



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de Rio Claro

Matheus Palmero Silva

Leis de escala associadas à quebra de simetria da distribuição de energia em um conjunto de sistemas dinâmicos: aplicações em mapeamentos discretos

Rio Claro - SP
2017

Matheus Palmero Silva

Leis de escala associadas à quebra de simetria da distribuição de energia em um conjunto de sistemas dinâmicos: aplicações em mapeamentos discretos

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física, junto ao Programa de Pós-Graduação em Física, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de Rio Claro.

Orientador: Prof. Dr. Edson Denis Leonel

Coorientador: Professor Peter Vaughan Elsmere McClintock

Rio Claro
2017

517.39 Silva, Matheus Palmero
S586L Leis de escala associadas à quebra de simetria da
distribuição de energia em um conjunto de sistemas
dinâmicos: aplicações em mapeamentos discretos / Matheus
Palmero Silva. - Rio Claro, 2017
47 f. : il., figs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista,
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Edson Denis Leonel
Coorientador: Peter Vaughan Elsmere McClintock

1. Sistemas dinâmicos diferenciais. 2. Caos. 3. Difusão. 4.
Mapeamentos discretos. I. Título.

Matheus Palmero Silva

Leis de escala associadas à quebra de simetria da distribuição de energia em um conjunto de sistemas dinâmicos: aplicações em mapeamentos discretos

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física, junto ao Programa de Pós-Graduação em Física, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de Rio Claro.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Edson Denis Leonel
UNESP - Rio Claro
Orientador

Prof. Dr. Roberto E. Lagos Monaco
UNESP - Rio Claro

Prof. Dr. Roberto Venegeroles Nascimento
UFABC - ABC Paulista

Rio Claro, setembro de 2017.

Aos meus pais,
Luciane e José,
dedico.

Agradecimentos

A gratidão é algo realmente interessante, pois nos faz meditar sobre algo tão puro, mas ao mesmo tempo sobre elementos completamente intrínsecos ao seu próprio eu.

Sou extremamente grato a infinidade de fatores que me trouxeram até aqui. Agradeço primeiramente a Deus, pois acredito que foi Ele quem alinhou todos estes fatores para a minha vida.

Agradeço aos meus pais pelo constante amor e paciência. Agradeço também a toda minha família pela força que sempre me passam.

Agradeço a CREW, meu grupo de amigos de sangue, pelos importantes momentos de descontração e por sempre acreditarem em mim.

Agradeço a minha namorada Raquel Riciati do Couto Vilela pela confiança e pelo amor que compartilhamos.

Agradeço ao meu orientador Edson Denis Leonel pela extrema confiança que tem em mim e por ser o entusiasta que é. Agradeço também aos meus amigos de pesquisa André Luís Prando Livorati e Gabriel Díaz Iturry pela constante ajuda e contribuição aos meus estudos em geral.

Agradeço ao meu coorientador Peter Vaughan Elsmere McClintock pelo exemplo de pessoa que é. Agradeço ao Departamento de Física da Universidade de Lancaster, onde tive a oportunidade de trabalhar por 6 meses e experienciar a vida científica de uma maneira completamente nova. E agradeço também a professora Aneta Stefanovska pela hospitalidade e atenção durante minha estadia.

Agradeço ao Departamento de Física, da UNESP de Rio Claro, pelo acesso e uso dos laboratórios e computadores. E agradeço a CAPES e FAPESP (Processo n° 2014/27260-5) pelo apoio e suporte financeiro.

Minha gratidão é voltada à todos vocês.

“Tudo depende do tipo de lente que você utiliza para ver as coisas.”

(Jostein Gaarder)

Resumo

Nesta dissertação, investigamos propriedades estatísticas de alguns sistemas dinâmicos descritos por mapeamentos discretos nas proximidades de duas transições: *(i)* integrabilidade para não integrabilidade e; *(ii)* crescimento limitado de energia para crescimento ilimitado de energia (aceleração de Fermi). O foco principal está na descrição do comportamento da distribuição de probabilidade da velocidade/energia das partículas em dinâmica caótica. A quebra de simetria da distribuição de probabilidade leva a uma escala adicional àquelas já conhecidas na literatura e, com este estudo, acreditamos que a quebra de simetria também possa explicar um fenômeno que já vem sendo observado em mapeamentos discretos. Fenômeno este, até então descrito apenas fenomenologicamente, teve sua primeira observação na publicação seminal de investigação de leis de escala em mapeamentos discretos no periódico Phys. Rev. Let. **93**, 014101 (2004), de Edson D. Leonel, Peter V. E. McClintock e Jefferson K. L. Silva. Nossa contribuição para o problema está no desenvolvimento de descrições analíticas e verificações numéricas, baseadas em um estudo sistemático do comportamento difusivo das trajetórias caóticas no espaço de fases dos sistemas dinâmicos de interesse.

Palavras-chave: Caos; Difusão; Mapeamentos discretos

Abstract

*In this dissertation, we investigate statistical properties of some dynamical systems described by discrete mappings near two types of transitions: (i) integrability to non-integrability; (ii) limited to unlimited diffusion in energy (Fermi acceleration). The main goal is to describe the behaviour of the probability density of the velocity/energy for a set of particles moving in a chaotic dynamics. The break of symmetry in the probability distribution leads to an additional scaling to those already known in the literature and, with this study, we believe that the symmetry break might also explain a well-known phenomenon observed for discrete mappings. This phenomenon, it has been reported so far phenomenologically. A first observation in an area-preserving mapping was in a letter published in *Phys. Rev. Let.* **93**, 014101 (2004), authored by Edson D. Leonel, Peter V. E. McClintock and Jefferson K. L. Silva. Our contribution to the problem is on the development of an analytical approach and numerical verifications, based essentially on a systematic study of the diffusive behaviour of chaotic trajectories on the phase space of dynamical systems of interest.*

Keywords: Chaos; Diffusion; Discrete mappings

Sumário

Contextualização	10
1 Revisão Bibliográfica	11
1.1 Sistemas dinâmicos	11
1.2 Difusão	14
1.3 Estado da arte	15
2 Descrição dos modelos	17
2.1 Família de mapeamentos	17
2.2 O modelo Fermi-Ulam	18
2.3 O modelo <i>bouncer</i>	19
3 Descrição da teoria	21
3.1 Solução fundamental para a equação da difusão	21
3.2 Soluções particulares para a equação da difusão	23
3.3 Conexão com os modelos	27
4 Resultados e discussões	32
4.1 Difusão ao longo do espaço de fases	32
4.2 Resultados analíticos	35
4.3 Simulação numérica \times Abordagem analítica	39
5 Considerações Finais	43
5.1 Conclusões	43
5.2 Perspectivas	44
Referências	44

Contextualização

Em 1855 o médico alemão Adolf Eugen Fick apresentou à comunidade científica uma lei que descreve processos de difusão de matéria ou energia, hoje conhecida conhecida como a primeira lei de Fick. Pouco mais de um século depois, o matemático polonês Stanislaw Ulam, juntamente ao famoso físico italiano Enrico Fermi, propuseram um sistema dinâmico com intuito de investigar as altas energias de raios cósmicos, conhecido como o modelo Fermi-Ulam. A princípio, dois estudos distintos com nenhuma conexão aparente.

Neste projeto, nos baseamos em uma investigação feita para o modelo Fermi-Ulam publicada em 2004, *Phys. Rev. Let.* **93**, 014101, mas apresentando uma nova abordagem teórica fundamentada principalmente no conceito abstraído de difusão. Nossos estudos mostram que, de fato, existe uma conexão entre modelos de sistemas dinâmicos, em especial os que podem ser descritos por mapeamentos discretos, e processos difusivos governados pela lei de Fick.

Esta dissertação foi organizada em cinco capítulos onde apresentamos uma descrição completa de nossos estudos. Primeiramente, no capítulo 1 reunimos pontos importantes da literatura em uma revisão bibliográfica. No capítulo 2 descrevemos os modelos utilizados na investigação da quebra de simetria da densidade de probabilidade. Já no capítulo 3 começamos a apresentação da nossa contribuição para o problema, com uma descrição completa da teoria e da conexão com os modelos de interesse e, no capítulo 4, apresentamos os resultados e discussões sobre essa conexão. Por fim, o capítulo 5 é dedicado às considerações finais, concluindo então este estudo.

Revisão Bibliográfica

Neste primeiro capítulo, apresentamos uma revisão de pontos importantes da literatura para o nosso estudo. Na primeira seção, abordamos aspectos gerais e históricos do estudo de sistemas dinâmicos, discutindo também a importância da descrição da dinâmica pelo formalismo de mapeamentos discretos. Já na segunda seção, apresentamos uma introdução geral sobre o conceito de difusão, a definição matemática com a equação da difusão e sua importância para a problemática do projeto. Por fim, na terceira seção discutimos aspectos já conhecidos na literatura moderna que compõem o estado da arte do projeto.

1.1 Sistemas dinâmicos

O conceito de sistemas dinâmico tem sua origem na mecânica Newtoniana [1]. Lá, como qualquer outra ciência natural, a evolução dinâmica consiste em uma relação implícita que fornece o estado de um sistema em algum breve momento no futuro. O estudo da teoria envolvendo sistemas dinâmicos tem aplicações importantes não só na física [2], mas também nos mais variados campos da ciência, incluindo biologia [3], química [4], engenharia [5] e medicina [6].

Modelar a natureza, exatamente como ela é, é um grande desafio. Quanto mais perto chegamos de um modelo perfeito, considerando todas suas nuances e particularidades, ficamos muito mais longe de uma matemática simples, adentrando em um mundo complexo de relações não lineares. Sistemas com essas características são chamados de sistemas dinâmicos não lineares e, até mesmo os mais simples exemplos, frequentemente exibem comportamentos imprevisíveis e aparentemente aleatórios. Estes comportamentos têm sido os principais objetos de estudo da teoria do caos [7, 8].

O caos acontece em sistemas que deveriam ser governados por leis naturais bem definidas. Sistemas como estes, regidos por leis físicas bem definidas e cujo comportamento poderia ser, em princípio, previsto, são chamados sistemas determinísticos. O caos determinístico é essencialmente devido à dependência sensitiva às condições iniciais [9]. Essa dependência sensitiva, quando existe, é proveniente das não linearidades presentes no sistema, as quais amplificam exponencialmente pequenas diferenças das condições iniciais evoluídas no tempo. Por isso, evoluções dinâmicas de sistemas determinísticos podem levar a comportamentos caóticos, inclusive na ausência de ruído ou flutuações externas.

A caracterização do caos determinístico observado em experimentos é um dos problemas centrais da teoria do caos. Métodos matemáticos clássicos, como transformada de Fourier e funções de autocorrelação não permitem a distinção entre caos e *white noise*¹. No entanto, a utilização de seções de Poincaré e análises de espaço de fases² são úteis para sistemas de $N \leq 2$ dimensões. Outro ponto interessante no estudo de sistemas caóticos é a descrição da dinâmica utilizando o formalismo de mapeamentos em tempo discreto.

Mapeamentos discretos

Muitos sistemas dinâmicos não lineares podem ser descritos por mapeamentos discretos. Um mapeamento discreto é a descrição da dinâmica de um sistema de interesse por tempos discretizados, ou seja, a partir do conhecimento de um determinado estado do movimento na iteração n de um mapa de equações dinâmicas, é possível determinar o novo estado na iteração subsequente ($n + 1$).

Em um ponto de vista matemático e computacional, a descrição por mapeamentos discretos pode simplificar, mas ao mesmo tempo manter a física fundamental do sistema em análise. Assim, a descrição de sistemas dinâmicos, em especial pelo formalismo de mapeamentos discretos, é algo de interesse científico e tem sido amplamente estudado nas últimas décadas [11, 12, 13]. Particularmente, para sistemas que apresentam mais graus de liberdade, correspondentes por exemplo, a perturbações temporais em um sistema descrito por um Hamiltoniano 1-D, o formalismo conduz, muitas vezes, à uma descrição por mapeamentos discretos bidimensionais.

Dentro do formalismo de mapeamentos discretos bidimensionais, existe ainda uma categoria específica para os que também preservam a área no espaço de fases. Exemplos de mapeamentos discretos 2-D que preservam a área no espaço de fases apresentam um grande número de aplicações como por exemplo no estudo de plasmas (tokamaks) [14, 15, 16], guia

¹Em processamento de sinal, o ruído branco é um sinal aleatório com igual intensidade em diferentes frequências, fornecendo uma densidade espectral de potência constante [10].

²Consideramos que, em determinado instante, o estado do sistema seja descrito por uma par de variáveis relevantes, por exemplo ação/ângulo. A medida que a dinâmica evolui, a sequência de estados em distintos instantes geram uma órbita. Definimos espaço de fases como o conjunto de todas as órbitas e por consequência, todos os estados possíveis de um sistema.

de ondas [17, 18], bilhares clássicos [19, 20], aceleração de Fermi [21] e outras generalizações [22, 23].

Em nossos estudos, consideramos uma classe de sistemas que podem ser descritos por um Hamiltoniano do tipo

$$H(x, p, t) = \frac{p^2}{2m} + V(x, t) , \quad (1.1)$$

onde $V(x, t) = V_0(x) + V_1(x, t)$. O termo $V_0(x)$ fornece o potencial da parte integrável do sistema, já $V_1(x, t)$ fornece o potencial da parte não integrável.

Sistemas conhecidos como bilhares também são enquadrados neste tipo de Hamiltoniano. Em uma definição simples, um bilhar consiste em uma região fechada delimitada por fronteiras rígidas, onde uma partícula, ou um conjunto de partículas, se movem no interior dessa região sofrendo sucessivas colisões com as fronteiras. Ao colidir com a fronteira, a partícula sofre uma reflexão especular, no sentido de que o ângulo de entrada é igual ao de saída. Se a fronteira de um bilhar for considerada em um regime estático, a parte $V_1(x, t) = 0$ e V_0 é nulo no interior da fronteira, mas infinito fora da mesma.

A dinâmica de sistemas Hamiltonianos é, em geral, não integrável e não ergódica³ [24]. Esse comportamento compõe espaços de fases mistos, contendo mares de caos, toros invariantes e ilhas Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM) [11]. Sistemas fortemente caóticos exibem um comportamento difusivo normal, equivalente à partículas movendo-se aleatoriamente pelo espaço de fases, análogo à um movimento Browniano. Em sistemas quase-integráveis, uma condição inicial tomada ao redor de estruturas estáveis, como ilhas KAM, pode exibir um comportamento difusivo muito complicado. Estruturas de estabilidade influenciam diretamente a dinâmica, gerando efeitos difusivos anômalos para uma órbita caótica [13].

Na maioria dos casos, não estamos interessados no comportamento individual de uma condição inicial ou de uma única partícula, mas sim em propriedades médias do sistema, especialmente quando levamos em consideração um *ensemble*⁴ de partículas [25]. Esta é a principal razão para considerarmos técnicas estatísticas na evolução de fenômenos dinâmicos [26, 27, 28, 29]. Fazendo a conexão com o conceito de difusão, um exemplo intuitivo seria pingar uma gota de tinta colorida em um recipiente com água, observando então como as partículas de tinta se movem e se afastam uma das outras na região delimitada pelo recipiente com água. Este processo é diretamente associado com processos de difusão na física.

³Na física, um sistema com dinâmica ergódica é um certo sistema que, dado tempo suficiente para sua evolução, eventualmente voltará à um estado experienciado previamente.

⁴Em física estatística, a palavra francesa *ensemble* refere-se à um conjunto cujos elementos são sistemas de partículas que servem para descrever um único sistema dado. Foi inicialmente proposto como uma maneira de se obter o valor médio no tempo do sistema tomando-se a média dos elementos do *ensemble* num determinado tempo.

1.2 Difusão

Difusão é um fenômeno amplamente estudado e observado em muitas áreas da ciência [30, 31, 32, 33, 34]. É um processo descrito por uma equação diferencial parcial, no tempo e espaço, que descreve flutuações na densidade de um observável em questão.

A equação

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0, \quad (1.2)$$

onde $\rho = \rho(\vec{r}, t)$ é a densidade do observável e \vec{J} é o fluxo de difusão, é conhecida como a equação da continuidade para uma quantidade conservada. Esta equação afirma que mudanças na densidade de um sistema ocorrem devido à fluxos de entrada e/ou saída de material/energia.

A equação da difusão pode ser obtida a partir da equação da continuidade, considerando a primeira lei de Fick, uma lei fenomenológica que afirma que o fluxo de material/energia sofrendo difusão em qualquer parte do sistema é proporcional ao gradiente local da densidade. Em termos matemáticos

$$\vec{J} = -D\nabla\rho(\vec{r}, t), \quad (1.3)$$

onde D é definido como o coeficiente de difusão.

Assim, combinando as equações Eqs. (1.2), (1.3), obtemos a equação da difusão como

$$\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} = D\nabla^2 \rho(\vec{r}, t). \quad (1.4)$$

Considerando o processo de difusão somente em uma dimensão e que, inicialmente, a distribuição é centrada em uma posição arbitrária x_0 , a densidade inicial pode ser representada por $\rho(x, 0) = \delta(x - x_0)$, onde $\delta(x - x_0)$ é a função delta de Dirac centrada em x_0 . Neste caso, a solução típica para a equação da difusão é dada por

$$\rho(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}}. \quad (1.5)$$

Essa solução tem como representação gráfica uma gaussiana. Distribuições gaussianas são muito conhecidas e aplicadas em diferentes áreas da física geral. Especialmente, em física estatística, distribuições gaussianas associadas à uma variável aleatória, no caso x , são caracterizadas também por duas medidas elementares: a média, definida por $\mu \equiv \langle x \rangle$ e a variância, definida por $\sigma^2 \equiv \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$.

O coeficiente de difusão é definido também em termos da derivada temporal da variância, de modo que

$$D = \frac{1}{2} \frac{d\sigma^2}{dt} \quad \longrightarrow \quad \sigma^2 = 2Dt.$$

Tendo em vista essas definições, a solução típica para a equação da difusão em uma dimensão pode ser escrita também em termos das medidas estatísticas μ e σ^2 , como segue

$$\rho(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} . \quad (1.6)$$

O conhecimento da função densidade de probabilidade $\rho(x, t)$ é de grande importância para mecânica estatística do problema, pois a partir dela vários observáveis podem ser obtidos, como por exemplo o deslocamento médio, definido como

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x \rho dx . \quad (1.7)$$

Toda a discussão sobre o conceito e a matemática de processos difusivos são pertinentes para a problemática do projeto pois, como citado anteriormente, podemos analisar a difusão no espaço de fases da dinâmica de qualquer sistema de interesse. É importante apontar também que essa difusão não acontece em um espaço físico, mas sim no espaço matemático definido como o conjunto de todos os estados possíveis do sistema.

1.3 Estado da arte

Na descrição de sistemas, as equações da dinâmica estão sempre vinculadas à parâmetros de controle, que controlam algumas transições. Para um mapeamento discreto bidimensional, as propriedades do espaço de fases dependem de duas coisas: *(i)* da não linearidade envolvida e; *(ii)* da lei que descreve o comportamento do argumento da função não linear. Para uma combinação específica delas, o tamanho do mar de caos depende explicitamente do parâmetro de controle do mapa. Assim, quando o parâmetro de controle, que rege a amplitude da não linearidade vai a zero continuamente, o mar de caos segue também a mesma tendência, caracterizando assim uma transição análoga à uma transição de fase contínua.

O comportamento de observáveis médios ao longo do mar de caos depende também da condição inicial. Sabemos pela literatura que uma escala adicional aparece quando a ação (velocidade ou energia) inicial não é desprezível. A primeira observação desse fenômeno foi relatada na Ref.[35]. Nos anos subsequentes, resultados envolvendo o mesmo fenômeno também foram observados em outros modelos, inclusive em bilhares dissipativos [36]. Nossa contribuição é na caracterização da escala adicional usando a quebra de simetria da função distribuição de probabilidade do observável em questão. Essa função será fornecida pela solução da equação da difusão no espaço de fases quando consideramos condições de contorno dos sistemas de interesse.

Neste projeto, investigamos a dinâmica de alguns sistemas descritos por mapeamentos discretos bidimensionais nas proximidades de duas transições: *(i)* integrabilidade para não integrabilidade e; *(ii)* crescimento limitado de energia para crescimento ilimitado de energia

(aceleração de Fermi).

As duas transições mencionadas acima já são conhecidas na literatura [35, 37]. Para a transição de integrabilidade para não integrabilidade⁵, sabemos que o principal fator para determinar os expoentes críticos é a forma da função que define o argumento da não linearidade.

Para uma família de mapeamentos descritos nas variáveis ação-ângulo [38], a organização do espaço de fases depende do comportamento da função que descreve a variável ângulo. Se, por exemplo, a função é escrita como $1/I^\gamma$, com $\gamma > 0$, claramente existe uma divergência no limite em que $I \rightarrow 0$. Essa divergência acarreta na ausência de correlação nas variáveis θ_{n+1} e θ_n (variáveis ângulo no instante n e $n + 1$ respectivamente). Portanto ocorre uma difusão na variável ação [39]. Entretanto quando I cresce, surgem correlações com a variável θ que trazem regularidade no sistema criando um conjunto de curvas invariantes do tipo *spanning* no espaço de fases, estas impedem o fluxo de partículas e dão origem às escalas e aos expoentes críticos [38].

Nossa contribuição fundamental para compreensão das propriedades dos sistemas de interesse consiste na investigação da dinâmica quando a ação inicial é maior que zero, não sendo portanto desprezível, mas ao mesmo tempo, menor que o valor da ação obtido para a curva invariante *spanning* mais baixa. Na evolução da dinâmica ocorre difusão na ação, parte de um conjunto de partículas poderá exibir crescimento na ação (com probabilidade p) e parte exibirá decréscimo na ação (com probabilidade $q = 1 - p$). Quando a distribuição de probabilidade for simétrica, a curva da ação média deverá permanecer constante. Entretanto quando a simetria da distribuição de probabilidade for quebrada, a ação média não será mais constante, gerando assim uma escala adicional. Este é o fenômeno que queremos investigar neste estudo.

Dois exemplos conhecidos na literatura para família de mapeamentos citada acima são o modelo Fermi-Ulam [40] e o modelo *bouncer* [41]. Esses dois modelos foram escolhidos para investigação em nossos estudos nesta dissertação. Apresentaremos uma descrição completa desses modelos no próximo capítulo.

⁵Esta transição é de fato análoga à uma transição de fase contínua, pois a amplitude do mar de caos vai continuamente a zero a medida que o parâmetro de controle é também reduzido à zero.

Descrição dos modelos

Este segundo capítulo é dedicado a apresentação e discussão dos modelos de interesse para o estudo da quebra de simetria da densidade de probabilidade. As próximas seções tratam separadamente cada modelo, entretanto, primeiramente apresentamos a família de mapeamentos bidimensionais que também recupera esses modelos. Em seguida, a segunda e a terceira seções são dedicadas para os modelos Fermi-Ulam e *bouncer* respectivamente.

2.1 Família de mapeamentos

Considerando inicialmente um Hamiltoniano do tipo

$$H(I_1, I_2, \theta_1, \theta_2) = H_0(I_1, I_2) + \epsilon H_1(I_1, I_2, \theta_1, \theta_2) , \quad (2.1)$$

onde as variáveis I_i e θ_i com $i = 1, 2$ correspondem respectivamente à ação e ângulo do sistema.

O parâmetro de controle ϵ define a magnitude do acoplamento entre H_0 e H_1 . Se $\epsilon = 0$ o sistema é integrável, entretanto para $\epsilon \neq 0$ o sistema não é integrável. Temos, então, um regime envolvendo uma transição de integrabilidade para não integrabilidade. A caracterização da dinâmica em termos de um mapeamento discreto acontece quando se introduz uma seção de Poincaré definida pelo plano $I_1 \times \theta_1$, assumindo que θ_2 é constante. Um mapeamento bidimensional [11] que descreve o comportamento do Hamiltoniano considerado na Eq. (2.1) é

$$T : \begin{cases} I_{n+1} = I_n + \epsilon h(\theta_n, I_{n+1}) \\ \theta_{n+1} = [\theta_n + K(I_{n+1}) + \epsilon p(\theta_n, I_{n+1})] \text{ mod}(2\pi) \end{cases} , \quad (2.2)$$

onde h , K e p são funções não lineares de suas variáveis. O índice n denota a n -ésima iteração do mapeamento.

Para que o mapa dado na Eq. (2.2) preserve a área do espaço de fases, as expressões de $h(\theta_n, I_{n+1})$ e $p(\theta_n, I_{n+1})$ devem ser relacionadas como

$$\frac{\partial p(\theta_n, I_{n+1})}{\partial \theta_n} + \frac{\partial h(\theta_n, I_{n+1})}{\partial I_{n+1}} = 0 . \quad (2.3)$$

Agora, consideramos o caso particular em que $p(\theta_n, I_{n+1}) = 0$ e $h(\theta_n, I_{n+1}) = \sin \theta_n$. Assim, o mapeamento resultante é do tipo

$$T : \begin{cases} I_{n+1} = I_n + \epsilon \sin(\theta_n) \\ \theta_{n+1} = [\theta_n + K(I_{n+1})] \text{ mod}(2\pi) \end{cases} . \quad (2.4)$$

Então, a forma da função $K(I_{n+1})$ determina o modelo que o mapeamento explicitado na Eq. (2.4) descreve. Alguns exemplos são:

- $K(I_{n+1}) = I_{n+1}$ recuperamos o mapa de Taylor-Chirikov, conhecido como mapa padrão [42].
- $K(I_{n+1}) = 2/I_{n+1}$, recuperamos a versão simplificada do modelo unidimensional do acelerador de Fermi, conhecido como Fermi-Ulam [40].
- $K(I_{n+1}) = \zeta I_{n+1}$, assumindo ζ constante, recuperamos o modelo *bouncer* [41].
- $K(I_{n+1}) = \begin{cases} 4\zeta^2 \left(I_{n+1} - \sqrt{I_{n+1}^2 - \frac{1}{\zeta^2}} \right), & \text{se } I_{n+1} > \frac{1}{\zeta} \\ 4\zeta^2 I_{n+1}, & \text{se } I_{n+1} \leq \frac{1}{\zeta} \end{cases}$, assumindo ζ constante, recuperamos o modelo híbrido Fermi-Ulam-*bouncer* [43].

Como foi explicado anteriormente, vamos nos concentrar nos dois exemplos do modelo do acelerador de Fermi, o modelo Fermi-Ulam e o modelo *bouncer*.

2.2 O modelo Fermi-Ulam

Esse modelo é uma versão do acelerador de Fermi, o qual foi introduzido em 1949 por Enrico Fermi [44], como uma tentativa para explicar as altas energias e aceleração de partículas cósmicas do meio interestelar. Essas partículas cósmicas estão frequentemente interagindo com campos magnéticos oscilantes, provenientes de estrelas e até mesmo galáxias. O mecanismo do acelerador consiste basicamente em uma partícula carregada sofrendo repulsões por fortes campos magnéticos oscilantes, entretanto, esse mecanismo pode ser diretamente relacionado com uma partícula clássica sofrendo colisões com uma parede rígida.

O modelo Fermi-Ulam (FUM) consiste em uma partícula de massa unitária, sofrendo sucessivas colisões em uma região delimitada por duas paredes rígidas, uma oscilante e a outra fixa. A Fig.2.1 é um exemplo esquemático do FUM.

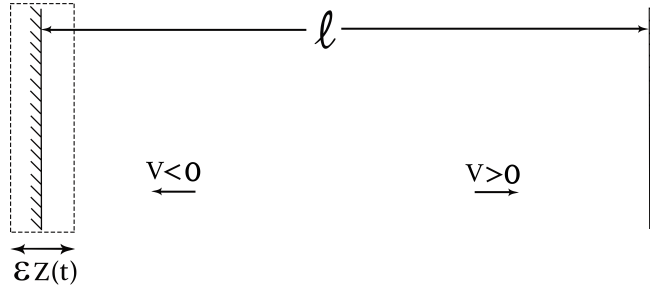


Figura 2.1: *Ilustração do modelo Fermi-Ulam. O parâmetro geométrico l equivale a distância entre as duas paredes e as direções dos vetores denotam o sinal da velocidade da partícula. Normalmente, a função dependente do tempo $Z(t)$ é escolhida como $\cos(\omega t)$, com ω sendo a frequência e ε a amplitude de de oscilação.*

Este sistema pode ser descrito utilizando o formalismo de mapeamentos discretos. A velocidade da partícula é equivalente à variável ação e a fase, relacionada com parede oscilante, corresponde à variável ângulo. Considerando que o valor absoluto da velocidade muda exatamente no momento da colisão, o modelo simplificado¹ para o FUM é descrito como o mapeamento a seguir

$$\begin{cases} V_{n+1} = |V_n - 2\varepsilon \sin(\phi_{n+1})| \\ \phi_{n+1} = [\phi_n + \frac{2}{V_n}] \text{ mod}(2\pi) \end{cases} \quad (2.5)$$

O termo $\frac{2}{V_n}$ corresponde ao tempo entre colisões e o termo $-2\varepsilon \sin(\phi_{n+1})$ fornece o ganho ou a perda de velocidade em cada colisão.

2.3 O modelo *bouncer*

O modelo *bouncer* também pode ser interpretado como uma versão do acelerador de Fermi discutido anteriormente. O modelo consiste basicamente em uma partícula clássica de massa m , sob a influência de um campo gravitacional constante g , que sofre colisões com uma parede móvel. A Fig.2.2 ilustra o esquema do modelo.

Analogamente ao FUM, escolhemos aqui a versão simplificada do modelo, considerando que a parede está parada no momento da colisão com a partícula, mas existe troca de momentum, como se a parede estivesse em movimento. Assim, descrevemos o sistema utilizando um mapeamento bidimensional nas variáveis (v_n, t_n) , onde v_n e t_n correspondem respectivamente à velocidade e o tempo da partícula na n -ésima colisão com a parede móvel. Supondo que no tempo $t = t_n$, a partícula está na posição $y = 0$, com velocidade $v = v_n > 0$, seu tempo de subida é calculado como

¹Assumimos que ambas as paredes são fixas, entretanto quando a partícula sofre a colisão, existe troca de momentum como se a parede estivesse em movimento. O modelo simplificado é de fato válido quando o parâmetro de não linearidade ε é relativamente pequeno.

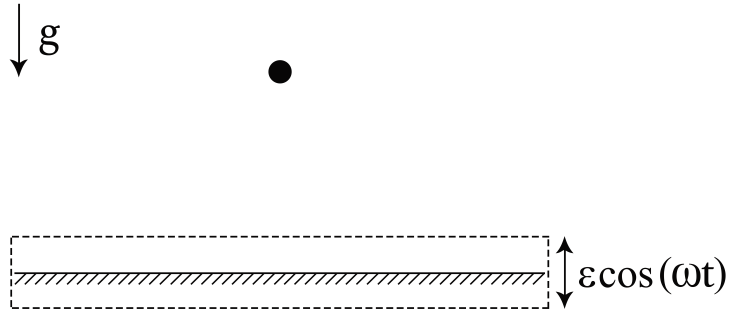


Figura 2.2: Ilustração do modelo *bouncer*. O campo gravitacional constante g influenciando o movimento da partícula puntual, levando à zona de colisões delimitada pela região tracejada. A parede rígida oscila com uma função $\epsilon \cos(\omega t)$, onde ϵ e ω são respectivamente a amplitude e frequência de oscilação.

$$t_s = \frac{v_n}{g}, \quad (2.6)$$

e seu tempo de descida como

$$t_d = \frac{v_n}{g}. \quad (2.7)$$

Temos então, que o tempo entre as colisões é dado por, $t_t = t_s + t_d$, assim

$$t_t = 2 \frac{v_n}{g}. \quad (2.8)$$

Agora, fazendo uma mudança para variáveis adimensionais, $V_n = (v_n \omega)/g$ e $\epsilon = (\epsilon \omega^2)/g$ e medindo o tempo como $\phi_n = \omega t_n$, obtemos o mapeamento para a versão simplificada dado por

$$\begin{cases} V_{n+1} = |V_n - \epsilon \sin(\phi_{n+1})| \\ \phi_{n+1} = [\phi_n + 2V_n] \text{ mod}(2\pi) \end{cases}. \quad (2.9)$$

No modelo simplificado, velocidades negativas são proibidas, pois a partícula se moveria além da parede. Para evitar esse tipo de problema, se depois de cada colisão a partícula apresentar uma velocidade negativa, ela é reinjetada de volta com a mesma velocidade.

É importante ressaltar também que o valor do campo gravitacional g está implícito nas expressões de V_n e ϵ , conforme a mudança para variáveis adimensionais. Assim, o parâmetro de controle e de não linearidade ϵ também traz informações sobre o valor do campo gravitacional do modelo.

Descrição da teoria

Este capítulo é dedicado à descrição do procedimento teórico adotado no estudo da quebra de simetria da distribuição da densidade de probabilidade. A quebra de simetria acarreta em uma mudança no comportamento da velocidade média para os modelos anteriormente discutidos. O procedimento teórico é baseado essencialmente na solução analítica da equação da difusão com certas condições de contorno, considerando a difusão da variável ação (velocidades) que ocorre no espaço de fases dos modelos FUM e *bouncer*.

3.1 Solução fundamental para a equação da difusão

Como já introduzido no primeiro capítulo, a equação da difusão fornece uma nova análise de propriedades dinâmicas para sistemas descritos por mapeamentos discretos. Mas antes de fazer a real conexão com os modelos de interesse, apresentamos nestas seções uma discussão sobre a solução da equação da difusão. É interessante lembrar que a equação da difusão na ausência de campos externos e em uma dimensão é dada por

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2}, \quad (3.1)$$

onde x é uma variável aleatória em um processo difusivo e D o coeficiente de difusão.

A solução dessa equação fornece $\rho(x, t)$ que é a densidade de probabilidade de encontrar uma partícula em uma certa posição x , no tempo t . Consideramos como a solução fundamental quando existe uma difusão em um meio infinito $-\infty < x < \infty$, portanto não existem barreiras e o tempo t é evoluído normalmente a partir de $t_0 = 0$. Tomando uma distribuição inicial $\rho(x, 0) = \delta(x - x_0)$, este problema se torna um característico problema de valor inicial, o qual

pode ser resolvido analiticamente com dois tipos de transformadas. Primeiramente, podemos fazer uma transformada de Laplace com respeito a t , já que $0 < t < \infty$.

$$\mathcal{L}[\rho(x, t)] = \tilde{\rho}(x, s) \quad , \quad \mathcal{L}\left[\frac{\partial\rho(x, t)}{\partial t}\right] = s\rho(x, s) - \rho(x, 0) \quad .$$

Assim, a Eq.(3.1) é reescrita como

$$s\tilde{\rho}(x, s) - \rho(x, 0) = D\partial_x^2\tilde{\rho}(x, s) \quad , \quad (3.2)$$

com $\partial_x^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$. Então, é direto que

$$(s - D\partial_x^2)\tilde{\rho}(x, s) = \rho(x, 0) = \delta(x - x_0) \quad . \quad (3.3)$$

Agora podemos fazer uma transformada de Fourier com respeito a x ,

$$\mathcal{F}[\tilde{\rho}(x, s)] = \tilde{f}(k, s) \quad .$$

Sabendo que

$$\tilde{\rho}(x, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k, s)e^{ikx} dk \quad \rightarrow \quad \partial_x^2\tilde{\rho}(x, s) = (ik)^2\tilde{\rho}(x, s) = -k^2\tilde{\rho}(x, s) \quad ,$$

então

$$(s + Dk^2)\tilde{f}(k, s) = \mathcal{F}[\delta(x - x_0)] \quad . \quad (3.4)$$

Entretanto, é conhecido que $\mathcal{F}[\delta(x - x_0)] = e^{-ikx_0}$. Então, implicamos imediatamente que

$$\tilde{f}(k, s) = \frac{e^{-ikx_0}}{s + Dk^2} \quad . \quad (3.5)$$

Agora o trabalho está somente na inversão das transformadas. É interessante inverter primeiramente a transformada de Laplace, lembrando que $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+a}\right] = e^{-at}$,

$$\mathcal{L}^{-1}[\tilde{f}(k, t)] = f(k, t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-ikx_0}}{s + Dk^2}\right] \quad \rightarrow \quad f(k, t) = e^{-(ikx_0 + dk^2t)} \quad .$$

E então, a transformada inversa de Fourier

$$\mathcal{F}^{-1}[f(k, t)] = \rho(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} e^{-(ikx_0 + dk^2t)} \quad ,$$

levando a

$$\rho(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Dt \left(k^2 - \frac{ik(x-x_0)}{Dt} \right)} dk.$$

Completando quadrados no argumento da função exponencial,

$$k^2 - \frac{ik(x-x_0)}{Dt} + \left(\frac{i(x-x_0)}{2Dt} \right)^2 - \left(\frac{i(x-x_0)}{2Dt} \right)^2 = \left(k - \frac{ik(x-x_0)}{2Dt} \right)^2 - \left(\frac{i(x-x_0)}{2Dt} \right)^2,$$

implica o seguinte

$$\rho(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Dt \left(k - \frac{i(x-x_0)}{2Dt} \right)^2} e^{-Dt \left(\frac{x-x_0}{2Dt} \right)^2} dk = \frac{e^{-Dt \left(\frac{x-x_0}{2Dt} \right)^2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Dt \left(k - \frac{i(x-x_0)}{2Dt} \right)^2} dk.$$

Mas, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Dt \left(k - \frac{i(x-x_0)}{2Dt} \right)^2} dk$ é um perfeito exemplo de uma integral Gaussiana, calculada como $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+b)^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$. Portanto, finalmente obtemos a seguinte expressão

$$\rho(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}}, \quad (3.6)$$

que é de fato a solução fundamental para a equação da difusão.

Em termos do valor médio e da variância, a expressão mostrada anteriormente na Eq.(1.6) é recuperada.

3.2 Soluções particulares para a equação da difusão

Geralmente, a maioria dos problemas físicos não apresentam uma matemática tão amigável quando consideramos suas particularidades. Para isso, é necessário levar em consideração as condições de contorno dos sistemas em questão.

Discutimos aqui duas soluções particulares para a equação da difusão. Primeiramente a solução considerando a difusão em um espaço semi infinito $0 \leq x < \infty$, ou seja, existe uma barreira em $x = 0$ onde não há fluxo, o que em termos matemáticos equivale à $\frac{\partial \rho(0,t)}{\partial x} = 0, \forall t > 0$. Esta solução será utilizada para a análise do modelo *bouncer*. Depois, a solução considerando a difusão em um espaço finito e também sem fluxo nas barreiras. Em termos matemáticos $\frac{\partial \rho(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial \rho(L,t)}{\partial x} = 0, \forall t > 0$, onde $x \in [0, L]$ com $x = 0$ e $x = L$ as posições das barreiras. Já esta solução está conectada com o modelo Fermi-Ulam.

Difusão semi infinita $0 \leq x < \infty$

Para resolver a equação da difusão, dada pela Eq.(3.1) considerando uma barreira em $x = 0$ onde não há fluxo, $\frac{\partial \rho(0,t)}{\partial x} = 0$ e distribuição inicial $\rho(x, 0) = \delta(x - x_0)$ é interessante utilizar um método muito conhecido na resolução de problemas de eletromagnetismo, o chamado

método das imagens.

O método das imagens consiste basicamente na substituição de alguns elementos do problema original por uma densidade localizada em uma posição específica, respeitando as condições de contorno impostas inicialmente. No caso de uma única distribuição inicial centrada em $x = x_0$ e uma barreira refletora¹, uma combinação linear das soluções com distribuições iniciais em $x = x_0$ e $x = -x_0$ deve também ser solução do problema, de tal modo que

$$\rho(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \left[\exp\left(\frac{-(x - x_0)^2}{4Dt}\right) + \exp\left(\frac{-(x + x_0)^2}{4Dt}\right) \right]. \quad (3.7)$$

Aplicando a condição de contorno, temos que de fato $\frac{\partial \rho(0, t)}{\partial x} = 0$. Então, em termos da média μ e da variância σ^2 , a solução para o caso de uma difusão semi infinita com barreira refletora é dada por

$$\rho(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left[\exp\left(\frac{-(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) + \exp\left(\frac{-(x + \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \right]. \quad (3.8)$$

Essa solução é conhecida como *Folded Normal Distribution* [45]. Nos preparando para a conexão com o modelo *bouncer*, calculamos, por definição, o valor médio de deslocamento como

$$\langle x \rangle = \int_0^{\infty} x \rho(x; \mu, \sigma^2) dx, \quad (3.9)$$

o qual será análogo ao valor da velocidade média das partículas no modelo *bouncer*. Substituindo a Eq.(3.8) na integral, temos como resultado

$$\langle x \rangle = \sqrt{\frac{2\sigma^2}{\pi}} \exp\left(\frac{-\mu^2}{2\sigma^2}\right) - \mu \operatorname{erf}\left(\frac{-\mu}{\sqrt{2\sigma^2}}\right), \quad (3.10)$$

onde $\operatorname{erf}(arg)$ é a função erro definida por $\operatorname{erf}(arg) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{arg} e^{-t^2} dt$.

Por fim, analisando a função anterior, é interessante definir uma variável auxiliar de modo que $z = \frac{\mu}{\sqrt{2\sigma^2}}$. Portanto, a solução final pode ser convenientemente reescrita como

$$\langle x \rangle = x_0 \left(\frac{1}{z\sqrt{\pi}} e^{-z^2} + \operatorname{erf}(z) \right). \quad (3.11)$$

Difusão finita $x \in [0, L]$

Analogamente, a solução para a equação da difusão considerando a mesma distribuição inicial $\rho(x, 0) = \delta(x - x_0)$, mas agora em uma região delimitada por duas barreiras, uma em $x = 0$ e outra em $x = L$, com condição de contorno $\frac{\partial \rho(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial \rho(L, t)}{\partial x} = 0, \forall t > 0$, também pode ser obtida via método das imagens.

Nesse caso, a contribuição da densidade imagem deve ser somada infinitas vezes, pois

¹É definida refletora, pois não há fluxo através da barreira, então todos os observáveis permanecem no espaço semi infinito definido. Não há perda na densidade.

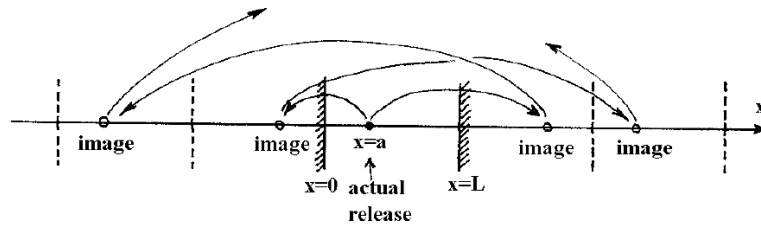


Figura 3.1: Ilustração do método das imagens para o caso de uma difusão em uma região finita. Aqui a condição inicial é arbitrária em $x = a$, dentro do intervalo $[0, L]$. Figura retirada do livro *The Mathematics of Diffusion*, de J. Crank.

sempre existirá mais uma imagem devido a outra barreira refletora. Assim, é razoável assumir que a solução será uma somatória de infinitas soluções Gaussianas centradas em x_0 , determinada pela distribuição inicial e a distância entre as barreiras, de modo que

$$\rho(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\exp\left(\frac{-(x - 2mL - x_0)^2}{4Dt}\right) + \exp\left(\frac{-(x - 2mL + x_0)^2}{4Dt}\right) \right]. \quad (3.12)$$

Em termos da média μ e da variância σ^2 a expressão é reescrita como

$$\rho(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\exp\left(\frac{-(x - 2mL - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) + \exp\left(\frac{-(x - 2mL + \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \right]. \quad (3.13)$$

Entretanto, a solução apresentada na Eq.(3.13) não está normalizada para o espaço definido $x \in [0, L]$. Para garantir uma solução devidamente normalizada, é necessário que $A \int_0^L \rho(x; \mu, \sigma^2) dx = 1$, com A sendo uma constante de normalização. Resolvendo para A temos

$$A = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[-\operatorname{erf}\left(\frac{n - \mu}{\sqrt{2\sigma^2}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{n + L - \mu}{\sqrt{2\sigma^2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{n + \mu}{\sqrt{2\sigma^2}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{n + L + \mu}{\sqrt{2\sigma^2}}\right) \right],$$

definindo $n = 2mL$ e considerando a propriedade da função erro $\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x)$, a constante de normalização pode ser convenientemente reescrita como

$$A = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{\mu - n}{\sqrt{2\sigma^2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\mu - L - n}{\sqrt{2\sigma^2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\mu + n}{\sqrt{2\sigma^2}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{\mu + L + n}{\sqrt{2\sigma^2}}\right) \right]. \quad (3.14)$$

Assim, a solução para este caso particular da difusão em um meio finito, agora devidamente normalizada é dada por

$$\rho(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi\sigma^2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(\frac{-(x-n-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) + \exp\left(\frac{-(x-n+\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}{\operatorname{erf}\left(\frac{\mu-n}{\sqrt{2\sigma^2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\mu-L-n}{\sqrt{2\sigma^2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\mu+n}{\sqrt{2\sigma^2}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{\mu+L+n}{\sqrt{2\sigma^2}}\right)}. \quad (3.15)$$

Agora, como no caso anterior, é interessante calcular o valor do deslocamento médio neste espaço delimitado pelas barreiras em $x = 0$ e $x = L$. Para isso, obtemos através da definição

$$\langle x \rangle = \int_0^L x \rho(x; \mu, \sigma^2) dx. \quad (3.16)$$

Por ser um problema não simétrico, os cálculos algébricos são extensos e árduos, no entanto é possível obter a seguinte solução analítica

$$\langle x \rangle = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{2\sigma^2} (\Delta^{(1)} \exp + \Delta^{(2)} \exp) + \sqrt{\pi} [(n - \mu) \Delta^{(1)} \operatorname{erf} + (n + \mu) \Delta^{(2)} \operatorname{erf}]}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{erf}\left(\frac{\mu-n}{\sqrt{2\sigma^2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\mu-L-n}{\sqrt{2\sigma^2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\mu+n}{\sqrt{2\sigma^2}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{\mu+L+n}{\sqrt{2\sigma^2}}\right)}, \quad (3.17)$$

onde

$$\begin{aligned} \Delta^{(1)} \exp &= \exp\left(-\left(\frac{\mu-n}{\sqrt{2\sigma^2}}\right)^2\right) - \exp\left(-\left(\frac{\mu-n+L}{\sqrt{2\sigma^2}}\right)^2\right), \\ \Delta^{(2)} \exp &= \exp\left(-\left(\frac{\mu+n}{\sqrt{2\sigma^2}}\right)^2\right) - \exp\left(-\left(\frac{\mu+n-L}{\sqrt{2\sigma^2}}\right)^2\right), \\ \Delta^{(1)} \operatorname{erf} &= \operatorname{erf}\left(\frac{\mu-n-L}{\sqrt{2\sigma^2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\mu-n}{\sqrt{2\sigma^2}}\right), \\ \Delta^{(2)} \operatorname{erf} &= \operatorname{erf}\left(\frac{\mu+n}{\sqrt{2\sigma^2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\mu+n+L}{\sqrt{2\sigma^2}}\right). \end{aligned}$$

Aqui também é interessante utilizar a variável auxiliar anteriormente definida como $z = \frac{\mu}{\sqrt{2\sigma^2}}$, assim reescrevemos a solução

$$\langle x \rangle = \frac{\mu}{2} \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z\sqrt{\pi}} (\Delta^{(1)} \exp + \Delta^{(2)} \exp) + \frac{1}{\mu} [(n - \mu) \Delta^{(1)} \operatorname{erf} + (n + \mu) \Delta^{(2)} \operatorname{erf}]}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{erf}\left(\frac{\mu-n}{\sqrt{2\sigma^2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\mu-L-n}{\sqrt{2\sigma^2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\mu+n}{\sqrt{2\sigma^2}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{\mu+L+n}{\sqrt{2\sigma^2}}\right)}, \quad (3.18)$$

agora com,

$$\begin{aligned}\Delta^{(1)}\text{exp} &= \exp\left(-\left(z - \frac{n}{\sqrt{2\sigma^2}}\right)^2\right) - \exp\left(-\left(z - \frac{n+L}{\sqrt{2\sigma^2}}\right)^2\right), \\ \Delta^{(2)}\text{exp} &= \exp\left(-\left(z + \frac{n}{\sqrt{2\sigma^2}}\right)^2\right) - \exp\left(-\left(z + \frac{n-L}{\sqrt{2\sigma^2}}\right)^2\right), \\ \Delta^{(1)}\text{erf} &= \text{erf}\left(z - \frac{n+L}{\sqrt{2\sigma^2}}\right) - \text{erf}\left(z - \frac{n}{\sqrt{2\sigma^2}}\right), \\ \Delta^{(2)}\text{erf} &= \text{erf}\left(z + \frac{n}{\sqrt{2\sigma^2}}\right) - \text{erf}\left(z + \frac{n+L}{\sqrt{2\sigma^2}}\right).\end{aligned}$$

É interessante agora fazer um teste com essa expressão. Quando tomamos o limite onde $L \rightarrow \infty$ e $n = 0$, ou seja, em um espaço semi infinito onde não existem múltiplas imagens, a solução particular apresentada na Eq.(3.11) deve ser recuperada

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \langle x \rangle|_{n=0} = x_0 \left(\frac{1}{z\sqrt{\pi}} e^{-z^2} + \text{erf}(z) \right),$$

isso de fato acontece, mostrando que a solução é no mínimo encorajadora.

Finalmente, ainda sobre a solução apresentada na Eq.(3.18) é interessante analisar também o limite quando $\sigma \rightarrow \infty$, o que é equivalente a $t \rightarrow \infty$

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \langle x \rangle = \frac{L}{2},$$

o que é de fato esperado para um processo difusivo em um espaço finito de comprimento L . Esse resultado analítico explica exatamente o platô de saturação para as velocidades médias do FUM.

3.3 Conexão com os modelos

As soluções particulares discutidas na seção anterior, especificamente as expressões para o valor do deslocamento médio apresentadas nas Eqs.(3.11) e (3.18) são de grande importância para a problemática do projeto. A difusão que acontece no espaço de fases para variável ação, ou seja, na velocidade para os modelos *bouncer* e Fermi-Ulam pode ser descrita por essas soluções.

Conexão com o modelo *bouncer*

Primeiramente, é importante enfatizar que a seguinte análise não é feita no espaço físico do sistema. Sabemos que o modelo *bouncer*, por sua descrição, considera a ação de um campo gravitacional que garante o retorno das partículas para a zona de colisão com a barreira oscilante. Assim, é esperado que uma análise de difusão para esse sistema considerasse a equação da difusão na presença de campos externos, a qual adicionaria dois termos nesta equação diferencial. Entretanto, toda a conexão da solução da equação da difusão com o modelo *bouncer*

acontece quando analisamos o conceito abstraído da difusão que ocorre espaço de fases, um espaço matemático composto por todas as órbitas possíveis da dinâmica do sistema. Portanto, particularmente para esta análise, não é necessário considerar a equação da difusão na presença de campos externos.

O espaço de fases característico para o modelo *bouncer* dado por $V \times \phi$ é classificado como um espaço de fases misto, composto por mar de caos e ilhas de estabilidade. Como discutimos anteriormente, espaço de fases reflete o comportamento da dinâmica e, a dinâmica é fortemente dependente do parâmetro de controle ϵ , por isso a composição do espaço de fases depende do valor desse parâmetro. Para valores específicos de ϵ o espaço de fases pode ser composto somente pelo mar de caos.

Analisando o mapeamento mostrado na Eq.(2.9) é possível perceber que a medida que V cresce, em teoria um crescimento ilimitado, diminui as correlações entre V e ϕ , garantindo sempre a existência de caos no espaço de fases. Mais ainda, por considerar somente o valor absoluto de V , temos um espaço de fases em perfeita analogia com um espaço semi infinito, onde agora a densidade de probabilidade, relacionada as velocidades das partículas, descreve um processo difusivo em uma região $0 \leq V < \infty$.

Como estamos interessados na difusão da velocidade no espaço de fases, tomamos inicialmente a equação de recorrência da velocidade no mapeamento, que é a seguinte

$$V_{n+1} = |V_n - \epsilon \sin(\phi_{n+1})| . \quad (3.19)$$

Mas, por definição, podemos calcular o valor médio na enésima mais uma iteração do mapa como $\mu_{n+1} = \langle V_{n+1} \rangle$.

Aplicando a média na expressão (3.19), temos que

$$\mu_{n+1} = \langle V_n \rangle \longrightarrow \mu_{n+1} = \mu_n .$$

Já o cálculo da variância é diferente, pois $\langle \sin^2(\phi_{n+1}) \rangle \neq 0$, então partindo de $\sigma^2 = \langle V^2 \rangle - \langle V \rangle^2$, temos que

$$\langle V_{n+1}^2 \rangle = \langle V_n^2 \rangle + \frac{1}{2}\epsilon^2 .$$

E assim a variância calculada na enésima mais uma iteração do mapa pode ser escrita como

$$\sigma_{n+1}^2 = \langle V_{n+1}^2 \rangle - \langle V_{n+1} \rangle^2 = \langle V_n^2 \rangle - \frac{1}{2}\epsilon^2 - \langle V_n \rangle^2 \longrightarrow \sigma_{n+1}^2 = \sigma_n^2 + \frac{1}{2}\epsilon^2 .$$

É interessante saber como essas medidas estatísticas variam em função do número de iterações² n , o qual é relacionado ao tempo de simulação dos sistemas. O valor médio μ é

²O número de iteração também é o número de colisões de uma partícula com a fronteira oscilante do modelo.

constante, isso implica que μ é na verdade o valor da velocidade inicial da partícula, ou seja $\mu = \mu_0 = V_0$. Entretanto, a variância não é constante, assim é uma função de n , consideramos então, a teoria de equações de diferença [46] que afirma que, para suficiente iterações $n \rightarrow \infty$, é possível escrever

$$\sigma_{n+1}^2 - \sigma_n^2 = \frac{d\sigma^2}{dn} \rightarrow \sigma^2(n) = \sigma_0^2 + \frac{1}{2}\epsilon^2 n ,$$

com isso, saímos do domínio de tempo discreto e entramos no domínio de tempo contínuo, possibilitando assim a conexão com a solução da equação da difusão. Não obstante, o valor da variância inicial σ_0 é de fato nulo para uma distribuição inicial perfeita delta de Dirac.

E agora, trazendo a definição da variável auxiliar z feita anteriormente, substituindo os valores das medidas estatísticas $\mu = V_0$ e $\sigma^2 = \sigma^2(n) = \frac{1}{2}\epsilon^2 n$, computadas para o modelo *bouncer*, temos z em função do número de iterações n

$$z = \frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma(n)} \rightarrow z(n) = \frac{V_0}{\epsilon\sqrt{n}} . \quad (3.20)$$

Por fim, substituindo a Eq.(3.20) na Eq.(3.11), obtemos pela primeira vez uma função analítica que determina o comportamento das velocidades médias das partículas no modelo *bouncer* em função do número de iterações do mapeamento, dada por

$$\langle V \rangle = V_0 \left(\frac{1}{z\sqrt{\pi}} e^{-z^2} + \text{erf}(z) \right) , \quad (3.21)$$

com $z = z(n) = \frac{V_0}{\epsilon\sqrt{n}}$.

Conexão com o modelo Fermi-Ulam

Diferente do modelo *bouncer* discutido anteriormente, o modelo Fermi-Ulam não apresenta forças externas em sua descrição. Entretanto, continuamos a análise da difusão que ocorre no espaço de fases, não no espaço físico do sistema, exatamente como foi feito para o modelo *bouncer*.

O espaço de fases característico do FUM também é classificado como um espaço de fases misto, composto por ilhas KAM e mar de caos. A maior diferença em relação ao modelo *bouncer* é a presença de uma curva invariante do tipo *spanning*, a qual delimita o espaço de fases.

A primeira curva invariante *spanning* (V_{FISC}) se comporta analogamente à uma barreira no espaço de fases. Uma curva invariante do tipo *spanning* é invariante ao número de iteradas, ou seja, órbitas acima da curva V_{FISC} nunca visitarão regiões abaixo de V_{FISC} e vice e versa, não importa quanto tempo a órbita for iterada. Outra característica é que uma órbita com velocidade inicial exatamente igual a V_{FISC} , sempre permanecerá na primeira curva invariante *spanning*, nunca visitará outras regiões do espaço de fases.

Considerando a dinâmica do FUM descrita pelo mapeamento apresentado na Eq.(2.5),

a posição da primeira curva invariante do tipo *spanning* pode ser aproximadamente³ calculada conforme discutido na Ref.[39] por $V_{FISC} \approx 2\sqrt{\varepsilon}$. Então, conectando com a solução particular discutida anteriormente, difusão em um espaço finito $x \in [0, L]$, a posição da barreira L é exatamente a posição da primeira curva invariante *spanning*, ou seja $L = V_{FISC} \approx 2\sqrt{\varepsilon}$.

Agora, do mesmo modo que foi feito para o modelo *bouncer*, sabemos que a difusão ocorre na variável ação (velocidade) do espaço de fases. Portanto, a equação do deslocamento médio apresentada na Eq.(3.18) deve descrever todo o comportamento da velocidade média das partículas no FUM, mas com V no lugar de x , V_{FISC} no lugar de L , pois a difusão acontece em $V \in [0, V_{FISC}]$ e, por definição $\mu = V_0$. Obtemos então

$$\langle V \rangle = \frac{V_0 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z\sqrt{\pi}} (\Delta^{(1)}\text{exp} + \Delta^{(2)}\text{exp}) + \frac{1}{V_0} [(j - V_0)\Delta^{(1)}\text{erf} + (j + V_0)\Delta^{(2)}\text{erf}]}{2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \text{erf}(z - j) - \text{erf}(z - \tilde{v} - j) - \text{erf}(z + j) + \text{erf}(z + \tilde{v} + j)}, \quad (3.22)$$

definindo o novo índice de somatório $j = \frac{2mL}{\sqrt{2\sigma^2}}$, o novo parâmetro $\tilde{v} = \frac{L}{\sqrt{2\sigma^2}} = \frac{V_{FISC}}{\sqrt{2\sigma^2}}$ e, com

$$\begin{aligned} \Delta^{(1)}\text{exp} &= e^{-(z-j)^2} - e^{-(z-j+\tilde{v})^2}, \\ \Delta^{(2)}\text{exp} &= e^{-(z+j)^2} - e^{-(z+j-\tilde{v})^2}, \\ \Delta^{(1)}\text{erf} &= \text{erf}(z - j + \tilde{v}) - \text{erf}(z - j), \\ \Delta^{(2)}\text{erf} &= \text{erf}(z + j) - \text{erf}(z + j + \tilde{v}). \end{aligned}$$

Onde z é novamente a importante variável auxiliar definida por $z = \frac{\mu}{\sqrt{2\sigma^2}}$. Essa variável é significativa, pois carrega a conexão com o mapeamento do FUM, a partir do valor médio $\mu = V_0$, conectado com a velocidade inicial e, da variância, que será função de ε e n como no caso anterior, quando calculada por sua definição $\sigma^2 = \langle V^2 \rangle - \langle V \rangle^2$. Considerando a expressão para velocidade do mapa do FUM, que é

$$V_{n+1} = |V_n - 2\varepsilon \sin(\phi_{n+1})|. \quad (3.23)$$

Calculando a média temos que

$$\langle V_{n+1}^2 \rangle = \langle V_n^2 \rangle + 2\varepsilon^2, \quad (3.24)$$

Com isso, podemos calcular a variância na iteração $(n + 1)$ como

$$\sigma_{n+1}^2 = \langle V_{n+1}^2 \rangle - \langle V_{n+1} \rangle^2 = \langle V_n^2 \rangle + 2\varepsilon^2 - \langle V_n \rangle^2 \rightarrow \sigma_{n+1}^2 = \sigma_n^2 + 2\varepsilon^2.$$

³Essa aproximação é baseada na analogia com o modelo padrão e é de fato uma aproximação razoável quando consideramos valores relativamente pequenos de ε .

Utilizando novamente a teoria de equações de diferença para $n \rightarrow \infty$, temos que

$$\sigma_{n+1}^2 - \sigma_n^2 = \frac{d\sigma^2}{dn} \rightarrow \sigma^2(n) = \sigma_0^2 + 2\varepsilon^2 n ,$$

e novamente σ_0 é nulo pois a distribuição inicial é um delta de Dirac.

Assim, temos z em função do número de iteração do mapeamento do FUM, dado por

$$z = \frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma(n)} \rightarrow z(n) = \frac{V_0}{2\varepsilon\sqrt{n}} . \quad (3.25)$$

Finalmente, tomando a expressão anterior (3.25) e substituindo na Eq.(3.22), obtemos pela primeira vez uma função que descreve o comportamento da velocidade média das partículas da dinâmica do modelo Fermi-Ulam.

O que nos resta agora é testar se as funções obtidas por esta teoria realmente descrevem completamente o comportamento das velocidades médias para a dinâmica das partículas dos modelos *bouncer* e Fermi-Ulam. Ou seja, será que a abordagem analítica é coerente com a simulação numérica dos modelos? O próximo capítulo é dedicado à apresentação dos resultados e na discussão dessa pergunta.

Resultados e discussões

Este capítulo é dedicado à discussões e apresentação de resultados, tanto analíticos quanto numéricos, para os modelos *bouncer* e Fermi-Ulam. Na primeira seção mostramos resultados de simulações computacionais do FUM, lá evidenciamos o processo de difusão ao longo do espaço de fases $V \times \phi$ através a observação da evolução de uma densidade de probabilidade localizada. Na segunda seção apresentamos implicações analíticas diretas das soluções descritas anteriormente. Por fim, na terceira seção é dedicada para comparação entre a abordagem teórica analítica e resultados das simulações numéricas tanto para o FUM, quando para o modelo *bouncer*.

4.1 Difusão ao longo do espaço de fases

Durante toda a descrição da teoria no capítulo anterior, mencionamos várias vezes que a difusão ao longo do espaço de fases, construído por $V \times \phi$, ocorre somente na variável ação (velocidade). Isso pressupõe que não existe difusão na variável ângulo (fase), ou seja, essa variável é uniformemente distribuída durante toda a dinâmica, sendo assim um processo difusivo em somente uma dimensão, no eixo das velocidades. Mas isso é uma suposição e pode não ser necessariamente verdadeira para toda extensão do espaço de fases. As figuras 4.1 e 4.2 investigam isso.

Tanto a Fig.4.1, quanto a Fig.4.2 foram construídas a partir de um espaço de fases com parâmetros específicos para o modelo *Fermi-Ulam*. No caso, escolhemos $\varepsilon = 0,001$ para que exista uma boa região do espaço de fases preenchida somente pelo mar de caos, mas, para velocidades um pouco mais altas, as ilhas e estruturas de estabilidade também existam. A ideia é verificar como o processo de difusão, marcado pela densidade de probabilidade, acontece para essas duas diferentes regiões do espaço de fases.

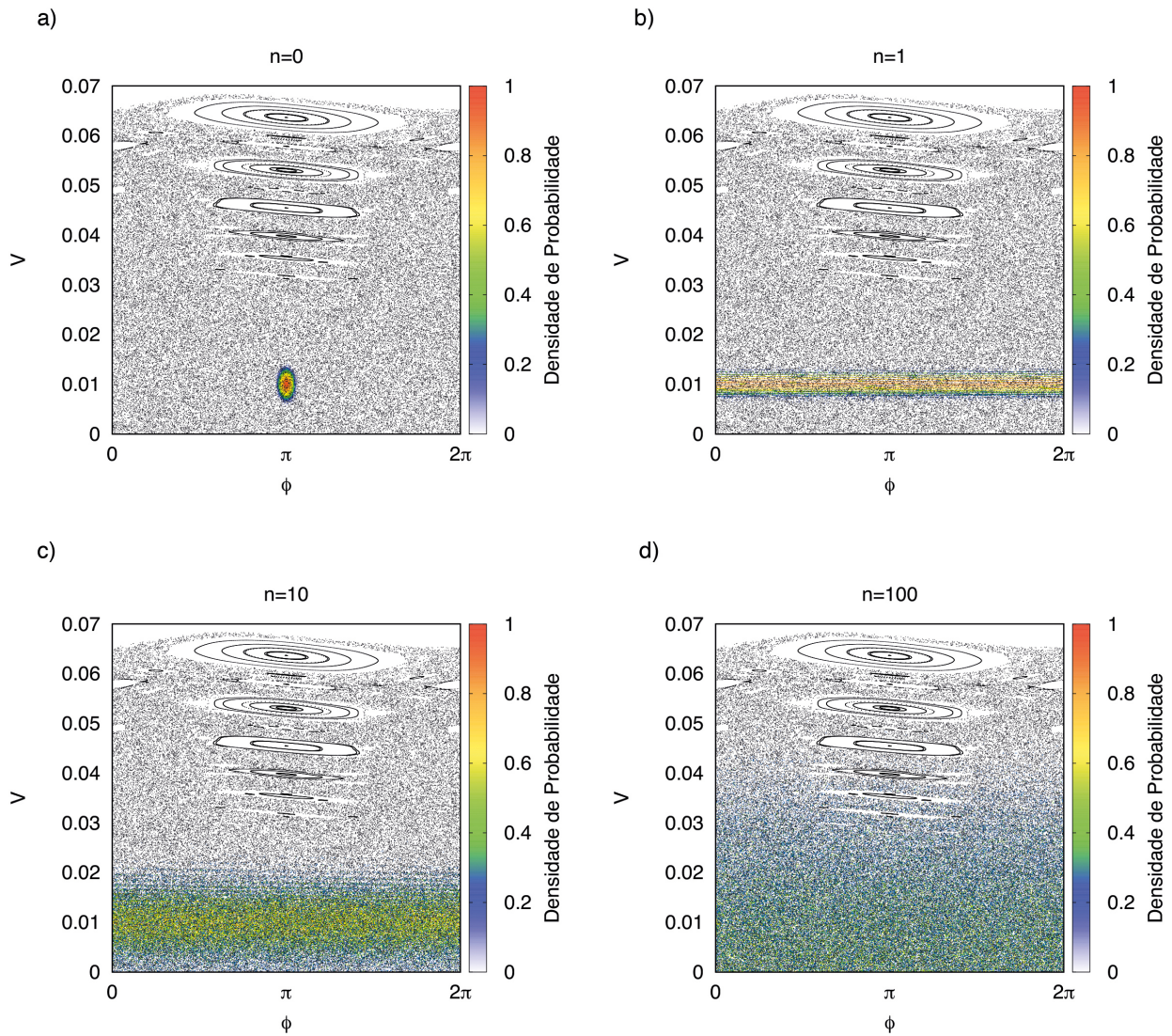


Figura 4.1: *Comportamento da difusão, marcada pela densidade de probabilidade, em uma região caótica do espaço de fases para o modelo Fermi-Ulam. A escala de cores mostra o quão provável é encontrar uma órbita naqueles pontos do espaço de fases. Em (a) temos a distribuição inicial centrada em $V_0 = 0,01$ e $\phi_0 = \pi$. Em (b), a distribuição da densidade de probabilidade resultante após a primeira iteração do mapa. Por fim, em (c) a distribuição resultante para 10 iterações e em (d) para 100 iterações do mapeamento.*

Na Fig.4.1 podemos observar o comportamento difusivo normal da densidade de probabilidade, considerando, inicialmente, uma distribuição gaussiana localizada em uma região específica ao longo do mar de caos. A distribuição inicial está representada em (a), considerando a escala de cores, onde quanto mais quente a cor, maior é a probabilidade de encontrar uma órbita de uma partícula com aquele determinado valor de velocidade no espaço de fases. Fizemos também com que a distribuição inicial, ou seja, a gaussiana estivesse centrada em um ponto específico (V_0, ϕ_0) , tomamos então $V_0 = 0,01$ e $\phi_0 = \pi$.

Em (b), temos o comportamento subsequente daquela distribuição inicial após somente uma iterada do mapa. Podemos perceber que já para a primeira iteração, a distribuição de probabilidade é uniforme em relação ao eixo ϕ , ou seja, a variável fase é uniformemente distribuída nessa região. Em (c), mostramos como vai acontecendo a difusão na variável ação (velocidade), isso após somente 10 iterações do mapa dado pela Eq.(2.5). Por fim, em (d), observamos como aconteceu a difusão em V após 100 iterações do mapeamento.

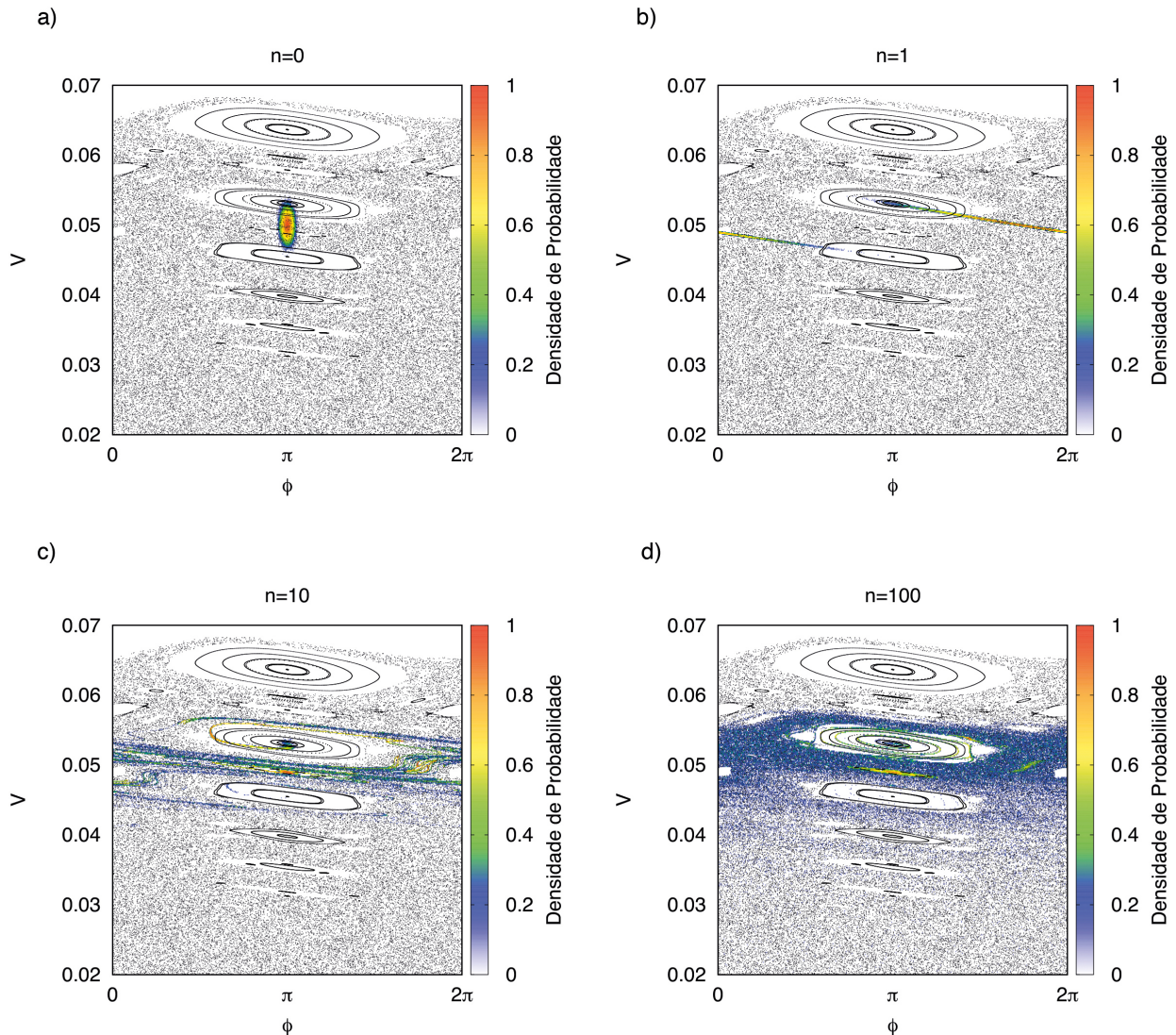


Figura 4.2: *Comportamento da difusão, marcada pela densidade de probabilidade, em uma região mista, com caos e estruturas de periodicidade, do espaço de fases para o modelo Fermi-Ulam. A escala de cores mostra o quão provável é encontrar uma órbita naqueles pontos do espaço de fases. Em (a) temos a distribuição inicial centrada em $V_0 = 0,05$ e $\phi_0 = \pi$. Em (b), a distribuição da densidade de probabilidade resultante após somente uma iteração do mapa. Por fim, em (c) a distribuição resultante para 10 iterações e em (d) para 100 iterações.*

Agora, a construção da Fig.4.2 é análoga à da 4.1, entretanto escolhemos uma região

mista do espaço de fases para modelo *Fermi-Ulam*. Uma região mista é reconhecida por apresentar regiões caóticas, mas também estruturas de periodicidade como as ilhas de estabilidade. Então, a distribuição inicial deve ser centrada em valores maiores de velocidades, portanto tomamos $V_0 = 0,05$ e $\phi_0 = \pi$, como pode ser observado na Fig.4.2(a). Já em (b), temos como fica a distribuição após somente uma iterada do mapa. Já é notável a diferença entre a distribuição somente ao longo do mar de caos. Em (c), observamos que, de fato, nesta região a distribuição ao longo do eixo das fases não é uniforme, como consequência a difusão não ocorre somente na variável ação, conforme a suposição inicial. Por fim, em (d) observamos como ocorreu a difusão nesta região mista após 100 iterações do mapeamento.

Concluimos então que, a suposição de que a fase é uniformemente distribuída, ao longo da simulação da dinâmica, é válida para valores baixos de velocidade. A difusão é um processo difícil de ser analisado quando acontece em uma região que apresenta caos e estruturas estáveis. No entanto, como estamos interessados na quebra de simetria da distribuição de densidade de probabilidade, devemos considerar velocidades iniciais maiores que zero, mas menores do que os valores tomados nas simulações da Fig.4.2. Portanto, na região caótica, a qual nos interessa, a teoria descrita anteriormente deve funcionar bem.

4.2 Resultados analíticos

Nesta seção vamos analisar cuidadosamente as funções que descrevem o comportamento das velocidades médias para os modelos Fermi-Ulam e *bouncer*, apresentando as implicações analíticas de cada caso.

Análise para o modelo Fermi-Ulam

A função que descreve o comportamento das velocidades médias em função do número de iteração para o FUM é dada por

$$\langle V \rangle = \frac{V_0 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z\sqrt{\pi}} (\Delta^{(1)}\text{exp} + \Delta^{(2)}\text{exp}) + \frac{1}{V_0} [(j - V_0)\Delta^{(1)}\text{erf} + (j + V_0)\Delta^{(2)}\text{erf}]}{2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \text{erf}(z - j) - \text{erf}(z - \tilde{v} - j) - \text{erf}(z + j) + \text{erf}(z + \tilde{v} + j)}, \quad (4.1)$$

onde o índice de somatório $j = \frac{2mL}{\sqrt{2\sigma^2}}$, o novo parâmetro $\tilde{v} = \frac{L}{\sqrt{2\sigma^2}} = \frac{V_{FLSC}}{\sqrt{2\sigma^2}}$, com

$$\begin{aligned} \Delta^{(1)}\text{exp} &= e^{-(z-j)^2} - e^{-(z-j+\tilde{v})^2}, \\ \Delta^{(2)}\text{exp} &= e^{-(z+j)^2} - e^{-(z+j-\tilde{v})^2}, \\ \Delta^{(1)}\text{erf} &= \text{erf}(z - j + \tilde{v}) - \text{erf}(z - j), \\ \Delta^{(2)}\text{erf} &= \text{erf}(z + j) - \text{erf}(z + j + \tilde{v}), \end{aligned}$$

e conectado com o mapeamento e número de iterações por

$$z = z(n) = \frac{V_0}{2\varepsilon\sqrt{n}}. \quad (4.2)$$

A expressão de $\langle V \rangle$, fornecida pela Eq.(4.1) é uma competição continua entre a função exponencial e a função erro. Assim, é interessante estudar os argumentos dessas funções. Após uma análise gráfica, é possível concluir que existem duas mudanças significativas de comportamento, uma quando $z = 1$ e a outra quando $\tilde{v} = 1$. Tomando primeiramente $z = 1$ para análise temos,

$$z = 1 \rightarrow \frac{V_0}{2\varepsilon\sqrt{n}} = 1 \rightarrow n = \left(\frac{V_0}{2\varepsilon}\right)^2 \rightarrow n = \frac{V_0^2}{4\varepsilon^2},$$

mas nesse caso $n = n_x$ marcando o primeiro número de *crossover*¹. Assim

$$n_x = \frac{V_0^2}{4\varepsilon^2}. \quad (4.3)$$

E então, tomando $\tilde{v} = 1$ para análise

$$\tilde{v} = 1 \rightarrow \frac{V_{FISC}}{2\varepsilon\sqrt{n}} = 1 \rightarrow n \approx \left(\frac{2\sqrt{\varepsilon}}{2\varepsilon}\right)^2 \rightarrow n \approx \frac{1}{\varepsilon},$$

mas agora, $n = n'_x$ marcando o segundo *crossover*. Assim

$$n'_x \approx \frac{1}{\varepsilon}. \quad (4.4)$$

Outro resultado importante é quando tomamos o seguinte limite

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \langle V \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle V \rangle = \frac{V_{FISC}}{2} \approx \sqrt{\varepsilon}. \quad (4.5)$$

Ressaltamos agora que as Eqs.(4.3), (4.4) e (4.5) são, pela primeira vez, predições analíticas para o modelo Fermi-Ulam, as quais concordam completamente com o que foi proposto em *Phys. Rev. Let.* **93**, 014101 (2004).

Análise para o modelo *bouncer*

Para o modelo *bouncer*, a função que descreve o comportamento das velocidades médias em função da velocidade inicial V_0 , o parâmetro de controle ε e o número de iterações n é dada por

¹O número de *crossover* é um valor específico de iterações em que existe uma mudança significativa no comportamento da velocidade média. Em um gráfico $\langle V \rangle \times n$, o n_x denota a primeira mudança de comportamento, ou seja o primeiro *crossover* e n'_x denota a segunda mudança de comportamento, o segundo número de *crossover*. Mais detalhes podem ser encontrados na Ref.[16]

$$\langle V \rangle = V_0 \left(\frac{1}{z\sqrt{\pi}} e^{-z^2} + \operatorname{erf}(z) \right), \quad (4.6)$$

com $z = z(n) = \frac{V_0}{\epsilon\sqrt{n}}$.

Uma primeira análise que pode ser feita é quando tomamos o limite assintótico. Fazendo então uma expansão em série em torno de $n = \infty$, temos que

$$\langle V \rangle = \frac{2\epsilon}{\sqrt{\pi}} (n)^{\frac{1}{2}} + \frac{V_0^2 + \sigma_0^2}{2\epsilon\sqrt{\pi}} (n)^{-\frac{1}{2}} + O(n)^{-\frac{3}{2}}.$$

Obtemos então um resultado importante, conhecido anteriormente só por uma abordagem empírica em [47], o expoente de crescimento de $\langle V \rangle$ em relação a n é de fato $\frac{1}{2}$ como previsto, concordando também com o fato de ser uma evolução temporal de uma difusão normal, a qual é marcada pelo expoente de crescimento $\frac{1}{2}$.

Como foi feito anteriormente para o FUM, através de uma análise gráfica é possível determinar pontos nos quais ocorrem uma mudança no comportamento da função, a qual também é uma competição entre a função exponencial $\frac{1}{z\sqrt{\pi}} e^{-z^2}$ e a função erro $\operatorname{erf}(z)$. No caso do modelo *bouncer*, $z = 1$ marca uma mudança de comportamento. Tomamos então para análise

$$z = 1 \longrightarrow \frac{V_0}{\sqrt{2\sigma_0^2 + 4\epsilon^2 n}} = 1 \longrightarrow V_0^2 = 2\sigma_0^2 + 4\epsilon^2 n,$$

mas neste caso de mudança de comportamento, $n = n_x$ e portanto

$$n_x = \frac{V_0^2 - 2\sigma_0^2}{4\epsilon^2}. \quad (4.7)$$

A Eq.(4.7) fornece uma expressão analítica para a obtenção do número de *crossover* n_x , em função somente da velocidade inicial V_0 da partícula e do parâmetro de controle ϵ .

Enfatizamos que, pela primeira vez, obtivemos resultados analíticos que concordam completamente com o que já foi verificado empiricamente para o modelo *bouncer*[47].

Leis de escala

Leis de escala são ferramentas fornecidas pela análise de propriedades estatísticas de um sistema de interesse [48]. Uma lei de escala sempre está associada à hipóteses de escala, as quais introduzem também o conceito de expoentes críticos.

Mostraremos agora que os resultados analíticos discutidos anteriormente concordam completamente com análises de escala já feitas na literatura tanto para o modelo Fermi-Ulam quando para o *bouncer*.

Primeiramente, a análise de escala feita para o modelo Fermi-Ulam na Ref.[35] forneceu as seguintes hipóteses de escala:

1. O crescimento da velocidade média é proporcional ao número de iterações elevado à um expoente crítico de crescimento β , portanto

$$\langle V \rangle \propto n^\beta . \quad (4.8)$$

2. O regime de saturação da velocidade média é proporcional ao parâmetro de controle ε elevado à um expoente crítico de saturação α , portanto

$$V_{SAT} \propto \varepsilon^\alpha . \quad (4.9)$$

3. O número de iteração que marca a mudança de crescimento para saturação, ou seja, o segundo número de *crossover* é proporcional ao parâmetro de controle ε elevado à um expoente crítico de escala z , portanto

$$n'_x \propto \varepsilon^z . \quad (4.10)$$

Com essas três hipóteses de escala, é possível descrever o comportamento da velocidade média do FUM com uma função homogênea generalizada. Este procedimento é utilizado e descrito em várias referências [35, 39, 47] e, através dele, podemos obter a seguinte lei de escala para o FUM

$$z = \frac{\alpha}{\beta} - 2 . \quad (4.11)$$

Comparando rapidamente com os resultados analíticos anteriores, o expoente de crescimento é, de fato, $\beta = \frac{1}{2}$ e o regime de saturação V_{SAT} é associado com o limite feito na Eq.(4.5), fornecendo então o expoente de saturação $\alpha = \frac{1}{2}$. Portanto, pela lei de escala apresentada na Eq.(4.11) temos que o expoente de escala $z = -1$, resultado que também foi previamente obtido na Eq.(4.4).

Não obstante, quando analisamos o caso em que a velocidade inicial não é desprezível, ainda temos a escala adicional marcada pelo primeiro número de *crossover* n_x , o qual também segue o que foi evidenciado na literatura $n_x \propto \left(\frac{V_0}{\varepsilon}\right)^2$ que pela Eq.(4.3) confirmamos este fato.

Por fim, as análises de escala para o modelo *bouncer* são diretamente associadas ao procedimento adotado para o FUM. O expoente de crescimento $\frac{1}{2}$, fornecido pela expansão em série da função $\langle V \rangle$ e os expoentes de escala do número de *crossover* n_x , dada pela equação Eq.(4.7) também concordam completamente com o que foi verificado na Ref.[47], seguindo as leis escala estabelecidas.

4.3 Simulação numérica × Abordagem analítica

Enfim, esta seção é dedicada exclusivamente para a comparação entre os resultados obtidos por simulações computacionais das dinâmicas dos modelos Fermi-Ulam e *bouncer* e a teoria analítica desenvolvida neste projeto.

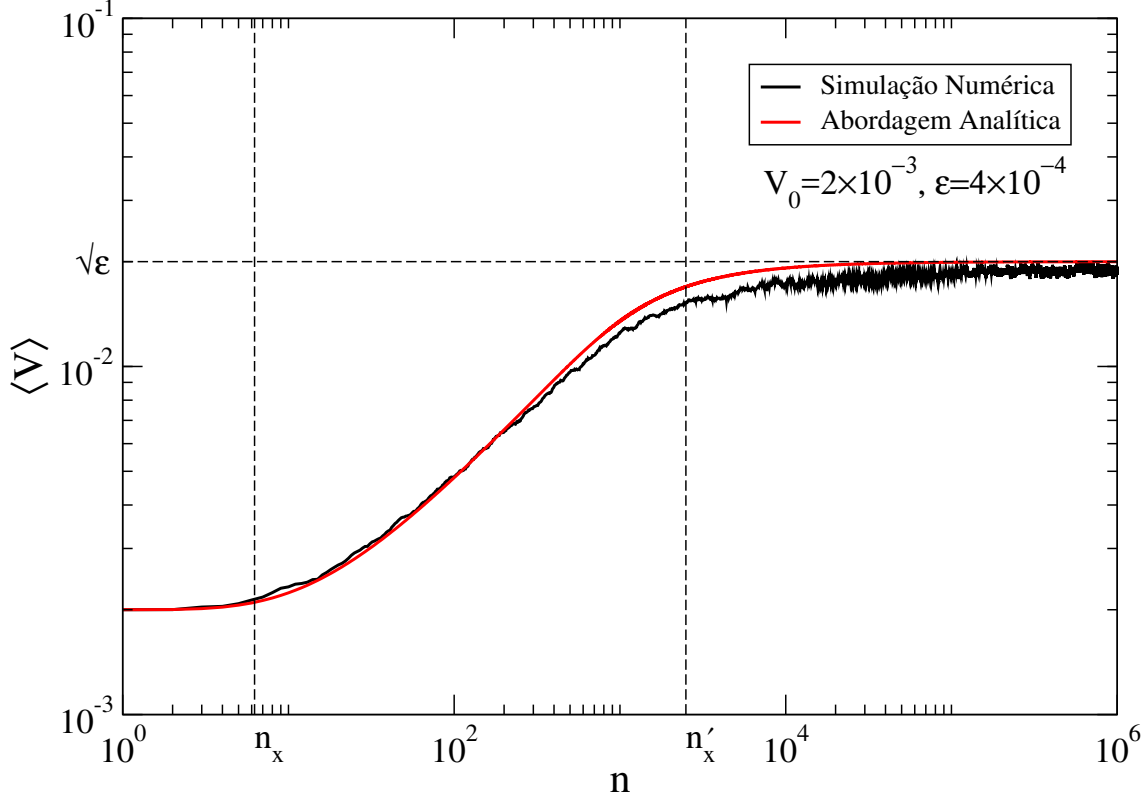


Figura 4.3: Comparação entre os dados da simulação numérica e o procedimento analítico para o FUM. Consideramos um ensemble de 10^3 partículas, todas com velocidade inicial $V_0 = 2 \times 10^{-3}$ iteradas até 10^6 colisões. O parâmetro de controle foi adotado $\varepsilon = 4 \times 10^{-4}$. As linhas tracejadas correspondem ao valor calculado analiticamente para n_x , n'_x , mostrando também o platô de saturação em $\sqrt{\varepsilon}$.

A primeira comparação entre os dados obtidos via simulação numérica e a abordagem analítica feita para o FUM é mostrada na Fig.4.3. O gráfico mostra a velocidade média para um ensemble de 10^3 partículas, todas com velocidade inicial $V_0 = 2 \times 10^{-3}$ e fase inicial escolhida no intervalo $\phi_0 \in [0, 2\pi]$. As previsões analíticas para o primeiro *crossover* n_x , dada pela Eq.(4.3), para o segundo *crossover* n'_x , dada pela Eq.(4.4) e para o platô de saturação, fornecida pela Eq.(4.5) são apresentadas no mesmo gráfico pelas linhas tracejadas.

A predição analítica do comportamento da velocidade média para o FUM, dada pela Eq.(4.1) claramente mostra um bom ajuste com os dados da simulação. De fato, o ajuste poderia ser melhor se não fosse pelos efeitos da difusão anômala para valores maiores de velocidades. Nessa região do espaço de fases a densidade de probabilidade não sofre uma difusão normal, apresentando um comportamento complicado, como evidenciado na Fig.4.3. Esse fenômeno

também explica as flutuações na região $n > n'_x$. Outro fator que corrobora com o erro no ajuste dos dados numéricos é a aproximação para o valor da primeira curva invariante $V_{FISC} \approx 2\sqrt{\varepsilon}$, a qual não é perfeitamente elaborada para o FUM.

No entanto, quando consideramos um *ensemble* maior, ou seja, mais partículas no FUM para uma melhor estatística, o ajuste se torna cada vez melhor. Isso pode ser evidenciado na Fig.4.4, onde mostramos mais comparações entre dados de simulação e a abordagem analítica, agora com três diferentes valores de velocidade inicial V_0 e parâmetro de controle ε .

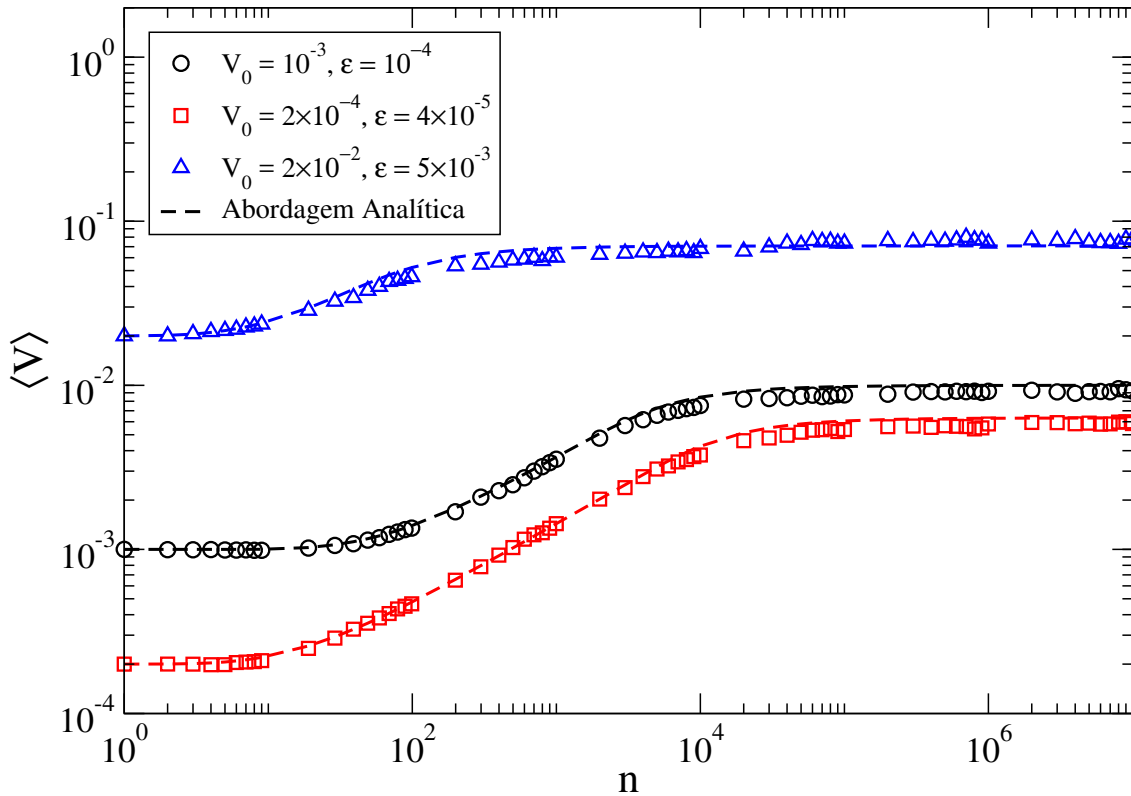


Figura 4.4: Comparação entre os dados da simulação numérica e o processo analítico para três diferentes valores de velocidade inicial V_0 e parâmetro de controle ε do FUM. Os símbolos representam os dados da simulação computacional e as linhas tracejadas correspondem à predição analítica. Consideramos um *ensemble* de 10^4 iteradas até 10^7 colisões.

Podemos observar que a abordagem analítica definitivamente concorda com os dados numéricos provenientes da simulação da dinâmica do modelo Fermi-Ulam. Concordando até mesmo para valores relativamente altos de ε , onde é de se esperar um erro devido à aproximação da posição da primeira curva invariante.

Agora apresentamos as mesmas comparações para o modelo *bouncer*. A Fig.4.5 mostra o comportamento do valor médio das velocidades em função do número de iterações. Escolhemos um valor específico para o parâmetro de controle $\varepsilon = 10$, para o qual o espaço de fases da dinâmica seja composto essencialmente pelo mar de caos.

Analisando a Fig.4.5, podemos perceber rapidamente que a abordagem analítica prevê

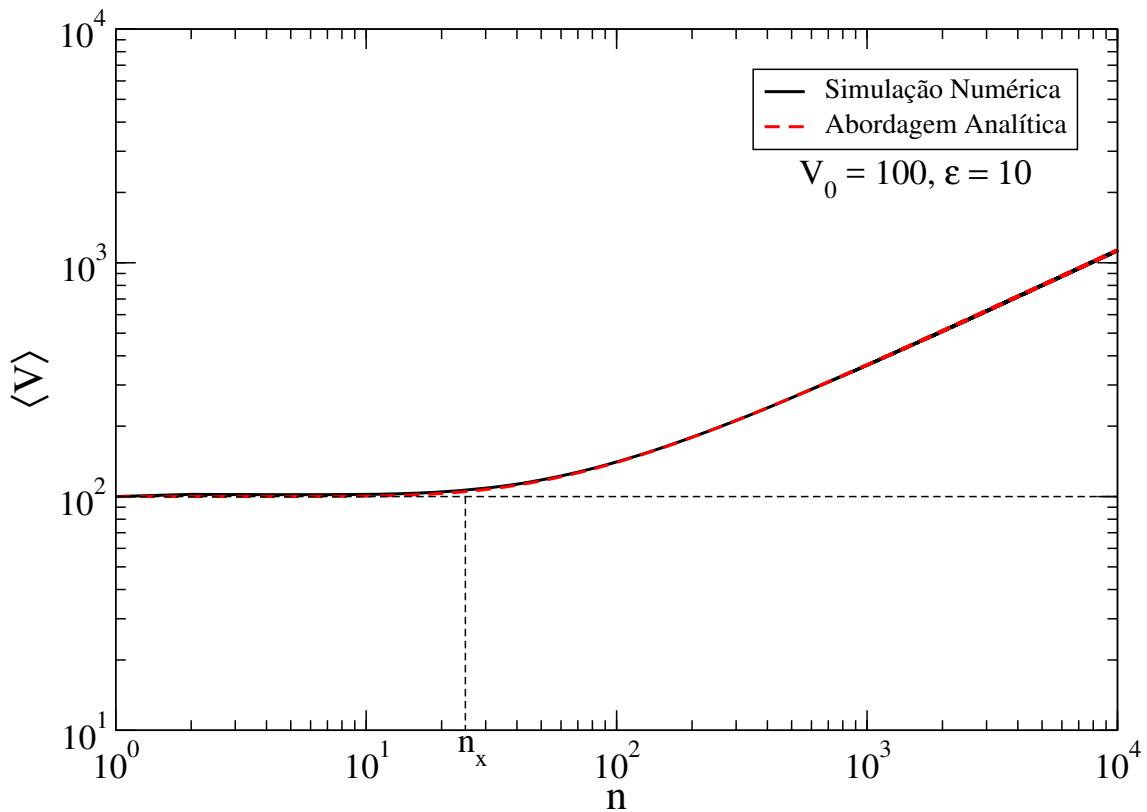


Figura 4.5: *Comportamento do valor médio das velocidades em função número de iterações para o modelo bouncer. A curva preta mostra os dados obtidos pela simulação numérica da dinâmica, já a vermelha tracejada equivale à predição analítica. Consideramos um ensemble de 10^3 iteradas até 10^4 colisões.*

muito bem a simulação numérica. O número de *crossover* n_x foi calculado pela Eq.(4.7) resultando em $n_x = 24,9$, marcando a linha tracejada. E, de fato, esse valor marca a mudança de comportamento do valor médio de velocidades, caracterizada pela quebra de simetria da distribuição das densidades de probabilidade.

A predição analítica para o modelo *bouncer* é muito melhor comparada com o modelo Fermi-Ulam. O ajuste é praticamente perfeito. Isso ocorre pois o espaço de fases da dinâmica do *bouncer* é composto essencialmente pelo mar de caos, permitindo que a densidade de probabilidade sofra uma difusão normal, marcada pelo expoente característico $\frac{1}{2}$ na sua evolução temporal. Esse comportamento é análogo ao que ocorre na região de baixas velocidades do FUM, evidenciado na Fig.4.1.

Exatamente como apresentamos para o FUM, a Fig.4.6 mostra mais comparações entre dados das simulações e a abordagem analítica, agora com três diferentes valores de velocidade inicial V_0 e parâmetro de controle ϵ , para um *ensemble* ainda maior, obtendo assim uma melhor estatística. É interessante ressaltar que através da Eq.(4.7), dos valores das velocidades iniciais V_0 e dos valores dos parâmetros ϵ , podemos obter analiticamente para cada caso o primeiro número de *crossover*, sabendo então de antemão quantas iterações do mapeamento são

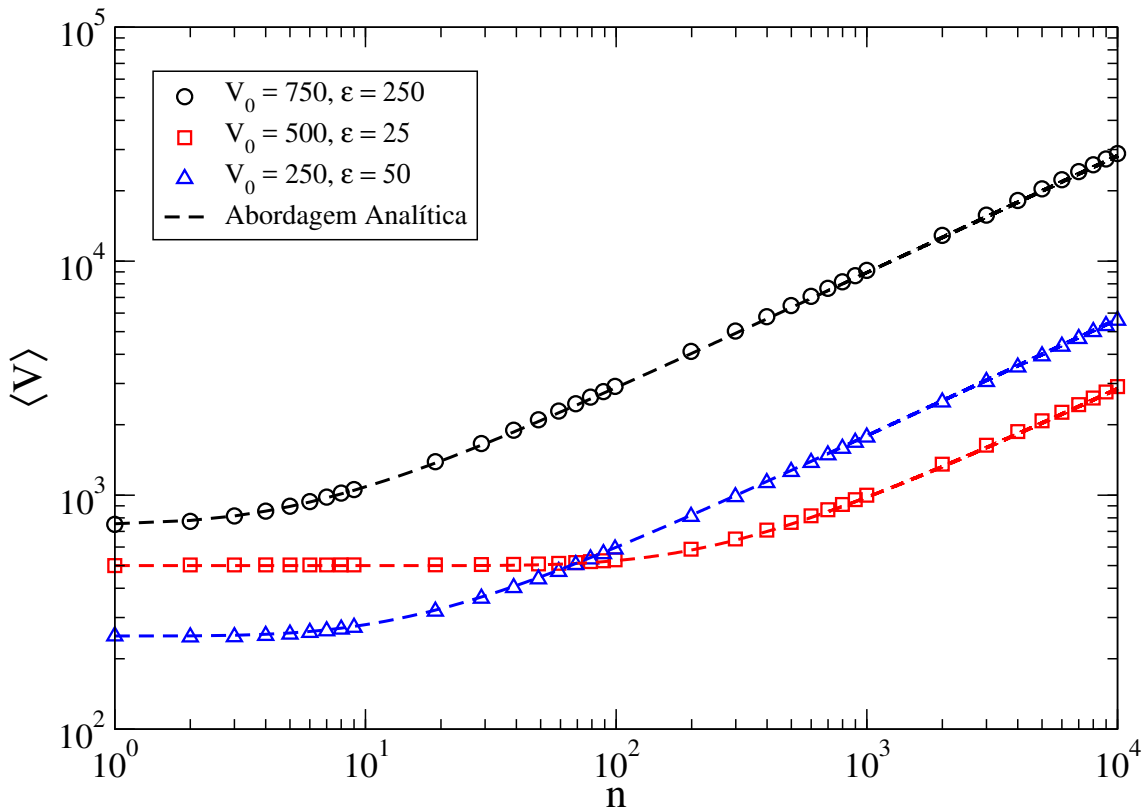


Figura 4.6: Comparação entre os dados da simulação numérica e o processo analítico para três diferentes valores de velocidade inicial V_0 e parâmetro de controle ϵ para o modelo *bouncer*. Os símbolos representam os dados da simulação e as linhas tracejadas correspondem à predição analítica. Consideramos um ensemble de 10^5 iteradas até 10^4 colisões.

necessárias para a quebra de simetria acontecer e observamos somente o crescimento ilimitado de velocidade.

O crescimento ilimitado de velocidade, ou em outros termos, a difusão ilimitada de energia é característica do fenômeno conhecido como aceleração de Fermi. É possível observar esse fenômeno no modelo *bouncer* pois não consideramos dissipação. Entretanto, como estamos interessados nos processos difusivos em regiões caóticas do espaço de fases, o modelo *bouncer* não dissipativo fornece perfeitamente a conexão entre estudos de difusão e sistemas dinâmicos.

O resultado mostrado na Fig.4.6 é mais uma prova de que a teoria da difusão pode ser abstraída para analisar a densidade de probabilidade em um espaço matemático composto por todos os estados possíveis de um sistema dinâmico, descrevendo completamente o comportamento de um observável físico. No nosso caso, além de descrever o comportamento das velocidade médias para os modelos Fermi-Ulam e *bouncer*, a abordagem analítica baseada na solução da equação da difusão fornece também previsões analíticas para o primeiro e segundo número de *crossover* e para o platô de saturação no caso do modelo Fermi-Ulam.

Considerações Finais

Este capítulo final é dedicado às considerações finais do trabalho. A primeira seção fornece as conclusões finais para o estudo dos modelos Fermi-Ulam e *bouncer* através da análise de difusão no espaço de fases dos sistemas. Já a segunda seção é dedicada a apresentação de perspectivas para investigações futuras baseadas no estudo da presente dissertação.

5.1 Conclusões

Este trabalho é uma combinação entre sistemas dinâmicos descritos por mapeamentos discretos não lineares e a teoria de processos de difusão.

Nosso estudo se baseou inicialmente em uma família de mapeamento bidimensionais, a qual recupera dois modelos do acelerador de Fermi, o modelo *bouncer* e o modelo Fermi-Ulam. Propomos uma abordagem analítica original, baseada na solução da equação da difusão para o espaço de fases dos modelos, no intuito de descrever o comportamento de observáveis dos sistemas. O observável de nosso interesse nesses modelos é a velocidade média das partículas, a qual apresenta certas mudanças de comportamento durante a dinâmica, mudanças que acontecem devido à quebra de simetria da distribuição da densidade de probabilidade.

Supusemos inicialmente que a difusão no espaço de fases ocorre somente ao longo variável ação, associada às velocidades das partículas. Mostramos que essa suposição é realmente válida para a região de nosso interesse.

Comparamos a abordagem analítica com as simulações numéricas computacionais dos modelos Fermi-Ulam e *bouncer* e verificamos que, de fato, a teoria e a conexão descrita neste estudo são adequadas para o problema proposto.

Por fim, todas as predições analíticas feitas tanto para o modelo *bouncer*, quando para o Fermi-Ulam concordam perfeitamente com o que foi previamente verificado na literatura.

Nossas predições analíticas também seguem rigorosamente as leis de escala apresentadas em outras pesquisas para esses modelos.

5.2 Perspectivas

No decorrer de nossos estudos, observamos e verificamos que o formalismo teórico e analítico fornecido pela equação da difusão pode ser utilizada na descrição de muitos processos de interesse no estudo de sistemas dinâmicos em geral.

Acreditamos que, uma vez estabelecida esta abstração do conceito de difusão para análise em um espaço matemático como o espaço de fases, podemos imaginar e investigar novas analogias com outras áreas da física e da ciência em geral.

Finalmente, temos como perspectiva explorar ainda mais a teoria de processos difusivos para modelos similares ao Fermi-Ulam e *bouncer*. A conexão com o estudo de bilhares, em particular os que apresentam fronteiras oscilantes, é eminente, uma vez que esses bilhares apresentam fenômenos semelhantes aos já estudados nesta pesquisa.

Referências Bibliográficas

- [1] H. Goldstein, C. P. Poole, J. L. Safko. *Classical Mechanics*. Addison-Wesley (2001).
- [2] S. H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Addison-Wesley (1994).
- [3] T. Jackson, A. Radunskaya. *Applications of Dynamical Systems in Biology and Medicine*. Springer (2015).
- [4] A. T. Winfree. *Science* **175**, 634 (1972).
- [5] E. H. Dowell, M. Ilgamova. *Studies in Nonlinear Aeroelasticity*. Springer (1988).
- [6] Y. Shiogai, A. Stefanovska, P. V. E. McClintock. *Physics Reports*. **488**, 51 (2010).
- [7] C. Grebogi, E. Ott, J. A. Yorke. *Science* **238**, 632 (1987).
- [8] S. H. Kellert. *In the Wake of Chaos: Unpredictable Order in Dynamical Systems*. University of Chicago Press (1993).
- [9] N. F. Ferrara, C. P. C. do Prado, *Caos: Uma Introdução*, Editora Edgard Blucher LTDA (1994).
- [10] Carter, Mancini, Bruce, Ron (2009). *Op Amps for Everyone*. [S.l.]: Texas Instruments. pp. 10–11. ISBN 0080949487
- [11] A. J. Lichtenberg e M. A. Lieberman, *Regular and Chaotic Dynamics*, Appl. Math. Sci., Springer Verlag, New York (1992).
- [12] M. A. Lieberman e A. J. Lichtenberg, *Phys. Rev. A* **5**, 1852 (1971).
- [13] G. M. Zaslavsky, *Physics of Chaos in Hamiltonian Systems*, Imperial College Press, New York (2007).
- [14] K. Ullmann, I. L. Caldas, *Chaos, Solitons and Fractals* **11**, 2129 (2000).

-
- [15] S. S. Abdullaev, G. M. Zaslavsky, *Phys. Plasmas* **3**, 516 (1996)
- [16] I. L. Caldas, J. M. Pereira, K. Ullmann, R. L. Viana, *Chaos, Solitons and Fractals* **7**, 991 (1996).
- [17] A. F. Rabelo, E. D. Leonel, *Braz. J. Phys.* **38** (2008).
- [18] A. L. Virovlyansky, G. M. Zaslavsky, *Chaos* **10**, 211 (2000).
- [19] M. V. Berry, *Eur. J. Phys.* **2**, 91 (1981).
- [20] M. Robnik, *J. Phys. A: Math. Gen.* **16**, 3971 (1983).
- [21] J. A. Miller, N. Guessoum, R. Ramaty, *Astrophysical Journal* **361**, 701 (1990).
- [22] J. E. Howard, A. J. Lichtenberg, M. A. Lieberman, R. H. Cohen, *Physica D* **20**, 259 (1986).
- [23] R. Venegeroles, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 054102 (2008).
- [24] R. C. Hilborn, *Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers*, Oxford University Press (1994).
- [25] P. Gaspard, *Chaos, Scattering and Statistical Mechanics*, Cambridge (1998).
- [26] Pathria, R. K., *Statistical Mechanics*, Burlington (2008).
- [27] P. Gaspard, *Chaos*, **3**, 427 (1993).
- [28] T. Tél, J. Vollmer and W. Breyman, *Europhys Lett.*, **35**, 659, (1996).
- [29] F. Borgonovi, I. Guarneri, and D. L. Shepelyansky, *Phys. Rev. A*, **43**, 4517, (1991).
- [30] P. J. Basser, D. K. Jones, *NMR in Biomedicine*, **15**, 07 (2002)
- [31] H. A. Kramers, *Physica*, **7**, **284** (1940).
- [32] J. D. Meiss, *Chaos*, **25**, 097602 (2015).
- [33] E. G. Altmann, J. S. E. Portela and T. Tél, *Rev. Mod. Phys.*, **85**, 869, (2013).
- [34] G. M. Zaslavsky, *Physics Reports*, **371** (2002).
- [35] E. D. Leonel, P. V. E. McClintock, J. K. L. da Silva, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 014101 (2004).
- [36] D. F. M. Oliveira, E. D. Leonel, *Physica A* **389**, 1009 (2010).
- [37] D. F. M. Oliveira, E. D. Leonel, *Phys. Lett. A* **374**, 3016 (2010).
- [38] J. A. de Oliveira, R. A. Bizão, E. D. Leonel, *Phys. Rev. E* **81**, 046212 (2010).

-
- [39] E. D. Leonel, J. A. de Oliveira, F. Saif, J. Phys. A **44**, 302001 (2011).
- [40] D. G. Ladeira, J. K. L. da Silva, Phys. Rev. E **73**, 02620 (2006).
- [41] D. G. Ladeira, J. K. L. da Silva, J. Phys. A: Math. Theor. **40**, 11467 (2007).
- [42] S. Aubry, G. Abramovici, Physica D: Nonlinear Phenomena **43**, 199 (1990).
- [43] E. D. Leonel, P. V. E. McClintock, J. Phys. A: Math. Theor. **38**, 823 (2005).
- [44] E. Fermi, Phys. Rev., **75**, 1169 (1949).
- [45] F. C. Leone, L. S. Nelson, R. B. Nottingham, Technometrics **3**, 04 (1961).
- [46] C. M. Bender, S. A. Orszag, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers I: Asymptotic Methods and Perturbation Theory*, Springer (1999)
- [47] A. L. P. Livorati, D. G. Ladeira e E. D. Leonel, Phys. Rev. E **78**, 056205 (2008).
- [48] R. Venegeroles, Phys. Rev. Lett., **102**, 064101 (2009).