foi considerada a análise no nível da microestrutura do material. O EVR, é modelado como uma chapa em sub-regiões, onde vazios e inclusões podem ser definidos na matriz, isto é, as sub-regiões podem ter diferentes módulos de elasticidade e coeficiente de Poisson e um campo inicial de forças é considerado na formulação para levar em conta o fenômeno dissipativo. Para resolver o problema, o contorno externo e interface foram discretizados em elementos e o domínio das sub-regiões em células onde funções lineares foram adotadas para aproximar os deslocamentos enquanto para as forças normais iniciais foi assumida constante sobre a célula.

Na análise em multi-escala as condições de contorno são sempre dadas por deslocamentos lineares computados a partir da macro deformação, isto é, os esforços no contorno são reações devido aos deslocamentos impostos. Além disso, para garantir a consistência energética entre a macroescala e microescala, usa-se o Princípio de Macro-Homogeneidade de Hill-Mandel, a partir do qual a equação de equilíbrio do EVR é obtida. Portanto, o campo de deslocamento final no EVR é obtido somente após resolver o problema do equilíbrio no EVR em termos das flutuações dos deslocamentos, de acordo com o modelo de multi-escala proposto em Souza Neto e Feijóo (2006).

Para resolver o problema de equilíbrio no EVR, condições de contorno adicionais em termos das flutuações dos deslocamentos devem ser impostas ao EVR, sendo consideradas nesse trabalho três condições de contorno diferentes, levando a três modelos de multi-escala distintos. Então, adotando técnicas de homogeneização, os valores homogeneizados para tensão e tensor constitutivo podem ser calculados, após a convergência do processo iterativo do EVR ser alcançada.

Nos exemplos numéricos, diferentes EVRs sujeitos a deformações representativas foram analisados, onde o desempenho da formulação proposta foi confirmado comparando a tensão e tensor constitutivo homogeneizado com a formulação desenvolvida em De Souza Neto e Feijóo (2006) e Fernandes et al. (2015a, b), pelo Método dos Elementos Finitos (MEF). Em um trabalho futuro, acoplado-se essa formulação a um modelo do MEC para análise do macro-contínuo, a análise em multi-escala de estruturas composta por materiais heterogêneos pode ser realizada usando somente o Método dos Elementos de Contorno. Como a análise em multi-escala é muito cara computacionalmente, é muito importante investigar diferentes formulações, a fim de obter um modelo numérico menos caro computacionalmente, mas ainda preciso.

Nos exemplos numéricos, com relação à influência do volume de inclusões e vazios no comportamento do EVR, percebe-se que a diferença de tensões homogeneizadas é mais significativa quando se aumenta o volume de vazios, ou seja, os vazios influenciam mais na rigidez do EVR do que as inclusões. Como esperado, o aumento do volume de inclusão leva a um aumento da rigidez e da resistência do EVR, enquanto que o aumento do volume de vazios o torna menos rígido e resistente. Também foi observado que a disposição das inclusões de forma aleatória não altera significativamente os resultados quando comparado a uma única inclusão centrada. Porém, quando a mesma análise é feita com vazios distribuídos aleatoriamente, foi notado que uma malha pouco refinada não produz resultados satisfatórios e que a disposição aleatória do volume de vazios diminui consideravelmente a rigidez do EVR. Outro ponto importante que influenciou nos resultados foi adotar o comportamento elasto-plástico perfeito para a matriz, que, como esperado, diminuiu o valor das tensões homogeneizadas. Finalmente, foi observado que a escolha das condições de contorno aplicadas na microescala é decisiva nos resultados em uma análise em multi-escala. Como esperado, um comportamento mais rígido e resistente é obtido quando se adota deslocamentos lineares no contorno do EVR e chega-se a respostas mais flexíveis e menos resistentes quando se considera forças uniformes no contorno do EVR.

O custo computacional da modelagem proposta foi comparado ao modelo de elementos finitos desenvolvido em Fernandes et al. (2015a, b), para evidenciar uma vantagem importante do modelo de elementos de contorno. Foi observado que o tempo de processamento para resolver o processo iterativo do EVR pelo MEC foi

menor do que o MEF. Isto é muito importante, porque quando é realizada uma análise em multi-escala vários EVRs devem ser resolvidos para cada iteração do problema do macro-contínuo.

Portanto, de maneira geral, pode-se concluir que a formulação desenvolvida foi capaz de simular o comportamento de microestruturas heterogêneas considerando-se não-linearidade física, com resultados próximos ao MEF, um método já consolidado, o que nos permite validar a formulação proposta.

REFERÊNCIA

- BANNERJEE, P.; BUTTERFIELD, R. Boundary element method in geomechanics. In: **FINITE ELEMENTS IN GEOMECHANICS**, 1977, Deutschland. **Anais...** Deutschland: Institut fur Bodenmechanik und Felsmechanik, 1977. p. 529-570,
- BONNET, M.; MUKHERJEE, S. Implicit BEM formulations for usual and sensitivity problems in elasto-plasticity using the consistent tangent operator concept. **International Journal of Solids and Structures**, Kidlington, v. 33, n. 30, p. 4461-4480, 1996. ISSN 0020-7683.
- BREBBIA, C. A. **The boundary element method for engineers**. London: Pentech, 1978.
- BREBBIA, C.; DOMINGUEZ, J. Boundary element methods for potential problems. **Applied Mathematical Modelling**, New York, v. 1, n. 7, p. 372-378, 1977. ISSN 0307-904X.
- BREBBIA, C. A.; DOMINGUEZ, J. **Boundary elements: an introductory course**. [S. l.]: WIT, 1994. ISBN 1853123498.
- BREBBIA, C. A.; TELLES, J. C. F.; WROBEL, L. **Boundary element techniques: theory and applications in engineering**. Berlin: Springer-Verlag, 1984. ISBN 978-3-642-48862-7.
- CHAKRABARTY, J. **Theory of plasticity**. Butterworth: Heinemann, 2012. ISBN 0080481361.
- CHENG, A. H. D.; CHENG, D. T. Heritage and early history of the boundary element method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, Kidlington, v. 29, n. 3, p. 268-302, 3// 2005. ISSN 0955-7997.
- CHUEIRI, L. H. M. **Formulação do método dos elementos de contorno para análise elastoplástica de placas**. 1994. 219 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1994.
- CORDEIRO, S. G. F.; LEONEL, E. D. Cohesive crack propagation modelling in wood structures using BEM and the Tangent Operator Technique. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, Kidlington, v. 64, p. 111-121, 2016. ISSN 0955-7997.
- DE SOUZA NETO, E. et al. An RVE-based multiscale theory of solids with micro-scale inertia and body force effects. **Mechanics of Materials**, Amsterdam, v. 80, p. 136-144, 2015. ISSN 0167-6636.
- DE SOUZA NETO, E.; FEIJÓO, R. **Variational foundations of multi-scale constitutive models of solid: small and large strain kinematical formulation**. [S. l.]: LNCC Research & Development Report, 2006.

DOMINGUEZ, J. **Stress analysis around anchor plates: a boundary element method application.** Sevilla: Universidad de Sevilla, 1977.

FERNANDES, G. R. **Introdução ao método dos elementos de contorno – MEC.** Ilha Solteira, 2005.

FERNANDES, G.; DE SOUZA NETO, E. Self-consistent linearization of non-linear BEM formulations with quadratic convergence. **Computational Mechanics**, Heidelberg, v. 52, n. 5, p. 1125-1139, 2013. ISSN 0178-7675.

FERNANDES, G.; PITUBA, J.; DE SOUZA NETO, E. FEM/BEM formulation for multi-scale analysis of stretched plates. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, Kidlington, v. 54, p. 47-59, 2015a. ISSN 0955-7997.

_____. Multi-scale modelling for bending analysis of heterogeneous plates by coupling BEM and FEM. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, Kidlington, v. 51, p. 1-13, 2015b. ISSN 0955-7997.

FERNANDES, G. R. **O método dos elementos de contorno aplicado à análise não-linear de placas.** São Paulo: Universidade de São Paulo, 1998.

_____. **Análise não-linear de estruturas de pavimentos de edifícios através do método dos elementos de contorno.** São Paulo: Universidade de São Paulo, 2003.

FERNANDES, G. R.; NETO, J. R. Analysis of stiffened plates composed by different materials by the boundary element method. **Structural Engineering and Mechanics**, Daejeon, v. 56, n. 4, p. 605-623, 2015. ISSN 1225-4568.

GIL RODRIGUEZ, J. C. **Sobre o emprego do método dos elementos de contorno em problemas elásticos bidimensionais.** 1986. 140 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

JORGE, R. N.; DINIS, L. **Teoria da plasticidade.** Porto: Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial-Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2004.

KATSIKADELIS, J. T. **Boundary elements: theory and applications.** Amsterdam: Elsevier, 2002. ISBN 0080528244.

KOUZNETSOVA, V. G. Computational homogenization for the multi-scale analysis of multi-phase materials. Perm, 2002.

LIMA, L. R. O. DE. **Resistência dos Materiais IV.** Coimbra: Universidade de Coimbra, 2003. cap. 2, 21 p. (Desenvolvimento de material didático ou instrucional - Apostila).

NEMAT-NASSER, S.; HORI, M. **Micromechanics: overall properties of heterogeneous materials**. Amsterdam: Elsevier, 1993. ISBN 1483291510.

OHLAND, G. A. **Análise de microestruturas heterogêneas através de uma formulação do método dos elementos de contorno considerando materiais com comportamento elástico**. 2017. 88 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2017.

PAIVA, J. B. **Formulação do método dos elementos de contorno para flexão de placas e suas aplicações em engenharia de estruturas**. 1987. 204 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1987.

PAULINO, G. H.; LIU, Y. Implicit consistent and continuum tangent operators in elastoplastic boundary element formulations. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Amsterdam, v. 190, n. 15, p. 2157-2179, 2001. ISSN 0045-7825.

PERIĆ, D. et al. On micro-to-macro transitions for multi-scale analysis of non-linear heterogeneous materials: unified variational basis and finite element implementation. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Chichester, v. 87, n. 1-5, p. 149-170, 2011. ISSN 1097-0207.

SCHRÖDER, J.; BALZANI, D.; BRANDS, D. Approximation of random microstructures by periodic statistically similar representative volume elements based on lineal-path functions. **Archive of Applied Mechanics**, Heidelberg, v. 81, n. 7, p. 975-997, 2011. ISSN 0939-1533.

SIMO, J. C.; TAYLOR, R. L. Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Amsterdam, v. 48, n. 1, p. 101-118, 1985. ISSN 0045-7825.

TIMOSHENKO, S.; TIMOSHENKO, S.; GOODIER, J. **Theory of Elasticity, by S. Timoshenko and JN Goodier**. New York: McGraw-Hill, 1951.

TORO, S. **Modelado de falla de materiales mediante formulaciones multiescala**. 2014. Tesis (Doctorado en Ingeniería) - Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas, Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, 2014.

TORO, S. et al. A two-scale failure model for heterogeneous materials: numerical implementation based on the finite element method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Chichester, v. 97, n. 5, p. 313-351, 2014. ISSN 1097-0207.

WIERZBICKI, TOMASZ. **2.080J Structural mechanics**. Massachusetts: Massachusetts Institute of Technology, 2013.

ANEXO A – EQUAÇÕES BÁSICAS E EXPRESSÕES FUNDAMENTAIS

FERNANDES, G. R. **Introdução ao método dos elementos de contorno – MEC**. Ilha Solteira, 2005.

A1 Estado plano de tensão e deformação

A.1.1 Estado plano de tensão

Como a micro-estrutura ou EVR é modelado através de uma análise plana, as equações são particularizadas para os estados planos de tensão e deformação.

As tensões podem ser obtidas pela equação (2.5), mas substituindo-se o ν por $\nu' = \nu / (1 + \nu)$, sendo assim o valor de G permanece inalterado. Portanto, a equação (2.5) pode ser escrita da seguinte forma para estado plano de tensão:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[\nu \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + (1-\nu) \varepsilon_{ij} \right] \quad (\text{A.1})$$

A1.2 - Estado plano de deformação

Para o estado plano de deformação, as equações (2.4), (2.5) e (2.7) são válidas apenas mudando a variação dos índices i, j, k de 1 a 3 para 1 a 2. A equação (2.5) pode ser escrita na seguinte forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

A2 Expressões fundamentais para equação integral do deslocamento para um ponto interno

As expressões fundamentais contidas na equação (4.24) são descritas por:

$$u_{ki}^* = \frac{1}{8\pi\bar{G}(1-\nu')} \left[-(3-4\nu') \ln r \delta_{ki} + r_{,i} r_{,k} \right] \quad i, k = 1, 2 \quad (\text{A.3})$$

$$p_{ki}^* = -\frac{1}{4\pi(1-\nu')r} \left\{ \left[(1-2\nu') \delta_{ik} + 2r_{,i} r_{,k} \right] \frac{\partial r}{\partial n} + \right. \\ \left. -(1-2\nu') [n_i r_{,k} - n_k r_{,i}] \right\} \quad i, k = 1, 2 \quad (\text{A.4})$$

$$\varepsilon_{ki}^* = -\frac{1}{8\pi(1-\nu')\bar{G}r} \left[(1-2\nu') \left(\frac{\partial r}{\partial n} \delta_{ki} + r_{,i} n_k \right) + \right. \\ \left. -r_{,k} n_i + 2r_{,k} r_{,i} \frac{\partial r}{\partial n} \right] \quad i, k = 1, 2 \quad (\text{A.5})$$

$$\varepsilon_{kij}^* = -\frac{1}{8\pi(1-\nu')\bar{G}r} \left[(1-2\nu') (r_{,j} \delta_{ki} + r_{,i} \delta_{kj}) + \right. \\ \left. -r_{,k} \delta_{ij} + 2r_{,k} r_{,i} r_{,j} \right] \quad k, i, j = 1, 2 \quad (\text{A.6})$$

$$\varepsilon_{kij,j}^* = \frac{\nu'}{4\pi(1-\nu')\bar{G}r^2} \left[\delta_{ik} - 2r_{,i} r_{,k} \right] \quad k, i, j = 1, 2 \quad (\text{A.7})$$

Onde $\bar{G} = Gt$ e $\nu' = \frac{\nu}{1+\nu}$, pois se trata do estado plano de tensão.

Na dedução das expressões fundamentais são consideradas as seguintes relações:

$$r_{,j} = \frac{x_j(p) - x_j(q)}{r};$$

$$r = \sqrt{[x_1(p) - x_1(q)]^2 - [x_2(p) - x_2(q)]^2};$$

$$r_{,j} n_j = \frac{\partial r}{\partial n};$$

$$\delta_{kj} n_j = n_k;$$

$$\delta_{kl} r_{,l} = r_{,k};$$

$$\frac{\partial r_{,k}}{\partial x_j(p)} = \frac{1}{r} [\delta_{jk} - r_{,k} r_{,j}]$$

A3 Expressões fundamentais para equação integral da derivada dos deslocamentos para pontos do domínio

No processo de derivação da equação (4.24), novas expressões fundamentais são obtidas. As equações descritas a seguir são utilizadas para a dedução dessas novas expressões:

$$\frac{\partial}{\partial m(q)} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} (-r_{,j} m_j)$$

$$\frac{\partial r_{,k}}{\partial m(q)} = -\frac{\partial r_{,k}}{\partial x_j(P)} = -\frac{1}{r} \{ \delta_{kj} - r_{,k} r_{,j} \} m_j$$

$$\frac{\partial}{\partial m(q)} \left(\frac{\partial r}{\partial n} \right) = -\frac{1}{r} \left\{ n_j - r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} \right\} m_j$$

Portanto, as expressões fundamentais contidas na equação (4.25) são descritas da seguinte forma, onde $k, i, j = 1, 2$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{ki}^*}{\partial m} = & \frac{1}{4\pi(1-\nu')r^2} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left[-2(1-2\nu') \frac{\partial r}{\partial m} \delta_{ik} + 8r_{,i} r_{,k} \frac{\partial r}{\partial m} + \right. \right. \\ & + 2r_{,k} m_{,i} + 2r_{,i} m_{,k} \left. \right] + (1-2\nu') \left[-2n_k r_{,i} \frac{\partial r}{\partial m} + 2n_i r_{,k} \frac{\partial r}{\partial m} + \right. \\ & \left. \left. + n_j m_j \delta_{ik} - n_i m_k + n_k m_i \right] + 2r_{,i} r_{,k} n_j m_j \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial u_{ki}^*}{\partial m} = \frac{1}{8\pi G(1-\nu')r} \left[(3-4\nu') \frac{\partial r}{\partial m} \delta_{ki} - m_k r_{,i} - m_i r_{,k} + 2r_{,i} r_{,k} \frac{\partial r}{\partial m} \right] \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_{ki}^*}{\partial m} = & \frac{1}{8\pi(1-\nu')\bar{G}r^2} \left\{ (1-2\nu') \left(\delta_{ki} n_j m_j + n_k m_i - 2n_k r_{,i} \frac{\partial r}{\partial m} - 2\delta_{ki} \frac{\partial r}{\partial m} \frac{\partial r}{\partial n} \right) + \right. \\ & \left. + 2r_{,k} \left(n_i \frac{\partial r}{\partial m} + r_{,i} m_j n_j \right) - n_i m_k + 2 \frac{\partial r}{\partial n} (r_{,i} m_k + r_{,k} m_i) + 8r_{,k} r_{,i} \frac{\partial r}{\partial m} \frac{\partial r}{\partial n} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{kijl}^* = & \frac{1}{8\pi\bar{G}(1-\nu')r^2} \left\{ (1-2\nu') \left[\delta_{jl} \delta_{ki} + \delta_{il} \delta_{kj} - 2\delta_{ki} r_{,j} r_{,l} - 2\delta_{kj} r_{,i} r_{,l} \right] + \right. \\ & \left. + \delta_{ij} (2r_{,k} r_{,l} - \delta_{kl}) + 2\delta_{kl} r_{,i} r_{,j} + 2\delta_{il} r_{,k} r_{,j} + 2\delta_{jl} r_{,i} r_{,k} - 8r_{,i} r_{,j} r_{,k} r_{,l} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

onde $\bar{G} = Gt$ e $\nu' = \frac{\nu}{1+\nu}$, pois se trata do estado plano de tensão.

Observe que não haverá problemas de singularidade na integral de domínio envolvendo os deslocamentos, pois quando o ponto de colocação pertencer à célula a ser integrada, tem-se que $\nu = \nu_s$ e, portanto, a integral não precisa ser calculada.

Logo, pode-se dizer que:

$$\frac{\partial}{\partial m} \int_{\Omega_S} u_i(p) \varepsilon_{kij,j}^*(q,p) d\Omega_S = \int_{\Omega_S} u_i(p) \frac{\partial \varepsilon_{kij,j}^*}{\partial m}(q,p) d\Omega_S \quad (\text{A.12})$$

Assim, derivando-se a expressão fundamental contida na equação (3.54), tem-se:

$$\frac{\partial \varepsilon_{kij,j}^*}{\partial m} = \frac{\nu'}{2\pi(1-\nu')\bar{G}r^3} \left[\frac{\partial r}{\partial m} (\delta_{ik} - 4r_{,i} r_{,k}) + r_{,i} m_k + r_{,k} m_i \right] \quad (\text{A.13})$$

A4 Relações trigonométricas

Para a dedução dos termos livres foram utilizadas as seguintes relações trigonométricas:

$$\cos(\theta - \gamma) = \cos \gamma \cos \theta + \text{sen} \gamma \text{sen} \theta \quad (\text{A.14a})$$

$$\text{sen}(\theta - \gamma) = -\cos \theta \text{sen} \gamma + \text{sen} \theta \cos \gamma \quad (\text{A.14b})$$

$$\cos(\theta + \gamma) = \cos \theta \cos \gamma - \text{sen} \theta \text{sen} \gamma \quad (\text{A.14c})$$

$$\text{sen}(\theta + \gamma) = \cos \theta \text{sen} \gamma + \text{sen} \theta \cos \gamma \quad (\text{A.14d})$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \quad (\text{A.14e})$$

$$\text{sen}^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \quad (\text{A.14f})$$

$$\text{sen} 2\theta = 2 \text{sen} \theta \cos \theta \quad (\text{A.14g})$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \text{sen}^2 \theta \quad (\text{A.14h})$$

$$\cos(\theta) = \cos(-\theta) \quad (\text{A.14i})$$

$$\text{sen}(\theta) = -\text{sen}(-\theta) \quad (\text{A.14j})$$