



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Câmpus de São José do Rio Preto

Mirela Cristina Marini

O Teorema de Borsuk-Ulam: uma versão fraca associada a
grupos topológicos

São José do Rio Preto
2017

Mirela Cristina Marini

O Teorema de Borsuk-Ulam: uma versão fraca associada a
grupos topológicos

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientadora: Profa. Dra. Ermínia de Lourdes Campello Fanti
Coorientadora: Profa. Dra. Évelin Mene-guesso Barbaresco

São José do Rio Preto
2017

Marini, Mirela Cristina.

O Teorema de Borsuk-Ulam : uma versão fraca associada a grupos topológicos / Mirela Cristina Marini. – São José do Rio Preto, 2017
146 f. : il.

Orientador: Erminia de Lourdes Campello Fanti

Coorientador: Evelin Menegusso Barbaresco

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Grupos topológicos. 3. Superfície. 4. Teorema de Borsuk-Ulam. I. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. II. Título.

CDU – 513

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Mirela Cristina Marini

O Teorema de Borsuk-Ulam: uma versão fraca associada a
grupos topológicos

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Comissão Examinadora

Profa. Dra. Ermínia de Lourdes Campello Fanti
Orientadora

Prof. Dr. Anderson Paião dos Santos
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UFTPR

Prof^a. Dr^a. Maria Gorete Carreira Andrade
Departamento de Matemática - UNESP/IBILCE

São José do Rio Preto
25 de setembro de 2017

RESUMO

O Teorema de Borsuk-Ulam clássico afirma que: “Se $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua, então existe um ponto x em S^n tal que $f(x) = f(-x)$, ou equivalentemente $f(x) = f(A(x))$, onde S^n indica a esfera unitária n -dimensional e $A : S^n \rightarrow S^n$ é a aplicação antipodal”. Se pensamos na superfície terrestre como uma esfera, o caso $n = 2$ pode ser ilustrado dizendo-se que em cada instante, existe sempre um par de pontos antipodais na superfície da Terra com mesma temperatura e pressão barométrica (supondo que a temperatura e a pressão variam continuamente na superfície). Este trabalho é baseado no artigo “Some generalizations of the Borsuk-Ulam Theorem” de Ventrúsculo, Desideri e Pergher (2011), [8], e tem como principal objetivo apresentar um estudo de uma versão fraca do Teorema de Borsuk-Ulam associada a grupos topológicos. Diz-se que $\{(X, T); G\}$, onde X é um espaço topológico equipado por uma involução livre T e G é um grupo topológico, “satisfaz uma versão fraca do Teorema de Borsuk-Ulam”, abreviadamente, “satisfaz WBUT”, se, para cada aplicação contínua $f : X \rightarrow G$, temos que o conjunto $\{x \in X; f(x) \cdot f(T(x))^{-1} \in 2G\}$ é diferente do vazio, onde $f(T(x))^{-1}$ é o simétrico de $f(T(x))$ em G e $2G = \{g \in G; g = g^{-1}\}$. Neste trabalho, relacionamos essa condição fraca com a condição geral de “satisfazer o Teorema de Borsuk-Ulam” (ou “satisfazer BUT”) dada também pelos autores; apresentamos alguns exemplos; considerando $G = \mathbb{T}^2$ (toro), detalhamos a demonstração de um resultado que estabelece um critério algébrico para que $\{(X, T); \mathbb{T}^2\}$ satisfaça a condição WBUT e de um resultado que dá uma equivalência entre a versão fraca WBUT para triplas $\{(\mathbb{S}, T); \mathbb{T}^2\}$ e a condição BUT para $\{(\mathbb{S}, T); \mathbb{R}^2\}$, sendo \mathbb{S} uma superfície fechada. Por fim, apresentamos um invariante topológico obtido da versão WBUT. Tal invariante, por nós definido, é similar ao obtido da condição BUT e apresentado pelos autores citados.

Palavras-chave: Teorema de Borsuk-Ulam, Versão Fraca do Teorema de Borsuk Ulam, Involução Livre, Grupos Topológicos, Superfície.

ABSTRACT

The classical Borsuk-Ulam Theorem states that: "If $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ is any continuous map, then there exists a point x in S^n such that $f(x) = f(-x)$, or equivalently $f(x) = f(A(x))$, where S^n denotes the n -dimensional unit sphere and $A : S^n \rightarrow S^n$ is the antipodal map". If we think of the Earth's surface as a sphere, the case $n = 2$ can be illustrated by saying that at every instant there is always a pair of antipodal points on the Earth's surface with the same temperature and barometric pressure (assuming that the temperature and pressure vary continuously in the surface). This work is based on the article "Some generalizations of Borsuk-Ulam Theorem" by Ventrúsculo, Desideri and Pergher (2011), [8], and has the main purpose of presenting a study of a weak version of the Borsuk-Ulam Theorem associated with topological groups. It is said that $\{(X, T); G\}$, where X is a topological space equipped with a free involution T and G is a topological group "satisfies a Weak version of the Borsuk-Ulam Theorem", abbreviated, "satisfies WBUT" if, given any continuous map $f : X \rightarrow Y$, the set $\{x \in X; f(x) \cdot f(T(x))^{-1} \in 2G\}$ is non empty, where $f(T(x))^{-1}$ is the symmetric of $f(T(x))$ in G and $2G = \{g \in G; g = g^{-1}\}$. In this work, we relate this weak condition with the more general condition of "satisfying the Borsuk-Ulam Theorem" (or "satisfying BUT") also given by the authors; we present some examples; considering $G = \mathbb{T}^2$ (torus), we detail the proof of a result that establishes an algebraic criterion for $\{(X, T); \mathbb{T}^2\}$ satisfy the condition WBUT, and of a result that gives an equivalence between the weak version WBUT for triples $\{(\mathbb{S}, T); \mathbb{T}^2\}$ and the condition BUT for $\{(\mathbb{S}, T); \mathbb{R}^2\}$, where \mathbb{S} is a closed surface and T is a free involution on \mathbb{S} . Finally, we present a topological invariant obtained from the WBUT version. Such invariant, defined by us, is similar to that obtained from the BUT condition and presented by the cited authors.

Keywords: Borsuk-Ulam Theorem, Weak Version of Borsuk-Ulam Theorem, Free Involution, Topological Groups, Surfaces.

Aos meus pais e ao meu irmão, dedico.

Agradecimentos

À Deus, em primeiro lugar, que em todos os dias da minha vida me deu forças para nunca desistir.

Aos meus pais, Vera e José, por tanto amor, apoio, compreensão e por terem me proporcionado educação e amor pelos estudos, que foram essenciais para a realização deste sonho. Apesar das inúmeras dificuldades, por sempre me estimularem a continuar e por serem os meus exemplos de vida.

Ao meu irmão Rodrigo, por toda a motivação e por ser o melhor amigo que eu pudesse ter. Fica aqui, minha gratidão, meu respeito, minha imensa admiração e minha devoção, intransponíveis em palavras.

Ao meu namorado Eduardo, pela sua incansável boa vontade em me ajudar, compartilhando meus ideais e me incentivando a prosseguir. Enfim, por estar incessantemente ao meu lado, sendo muito mais do que se pode esperar.

À minha orientadora Ermínia de Lourdes Campello Fanti, por me fornecer ensinamentos, seu apoio e sua dedicação, além de sua competência e especial atenção nas revisões e sugestões para a realização deste trabalho.

À minha co-orientadora Evelin Menegusso Barbaresco, que destinou parte do seu tempo para a condução desta dissertação, bem como pelo inestimável valor de seus ensinamentos durante a minha graduação que foi fundamental para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores do Departamento de Matemática do IBILCE que de alguma forma contribuíram para minha formação.

À banca examinadora.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

*Comece fazendo o que é necessário,
depois o que é possível,
e de repente você estará fazendo o impossível.*
São Francisco de Assis

Lista de Figuras

1.1	Teorema de Seifert-Van Kampen, geradores.	58
1.2	Teorema de Seifert-Van Kampen, relações.	60
1.3	Figura 8.	64
1.4	Representação das superfícies fechadas $S^2, \mathbb{T}^2, \mathbb{R}\mathbb{P}^2$ e \mathbb{K}^2	66
1.5	$\mathbb{K}^2 \simeq \mathbb{R}\mathbb{P}^2 \# \mathbb{R}\mathbb{P}^2$	67
1.6	Representação do toro menos um disco.	68
1.7	$FM \# \mathbb{T}^2$	68
1.8	Representação da garrafa de Klein menos um disco.	68
1.9	$FM \# \mathbb{K}^2$	69
1.10	Soma conexa de um retângulo (com dois lados identificados) e \mathbb{T}^2	69
1.11	Uma triangulação e a característica de Euler de $S^2, \mathbb{R}\mathbb{P}^2$ e \mathbb{T}^2	71
1.12	Representação do toro bidimensional.	75
1.13	Determinação do grupo fundamental de um toro.	76
1.14	Figura 8 em \mathbb{T}^2	76
1.15	Determinação do grupo fundamental da soma conexa de n -toros.	77
1.16	Determinação do grupo fundamental de um plano projetivo.	78
1.17	Determinação do grupo fundamental da soma conexa de n -planos projetivos.	79
1.18	Determinação do grupo fundamental da garrafa de Klein.	81
1.19	Figura 8 em \mathbb{K}^2	81
1.20	Determinação do grupo fundamental da soma conexa de $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ (ou \mathbb{K}^2) com a soma conexa de m -toros.	82
1.21	Um 2-cubo singular.	90
1.22	Um 2-cubo singular cujo bordo é $f + g - h - l$	92
1.23	$\{(0, 0)\}$ é um retrato por deformação de I^2	93
3.1	A superfície $3\mathbb{T}^2$ inserida em \mathbb{R}^3	114
3.2	Representação de \mathbb{T}^2 e alguns subconjuntos especiais.	118
3.3	O subconjunto K no toro bidimensional.	119
3.4	Analisando $q_{\#}(\mathbf{e})$	120
3.5	Analisando $q_{\#}(\mathbf{a})$	121
3.6	Analisando $q_{\#}(\mathbf{b})$	121
3.7	Projeções p_i 's.	123
3.8	Caminho em K ligando $\overline{(w_1, w_2)}$ a $i \left(\overline{(w_1, w_2)} \right)$	126

Sumário

Introdução	17
1 Preliminares de Topologia Algébrica	19
1.1 Alguns conceitos e resultados da Teoria de Grupos	19
1.2 O Grupo Fundamental	23
1.3 Espaços de Recobrimento	34
1.4 O Teorema de Seifert-Van Kampen	53
1.5 Superfícies Fechadas e Grupo Fundamental	64
1.6 Introdução à Homologia Singular	83
1.7 Homomorfismo de Hurewicz	89
2 O Teorema de Borsuk-Ulam para espaços topológicos gerais	97
2.1 O Teorema de Borsuk-Ulam	97
2.2 Generalização do Teorema de Borsuk-Ulam	100
2.3 Um invariante topológico vindo da generalização do Teorema de Borsuk-Ulam	108
3 Versão fraca do Teorema de Borsuk-Ulam	111
3.1 Definições e Exemplos	111
3.2 Versão fraca do Teorema de Borsuk-Ulam associada ao toro bidimensional	117
3.3 Condição de equivalência entre BUT e WBUT para superfícies fechadas	127
3.4 Um invariante topológico vindo da versão fraca do Teorema de Borsuk-Ulam	139
Referências	143
Índice Remissivo	145

Introdução

O Teorema de Borsuk-Ulam na sua versão clássica foi conjecturado por Stanislaw Ulam e provado por Karol Borsuk. Trata-se de um teorema bastante importante da Topologia Algébrica que tem sido objeto de várias pesquisas e possui muitas variações e generalizações.

Seja S^n a esfera unitária n -dimensional. O famoso e clássico Teorema de Borsuk-Ulam, afirma que, “se $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua, então existe um ponto x em S^n tal que $f(x) = f(-x)$ ”. Note que a condição $f(x) = f(-x)$ é equivalente a $f(x) = f(A(x))$ se consideramos a aplicação antipodal $A : S^n \rightarrow S^n$ definida por $A(x) = -x$, para todo $x \in S^n$. Se pensamos na superfície terrestre como uma esfera, o caso $n = 2$ do teorema pode ser ilustrado dizendo-se que em cada instante, existe sempre um par de pontos antípodas na superfície da Terra com mesma temperatura e pressão barométrica, considerando $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x) = (t_x, p_x)$, onde t_x indica a temperatura e p_x a pressão no ponto x (pressupondo que a temperatura e a pressão barométrica variam continuamente na superfície terrestre). Se consideramos a linha do equador como um círculo, o caso $n = 1$, pode ser ilustrado na afirmação que sempre existe um par de pontos antípodas no equador da Terra com a mesma temperatura. Note que no teorema acima, temos envolvida uma tripla $\{(S^n, A); \mathbb{R}^n\}$.

Esta dissertação é baseada no artigo “*Some generalizations of the Borsuk-Ulam Theorem*” de Ventrúsculo, Desideri e Pergher (2011), [8], e tem por objetivo apresentar um estudo do mesmo, em especial abordar uma versão fraca do Teorema de Borsuk-Ulam, associada a grupos topológicos, dada pelos autores.

A dissertação está dividida em três capítulos. O primeiro capítulo contempla alguns pré-requisitos importantes para o desenvolvimento dos demais, dentre eles destacamos: Espaços de Recobrimento, Apresentações (por geradores e relações) dos Grupos Fundamentais das Superfícies Fechadas, em que o Teorema de Seifert-Van Kampen desempenha papel imprescindível, e o Homomorfismo de Hurewicz (homomorfismo entre o Grupo Fundamental de um espaço topológico X e o primeiro Grupo de Homologia Singular de X). É útil também para apresentar algumas notações utilizadas aqui. As referências principais para esse capítulo foram Lima (2006), [4], Massey (1991), [5], e Kosniowski (1980), [3]. O leitor familiarizado com esses assuntos não precisa se deter a esse capítulo.

No segundo capítulo, inicialmente enunciamos o Teorema de Borsuk-Ulam, apresentamos a prova para $n = 1$ e $n = 2$ e damos uma ideia da prova para $n > 2$. Em seguida, exibimos uma “generalização do Teorema de Borsuk-Ulam” como apresentada em Ventrúsculo, Desideri e Pergher (2011) que consiste em considerar, no lugar de (S^n, A) , um par (X, T) , onde X é um espaço topológico e T é uma involução livre sobre X (ou seja, uma aplicação contínua $T : X \rightarrow X$ tal que $T \circ T = Id_X$ e

$T(x) \neq x$, para todo $x \in X$), e substituir o espaço \mathbb{R}^n por um espaço topológico Y qualquer. Nessas condições, diz-se que uma tripla $\{(X, T); Y\}$ *satisfaz o Teorema de Borsuk-Ulam*, ou abreviadamente, *satisfaz “BUT”* se, dada qualquer aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$, existe pelo menos um ponto x de X de modo que $f(x) = f(T(x))$. Na sequência é feita uma análise da condição BUT no caso específico em que o espaço topológico $Y = \mathbb{R}^2$. Finalizando esse capítulo é apresentado, para cada espaço Y , um invariante topológico denotado por $\text{BUT}(Y)$, vindo da condição BUT por analisar as triplas $\{(S^n, A); Y\}$, para todo número natural n .

O último capítulo tem como objetivo apresentar uma “versão fraca do Teorema de Borsuk-Ulam” associada a grupos topológicos, dada no artigo referido. Neste caso, considera-se espaços topológicos Y que sejam “grupos topológicos”, que vamos indicar por G . Notemos que se $Y = G$ é um grupo topológico, uma tripla $\{(X, T); G\}$ satisfaz BUT se, e somente se, para cada aplicação contínua $f : X \rightarrow G$, existe $x \in X$ tal que $f(x) = f(T(x))$, ou equivalentemente, que $f(x) \cdot f(T(x))^{-1} = e$, onde e indica o elemento neutro de G e $f(T(x))^{-1}$ é o simétrico de $f(T(x))$ em G . A versão fraca é motivada nessa nova forma de ver a condição BUT. Diz-se que uma tripla $\{(X, T); G\}$ *satisfaz uma versão fraca do Teorema de Borsuk-Ulam*, abreviadamente, *satisfaz “WBUT”*, se, para cada aplicação contínua $f : X \rightarrow G$, temos que $F^{-1}(2G) \neq \emptyset$, com F sendo a aplicação equivariante de (X, T) em (G, i) definida por $F(x) = f(x) \cdot (f(T(x)))^{-1}$, $i : G \rightarrow G$ a aplicação inversão $i(g) = g^{-1}$ e $2G = \{g \in G; g^2 = e\}$. Considerando $G = \mathbb{T}^2$, o toro bidimensional, apresentamos a prova detalhada de um resultado que dá um critério algébrico para que triplas do tipo $\{(X, T); \mathbb{T}^2\}$ satisfaçam a versão fraca. Nesta prova, o Teorema de Hurewicz é bastante útil. A demonstração segue na direção de um resultado similar para BUT (apresentado no capítulo anterior), porém exige técnicas mais sofisticadas. Apresentamos também a prova de um resultado (dado pelos autores), que dá uma equivalência entre a versão fraca WBUT para triplas $\{(\mathbb{S}, T); \mathbb{T}^2\}$ e a condição BUT para as triplas $\{(\mathbb{S}, T); \mathbb{R}^2\}$, onde \mathbb{S} é uma superfície fechada e T é uma involução livre sobre \mathbb{S} . Vale observar que a demonstração usa um teorema de Gonçalves (2006), [2], que caracteriza as triplas $\{(\mathbb{S}, T); \mathbb{R}^2\}$ que satisfazem BUT. Essa caracterização envolve característica de Euler, apresentação dos grupos fundamentais das superfícies e uma correspondência de subgrupos de índice dois (do grupo fundamental) com determinadas sequências em \mathbb{Z}_2 . Por fim, apresentamos um invariante topológico (na categoria de grupos topológicos) obtido da versão fraca do Teorema de Borsuk-Ulam e exibimos alguns exemplos e resultados. Tal invariante, por nós definido, é similar ao que foi obtido da condição BUT e apresentado pelos autores citados acima.

1 Preliminares de Topologia Algébrica

Neste capítulo apresentamos pré-requisitos que são importantes para melhor entendimento dos capítulos 2 e 3, que são os principais dessa dissertação. Serve também para se familiarizar com certas notações utilizadas. Dentre os assuntos abordados aqui destacamos: Espaços de Recobrimento, Apresentações dos Grupos Fundamentais das Superfícies Fechadas (obtidas via o Teorema de Seifert-Van Kampen) e o Homomorfismo de Hurewicz. O leitor conhecedor desses assuntos pode omitir essa parte. As principais referências utilizadas foram Lima (2006), [4], Massey (1991), [5], e Kosniowski (1980), [3].

1.1 Alguns conceitos e resultados da Teoria de Grupos

Definição 1.1.1. *Dados um grupo G e um conjunto $X \neq \emptyset$, uma **ação à esquerda de G sobre X** ou uma **G -ação à esquerda sobre X** é uma aplicação*

$$\begin{aligned}\phi: G \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x\end{aligned}$$

tal que as seguintes condições são satisfeitas:

- (i) para todo $x \in X$, $e \cdot x = x$, onde e indica o elemento neutro de G ;
- (ii) para quaisquer $x \in X$ e $g_1, g_2 \in G$, $(g_1 g_2) \cdot x = g_1 (g_2 \cdot x)$.

Neste caso, dizemos ainda que G **atua** ou **opera à esquerda** sobre X e que X é um **G -conjunto à esquerda**. Quando X é um espaço topológico munido de uma ação à esquerda, dizemos que X é um **G -espaço à esquerda**.

Similarmente define-se G -conjunto e G -espaço à direita.

Se X é um G -espaço à direita e um G -espaço à esquerda, dizemos simplesmente que X é um **G -espaço** e que G **atua** ou **opera** sobre X .

Definição 1.1.2. *Seja X um G -espaço à esquerda. Dizemos que G **opera transitivamente à esquerda** sobre X ou que X é um **G -espaço à esquerda homogêneo** se, para quaisquer elementos $x, y \in X$, existe um elemento $g \in G$ tal que*

$$g \cdot x = y.$$

Definição 1.1.3. Considere X um G -espaço à esquerda. Dizemos que a ação de G é **propriamente descontínua** sobre X se cada ponto $x \in X$ possui uma vizinhança U tal que, para todo $g \in G$, com $g \neq e$, tem-se

$$g \cdot U \cap U = \emptyset,$$

onde $g \cdot U = \{g \cdot x; x \in U\}$.

Em particular, se consideramos a ação de $G = \{f : X \rightarrow X; f \text{ é homeomorfismo}\}$ em X , dada por $f \cdot x = f(x)$, e essa ação é propriamente descontínua, dizemos que G é um grupo **propriamente descontínuo (de homeomorfismos)**. Notemos que, neste caso, o elemento neutro de G é a aplicação identidade de X .

Definição 1.1.4. Seja X um G -espaço à esquerda. Para cada $x \in X$, o conjunto $G(x) = \{g \cdot x; g \in G\}$ é chamado **órbita de x** e o subgrupo $G_x = \{g \in G; g \cdot x = x\}$ é denominado **subgrupo de isotropia** ou **subgrupo estabilizador de x** .

Proposição 1.1.1. Seja X um G -espaço à esquerda.

(i) Se G opera transitivamente sobre X , então $G(x) = X$, para todo $x \in X$.

(ii) Para cada $x \in X$, existe uma bijeção

$$\begin{aligned} \varphi: \frac{G}{G_x} &\rightarrow G(x) \\ g \cdot G_x &\mapsto \varphi(g \cdot G_x) = g \cdot x \end{aligned}$$

(ou $\varphi(G_x \cdot g) = x \cdot g$, se a ação é a direita). Assim, $\frac{G}{G_x}$ e $G(x)$ têm a mesma cardinalidade.

Demonstração:

(i) A prova é imediata.

(ii) A aplicação φ está bem definida, pois, para quaisquer $g_1, g_2 \in G$ tais que $g_1 \cdot G_x = g_2 \cdot G_x$, temos que $g_2^{-1}g_1 \in G_x$, ou seja,

$$(g_2^{-1}g_1) \cdot x = x$$

e, portanto, $g_1 \cdot x = g_2 \cdot x$.

Temos que φ é injetora, uma vez que, para quaisquer $g_1, g_2 \in G$ tais que $g_1 \cdot x = g_2 \cdot x$, segue que

$$(g_1^{-1}g_2) \cdot x = x,$$

ou seja, $g_1^{-1}g_2 \in G_x$ e, então, $g_1 \cdot G_x = g_2 \cdot G_x$.

Claramente, φ é sobrejetora.

Logo, φ é bijetora. ■

Definição 1.1.5. Considere X um G -espaço à esquerda. O conjunto $\frac{X}{G}$ constituído por todas as órbitas $G(x)$ é chamado de **espaço de órbitas**. $\frac{X}{G}$ será considerado como espaço topológico munido com a topologia quociente, ou seja, munido da topologia mais fina tal que a projeção canônica $p : X \rightarrow \frac{X}{G}$ seja contínua. Tal topologia é dada por $\mathcal{T} = \left\{ W \subset \frac{X}{G}; p^{-1}(W) \text{ é aberto de } X \right\}$.

Proposição 1.1.2. *Seja X um G -espaço à esquerda. Se, para todo $g \in G$, a aplicação $f_g : X \rightarrow X$ tal que $f_g(x) = g \cdot x$ é contínua, então a projeção canônica $p : X \rightarrow \frac{X}{G}$ é uma aplicação aberta. Em particular isso vale se G é um subgrupo do grupo dos homeomorfismos de X em X .*

Demonstração: Considere U um aberto de X ,

$$\begin{aligned} p^{-1}(p(U)) &= \{x \in X; p(x) \in p(U)\} \\ &= \{x \in X; G(x) = G(y), \text{ para algum } y \in U\} \\ &= \{x \in X; x = g \cdot y, \text{ para algum } y \in U \text{ e } g \in G\} \\ &= \{x \in X; x \in g \cdot U, g \in G\} \\ &= \bigcup_{g \in G} g \cdot U. \end{aligned}$$

Como U é um aberto de X , então $g \cdot U = f_g(U)$ é um aberto de X , para todo $g \in G$ (já que f_g é de fato um homeomorfismo com inversa f_g^{-1}). Logo, $p^{-1}(p(U))$ é um aberto de X . Pela definição da topologia quociente, obtemos que $p(U)$ é um aberto de $\frac{X}{G}$. Portanto, p é uma aplicação aberta. ■

Observação 1.1.1. *Todas as definições anteriores, bem como a proposição acima, possuem versões análogas para G -espaço à direita.*

A seguir, recordamos brevemente alguns conceitos e resultados básicos da Teoria dos Grupos.

Definição 1.1.6. *Fixado um elemento g num grupo G , a aplicação*

$$x \mapsto g \cdot x \cdot g^{-1}$$

*é um automorfismo de G , chamado a **conjugação** por g . Se H é um subgrupo de G , sua imagem por esse automorfismo é o subgrupo*

$$g \cdot H \cdot g^{-1} = \{g \cdot x \cdot g^{-1}; x \in H\}$$

*que é isomorfo a H , chamado **subgrupo conjugado** de H .*

*A **classe de conjugação** de H em G é o conjunto $\{g \cdot H \cdot g^{-1}; g \in G\}$.*

*Um subgrupo H de G diz-se **normal** quando $g \cdot H \cdot g^{-1} = H$, para todo $g \in G$.*

Observação 1.1.2. *A definição de subgrupo normal é equivalente a dizer que $g \cdot H \cdot g^{-1} \subseteq H$, para todo $g \in G$.*

Definição 1.1.7. *Se H é um subgrupo normal de um grupo G , então*

$$\frac{G}{H} := \{g \cdot H; g \in G\},$$

*onde $g \cdot H = \{g \cdot h; h \in H\}$, com a operação $(g_1 \cdot H)(g_2 \cdot H) = g_1 g_2 \cdot H$ é um grupo chamado **grupo quociente**.*

Definição 1.1.8. *Seja G um grupo. O **comutador** de dois elementos $g, h \in G$, usualmente denotado por $[g, h]$, é dado por $[g, h] = g \cdot h \cdot g^{-1} \cdot h^{-1}$. O conjunto dos comutadores $G' = \{g \cdot h \cdot g^{-1} \cdot h^{-1}; g, h \in G\}$ é um subgrupo de G denominado **subgrupo comutador**. Tal subgrupo é também denotado por $[G : G]$.*

Observação 1.1.3. (i) Pode-se verificar que G' é um subgrupo normal de G .

(ii) Se G é um grupo abeliano, então o seu subgrupo comutador é o subgrupo trivial e o grupo quociente $\frac{G}{G'}$ é isomorfo a G . De fato, tome $g, h \in G$ quaisquer, como G é abeliano, o comutador

$$[g, h] = g \cdot h \cdot g^{-1} \cdot h^{-1} = g \cdot g^{-1} \cdot h \cdot h^{-1} = e,$$

portanto, $G' = \{e\}$. Assim, dado $g \in G$, o elemento do grupo quociente $g \cdot G' = g \cdot \{e\}$ pode ser identificado com $g \in G$.

Teorema 1.1.1. (Teorema do Isomorfismo) Sejam G e L dois grupos e $\varphi : G \rightarrow L$ um homomorfismo. Então, existe um isomorfismo $\tilde{\varphi} : \frac{G}{Ker(\varphi)} \rightarrow \varphi(G)$, definido por $\tilde{\varphi}(g \cdot Ker(\varphi)) = \varphi(g)$, onde $Ker(\varphi) = \{g \in G; \varphi(g) = e_G\}$, com e_G denotando o elemento neutro de G , e $\varphi(G) = \{\varphi(g); g \in G\}$.

Exemplo 1.1.1. Considere os grupos \mathbb{Z} e $\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$ das classes de restos módulo n , para $n \geq 1$. A aplicação $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$ ($n \in \mathbb{Z}$), dada por $\varphi(x) = \bar{x}$, é um homomorfismo, pois

$$\varphi(x + y) = \overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y} = \varphi(x) + \varphi(y).$$

Então, pelo Teorema do Isomorfismo, temos que $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_n$, uma vez que $Ker(\varphi) = \{x \in \mathbb{Z}; \varphi(x) = \bar{0}\} = n\mathbb{Z}$ e $\varphi(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_n$.

Lema 1.1.1. Considere A um grupo abeliano denotado aditivamente e G um grupo multiplicativo. Se $\phi : G \rightarrow A$ é um homomorfismo, então existe um único homomorfismo $\bar{\phi} : \frac{G}{G'} \rightarrow A$ tal que o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\phi} & A \\ q \downarrow & \nearrow \bar{\phi} & \\ G & & \\ \frac{G}{G'} & & \end{array}$$

onde $q : G \rightarrow \frac{G}{G'}$ é o homomorfismo canônico, dado por $q(g) = g \cdot G'$.

Demonstração: Note que $G' \subseteq Ker(\phi)$, pois $\phi(ghg^{-1}h^{-1}) = \phi(g) + \phi(h) - \phi(g) - \phi(h) = 0$. Além disso, como $Ker(\phi)$ é normal, podemos considerar o grupo quociente $\frac{G}{Ker(\phi)}$ e temos que a aplicação $\bar{q} : \frac{G}{G'} \rightarrow \frac{G}{Ker(\phi)}$, dada por $\bar{q}(g \cdot G') = g \cdot Ker(\phi)$, está bem definida. Note ainda que \bar{q} é, também, um homomorfismo.

Pelo Teorema do Isomorfismo, existe um isomorfismo $\tilde{\phi} : \frac{G}{Ker(\phi)} \rightarrow \phi(G)$, tal que $\tilde{\phi}(g \cdot Ker(\phi)) = \phi(g)$.

Defina $\bar{\phi} = j \circ \tilde{\phi} \circ \bar{q} : \frac{G}{G'} \rightarrow A$, onde $j : \phi(G) \rightarrow A$ é a aplicação inclusão. Então

$$\bar{\phi}(g \cdot G') = (j \circ \tilde{\phi} \circ \bar{q})(g \cdot G') = \phi(g)$$

e o diagrama seguinte comuta

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{\phi} & A \\
 q \downarrow & \nearrow \bar{\phi} & \uparrow j \circ \bar{\phi} \\
 G & & G \\
 \bar{q} \downarrow & & \downarrow \\
 G' & \xrightarrow{\bar{q}} & \text{Ker}(\phi)
 \end{array}$$

Observe que $\bar{\phi}$ é um homomorfismo, pois é composta de homomorfismos.

A unicidade de $\bar{\phi}$ é garantida pela comutatividade do diagrama e pelo fato de q ser sobrejetora, pois se $\bar{\phi}_1 : \frac{G}{G'} \rightarrow A$ fosse um outro homomorfismo nas condições da hipótese, teríamos $\bar{\phi}_1(g \cdot G') = \bar{\phi}_1(q(g)) = \phi(g) = \bar{\phi}(g \cdot G')$. ■

Usando as mesmas ideias da demonstração do lema anterior, pode-se mostrar a seguinte proposição:

Proposição 1.1.3. *Considere A e G dois grupos. Se A é abeliano, $\phi : G \rightarrow A$ é um homomorfismo e H é um subgrupo normal de G tal que $H \subseteq \text{Ker}(\phi)$, então existe um único homomorfismo $\bar{\phi} : \frac{G}{H} \rightarrow A$ tal que o diagrama abaixo é comutativo*

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{\phi} & A \\
 q \downarrow & \nearrow \bar{\phi} & \\
 G & & \\
 \bar{q} \downarrow & & \\
 \frac{G}{H} & &
 \end{array}$$

onde $q : G \rightarrow \frac{G}{H}$ é o homomorfismo canônico, dado por $q(g) = g \cdot H$.

Definição 1.1.9. *Sejam G um grupo e H um subgrupo de G . O **normalizador** de H em G é o conjunto*

$$N(H) = \{g \in G; g \cdot H \cdot g^{-1} = H\}.$$

Observação 1.1.4. *$N(H)$ é o maior subgrupo de G que contém H como subgrupo normal. Além disso, H é um subgrupo normal do grupo G se, e somente se, $N(H) = G$.*

1.2 O Grupo Fundamental

Sejam X um espaço topológico e $x_0, x_1 \in X$.

Definição 1.2.1. *Um **caminho** em X com ponto inicial x_0 e ponto final x_1 é uma função contínua $\alpha : I = [0, 1] \rightarrow X$ tal que $\alpha(0) = x_0$ e $\alpha(1) = x_1$. Se $x_0 = x_1$, dizemos que α é um **laço baseado em x_0** ou um **caminho fechado com ponto base x_0** .*

Definição 1.2.2. *Seja $\alpha : I \rightarrow X$ um caminho com ponto inicial x_0 e ponto final x_1 . O **caminho inverso** de α , denotado por α^{-1} , é o caminho com ponto inicial x_1 e ponto final x_0 , definido por $\alpha^{-1} : I \rightarrow X$ tal que $\alpha^{-1}(t) = \alpha(1 - t)$, para todo $t \in I$.*

Definição 1.2.3. *Considere $\alpha, \beta : I \rightarrow X$ dois caminhos em X tais que $\alpha(0) = x_0, \alpha(1) = \beta(0) = x_1$ e $\beta(1) = x_2$. Definimos o **caminho produto** $\alpha * \beta : I \rightarrow X$ da seguinte maneira:*

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ \beta(2t - 1), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Definição 1.2.4. Dizemos que os caminhos α e β , com ponto inicial x_0 e ponto final x_1 , são **homotópicos** e denotamos por $\alpha \sim \beta$, se existir uma aplicação contínua $H : I \times I \rightarrow X$ tal que

$$\begin{cases} H(t, 0) = \alpha(t); & H(t, 1) = \beta(t), & \forall t \in I; \\ H(0, s) = x_0; & H(1, s) = x_1, & \forall s \in I. \end{cases}$$

Neste caso, dizemos que H é uma **homotopia entre α e β** (relativamente a $\{x_0, x_1\}$).

Pode-se verificar que a “relação de homotopia” no conjunto de laços em X baseados em x_0 é uma relação de equivalência.

Definição 1.2.5. Denotamos por $[\alpha]$ a **classe de homotopia** de um laço $\alpha : I \rightarrow X$, assim

$$[\alpha] = \{\beta : I \rightarrow X ; \beta \text{ é um laço e } \beta \sim \alpha\}.$$

Considere o conjunto das classes de homotopia de laços em X baseados em x_0 e denotemos por

$$\Pi_1(X, x_0) = \{[\alpha] ; \alpha \text{ é um laço baseado em } x_0\}.$$

Sejam $[\alpha]$ e $[\beta]$ elementos de $\Pi_1(X, x_0)$, definimos em $\Pi_1(X, x_0)$ a operação

$$[\alpha] \cdot [\beta] := [\alpha * \beta].$$

Pode-se mostrar (vide Massey (Cap.II, 1991), [5]) que esta operação fornece uma estrutura de grupo em $\Pi_1(X, x_0)$, onde o elemento neutro é $[c_{x_0}]$, com $c_{x_0} : I \rightarrow X$ sendo o caminho constante em x_0 . Este grupo é chamado de **grupo fundamental de X com ponto base x_0** ou **grupo de Poincaré de X com ponto base x_0** .

Exemplo 1.2.1. Se $X = \{x_0\}$ (espaço unitário), então $\Pi_1(X, x_0) = \{[c_{x_0}]\}$ (grupo trivial).

Definição 1.2.6. Um espaço topológico X é chamado **conexo por caminhos** se, para quaisquer dois pontos $x_0, x_1 \in X$, existe um caminho $\alpha : I \rightarrow X$ ligando x_0 a x_1 , isto é, $\alpha(0) = x_0$ e $\alpha(1) = x_1$.

O resultado seguinte nos mostra que o grupo fundamental de um espaço conexo por caminhos independe do ponto base. Assim, no caso em que o espaço X é conexo por caminhos é usual denotar o grupo fundamental de X simplesmente por $\Pi_1(X)$.

Proposição 1.2.1. Se X é um espaço conexo por caminhos, então $\Pi_1(X, x_0)$ é isomorfo a $\Pi_1(X, x_1)$, para quaisquer $x_0, x_1 \in X$.

Demonstração: Como X é conexo por caminhos, existe um caminho $\gamma : I \rightarrow X$ ligando x_0 a x_1 . Seja α um laço em X baseado em x_0 . Usando o caminho γ e o laço α definimos a aplicação:

$$\begin{aligned} \varphi : \Pi_1(X, x_0) &\rightarrow \Pi_1(X, x_1) \\ [\alpha] &\mapsto [\gamma^{-1} * \alpha * \gamma]. \end{aligned}$$

Note que a aplicação φ está bem definida, pois, para $[\alpha], [\beta] \in \Pi_1(X, x_0)$, temos que

$$[\alpha] = [\beta] \Rightarrow \alpha \sim \beta \Rightarrow \gamma^{-1} * \alpha * \gamma \sim \gamma^{-1} * \beta * \gamma \Rightarrow [\gamma^{-1} * \alpha * \gamma] = [\gamma^{-1} * \beta * \gamma].$$

A aplicação φ é bijetora, pois a aplicação ψ ,

$$\begin{aligned} \psi : \Pi_1(X, x_1) &\rightarrow \Pi_1(X, x_0) \\ [\beta] &\mapsto [\gamma * \beta * \gamma^{-1}] \end{aligned}$$

é a inversa de φ , já que

$$(\varphi \circ \psi)([\rho]) = \varphi(\psi([\rho])) = \varphi([\gamma * \rho * \gamma^{-1}]) = [\gamma^{-1} * \gamma * \rho * \gamma^{-1} * \gamma] = [\rho],$$

para todo $[\rho] \in \Pi_1(X, x_1)$, e, similarmente,

$$(\psi \circ \varphi)([\alpha]) = \psi(\varphi([\alpha])) = [\alpha],$$

para todo $[\alpha] \in \Pi_1(X, x_0)$.

Além disso, a aplicação φ é um homomorfismo de grupos. De fato, se $[\alpha], [\beta] \in \Pi_1(X, x_0)$, segue que

$$\begin{aligned} \varphi([\alpha] \cdot [\beta]) &= \varphi([\alpha * \beta]) &= [\gamma^{-1} * \alpha * \beta * \gamma] \\ &= [\gamma^{-1} * \alpha * c_{x_0} * \beta * \gamma] &= [\gamma^{-1} * \alpha * \gamma * \gamma^{-1} * \beta * \gamma] \\ &= [\gamma^{-1} * \alpha * \gamma] \cdot [\gamma^{-1} * \beta * \gamma] &= \varphi([\alpha]) \cdot \varphi([\beta]). \end{aligned}$$

Portanto, φ é um isomorfismo. ■

Queremos determinar o grupo fundamental de S^1 , o círculo unitário. Podemos ver S^1 como $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ ou como um subconjunto (subgrupo) de \mathbb{C}^* , $S^1 = \{\cos(2\pi t) + i \sin(2\pi t), t \in \mathbb{R}\}$.

Definição 1.2.7. *Seja $\sigma : I \rightarrow S^1$ um caminho. Considere a aplicação $p = \exp : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, dada por $p(t) = e^{2\pi it} = \cos(2\pi t) + i \sin(2\pi t)$. Um caminho $\tilde{\sigma} : I \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $p \circ \tilde{\sigma} = \sigma$, é chamado um **levantamento do caminho σ** à reta real. Similarmente, se $F : I \times I \rightarrow S^1$ é uma homotopia, uma aplicação $\tilde{F} : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $p \circ \tilde{F} = F$, é chamada um **levantamento da homotopia F** .*

Observação 1.2.1. *A aplicação $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ dada por $p(t) = e^{2\pi it}$ satisfaz*

$$p(t) = 1 \Leftrightarrow t \in \mathbb{Z},$$

uma vez que $e^{2\pi it} = 1 = e^0$ se, e somente se, $t + k = 0$, com $k \in \mathbb{Z}$, o que equivale a $t = -k \in \mathbb{Z}$.

Proposição 1.2.2. *(i) Se $\sigma : I \rightarrow S^1$ é um caminho em S^1 com ponto inicial 1, então existe um único levantamento $\tilde{\sigma} : I \rightarrow \mathbb{R}$ com ponto inicial 0.*

(ii) Se $F : I \times I \rightarrow S^1$ é uma homotopia tal que $F(0, 0) = 1$, então existe um único levantamento $\tilde{F} : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tilde{F}(0, 0) = 0$.

Demonstração (Ideia): Não apresentaremos aqui a demonstração deste resultado. A ideia da prova em (i) consiste em dividir I em subintervalos adequados, com $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$, e definir continuamente $\tilde{\sigma}$ nos subintervalos $[t_i, t_{i+1}]$ usando σ e inversas locais de p . Para (ii) divide-se $I \times I$ em sub-retângulos $[t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}]$ e aplica-se o mesmo raciocínio em (i). (De fato, esse resultado é um caso particular da situação mais geral para espaços de recobrimento dada pela Proposição 1.3.1 e cuja prova lá está mais detalhada). ■

Definição 1.2.8. *Seja α um caminho fechado em S^1 com ponto base 1. Pela proposição anterior existe exatamente um levantamento $\tilde{\alpha}$ de α com ponto inicial 0. Temos que $\tilde{\alpha}(1) \in \mathbb{Z}$, pois $p(\tilde{\alpha}(1)) = (p \circ \tilde{\alpha})(1) = \alpha(1) = 1$. O número inteiro $\tilde{\alpha}(1)$ é chamado **grau de α** . Nesse caso, usamos a notação $\text{grau}(\alpha)$.*

Proposição 1.2.3. *Sejam α e β dois caminhos fechados em S^1 com ponto base 1. Então, $\alpha \sim \beta$ se, e somente se, $\text{grau}(\alpha) = \text{grau}(\beta)$.*

Demonstração: (\Rightarrow) Sejam $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ os levantamentos de α e β em \mathbb{R} , respectivamente, tendo ponto inicial 0. Como $\alpha \sim \beta$, existe $K : I \times I \rightarrow S^1$ uma homotopia tal que

$$\begin{cases} K(t, 0) = \alpha(t); & K(t, 1) = \beta(t), & \forall t \in I; \\ & K(0, s) = 1 = K(1, s), & \forall s \in I. \end{cases}$$

Pelo item (ii) da Proposição 1.2.2, existe um único levantamento $\tilde{K} : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tilde{K}(0, 0) = 0$ e $p \circ \tilde{K} = K$. Então,

$$p(\tilde{K}(1, s)) = K(1, s) = 1, \quad \forall s \in I,$$

e, portanto, $\tilde{K}(1, s) \in \mathbb{Z}$, para todo $s \in I$, pois $p(t) = e^{2\pi it} = 1$ implica que $t \in \mathbb{Z}$. Como $\tilde{K}(1, -)$ é contínua e I é conexo, então $\tilde{K}(1, -)$ deve ser uma função constante, isto é, existe $k_0 \in \mathbb{Z}$ (fixo) tal que $\tilde{K}(1, s) = k_0$, para todo $s \in I$. Notemos que $\tilde{K}(t, 0)$ e $\tilde{K}(t, 1)$ são levantamentos de α e β , respectivamente. Pela unicidade garantida na Proposição 1.2.2,

$$\tilde{\alpha}(t) = \tilde{K}(t, 0) \quad \text{e} \quad \tilde{\beta}(t) = \tilde{K}(t, 1).$$

Assim,

$$\text{grau}(\alpha) = \tilde{\alpha}(1) = \tilde{K}(1, 0) = k_0 = \tilde{K}(1, 1) = \tilde{\beta}(1) = \text{grau}(\beta).$$

(\Leftarrow) Suponhamos que $\text{grau}(\alpha) = \text{grau}(\beta)$, ou seja, $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1) = x_1 \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, onde $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ são os levantamentos de α e β , respectivamente. Pelo item (i) da Proposição 1.2.2, $\tilde{\alpha}(0) = 0 = \tilde{\beta}(0)$, uma vez que $\alpha(0) = 1 = \beta(0)$.

Definimos a aplicação $H : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$H(t, s) = (1 - s) \tilde{\alpha}(t) + s \tilde{\beta}(t).$$

Temos que H é uma homotopia entre os caminhos $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ (em \mathbb{R}) pois,

$$\begin{cases} H(t, 0) = \tilde{\alpha}(t); & H(t, 1) = \tilde{\beta}(t), & \forall t \in I; \\ H(0, s) = 0; & H(1, s) = x_1, & \forall s \in I. \end{cases}$$

Daí, $p \circ H : I \times I \rightarrow S^1$ é uma homotopia entre os caminhos fechados α e β em S^1 , pois $p \circ H$ é contínua, já que é composta de funções contínuas, e

$$\begin{cases} (p \circ H)(t, 0) = p(H(t, 0)) = p(\tilde{\alpha}(t)) = \alpha(t), \quad \forall t \in I; \\ (p \circ H)(t, 1) = p(H(t, 1)) = p(\tilde{\beta}(t)) = \beta(t), \quad \forall t \in I; \\ (p \circ H)(0, s) = p(H(0, s)) = p(0) = p(\tilde{\alpha}(0)) = \alpha(0) = 1, \quad \forall s \in I; \\ (p \circ H)(1, s) = p(H(1, s)) = p(\tilde{\alpha}(1)) = \alpha(1) = 1, \quad \forall s \in I. \end{cases}$$

Logo $\alpha \sim \beta$. ■

Teorema 1.2.1. *O grupo fundamental do círculo unitário é cíclico infinito, isto é, $\Pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.*

Demonstração: Seja

$$\begin{aligned} \partial : \Pi_1(S^1, 1) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ [\alpha] &\mapsto \partial([\alpha]) = \text{grau}(\alpha). \end{aligned}$$

Pela proposição anterior, ∂ está bem definida e é injetora, pois

$$\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \text{grau}(\alpha) = \text{grau}(\beta).$$

Note que ∂ é sobrejetora, pois para todo $n \in \mathbb{Z}$, o caminho fechado $\gamma : I \rightarrow S^1$ dado por $\gamma(t) = e^{2\pi nit}$, para todo $t \in I$, tem como levantamento o caminho $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tilde{\gamma}(t) = nt$, para todo $t \in I$ e $(p \circ \tilde{\gamma})(t) = p(nt) = e^{2\pi int} = \gamma(t)$. Assim,

$$\partial([\gamma]) = \tilde{\gamma}(1) = n.$$

Provemos que ∂ é um homomorfismo de grupos. Considere $[\alpha], [\beta] \in \Pi_1(S^1, 1)$. Se $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ são, respectivamente, os levantamentos de α e β com ponto inicial 0, então podemos ver que o caminho definido por

$$g(t) = \begin{cases} \tilde{\alpha}(2t), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ \tilde{\alpha}(1) + \tilde{\beta}(2t - 1), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

é o levantamento de $\alpha * \beta$ com ponto inicial 0, pois $p \circ g = \alpha * \beta$, como podemos ver abaixo:

$$(p \circ g)(t) = \begin{cases} p(\tilde{\alpha}(2t)) = \alpha(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ p(\tilde{\alpha}(1) + \tilde{\beta}(2t - 1)) = \alpha(1) \cdot \beta(2t - 1) = \beta(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

(usamos aqui que $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ é um homomorfismo e que $\alpha(1) = 1$). Além disso, $g(0) = \tilde{\alpha}(0) = 0$. Assim,

$$\partial([\alpha] \cdot [\beta]) = \partial([\alpha * \beta]) = g(1) = \tilde{\alpha}(1) + \tilde{\beta}(1) = \partial([\alpha]) + \partial([\beta]).$$

Portanto, ∂ é um isomorfismo. ■

Teorema 1.2.2. *Sejam X e Y espaços topológicos com pontos $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$. Então, $\Pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \Pi_1(X, x_0) \times \Pi_1(Y, y_0)$.*

Demonstração: Consideremos as projeções

$$\begin{aligned} p_1 : X \times Y &\rightarrow X & e & p_2 : X \times Y \rightarrow Y \\ (x, y) &\mapsto p_1(x, y) = x & & (x, y) \mapsto p_2(x, y) = y. \end{aligned}$$

Se $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ é um laço em $X \times Y$ baseado em (x_0, y_0) , então $p_1 \circ \alpha = \alpha_1$ é um laço em X baseado em x_0 e $p_2 \circ \alpha = \alpha_2$ é um laço em Y baseado em y_0 . Definimos

$$\begin{aligned} h : \Pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) &\longrightarrow \Pi_1(X, x_0) \times \Pi_1(Y, y_0) \\ [\alpha] &\longmapsto ([p_1 \circ \alpha], [p_2 \circ \alpha]) = ([\alpha_1], [\alpha_2]). \end{aligned}$$

Temos que h é um homomorfismo de grupos. De fato,

$$h([\alpha] \cdot [\beta]) = h([\alpha * \beta]) = ([p_1 \circ (\alpha * \beta)], [p_2 \circ (\alpha * \beta)]).$$

Como $\alpha * \beta = (\alpha_1 * \beta_1, \alpha_2 * \beta_2)$, então $p_1 \circ (\alpha * \beta) = \alpha_1 * \beta_1 = (p_1 \circ \alpha) * (p_1 \circ \beta)$ e, analogamente, $p_2 \circ (\alpha * \beta) = (p_2 \circ \alpha) * (p_2 \circ \beta)$. Assim,

$$h([\alpha] \cdot [\beta]) = ([p_1 \circ \alpha] * [p_1 \circ \beta], [p_2 \circ \alpha] * [p_2 \circ \beta]).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} h([\alpha]) \cdot h([\beta]) &= ([p_1 \circ \alpha], [p_2 \circ \alpha]) \cdot ([p_1 \circ \beta], [p_2 \circ \beta]) \\ &= ([p_1 \circ \alpha] \cdot [p_1 \circ \beta], [p_2 \circ \alpha] \cdot [p_2 \circ \beta]) \\ &= ([p_1 \circ \alpha] * [p_1 \circ \beta], [p_2 \circ \alpha] * [p_2 \circ \beta]). \end{aligned}$$

Logo,

$$h([\alpha] \cdot [\beta]) = h([\alpha]) \cdot h([\beta]).$$

Vamos verificar que h é um isomorfismo exibindo a aplicação inversa de h .

Sejam α_1 e α_2 laços em X e Y baseados em x_0 e y_0 , respectivamente. Consideremos

$$\begin{aligned} \alpha : I &\rightarrow X \times Y \\ t &\mapsto \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \end{aligned}$$

assim, α é um laço em $X \times Y$ baseado em (x_0, y_0) .

Defina

$$\begin{aligned} g : \Pi_1(X, x_0) \times \Pi_1(Y, y_0) &\rightarrow \Pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \\ ([\alpha_1], [\alpha_2]) &\mapsto [\alpha] \end{aligned}$$

então, g é a aplicação inversa de h , uma vez que

$$(g \circ h)([\alpha]) = g(h([\alpha])) = g([p_1 \circ \alpha], [p_2 \circ \alpha]) = g([\alpha_1], [\alpha_2]) = [\alpha]$$

e

$$(h \circ g)([\alpha_1], [\alpha_2]) = h(g([\alpha_1], [\alpha_2])) = h([\alpha]) = ([p_1 \circ \alpha], [p_2 \circ \alpha]) = ([\alpha_1], [\alpha_2]).$$

Logo, h é um isomorfismo com $h^{-1} = g$. ■

Exemplo 1.2.2. Considere \mathbb{T}^2 o toro bidimensional. O toro \mathbb{T}^2 pode ser definido como o lugar geométrico tridimensional formado pela rotação de uma circunferência de raio r , em torno de uma circunferência de raio R e podemos identificar $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$. Logo, pelo teorema anterior e o Teorema 1.2.1,

$$\Pi_1(\mathbb{T}^2) = \Pi_1(S^1 \times S^1) \cong \Pi_1(S^1) \times \Pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

A cada aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$, pode-se definir um homomorfismo “induzido” no grupo fundamental, como mostrado abaixo.

Definição 1.2.9. *Sejam $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua entre dois espaços topológicos X e Y e $\alpha : I \rightarrow X$ um laço em X baseado em x_0 . Desse modo, a aplicação $f \circ \alpha : I \rightarrow Y$ é um laço em Y baseado em $f(x_0)$. Assim, têm-se bem definida a aplicação*

$$\begin{aligned} f_{\#} : \Pi_1(X, x_0) &\rightarrow \Pi_1(Y, f(x_0)) \\ [\alpha] &\mapsto [f \circ \alpha]. \end{aligned}$$

Esta aplicação é chamada **homomorfismo induzido por f em Π_1** .

Observação 1.2.2. *Vejamos que realmente $f_{\#}$ é um homomorfismo.*

De fato, dados $[\alpha], [\beta] \in \Pi_1(X, x_0)$, temos que

$$\begin{aligned} f_{\#}([\alpha] \cdot [\beta]) &= f_{\#}([\alpha * \beta]) = [f \circ (\alpha * \beta)] = [(f \circ \alpha) * (f \circ \beta)] \\ &= [f \circ \alpha] \cdot [f \circ \beta] = f_{\#}([\alpha]) \cdot f_{\#}([\beta]). \end{aligned}$$

Proposição 1.2.4. (i) *Se $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ são aplicações contínuas entre dois espaços topológicos, então $(g \circ f)_{\#} = g_{\#} \circ f_{\#}$.*

(ii) *Se $Id : X \rightarrow X$ é a aplicação identidade, então $Id_{\#} : \Pi_1(X, x_0) \rightarrow \Pi_1(X, x_0)$ é o homomorfismo identidade.*

Demonstração:

(i) Considere o homomorfismo induzido da aplicação $g \circ f : X \rightarrow Z$. Para todo $[\alpha] \in \Pi_1(X, x_0)$, segue que

$$(g \circ f)_{\#}([\alpha]) = [g \circ f \circ \alpha]. \quad (I)$$

Como $f_{\#}([\alpha]) \in \Pi_1(Y, f(x_0))$, então $g_{\#}(f_{\#}([\alpha])) \in \Pi_1(Z, g(f(x_0)))$. Daí,

$$g_{\#}(f_{\#}([\alpha])) = g_{\#}([f \circ \alpha]) = [g \circ f \circ \alpha]. \quad (II)$$

De (I) e (II), segue que $(g \circ f)_{\#} = g_{\#} \circ f_{\#}$.

(ii) Dado $[\alpha] \in \Pi_1(X, x_0)$, $Id_{\#}([\alpha]) = [Id \circ \alpha] = [\alpha]$. ■

Teorema 1.2.3. *(Invariância topológica) Sejam X e Y espaços topológicos conexos por caminhos. Se X é homeomorfo a Y , então $\Pi_1(X)$ é isomorfo a $\Pi_1(Y)$.*

Demonstração: Como X é homeomorfo a Y , existe um homeomorfismo $f : X \rightarrow Y$. Assim, usando a inversa de f , segue que $f^{-1} \circ f = Id_X$ e $f \circ f^{-1} = Id_Y$. Pela proposição anterior, temos que

$$(Id_X)_{\#} = (f^{-1} \circ f)_{\#} = f_{\#}^{-1} \circ f_{\#} \quad \text{e} \quad (Id_Y)_{\#} = (f \circ f^{-1})_{\#} = f_{\#} \circ f_{\#}^{-1},$$

assim, $f_{\#} : \Pi_1(X) \rightarrow \Pi_1(Y)$ (ou, mais precisamente, $f_{\#} : \Pi_1(X, x_0) \rightarrow \Pi_1(Y, f(x_0))$) é um isomorfismo. ■

Definição 1.2.10. *Seja $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$ a esfera unitária n -dimensional. A aplicação contínua $A : S^n \rightarrow S^n$, definida por $A(x) = -x$, é chamada **aplicação antipodal** ou **aplicação antípoda**.*

Exemplo 1.2.3. $\Pi_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^1) \cong \mathbb{Z}$, onde $\mathbb{R}\mathbb{P}^1 = \frac{S^1}{A}$ é o espaço projetivo, que é o espaço quociente de S^1 obtido pela identificação de cada par de pontos diametralmente opostos. De fato, temos que $\mathbb{R}\mathbb{P}^1$ é homeomorfo a S^1 , já que a aplicação

$$h : \mathbb{R}\mathbb{P}^1 \rightarrow S^1 \\ \bar{x} \mapsto x^2$$

está bem definida e é um homeomorfismo.

Logo, pelos Teoremas 1.2.3 e 1.2.1, segue que

$$\Pi_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^1) = \Pi_1\left(\frac{S^1}{A}\right) \cong \Pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}.$$

Definição 1.2.11. Sejam X e Y espaços topológicos e f e g aplicações contínuas de X em Y , dizemos que **f é homotópica a g relativamente a um subconjunto A de X** e denotamos por $f \sim g$, se existe uma função contínua $H : X \times I \rightarrow Y$, tal que, para todo $x \in X$, temos

$$\begin{cases} H(x, 0) = f(x); H(x, 1) = g(x), \forall x \in X; \\ H(a, t) = f(a) = g(a), \forall a \in A, \forall t \in I. \end{cases} \quad (\text{I})$$

Se apenas (I) é satisfeita, dizemos simplesmente que f é **homotópica a g** . A função H é chamada **homotopia entre f e g** .

Definição 1.2.12. Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua. Dizemos que f é uma **equivalência homotópica** ou uma **equivalência de homotopia** se existir $g : Y \rightarrow X$ uma aplicação contínua tal que $f \circ g : Y \rightarrow Y$ é homotópica a aplicação identidade Id_Y e $g \circ f : X \rightarrow X$ é homotópica a aplicação identidade Id_X . A aplicação g é chamada **inversa homotópica** de f .

Se existe uma equivalência homotópica entre dois espaços topológicos X e Y , dizemos que X é **homotopicamente equivalente** a Y ou que X tem o **mesmo tipo de homotopia** de Y e denotamos por $X \sim Y$.

Observação 1.2.3. Se X e Y são espaços topológicos homeomorfos, então $X \sim Y$.

Exemplo 1.2.4. \mathbb{R} e $\{x_0\}$, com x_0 um ponto qualquer em \mathbb{R} , têm o mesmo tipo de homotopia, uma vez que para a função constante $f : \mathbb{R} \rightarrow \{x_0\}$, existe $g : \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $g(x_0) = x_0$ (inclusão), tal que $f \circ g \sim Id_{\{x_0\}}$ e $g \circ f \sim Id_{\mathbb{R}}$, pois existem as aplicações contínuas $H_1 : \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$H_1(x, t) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ x_0, & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

e $H_2 : \{x_0\} \times I \rightarrow \{x_0\}$, dada por $H_2(x_0, t) = x_0$, que satisfazem

$$\begin{cases} H_1(x, 0) = x = Id_{\mathbb{R}}(x); \\ H_1(x, 1) = x_0 = g(x_0) = g(f(x)) \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} H_2(x_0, 0) = x_0 = Id_{\{x_0\}}(x_0); \\ H_2(x_0, 1) = x_0 = f(g(x_0)). \end{cases}$$

Lema 1.2.1. *Sejam X e Y espaços topológicos conexos por caminhos e $f, g : X \rightarrow Y$ aplicações contínuas tais que f é homotópica a g . Considere $H : X \times I \rightarrow Y$ uma homotopia entre f e g . Seja $\gamma : I \rightarrow Y$ definido por $\gamma(t) = H(x_0, t)$. Então, γ é um caminho em Y ligando $f(x_0)$ a $g(x_0)$ e induz um isomorfismo*

$$\begin{aligned} \gamma_{\#} : \Pi_1(Y, f(x_0)) &\rightarrow \Pi_1(Y, g(x_0)) \\ [\beta] &\mapsto [\gamma^{-1} * \beta * \gamma] \end{aligned}$$

tal que $g_{\#} = \gamma_{\#} \circ f_{\#}$, isto é, o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{array}{ccc} & & \Pi_1(Y, f(x_0)) \\ & \nearrow f_{\#} & \downarrow \gamma_{\#} \\ \Pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{g_{\#}} & \Pi_1(Y, g(x_0)) \end{array}$$

onde $f_{\#}$ e $g_{\#}$ são os homomorfismos induzidos de f e g , respectivamente.

Demonstração: Considere a homotopia H e o caminho $\gamma(t) = H(x_0, t)$. Como H é uma homotopia entre f e g , então H é contínua e

$$\begin{cases} H(x, 0) = f(x), \forall x \in X; \\ H(x, 1) = g(x), \forall x \in X, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma(0) = H(x_0, 0) = f(x_0); \\ \gamma(1) = H(x_0, 1) = g(x_0), \end{cases}$$

assim, γ é um caminho em Y ligando $f(x_0)$ a $g(x_0)$. O fato que γ induz um isomorfismo segue da demonstração da Proposição 1.2.1.

Seja $[\alpha] \in \Pi_1(X, x_0)$. Precisamos verificar que $g_{\#}[\alpha] = \gamma_{\#} \circ f_{\#}([\alpha])$, ou seja, $g_{\#}([\alpha]) = (\gamma_{\#} \circ f_{\#})([\alpha])$. Para isso, basta ver que

$$[g \circ \alpha] = [\gamma^{-1} * (f \circ \alpha) * \gamma].$$

Queremos obter uma homotopia L entre $g \circ \alpha$ e $\gamma^{-1} * (f \circ \alpha) * \gamma$. Considere $K : I \times I \rightarrow Y$ definida por $K(t, s) = H(\alpha(t), s)$. Temos que K é contínua e

$$\begin{cases} K(t, 0) = H(\alpha(t), 0) = (f \circ \alpha)(t), \forall t \in I; \\ K(t, 1) = H(\alpha(t), 1) = (g \circ \alpha)(t), \forall t \in I; \\ K(0, s) = K(1, s) = H(x_0, s) = \gamma(s), \forall s \in I, \end{cases}$$

logo, K é uma homotopia entre $f \circ \alpha$ e $g \circ \alpha$ relativamente a $\gamma(s)$. Deformando K ,

onde para $t \in \left[0, \frac{(1-s)}{2}\right]$ a homotopia L parte de $\gamma^{-1}(0) = \gamma(1) = g(x_0)$ e vai até

$\gamma^{-1}(1-s) = \gamma(s)$. Agora, para $t \in \left[\frac{(1-s)}{2}, \frac{(s+3)}{4}\right]$ temos a seguinte composição

$$\begin{aligned} \left[\frac{(1-s)}{2}, \frac{(s+3)}{4}\right] &\rightarrow [0, 1] \rightarrow Y \\ t &\mapsto \frac{(4t+2s-2)}{(3s+1)} \mapsto K\left(\frac{(4t+2s-2)}{(3s+1)}, s\right). \end{aligned}$$

Finalmente, para $t \in \left[\frac{(s+3)}{4}, 1\right]$ a homotopia L parte de $\gamma(s)$ e vai até $g(x_0)$ tal que

$$(\gamma^{-1} * (f \circ \alpha) * \gamma)(t) = \begin{cases} \gamma^{-1}(2t), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ (f \circ \alpha)(4t-2), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4}; \\ \gamma(4t-3), & \text{se } \frac{3}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Obtemos que a homotopia L é dada por

$$L(t, s) = \begin{cases} \gamma^{-1}(2t), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{(1-s)}{2}; \\ K\left(\frac{(4t+2s-2)}{(3s+1)}, s\right), & \text{se } \frac{(1-s)}{2} \leq t \leq \frac{(s+3)}{4}; \\ \gamma(4t-3), & \text{se } \frac{(s+3)}{4} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

e como

$$\begin{cases} L(t, 0) = \begin{cases} \gamma^{-1}(2t), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ K(4t-2, 0) = (f \circ \alpha)(4t-2), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4}; \\ \gamma(4t-3), & \text{se } \frac{3}{4} \leq t \leq 1; \end{cases} \\ = (\gamma^{-1} * (f \circ \alpha) * \gamma)(t), \quad \forall t \in I; \\ L(t, 1) = K(t, 1) = (g \circ \alpha)(t), \quad \forall t \in I; \\ L(0, s) = \gamma^{-1}(0) = g(x_0) = \gamma(1) = L(1, s), \quad \forall s \in I, \end{cases}$$

segue que L é uma homotopia entre $g \circ \alpha$ e $\gamma^{-1} * (f \circ \alpha) * \gamma$ relativamente a $g(x_0)$, assim $[g \circ \alpha] = [\gamma^{-1} * (f \circ \alpha) * \gamma]$, como desejado. ■

Teorema 1.2.4. (*Invariância homotópica*) *Sejam X e Y espaços topológicos conexos por caminhos. Se X tem o mesmo tipo de homotopia de Y , então $\Pi_1(X)$ é isomorfo a $\Pi_1(Y)$.*

Demonstração: Como $X \sim Y$, então existem $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ aplicações contínuas tais que $f \circ g \sim Id_Y$ e $g \circ f \sim Id_X$. Sejam $y_0 \in Y$, $x_0 = g(y_0)$ e $f_{\#} : \Pi_1(X, x_0) \rightarrow \Pi_1(Y, f(x_0))$ e $g_{\#} : \Pi_1(Y, f(x_0)) \rightarrow \Pi_1(X, g(f(x_0)))$ os homomorfismos induzidos de f e g , respectivamente.

Considere γ um caminho ligando y_0 a $f(x_0)$ e σ um caminho ligando x_0 a $g(f(x_0))$. Pelo lema anterior,

$$(f \circ g)_{\#} = \gamma_{\#} \circ (Id_Y)_{\#} \quad \text{e} \quad (g \circ f)_{\#} = \sigma_{\#} \circ (Id_X)_{\#}.$$

Assim, os diagramas abaixo são comutativos

$$\begin{array}{ccc} \Pi_1(Y, y_0) & \xrightarrow{(Id_Y)_{\#}} & \Pi_1(Y, y_0) & & \Pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{(Id_X)_{\#}} & \Pi_1(X, x_0) \\ \downarrow g_{\#} & & \downarrow \gamma_{\#} & & \downarrow f_{\#} & & \downarrow \sigma_{\#} \\ \Pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f_{\#}} & \Pi_1(Y, f(x_0)) & & \Pi_1(Y, f(x_0)) & \xrightarrow{g_{\#}} & \Pi_1(X, g(f(x_0))) \end{array}$$

Pela Proposição 1.2.4, temos $(f \circ g)_{\#} = f_{\#} \circ g_{\#}$, $(g \circ f)_{\#} = g_{\#} \circ f_{\#}$, $(Id_Y)_{\#} = Id_{\Pi_1(Y, y_0)}$ e $(Id_X)_{\#} = Id_{\Pi_1(X, x_0)}$, então

$$f_{\#} \circ g_{\#} = \gamma_{\#} \circ Id_{\Pi_1(Y, y_0)} \tag{I}$$

e

$$g_{\#} \circ f_{\#} = \sigma_{\#} \circ Id_{\Pi_1(X, x_0)}. \tag{II}$$

De (I), obtemos que $f_{\#}$ é sobrejetora, pois, para todo $[\beta] \in \Pi_1(Y, f(x_0))$, existe $[\alpha] \in \Pi_1(Y, y_0)$ tal que $\gamma_{\#}([\alpha]) = [\beta]$, uma vez que, pelo lema anterior, $\gamma_{\#}$ é um isomorfismo. Assim,

$$[\beta] = (\gamma_{\#} \circ Id_{\Pi_1(Y, y_0)})([\alpha]) \stackrel{(I)}{=} (f_{\#} \circ g_{\#})([\alpha]),$$

portanto, existe $g_{\#}([\alpha]) \in \Pi_1(X, x_0)$ tal que $f_{\#}(g_{\#}([\alpha])) = [\beta]$.

De (II), segue que $f_{\#}$ é injetora, uma vez que, para quaisquer $[\alpha], [\beta] \in \Pi_1(X, x_0)$ com $f_{\#}([\alpha]) = f_{\#}([\beta])$, segue que $g_{\#}(f_{\#}([\alpha])) = g_{\#}(f_{\#}([\beta]))$, assim $\sigma_{\#}([\alpha]) = \sigma_{\#}([\beta])$, então $[\alpha] = [\beta]$, pois, também pelo lema anterior, $\sigma_{\#}$ é um isomorfismo.

Logo, $f_{\#}$ é um isomorfismo. ■

Definição 1.2.13. *Um subconjunto A de um espaço topológico X é um **retrato por deformação** de X se existem uma aplicação $r : X \rightarrow A$ e uma homotopia $F : X \times I \rightarrow X$ tais que $r(a) = a$, para todo $a \in A$, $F(x, 0) = x$, $F(x, 1) = r(x)$, para todo $x \in X$, e $F(a, t) = a$, para todo $a \in A$ e $t \in I$.*

Teorema 1.2.5. *Se A é um retrato por deformação de um espaço topológico X , então a aplicação inclusão $i : A \rightarrow X$ induz um isomorfismo $i_{\#} : \Pi_1(A, a) \rightarrow \Pi_1(X, a)$.*

Demonstração: Mostremos que o homomorfismo $i_{\#}$ é bijetor.

Como A é um retrato por deformação de X , então existem uma aplicação $r : X \rightarrow A$ e uma homotopia $F : X \times I \rightarrow X$ tais que $r(a) = a$, para todo $a \in A$, $F(x, 0) = x$, $F(x, 1) = r(x)$, para todo $x \in X$, e $F(a, t) = a$, para todo $a \in A$ e $t \in I$. Assim, $i \circ r \sim Id_X$, uma vez que $F(x, 0) = Id_X(x)$ e $F(x, 1) = r(x) = i(r(x))$, para qualquer $x \in X$. Note, ainda, que F é uma homotopia relativa a A . Fixando $a \in A$, temos que $i \circ r \sim Id_X$ (relativamente a $\{a\}$). Assim, dado $[\beta] \in \Pi_1(X, a)$, temos que $(i \circ r) \circ \beta \sim Id_X \circ \beta = \beta$, de onde segue que

$$(i_{\#} \circ r_{\#})([\beta]) = [i \circ r \circ \beta] \stackrel{i \circ r \circ \beta \sim \beta}{=} [\beta],$$

ou seja,

$$i_{\#} \circ r_{\#} = Id_{\Pi_1(X, a)}.$$

Para qualquer $[\alpha] \in \Pi_1(A, a)$, temos que $(r \circ i \circ \alpha)(t) = \alpha(t)$, para todo $t \in I$. Assim,

$$(r_{\#} \circ i_{\#})([\alpha]) = [r \circ i \circ \alpha] = [\alpha],$$

ou seja,

$$r_{\#} \circ i_{\#} = Id_{\Pi_1(A, a)}.$$

Logo $r_{\#}$ é a aplicação inversa de $i_{\#}$. Assim, $i_{\#}$ é bijetora e, portanto, $i_{\#}$ é um isomorfismo. ■

Definição 1.2.14. *Um espaço topológico X é dito ser **contrátil** se existe um ponto $x_0 \in X$ tal que $\{x_0\}$ é um retrato por deformação de X .*

Definição 1.2.15. *Dizemos que um espaço topológico X é **simplesmente conexo** se ele é conexo por caminhos e $\Pi_1(X) = \{1\}$, onde 1 indica a classe de homotopia do caminho constante.*

Exemplo 1.2.5. *A esfera unitária n -dimensional S^n , para $n \geq 2$, e \mathbb{R}^2 são simplesmente conexos, pois, quaisquer dois caminhos fechados da esfera com o ponto base em comum são homotópicos. O mesmo verifica-se para o \mathbb{R}^2 . Assim, todos os caminhos fechados tanto na esfera, quanto em \mathbb{R}^2 , são homotópicos ao caminho constante (que tem a classe de homotopia representada por 1). Portanto, $\Pi_1(S^n) = \{1\}$, para $n \geq 2$, e $\Pi_1(\mathbb{R}^2) = \{1\}$.*

Corolário 1.2.1. *Se X é um espaço contrátil, então X é simplesmente conexo.*

Demonstração: Note que X é conexo por caminhos, uma vez que por X ser contrátil, existe $x_0 \in X$ tal que $\{x_0\}$ é um retrato por deformação de X . Assim existem as aplicações contínuas $r : X \rightarrow \{x_0\}$ e $F : X \times I \rightarrow X$, tais que $r(x) = x_0$, para todo $x \in X$, $F(x, 0) = x$ e $F(x, 1) = r(x)$, para todo $x \in X$, e $F(x_0, t) = x_0$, para todo $t \in I$. Defina $\gamma_x : I \rightarrow X$ por $\gamma_x(t) = F(x, t)$, para todo $x \in X$. Então, $\gamma_x(0) = x$ e $\gamma_x(1) = x_0$, para todo $x \in X$, assim, existe um caminho ligando x_0 a qualquer ponto de X e, portanto, X é conexo por caminhos.

Como $\{x_0\}$ é um retrato por deformação de X , temos, pelo Teorema 1.2.5, que $i_{\#} : \Pi_1(\{x_0\}) \rightarrow \Pi_1(X)$ é um isomorfismo, onde $i : \{x_0\} \rightarrow X$ é a aplicação inclusão. Logo, $\Pi_1(X) \cong \Pi_1(\{x_0\}) = \{1\}$.

Portanto, X é simplesmente conexo. ■

1.3 Espaços de Recobrimento

Nesta seção consideramos todos os espaços topológicos mencionados como sendo conexos e localmente conexos por caminhos.

Recobrimento e levantamento de caminho e de homotopia

Definição 1.3.1. *Seja X um espaço topológico. Um **espaço de recobrimento** (ou simplesmente, **recobrimento**) de X é um par (\tilde{X}, p) , onde \tilde{X} é um espaço topológico e $p : \tilde{X} \rightarrow X$ é uma aplicação contínua e sobrejetora, tal que, todo $x \in X$ possui uma vizinhança aberta U de X (conexa por caminhos), com*

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{l \in \Gamma} V_l,$$

onde V_l são abertos (conexos por caminhos) de \tilde{X} , dois a dois disjuntos (componentes), e $p|_{V_l} : V_l \rightarrow U$ é um homeomorfismo, para cada $l \in \Gamma$.

Usaremos a notação (\tilde{X}, p, X) para indicar que (\tilde{X}, p) é um recobrimento de X .

O conjunto U é dito **vizinhança distinguida** ou **vizinhança elementar** ou, ainda, **admissível de x** e p é chamada de **projeção de recobrimento**.

Exemplo 1.3.1. *Considere o círculo unitário S^1 , então (\mathbb{R}, p, S^1) é um espaço de recobrimento, onde*

$$\begin{aligned} p = \exp : \mathbb{R} &\rightarrow S^1 \\ t &\mapsto \exp(t) = e^{2\pi i t}. \end{aligned}$$

De fato, sem perda de generalidade, podemos supor que os abertos de S^1 são da forma $U = \{e^{2\pi i t}; t \in (a, b) \subset I = [0, 1]\}$. Temos $V := I \cap \exp^{-1}(U) = (a, b)$ e $\exp^{-1}(U)$ é a união disjunta dos abertos $V + n$, onde $V + n = (a + n, b + n)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Logo, cada $x \in X$ possui uma vizinhança distinguida. Observe que a aplicação \exp é um homomorfismo de grupos entre $(\mathbb{R}, +)$ e (S^1, \cdot) , pois

$$\exp(t + s) = e^{2\pi i(t+s)} = e^{2\pi i t} \cdot e^{2\pi i s} = \exp(t) \cdot \exp(s).$$

Ainda, como a aplicação exponencial é contínua, sobrejetora e $\exp|_{V+n} : V + n \rightarrow U$ é um homeomorfismo, segue que (\mathbb{R}, p, S^1) é um espaço de recobrimento.

Exemplo 1.3.2. Considere o toro bidimensional $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$, como visto no Exemplo 1.2.2. Então, $(\mathbb{R}^2, h, \mathbb{T}^2)$ é um espaço de recobrimento, com

$$\begin{aligned} h: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{T}^2 \\ (s, t) &\mapsto h(s, t) = (\exp(s), \exp(t)). \end{aligned}$$

Podemos supor que os abertos de \mathbb{T}^2 são da forma

$$U = \{(\exp(s), \exp(t)); (s, t) \in (a; b) \times (c; d) \subset I \times I\}$$

e de modo análogo ao exemplo anterior, conclui-se que $(\mathbb{R}^2, h, \mathbb{T}^2)$ é um espaço de recobrimento do toro.

Teorema 1.3.1. Seja X um G -espaço à esquerda. Se a ação do grupo G é propriamente descontínua de homeomorfismo, então a aplicação canônica $p: X \rightarrow \frac{X}{G}$ é uma projeção de recobrimento.

Demonstração: De acordo com a Proposição 1.1.2 e sua demonstração, p é uma aplicação aberta, isto é, para cada aberto U de X , $p(U)$ é um aberto de $\frac{X}{G}$, e $p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{g \in G} g \cdot U$, onde $g \cdot U = g(U) = \{g \cdot u = g(u); u \in U\}$.

Sejam $z \in \frac{X}{G}$ e $x \in X$ tal que $p(x) = z$.

Tome (por hipótese) uma vizinhança aberta própria U de x (ou seja, tal que $g \cdot U \cap U = \emptyset$, para todo $g \in G - \{e\}$). Mostremos que $p|_{g \cdot U}: g \cdot U \rightarrow p(U)$ é um homeomorfismo, para cada $g \in G$.

Notemos que se g e h são elementos de G distintos, então $g \cdot U \cap h \cdot U = \emptyset$, uma vez que $g^{-1}h \cdot U \cap U = \emptyset$.

Dado $u \in U$, temos que u e $g \cdot u$ pertencem a mesma órbita, para todo $g \in G$, e assim $p(g \cdot U) = p(U)$, de modo que $p|_{g \cdot U}$ é sobrejetora.

A aplicação $p|_{g \cdot U}$ também é injetora, pois se $p(g \cdot u) = p(g \cdot v)$, com $u, v \in U$ e $g \cdot u \neq g \cdot v$ (ou seja, se $g \cdot u$ e $g \cdot v$ são elementos distintos que estão na mesma órbita), então existe $h \in G$ com $g \cdot u = h(g \cdot v)$, daí $g \cdot U \cap hg \cdot U \neq \emptyset$, o que é uma contradição.

Como $p|_{g \cdot U}$ é aberta e contínua, segue que $p|_{g \cdot U}$ é um homeomorfismo, para cada $g \in G$. Então, p é uma projeção de recobrimento. ■

Teorema 1.3.2. Seja (\tilde{X}, p, X) um espaço de recobrimento, então p é uma aplicação aberta.

Demonstração: Considere \tilde{U} um aberto qualquer de \tilde{X} e $x \in p(\tilde{U})$.

Como p é uma projeção de recobrimento, então existe uma vizinhança aberta U de x , tal que $p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} V_j$, onde os V_j são abertos de \tilde{X} , dois a dois disjuntos, e

$p|_{V_j}: V_j \rightarrow U$ é um homeomorfismo, para todo $j \in J$.

Tome $\tilde{x} \in p^{-1}(x) \cap \tilde{U}$, assim $\tilde{x} \in p^{-1}(U)$, pois $p(\tilde{x}) = x \in U$. Logo, $\tilde{x} \in V_k$, para algum $k \in J$.

Assim, $V_k \cap \tilde{U}$ é um aberto de V_k que contém \tilde{x} . Como $p|_{V_k}$ é um homeomorfismo sobre U , segue que $p(V_k \cap \tilde{U}) = p|_{V_k}(V_k \cap \tilde{U})$ é um aberto de U . Por U ser um aberto de X , obtemos que $p(V_k \cap \tilde{U})$ é um aberto de X . Mas, $x = p(\tilde{x})$, então

$$x \in p(V_k \cap \tilde{U}) \subset p(\tilde{U}),$$

assim, $p(\tilde{U})$ é um aberto de X . Logo, p é uma aplicação aberta. ■

Definição 1.3.2. Sejam (\tilde{X}, p, X) um recobrimento e $\alpha : I \rightarrow X$ um caminho em X . Um caminho $\tilde{\alpha} : I \rightarrow \tilde{X}$ é chamado um **levantamento de α** se $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$, isto é, se o diagrama seguinte comuta

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{X} \\ & \nearrow \tilde{\alpha} & \downarrow p \\ I & \xrightarrow{\alpha} & X. \end{array}$$

Seja $F : I \times I \rightarrow X$ uma homotopia, uma aplicação $\tilde{F} : I \times I \rightarrow \tilde{X}$ é um **levantamento da homotopia F** se $p \circ \tilde{F} = F$, isto é, se o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{X} \\ & \nearrow \tilde{F} & \downarrow p \\ I \times I & \xrightarrow{F} & X. \end{array}$$

Observação 1.3.1. Note que na seção anterior foi dada a definição de levantamento de caminho e homotopia para o caso particular em que $X = S^1$, $\tilde{X} = \mathbb{R}$ e $p = \exp$ (Definição 1.2.7).

Os dois resultados abaixo (na sequência) serão importantes para a demonstração da próxima proposição sobre levantamento de caminhos.

Teorema 1.3.3. Seja M um espaço métrico compacto com métrica d . Dada uma cobertura aberta $\{A_j; j \in J\}$ de M , existe um número real $\delta > 0$ (chamado de número de Lebesgue de $\{A_j; j \in J\}$) tal que qualquer subconjunto de M de diâmetro menor que δ está contido em um conjunto A_j , para algum $j \in J$.

Demonstração: Como M é compacto, podemos assumir que J é finito. Para todo $x \in M$ e $j \in J$, seja

$$f_j(x) = d(x, M - A_j) = \inf_{y \in M - A_j} d(x, y),$$

onde d é a métrica de M . Temos que f_j é contínua, uma vez que d é contínua.

Defina

$$f(x) = \max_{j \in J} f_j(x),$$

assim f é contínua.

Por $M - A_j$ ser um conjunto fechado, então $f_j(x) = 0$ se, e somente se, $x \in M - A_j$. Daí, $f(x) = 0$ se, e somente se, $x \in M - A_j$, para todo $j \in J$. Portanto, como $\{A_j; j \in J\}$ é uma cobertura de M , obtemos que $f(x) \neq 0$, para todo $x \in M$, assim, $f(x) > 0$, para todo $x \in M$.

Como M é compacto e f é contínua, segue que $f(M)$ é um subconjunto compacto de \mathbb{R} (mais precisamente, de $(0, +\infty) \subset \mathbb{R}$).

Logo, existe um número real $\delta > 0$ tal que $f(x) > \delta$, para todo $x \in M$.

Seja S um subconjunto qualquer de M com diâmetro menor do que δ . Tome $x \in S$, assim $f(x) > \delta$, ou seja, $f_k(x) > \delta$, para algum $k \in J$, e, então, $x \in A_k$. Como o diâmetro de S é menor do que δ e $f_k(x) = d(x, M - A_k) > \delta$, com $x \in A_k$, concluímos que S está contido em A_k , pois se existir $x_0 \in S$ tal que $x_0 \notin A_k$, temos $d(x, x_0) \geq d(x, M - A_k) > \delta$, com $x, x_0 \in S$, o que contradiz o fato do diâmetro de S ser menor que δ . ■

Lema 1.3.1. *Seja (\tilde{X}, p, X) um espaço de recobrimento. Dados quaisquer caminhos $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2 : I \rightarrow \tilde{X}$ tais que $p \circ \tilde{\alpha}_1 = p \circ \tilde{\alpha}_2$, temos que o conjunto $W = \{t \in I; \tilde{\alpha}_1(t) = \tilde{\alpha}_2(t)\}$ é vazio ou é todo o I .*

Demonstração: Seja $W = \{t \in I; \tilde{\alpha}_1(t) = \tilde{\alpha}_2(t)\}$. Provemos que W é um conjunto aberto e fechado.

Tome $t \in I$ qualquer. Se $t \in W$ (e, portanto, $W \neq \emptyset$), temos $\tilde{\alpha}_1(t) = \tilde{\alpha}_2(t)$ e, por hipótese, $(p \circ \tilde{\alpha}_1)(t) = (p \circ \tilde{\alpha}_2)(t) = x$. Como p é uma projeção de recobrimento, então existe uma vizinhança U de x e

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} V_j,$$

onde V_j são abertos conexos por caminhos e dois a dois disjuntos. Além disso, $p|_{V_j} : V_j \rightarrow U$ é um homeomorfismo, para cada $j \in J$.

Assim, $\tilde{\alpha}_1(t) = \tilde{\alpha}_2(t) \in V_k$, para algum $k \in J$ e, então,

$$t \in \tilde{\alpha}_1^{-1}(V_k) \cap \tilde{\alpha}_2^{-1}(V_k) \subset W,$$

uma vez que, para todo $s \in \tilde{\alpha}_1^{-1}(V_k) \cap \tilde{\alpha}_2^{-1}(V_k)$, temos $\tilde{\alpha}_1(s), \tilde{\alpha}_2(s) \in V_k$. Como $p|_{V_k}$ é um homeomorfismo e, pela hipótese, $(p \circ \tilde{\alpha}_1)(s) = (p \circ \tilde{\alpha}_2)(s)$, segue que $\tilde{\alpha}_1(s) = \tilde{\alpha}_2(s)$, ou seja, $s \in W$. Observe que $\tilde{\alpha}_1^{-1}(V_k) \cap \tilde{\alpha}_2^{-1}(V_k)$ é um aberto, pois, pela continuidade de $\tilde{\alpha}_1$ e $\tilde{\alpha}_2$, temos a interseção de dois abertos.

Logo, W é aberto.

Agora, se t não está em W , então $\tilde{\alpha}_1(t) \neq \tilde{\alpha}_2(t)$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\tilde{\alpha}_1(t) \in V_1$ e $\tilde{\alpha}_2(t) \in V_2$, uma vez que, se $\tilde{\alpha}_1(t), \tilde{\alpha}_2(t) \in V_k$ (o mesmo k), concluiremos que $\tilde{\alpha}_1(t) = \tilde{\alpha}_2(t)$ e $t \in W$, o que é um absurdo. Logo,

$$t \in \tilde{\alpha}_1^{-1}(V_1) \cap \tilde{\alpha}_2^{-1}(V_2) \subset W^c = X - W,$$

pois, para todo $s \in \tilde{\alpha}_1^{-1}(V_1) \cap \tilde{\alpha}_2^{-1}(V_2)$, temos que $\tilde{\alpha}_1(s) \in V_1$ e $\tilde{\alpha}_2(s) \in V_2$, assim $\tilde{\alpha}_1(s) \neq \tilde{\alpha}_2(s)$, uma vez que, V_1 e V_2 são disjuntos e, portanto, $s \in W^c$. Observe que $\tilde{\alpha}_1^{-1}(V_1) \cap \tilde{\alpha}_2^{-1}(V_2)$ é um aberto pela continuidade de $\tilde{\alpha}_1$ e $\tilde{\alpha}_2$.

Portanto, W^c é aberto, assim W é fechado.

Como I é conexo e W é um conjunto aberto e fechado de I , segue que $W = I$ ou $W = \emptyset$. ■

Proposição 1.3.1. *Seja (\tilde{X}, p, X) um recobrimento. Então:*

- (i) *Se $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ e $x_0 = p(\tilde{x}_0)$, temos que, para qualquer caminho $\alpha : I \rightarrow X$ com ponto inicial x_0 , existe um único caminho $\tilde{\alpha} : I \rightarrow \tilde{X}$ com ponto inicial \tilde{x}_0 tal que $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$.*
- (ii) *Se $F : I \times I \rightarrow X$ com $F(0, 0) = x_0$ e $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ com $x_0 = p(\tilde{x}_0)$, existe uma única homotopia $\tilde{F} : I \times I \rightarrow \tilde{X}$ tal que $p \circ \tilde{F} = F$ e $\tilde{F}(0, 0) = \tilde{x}_0$.*

Demonstração:

- (i) Se o caminho α está contido em uma vizinhança distinguida U , então, considerando a vizinhança V_k (em $p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in \Gamma} V_j$) que contém \tilde{x}_0 , $\tilde{\alpha} := (p|_{V_k})^{-1} \circ \alpha$ é o único levantamento de α , com ponto inicial \tilde{x}_0 .

Agora, se α não está numa vizinhança distinguida U , então podemos expressar α como o produto de um número finito de caminhos, onde cada um dos quais está contido em uma vizinhança distinguida e, então, basta aplicar o argumento anterior a cada um destes caminhos. Seja $\{U_i; i \in I\}$ uma cobertura aberta de X por vizinhanças distinguidas, então, por α ser contínua, $\{\alpha^{-1}(U_i); i \in I\}$ é uma cobertura aberta do espaço métrico compacto I . Pelo Teorema 1.3.3, existe $\delta > 0$ tal que qualquer subconjunto de diâmetro menor que δ está contido em um conjunto $\alpha^{-1}(U_i)$, $i \in I$. Escolha um número inteiro n de modo que $\frac{1}{n} < \delta$.

Divida o intervalo I em subintervalos $J = \left[0, \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \dots, \left[\frac{(n-1)}{n}, 1\right]$. Note que cada subintervalo J tem diâmetro menor do que δ , logo $J \subset \alpha^{-1}(U_i)$, para cada i , e, portanto, $\alpha(J) \subset U_i$. Assim, como antes mencionado, podemos definir $\tilde{\alpha}$, sucessivamente, sobre estes subintervalos, começando em $\left[0, \frac{1}{n}\right]$.

A unicidade de $\tilde{\alpha}$ é garantida pelo Lema 1.3.1, uma vez que, se existe $\tilde{\alpha}'$ tal que $p \circ \tilde{\alpha}' = \alpha = p \circ \tilde{\alpha}$, com $\tilde{\alpha}'(0) = \tilde{x}_0 = \tilde{\alpha}(0)$, segue que $W = \{t \in I; \tilde{\alpha}(t) = \tilde{\alpha}'(t)\} = I$ e, então, $\tilde{\alpha}' = \tilde{\alpha}$.

(ii) Segue de modo análogo aos argumentos feitos em (i), dividindo $I \times I$ em sub-retângulos $[s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$. ■

Teorema 1.3.4. *Sejam (\tilde{X}, p, X) um recobrimento e $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} : I \rightarrow \tilde{X}$ dois caminhos em \tilde{X} que têm o mesmo ponto inicial e tais que $(p \circ \tilde{\alpha})(1) = (p \circ \tilde{\beta})(1)$. Se $p \circ \tilde{\alpha} \sim p \circ \tilde{\beta}$, então $\tilde{\alpha} \sim \tilde{\beta}$ e $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ têm o mesmo ponto final.*

Demonstração: Seja $\tilde{x}_0 = \tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0)$.

Como $p \circ \tilde{\alpha} \sim p \circ \tilde{\beta}$, então existe uma homotopia $H : I \times I \rightarrow X$ entre $p \circ \tilde{\alpha}$ e $p \circ \tilde{\beta}$, assim

$$\begin{cases} H(t, 0) = (p \circ \tilde{\alpha})(t); & H(t, 1) = (p \circ \tilde{\beta})(t), \quad \forall t \in I; \\ H(0, s) = (p \circ \tilde{\alpha})(0) = p(\tilde{\alpha}(0)) = p(\tilde{x}_0), & \forall s \in I; \\ H(1, s) = (p \circ \tilde{\beta})(1) = p(\tilde{\beta}(1)), & \forall s \in I. \end{cases}$$

De acordo com o item (i) da proposição anterior, existe um único levantamento $\tilde{H} : I \times I \rightarrow \tilde{X}$ tal que $\tilde{H}(0, 0) = \tilde{x}_0$. Logo,

$$p(\tilde{H}(t, 0)) = H(t, 0) = (p \circ \tilde{\alpha})(t) = p(\tilde{\alpha}(t))$$

e

$$p(\tilde{H}(0, s)) = H(0, s) = p(\tilde{x}_0) = p(c_{\tilde{x}_0}(s)).$$

Pela unicidade no item (i) da proposição anterior, segue que $\tilde{H}(t, 0) = \tilde{\alpha}(t)$ e $\tilde{H}(0, s) = c_{\tilde{x}_0}(s) = \tilde{x}_0$. Analogamente, obtemos que $\tilde{H}(t, 1) = \tilde{\beta}(t)$ e $\tilde{H}(1, s) = \tilde{\beta}(1)$. Portanto, \tilde{H} é uma homotopia entre $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$, assim $\tilde{\alpha} \sim \tilde{\beta}$.

Além disso, $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{H}(1, 0) = \tilde{\beta}(1)$. ■

Lema 1.3.2. *Se (\tilde{X}, p, X) é um espaço de recobrimento, então os conjuntos $p^{-1}(x)$, para todo $x \in X$, têm o mesmo número cardinal.*

Demonstração: Sejam $x_0, x_1 \in X$. Escolha um caminho $\alpha : I \rightarrow X$ tal que $\alpha(0) = x_0$ e $\alpha(1) = x_1$.

Defina

$$\begin{aligned} \varphi : p^{-1}(x_0) &\rightarrow p^{-1}(x_1) \\ \tilde{x}_0 &\mapsto \tilde{\alpha}(1), \end{aligned}$$

onde $\tilde{\alpha} : I \rightarrow \tilde{X}$ é o levantamento do caminho α tal que $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ e $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0$, existente pela Proposição 1.3.1.

A aplicação φ está bem definida, pois $\tilde{\alpha}(1) \in p^{-1}(x_1)$, uma vez que $(p \circ \tilde{\alpha})(1) = p(\tilde{\alpha}(1)) = \alpha(1) = x_1$.

Defina, analogamente,

$$\begin{aligned} \phi : p^{-1}(x_1) &\rightarrow p^{-1}(x_0) \\ \tilde{x}_1 &\mapsto \widetilde{\alpha^{-1}}(1), \end{aligned}$$

onde $\widetilde{\alpha^{-1}} : I \rightarrow \tilde{X}$ é o levantamento do caminho α^{-1} (o caminho inverso de α) tal que $p \circ \widetilde{\alpha^{-1}} = \alpha^{-1}$ e $\widetilde{\alpha^{-1}}(0) = \tilde{x}_1$. Similarmente, ϕ está bem definida, já que $\widetilde{\alpha^{-1}}(1) \in p^{-1}(x_0)$.

Além disso, a aplicação ϕ é a inversa de φ e, portanto, φ é bijetora. ■

Definição 1.3.3. *Seja (\tilde{X}, p, X) um espaço de recobrimento, o número cardinal comum dos conjuntos $p^{-1}(x)$, com $x \in X$, denotado por $|p^{-1}(x)|$, é chamado de **número de folhas do recobrimento**. O conjunto $p^{-1}(x)$ é chamado **fibra** de (\tilde{X}, p, X) no ponto $x \in X$. Dizemos que o recobrimento é de n folhas se $|p^{-1}(x)| = n$ e de infinitas folhas se $|p^{-1}(x)| = \infty$.*

A Classe de Conjugação associada a um Recobrimento

Proposição 1.3.2. *Seja (\tilde{X}, p, X) um recobrimento. Para quaisquer $x_0 \in X$ e $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, o homomorfismo induzido $p_{\#} : \Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \Pi_1(X, x_0)$ é injetor. Se \tilde{X} é conexo por caminhos, então $p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$, para $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$, descreve toda a classe de conjugação do subgrupo $p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$.*

Demonstração: Sejam $[\tilde{\alpha}], [\tilde{\beta}] \in \Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ tal que $p_{\#}([\tilde{\alpha}]) = p_{\#}([\tilde{\beta}])$, então, pela definição de $p_{\#}$, temos $[p \circ \tilde{\alpha}] = [p \circ \tilde{\beta}]$. Assim, $p \circ \tilde{\alpha} \sim p \circ \tilde{\beta}$, e, portanto, pelo Teorema 1.3.4, $\tilde{\alpha} \sim \tilde{\beta}$, uma vez que $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0 = \tilde{\beta}(0)$ e $(p \circ \tilde{\alpha})(1) = x_0 = (p \circ \tilde{\beta})(1)$. Logo $[\tilde{\alpha}] = [\tilde{\beta}]$ e, então, $p_{\#}$ é um homomorfismo injetor.

Considere $\tilde{x}, \tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, existe em \tilde{X} um caminho $\tilde{\gamma}$, com origem \tilde{x} e fim em \tilde{x}_0 , pois \tilde{X} é conexo por caminhos. Então, $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$ é um caminho fechado em X , com ponto base x_0 , pois $\gamma(0) = (p \circ \tilde{\gamma})(0) = p(\tilde{x}) = x_0$ e $\gamma(1) = (p \circ \tilde{\gamma})(1) = p(\tilde{x}_0) = x_0$. Dado $[\tilde{\beta}] \in \Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$, pela Proposição 1.2.1, $[\tilde{\beta}] = [\tilde{\gamma} * \tilde{\alpha} * \tilde{\gamma}^{-1}]$, para algum $[\tilde{\alpha}] \in \Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. Logo, como $p_{\#}$ é um homomorfismo e $p \circ \tilde{\gamma}$ é um caminho fechado,

$$\begin{aligned} p_{\#}([\tilde{\beta}]) &= p_{\#}([\tilde{\gamma} * \tilde{\alpha} * \tilde{\gamma}^{-1}]) &= [p \circ (\tilde{\gamma} * \tilde{\alpha} * \tilde{\gamma}^{-1})] \\ &= [(p \circ \tilde{\gamma}) * (p \circ \tilde{\alpha}) * (p \circ \tilde{\gamma}^{-1})] &= [p \circ \tilde{\gamma}] \cdot [p \circ \tilde{\alpha}] \cdot [p \circ \tilde{\gamma}^{-1}] \\ &= [\gamma] \cdot p_{\#}([\tilde{\alpha}]) \cdot [\gamma^{-1}] &= \delta \cdot p_{\#}([\tilde{\alpha}]) \cdot \delta^{-1}, \end{aligned}$$

onde $\delta = [\gamma] = [p \circ \tilde{\gamma}] \in \Pi_1(X, x_0)$ e $\delta^{-1} = [\gamma^{-1}] \in \Pi_1(X, x_0)$. Assim,

$$p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})) = \delta \cdot p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \cdot \delta^{-1}.$$

Reciprocamente, seja $H = \delta \cdot p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \cdot \delta^{-1}$ um subgrupo conjugado de $p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ em $\Pi_1(X, x_0)$, com $\delta \in \Pi_1(X, x_0)$. Suponhamos $\delta = [\gamma]$ e seja $\delta^{-1} = [\gamma^{-1}]$. Levantando o caminho fechado γ^{-1} a partir do ponto \tilde{x}_0 , obtemos um caminho $\widetilde{\gamma^{-1}}$ em \tilde{X} , cujo ponto final chamaremos de \tilde{x}_1 . Então, $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$ e o caminho $\tilde{\gamma} := (\widetilde{\gamma^{-1}})^{-1}$, em \tilde{X} , começa no ponto \tilde{x}_1 e termina em \tilde{x}_0 , com $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$. Pelo que verificamos anteriormente, isto nos dá que $p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)) = \delta \cdot p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \cdot \delta^{-1}$ e, portanto, $H = p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1))$, com $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$. ■

Proposição 1.3.3. *Sejam (\tilde{X}, p, X) um recobrimento, $\alpha, \beta : I \rightarrow X$ dois caminhos que começam em x e terminam em y e $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} : I \rightarrow \tilde{X}$ seus respectivos levantamentos, a partir de um ponto $\tilde{x} \in \tilde{X}$. A fim de que $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$, é necessário e suficiente que $[\alpha * \beta^{-1}] \in p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$.*

Demonstração: Sabemos que $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ são levantamentos de α e β , respectivamente, que começam em \tilde{x} , isto é, $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x} = \tilde{\beta}(0)$.

(\Rightarrow) Suponhamos $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1) = \tilde{y}$. Então, $\tilde{\alpha} * \tilde{\beta}^{-1}$ é um laço em \tilde{x} e é um levantamento de $\alpha * \beta^{-1}$, pois $p \circ (\tilde{\alpha} * \tilde{\beta}^{-1}) = \alpha * \beta^{-1}$. Consequentemente, $[\alpha * \beta^{-1}] \in p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$, pois existe $[\widetilde{\alpha * \beta^{-1}}] = [\tilde{\alpha} * \tilde{\beta}^{-1}] \in \Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$ tal que

$$[\alpha * \beta^{-1}] = [p \circ (\widetilde{\alpha * \beta^{-1}})] = p_{\#}([\tilde{\alpha} * \tilde{\beta}^{-1}]) \in p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})).$$

(\Leftarrow) Vamos admitir que $[\alpha * \beta^{-1}] \in p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})) \subset \Pi_1(X, x)$. Assim, existe $[\tilde{\gamma}] \in \Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$ tal que $[\alpha * \beta^{-1}] = p_{\#}([\tilde{\gamma}]) = [p \circ \tilde{\gamma}]$, portanto, o levantamento $\tilde{\gamma}$ do caminho $\alpha * \beta^{-1}$, a partir do ponto \tilde{x} , é um caminho fechado.

Considere os caminhos $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} : I \rightarrow \tilde{X}$, definidos por $\tilde{\alpha}(s) = \tilde{\gamma}\left(\frac{s}{2}\right)$ e $\tilde{\beta}(s) = \tilde{\gamma}\left(1 - \frac{s}{2}\right)$. Estes caminhos começam em \tilde{x} e terminam no mesmo ponto $\tilde{\gamma}\left(\frac{1}{2}\right)$ e são os levantamentos de α e β , respectivamente. De fato:

$$\begin{aligned} (p \circ \tilde{\alpha})(t) &= (p \circ \tilde{\gamma})\left(\frac{t}{2}\right) = (\alpha * \beta^{-1})\left(\frac{t}{2}\right) = \begin{cases} \alpha\left(2\frac{t}{2}\right), & \text{se } 0 \leq \frac{t}{2} \leq \frac{1}{2}, \\ \beta^{-1}\left(2\frac{t}{2} - 1\right), & \text{se } \frac{1}{2} \leq \frac{t}{2} \leq 1, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \alpha(t), & \text{se } 0 \leq t \leq 1, \\ \beta^{-1}(t - 1), & \text{se } 1 \leq t \leq 2, \end{cases} \\ &= \alpha(t) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (p \circ \tilde{\beta})(t) &= (p \circ \tilde{\gamma})\left(1 - \frac{t}{2}\right) = (\alpha * \beta^{-1})\left(1 - \frac{t}{2}\right) \\ &= \begin{cases} \alpha\left(2\left(1 - \frac{t}{2}\right)\right), & \text{se } 0 \leq 1 - \frac{t}{2} \leq \frac{1}{2}, \\ \beta^{-1}\left(2\left(1 - \frac{t}{2}\right) - 1\right), & \text{se } \frac{1}{2} \leq 1 - \frac{t}{2} \leq 1, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \alpha(2 - t), & \text{se } 1 \leq t \leq 2, \\ \beta^{-1}(1 - t) = \beta(t), & \text{se } 0 \leq t \leq 1, \end{cases} \\ &= \beta(t). \end{aligned}$$

Observe que $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\gamma}\left(\frac{1}{2}\right) = \tilde{\beta}(1)$, como desejado. ■

Corolário 1.3.1. *Considere (\tilde{X}, p, X) um recobrimento e $\alpha : I \rightarrow X$ um caminho fechado com ponto base x . Seu levantamento $\tilde{\alpha} : I \rightarrow \tilde{X}$, a partir do ponto $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$, é um caminho fechado se, e somente se, $[\alpha] \in p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$.*

Demonstração: A demonstração é imediata, basta usar a proposição anterior, tomando $\beta = c_x$, o caminho constante em x . ■

Corolário 1.3.2. *Seja (\tilde{X}, p, X) um recobrimento, com \tilde{X} conexo por caminhos. Fixado um ponto $x_0 \in X$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) *Para algum $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, o subgrupo $p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \subset \Pi_1(X, x_0)$ é normal;*
- (ii) *Os subgrupos $p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})) \subset \Pi_1(X, x_0)$, quando \tilde{x} percorre $p^{-1}(x_0)$, são normais e iguais entre si;*
- (iii) *Dado um caminho fechado $\alpha : I \rightarrow X$, com ponto base x_0 , ou todos os levantamentos de α a partir dos pontos $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$ são fechados ou nenhum é.*

Demonstração: Tendo em vista o Corolário 1.3.1, a condição (iii) acima equivale a dizer que

$$[\alpha] \in p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \Leftrightarrow [\alpha] \in p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})), \quad \forall \tilde{x} \in p^{-1}(\tilde{x}_0).$$

Mas isso significa que os subgrupos $p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$ são todos iguais, quando \tilde{x} varia na fibra $p^{-1}(x_0)$. Daí, como esses subgrupos constituem uma classe de conjugação, eles são iguais se, e somente se, um deles é normal, e, portanto, todos são. ■

Definição 1.3.4. *Considere (\tilde{X}, p, X) um espaço de recobrimento, com \tilde{X} conexo por caminhos. Quando $p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ é um subgrupo normal de $\Pi_1(X, x_0)$, para algum $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, dizemos que (\tilde{X}, p, X) é um **espaço de recobrimento regular** (ou simplesmente, **recobrimento regular**).*

Observação 1.3.2. *Note que, de acordo com a definição acima e o Corolário 1.3.2, quando \tilde{X} é conexo por caminhos e uma qualquer das condições referidas no Corolário 1.3.2 é satisfeita, então (\tilde{X}, p, X) é um recobrimento regular.*

Proposição 1.3.4. *O número de folhas de um recobrimento (\tilde{X}, p, X) , com \tilde{X} conexo por caminhos, é igual ao índice de $p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$.*

Demonstração: Dado um laço γ em X baseado em x_0 , considere $\tilde{\gamma}$ o levantamento do laço γ em \tilde{X} , começando em \tilde{x}_0 . Tome $[\beta] \in p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$, assim existe o levantamento $\tilde{\beta}$ de β tal que $[\tilde{\beta}] \in \Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ e $[p \circ \tilde{\beta}] = [\beta]$. O caminho produto $\tilde{\beta} * \tilde{\gamma}$ é o levantamento do caminho produto $\beta * \gamma$, onde $(\tilde{\beta} * \tilde{\gamma})(1) = \tilde{\gamma}(1)$. Logo, podemos definir a aplicação

$$\begin{aligned} \phi : \quad & \frac{\Pi_1(X, x_0)}{p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))} \rightarrow p^{-1}(x_0) \\ & p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \cdot [\gamma] \mapsto \tilde{\gamma}(1) \end{aligned}$$

que é uma aplicação bijetora (para facilitar no uso da Proposição 1.3.3, consideremos aqui as classes laterais à esquerda $p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \cdot [\gamma]$). De fato, considere

$H = p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$. Observe que, para todo $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$, existe um caminho $\tilde{\alpha}$ na fibra $p^{-1}(x_0)$ tal que $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0$ e $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{x}$, uma vez que \tilde{X} é conexo por caminhos, onde $\tilde{\alpha}$ é o levantamento de um laço α de X baseado em x_0 . Assim, $\phi(H \cdot [\alpha]) = \tilde{\alpha}(1) = \tilde{x}$ e, então, ϕ é *sobrejetora*. Além disso, para quaisquer $H \cdot [\gamma_1], H \cdot [\gamma_2] \in \frac{\Pi_1(X, x_0)}{H}$, com $\phi(H \cdot [\gamma_1]) = \phi(H \cdot [\gamma_2])$, segue que $\tilde{\gamma}_1(1) = \tilde{\gamma}_2(1)$, onde $\tilde{\gamma}_1$ e $\tilde{\gamma}_2$ são os levantamentos de γ_1 e γ_2 , respectivamente. Pela Proposição 1.3.3, obtemos que $[\gamma_1 * \gamma_2^{-1}] \in H$, ou seja, $[\gamma_1] \cdot [\gamma_2]^{-1} \in H$, ou ainda, $H \cdot [\gamma_1] = H \cdot [\gamma_2]$ e, portanto, ϕ é *injetora*. ■

Corolário 1.3.3. *Se \tilde{X} é um espaço conexo por caminhos, então todo recobrimento (\tilde{X}, p, X) de duas folhas é regular.*

Demonstração: Basta usar a proposição anterior e o fato que todo subgrupo de índice dois é normal. ■

Corolário 1.3.4. *Seja \tilde{X} conexo por caminhos. A projeção de recobrimento $p : \tilde{X} \rightarrow X$ é um homeomorfismo se, e somente se, o homomorfismo induzido $p_{\#}$ é um isomorfismo.*

Demonstração: (\Rightarrow) Segue do fato que o grupo fundamental é um invariante topológico (Teorema 1.2.3).

(\Leftarrow) Da hipótese geral, (\tilde{X}, p, X) é um recobrimento. Assim, $p : \tilde{X} \rightarrow X$ é contínua e sobrejetora.

Agora, se $p_{\#} : \Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \Pi_1(X, x_0)$ é um isomorfismo, concluímos que (\tilde{X}, p, X) é um recobrimento de uma folha, uma vez que $p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = \Pi_1(X, x_0)$.

Mostremos que p é injetora. Sejam $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \tilde{X}$ tais que $p(\tilde{x}_1) = p(\tilde{x}_2) = x \in X$. Como (\tilde{X}, p, X) é um recobrimento de uma folha, existe uma vizinhança distinguida U_x de x tal que

$$p^{-1}(U_x) = V_x,$$

onde V_x é um aberto (conexo por caminhos) de \tilde{X} , contendo \tilde{x}_0 , e $p|_{V_x} : V_x \rightarrow U_x$ é um homeomorfismo. Mas $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in V_x$ e daí, de $p|_{V_x}(\tilde{x}_1) = p|_{V_x}(\tilde{x}_2)$, segue que $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2$.

Assim, p é bijetora (e contínua). Ainda, pelo Teorema 1.3.2, p é aberta, de onde segue que p é um homeomorfismo. ■

O Teorema Fundamental do Levantamento

Sejam X e Y espaços topológicos com $x \in X$ e $y \in Y$. A notação $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ indica uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ com $f(x) = y$.

Definição 1.3.5. *Sejam (\tilde{X}, p, X) um recobrimento, $x_0 = p(\tilde{x}_0)$, Y um espaço topológico (conexo e localmente conexo por caminhos) e $f : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ uma aplicação contínua. Uma aplicação contínua $\tilde{f} : (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ é dita um **levantamento de f** se o diagrama abaixo comuta*

$$\begin{array}{ccc} & & (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ (Y, y_0) & \xrightarrow{f} & (X, x_0). \end{array}$$

Ou seja, $p \circ \tilde{f} = f$.

Lema 1.3.3. *Sejam (\tilde{X}, p, X) um recobrimento, Y um espaço topológico (conexo e localmente conexo por caminhos) e $f_i : (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, para $i \in \{1, 2\}$, levantamentos de $f : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$*

$$\begin{array}{ccc} & & (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \\ & \nearrow^{f_1, f_2} & \downarrow p \\ (Y, y_0) & \xrightarrow{f} & (X, x_0). \end{array}$$

Se $f_1(y_0) = f_2(y_0)$, então $f_1 = f_2$.

Demonstração: Vamos considerar $W = \{y \in Y; f_1(y) = f_2(y)\}$. Análogo ao que fizemos na demonstração do Lema 1.3.1, prova-se que W é um conjunto aberto e fechado de Y , uma vez que $p \circ f_1 = f = p \circ f_2$.

Como Y é conexo e W é um conjunto aberto e fechado de Y , temos que $W = Y$ ou $W = \emptyset$. Mas $W \neq \emptyset$, pois, de acordo com a hipótese, $y_0 \in W$. Assim, $W = Y$ e, portanto, $f_1 = f_2$. ■

Corolário 1.3.5. *Sejam (\tilde{X}, p, X) um recobrimento e $h : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ uma aplicação contínua tal que $p \circ h = p$. Se $h(x_1) = x_1$, para algum $x_1 \in \tilde{X}$, então h é a aplicação identidade em \tilde{X} .*

Demonstração: Como $p \circ h = p = p \circ Id_{\tilde{X}}$, onde $Id_{\tilde{X}}$ é a aplicação identidade de \tilde{X} , e $h(x_1) = x_1 = Id_{\tilde{X}}(x_1)$ segue, do lema anterior, que $h = Id_{\tilde{X}}$. ■

Observação 1.3.3. *Se o diagrama abaixo comuta*

$$\begin{array}{ccc} & & (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \\ & \nearrow^{\tilde{f}} & \downarrow p \\ (Y, y_0) & \xrightarrow{f} & (X, x_0) \end{array}$$

isto é, $p \circ \tilde{f} = f$, então, para todo $[\alpha] \in \Pi_1(Y, y_0)$, segue que

$$p_{\#}(\tilde{f}_{\#}([\alpha])) = p_{\#}([\tilde{f} \circ \alpha]) = [p \circ \tilde{f} \circ \alpha] \stackrel{p \circ \tilde{f} = f}{=} [f \circ \alpha] = f_{\#}([\alpha]),$$

ou seja, $p_{\#} \circ \tilde{f}_{\#} = f_{\#}$. Assim, o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{array}{ccc} & & \Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \\ & \nearrow^{\tilde{f}_{\#}} & \downarrow p_{\#} \\ \Pi_1(Y, y_0) & \xrightarrow{f_{\#}} & \Pi_1(X, x_0). \end{array}$$

Teorema 1.3.5. (Teorema Fundamental do Levantamento) *Sejam (\tilde{X}, p, X) um recobrimento, Y um espaço topológico (conexo e localmente conexo por caminhos) e $f : (Y, z_0) \rightarrow (X, x_0)$ uma aplicação contínua. Dado $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, a fim de que f possua um levantamento $\tilde{f} : (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, é necessário e suficiente que $f_{\#}(\Pi_1(Y, y_0)) \subset p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$.*

Demonstração: (\Rightarrow) Se existe $\tilde{f} : (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ contínua, tal que $p \circ \tilde{f} = f$, então, pela observação anterior, o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{array}{ccc} & & \Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \\ & \nearrow^{\tilde{f}_{\#}} & \downarrow p_{\#} \\ \Pi_1(Y, y_0) & \xrightarrow{f_{\#}} & \Pi_1(X, x_0). \end{array}$$

Assim, para todo $[\alpha] \in \Pi_1(Y, y_0)$, temos que $f_{\#}([\alpha]) = p_{\#}(\tilde{f}_{\#}([\alpha])) \in p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$.

(\Leftarrow) Suponha que $f_{\#}(\Pi_1(Y, y_0)) \subset p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$. Definimos $\tilde{f} : (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, por $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$ e, para $y \in Y$ arbitrário, tomamos um caminho $\alpha : I \rightarrow Y$, ligando y_0 a y . Consideramos $\tilde{\alpha} : I \rightarrow \tilde{X}$ o levantamento de $f \circ \alpha : I \rightarrow X$ a partir do ponto \tilde{x}_0 e definimos $\tilde{f}(y) = \tilde{\alpha}(1) = \widetilde{f \circ \alpha}(1)$.

Mostremos que \tilde{f} está bem definida. Se $\beta : I \rightarrow Y$ é outro caminho ligando y_0 a y , então $\alpha * \beta^{-1}$ é um caminho fechado com ponto base y_0 . Note que $(f \circ \alpha)(0) = f(\alpha(0)) = f(y_0) = x_0$, então tomando o caminho produto dos caminhos $(f \circ \alpha)$ e $(f \circ \beta)^{-1}$, temos que

$$(f \circ \alpha) * (f \circ \beta)^{-1} = f \circ (\alpha * \beta^{-1})$$

é um caminho fechado com ponto base $x_0 = f(y_0)$, cuja classe de homotopia pertence a imagem de $f_{\#}$ e, portanto, por hipótese, está em $p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$, ou seja,

$$[(f \circ \alpha) * (f \circ \beta)^{-1}] = [f \circ (\alpha * \beta^{-1})] \in f_{\#}(\Pi_1(Y, y_0)) \subset p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)).$$

Assim, pela Proposição 1.3.3, temos que os dois caminhos $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$, que são os levantamentos de $f \circ \alpha$ e $f \circ \beta$, respectivamente, a partir de \tilde{x}_0 , são tais que $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$.

Temos que $p \circ \tilde{f} = f$, pois

$$\begin{aligned} (p \circ \tilde{f})(y) &= p(\tilde{f}(y)) = p(\tilde{\alpha}(1)) = (p \circ \tilde{\alpha})(1) = (f \circ \alpha)(1) = f(\alpha(1)) = f(y) \quad e \\ (p \circ \tilde{f})(y_0) &= p(\tilde{f}(y_0)) = p(\tilde{\alpha}(0)) = (p \circ \tilde{\alpha})(0) = (f \circ \alpha)(0) = f(\alpha(0)) = f(y_0). \end{aligned}$$

Resta apenas mostrar que \tilde{f} é contínua em qualquer ponto arbitrário $y \in Y$. Aqui usaremos que Y é localmente conexo por caminhos. Seja V uma vizinhança de $\tilde{f}(y)$ em \tilde{X} . Podemos supor que $p|_V$ é um homeomorfismo sobre uma vizinhança U de $f(y)$ em X , pois p é uma projeção de recobrimento. Seja W uma vizinhança de $y \in Y$, conexa por caminhos, tal que $f(W) \subset U$ (isto é válido pois Y é localmente conexo por caminhos).

Afirmamos que $\tilde{f}(W) \subset V$, o que dará a continuidade de \tilde{f} no ponto y . Sabemos que $\tilde{f}(y)$ é ponto final do caminho $\tilde{\alpha}$ em \tilde{X} que começa em \tilde{x}_0 , com $p \circ \tilde{\alpha} = f \circ \alpha$, onde α é um caminho em Y , começando em y_0 e terminando em y . Dado $w \in W$, tomamos um caminho β em W , começando em y e acabando em w . Como $p|_V$ é um homeomorfismo sobre U , existe um caminho $\tilde{\beta}$ em V , começando em $\tilde{f}(y)$ e acabando em um certo ponto $v \in V$, isto é, $\tilde{\beta}(1) = v$, com $p \circ \tilde{\beta} = f \circ \beta$.

Então $\tilde{\alpha} * \tilde{\beta}$ é um caminho em \tilde{X} , que começa em \tilde{x}_0 tal que

$$p \circ (\tilde{\alpha} * \tilde{\beta}) = (p \circ \tilde{\alpha}) * (p \circ \tilde{\beta}) = (f \circ \alpha) * (f \circ \beta) = f \circ (\alpha * \beta),$$

ou seja, $\tilde{\alpha} * \tilde{\beta}$ é um levantamento de $f \circ (\alpha * \beta)$ a partir de \tilde{x}_0 .

Como o caminho $\alpha * \beta$ liga y_0 a w em Y , segue-se da definição de \tilde{f} que $\tilde{f}(w) = (\tilde{\alpha} * \tilde{\beta})(1) = \tilde{\beta}(1) = v$ e, portanto, $\tilde{f}(w) = v \in V$. ■

Corolário 1.3.6. *Sejam (\tilde{X}, p, X) um recobrimento e Y simplesmente conexo. Toda aplicação contínua $f : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ admite um levantamento $\tilde{f} : (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, para qualquer $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$.*

Demonstração: Como Y é simplesmente conexo, então Y é conexo por caminhos e $\Pi_1(Y, y_0) = \{1\}$. Daí, obviamente, $f_{\#}(\Pi_1(Y, y_0)) \subset p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$. Portanto, pelo Teorema Fundamental do Levantamento, existe um levantamento $\tilde{f} : (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, para qualquer $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. ■

Involução Livre e Recobrimento

Definição 1.3.6. Dizemos que uma aplicação contínua $T : X \rightarrow X$ é uma **involução** se para todo $x \in X$, temos que $T(T(x)) = x$ (ou $T \circ T = Id_X$). Uma involução T é dita **livre** ou **sem ponto fixo** se $T(x) \neq x$, para todo $x \in X$. Denotamos por (X, T) um par, onde X é um espaço topológico equipado com uma involução livre $T : X \rightarrow X$.

Exemplo 1.3.3. A aplicação antipodal $A : S^n \rightarrow S^n$ dada por $A(x) = -x$ (Definição 1.2.10) é uma involução livre, uma vez que $(A \circ A)(x) = A(-x) = x$ e $A(x) = -x \neq x$, para todo $x \in S^n$.

Observação 1.3.4. Note que uma involução $T : X \rightarrow X$ é uma aplicação aberta. De fato, $T \circ T = Id_X$, assim $T = T^{-1}$. Para todo aberto U de X , obtemos que $T(U) = T^{-1}(U)$ é um aberto de X , pois T é contínua.

Proposição 1.3.5. Seja (X, T) um par, onde X é um espaço topológico conexo equipado com uma involução livre $T : X \rightarrow X$. Consideremos em X a relação determinada pela partição $\{\{x, T(x)\}; x \in X\}$ e denotemos por $\frac{X}{T}$ o espaço quociente de X por essa relação. Seja $p : X \rightarrow \frac{X}{T}$ a aplicação quociente definida por $p(x) = \bar{x} = \{x, T(x)\}$. Se X for um espaço de Hausdorff, então $\left(X, p, \frac{X}{T}\right)$ é um recobrimento de duas folhas.

Demonstração: Considere $\bar{x} = \{x, T(x)\} \in \frac{X}{T}$. Como X é um espaço de Hausdorff, então existem U e V vizinhanças disjuntas de x e $T(x)$, respectivamente.

Por T ser uma aplicação contínua, existe uma vizinhança W de x tal que $T(W) \subset V$. Defina

$$\bar{U} = U \cap W \quad \text{e} \quad \bar{V} = T(\bar{U})$$

os quais são disjuntos e abertos em X , uma vez que \bar{U} é uma intersecção de dois abertos e, assim, $T(\bar{U})$ é um aberto, pois T é uma aplicação aberta. Além disso, $T(\bar{U}) = T(U \cap W) \subset V$ e $\bar{U} \subset U$, assim, como U e V são disjuntos, obtemos que \bar{U} e \bar{V} são disjuntos.

Portanto, $p(\bar{U}) = \{\{y, T(y)\}; y \in \bar{U}\}$ é um aberto de $\frac{X}{T}$ que contém \bar{x} e $p(\bar{U}) = p(\bar{V})$, uma vez que, $p(y) = \bar{y} = \{y, T(y)\} = \{T(T(y)), T(y)\} = \overline{T(y)} = p(T(y))$, para todo $y \in X$. Ainda, $p^{-1}(p(\bar{U})) = \{y; p(y) \in p(\bar{U})\} = \bar{U} \cup \bar{V}$, de onde segue que $p(\bar{U})$ é um aberto de $\frac{X}{T}$, pois a topologia em $\frac{X}{T}$ é a quociente dada por $\left\{A \subset \frac{X}{T}; p^{-1}(A) \text{ é aberto em } X\right\}$ e $p^{-1}(p(\bar{U})) = \bar{U} \cup \bar{V}$ é um aberto de X .

Além disso, as restrições

$$p|_{\bar{U}} : \bar{U} \rightarrow p(\bar{U}) \quad \text{e} \quad p|_{\bar{V}} : \bar{V} \rightarrow p(\bar{V}) = p(\bar{U})$$

são homeomorfismo, pois p é contínua, sobrejetora e aberta e as restrições de p são injetoras. Vejamos que $p|_{\bar{U}}$ é injetora: para quaisquer $x, y \in \bar{U}$ com $p|_{\bar{U}}(x) = p|_{\bar{U}}(y)$, segue que

$$\{x, T(x)\} = p(x) = p(y) = \{y, T(y)\},$$

ou seja, $x = y$ ou $x = T(y)$. Mas se $x = T(y)$, então $x \in \bar{V}$, assim $x \in \bar{U} \cap \bar{V}$, o que é uma contradição, pois $\bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset$. Então, $x = y$. Analogamente, $p|_{\bar{V}}$ é injetora.

Logo, $\left(X, p, \frac{X}{T}\right)$ é um recobrimento. Como, dado $\bar{x} \in \frac{X}{T}$, existe $p(\bar{U})$ aberto de $\frac{X}{T}$ contendo \bar{x} , com $p^{-1}(\bar{x}) \in \bar{U} \cup \bar{V} = p^{-1}(p(\bar{U}))$, onde \bar{U} e \bar{V} são abertos disjuntos, obtemos que o número cardinal comum dos conjuntos $p^{-1}(\bar{x})$ é dois, portanto, $\left(X, p, \frac{X}{T}\right)$ é um recobrimento de duas folhas. ■

Homomorfismos e Isomorfismo de Recobrimentos

Definição 1.3.7. *Sejam (\tilde{X}_1, p_1, X) e (\tilde{X}_2, p_2, X) dois recobrimentos de X . Um **homomorfismo** de (\tilde{X}_1, p_1, X) em (\tilde{X}_2, p_2, X) é uma aplicação contínua $f : (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \rightarrow (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$ tal que $p_2 \circ f = p_1$. Dizemos que $f : (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \rightarrow (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$ é um **isomorfismo** quando f for um homeomorfismo tal que $p_2 \circ f = p_1$, isto equivale a dizer que f é um homomorfismo e existe um homomorfismo φ de $(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$ em $(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)$ tal que $\varphi \circ f$ e $f \circ \varphi$ são aplicações identidades. Neste caso, dizemos que (\tilde{X}_1, p_1, X) e (\tilde{X}_2, p_2, X) são **isomorfos**.*

Definição 1.3.8. *Um **automorfismo** é um isomorfismo de um recobrimento sobre si mesmo. Os automorfismos de espaços de recobrimento são chamados de **transformações de recobrimento**. Denotamos por $G(\tilde{X} | X)$ o conjunto dos automorfismos do recobrimento (\tilde{X}, p, X) , que é um grupo com relação a operação composição de aplicações, denominado **grupo de automorfismos do recobrimento**.*

Observação 1.3.5. *Dado um recobrimento (\tilde{X}, p, X) , segue do Corolário 1.3.5, que todo automorfismo $h \in G(\tilde{X} | X)$ diferente da aplicação identidade, não possui ponto fixo. Assim, se $h \in G(\tilde{X} | X)$ é uma involução diferente da identidade, então h é livre. Considerando o recobrimento de duas folhas $\left(X, p, \frac{X}{T}\right)$, visto na Proposição 1.3.5, temos $G\left(X \mid \frac{X}{T}\right) = \{Id, T\}$, com T involução livre sobre X .*

Observação 1.3.6. *Dado um recobrimento (\tilde{X}, p, X) , o grupo $G(\tilde{X} | X)$ é um grupo propriamente descontínuo de homeomorfismos. De fato, tome $p : \tilde{X} \rightarrow X$ a projeção de recobrimento e seja $x \in \tilde{X}$ e U uma vizinhança distinguida aberta de $p(x)$. Assim, $p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} V_j$, onde V_j são abertos de \tilde{X} . Logo, $x \in V_k$, para algum $k \in J$.*

Considere $h \in G(\tilde{X} | X)$, com $h \neq Id_{\tilde{X}}$, assim $h(x) \neq x$, para todo $x \in \tilde{X}$, pois se $h(x_0) = x_0$, para algum $x_0 \in \tilde{X}$, pelo Corolário 1.3.5, teríamos $h = Id_{\tilde{X}}$.

Como $p(h(x)) = p(x)$, uma vez que $p \circ h = p$, segue que $h(x) \in V_l$, para algum $l \in J$. Além disso, $V_k \cap V_l = \emptyset$, pois como os V_j , para todo $j \in J$, são disjuntos, então podemos ter $V_k = V_l$ ou $V_k \cap V_l = \emptyset$, mas se $V_k = V_l$, temos que $x, h(x) \in V_k$, com $p(x) = p(h(x))$ e, daí, $h(x) = x$, já que p aplica V_k homeomorficamente sobre U .

Note que $h(V_k) \subset V_l$, uma vez que $h(x) \in V_l$, para todo $x \in V_k$, logo, $V_k \cap h(V_k) = \emptyset$ e, portanto, a ação de $G(\tilde{X} | X)$ é propriamente descontínua.

Proposição 1.3.6. *Sejam (\tilde{X}_1, p_1, X) e (\tilde{X}_2, p_2, X) dois espaços de recobrimento, com \tilde{X}_2 conexo por caminhos. Todo homomorfismo $f : (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \rightarrow (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$ é uma projeção de recobrimento, de modo que f é sobrejetora.*

Demonstração: Sejam $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1$, $\tilde{x}_2 = f(\tilde{x}_1)$ e $x_0 = p_1(\tilde{x}_1) = p_2(\tilde{x}_2)$. Para todo caminho $\alpha : I \rightarrow \tilde{X}_2$ começando em \tilde{x}_2 , podemos tomar $\alpha_0 = p_2 \circ \alpha$, que é um caminho começando em x_0 . Considerando $\tilde{\alpha} : I \rightarrow \tilde{X}_1$ o levantamento de α_0 relativo ao recobrimento p_1 , a partir de \tilde{x}_1 , segue que $p_1 \circ \tilde{\alpha} = \alpha_0$ com $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_1$. Então, $f \circ \tilde{\alpha} : I \rightarrow \tilde{X}_2$ é um levantamento de α_0 relativo a p_2 baseado em \tilde{x}_2 , uma vez que

$$p_2 \circ (f \circ \tilde{\alpha}) \stackrel{p_2 \circ f = p_1}{=} p_1 \circ \tilde{\alpha} = \alpha_0 \quad \text{e} \quad (f \circ \tilde{\alpha})(0) = f(\tilde{\alpha}(0)) = f(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2.$$

Logo,

$$p_2 \circ (f \circ \tilde{\alpha}) = \alpha_0 = p_2 \circ \alpha$$

assim, pelo Lema 1.3.3, $f \circ \tilde{\alpha} = \alpha$. Em particular, $f(\tilde{\alpha}(1)) = \alpha(1)$.

Como \tilde{X}_2 é conexo por caminhos, qualquer um de seus pontos é da forma $\alpha(1)$, onde α é um caminho que começa em \tilde{x}_2 . Logo, f é sobrejetora.

Tome um ponto arbitrário $\tilde{x}_2 \in \tilde{X}_2$. Vamos considerar uma vizinhança conexa U do ponto $x_0 = p_2(\tilde{x}_2)$, que seja vizinhança distinguida em relação às projeções p_1 e p_2 . Observe que \tilde{X}_1, \tilde{X}_2 e X são localmente conexos por caminhos. Tome V a componente conexa de $p_2^{-1}(U)$ que contém \tilde{x}_2 . Vamos mostrar que V é uma vizinhança distinguida de \tilde{x}_2 (relativamente a $f : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$). Temos

$$p_1^{-1}(U) = \bigcup_{\lambda \in \Gamma} \tilde{U}_\lambda$$

uma reunião de abertos disjuntos onde, para cada λ , $p_1|_{\tilde{U}_\lambda}$ é um homeomorfismo sobre U . Se, para algum λ , temos $f(\tilde{U}_\lambda) \cap V \neq \emptyset$, então, como o conexo $f(\tilde{U}_\lambda)$ está contido no subconjunto de $p_2^{-1}(U)$, do qual V é uma componente conexa, segue-se que $f(\tilde{U}_\lambda) \subset V$ e daí, $f|_{\tilde{U}_\lambda} = (p_2|_V)^{-1} \circ (p_1|_{\tilde{U}_\lambda})$, logo f é um homeomorfismo de \tilde{U}_λ sobre V . Portanto, tomando

$$L_0 = \{\lambda; f(\tilde{U}_\lambda) \cap V \neq \emptyset\}$$

vemos que $L_0 \neq \emptyset$, pois f é sobrejetora e que

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{\lambda \in L_0} \tilde{U}_\lambda.$$

E ainda, $f|_{\tilde{U}_\lambda}$ é um homeomorfismo sobre V , para cada $\lambda \in L_0$, assim V é uma vizinhança distinguida de $\tilde{x}_2 \in \tilde{X}_2$ relativamente a f e, portanto, $(\tilde{X}_1, f, \tilde{X}_2)$ é um recobrimento. ■

Corolário 1.3.7. *Sejam (\tilde{X}_1, p_1, X) e (\tilde{X}_2, p_2, X) dois recobrimentos, com \tilde{X}_1 conexo por caminhos. Um homomorfismo $f : (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \rightarrow (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$ é um isomorfismo se, e somente se, $f_\# : \Pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \rightarrow \Pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$ é sobrejetor.*

Demonstração: (\Rightarrow) Suponha que f é um isomorfismo de recobrimentos, então f é um homomorfismo que é um homeomorfismo, assim, pela proposição anterior, f é uma projeção de recobrimento. Logo, como f é um homeomorfismo, pelo Corolário 1.3.4, segue que $f_\#$ é um isomorfismo e, em particular, $f_\#$ é sobrejetor.

(\Leftarrow) De acordo com a proposição anterior, f é uma projeção de recobrimento, uma vez que f é um homomorfismo de recobrimentos. Provemos que f é um isomorfismo.

Como $f_\#$ é um homomorfismo sobrejetor e, pela Proposição 1.3.2, $f_\#$ é injetor, segue que $f_\#$ é um isomorfismo. Pelo Corolário 1.3.4, obtemos que f é um homeomorfismo.

Portanto, f é um homomorfismo que é um homeomorfismo e, assim, f é um isomorfismo de recobrimentos. ■

Proposição 1.3.7. *Considere os espaços de recobrimentos (\tilde{X}_1, p_1, X) e (\tilde{X}_2, p_2, X) . Dados os pontos $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1$ e $\tilde{x}_2 \in \tilde{X}_2$ com $p_1(\tilde{x}_1) = p_2(\tilde{x}_2) = x_0$, temos os homomorfismos induzidos $(p_1)_\# : \Pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \rightarrow \Pi_1(X, x_0)$ e $(p_2)_\# : \Pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2) \rightarrow \Pi_1(X, x_0)$. A fim de que exista um homomorfismo $f : (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \rightarrow (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$ é necessário e suficiente que $(p_1)_\#(\Pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)) \subset (p_2)_\#(\Pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2))$.*

Demonstração: (\Rightarrow) Se existe o homomorfismo f , como f é um levantamento de p_1 em relação a projeção de recobrimento p_2 , pois $p_2 \circ f = p_1$, segue, do Teorema Fundamental do Levantamento (Teorema 1.3.5), que $(p_1)_\#(\Pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)) \subset (p_2)_\#(\Pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2))$, uma vez que $\tilde{x}_2 \in p^{-1}(x_0)$.

(\Leftarrow) Se $(p_1)_\#(\Pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)) \subset (p_2)_\#(\Pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2))$, então do Teorema Fundamental do Levantamento (Teorema 1.3.5), existe um levantamento $f : (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \rightarrow (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$, onde $p_2 \circ f = p_1$. Como f é contínua, segue que f é um homomorfismo entre os recobrimentos (\tilde{X}_1, p_1, X) e (\tilde{X}_2, p_2, X) . ■

Corolário 1.3.8. *Considere os espaços de recobrimentos (\tilde{X}_1, p_1, X) e (\tilde{X}_2, p_2, X) . Dados os pontos $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1$ e $\tilde{x}_2 \in \tilde{X}_2$ com $p_1(\tilde{x}_1) = p_2(\tilde{x}_2) = x_0$. Existe um isomorfismo f entre (\tilde{X}_1, p_1, X) e (\tilde{X}_2, p_2, X) , com $f(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$ se, e somente se, $(p_1)_\#(\Pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)) = (p_2)_\#(\Pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2))$. Em particular, se (\tilde{X}, p, X) é um recobrimento regular e $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in p^{-1}(x_0)$, então existe $f \in G(\tilde{X} | X)$ tal que $f(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$.*

Demonstração: (\Rightarrow) Usando a proposição anterior, obtemos que

$$(p_1)_\#(\Pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)) \subset (p_2)_\#(\Pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)).$$

Como f é um isomorfismo, considerando a f^{-1} obtemos a inclusão contrária e, assim, a igualdade.

(\Leftarrow) Pela proposição anterior, existe um homomorfismo $f : (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \rightarrow (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$, uma vez que $(p_1)_\#(\Pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)) \subset (p_2)_\#(\Pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2))$. Analogamente, existe um homomorfismo $g : (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2) \rightarrow (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)$, pois $(p_1)_\#(\Pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)) \supset (p_2)_\#(\Pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2))$.

Então, pelo Corolário 1.3.5, $g \circ f : (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \rightarrow (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)$ coincide com a aplicação identidade de \tilde{X}_1 , pois $(g \circ f)(\tilde{x}_1) = g(\tilde{x}_2) = \tilde{x}_1 = Id_{\tilde{X}_1}(\tilde{x}_1)$ e

$$p_1 \circ (g \circ f) \stackrel{p_1 \circ g = p_2}{=} p_2 \circ f = p_1.$$

Analogamente, $f \circ g : (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2) \rightarrow (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$ coincide com a aplicação identidade de \tilde{X}_2 , pois fixa \tilde{x}_2 . Logo, f é um isomorfismo, com $g = f^{-1}$.

Notemos que se (\tilde{X}, p, X) é um recobrimento regular, então $p_\#(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)) = p_\#(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_2))$ (vide Corolário 1.3.2 e Observação 1.3.2) e, assim, o resultado segue dos argumentos anteriores. ■

Definição 1.3.9. *Se (\tilde{X}, p, X) é um recobrimento com \tilde{X} simplesmente conexo, dizemos que (\tilde{X}, p, X) é um **espaço de recobrimento universal** (ou simplesmente, **recobrimento universal**).*

Teorema 1.3.6. (i) *Se (\tilde{X}_1, p_1, X) e (\tilde{X}_2, p_2, X) são espaços de recobrimento universal de X , então tais espaços são isomorfos.*

(ii) *Se (\tilde{X}_1, q, X) é um espaço de recobrimento universal e (\tilde{X}_2, p, X) um recobrimento, então existe um homomorfismo de recobrimentos $f : (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \rightarrow (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$ tal que $(\tilde{X}_1, f, \tilde{X}_2)$ é um recobrimento.*

Demonstração:

- (i) É imediato, uma vez que, como $\Pi_1(\tilde{X}_1) = \{1\}$ e $\Pi_1(\tilde{X}_2) = \{1\}$, temos que $(p_1)_\#(\Pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)) = (p_2)_\#(\Pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2))$, assim, pelo Corolário 1.3.8, (\tilde{X}_1, p_1, X) e (\tilde{X}_2, p_2, X) são isomorfos.
- (ii) Sejam \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 e x_0 em \tilde{X}_1, \tilde{X}_2 e X , respectivamente, tais que $q(\tilde{x}_1) = p(\tilde{x}_2) = x_0$. Como, por hipótese, $\Pi_1(\tilde{X}_1) = \{1\}$, então $q_\#(\Pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)) \subset p_\#(\Pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2))$.

Usando o Teorema Fundamental do Levantamento (Teorema 1.3.5), temos a existência de uma aplicação contínua $f : (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \rightarrow (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$ tal que $p \circ f = q$, assim, f é um homomorfismo (de recobrimentos). Pela Proposição 1.3.6, segue que $(\tilde{X}_1, f, \tilde{X}_2)$ é um espaço de recobrimento. ■

Definição 1.3.10. *Sejam (\tilde{X}, p, X) um recobrimento e $x \in X$. Dada qualquer classe $[\alpha] \in \Pi_1(X, x)$ e $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$, pela Proposição 1.3.1, existe um único levantamento do caminho α , $\tilde{\alpha} : I \rightarrow \tilde{X}$, começando em \tilde{x} , assim $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$. Definimos $\tilde{x} \cdot [\alpha] = \tilde{\alpha}(1)$. Temos, então, a aplicação*

$$\begin{aligned} p^{-1}(x) \times \Pi_1(X, x) &\rightarrow p^{-1}(x) \\ (\tilde{x}, [\alpha]) &\mapsto \tilde{x} \cdot [\alpha] = \tilde{\alpha}(1) \end{aligned}$$

que defini uma **ação à direita de $\Pi_1(X, x)$ sobre a fibra $p^{-1}(x)$** .

Proposição 1.3.8. *Considere (\tilde{X}, p, X) um recobrimento, com \tilde{X} conexo por caminhos. O grupo $\Pi_1(X, x)$ opera transitivamente à direita na fibra $p^{-1}(x)$, para cada $x \in X$. O subgrupo de isotropia de cada ponto $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ é $p_\#(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$.*

Demonstração: Sejam $[\alpha] \in \Pi_1(X, x)$ e $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$. Usando a ação à direita de $\Pi_1(X, x)$ sobre a fibra $p^{-1}(x)$ definida anteriormente, temos que, $\tilde{x} \cdot [\alpha] = \tilde{x}$ se, e somente se, o levantamento do caminho α a partir de \tilde{x} , é fechado.

Portanto, pelo Corolário 1.3.1,

$$\tilde{x} \cdot [\alpha] = \tilde{x} \Leftrightarrow [\alpha] \in p_\#(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})). \tag{I}$$

Assim, o subgrupo de isotropia de cada ponto $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ é

$$\Pi_1(X, x)_{\tilde{x}} = \{[\alpha] \in \Pi_1(X, x); \tilde{x} \cdot [\alpha] = \tilde{x}\} \stackrel{(I)}{=} p_\#(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})).$$

Vejamus que a ação é transitiva. Como \tilde{X} é conexo por caminhos, para quaisquer $\tilde{x}, \tilde{y} \in p^{-1}(x)$, vai existir um caminho $\tilde{\alpha}$, começando em \tilde{x} e terminando em \tilde{y} . Seja $\alpha = p \circ \tilde{\alpha}$, então α é um caminho fechado em X com ponto base x (que tem $\tilde{\alpha}$ como levantamento e $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}$). Claramente, temos

$$\tilde{x} \cdot [\alpha] = \tilde{\alpha}(1) = \tilde{y},$$

ou seja, \tilde{y} pertence a órbita de \tilde{x} e, então, $\Pi_1(X, x)$ opera transitivamente à direita na fibra $p^{-1}(x)$. ■

Proposição 1.3.9. *Sejam (\tilde{X}, p, X) um recobrimento e $f \in G(\tilde{X} | X)$, então, para qualquer ponto $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ e qualquer $[\alpha] \in \Pi_1(X, x)$, temos $f(\tilde{x} \cdot [\alpha]) = f(\tilde{x}) \cdot [\alpha]$, onde $f(\tilde{x}) \in p^{-1}(x)$, isto é, cada elemento $f \in G(\tilde{X} | X)$ induz um automorfismo do conjunto $p^{-1}(x)$, considerado como um $\Pi_1(X, x)$ -espaço à direita.*

Demonstração: Considere a ação de $\Pi_1(X, x)$ em $p^{-1}(x)$,

$$\begin{aligned} p^{-1}(x) \times \Pi_1(X, x) &\rightarrow p^{-1}(x) \\ (\tilde{x}, [\alpha]) &\mapsto \tilde{x} \cdot [\alpha] = \tilde{\alpha}(1) \end{aligned}$$

(com $\tilde{\alpha}$ levantamento de α , começando em \tilde{x}).

Seja $[\alpha] \in \Pi_1(X, x)$ e $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$. Como $f \in G(\tilde{X} \mid X)$, então $f : (\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (\tilde{X}, f(\tilde{x}))$ é um homeomorfismo tal que $p \circ f = p$. Tome $\tilde{\alpha}$ o levantamento de α , a partir do ponto \tilde{x} . Temos que $\tilde{x} \cdot [\alpha] = \tilde{\alpha}(1)$ e, então,

$$f(\tilde{x} \cdot [\alpha]) = f(\tilde{\alpha}(1)). \quad (\text{I})$$

Mas, $f \circ \tilde{\alpha}$ é um levantamento de α que começa no ponto $f(\tilde{x})$, uma vez que $p \circ f \circ \tilde{\alpha} \stackrel{p \circ f = p}{=} p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$. Assim,

$$f(\tilde{x}) \cdot [\alpha] = (f \circ \tilde{\alpha})(1) = f(\tilde{\alpha}(1)). \quad (\text{II})$$

Portanto, de (I) e (II), segue que $f(\tilde{x} \cdot [\alpha]) = f(\tilde{x}) \cdot [\alpha]$. ■

Observação 1.3.7. (i) Se (\tilde{X}, p, X) é um recobrimento regular, dados $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$, existe sempre um automorfismo $f : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_1)$, tal que $f(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$ (vide Corolário 1.3.8). Isto equivale a dizer que $G(\tilde{X} \mid X)$ atua transitivamente à esquerda na fibra ao considerar a ação $f \cdot \tilde{x}_0 = f(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$.

A transitividade acima, além de necessária, é suficiente para que (\tilde{X}, p, X) seja um recobrimento regular, pois ela implica que se $\tilde{\alpha}$ é um levantamento do caminho fechado α , os demais levantamentos de α tem a forma $f \circ \tilde{\alpha}$, com $f \in G(\tilde{X} \mid X)$, logo todos são caminhos abertos ou são todos fechados conforme $\tilde{\alpha}$ o seja. Assim, segue do Corolário 1.3.2, item (iii), que (\tilde{X}, p, X) é um recobrimento regular.

(ii) Sabemos que dado um recobrimento (\tilde{X}, p, X) , temos que $\Pi_1(X, x_0)$ opera transitivamente à direita na fibra $p^{-1}(x_0)$, sendo que o subgrupo de isotropia de $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$ é igual a $p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$. Vimos que a ação de $[\alpha] \in \Pi_1(X, x_0)$ sobre $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$ é representada por $\tilde{x} \cdot [\alpha]$. E ainda, $\tilde{x} \cdot [\alpha] = \tilde{\alpha}(1)$, onde $\tilde{\alpha} : I \rightarrow \tilde{X}$ é o levantamento do caminho α , a partir de \tilde{x} . Por outro lado, pelas Proposições 1.3.7 e 1.3.2, a existência de um homomorfismo $f : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_1)$, com $f(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$, onde $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_0 \cdot [\alpha]$, nos diz que $p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \subset p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)) = [\alpha]^{-1} \cdot p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \cdot [\alpha]$. Em particular, se $f : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ é um automorfismo, usando f^{-1} obtêm-se a inclusão contrária e, portanto, a igualdade. Assim,

$$\begin{aligned} f \text{ é um automorfismo} &\Leftrightarrow p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = [\alpha]^{-1} \cdot p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \cdot [\alpha] \\ &\Leftrightarrow [\alpha] \in N(p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))) \text{ (o subgrupo normalizador)}. \end{aligned}$$

Em particular, para cada $[\alpha] \in N(p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)))$, existe um único automorfismo $f : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (\tilde{X}, f(\tilde{x}_0))$ tal que $f(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0 \cdot [\alpha]$.

Proposição 1.3.10. Seja (\tilde{X}, p, X) um recobrimento. Existe um isomorfismo de grupos entre $G(\tilde{X} \mid X)$ e $\frac{N(p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)))}{p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))}$, para cada $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$.

Demonstração: Defina a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : N(p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))) &\rightarrow G(\tilde{X} | X) \\ [\alpha] &\mapsto \varphi([\alpha]) = f, \end{aligned}$$

onde $f : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (\tilde{X}, f(\tilde{x}_0))$ é um automorfismo tal que $f(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0 \cdot [\alpha]$, o que existe conforme o item (ii) da Observação 1.3.7, pois $[\alpha] \in N(p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)))$.

Sejam $\varphi([\alpha]) = f$ e $\varphi([\beta]) = g$, temos $\tilde{x}_0 \cdot [\alpha] = f(\tilde{x}_0)$ e $\tilde{x}_0 \cdot [\beta] = g(\tilde{x}_0)$. Usando a Proposição 1.3.9, teremos,

$$(f \circ g)(\tilde{x}_0) = f(g(\tilde{x}_0)) = f(\tilde{x}_0 \cdot [\beta]) = f(\tilde{x}_0) \cdot [\beta] = (\tilde{x}_0 \cdot [\alpha]) \cdot [\beta] = \tilde{x}_0 \cdot [\alpha * \beta].$$

Assim, pela definição da função φ , $(f \circ g) = \varphi([\alpha * \beta])$ e φ é um homomorfismo de grupos, pois $\varphi([\alpha] \cdot [\beta]) = \varphi([\alpha * \beta]) = f \circ g = \varphi([\alpha]) \circ \varphi([\beta])$.

Notemos que se $\varphi([\rho]) = Id_{\tilde{X}}$, então

$$\tilde{x}_0 \cdot [\rho] = \tilde{x}_0 \Leftrightarrow [\rho] \in p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)).$$

Assim, $p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ é o núcleo de φ .

Vejam que φ é sobrejetora. Dado $f \in G(\tilde{X} | X)$, com $f(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$. Sabemos que $\Pi_1(X, x_0)$ opera transitivamente em $p^{-1}(x_0)$, então existe $[\alpha] \in \Pi_1(X, x_0)$, tal que $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_0 \cdot [\alpha]$. Daí, como f é um automorfismo, temos, pela Observação 1.3.7, que $[\alpha] \in N(p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)))$. Como $f(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1 = \tilde{x}_0 \cdot [\alpha]$, segue, da definição da aplicação φ , que $f = \varphi([\alpha])$ e, portanto, f é sobrejetora.

Logo, o Teorema do Isomorfismo (Teorema 1.1.1) fornece o isomorfismo no quociente, ou seja, $\tilde{\varphi} : \frac{N(p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)))}{p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))} \rightarrow G(\tilde{X} | X)$ é um isomorfismo, onde

$$\tilde{\varphi}([\alpha] \cdot p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))) = \varphi([\alpha]). \quad \blacksquare$$

Corolário 1.3.9. *Considere (\tilde{X}, p, X) um recobrimento regular. Então, existe um isomorfismo entre $G(\tilde{X} | X)$ e $\frac{\Pi_1(X, x_0)}{p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))}$.*

Demonstração: Se o recobrimento (\tilde{X}, p, X) é regular, então $p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ é um subgrupo normal de $\Pi_1(X, x_0)$. Daí,

$$\begin{aligned} N(p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))) &= \left\{ [\alpha] \in \Pi_1(X, x_0); [\alpha] \cdot p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \cdot [\alpha]^{-1} = p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \right\} \\ &= \Pi_1(X, x_0) \end{aligned}$$

e assim, o resultado segue da proposição anterior. \blacksquare

Corolário 1.3.10. *Seja (\tilde{X}, p, X) um recobrimento universal. Então, existe um isomorfismo entre $G(\tilde{X} | X)$ e $\Pi_1(X, x_0)$ e a ordem de $\Pi_1(X, x_0)$ é o número de folhas do espaço de recobrimento universal.*

Demonstração: O isomorfismo segue do corolário anterior e do fato que $\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \{1\}$.

Agora, considere $G = \Pi_1(X, x_0)$. Temos, pela Proposição 1.3.8, considerando a ação de G em $p^{-1}(x_0)$, que o subgrupo de isotropia $G_{\tilde{x}_0} = p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = \{1\}$, para cada $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$.

Como a ação de G na fibra $p^{-1}(x_0)$ é transitiva, segue, pela Proposição 1.1.1, que a órbita $G(\tilde{x}_0) = p^{-1}(x_0)$. Ainda pela Proposição 1.1.1, $|G(\tilde{x}_0)| = \left| \frac{G}{G_{\tilde{x}_0}} \right|$ e, assim, $|p^{-1}(x_0)| = \left| \frac{\Pi_1(X, x_0)}{\{1\}} \right| = |\Pi_1(X, x_0)|$. ■

Exemplo 1.3.4. $\Pi_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^2) \cong \mathbb{Z}_2$, onde $\mathbb{R}\mathbb{P}^2 = \frac{S^2}{A}$ indica o plano projetivo, que é o espaço quociente de S^2 obtido pela identificação de cada par de pontos diametralmente oposto. De fato, como consequência da Proposição 1.3.5, temos que $\left(S^2, p, \mathbb{R}\mathbb{P}^2 = \frac{S^2}{A} \right)$, onde $p(x) = \bar{x} = \{x, -x\}$, é um recobrimento de duas folhas, uma vez que S^2 é um espaço de Hausdorff e a aplicação antipodal $A : S^2 \rightarrow S^2$ é uma involução livre.

Pelo Exemplo 1.2.5, S^2 é simplesmente conexo, logo, pelo corolário anterior, existe um isomorfismo entre $G(S^2 | \mathbb{R}\mathbb{P}^2) = \{Id, A\}$ (pela Observação 1.3.5) e $\Pi_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^2)$ e $|\Pi_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^2)| = |p^{-1}(x_0)| = 2$. Portanto, $\Pi_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^2) \cong \mathbb{Z}_2$.

Proposição 1.3.11. *Seja X um espaço topológico que possui um espaço de recobrimento universal e H um subgrupo de $\Pi_1(X, x_0)$. Então existe um espaço de recobrimento (\tilde{X}, p, X) tal que $p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = H$ e, portanto, $\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \cong H$, para $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, uma vez que $p_{\#}$ é um homomorfismo injetor.*

Demonstração: Seja (Y, q, X) um espaço de recobrimento universal de X , assim, $\Pi_1(Y) = \{1\}$. Pela Proposição 1.3.8, sabemos que $\Pi_1(X, x_0)$ opera transitivamente à direita de $q^{-1}(x_0)$. Além disso, pelo Corolário 1.3.10, $G(Y | X) \cong \Pi_1(X, x_0)$.

Tome $H \subset \Pi_1(X, x_0)$ e fixe $y \in q^{-1}(x_0)$. Seja G_1 o subgrupo de $G(Y | X)$ definido como segue

$$\varphi \in G_1 \Leftrightarrow \exists [\alpha] \in H; \varphi(y) = y \cdot [\alpha].$$

Temos que, $G_1 \cong H$, uma vez que para a aplicação $\psi : G_1 \rightarrow H$ dada por $\psi(\varphi) = [\alpha]$, onde $[\alpha]$ vem da relação acima, é um isomorfismo. De fato, ψ é sobrejetora pela definição de G_1 e ψ é um homomorfismo, pois dados $\varphi_1, \varphi_2 \in G_1$, existem $[\alpha_1], [\alpha_2] \in H$ tais que $\varphi_1(y) = y \cdot [\alpha_1]$ e $\varphi_2(y) = y \cdot [\alpha_2]$. Daí, $(\varphi_1 \circ \varphi_2)(y) = \varphi_1(\varphi_2(y)) = \varphi_1(y \cdot [\alpha_2]) = \varphi_1(y) \cdot [\alpha_2] = y \cdot [\alpha_1] \cdot [\alpha_2]$ (onde usamos aqui a Proposição 1.3.9). Logo, $\psi(\varphi_1 \circ \varphi_2) = [\alpha_1] \cdot [\alpha_2] = \psi(\varphi_1) \cdot \psi(\varphi_2)$. Além disso, ψ é injetora, pois, dados $\varphi_1, \varphi_2 \in G_1$ com $\psi(\varphi_1) = \psi(\varphi_2)$, ou seja, $[\alpha_1] = [\alpha_2]$, onde $[\alpha_1], [\alpha_2] \in H$ são tais que $\varphi_1(y) = y \cdot [\alpha_1]$ e $\varphi_2(y) = y \cdot [\alpha_2]$, segue que, $\varphi_1(y) = \varphi_2(y)$. Pelo Lema 1.3.3, obtemos que $\varphi_1 = \varphi_2$.

Como G_1 é um subgrupo de $G(Y | X)$, então, pela Observação 1.3.6, G_1 é um grupo propriamente descontínuo de homeomorfismos de Y . Logo, pelo Teorema 1.3.1, a projeção canônica $r : Y \rightarrow \frac{Y}{G_1}$ é uma projeção de recobrimento.

Agora, para todo $\varphi \in G_1$, temos que $q \circ \varphi = q$, assim, para todo $y \in Y$, segue que $q(\varphi \cdot y) = q(\varphi(y)) = q(y)$, ou seja, q é constante em cada órbita, de modo que q induz uma aplicação contínua $p : \frac{Y}{G_1} \rightarrow X$ tal que $p(G_1(y)) = q(y)$, e portanto o diagrama a seguir é comutativo

$$\begin{array}{ccc} Y & & \\ \downarrow r & \searrow q & \\ \frac{Y}{G_1} & \xrightarrow{p} & X. \end{array}$$

Temos que (Y, q, X) é um recobrimento universal e $\left(Y, r, \frac{Y}{G_1}\right)$ é um recobrimento, logo, usando o Teorema 1.3.6, (\tilde{X}, p, X) é um recobrimento, onde $\tilde{X} := \frac{Y}{G_1}$. Daí, pela Proposição 1.3.8, $\Pi_1(X, x_0)$ opera transitivamente à direita em $p^{-1}(x_0)$.

Seja $\tilde{x}_0 = r(y) \in p^{-1}(x_0)$, usando a Proposição 1.3.8, segue que o subgrupo de isotropia de $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ é $\Pi_1(X, x_0)_{\tilde{x}_0} = p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$. Assim, basta mostrar que $\Pi_1(X, x_0)_{\tilde{x}_0} = H$.

De fato, tome $[\alpha] \in \Pi_1(X, x_0)_{\tilde{x}_0}$, então $\tilde{x}_0 \cdot [\alpha] = \tilde{x}_0 = \tilde{\alpha}(1)$, onde $\tilde{\alpha} : I \rightarrow \frac{Y}{G_1} = \tilde{X}$ é um levantamento de α começando em \tilde{x}_0 , a partir da projeção p . Como $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{x}_0$, segue que $[\tilde{\alpha}] \in \Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. Considerando um levantamento $\tilde{\beta} : I \rightarrow Y$ de $\tilde{\alpha}$ que começa em y , a partir da aplicação r , temos que $r \circ \tilde{\beta} = \tilde{\alpha}$, assim

$$q \circ \tilde{\beta} \stackrel{q=p \circ r}{=} p \circ r \circ \tilde{\beta} = p \circ \tilde{\alpha} = \alpha,$$

ou seja, $\tilde{\beta}$ é um levantamento do caminho α que começa em y , via projeção q . Logo, $y \cdot [\alpha] = \tilde{\beta}(1)$, assim, como $r(\tilde{\beta}(1)) = r(y) = \tilde{x}_0$, uma vez que, pelo Corolário 1.3.1, $\tilde{\beta}$ é um laço baseado em y , segue que existe $\varphi \in G_1$ tal que $\varphi(y) = \tilde{\beta}(1)$ e G_1 opera transitivamente em $r^{-1}(x_0)$. Portanto, existe $\varphi \in G_1$ tal que $y \cdot [\alpha] = \varphi(y)$ e, do isomorfismo $G_1 \stackrel{\psi}{\cong} H$, obtemos que $[\alpha] \in H$.

Por outro lado, para $[\alpha] \in H$, segue que existe $\varphi \in G_1$ tal que $y \cdot [\alpha] = \varphi(y)$, onde $q \circ \varphi = q$, pois $G_1 \subset G(Y | X)$. Note que, considerando $\tilde{\alpha} : I \rightarrow \tilde{X}$ um levantamento de α começando em \tilde{x}_0 , a partir da projeção p e um levantamento $\tilde{\beta} : I \rightarrow Y$ de $\tilde{\alpha}$ que começa em y , via projeção r , obtemos que

$$\tilde{x}_0 = r(y) = r(\tilde{\beta}(1)) = \tilde{\alpha}(1) = \tilde{x}_0 \cdot [\alpha],$$

ou seja, $[\alpha] \in \Pi_1(X, x_0)_{\tilde{x}_0}$.

Logo, $\Pi_1(X, x_0)_{\tilde{x}_0} = H$ e, portanto, $p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = H$. ■

1.4 O Teorema de Seifert-Van Kampen

O conteúdo abordado nesta seção, bem como as figuras aqui ilustradas, é baseado em Kosniowski (1980), [3], e é de grande importância para a obtenção dos grupos fundamentais das superfícies fechadas, conforme os resultados expostos no final da próxima seção.

Suponha que desejamos determinar o grupo fundamental de um espaço topológico X conexo por caminhos, tal que

$$X = U_1 \cup U_2,$$

onde U_1 e U_2 são abertos, não-vazios e conexos por caminhos, com grupos fundamentais conhecidos. O Teorema de Seifert-Van Kampen afirma que, se $U_1 \cap U_2$ é conexo por caminhos, então, dado $x_0 \in U_1 \cap U_2$, $\Pi_1(X, x_0)$ é determinado a partir dos grupos fundamentais de U_1 , U_2 e $U_1 \cap U_2$.

Para a prova do Teorema de Seifert-Van Kampen, utilizaremos o conceito de “apresentação de um grupo” que descreveremos brevemente na sequência.

Definição 1.4.1. Seja S um conjunto e considere os elementos de S como sendo símbolos não-comutativos. Uma **palavra** em S é uma expressão da forma

$$w = x_1^{\epsilon(1)} x_2^{\epsilon(2)} \dots x_n^{\epsilon(n)},$$

onde $x_i \in S$ e $\epsilon(i) = \pm 1$, para todo $i = 1, \dots, n$ e $n \in \Gamma$. A **palavra vazia** (aquela que não aparece símbolos) será denotada por 1 . Uma palavra é dita **reduzida** se ela não contém x^1 seguido por x^{-1} ou vice-versa, para algum $x \in S$. Toda palavra pode ser transformada em uma palavra reduzida por deletar pares $x^1 x^{-1}$ ou $x^{-1} x^1$ (com $x \in S$) se eles aparecem na palavra. O **produto** de duas palavras w e w' é definido escrevendo os símbolos de w e, em seguida, os de w' , ou seja, por justaposição das palavras.

Por conveniência, indicamos x^1 por x , $x^1 x^1$ por x^2 , $x^{-1} x^{-1}$ por x^{-2} e assim por diante.

Definição 1.4.2. Sejam S um conjunto cujos elementos são símbolos não-comutativos e $F(S)$ o conjunto de todas as palavras formadas por elementos de S . Considere as seguintes operações sobre o conjunto $F(S)$:

- (i) inserir xx^{-1} ou $x^{-1}x$ em uma palavra, com $x \in S$;
- (ii) retirar xx^{-1} ou $x^{-1}x$ de uma palavra, com $x \in S$.

Dizemos que duas palavras w e w' são **equivalentes** se w' puder ser obtida de w através de um número finito de operações dos tipos (i) e (ii). Isto dá uma relação de equivalência sobre $F(S)$. E, claramente, toda palavra é equivalente a uma palavra reduzida.

Por um abuso, denotemos a classe de equivalência que contém a palavra w por w mesmo. E definimos o produto de duas classes de equivalência das palavras w e v por wv , que aqui está denotando a classe de equivalência da justaposição das palavras w e v .

Pode-se verificar que o conjunto de todas as classes de equivalência em $F(S)$ com a operação de justaposição de palavras, constitui um grupo multiplicativo, onde o elemento neutro é a classe de equivalência da palavra vazia e o elemento inverso de $w = x_1^{\epsilon(1)} \dots x_n^{\epsilon(n)}$ é $w^{-1} = x_n^{-\epsilon(n)} \dots x_1^{-\epsilon(1)}$. Este grupo é chamado de **grupo livre gerado por S** .

Quando S é um conjunto finito com n elementos, chamamos o grupo livre gerado por S de **grupo livre em n geradores**.

Definição 1.4.3. Sejam S um conjunto (em que os elementos são vistos como símbolos não-comutativos) e $F(S)$ o conjunto de todas as palavras formadas por elementos de S . Tome R um subconjunto de $F(S)$. Considere as seguintes operações nas palavras:

- (i) inserir xx^{-1} ou $x^{-1}x$ em uma palavra, com $x \in S$;
- (ii) retirar xx^{-1} ou $x^{-1}x$ de uma palavra, com $x \in S$;
- (iii) inserir r ou r^{-1} em uma palavra, com $r \in R$;
- (iv) retirar r ou r^{-1} de uma palavra, com $r \in R$.

Dizemos, agora, que duas palavras w e w' são **equivalentes** se w' puder ser obtida de w por um número finito de operações dos tipos (i), (ii), (iii) e (iv), o que define, também, uma relação de equivalência sobre $F(S)$. Como anteriormente, denotemos por w a classe de equivalência que contém a palavra w .

O conjunto de todas as classes de equivalência em $F(S)$, definidas pela relação anterior, constitui, também, um grupo com a operação de justaposição de palavras. Este grupo é chamado de **grupo com apresentação** $(S; R)$ e é denotado por $\langle S \mid R \rangle$.

O conjunto S é chamado **conjunto dos geradores** e o conjunto R é dito **conjunto dos relatores** (ou **relações**) do grupo em questão.

Observação 1.4.1. (i) O grupo com apresentação $\langle S \mid \emptyset \rangle$ é exatamente o grupo livre gerado por S .

(ii) Em alguns casos, é mais apropriado escrevermos o conjunto de relatores R do grupo $\langle S \mid R \rangle$ como um conjunto de relações, ou seja, o conjunto $\{r; r \in R\}$ é reescrito como $\{r = 1; r \in R\}$.

Exemplo 1.4.1. O grupo $\langle \{x\} \mid \{x^n\} \rangle = \langle \{x\} \mid \{x^n = 1\} \rangle$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, é composto pelas classes $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$, uma vez que a palavra x^m , com $m \geq n$ ou $m \in \mathbb{Z}_-$, é equivalente a palavra x^p , com $p \equiv m \pmod{n}$, $p = 1, \dots, n-1$. Este grupo é, então, isomorfo a \mathbb{Z}_n .

Definição 1.4.4. Dizemos que um grupo G tem uma **apresentação** $(X; R)$ se G é isomorfo ao grupo $\langle X \mid R \rangle$, onde X é o conjunto de geradores (cujos elementos são símbolos não-comutativos) e R é o conjunto de relações.

Exemplo 1.4.2. O grupo $G = \langle \{x\} \mid \emptyset \rangle$ é composto pelos elementos

$$1, x, x^{-1}, x^2, x^{-2}, \dots$$

que é isomorfo a \mathbb{Z} , uma vez que a aplicação $f : (G, \cdot) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$, definida por $x^n \mapsto n$, onde $x^0 = 1$, é um isomorfismo.

Assim, como o grupo fundamental da S^1 é isomorfo a \mathbb{Z} , então o grupo $\Pi_1(S^1)$ tem uma apresentação do tipo $(\{x\}; \emptyset)$.

Exemplo 1.4.3. Pelo Exemplo 1.3.4, $\Pi_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^2) \cong \mathbb{Z}_2$. Logo, como vimos no Exemplo 1.4.1, $\Pi_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^2) = \langle \{x\} \mid \{x^2 = 1\} \rangle$, ou seja, $\Pi_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^2)$ tem uma apresentação $(\{x\}; \{x^2\})$.

Exemplo 1.4.4. Consideremos o grupo $G = \langle \{a, b\} \mid \{aba^{-1}b^{-1} = 1\} \rangle$. Pela relação $aba^{-1}b^{-1} = 1$, segue que $ab = ba$, pois

$$ab = aba^{-1}b^{-1}ba = (aba^{-1}b^{-1})ba = ba,$$

assim, concluímos que $a^r b^s = b^r a^s$, para todos $r, s \in \mathbb{Z}$. Portanto, qualquer palavra $g = a^{n_1} b^{m_1} a^{n_2} b^{m_2} \dots a^{n_k} b^{m_k} \in G$, com $k \in \mathbb{N}$, pode ser reescrita como

$$g = a^n b^m,$$

onde $n = \sum_{i=1}^k n_i$ e $m = \sum_{i=1}^k m_i$. Além disso, a função $\varphi : (G, \cdot) \rightarrow (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$, definida por

$$g = a^n b^m \mapsto (n, m)$$

é um isomorfismo.

Como o grupo fundamental do toro é isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, segue que $\Pi_1(\mathbb{T}^2) = \langle \{a, b\} \mid \{aba^{-1}b^{-1} = 1\} \rangle$, ou seja, $\Pi_1(\mathbb{T}^2)$ tem uma apresentação $(\{a, b\}; \{aba^{-1}b^{-1}\})$.

Vamos retornar, agora, ao objetivo desta seção. Seja X um espaço topológico que é a união de dois abertos, não-vazios e conexos por caminhos, U_1 e U_2 . Suponhamos que $U_1 \cap U_2$ é não-vazio e conexo por caminhos. Escolha um ponto base $x_0 \in U_1 \cap U_2$.

Considere $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1$ e ψ_2 as aplicações inclusões representadas no diagrama a seguir

$$\begin{array}{ccc} U_1 \cap U_2 & \xrightarrow{\varphi_1} & U_1 \\ \varphi_2 \downarrow & & \downarrow \psi_1 \\ U_2 & \xrightarrow{\psi_2} & X. \end{array}$$

Note que o diagrama acima é comutativo, pois, para todo $x \in U_1 \cap U_2$,

$$\psi_1(\varphi_1(x)) = x = \psi_2(\varphi_2(x)).$$

Pela Observação 1.3.3, temos que o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{array}{ccc} \Pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) & \xrightarrow{(\varphi_1)_\#} & \Pi_1(U_1, x_0) \\ (\varphi_2)_\# \downarrow & & \downarrow (\psi_1)_\# \\ \Pi_1(U_2, x_0) & \xrightarrow{(\psi_2)_\#} & \Pi_1(X, x_0). \end{array}$$

Suponhamos que os grupos fundamentais de $U_1 \cap U_2$, U_1 e U_2 são conhecidos e suas apresentações são dadas por:

$$\Pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) = \langle S \mid R \rangle, \quad \Pi_1(U_1, x_0) = \langle S_1 \mid R_1 \rangle \quad \text{e} \quad \Pi_1(U_2, x_0) = \langle S_2 \mid R_2 \rangle.$$

Se $s \in S$, então $(\varphi_1)_\#(s) \in \Pi_1(U_1, x_0)$ e $(\varphi_2)_\#(s) \in \Pi_1(U_2, x_0)$. Sejam $'(\varphi_1)_\#(s)'$ e $'(\varphi_2)_\#(s)'$ as representações de $(\varphi_1)_\#(s)$ e $(\varphi_2)_\#(s)$ como palavras nos geradores S_1 e S_2 , respectivamente, e defina o conjunto de relações

$$R_S = \{ '(\varphi_1)_\#(s)' = '(\varphi_2)_\#(s)'; s \in S \}.$$

Agora estamos em condições de enunciar o Teorema de Seifert-Van Kampen.

Teorema 1.4.1. (Teorema de Seifert-Van Kampen) *Nas hipóteses anteriores, o grupo $\Pi_1(X, x_0)$ é isomorfo ao grupo definido pelo conjunto de geradores $S_1 \cup S_2$ e o conjunto de relações $R_1 \cup R_2 \cup R_S$.*

A prova do Teorema de Seifert-Van Kampen consiste essencialmente de duas partes, uma relacionada com geradores e a outra com relações do grupo fundamental, e será consequência dos vários resultados a seguir.

O primeiro resultado é básico, envolve apenas homotopia de caminhos, e é útil para a Proposição 1.4.1.

Lema 1.4.1. *Sejam X um espaço topológico conexo por caminhos, $f : I = [0, 1] \rightarrow X$ um caminho e $0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n = 1$. Considere, para cada $i = 1, \dots, n$, o caminho $f_i : I \rightarrow X$ definido por*

$$\begin{aligned} f_i : I &\rightarrow X \\ t &\mapsto f_i(t) = f((1-t)t_{i-1} + tt_i) \end{aligned}$$

então $f \sim f_1 * f_2 * \dots * f_n$.

Demonstração: Observe que f_i é um caminho começando em $f(t_{i-1})$ e terminando em $f(t_i)$.

Faremos a prova por indução sobre n . Note que o caso $n = 1$ é imediato.

Vamos analisar o caso em que $n = 2$. Seja $0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 = 1$, temos

$$\begin{aligned} (f_1 * f_2)(t) &= \begin{cases} f_1(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ f_2(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1; \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(2tt_1), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ f((2 - 2t)t_1 + 2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

A aplicação $F : I \times I \rightarrow X$ dada por

$$F(t, s) = \begin{cases} f((1 - s)2tt_1 + st), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ f((1 - s)(t_1 + (2t - 1)(1 - t_1)) + st), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

é uma homotopia entre $f_1 * f_2$ e f , pois F é contínua, uma vez que f é contínua, e

$$F(t, 0) = \begin{cases} f(2tt_1), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f(t_1 + (2t - 1)(1 - t_1)), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = (f_1 * f_2)(t),$$

pois $t_1 + (2t - 1)(1 - t_1) = t_1 + 2t - 2tt_1 - 1 + t_1 = (2 + 2t)t_1 + 2t - 1$,

$$F(t, 1) = \begin{cases} f(t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f(t), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = f(t),$$

$F(0, s) = f(0)$ e $F(1, s) = f((1 - s)(t_1 + 1 - t_1) + s) = f(1)$. Assim, $f \sim f_1 * f_2$.

Tomemos $n > 2$ e suponha que o resultado é válido para os inteiros menores que n . Considere $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n-1} \leq t_n = 1$. Para $g : I \rightarrow X$ tal que $g(t) = f(tt_{n-1})$, temos que $g(0) = 0$ e $g(1) = f(t_{n-1})$. Considerando g e f_n , segue, do caso anterior, que $f \sim g * f_n$, uma vez que $0 = t_0 \leq t_{n-1} \leq t_n = 1$.

Como $0 = \frac{t_0}{t_{n-1}} \leq \frac{t_1}{t_{n-1}} \leq \dots \leq \frac{t_{n-2}}{t_{n-1}} \leq \frac{t_{n-1}}{t_{n-1}} = 1$, obtemos, por valer para $n - 1$, que

$$g \sim g_1 * g_2 * \dots * g_{n-1}, \tag{I}$$

onde $g_i(t) = g\left(\frac{(1 - t)t_{i-1}}{t_{n-1}} + \frac{tt_i}{t_{n-1}}\right) = f\left(\frac{(1 - t)t_{i-1}}{t_{n-1}} + \frac{tt_i}{t_{n-1}}\right) = f_i(t)$, $i = 1, \dots, n - 1$.

Daí,

$$f \sim g * f_n \stackrel{(I)}{\sim} g_1 * g_2 * \dots * g_{n-1} * f_n = f_1 * f_2 * \dots * f_{n-1} * f_n,$$

como desejado. ■

Proposição 1.4.1. *Considerando as hipóteses anteriores, o grupo $\Pi_1(X, x_0)$ é gerado por*

$$(\psi_1)_\#(\Pi_1(U_1, x_0)) \cup (\psi_2)_\#(\Pi_1(U_2, x_0)).$$

Demonstração: Sejam $f : I \rightarrow X$ um laço em X baseado em $x_0 \in U_1 \cap U_2$ e δ o número de Lebesgue da cobertura aberta $\{f^{-1}(U_1), f^{-1}(U_2)\}$ do compacto I , existente pelo Teorema 1.3.3. Isto significa que se $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$ é uma sequência de números reais com $0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n = 1$ e $t_i - t_{i-1} < \delta$, então $f([t_i, t_{i+1}])$ está contido em U_1 ou U_2 .

Podemos supor que $f(t_i) \in U_1 \cap U_2$, para todo $i = 1, \dots, n$, pois, por exemplo, se $f(t_i) \in U_1$ e $f(t_i) \notin U_2$, então $f([t_{i-1}, t_i])$ e $f([t_i, t_{i+1}])$ estão ambos contidos em U_1 , logo, podemos agrupar os dois intervalos em $[t_{i-1}, t_{i+1}]$, de modo que

$$f([t_{i-1}, t_{i+1}]) = f([t_{i-1}, t_i] \cup [t_i, t_{i+1}]) = f([t_{i-1}, t_i]) \cup f([t_i, t_{i+1}]) \subset U_1,$$

ou seja, $f([t_{i-1}, t_{i+1}])$ está inteiramente contido em U_1 . Neste caso, podemos excluir o t_i da sequência e reenumerá-la. Se continuarmos o processo, obtemos que $f(t_i) \in U_1 \cap U_2$, para todo $i = 1, \dots, n$.

Para todo $i = 1, \dots, n$, considere os caminhos

$$\begin{aligned} f_i : I &\rightarrow X \\ t &\mapsto f_i(t) = f((1-t)t_{i-1} + tt_i) \end{aligned}$$

então, pelo Lema 1.4.1, $f \sim f_1 * f_2 * \dots * f_n$, ou seja, $[f] = [f_1 * f_2 * \dots * f_n]$. Note que cada f_i é um caminho que está contido em U_1 ou U_2 .

Escolha, para $i = 1, 2, \dots, n-1$, caminhos $q_i : I \rightarrow X$ tais que $q_i(0) = x_0$, $q_i(1) = f(t_i)$ e, como $U_1 \cap U_2$ é conexo por caminhos, podemos tomar q_i de modo que, para cada i , $q_i(t) \in U_1 \cap U_2$, para todo $t \in I$, como representado na figura a seguir.

Sejam, também, q_0 e q_n tais que $q_0(t) = q_n(t) = x_0$, para todo $t \in I$.

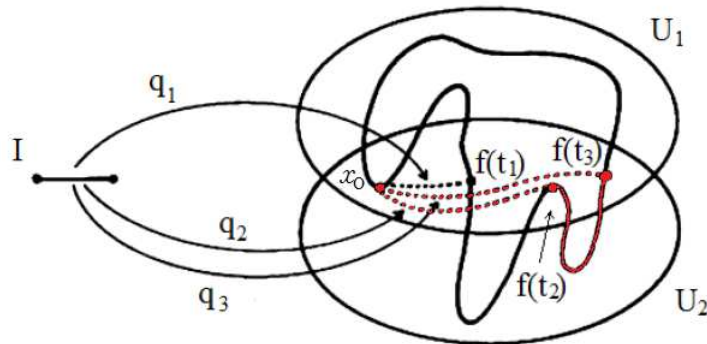


Figura 1.1: Teorema de Seifert-Van Kampen, geradores.

Então,

$$\begin{aligned} [f] &= [q_0 * f_1 * q_1^{-1} * q_1 * f_2 * q_2^{-1} * \dots * q_{n-1} * f_n * q_n^{-1}] \\ &= [q_0 * f_1 * q_1^{-1}] \cdot [q_1 * f_2 * q_2^{-1}] \cdot \dots \cdot [q_{n-1} * f_n * q_n^{-1}], \end{aligned}$$

onde cada $[q_{i-1} * f_i * q_i^{-1}]$ é a classe de equivalência de laços em X baseados em x_0 (como mostra a figura anterior para o caminho $q_2 \circ f_2 \circ q_3^{-1}$ representado pelo traço em vermelho contido, neste caso, em U_2) que está inteiramente contido em U_1 ou U_2 .

Portanto, $[q_{i-1} * f_i * q_i^{-1}]$ é um elemento de $(\psi_1)_\#(\Pi_1(U_1, x_0))$ ou $(\psi_2)_\#(\Pi_1(U_2, x_0))$. Então, cada elemento $[f]$ de $\Pi_1(X, x_0)$ pode ser escrito como produto de imagens de elementos de $\Pi_1(U_1, x_0)$ ou $\Pi_1(U_2, x_0)$, por $(\psi_1)_\#$ ou $(\psi_2)_\#$, respectivamente. ■

Corolário 1.4.1. *Nas hipóteses iniciais, o grupo $\Pi_1(X, x_0)$ é gerado por $(\psi_1)_\#(S_1) \cup (\psi_2)_\#(S_2)$, onde S_1 e S_2 são os geradores de $\Pi_1(U_1, x_0)$ e $\Pi_1(U_2, x_0)$, respectivamente.*

Demonstração: A prova segue imediatamente da proposição anterior, uma vez que S_1 e S_2 são os geradores de $\Pi_1(U_1, x_0)$ e $\Pi_1(U_2, x_0)$, respectivamente. ■

Observação 1.4.2. *Para facilitar a notação, adotemos (como em Kosniowski (1980, p.185 – 186), [3]) a convenção de escrever s ao invés de $(\psi_j)_\#(s)$, para todo $s \in S_j$, $j = 1, 2$. Assim, se $f : I \rightarrow U_j$, denotamos a composta $I \rightarrow U_j \xrightarrow{\psi_j} X$ também por f . Neste sentido, segue, do corolário anterior, que o grupo $\Pi_1(X, x_0)$ é gerado por $S_1 \cup S_2$, onde S_1 e S_2 são os geradores de $\Pi_1(U_1, x_0)$ e $\Pi_1(U_2, x_0)$, respectivamente.*

Lema 1.4.2. *Supondo as hipóteses anteriores, o conjunto dos geradores $S_1 \cup S_2$ de $\Pi_1(X, x_0)$ satisfaz as relações R_1 , R_2 e R_S .*

Demonstração: Como $(\psi_j)_\# : \Pi_1(U_j, x_0) \rightarrow \Pi_1(X, x_0)$ é um homomorfismo, para $j \in \{1, 2\}$, então qualquer relação satisfeita pelos elementos de S_j em $\Pi_1(U_j, x_0)$ é também satisfeita pelos elementos $(\psi_j)_\#(S_j)$ de $\Pi_1(X, x_0)$. Logo, pela convenção que fizemos acima, os elementos de $S_1 \cup S_2$ em $\Pi_1(X, x_0)$ satisfazem as relações R_1 e R_2 .

Se $s \in S \subset \Pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)$, então

$$((\psi_1)_\# \circ (\varphi_1)_\#)(s) = ((\psi_2)_\# \circ (\varphi_2)_\#)(s),$$

uma vez que $\psi_1 \circ \varphi_1 = \psi_2 \circ \varphi_2$. Se uma palavra em S_j representa $(\varphi_j)_\#(s)$ então a mesma palavra em S_j representa $((\psi_j)_\# \circ (\varphi_j)_\#)(s)$ em $\Pi_1(X, x_0)$, de modo que $'(\varphi_1)_\#(s)' = '(\varphi_2)_\#(s)'$. Logo, os elementos de S devem, também, satisfazerem a relação R_S . ■

O teorema a seguir garante que as relações R_1 , R_2 e R_S são as únicas em $\Pi_1(X, x_0)$.

Teorema 1.4.2. *Nas hipóteses anteriores, se os elementos de $S_1 \cup S_2$ em $\Pi_1(X, x_0)$ satisfazem uma relação, então tal relação é uma consequência das relações R_1 , R_2 e R_S .*

Demonstração: Suponha que $\alpha_1^{\epsilon(1)} \alpha_2^{\epsilon(2)} \dots \alpha_k^{\epsilon(k)} = 1$ é uma relação entre os elementos de $S_1 \cup S_2$ em $\Pi_1(X, x_0)$, onde $\epsilon(i) = \pm 1$ e $\alpha_i \in S_{\lambda(i)}$, para $i = 1, 2, \dots, k$, sendo $\lambda(i) \in \{1, 2\}$.

Para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, escolha um caminho fechado f_i em $U_{\lambda(i)}$ com ponto base x_0 tal que $[f_i] = \alpha_i^{\epsilon(i)}$. Então, $\alpha_i = [f_i]$, se $\epsilon(i) = 1$, e $\alpha_i = [f_i^{-1}] = [f_i]^{-1}$, se $\epsilon(i) = -1$. Defina o caminho $f : I \rightarrow X$ por

$$f(t) = f_i(kt - i + 1); \quad \frac{(i-1)}{k} \leq t \leq \frac{i}{k}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Note que

$$f_j(t) = f \left(\frac{(1-t)(j-1)}{k} + \frac{tj}{k} \right) \quad \text{e} \quad 0 = \frac{0}{k} \leq \frac{1}{k} \leq \dots \leq \frac{k-1}{k} \leq \frac{k}{k} = 1,$$

assim, usando o Lema 1.4.1, segue que $f \sim f_1 * f_2 * \dots * f_k$. Como f e f_i são caminhos fechados com ponto base x_0 , temos que

$$[f] = [f_1] \cdot [f_2] \cdot \dots \cdot [f_k]. \tag{I}$$

Como $\alpha_1^{\epsilon(1)} \alpha_2^{\epsilon(2)} \dots \alpha_k^{\epsilon(k)} = 1$ e $[f_i] = \alpha_i^{\epsilon(i)}$, obtemos que $[f] = 1$, ou seja, $f \sim c_{x_0}$. Então, seja $F : I \times I \rightarrow X$ uma homotopia entre f e c_{x_0} , assim

$$\begin{cases} F(t, 0) = f(t); F(t, 1) = c_{x_0}(t), & \forall t \in I; \\ F(0, s) = F(1, s) = x_0; & \forall s \in I. \end{cases}$$

Pela continuidade de F e por $X = U_1 \cup U_2$, com U_1 e U_2 abertos, temos a cobertura aberta $\{F^{-1}(U_1), F^{-1}(U_2)\}$ do compacto $I \times I$, assim, pelo Teorema 1.3.3, existe um número de Lebesgue $\delta > 0$ tal que qualquer subconjunto de diâmetro menor que δ está contido em um dos conjuntos $F^{-1}(U_j)$, com $j \in \{1, 2\}$.

Considere os números reais

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = 1 \quad \text{e} \quad 0 = s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n = 1$$

tais que

$$\left\{ \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \dots, \frac{k-1}{k} \right\} \subseteq \{t_1, t_2, \dots, t_{m-1}\}$$

e

$$(t_i - t_{i-1})^2 + (s_j - s_{j-1})^2 < \delta^2, \quad \forall i, j$$

(o que é possível).

Assim, se $R_{i,j}$ denota a região retangular $[t_{i-1}, t_i] \times [s_{j-1}, s_j]$ em $I \times I$, então $F(R_{i,j})$ está contido em U_1 ou em U_2 , uma vez que a diagonal de $R_{i,j}$ é menor do que δ e, então, $R_{i,j} \subset F^{-1}(U_1)$ ou $R_{i,j} \subset F^{-1}(U_2)$, para todos i e j .

Para cada i e j , seja $a_{i,j} : I \rightarrow X$ um caminho com ponto inicial em x_0 e ponto final em $F(t_i, s_j)$, com $a_{i,j}$ em U_1 ou em U_2 ou em $U_1 \cap U_2$, se $F(t_i, s_j)$ está em U_1 ou em U_2 ou em $U_1 \cap U_2$, respectivamente. Note que tal escolha é possível, pois U_1, U_2 e $U_1 \cap U_2$ são conexos por caminhos.

Se $F(t_i, s_j) = x_0$, então tomemos $a_{i,j} = c_{x_0}$.

Defina os caminhos $b_{i,j}$ e $c_{i,j}$ por

$$b_{i,j}(t) = F((1-t)t_{i-1} + tt_i, s_j) \quad \text{e} \quad c_{i,j}(t) = F(t_i, (1-t)s_{j-1} + ts_j)$$

assim, $b_{i,j}$ é um caminho ligando o ponto $F(t_{i-1}, s_j)$ ao ponto $F(t_i, s_j)$ e $c_{i,j}$ é um caminho ligando o ponto $F(t_i, s_{j-1})$ ao ponto $F(t_i, s_j)$.

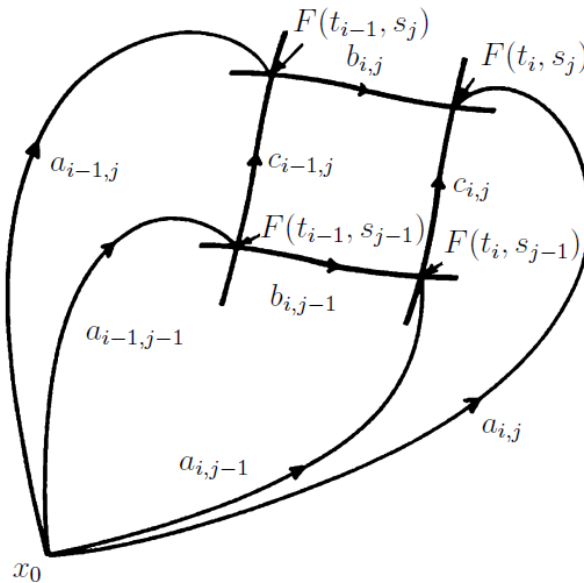


Figura 1.2: Teorema de Seifert-Van Kampen, relações.

Como $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = 1$, $s_0 = 0$ e $b_{i,0}(t) = F((1-t)t_{i-1} + tt_i, 0) = f((1-t)t_{i-1} + tt_i)$, pelo Lema 1.4.1, temos que $f \sim b_{1,0} * b_{2,0} * \dots * b_{m,0}$, assim

$$[f] = [b_{1,0} * b_{2,0} * \dots * b_{m,0}]. \quad (\text{II})$$

Além disso, segue do Lema 1.4.1 que $[c_{x_0}] = [b_{1,n} * b_{2,n} * \dots * b_{m,n}]$, pois $s_n = 1$ e

$$b_{i,n}(t) = F((1-t)t_{i-1} + tt_i, s_n) \stackrel{F(t,1)=c_{x_0}(t)}{=} c_{x_0}((1-t)t_{i-1} + tt_i) = x_0.$$

A aplicação $H : I \times I \rightarrow X$ dada por:

- para $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$,

$$H(t, s) = F((1-s)((1-2t)t_{i-1} + 2tt_i) + st_{i-1}, (1-s)s_{j-1} + s((1-2t)s_{j-1} + 2ts_j))$$

- e, para $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$,

$$H(t, s) = F((1-s)t_i + s((2-2t)t_{i-1} + (2t-1)t_i), (1-s)((2-2t)s_{j-1} + (2t-1)s_j) - ss_j)$$

é uma homotopia entre $b_{i,j-1} * c_{i,j}$ e $c_{i-1,j} * b_{i,j}$, uma vez que

$$\begin{aligned} H(t, 0) &= \begin{cases} F((1-2t)t_{i-1} + 2tt_i, s_{j-1}), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ F(t_i, (2-2t)s_{j-1} + (2t-1)s_j), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases} \\ &= \begin{cases} b_{i,j-1}(2t), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ c_{i,j}(2t-1), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases} \\ &= (b_{i,j-1} * c_{i,j})(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(t, 1) &= \begin{cases} F(t_{i-1}, (1-2t)s_{j-1} + 2ts_j), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ F((2-2t)t_{i-1} + (2t-1)t_i, s_j), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases} \\ &= \begin{cases} c_{i-1,j}(2t), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ b_{i,j}(2t-1), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases} \\ &= (c_{i-1,j} * b_{i,j})(t), \end{aligned}$$

$$H(0, s) = F((1-s)t_{i-1} + st_{i-1}, (1-s)s_{j-1} + ss_{j-1}) = F(t_{i-1}, s_{j-1})$$

e

$$H(1, s) = F((1-s)t_i + st_i, (1-s)s_j + ss_j) = F(t_i, s_j).$$

Note que $H(I \times I)$ está contido em U_1 ou em U_2 ou em $U_1 \cap U_2$, pois $F(R_{i,j})$ está contido em U_1 ou em U_2 ou em $U_1 \cap U_2$, respectivamente.

Vamos, agora, definir caminhos fechados $f_{i,j}$ e $g_{i,j}$ com ponto base em x_0 por

$$f_{i,j} = a_{i-1,j} * b_{i,j} * a_{i,j}^{-1} \quad \text{e} \quad g_{i,j} = a_{i,j-1} * c_{i,j} * a_{i,j}^{-1}.$$

Temos

$$\begin{aligned}
f_{i,j-1} * g_{i,j} &= a_{i-1,j-1} * b_{i,j-1} * a_{i,j-1}^{-1} * a_{i,j-1} * c_{i,j} * a_{i,j}^{-1} \\
&= a_{i-1,j-1} * b_{i,j-1} * c_{i,j} * a_{i,j}^{-1} \\
&\stackrel{b_{i,j-1} * c_{i,j} \sim c_{i-1,j} * b_{i,j}}{\sim} a_{i-1,j-1} * c_{i-1,j} * b_{i,j} * a_{i,j}^{-1} \\
&= a_{i-1,j-1} * c_{i-1,j} * a_{i-1,j}^{-1} * a_{i-1,j} * b_{i,j} * a_{i,j}^{-1} \\
&= g_{i-1,j} * f_{i,j},
\end{aligned}$$

ou seja, $f_{i,j-1} * g_{i,j} \sim g_{i-1,j} * f_{i,j}$, e essa equivalência é dentro de U_1, U_2 ou $U_1 \cap U_2$, se $F(R_{i,j}) \subset U_1, U_2$ ou $U_1 \cap U_2$, respectivamente. Assim,

$$[f_{i,j-1}] \cdot [g_{i,j}] = [g_{i-1,j}] \cdot [f_{i,j}],$$

portanto,

$$[f_{i,j-1}] = [g_{i-1,j}] \cdot [f_{i,j}] \cdot [g_{i,j}]^{-1}. \quad (\text{III})$$

Expressemos cada um dos elementos em (III) como palavras em S_1 ou S_2 , de modo a obter uma relação

$$‘[f_{i,j-1}]’ = ‘[g_{i-1,j}]’ \cdot ‘[f_{i,j}]’ \cdot ‘[g_{i,j}]’^{-1}, \quad (\text{IV})$$

dentro de $\Pi_1(U_1, x_0)$ ou $\Pi_1(U_2, x_0)$, respectivamente. Esta relação, portanto, deve ser uma consequência das relação R_1 ou R_2 .

Suponha que $\frac{1}{k} = t_{i(1)}, \frac{2}{k} = t_{i(2)}, \dots, \frac{k-1}{k} = t_{i(k-1)}$, onde $i(1), i(2), \dots, i(k-1) \in \{1, 2, \dots, m-1\}$, então

$$\begin{aligned}
f_{1,0} * f_{2,0} * \dots * f_{i(1),0} &= a_{0,0} * b_{1,0} * a_{1,0}^{-1} * a_{1,0} * b_{2,0} * a_{2,0}^{-1} * \dots * a_{i(1)-1,0} \\
&\quad * b_{i(1),0} * a_{i(1),0}^{-1} \\
&= a_{0,0} * b_{1,0} * b_{2,0} * \dots * b_{i(1),0} * a_{i(1),0}^{-1}
\end{aligned}$$

e analogamente, obtemos

$$\begin{aligned}
f_{i(1)+1,0} * f_{i(1)+2,0} * \dots * f_{i(2),0} &= a_{i(1),0} * b_{i(1)+1,0} * b_{i(1)+2,0} * \dots \\
&\quad * b_{i(2),0} * a_{i(2),0}^{-1} \\
&\quad \vdots \\
f_{i(k-2)+1,0} * f_{i(k-2)+2,0} * \dots * f_{i(k-1),0} &= a_{i(k-2),0} * b_{i(k-2)+1,0} * b_{i(k-2)+2,0} \\
&\quad * \dots * b_{i(k-1),0} * a_{i(k-1),0}^{-1} \\
f_{i(k-1)+1,0} * f_{i(k-1)+2,0} * \dots * f_{m,0} &= a_{i(k-1),0} * b_{i(k-1)+1,0} * b_{i(k-1)+2,0} \\
&\quad * \dots * b_{m,0} * a_{m,0}^{-1}.
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
[f_1] \cdot [f_2] \cdot \dots \cdot [f_k] &\stackrel{(I),(II)}{=} [b_{1,0} * b_{2,0} * \dots * b_{m,0}] \\
&= [a_{0,0} * b_{1,0} * \dots * b_{i(1),0} * a_{i(1),0}^{-1} * a_{i(1),0} * b_{i(1)+1,0} * \dots * \\
&\quad b_{i(2),0} * a_{i(2),0}^{-1} * \dots * a_{i(k-1),0} * b_{i(k-1)+1} * \dots * b_{m,0} * a_{m,0}^{-1}] \\
&= [a_{0,0} * b_{1,0} * \dots * b_{i(1),0} * a_{i(1),0}^{-1}] \cdot [a_{i(1),0} * b_{i(1)+1,0} * \dots * \\
&\quad b_{i(2),0} * a_{i(2),0}^{-1}] \cdot \dots \cdot [a_{i(k-1),0} * b_{i(k-1)+1} * \dots * b_{m,0} * a_{m,0}^{-1}],
\end{aligned}$$

pois $a_{0,0} = c_{x_0} = a_{m,0}$, uma vez que $a_{0,0}(1) = F(t_0, s_0) = F(0, 0) = x_0$ e $a_{m,0}(1) = F(t_m, s_0) = F(1, 0) = f(1) = x_0$. Logo,

$$\begin{aligned}
[f_1] &= [f_{1,0}] \cdot [f_{2,0}] \cdot \dots \cdot [f_{i(1),0}] \\
[f_2] &= [f_{i(1)+1,0}] \cdot [f_{i(1)+2,0}] \cdot \dots \cdot [f_{i(2),0}] \\
&\quad \vdots \\
[f_{k-1}] &= [f_{i(k-2)+1,0}] \cdot [f_{i(k-2)+2,0}] \cdot \dots \cdot [f_{i(k-1),0}] \\
[f_k] &= [f_{i(k-1)+1,0}] \cdot [f_{i(k-1)+2,0}] \cdot \dots \cdot [f_{m,0}].
\end{aligned}$$

Como cada f_i é um caminho fechado em $U_{\lambda(i)}$ com ponto base x_0 , podemos usar as relações $R_{\lambda(i)}$ para expressar os elementos mencionados anteriormente como palavras em $S_{\lambda(i)}$, assim temos uma relação

$$\begin{aligned}\alpha_1^{\epsilon(1)} &= [f_1] = '[f_{1,0}]' \cdot '[f_{2,0}]' \cdot \dots \cdot '[f_{i(1),0}]' \\ \alpha_2^{\epsilon(2)} &= [f_2] = '[f_{i(1)+1,0}]' \cdot '[f_{i(1)+2,0}]' \cdot \dots \cdot '[f_{i(2),0}]' \\ &\vdots \\ \alpha_k^{\epsilon(k)} &= [f_k] = '[f_{i(k-1)+1,0}]' \cdot '[f_{i(k-1)+2,0}]' \cdot \dots \cdot '[f_{m,0}]'\end{aligned}$$

que é consequência das relações $R_{\lambda(i)}$. Portanto,

$$\alpha = \alpha_1^{\epsilon(1)} \alpha_2^{\epsilon(2)} \dots \alpha_k^{\epsilon(k)} = '[f_{1,0}]' \cdot '[f_{2,0}]' \cdot \dots \cdot '[f_{m,0}]' \quad (V)$$

é uma relação que é uma consequência de R_1 e R_2 .

Por (IV), podemos reescrever (V) como

$$\alpha = ('[g_{0,1}]' \cdot '[f_{1,1}]' \cdot '[g_{1,1}]^{-1}') \cdot ('[g_{1,1}]' \cdot '[f_{2,1}]' \cdot '[g_{2,1}]^{-1}') \cdot \dots \cdot ('[g_{m-1,1}]' \cdot '[f_{m,1}]' \cdot '[g_{m,1}]^{-1}')$$

dando uma relação que é uma consequência de R_1 e R_2 .

Note que $g_{0,1} = a_{0,0} * c_{0,1} * a_{0,1}^{-1} = c_{0,1} = c_{x_0}$ e $g_{m,1} = a_{m,0} * c_{m,1} * a_{m,1}^{-1} = a_{m,1}^{-1} = c_{x_0}$, de modo que $'[g_{0,1}]' = 1$ e $'[g_{m,1}]' = 1$. Além disso, $'[g_{i,1}]^{-1}' \cdot '[g_{i,1}]' = 1$ se $'[g_{i,1}]^{-1}'$ e $'[g_{i,1}]'$ são expressos como palavras em S_1 ou S_2 . Entretanto, se $g_{i,1}$ é um caminho em $U_1 \cap U_2$, então é possível que uma das palavras $'[g_{i,1}]^{-1}'$ ou $'[g_{i,1}]'$ seja expressada como uma palavra em S_1 e a outra como uma palavra em S_2 . Neste caso, a relação $'[g_{i,1}]^{-1}' \cdot '[g_{i,1}]' = 1$ é consequência da relação R_S . Logo, obtemos a relação

$$\alpha = '[f_{1,1}]' \cdot '[f_{2,1}]' \cdot \dots \cdot '[f_{m,1}]'$$

como uma consequência das relações R_1 , R_2 e R_S . Analogamente, concluímos que

$$\alpha = '[f_{1,2}]' \cdot '[f_{2,2}]' \cdot \dots \cdot '[f_{m,2}]'$$

que é uma relação que é uma consequência de R_1 , R_2 e R_S .

Continuando o processo acima, obtemos que

$$\alpha = '[f_{1,n}]' \cdot '[f_{2,n}]' \cdot \dots \cdot '[f_{m,n}]'$$

que é uma relação que é uma consequência de R_1 , R_2 e R_S .

Daí, como $f_{i,n} = a_{i-1,n} * b_{i,n} * a_{i,n}^{-1} = c_{x_0}$, chegamos à relação

$$\alpha = '[f_{1,n}]' \cdot '[f_{2,n}]' \cdot \dots \cdot '[f_{m,n}]' = '[c_{x_0}]' \cdot '[c_{x_0}]' \cdot \dots \cdot '[c_{x_0}]' = '[c_{x_0}]'$$

como consequência das relações especificadas.

Assim, a relação inicial é consequência das relações R_1 , R_2 e R_S , o que prova o teorema. ■

Demonstração do Teorema 1.4.1: Do Corolário 1.4.1 e da Observação 1.4.2, obtemos que $\Pi_1(X, x_0)$ é gerado por $S_1 \cup S_2$ e, do Lema 1.4.2 e do Teorema 1.4.2, segue que o conjunto de relações é $R_1 \cup R_2 \cup R_S$, o que prova o teorema.

Corolário 1.4.2. *Nas hipóteses iniciais, se $U_1 \cap U_2$ é simplesmente conexo, então $\Pi_1(X, x_0)$ é um grupo definido pelo conjunto de geradores $S_1 \cup S_2$ e o conjunto de relações $R_1 \cup R_2$.*

Demonstração: Segue do Teorema de Seifert-Van Kampen (Teorema 1.4.1), usando que $\Pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) = \{1\}$. ■

Exemplo 1.4.5. *Se X é a Figura 8 (visto como um subespaço de \mathbb{R}^2), então o grupo fundamental de X é um grupo livre com dois geradores. De fato, indiquemos por $X = a_1 * a_2$ (o conjunto que representa a Figura 8, representado na figura abaixo, em que cada a_i indica um dos círculos tangentes em x_0 , $i = 1, 2$).*

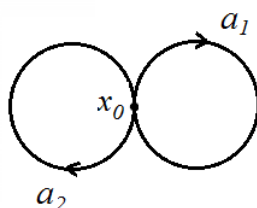


Figura 1.3: Figura 8.

Sejam α_1 e α_2 caminhos fechados em X com ponto base x_0 , cujos traços representam (uma vez) a_1 e a_2 , respectivamente, nas direções indicadas na figura acima, então $\Pi_1(X, x_0)$ é um grupo livre com geradores $[\alpha_1]$ e $[\alpha_2]$. Aqui podemos considerar $U_1 = X - \{p_2\}$ e $U_2 = X - \{p_1\}$, onde p_i é um ponto qualquer sobre a_i , com $p_i \neq x_0$ e $i = 1, 2$.

1.5 Superfícies Fechadas e Grupo Fundamental

Nesta seção, inicialmente, abordamos brevemente as superfícies fechadas, suas características de Euler e orientações. Concluimos a seção apresentando o grupo fundamental de cada superfície via apresentação de grupos. As principais referências utilizadas são Massey (1991), [5], Zieschang, Vogt e Goldewey (1980), [9], e Kosniowski (1980), [3].

Superfícies Fechadas e o Teorema da Classificação das Superfícies Fechadas

A fonte de todas as figuras apresentadas nesta subseção é Massey (1991), [5].

Definição 1.5.1. *Um espaço topológico de Hausdorff X é dito uma **n -variedade** ou uma **variedade n -dimensional** se cada ponto de X possui uma vizinhança aberta homeomorfa ao disco aberto n -dimensional,*

$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| < 1\}.$$

O espaço X é chamado de **n -variedade com bordo** se cada ponto possui uma vizinhança homeomorfa a um conjunto aberto do semiespaço euclidiano $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n \geq 0\}$.

Dizemos que uma n -variedade é **fechada** se ela for compacta e não tiver bordo.

Uma variedade bidimensional recebe o nome de **superfície**.

Exemplo 1.5.1. São exemplos de superfícies:

- (i) A esfera (S^2);
- (ii) O toro bidimensional (\mathbb{T}^2). Já vimos que o toro \mathbb{T}^2 pode ser definido como $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ (Exemplo 1.2.2), porém \mathbb{T}^2 pode ser definido, também, como o espaço quociente de $[0, 1] \times [0, 1]$ pela relação de equivalência que identifica $(x, 0)$ com $(x, 1)$ e $(0, y)$ com $(1, y)$, para todos $x, y \in [0, 1]$;
- (iii) O plano projetivo ($\mathbb{R}P^2$). Lembremos que $\mathbb{R}P^2 = \frac{S^2}{A}$ (Exemplo 1.3.4);
- (iv) A faixa de Möbius aberta. A faixa de Möbius aberta pode ser descrita da seguinte maneira: tome $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -10 \leq x \leq 10 \text{ e } -1 < y < 1\}$, a faixa de Möbius é formada pelo espaço quociente de X pela identificação dos pontos $(10, y)$ e $(-10, -y)$. Observe que os bordos do retângulo correspondente a $y = 1$ e $y = -1$ foram omitidos, isso pois, se essa omissão não fosse feita, então não teríamos uma variedade, uma vez que tal espaço seria uma variedade com bordo, que é a faixa de Möbius fechada;
- (v) A garrafa de Klein (\mathbb{K}^2). A garrafa de Klein pode ser definida como o espaço quociente de $[0, 1] \times [0, 1]$ com a relação de equivalência que identifica $(x, 0)$ com $(x, 1)$ e $(0, y)$ com $(1, 1 - y)$, para todos $x, y \in [0, 1]$.

Lema 1.5.1. Seja (\mathbb{S}, T) um par, onde \mathbb{S} é uma superfície e T é uma involução livre sobre \mathbb{S} . Se \mathbb{S} é uma superfície fechada, então $\frac{\mathbb{S}}{T}$ é uma superfície fechada.

Demonstração: Sabemos, pela Proposição 1.3.5, que $(\mathbb{S}, p, \frac{\mathbb{S}}{T})$ é um recobrimento de duas folhas, onde $p : \mathbb{S} \rightarrow \frac{\mathbb{S}}{T}$ é a aplicação quociente, assim, para todo $\bar{x} = \{x, T(x)\} \in \frac{\mathbb{S}}{T}$ existe uma vizinhança distinguida U de \bar{x} tal que

$$p^{-1}(U) = V_1 \cup V_2,$$

onde V_1 e V_2 são vizinhanças disjuntas de x e $T(x)$, respectivamente. Além disso, $p|_{V_1} : V_1 \rightarrow U$ e $p|_{V_2} : V_2 \rightarrow U$ são homeomorfismos.

Como \mathbb{S} é uma 2-variedade (superfície), então existe uma vizinhança W de x contida em V_1 que é homeomorfa ao disco aberto $D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2; \|x\| < 1\}$ e, assim, $p(W)$ é uma vizinhança de \bar{x} contida em U que é homeomorfa a D^2 , pois $p|_{V_1}$ é um homeomorfismo e, portanto, $\frac{\mathbb{S}}{T}$ é uma 2-variedade (superfície).

Sendo \mathbb{S} uma superfície fechada, então \mathbb{S} é compacta, assim, como p é contínua e sobrejetora, segue que $\frac{\mathbb{S}}{T} = p(\mathbb{S})$ é compacta.

Portanto, $\frac{\mathbb{S}}{T}$ é uma superfície fechada. ■

Definição 1.5.2. Sejam \mathbb{S}_1 e \mathbb{S}_2 duas superfícies disjuntas, $D_1 \subset \mathbb{S}_1$ e $D_2 \subset \mathbb{S}_2$ dois subconjuntos fechados homeomorfos ao disco fechado $\bar{D}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \|(x, y)\| \leq 1\}$. Considere $\mathbb{S}'_i = \mathbb{S}_i - \text{int}(D_i)$, $i = 1, 2$, e $h : \partial D_1 \rightarrow \partial D_2$ um homeomorfismo. A **soma conexa** de \mathbb{S}_1 e \mathbb{S}_2 , denotada por $\mathbb{S}_1 \# \mathbb{S}_2$, é o espaço quociente de $\mathbb{S}'_1 \cup \mathbb{S}'_2$ obtido por identificar os pontos x e $h(x)$, para todo $x \in \partial D_1$ (que é claramente uma superfície).

Notemos que as superfícies fechadas, apresentadas no exemplo anterior, podem ser representadas por um diagrama poligonal plano, incluindo o “polígono de dois lados”. As arestas são etiquetadas com letras e setas. Cada par de letras iguais corresponde a lados a serem identificados. Podemos, então associar a cada representação poligonal uma palavra (forma canônica) feita de sequência de letras obtida ao se percorrer o polígono em sentido horário ou anti-horário. Ao passarmos por uma aresta, anexamos o expoente -1 a sua letra se estivermos em sentido contrário à orientação da seta. Para as superfícies fechadas, vistas no Exemplo 1.5.1, temos as seguintes representações:

Superfície	Palavra
Esfera	aa^{-1}
Toro	$aba^{-1}b^{-1}$
Plano projetivo	aa
Garrafa de Klein	$abab^{-1}$

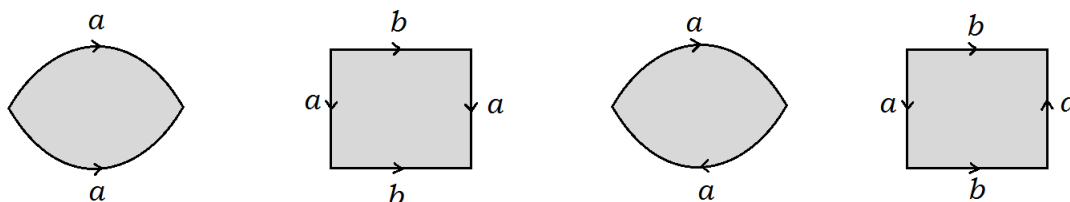


Figura 1.4: Representação das superfícies fechadas S^2 , \mathbb{T}^2 , \mathbb{RP}^2 e \mathbb{K}^2 .

Mais geralmente, pode-se obter a partir da soma conexa (vide Massey (1991, p.15), [5]) que

Superfície	Palavra
Soma conexa de n toros	$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}\dots a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}$
Soma conexa de n planos projetivos	$a_1a_1a_2a_2\dots a_na_n$

As n -variedades conexas, $n \geq 2$, são divididas em dois tipos: orientáveis e não-orientáveis. Vamos considerar aqui apenas o caso $n = 2$ (ou seja, superfícies) e abordar esses dois tipos de maneira mais intuitiva, sem se preocupar muito com a precisão matemática.

Definição 1.5.3. *Considere um caminho fechado em uma superfície S , P um ponto do caminho e \vec{n} um vetor “normal” à superfície S em P . Diremos que o caminho **reverte** a orientação se, ao deslocarmos sobre tal caminho o vetor normal (obtendo uma família de vetores normais a S , um para cada ponto do caminho) ao retornar ao ponto inicial P o vetor normal obtido estará com a mesma direção do vetor inicial, mas com sentido contrário. Um caminho fechado em S que não tem essa propriedade será chamado um caminho que **preserva** a orientação. Dizemos que uma superfície S é **orientável** se todo caminho fechado em S preserva a orientação, caso contrário, se existir ao menos um caminho fechado em S que reverte a orientação, dizemos que S é **não-orientável**.*

Exemplo 1.5.2. S^2 e \mathbb{T}^2 são superfícies orientáveis. A faixa de Möbius aberta é não-orientável.

- Lema 1.5.2.** (i) A garrafa de Klein é uma superfície homeomorfa à soma conexa de dois planos projetivos;
- (ii) A soma conexa de um toro e um plano projetivo é homeomorfa à soma conexa de uma garrafa de Klein e um plano projetivo;
- (iii) A soma conexa de um toro e um plano projetivo é homeomorfa à soma conexa de três planos projetivos;
- (iv) A soma conexa de um toro e uma garrafa de Klein é homeomorfa à soma conexa de quatro planos projetivos.

Demonstração:

- (i) Apresentamos uma justificativa geométrica da prova deste item de acordo com Massey (1991, p.13), [5]. Dados dois planos projetivos, podemos considerar que os mesmos sejam representados por aa e bb , respectivamente.

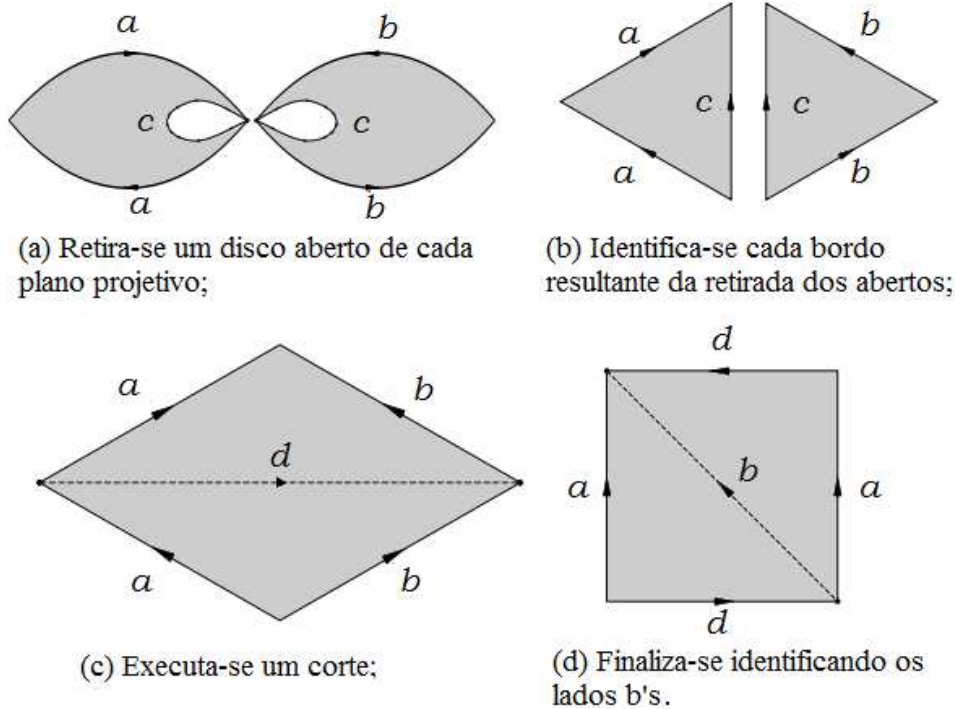


Figura 1.5: $\mathbb{K}^2 \simeq \mathbb{R}\mathbb{P}^2 \# \mathbb{R}\mathbb{P}^2$.

- (ii) Seja \mathbb{S} uma superfície qualquer. Vamos primeiro analisar a soma conexa de um toro e a superfície \mathbb{S} e, posteriormente, uma soma conexa de uma garrafa da Klein com a superfície \mathbb{S} . Depois vamos considerar \mathbb{S} como sendo uma faixa de Möbius aberta e finalmente $\mathbb{S} = \mathbb{R}\mathbb{P}^2$.

Podemos representar o toro como $aba^{-1}b^{-1}$, o retângulo com lados opostos identificados, como na figura a seguir. Para formar a soma conexa de um toro \mathbb{T}^2 e a superfície \mathbb{S} , primeiro recorte o disco sombreado do diagrama a seguir

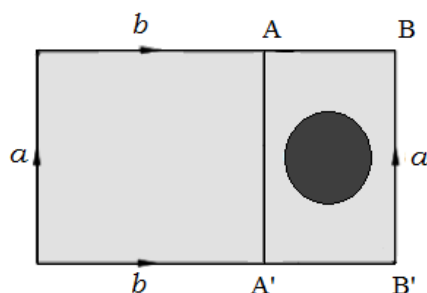


Figura 1.6: Representação do toro menos um disco.

e corte um buraco na superfície \mathbb{S} que seja homeomorfo a D^2 , assim a soma conexa do toro com a superfície \mathbb{S} é feita identificando o bordo do disco retirado do toro com o bordo do buraco retirado da superfície \mathbb{S} .

Agora, ao invés de identificar o toro inteiro em um passo, podemos fazê-lo em duas etapas. Primeiro vamos colar apenas a parte do toro que é a imagem do retângulo $ABB'A'$ sob a identificação. Assim, neste estágio, formamos a soma conexa de \mathbb{S} com um tubo aberto ou um cilindro. Mas tal tubo aberto é homeomorfo a uma esfera com dois discos cortados nela. Como a esfera é o elemento neutro da soma conexa, então o espaço resultante da primeira etapa é homeomorfo à superfície \mathbb{S} inicial com dois buracos. Na segunda etapa, ligamos os bordos desses dois buracos com um tubo (formado pelo restante do toro). Se \mathbb{S} for a faixa de Möbius aberta, o resultado do final das duas etapas, com o toro, é ilustrado na figura a seguir, onde FM indica a faixa de Möbius aberta:

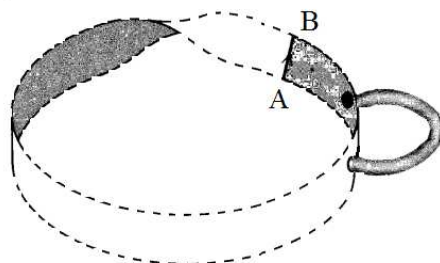


Figura 1.7: $FM \# \mathbb{T}^2$.

Agora, a soma conexa de uma garrafa de Klein \mathbb{K}^2 e a superfície \mathbb{S} é feita de modo análogo ao que fizemos com o toro, a única diferença vai ocorrer na segunda etapa das identificações, pois, representando a garrafa de Klein por $abab^{-1}$, como na figura a seguir,

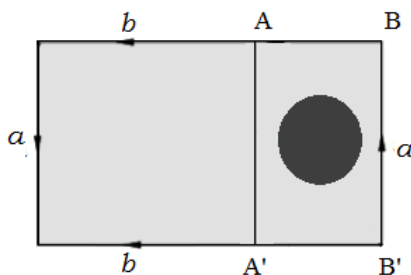


Figura 1.8: Representação da garrafa de Klein menos um disco.

podemos observar que as letras a' s tem orientações opostas, assim após fazer os passos análogos ao que fizemos no caso do toro e considerando \mathbb{S} a superfície, o que muda é que na segunda etapa ao colar o tubo ele ficará “torcido”.

Na figura seguinte, ilustramos a soma conexa de \mathbb{S} com uma garrafa de Klein, quando \mathbb{S} é a faixa de Möbius aberta.

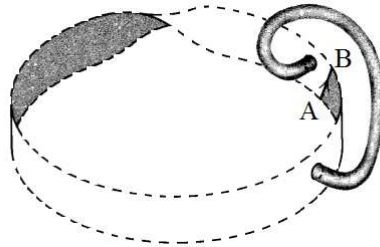


Figura 1.9: $FM \# \mathbb{K}^2$.

Afirmamos que, se \mathbb{S} é a faixa de Möbius aberta, então a soma conexa de um toro e a superfície \mathbb{S} é homeomorfa à soma conexa de uma garrafa de Klein e a superfície \mathbb{S} . Para ver isto imagine que podemos cortar cada um desses espaços topológicos ao longo das retas AB (indicadas nas Figuras 1.7 e 1.9). Em cada caso, o resultado é a soma conexa de um retângulo e um toro, com os dois lados do retângulo sendo identificados com uma torção e, assim, os dois espaços são homeomorfos.

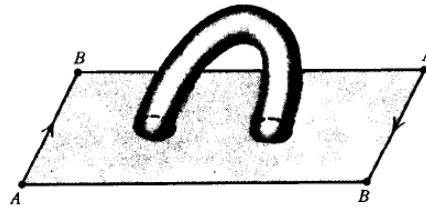


Figura 1.10: Soma conexa de um retângulo (com dois lados identificados) e \mathbb{T}^2 .

Agora, obtemos o plano projetivo $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ por colar o bordo de um disco no bordo de uma faixa de Möbius aberta.

Como a soma conexa de um toro com uma faixa de Möbius aberta é homeomorfa à soma conexa de uma garrafa de Klein com uma faixa de Möbius aberta, então, são, também, homeomorfos os espaços obtidos desses por colar um disco sobre os bordos da faixa de Möbius aberta, obtendo, assim, que $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{R}\mathbb{P}^2$ é homeomorfo a $\mathbb{K}^2 \# \mathbb{R}\mathbb{P}^2$.

(iii) Por (ii), temos o homeomorfismo

$$\mathbb{T}^2 \# \mathbb{R}\mathbb{P}^2 \simeq \mathbb{K}^2 \# \mathbb{R}\mathbb{P}^2.$$

Pelo item (i), $\mathbb{K}^2 \simeq \mathbb{R}\mathbb{P}^2 \# \mathbb{R}\mathbb{P}^2$. Daí,

$$\mathbb{T}^2 \# \mathbb{R}\mathbb{P}^2 \simeq \mathbb{K}^2 \# \mathbb{R}\mathbb{P}^2 \simeq \mathbb{R}\mathbb{P}^2 \# \mathbb{R}\mathbb{P}^2 \# \mathbb{R}\mathbb{P}^2.$$

(iv) Novamente por (i),

$$\mathbb{T}^2 \# \mathbb{K}^2 \simeq \mathbb{T}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2.$$

Pelo item (iii),

$$\mathbb{T}^2 \# \mathbb{K}^2 \simeq \mathbb{T}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \simeq \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$$

de onde segue o resultado. ■

Definição 1.5.4. Uma *triangulação* de uma superfície compacta \mathbb{S} consiste de uma família finita de subconjuntos fechados $\{T_1, \dots, T_n\}$ que cobrem \mathbb{S} e uma família de homeomorfismos $\varphi_i : T'_i \rightarrow T_i$, $i = 1, \dots, n$, onde cada T'_i é um triângulo em \mathbb{R}^2 . Os subconjuntos T_i são chamados de “triângulos”. Os subconjuntos de T_i que são as imagens dos vértices e as arestas do triângulo T'_i por φ_i também são chamados de “vértices” e “arestas”, respectivamente. Finalmente, é exigido que quaisquer dois triângulos distintos, T_i e T_j , sejam disjuntos, ou tenham um único vértice em comum, ou tenham uma aresta inteira em comum.

Observação 1.5.1. Toda superfície compacta \mathbb{S} possui uma triangulação (vide Massey (1991, p.16), [5]).

Teorema 1.5.1. (Teorema da Classificação das Superfícies Fechadas) Seja \mathbb{S} uma superfície fechada. Então, \mathbb{S} é homeomorfa a uma esfera, a uma soma conexa de toros ou a uma soma conexa de planos projetivos.

Demonstração (Ideia): Neste trabalho não será apresentada a demonstração deste teorema, vamos nos limitar a dar uma ideia da prova. Uma demonstração pode ser encontrada em Massey (1991, Teorema 5.1, p.9-18), [5].

(1) Já vimos que são exemplos de superfícies fechadas: a esfera, o plano projetivo, o toro, a soma conexa de toros ou a soma conexa de planos projetivos e que tais superfícies podem ser obtidas como o espaço quociente de uma região poligonal em que os lados do polígono são identificados aos pares.

(2) Usando o fato que toda superfície compacta \mathbb{S} admite uma triangulação, mostra-se que \mathbb{S} é homeomorfa ao espaço quociente de uma região poligonal em que os lados do polígono são identificados aos pares. Para tanto se usa a técnica de “recortes” e “colagens”.

(3) Uma vez concluído que toda a superfície \mathbb{S} pode ser obtida como o espaço quociente de uma região poligonal cujos lados do polígono são identificados aos pares, mostra-se (considerando essa forma de ver \mathbb{S}) que \mathbb{S} é homeomorfa a uma das superfícies citadas no item (1), a saber, a esfera ou a uma soma conexa de toros ou a uma soma conexa de planos projetivos, o que conclui a prova do teorema. ■

Usando o Lema 1.5.2 e o Teorema da Classificação das Superfícies Fechadas, obtemos a seguinte proposição:

Proposição 1.5.1. Qualquer superfície fechada orientável é homeomorfa à esfera ou à soma conexa de toros. Qualquer superfície fechada não-orientável é homeomorfa à soma conexa de um plano projetivo ou uma garrafa de Klein e uma superfície fechada orientável.

Característica de Euler e Genus

Definição 1.5.5. *Sejam \mathbb{S} uma superfície fechada, $\{T_1, \dots, T_n\}$ uma triangulação de \mathbb{S} e*

$$\begin{aligned} v &= \text{número (total) de vértices de } \mathbb{S}; \\ e &= \text{número de arestas de } \mathbb{S}; \\ n &= \text{número de triângulos.} \end{aligned}$$

Então, o número

$$\chi(\mathbb{S}) = v - e + n$$

é chamado a **característica de Euler** da superfície \mathbb{S} .

Observação 1.5.2. *Pode-se verificar que a característica de Euler depende apenas de \mathbb{S} e não da triangulação escolhida e que é um invariante topológico.*

Exemplo 1.5.3. *A figura a seguir apresenta uma triangulação para cada uma das superfícies: esfera (a); plano projetivo (b) e toro (c) e a partir delas podemos obter as características de Euler (A ilustração é uma adaptação de figuras encontradas em Massey (1991), [5]).*

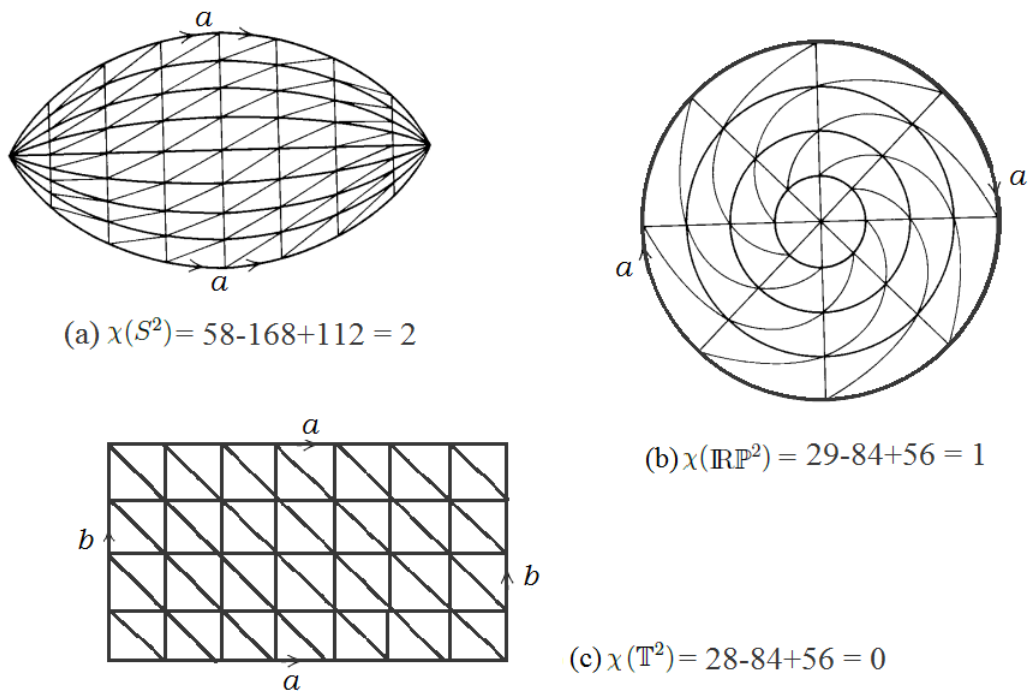


Figura 1.11: Uma triangulação e a característica de Euler de S^2 , \mathbb{RP}^2 e \mathbb{T}^2 .

Proposição 1.5.2. *Sejam \mathbb{S}_1 e \mathbb{S}_2 duas superfícies fechadas. As características de Euler de \mathbb{S}_1 e \mathbb{S}_2 e da soma conexa $\mathbb{S}_1 \# \mathbb{S}_2$ estão relacionadas pela fórmula*

$$\chi(\mathbb{S}_1 \# \mathbb{S}_2) = \chi(\mathbb{S}_1) + \chi(\mathbb{S}_2) - 2.$$

Demonstração: Considere $\{T_1, \dots, T_{n_1}\}$ e $\{T_1, \dots, T_{n_2}\}$ triangulações de \mathbb{S}_1 e \mathbb{S}_2 , respectivamente. Sejam $\chi(\mathbb{S}_1) = v_1 - e_1 + n_1$ e $\chi(\mathbb{S}_2) = v_2 - e_2 + n_2$. Uma vez que,

para a soma conexa das superfícies é necessário remover o interior de um triângulo em cada uma das triangulações e identificar os bordos destes triângulos removidos, temos

$$\begin{aligned}\chi(\mathbb{S}_1 \# \mathbb{S}_2) &= (v_1 + v_2 - 3) - (e_1 + e_2 - 3) + (n_1 + n_2 - 2) \\ &= \chi(\mathbb{S}_1) + \chi(\mathbb{S}_2) - 2\end{aligned}$$

de onde segue a prova. ■

Por meio da proposição anterior e considerando o Exemplo 1.5.3 e o Teorema da Classificação das Superfícies Fechadas (Teorema 1.5.1), obtemos o seguinte:

Superfície	Característica de Euler
Esfera	2
Soma conexa de n toros	$2-2n$
Soma conexa de n planos projetivos	$2-n$
Soma conexa de um plano projetivo e n toros	$1-2n$
Soma conexa de uma garrafa de Klein e n toros	$-2n$

Observação 1.5.3. *Podemos observar que a característica de Euler de uma superfície orientável é sempre par, enquanto que para uma superfície não-orientável pode ser par ou ímpar.*

Teorema 1.5.2. *Sejam \mathbb{S}_1 e \mathbb{S}_2 duas superfícies fechadas. Então, \mathbb{S}_1 e \mathbb{S}_2 são homeomorfas se, e somente se, suas características de Euler são iguais e ambas são orientáveis ou não-orientáveis.*

Demonstração: (\Rightarrow) Segue do fato que a característica de Euler é um invariante topológico (como já observado anteriormente) e que a orientabilidade é preservada por homeomorfismo.

(\Leftarrow) Admita que $\chi(\mathbb{S}_1) = \chi(\mathbb{S}_2)$. Suponha que \mathbb{S}_1 não é homeomorfa a \mathbb{S}_2 . Vamos analisar separadamente quanto as orientações das superfícies.

Considere \mathbb{S}_1 e \mathbb{S}_2 orientáveis. Pela Proposição 1.5.1, \mathbb{S}_1 é homeomorfa à esfera ou à soma conexa de toros e \mathbb{S}_2 é homeomorfa à esfera ou à soma conexa de toros, então:

- (a) se uma delas é homeomorfa à esfera, suponha $\mathbb{S}_1 \simeq S^2$, então, como \mathbb{S}_1 e \mathbb{S}_2 não são homeomorfas, \mathbb{S}_2 é homeomorfa à soma conexa de n -toros, com $n \neq 0$, assim teríamos (considerando o fato que a característica de Euler é um invariante topológico) $2 = \chi(\mathbb{S}_1) = \chi(\mathbb{S}_2) = 2 - 2n$, ou seja, $n = 0$, o que nos dá um absurdo;
- (b) caso contrário, devemos ter ambas homeomorfas à soma conexa de toros, digamos que \mathbb{S}_1 é homeomorfa à soma conexa de n -toros, com $n \neq 0$, e \mathbb{S}_2 é homeomorfa à soma conexa de m -toros, com $m \neq n$ e $m \neq 0$, pois \mathbb{S}_1 e \mathbb{S}_2 não são homeomorfas. Então, $2 - 2n = \chi(\mathbb{S}_1) = \chi(\mathbb{S}_2) = 2 - 2m$, ou seja, $n = m$, o que nos dá um absurdo.

Logo, \mathbb{S}_1 é homeomorfa a \mathbb{S}_2 .

Consideremos, agora, \mathbb{S}_1 e \mathbb{S}_2 não-orientáveis. Pela Proposição 1.5.1, \mathbb{S}_1 é homeomorfa à soma conexa de um plano projetivo ou uma garrafa de Klein e uma superfície fechada orientável e \mathbb{S}_2 é homeomorfa à soma conexa de um plano projetivo ou uma garrafa de Klein e uma superfície fechada orientável. Analisemos os casos:

- (a) se \mathbb{S}_1 é homeomorfa à soma conexa de um plano projetivo com uma superfície fechada orientável, então

$$\chi(\mathbb{S}_1) = \chi(\mathbb{RP}^2 \# S^2) = \chi(\mathbb{RP}^2) + \chi(S^2) - 2 = 1 + 2 - 2 = 1$$

ou

$$\chi(\mathbb{S}_1) = \chi(\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2) = 1 - 2n.$$

Assim, como estamos supondo que \mathbb{S}_1 não é homeomorfa a \mathbb{S}_2 , \mathbb{S}_2 é homeomorfa à soma conexa de um plano projetivo e uma esfera (que pode ocorrer se \mathbb{S}_1 for homeomorfa à soma conexa de um plano projetivo com n -toros, $n \neq 0$), ou à soma conexa de um plano projetivo e m -toros, com $m \neq 0$ e $n \neq m$, ou à soma conexa de uma garrafa de Klein com uma superfície fechada orientável. Então, teremos $\chi(\mathbb{S}_2) = 1$ (que pode ocorrer só quando \mathbb{S}_1 for homeomorfa à soma conexa de um plano projetivo e n -toros, $n \neq 0$), ou $\chi(\mathbb{S}_2) = 1 - 2m$, ou $\chi(\mathbb{S}_2) = \chi(\mathbb{K}^2 \# S^2) = \chi(\mathbb{K}^2) + \chi(S^2) - 2 = 0$ ou $\chi(\mathbb{S}_2) = \chi(\mathbb{K}^2 \# \mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2) = -2m$. Agora,

- (i) se $\chi(\mathbb{S}_2) = 1$, para \mathbb{S}_1 sendo homeomorfa à soma conexa de um plano projetivo e n -toros, $n \neq 0$, então $1 - 2n = \chi(\mathbb{S}_1) = \chi(\mathbb{S}_2) = 1$, isto é, $n = 0$, o que nos dá uma contradição;
- (ii) se $\chi(\mathbb{S}_2) = 1 - 2m$, então teremos $1 = \chi(\mathbb{S}_1) = \chi(\mathbb{S}_2) = 1 - 2m$ ou $1 - 2n = \chi(\mathbb{S}_1) = \chi(\mathbb{S}_2) = 1 - 2m$, ou seja, $m = 0$ ou $n = m$, o que é um absurdo;
- (iii) se $\chi(\mathbb{S}_2) = 0$, então $1 = \chi(\mathbb{S}_1) = \chi(\mathbb{S}_2) = 0$ ou $1 - 2n = \chi(\mathbb{S}_1) = \chi(\mathbb{S}_2) = 0$, isto é, $n = \frac{1}{2}$, o que nos dá uma contradição;
- (iv) se $\chi(\mathbb{S}_2) = -2m$, então obtemos $1 = \chi(\mathbb{S}_1) = \chi(\mathbb{S}_2) = -2m$ ou $1 - 2n = \chi(\mathbb{S}_1) = \chi(\mathbb{S}_2) = -2m$, ou seja, $m = -\frac{1}{2}$ ou $n - m = \frac{1}{2}$, o que é um absurdo.

Logo, \mathbb{S}_1 e \mathbb{S}_2 são homeomorfas;

- (b) se \mathbb{S}_1 é homeomorfa à soma conexa de uma garrafa de Klein com uma superfície fechada orientável, então

$$\chi(\mathbb{S}_1) = \chi(\mathbb{K}^2 \# S^2) = 0 \quad \text{ou} \quad \chi(\mathbb{S}_1) = \chi(\mathbb{K}^2 \# \mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2) = -2n.$$

Assim, como \mathbb{S}_1 e \mathbb{S}_2 não são homeomorfas, \mathbb{S}_2 é homeomorfa à soma conexa de uma garrafa de Klein e uma esfera (que só ocorre se \mathbb{S}_1 for homeomorfa à soma conexa de uma garrafa de Klein com n -toros, $n \neq 0$), ou à soma conexa de uma garrafa de Klein e m -toros, com $m \neq 0$ e $n \neq m$, ou à soma conexa de um plano projetivo com uma superfície fechada orientável. Então, teremos $\chi(\mathbb{S}_2) = 0$ (para \mathbb{S}_1 sendo, necessariamente, homeomorfa à soma conexa de uma garrafa de Klein e n -toros, $n \neq 0$), ou $\chi(\mathbb{S}_2) = -2m$, ou $\chi(\mathbb{S}_2) = \chi(\mathbb{RP}^2 \# S^2) = 1$ ou $\chi(\mathbb{S}_2) = \chi(\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2) = 1 - 2m$. Notemos que

- (i) se $\chi(\mathbb{S}_2) = 0$, para \mathbb{S}_1 sendo homeomorfa à soma conexa de uma garrafa de Klein e n -toros, $n \neq 0$, então $-2n = \chi(\mathbb{S}_1) = \chi(\mathbb{S}_2) = 0$ e, assim, $n = 0$, o que é um absurdo;
- (ii) se $\chi(\mathbb{S}_2) = -2m$, então $0 = \chi(\mathbb{S}_1) = \chi(\mathbb{S}_2) = -2m$ ou $-2n = \chi(\mathbb{S}_1) = \chi(\mathbb{S}_2) = -2m$, ou seja, $m = 0$ ou $n = m$, o que nos dá um absurdo;

(iii) se $\chi(\mathbb{S}_2) = 1$, então $0 = \chi(\mathbb{S}_1) = \chi(\mathbb{S}_2) = 1$ ou $-2n = \chi(\mathbb{S}_1) = \chi(\mathbb{S}_2) = 1$ e, assim, $n = -\frac{1}{2}$, o que também é um absurdo;

(iv) se $\chi(\mathbb{S}_2) = 1 - 2m$, então $0 = \chi(\mathbb{S}_1) = \chi(\mathbb{S}_2) = 1 - 2m$ ou $-2n = \chi(\mathbb{S}_1) = \chi(\mathbb{S}_2) = 1 - 2m$, isto é, $m = \frac{1}{2}$ ou $m - n = \frac{1}{2}$, o que é uma contradição.

Logo, \mathbb{S}_1 é homeomorfa a \mathbb{S}_2 . ■

O resultado seguinte relaciona o número de folhas de um recobrimento com a característica de Euler.

Teorema 1.5.3. *Sejam \mathbb{S}_1 e \mathbb{S}_2 duas superfícies fechadas, $\chi(\mathbb{S}_1)$ e $\chi(\mathbb{S}_2)$ as características de Euler das respectivas superfícies e $k \geq 1$, $k \in \mathbb{Z}$. Então, $(\mathbb{S}_1, p, \mathbb{S}_2)$ é um espaço de recobrimento de k folhas se, e somente se, $\chi(\mathbb{S}_1) = k\chi(\mathbb{S}_2)$ e uma das seguintes condições é satisfeita:*

- a) \mathbb{S}_1 e \mathbb{S}_2 são orientáveis;
- b) \mathbb{S}_1 e \mathbb{S}_2 são não-orientáveis;
- c) \mathbb{S}_1 é orientável, \mathbb{S}_2 é não-orientável e $2 \mid k$.

Demonstração: Vide Zieschang, Vogt e Goldewey (1980, Teorema 3.4.2, p. 79), [9]. ■

Exemplo 1.5.4. *Considere \mathbb{S}_1 sendo o tritoro e \mathbb{S}_2 o bitoro, assim $\chi(\mathbb{S}_1) = -4$ e $\chi(\mathbb{S}_2) = -2$, como $\chi(\mathbb{S}_1) = 2\chi(\mathbb{S}_2)$ e \mathbb{S}_1 e \mathbb{S}_2 são orientáveis, então, pelo teorema anterior, $(\mathbb{S}_1, p, \mathbb{S}_2)$ é um recobrimento de 2 folhas.*

Teorema 1.5.4. *Seja \mathbb{S} uma superfície fechada. Se a característica de Euler $\chi(\mathbb{S})$ é ímpar, então \mathbb{S} não possui nenhuma involução livre.*

Demonstração: Tome \mathbb{S} uma superfície fechada com característica de Euler ímpar e suponha que exista $T : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$ uma involução livre. Como \mathbb{S} é Hausdorff, pela Proposição 1.3.5, segue que $\left(\mathbb{S}, p, \frac{\mathbb{S}}{T}\right)$ é um recobrimento de duas folhas, onde

$p : \mathbb{S} \rightarrow \frac{\mathbb{S}}{T}$ é a aplicação quociente tal que $p(x) = \bar{x} = \{x, T(x)\}$, para todo $x \in \mathbb{S}$.

Assim, pelo Teorema 1.5.3, temos que $\chi(\mathbb{S}) = 2\chi\left(\frac{\mathbb{S}}{T}\right)$, de modo que $\chi(\mathbb{S})$ é par. Mas, por hipótese, $\chi(\mathbb{S})$ é ímpar, o que nos dá uma contradição. ■

Definição 1.5.6. *Se uma superfície \mathbb{S} é soma conexa de n -toros ou n -planos projetivos, dizemos que \mathbb{S} é de **genus** n . Enquanto que a esfera é dita de genus 0.*

Facilmente verifica-se, para uma superfície fechada \mathbb{S} , a seguinte relação entre o genus g e a característica de Euler de \mathbb{S} :

- (i) $g = \frac{1}{2}(2 - \chi(\mathbb{S}))$, no caso orientável;
- (ii) $g = 2 - \chi(\mathbb{S})$, no caso não-orientável.

Grupo Fundamental das Superfícies Fechadas

Veremos, agora, as apresentações dos grupos fundamentais das superfícies fechadas. Para esta parte seguimos mais diretamente Kosniowski (1980), [3]. A fonte das figuras apresentadas aqui é, também, essa referência (com pequenas adequações).

Vamos usar o Teorema de Seifert-Van Kampen (Teorema 1.4.1) para calcular o grupo fundamental das superfícies fechadas, por dar uma apresentação para cada grupo (por meio de geradores e relações).

Recordemos que, pelo Teorema da Classificação das Superfícies Fechadas (Teorema 1.5.1), se \mathbb{S} é uma superfície fechada, então \mathbb{S} é homeomorfa à esfera, ou à soma conexa de toros ou à soma conexa de planos projetivos.

Teorema 1.5.5. *Seja \mathbb{S} uma superfície fechada.*

(i) *Se \mathbb{S} é homeomorfa à esfera, então $\Pi_1(\mathbb{S}) = \{1\} = \langle \{1\} \mid \emptyset \rangle$.*

(ii) *Se \mathbb{S} é homeomorfa à soma conexa de n -toros, então*

$$\Pi_1(\mathbb{S}) = \langle \{A_1, A_2, \dots, A_{2n}\} \mid \{[A_1, A_2] \dots [A_{2n-1}, A_{2n}] = 1\} \rangle,$$

onde $[A_i, A_{i+1}] = A_i A_{i+1} A_i^{-1} A_{i+1}^{-1}$, para todo i .

(iii) *Se \mathbb{S} é homeomorfa à soma conexa de n -planos projetivos, então*

$$\Pi_1(\mathbb{S}) = \langle \{A_1, A_2, \dots, A_n\} \mid \{A_1^2 A_2^2 \dots A_n^2 = 1\} \rangle.$$

Demonstração:

(i) É imediato.

(ii) Suponhamos, inicialmente, $\mathbb{S} = \mathbb{T}^2$. Vamos representar o toro \mathbb{T}^2 , como o espaço obtido pela identificação das arestas opostas, a_1 e a_2 , da região quadrada (que referimos, simplesmente, como quadrado) abaixo:

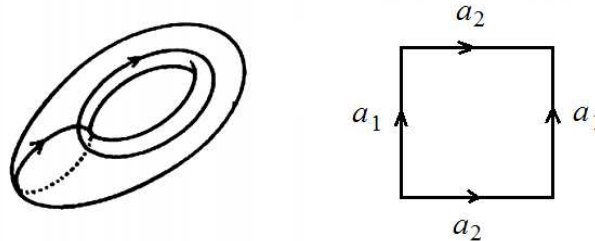


Figura 1.12: Representação do toro bidimensional.

Seja y o centro do quadrado que representa o toro. Considere $U_1 = \mathbb{T}^2 - \{y\}$ e $U_2 = \mathbb{T}^2 - (a_1 \cup a_2)$ (ou seja, U_2 é o interior do quadrado). Note que U_1 , U_2 e $U_1 \cap U_2$ são abertos e conexos por caminhos, assim, podemos usar o Teorema de Seifert-Van Kampen (Teorema 1.4.1), uma vez que $\mathbb{T}^2 = U_1 \cup U_2$.

Tome x_0 e x_1 os pontos indicados na figura abaixo. Considere C um círculo de centro y passando por x_0 e d o segmento ligando x_0 a x_1 .

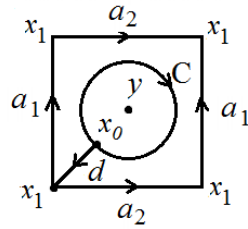


Figura 1.13: Determinação do grupo fundamental de um toro.

Observe que as arestas do quadrado depois de identificadas representam uma Figura 8 (Exemplo 1.4.5) no \mathbb{T}^2 .

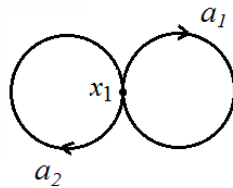


Figura 1.14: Figura 8 em \mathbb{T}^2 .

Indiquemos por $B = a_1 * a_2$ (o conjunto que representa a Figura 8 no toro). Temos que B é um retrato por deformação de U_1 , pois existem as aplicações contínuas

$$r : U_1 \rightarrow B$$

$$x \mapsto \begin{cases} x, & \text{se } x \in B, \\ p(x), & \text{se } x \in U_1 - B, \end{cases}$$

onde $p : U_1 - B \rightarrow B$ é a projeção radial em torno de y , e

$$F : U_1 \times I \rightarrow U_1$$

$$(x, t) \mapsto \begin{cases} x, & \text{se } x \in B, \\ (1-t)x + tp(x), & \text{se } x \in U_1 - B, \end{cases}$$

com $F(x, 0) = x$, $F(x, 1) = r(x)$, para todo $x \in U_1$, e $F(x, t) = x$, se $x \in B$. Portanto, pelo Teorema 1.2.5, a aplicação inclusão $i : B \rightarrow U_1$ induz um isomorfismo $i_{\#} : \Pi_1(B, x_1) \rightarrow \Pi_1(U_1, x_1)$. Logo, se α_1 e α_2 são caminhos fechados em U_1 com ponto base x_1 , cujos traços representam (uma vez) a_1 e a_2 , respectivamente, nas direções indicadas no quadrado, então $\Pi_1(U_1, x_1)$ é um grupo livre com geradores $[\alpha_1]$ e $[\alpha_2]$. Seja δ um caminho em U_1 que liga x_0 a x_1 e que corresponde ao segmento d (isto é, $\delta : I \rightarrow d$ é um homeomorfismo). Então, $\Pi_1(U_1, x_0)$ é um grupo livre com geradores $[\delta * \alpha_1 * \delta^{-1}]$ e $[\delta * \alpha_2 * \delta^{-1}]$, que denotamos, abreviadamente, por A_1 e A_2 , respectivamente.

Note que U_2 é contrátil, pois $\{x_0\}$ é um retrato por deformação de U_2 , uma vez que para a aplicação contínua $r : U_2 \rightarrow \{x_0\}$ temos $r(x) = x_0$, para todo $x \in U_2$, e como U_2 é conexo por caminhos, existe o caminho $\alpha_x : I \rightarrow U_2$ tal que $\alpha_x(0) = x$ e $\alpha_x(1) = x_0$, para todo $x \in U_2$. Logo, existe a aplicação contínua $F : U_2 \times I \rightarrow U_2$ dada por $F(x, t) = \alpha_x(t)$, com $x \in U_2 - \{x_0\}$, e $F(x_0, t) = x_0$, para todo $t \in I$. Assim, $F(x, 0) = \alpha_x(0) = x$, $F(x, 1) = \alpha_x(1) = x_0 = r(x)$, para todo $x \in U_2$, e

$F(x_0, t) = x_0$, para todo $t \in I$. Portanto, pelo Corolário 1.2.1, U_2 é simplesmente conexo e, então, $\Pi_1(U_2) = \{1\}$.

Além disso, o círculo C é um retrato por deformação de $U_1 \cap U_2$. Assim, pelo Teorema 1.2.5, $i_{\#} : \Pi_1(C, x_0) \rightarrow \Pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)$ é um isomorfismo, onde $i : C \rightarrow U_1 \cap U_2$ é a aplicação inclusão. Portanto, se γ é um caminho fechado em $U_1 \cap U_2$ com ponto base x_0 , que percorre (uma vez) o círculo C na direção indicada na figura que representa o toro, então $\Pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)$ é um grupo livre gerado por $[\gamma]$.

Pelo Teorema de Seifert-Van Kampen (Teorema 1.4.1), $\Pi_1(\mathbb{T}^2, x_0)$ é gerado por $\{A_1, A_2\}$, o qual satisfaz a relação $'(\varphi_1)_{\#}([\gamma])' = '(\varphi_2)_{\#}([\gamma])'$.

Mas, em U_1 , temos

$$\begin{aligned} [\varphi_1 \circ \gamma] &= [\delta * \alpha_1 * \alpha_2 * \alpha_1^{-1} * \alpha_2^{-1} * \delta^{-1}] \\ &= [\delta * \alpha_1 * \delta^{-1} * \delta * \alpha_2 * \delta^{-1} * \delta * \alpha_1^{-1} * \delta^{-1} * \delta * \alpha_2^{-1} * \delta^{-1}] \\ &= [\delta * \alpha_1 * \delta^{-1}][\delta * \alpha_2 * \delta^{-1}][\delta * \alpha_1^{-1} * \delta^{-1}][\delta * \alpha_2^{-1} * \delta^{-1}], \end{aligned}$$

de modo que

$$'(\varphi_1)_{\#}([\gamma])' = A_1 A_2 A_1^{-1} A_2^{-1} = [A_1, A_2].$$

Por outro lado, em U_2 ,

$$'(\varphi_2)_{\#}([\gamma])' = 1.$$

Logo, $[A_1, A_2] = 1$ e, portanto,

$$\Pi_1(\mathbb{T}^2, x_0) = \langle \{A_1, A_2\} \mid \{[A_1, A_2] = 1\} \rangle.$$

Note que $\Pi_1(\mathbb{T}^2, x_0) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Suponhamos, agora, que \mathbb{S} seja a soma conexa de n -toros, $n \geq 2$. Este caso é uma generalização do anterior. Considere \mathbb{S} representada pela região poligonal de um polígono de $4n$ -lados, com os lados identificados aos pares, como na figura abaixo (item (1)). Tome $U_1 = \mathbb{S} - \{y\}$ e $U_2 = \mathbb{S} - (a_1 \cup \dots \cup a_{2n})$, como representado pela região poligonal na figura a seguir (item (2)), com y o centro da região poligonal. Sejam x_0 e x_1 os pontos apresentados na figura (item (2)), d o segmento ligando x_0 a x_1 e C o círculo com centro y passando por x_0 .

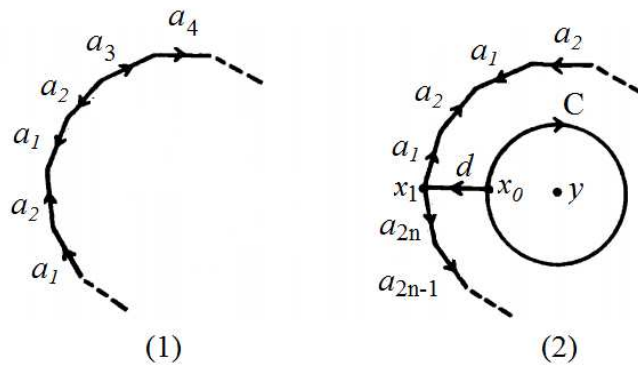


Figura 1.15: Determinação do grupo fundamental da soma conexa de n -toros.

Análogo ao caso anterior, obtemos que $\Pi_1(U_1, x_1)$ é gerado por $[\alpha_1], [\alpha_2], \dots, [\alpha_{2n}]$, onde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n}$ são caminhos fechados em U_1 com ponto base x_1 , cujas imagens são representadas pelos círculos a_1, a_2, \dots, a_{2n} , respectivamente, nas direções indicadas no polígono que representa \mathbb{S} . Seja δ um caminho em U_1 que liga x_0 a x_1 e que corresponde ao segmento d . Então, $\Pi_1(U_1, x_0)$ é um grupo livre com geradores $[\delta * \alpha_1 * \delta^{-1}], [\delta * \alpha_2 * \delta^{-1}], \dots, [\delta * \alpha_{2n} * \delta^{-1}]$, que denotamos por A_1, A_2, \dots, A_{2n} , respectivamente. Além disso, de acordo com o caso anterior, $\Pi_1(U_2) = \{1\}$, uma vez que U_2 é contrátil, e $\Pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)$ é um grupo livre gerado por $[\gamma]$, onde γ é um caminho fechado em $U_1 \cap U_2$ com ponto base x_0 , que corresponde ao círculo C na figura.

Pelo Teorema de Seifert-Van Kampen (Teorema 1.4.1), $\Pi_1(\mathbb{S}, x_0)$ é gerado por $\{A_1, A_2, \dots, A_{2n}\}$, o qual satisfaz a relação $'(\varphi_1)_\#([\gamma])' = '(\varphi_2)_\#([\gamma])'$.

Mas, em U_1 , temos

$$\begin{aligned} [\varphi_1 \circ \gamma] &= [\delta * \alpha_1 * \alpha_2 * \alpha_1^{-1} \alpha_2^{-1} * \dots * \alpha_{2n-1} * \alpha_{2n} * \alpha_{2n-1}^{-1} * \alpha_{2n}^{-1} * \delta^{-1}] \\ &= [\delta * \alpha_1 * \delta^{-1} * \delta * \alpha_2 * \delta^{-1} * \delta * \alpha_1^{-1} * \delta^{-1} * \delta * \alpha_2^{-1} * \delta^{-1} * \delta * \dots * \delta^{-1} \\ &\quad * \delta * \alpha_{2n-1} * \delta^{-1} * \delta * \alpha_{2n} * \delta^{-1} * \delta * \alpha_{2n-1}^{-1} * \delta^{-1} * \delta * \alpha_{2n}^{-1} * \delta^{-1}] \\ &= [\delta * \alpha_1 * \delta^{-1}] [\delta * \alpha_2 * \delta^{-1}] [\delta * \alpha_1^{-1} * \delta^{-1}] [\delta * \alpha_2^{-1} * \delta^{-1}] \dots [\delta * \alpha_{2n-1} * \delta^{-1}] \\ &\quad [\delta * \alpha_{2n} * \delta^{-1}] [\delta * \alpha_{2n-1}^{-1} * \delta^{-1}] [\delta * \alpha_{2n}^{-1} * \delta^{-1}] \end{aligned}$$

e, assim,

$$'(\varphi_1)_\#([\gamma])' = A_1 A_2 A_1^{-1} A_2^{-1} \dots A_{2n-1} A_{2n} A_{2n-1}^{-1} A_{2n}^{-1} = [A_1, A_2] \dots [A_{2n-1}, A_{2n}].$$

Agora, em U_2 ,

$$'(\varphi_2)_\#([\gamma])' = 1.$$

Logo, a relação é equivalente a $[A_1, A_2] \dots [A_{2n-1}, A_{2n}] = 1$ e, portanto,

$$\Pi_1(\mathbb{S}, x_0) = \langle \{A_1, \dots, A_{2n}\} \mid \{[A_1, A_2] \dots [A_{2n-1}, A_{2n}] = 1\} \rangle.$$

(iii) Suponhamos, inicialmente, que $\mathbb{S} = \mathbb{R}\mathbb{P}^2$ o plano projetivo. Vamos representar o plano projetivo $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$, pelo polígono de dois lados (e sua região interior) etiquetado por aa , como apresentado na figura abaixo (item (1)).

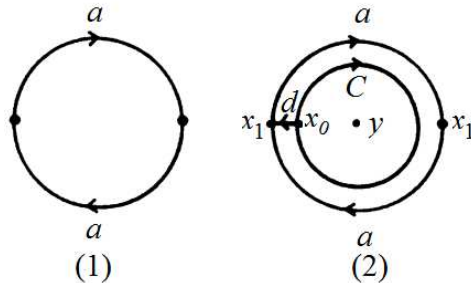


Figura 1.16: Determinação do grupo fundamental de um plano projetivo.

Sejam y o centro do polígono que representa o $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ e x_0 e x_1 pontos como apresentados na figura acima (item (2)). Considere C o círculo de centro y que passa por x_0 e d o segmento que liga x_0 a x_1 .

Tome $U_1 = \mathbb{R}\mathbb{P}^2 - \{y\}$ e $U_2 = \mathbb{R}\mathbb{P}^2 - a$. Como U_1 , U_2 e $U_1 \cap U_2$ são abertos e conexos por caminhos e $\mathbb{R}\mathbb{P}^2 = U_1 \cup U_2$, podemos aplicar o Teorema de Seifert-Van Kampen (Teorema 1.4.1).

Observe que a identificação das arestas opostas no polígono de dois lados que representa o plano projetivo, resulta numa curva no $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ que vamos indicar, também, por a . A curva a representa um círculo em $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ e este é um retrato por deformação de U_1 . Logo, se α é um caminho fechado em U_1 com ponto base x_1 , que corresponde a curva a , então $\Pi_1(U_1, x_1)$ é um grupo livre gerado por $[\alpha]$. Seja δ o caminho que liga x_0 a x_1 em U_1 , que corresponde ao segmento d , então $\Pi_1(U_1, x_0)$ é um grupo livre com gerador $[\delta * \alpha * \delta^{-1}]$, o qual denotamos por A .

Note que, análogo ao que foi feito com o toro, U_2 é contrátil (uma vez que $\{x_0\}$ é um retrato por deformação de U_2) e o círculo C é um retrato por deformação de $U_1 \cap U_2$. Assim, $\Pi_1(U_2) = \{1\}$ e $\Pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)$ é um grupo livre gerado por $[\gamma]$, onde γ é um caminho fechado em $U_1 \cap U_2$ com ponto base x_0 , que indica o círculo C na figura que representa o $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$, isto é, que percorre (uma vez) o círculo C de acordo com a direção indicada.

Pelo Teorema de Seifert-Van Kampen (Teorema 1.4.1), o grupo $\Pi_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^2, x_0)$ é gerado por $\{A\}$ e satisfaz a relação $\langle (\varphi_1)_\#([\gamma]) \rangle = \langle (\varphi_2)_\#([\gamma]) \rangle$.

Mas, em U_1 , temos

$$[\varphi_1 \circ \gamma] = [\delta * \alpha * \alpha * \delta^{-1}] = [\delta * \alpha * \delta^{-1} * \delta * \alpha * \delta^{-1}] = [\delta * \alpha * \delta^{-1}][\delta * \alpha * \delta^{-1}]$$

e, assim,

$$\langle (\varphi_1)_\#([\gamma]) \rangle = AA = A^2.$$

Enquanto em U_2 ,

$$\langle (\varphi_2)_\#([\gamma]) \rangle = 1.$$

Logo, de $\langle (\varphi_1)_\#([\gamma]) \rangle = \langle (\varphi_2)_\#([\gamma]) \rangle$, obtém-se $A^2 = 1$. Portanto,

$$\Pi_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^2, x_0) = \langle \{A\} \mid \{A^2 = 1\} \rangle.$$

Suponhamos, agora, \mathbb{S} sendo a soma conexa de n -planos projetivos. Este caso é uma generalização do anterior. Considere \mathbb{S} representada pela região poligonal com os lados identificados como na figura a seguir (item (1)) e y o centro da região poligonal. Tome $U_1 = \mathbb{S} - \{y\}$ e $U_2 = \mathbb{S} - (a_1 \cup \dots \cup a_n)$. Sejam x_0 e x_1 os pontos apresentados na figura abaixo (item (2)), d o segmento ligando x_0 a x_1 e C o círculo com centro y passando por x_0 .

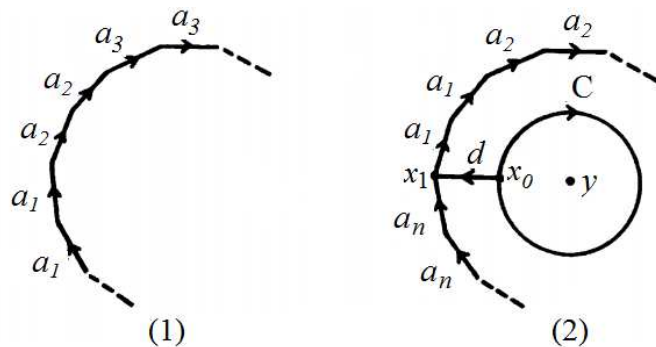


Figura 1.17: Determinação do grupo fundamental da soma conexa de n -planos projetivos.

Análogo ao caso anterior, obtemos que $\Pi_1(U_1, x_1)$ é um grupo livre gerado por $[\alpha_1], [\alpha_2], \dots, [\alpha_n]$, onde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ são caminhos fechados em U_1 com ponto base x_1 , representados por a_1, a_2, \dots, a_n , respectivamente, nas direções indicadas no polígono que estabelece \mathbb{S} . Seja δ um caminho em U_1 que liga x_0 a x_1 e que corresponde ao segmento d . Então, $\Pi_1(U_1, x_0)$ é um grupo livre nos geradores $[\delta * \alpha_1 * \delta^{-1}], [\delta * \alpha_2 * \delta^{-1}], \dots, [\delta * \alpha_n * \delta^{-1}]$, que denotamos por A_1, A_2, \dots, A_n , respectivamente. Além disso, análogo ao caso anterior, $\Pi_1(U_2) = \{1\}$, uma vez que U_2 é contrátil, e $\Pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)$ é um grupo livre gerado por $[\gamma]$, onde γ é um caminho fechado em $U_1 \cap U_2$ com ponto base x_0 , que indica o círculo C na figura que representa \mathbb{S} .

Pelo Teorema de Seifert-Van Kampen (Teorema 1.4.1), $\Pi_1(\mathbb{S}, x_0)$ é gerado por $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ e satisfaz a relação $'(\varphi_1)_\#([\gamma])' = '(\varphi_2)_\#([\gamma])'$.

Em U_1 ,

$$\begin{aligned} [\varphi_1 \circ \gamma] &= [\delta * \alpha_1 * \alpha_1 * \dots * \alpha_n * \alpha_n * \delta^{-1}] \\ &= [\delta * \alpha_1 * \delta^{-1} * \delta * \alpha_1 * \delta^{-1} * \delta * \dots * \delta^{-1} * \delta * \alpha_n * \delta^{-1} * \delta * \alpha_n * \delta^{-1} \\ &\quad * \delta * \alpha_n * \delta^{-1}] \\ &= [\delta * \alpha_1 * \delta^{-1}][\delta * \alpha_1 * \delta^{-1}] \dots [\delta * \alpha_n * \delta^{-1}][\delta * \alpha_n * \delta^{-1}] \end{aligned}$$

e, assim,

$$'(\varphi_1)_\#([\gamma])' = A_1 A_1 \dots A_n A_n = A_1^2 \dots A_n^2.$$

Em U_2 ,

$$'(\varphi_2)_\#([\gamma])' = 1.$$

Portanto,

$$\Pi_1(\mathbb{S}, x_0) = \langle \{A_1, \dots, A_n\} \mid \{A_1^2 \dots A_n^2 = 1\} \rangle,$$

uma vez que, de $'(\varphi_1)_\#([\gamma])' = '(\varphi_2)_\#([\gamma])'$, obtemos a relação, $A_1^2 \dots A_n^2 = 1$. \blacksquare

Outra forma de apresentação do Grupo Fundamental das Superfícies Fechadas não-orientáveis

Vamos exibir uma outra forma de apresentação do grupo fundamental das superfícies fechadas não-orientáveis, seguindo Massey (1991), [5], inclusive como fonte das figuras. As técnicas usadas são similares às da subseção anterior e o Teorema de Seifert-Van Kampen (Teorema 1.4.1) continua sendo de grande importância.

Como $\mathbb{K}^2 \simeq \mathbb{R}\mathbb{P}^2 \# \mathbb{R}\mathbb{P}^2$ (Lema 1.5.2), segue dos cálculos que fizemos anteriormente que

$$\Pi_1(\mathbb{K}^2) = \langle \{A_1, A_2\} \mid A_1^2 A_2^2 = 1 \rangle.$$

Mas temos, também, a seguinte apresentação para $\Pi_1(\mathbb{K}^2)$,

$$\Pi_1(\mathbb{K}^2) = \langle \{A, B\} \mid \{ABAB^{-1} = 1\} \rangle.$$

De fato, vamos representar a garrafa de Klein \mathbb{K}^2 , como o espaço obtido pela identificação das arestas a_1 e a_2 do quadrado dado na Figura 1.18 (item (1)).

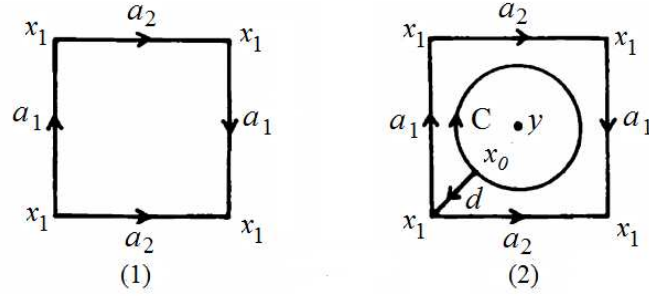


Figura 1.18: Determinação do grupo fundamental da garrafa de Klein.

Tome x_0 e x_1 os pontos indicados na figura acima (item (2)). Sejam y o centro do quadrado que representa a garrafa de Klein, C um círculo de centro y passando por x_0 e d o segmento ligando x_0 a x_1 .

Considere $U_1 = \mathbb{K}^2 - \{y\}$ e $U_2 = \mathbb{K}^2 - (a_1 \cup a_2)$ (ou seja, U_2 é o interior do quadrado). Note que U_1 , U_2 e $U_1 \cap U_2$ são abertos e conexos por caminhos e $\mathbb{K}^2 = U_1 \cup U_2$, assim, podemos usar o Teorema de Seifert-Van Kampen (Teorema 1.4.1).

Observe que as arestas do quadrado depois de identificadas representam uma Figura 8 em \mathbb{K}^2 .

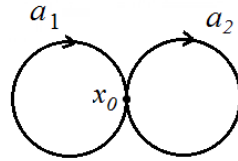


Figura 1.19: Figura 8 em \mathbb{K}^2 .

Assim, análogo ao caso do toro, $\Pi_1(U_1, x_1)$ é um grupo livre com geradores $[\alpha_1]$ e $[\alpha_2]$, com α_1 e α_2 caminhos em U_1 que correspondem a a_1 e a_2 , respectivamente. Logo, considerando o caminho δ ligando x_0 a x_1 que representa d no quadrado, temos que $\Pi_1(U_1, x_0)$ é um grupo livre de geradores $[\delta * \alpha_1 * \delta^{-1}]$ e $[\delta * \alpha_2 * \delta^{-1}]$, que denotamos por A e B , respectivamente.

Mais ainda, análogo ao toro, $\Pi_1(U_2) = \{1\}$ e $\Pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)$ é um grupo livre gerado por $[\gamma]$, onde γ é um caminho que representa o círculo C (considerando a direção indicada), uma vez que U_2 é simplesmente conexo e o círculo C é um retrato por deformação de $U_1 \cap U_2$.

Pelo Teorema de Seifert-Van Kampen (Teorema 1.4.1), $\Pi_1(\mathbb{K}^2, x_0)$ é gerado por $\{A, B\}$ e satisfaz a relação $(\varphi_1)_\#([\gamma])' = (\varphi_2)_\#([\gamma])'$.

Mas, em U_1 ,

$$\begin{aligned} [\varphi_1 \circ \gamma] &= [\delta * \alpha_1 * \alpha_2 * \alpha_1 * \alpha_2^{-1} * \delta^{-1}] \\ &= [\delta * \alpha_1 * \delta^{-1} * \delta * \alpha_2 * \delta^{-1} * \delta * \alpha_1 * \delta^{-1} * \delta * \alpha_2^{-1} * \delta^{-1}] \\ &= [\delta * \alpha_1 * \delta^{-1}][\delta * \alpha_2 * \delta^{-1}][\delta * \alpha_1 * \delta^{-1}][\delta * \alpha_2^{-1} * \delta^{-1}] \end{aligned}$$

e, assim, $(\varphi_1)_\#([\gamma])' = ABAB^{-1}$.

Em U_2 , $(\varphi_2)_\#([\gamma])' = 1$.

Logo, $ABAB^{-1} = 1$. Portanto,

$$\Pi_1(\mathbb{K}^2, x_0) = \langle \{A, B\} \mid \{ABAB^{-1} = 1\} \rangle.$$

Usando que $\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \simeq \mathbb{K}^2$ e $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{R}P^2 \simeq \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$ (Lema 1.5.2), podemos concluir que se uma superfície fechada \mathbb{S} é a soma conexa de n -planos projetivos, então,

- quando n for ímpar, \mathbb{S} é homeomorfa à soma conexa de um plano projetivo com $\binom{n-1}{2}$ -toros;
- quando n for par, \mathbb{S} é homeomorfa à soma conexa de uma garrafa de Klein com $\binom{n-2}{2}$ -toros.

Com essas considerações, o resultado seguinte nós dá uma outra apresentação para o grupo fundamental das superfícies fechadas não-orientáveis:

Proposição 1.5.3. *Seja \mathbb{S} uma superfície fechada não-orientável de genus n (ou seja, \mathbb{S} é a soma conexa de n -planos projetivos).*

- (a) *Se n for ímpar, então \mathbb{S} é homeomorfa à soma conexa de um plano projetivo e uma superfície fechada orientável de genus $m = \frac{n-1}{2}$, e assim,*

$$\Pi_1(\mathbb{S}) = \langle \{A, A_1, A_2, \dots, A_{2m}\} \mid \{A^2[A_1, A_2] \dots [A_{2m-1}, A_{2m}] = 1\} \rangle,$$

onde $[A_i, A_{i+1}] = A_i A_{i+1} A_i^{-1} A_{i+1}^{-1}$, para todo $i \in \{1, \dots, 2m-1\}$.

- (b) *Se n for par, \mathbb{S} é homeomorfa à soma conexa de uma garrafa de Klein e uma superfície fechada orientável de genus $m = \frac{n-2}{2}$, e assim,*

$$\Pi_1(\mathbb{S}) = \langle \{A, B, A_1, A_2, \dots, A_{2m}\} \mid \{ABAB^{-1}[A_1, A_2] \dots [A_{2m-1}, A_{2m}] = 1\} \rangle,$$

onde $[A_i, A_{i+1}] = A_i A_{i+1} A_i^{-1} A_{i+1}^{-1}$, para todo $i \in \{1, \dots, 2m-1\}$.

Demonstração: Por \mathbb{S} ser a soma conexa de um plano projetivo (ou uma garrafa de Klein) com a soma conexa de m -toros, podemos considerar \mathbb{S} a região poligonal de um polígono de $2n$ -lados, com os lados rotulados e identificados como na Figura 1.20, item (1) (ou item (2)), em que $2m+1 = n$, ou seja, $2n = 4m+1$ em (1) (e $2n = 4m+4$ em (2)).

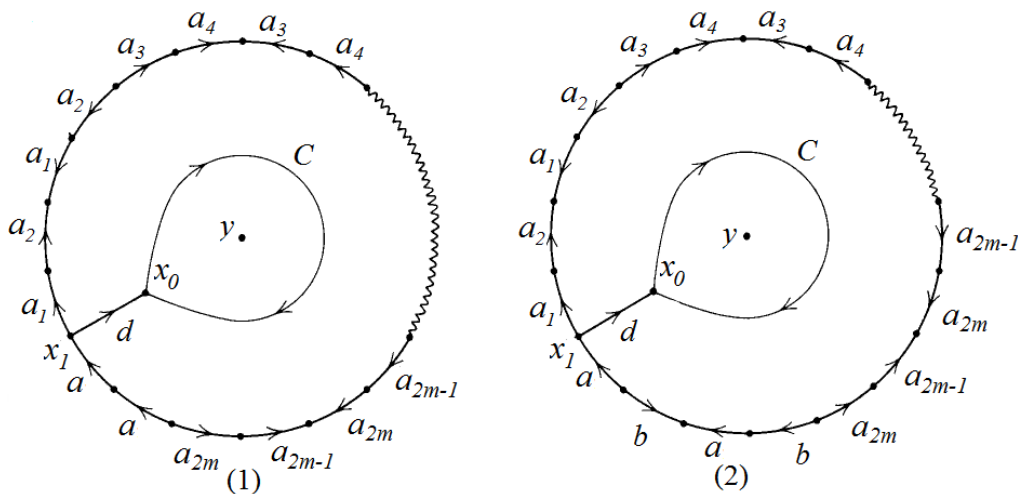


Figura 1.20: Determinação do grupo fundamental da soma conexa de $\mathbb{R}P^2$ (ou \mathbb{K}^2) com a soma conexa de m -toros.

Agora, raciocinando de modo análogo ao que foi feito anteriormente (na prova do Teorema 1.5.5), obtêm-se os resultados afirmados em (a) e (b). ■

Observação 1.5.4. Em Kosniowski (1980, Teo.26.1, p.202), [3], é dada uma prova do cálculo de $\Pi_1(\mathbb{S}, x_0)$, por considerar \mathbb{S} na forma mais geral

$$\mathbb{S} = S^2 \# n\mathbb{T}^2 \# n\mathbb{R}\mathbb{P}^2.$$

1.6 Introdução à Homologia Singular

A principal referência para os conceitos e os resultados de Homologia Singular apresentados nesta seção é Massey (1991), [5].

Considere I^0 o espaço constituído por um único ponto e $I^n = I \times \dots \times I$ (n fatores, $n > 0$) n -cubos unitários, onde $I = [0, 1]$.

Definição 1.6.1. Um n -cubo singular em um espaço topológico X , onde $n \geq 0$, é uma função contínua $T : I^n \rightarrow X$.

Observação 1.6.1. Os 0-cubos singulares podem ser identificados com pontos de X e os 1-cubos singulares com caminhos em X .

Denotemos por $Q_n(X)$ o grupo abeliano livre gerado pelo conjunto de todos os n -cubos singulares em X . Um elemento qualquer de $Q_n(X)$ tem uma expressão única como uma combinação linear finita com coeficientes inteiros de n -cubos em X , ou seja, se $\varphi \in Q_n(X)$, então $\varphi = n_1 T_1 + \dots + n_r T_r$, com $n_k \in \mathbb{Z}$ e T_k sendo n -cubos singulares, $k = 1, \dots, r$.

Definição 1.6.2. Um n -cubo singular $T : I^n \rightarrow X$ é **degenerado** se existe um inteiro k , $1 \leq k \leq n$, tal que $T(x_1, x_2, \dots, x_n)$ não depende de x_k .

Observação 1.6.2. Um 1-cubo singular $T : I \rightarrow X$ é degenerado se, e somente se, T é uma função constante. Os 0-cubos singulares nunca são degenerados.

Definição 1.6.3. Denotemos por $D_n(X)$ o subgrupo de $Q_n(X)$ gerado pelos n -cubos singulares degenerados e por $C_n(X)$ o grupo quociente $\frac{Q_n(X)}{D_n(X)}$. Este último é chamado o **grupo das n -cadeias cúbicas singulares de X** , ou apenas, o **grupo das n -cadeias singulares de X** .

Observação 1.6.3. (i) Se $X = \emptyset$, então $Q_n(X)$, $D_n(X)$ e $C_n(X)$ são grupos triviais, para todo $n \geq 0$.

(ii) Se X é um espaço constituído por um único ponto, então existe um único n -cubo singular em X , para todo $n \geq 0$. Este n -cubo singular é degenerado para $n \geq 1$. Assim, $C_n(X) = \{0\}$, para $n > 0$, e $C_0(X)$ é um grupo cíclico infinito.

(iii) Para todo espaço topológico X , $C_0(X) = \frac{Q_0(X)}{D_0(X)} = \frac{Q_0(X)}{\{0\}} \equiv Q_0(X)$.

(iv) Notamos que para qualquer espaço X , $C_n(X)$ é um grupo abeliano livre sobre o conjunto de todos os n -cubos não degenerados de X (ou mais precisamente, suas classes laterais módulo $D_n(X)$). Por um abuso, denotamos, muitas vezes, um elemento $u + D_n(X) \in C_n(X)$, com $u \in Q_n(X)$, simplesmente por u .

Seja $T : I^n \rightarrow X$ um n -cubo singular em X . Para $i = 1, 2, \dots, n$, defina os $(n-1)$ -cubos singulares

$$A_i T, B_i T : I^{n-1} \rightarrow X$$

dados por

$$A_i T(x_1, \dots, x_{n-1}) = T(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{n-1})$$

e

$$B_i T(x_1, \dots, x_{n-1}) = T(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_{n-1}).$$

$A_i T$ é chamado a **i -face da frente** e $B_i T$ é chamado de **i -face de trás** de T .

Estes operadores satisfazem as seguintes identidades, onde $T : I^n \rightarrow X$ é um n -cubo singular, com $n > 1$ e $1 \leq i < j \leq n$:

$$\begin{aligned} A_i A_j T &= A_{j-1} A_i T \\ B_i B_j T &= B_{j-1} B_i T \\ A_i B_j T &= B_{j-1} A_i T \\ B_i A_j T &= A_{j-1} B_i T \end{aligned}$$

uma vez que

$$\begin{aligned} A_i A_j T(x_1, \dots, x_{n-2}) &= A_j T(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{n-2}) \\ &\stackrel{i < j}{=} T(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{j-2}, 0, x_{j-1}, \dots, x_{n-2}) \\ &= A_i T(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_{j-2}, 0, x_{j-1}, \dots, x_{n-2}) \\ &= A_{j-1} A_i T(x_1, \dots, x_{n-2}) \\ \\ A_i B_j T(x_1, \dots, x_{n-2}) &= B_j T(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{n-2}) \\ &\stackrel{i < j}{=} T(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{j-2}, 1, x_{j-1}, \dots, x_{n-2}) \\ &= A_i T(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_{j-2}, 1, x_{j-1}, \dots, x_{n-2}) \\ &= B_{j-1} A_i T(x_1, \dots, x_{n-2}) \end{aligned}$$

os demais casos são análogos.

Definição 1.6.4. Vamos definir um homomorfismo $\partial_n : Q_n(X) \rightarrow Q_{n-1}(X)$, com $n \geq 1$, por definir nos elementos básicos (os n -cubos singulares). Mais precisamente, dado $T : I^n \rightarrow X$ um n -cubo singular qualquer, onde $n > 0$,

$$\partial_n(T) = \sum_{i=1}^n (-1)^i (A_i T - B_i T).$$

Tal homomorfismo é denominado **operador bordo**.

Pode-se verificar as seguintes propriedades dos operadores bordos:

- (i) $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$, $n > 1$;
- (ii) $\partial_n(D_n(X)) \subseteq D_{n-1}(X)$, $n > 0$.

Definição 1.6.5. Considere o homomorfismo $\partial_n : Q_n(X) \rightarrow Q_{n-1}(X)$, com $n > 0$. Como consequência de (ii), ∂_n induz um homomorfismo $C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$, que vamos denotar, também, por ∂_n . Note que $\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ é tal que $\partial_n(T + D_n(X)) = \partial_n(T) + D_{n-1}(X)$.

Chamamos o núcleo de ∂_n de **grupo dos n -ciclos singulares de X** e o denotamos por $Z_n(X)$, assim

$$Z_n(X) = \{u \in C_n(X); \partial_n(u) = 0\} \quad (n > 0).$$

E chamamos a imagem de ∂_{n+1} de **grupo dos n -bordos singulares de X** , que será denotado por $B_n(X)$, ou seja,

$$B_n(X) = \partial_{n+1}(C_{n+1}(X)).$$

Ainda, como $\partial_{n+1} \circ \partial_n = 0$, $B_n(X) \subset Z_n(X)$ e podemos considerar o grupo quociente

$$H_n(X) = \frac{Z_n(X)}{B_n(X)},$$

tal grupo é chamado o **n -ésimo grupo de homologia singular de X** (com coeficientes em \mathbb{Z}) ou **\mathbb{Z} -grupo de homologia singular n -dimensional de X** .

Observação 1.6.4. Considerando $u' + D_n(X) \in C_n(X) = \frac{Q_n(X)}{D_n(X)}$, vemos que

$$u' + D_n(X) \in Z_n(X) \Leftrightarrow \partial_n(u') \in D_{n-1}(X),$$

pois $\partial_n(u' + D_n(X)) = 0$ se, e somente se, $\partial_n(u') + D_{n-1}(X) = 0$ se, e somente se, $\partial_n(u') \in D_{n-1}(X)$.

Por outro lado, dado $v + D_n(X) \in C_n(X) = \frac{Q_n(X)}{D_n(X)}$, $v + D_n(X) \in B_n(X) = \partial_{n+1}(C_{n+1}(X))$ se, e somente se, existe $u + D_{n+1}(X) \in C_{n+1}(X)$ tal que

$$v + D_n(X) = \partial_{n+1}(u + D_{n+1}(X)) = \partial_{n+1}(u) + D_n(X)$$

ou seja, se, e somente se, $v - \partial_{n+1}(u) \in D_n(X)$, para algum $u \in Q_{n+1}(X)$.

Um elemento $\rho \in H_n(X) = \frac{Z_n(X)}{B_n(X)}$ é da forma $\rho = (u' + D_n(X)) + B_n(X)$, com $u' + D_n(X) \in Z_n(X)$, ou equivalentemente, $\partial_n(u') \in D_{n-1}(X)$. Novamente, por um abuso de notação, vamos denotar um elemento desse tipo simplesmente por $u' + B_n(X)$. Assim, se usarmos essa notação mais simplificada,

$$\rho = u' + B_n(X) \in H_n(X) \text{ se } \partial_n(u') \in D_{n-1}(X).$$

Proposição 1.6.1. Considere X_λ , $\lambda \in \Gamma$, o conjunto de componentes conexas do espaço topológico X . Então, $H_n(X)$ é naturalmente isomorfo a soma direta dos grupos $H_n(X_\lambda)$, para todo $\lambda \in \Gamma$.

Demonstração: Note que cada n -cubo singular encontra-se inteiramente em uma componente conexa. Assim, $Q_n(X)$ pode ser escrito com uma soma direta

$$Q_n(X) = \sum_{\lambda \in \Gamma} Q_n(X_\lambda).$$

Analogamente,

$$D_n(X) = \sum_{\lambda \in \Gamma} D_n(X_\lambda),$$

passando o quociente temos

$$C_n(X) = \frac{Q_n(X)}{D_n(X)} = \sum_{\lambda} C_n(X_{\lambda}).$$

Ainda, se um n -cubo singular está inteiramente contido na componente conexa X_{λ} , então as suas faces estão, também, inteiramente contidas em X_{λ} . Segue que a aplicação $\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ leva $C_n(X_{\lambda})$ em $C_{n-1}(X_{\lambda})$. Portanto, temos as seguintes decomposições em somas diretas

$$Z_n(X) = \sum_{\lambda \in \Gamma} Z_n(X_{\lambda}) \quad \text{e} \quad B_n(X) = \sum_{\lambda \in \Gamma} B_n(X_{\lambda})$$

e, daí, $H_n(X) = \sum_{\lambda \in \Gamma} H_n(X_{\lambda})$. ■

Definição 1.6.6. (*Homomorfismo Induzido*) Se $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação contínua, com X e Y espaços topológicos, definimos uma aplicação $f_{\#} : Q_n(X) \rightarrow Q_n(Y)$, nos geradores, por $f_{\#}(T) = f \circ T$, para todo n -cubo singular T . Esta aplicação está bem definida e é um homomorfismo.

Se T é um n -cubo singular degenerado, então $f_{\#}(T)$ também o é. Daí, $f_{\#}$ aplica $D_n(X)$ em $D_n(Y)$ e induz um homomorfismo de $C_n(X)$ em $C_n(Y)$ que vamos denotar pelo mesmo símbolo

$$f_{\#} : C_n(X) \rightarrow C_n(Y), \quad n \geq 0,$$

tal que $f_{\#}(u + D_n(X)) = f_{\#}(u) + D_n(Y)$, para todo $u = \sum_{k=1}^r n_k T_k \in Q_n(X)$, $n \geq 0$.

Notemos que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} Q_n(X) & \xrightarrow{f_{\#}} & Q_n(Y) \\ \downarrow \partial_n & & \downarrow \partial_n \\ Q_{n-1}(X) & \xrightarrow{f_{\#}} & Q_{n-1}(Y) \end{array}$$

ou seja, $\partial_n \circ f_{\#} = f_{\#} \circ \partial_n$, para $n > 0$. Isto segue do fato que $f_{\#}(A_i T) = A_i(f_{\#}(T))$ e $f_{\#}(B_i T) = B_i(f_{\#}(T))$. Por exemplo, $A_i f_{\#}(T)(x_1, \dots, x_{n-1}) = A_i(f \circ T)(x_1, \dots, x_{n-1}) = (f \circ T)(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{n-1}) = f(T(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{n-1})) = f(A_i T(x_1, \dots, x_{n-1})) = (f \circ A_i T)(x_1, \dots, x_{n-1}) = f_{\#}(A_i T)(x_1, \dots, x_{n-1})$.

Logo, o diagrama a seguir também é comutativo

$$\begin{array}{ccc} C_n(X) & \xrightarrow{f_{\#}} & C_n(Y) \\ \downarrow \partial_n & & \downarrow \partial_n \\ C_{n-1}(X) & \xrightarrow{f_{\#}} & C_{n-1}(Y) \end{array}$$

daí, $f_{\#}$ leva $Z_n(X)$ em $Z_n(Y)$ e $B_n(X)$ em $B_n(Y)$, para todo $n \geq 0$ e, assim, induz o homomorfismo nos grupos quocientes, denotado por f_* e dado por

$$\begin{aligned} f_* : \quad H_n(X) &\rightarrow H_n(Y) \\ u + B_n(X) &\mapsto f_{\#}(u) + B_n(Y). \end{aligned}$$

para todo $u = \sum_{k=1}^r n_k T_k \in Z_n(X)$. Tal homomorfismo é referido como **homomorfismo induzido** por f em homologia.

Lema 1.6.1. *Sejam X, Y e Z espaços topológicos, $g : X \rightarrow Y$ e $f : Y \rightarrow Z$ aplicações contínuas e considere a aplicação composta $f \circ g : X \rightarrow Z$. Então*

$$f_* \circ g_* = (f \circ g)_*,$$

onde f_* , g_* e $(f \circ g)_*$ são os homomorfismos induzidos de f , g e $f \circ g$, respectivamente.

Demonstração: Segue do fato que $f_{\#} \circ g_{\#} = (f \circ g)_{\#}$ e da forma em que f_* foi definida. Para ver que $f_{\#} \circ g_{\#} = (f \circ g)_{\#}$, tome T um n -cubo singular em X , então

$$(f_{\#} \circ g_{\#})(T) = f_{\#}(g_{\#}(T)) = f_{\#}(g \circ T) = f \circ g \circ T = (f \circ g)_{\#}(T).$$

Pela definição de f_* , g_* e $(f \circ g)_*$, segue a prova. ■

Teorema 1.6.1. *Sejam f e g duas aplicações contínuas de X em Y . Se f e g são homotópicas, então os homomorfismos induzidos f_* e g_* de $H_n(X)$ em $H_n(Y)$ são iguais, para $n > 0$.*

Demonstração: Seja $F : I \times X \rightarrow Y$ uma homotopia entre f e g tal que $F(0, x) = f(x)$ e $F(1, x) = g(x)$.

Vamos definir, inicialmente, uma sequência de homomorfismos

$$\phi_n : Q_n(X) \rightarrow Q_{n+1}(Y), \quad n \geq 0,$$

como segue. Para cada $T : I^n \rightarrow X$ n -cubo singular (elemento básico), definimos o $(n + 1)$ -cubo singular $\phi_n(T) : I^{n+1} \rightarrow Y$ por

$$\phi_n(T)(x_1, \dots, x_{n+1}) = F(x_1, T(x_2, \dots, x_{n+1}))$$

(e estendemos ϕ_n naturalmente ao grupo $Q_n(X)$).

Note que, para todo $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$, temos

$$\begin{aligned} A_1 \phi_n(T)(x_1, \dots, x_n) &= \phi_n(T)(0, x_1, \dots, x_n) = F(0, T(x_1, \dots, x_n)) = f(T(x_1, \dots, x_n)) \\ &= (f \circ T)(x_1, \dots, x_n) = (f_{\#}(T))(x_1, \dots, x_n); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_1 \phi_n(T)(x_1, \dots, x_n) &= \phi_n(T)(1, x_1, \dots, x_n) = F(1, T(x_1, \dots, x_n)) = g(T(x_1, \dots, x_n)) \\ &= (g \circ T)(x_1, \dots, x_n) = (g_{\#}(T))(x_1, \dots, x_n); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_i \phi_n(T)(x_1, \dots, x_n) &= \phi_n(T)(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_n) \\ &= F(x_1, T(x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_n)) \\ &= F(x_1, A_{i-1}T(x_2, \dots, x_n)) \\ &= \phi_{n-1}(A_{i-1}T)(x_1, \dots, x_n); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_i \phi_n(T)(x_1, \dots, x_n) &= \phi_n(T)(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_n) \\ &= F(x_1, T(x_2, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_n)) \\ &= F(x_1, B_{i-1}T(x_2, \dots, x_n)) \\ &= \phi_{n-1}(B_{i-1}T)(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Assim, $A_1 \phi_n(T) = f_{\#}(T)$, $B_1 \phi_n(T) = g_{\#}(T)$, $A_i \phi_n(T) = \phi_{n-1}(A_{i-1}T)$ e $B_i \phi_n(T) = \phi_{n-1}(B_{i-1}T)$.

Daí,

$$\begin{aligned}
\partial_{n+1}(\phi_n(T)) &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i (A_i \phi_n(T) - B_i \phi_n(T)) \\
&= -(A_1 \phi_n(T) - B_1 \phi_n(T)) + \sum_{i=2}^{n+1} (-1)^i (A_i \phi_n(T) - B_i \phi_n(T)) \\
&= -(f_{\sharp}(T) - g_{\sharp}(T)) + \sum_{i=2}^{n+1} (-1)^i \phi_{n-1}(A_{i-1}T - B_{i-1}T) \\
&= -f_{\sharp}(T) + g_{\sharp}(T) + \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \phi_{n-1}(A_j T - B_j T) \\
&= -f_{\sharp}(T) + g_{\sharp}(T) - \phi_{n-1}(\partial_n(T)),
\end{aligned}$$

ou seja, para todo $T \in Q_n(X)$, temos

$$-f_{\sharp}(T) + g_{\sharp}(T) = \partial_{n+1}(\phi_n(T)) + \phi_{n-1}(\partial_n(T)).$$

De onde segue que, para todo $u \in Q_n(X)$, $(-f_{\sharp} + g_{\sharp})(u) = \partial_{n+1}(\phi_n(u)) + \phi_{n-1}(\partial_n(u))$.

Observe que se T é um n -cubo singular degenerado, $n > 0$, então $\phi_n(T)$ é um $(n+1)$ -cubo singular degenerado. Portanto,

$$\phi_n(D_n(X)) \subset D_{n+1}(Y)$$

e, então, ϕ_n induz um homomorfismo

$$\varphi_n : C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(Y), \quad n > 0,$$

tal que $\varphi_n(u + D_n(X)) = \phi_n(u) + D_{n+1}(Y)$ (ou simplesmente, $\varphi_n(u) = \phi_n(u)$) e segue a relação

$$-f_{\sharp} + g_{\sharp} = \partial_{n+1} \circ \varphi_n + \varphi_{n-1} \circ \partial_n. \quad (\text{I})$$

Para $n = 0$, estamos considerando $C_{-1}(X) = C_{-1}(Y) = \{0\}$, de modo que ∂_0 é o homomorfismo nulo e $\varphi_{-1} : C_{-1}(X) \rightarrow C_{-1}(X)$ também é o homomorfismo nulo.

Daí, dado $u \in Z_n(X)$, ou seja, $u \in C_n(X)$ tal que $\partial_n(u) = 0$, da equação (I), obtemos que

$$-f_{\sharp}(u) + g_{\sharp}(u) = \partial_{n+1}(\varphi_n(u)) + \varphi_{n-1}(\partial_n(u)) \stackrel{\partial_n(u)=0}{=} \partial_{n+1}(\varphi_n(u))$$

assim, $-f_{\sharp}(u) + g_{\sharp}(u) \in B_n(Y)$ e, portanto, $f_*(u) = f_{\sharp}(u) + B_n(Y) = g_{\sharp}(u) + B_n(Y) = g_*(u)$. ■

Observação 1.6.5. *Os homomorfismos φ_n apresentados na demonstração do teorema anterior constituem o que chamamos de uma “aplicação de cadeia” entre f_{\sharp} e g_{\sharp} .*

Observação 1.6.6. *Usamos Massey (1991), [5], como referência para esta seção porque já vínhamos utilizando esse livro em quase todas as seções anteriores. Mas vale observar que é mais usual, na literatura, definir os grupos de homologia singular de um espaço X por considerar os “ n -simplexos singulares” de X , ou seja, aplicações contínuas $\phi : \sigma_n \rightarrow X$, onde*

$$\sigma_n = \left\{ (t_0, t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum_{k=0}^n t_k = 1 \text{ e } t_k \geq 0, \forall k \in \{0, \dots, n\} \right\}.$$

Nota-se que σ_n e I^n são homeomorfos e pode-se verificar que as duas formas de definir os grupos de homologia singular coincidem.

1.7 Homomorfismo de Hurewicz

O resultado principal desta seção (Teorema de Hurewicz) afirma que, para um espaço topológico conexo por caminhos, o grupo fundamental determina completamente o primeiro grupo de homologia singular (ele é o grupo fundamental do espaço “abelianizado”). Para esta seção, usamos Massey (1991), [5], porém na demonstração do teorema mencionado seguimos, também, as ideias apresentadas em Bredon (1993), [1], adaptadas aqui.

Vamos considerar o grupo fundamental como um grupo multiplicativo e o primeiro grupo de homologia singular como um grupo aditivo.

Para qualquer espaço topológico X e qualquer ponto base $x_0 \in X$, definimos uma aplicação

$$h_X : \Pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$$

da seguinte forma, dado $[f] \in \Pi_1(X, x_0)$, onde $f : I = [0, 1] \rightarrow X$ é um caminho fechado com ponto base x_0 , podemos considerar f como um 1-cubo singular e, portanto, f determina um elemento de $C_1(X)$. De $f(0) = f(1) = x_0$, obtemos

$$\partial_1(f)(0) = (-1)((A_1f - B_1f)(0)) = (-1)(f(0) - f(1)) = 0,$$

pois $I^0 = \{0\}$ e $A_1f, B_1f : I^0 \rightarrow X$ são tais que $A_1f(0) = f(0)$ e $B_1f(0) = f(1)$. Assim, f é um ciclo. Definimos, então, $h_X([f])$ como sendo a classe de homologia do ciclo f , isto é, $h_X([f]) = f + B_1(X)$.

Se $g : I \rightarrow X$ é um outro caminho fechado com ponto base x_0 tal que $g \sim f$, então existe uma homotopia $H : I \times I \rightarrow X$ entre f e g e, portanto, $H \in Q_2(X)$. Além disso, $A_1H(x) = H(0, x) = x_0$ (um 1-cubo degenerado), $B_1H(x) = H(1, x) = x_0$, $A_2H(x) = H(x, 0) = f(x)$ e $B_2H(x) = H(x, 1) = g(x)$, daí

$$\partial_2(H)(x) = (-1)((A_1H - B_1H)(x)) + (A_2H - B_2H)(x) = (f - g)(x),$$

e, portanto, $f + B_1(X) = g + B_1(X)$, o que prova que h_X está bem definida.

Teorema 1.7.1. *A aplicação $h_X : \Pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$, definida acima, é um homomorfismo.*

Demonstração: Sejam $[f], [g] \in \Pi_1(X, x_0)$, onde $f, g : I \rightarrow X$ são caminhos fechados com ponto base x_0 . Sabemos que $[f] \cdot [g] = [f * g]$, onde

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ g(2t - 1), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Agora defina um 2-cubo singular $T : I^2 \rightarrow X$ por considerar

$$T(x_1, x_2) = \begin{cases} f(x_1 + 2x_2), & \text{se } x_1 + 2x_2 \leq 1; \\ g\left(\frac{x_1 + 2x_2 - 1}{x_1 + 1}\right), & \text{se } x_1 + 2x_2 \geq 1, \end{cases}$$

ou seja, a função T foi escolhida de modo que ela seja constante ao longo dos segmentos de retas mostrados na figura a seguir (note que na região $x_1 + 2x_2 \geq 1$ os segmentos são

tomados de forma a estabelecer uma correspondência entre os conjuntos $\{0\} \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ e $\{1\} \times [0, 1]$.

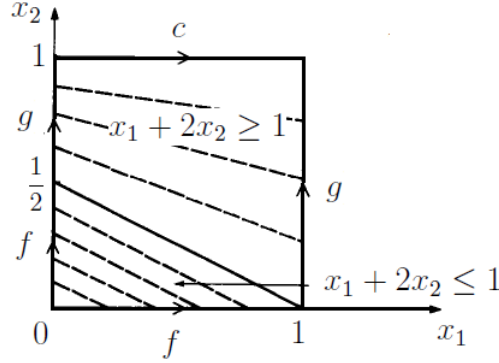


Figura 1.21: Um 2-cubo singular.

Considerando $x \in I$,

$$\begin{aligned}
 A_1T(x) = T(0, x) &= \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ g(2x - 1), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} = (f * g)(x); \\
 B_1T(x) = T(1, x) &= \begin{cases} f(1 + x), & x \leq 0 (\because x = 0) \\ g(x), & 0 \leq x \leq 1 \end{cases} = g(x); \\
 A_2T(x) = T(x, 0) &= \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq 1 \\ g\left(\frac{x-1}{x+1}\right), & 1 \leq x (\because x = 1) \end{cases} = f(x); \\
 B_2T(x) = T(x, 1) &= \begin{cases} f(x+2), & x \leq -1 (\because \nexists x) \\ g\left(\frac{x+1}{x+1}\right), & -1 \leq x (\because 0 \leq x \leq 1) \end{cases} = c_{x_0},
 \end{aligned}$$

onde c_{x_0} indica o caminho constante em x_0 , que é um 1-cubo singular degenerado.

Assim,

$$\begin{aligned}
 \partial_2(T)(x) &= \sum_{i=1}^2 (-1)^i ((A_iT - B_iT)(x)) \\
 &= (-1) ((A_1T - B_1T)(x)) + (A_2T - B_2T)(x) \\
 &= (f + g - (f * g) - c_{x_0})(x),
 \end{aligned}$$

para todo $x \in I$, ou seja, $f + g - (f * g) - c_{x_0} = \partial_2(T) \in B_1(X)$ e, conseqüentemente,

$$f + g + B_1(X) = (f * g) + c_{x_0} + B_1(X) = f * g + B_1(X), \quad (I)$$

uma vez que c_{x_0} é degenerado, isto é, $c_{x_0} \in D_1(X)$, e $B_1(X) \subset \frac{Q_1(X)}{D_1(X)}$. Disto segue que,

$$\begin{aligned}
 h_X([f]) + h_X([g]) &= f + B_1(X) + g + B_1(X) = f + g + B_1(X) \stackrel{(I)}{=} f * g + B_1(X) \\
 &= h_X([f * g]) = h_X([f] \cdot [g])
 \end{aligned}$$

e, assim, h_X é um homomorfismo. ■

Definição 1.7.1. O homomorfismo $h_X : \Pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$ é, muitas vezes, referido como **homomorfismo de Hurewicz**.

Proposição 1.7.1. Considere X e Y espaços topológicos conexos por caminhos e $h_X : \Pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$ e $h_Y : \Pi_1(Y, y_0) \rightarrow H_1(Y)$ os homomorfismos de Hurewicz de X e Y , respectivamente. Seja $\varphi : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ uma função contínua, então o diagrama abaixo é comutativo.

$$\begin{array}{ccc} \Pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{\varphi_{\#}} & \Pi_1(Y, y_0) \\ \downarrow h_X & & \downarrow h_Y \\ H_1(X) & \xrightarrow{\varphi_*} & H_1(Y). \end{array}$$

Demonstração: Tome $[f] \in \Pi_1(X, x_0)$, sendo $f : I \rightarrow X$ um caminho fechado com ponto base x_0 . Sabemos que $\varphi_* : H_1(X) \rightarrow H_1(Y)$ é o homomorfismo induzido tal que $\varphi_*(u' + B_1(X)) = \varphi_{\#}(u') + B_1(Y)$, onde u' indica um elemento qualquer de $Z_1(X)$. Temos que

$$\varphi_*(h_X([f])) = \varphi_*(f + B_1(X)) = \varphi_{\#}(f) + B_1(Y) = (\varphi \circ f) + B_1(Y).$$

Por outro lado, vendo $\varphi_{\#}$ como o homomorfismo induzido no grupo fundamental,

$$h_Y(\varphi_{\#}([f])) = h_Y([\varphi \circ f]) = (\varphi \circ f) + B_1(Y).$$

Portanto, $h_Y \circ \varphi_{\#} = \varphi_* \circ h_X$. ■

Teorema 1.7.2. (Teorema de Hurewicz) Se X é um espaço topológico conexo por caminhos e $x_0 \in X$, então o homomorfismo de Hurewicz $h_X : \Pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$ é um epimorfismo e seu núcleo é o subgrupo comutador $\Pi_1(X, x_0)'$ de $\Pi_1(X, x_0)$. Consequentemente, $\frac{\Pi_1(X, x_0)}{\Pi_1(X, x_0)'} \cong H_1(X)$, mais precisamente, $\bar{h}_X : \frac{\Pi_1(X, x_0)}{\Pi_1(X, x_0)'} \rightarrow H_1(X)$ tal que $\bar{h}_X([\alpha]_{ab}) = [[\alpha]]$, é um isomorfismo, onde $[\alpha]_{ab} := [\alpha] \cdot \Pi_1(X, x_0)'$ e $[[\alpha]] := \alpha + B_1(X)$.

Demonstração: Seja $q : \Pi_1(X, x_0) \rightarrow \frac{\Pi_1(X, x_0)}{\Pi_1(X, x_0)'}$ a aplicação quociente dada por $q([\alpha]) = [\alpha] \cdot \Pi_1(X, x_0)' = [\alpha]_{ab}$. Como $H_1(X)$ é um grupo abeliano e $h_X : \Pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$ é um homomorfismo, então o subgrupo comutador $\Pi_1(X, x_0)' \subset \text{Ker}(h_X)$ e, pelo Lema 1.1.1, existe um único homomorfismo $\bar{h}_X : \frac{\Pi_1(X, x_0)}{\Pi_1(X, x_0)'} \rightarrow H_1(X)$ tal que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} \Pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{h_X} & H_1(X) \\ \downarrow q & \nearrow \bar{h}_X & \\ \frac{\Pi_1(X, x_0)}{\Pi_1(X, x_0)'} & & \end{array}$$

ou seja, $\bar{h}_X([\alpha]_{ab}) = h_X([\alpha]) = \alpha + B_1(X)$.

Vamos construir a inversa $\bar{\psi} : H_1(X) \rightarrow \frac{\Pi_1(X, x_0)}{\Pi_1(X, x_0)'}$ de \bar{h}_X . Para cada $x \in X$, tome $\lambda_x : I \rightarrow X$ um caminho tal que $\lambda_x(0) = x_0$ e $\lambda_x(1) = x$. E tome λ_{x_0} como sendo o caminho constante c_{x_0} .

Seja $f : I \rightarrow X$ um 1-cubo singular (um caminho não necessariamente fechado) e considere o caminho produto \widehat{f} definido como

$$\widehat{f} = \lambda_{f(0)} * f * \lambda_{f(1)}^{-1},$$

então \widehat{f} é um laço em X baseado em x_0 que obtemos utilizando as funções $\lambda_{(-)}$.

Defina, inicialmente,

$$\begin{aligned} \psi : C_1(X) &\rightarrow \frac{\Pi_1(X, x_0)}{\Pi_1(X, x_0)'} \\ f &\mapsto [\widehat{f}] \cdot \Pi_1(X, x_0)' = [\widehat{f}]_{ab}, \end{aligned}$$

onde $[\widehat{f}]$ é a classe de homotopia de \widehat{f} em $\Pi_1(X, x_0)$ e $[\widehat{f}]_{ab}$ é sua projeção em $\frac{\Pi_1(X, x_0)}{\Pi_1(X, x_0)'}$, lembrando que f , aqui, está de fato indicando o elemento $f + D_1(X) \in \frac{Q_1(X)}{D_1(X)} = C_1(X)$.

Note que, para todos $f, g \in C_1(X)$, com $g(0) = f(1)$, temos

$$\begin{aligned} \psi(f + g) &= [\widehat{f * g}]_{ab} &= [\lambda_{(f*g)(0)} * (f * g) * \lambda_{(f*g)(1)}^{-1}]_{ab} \\ & &= [\lambda_{f(0)} * f * g * \lambda_{g(1)}^{-1}]_{ab} \\ & &= [\lambda_{f(0)} * f * \lambda_{f(1)}^{-1} * \lambda_{f(1)} * g * \lambda_{g(1)}^{-1}]_{ab} \\ & \stackrel{f(1)=g(0)}{=} [\lambda_{f(0)} * f * \lambda_{f(1)}^{-1} * \lambda_{g(0)} * g * \lambda_{g(1)}^{-1}]_{ab} \\ & &= [\lambda_{f(0)} * f * \lambda_{f(1)}^{-1}]_{ab} \cdot [\lambda_{g(0)} * g * \lambda_{g(1)}^{-1}]_{ab} \\ & &= [\widehat{f}]_{ab} \cdot [\widehat{g}]_{ab} \\ & &= \psi(f) \cdot \psi(g), \end{aligned}$$

ou seja, ψ é um homomorfismo.

Além disso, $B_1(X) \subset \text{Ker}(\psi) = \{\eta \in C_1(X); \psi(\eta) = [c_{x_0}]_{ab}\}$. De fato, mostremos, primeiro, que $\partial_2(T) \in \text{Ker}(\psi)$, para T um 2-cubo singular qualquer. Com efeito, dado $T : I^2 \rightarrow X$, $\partial_2(T) = -(A_1T - B_1T) + A_2T - B_2T$. Considerando os caminhos $f, g, h, l : I \rightarrow X$ tais que $f(x) = A_2T(x) = T(x, 0)$, $g(x) = B_1T(x) = T(1, x)$, $h(x) = B_2T(x) = T(x, 1)$ e $l(x) = A_1T(x) = T(x, 0)$, temos que $\partial_2(T) = f + g - h - l$, onde $f, g, h, l \in C_1(X)$.

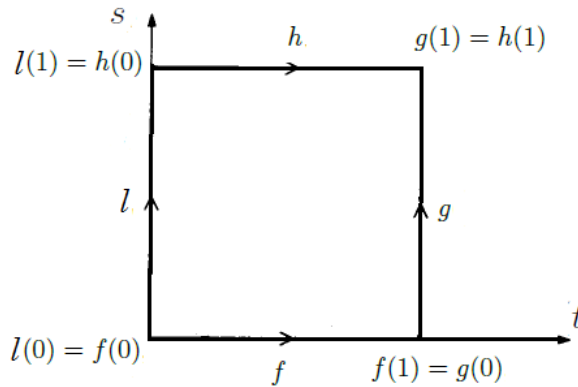


Figura 1.22: Um 2-cubo singular cujo bordo é $f + g - h - l$.

Notemos que $f(1) = g(0)$, $g(1) = h(1)$, $l(1) = h(0)$ e $l(0) = f(0)$, de modo que podemos considerar o caminho produto $f * g * h^{-1} * l^{-1}$, que será um caminho fechado com ponto base $f(0)$. Observe agora que

$$\begin{aligned} \widehat{f} * \widehat{g} * \widehat{h}^{-1} * \widehat{l}^{-1} &= \lambda_{f(0)} * f * \lambda_{f(1)}^{-1} * \lambda_{g(0)} * g * \lambda_{g(1)}^{-1} * \left(\lambda_{h(0)} * h * \lambda_{h(1)}^{-1} \right)^{-1} \\ &\quad * \left(\lambda_{l(0)} * l * \lambda_{l(1)}^{-1} \right)^{-1} \\ &= \lambda_{f(0)} * f * \lambda_{f(1)}^{-1} * \lambda_{g(0)} * g * \lambda_{g(1)}^{-1} * \lambda_{h(1)} * h^{-1} * \lambda_{h(0)}^{-1} \\ &\quad * \lambda_{l(1)} * l^{-1} * \lambda_{l(0)}^{-1} \\ &= \lambda_{f(0)} * f * g * h^{-1} * l^{-1} * \lambda_{f(0)}^{-1}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \psi(\partial_2(T)) &= \psi(f + g - h - l) = \psi(f) \cdot \psi(g) \cdot (\psi(h))^{-1} \cdot (\psi(l))^{-1} \\ &= [\widehat{f}]_{ab} \cdot [\widehat{g}]_{ab} \cdot [\widehat{h}]_{ab}^{-1} \cdot [\widehat{l}]_{ab}^{-1} = [\widehat{f} * \widehat{g} * \widehat{h}^{-1} * \widehat{l}^{-1}]_{ab} \\ &= [\lambda_{f(0)} * f * g * h^{-1} * l^{-1} * \lambda_{f(0)}^{-1}]_{ab} = [c_{x_0}]_{ab}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\psi(\partial_2(T)) = [c_{x_0}]_{ab} = 1,$$

pois $f * g * h^{-1} * l^{-1} \sim c_{f(0)}$, visualizemos, isto, apenas geometricamente, note que $Im(T) = T(I^2) \subset X$ e o traço (imagem) do caminho $f * g * h^{-1} * l^{-1}$ (em X) corresponde a imagem (por T) do caminho formado pelas arestas do quadrado I^2 . Como $\{(0,0)\}$ é um retrato por deformação de I^2 (podemos usar a retração $r : I^2 \rightarrow \{(0,0)\}$ dada pela projeção radial em torno de $\{(0,0)\}$, como na figura abaixo), então os caminhos $f * g * h^{-1} * l^{-1}$ e $c_{f(0)}$, em X , são homotópicos.

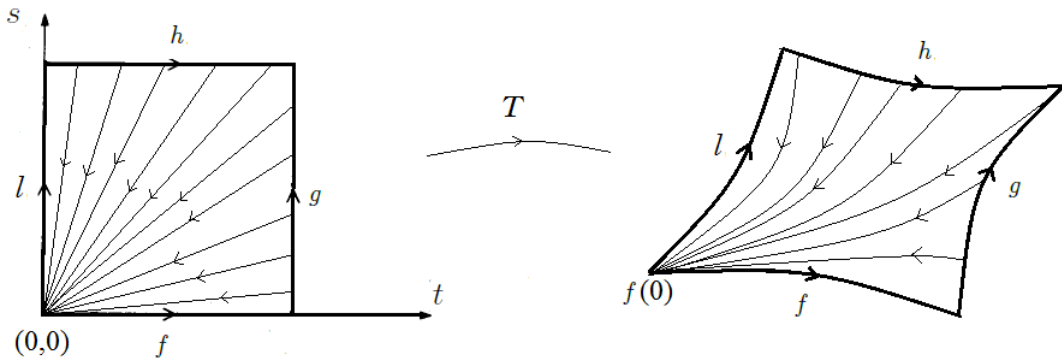


Figura 1.23: $\{(0,0)\}$ é um retrato por deformação de I^2 .

Logo, se $v \in B_1(X)$, então $v = \partial_2 \left(\sum_{k=1}^r n_k T_k \right) = \sum_{k=1}^r n_k \partial_2(T_k)$, onde $\partial_2(T_k) = -(A_1 T_k - B_1 T_k) + A_2 T_k - B_2 T_k$ e, assim, $\psi(v) = \prod_{k=1}^r (\psi(\partial_2(T_k)))^{n_k} = 1$, então, $B_1(X) \subset Ker(\psi)$.

Usando a Proposição 1.1.3, uma vez que ψ é um homomorfismo e $B_1(X) \subset \text{Ker}(\psi)$, obtemos que existe um único homomorfismo $\bar{\psi} : H_1(X) \rightarrow \frac{\Pi_1(X, x_0)}{\Pi_1(X, x_0)'}$ tal que o diagrama a seguir comuta

$$\begin{array}{ccc} Z_1(X) & \xrightarrow{\psi|_{Z_1(X)}} & \frac{\Pi_1(X, x_0)}{\Pi_1(X, x_0)'} \\ \downarrow \tilde{q} & \nearrow \bar{\psi} & \\ H_1(X) = \frac{Z_1(X)}{B_1(X)} & & \end{array}$$

onde $\tilde{q} : Z_1(X) \rightarrow H_1(X)$ é a aplicação quociente dada por $\tilde{q}(f) = f + B_1(X)$, de modo que o homomorfismo $\bar{\psi}$ é dado por

$$\bar{\psi} \left(\sum_{k=1}^r n_k f_k + B_1(X) \right) = \prod_{k=1}^r (\psi(f_k))^{n_k} = [\hat{f}_1]_{ab}^{n_1} \cdot \dots \cdot [\hat{f}_r]_{ab}^{n_r}.$$

Observe que, se $f : I \rightarrow X$ é um laço em X baseado em x_0 , então

$$(\bar{\psi} \circ \bar{h}_X) ([f]_{ab}) = \bar{\psi}(f + B_1(X)) = \psi(f) = [\lambda_{x_0} * f * \lambda_{x_0}^{-1}]_{ab} = [f]_{ab},$$

uma vez que λ_{x_0} foi escolhido como o caminho constante em x_0 , assim,

$$\bar{\psi} \circ \bar{h}_X = \text{Id}_{\frac{\Pi_1(X, x_0)}{\Pi_1(X, x_0)'}}. \quad (\text{I})$$

A correspondência $x \mapsto \lambda_x$, leva 0-cubos singulares (já que os 0-cubos singulares são identificados com os pontos de X) em 1-cubos singulares e, assim, estende a um único homomorfismo

$$\lambda : C_0(X) \rightarrow C_1(X)$$

$$\text{por tomar } \lambda_{\sum_{k=1}^r n_k x_k} = \lambda \left(\sum_{k=1}^r n_k x_k \right) = \sum_{k=1}^r n_k \lambda_{x_k}.$$

Note que, se f é um 1-cubo singular, então

$$\begin{aligned} (\bar{h}_X \circ \psi)(f) &= \bar{h}_X([f]_{ab}) = h_X([\hat{f}]) \\ &= h_X\left([\lambda_{f(0)} * f * \lambda_{f(1)}^{-1}]\right) \\ &= (\lambda_{f(0)} * f * \lambda_{f(1)}^{-1}) + B_1(X) \\ &= \lambda_{f(0)} + f - \lambda_{f(1)} + B_1(X) \\ &= f + (\lambda_{f(0)} - \lambda_{f(1)}) + B_1(X) \\ &= f - \lambda_{\partial_1(f)} + B_1(X), \end{aligned}$$

onde $f - \lambda_{\partial_1(f)} \in Z_1(X)$, já que $\partial_1(f - \lambda_{\partial_1(f)}) = \partial_1(f) - \partial_1(\lambda_{\partial_1(f)}) = f(1) - f(0) - (-f(0) + x_0 + f(1) - x_0) = 0$. Daí, se $u = f_1 + f_2 \in C_1(X)$, então

$$\begin{aligned} (\bar{h}_X \circ \psi)(u) &= (\bar{h}_X \circ \psi)(f_1 + f_2) = \bar{h}_X(\psi(f_1) \cdot \psi(f_2)) \\ &= \bar{h}_X(\psi(f_1)) + \bar{h}_X(\psi(f_2)) \\ &= f_1 - \lambda_{\partial_1(f_1)} + B_1(X) + f_2 - \lambda_{\partial_1(f_2)} + B_1(X) \\ &= f_1 + f_2 - (\lambda_{\partial_1(f_1)} + \lambda_{\partial_1(f_2)}) + B_1(X) \\ &= f_1 + f_2 - \lambda_{\partial_1(f_1 + f_2)} + B_1(X) \\ &= u - \lambda_{\partial_1(u)} + B_1(X), \end{aligned}$$

de fato isto vale para todo $u \in C_1(X)$.

Assim, se u é um ciclo,

$$(\bar{h}_X \circ \bar{\psi})(u + B_1(X)) = \bar{h}_X(\psi(u)) = u - \lambda_{\partial_1(u)} + B_1(X) = u + B_1(X),$$

uma vez que $\partial_1(u) = 0$ (note que $u + D_1(X) \in Z_1(X)$ se, e somente se, $\partial_1(u) \in D_0(X) = \{0\}$, de onde segue que $\partial_1(u) = 0$). Portanto,

$$\bar{h}_X \circ \bar{\psi} = Id_{H_1(X)}. \quad (\text{II})$$

De (I) e (II), segue que $\bar{h}_X : \frac{\Pi_1(X, x_0)}{\Pi_1(X, x_0)'} \rightarrow H_1(X)$ é um isomorfismo e $\bar{h}_X^{-1} = \bar{\psi}$.

Note que da igualdade $\bar{h}_X \circ q = h_X$ e do fato que \bar{h}_X é um isomorfismo, obtém-se que $\text{Ker}(h_X) = \text{Ker}(q) = \Pi_1(X, x_0)'$. ■

Exemplo 1.7.1. (i) Como \mathbb{Z} , $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e \mathbb{Z}_2 são grupos abelianos, temos, pela Observação 1.1.3 (item (ii)) e pelo teorema anterior, que

$$\begin{aligned} H_1(S^1) &\cong \Pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}, \\ H_1(\mathbb{T}^2) &\cong \Pi_1(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \\ H_1\left(\frac{S^1}{A}\right) &= H_1(\mathbb{RP}^1) \cong \Pi_1(\mathbb{RP}^1) \cong \mathbb{Z}, \\ H_1\left(\frac{S^2}{A}\right) &= H_1(\mathbb{RP}^2) \cong \Pi_1(\mathbb{RP}^2) \cong \mathbb{Z}_2. \end{aligned}$$

(ii) Se X é a Figura 8 (Exemplo 1.4.5), então

$$H_1(X) \cong (\mathbb{Z} * \mathbb{Z})' \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

2 O Teorema de Borsuk-Ulam para espaços topológicos gerais

Neste capítulo, na primeira seção, apresentamos o Teorema de Borsuk-Ulam na sua versão clássica. Na segunda seção, exibimos uma generalização do Teorema de Borsuk-Ulam dada por Ventrúscolo, Desideri e Pergher (2011), [8]. Mais especificamente, é feita uma abordagem quando o espaço topológico Y é \mathbb{R}^2 . E por fim, na terceira seção, apresentamos (com base na referência citada) um invariante topológico vindo da generalização do Teorema de Borsuk-Ulam.

2.1 O Teorema de Borsuk-Ulam

Baseado em Massey (1991), [5], vamos apresentar detalhadamente, nesta seção, a prova do Teorema clássico de Borsuk-Ulam para os casos $n = 1$ e $n = 2$ e dar uma ideia da prova para o caso em que $n > 2$.

Definição 2.1.1. *Seja $S^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$ a esfera unitária n -dimensional em \mathbb{R}^{n+1} . Sejam $n, m \in \mathbb{N}$, dizemos que uma aplicação $f : S^n \rightarrow S^m$ **preserva pontos antipodais** se $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in S^n$.*

Observação 2.1.1. *Se indicarmos por A a aplicação antipodal tanto para a esfera S^n como para S^m (Definição 1.2.10), então uma aplicação $f : S^n \rightarrow S^m$ preserva pontos antipodais se $A \circ f = f \circ A$, de modo que o diagrama abaixo é comutativo.*

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{f} & S^m \\ A \downarrow & & \downarrow A \\ S^n & \xrightarrow{f} & S^m. \end{array}$$

Lema 2.1.1. *Não existe aplicação contínua $f : S^n \rightarrow S^{n-1}$, $n \geq 1$, que preserva pontos antipodais.*

Demonstração: Caso $n = 1$: Considere uma aplicação contínua $f : S^1 \rightarrow S^0$, onde $S^0 = \{x \in \mathbb{R}; x^2 = 1\} = \{-1, 1\}$. Suponha que f preserva pontos antipodais, ou seja, para todo $x \in S^1$, segue que $f(-x) = -f(x)$.

Note que f é sobrejetora, uma vez que, dado $x \in S^1$, se $f(x) = 1$, temos que $f(-x) = -f(x) = -1$, e, de modo análogo, se $f(x) = -1$, então $f(-x) = -f(x) = 1$. Disso, conclui-se que $f(S^1) = \{-1, 1\} = S^0$.

Como f é contínua e sobrejetora e S^1 é conexo, segue que $f(S^1) = S^0$ é conexo, o que é uma contradição. Logo, não existe aplicação contínua $f : S^1 \rightarrow S^0$ que preserva pontos antipodais.

Caso $n = 2$: Suponha que exista uma aplicação contínua $f : S^2 \rightarrow S^1$ que preserva pontos antipodais.

Consideremos a aplicação antipodal $A : S^n \rightarrow S^n$, para $n = 1, 2$. Lembremos que a aplicação antipodal A é uma involução livre (Exemplo 1.3.3). Como S^n é um espaço de Hausdorff, obtemos, pela Proposição 1.3.5, que $\left(S^n, p_n, \frac{S^n}{A}\right)$ é um recobrimento de duas folhas, onde $p_n : S^n \rightarrow \frac{S^n}{A}$ é a aplicação quociente $p_n(x) = \bar{x} = \{x, -x\}$, para todo $x \in S^n$.

Conforme mencionado no Exemplo 1.3.4, o espaço quociente $\frac{S^2}{A}$ é o plano projetivo $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ e, de acordo com o Exemplo 1.2.3, $\frac{S^1}{A}$ é o $\mathbb{R}\mathbb{P}^1$ que é homeomorfo a S^1 .

Seja $g : \frac{S^2}{A} \rightarrow \frac{S^1}{A}$ tal que $g(\bar{x}) = \overline{f(x)}$.

Temos que g está bem definida, pois dados $\bar{x}, \bar{y} \in \frac{S^2}{A}$, se $\bar{x} = \bar{y}$, então $x = y$ ou $x = -y$. Assim, $f(x) = f(y)$ ou $f(x) = f(-y) = -f(y)$. Disto, temos que

$$g(\bar{x}) = \overline{f(x)} = \{f(x), -f(x)\} = \{f(y), -f(y)\} = \overline{f(y)} = g(\bar{y}).$$

Além disso, o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccc} S^2 & \xrightarrow{f} & S^1 \\ p_2 \downarrow & & \downarrow p_1 \\ \frac{S^2}{A} & \xrightarrow{g} & \frac{S^1}{A} \end{array}$$

uma vez que, para todo $x \in S^2$, temos

$$(p_1 \circ f)(x) = p_1(f(x)) = \overline{f(x)} = g(\bar{x}) = g(p_2(x)) = (g \circ p_2)(x).$$

Mais ainda, a aplicação g é contínua, pois, como f e p_1 são contínuas, para todo aberto U de $\frac{S^1}{A}$, temos que $(p_1 \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(p_1(U))$ é um aberto em S^2 . Pela comutatividade do diagrama,

$$p_2^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ p_2)^{-1}(U) \stackrel{g \circ p_2 = p_1 \circ f}{=} (p_1 \circ f)^{-1}(U)$$

é um aberto de S^2 . Como $p_2 : S^2 \rightarrow \frac{S^2}{A}$ é uma aplicação quociente, $g^{-1}(U)$ é um aberto de $\frac{S^2}{A}$.

Consideremos o homomorfismo induzido no grupo fundamental

$$g_{\#} : \Pi_1 \left(\frac{S^2}{A} \right) \rightarrow \Pi_1 \left(\frac{S^1}{A} \right).$$

Sabemos que $\Pi_1 \left(\frac{S^2}{A} \right) \cong \mathbb{Z}_2$ e $\Pi_1 \left(\frac{S^1}{A} \right) \cong \mathbb{Z}$ (vide Exemplos 1.3.4 e 1.2.3). Então, a menos de isomorfismo, $g_{\#} : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}$ é o homomorfismo trivial, já que \mathbb{Z} não tem nenhum subgrupo de ordem dois.

Agora, considere $\alpha : I = [0, 1] \rightarrow S^2$ um caminho tal que $\alpha(0) = x_0$ e $\alpha(1) = -x_0$, para algum $x_0 \in S^2$. Então, $f \circ \alpha : I \rightarrow S^1$ é um caminho tal que

$$(f \circ \alpha)(0) = f(x_0) \text{ e } (f \circ \alpha)(1) = f(-x_0) = -f(x_0).$$

Conseqüentemente, $[p_1 \circ f \circ \alpha] \in \Pi_1 \left(\frac{S^1}{A}, \overline{f(x_0)} \right)$, pois

$$(p_1 \circ f \circ \alpha)(0) = p_1(f(x_0)) = \overline{f(x_0)} = p_1(-f(x_0)) = (p_1 \circ f \circ \alpha)(1).$$

Se denotamos por $c_{\overline{f(x_0)}}$ o caminho constante no ponto $\overline{f(x_0)} \in \frac{S^1}{A}$, temos que

$$[p_1 \circ f \circ \alpha] \neq [c_{\overline{f(x_0)}}]. \tag{I}$$

De fato, se $[p_1 \circ f \circ \alpha] = [c_{\overline{f(x_0)}}]$, como $[c_{\overline{f(x_0)}}] = [p_1 \circ c_{f(x_0)}]$, então

$$[p_1 \circ f \circ \alpha] = [c_{\overline{f(x_0)}}] = [p_1 \circ c_{f(x_0)}].$$

Ou seja, $p_1 \circ f \circ \alpha \sim p_1 \circ c_{f(x_0)}$. Por $(f \circ \alpha)(0) = f(x_0) = c_{f(x_0)}(0)$ e $(p_1 \circ f \circ \alpha)(1) = \overline{f(x_0)} = p_1(f(x_0)) = (p_1 \circ c_{f(x_0)})(1)$, o Teorema 1.3.4 garante que $f \circ \alpha \sim c_{f(x_0)}$ e $-f(x_0) = (f \circ \alpha)(1) = c_{f(x_0)}(1) = f(x_0)$, o que é um absurdo.

Por outro lado, note que $p_2 \circ \alpha : I \rightarrow \frac{S^2}{A}$ é um laço baseado em $\overline{x_0}$, uma vez que

$$(p_2 \circ \alpha)(0) = p_2(x_0) = \overline{x_0} = p_2(-x_0) = (p_2 \circ \alpha)(1)$$

e, portanto, $[p_2 \circ \alpha] \in \Pi_1 \left(\frac{S^2}{A}, \overline{x_0} \right)$.

Ainda,

$$g_{\#}([p_2 \circ \alpha]) = [g \circ p_2 \circ \alpha] \stackrel{g \circ p_2 \equiv p_1 \circ f}{=} [p_1 \circ f \circ \alpha] \stackrel{(I)}{\neq} [c_{\overline{f(x_0)}}].$$

Mas isso nos dá uma contradição, uma vez que, como observado anteriormente, $g_{\#}$ é o homomorfismo trivial.

Portanto, não existe aplicação contínua $f : S^2 \rightarrow S^1$ que preserva pontos antipodais.

Caso $n \geq 2$: A prova deste caso usa grupos de cohomologia e produto cup, tal prova pode ser encontrada em Massey (1991, Teo.2.4, p.397), [5]. ■

A partir do lema anterior podemos provar o Teorema clássico de Borsuk-Ulam:

Teorema 2.1.1. (Teorema de Borsuk-Ulam) *Dada qualquer aplicação contínua $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, existe um ponto $x \in S^n$ tal que $f(x) = f(-x)$.*

Demonstração: Seja $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua. Suponha que, para todo $x \in S^n$, $f(x) \neq f(-x)$.

Considere a aplicação contínua $F : S^n \rightarrow S^{n-1}$ definida por

$$F(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}.$$

Observe que, para todo $x \in S^n$,

$$F(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{\|f(-x) - f(x)\|} = -\frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|} = -F(x),$$

ou seja, F preserva pontos antipodais, contradizendo o lema anterior. Portanto, existe $x \in S^n$ tal que $f(x) = f(-x)$. ■

2.2 Generalização do Teorema de Borsuk-Ulam

O objetivo, nesta seção, é apresentar uma generalização do Teorema de Borsuk-Ulam, dada em Ventrúscolo, Desideri e Pergher (2011), [8].

Dado um espaço topológico X , recordemos (Definição 1.3.6) que uma aplicação contínua $T : X \rightarrow X$ é uma involução sobre X se $T \circ T = Id_X$ e a involução é livre se $T(x) \neq x$, para todo $x \in X$.

Note que, como já vimos anteriormente, $A : S^n \rightarrow S^n$ é uma involução livre e o Teorema de Borsuk-Ulam (Teorema 2.1.1) nos diz que, considerando a tripla $\{(S^n, A); \mathbb{R}^n\}$, para toda aplicação contínua $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, existe um ponto $x \in S^n$ tal que $f(x) = f(A(x))$. Isto motivou a generalização para a condição de “satisfazer o Teorema de Borsuk-Ulam”, abreviadamente referido como condição “BUT”, que será abordada aqui, com destaque para a prova de um resultado dado pelos autores mencionados que fornece um critério algébrico para uma tripla $\{(X, T); \mathbb{R}^2\}$ satisfazer BUT.

Definição 2.2.1. *Sejam (X, T) um par, onde T é uma involução livre sobre X , e Y um espaço topológico qualquer. Dizemos que $\{(X, T); Y\}$ **satisfaz o Teorema de Borsuk-Ulam** (abreviadamente, **satisfaz BUT**- Borsuk-Ulam Theorem) se, dado qualquer aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$, existe pelo menos um ponto $x \in X$ de modo que $f(x) = f(T(x))$.*

Exemplo 2.2.1. *Como observado anteriormente, $\{(S^n, A); \mathbb{R}^n\}$ satisfaz BUT.*

Nesta seção, vamos considerar $Y = \mathbb{R}^2$ e apresentar uma condição para $\{(X, T), \mathbb{R}^2\}$ satisfazer BUT.

Definição 2.2.2. *Considere (X, T) e (Y, S) dois pares, onde T e S são involuções sobre X e Y , respectivamente. Dizemos que uma aplicação contínua $f : (X, T) \rightarrow (Y, S)$ é uma **aplicação equ variante** se, para todo $x \in X$, temos $f(T(x)) = S(f(x))$, ou seja, $f \circ T = S \circ f$.*

Observação 2.2.1. *Sejam (X, T) , (Y, S) e (Z, P) três pares, onde T , S e P são involuções sobre X , Y e Z , respectivamente. Se $f : (X, T) \rightarrow (Y, S)$ e $g : (Y, S) \rightarrow (Z, P)$ são aplicações equ variantes, então a aplicação composta $g \circ f : (X, T) \rightarrow (Z, P)$ é uma aplicação equ variante. De fato, como composta de aplicações contínuas é contínua, temos que $g \circ f$ é contínua. Além disso, para todo $x \in X$,*

$$\begin{aligned} (g \circ f)(T(x)) &= g(f(T(x))) \stackrel{f \circ T = S \circ f}{=} g(S(f(x))) \\ &\stackrel{g \circ S = P \circ g}{=} P(g(f(x))) = P((f \circ g)(x)), \end{aligned}$$

de onde segue que $g \circ f$ é uma aplicação equ variante.

Lema 2.2.1. *Sejam (X, T) e (S^1, A) dois pares, onde T é uma involução livre sobre X e A é a aplicação antipodal sobre S^1 . Existe uma aplicação equ variante $g : (X, T) \rightarrow (S^1, A)$ se, e somente se, $\{(X, T); \mathbb{R}^2\}$ não satisfaz BUT.*

Demonstração: (\Rightarrow) Por hipótese, existe uma aplicação equ variante $g : (X, T) \rightarrow (S^1, A)$, assim $g \circ T = A \circ g$. Considere $j : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação inclusão e $f := j \circ g : X \rightarrow \mathbb{R}^2$. Então, f é contínua. Além disso, para todo $x \in X$,

$$f(T(x)) = (j \circ g)(T(x)) = j(g(T(x))) \stackrel{g \circ T = A \circ g}{=} j(A(g(x))) = A(g(x)) = -g(x).$$

Por outro lado,

$$f(x) = (j \circ g)(x) = g(x),$$

para todo $x \in X$.

Logo, $f(T(x)) \neq f(x)$, para todo $x \in X$, e, portanto, $\{(X, T); \mathbb{R}^2\}$ não satisfaz BUT.

(\Leftarrow) Se $\{(X, T); \mathbb{R}^2\}$ não satisfaz BUT, então existe uma aplicação contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x) \neq f(T(x))$, para todo $x \in X$. Assim, a aplicação contínua $g : X \rightarrow S^1$, dada por

$$g(x) = \frac{f(x) - f(T(x))}{\|f(x) - f(T(x))\|},$$

está bem definida e

$$\begin{aligned} g(T(x)) &= \frac{f(T(x)) - f(T(T(x)))}{\|f(T(x)) - f(T(T(x)))\|} = \frac{f(T(x)) - f(x)}{\|f(T(x)) - f(x)\|} \\ &= -\frac{f(x) - f(T(x))}{\|f(x) - f(T(x))\|} = -g(x) = A(g(x)). \end{aligned}$$

Logo, g é uma aplicação equivariante. ■

Lema 2.2.2. *Sejam (X, T) e (Y, S) dois pares, onde X e Y são espaços de Hausdorff conexos e T e S são involuções livres sobre X e Y , respectivamente. Considere $g : (X, T) \rightarrow (Y, S)$ uma aplicação equivariante e $p : X \rightarrow \frac{X}{T}$ e $q : Y \rightarrow \frac{Y}{S}$ as aplicações quocientes. Então, g induz uma aplicação contínua $\bar{g} : \frac{X}{T} \rightarrow \frac{Y}{S}$, de tal forma que o diagrama abaixo é comutativo*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & Y \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ \frac{X}{T} & \xrightarrow{\bar{g}} & \frac{Y}{S}. \end{array}$$

Demonstração: As aplicações quocientes p e q são dadas por

$$p(x) = \bar{x} = \{x, T(x)\} \quad \text{e} \quad q(y) = \bar{y} = \{y, S(y)\}.$$

Pela Proposição 1.3.5, p e q são projeções de recobrimento. Tome a aplicação $\tilde{g} : X \rightarrow \frac{Y}{S}$ definida por

$$\tilde{g}(x) = (q \circ g)(x) = \overline{g(x)} = \{g(x), S(g(x))\}.$$

Como, por hipótese, g é equivariante, segue que $g \circ T = S \circ g$ e, então,

$$\tilde{g}(x) = \{g(x), g(T(x))\},$$

para todo $x \in X$.

Note que \tilde{g} é contínua, uma vez que q e g são contínuas, e \tilde{g} é constante nas classes de equivalência determinadas por T , pois

$$\tilde{g}(T(x)) = \{g(T(x)), g(T(T(x)))\} = \{g(T(x)), g(x)\} = \tilde{g}(x), \quad \forall x \in X.$$

Assim, \tilde{g} induz a aplicação $\bar{g} : \frac{X}{T} \rightarrow \frac{Y}{S}$ definida por

$$\bar{g}(\bar{x}) = \tilde{g}(x).$$

Observe que

$$(q \circ g)(x) = \tilde{g}(x) = \bar{g}(\bar{x}) = (\bar{g} \circ p)(x),$$

ou seja, o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & Y \\ p \downarrow & \searrow \tilde{g} & \downarrow q \\ X & & Y \\ \frac{X}{T} & \xrightarrow{\bar{g}} & \frac{Y}{S}. \end{array}$$

Além disso, \bar{g} é contínua, pois, para todo aberto U de $\frac{Y}{S}$, como $q \circ g$ é contínua, $(q \circ g)^{-1}(U)$ é um aberto de X . Pela comutatividade do diagrama acima, temos que

$$(\bar{g} \circ p)^{-1}(U) = (q \circ g)^{-1}(U)$$

é um aberto de X . Mas $(\bar{g} \circ p)^{-1}(U) = p^{-1}(\bar{g}^{-1}(U))$ e, como $p : X \rightarrow \frac{X}{T}$ é a aplicação quociente, segue que $\bar{g}^{-1}(U)$ é um aberto de $\frac{X}{T}$. ■

Definição 2.2.3. Um elemento g de um grupo multiplicativo G é chamado um **elemento de torção** se existe um inteiro positivo m tal que $g^m = 1$, onde 1 denota o elemento neutro do grupo e g^m indica o produto de m cópias de g . Um grupo é chamado **grupo de torção** (ou periódico) se todos os seus elementos são elementos de torção. E um grupo é dito **grupo livre de torção**, se o seu único elemento de torção é o elemento neutro.

Observação 2.2.2. Notemos que se G é um grupo aditivo, um elemento $g \in G$ é de torção se existe um inteiro $m > 0$ tal que $mg = 0$.

Exemplo 2.2.2. Todo grupo G cíclico infinito (em particular, o grupo \mathbb{Z}) é um grupo livre de torção, uma vez que $g^m = 1$ se, e somente se, $g = 1$, onde $g \in G$ e m é um inteiro positivo (considerando aqui G multiplicativo).

Vejamos a seguir o resultado que dá um critério algébrico para uma tripla $\{(X, T); \mathbb{R}^2\}$ satisfazer BUT.

Teorema 2.2.1. Seja (X, T) um par, onde X é um espaço de Hausdorff conexo por caminhos e T é uma involução livre sobre X . Fixe um ponto $a \in X$ e considere o homomorfismo induzido no grupo fundamental $p_{\sharp} : \Pi_1(X, a) \rightarrow \Pi_1\left(\frac{X}{T}, \bar{a}\right)$, onde $\bar{a} = p(a)$ e $p : X \rightarrow \frac{X}{T}$ é a aplicação quociente. Seja $h_X : \Pi_1(X, a) \rightarrow H_1(X)$ o homomorfismo de Hurewicz, onde $H_1(X)$ é o \mathbb{Z} -grupo de homologia (singular) 1-dimensional de X . Se existir $[\alpha] \in \Pi_1\left(\frac{X}{T}, \bar{a}\right) - p_{\sharp}(\Pi_1(X, a))$, tal que $h_{\frac{X}{T}}([\alpha])$ é um elemento de torção de $H_1\left(\frac{X}{T}\right)$, então $\{(X, T); \mathbb{R}^2\}$ satisfaz BUT (sendo α um laço em $\frac{X}{T}$ baseado em \bar{a}).

Demonstração: Suponha, por contradição, que $\{(X, T); \mathbb{R}^2\}$ não satisfaz BUT. Usando o Lema 2.2.1, segue que existe uma aplicação equivariante $F : (X, T) \rightarrow (S^1, A)$, ou seja, F contínua satisfazendo $F(T(x)) = A(F(x)) = -F(x)$, para todo $x \in X$.

Considere a aplicação quociente $q : S^1 \rightarrow \frac{S^1}{A}$, $q(y) = \bar{y} = \{y, A(y)\} = \{y, -y\}$, para todo $y \in S^1$.

Pelo Lema 2.2.2 e sua demonstração, segue que F induz a aplicação contínua $\bar{F} : \frac{X}{T} \rightarrow \frac{S^1}{A}$ dada por

$$\bar{F}(\bar{x}) = \{F(x), F(T(x))\},$$

onde $\bar{x} = p(x) = \{x, T(x)\}$. Além disso, o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F} & S^1 \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ \frac{X}{T} & \xrightarrow{\bar{F}} & \frac{S^1}{A} \end{array}$$

ou seja, $q \circ F = \bar{F} \circ p$.

Considere $[\alpha] \in \Pi_1\left(\frac{X}{T}, \bar{a}\right) - p_{\#}(\Pi_1(X, a))$ tal que $h_{\frac{X}{T}}([\alpha])$ é um elemento de torção de $H_1\left(\frac{X}{T}\right)$, que existe pela hipótese (com α um laço em $\frac{X}{T}$ baseado em \bar{a}).

Tome $z = F(a)$, então

$$\bar{z} = q(z) = q(F(a)) \stackrel{q \circ F = \bar{F} \circ p}{=} \bar{F}(p(a)) = \bar{F}(\bar{a}).$$

De acordo com a Proposição 1.7.1, temos que o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{array}{ccc} \Pi_1(X, a) & \xrightarrow{F_{\#}} & \Pi_1(S^1, z) \\ p_{\#} \downarrow & & \downarrow q_{\#} \\ \Pi_1\left(\frac{X}{T}, \bar{a}\right) & \xrightarrow{\bar{F}_{\#}} & \Pi_1\left(\frac{S^1}{A}, \bar{z}\right) \\ h_{\frac{X}{T}} \downarrow & & \downarrow h_{\frac{S^1}{A}} \\ H_1\left(\frac{X}{T}\right) & \xrightarrow{\bar{F}_*} & H_1\left(\frac{S^1}{A}\right). \end{array}$$

Sendo $h_{\frac{X}{T}}([\alpha])$ um elemento de torção do grupo abeliano $H_1\left(\frac{X}{T}\right)$, que vamos denotar aqui aditivamente, existe $r \in \mathbb{N}^*$ tal que $r \left(h_{\frac{X}{T}}([\alpha])\right) = 0$. Como \bar{F}_* é um homomorfismo, segue que

$$r \left(\bar{F}_* \left(h_{\frac{X}{T}}([\alpha])\right)\right) = \bar{F}_* \left(r \left(h_{\frac{X}{T}}([\alpha])\right)\right) = \bar{F}_*(0) = 0,$$

e assim, $\bar{F}_* \left(h_{\frac{X}{T}}([\alpha])\right)$ é um elemento de torção de $H_1\left(\frac{S^1}{A}\right)$. Mas $H_1\left(\frac{S^1}{A}\right) \cong \mathbb{Z}$ (Exemplo 1.7.1) é um grupo livre de torção, logo

$$\bar{F}_* \left(h_{\frac{X}{T}}([\alpha])\right) = 0. \tag{I}$$

Pela Proposição 1.3.1, para o laço α em $\frac{X}{T}$, onde $\alpha(0) = \bar{a} = \alpha(1)$, temos que existe um levantamento $\tilde{\alpha} : I \rightarrow X$ tal que $\tilde{\alpha}(0) = a$ e $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$.

Sabendo que $p(\tilde{\alpha}(1)) = \alpha(1) = \bar{a} = p(a) = p(T(a))$, segue que $\tilde{\alpha}(1) = a$ ou $\tilde{\alpha}(1) = T(a)$. Se $\tilde{\alpha}(1) = a$, então $[\tilde{\alpha}] \in \Pi_1(X, a)$, assim

$$[\alpha] = [p \circ \tilde{\alpha}] \in p_{\#}(\Pi_1(X, a)),$$

o que contradiz a hipótese, pois tomamos $[\alpha] \in \Pi_1\left(\frac{X}{T}, \bar{a}\right) - p_{\#}(\Pi_1(X, a))$. Logo, $\tilde{\alpha}(1) = T(a)$.

Como F é equivariante, o caminho $F \circ \tilde{\alpha} : I \rightarrow S^1$ é tal que

$$(F \circ \tilde{\alpha})(0) = F(\tilde{\alpha}(0)) = F(a) = z \quad \text{e} \quad (F \circ \tilde{\alpha})(1) = F(\tilde{\alpha}(1)) = F(T(a)) = -F(a) = -z.$$

Escolha um gerador $[\gamma] \in \Pi_1(S^1, z) \cong \mathbb{Z}$ (Teorema 1.2.1) e seja $\mu : I \rightarrow S^1$ um caminho, tal que $\mu(0) = z$ e $\mu(1) = -z$, e $[q \circ \mu]$ seja um gerador de $\Pi_1\left(\frac{S^1}{A}, \bar{z}\right) \cong \mathbb{Z}$ (Exemplo 1.2.3). Daí,

$$q_{\#}([\gamma]) = [q \circ \gamma] = [(q \circ \mu) * (q \circ \mu)] = [q \circ \mu] + [q \circ \mu] = 2 [q \circ \mu]. \quad (\text{II})$$

Considere o caminho $(F \circ \tilde{\alpha}) * \mu^{-1} : I \rightarrow S^1$, então

$$((F \circ \tilde{\alpha}) * \mu^{-1})(0) = (F \circ \tilde{\alpha})(0) = z = \mu^{-1}(1) = ((F \circ \tilde{\alpha}) * \mu^{-1})(1),$$

ou seja, $[(F \circ \tilde{\alpha}) * \mu^{-1}] \in \Pi_1(S^1, z)$. Como $[\gamma]$ é gerador de $\Pi_1(S^1, z) \cong \mathbb{Z}$, segue que, para algum $m \in \mathbb{Z}$, temos

$$[(F \circ \tilde{\alpha}) * \mu^{-1}] = m [\gamma]$$

então, por $q_{\#}$ ser um homomorfismo,

$$q_{\#}([(F \circ \tilde{\alpha}) * \mu^{-1}]) = q_{\#}(m [\gamma]) = m q_{\#}([\gamma]) \stackrel{(\text{II})}{=} 2m [q \circ \mu].$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} q_{\#}([(F \circ \tilde{\alpha}) * \mu^{-1}]) &= [q \circ ((F \circ \tilde{\alpha}) * \mu^{-1})] = [(q \circ F \circ \tilde{\alpha}) * (q \circ \mu^{-1})] \\ &= [q \circ F \circ \tilde{\alpha}] - [q \circ \mu], \end{aligned}$$

uma vez que $q \circ \mu^{-1}$ tem a orientação contrária a de $q \circ \mu$.

Portanto,

$$[q \circ F \circ \tilde{\alpha}] - [q \circ \mu] = 2m [q \circ \mu],$$

isto é,

$$[q \circ F \circ \tilde{\alpha}] = (2m + 1) [q \circ \mu].$$

Como $[q \circ \mu]$ é gerador de $\Pi_1\left(\frac{S^1}{A}, \bar{z}\right) \cong \mathbb{Z}$, então $[q \circ F \circ \tilde{\alpha}] = (2m + 1) [q \circ \mu]$ corresponde a um elemento ímpar em \mathbb{Z} pela identificação. Logo, $[q \circ F \circ \tilde{\alpha}] \neq 0$.

Além disso, pela Observação 1.1.3 (item (ii)) e pelo Teorema de Hurewicz (Teorema 1.7.2), temos que $h_{\frac{S^1}{A}}$ é um isomorfismo, assim, $h_{\frac{S^1}{A}}([q \circ F \circ \tilde{\alpha}]) \neq 0$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 h_{\frac{S^1}{A}}([q \circ F \circ \tilde{\alpha}]) &\stackrel{q \circ F = \bar{F} \circ p}{=} h_{\frac{S^1}{A}}([\bar{F} \circ p \circ \tilde{\alpha}]) \stackrel{p \circ \tilde{\alpha} = \alpha}{=} h_{\frac{S^1}{A}}([\bar{F} \circ \alpha]) = h_{\frac{S^1}{A}}(\bar{F}_{\#}([\alpha])) \\
 &\stackrel{h_{\frac{S^1}{A}} \circ \bar{F}_{\#} = \bar{F}_* \circ h_{\frac{X}{T}}}{=} \bar{F}_* \left(h_{\frac{X}{T}}([\alpha]) \right) \stackrel{(1)}{=} 0,
 \end{aligned}$$

o que nos leva a uma contradição.

Logo, $\{(X, T); \mathbb{R}^2\}$ satisfaz BUT. ■

Corolário 2.2.1. *Seja (X, T) um par, onde X é um espaço de Hausdorff conexo por caminhos e T é uma involução livre sobre X . Se $\Pi_1(X)$ é um grupo de torção (que inclui o caso em que $X = S^2$, a esfera unitária bidimensional), então $\{(X, T); \mathbb{R}^2\}$ satisfaz BUT.*

Demonstração: Escolha um ponto base $a \in X$ e sejam $p : X \rightarrow \frac{X}{T}$ a aplicação quociente e $\bar{a} = p(a)$.

Pela Proposição 1.3.5 e pela Observação 1.3.5, temos que $\left(X, p, \frac{X}{T}\right)$ é um espaço de recobrimento de duas folhas tendo como grupo de automorfismos de recobrimento $G\left(X \mid \frac{X}{T}\right) = \{Id, T\}$. De acordo com a Proposição 1.3.4, segue que $p_{\#}(\Pi_1(S^1))$ tem índice dois e, portanto, $p_{\#}(\Pi_1(S^1))$ é normal, assim $\left(X, p, \frac{X}{T}\right)$ é um recobrimento regular. Logo, pelo Corolário 1.3.9,

$$\frac{\Pi_1\left(\frac{X}{T}, \bar{a}\right)}{p_{\#}(\Pi_1(X, a))} \cong \mathbb{Z}_2.$$

Assim, existe $[\alpha] \in \Pi_1\left(\frac{X}{T}, \bar{a}\right) - p_{\#}(\Pi_1(X, a))$. Como o subgrupo quociente tem ordem dois, segue que a classe de $[\alpha]^2$ no quociente é nula, o que equivale a $[\alpha]^2 \in p_{\#}(\Pi_1(X, a))$.

Por hipótese, $\Pi_1(X, a)$ é um grupo de torção, então, para todo $[\beta] \in \Pi_1(X, a)$, existe $r \in \mathbb{N}^*$ tal que $[\beta]^r = 1$, onde 1 indica a classe do caminho constante c_a em X . Daí, $(p_{\#}([\beta]))^r = p_{\#}([\beta]^r) = p_{\#}(1) = 1$, ou seja, $p_{\#}([\beta])$ é um elemento de torção e, portanto, $p_{\#}(\Pi_1(X, a))$ é um grupo de torção. Assim, como $[\alpha]^2 \in p_{\#}(\Pi_1(X, a))$, existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$[\alpha]^{2n} = ([\alpha]^2)^n = 1$$

e portanto, $[\alpha]$ é um elemento de torção de $\Pi_1\left(\frac{X}{T}, \bar{a}\right)$. Por $h_{\frac{X}{T}}$ ser um homomorfismo, segue que $h_{\frac{X}{T}}([\alpha])$ é um elemento de torção de $H_1\left(\frac{X}{T}\right)$.

Logo, pelo Teorema 2.2.1, $\{(X, T); \mathbb{R}^2\}$ satisfaz BUT. ■

Corolário 2.2.2. *Consideremos X e Y espaços de Hausdorff conexos por caminhos, $T : X \rightarrow X$ uma involução livre e $S : Y \rightarrow Y$ uma involução que possui pelo menos um ponto fixo. Se existe $[\alpha] \in \Pi_1\left(\frac{X}{T}\right) - (p_1)_{\#}(\Pi_1(X))$ tal que $h_{\frac{X}{T}}([\alpha])$ é um elemento*

de torção em $H_1\left(\frac{X}{T}\right)$, sendo $(p_1)_\#$ o homomorfismo induzido da aplicação quociente $p_1 : X \rightarrow \frac{X}{T}$, então $\{(X \times Y, T \times S); \mathbb{R}^2\}$ satisfaz BUT, onde $T \times S : X \times Y \rightarrow X \times Y$ é a involução produto definida por $(T \times S)(x, y) = (T(x), S(y))$, para todo $(x, y) \in X \times Y$.

Demonstração: Note que T é uma involução livre, então $T(x) \neq x$, para todo $x \in X$, assim

$$(T \times S)(x, y) = (T(x), S(y)) \neq (x, y), \quad \forall (x, y) \in X \times Y,$$

ou seja, $T \times S$ é um involução livre sobre $X \times Y$.

Tome $a \in X$ e $\bar{a} = p_1(a)$. Seja $c \in Y$ tal que $S(c) = c$ (que existe por hipótese). Considere as aplicações quocientes

$$p_2 : Y \rightarrow \frac{Y}{S} \quad \text{e} \quad p : X \times Y \rightarrow \frac{X \times Y}{T \times S}$$

e seja $\overline{(a, c)} = p(a, c)$.

Defina as aplicações

$$\begin{aligned} \phi_c : (X, T) &\rightarrow (X \times Y, T \times S) & \text{e} & \quad q : (X \times Y, T \times S) \rightarrow (X, T) \\ x &\mapsto (x, c) & & \quad (x, y) \mapsto x. \end{aligned}$$

Temos que ϕ_c e q são aplicações equivariantes, uma vez que ϕ_c e q são contínuas e

$$\phi_c(T(x)) = (T(x), c) \stackrel{c=S(c)}{=} (T(x), S(c)) = (T \times S)(x, c) = (T \times S)(\phi_c(x))$$

e

$$q((T \times S)(x, y)) = q(T(x), S(y)) = T(x) = T(q(x, y)).$$

Pelo Lema 2.2.2 e sua demonstração, ϕ_c e q induzem as aplicações contínuas

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_c : \frac{X}{T} &\rightarrow \frac{X \times Y}{T \times S} & \text{e} & \quad \bar{q} : \frac{X \times Y}{T \times S} \rightarrow \frac{X}{T} \\ \bar{x} &\mapsto \bar{\phi}_c(\bar{x}) = \overline{\phi_c(x)} = \overline{(x, c)} & & \quad (x, y) \mapsto \bar{q}\left(\overline{(x, y)}\right) = \overline{q(x, y)} = \bar{x} \end{aligned}$$

tais que os seguintes diagramas são comutativos

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi_c} & X \times Y \\ p_1 \downarrow & & \downarrow p \\ \frac{X}{T} & \xrightarrow{\bar{\phi}_c} & \frac{X \times Y}{T \times S} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X \times Y & \xrightarrow{q} & X \\ p \downarrow & & \downarrow p_1 \\ \frac{X \times Y}{T \times S} & \xrightarrow{\bar{q}} & \frac{X}{T} \end{array}$$

ou seja, $p \circ \phi_c = \bar{\phi}_c \circ p_1$ e $p_1 \circ q = \bar{q} \circ p$. De onde segue que

$$p_\# \circ (\phi_c)_\# = (\bar{\phi}_c)_\# \circ (p_1)_\# \quad \text{e} \quad (p_1)_\# \circ q_\# = \bar{q}_\# \circ p_\#.$$

Notemos que,

$$(\bar{q} \circ \bar{\phi}_c)(\bar{x}) = \bar{q}(\bar{\phi}_c(\bar{x})) = \bar{q}\left(\overline{(x, c)}\right) = \bar{x},$$

ou seja, $\bar{q} \circ \bar{\phi}_c$ é a aplicação identidade de $\frac{X}{T}$.

Tome $[\alpha] \in \Pi_1\left(\frac{X}{T}, \bar{a}\right) - (p_1)_\#(\Pi_1(X, a))$ tal que $h_{\frac{X}{T}}([\alpha])$ é um elemento de torção em $H_1\left(\frac{X}{T}\right)$ (dado pela hipótese).

De acordo com a Proposição 1.7.1, temos o diagrama comutativo abaixo

$$\begin{array}{ccc} \Pi_1\left(\frac{X}{T}, \bar{a}\right) & \xrightarrow{(\bar{\phi}_c)_\#} & \Pi_1\left(\frac{X \times Y}{T \times S}, \overline{(a, c)}\right) \\ h_{\frac{X}{T}} \downarrow & & \downarrow h_{\frac{X \times Y}{T \times S}} \\ H_1\left(\frac{X}{T}\right) & \xrightarrow{(\bar{\phi}_c)_*} & H_1\left(\frac{X \times Y}{T \times S}\right). \end{array}$$

Como $(\bar{\phi}_c)_*$ é um homomorfismo e $h_{\frac{X}{T}}([\alpha])$ é um elemento de torção de $H_1\left(\frac{X}{T}\right)$, temos que $(\bar{\phi}_c)_*\left(h_{\frac{X}{T}}([\alpha])\right)$ é um elemento de torção de $H_1\left(\frac{X \times Y}{T \times S}\right)$. Assim,

$$h_{\frac{X \times Y}{T \times S}}([\bar{\phi}_c \circ \alpha]) = h_{\frac{X \times Y}{T \times S}}((\bar{\phi}_c)_\#([\alpha])) \stackrel{h_{\frac{X \times Y}{T \times S}} \circ (\bar{\phi}_c)_\# = (\bar{\phi}_c)_* \circ h_{\frac{X}{T}}}{=} (\bar{\phi}_c)_*\left(h_{\frac{X}{T}}([\alpha])\right)$$

é um elemento de torção de $H_1\left(\frac{X \times Y}{T \times S}\right)$.

Provemos que $[\bar{\phi}_c \circ \alpha] \notin p_\#(\Pi_1(X \times Y, (a, c)))$. Se $[\bar{\phi}_c \circ \alpha] \in p_\#(\Pi_1(X \times Y, (a, c)))$, então existe $[\gamma] \in \Pi_1(X \times Y, (a, c))$ tal que

$$p_\#([\gamma]) = [\bar{\phi}_c \circ \alpha].$$

Assim, como $\bar{q} \circ \bar{\phi}_c = Id_{\frac{X}{T}}$, temos

$$\begin{aligned} [\alpha] &= \left(Id_{\frac{X}{T}}\right)_\#([\alpha]) = (\bar{q} \circ \bar{\phi}_c)_\#([\alpha]) = [\bar{q} \circ \bar{\phi}_c \circ \alpha] = \bar{q}_\#([\bar{\phi}_c \circ \alpha]) \\ &= \bar{q}_\#(p_\#([\gamma])) \stackrel{\bar{q}_\# \circ p_\# = (p_1)_\# \circ q_\#}{=} (p_1)_\#(q_\#([\gamma])) \in (p_1)_\#(\Pi_1(X, a)), \end{aligned}$$

o que nos dá uma contradição pela maneira como consideramos $[\alpha]$. Logo, $[\bar{\phi}_c \circ \alpha] \notin p_\#(\Pi_1(X \times Y, (a, c)))$.

Portanto, existe $[\bar{\phi}_c \circ \alpha] \in \Pi_1\left(\frac{X \times Y}{T \times S}, \overline{(a, c)}\right) - p_\#(\Pi_1(X \times Y, (a, c)))$ tal que $h_{\frac{X \times Y}{T \times S}}([\bar{\phi}_c \circ \alpha])$ é um elemento de torção de $H_1\left(\frac{X \times Y}{T \times S}\right)$. Usando o Teorema 2.2.1, obtemos que $\{(X \times Y, T \times S); \mathbb{R}^2\}$ satisfaz BUT. ■

Observação 2.2.3. (i) *Relativo a um par $(X \times Y, T \times S)$, onde T é uma involução livre sobre X , podemos ver que se Z é um espaço topológico tal que $\{(X, T); Z\}$ satisfaz BUT e S tem um ponto fixo, então $\{(X \times Y, T \times S); Z\}$ satisfaz BUT. De fato, suponha que $S(c) = c$, para algum $c \in Y$. Para toda aplicação contínua $f : X \times Y \rightarrow Z$, considere a aplicação contínua $\tilde{f} : X \rightarrow Z$, dada por $\tilde{f}(x) = f(x, c)$. Uma vez que $\{(X, T); Z\}$ satisfaz BUT, existe $x_0 \in X$ tal que $\tilde{f}(x_0) = \tilde{f}(T(x_0))$. Daí, para $(x_0, c) \in X \times Y$,*

$$\begin{aligned} f(x_0, c) &= \tilde{f}(x_0) = \tilde{f}(T(x_0)) = f(T(x_0), c) \stackrel{S(c)=c}{=} f(T(x_0), S(c)) \\ &= f((T \times S)(x_0, c)) \end{aligned}$$

e assim, $\{(X \times Y, T \times S); Z\}$ satisfaz BUT. Entretanto, se S é uma involução livre sobre Y , ou seja, sem ponto fixo, então não temos nenhum modo topológico (natural) que leva a provar que $\{(X \times Y, T \times S); Z\}$ satisfaz BUT, mesmo quando $\{(Y, S); Z\}$ também satisfaça BUT (como observado em Ventrúscolo, Desideri e Pergher (2011), [8]).

- (ii) Poderíamos provar o Corolário 2.2.2 usando o raciocínio feito em (i), pois da hipótese do corolário e do teorema anterior, segue que $\{(X, T); \mathbb{R}^2\}$ satisfaz BUT e ainda, por hipótese (do corolário), S tem um ponto fixo c . Logo, como em (i), conclui-se que $\{(X \times Y, T \times S); \mathbb{R}^2\}$ satisfaz BUT.

Na sequência exibimos um exemplo que mostra que se não exigimos no Corolário 2.2.2 que a involução S tenha ponto fixo (ou seja, se S for uma involução livre) e valer as demais hipóteses do corolário, então a tripla $\{(X \times Y, T \times S); \mathbb{R}^2\}$ pode não satisfazer BUT.

Exemplo 2.2.3. Considere (S^2, A) e (S^1, A) , onde A é a aplicação antipodal em cada esfera. Sabemos, por considerar $(X, T) = (S^2, A)$ no Corolário 2.2.1 (e sua demonstração), que existe $[\alpha] \in \Pi_1\left(\frac{S^2}{A}, \bar{a}\right) - (p_1)_\#(\Pi_1(S^2, a))$ tal que $h_{\frac{S^2}{A}}([\alpha])$ é um elemento de torção de $H_1\left(\frac{S^2}{A}\right)$ e que $\{(S^2, A); \mathbb{R}^2\}$ satisfaz BUT.

Temos, claramente, que $S := A : S^1 \rightarrow S^1$ não tem ponto fixo.

Mostremos que $\{(S^2 \times S^1, A \times A); \mathbb{R}^2\}$ não satisfaz BUT. De fato, tome a aplicação

$$g = j \circ q : \begin{array}{ccc} S^2 \times S^1 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & y \end{array}$$

onde $q : S^2 \times S^1 \rightarrow S^1$ é a aplicação projeção na segunda coordenada e $j : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é a aplicação inclusão. Temos que g é contínua e, para todo $(x, y) \in S^2 \times S^1$,

$$g(x, y) = y \neq -y = g(-x, -y) = g(A(x), A(y)) = g((A \times A)(x, y)),$$

assim, $\{(S^2 \times S^1, A \times A); \mathbb{R}^2\}$ não satisfaz BUT.

2.3 Um invariante topológico vindo da generalização do Teorema de Borsuk-Ulam

Dados $n < m$, com $n, m \in \mathbb{N}$, considere a aplicação inclusão

$$j : (S^n, A) \rightarrow (S^m, A),$$

onde A indica a aplicação antipodal em cada esfera. A aplicação j é equivariante, pois

$$j(A(x)) = j(-x) = -x = A(x) = A(j(x)), \quad \forall x \in S^n.$$

Lema 2.3.1. Considere Y um espaço topológico e (S^m, A) , (S^n, A) e (S^p, A) três pares, onde A indica a aplicação antipodal em cada esfera.

- (i) Se $\{(S^n, A); Y\}$ satisfaz BUT, então $\{(S^m, A); Y\}$ satisfaz BUT, para todo $m > n$;

- (ii) Se $\{(S^n, A); Y\}$ não satisfaz BUT, então $\{(S^p, A); Y\}$ não satisfaz BUT, para todo $p < n$.

Demonstração:

- (i) Admita que $\{(S^n, A); Y\}$ satisfaça BUT. Vamos supor que exista $m > n$ tal que $\{(S^m, A); Y\}$ não satisfaz BUT. Então existe uma aplicação contínua $g : S^m \rightarrow Y$ tal que $g(x) \neq g(A(x))$, para todo $x \in S^m$.

Como $m > n$, segue que a aplicação inclusão $j : (S^n, A) \rightarrow (S^m, A)$ está bem definida e temos que $j \circ A = A \circ j$.

Assim, a aplicação composta $g \circ j : S^n \rightarrow Y$ é contínua e, para todo $x \in S^n$,

$$g(j(x)) = g(x) \neq g(A(x)) = g(A(j(x))) = g(j(A(x))).$$

Logo, existe $g \circ j : S^n \rightarrow Y$ contínua tal que $(g \circ j)(x) \neq (g \circ j)(A(x))$, para todo $x \in S^n$, e assim, $\{(S^n, A); Y\}$ não satisfaz BUT, o que contradiz a hipótese.

Portanto, $\{(S^m, A); Y\}$ satisfaz BUT, para todo $m > n$.

- (ii) É consequência de (i), pois se $\{(S^p, A); Y\}$ satisfaz BUT, para algum $p < n$, então, por (i), necessariamente, $\{(S^n, A); Y\}$ satisfaz BUT, o que nos dá uma contradição. ■

Com base no lema anterior, considerado os pares (S^n, A) , $n \geq 0$, fica consistente a seguinte definição:

Definição 2.3.1. Dado um espaço topológico Y , dizemos que

- (i) $BUT(Y) = \infty$, se $\{(S^n, A); Y\}$ não satisfaz BUT, para todo $n \in \mathbb{N}$;
(ii) $BUT(Y) = n$, se n é o menor número natural tal que $\{(S^n, A); Y\}$ satisfaz BUT.

Exemplo 2.3.1. $BUT(\{x_0\}) = 0$, para qualquer espaço unitário $Y = \{x_0\}$, pois $\{(S^0, A); \{x_0\}\}$ satisfaz BUT, onde $S^0 = \{-1, 1\}$, uma vez que a única aplicação contínua $f : S^0 \rightarrow \{x_0\}$ é a constante e, assim, $f(x) = f(A(x))$, para todo $x \in S^0$.

Exemplo 2.3.2. $BUT(\mathbb{R}^n) = n$, para todo $n \geq 1$, pois $\{(S^{n-1}, A); \mathbb{R}^n\}$ não satisfaz BUT, já que existe a aplicação inclusão $j : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo $j(x) = x \neq -x = j(-x) = j(A(x))$, para todo $x \in S^{n-1}$. Porém, $\{(S^n, A); \mathbb{R}^n\}$ satisfaz BUT, pelo Teorema de Borsuk-Ulam (Teorema 2.1.1).

Exemplo 2.3.3. Se Y é um espaço com pelo menos dois pontos, então $BUT(Y) \geq 1$, pois $\{(S^0, A); Y\}$ não satisfaz BUT. De fato, tome Y contendo $\{a, b\}$, com $a \neq b$. Existe, por exemplo, a aplicação contínua $f : S^0 \rightarrow Y$, dada por $f(1) = a$ e $f(-1) = b$ tal que $f(x) \neq f(A(x))$, para $x \in \{-1, 1\}$. Assim, $\{(S^0, A); Y\}$ não satisfaz BUT.

Exemplo 2.3.4. Se Y é um espaço com pelo menos dois pontos, munido da topologia discreta, então $BUT(Y) = 1$, em particular $BUT(S^0) = 1$. Com efeito, pelo exemplo anterior $BUT(Y) \geq 1$ e, para toda aplicação contínua $f : S^1 \rightarrow Y$, temos que $f(S^1)$ é conexo, pois S^1 é conexo. Mas os únicos conexos de um espaço discreto são os conjuntos com um único ponto e o vazio, assim, $f(S^1) = \{x_0\}$, com $x_0 \in Y$. Logo, para todo $x \in S^1$, $f(x) = x_0 = f(A(x))$ e, portanto, $\{(S^1, A); Y\}$ satisfaz BUT.

Exemplo 2.3.5. Para $Y = \{a, b\}$ com a topologia caótica $\mathcal{T} = \{\emptyset, Y\}$, temos $BUT(Y) = \infty$, pois, podemos tomar, para todo $n \geq 0$, um subconjunto $P \subset S^n$, tal que $P \cup A(P) = S^n$ e $P \cap A(P) = \emptyset$, assim existe uma aplicação contínua $f : S^n \rightarrow Y$, onde $f(P) = \{a\}$ e $f(A(P)) = \{b\}$. Daí, segue que $f(x) = a \neq b = f(A(x))$, se $x \in P$, ou $f(x) = b \neq a = f(A(x))$, se $x \in A(P)$. Logo, $f(x) \neq f(A(x))$, para todo $x \in S^n$. Portanto, $\{(S^n, A); Y\}$ não satisfaz BUT.

Exemplo 2.3.6. $BUT(S^n) > n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, uma vez que, para a aplicação identidade $Id_{S^n} : S^n \rightarrow S^n$, têm-se $Id_{S^n}(x) = x \neq -x = Id_{S^n}(-x) = Id_{S^n}(A(x))$, para todo $x \in S^n$, e assim, $\{(S^n, A); S^n\}$ não satisfaz BUT.

Proposição 2.3.1. Sejam Y e W espaços topológicos. Se existe uma aplicação contínua e injetora $h : Y \rightarrow W$ (em particular, se Y é um subespaço de W), então $BUT(Y) \leq BUT(W)$.

Demonstração: Note que se $BUT(W) = \infty$, então, claramente, $BUT(Y) \leq BUT(W)$.

Suponha que $BUT(W) = m$.

Seja $f : S^m \rightarrow Y$ uma aplicação contínua qualquer e considere a aplicação composta $h \circ f : S^m \rightarrow W$. Temos que $h \circ f$ é contínua, pois h e f são contínuas.

Como $\{(S^m, A); W\}$ satisfaz BUT, então, para a composta $h \circ f$, segue que existe $x_0 \in S^m$ tal que

$$h(f(x_0)) = h(f(A(x_0))).$$

Por h ser injetora, segue que $f(x_0) = f(A(x_0))$. Assim, $\{(S^m, A); Y\}$ satisfaz BUT.

Logo, $BUT(Y) \leq BUT(W)$. ■

Corolário 2.3.1. $BUT(Y)$ é um invariante topológico.

Demonstração: Sejam Y e W espaços homeomorfos e $f : Y \rightarrow W$ um homeomorfismo. Pela proposição anterior, $BUT(Y) \leq BUT(W)$, uma vez que f é contínua e injetora. Mas $f^{-1} : W \rightarrow Y$, também, é contínua e injetora e, portanto, $BUT(W) \leq BUT(Y)$. Logo, $BUT(Y) = BUT(W)$. ■

Exemplo 2.3.7. $BUT(S^n - \{P\}) = n$, onde $P = (0, 0, \dots, 0, 1)$. De fato, temos que $S^n - \{P\}$ e \mathbb{R}^n são homeomorfos (pela projeção estereográfica). Logo, pelo Exemplo 2.3.2 e pelo Corolário 2.3.1, segue que $BUT(S^n - \{P\}) = n$.

Observação 2.3.1. $BUT(Y)$ não é um invariante homotópico. Tome, por exemplo, $Y = \{x_0\}$ (x_0 um ponto qualquer de \mathbb{R}) e $W = \mathbb{R}$. Esses espaços têm o mesmo tipo de homotopia (vide Exemplo 1.2.4), mas $BUT(\{x_0\}) = 0 < 1 = BUT(\mathbb{R})$, como visto nos Exemplos 2.3.1 e 2.3.2.

3 Versão fraca do Teorema de Borsuk-Ulam

Neste capítulo, apresentamos uma *versão fraca* (*Weak*) do Teorema de Borsuk-Ulam (referida como WBUT), dada por Ventrúsculo, Desideri e Pergher (2011), [8], usando triplas $\{(X, T); G\}$, com (X, T) um par, onde X é um espaço topológico equipado por uma involução livre T , e G um grupo topológico.

O capítulo está dividido em quatro seções. Na primeira seção, apresentamos a definição da versão fraca WBUT, relacionamos tal condição com a condição BUT abordada no capítulo anterior e ilustramos com alguns exemplos. Na segunda seção, analisamos o caso específico em que o grupo topológico é o toro bidimensional \mathbb{T}^2 , apresentamos a prova detalhada de um resultado que dá um critério algébrico para $\{(X, T); \mathbb{T}^2\}$ satisfazer WBUT (dado pelos autores). Na seção seguinte, considerando superfícies fechadas \mathbb{S} equipadas de involução livre, apresentamos um resultado que dá uma equivalência entre a versão fraca WBUT para as triplas $\{(\mathbb{S}, T); \mathbb{T}^2\}$ e a condição BUT para $\{(\mathbb{S}, T), \mathbb{R}^2\}$. Por último, na quarta seção, apresentamos um invariante topológico (na categoria de grupos topológicos) obtido da versão fraca WBUT e apresentamos alguns exemplos e resultados. Este invariante, por nós definido, é similar ao que foi dado pelos autores citados acima, para a condição BUT e abordado no capítulo anterior.

3.1 Definições e Exemplos

Definição 3.1.1. *Seja G um conjunto não vazio munido de uma operação, que vamos denotar multiplicativamente. Dizemos que G é um **grupo topológico** se:*

- (a) (G, \cdot) é um grupo;
- (b) G é um espaço topológico;
- (c) a operação $(g_1, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2$ de $G \times G$ em G é uma aplicação contínua do espaço produto $G \times G$ no espaço G ;
- (d) a aplicação inversão $i : G \rightarrow G$, dada por $i(g) = g^{-1}$, é contínua.

Exemplo 3.1.1. *O grupo \mathbb{Z}_2 , das classes de restos módulo 2, é um grupo topológico. De fato, temos que $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ é um grupo aditivo e podemos considerar \mathbb{Z}_2 como um espaço topológico $(\mathbb{Z}_2, \mathcal{T})$, tomando a topologia discreta $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\mathbb{Z}_2)$, das partes de \mathbb{Z}_2 . É fácil ver, considerando em $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ a topologia produto (que será a topologia discreta associada a esse conjunto), que as aplicações $h : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$, dada por*

$h(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x} + \bar{y}$, e $i : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$, dada por $i(\bar{x}) = -\bar{x}$ (que neste caso é a aplicação identidade), são contínuas.

Mais geralmente, todo grupo com a topologia discreta é um grupo topológico.

Exemplo 3.1.2. (Toro bidimensional) Consideremos o toro visto como o espaço quociente

$$\mathbb{T}^2 = \frac{[0, 1] \times [0, 1]}{\sim},$$

onde a relação de equivalência \sim identifica $(x, 0)$ com $(x, 1)$ e $(0, y)$ com $(1, y)$, para todos $x, y \in [0, 1]$ (Exemplo 1.5.1, (ii)). Vamos indicar a classe de equivalência de um elemento (x, y) por $\overline{(x, y)}$. Assim,

$$\mathbb{T}^2 = \left\{ \overline{(x, y)}; 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1 \right\}.$$

Note que

$$1. \overline{(x, 0)} = \overline{(x, 1)} \text{ e } \overline{(0, y)} = \overline{(1, y)}, \text{ para todos } x, y \in [0, 1];$$

$$2. \overline{(x, y)} = \overline{(0, 0)} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{ou } x = 1 \\ & e \\ y = 0 & \text{ou } y = 1 \end{cases};$$

3. Mais geralmente,

$$\overline{(x_1, y_1)} = \overline{(x_2, y_2)} \Leftrightarrow x_1 - x_2 = 1 \cdot k_1 \text{ e } y_1 - y_2 = 1 \cdot k_2,$$

com $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ (congruência módulo 1).

Em \mathbb{T}^2 temos bem definida a operação adição (mod 1), indicada pela aplicação $f : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, dada por $f\left(\overline{(x_1, y_1)}, \overline{(x_2, y_2)}\right) = \overline{(x_1, y_1)} + \overline{(x_2, y_2)} = \overline{(x_1 + x_2, y_1 + y_2)}$.

Temos, por exemplo, que $\overline{\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)} + \overline{\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)} = \overline{\left(\frac{1}{2}, 0\right)}$. Com esta operação, \mathbb{T}^2 é um grupo aditivo, onde o elemento neutro é $\overline{(0, 0)}$ e o simétrico de um elemento $\overline{(x, y)} \in \mathbb{T}^2$ é o elemento $\overline{(1 - x, 1 - y)}$. Isto é, $-\overline{(x, y)} = \overline{(1 - x, 1 - y)}$.

Podemos ver \mathbb{T}^2 como um espaço topológico com a topologia quociente, tomando em $[0, 1] \times [0, 1]$ a topologia usual de \mathbb{R}^2 . Dessa maneira temos que a aplicação f dada acima e a aplicação inversão $i : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, dada por $i\left(\overline{(x, y)}\right) = -\overline{(x, y)} = \overline{(1 - x, 1 - y)}$, são contínuas.

Logo, \mathbb{T}^2 é um grupo topológico.

Ressaltamos que o toro bidimensional é a única superfície compacta que admite estrutura de grupo topológico (vide Lima (2006, Exemplo 18, Cap.5, p.179)).

Observe que dado um grupo topológico G , a aplicação inversão $i : G \rightarrow G$ é uma involução, já que $(i \circ i)(g) = i(i(g)) = i(g^{-1}) = (g^{-1})^{-1} = g$, para todo $g \in G$.

O lema a seguir (item (2)) nos mostra uma outra forma de ver quando uma tripla $\{(X, T); Y\}$ satisfaz BUT, se consideramos $Y = G$ um grupo topológico. A versão fraca, que é uma extensão da propriedade BUT, foi motivada por esse resultado:

Lema 3.1.1. *Sejam (X, T) um par, onde T é uma involução livre sobre X , e G um grupo topológico. Então:*

- (1) Para toda aplicação contínua $f : X \rightarrow G$, a aplicação $F : (X, T) \rightarrow (G, i)$, definida por $F(x) = f(x) \cdot (f(T(x)))^{-1}$, é equivariante.
- (2) A tripla $\{(X, T); G\}$ satisfaz BUT se, e somente se, para cada aplicação contínua $f : X \rightarrow G$, temos que $F^{-1}(\{e\}) \neq \emptyset$, onde $F : (X, T) \rightarrow (G, i)$ é a aplicação equivariante, definida em (i), $F(x) = f(x) \cdot (f(T(x)))^{-1}$, e e é o elemento neutro de G .

Demonstração:

- (1) Dada $f : X \rightarrow G$, considere a aplicação $F : (X, T) \rightarrow (G, i)$, definida por $F(x) = f(x) \cdot (f(T(x)))^{-1}$. A aplicação F é contínua, pois f e T são contínuas e a operação em G e a inversão são aplicações contínuas. Além disso, para todo $x \in X$,

$$\begin{aligned} F(T(x)) &= f(T(x)) \cdot (f(T(T(x))))^{-1} \stackrel{T \circ T = Id_X}{=} f(T(x)) \cdot (f(x))^{-1} \\ &= (f(x) \cdot (f(T(x)))^{-1})^{-1} = (F(x))^{-1} \\ &= i(F(x)). \end{aligned}$$

Logo, F é equivariante.

- (2) Seja $\{(X, T); G\}$ satisfazendo BUT, então, para qualquer aplicação contínua $f : X \rightarrow G$, existe $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = f(T(x_0))$, e daí multiplicando (em G) pelo inverso de $f(T(x_0))$, obtemos

$$e = f(x_0) \cdot (f(T(x_0)))^{-1} = F(x_0).$$

Assim, existe $x_0 \in X$ tal que $F(x_0) = e$. Logo, $F^{-1}(\{e\}) \neq \emptyset$. Reciprocamente, considere uma aplicação contínua $f : X \rightarrow G$. Tome $F : (X, T) \rightarrow (G, i)$ a aplicação equivariante dada por

$$F(x) = f(x) \cdot (f(T(x)))^{-1}, \forall x \in X.$$

Por hipótese, $F^{-1}(\{e\}) \neq \emptyset$, ou seja, existe $x_0 \in X$ tal que $F(x_0) = f(x_0) \cdot (f(T(x_0)))^{-1} = e$. Logo, $f(x_0) = f(T(x_0))$ e, portanto, $\{(X, T); G\}$ satisfaz BUT. ■

Dado um grupo topológico G , seja

$$2G := \{g \in G; g^2 = e\} = \{g \in G; g^{-1} = g\} = \{g \in G; i(g) = g\},$$

onde e indica o elemento neutro de G . Note que $e \in 2G$, assim $2G \neq \emptyset$.

Definição 3.1.2. Considere (X, T) um par, onde T é uma involução livre sobre X , e G um grupo topológico. Dizemos que $\{(X, T); G\}$ **satisfaz o Teorema de Borsuk-Ulam Fraco** ou **satisfaz uma versão fraca do Teorema de Borsuk-Ulam**, abreviadamente, **satisfaz WBUT** (Weak Borsuk-Ulam Theorem) se, para qualquer aplicação contínua $f : X \rightarrow G$, temos que $F^{-1}(2G) \neq \emptyset$, com $F : (X, T) \rightarrow (G, i)$ sendo a aplicação equivariante definida por $F(x) = f(x) \cdot (f(T(x)))^{-1}$.

Lema 3.1.2. Sejam (X, T) um par, onde T é uma involução livre sobre X , e G um grupo topológico.

- (i) Se $\{(X, T); G\}$ satisfaz BUT, então $\{(X, T); G\}$ satisfaz WBUT.
- (ii) Se $2G = \{e\}$, então $\{(X, T); G\}$ satisfaz BUT se, e somente se, $\{(X, T); G\}$ satisfaz WBUT.

Demonstração:

- (i) Se $\{(X, T); G\}$ satisfaz BUT, pelo Lema 3.1.1, para qualquer aplicação contínua $f : X \rightarrow G$, temos que $F^{-1}(\{e\}) \neq \emptyset$, onde $F : (X, T) \rightarrow (G, i)$ é a aplicação equivariante dada por $F(x) = f(x) \cdot (f(T(x)))^{-1}$. Assim,

$$F^{-1}(2G) \supseteq F^{-1}(\{e\}) \neq \emptyset.$$

Logo $\{(X, T); G\}$ satisfaz WBUT.

- (ii) Se $\{(X, T); G\}$ satisfaz WBUT, então, para qualquer aplicação contínua $f : X \rightarrow G$, temos que $F^{-1}(2G) \neq \emptyset$, onde $F : (X, T) \rightarrow (G, i)$ é a aplicação $F(x) = f(x) \cdot (f(T(x)))^{-1}$. Como $2G = \{e\}$, segue que $F^{-1}(\{e\}) \neq \emptyset$ e assim, pelo Lema 3.1.1, $\{(X, T); G\}$ satisfaz BUT. A prova da outra implicação é garantida pelo item (i). ■

Exemplo 3.1.3. Para n ímpar, a tripla $\{(n\mathbb{T}^2, i); \mathbb{R}^2\}$ não satisfaz BUT e nem satisfaz WBUT, onde $n\mathbb{T}^2$ indica a soma conexa de n -toros, i é a aplicação inversão de $n\mathbb{T}^2$ e \mathbb{R}^2 é visto como grupo topológico com a adição usual.

De fato, considere $n\mathbb{T}^2$, com n ímpar. Vamos inserir a superfície $n\mathbb{T}^2$ em \mathbb{R}^3 , de modo que haja intersecção dos planos xOy , xOz e yOz com a superfície $n\mathbb{T}^2$, dividindo-a em oito partes simétricas, como representada na figura a seguir, para $n = 3$:

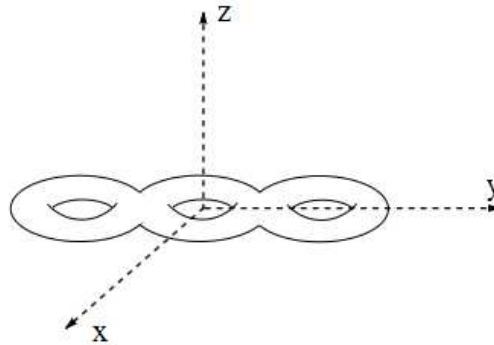


Figura 3.1: A superfície $3\mathbb{T}^2$ inserida em \mathbb{R}^3 .

Consideremos a aplicação inversão de $n\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$,

$$i : \quad n\mathbb{T}^2 \rightarrow n\mathbb{T}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z).$$

Assim, $(n\mathbb{T}^2, i)$ é um par, onde i é uma involução livre sobre $n\mathbb{T}^2$, pois se $i(x, y, z) = (x, y, z)$, então $(-x, -y, -z) = (x, y, z)$, de onde segue que $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Mas $(0, 0, 0) \notin n\mathbb{T}^2$, levando em conta a maneira como inserimos $n\mathbb{T}^2$ em \mathbb{R}^3 .

Defina $f : n\mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ por $f(x, y, z) = (x, y)$. Tal função é contínua e satisfaz $f(x, y, z) \neq f(i(x, y, z))$, para todo $(x, y, z) \in n\mathbb{T}^2$, pois se $f(x, y, z) = f(i(x, y, z))$, para algum $(x, y, z) \in n\mathbb{T}^2$, obtemos que $(x, y) = (-x, -y)$, ou seja, $x = y = 0$. Logo, $(0, 0, z) \in n\mathbb{T}^2$, o que é um absurdo pelo modo como $n\mathbb{T}^2$ foi inserido em \mathbb{R}^3 .

Portanto, $\{(n\mathbb{T}^2, i); \mathbb{R}^2\}$ não satisfaz BUT, quando n for ímpar.

Como $2\mathbb{R}^2 = \{(0, 0)\}$, pelo item (ii) do Lema 3.1.2, segue que $\{(n\mathbb{T}^2, i); \mathbb{R}^2\}$ também não satisfaz WBUT, para n ímpar.

Exemplo 3.1.4. A tripla $\{(S^0, A); \mathbb{Z}_2\}$ satisfaz WBUT, mas não satisfaz BUT, onde $S^0 = \{-1, 1\}$ é visto como um espaço topológico com a topologia discreta, A é a aplicação antipodal sobre S^0 e \mathbb{Z}_2 é o grupo topológico como referido no Exemplo 3.1.1. Notemos que $2\mathbb{Z}_2 = \{\bar{x} \in \mathbb{Z}_2 : i(\bar{x}) = \bar{x}\} = \{\bar{0}, \bar{1}\} = \mathbb{Z}_2$ e que toda aplicação $f : S^0 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ é contínua.

Temos que $\{(S^0, A); \mathbb{Z}_2\}$ não satisfaz BUT, pois, por exemplo, para a aplicação contínua $f : S^0 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ definida por $f(-1) = \bar{0}$ e $f(1) = \bar{1}$, segue que $f(x) \neq f(A(x))$, para todo $x \in S^0$.

Vejamus que $\{(S^0, A); \mathbb{Z}_2\}$ satisfaz WBUT. Isto segue do fato que $2\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2$, pois, para toda aplicação contínua $f : S^0 \rightarrow \mathbb{Z}_2$, ao considerar a aplicação equivariante $F : (S^0, A) \rightarrow (\mathbb{Z}_2, i)$ dada por $F(x) = f(x) \cdot (f(A(x)))^{-1}$, temos $F^{-1}(2\mathbb{Z}_2) = F^{-1}(\mathbb{Z}_2) = S^0 \neq \emptyset$.

De modo similar ao que foi observado no final do exemplo anterior, obtém-se:

Exemplo 3.1.5. Se G é um grupo topológico com $2G = G$, então, para todo par (X, T) , onde T é uma involução livre sobre X , temos que $\{(X, T); G\}$ satisfaz WBUT. Em particular, vale para $G = \mathbb{Z}_2 \times \dots \times \mathbb{Z}_2$ (n cópias).

Definição 3.1.3. Sejam (X_1, T) e (X_2, P) pares com T e P involuções livres sobre X_1 e X_2 , respectivamente. Dizemos que (X_1, T) e (X_2, P) são **equivalentes** se existe um homeomorfismo $f : (X_1, T) \rightarrow (X_2, P)$ equivariante. Em particular, se $T, P : X \rightarrow X$ são duas involuções livres sobre X , (X, T) e (X, P) são equivalentes se existe um homeomorfismo $f : (X, T) \rightarrow (X, P)$ equivariante. Isto nos dá uma relação de equivalência no conjunto de todas as involuções livres sobre X e, portanto, podemos considerar o conjunto quociente, que vamos denotar por $Inv(X)$. Assim,

$$Inv(X) = \{[T]; T \text{ é involução livre sobre } X\},$$

onde $[T] = \{P : X \rightarrow X; P \text{ é involução livre sobre } X \text{ e os pares } (X, T) \text{ e } (X, P) \text{ são equivalentes}\}$ indica a classe de T .

Note que podemos ter $Inv(X) = \emptyset$. Por exemplo, se X é uma superfície fechada com característica de Euler ímpar, então X não possui nenhuma involução livre, como visto no Teorema 1.5.4. Note ainda, que ao considerar um par (X, T) estamos supondo necessariamente a existência de uma involução livre T sobre X , de modo que $[T] \in Inv(X)$ e, assim, $Inv(X) \neq \emptyset$.

O resultado seguinte nos mostra que ser BUT ou WBUT é invariante nos espaços equivalentes.

Lema 3.1.3. Sejam (X_1, T) e (X_2, P) dois pares, onde T e P são involuções livres sobre X_1 e X_2 , respectivamente. Se (X_1, T) e (X_2, P) são equivalentes, então

- (i) para cada espaço topológico Y , temos que $\{(X_1, T); Y\}$ satisfaz BUT se, e somente se, $\{(X_2, P); Y\}$ satisfaz BUT.
- (ii) para cada grupo topológico G , temos que $\{(X_1, T); G\}$ satisfaz WBUT se, e somente se, $\{(X_2, P); G\}$ satisfaz WBUT.

Demonstração: Em cada caso, (i) e (ii), vamos provar apenas uma das implicações, a outra é análoga.

- (i) Suponha que $\{(X_1, T); Y\}$ satisfaz BUT, então, para toda aplicação contínua $f_1 : X_1 \rightarrow Y$, existe $x \in X_1$ tal que $f_1(x) = f_1(T(x))$.

Considere $f : X_2 \rightarrow Y$ uma aplicação contínua. Como (X_1, T) e (X_2, P) são equivalentes, existe um homeomorfismo $g : (X_1, T) \rightarrow (X_2, P)$ que é equivariante, assim, $g \circ T = P \circ g$.

Tome a aplicação composta $f_1 = f \circ g : X_1 \rightarrow Y$. Por valer a propriedade BUT para $\{(X_1, T); Y\}$, para a aplicação contínua f_1 , existe $x_1 \in X_1$ tal que $f_1(x_1) = (f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(T(x_1)) = f_1(T(x_1))$, então

$$f(g(x_1)) = f(g(T(x_1))) \stackrel{g \circ T = P \circ g}{=} f(P(g(x_1))),$$

ou seja, existe $x_0 = g(x_1) \in X_2$ tal que $f(x_0) = f(P(x_0))$. Como isto vale para uma aplicação contínua qualquer $f : X_2 \rightarrow Y$, conclui-se que $\{(X_2, P); Y\}$ satisfaz BUT.

- (ii) Se $\{(X_1, T); G\}$ satisfaz WBUT, então, para toda aplicação contínua $f_1 : X_1 \rightarrow G$, temos que $F_1^{-1}(2G) \neq \emptyset$, onde $F_1 : (X_1, T) \rightarrow (G, i)$ é a aplicação equivariante dada por $F_1(x) = f_1(x) \cdot (f_1(T(x)))^{-1}$ e $i : G \rightarrow G$ é a aplicação inversão.

Como (X_1, T) e (X_2, P) são equivalentes, existe um homeomorfismo $g : (X_1, T) \rightarrow (X_2, P)$ que é equivariante, assim, $T \circ g^{-1} = g^{-1} \circ P$, pois $g \circ T = P \circ g$ e g é um homeomorfismo.

Seja $f : X_2 \rightarrow G$ uma aplicação contínua. Tome a aplicação composta $f_1 = f \circ g : X_1 \rightarrow G$ e considere a aplicação $F = F_1 \circ g^{-1} : (X_2, P) \rightarrow (G, i)$. Note que F é equivariante, uma vez que é composta de aplicações equivariantes (Observação 2.2.1), e

$$\begin{aligned} F(x) = F_1(g^{-1}(x)) &= f_1(g^{-1}(x)) \cdot (f_1(T(g^{-1}(x))))^{-1} \\ &\stackrel{T \circ g^{-1} = g^{-1} \circ P}{=} f_1(g^{-1}(x)) \cdot (f_1(g^{-1}(P(x))))^{-1} \\ &= (f_1 \circ g^{-1})(x) \cdot ((f_1 \circ g^{-1})(P(x)))^{-1} \\ &\stackrel{f_1 = f \circ g}{=} (f \circ g \circ g^{-1})(x) \cdot ((f \circ g \circ g^{-1})(P(x)))^{-1} \\ &= f(x) \cdot (f(P(x)))^{-1}. \end{aligned}$$

Além disso, $F^{-1}(2G) = (F_1 \circ g^{-1})^{-1}(2G) = (g \circ F_1^{-1})(2G) = g(F_1^{-1}(2G)) \neq \emptyset$, pois $F_1^{-1}(2G) \neq \emptyset$.

Logo, $\{(X_2, P); G\}$ satisfaz WBUT. ■

3.2 Versão fraca do Teorema de Borsuk-Ulam associada ao toro bidimensional

Nesta seção, apresentamos a prova detalhada de um teorema que dá uma condição algébrica para que uma tripla $\{(X, T); \mathbb{T}^2\}$ satisfaça WBUT, onde o grupo topológico G é o toro bidimensional \mathbb{T}^2 , considerado com a sua estrutura aditiva (mod 1).

Teorema 3.2.1. *Seja (X, T) um par, com X um espaço de Hausdorff conexo por caminhos e T uma involução livre sobre X . Se existe $[\alpha] \in \Pi_1\left(\frac{X}{T}\right) - p_{\#}(\Pi_1(X))$ tal que $h_{\frac{X}{T}}([\alpha])$ é um elemento de torção de $H_1\left(\frac{X}{T}\right)$, com $p : X \rightarrow \frac{X}{T}$ a aplicação quociente e $h_{\frac{X}{T}}$ o homomorfismo de Hurewicz de $\frac{X}{T}$, então $\{(X, T); \mathbb{T}^2\}$ satisfaz WBUT.*

Demonstração: Os argumentos seguem na direção da prova do Teorema 2.2.1, porém exigem técnicas mais sofisticadas. A fim de facilitar o entendimento da prova descrevemos a seguir os principais passos:

(i) Tomar um subconjunto especial $K \subset \mathbb{T}^2$ tal que $i : K \rightarrow K$ é uma aplicação equivariante e considerar a aplicação $q : K \rightarrow \frac{K}{i}$.

(ii) Analisar os geradores de $\Pi_1\left(K, \overline{(x_0, y_0)}\right)$ e $\Pi_1\left(\frac{K}{i}, q\left(\overline{(x_0, y_0)}\right)\right)$, onde $\overline{(x_0, y_0)} = \overline{\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)}$, bem como o comportamento do homomorfismo induzido $q_{\#} : \Pi_1\left(K, \overline{(x_0, y_0)}\right) \rightarrow \Pi_1\left(\frac{K}{i}, q\left(\overline{(x_0, y_0)}\right)\right)$ em função dos geradores.

(iii) Supor, por contradição, que $\{(X, T); \mathbb{T}^2\}$ não satisfaz WBUT. A partir daí construir uma aplicação equivariante $g : (X, T) \rightarrow (K, i)$ que induz uma aplicação $\bar{g} : \frac{X}{T} \rightarrow \frac{K}{i}$.

(iv) Finalmente, tomando o elemento $[\alpha]$ da hipótese, obter, por um lado, que $\bar{g}_*\left(h_{\frac{X}{T}}([\alpha])\right) = 0$ (onde $h_{\frac{X}{T}}$ é o homomorfismo de Hurewicz) e, por outro lado, usando o argumento de soma algébrica das potências dos geradores em uma palavra (elemento de $\Pi_1\left(\frac{K}{i}, q\left(\overline{(x_0, y_0)}\right)\right)$), obter que $\bar{g}_*\left(h_{\frac{X}{T}}([\alpha])\right) \neq 0$. Tendo, assim, uma contradição. De onde segue que $\{(X, T); \mathbb{T}^2\}$ satisfaz WBUT.

Vamos então a prova do teorema:

(i) Consideremos o toro bidimensional,

$$\mathbb{T}^2 = \left\{ \overline{(x, y)}; x, y \in I = [0, 1] \right\}$$

visto como grupo topológico aditivo, como no Exemplo 3.1.2.

Determinemos inicialmente $2\mathbb{T}^2$. Temos

$$2\mathbb{T}^2 = \left\{ \overline{(x, y)} \in \mathbb{T}^2; i\left(\overline{(x, y)}\right) = \overline{(x, y)} \right\},$$

onde $i : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ é a aplicação inversão dada por $i\left(\overline{(x, y)}\right) = \overline{-(x, y)} = \overline{(1-x, 1-y)}$.

Assim, $i(\overline{(x,y)}) = \overline{(x,y)}$ se, e somente se, $\overline{(x,y)} = -\overline{(x,y)}$, ou equivalentemente,

$$\begin{aligned} \overline{(x,y)} + \overline{(x,y)} = \overline{(0,0)} &\Leftrightarrow \overline{(2x,2y)} = \overline{(0,0)} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 & \text{ou} & 2x = 1 \\ & \text{e} & \\ 2y = 0 & \text{ou} & 2y = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{ou} & x = \frac{1}{2} \\ & \text{e} & \\ y = 0 & \text{ou} & y = \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Logo,

$$2\mathbb{T}^2 = \left\{ r_1 = \overline{(0,0)}; r_2 = \overline{\left(0, \frac{1}{2}\right)}; r_3 = \overline{\left(\frac{1}{2}, 0\right)}; r_4 = \overline{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)} \right\}.$$

Sejam os seguintes subconjuntos de $I \times I$: $A = I \times \left\{\frac{1}{4}\right\}$, $B = I \times \left\{\frac{3}{4}\right\}$, $C = \left\{\frac{1}{4}\right\} \times I$, $D = \left\{\frac{3}{4}\right\} \times I$ e $E = \left(\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] \times \left\{\frac{1}{4}\right\}\right) \cup \left(\left\{\frac{3}{4}\right\} \times \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]\right) \cup \left(\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] \times \left\{\frac{3}{4}\right\}\right) \cup \left(\left\{\frac{1}{4}\right\} \times \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]\right)$.

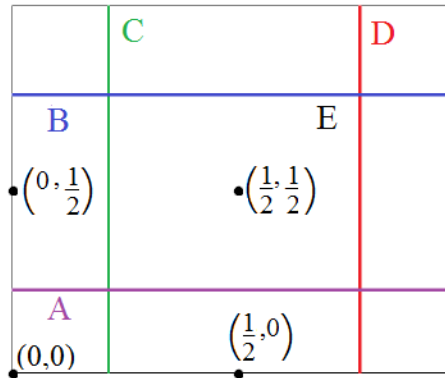


Figura 3.2: Representação de \mathbb{T}^2 e alguns subconjuntos especiais.

Considere os subconjuntos (correspondentes) em \mathbb{T}^2 (após identificações):
 $\bar{A} = \frac{A}{\sim} = \left\{ \overline{\left(x, \frac{1}{4}\right)}; x \in I \right\}$, $\bar{B} = \frac{B}{\sim} = \left\{ \overline{\left(x, \frac{3}{4}\right)}; x \in I \right\}$, $\bar{C} = \frac{C}{\sim} = \left\{ \overline{\left(\frac{1}{4}, y\right)}; y \in I \right\}$,
 $\bar{D} = \frac{D}{\sim} = \left\{ \overline{\left(\frac{3}{4}, y\right)}; y \in I \right\}$ e $\bar{E} = \frac{E}{\sim} = \left(\left\{ \overline{\left(x, \frac{1}{4}\right)}; \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4} \right\} \right) \cup$
 $\left(\left\{ \overline{\left(\frac{3}{4}, y\right)}; \frac{1}{4} \leq y \leq \frac{3}{4} \right\} \right) \cup \left(\left\{ \overline{\left(x, \frac{3}{4}\right)}; \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4} \right\} \right) \cup \left(\left\{ \overline{\left(\frac{1}{4}, y\right)}; \frac{1}{4} \leq y \leq \frac{3}{4} \right\} \right)$ e
 seja $K = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C} \cup \bar{D}$.

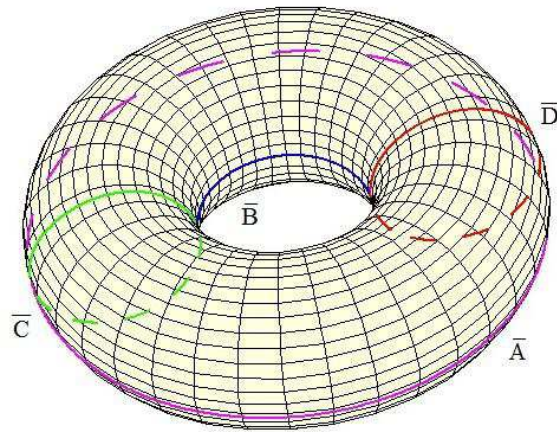


Figura 3.3: O subconjunto K no toro bidimensional.

Observe que K é invariante pela aplicação $i : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, isto é, $i(K) = K$, pois dado $\left(x, \frac{1}{4}\right) \in \bar{A}$, temos que $i\left(\left(x, \frac{1}{4}\right)\right) = \left(1-x, \frac{3}{4}\right) \in \bar{B}$, assim, $i(\bar{A}) \subset \bar{B} \subset K$. Analogamente, $i(\bar{C}) \subset \bar{D}$. De fato vale $i(\bar{A}) = \bar{B}$ e $i(\bar{C}) = \bar{D}$ (e também, $i(\bar{B}) = \bar{A}$ e $i(\bar{D}) = \bar{C}$, uma vez que $i \circ i = Id_{\mathbb{T}^2}$).

Assim, podemos considerar a aplicação “restrição de i ”, $i : K \rightarrow K$. Note que os elementos de $2\mathbb{T}^2$ não pertencem a K , então $i\left(\overline{(x, y)}\right) \neq \overline{(x, y)}$, para todo $\overline{(x, y)} \in K$, e, portanto, i é uma involução livre sobre K .

Considere $\overline{(x_0, y_0)} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ e $q : K \rightarrow \frac{K}{i}$ a aplicação quociente $q\left(\overline{(x, y)}\right) = \left\{\overline{(x, y)}, i\left(\overline{(x, y)}\right)\right\}$. Note que $i\left(\overline{(x_0, y_0)}\right) = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$ e $\overline{(x_0, y_0)} \in \bar{A} \cap \bar{C} \cap \bar{E}$.

(ii) Para a prova será importante conhecer melhor o homomorfismo

$$q_{\#} : \Pi_1\left(K, \overline{(x_0, y_0)}\right) \rightarrow \Pi_1\left(\frac{K}{i}, q\left(\overline{(x_0, y_0)}\right)\right).$$

Notemos que $\bar{E} \subset K$ e $i(\bar{E}) = \bar{E}$, uma vez que os elementos de \bar{E} são da forma $\left(\frac{1}{4}, y\right)$, $\left(\frac{3}{4}, y\right)$, $\left(x, \frac{1}{4}\right)$ ou $\left(x, \frac{3}{4}\right)$, para $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}$ e $\frac{1}{4} \leq y \leq \frac{3}{4}$, e suas imagens por i são $\left(\frac{3}{4}, 1-y\right)$, $\left(\frac{1}{4}, 1-y\right)$, $\left(1-x, \frac{3}{4}\right)$ ou $\left(1-x, \frac{1}{4}\right)$, respectivamente, onde $\frac{1}{4} \leq 1-x \leq \frac{3}{4}$ e $\frac{1}{4} \leq 1-y \leq \frac{3}{4}$, que são elementos de \bar{E} .

Podemos ver, usando o Teorema de Seifert-Van Kampen (Teorema 1.4.1), que $\Pi_1\left(K, \overline{(x_0, y_0)}\right)$ é um grupo livre nos geradores $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ e \mathbf{e} , que podem ser representados pelos laços cujas imagens são $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$ e \bar{E} , respectivamente (a menos de ponto base, nos casos de \bar{B} e \bar{D} , considerando que K é conexo por caminhos).

Como a aplicação inversão $i : K \rightarrow K$ é um homeomorfismo, segue, pela Observação 1.2.3 e pelo Teorema 1.2.4, que $i_{\#} : \Pi_1\left(K, \overline{(x_0, y_0)}\right) \rightarrow \Pi_1\left(K, i\left(\overline{(x_0, y_0)}\right)\right)$ é um isomorfismo, em que $i_{\#}(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$, $i_{\#}(\mathbf{c}) = \mathbf{d}$ e $i_{\#}(\mathbf{e}) = \mathbf{e}$ (além disso, $i_{\#}(\mathbf{b}) = \mathbf{a}$ e $i_{\#}(\mathbf{d}) = \mathbf{c}$), a menos de isomorfismo.

Observe que o subconjunto \overline{E} de K é Hausdorff conexo e $i|_{\overline{E}} : \overline{E} \rightarrow \overline{E}$ também é uma involução livre. Considere o espaço quociente $\frac{\overline{E}}{i}$, pela Proposição 1.3.5, segue que $(\overline{E}, q|_{\overline{E}}, \frac{\overline{E}}{i})$ é um recobrimento de duas folhas.

Notemos que $\Pi_1\left(\frac{K}{i}, q\left(\overline{(x_0, y_0)}\right)\right)$ é um grupo livre em 3 geradores que vamos indicar por \mathbf{x}, \mathbf{y} e \mathbf{z} , um representado por um laço cuja imagem é \overline{A} , outro por um laço cuja imagem é \overline{C} e um é obtido de um “caminho fechado” em $\frac{K}{i}$ ligando $\overline{(x_0, y_0)}$ a $i\left(\overline{(x_0, y_0)}\right)$ (já que $i(\overline{A}) = \overline{B}, i(\overline{C}) = \overline{D}$ e uma “metade” de \overline{E} é identificada com a outra).

Vamos analisar as imagens por $q_{\#}$ dos geradores $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ e \mathbf{e} de $\Pi_1\left(K, \overline{(x_0, y_0)}\right)$.

Tome α_1 um laço em K baseado em $\overline{(x_0, y_0)}$ cuja imagem é \overline{E} e tal que $[\alpha_1] = \mathbf{e}$ (um dos geradores de $\Pi_1\left(K, \overline{(x_0, y_0)}\right)$ já mencionado anteriormente). Seja $\mu : I \rightarrow K$ um caminho tal que $\mu(0) = \overline{(x_0, y_0)}, \mu(1) = i\left(\overline{(x_0, y_0)}\right)$ e $\mathbf{z} = [q \circ \mu]$ seja um gerador de $\Pi_1\left(\frac{K}{i}, q\left(\overline{(x_0, y_0)}\right)\right)$. Na figura abaixo ilustramos essa situação em que, primeiro, identificamos apenas $\overline{(x_0, y_0)}$ a $i\left(\overline{(x_0, y_0)}\right)$ via aplicação q .

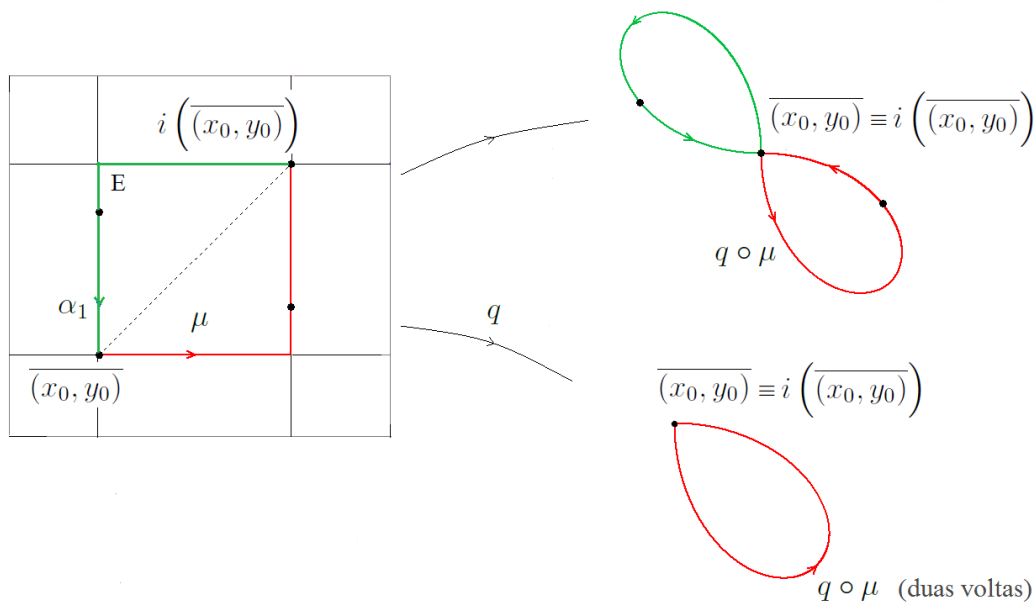


Figura 3.4: Analisando $q_{\#}(\mathbf{e})$.

Então, temos

$$q_{\#}(\mathbf{e}) = q_{\#}([\alpha_1]) = [q \circ \alpha_1] = [q \circ \mu] [q \circ \mu] = [q \circ \mu]^2 = \mathbf{z}^2.$$

Agora, seja α_2 um laço em K baseado em $\overline{(x_0, y_0)}$ cuja imagem é \overline{A} e tal que $[\alpha_2] = \mathbf{a}$ (outro gerador de $\Pi_1\left(K, \overline{(x_0, y_0)}\right)$). Como observado anteriormente, podemos con-

siderar $\mathbf{x} = [q \circ \alpha_2] = q_{\#}([\alpha_2]) = q_{\#}(\mathbf{a})$ como um gerador de $\Pi_1 \left(\frac{K}{i}, q \left(\overline{(x_0, y_0)} \right) \right)$.

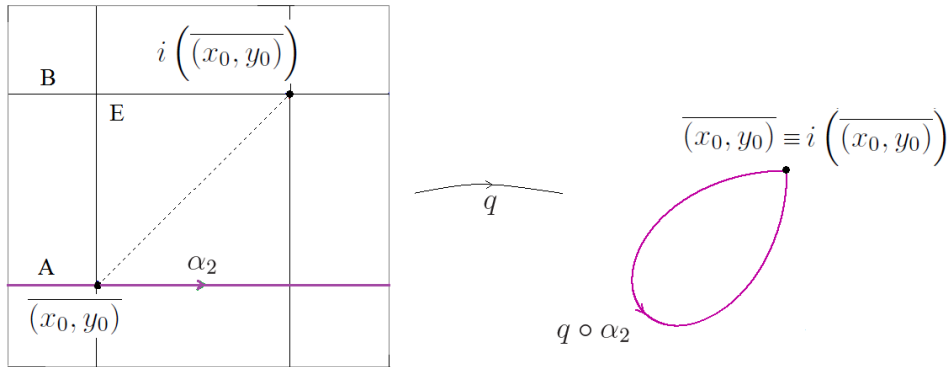


Figura 3.5: Analisando $q_{\#}(\mathbf{a})$.

Considere, agora, α_3 um laço em K baseado em $i \left(\overline{(x_0, y_0)} \right)$ cuja imagem é \overline{B} e tal que $[\alpha_3]$ corresponde ao gerador \mathbf{b} em $\Pi_1 \left(K, i \left(\overline{(x_0, y_0)} \right) \right)$. Note que, para ser mais preciso em função do ponto base, o gerador de $\Pi_1 \left(K, \overline{(x_0, y_0)} \right)$ é da forma $\mathbf{b} = [\mu * \alpha_3 * \mu^{-1}]$, onde μ é um caminho em K ligando $\overline{(x_0, y_0)}$ a $i \left(\overline{(x_0, y_0)} \right)$, como já mencionado.

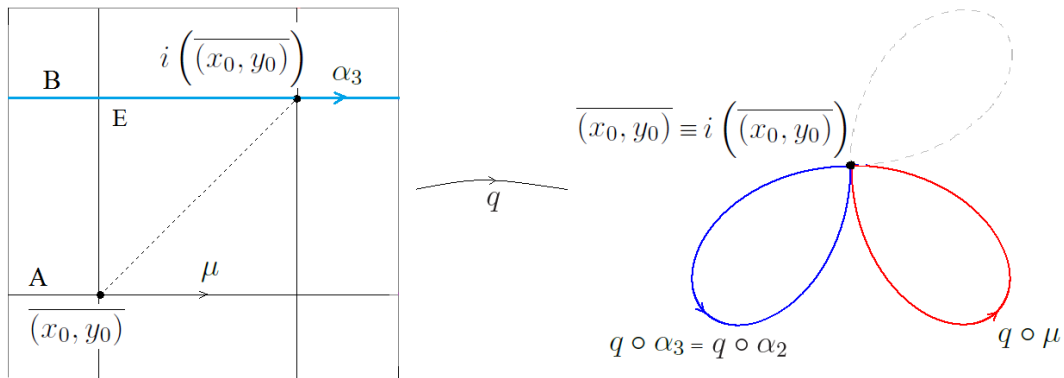


Figura 3.6: Analisando $q_{\#}(\mathbf{b})$.

Assim,

$$\begin{aligned} q_{\#}(\mathbf{b}) &= q_{\#}([\mu * \alpha_3 * \mu^{-1}]) &= [q \circ (\mu * \alpha_3 * \mu^{-1})] \\ &= [(q \circ \mu) * (q \circ \alpha_3) * (q \circ \mu^{-1})] &= [q \circ \mu] [q \circ \alpha_3] [q \circ \mu^{-1}] \\ &= [q \circ \mu] [q \circ \alpha_2] [q \circ \mu]^{-1} &= \mathbf{z x z}^{-1}, \end{aligned}$$

uma vez que $q \circ \mu^{-1}$ tem orientação oposta a de $q \circ \mu$ e $[q \circ \alpha_2] = [q \circ \alpha_3]$, já que q identifica a imagem de \overline{A} com a imagem de \overline{B} .

Analogamente, obtemos $q_{\#}(\mathbf{c}) = \mathbf{y}$ e $q_{\#}(\mathbf{d}) = \mathbf{z y z}^{-1}$.

Desse modo, $\Pi_1 \left(\frac{K}{i}, q \left(\overline{(x_0, y_0)} \right) \right)$ é um grupo livre nos geradores \mathbf{x}, \mathbf{y} e \mathbf{z} , onde

$$\begin{aligned} q_{\#}(\mathbf{a}) &= \mathbf{x} \\ q_{\#}(\mathbf{b}) &= \mathbf{z}\mathbf{x}\mathbf{z}^{-1} \\ q_{\#}(\mathbf{c}) &= \mathbf{y} \\ q_{\#}(\mathbf{d}) &= \mathbf{z}\mathbf{y}\mathbf{z}^{-1} \\ q_{\#}(\mathbf{e}) &= \mathbf{z}^2. \end{aligned} \tag{I}$$

A abordagem seguinte será útil no final da prova desse teorema. Dada uma palavra \mathcal{F} em um grupo livre que tem uma letra u (gerador), vamos denotar por $s(u)$ a soma algébrica das potências de u que ocorrem em \mathcal{F} . Assim,

$$\begin{aligned} \text{se } \mathcal{F} \in \Pi_1 \left(K, \overline{(x_0, y_0)} \right) \text{ é uma palavra nas letras } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \text{ e } \mathbf{e}, \text{ segue que} & \tag{II} \\ q_{\#}(\mathcal{F}) \in \Pi_1 \left(\frac{K}{i}, q \left(\overline{(x_0, y_0)} \right) \right) \text{ é uma palavra nas letras } \mathbf{x}, \mathbf{y} \text{ e } \mathbf{z}, \end{aligned}$$

com $s(\mathbf{x}) = s(\mathbf{a}) + s(\mathbf{b})$, $s(\mathbf{y}) = s(\mathbf{c}) + s(\mathbf{d})$ e $s(\mathbf{z}) = 2s(\mathbf{e})$. De fato, de acordo com o que foi observado em (I), as potências de \mathbf{x} que aparecem em $q_{\#}(\mathcal{F})$ são as que vem de \mathbf{a} e de \mathbf{b} . Como $q_{\#}(\mathbf{a}) = \mathbf{x}$ e $q_{\#}(\mathbf{b}) = \mathbf{z}\mathbf{x}\mathbf{z}^{-1}$, segue que cada potência de \mathbf{a} (ou \mathbf{b}) em (I) corresponde a uma única potência de \mathbf{x} em $q_{\#}(\mathcal{F})$, assim a soma algébrica das potências de \mathbf{x} em $q_{\#}(\mathcal{F})$ é igual a soma algébrica das potências de \mathbf{a} e de \mathbf{b} em \mathcal{F} , ou seja,

$$s(\mathbf{x}) = s(\mathbf{a}) + s(\mathbf{b}).$$

Analogamente, conclui-se que

$$s(\mathbf{y}) = s(\mathbf{c}) + s(\mathbf{d}).$$

Quanto às potências de \mathbf{z} em $q_{\#}(\mathcal{F})$, considerando que $q_{\#}(\mathbf{b}) = \mathbf{z}\mathbf{x}\mathbf{z}^{-1}$, $q_{\#}(\mathbf{d}) = \mathbf{z}\mathbf{y}\mathbf{z}^{-1}$ e $q_{\#}(\mathbf{e}) = \mathbf{z}^2$, que na soma as potências de \mathbf{z} originadas de \mathbf{b} e de \mathbf{d} se cancelam e que cada \mathbf{e} dá origem a potência 2 na letra \mathbf{z} , segue que, em $q_{\#}(\mathcal{F})$,

$$s(\mathbf{z}) = 2s(\mathbf{e}).$$

(iii) Vamos supor, por contradição, que $\{(X, T); \mathbb{T}^2\}$ não satisfaz WBUT. Então existe $f : X \rightarrow \mathbb{T}^2$ uma aplicação contínua com $F^{-1}(2\mathbb{T}^2) = \emptyset$, onde $F : (X, T) \rightarrow (\mathbb{T}^2, i)$ é a aplicação equivariante dada por $F(x) = f(x) \cdot (f(T(x)))^{-1}$.

Como $F^{-1}(2\mathbb{T}^2) = \emptyset$, segue que não existe $x \in X$ tal que $F(x) \in 2\mathbb{T}^2$. Consequentemente, F aplica X em $\mathbb{T}^2 - 2\mathbb{T}^2$, assim, podemos considerar a aplicação equivariante

$$F : (X, T) \rightarrow (\mathbb{T}^2 - 2\mathbb{T}^2, i).$$

Observe que $\mathbb{T}^2 - K$ é união disjunta de quatro discos abertos, cada um tendo como centro um dos elementos de $2\mathbb{T}^2$. Denotemos estes discos por D_1, D_2, D_3 e D_4 . Então, considerando $p_l : D_l - \{r_l\} \rightarrow K$ a “projeção radial” em torno de $r_l \in 2\mathbb{T}^2$, $l = 1, 2, 3, 4$, podemos definir a aplicação (contínua)

$$h : \mathbb{T}^2 - 2\mathbb{T}^2 \rightarrow K$$

$$\overline{(x, y)} \mapsto \begin{cases} \overline{(x, y)} & , \text{ se } \overline{(x, y)} \in K, \\ p_l \left(\overline{(x, y)} \right) & , \text{ se } \overline{(x, y)} \in D_l - \{r_l\}, \quad l = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

Temos que $h : (\mathbb{T}^2 - 2\mathbb{T}^2, i) \rightarrow (K, i)$ é uma aplicação equivariante, isto é, $h \circ i = i \circ h$, pois

- se $\overline{(x, y)} \in K$, então $i(\overline{(x, y)}) \in K$ e assim, pela definição de h ,

$$h\left(i\left(\overline{(x, y)}\right)\right) = i\left(\overline{(x, y)}\right) = i\left(h\left(\overline{(x, y)}\right)\right).$$

- se $\overline{(x, y)} \in D_l - \{r_l\}$, $l = 1, 2, 3, 4$, pode-se verificar (vide ilustrado a seguir, para dois casos particulares, com $\overline{(x, y)} \in D_4 - \{r_4\}$ e $\overline{(x, y)} \in D_1 - \{r_1\}$) que $i(\overline{(x, y)}) \in D_l - \{r_l\}$ e $p_l(i(\overline{(x, y)})) = i(p_l(\overline{(x, y)}))$.

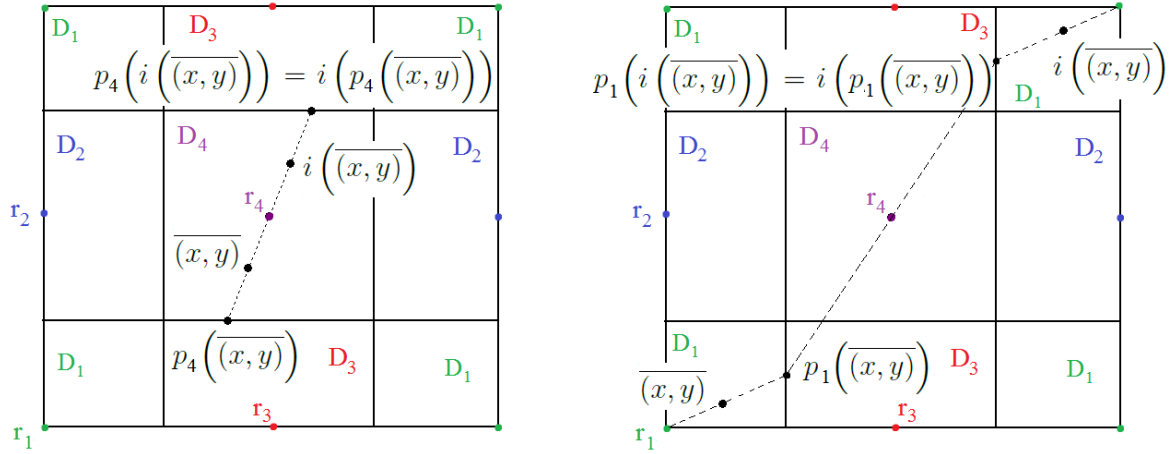


Figura 3.7: Projeções p_i 's.

Daí, se $\overline{(x, y)} \in D_l - \{r_l\}$, para algum $l \in \{1, 2, 3, 4\}$,

$$h\left(i\left(\overline{(x, y)}\right)\right) = p_l\left(i\left(\overline{(x, y)}\right)\right) = i\left(p_l\left(\overline{(x, y)}\right)\right) = i\left(h\left(\overline{(x, y)}\right)\right).$$

Além disso, h é uma equivalência homotópica, pois existe a aplicação inclusão $j : K \rightarrow \mathbb{T}^2 - 2\mathbb{T}^2$, de modo que $h \circ j \sim Id_K$ (na verdade, $h \circ j = Id_K$) e $j \circ h \sim Id_{\mathbb{T}^2 - 2\mathbb{T}^2}$. De fato, existem as homotopias

$$H_1 : \begin{array}{ccc} K \times I & \rightarrow & K \\ ((x, y), t) & \mapsto & \overline{(x, y)} \end{array}$$

e

$$H_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{T}^2 - 2\mathbb{T}^2 \times I & \rightarrow & \mathbb{T}^2 - 2\mathbb{T}^2 \\ ((x, y), t) & \mapsto & \begin{cases} \overline{(x, y)}, & \text{se } \overline{(x, y)} \in K, \\ t\overline{(x, y)} + (1-t)p_l(\overline{(x, y)}), & \text{se } \overline{(x, y)} \in D_l - \{r_l\}, \end{cases} \end{array}$$

para $l = 1, 2, 3, 4$, tais que

$$\begin{cases} H_1(\overline{(x, y)}, 0) = \overline{(x, y)} = h(\overline{(x, y)}) = (h \circ j)(\overline{(x, y)}) \\ H_1(\overline{(x, y)}, 1) = \overline{(x, y)} = Id_K(\overline{(x, y)}) \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} H_2(\overline{(x, y)}, 0) = \begin{cases} \overline{(x, y)}, & \text{se } \overline{(x, y)} \in K \\ p_l(\overline{(x, y)}), & \text{se } \overline{(x, y)} \in D_l - \{r_l\} \end{cases} = h(\overline{(x, y)}) = (j \circ h)(\overline{(x, y)}) \\ H_2(\overline{(x, y)}, 1) = \begin{cases} \overline{(x, y)}, & \text{se } \overline{(x, y)} \in K \\ \overline{(x, y)}, & \text{se } \overline{(x, y)} \in D_l - \{r_l\} \end{cases} = Id_{\mathbb{T}^2 - 2\mathbb{T}^2}(\overline{(x, y)}) \end{cases}$$

para $l = 1, 2, 3, 4$.

Considere a aplicação

$$g = h \circ F : (X, T) \rightarrow (K, i),$$

onde h e F são as aplicações referidas anteriormente. Temos que g é equivariante, pois é a composta de aplicações equivariantes (Observação 2.2.1), ou seja, $g \circ T = i \circ g$.

Tome a projeção $p : X \rightarrow \frac{X}{T}$ tal que $p(x) = \{x, T(x)\}$. Pelo Lema 2.2.2 e sua demonstração, g induz a aplicação contínua $\bar{g} : \frac{X}{T} \rightarrow \frac{K}{i}$ definida por

$$\bar{g}(\bar{x}) = \{g(x), g(T(x))\} = \{g(x), i(g(x))\},$$

com $\bar{x} = p(x)$, tal que o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & K \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ \frac{X}{T} & \xrightarrow{\bar{g}} & \frac{K}{i} \end{array}$$

isto é, $q \circ g = \bar{g} \circ p$.

Escolha um ponto base inicial $v \in X$. Como K é conexo por caminhos, podemos considerar (a menos de isomorfismo) que o ponto base correspondente $g(v) \in K$ seja $g(v) = \overline{(x_0, y_0)} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

De acordo com a Proposição 1.7.1, temos o diagrama comutativo abaixo

$$\begin{array}{ccc} \Pi_1\left(\frac{X}{T}, \bar{v}\right) & \xrightarrow{\bar{g}_\#} & \Pi_1\left(\frac{K}{i}, q(\overline{(x_0, y_0)})\right) \\ h_{\frac{X}{T}} \downarrow & & \downarrow h_{\frac{K}{i}} \\ H_1\left(\frac{X}{T}\right) & \xrightarrow{\bar{g}_*} & H_1\left(\frac{K}{i}\right) \end{array}$$

onde $h_{\frac{X}{T}}$ e $h_{\frac{K}{i}}$ indicam os homomorfismos de Hurewicz de $\frac{X}{T}$ e $\frac{K}{i}$, respectivamente.

Observe que $H_1\left(\frac{K}{i}\right) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, uma vez que, pelo Teorema de Hurewicz (Teorema 1.7.2), temos que

$$\frac{\Pi_1\left(\frac{K}{i}, q(\overline{(x_0, y_0)})\right)}{\Pi_1\left(\frac{K}{i}, q(\overline{(x_0, y_0)})\right)'} \cong H_1\left(\frac{K}{i}\right),$$

ou seja, $H_1\left(\frac{K}{i}\right)$ é o grupo abelianizado de $\Pi_1\left(\frac{K}{i}, q(\overline{(x_0, y_0)})\right)$ que é um grupo livre com três geradores.

(*iv*) Tome, por hipótese, $[\alpha] \in \Pi_1\left(\frac{X}{T}, \bar{v}\right) - p_{\#}(\Pi_1(X, v))$ tal que $h_{\frac{X}{T}}([\alpha])$ é um elemento de torção de $H_1\left(\frac{X}{T}\right)$. Como \bar{g}_* é um homomorfismo, segue que $\bar{g}_*\left(h_{\frac{X}{T}}([\alpha])\right)$ é um elemento de torção de $H_1\left(\frac{K}{i}\right) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Por $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ser um grupo livre de torção, então,

$$\bar{g}_*\left(h_{\frac{X}{T}}([\alpha])\right) = 0. \tag{III}$$

Por outro lado, como α é um laço em $\frac{X}{T}$ tal que $\alpha(0) = \bar{v} = \alpha(1)$, pela Proposição 1.3.1, existe um caminho $\tilde{\alpha} : I \rightarrow X$ tal que $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ e $\tilde{\alpha}(0) = v$. Daí, como $p(\tilde{\alpha}(1)) = \alpha(1) = \bar{v} = p(v) = p(T(v))$, segue que $\tilde{\alpha}(1) = v$ ou $\tilde{\alpha}(1) = T(v)$. Se $\tilde{\alpha}(1) = v$, temos que $[\tilde{\alpha}] \in \Pi_1(X, v)$, assim

$$[\alpha] = [p \circ \tilde{\alpha}] = p_{\#}([\tilde{\alpha}]) \in p_{\#}(\Pi_1(X, v)),$$

o que contradiz a hipótese. Logo, $\tilde{\alpha}(1) = T(v)$.

Consideremos o caminho $g \circ \tilde{\alpha} = (h \circ F) \circ \tilde{\alpha} : I \rightarrow K$. Temos que

$$(g \circ \tilde{\alpha})(0) = g(\tilde{\alpha}(0)) = g(v) = \overline{(x_0, y_0)}$$

e

$$(g \circ \tilde{\alpha})(1) = g(\tilde{\alpha}(1)) = g(T(v)) \stackrel{g \circ T = i \circ g}{=} i(g(v)) = i\left(\overline{(x_0, y_0)}\right).$$

Podemos tomar, como já vimos anteriormente, o caminho $\mu : I \rightarrow K$ tal que $\mu(0) = \overline{(x_0, y_0)}$, $\mu(1) = i\left(\overline{(x_0, y_0)}\right)$ e $q \circ \mu$ seja um laço em $\frac{K}{i}$ representando \mathbf{z} , ou seja, $[q \circ \mu] = \mathbf{z}$. Então, $(g \circ \tilde{\alpha}) * \mu^{-1} : I \rightarrow K$ é um caminho tal que

$$((g \circ \tilde{\alpha}) * \mu^{-1})(0) = (g \circ \tilde{\alpha})(0) = \overline{(x_0, y_0)} = \mu^{-1}(1) = ((g \circ \tilde{\alpha}) * \mu^{-1})(1),$$

assim, $[(g \circ \tilde{\alpha}) * \mu^{-1}] \in \Pi_1\left(K, \overline{(x_0, y_0)}\right)$.

Como $\Pi_1\left(K, \overline{(x_0, y_0)}\right)$ tem geradores $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ e \mathbf{e} , então $\mathcal{F} = [(g \circ \tilde{\alpha}) * \mu^{-1}]$ é uma palavra nas letras $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ e \mathbf{e} , assim,

$$q_{\#}(\mathcal{F}) = q_{\#}\left([(g \circ \tilde{\alpha}) * \mu^{-1}]\right) \tag{IV}$$

é uma palavra nas letras \mathbf{x}, \mathbf{y} e \mathbf{z} , por (II). Além disso,

$$q_{\#}\left([(g \circ \tilde{\alpha}) * \mu^{-1}]\right) = [q \circ ((g \circ \tilde{\alpha}) * \mu^{-1})] = [q \circ g \circ \tilde{\alpha}] [q \circ \mu]^{-1} = [q \circ g \circ \tilde{\alpha}] \mathbf{z}^{-1}, \tag{V}$$

uma vez que $\mathbf{z} = [q \circ \mu]$.

De (IV) e (V), obtemos

$$q_{\#}(\mathcal{F}) = [q \circ g \circ \tilde{\alpha}] \mathbf{z}^{-1},$$

ou equivalentemente,

$$[q \circ g \circ \tilde{\alpha}] = q_{\#}(\mathcal{F}) \mathbf{z}. \tag{VI}$$

Se a soma algébrica das potências de \mathbf{e} em \mathcal{F} é $s_{\mathcal{F}}(\mathbf{e}) = n \in \mathbb{Z}$, então, como já observado anteriormente, a soma algébrica das potências de \mathbf{z} em

$q_{\#}(\mathcal{F})$ é $s_{q_{\#}(\mathcal{F})}(\mathbf{z}) = 2n$. Daí, considerando a palavra dada pelo elemento $[q \circ g \circ \tilde{\alpha}] \in \Pi_1\left(\frac{K}{i}, q\left(\overline{(x_0, y_0)}\right)\right)$, segue de (VI) que a soma algébrica das potências de \mathbf{z} em $[q \circ g \circ \tilde{\alpha}]$ é $s_{[q \circ g \circ \tilde{\alpha}]}(\mathbf{z}) = 2n + 1$. Assim, $s_{[q \circ g \circ \tilde{\alpha}]}(\mathbf{z}) \neq 0$.

Como $H_1\left(\frac{K}{i}\right) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ é um grupo abeliano (indicado aqui multiplicativamente) e $h_{\frac{K}{i}}$ é um homomorfismo, então

$$\begin{aligned} h_{\frac{K}{i}}([q \circ g \circ \tilde{\alpha}]) &= \left(h_{\frac{K}{i}}(\mathbf{x})\right)^{s_{[q \circ g \circ \tilde{\alpha}]}(\mathbf{x})} \cdot \left(h_{\frac{K}{i}}(\mathbf{y})\right)^{s_{[q \circ g \circ \tilde{\alpha}]}(\mathbf{y})} \cdot \left(h_{\frac{K}{i}}(\mathbf{z})\right)^{s_{[q \circ g \circ \tilde{\alpha}]}(\mathbf{z})} \\ &\equiv \left(s_{[q \circ g \circ \tilde{\alpha}]}(\mathbf{x}), s_{[q \circ g \circ \tilde{\alpha}]}(\mathbf{y}), 2n + 1\right), \end{aligned}$$

de modo que a coordenada de $h_{\frac{K}{i}}([q \circ g \circ \tilde{\alpha}])$ correspondente ao $h_{\frac{K}{i}}(\mathbf{z})$ -fator é não nula e, assim, $h_{\frac{K}{i}}([q \circ g \circ \tilde{\alpha}]) \neq 0$.

Mas isso nos dá uma contradição com o que obtemos em (III), pois teríamos,

$$\begin{aligned} \bar{g}_* \left(h_{\frac{X}{T}}([\alpha]) \right) &\stackrel{\bar{g}_* \circ h_{\frac{X}{T}} = h_{\frac{K}{i}} \circ \bar{g}_*}{=} h_{\frac{K}{i}}(\bar{g}_{\#}([\alpha])) = h_{\frac{K}{i}}([\bar{g} \circ \alpha]) \stackrel{p \circ \tilde{\alpha} = \alpha}{=} h_{\frac{K}{i}}([\bar{g} \circ p \circ \tilde{\alpha}]) \\ &\stackrel{\bar{g} \circ p = q \circ g}{=} h_{\frac{K}{i}}([q \circ g \circ \tilde{\alpha}]) \neq 0. \end{aligned}$$

Portanto, $\{(X, T); \mathbb{T}^2\}$ satisfaz WBUT.

Observe que se não tivéssemos considerado $g(v) = \overline{(x_0, y_0)} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, ou seja, se $g(v) = \overline{(w_1, w_2)}$, com $\overline{(w_1, w_2)}$ um outro elemento qualquer em K então, $\overline{(w_1, w_2)} \in \bar{E}$ ou $\overline{(w_1, w_2)} \notin \bar{E}$. Se $\overline{(w_1, w_2)} \in \bar{E}$, como $i\left(\overline{(w_1, w_2)}\right) \in \bar{E}$, poderíamos tomar um caminho direto em \bar{E} de $\overline{(w_1, w_2)}$ a $i\left(\overline{(w_1, w_2)}\right)$, assim valeria as mesmas condições utilizadas anteriormente. Se $\overline{(w_1, w_2)} \notin \bar{E}$, então tomaríamos um caminho λ em K que passe por duas arestas consecutivas do quadrado E , ligando $\overline{(w_1, w_2)}$ a $i\left(\overline{(w_1, w_2)}\right)$, como representado na figura a seguir:

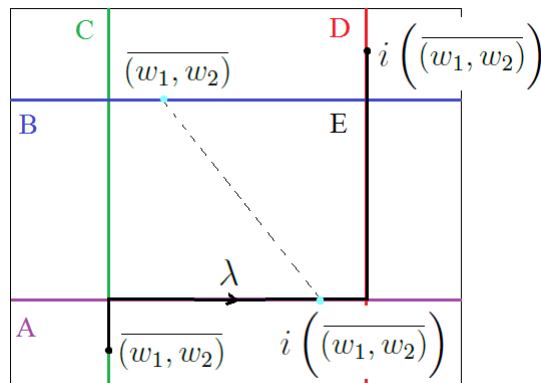


Figura 3.8: Caminho em K ligando $\overline{(w_1, w_2)}$ a $i\left(\overline{(w_1, w_2)}\right)$.

Ou seja, $[q \circ \lambda]$ seria uma palavra que tem pelo menos uma letra \mathbf{z} e, assim, como o interesse é apenas nas potências de \mathbf{z} , a prova seguiria de modo análogo ao que fizemos. ■

Corolário 3.2.1. *Consideremos X e Y espaços de Hausdorff conexos por caminhos, (X, T) um par, onde T é uma involução livre sobre X , e $S : Y \rightarrow Y$ é uma involução que possui pelo menos um ponto fixo. Se existe $[\alpha] \in \Pi_1\left(\frac{X}{T}\right) - (p_1)_\#(\Pi_1(X))$ tal que $h_{\frac{X}{T}}([\alpha])$ é um elemento de torção de $H_1\left(\frac{X}{T}\right)$, sendo $(p_1)_\#$ o homomorfismo induzido da aplicação quociente $p_1 : X \rightarrow \frac{X}{T}$, então $\{(X \times Y, T \times S); \mathbb{T}^2\}$ satisfaz WBUT, onde $T \times S$ é a involução produto $(T \times S)(x, y) = (T(x), S(y))$, para todo $(x, y) \in X \times Y$.*

Demonstração: Se existe $[\alpha] \in \Pi_1\left(\frac{X}{T}\right) - (p_1)_\#(\Pi_1(X))$ tal que $h_{\frac{X}{T}}([\alpha])$ é um elemento de torção de $H_1\left(\frac{X}{T}\right)$, então, similarmente ao que foi feito na demonstração do Corolário 2.2.2, tomando $c \in Y$ tal que $S(c) = c$, obtém-se um elemento $[\bar{\phi}_c \circ \alpha] \in \Pi_1\left(\frac{X \times Y}{T \times S}, \overline{(a, c)}\right) - p_\#(\Pi_1(X \times Y, (a, c)))$ tal que $h_{\frac{X \times Y}{T \times S}}([\bar{\phi}_c \circ \alpha])$ é um elemento de torção de $H_1\left(\frac{X \times Y}{T \times S}\right)$. Daí, pelo Teorema 3.2.1, segue que $\{(X \times Y, T \times S); \mathbb{T}^2\}$ satisfaz WBUT. ■

3.3 Condição de equivalência entre BUT e WBUT para superfícies fechadas

O objetivo principal desta seção é provar um resultado que dá uma equivalência entre a versão fraca WBUT para triplas $\{(\mathbb{S}, T); \mathbb{T}^2\}$ e a condição BUT para $\{(\mathbb{S}, T); \mathbb{R}^2\}$, sendo \mathbb{S} uma superfície fechada, apresentado no artigo já referido no início do capítulo. Para a prova é necessário um resultado de Gonçalves (2006), [2], que caracteriza as triplas $\{(\mathbb{S}, T), \mathbb{R}^2\}$ que satisfazem BUT.

Inicialmente (como uma informação adicional) apresentamos um resultado para superfícies fechadas relacionado à condição BUT, que foi também abordado em Gonçalves (2006), [2].

Proposição 3.3.1. *Considere (\mathbb{S}, T) e (S^1, A) dois pares, onde \mathbb{S} é uma superfície fechada equipada com uma involução livre T e A é a aplicação antipodal sobre S^1 .*

(i) *Se $\{(\mathbb{S}, T); \mathbb{R}^2\}$ não satisfaz BUT e $g : (\mathbb{S}, T) \rightarrow (S^1, A)$ é uma aplicação equivariante (que existe pelo Lema 2.2.1), então a aplicação induzida $\bar{g} : \frac{\mathbb{S}}{T} \rightarrow \frac{S^1}{A}$ (como no Lema 2.2.2) tem a propriedade que o homomorfismo $\bar{g}_\# : \Pi_1\left(\frac{\mathbb{S}}{T}\right) \rightarrow \Pi_1\left(\frac{S^1}{A}\right)$ induz um isomorfismo $\frac{\Pi_1\left(\frac{\mathbb{S}}{T}\right)}{p_\#(\Pi_1(\mathbb{S}))} \rightarrow \frac{\Pi_1\left(\frac{S^1}{A}\right)}{q_\#(\Pi_1(S^1))}$, onde $p : \mathbb{S} \rightarrow \frac{\mathbb{S}}{T}$ e $q : S^1 \rightarrow \frac{S^1}{A}$ são as aplicações quocientes.*

(ii) *Reciprocamente, se uma aplicação contínua $\bar{g} : \frac{\mathbb{S}}{T} \rightarrow \frac{S^1}{A}$ é tal que $\bar{g}_\#(p_\#(\Pi_1(\mathbb{S}))) \subset q_\#(\Pi_1(S^1))$ e o homomorfismo induzido por $\bar{g}_\#$ no quociente*

$\frac{\Pi_1\left(\frac{\mathbb{S}}{T}\right)}{p_{\#}(\Pi_1(\mathbb{S}))} \rightarrow \frac{\Pi_1\left(\frac{S^1}{A}\right)}{q_{\#}(\Pi_1(S^1))}$ é um isomorfismo, então existe uma aplicação equivariante $g : (\mathbb{S}, T) \rightarrow (S^1, A)$ e, portanto, $\{(\mathbb{S}, T); \mathbb{R}^2\}$ não satisfaz BUT.

Demonstração:

- (i) Observamos inicialmente que, de acordo com a Proposição 1.3.5 e pela Observação 1.3.5, temos que $\left(S^1, q, \frac{S^1}{A}\right)$ é um recobrimento de duas folhas tendo como grupo de automorfismos de recobrimento $G\left(S^1 \mid \frac{S^1}{A}\right) = \{Id, A\}$. Pela Proposição 1.3.4, segue que $q_{\#}(\Pi_1(S^1))$ tem índice dois e, portanto, $q_{\#}(\Pi_1(S^1))$ é um subgrupo normal. Assim, $\left(S^1, q, \frac{S^1}{A}\right)$ é um recobrimento regular. Usando o Corolário 1.3.9, existe um isomorfismo entre $G\left(S^1 \mid \frac{S^1}{A}\right) = \{Id, A\}$ e $\frac{\Pi_1\left(\frac{S^1}{A}\right)}{q_{\#}(\Pi_1(S^1))}$ e, assim,

$$\frac{\Pi_1\left(\frac{S^1}{A}\right)}{q_{\#}(\Pi_1(S^1))} \cong \mathbb{Z}_2. \quad (I)$$

De modo análogo, para a aplicação quociente p , obtêm-se que $\frac{\Pi_1\left(\frac{\mathbb{S}}{T}\right)}{p_{\#}(\Pi_1(\mathbb{S}))} \cong \mathbb{Z}_2$.

Como $\Pi_1\left(\frac{S^1}{A}\right) \cong \mathbb{Z}$, segue de (I) que $q_{\#}(\Pi_1(S^1)) \cong 2\mathbb{Z}$.

Considere $g : (\mathbb{S}, T) \rightarrow (S^1, A)$ uma aplicação equivariante, que existe pelo fato de que $\{(\mathbb{S}, T); \mathbb{R}^2\}$ não satisfaz BUT (Lema 2.2.1). Pelo Lema 2.2.2, g induz a aplicação contínua $\bar{g} : \frac{\mathbb{S}}{T} \rightarrow \frac{S^1}{A}$ tal que o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S} & \xrightarrow{g} & S^1 \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ \frac{\mathbb{S}}{T} & \xrightarrow{\bar{g}} & \frac{S^1}{A}. \end{array}$$

E, portanto, o seguinte diagrama, também, é comutativo

$$\begin{array}{ccc} \Pi_1(\mathbb{S}) & \xrightarrow{g_{\#}} & \Pi_1(S^1) \\ p_{\#} \downarrow & & \downarrow q_{\#} \\ \Pi_1\left(\frac{\mathbb{S}}{T}\right) & \xrightarrow{\bar{g}_{\#}} & \Pi_1\left(\frac{S^1}{A}\right). \end{array}$$

Como a imagem de $p_{\#}(\Pi_1(\mathbb{S}))$ por $\bar{g}_{\#}$ está contida em $q_{\#}(\Pi_1(S^1))$, pois

$$\bar{g}_{\#}(p_{\#}(\Pi_1(\mathbb{S}))) = q_{\#}(g_{\#}(\Pi_1(\mathbb{S}))) \subset q_{\#}(\Pi_1(S^1)) \cong 2\mathbb{Z}$$

temos, então, a existência do homomorfismo induzido nos quocientes

$$\mathbb{Z}_2 \cong \frac{\Pi_1\left(\frac{\mathbb{S}}{T}\right)}{p_{\#}(\Pi_1(\mathbb{S}))} \xrightarrow{\phi} \frac{\Pi_1\left(\frac{S^1}{A}\right)}{q_{\#}(\Pi_1(S^1))} \cong \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_2,$$

onde tal homomorfismo é dado, indicando os grupos abelianos aditivamente, por $[\rho] + p_{\#}(\Pi_1(\mathbb{S})) \xrightarrow{\phi} \bar{g}_{\#}([\rho]) + q_{\#}(\Pi_1(S^1)) = [\bar{g} \circ \rho] + q_{\#}(\Pi_1(S^1))$, com $\rho : I \rightarrow \frac{\mathbb{S}}{T}$ um laço. Assim, para mostrar que o homomorfismo ϕ é um isomorfismo, devemos provar que a classe não nula de $\frac{\Pi_1\left(\frac{\mathbb{S}}{T}\right)}{p_{\#}(\Pi_1(\mathbb{S}))}$ é levada, por ϕ , na classe não nula de

$$\frac{\Pi_1\left(\frac{S^1}{A}\right)}{q_{\#}(\Pi_1(S^1))}.$$

Vamos exibir, primeiro, um representante para a classe não nula de $\frac{\Pi_1\left(\frac{\mathbb{S}}{T}\right)}{p_{\#}(\Pi_1(\mathbb{S}))}$. Fixe um ponto base $s_0 \in \mathbb{S}$. Seja $\lambda : I \rightarrow \mathbb{S}$ um caminho tal que $\lambda(0) = s_0$ e $\lambda(1) = T(s_0)$, assim $p \circ \lambda : I \rightarrow \frac{\mathbb{S}}{T}$ é um laço baseado em \bar{s}_0 , uma vez que a aplicação quociente p identifica s_0 com $T(s_0)$.

Observe que $[p \circ \lambda] \notin p_{\#}(\Pi_1(\mathbb{S}, s_0))$, pois se $[p \circ \lambda] \in p_{\#}(\Pi_1(\mathbb{S}, s_0))$, então existiria $[\beta] \in \Pi_1(\mathbb{S}, s_0)$ tal que $[p \circ \lambda] = p_{\#}([\beta]) = [p \circ \beta]$. Daí, $p \circ \lambda \sim p \circ \beta$ e, como $\lambda(0) = s_0 = \beta(0)$ e $(p \circ \lambda)(1) = \bar{s}_0 = p(s_0) = (p \circ \beta)(1)$, segue do Teorema 1.3.4, que $\lambda \sim \beta$ e $\lambda(1) = \beta(1)$. Então, $s_0 = \beta(1) = \lambda(1) = T(s_0)$, o que é uma contradição do fato de T ser uma involução livre. Logo, $[p \circ \lambda] \in \Pi_1\left(\frac{\mathbb{S}}{T}, \bar{s}_0\right) - p_{\#}(\Pi_1(\mathbb{S}, s_0))$, ou seja, $[p \circ \lambda]$ é um representante da classe não nula de $\frac{\Pi_1\left(\frac{\mathbb{S}}{T}\right)}{p_{\#}(\Pi_1(\mathbb{S}))}$.

Queremos, agora, analisar $\bar{g}_{\#}([p \circ \lambda]) = [\bar{g} \circ p \circ \lambda] \stackrel{\bar{g} \circ p = q \circ g}{=} [q \circ g \circ \lambda] \in \Pi_1\left(\frac{S^1}{A}\right)$.

Note que $g \circ \lambda$ é um caminho em S^1 ligando o ponto $g(s_0)$ ao ponto $g(T(s_0)) = A(g(s_0)) = -g(s_0)$, pois g é uma aplicação equivariante.

Tome um gerador $[\gamma] \in \Pi_1(S^1, g(s_0)) \cong \mathbb{Z}$ e escolha $\mu : I \rightarrow S^1$ um caminho tal que $\mu(0) = g(s_0)$ e $\mu(1) = -g(s_0)$, de modo que $[q \circ \mu]$ seja um gerador de $\Pi_1\left(\frac{S^1}{A}, \overline{g(s_0)}\right) \cong \mathbb{Z}$. Daí,

$$q_{\#}([\gamma]) = [q \circ \gamma] = [(q \circ \mu) * (q \circ \mu)] = [q \circ \mu] + [q \circ \mu] = 2 [q \circ \mu].$$

Considere o caminho $(g \circ \lambda) * \mu^{-1} : I \rightarrow S^1$, então

$$((g \circ \lambda) * \mu^{-1})(0) = (g \circ \lambda)(0) = g(s_0) = \mu^{-1}(1) = ((g \circ \lambda) * \mu^{-1})(1),$$

ou seja, $[(g \circ \lambda) * \mu^{-1}] \in \Pi_1(S^1, g(s_0))$. Como $[\gamma]$ é gerador de $\Pi_1(S^1, g(s_0))$, segue que, para algum $m \in \mathbb{Z}$, temos

$$[(g \circ \lambda) * \mu^{-1}] = m [\gamma]$$

daí,

$$q_{\#}([(g \circ \lambda) * \mu^{-1}]) = q_{\#}(m [\gamma]) = m q_{\#}([\gamma]) = 2m [q \circ \mu].$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} q_{\#}([(g \circ \lambda) * \mu^{-1}]) &= [q \circ ((g \circ \lambda) * \mu^{-1})] = [(q \circ g \circ \lambda) * (q \circ \mu^{-1})] \\ &= [q \circ g \circ \lambda] - [q \circ \mu], \end{aligned}$$

já que $q \circ \mu^{-1}$ tem a orientação contrária a de $q \circ \mu$.

Assim, devemos ter

$$[q \circ g \circ \lambda] - [q \circ \mu] = 2m [q \circ \mu],$$

o que equivale a,

$$q_{\#}([g \circ \lambda]) = [q \circ g \circ \lambda] = (2m + 1) [q \circ \mu],$$

ou seja, a imagem da classe de $g \circ \lambda$ pela aplicação $q_{\#}$ é um múltiplo ímpar do gerador de $\Pi_1\left(\frac{S^1}{A}, \bar{s}_0\right)$. Daí,

$$\bar{g}_{\#}([p \circ \lambda]) = [\bar{g} \circ p \circ \lambda] \stackrel{\bar{g} \circ p = q \circ g}{=} [q \circ g \circ \lambda] = (2m + 1) [q \circ \mu] \neq 0$$

e, portanto, $\bar{g}_{\#}([p \circ \lambda])$ é um representante da classe não nula de $\frac{\Pi_1\left(\frac{S^1}{A}\right)}{q_{\#}(\Pi_1(S^1))} \cong \mathbb{Z}_2$.

Logo, $\frac{\Pi_1\left(\frac{\mathbb{S}}{T}\right)}{p_{\#}(\Pi_1(\mathbb{S}))} \xrightarrow{\phi} \frac{\Pi_1\left(\frac{S^1}{A}\right)}{q_{\#}(\Pi_1(S^1))}$ é um isomorfismo, como desejado.

(ii) Para a recíproca, considere uma aplicação contínua $\bar{g} : \frac{\mathbb{S}}{T} \rightarrow \frac{S^1}{A}$ tal que $\bar{g}_{\#}(p_{\#}(\Pi_1(\mathbb{S}))) \subset q_{\#}(\Pi_1(S^1))$.

Pelo Teorema Fundamental do Levantamento (Teorema 1.3.5), existe uma aplicação contínua $g : \mathbb{S} \rightarrow S^1$ tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} & & S^1 \\ & \nearrow g & \downarrow q \\ \mathbb{S} & \xrightarrow{p} \frac{\mathbb{S}}{T} \xrightarrow{\bar{g}} & \frac{S^1}{A} \end{array}$$

isto é, $\bar{g} \circ p = q \circ g$.

Mostremos que g é equivariante, ou seja, $g(T(x)) = A(g(x)) = -g(x)$, para todo $x \in \mathbb{S}$. Tome um elemento qualquer $x \in \mathbb{S}$, temos que $p(x) = \bar{x} \in \frac{\mathbb{S}}{T}$ e, assim,

$$\bar{g}(\bar{x}) = \bar{g}(p(x)) = q(g(x)) = \{g(x), -g(x)\}.$$

Além disso, $\bar{g}(\overline{T(x)}) = \bar{g}(p(T(x))) = q(g(T(x))) = \{g(T(x)), -g(T(x))\}$.

Como $\bar{x} = \{x, T(x)\} = \{T(T(x)), T(x)\} = \overline{T(x)}$, segue que

$$\{g(x), -g(x)\} = \bar{g}(\bar{x}) = \bar{g}(\overline{T(x)}) = \{g(T(x)), -g(T(x))\}$$

assim, $g(x) = g(T(x))$ ou $g(x) = -g(T(x))$, para todo $x \in \mathbb{S}$.

Vamos supor que $g(x_0) = g(T(x_0))$, para algum $x_0 \in \mathbb{S}$. Análogo ao que foi feito anteriormente para $g(s_0)$ e $g(T(s_0))$, tome σ um caminho em \mathbb{S} ligando x_0 a $T(x_0)$. Então, $g \circ \sigma$ é um laço em S^1 baseado em $g(x_0) = g(T(x_0))$, assim, $[g \circ \sigma] \in \Pi_1(S^1, g(x_0))$.

Considere um gerador $[\gamma_1] \in \Pi_1(S^1, g(x_0)) \cong \mathbb{Z}$. Então, $[g \circ \sigma] = r [\gamma_1]$, para algum $r \in \mathbb{Z}$. Seja $\mu_1 : I \rightarrow S^1$ um caminho tal que $\mu_1(0) = g(x_0)$ e

$\mu_1(1) = -g(x_0)$ e $[q \circ \mu_1]$ seja um gerador de $\Pi_1\left(\frac{S^1}{A}, \overline{g(x_0)}\right) \cong \mathbb{Z}$. Raciocinando de modo análogo ao que foi feito anteriormente com o caminho γ , obtêm-se

$$q_{\#}([\gamma_1]) = 2 [q \circ \mu_1].$$

Daí, usando que $[g \circ \sigma] = r [\gamma_1]$, obtemos

$$q_{\#}([g \circ \sigma]) = q_{\#}(r [\gamma_1]) = 2r [q \circ \mu_1],$$

ou seja, $q_{\#}([g \circ \sigma]) \in \Pi_1\left(\frac{S^1}{A}\right)$ é um inteiro par sob a identificação de

$\Pi_1\left(\frac{S^1}{A}\right) \cong \mathbb{Z}$ e, conseqüentemente, sua classe em $\frac{\Pi_1\left(\frac{S^1}{A}\right)}{q_{\#}(\Pi_1(S^1))} \cong \mathbb{Z}_2$ será nula. (II)

Por outro lado, considerando $p \circ \sigma$, de modo análogo ao que fizemos com o caminho $p \circ \lambda$, concluí-se que $[p \circ \sigma] \notin p_{\#}(\Pi_1(\mathbb{S}, x_0))$, assim, $[p \circ \sigma]$ é um representante da classe não nula de $\frac{\Pi_1\left(\frac{\mathbb{S}}{T}\right)}{p_{\#}(\Pi_1(\mathbb{S}))} \cong \mathbb{Z}_2$. Como, por hipótese, o homomor-

fismo induzido por $\bar{g}_{\#} : \Pi_1\left(\frac{\mathbb{S}}{T}\right) \rightarrow \Pi_1\left(\frac{S^1}{A}\right)$, $\frac{\Pi_1\left(\frac{\mathbb{S}}{T}\right)}{p_{\#}(\Pi_1(\mathbb{S}))} \rightarrow \frac{\Pi_1\left(\frac{S^1}{A}\right)}{q_{\#}(\Pi_1(S^1))}$ tal que $[\rho] + p_{\#}(\Pi_1(\mathbb{S})) \mapsto \bar{g}_{\#}([\rho]) + q_{\#}(\Pi_1(S^1))$ é um isomorfismo, temos que

$$q_{\#}([g \circ \sigma]) = [q \circ g \circ \sigma] \stackrel{q \circ g = \bar{g} \circ p}{=} [\bar{g} \circ p \circ \sigma] = \bar{g}_{\#}([p \circ \sigma])$$

é um representante da classe não nula de $\frac{\Pi_1\left(\frac{S^1}{A}\right)}{q_{\#}(\Pi_1(S^1))} \cong \mathbb{Z}_2$, o que contradiz o obtido em (II).

Logo, $g(x) \neq g(T(x))$, para todo $x \in \mathbb{S}$, e, portanto, necessariamente $g(x) = -g(T(x))$, para todo $x \in \mathbb{S}$. Assim, g é equivariante e, pelo Lema 2.2.1, $\{(\mathbb{S}, T); \mathbb{R}^2\}$ não satisfaz BUT. ■

A classificação das triplas $\{(\mathbb{S}, T); \mathbb{R}^2\}$ que satisfazem BUT apresentada por Gonçalves (que será utilizada aqui na prova da equivalência entre BUT e WBUT) envolve a característica de Euler de superfícies e uma correspondência entre subgrupos de índice dois de $\Pi_1(\mathbb{S})$ e certas sequências em \mathbb{Z}_2 .

Proposição 3.3.2. *Considere $\{a_1, a_2, \dots, a_s\}$ o conjunto dos geradores de $\Pi_1(\mathbb{S})$, com \mathbb{S} uma superfície fechada. Tome os seguintes conjuntos:*

- $\mathcal{H} := \{H \subset \Pi_1(\mathbb{S}); H \text{ é um subgrupo de índice dois}\};$
- $\mathcal{F} := \{f : \Pi_1(\mathbb{S}) \rightarrow \mathbb{Z}_2; f \text{ é homomorfismo não trivial}\};$
- $\mathcal{S} := \{\phi : \{a_1, a_2, \dots, a_s\} \rightarrow \mathbb{Z}_2; \phi \text{ é uma aplicação não trivial}\}.$

Então, existe uma correspondência biunívoca entre quaisquer dois dos conjuntos \mathcal{H} , \mathcal{F} e \mathcal{S} .

Demonstração: Tome $H \in \mathcal{H}$, então H é um subgrupo normal de $\Pi_1(\mathbb{S})$, uma vez que H tem índice dois. Assim, temos definido o homomorfismo canônico $\rho : \Pi_1(\mathbb{S}) \rightarrow \frac{\Pi_1(\mathbb{S})}{H}$, dado por $\rho([\alpha]) = [\alpha] \cdot H$.

Por H ter índice dois, existe um isomorfismo $g : \frac{\Pi_1(\mathbb{S})}{H} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ e, assim, temos o homomorfismo não trivial $\bar{\rho} = g \circ \rho : \Pi_1(\mathbb{S}) \rightarrow \mathbb{Z}_2$.

Defina, então

$$\begin{aligned} \vartheta : \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{F} \\ H &\mapsto \bar{\rho}. \end{aligned}$$

Note que, para todo $f \in \mathcal{F}$, temos que $f : \Pi_1(\mathbb{S}) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ é sobrejetor, uma vez que f é um homomorfismo não trivial. Assim, $f(\Pi_1(\mathbb{S})) = \mathbb{Z}_2$. Pelo Teorema do Isomorfismo (Teorema 1.1.1), existe um isomorfismo $\tilde{f} : \frac{\Pi_1(\mathbb{S})}{Ker(f)} \rightarrow f(\Pi_1(\mathbb{S}))$, ou seja, $\frac{\Pi_1(\mathbb{S})}{Ker(f)} \cong \mathbb{Z}_2$. Logo, $Ker(f)$ é um subgrupo de índice dois.

Podemos definir, então

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{F} &\rightarrow \mathcal{H} \\ f &\mapsto Ker(f). \end{aligned}$$

Observemos que

$$(\psi \circ \vartheta)(H) = \psi(\vartheta(H)) = \psi(\bar{\rho}) = Ker(\bar{\rho}) = H,$$

ou seja, $\psi \circ \vartheta = Id_{\mathcal{H}}$, de onde segue que ψ é sobrejetora. Notemos, também, que ψ é injetora, pois

$$\psi(f) = \psi(g) \Rightarrow Ker(f) = Ker(g) \Rightarrow \begin{cases} f(x) = \bar{0} = g(x), & \forall x \in Ker(f) = Ker(g); \\ f(x) = \bar{1} = g(x), & \forall x \notin Ker(f) = Ker(g), \end{cases}$$

assim, $f = g$.

Logo, ψ é uma aplicação bijetora, com $\vartheta : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{F}$ sendo a sua inversa.

Tomemos, agora, $f \in \mathcal{F}$ e considere a aplicação

$$\begin{aligned} \eta : \mathcal{F} &\rightarrow \mathcal{S} \\ f &\mapsto f|_{\{a_1, \dots, a_s\}} \end{aligned}$$

onde $f|_{\{a_1, \dots, a_s\}}$ indica a restrição de f nos geradores de $\Pi_1(\mathbb{S})$.

Temos que η está bem definida e é injetora, uma vez que a_1, \dots, a_s são os geradores de $\Pi_1(\mathbb{S})$.

Sabemos que, para cada superfície \mathbb{S} , o grupo fundamental de \mathbb{S} tem uma apresentação da forma

$$\Pi_1(\mathbb{S}) = \langle \{a_1, \dots, a_s\} \mid \{r = 1\} \rangle,$$

onde r é uma relação que define $\Pi_1(\mathbb{S})$. Assim, um elemento genérico $\xi \in \Pi_1(\mathbb{S})$ tem a forma

$$\xi = a_1^{t_{1,1}} a_2^{t_{2,1}} \dots a_s^{t_{s,1}} a_1^{t_{1,2}} a_2^{t_{2,2}} \dots a_s^{t_{s,2}} \dots a_1^{t_{1,n}} a_2^{t_{2,n}} \dots a_s^{t_{s,n}},$$

onde $n \in \mathbb{N}$ e $t_{i,k} \in \mathbb{Z}$, com $1 \leq i \leq s$ e $1 \leq k \leq n$.

Para cada $\phi \in \mathcal{S}$, considere a aplicação

$$f_\phi : \Pi_1(\mathbb{S}) \rightarrow \mathbb{Z}_2,$$

definida nos geradores por $f_\phi(a_i) = \phi(a_i)$ e “estendida por linearidade” de modo que

$$f_\phi(\xi) = (t_{1,1} + \dots + t_{1,n})\phi(a_1) + (t_{2,1} + \dots + t_{2,n})\phi(a_2) + \dots + (t_{s,1} + \dots + t_{s,n})\phi(a_s).$$

Pela maneira em que se tomou f_ϕ , segue que a aplicação f_ϕ está bem definida e é um homomorfismo.

O homomorfismo f_ϕ é não trivial, pois ϕ é não trivial, e, para a relação r , $f_\phi(r) = f_\phi(1) = \bar{0}$. Assim, para todo $\phi \in \mathcal{S}$ existe $f_\phi \in \mathcal{F}$ tal que $\eta(f_\phi) = (f_\phi)|_{\{a_1, \dots, a_s\}} = \phi$, logo η é sobrejetora.

Portanto, η é uma bijeção entre \mathcal{F} e \mathcal{S} . ■

De acordo com a proposição anterior, cada subgrupo H de índice dois de $\Pi_1(\mathbb{S})$ é identificado com um homomorfismo não trivial $f_\phi : \Pi_1(\mathbb{S}) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ e este, por sua vez, é identificado com uma aplicação $\phi : \{a_1, \dots, a_s\} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ tal que $\phi(a_i) = \delta_i$, onde δ_i é $\bar{0}$ ou $\bar{1}$ e s é o número de geradores de $\Pi_1(\mathbb{S})$. Assim, os subgrupos H de índice dois de $\Pi_1(\mathbb{S})$ são caracterizados pelas sequências não nulas $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_s)$, onde δ_i é $\bar{0}$ ou $\bar{1}$, sendo s o número de geradores de $\Pi_1(\mathbb{S})$. Como existem $2^s - 1$ sequências não nulas, segue que existem $2^s - 1$ subgrupos de índice dois de $\Pi_1(\mathbb{S})$.

Queremos enunciar o teorema de Gonçalves (2006), [2], que caracteriza as triplas $\{(\mathbb{S}, T); \mathbb{R}^2\}$ que satisfazem BUT e cuja demonstração omitiremos aqui.

Notemos que, para cada par (\mathbb{S}_0, H) , onde \mathbb{S}_0 é uma superfície fechada e H é um subgrupo de índice dois de $\Pi_1(\mathbb{S}_0)$, podemos associar um par (\tilde{S}, \tilde{T}) , onde \tilde{S} é uma superfície e \tilde{T} é uma involução livre, como segue: pela Proposição 1.3.11 existe um espaço de recobrimento $(\tilde{S}, q, \mathbb{S}_0)$ tal que $q_\#(\Pi_1(\tilde{S})) = H$. Como H tem índice dois, então H é normal, assim $(\tilde{S}, q, \mathbb{S}_0)$ é um recobrimento regular. Daí, pelo Corolário 1.3.9, temos que $G(\tilde{S} | \mathbb{S}_0) \cong \frac{\Pi_1(\mathbb{S}_0)}{q_\#(\Pi_1(\tilde{S}))} \cong \mathbb{Z}_2$. Além disso, a Proposição 1.3.4 garante que o

recobrimento $(\tilde{S}, q, \mathbb{S}_0)$ é recobrimento de duas folhas e, de acordo com a Observação 1.3.5, $G(\tilde{S} | \mathbb{S}_0) = \{Id, \tilde{T}\}$, com \tilde{T} sendo uma involução livre. Logo, obtemos uma involução $\tilde{T} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}$ associada ao par (\mathbb{S}_0, H) . Esta involução \tilde{T} assim obtida é chamada de **involução canônica** sobre a superfície associada ao par (\mathbb{S}_0, H) .

Proposição 3.3.3. (Gonçalves (2006), [2], Prop.2.4, p.120) *Seja (\mathbb{S}, T) um par, onde \mathbb{S} é uma superfície fechada e T é uma involução livre sobre \mathbb{S} . Então, essa involução é equivalente a uma involução canônica.*

Observação 3.3.1. *Usando uma linguagem um pouco mais formal, a proposição anterior nos garante que (\mathbb{S}, T) é equivalente (Definição 3.1.3) a um par (\tilde{S}, \tilde{T}) , com \tilde{T} uma involução canônica associada ao par $(\mathbb{S}_0, H) = \left(\frac{\mathbb{S}}{\tilde{T}}, p_\#(\Pi_1(\mathbb{S}))\right)$, onde $p : \mathbb{S} \rightarrow \frac{\mathbb{S}}{\tilde{T}}$ é a aplicação quociente e $H = p_\#(\Pi_1(\mathbb{S}))$ é um subgrupo de índice dois de $\Pi_1\left(\frac{\mathbb{S}}{\tilde{T}}\right)$.*

Teorema 3.3.1. (Gonçalves (2006), [2], Teor.2.5, p.120) *Seja (\mathbb{S}, T) um par, onde \mathbb{S} é uma superfície fechada e T é uma involução livre sobre \mathbb{S} . Então, $\{(\mathbb{S}, T); \mathbb{R}^2\}$ satisfaz BUT se, e somente se, uma das seguintes condições é satisfeita:*

- (i) \mathbb{S} é orientável e sua característica de Euler é congruente a 2 (mod 4);

- (ii) \mathbb{S} é não-orientável, sua característica de Euler é congruente a 2 (mod 4) e T é equivalente a uma das involuções canônicas que corresponde a subgrupos de índice dois de $\Pi_1\left(\frac{\mathbb{S}}{T}\right)$ que são identificados pelas sequências da forma $(\bar{1}, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_r)$, onde δ_i é $\bar{0}$ ou $\bar{1}$ e r é o número de geradores de $\Pi_1\left(\frac{\mathbb{S}}{T}\right)$;
- (iii) \mathbb{S} é não-orientável, sua característica de Euler é congruente a 0 (mod 4) e T é equivalente a uma das involuções canônicas que corresponde a subgrupos de índice dois de $\Pi_1\left(\frac{\mathbb{S}}{T}\right)$ que são identificados pelas sequências da forma $(\bar{1}, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_r)$, onde δ_i é $\bar{0}$ ou $\bar{1}$ e r é o número de geradores de $\Pi_1\left(\frac{\mathbb{S}}{T}\right)$.

A demonstração do resultado acima pode também ser encontrada em Morita (2014), [6].

Agora estamos em condições de abordar o resultado que é o objetivo central desta seção. Na prova deste resultado consideramos \mathbb{T}^2 como um grupo topológico multiplicativo. Vale observar que na seção anterior tomamos \mathbb{T}^2 como um grupo topológico aditivo (Exemplo 3.1.2). As duas formas de ver o toro são equivalentes no sentido de que vistos como espaços topológicos são homeomorfos e como grupos são isomorfos via a aplicação $\varphi : S^1 \times S^1 \rightarrow \frac{[0, 1] \times [0, 1]}{\sim}$ tal que $\varphi(e^{2\pi is}, e^{2\pi it}) = \overline{(s, t)}$.

Proposição 3.3.4. *Seja \mathbb{S} uma superfície fechada para a qual $\text{Inv}(\mathbb{S}) \neq \emptyset$. Se (\mathbb{S}, T) é um par, onde T é uma involução livre sobre \mathbb{S} , então $\{(\mathbb{S}, T); \mathbb{T}^2\}$ satisfaz WBUT se, e somente se, $\{(\mathbb{S}, T); \mathbb{R}^2\}$ satisfaz BUT.*

Demonstração: (\Rightarrow) Considere $\{(\mathbb{S}, T); \mathbb{T}^2\}$ satisfazendo WBUT. Então, para toda aplicação contínua $f_1 : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{T}^2$, temos que $F_1^{-1}(2\mathbb{T}^2) \neq \emptyset$, onde $F_1 : (\mathbb{S}, T) \rightarrow (\mathbb{T}^2, i)$ é a aplicação equivariante dada por $F_1(x) = f_1(x) \cdot (f_1(T(x)))^{-1}$.

Suponha que $\{(\mathbb{S}, T); \mathbb{R}^2\}$ não satisfaça BUT, então existe uma aplicação contínua $f : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$f(x) \neq f(T(x)), \quad \forall x \in \mathbb{S}. \quad (\text{I})$$

Tome a função $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow B$, dada por

$$g(x) = \frac{1}{16} \left(\frac{x}{16 + \|x\|} \right), \quad \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

onde B é a bola aberta de centro $(0, 0)$ e raio $\frac{1}{16}$ e $\|\cdot\|$ é a norma usual em \mathbb{R}^2 .

Note que g está bem definida, pois $16 + \|x\| > \|x\|$, assim $\frac{1}{16 + \|x\|} < \frac{1}{\|x\|}$, daí

$$\|g(x)\| = \left\| \frac{1}{16} \left(\frac{x}{16 + \|x\|} \right) \right\| = \frac{1}{16(16 + \|x\|)} \|x\| < \frac{1}{16\|x\|} \|x\| = \frac{1}{16},$$

ou seja, $g(x) \in B$.

Além disso, g é um homeomorfismo. De fato, g é bijetora, pois:

(i) g é injetora, uma vez que, se $x, y \in \mathbb{R}^2$ são tais que $g(x) = g(y)$, então

$$\frac{1}{16} \left(\frac{x}{16 + \|x\|} \right) = \frac{1}{16} \left(\frac{y}{16 + \|y\|} \right),$$

ou seja, $\frac{x}{16 + \|x\|} = \frac{y}{16 + \|y\|}$. Daí, $\left\| \frac{x}{16 + \|x\|} \right\| = \left\| \frac{y}{16 + \|y\|} \right\|$ e, portanto,

$$16\|x\| + \|x\|\|y\| = 16\|y\| + \|y\|\|x\|$$

e daí,

$$\|x\| = \|y\|.$$

Logo, substituindo em $g(x) = g(y)$, obtemos que

$$\frac{1}{16} \left(\frac{x}{16 + \|x\|} \right) = \frac{1}{16} \left(\frac{y}{16 + \|x\|} \right),$$

assim, $x = y$.

(ii) Vejamos que g é sobrejetora. Para todo $y \in B$, existe $x = \frac{16y}{\frac{1}{16} - \|y\|} \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$g(x) = g \left(\frac{16y}{\frac{1}{16} - \|y\|} \right) = \frac{1}{16} \left(\frac{\frac{16y}{\frac{1}{16} - \|y\|}}{16 + \frac{16\|y\|}{\frac{1}{16} - \|y\|}} \right) = \frac{1}{16} \left(\frac{\frac{16y}{\frac{1}{16} - \|y\|}}{\frac{1 - 16\|y\| + 16\|y\|}{\frac{1}{16} - \|y\|}} \right) = y,$$

ou seja, g é sobrejetora.

Note que a função inversa de g é dada por

$$\begin{aligned} g^{-1} : B &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ y &\mapsto \frac{16y}{\frac{1}{16} - \|y\|}. \end{aligned}$$

Como g e g^{-1} são contínuas, segue que g é um homeomorfismo.

Considere $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$, com S^1 o círculo unitário. Pelo Exemplo 1.3.2, $(\mathbb{R}^2, h, \mathbb{T}^2)$ é um espaço de recobrimento do toro, onde

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{T}^2 \\ (s, t) &\mapsto h(s, t) = (e^{2\pi is}, e^{2\pi it}). \end{aligned}$$

Além disso, $(\mathbb{R}^2, h, \mathbb{T}^2)$ é um recobrimento universal, pois $\Pi_1(\mathbb{R}^2) = \{1\}$.

Temos que a composta das aplicações,

$$\mathbb{S} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} B \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow{h|_B} \mathbb{T}^2$$

$\varphi = h|_B \circ g \circ f : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{T}^2$ é uma aplicação contínua.

Vamos considerar aqui $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ como sendo um grupo topológico multiplicativo.

Note que, neste caso,

$$\begin{aligned} 2\mathbb{T}^2 &= \{h(s, t) \in \mathbb{T}^2; h(s, t) = (h(s, t))^{-1}, \text{ com } (s, t) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{h(s, t) \in \mathbb{T}^2; (e^{2\pi is}, e^{2\pi it})^2 = (1, 1), \text{ com } (s, t) \in \mathbb{R}^2\}. \end{aligned}$$

Mas,

$$(e^{2\pi is}, e^{2\pi it})^2 = (1, 1) \Leftrightarrow \begin{cases} (e^{2\pi is})^2 = 1 \\ e \\ (e^{2\pi it})^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{2\pi is} = 1 \text{ ou } e^{2\pi is} = -1 \\ e \\ e^{2\pi it} = 1 \text{ ou } e^{2\pi it} = -1 \end{cases}$$

assim, $2\mathbb{T}^2 = \{(1, 1); (-1, 1); (1, -1); (-1, -1)\}$.

Seja $F : (\mathbb{S}, T) \rightarrow (\mathbb{T}^2, i)$ a aplicação dada por $F(x) = \varphi(x) \cdot (\varphi(T(x)))^{-1}$. Então, $F^{-1}(2\mathbb{T}^2) = \emptyset$. De fato, escreva $(g \circ f)(x) = ((g \circ f)_1(x), (g \circ f)_2(x))$, assim $\varphi(x) = (e^{2\pi i(g \circ f)_1(x)}, e^{2\pi i(g \circ f)_2(x)})$. Observe que $F(x) = \varphi(x) \cdot (\varphi(T(x)))^{-1}$ é equivalente a

$$\varphi(x) = F(x) \cdot \varphi(T(x)).$$

Vamos analisar as possibilidades para $F(x) \in 2\mathbb{T}^2$:

1. Se $F(x) = (1, 1)$, então teríamos

$$(e^{2\pi i(g \circ f)_1(x)}, e^{2\pi i(g \circ f)_2(x)}) = (1, 1) \cdot (e^{2\pi i(g \circ f)_1(T(x))}, e^{2\pi i(g \circ f)_2(T(x))}),$$

assim

$$e^{2\pi i(g \circ f)_1(x)} = e^{2\pi i(g \circ f)_1(T(x))} \quad e \quad e^{2\pi i(g \circ f)_2(x)} = e^{2\pi i(g \circ f)_2(T(x))},$$

ou seja, $(g \circ f)_1(x) = (g \circ f)_1(T(x)) + k_1$ e $(g \circ f)_2(x) = (g \circ f)_2(T(x)) + k_2$, com $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Daí,

$$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(T(x)) + (k_1, k_2).$$

Se $(k_1, k_2) = (0, 0)$, então, como g é injetora, temos que $f(x) = f(T(x))$, mas isto contradiz (I). Agora, se $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{(0, 0)\}$, teremos $(g \circ f)(x) \notin B$, o que não é possível. Logo, $F(x) \neq (1, 1)$.

2. Se $F(x) = (-1, 1)$, então

$$\begin{aligned} (e^{2\pi i(g \circ f)_1(x)}, e^{2\pi i(g \circ f)_2(x)}) &= (-1, 1) \cdot (e^{2\pi i(g \circ f)_1(T(x))}, e^{2\pi i(g \circ f)_2(T(x))}) \\ &= (e^{\pi i}, e^0) \cdot (e^{2\pi i(g \circ f)_1(T(x))}, e^{2\pi i(g \circ f)_2(T(x))}) \end{aligned}$$

assim,

$$e^{2\pi i(g \circ f)_1(x)} = e^{2\pi i((g \circ f)_1(T(x)) + \frac{1}{2})} \quad e \quad e^{2\pi i(g \circ f)_2(x)} = e^{2\pi i(g \circ f)_2(T(x))},$$

ou seja, $(g \circ f)_1(x) = (g \circ f)_1(T(x)) + \frac{1}{2} + k_3$ e $(g \circ f)_2(x) = (g \circ f)_2(T(x)) + k_4$, com $k_3, k_4 \in \mathbb{Z}$. Daí,

$$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(T(x)) + \left(\frac{1}{2} + k_3, k_4 \right),$$

assim, $(g \circ f)(x) \notin B$, o que é um absurdo. Portanto, $F(x) \neq (-1, 1)$.

3. Se $F(x) = (1, -1)$, então, análogo ao que fizemos em 2, obtemos

$$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(T(x)) + \left(k_5, \frac{1}{2} + k_6 \right),$$

com $k_5, k_6 \in \mathbb{Z}$, assim $(g \circ f)(x) \notin B$, o que não é possível. Assim $F(x) \neq (1, -1)$.

4. Se $F(x) = (-1, -1)$, então, análogo aos casos anteriores, obtemos

$$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(T(x)) + \left(\frac{1}{2} + k_7, \frac{1}{2} + k_8 \right),$$

com $k_7, k_8 \in \mathbb{Z}$, assim $(g \circ f)(x) \notin B$, o que é um absurdo. Logo, $F(x) \neq (-1, -1)$.

Portanto, de 1 à 4, segue que não existe $x \in \mathbb{S}$ tal que $F(x) \in 2\mathbb{T}^2$ e, consequentemente, $F^{-1}(2\mathbb{T}^2) = \emptyset$.

Logo, existe $\varphi : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{T}^2$ contínua, tal que $F^{-1}(2\mathbb{T}^2) = \emptyset$, onde $F : (\mathbb{S}, T) \rightarrow (\mathbb{T}^2, i)$ é a aplicação equivariante dada por $F(x) = \varphi(x) \cdot (\varphi(T(x)))^{-1}$, contradizendo a hipótese. Assim, $\{(\mathbb{S}, T); \mathbb{R}^2\}$ satisfaz BUT.

(\Leftarrow) Vamos considerar $\{(\mathbb{S}, T); \mathbb{R}^2\}$ satisfazendo BUT. Então, pelo Teorema 3.3.1, uma das condições abaixo é satisfeita:

- (i) \mathbb{S} é orientável e sua característica de Euler é congruente a 2 (mod 4);
- (ii) \mathbb{S} é não-orientável, sua característica de Euler é congruente a 2 (mod 4) e T é equivalente a uma das involuções canônicas que corresponde a subgrupos de índice dois de $\Pi_1 \left(\frac{\mathbb{S}}{T} \right)$ que são identificados pelas sequências da forma $(\bar{1}, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_r)$, onde δ_i é $\bar{0}$ ou $\bar{1}$ e r é o número de geradores de $\Pi_1 \left(\frac{\mathbb{S}}{T} \right)$;
- (iii) \mathbb{S} é não-orientável, sua característica de Euler é congruente a 0 (mod 4) e T é equivalente a uma das involuções canônicas que corresponde a subgrupos de índice dois de $\Pi_1 \left(\frac{\mathbb{S}}{T} \right)$ que são identificados pelas sequências da forma $(\bar{1}, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_r)$, onde δ_i é $\bar{0}$ ou $\bar{1}$ e r é o número de geradores de $\Pi_1 \left(\frac{\mathbb{S}}{T} \right)$.

Analisamos separadamente os casos mencionados.

Caso (i): Como \mathbb{S} é uma superfície fechada, então, pelo Lema 1.5.1, $\frac{\mathbb{S}}{T}$ é uma superfície fechada. Por \mathbb{S} ser orientável e $\chi(\mathbb{S}) = 2 - 4k$, $k \in \mathbb{N}$, obtemos que $\frac{\mathbb{S}}{T}$ tem característica de Euler ímpar, uma vez que, pela Proposição 1.3.5, $\left(\mathbb{S}, p, \frac{\mathbb{S}}{T} \right)$ é um recobrimento de duas folhas, então, segue do Teorema 1.5.3 que

$$\chi \left(\frac{\mathbb{S}}{T} \right) = \frac{\chi(\mathbb{S})}{2} = 1 - 2k.$$

Assim, a superfície fechada $\frac{\mathbb{S}}{T}$ é não-orientável (Observação 1.5.3).

Como o genus de $\frac{\mathbb{S}}{T}$ é ímpar, pois

$$n = 2 - \chi \left(\frac{\mathbb{S}}{T} \right) = 1 + 2k,$$

então, pela Proposição 1.5.3, o grupo fundamental de $\frac{\mathbb{S}}{T}$ tem uma apresentação dada por

$$\Pi_1\left(\frac{\mathbb{S}}{T}\right) = \langle \{\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{2m}\} \mid \{\boldsymbol{\alpha}^2[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] \dots [\mathbf{a}_{2m-1}, \mathbf{a}_{2m}] = 1\} \rangle,$$

onde $m = \frac{n-1}{2}$, $\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{2m}$ aqui indicam as classes de laços em $\frac{\mathbb{S}}{T}$ e, em especial, $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha]$, com α um laço que reverte a orientação (em função da não orientabilidade de $\frac{\mathbb{S}}{T}$).

Observe que $p_{\#}(\Pi_1(\mathbb{S})) \cong \Pi_1(\mathbb{S})$, onde $p : \mathbb{S} \rightarrow \frac{\mathbb{S}}{T}$ é a aplicação quociente, já que, pela Proposição 1.3.2, $p_{\#}$ é um homomorfismo injetor e, obviamente, $p_{\#} : \Pi_1(\mathbb{S}) \rightarrow p_{\#}(\Pi_1(\mathbb{S}))$ é sobrejetor.

Como $\boldsymbol{\alpha}$ é a classe de um laço que reverte a orientação e $\Pi_1(\mathbb{S})$ é formado por classes de laços que não revertem a orientação, devido à \mathbb{S} ser orientável, então $\boldsymbol{\alpha} \in \Pi_1\left(\frac{\mathbb{S}}{T}\right) - p_{\#}(\Pi_1(\mathbb{S}))$, já que $p_{\#}(\Pi_1(\mathbb{S})) \cong \Pi_1(\mathbb{S})$.

Considere o homomorfismo de Hurewicz $h_{\frac{\mathbb{S}}{T}} : \Pi_1\left(\frac{\mathbb{S}}{T}\right) \rightarrow H_1\left(\frac{\mathbb{S}}{T}\right)$. Observe que $h_{\frac{\mathbb{S}}{T}}([\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1}]) = h_{\frac{\mathbb{S}}{T}}(\mathbf{a}_i \mathbf{a}_{i+1} \mathbf{a}_i^{-1} \mathbf{a}_{i+1}^{-1}) = h_{\frac{\mathbb{S}}{T}}(\mathbf{a}_i) + h_{\frac{\mathbb{S}}{T}}(\mathbf{a}_{i+1}) - h_{\frac{\mathbb{S}}{T}}(\mathbf{a}_i) - h_{\frac{\mathbb{S}}{T}}(\mathbf{a}_{i+1}) = 0$, para todo $i \in \{1, 2, \dots, 2m-1\}$ (estamos usando aqui, para o grupo abeliano $H_1\left(\frac{\mathbb{S}}{T}\right)$, a notação aditiva). Então, da relação $\boldsymbol{\alpha}^2[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] \dots [\mathbf{a}_{2m}, \mathbf{a}_{2m-1}] = 1$ em $\Pi_1\left(\frac{\mathbb{S}}{T}\right)$, segue que

$$\begin{aligned} 0 &= h_{\frac{\mathbb{S}}{T}}(1) = h_{\frac{\mathbb{S}}{T}}(\boldsymbol{\alpha}^2[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] \dots [\mathbf{a}_{2m-1}, \mathbf{a}_{2m}]) \\ &= h_{\frac{\mathbb{S}}{T}}(\boldsymbol{\alpha}^2) + h_{\frac{\mathbb{S}}{T}}([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]) + \dots + h_{\frac{\mathbb{S}}{T}}([\mathbf{a}_{2m-1}, \mathbf{a}_{2m}]) \\ &= 2h_{\frac{\mathbb{S}}{T}}(\boldsymbol{\alpha}). \end{aligned}$$

Assim, $h_{\frac{\mathbb{S}}{T}}(\boldsymbol{\alpha})$ é um elemento de torção em $H_1\left(\frac{\mathbb{S}}{T}\right)$, com $\boldsymbol{\alpha} \in \Pi_1\left(\frac{\mathbb{S}}{T}\right) - p_{\#}(\Pi_1(\mathbb{S}))$. Portanto, pelo Teorema 3.2.1, obtemos que $\{(\mathbb{S}, T); \mathbb{T}^2\}$ satisfaz WBUT.

Caso (ii): Se \mathbb{S} é uma superfície não-orientável com $\chi(\mathbb{S}) \equiv 2 \pmod{4}$, então, análogo ao caso (i), $\frac{\mathbb{S}}{T}$ é uma superfície fechada com característica de Euler ímpar. Assim, $\frac{\mathbb{S}}{T}$ é não-orientável com genus ímpar e, então, pela Proposição 1.5.3, o grupo fundamental de $\frac{\mathbb{S}}{T}$ tem uma apresentação da forma

$$\Pi_1\left(\frac{\mathbb{S}}{T}\right) = \langle \{\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{2m}\} \mid \{\boldsymbol{\alpha}^2[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] \dots [\mathbf{a}_{2m-1}, \mathbf{a}_{2m}] = 1\} \rangle.$$

Considere a aplicação quociente $p : \mathbb{S} \rightarrow \frac{\mathbb{S}}{T}$, temos então um homomorfismo (não trivial) $\varphi : \Pi_1\left(\frac{\mathbb{S}}{T}\right) \rightarrow \frac{\Pi_1\left(\frac{\mathbb{S}}{T}\right)}{p_{\#}(\Pi_1(\mathbb{S}))} \cong \mathbb{Z}_2$.

Por hipótese, T é equivalente a uma involução canônica que corresponde a um subgrupo de índice dois de $\Pi_1\left(\frac{\mathbb{S}}{T}\right)$ que é identificado com uma sequência da forma

$(\bar{1}, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_r)$, com δ_i sendo $\bar{0}$ ou $\bar{1}$, de modo que (vide a correspondência dada na Proposição 3.3.2) $\varphi(\alpha) = \bar{1}$, $\varphi(\mathbf{a}_1) = \delta_2$, $\varphi(\mathbf{a}_2) = \delta_3, \dots, \varphi(\mathbf{a}_{2m}) = \delta_r$ (com $r = 2m + 1$, neste caso) e $\{\alpha^2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{2m}\}$ é o conjunto de geradores de $\Pi_1\left(\frac{\mathbb{S}}{T}\right)$.

Temos que $\alpha \in \Pi_1\left(\frac{\mathbb{S}}{T}\right) - p_{\#}(\Pi_1(\mathbb{S}))$, pois se $\alpha \in p_{\#}(\Pi_1(\mathbb{S}))$, então $\varphi(\alpha) = \bar{0}$, o que é uma contradição.

Além disso, usando a relação do grupo $\alpha^2[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] \dots [\mathbf{a}_{2m-1}, \mathbf{a}_{2m}] = 1$, segue que

$$0 = h_{\frac{\mathbb{S}}{T}}(1) = h_{\frac{\mathbb{S}}{T}}(\alpha^2[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] \dots [\mathbf{a}_{2m-1}, \mathbf{a}_{2m}]) = 2h_{\frac{\mathbb{S}}{T}}(\alpha)$$

ou seja, $h_{\frac{\mathbb{S}}{T}}(\alpha)$ é um elemento de torção de $H_1\left(\frac{\mathbb{S}}{T}\right)$.

Portanto, pelo Teorema 3.2.1, obtemos que $\{(\mathbb{S}, T); \mathbb{T}^2\}$ satisfaz WBUT.

Caso (iii): Se \mathbb{S} é uma superfície não-orientável com $\chi(\mathbb{S}) \equiv 0 \pmod{4}$, então $\frac{\mathbb{S}}{T}$ é uma superfície fechada e não-orientável, uma vez que, $\chi(\mathbb{S}) = -4k$, para $k \in \mathbb{N}$. Como $\left(\mathbb{S}, p, \frac{\mathbb{S}}{T}\right)$ é um recobrimento de duas folhas, segue do Teorema 1.5.3, que

$$\chi\left(\frac{\mathbb{S}}{T}\right) = \frac{\chi(\mathbb{S})}{2} = -2k$$

e $\frac{\mathbb{S}}{T}$ é não-orientável.

Temos que o genus de $\frac{\mathbb{S}}{T}$ é par, pois

$$n = 2 - \chi\left(\frac{\mathbb{S}}{T}\right) = 2(1 + k),$$

e, então, pela Proposição 1.5.3, o grupo fundamental de $\frac{\mathbb{S}}{T}$ tem uma apresentação da forma

$$\Pi_1\left(\frac{\mathbb{S}}{T}\right) = \langle \{\alpha, \beta, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{2m}\} \mid \{\alpha\beta\alpha\beta^{-1}[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] \dots [\mathbf{a}_{2m-1}, \mathbf{b}_{2m}] = 1\} \rangle,$$

onde $m = \frac{n-2}{2}$.

Usando os mesmos argumentos do item (ii), obtemos que $\alpha \in \Pi_1\left(\frac{\mathbb{S}}{T}\right) - p_{\#}(\Pi_1(\mathbb{S}))$ e é tal que $h_{\frac{\mathbb{S}}{T}}(\alpha)$ é um elemento de torção de $H_1\left(\frac{\mathbb{S}}{T}\right)$. Assim, do Teorema 3.2.1, concluímos que $\{(\mathbb{S}, T); \mathbb{T}^2\}$ satisfaz WBUT. ■

3.4 Um invariante topológico vindo da versão fraca do Teorema de Borsuk-Ulam

Nesta seção, veremos que, similarmente ao que foi apresentado para BUT, podemos também falar de um invariante vindo da versão fraca WBUT, uma vez que um resultado análogo ao Lema 2.3.1 vale para WBUT.

Lema 3.4.1. *Considere G um grupo topológico e (S^m, A) , (S^n, A) e (S^p, A) três pares, onde A é a aplicação antipodal em cada esfera.*

- (i) *Se $\{(S^n, A); G\}$ satisfaz WBUT, então $\{(S^m, A); G\}$ satisfaz WBUT, para todo $m > n$;*
- (ii) *Se $\{(S^n, A); G\}$ não satisfaz WBUT, então $\{(S^p, A); G\}$ não satisfaz WBUT, para todo $p < n$.*

Demonstração:

- (i) Por hipótese $\{(S^n, A); G\}$ satisfaz WBUT. Vamos supor que $\{(S^m, A); G\}$ não satisfaça WBUT, para algum $m > n$, então existe uma aplicação contínua $g : S^m \rightarrow G$ tal que $F^{-1}(2G) = \emptyset$, onde $F : (S^m, A) \rightarrow (G, i)$ é a aplicação equivariante dada por $F(x) = g(x) \cdot (g(A(x)))^{-1}$.

Como $m > n$, segue que a aplicação inclusão $j : (S^n, A) \rightarrow (S^m, A)$ está bem definida e temos que j é equivariante. Assim, obtemos a aplicação contínua $g \circ j : S^n \rightarrow G$.

Considere a aplicação composta $F \circ j : (S^n, A) \rightarrow (G, i)$. Observe que $F \circ j$ é equivariante, pois é composta de aplicações equivariantes, e para todo $x \in S^n$, temos

$$(F \circ j)(x) \underset{A \circ j = j \circ A}{=} F(j(x)) = g(j(x)) \cdot (g(A(j(x))))^{-1} = (g \circ j)(x) \cdot ((g \circ j)(A(x)))^{-1}.$$

Além disso, $(F \circ j)^{-1}(2G) = j^{-1}(F^{-1}(2G)) = \emptyset$, uma vez que $F^{-1}(2G) = \emptyset$.

Portanto, existe a aplicação contínua $g \circ j : S^n \rightarrow G$ tal que $(F \circ j)^{-1}(2G) = \emptyset$, onde $F \circ j : (S^n, A) \rightarrow (G, i)$ é a aplicação equivariante dada por $(F \circ j)(x) = (g \circ j)(x) \cdot ((g \circ j)(A(x)))^{-1}$. Assim, $\{(S^n, A); G\}$ não satisfaz WBUT, o que nos dá uma contradição com a hipótese.

Logo, $\{(S^m, A); G\}$ satisfaz WBUT, para todo $m > n$.

- (ii) É consequência de (i), pois se $\{(S^p, A); G\}$ satisfaz WBUT, para algum $p < n$, então, por (i), necessariamente, $\{(S^n, A); G\}$ satisfaz WBUT, o que nos dá uma contradição. ■

Com base no lema anterior, considerado os pares (S^n, A) , $n \geq 0$, fica consistente a seguinte definição:

Definição 3.4.1. *Dado um grupo topológico G , dizemos que*

- (i) *$WBUT(G) = \infty$, se $\{(S^n, A); G\}$ não satisfaz WBUT, para todo $n \in \mathbb{N}$;*
- (ii) *$WBUT(G) = n$, se n é o menor número natural tal que $\{(S^n, A); G\}$ satisfaz WBUT.*

Lema 3.4.2. (i) *$WBUT(G) \leq BUT(G)$, para todo grupo topológico G ;*

- (ii) *Se G é um grupo topológico em que $2G = \{e\}$, então $BUT(G) = WBUT(G)$.*

Demonstração:

- (i) Segue do fato que satisfazer a condição BUT, para grupos topológicos, implica em satisfazer a condição WBUT (vide Lema 3.1.2).
- (ii) É consequência do fato que se $2G = \{e\}$, então $\{(S^n, A); G\}$ satisfaz BUT se, e somente se, $\{(S^n, A); G\}$ satisfaz WBUT (vide Lema 3.1.2). ■

Exemplo 3.4.1. (i) Se $G = \{e\}$, então $WBUT(\{e\}) = 0 = BUT(\{e\})$, onde $\{e\}$ indica o grupo topológico trivial, uma vez que, $2(\{e\}) = \{e\}$ e $BUT(\{e\}) = 0$ (vide Exemplo 2.3.1).

(ii) $WBUT(\mathbb{R}^n) = n = BUT(\mathbb{R}^n)$, considerando o grupo topológico aditivo \mathbb{R}^n , pois $2\mathbb{R}^n = \{0\}$ e $BUT(\mathbb{R}^n) = n$ (vide Exemplo 2.3.2).

Exemplo 3.4.2. Se G é um grupo topológico com pelo menos dois elementos, munido da topologia discreta, então $WBUT(G) \leq 1 = BUT(G)$, uma vez que, $WBUT(G) \leq BUT(G)$ e $BUT(G) = 1$ (vide Exemplo 2.3.4).

Exemplo 3.4.3. $WBUT(\mathbb{Z}_2) = 0 < 1 = BUT(\mathbb{Z}_2)$, onde $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ (é o grupo topológico aditivo com a topologia discreta), pois, pelo Exemplo 3.1.4, $\{(S^0, A); \mathbb{Z}_2\}$ satisfaz WBUT e, pelo Exemplo 2.3.4, $BUT(\mathbb{Z}_2) = 1$.

Generalizando, para todo grupo G contendo dois elementos (com a topologia discreta), segue que $WBUT(G) = 0 < 1 = BUT(G)$, uma vez que, $2G = G$ e assim, para toda função $f : S^0 \rightarrow G$ contínua, temos que $F^{-1}(2G) = F^{-1}(G) \neq \emptyset$, onde $F : (S^0, A) \rightarrow (G, i)$ é a aplicação equivariante dada por $F(x) = f(x) \cdot (f(A(x)))^{-1}$.

Exemplo 3.4.4. $WBUT(\mathbb{T}^2) \leq 2$, onde \mathbb{T}^2 é o toro bidimensional. De fato, sabemos, pelo Teorema de Borsuk-Ulam, que $\{(S^2, A); \mathbb{R}^2\}$ satisfaz BUT, assim, de acordo com a Proposição 3.3.4, $\{(S^2, A); \mathbb{T}^2\}$ satisfaz WBUT, pois S^2 é uma superfície fechada e $Inv(S^2) \neq \emptyset$, já que $[A] \in Inv(S^2)$, com A a aplicação antipodal sobre S^2 .

Proposição 3.4.1. Se existe uma aplicação contínua $h : H \rightarrow G$ que é um homomorfismo injetor, onde H e G são dois grupos topológicos, então $WBUT(H) \leq WBUT(G)$.

Demonstração: Note que se $WBUT(G) = \infty$, então, claramente, $WBUT(H) \leq WBUT(G)$.

Suponha que $WBUT(G) = m$.

Seja $f : S^m \rightarrow H$ uma aplicação contínua e considere a aplicação composta $h \circ f : S^m \rightarrow G$. Temos que $h \circ f$ é contínua, pois h e f são contínuas.

Como $\{(S^m, A); G\}$ satisfaz WBUT, então, para a composta $h \circ f$, segue que $F_1^{-1}(2G) \neq \emptyset$, onde $F_1 : (S^m, A) \rightarrow (G, i)$ é a aplicação equivariante dada por $F_1(x) = (h \circ f)(x) \cdot ((h \circ f)(A(x)))^{-1}$.

Por $F_1^{-1}(2G) \neq \emptyset$, temos que existe $b \in S^m$ tal que $F_1(b) \in 2G$, ou seja,

$$(h \circ f)(b) \cdot ((h \circ f)(A(b)))^{-1} = h(f(b)) \cdot (h(f(A(b))))^{-1} \in 2G.$$

Como h é um homomorfismo, segue que

$$h(f(b) \cdot (f(A(b)))^{-1}) = h(f(b)) \cdot h(f(A(b))^{-1}) = h(f(b)) \cdot (h(f(A(b))))^{-1} \in 2G. \quad (I)$$

Seja $F : (S^m, A) \rightarrow (H, i)$ a aplicação equivariante, definida por $F(x) = f(x) \cdot (f(A(x)))^{-1}$. Assim, de (I), segue que

$$h(F(b)) \in 2G,$$

então, $h(F(b)) = h(F(b))^{-1} = h(F(b)^{-1})$, uma vez que h é um homomorfismo. Por h ser injetora, obtemos que $F(b) = F(b)^{-1}$. Logo, $F(b) \in 2H$ e daí, $F^{-1}(2H) \neq \emptyset$.

Portanto, $\{(S^m, A); H\}$ satisfaz WBUT. Assim, $WBUT(H) \leq WBUT(G)$. ■

Em particular, segue da proposição anterior que se H é um subgrupo topológico de G , então $WBUT(H) \leq WBUT(G)$.

Corolário 3.4.1. *WBUT(G) é um invariante topológico (na categoria de grupos topológicos).*

Demonstração: Sejam H e G dois grupos topológicos. Suponha que exista um homomorfismo $f : H \rightarrow G$ que é um homeomorfismo (e, portanto, f é um isomorfismo). Pela proposição anterior, $WBUT(H) \leq WBUT(G)$, uma vez que f é contínua e f é um homomorfismo injetor. Mas $f^{-1} : G \rightarrow H$, também, é contínua e f^{-1} é um homomorfismo injetor e, portanto, $WBUT(G) \leq WBUT(H)$. Assim, $WBUT(H) = WBUT(G)$. ■

Observação 3.4.1. *WBUT(G) não é um invariante homotópico (na categoria de grupos topológicos). Para ver isto, considere como na Observação 2.3.1 para BUT, os grupos $H = \{0\}$ (subgrupo trivial) e $G = \mathbb{R}$.*

Referências

- [1] BREDON, G. E. *Topology and Geometry*. New York: Springer Science+Business Media, 1993.
- [2] GONÇALVES, D. L. The Borsuk-Ulam theorem for surfaces. *Questiones Mathematicae*, v. 29, p. 117–123, 2006.
- [3] KOSNIOWSKI, C. *A First Course in Algebraic Topology*. New York: Cambridge University Press, 1980.
- [4] LIMA, E. L. *Grupo Fundamental e Espaço de Recobrimento*. Rio de Janeiro: IMPA (Projetos Euclides), 2006.
- [5] MASSEY, W. S. *A Basic Course in Algebraic Topology*. New York: Springer-Verlag, 1991.
- [6] MORITA, A. M. M. *Algumas generalizações do teorema clássico de Borsuk-Ulam*. UNESP. São José do Rio Preto: 60f. Dissertação (Mestrado)- Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, 2014.
- [7] ROTMAN, J. J. *An Introduction to Algebraic Topology*. New York: Springer-Verlag, 1988.
- [8] VENDRÚSCULO, D.; DESIDERI, P. E.; PERGHER, P. L. Q. Some generalizations of the Borsuk-Ulam theorem. *Publicationes Mathematicae (Debrecen)*, v. 78, p. 583–593, 2011.
- [9] ZIESCHANG H.; VOGT, E.; COLDEWEY, H. D. *Surfaces and Planar Discontinuous Groups*. New York: Springer-Verlag, 1980.

Índice Remissivo

- Ação
 - à direita na fibra, 49
 - à esquerda, 19
 - propriamente descontínua, 19
 - transitiva de grupos, 19
- Aplicação
 - antipodal, 29
 - equivariante, 100
 - que preserva pontos antipodais, 97
- Automorfismo de recobrimento, 46
- BUT(Y), 109
- Caminho, 23
 - fechado, 23
 - inverso, 23
 - produto, 23
- Caminhos homotópicos, 24
- Característica de Euler, 71
- Classe de homotopia, 24
- Comutador, 21
- Conjunto
 - de relações, 55
 - dos geradores, 55
- Elemento de torção, 102
- Equivalência homotópica (equivalência de homotopia), 30
- Espaço
 - conexo por caminhos, 24
 - contrátil, 33
 - de órbitas, 20
 - de recobrimento, 34
 - de recobrimento regular, 41
 - de recobrimento universal, 48
 - simplesmente conexo, 33
- Espaços com o mesmo tipo de homotopia, 30
- Fibra, 39
- $G(\tilde{X} | X)$, 46
- G-conjunto à esquerda, 19
- G-espaço
 - à esquerda, 19
 - homogêneo, 19
- Genus de uma superfície, 74
- Grau de um caminho, 26
- Grupo
 - com apresentação (S;R), 55
 - das n-cadeias cúbicas singulares, 83
 - de automorfismos de recobrimento, 46
 - de Homologia Singular, 85
 - de torção, 102
 - dos n-bordos singulares, 85
 - dos n-ciclos singulares, 85
 - Fundamental, 24
 - livre de torção, 102
 - livre em n geradores, 54
 - livre gerado por um conjunto, 54
 - propriamente descontínuo, 20
 - topológico, 111
- Homomorfismo
 - de Hurewicz, 91
 - entre recobrimentos, 46
 - induzido em homologia, 86
 - induzido no grupo fundamental, 29
- Homotopia
 - entre aplicações, 30
 - entre caminhos, 24
 - relativa a um subconjunto, 30
- Inv(X), 115
- Involução, 45
 - canônica, 133
 - livre, 45
- Isomorfismo entre recobrimentos, 46
- Levantamento
 - de aplicação, 42
 - de caminho, 25, 36
 - de homotopia, 25, 36

- n-cubo singular, 83
 - degenerado, 83
- n-variedade, 64
 - com bordo, 64
- Número de folhas de um recobrimento, 39
- Normalizador, 23

- Operador bordo, 84
- Orbita de um elemento, 20

- Palavra, 54
 - reduzida, 54
 - vazia, 54
- Palavras equivalentes, 54, 55
- Pares equivalentes de involuções livres, 115
- Projeção de recobrimento, 34

- Retrato por deformação, 33

- Satisfaz o Teorema de Borsuk-Ulam (Satisfaz BUT), 100
- Satisfaz uma versão fraca do Teorema de Borsuk-Ulam (Satisfaz WBUT), 113
- Soma conexa, 65
- Subgrupo
 - comutador, 21
 - conjugado, 21
 - de isotropia, 20
 - normal, 21
- Superfície, 64
 - não-orientável, 66
 - orientável, 66

- Teorema
 - da Classificação das Superfícies Fechadas, 70
 - de Borsuk-Ulam, 99
 - de Hurewicz, 91
 - de Seifert-Van Kampen, 56
 - do Isomorfismo, 22
 - Fundamental do Levantamento, 43
- Triangulação de Superfície, 70

- Vizinhança distinguida ou admissível, 34

- WBUT(G), 140