



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"  
Campus de São José do Rio Preto

---

**Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas**

Natânia Laine Paglione Santos

O misterioso e enigmático mundo de Pascal e Fibonacci

São José do Rio Preto  
2017

Natânia Laine Paglione Santos

## O misterioso e enigmático mundo de Pascal e Fibonacci

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Orientador: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Parham Salehyan

São José do Rio Preto  
2017

Santos, Natânia Laine Paglione.

O misterioso e enigmático mundo de Pascal e Fibonacci /  
Natânia Laine Paglione Santos. -- São José do Rio Preto, 2017  
111 f. : il.

Orientador: Parham Salehyan  
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual  
Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e  
Ciências Exatas

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Pascal, Triângulo de.  
3. Números de Fibonacci. 4. Fractais. 5. Segmento áureo.  
6. Matemática - Metodologia. I. Universidade Estadual Paulista  
"Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e  
Ciências Exatas. II. Título.

CDU – 51(07)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE  
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Natânia Laine Paglione Santos

## O misterioso e enigmático mundo de Pascal e Fibonacci

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

### Comissão Examinadora

Prof. Dr. Parham Salehyan  
UNESP – São José do Rio Preto  
Orientador

Prof. Dr. Jéfferson Luiz Rocha Bastos  
UNESP – São José do Rio Preto

Prof. Dr. Behrooz Mirzaii  
Instituto de Ciências matemáticas e de computação  
USP – São Carlos

São José do Rio Preto  
09 de novembro de 2017



**A Deus e a minha família.**

## AGRADECIMENTO

Fazer um agradecimento não é algo fácil, ficamos horas pensando no que escrever e quem agradecer.

Decidi por comparar minha vida com uma árvore bem frondosa e elegante de flamboyant (minha favorita), ainda pequena, porém em constante crescimento. As raízes são minha família, meu filho Davi, meu marido Tiago, meus pais Shirley e Luiz, minha irmã Nayane, meus avós, tios, tias, primos, cunhada, cunhado, sogra e sobrinhas, na verdade são por aqueles que acordo feliz todos os dias, aqueles que ligo apenas por estar com saudade e que dividem comigo meu dia a dia. Meu tronco e galhos são meus amigos, aqueles que dão força a todo momento, perto ou distantes: Vinícius, José Carlos, Ana Paula, meus amigos tão especiais do mestrado: Evandro, Matheus, Viviane e Fran. As folhas quem poderiam ser?! A sociedade, amigos de trabalho (que a propósito amo demais), aqueles que vem e vão, que passam pela gente e deixam uma marquinha bem especial.

As flores e os frutos são minhas conquistas, tudo que semeio, os acontecimentos bons e ruins que também vão embora junto com o fim da primavera e nascem a cada ano mais belos (se olharmos com olhar puro e otimista, sim eles são sempre belos!!!).

E onde caberia Deus em minha vida? Não poderia ser hipócrita e esquecer Dele, pois é meu sustento, a seiva que me fortalece e me faz crescer, a água que preciso sempre e procuro nos momentos felizes e de fraqueza.

Justificando a elegância usada como adjetivo a aparência da minha vida: as pessoas que me rodeiam são maravilhosas, e encantadoras, me transformam na pessoa que sou, agradeço todos os dias por tê-los Comigo e rezo para que continuem perto de mim somente as boas de coração, para tornar minha caminhada mais leve e feliz.

Obrigada Parham por aceitar fazer parte da minha árvore, obrigada pela gentileza, dedicação e respeito por nós aprendizes, você é um exemplo como mestre.

Bem-aventurados os misericordiosos,  
porque alcançarão misericórdia.

Bem-aventurados os limpos de coração,  
porque verão a Deus.

Bem-aventurados os pacificadores,  
porque serão chamados filhos de Deus.

\(Mt 5.7\)

À CAPES, pelo apoio financeiro.

**A matemática, vista corretamente, possui não apenas verdade, mas também suprema beleza – uma beleza fria e austera como a da escultura.**

**Bertrand Russell**

## RESUMO

Atualmente tem-se percebido uma grande dificuldade em atrelar os conteúdos matemáticos ao cotidiano e estimular os alunos para as aulas. Diante disso percebe-se que demonstrar as fascinantes descobertas do Triângulo de Pascal e a Sequência de Fibonacci ao longo dos anos e suas diversas facetas podem despertar os jovens para um olhar investigativo e curioso, quebrando as barreiras existentes no ensino/aprendizagem de matemática.

O objetivo deste estudo foi investigar algumas propriedades e suas demonstrações existentes no Triângulo de Pascal e na Sequência de Fibonacci. Devido ao intrigante assunto escolhido e a pouca exploração nos livros didáticos consultados, abrimos leques de possibilidades para expansão do tema como: Fractais, Sequência de Lucas e Razão Áurea.

Para sugestões aos docentes, há na pesquisa aplicações para a sala de aula sobre os temas aqui mencionados, vale ressaltar que o conteúdo relacionado as aplicações da Sequência de Fibonacci e Razão Áurea é espetacular.

E como dizia Aristóteles: Os filósofos que afirmam que a Matemática não tem nada a ver com a Estética, estão seguramente errados. A Beleza é de fato o objeto principal do raciocínio e das demonstrações matemáticas.

Palavras-chaves: Triângulo Aritmético, Pascal, Fractais, Fibonacci, Razão Áurea.

## **ABSTRACT**

*There has been a great difficulty in mathematical content to everyday life and to stimulate students to classrooms. From this we can see that demonstrating the fascinating of the Pascal Triangle and the Fibonacci Sequence to the over the years and its many facets can awaken young people for an investigative and curious look, breaking the barriers in mathematics teaching / learning.*

*The objective of this study was to investigate some properties and their demonstrations in the Pascal Triangle and the Sequence of Fibonacci. Due to the intriguing subject chosen and the few in the textbooks we consulted, we possibilities for expansion of the theme as: Fractais, Sequence of Lucas and Golden Ratio.*

*For suggestions to teachers, there are in the research room applications about the topics mentioned here, it is worth mentioning that the content related to the applications of the Fibonacci Sequence and Golden Ratio is spectacular.*

*And what about Aristotle: 'The philosophers who claim that mathematics has nothing to do with Aesthetics, are surely wrong. THE Beauty is in fact the main object of reasoning and mathematical demonstrations'*

*Keywords: Arithmetic Triangle, Pascal, Fractais, Fibonacci, Golden Ratio.*

# Lista de Tabelas

1.1	Triângulo de Pascal com coeficientes binomiais .....	26
7.1	Triângulo retângulo e a Sequência de Fibonacci .....	97

# Lista de Figuras

1.1	Blaise Pascal (1623-1662), Fonte: <a href="http://radeisis.blogspot.com.br/2011/06/blaise-pascal-vida-e-obra.html">http://radeisis.blogspot.com.br/2011/06/blaise-pascal-vida-e-obra.html</a> , em 14/01/2017. ....	16
1.2	Traité Du triangle arithmétique Blaise Pascal, Fonte: livro baixado da internet .....	18
1.3	Triângulo de Pingala, por volta de 200 a.C., Fonte: pesquisa google em 21/02/2017 . . .	19
1.4	Construção do Triângulo de Pingala, Fonte: <a href="http://matematica-na-veia.blogspot.com.br/2010/01/historia-do-triangulo-aritmetico-parte.html">http://matematica-na-veia.blogspot.com.br/2010/01/historia-do-triangulo-aritmetico-parte.html</a> , em 01/2017.....	20
1.5	Triângulo de Jia Xian, por volta de 1100, Fonte: <a href="http://matematica-na-veia.blogspot.com.br/2010/02/historia-do-triangulo-aritmetico-parte.html">http://matematica-na-veia.blogspot.com.br/2010/02/historia-do-triangulo-aritmetico-parte.html</a> , em 01/2017.....	21
1.6	Triângulo de Yang Hui, manuscrito medieval chinês, por volta de 1300, Fonte: <a href="https://pt.wikipedia.org">https://pt.wikipedia.org</a> , em 01/2017. ....	21
1.7	Triângulo de Al Samaw'Al, por volta de 1150. ....	22
1.8	Triângulo de Apianus, Fonte: <a href="http://www.lib.cam.ac.uk/">http://www.lib.cam.ac.uk/</a> , em 01/2017. ....	23
1.9	Triângulo de Tartaglia .....	24
1.10	Triângulo de Pascal - Original. Fonte: livro baixado da internet .....	24
1.11	Triângulo de Pascal com coeficientes binomiais .....	26
1.12	Relação de Stifel .....	27
1.13	Soma da enésima linha corresponde a $2^n$ . Fonte: <a href="https://pt.wikibooks.org">https://pt.wikibooks.org</a> .....	29
1.14	Soma dos elementos da coluna e totalidade circulados.....	31
1.15	Soma das diagonais. Fonte: <a href="http://cienciapatodos.webnode.pt/news/os-ananases-e-a-matematica/">http://cienciapatodos.webnode.pt/news/os-ananases-e-a-matematica/</a> , em 27/07/17.....	32
2.1	Elementos grifados - Números Naturais. ....	36
2.2	Elementos grifados - Alguns exemplos de Números Complementares .....	37



2.3	Elementos grifados - Soma de dois elementos consecutivos resulta em um quadrado perfeito..	38
2.4	Elementos grifados - Soma dos números naturais.	39
2.5	Triângulos Equiláteros. Fonte: <a href="http://ocirculodamatematica.blogspot.com.br/2014/08/numeros-trianguulares.html">http://ocirculodamatematica.blogspot.com.br/2014/08/numeros-trianguulares.html</a> , em 07/2017	40
2.6	Elementos grifados - Números que definem um tetraedro.	40
2.7	Pirâmides de base triangular.	40
2.8	Soma dos números das diagonais secundárias - Números de Fibonnaci	44
3.1	Planilha do Excel com erro.	48
4.1	Múltiplos de 2	50
4.2	Triângulo de Sierpinski. Fonte: pesquisa imagens - google	51
4.3	Múltiplos de 3	52
4.4	Múltiplos de 4	53
4.5	Múltiplos de 5	54
4.6	Múltiplos de 7	55
4.7	Múltiplos de 11	56
4.8	Múltiplos de 13	57
4.9	Múltiplos de 17	58
4.10	Múltiplos de 19	59
5.1	Leonardo Fibonacci (1175-1250)	61
5.2	Anagrama dos casais de coelhos - Fonte: <a href="http://www.estudofacil.com.br/sequencia-de-fibonacci/">http://www.estudofacil.com.br/sequencia-de-fibonacci/</a> , em 23/06/17	63
6.1	Fonte: Microsoft Excel	80
6.2	Sequência de Fibonacci - Fonte: <a href="http://blog.wesleycota.com/fibonacci-parte-2-proporcao-aurea/">http://blog.wesleycota.com/fibonacci-parte-2-proporcao-aurea/</a> , em 23/06/17	81
6.3	Razão entre o segmento AB e o segmento AD é igual a $\Phi$ - Fonte: <a href="http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/pde/rosania-razao-aurea.pdf">http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/pde/rosania-razao-aurea.pdf</a> , em 02/08/17	86
6.4	Retângulo Áureo - Fonte: Microsoft Excel	87

6.5	Espiral Áurea - Fonte: <a href="http://www.dinamica.com.br/2014/05/espiral-aurea-de-fibonacci.html">http://www.dinamica.com.br/2014/05/espiral-aurea-de-fibonacci.html</a> , em 07/2017 .....	88
7.1	Fonte: Microsoft Word.....	96
7.2	Proporção Áurea e a concha do caramujo - <a href="http://www.online-convert.com/result/9ac45982-7cb3-4a9c-9320-c5b47a6bb738">http://www.online-convert.com/result/9ac45982-7cb3-4a9c-9320-c5b47a6bb738</a> , em 26/07/17 .....	98
7.3	Espiral de Fibonacci e o rabo do camaleão - <a href="http://estheticsdog.com.br/blog/">http://estheticsdog.com.br/blog/</a> , em 26/07/17	99
7.4	Espiral de Fibonacci e as presas do elefante - <a href="http://estheticsdog.com.br/blog/">http://estheticsdog.com.br/blog/</a> , em 26/07/17.....	99
7.5	Achillea ptarmica - <a href="http://http://www.estgv.ipv.pt">http://http://www.estgv.ipv.pt</a> , em 26/07/17 .....	100
7.6	Fibonacci presente na pinha - <a href="http://osolinterno.blogspot.com.br/2015/08/fibonacci-e-mmsorge-estas-frequencias.html">http://osolinterno.blogspot.com.br/2015/08/fibonacci-e-mmsorge-estas-frequencias.html</a> , em 27/07/17 .....	100
7.7	Espiral de Fibonacci na pinha e no girassol - <a href="http://osolinterno.blogspot.com.br/2015/08/fibonacci-e-mmsorge-estas-frequencias.html">http://osolinterno.blogspot.com.br/2015/08/fibonacci-e-mmsorge-estas-frequencias.html</a> , em 27/07/17 .....	101
7.8	Desenho da espiral de Fibonacci no girassol - <a href="http://osolinterno.blogspot.com.br/2015/08/fibonacci-e-mmsorge-estas-frequencias.html">http://osolinterno.blogspot.com.br/2015/08/fibonacci-e-mmsorge-estas-frequencias.html</a> , em 27/07/17 .....	101
7.9	Espiral de Fibonacci em abacaxis - <a href="http://cienciapatodos.webnode.pt/news/os-ananases-e-a-matematica/">http://cienciapatodos.webnode.pt/news/os-ananases-e-a-matematica/</a> , em 27/07/17 .....	102
7.10	Seqüência de Fibonacci e a formação das galáxias - <a href="https://flordelizespacoterapeuticosp.blogspot.com.br/2016/02/sequencia-fibonacci.html">https://flordelizespacoterapeuticosp.blogspot.com.br/2016/02/sequencia-fibonacci.html</a> , em 26/07/17 .....	102
7.11	Seqüência de Fibonacci e as três grandes pirâmides - <a href="http://www.ufobr.net/os-misterios-das-piramides-queops-quefren-e-miquerinos/">http://www.ufobr.net/os-misterios-das-piramides-queops-quefren-e-miquerinos/</a> , em 26/07/17 .....	103
7.12	Seqüência de Fibonacci e a Mona Lisa - <a href="https://danielcapello.wordpress.com/tag/mona-lisa/">https://danielcapello.wordpress.com/tag/mona-lisa/</a> , em 26/07/17.....	104
7.13	Proporção Áurea e os dedos das mãos - <a href="https://flordelizespacoterapeuticosp.blogspot.com.br/2016/02/sequencia-fibonacci.html">https://flordelizespacoterapeuticosp.blogspot.com.br/2016/02/sequencia-fibonacci.html</a> , em 26/07/17.....	105
7.14	Proporção Áurea e os dedos das mãos - <a href="https://www.bpiropo.com.br/fpc20070319.htm">https://www.bpiropo.com.br/fpc20070319.htm</a> , em 04/08/17 .....	106

# Sumário

<b>1</b>	<b>O Triângulo de Pascal</b>	<b>15</b>
1.1	Um pouco da história. ....	15
1.2	Blaise Pascal x Triângulo de Pascal .....	16
1.3	As diversas caras do Triângulo Numérico ao longo dos séculos .....	18
1.4	Construção do Triângulo de Pascal - I .....	23
1.5	Construção do Triângulo de Pascal - II .....	25
1.6	Relação de Stifel .....	27
1.7	Teorema das linhas.....	28
1.8	Teorema das colunas .....	30
1.9	Teorema das diagonais .....	31
<b>2</b>	<b>Propriedades do Triângulo de Pascal</b>	<b>35</b>
<b>3</b>	<b>Triângulo de Pascal no Excel</b>	<b>46</b>
3.1	Origem da ideia .....	46
3.2	Construção da Planilha .....	46
3.3	Problema encontrado durante a construção .....	47
<b>4</b>	<b>Analisando padrões</b>	<b>49</b>
4.1	Fractais no Triângulo de Pascal .....	49
4.2	Padrões entre os múltiplos .....	52
<b>5</b>	<b>Sequência de Fibonacci</b>	<b>60</b>
5.1	Os números de Fibonacci e a população de coelhos .....	60

5.1.1	Como tudo começou. ....	60
5.1.2	Resolvendo o problema dos coelhos.....	62
5.1.3	Definição da Sequência de Fibonacci e Fórmula de Binet .....	63
<b>6</b>	<b>Propriedades da sequência de Fibonacci</b>	<b>68</b>
6.1	Fibonacci e a Sequencia de Lucas .....	75
6.2	Fibonacci e Fermat.....	77
6.3	A Proporção Áurea .....	79
6.3.1	O retângulo Áureo .....	87
6.3.2	A espiral Áurea .....	88
<b>7</b>	<b>O Triângulo de Pascal x Sequência de Fibonacci em sala de aula</b>	<b>89</b>
7.1	Metodologia .....	89
7.2	Aplicações do Triângulo de Pascal .....	90
7.2.1	Aplicações - Encontrando os coeficientes das linhas .....	90
7.2.2	Aplicações - Binômio de Newton .....	91
7.2.3	Aplicações - Uso da Planilha do Microsoft Excel para o triângulo de Pascal.....	93
7.2.4	Aplicações - Probabilidade .....	94
7.3	Aplicações da Sequência de Fibonacci e Proporção Áurea .....	96
7.3.1	Aplicações - Triângulo retângulo e a Sequência de Fibonacci .....	96
7.3.2	Aplicações - Na natureza .....	97
7.3.3	Aplicações - Na arte .....	103
7.3.4	Aplicações - No corpo humano .....	104
<b>8</b>	<b>Conclusão</b>	<b>108</b>

# Capítulo 1

## O Triângulo de Pascal

Dedicamos o primeiro capítulo a História, ao longo dos séculos, sobre Triângulo de Pascal, à Relação de Stifel, que facilita sua construção, e o Teorema das linhas: A potência de base 2, o Teorema das colunas e o Teorema das diagonais.

### 1.1 Um pouco da história...

Esse Triângulo impressionante que iremos destacar no presente trabalho possui muitos nomes nas diferentes partes do mundo, e como em várias descobertas matemáticas alguém que não foi seu descobridor leva a fama. Os chineses o chamam de Triângulo de Yang Hui, os italianos o chamam de Triângulo de Tartaglia e encontramos outras denominações como Triângulo de Tartaglia-Pascal ou simplesmente Triângulo Aritmético ou Triângulo Combinatório, para nós vamos chamá-lo como os franceses: Triângulo de Pascal. Ele tem diversas finalidades na matemática, como a determinação de probabilidades, a análise combinatória e na álgebra. Vale ressaltar que as descobertas foram aperfeiçoadas através dos séculos, por vários matemáticos, ou seja, as mesmas propriedades matemáticas foram retomadas, variando de acordo com o matemático, origem e época. Nossa pesquisa agrupa algumas dessas descobertas, comprova as propriedades e teoremas através de demon-

strações matemáticas e leva ao fascínio dos fractais apresentado no Triângulo de Pascal através dos múltiplos de 2, 3, 4, 5 e alguns números primos. Essa periodicidade e associação com vários conteúdos matemáticos nos mostra que pouco sabemos e que muito temos que pesquisar sobre essa maravilha com múltiplas personalidades. E quem sabe se teremos sorte e durante nosso percurso descobriremos novos padrões ou novas propriedades...

## 1.2 Blaise Pascal x Triângulo de Pascal



Figura 1.1: Blaise Pascal (1623-1662), Fonte: <http://radeisis.blogspot.com.br/2011/06/blaise-pascal-vida-e-obra.html>, em 14/01/2017.

Blaise Pascal foi um gênio matemático de alto quilate, nasceu na província francesa de Auvergne em 1623 e muito cedo revelou aptidão para a matemática. Era frágil fisicamente, assim era mantido em casa. Seu pai, Etienne Pascal, também Matemático, decidiu ainda que a educação do filho deveria ser somente no estudo de línguas, não concluindo nada, portanto, de matemática. Mas isso provocou em Blaise muita curiosidade, fazendo com que indagasse de seu preceptor, Desargues<sup>1</sup>, sobre a natureza da geometria. O preceptor informou-lhe que a geometria era o estudo das figuras exatas e das propriedades de suas diferentes partes. Estimulado por essa descrição e pela objeção do pai, ele abandonava seu tempo de recreio e, escondido, em poucas semanas, descobriu por conta própria muitas das propriedades das figuras geométricas, em particular a de que a soma dos ângulos

---

<sup>1</sup>Gerard Desargues, matemático francês, 1591 - 1661

de um triângulo é igual a um ângulo raso. Quando seu pai chegou até ele um dia e viu em suas atividades geométricas, ficou tão feliz com a capacidade do garoto que resolveu presentear-lo com um exemplar dos Elementos de Euclides<sup>2</sup>, que o jovem Pascal leu avidamente e logo dominou. Aos 14 anos, Pascal começou a acompanhar o seu pai nas reuniões de um grupo de matemáticos franceses. Aos dezoito anos e com o objetivo de ajudar o pai na tarefa de cobrar impostos, Pascal inventou a primeira máquina de calcular, chamada Pascaline para levar a cabo o processo de adição e subtração, e posteriormente organizou a produção e comercialização destas máquinas de calcular (que se assemelhava a uma calculadora mecânica dos anos 40). Pelo menos sete destes "computadores" ainda existem; uma foi apresentada à rainha Cristina da Suécia em 1652. Pascal se dedicou também a filosofia e a física. Não diminuindo suas descobertas, mas a parte que mais nos chama a atenção é a que Pascal estudou e demonstrou no trabalho do "Triângulo aritmético", publicado em 1654, diversas propriedades do triângulo e aplicou-as no estudo das probabilidades. Antes de Pascal, já Tartaglia<sup>3</sup> usara o triângulo nos seus trabalhos e, muito antes, os matemáticos árabes e chineses já o utilizavam. Este famoso triângulo que se pode continuar indefinidamente aumentando o número de linhas, trata-se de um arranjo triangular de números em que cada número é igual à soma do par de números acima deles. O triângulo de Pascal apresenta inúmeras propriedades e relações, por exemplo, "as somas dos números dispostos ao longo das diagonais do triângulo geram a Sucessão de Fibonacci". Pascal escreveu uma monografia de 60 páginas sobre o Triângulo Aritmético, denominada por *Traité Du triangle arithmétique*, e publicada postumamente em 1665.

Em correspondência com Fermat<sup>4</sup>, durante o Verão de 1654, Pascal estabeleceu os fundamentos da Teoria das Probabilidades. O seu último trabalho foi sobre a Ciclóide - a curva traçada por um ponto da circunferência que gira, sem escorregar, ao longo de uma linha reta. Durante esse ano desinteressou-se pela ciência; passou os últimos anos da vida a praticar caridade e decidiu dedicar-se a Deus e à religião. Faleceu com 39 anos devido a um tumor maligno que tinha no estômago se ter estendido ao cérebro.

---

<sup>2</sup>Euclides de Alexandria, matemático grego, 330a.C.

<sup>3</sup>Niccolò Fontana, matemático Italiano, 1500 - 1557

<sup>4</sup>Pierre de Fermat, matemático francês, 1601 -1665

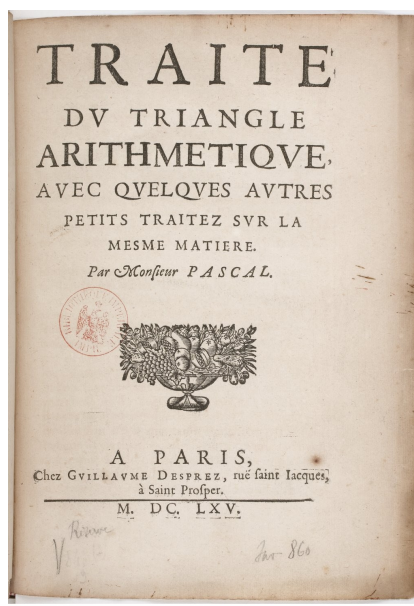


Figura 1.2: Traité Du triangle arithmétique Blaise Pascal, Fonte: livro baixado da internet

### 1.3 As diversas caras do Triângulo Numérico ao longo dos séculos

Além das obras atuais, existem referências ao Triângulo Aritmético e suas propriedades, que podem ser encontradas em obras antigas escritas por matemáticos indianos e chineses. Também encontramos alguns indícios destas propriedades em algumas obras hebraicas, escritas em épocas antes de Cristo. Esta constatação significa que nosso personagem principal é bastante antigo. Podemos citar entre estas obras, a de Pingala, um antigo matemático indiano que viveu em aproximadamente 200 a.C., ou seja, mais ou menos 1800 anos antes do matemático Blaise Pascal. Observe que este é um dos primeiros indícios de que não foi Blaise Pascal o autor do triângulo que leva seu nome. Já vimos que o triângulo aritmético é bastante antigo e tudo que está relacionado à matemática exige muito estudo, e processos de investigação que podem levar anos, envolvendo vários matemáticos, tornando o trabalho dos historiadores uma tarefa difícil, nesse caso aqui descobrir a verdadeira autoria do Triângulo Aritmético.

Pingala apresenta em sua obra, a primeira descrição conhecida de um sistema numérico binário. O que é interessante é como ele foi descoberto: através dos seus estudos sobre as



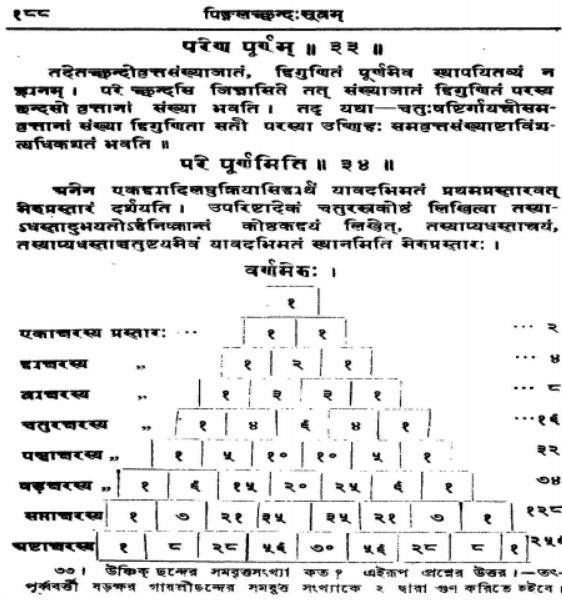


Figura 1.3: Triângulo de Pingala, por volta de 200 a.C., Fonte: pesquisa google em 21/02/2017

versificação das métricas musicais. Ele observou que as expansões sucessivas das métricas musicais, de uma, duas, três, ou várias sílabas podiam ser dispostas sob a forma de um padrão numérico triangular que corresponde ao triângulo aritmético, o qual denominou "Meru-prastara", em homenagem ao sagrado Monte Meru na Índia. Observemos um exemplo numérico:

Para calcular as combinações das três sílabas ba, be, bi, Pingala observava a terceira linha do Meru-prastara que é composta pelos seguintes valores: 1 – 3 – 3 – 1, e então concluía:

- 3 combinações de uma sílaba: ba, be, bi
- 3 combinações de duas sílabas: babe, babi, bebi
- 1 combinação de três sílabas: babebi

Para construir o Meru-prastara, Pingala descreve a seguinte regra: "Desenhe um quadrado; abaixo dele desenho dois outros, de modo que se juntem no ponto médio da base dele; ou seja, no meio da base, abaixo desses dois, desenhe três e assim sucessivamente. A seguir, escreva UM no primeiro quadrado e também nos quadrados da segunda linha. Na terceira linha escreva UM nos quadrados dos extremos, e no meio escreva a soma dos números acima dele. Prossiga fazendo o mesmo nas outras linhas. Nessas lin-

has, a segunda dá as combinações com uma sílaba; a terceira dá as combinações com duas sílabas e assim por diante.”

O procedimento desta regra pode ser visto na imagem abaixo:

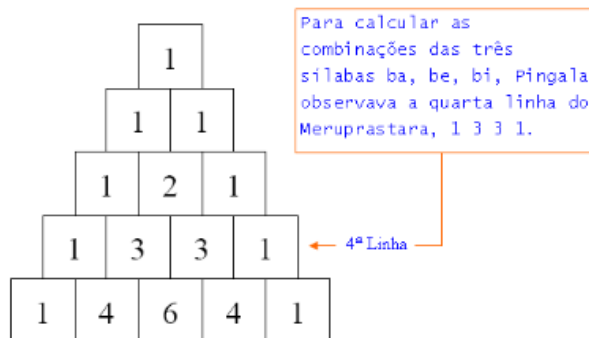


Figura 1.4: Construção do Triângulo de Pingala, Fonte: <http://matematica-na-veia.blogspot.com.br/2010/01/historia-do-triangulo-aritmetico-parte.html>, em 01/2017.

Tempo depois da morte de Pingala, encontramos ainda na obra ”Mrtasañjivani” do matemático Halayudha, o Meru-prastara e a regra de Pingala. Ele ainda descreveu o sistema numérico binário em conexão à listagem das métricas védicas com sílabas longas e curtas. O Meru-prastara pode ser considerado como sendo o mesmo que a Matriz Triangular conhecida na Europa como Triângulo de Pascal.

Na China, o Manual de Matemática de Jia Xian, escrito por volta do ano 1050, também trata de alguns conceitos relacionados ao triângulo aritmético. Mas, o mais famoso matemático chinês associado ao triângulo é Yang-Hui, o qual estudou as propriedades do triângulo por volta de (1250 d.C). Ele escreveu cerca de dez livros, sendo que em pelo menos dois desses, ”Alfa e ômega de uma seleção de aplicações de métodos aritméticos” e uma análise detalhada dos métodos do livro ”Nove capítulos” ele estuda e aplica conceitos do Triângulo Aritmético

Sobre os Árabes, a reconstituição do envolvimento dos matemáticos de religião islâmica com o Triângulo Aritmético é bastante difícil, pois a maioria dos principais documentos associados ao triângulo perdeu-se no tempo. Porém pode-se afirmar que muitos dos matemáticos islâmicos aprenderam sobre as propriedades do Triângulo Aritmético através das compilações escritas no idioma árabe, que foram transcritas em livros in-

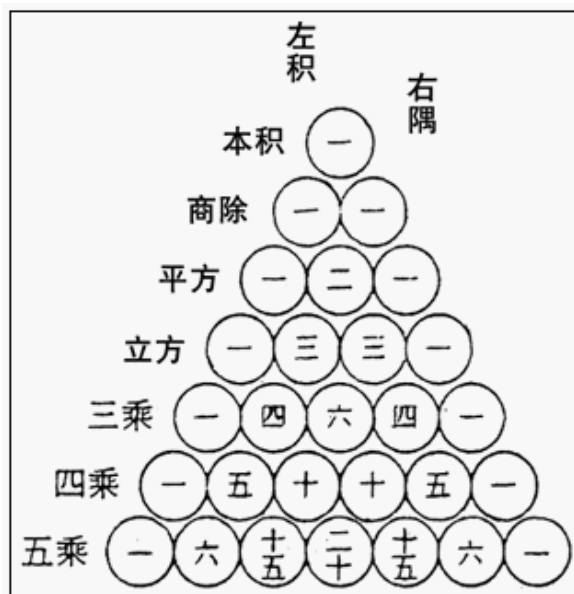


Figura 1.5: Triângulo de Jia Xian, por volta de 1100, Fonte: <http://matematica-na-veia.blogspot.com.br/2010/02/historia-do-triangulo-aritmeticoparte.html>, em 01/2017.

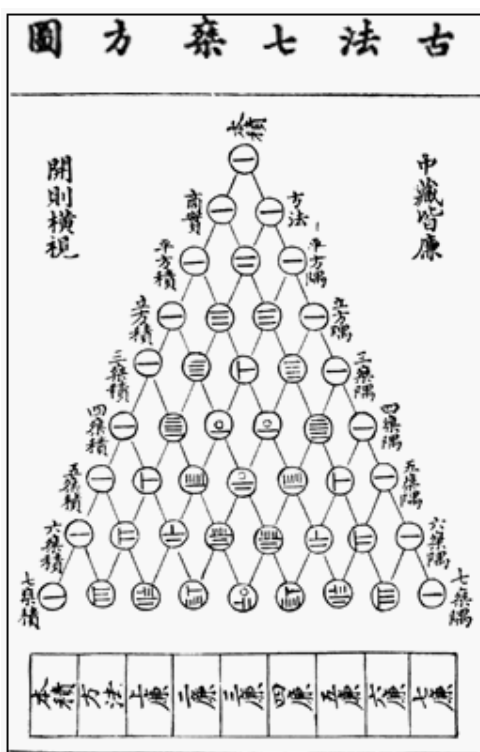


Figura 1.6: Triângulo de Yang Hui, manuscrito medieval chinês, por volta de 1300, Fonte: <https://pt.wikipedia.org>, em 01/2017.

dianos, como é o caso do, "Princípios do Cálculo Hindu" e a obra "Coisas suficientes para entender o Cálculo Hindu". Segundo especialistas em história da matemática islâmica, Roshdi Rashed e Adel Anboubá, o Triângulo Aritmético teria sido descoberto para obter as soluções no desenvolvimento de potências quadráticas, cúbicas e quárticas de binômios nos tratados de álgebra. Na mesma época o islamita, Al-Samaw'al (1125-1180), um Matemático muçulmano e astrônomo de ascendência judaica, teve um grande envolvimento com o triângulo. Aos 19 anos escreveu um tratado de álgebra "al-Bahir fi'l-jabr", que significa "O brilhante da álgebra". Ele também desenvolveu o conceito de prova por indução matemática, o qual usou para corrigir e desenvolver o trabalho de Al-Karaji sobre o Triângulo e o Teorema binomial (Teorema de Newton). No seu livro é possível observar-se uma figura do triângulo com 12 linhas, e a demonstração por indução matemática da validade do Teorema Binomial.

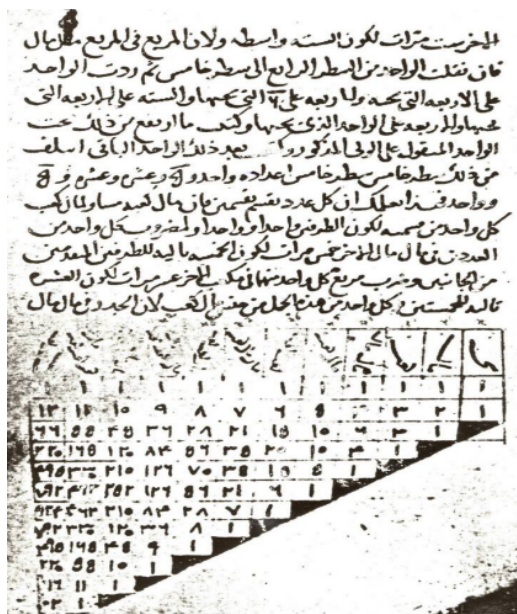


Figura 1.7: Triângulo de Al Samaw'Al, por volta de 1150.

Outro matemático islamita a envolver-se com o Triângulo Aritmético foi o poeta e matemático persa, Omar Khayyam (1048-1131), escreveu sobre o triângulo aritmético em alguns de seus trabalhos por volta de 1100 e sua obra mais famosa sobre álgebra, o "Tratado sobre a Demonstração de Problemas de Álgebra" (1070), onde ele se refere ao livro que escreveu sobre o Triângulo Aritmético e a sua aplicação na extração aproximada

de raízes quadráticas, cúbicas, hoje totalmente perdido.

Já na Europa, mais ou menos um século antes de Blaise Pascal, muitos matemáticos trabalhavam com o Triângulo Aritmético. Um dos mais famosos foi o matemático alemão Apianus <sup>5</sup>, que em 1527 publicou uma obra "Média aritmética" cuja capa trazia um desenho do triângulo aritmético. E posteriormente, nas obras de Michael Stifel, também na obra "De Numeris et Diversis Rationibus"(1545) de Johann Scheubel (1494-1570), Tartaglia , BNombelli e outros matemáticos célebres da Renascença, e na obra póstuma de Blaise Pascal "Traite Du Triangle Arithmetique" de 1654.



Figura 1.8: Triângulo de Apianus, Fonte: <http://www.lib.cam.ac.uk/>, em 01/2017.

## 1.4 Construção do Triângulo de Pascal - I

Para facilitar vamos enumerar cinco passos para construir um Triângulo de Pascal:

**Passo 1** Comece escrevendo o número 1;

**Passo 2** Na segunda linha coloque mais dois algarismos 1;

<sup>5</sup>humanista e matemático Petrus Apianus, 1495-1552

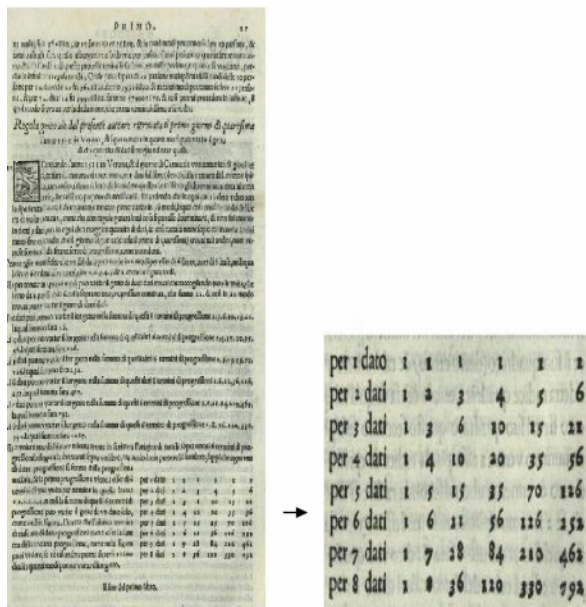


Figura 1.9: Triângulo de Tartaglia

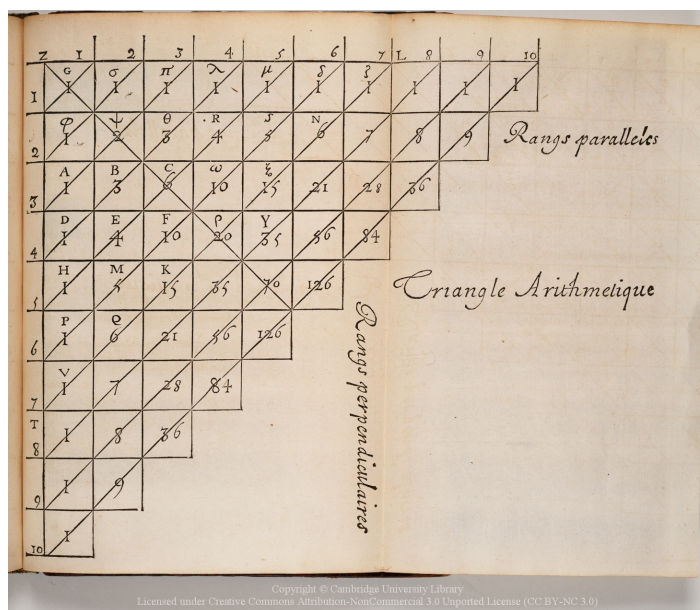


Figura 1.10: Triângulo de Pascal - Original. Fonte: livro baixado da internet

**Passo 3** Cada linha abaixo, deverá conter um número a mais que a linha anterior, lembrando que os números das extremidades, deverão obrigatoriamente ser 1;

**Passo 4** Para saber qual o número interno, some os dois numerais acima dele. Exemplo, o número central na terceira linha do Triângulo de Pascal é  $2 = (1 + 1 = 2)$ , os

números centrais da quarta linha são  $3 = (1+2)$  e  $3 = (2+1)$ , assim sucessivamente.

**Passo 5** Você conseguirá perceber vários padrões interessantes ao longo de sua construção, muitos deles citados neste trabalho.

linha 0	1										
linha 1	1	1									
linha 2	1	2	1								
linha 3	1	3	3	1							
linha 4	1	4	6	4	1						
linha 5	1	5	10	10	5	1					
linha 6	1	6	15	20	15	6	1				
linha 7	1	7	21	35	35	21	7	1			
linha 8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
linha 9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
linha 10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

## 1.5 Construção do Triângulo de Pascal - II

Para iniciar essa construção, decidimos por definir os Números Binomiais, pois durante nosso percurso no tema Triângulo de Pascal, vamos escrever seus elementos dessa maneira.

**Definição 1.5.1** (Números binomiais). *Os coeficientes  $\binom{n}{p}$  são chamados coeficientes binomiais e são definidos como:*

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}, \text{ onde } n \text{ e } p \text{ são inteiros, } p \leq n$$

*O coeficiente binomial  $\binom{n}{p}$  corresponde, em análise combinatória, ao número de combinações de  $n$  elementos agrupados  $p$  a  $p$ .*

*O coeficiente binomial também é chamado de número binomial. Por analogia com as frações, dizemos que  $n$  é o seu numerador e  $p$  o denominador. Podemos escrever:*

$$\binom{n}{p} = C_n^p$$

**Definição 1.5.2** (Triângulo de Pascal). *É um triângulo aritmético infinito integrados por coeficientes binomiais que possuem a seguinte disposição:*

	coluna 0 ( $C_0$ )	coluna 1 ( $C_1$ )	coluna 2 ( $C_2$ )	coluna 3 ( $C_3$ )	coluna 4 ( $C_4$ )	...	coluna n ( $C_n$ )
Linha 0	$\binom{0}{0}$						
Linha 1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$					
Linha 2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$				
Linha 3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$			
Linha 4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Linha n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	...	...	$\binom{n}{n}1$

Tabela 1.1: Triângulo de Pascal com coeficientes binomiais

Calculando esses números binomiais temos:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 1 \\
 & & & & & & 1 & 1 \\
 & & & & & & 1 & 2 & 1 \\
 & & & & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\
 & & & & & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
 & & & & & & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
 & & & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
 \end{array}$$

No Triângulo de Pascal os coeficientes binomiais  $C_n^p$  são dispostos de maneira que os coeficientes de mesmo numerador,  $n$ , fiquem na mesma linha, e coeficientes de mesmo denominador,  $p$ , na mesma coluna, com  $n$  e  $p \geq 0$  e  $n$  e  $p \in \mathbb{N}$ . Os coeficientes binomiais também podem ser dispostos da seguinte maneira, a meu ver, mais fácil para visualizar.

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & & & & & & & & & & & & \binom{0}{0} \\
 & & & & & & & & & & & & \binom{1}{0} & & & \binom{1}{1} \\
 & & & & & & & & & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} \\
 & & & & & & & & & & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\
 & & & & & & & & & & & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
 & & & & & & & & & & & & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \\
 & & & & & & & & & & & & \binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6} \\
 & & & & & & & & & & & & \binom{7}{0} & & \binom{7}{1} & & \binom{7}{2} & & \binom{7}{3} & & \binom{7}{4} & & \binom{7}{5} & & \binom{7}{6} & & \binom{7}{7} \\
 & & & & & & & & & & & & \binom{8}{0} & & \binom{8}{1} & & \binom{8}{2} & & \binom{8}{3} & & \binom{8}{4} & & \binom{8}{5} & & \binom{8}{6} & & \binom{8}{7} & & \binom{8}{8}
 \end{array}$$

Figura 1.11: Triângulo de Pascal com coeficientes binomiais



As linhas de um Triângulo de Pascal possuem uma quantidade finita de elementos, que é igual ao número da linha mais 1. Por exemplo, a quinta linha, que é a de número 4, possui 5 elementos. Já a quantidade de elementos por coluna é infinita, pois o número de linhas do Triângulo de Pascal também é infinito.

## 1.6 Relação de Stifel

A primeira propriedade que citaremos e que permite construir rapidamente o Triângulo de Pascal é a Relação de Stifel<sup>6</sup>.

**Teorema 1.6.1** (Relação de Stifel). *A soma de dois elementos lado a lado no triângulo, obtém se o elemento situado embaixo do da direita ou embaixo dos dois superiores (depende da maneira que construímos o Triângulo), ou seja:  $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$ , com  $n > 0$  e  $p \geq 0$ .*

Observemos a figura abaixo:

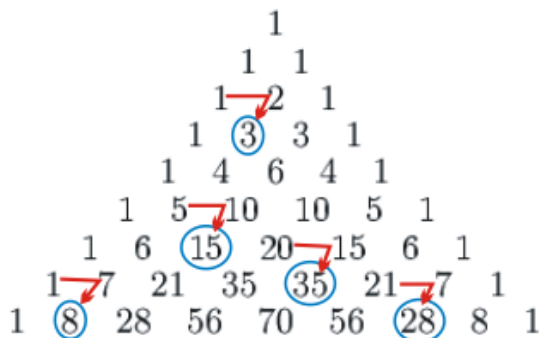


Figura 1.12: Relação de Stifel

### Demonstração:

Dois elementos lado a lado no Triângulo de Pascal são da forma  $C_n^p$  e  $C_n^{p+1}$ , queremos provar:

$$C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$$

Desenvolvendo  $C_n^p + C_n^{p+1}$ , temos:

---

<sup>6</sup>Michael Stifel, matemático alemão, 1487 - 1567

$$\begin{aligned} & \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-(p+1))!} = \\ & \frac{n!(p+1) + n!(n-p)}{(n-p)!(p+1)!} = \\ & \frac{n!(p+1+n-p)}{(n-p)!(p+1)!} = \\ & \frac{n!(n+1)}{(n-p)!(p+1)!} = \\ & \frac{(n+1)!}{(n-p)!(p+1)!} = C_{n+1}^{p+1} \end{aligned}$$

■

## 1.7 Teorema das linhas

**Teorema 1.7.1** (Teorema da linhas). *Qualquer que seja a linha de um Triângulo de Pascal, somando-se os números nela contidos, sempre obterá como resultado uma potência de base 2, cujo expoente é o próprio número da linha, ou seja  $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$ , com  $n$  e  $p \geq 0$ .*

Vejamos alguns exemplos:

**Linha 0** :  $1 = 2^0$

**Linha 3** :  $1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$

**Linha 6** :  $1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64 = 2^6$

**Linha 7** :  $1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 = 128 = 2^7$

Generalizando:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$$

**Demonstração:** Vamos provar pelo Princípio da Indução Finita que  $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$ , para  $n \gg 0$ .

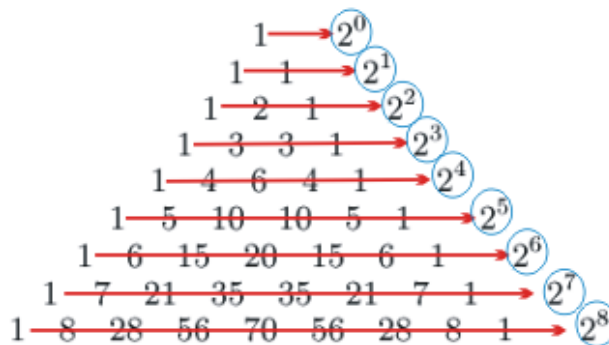


Figura 1.13: Soma da  $n$ ésima linha corresponde a  $2^n$ . Fonte: <https://pt.wikibooks.org>

Para  $n=0$

$$C_0^0 = 2^0$$

$1=1$  (OK)

Supomos que vale para  $n$ ,  $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$

Lembrando que pela Relação de Stifel, temos:

$$C_{n+1}^1 = C_n^0 + C_n^1$$

$$C_{n+1}^2 = C_n^1 + C_n^2$$

.

.

.

$$C_{n+1}^n = C_n^{n-1} + C_n^n$$

Vamos provar para  $n + 1$

$$C_{n+1}^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + C_{n+1}^3 + \dots + C_{n+1}^n + C_{n+1}^{n+1}$$

$$C_{n+1}^0 + (C_n^0 + C_n^1) + (C_n^1 + C_n^2) + (C_n^2 + C_n^3) + \dots + (C_n^{n-1} + C_n^n) + C_{n+1}^{n+1}$$

Trocando  $C_{n+1}^0$  por  $C_n^0$ , ambos são iguais a 1 e  $C_{n+1}^{n+1}$  por  $C_n^n$ , ambos também são iguais a 1. Temos:

$$C_n^0 + (C_n^0 + C_n^1) + (C_n^1 + C_n^2) + (C_n^2 + C_n^3) + \dots + (C_n^{n-1} + C_n^n) + C_n^n$$

$$2(C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n) = 2 \cdot 2^n$$

Pelo Princípio da Indução Finita provamos que  $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$ , para  $n \gg 0$ .

■

**Exemplo 1.7.2.** *Um palácio tem 7 portas. De quantos modos pode ser aberto o palácio?*

*Resolução:* Há  $C_7^1$  modos de abrir o palácio abrindo uma só porta,  $C_7^2$  modos de abrir o palácio abrindo duas portas, assim sucessivamente e subtraindo  $C_7^0$  que são as possibilidades de não abrir o palácio, calculando:

$$C_7^1 + C_7^2 + C_7^3 + C_7^4 + C_7^5 + C_7^6 + C_7^7 - C_7^0 = 128 - 1 = 127$$

## 1.8 Teorema das colunas

**Teorema 1.8.1** (Teorema das colunas). *A soma dos elementos de qualquer coluna, do 1º elemento até um qualquer  $n$ , é igual ao elemento situado na coluna à direita da coluna somada e na linha imediatamente abaixo, ou seja:  $\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \dots + \binom{n+p}{n} = \binom{n+p+1}{n+1}$ , com  $n$  e  $p \geq 0$ .*

**Demonstração:**

Queremos provar que:

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \dots + \binom{n+p}{n} = \binom{n+p+1}{n+1}$$

Para a demonstração vamos usar a soma dos termos de uma PG de razão  $q = 1 + x$ .

$$x(q)^n + x(q)^{n+1} + x(q)^{n+2} + \dots + x(q)^{n+p}$$

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

Figura 1.14: Soma dos elementos da coluna e totalidade circulos.

$x(1+x)^n + x(1+x)^{n+1} + x(1+x)^{n+2} + \dots + x(1+x)^{n+p}$  para  $q = 1+x$

Usando a Soma da PG:  $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{a_{n+1} - a_1}{q - 1}$ , temos:

$$x(1+x)^n + x(1+x)^{n+1} + x(1+x)^{n+2} + \dots + x(1+x)^{n+p} = \frac{x(1+x)^{n+p+1} - (1+x)}{1+x-1}$$

$$x(1+x)^n + x(1+x)^{n+1} + x(1+x)^{n+2} + \dots + x(1+x)^{n+p} = (1+x)^{n+p+1} - (1+x)$$

Verificando o que acontece com o coeficiente de  $x^{n+1}$ , temos:

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \dots + \binom{n+p}{n} = \binom{n+p+1}{n+1}$$

■

## 1.9 Teorema das diagonais

**Teorema 1.9.1** (Teorema das diagonais). *Somando-se os primeiros números de uma diagonal qualquer até uma certa linha  $n$ , o total obtido será igual ao número da coluna seguinte, na linha logo abaixo daquela em está o último número que foi somado, ou seja:*

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \dots + \binom{n+p}{p} = \binom{n+p+1}{p}, \text{ com } n \text{ e } p \geq 0.$$

**Demonstração:**

Queremos provar que:

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \dots + \binom{n+p}{p} = \binom{n+p+1}{p}$$



Figura 1.15: Soma das diagonais. Fonte: <http://cienciapatodos.webnode.pt/news/os-ananases-e-a-matematica/>, em 27/07/17

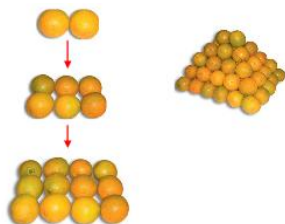
Trocando os termos  $\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \dots + \binom{n+p}{p}$  pelos seus complementares, teremos:

$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \dots + \binom{n+p}{n}$  e pelo Teorema das Colunas demonstrado anteriormente, podemos afirmar que  $\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \dots + \binom{n+p}{n} = \binom{n+p+1}{n+1}$  assim trocando novamente por todos os complementares, temos que:

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \dots + \binom{n+p}{p} = \binom{n+p+1}{p}$$



**Exemplo 1.9.2.** 10. (UERJ) Em uma barraca de frutas, as laranjas são arrumadas em camadas retangulares, obedecendo à seguinte disposição: uma camada de duas laranjas encaixa-se sobre uma camada de seis; essa camada de seis encaixa-se sobre outra de doze; e assim por diante, conforme a ilustração a seguir. Sabe-se que a soma dos elementos de uma coluna do triângulo de Pascal pode ser calculada pela fórmula  $C_p^p + C_{p+1}^p + C_{p+2}^p + \dots + C_n^p = C_{p+1}^{n+1}$ , na qual  $n$  e  $p$  são números naturais,  $n \geq p$  e corresponde ao número de combinações simples de  $n$  elementos tomados  $p$  a  $p$ . Com base nessas informações, calcule:



a) a soma  $C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + \dots + C_{18}^2$

$$\text{Resolução: } C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + \dots + C_{18}^2 = C_{19}^3 = \frac{19!}{3!16!} = \frac{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16!}{3!16!} = 19 \cdot 17 \cdot 3 = 969$$

b) o número total de laranjas que compõem quinze camadas.

*Resolução:* As camadas de laranjas podem ser representações de números binomiais em colunas. Observando as primeiras representações do triângulo de Pascal, temos que a  $2^{\text{a}}$  coluna multiplicada por 2 fornece a quantidade indicada de laranjas por camadas:

$$1^{\text{a}} \text{ camada: } 2 = 2C_2^2$$

$$2^{\text{a}} \text{ camada: } 6 = 2C_3^2$$

$$3^{\text{a}} \text{ camada: } 12 = 2C_4^2$$

$$4^{\text{a}} \text{ camada: } 20 = 2C_5^2$$

.

.

.

$$15^{\text{a}} \text{ camada: } = 2C_{16}^2$$

$$\text{Total: } 2(C_2^2 + C_3^2 + \dots + C_{16}^2) = 2C_{17}^3 = 2 \cdot \frac{17!}{3!14!} = 2 \cdot \frac{17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14!}{3!14!} = 17 \cdot 16 \cdot 5 = 1360$$

Para o próximo exemplo, vamos definir Combinação por repetição que será um dos critérios utilizados na resolução.

**Definição 1.9.3** (Combinação por repetição). *É uma relação de  $n$  objetos distintos que serão agrupados  $p$  a  $p$ , com  $p$  menor, igual ou maior do que  $n$ , sem restrição na repetição de objetos em um mesmo agrupamento, ou seja:*  $CR_n^p = \frac{(n+p-1)!}{p!(n+p-1-p)!} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!} = C_{n+p-1}^p$

**Exemplo 1.9.4.** *Determine o número de soluções inteiras e não negativas de  $x+y+z \leq 6$*

*Resolução:*

**Primeira solução:** Como são soluções menores e iguais a seis, a soma de  $x + y + z$  pode ser 0, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6, usaremos combinação por repetição.

$$x + y + z = 0 \rightarrow CR_3^0 = C_{3+0-1}^0 = C_2^0.$$

$$x + y + z = 1 \rightarrow CR_3^1 = C_{3+1-1}^1 = C_3^1.$$

$$x + y + z = 2 \rightarrow CR_3^2 = C_{3+2-1}^2 = C_4^2.$$

$$x + y + z = 3 \rightarrow CR_3^3 = C_{3+3-1}^3 = C_5^3.$$

$$x + y + z = 4 \rightarrow CR_3^4 = C_{3+4-1}^4 = C_6^4.$$

$$x + y + z = 5 \rightarrow CR_3^5 = C_{3+5-1}^5 = C_7^5.$$

$$x + y + z = 6 \rightarrow CR_3^6 = C_{3+6-1}^6 = C_8^6.$$

O resultado é a soma  $C_2^0 + C_3^1 + C_4^2 + C_5^3 + C_6^4 + C_7^5 + C_8^6$ , ou seja usando o Teorema das diagonais temos:

$$C_9^6 = C_9^3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{3!6!} = 84.$$

**Segunda solução:**  $x + y + z \leq 6$

Tomando um valor  $f$  para termos mais folga para o cálculo, com  $f$  pertencente  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$\text{Daí temos } CR_4^6 = C_{4+6-1}^6 = C_9^6 = 84.$$



## Capítulo 2

# Propriedades do Triângulo de Pascal

Este capítulo nos permite especificar e demonstrar algumas das propriedades importantes que estão presentes no Triângulo de Pascal. Usaremos demonstrações pelo Princípio da Indução Finita ou meramente por desenvolvimento de Binômios, algumas bem simples e de fácil interpretação.

Valer ressaltar que cada número do Triângulo de Pascal é 1 ou a soma de dois números de uma linha superior, conforme demonstrado através da Relação de Stifel. A primeira e segunda linhas são formadas somente pelo número 1, números positivos. Cada elemento da terceira linha ou é 1 ou a soma de dois números positivos, portanto são positivos. Este argumento se repete para linhas seguintes.

**Propriedade 2.0.5** (O 1º elemento é sempre 1). *Em toda linha do Triângulo de Pascal o 1º elemento é sempre igual a 1.*

**Demonstração:** O primeiro elemento tem a forma  $\binom{n}{0}=1$  para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ .

■

**Propriedade 2.0.6** (O último elemento é sempre 1). *Em toda linha do Triângulo de Pascal o último elemento é sempre igual a 1.*

**Demonstração:** O último elemento tem a forma  $\binom{n}{n}=1$  para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ .



**Propriedade 2.0.7** (Números Naturais). *Ao longo das linhas do Triângulo de Pascal, os elementos distantes uma posição dos extremos correspondem aos números naturais, uma vez que  $C_n^1 = C_n^{n-1}$ , para  $n \geq 1$ .*

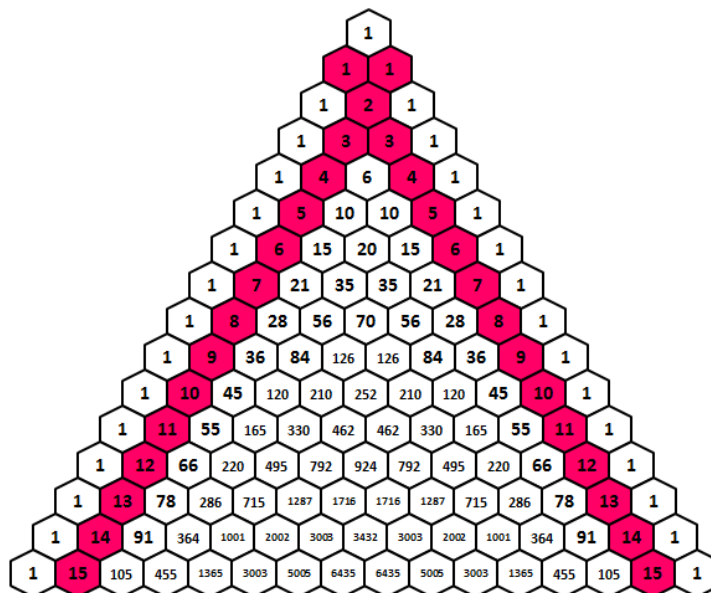


Figura 2.1: Elementos grifados - Números Naturais.

**Demonstração:** *Se desenvolvermos  $C_n^1$ , temos:*

$$\frac{n!}{(1!(n-1)!)} = n = C_n^{n-1}$$

*Demonstramos, então, que os Números Naturais, geq1, descritos no Triângulo de Pascal são da forma  $C_n^1$  ou  $C_n^{n-1}$*



**Propriedade 2.0.8** (Números complementares). *Em cada linha do triângulo de Pascal, os números equidistantes dos extremos são iguais. Em termos dos coeficientes binomiais, temos a seguinte relação:  $C_n^k = C_n^{n-k}$*

**Demonstração:** *Vamos provar a seguinte relação:  $C_n^k = C_n^{n-k}$*

*Desenvolvendo  $C_n^k$ , temos:*

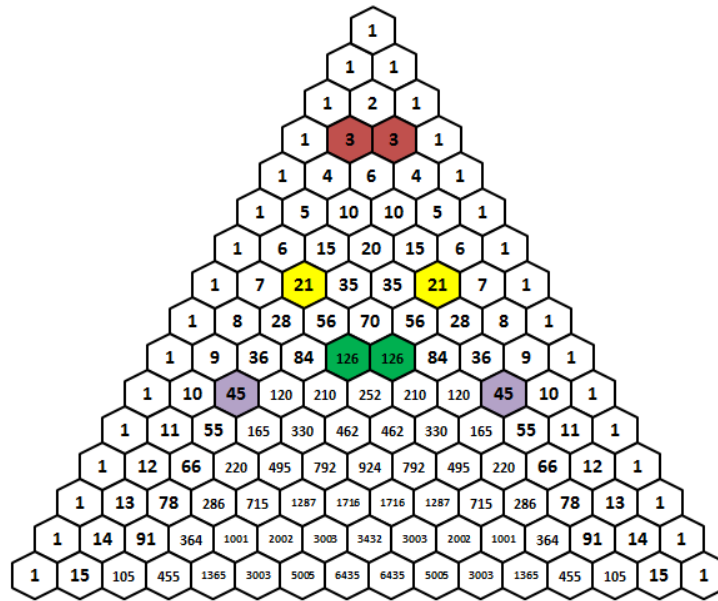


Figura 2.2: Elementos grifados - Alguns exemplos de Números Complementares

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Desenvolvendo  $C_n^{n-k}$ , temos:

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Ou seja  $C_n^k = C_n^{n-k}$

■

Podemos dizer, então, que o Triângulo de Pascal é simétrico, e esse eixo de simetria passa pelo número central das linhas em que contém número ímpar de elementos, ou seja,  $C_0^0; C_2^1; C_4^2; C_6^3 \dots C_n^{\frac{n}{2}}$ .

**Propriedade 2.0.9** (Quadrados perfeitos). A soma de dois elementos consecutivos da segunda coluna resulta em um quadrado perfeito:  $C_n^2 + C_{n+1}^2 = n^2$ , para  $n \geq 2$ .

Observando a segunda coluna indicada pela figura abaixo notamos que  $1 + 3 = 4$ ,  $3 + 6 = 9$ ,  $6 + 10 = 16$ ,  $10 + 15 = 25$ ,  $15 + 21 = 36$

**Demonstração:** Os elementos da segunda coluna, observando a diagonal secundária para facilitar, são da forma  $C_2^2; C_3^2; C_4^2; \dots; C_n^2$ , para  $n \geq 2$ . Queremos provar que dois

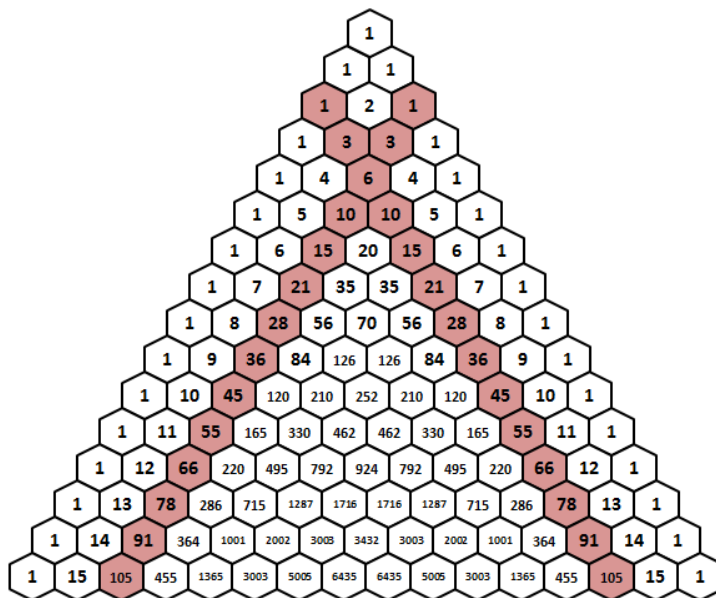


Figura 2.3: Elementos grifados - Soma de dois elementos consecutivos resulta em um quadrado perfeito.

elementos consecutivos da terceira coluna é um quadrado perfeito, ou seja:  $C_n^2 + C_{n+1}^2 = n^2$ , para  $n \geq 2$ .

Desenvolvendo  $C_n^2 + C_{n+1}^2$  temos:

$$\frac{n!}{2!(n-2)!} + \frac{(n+1)!}{2!(n+1-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{2!(n-2)!} + \frac{(n+1)n(n-1)!}{2!(n-1)!} = \frac{n^2 - n + n^2 + n}{2} =$$

$$\frac{2n^2}{2} = n^2$$

Assim provamos que a soma de dois elementos consecutivos na segunda coluna do Triângulo de Pascal é um quadrado perfeito.

■

**Propriedade 2.0.10** (Números triangulares). Os números triangulares que aparecem na 3ª diagonal, representam a soma dos números naturais:  $\frac{n(n+1)}{2}$ , para  $n \gg 1$ .

**Demonstração:** Analisando o Triângulo de Pascal, a 3ª diagonal é representada pelos números:  $C_2^0; C_3^1; C_4^2; C_5^3; \dots; C_n^{n-2}$ . Vamos provar que  $C_n^{n-2} + C_n^{n-1} = \frac{(n+1)n}{2}$ , para  $n \gg 1$ , lembrando que  $C_n^{n-1}$  é um número natural, demonstrado anteriormente.

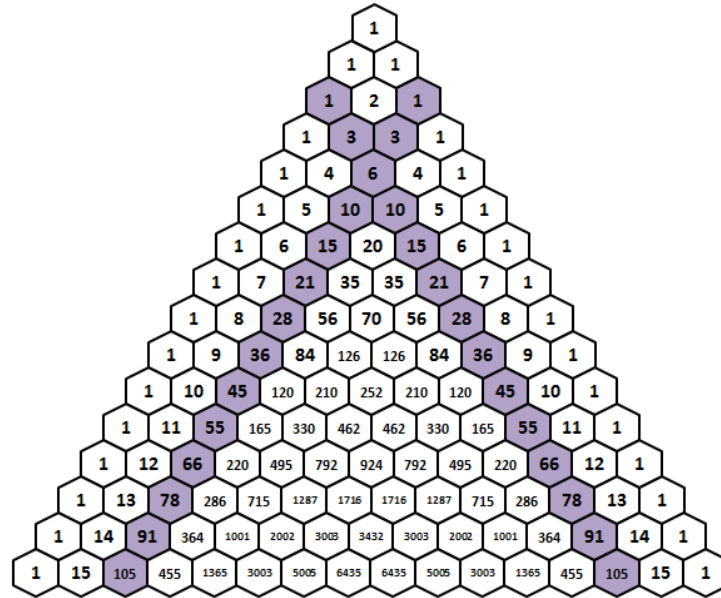


Figura 2.4: Elementos grafados - Soma dos números naturais.

Desenvolvendo  $C_n^{n-2} + C_n^{n-1}$ , temos:

$$\begin{aligned}
 C_n^{n-2} + C_n^{n-1} &= \frac{n!}{(n-2)!2!} + \frac{n!}{(n-1)!1!} = \\
 &= \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!2!} + \frac{n(n-1)!}{(n-1)!1!} = \\
 &= \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n-1) + 2n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}
 \end{aligned}$$

■

**Observação 2.0.1.** Alguns autores denominam essa sequência  $[1, 3, 6, 10, 15, 21, \dots]$  de *Números Triangulares* por ser a quantidade de pontos necessários para se formar um triângulo equilátero.

**Propriedade 2.0.11** (Números tetraédricos ou piramidais). *Os números tetraédricos aparecem na 4ª diagonal, representam os números de pontos com que se pode definir um tetraedro, ou simplesmente a quantidade de esferas empilhadas em  $n$  linhas para formar uma pirâmide de base triangular:  $\frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{(n+2)}{3}$  para  $n \gg 1$ .*

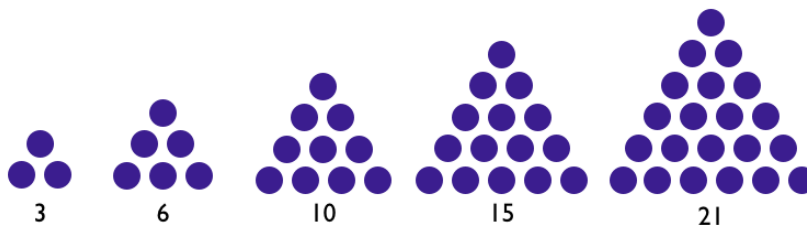


Figura 2.5: Triângulos Equiláteros. Fonte:<http://ocirculodamatematica.blogspot.com.br/2014/08/numeros-triangulares.html>, em 07/2017

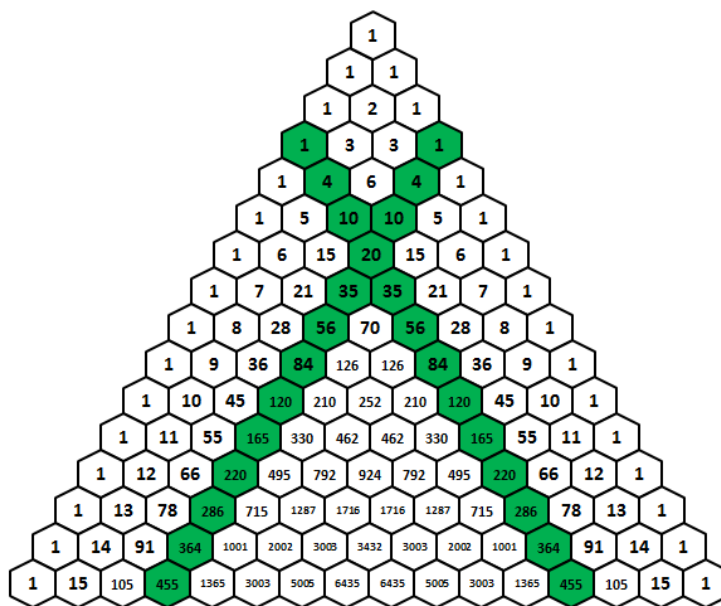


Figura 2.6: Elementos grifados - Números que definem um tetraedro.



Figura 2.7: Pirâmides de base triangular.

**Demonstração:** Partindo da Propriedade anterior, que  $C_n^{n-2} + C_n^{n-1} = \frac{(n+1)n}{2}$  temos que a 4ª diagonal é  $C_3^0; C_4^1; C_5^2; C_6^3; \dots; C_{n+1}^{n-2}$ , daí vamos provar que  $C_{n+1}^{n-2} + C_{n+1}^{n-1} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ , para  $n \gg 1$ .

Desenvolvendo o primeiro membro da equação:

$$\begin{aligned}
C_{n+1}^{n-2} + C_{n+1}^{n-1} &= \frac{(n+1)!}{(n-2)!(n+1-n+2)!} + \frac{(n+1)!}{(n+1)!(n+1-n+1)!} = \\
&= \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!3!} + \frac{(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!2!} = \\
&= \frac{(n+1)n(n-1)}{3!} + \frac{(n+1)n}{2!} = \\
&= \frac{(n+1)n(n-1)}{3!} + \frac{3(n+1)n}{3!} = \\
&= \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{3!} = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{(n+2)}{3}
\end{aligned}$$

■

**Propriedade 2.0.12** (Sinais opostos - soma igual a zero). *Alternando os sinais dos números em qualquer linha a soma desses números é igual a zero,  $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n = 0$ , para  $n \geq 0$ .*

*Para as linhas que possuem uma quantidade par de elementos é fácil observar que a soma desses números é nula, pois de acordo com a propriedade dos Números Complementares eles são simétricos em relação ao eixo vertical que passa pelo vértice, assim alternando os sinais a soma será nula.*

**linha 2** :  $1 - 1 = 0$

**linha 4** :  $1 - 3 + 3 - 1 = 0$

**linha 6** :  $1 - 5 + 10 - 10 + 5 - 1 = 0$

*E assim nas demais linhas que contenham quantidade par de elementos.*

*Para as linhas que apresentam números ímpares de elementos, podemos proceder da mesma maneira:*

**linha 5** :  $1 - 4 + 6 - 4 + 1 = 0$

**linha 7** :  $1 - 6 + 15 - 20 + 15 - 6 + 1 = 0$

Porém para demonstração faremos um pouco diferente, vamos decompor os números de acordo com a construção do triângulo de Pascal. Usaremos as mesmas Linha 5 e linha 7 para exemplificar:

**linha 5** :  $1 - 4 + 6 - 4 + 1$

$1 - (1 + 3) + (3 + 3) - (3 + 1) + 1$ , reagrupando:

$$(1 - 1) + (-3 + 3) + (3 - 3) + (-1 + 1) = 0$$

**linha 7** :  $1 - 6 + 15 - 20 + 15 - 6 + 1$

$1 - (1 + 5) + (5 + 10) - (10 + 10) + (10 + 5) - (5 + 1) + 1$ , reagrupando:

$$(1 - 1) + (-5 + 5) + (10 - 10) + (-10 + 10) + (5 - 5) + (-1 + 1) = 0$$

**Propriedade 2.0.13** (Coeficientes das linhas de ordem  $n$ ). Para descobrir os coeficientes das linhas de ordem  $n$ , podemos usar:

**1º elemento e o elemento de ordem  $n$**  :

São da forma  $C_n^0$ , iguais a 1.

**2º elemento e o elemento de ordem  $n - 1$**  :

São da forma  $C_n^1$ , iguais a  $n$ .

**3º elemento e o elemento de ordem  $n - 2$**  :

São da forma  $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$

**4º elemento e o elemento de ordem  $n - 3$**  :

São da forma  $C_n^3 = \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{(n-2)}{3}$

**5º elemento e o elemento de ordem  $n - 4$**  :

São da forma  $C_n^4 = \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{(n-2)}{3} \cdot \frac{(n-3)}{4}$

**6º elemento e o elemento de ordem  $n - 5$**  :

São da forma  $C_n^5 = \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{(n-2)}{3} \cdot \frac{(n-3)}{4} \cdot \frac{(n-4)}{5}$



**7º elemento e o elemento de ordem  $n - 6$  :**

$$\text{São da forma } C_n^6 = \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{(n-2)}{3} \cdot \frac{(n-3)}{4} \cdot \frac{(n-4)}{5} \cdot \frac{(n-5)}{6}$$

*E assim sucessivamente...*

**Propriedade 2.0.14** (Potências de base 11). *As potências de base 11 é mais uma das propriedades bastante interessantes do Triângulo de Pascal, pois podem ser obtidas a partir dos elementos das linhas. Veja o esquema abaixo: até a linha 4, todos os números do triângulo têm apenas um algarismo e as potências de 11 são obtidas diretamente, ou seja:*

$$11^0 = 1 \cdot 10 = 1$$

$$11^1 = 1 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 = 11$$

$$11^2 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 = 121$$

$$11^3 = 1 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 = 1331$$

$$11^4 = 1 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 = 14641$$

*A partir da linha 5, que equivale à quinta potência de 11, já aparecem números com mais de um algarismo. Os algarismos que não correspondem a unidade podem ser acrescentados a próxima potência de 10, de forma que, ao final, os coeficientes de todas as potências de 10 serão formadas por um único algarismo.*

*Exemplo: Os números da linha 5 são: 1, 5, 10, 10, 5, 1, à partir dessa linha devemos proceder da seguinte maneira:*

*Vamos fazer da direita para esquerda*

**Número 1** : *ok*

**Número 5** : *ok*

**Número 10** : *transferir o número 1 para o próximo número e deixar o 0*

**Número 10** : *somar o número 1 transferido, ficaremos com 11, transferir o número 1 novamente para o próximo número e deixar 1*

**Número 5** : *somar o número 1 transferido, ficaremos com 6*

**Número 1** : *ok*

Assim temos os algarismos: 1, 6, 1, 0, 5, 1, ou seja:

$$11^5 = 1 \cdot 10^5 + 6 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 = 161051$$

Lembrando que só devemos transferir para a próxima potência todos os números que estiverem além das unidades, pois os coeficientes de todas as potências de 10 serão formados por um único algarismo.

**Propriedade 2.0.15** (Números de Fibonacci). No Triângulo de Pascal os números de Fibonacci aparecem como soma dos números das "diagonais inversas", resultando, então a sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ..., que são os Números de Fibonacci  $F_{n+1}$ .

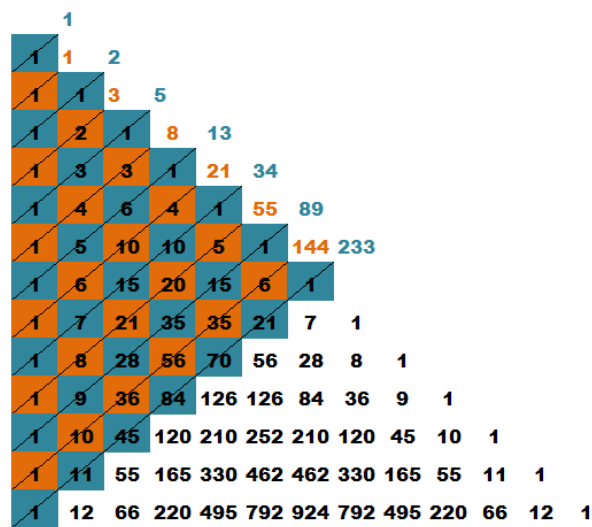


Figura 2.8: Soma dos números das diagonais secundárias - Números de Fibonacci

**Demonstração:** Chama-se de  $f_n$  a soma dos elementos das diagonais inversas. Observa-se que  $F_1 = 1 = f_1$ ,  $F_2 = 1 = f_2$  e  $F_3 = 2 = f_3$ . Assim verificando, temos que  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ , para qualquer  $n \geq 2$ .

Inicialmente percebe-se que na "diagonal inversa" o número binominal subsequente diminui sua linha em 1 unidade e sua coluna aumenta 1 unidade, portanto tem se para um  $n$  qualquer:

$$F_{n+1} + F_n = [C_{n+1}^0 + C_n^1 + C_{n-1}^2 + \dots] + [C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \dots] =$$

$$F_{n+1} + F_n = C_{n+1}^0 + [C_n^0 + C_n^1] + [C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2] + [C_{n-2}^2 + C_{n-2}^3] + \dots =$$

Da Relação de Stifel:

$C_{n+1}^n = C_n^{n-1} + C_n^n$  e notando que  $C_{n+1}^0 = C_{n+2}^0 = 1$ , obtém-se:

$F_{n+1} + F_n = [C_{n+2}^0 + C_{n+1}^1 + C_n^2 + C_{n-1}^3 + \dots] = F_{n+2}$ , como visto antes  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

■

**Propriedade 2.0.16** (Relação de Fermat). Para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $p \in \mathbb{N}$ , temos

$$C_n^p \cdot \frac{(n-p)}{(p+1)} = C_n^{p+1}$$

. Essa é a chamada relação de Fermat para dois elementos consecutivos na mesma linha.

**Demonstração:** Vamos demonstrar:  $C_n^p \cdot \frac{(n-p)}{(p+1)} = C_n^{p+1}$

Desenvolvendo  $C_n^p \cdot \frac{(n-p)}{(p+1)} =$  temos:

$$C_n^p \cdot \frac{(n-p)}{(p+1)} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \cdot \frac{(n-p)}{(p+1)}$$

Com  $(n-k)! = (n-k-1)!(n-k)$  e  $k!(k+1) = (k+1)!$

$$\text{Assim } C_n^p \cdot \frac{(n-p)}{(p+1)} = \frac{n!}{p!(n-p-1)!(n-p)} \cdot \frac{(n-p)}{(p+1)} = \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} = C_n^{p+1}$$

■

## Capítulo 3

# Triângulo de Pascal no Excel

Capítulo dedicado ao uso da tecnologia para construção do Triângulo de Pascal.

### 3.1 Origem da ideia

No início do trabalho, as figuras iniciais dos Triângulos foram feitas no Microsoft Excel, porém manualmente, pois não havia necessidade de grandes análises. Porém no decorrer do projeto, surgiram curiosidades e expectativas a respeito dos padrões formados no Triângulo de Pascal quando coloríssemos múltiplos de números previamente escolhidos, pois estes formavam fractais. Daí a ideia da elaboração da Planilha no Microsoft Excel para análise de padrões, em linhas distantes, e utilização em sala e aula com os alunos do Ensino Médio como mais uma ferramenta de motivação às aulas.

### 3.2 Construção da Planilha

**Passo 1** : Mesclar as células F1 e G1, depois mesclar E2 e F2, e G2 e H2;

**Passo 2** : Copiar as células E2 até H2 e colar na célula D3, copiar a célula D3 e colar na H3;

**Passo 3** : selecionar essas 6 células criadas, clicar com o botão direito do mouse e Formatar célula colocando borda em todas elas;

**Passo 4** : Copiar e colar as células para aumentar o tamanho do Triângulo conforme achar necessário;

**Passo 5** : Ainda com as 6 células selecionadas ir em Pagina Inicial/ Formatar/ Tamanho da célula/ Altura da linha: 20 e Largura da Coluna: 03;

**Passo 6** : Selecionar a célula F1 ir em Página Inicial/ Formatação

Condicional/ Nova regra/ Usar uma fórmula para determinar quais células devem ser formatadas - no Campo: Formatar valores em que esta célula for verdadeira - digitar  $=\text{MOD}(F1;K1)=0$ ; neste caso F1 é a fórmula selecionada, K estamos travando a célula K para que não mude e será nessa célula que iremos digitar o número que queremos que seja colorido seus múltiplos;

**Passo 7** : A partir daí, podemos aumentar a quantidade de linhas até quanto desejarmos, apenas copiando e colando. OBS: Precisamos ficar atentos as formatações: altura da linha, largura da coluna e que célula devemos digitar os múltiplos, pois conforme aumentamos as linhas do Triângulo de Pascal essa célula vai mudando.

### 3.3 Problema encontrado durante a construção

Facilitou muito a observação no Triângulo com o uso da informática, porém os números nessa Planilha do Excel vão se tornando cada vez maiores, principalmente os do centro do Triângulo, daí surge o problema: não colore mais os múltiplos que escolhemos. Para que possamos entender melhor, segue a figura:

A figura é pequena, mas é visível o semi círculo sem os múltiplos coloridos. Esse erro aparece após a linha de número 46, quando os números contém 13 algarismos. Para concluirmos a observação dos padrões, as células restantes foram coloridas manualmente.

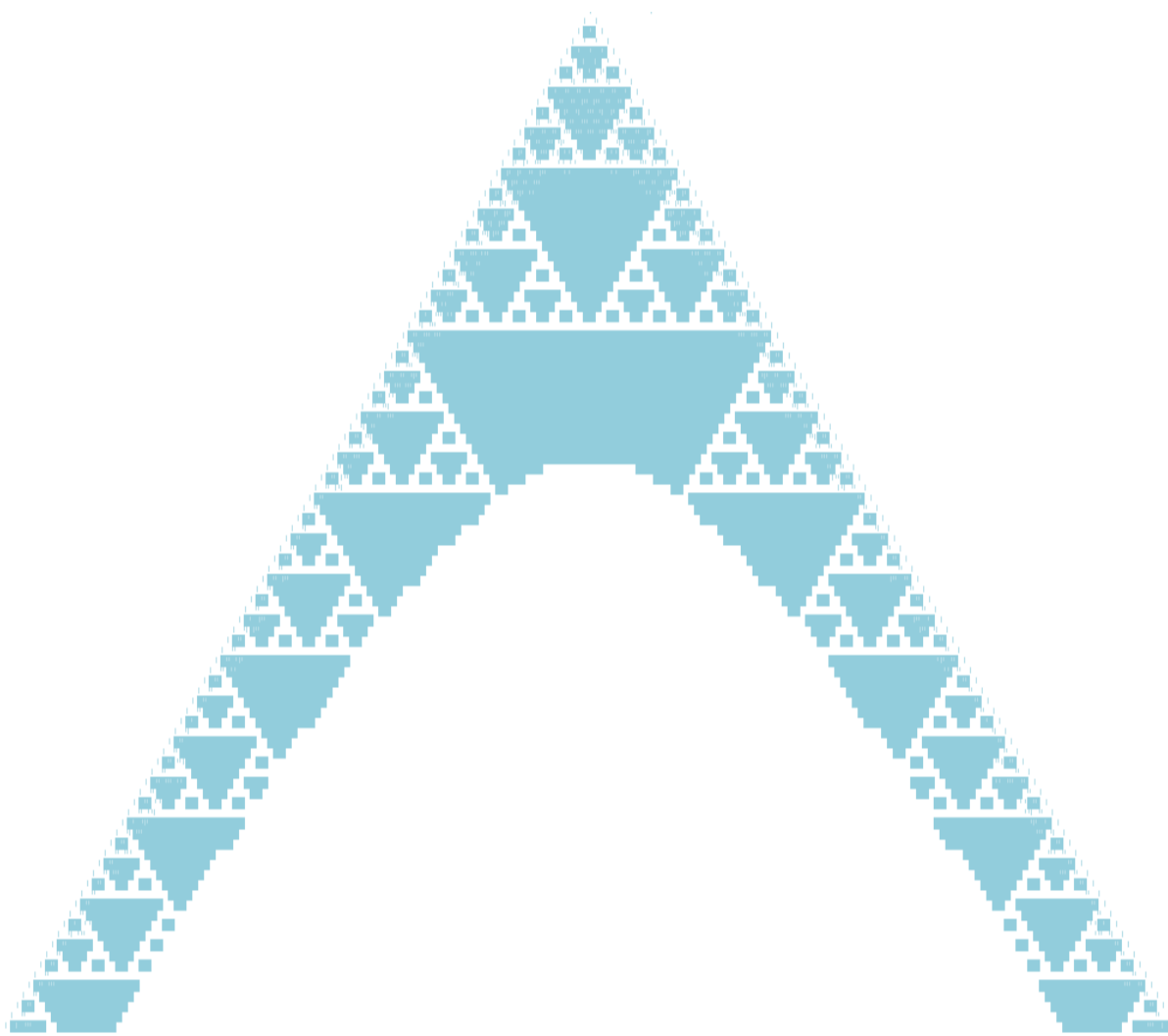


Figura 3.1: Planilha do Excel com erro.

# Capítulo 4

## Analizando padrões

### 4.1 Fractais no Triângulo de Pascal

Conforme citado no capítulo anterior, a planilha no Microsoft Excel foi de grande importância para algumas análises desse projeto, pois após colorirmos, no Triângulo de Pascal, os múltiplos pré selecionados, notamos a existência de padrões interessantes em todos os múltiplos testados. Podemos destacar também que as Escolas Estaduais contam com Salas de Informática e que o Microsoft Excel é acessível a todos, facilitando assim a utilização em Sala de Aula pelos docentes que queiram aprofundar um pouco sobre o Triângulo de Pascal. O Triângulo construído possui 101 linhas.

Se colorirmos os números divisíveis por 2:

Olhe para os não coloridos, que no caso seriam os números ímpares.

Encontramos o Triângulo de Sierpinsky <sup>1</sup>: Este triângulo foi descrito por Waclaw Sierpinski em 1915, na verdade não foi descoberto através do Triângulo de Pascal e sim partindo de um triângulo equilátero, unindo os pontos médios de cada lado do triângulo e retirando o triângulo central, formando assim 4 triângulos, recursivamente repete-se o procedimento anterior em cada triângulo obtido.

---

<sup>1</sup>Waclaw Sierpinski, matemático polonês, 1882-1969

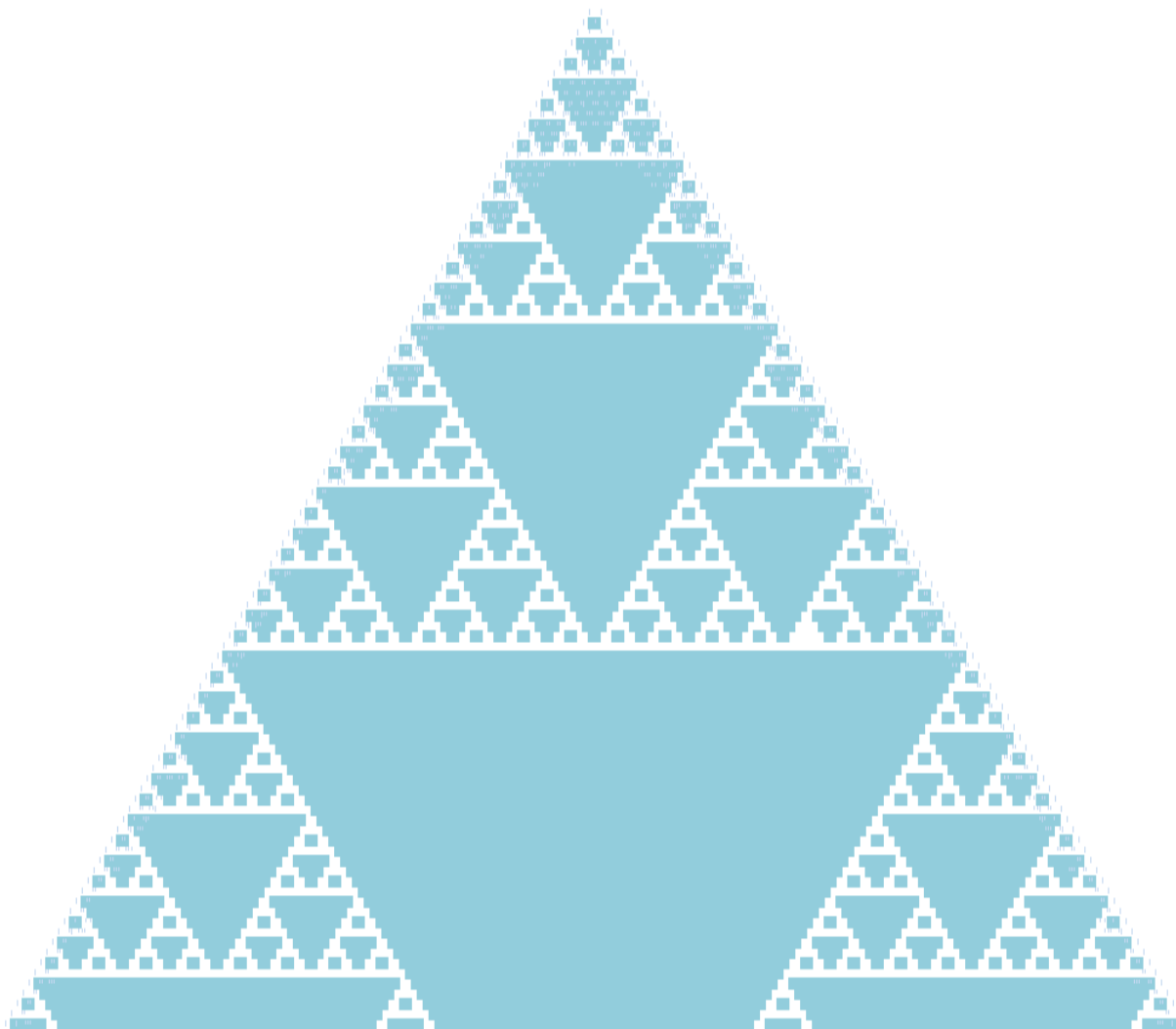


Figura 4.1: Múltiplos de 2

Se colorirmos os números divisíveis por 3:

Se colorirmos os números divisíveis por 4:

Se colorirmos os números divisíveis por 5:

Vamos verificar alguns números primos: 7, 9, 11, 13, 17 e 19.

Com as figuras expostas, percebemos a presença de alguns padrões, tais padrões são denominados fractais.

**Definição 4.1.1** (Fractal). *Basicamente é uma estrutura geométrica complexa cujas propriedades, em geral, repetem-se em qualquer escala.*



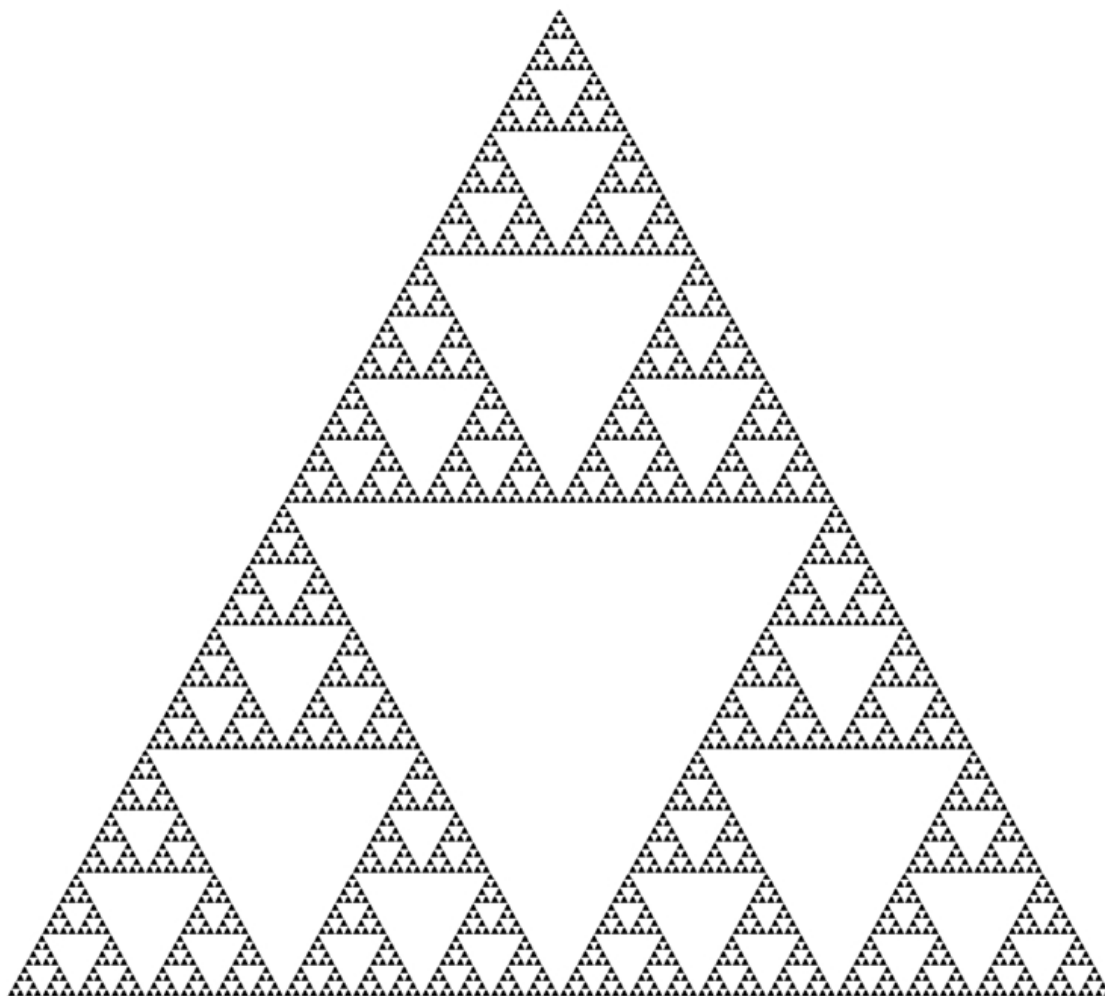


Figura 4.2: Triângulo de Sierpinski. Fonte: pesquisa imagens - google

Como os fractais são formados a partir de processos iterativos, conseguir construir manualmente as figuras de um fractal após um número muito grande de iterações torna-se praticamente impossível, assim o desenvolvimento da informática é de grande importância para analisarmos os padrões do Triângulo de Pascal.

Quem utilizou primeiramente a palavra Fractal foi Benoit Mandelbrot, baseando-se no adjetivo fractus que vem do verbo frangere, em latim, cujo significado é quebrar, fragmentar. A Geometria Fractal de Mandelbrot reflete a natureza cheia de irregularidades e fragmentação, porém no presente projeto não vamos aprofundar nesse conhecimento e sim focar apenas nos Fractais apresentados pelo Triângulo de Pascal, vale lembrar que as

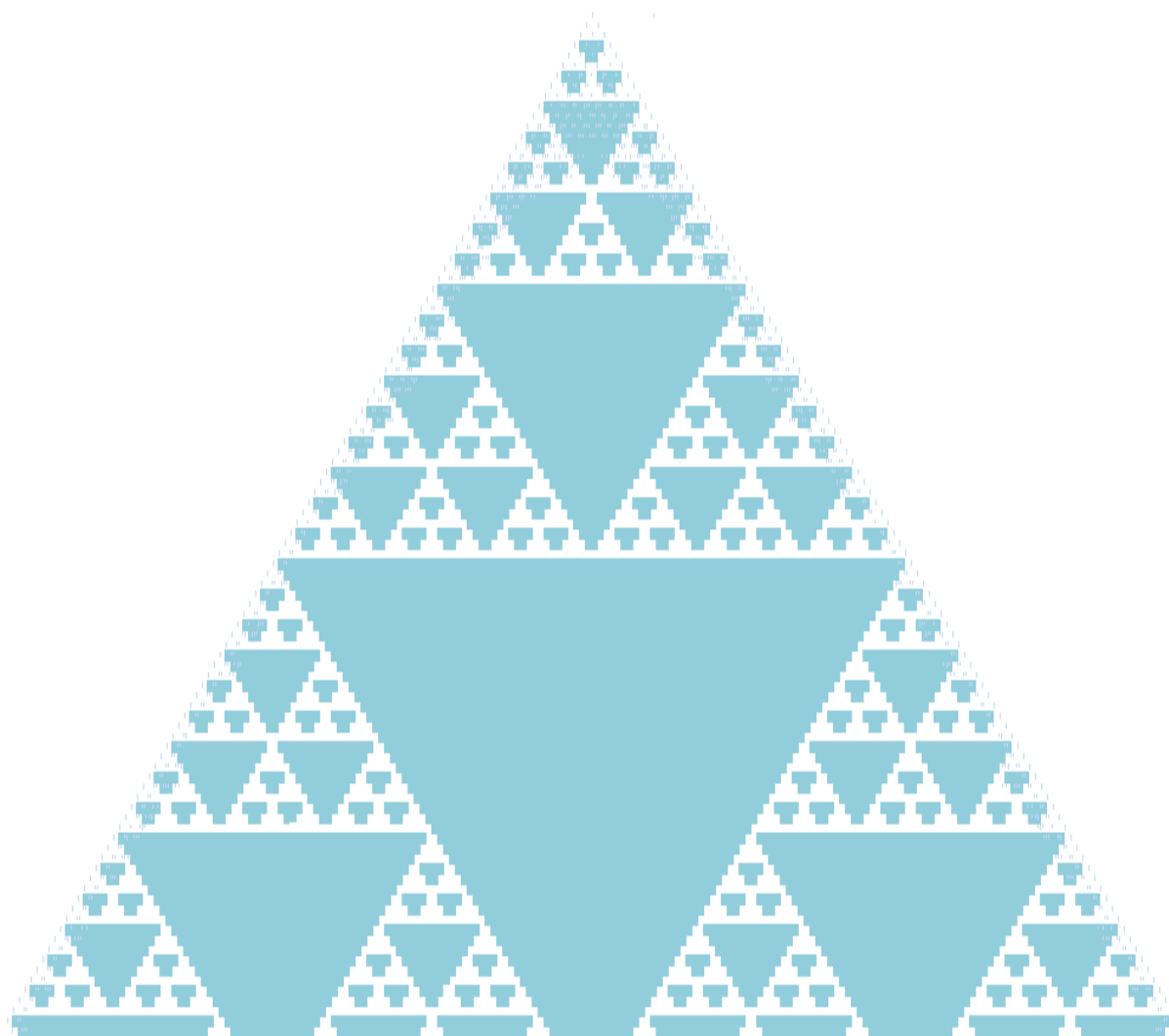


Figura 4.3: Múltiplos de 3

principais características de um fractal são: a auto-semelhança e a complexidade infinita, pois os fractais são obtidos a partir de processos recursivos, ou seja, a aplicação de uma mesma regra de construção infinitamente dentro de si mesmos.

## 4.2 Padrões entre os múltiplos

Algumas análises feitas apenas por observação das figuras acima:

- 1- Múltiplos de 2: O padrão aparece a cada 32 linhas, ou seja  $2^3 \cdot 2^2$ ;
- 2- Múltiplos de 3: O padrão aparece a cada 54 linhas, ou seja  $3^3 \cdot 2^1$ ;

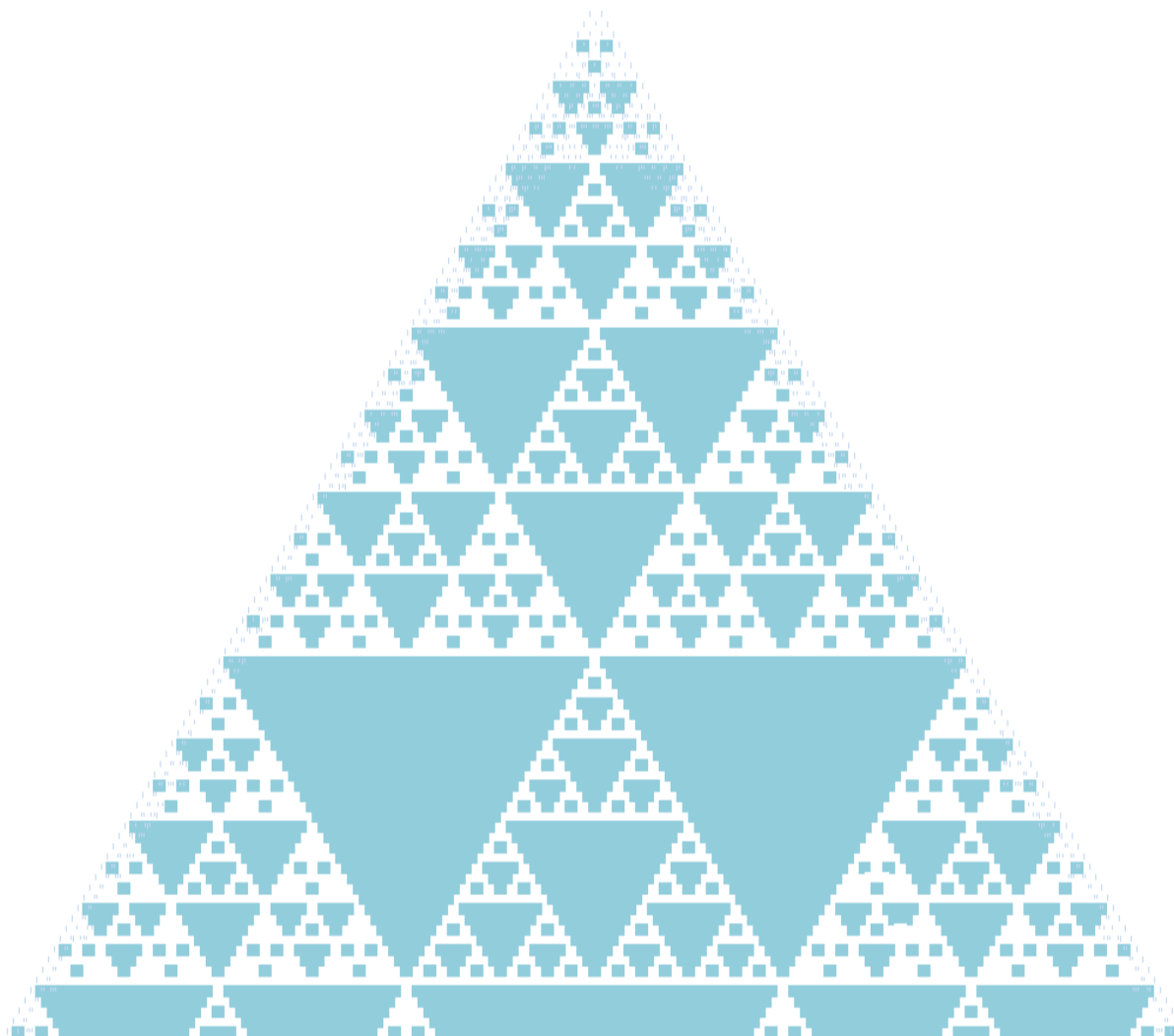


Figura 4.4: Múltiplos de 4

3- Múltiplos de 4: O padrão aparece a cada 64 linhas, ou seja  $4^3 \cdot 2^0$ ;

4- Múltiplos de 5: O padrão aparece a cada 25 linhas, ou seja  $5^2$ ;

5- Múltiplos de 7: O padrão aparece a cada 49 linhas, ou seja  $7^2$ ;

6- Múltiplos de 11: O padrão aparece a cada 121 linhas, ou seja  $11^2$ ;

O surpreendente é o padrão idêntico encontrado no Triângulo de Pascal após colorir os múltiplos dos números primos a partir do 5. Estes seguem o mesmo padrão de desenho e a repetição aparece após o número primo elevado ao quadrado:  $13^2$ ;  $17^2$ ;  $23^2$  e assim sucessivamente.

Percebemos, por observação da segunda diagonal, que quando um dos números da

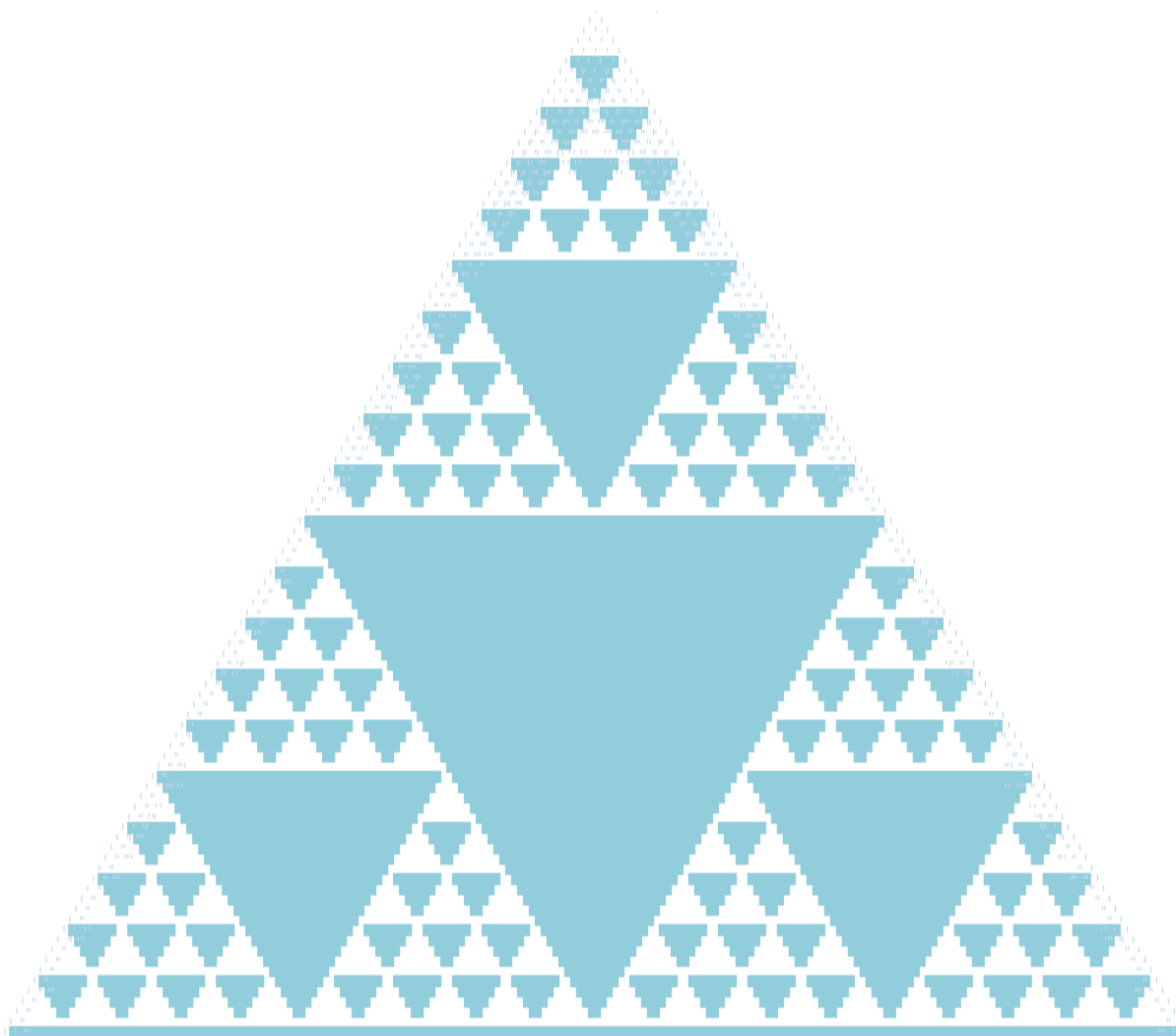


Figura 4.5: Múltiplos de 5

linha é primo (divisível apenas por um e por ele mesmo), então todos os elementos dessa linha (excluindo o 1) são divisíveis por ele.

Não fomos muito felizes com o Microsoft Excel, pois não foi possível criarmos o Triângulo de Pascal com um número bem grande de linhas, assim pudemos analisar poucos números, dado a dificuldade de encontrar os padrões e colorir manualmente as células.

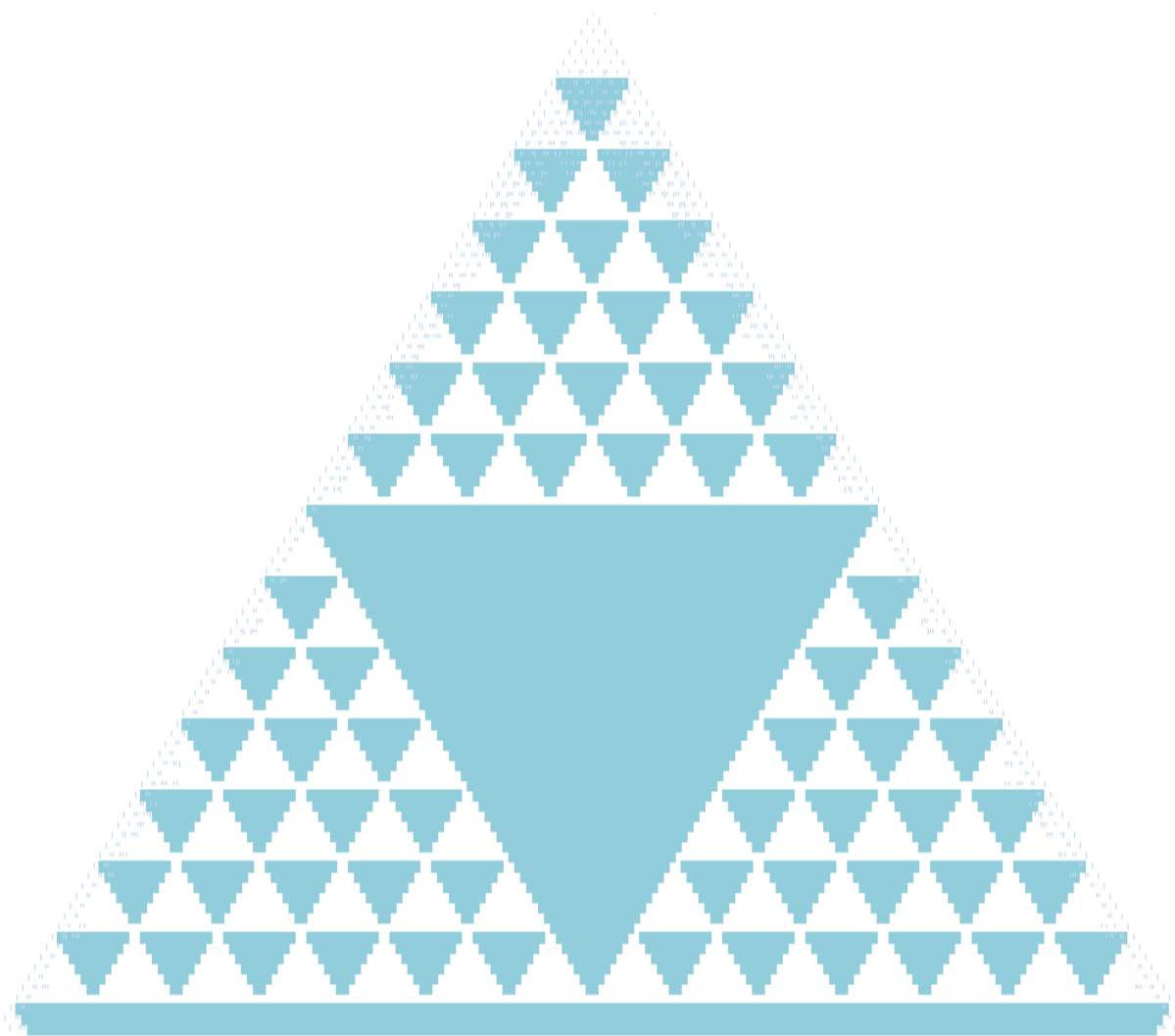


Figura 4.6: Múltiplos de 7

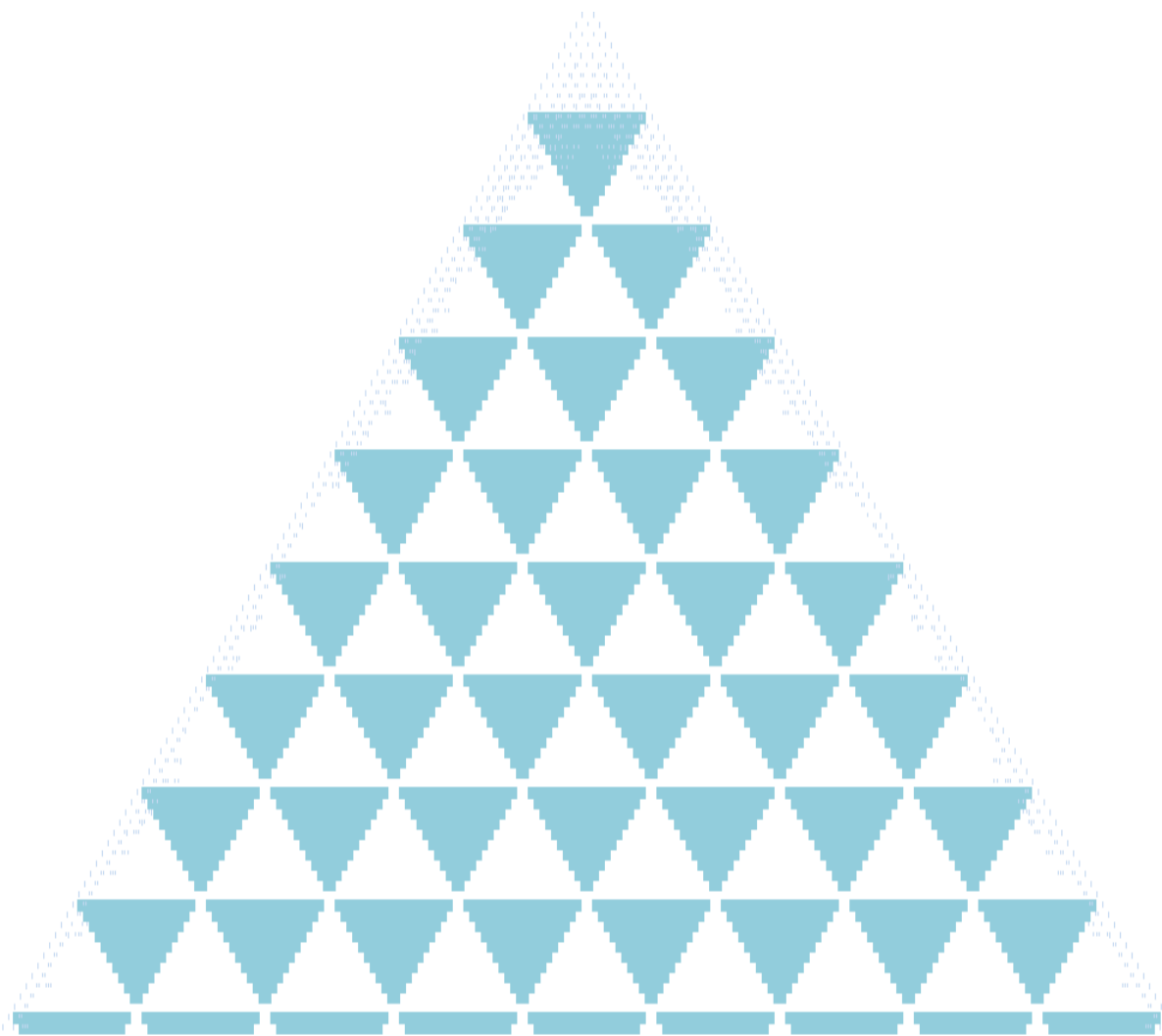


Figura 4.7: Múltiplos de 11

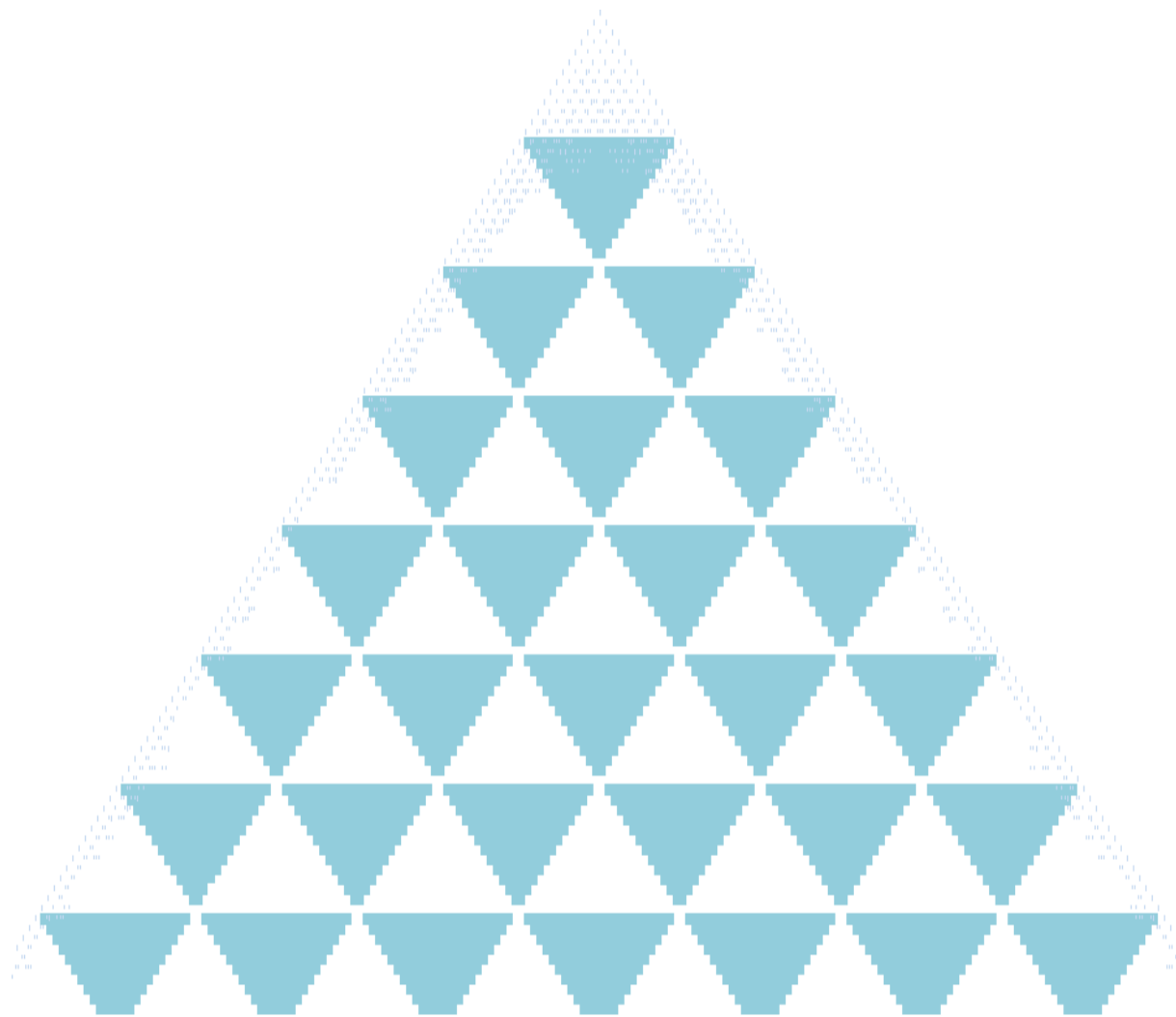


Figura 4.8: Múltiplos de 13

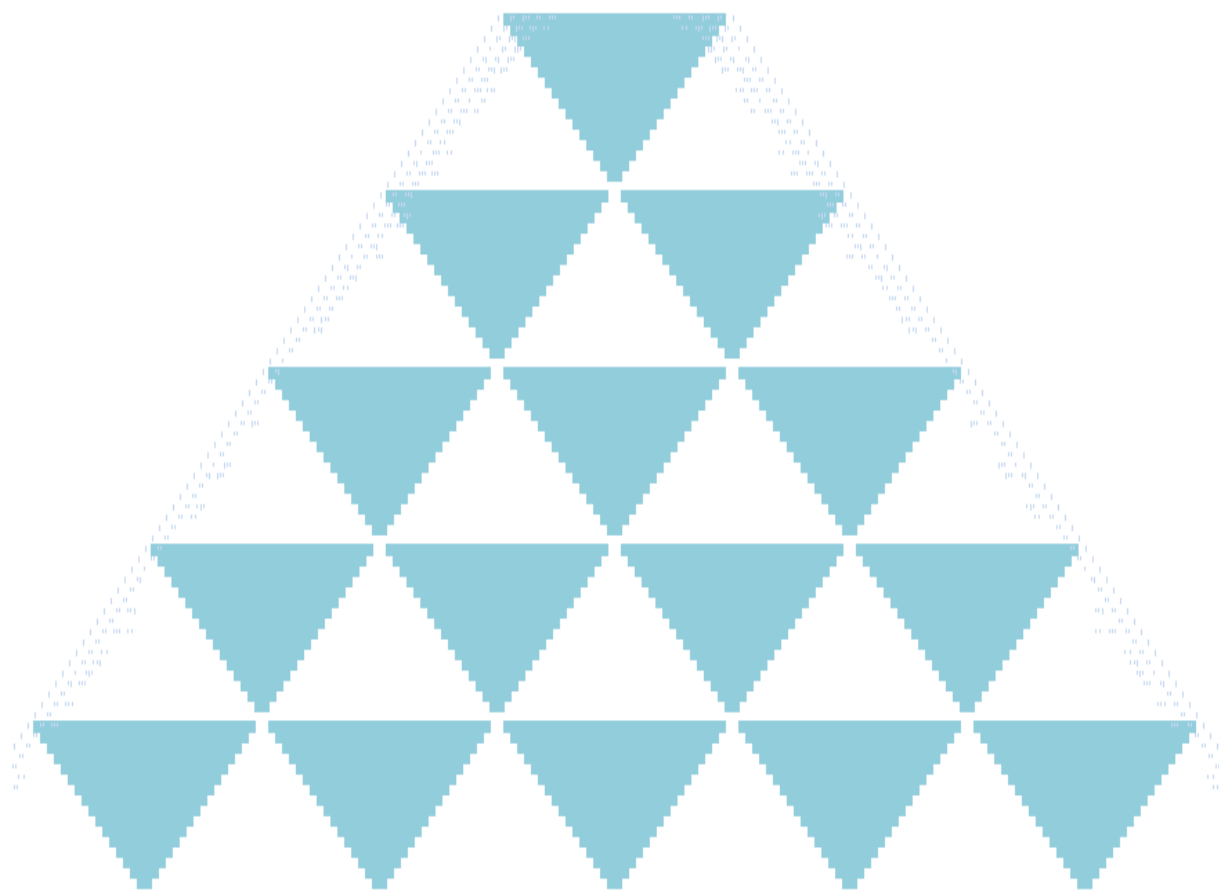


Figura 4.9: Múltiplos de 17



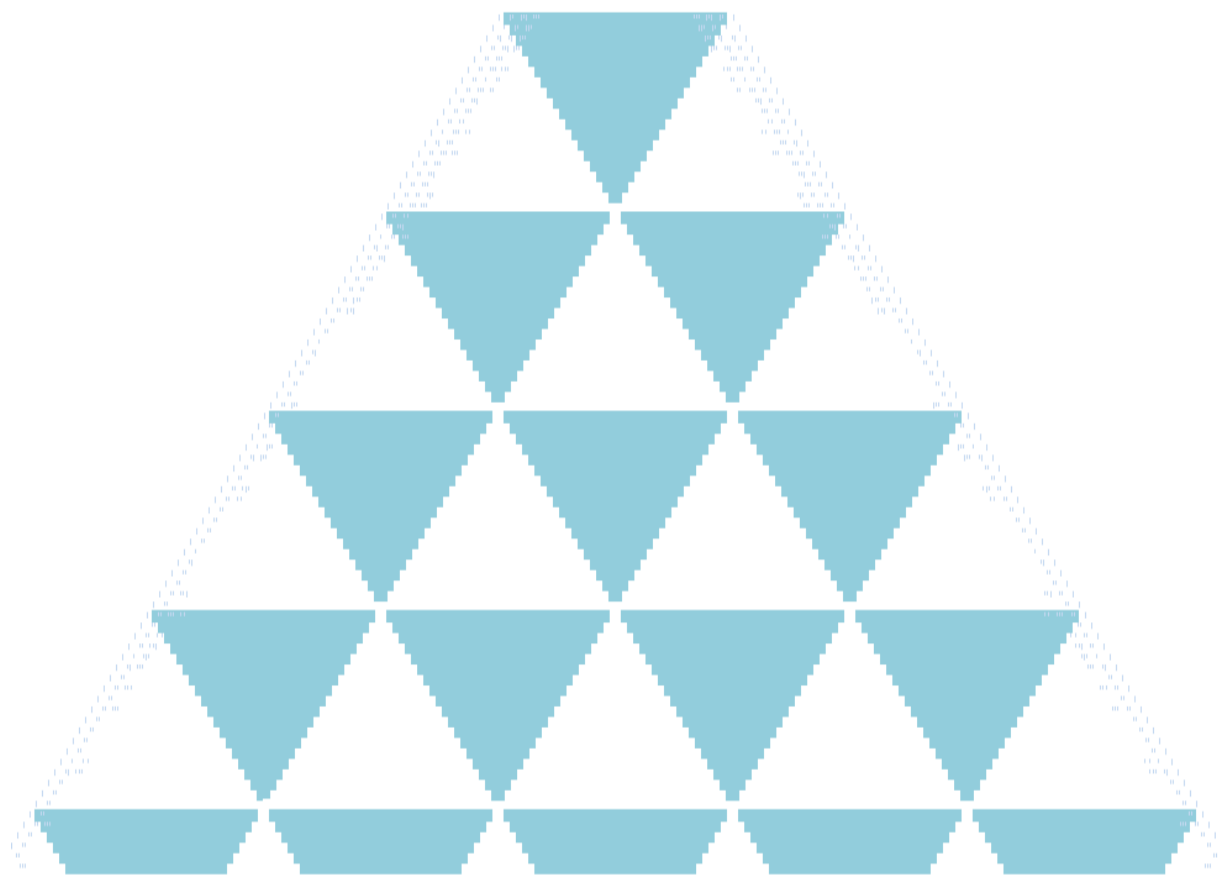


Figura 4.10: Múltiplos de 19

# Capítulo 5

## Sequência de Fibonacci

### 5.1 Os números de Fibonacci e a população de coelhos

#### 5.1.1 Como tudo começou...

Uma simples pergunta resultou em uma proporção belíssima! **”Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês?”**

Antes de respondermos a pergunta, falaremos um pouco Fibonacci.

No limiar do século XIII despontou a figura de Leonardo Fibonacci (”Leonardo, filho de Bonaccio”, c.1175-1250), o matemático mais talentoso da Idade Média. Também é conhecido como Leonardo de Pisa (ou Leonardo Pisano), Leonardo nasceu em Pisa, centro comercial importante, onde seu pai era ligado aos negócios mercantis. Muitas das grandes cidades comerciais italianas daqueles tempos mantinham entrepostos em várias partes do mundo mediterrâneo. Esse foi o caminho que levou Leonardo a receber parte de sua educação em Bejaia, norte da África, onde seu pai fora desempenhar uma função alfandegária. As atividades do pai logo despertaram no garoto um interesse pela aritmética



Figura 5.1: Leonardo Fibonacci (1175-1250

, Fonte: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fibonacci.jpg>, acessado em 30/09/2017.

que se canalizou, posteriormente, para extensas viagens ao Egito, à Sicília, à Grécia e Síria, onde pode entrar em contato direto com os procedimentos matemáticos orientais e árabes. Inteiramente convencido da superioridade prática dos métodos indo-árabicos de cálculo, Fibonacci, em 1202, logo depois de retornar a sua terra natal, publicou sua obra famosa intitulada *Liber abaci*, na qual ele apresentava os chamados *modus Indorum* (método dos indianos), hoje conhecidos como Algarismos Árabicos. Tais números já eram conhecidos pela matemática indiana lá pelo século VI, mas foi Fibonacci o responsável por apresentá-los ao Ocidente.

Nem tudo que consta no *Liber abaci* é interessante, mas alguns dos problemas foram usados por autores posteriormente. Entre esses tem um que pode ter sido sugerido por um problema semelhante no Papiro Ahmes.

Fibonacci propõe:

*Sete velhas foram a Roma, cada uma tinha sete mulas; cada mula carregava sete sacos, cada saco continha sete pães; e com cada pão havia sete facas; cada faca estava dentro*

de sete bainhas. Quantos objetos há entre mulheres, mulas, sacos, pães, facas e bainhas estavam indo à Roma?

Mas sem dúvida, o problema de *Liber abaci* que mais estimulou os futuros matemáticos foi o descrito acima, sobre os coelhos. Esse pequeno problema dá origem a chamada "Sequência de Fibonacci" 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... $u_n$ ..., onde  $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ , isto é, em cada termo após os dois primeiros é a soma dos dois imediatamente precedentes.

Verificou-se que essa sequência tem muitas propriedades belas e significativas. Por exemplo, pode-se provar que dois termos sucessivos quaisquer são primos entre si e que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n-1}}{u_n}$  é a razão da proporção áurea  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

A sequência se aplica também a questões de filotaxia <sup>1</sup> e crescimento orgânico.

### 5.1.2 Resolvendo o problema dos coelhos

Voltando ao problema utilizado por Fibonacci em *Liber Abaci* sobre o crescimento idealizado de uma população de coelhos. Lembrando que para isso faz-se necessário que um casal de coelhos seja colocado num espaço; e não haja nem um problema genético, nem de fertilidade e que os casais fossem eternos, procriando um novo casal a cada mês, a partir do segundo mês de vida.

A questão era: quantos pares (casais) de coelhos haveria ao final de um ano?

A solução apresentada era a seguinte:

**1º mês** : Nasce o primeiro casal de coelhos.

**2º mês** : Haveria apenas um casal: o primeiro casal ainda não poderia se reproduzir.

**3º mês** : O primeiro casal se reproduziria, havendo dois casais.

**4º mês** : O primeiro casal se reproduziria novamente, mas não o outro, havendo três casais.

**5º mês** : Os dois primeiros casais se reproduziriam, mas não o terceiro, havendo cinco casais.

---

<sup>1</sup>disposição das folhas no caule; estudo e classificação das diversas formas de disposição e organização das folhas em uma planta

**Enésimo mês** : O número de casais seria a soma dos casais do mês  $n - 2$  com os casais do mês  $n - 1$ .

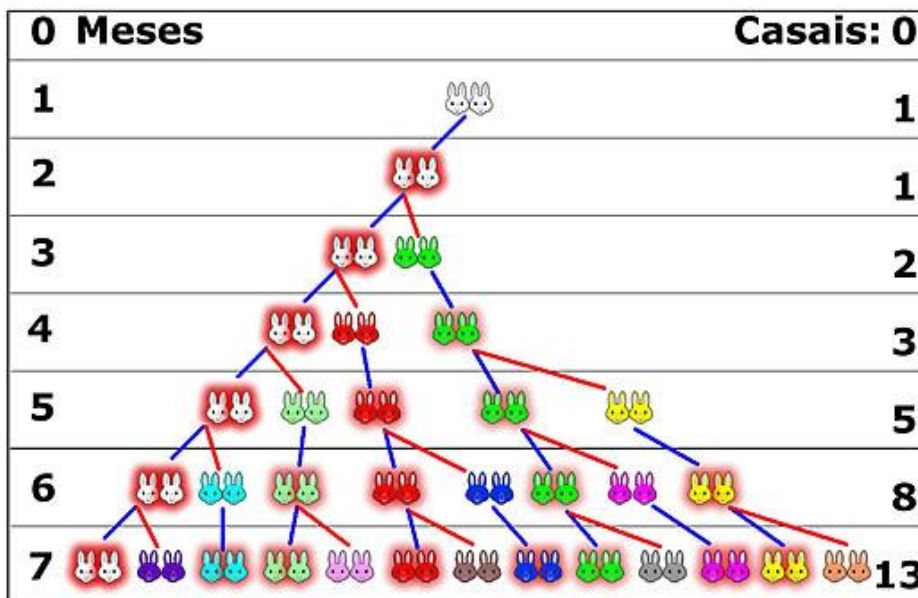


Figura 5.2: Anagrama dos casais de coelhos - Fonte: <http://www.estudofacil.com.br/sequencia-de-fibonacci/>, em 23/06/17

À essa solução foi dada o nome de Sequência de Fibonacci pelo matemático francês Édouard Lucas <sup>2</sup>.

### 5.1.3 Definição da Sequência de Fibonacci e Fórmula de Binet

**Definição 5.1.1** (Sequência de Fibonacci). *É uma sequência de números inteiros, começando por 0 e 1, na qual, cada termo subsequente corresponde a soma dos dois anteriores.*

*Trata-se, então, de uma função recursiva da forma:*

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ com } n \in \mathbb{N}, F_1 = 1 \text{ e } F_2 = 1.$$

Para obtermos a sequência de Fibonacci, utilizamos a função, representada abaixo:

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n=0 \\ 1, & \text{se } n=1 \\ F_{n-1} + F_{n-2}, & \text{demais casos} \end{cases}$$

<sup>2</sup>François Édouard Anatole Lucas, matemático francês, 1842-1891

Para uma sequência gerada com  $n$  variando de 0 a 10, por exemplo, obtemos uma sequência com 11 itens 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 110.

A Sequência de Fibonacci e seus elementos são definidos por recorrência, ou seja, só é possível determinar o valor de  $F_n$  conhecendo os elementos anteriores  $F_{n-1}; F_{n-2}; F_{n-3}; F_{n-4} \dots$

E como calcular o valor do número para  $n$  muito alto?

Existe uma fórmula que foi demonstrada por Leonhard Euler em 1765, mas ficou famosa quando foi redescoberta por Jacques Binet <sup>3</sup> em 1843, e acabou sendo conhecida como fórmula de Binet, trata-se da seguinte fórmula:

$$F_n = \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Vamos demonstrar pelo Princípio da Indução Finita e veracidade da Fórmula de Binet, com  $F_1 = F_2 = 1$  e  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ , para  $n \geq 3$ .

### Demonstração:

Queremos provar que

$$F_n = \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

é válido para qualquer  $n$ , com  $F_1 = F_2 = 1$  e  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ , para  $n \geq 3$ .

Vamos verificar que a sentença é válida para  $n = 1$

$$F_1 = \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^1}{\sqrt{5}}$$

$$F_1 = \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}}$$

$$F_1 = \frac{1 + \sqrt{5} - 1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

---

<sup>3</sup>Jacques Philippe Marie Binet, matemático francês, 1786-1856

$$F_1 = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

$$F_1 = 1$$

Para  $n = 2$

$$F_2 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}}$$

$$F_2 = \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5 - 1 + 2\sqrt{5} - 5}{\sqrt{5}}$$

$$F_2 = \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

$$F_2 = 1$$

Supondo que a sentença é válida para  $n$ , vamos provar que é verdadeira para  $n + 1$

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

$$F_{n+1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} + \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}}$$

$$F_{n+1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}}$$

$$F_{n+1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1\right)}{\sqrt{5}}$$

$$F_{n+1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}}$$

$$F_{n+1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right)}{\sqrt{5}}$$

$$F_{n+1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1+2\sqrt{5}+5}{2^2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1-2\sqrt{5}+5}{2^2}\right)}{\sqrt{5}}$$

$$F_{n+1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}}$$

$$F_{n+1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}$$

Pelo Princípio da Indução Finita provamos  $F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$  é válido para qualquer  $n$ , com  $F_1 = F_2 = 1$  e  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ , para  $n \geq 3$ .

■

**Observação 5.1.1.** *O interessante nessa fórmula é que o numerador é um número irracional, o denominador é um número irracional e o resultado por ser um número da sequência de Fibonacci sempre será um número inteiro, como demonstrado a veracidade anteriormente (Lembrando que os arredondamentos, dependem do que usamos para os cálculos, porém o resultado deve ser um número de Fibonacci).*

Vejamos um exemplo de aplicação da fórmula de Binet:

**Exemplo 5.1.2.** *Vamos calcular o valor do número na sequência de Fibonacci para  $n = 60$ . Para isso vamos fazer uso de uma calculadora científica ou microsoft excel e trabalhar com um valor aproximado para o número irracional que aparece na fórmula, substituindo o valor de  $n$  dado teremos:*

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$



$$F_{60} = \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{60} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^{60}}{\sqrt{5}}$$

$$F_{60} = \frac{(1,618033989)^{60} - (-0,618033989)^{60}}{\sqrt{5}}$$

$$F_{60} = \frac{(3,46145 \cdot 10^{12}) - (2,88896 \cdot 10^{-13})}{\sqrt{5}}$$

$$F_{60} = \frac{3,46145 \cdot 10^{12}}{\sqrt{5}}$$

$$F_{60} = 1,54801 \cdot 10^{12}$$

# Capítulo 6

## Propriedades da sequência de Fibonacci

Este capítulo nos permite apresentar algumas propriedades da Sequência de Fibonacci. Muitas delas foram estudadas por matemáticos durante muitos anos.

Observando essa sequência verificamos que dois termos consecutivos tem o máximo divisor comum igual a 1, com isso enunciaremos nossa primeira propriedade.

**Propriedade 6.0.3** (Dois termos sucessivos quaisquer são primos entre si). *Na sequência de Fibonacci temos que  $F_n$  e  $F_{n+1}$  são números primos entre si.*

**Demonstração:** Para demonstrar essa propriedade devemos mostrar que:  $(F_n, F_{n+1}) = 1$ , considerando que  $(x, y)$  representa o máximo divisor comum (M.D.C.) entre  $x$  e  $y$ , vamos usar o Princípio da Indução Finita para a demonstração

Para  $n = 1$

Temos que  $(F_1, F_2) = (1, 1) = 1$

Supondo que  $(F_n, F_{n+1}) = 1$ , queremos provar que  $(F_{n+1}, F_{n+2}) = 1$  para  $n > 1$

Pelo lema de Euclides  $(x, y) = (y - x.n, x)$ , usando  $x = F_{n+1}$ ;  $y = F_{n+2}$ ;  $n = 1$  e  $F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$ , temos  $(F_{n+1}, F_{n+2}) = (F_{n+2} - F_{n+1}, F_{n+1}) = (F_n, F_{n+1}) = 1$ .

Pelo Princípio da Indução Finita demonstramos que  $(F_{n+1}, F_{n+2}) = 1$  para  $n > 1$ .



**Propriedade 6.0.4** (Soma dos  $n$  primeiros números de Fibonacci).  $F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_{n-1} + F_n = F_{n+2} - 1$

*Essa propriedade foi descoberta por Edouard Lucas em 1876 e as seguintes somas apontam para sua generalização:*

$$F_1 + F_2 = 2 = 3 - 1 = F_4 - 1$$

$$F_1 + F_2 + F_3 = 4 = 5 - 1 = F_5 - 1$$

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 7 = 8 - 1 = F_6 - 1$$

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 = 12 = 13 - 1 = F_7 - 1$$

**Demonstração:** Utilizando a definição recursiva da Sequência de Fibonacci.

$$F_1 = F_3 - F_2$$

$$F_2 = F_4 - F_3$$

$$F_3 = F_5 - F_4$$

$$F_4 = F_6 - F_5$$

⋮

$$F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$$

$$F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$$

*Somando os membros:*

$$F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_{n-1} + F_n = F_3 + F_4 + F_5 + \dots + F_{n+1} + F_{n+2} - F_2 - F_3 - F_4 - \dots - F_n - F_{n+1}$$

$$F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_{n-1} + F_n = -F_2 + F_{n+2},$$

*como  $F_2 = 1$ , chegamos que a soma dos  $n$  primeiros números de Fibonacci é:*

$$F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_{n-1} + F_n = F_{n+2} - 1$$



**Propriedade 6.0.5** (Somadas dos números de Fibonacci de ordem ímpar).  $F_1 + F_3 + F_5 + F_7 + \dots + F_{2n-3} + F_{2n-1} = F_{2n}$

**Demonstração:** Temos:

$$F_1 = F_2$$

$$F_3 = F_4 - F_2$$

$$F_5 = F_6 - F_4$$

$$F_7 = F_8 - F_6$$

$$F_9 = F_{10} - F_8$$

⋮

$$F_{2n-1} = F_{2n} - F_{2n-2}$$

*Somando os membros:*

$$F_1 + F_3 + F_5 + F_7 + \cdots + F_{2n-3} + F_{2n-1} = F_2 + F_4 + F_6 + \cdots + F_{2n} - F_2 - F_4 - F_6 - \cdots - F_{2n} - F_{2n-2}$$

$$F_1 + F_3 + F_5 + F_7 + \cdots + F_{2n-3} + F_{2n-1} = F_{2n},$$

*chegamos que a somas dos números de Fibonacci de ordem ímpar é:*

$$F_1 + F_3 + F_5 + F_7 + \cdots + F_{2n-3} + F_{2n-1} = F_{2n}$$

■

**Propriedade 6.0.6** (Somam dos números de Fibonacci de ordem par).  $F_2 + F_4 + F_6 + F_8 + \cdots + F_{2n-2} + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$

**Demonstração:** Temos:

$$F_2 = F_3 - F_1$$

$$F_4 = F_5 - F_3$$

$$F_6 = F_7 - F_5$$

$$F_8 = F_9 - F_7$$

$$F_{10} = F_{11} - F_9$$

⋮

$$F_{2n} = F_{2n+1} - F_{2n-1}$$

*Somando os membros:*

$$F_2 + F_4 + F_6 + F_8 + \cdots + F_{2n-2} + F_{2n} = F_3 + F_5 + F_7 + \cdots + F_{2n+1} - F_1 - F_3 - F_5 - \cdots - F_{2n+1} - F_{2n-1}$$

$$F_2 + F_4 + F_6 + F_8 + \cdots + F_{2n-2} + F_{2n} = F_{2n+1} - F_1, \text{ como } F_1 = 1$$

*chegamos que a somas dos números de Fibonacci de ordem ímpar é:*

$$F_2 + F_4 + F_6 + F_8 + \cdots + F_{2n-2} + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$$

■

**Propriedade 6.0.7** (Soma alternada dos números de Fibonacci). **Demonstração:**  $(-1)^2 F_1 + (-1)^3 F_2 + (-1)^4 F_3 + \dots + (-1)^{n+1} F_n = 1 + (-1)^{n+1} F_{n-1}$

Vamos provar essa propriedade usando as propriedades 3 e 4.

$$F_1 + F_3 + F_5 + F_7 + \dots + F_{2n-3} + F_{2n-1} = F_{2n}$$

$$F_2 + F_4 + F_6 + F_8 + \dots + F_{2n-2} + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$$

Subtraindo as equações membro a membro, teremos:

$$F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \dots + F_{2n-1} - F_{2n} = F_{2n+1} - F_{2n+1} + 1, \text{ como } F_n = F_{n+1} - F_{n-1},$$

então  $F_{2n} = F_{2n+1} - F_{2n-1}$ , daí:

$$F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \dots + F_{2n-1} - F_{2n} = F_{2n} + 1$$

Para essa relação os números de índice par tem sinal negativo e os de índice ímpar estão com o sinal positivo, porém, o sinal desse número de Fibonacci dependerá do sinal da última parcela dessa soma. Genericamente:

$$F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \dots + (-1)^{n+1} F_n = 1 + (-1)^{n+1} F_{n-1}$$

■

**Propriedade 6.0.8** (Soma dos quadrados dos números de Fibonacci). A soma dos quadrados dos  $n$  primeiros números da sequência de Fibonacci é dada pela relação:  $S_n^2 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \dots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$ , para  $n \gg 1$ .

**Demonstração:** Temos:

$F_n^2 = F_n(F_{n+1} - F_{n-1}) = F_n F_{n+1} - F_{n-1} F_n$ , pois  $F_n = F_{n+1} - F_{n-1}$  como visto nas propriedades anteriores.

Temos:

$$F_1^2 = F_1 F_2$$

$$F_2^2 = F_2 F_3 - F_1 F_2$$

$$F_3^2 = F_3 F_4 - F_2 F_3$$

$$F_4^2 = F_4 F_5 - F_3 F_4$$

⋮

$$F_n^2 = F_n F_{n+1} - F_{n-1} F_n$$

Somando os membros:

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 + \dots + F_{n-1}^2 + F_n^2 = F_1 F_2 + F_2 F_3 + F_3 F_4 + \dots + F_{n-1} F_n + F_n F_{n+1} - F_1 F_2 - F_2 F_3 - F_3 F_4 - \dots - F_{n-1} F_n$$

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 + \cdots + F_{n-1}^2 + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$$

■

**Propriedade 6.0.9** (Número de Fibonacci de ordem  $n+m$ ).  $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$

■

**Propriedade 6.0.10** (Número de Fibonacci de ordem  $2n$ ).  $F_{2n} = F_{n-1}F_n + F_nF_{n+1} = F_n(F_{n-1} + F_{n+1})$

■

**Propriedade 6.0.11** (Diferença de quadrados de números consecutivos de ordem par e ordem ímpar).  $F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{2n}$

Como  $F_n = F_{n+1} - F_{n-1}$ , podemos escrever a diferença de quadrados de números consecutivos de ordem par e ordem ímpar como:

$$F_{2n} = (F_{n+1} - F_{n-1})(F_{n-1} + F_{n+1}),$$

ou ainda

$$F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$$

**Propriedade 6.0.12** (A soma de seis números consecutivos de Fibonacci é divisível por 4). Para  $n > 0$

$$F_n + F_{n+1} + F_{n+2} + F_{n+3} + F_{n+4} + F_{n+5} = 4 \cdot F_{n+4}$$

**Demonstração:** Vamos desenvolver o primeiro membro da equação.

$$F_n + F_{n+1} + F_{n+2} + F_{n+3} + F_{n+4} + F_{n+5}$$

Substituindo  $F_n + F_{n+1}$  por  $F_{n+2}$  e  $F_{n+5}$  por  $F_{n+3} + F_{n+4}$ , temos:

$$F_{n+2} + F_{n+2} + F_{n+3} + F_{n+4} + F_{n+3} + F_{n+4}$$

$$2F_{n+2} + 2F_{n+3} + 2F_{n+4}$$

$$2(F_{n+2} + F_{n+3}) + 2F_{n+4}$$

Substituindo  $F_{n+2} + F_{n+3}$  por  $F_{n+4}$ , temos o que queríamos demonstrar:

$$2F_{n+4} + 2F_{n+4}$$

$4F_{n+4}$ , ou seja:

$$F_n + F_{n+1} + F_{n+2} + F_{n+3} + F_{n+4} + F_{n+5} = 4F_{n+4}$$



**Propriedade 6.0.13** (A soma de quaisquer 10 números consecutivos de Fibonacci é divisível por 11). Para  $n > 0$

$$F_n + F_{n+1} + F_{n+2} + F_{n+3} + F_{n+4} + F_{n+5} + F_{n+6} + F_{n+7} + F_{n+8} + F_{n+9} = 11 \cdot F_{n+4}$$

**Demonstração:** Vamos desenvolver o primeiro membro da equação.

$$F_n + F_{n+1} + F_{n+2} + F_{n+3} + F_{n+4} + F_{n+5} + F_{n+6} + F_{n+7} + F_{n+8} + F_{n+9}$$

Substituindo  $F_{n+9}$  por  $F_{n+7} + F_{n+8}$ , temos:

$$(F_n + F_{n+1} + F_{n+2} + F_{n+3} + F_{n+4} + F_{n+5}) + F_{n+6} + F_{n+7} + F_{n+8} + (F_{n+7} + F_{n+8})$$

Pela Propriedade anterior  $F_n + F_{n+1} + F_{n+2} + F_{n+3} + F_{n+4} + F_{n+5} = 4F_{n+4}$ , daí:

$$4F_{n+4} + F_{n+6} + 2F_{n+7} + 2F_{n+8}$$

$$4F_{n+4} + F_{n+6} + 2(F_{n+5} + F_{n+6}) + 2(F_{n+6} + F_{n+7})$$

$$4F_{n+4} + F_{n+6} + 2F_{n+5} + 2F_{n+6} + 2F_{n+6} + F_{n+7}$$

$$4F_{n+4} + 5F_{n+6} + 2F_{n+5} + 2F_{n+5} + 2F_{n+6}$$

$$4F_{n+4} + 2F_{n+5} + 2F_{n+5} + 7F_{n+6}$$

$$4(F_{n+4} + F_{n+5}) + F_{n+6}$$

$$4F_{n+6} + 7F_{n+6}$$

$$11F_{n+6}$$

Temos o que queríamos demonstrar:

$$F_n + F_{n+1} + F_{n+2} + F_{n+3} + F_{n+4} + F_{n+5} + F_{n+6} + F_{n+7} + F_{n+8} + F_{n+9} = 11F_{n+6}$$



**Propriedade 6.0.14** (Fórmula de Cassini <sup>1</sup>). A fórmula de Cassini foi descoberta em 1680 por Jean-Dominique Cassini, então diretor do Observatório de Paris, e comprovada por Robert Simson (1753), porém nomeada somente em 1879. A Fórmula é um caso especial da Sequência de Fibonacci.

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

**Demonstração:** Demonstraremos pelo Princípio da Indução Finita.

$$\text{Queremos provar que } F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

Para  $n = 1$

---

<sup>1</sup>Jean Dominique Comte de Cassini, 1748-1845, astrónomo, geodesta e cartógrafo francês

$$F_0 F_2 - F_1^2 = 0 \cdot 1 - 1^2 = -1 \text{ OK}$$

Supomos que  $F_{n-1} F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$  é válida para  $n \gg 1$ , vamos provar que é válida para  $n + 1$

$$\begin{aligned} F_n F_{n+2} - F_{n+1}^2 &= \\ &= F_n (F_{n+1} + F_n) - F_{n+1}^2 = \\ &= F_n F_{n+1} + F_n F_n - F_{n+1}^2 = \\ &= F_{n+1} (F_n - F_{n+1}) + F_n^2 \end{aligned}$$

Como  $F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$ , temos:

$$\begin{aligned} &= F_{n+1} (-F_{n-1}) + F_n^2 = \\ &= -(F_{n+1} F_{n-1} - F_n^2) \end{aligned}$$

Pela hipótese

$$-(-1)^n = (-1)(-1)^n = (-1)^{n+1}$$

Pelo Princípio da Indução Finita provamos que  $F_{n-1} F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$ .

■

### CURIOSIDADE: Número notável 89

A Seqüência de Fibonacci contém um número absolutamente notável  $F_{11} = 89$ . O valor de  $\frac{1}{89}$  na representação decimal é igual a  $0,0112359550561798 \dots$

Se organizarmos os números de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,  $\dots$  como frações decimais da maneira o dígito das unidades do primeiro número de Fibonacci fique na segunda casa decimal, o segundo fique na terceira casa decimal, e assim por diante (o dígito das unidades do  $n$ -ésimo número de Fibonacci fica na  $(n + 1)$  n-ésima casa decimal, assim:

0,01  
 0,001  
 0,0002  
 0,00003  
 0,000005  
 0,0000008  
 0,00000013  
 0,000000021



0,0000000034  
 0,00000000055  
 0,000000000089  
 0,000000000144  
 0,0000000000233  
 0,00000000000377  
 0,000000000000610  
 0,0000000000000987  
 0,00000000000001597  
 0,000000000000002584  
 0,0000000000000004181

0,0112359550561798...

Agora se somarmos todos os números, iremos obter 0,0112359550561798... que é igual a  $\frac{1}{89}$ . Essa curiosidade foi descoberta por Cody Birsner, estudante da Universidade de Oklahoma, em 1994.

## 6.1 Fibonacci e a Sequencia de Lucas

Denotamos em nosso trabalho a sequencia de Fibonacci por  $F_n$  enquanto que o símbolo  $L_n$  denotaremos a sequencia de Lucas. Essa sequência foi concebida pelo matemático francês François Édouard Anatole Lucas (1842-1891)<sup>2</sup>. A Sequência de Lucas é um caso particular da Sequência de Fibonacci, com  $L_1 = 1$ ,  $L_2 = 3$  e  $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ , para  $n \gg 3$ .

A importância dos números de Lucas  $L_n$  dar-se-a no fato deles gerarem a Proporção áurea para as n-ésimas potências.

A sequencia obtida então é 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, ...

Os números de Lucas podem ser dados recursivamente, usando a Sequência de Fibonacci, por:  $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$ , para  $n \gg 1$ .

---

<sup>2</sup>Lucas é reconhecido pela criação do jogo conhecido como torre de Hanoi

Como a Sequência de Fibonacci e de Lucas possui algumas propriedades, que citaremos abaixo.

**Propriedade 6.1.1** ( $L_n = F_{n+2} - F_{n-2}$ , para  $n \gg 2$ ). **Demonstração:** Utilizando a definição recursiva da Sequência de Lucas  $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$ , para  $n \gg 1$  e pela sequência de Fibonacci  $F_{n+1} = F_{n+2} - F_n$  e  $F_{n-1} = F_n - F_{n-2}$ , faremos a demonstração dessa propriedade.

$$\begin{aligned} L_n &= F_{n+1} + F_{n-1} \Rightarrow \\ \Rightarrow L_n &= (F_{n+2} - F_n) + (F_n - F_{n-2}) \\ \Rightarrow L_n &= F_{n+2} - F_{n-2}, \text{ para } n \gg 2. \end{aligned}$$

■

**Propriedade 6.1.2** ( $F_n + L_n = 2F_{n+1}$ ). **Demonstração:** Vamos desenvolver o primeiro membro da equação:

$$\begin{aligned} F_n + L_n &= (F_{n+1} - F_{n-1}) + (F_{n+2} - F_{n-2}) \\ F_n + L_n &= (F_{n+1} - (F_n - F_{n-2})) + F_{n+2} - F_{n-2} \\ F_n + L_n &= F_{n+1} + (-F_n + F_{n+2}) \\ F_n + L_n &= F_{n+1} + F_{n+1} \\ F_n + L_n &= 2F_{n+1} \end{aligned}$$

■

**Propriedade 6.1.3** ( $2L_{n+1} - L_n = 5F_n$ , para  $n \gg 0$ ). **Demonstração:** Lembrando que  $L_n = 2F_{n+1} - F_n$  e  $L_{n+1} = 2F_{n+2} - F_{n+1}$ , vamos à demonstração:

$$\begin{aligned} 2L_{n+1} - L_n &= 2(2F_{n+2} - F_{n+1}) - 2F_{n+1} - F_n \\ 2L_{n+1} - L_n &= 4F_{n+2} - 2F_{n+1} - 2F_{n+1} - F_n \\ 2L_{n+1} - L_n &= 4(F_{n+2} - F_{n+1}) - F_n \\ 2L_{n+1} - L_n &= 4F_n + F_n \\ 2L_{n+1} - L_n &= 5F_n \end{aligned}$$

■

**Propriedade 6.1.4** ( $L_n^2 - 5F_n^2 = 4(-1)^n$ , para  $n \gg 0$ ). **Demonstração:** Para iniciar nossa demonstração, partiremos da Fórmula de Cassini:

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

Como

$$F_n + L_n = 2F_{n+1} \text{ ou seja } F_{n+1} = \frac{F_n + L_n}{2} \text{ e}$$

$$L_n = F_{n+1} + F_{n-1} \text{ ou seja } F_{n-1} = L_n - F_{n+1}, \text{ daí}$$

$$(L_n - F_{n+1})\left(\frac{F_n + L_n}{2}\right) - F_n^2 = (-1)^n$$

$$\left(L_n - \left(\frac{F_n + L_n}{2}\right)\right)\left(\frac{F_n + L_n}{2}\right) - F_n^2 = (-1)^n$$

$$\left(\frac{L_n - F_n}{2}\right)\left(\frac{F_n + L_n}{2}\right) - F_n^2 = (-1)^n$$

$$L_n^2 - F_n^2 - 4F_n^2 = 4(-1)^n$$

$$L_n^2 - 5F_n^2 = 4(-1)^n$$

■

## 6.2 Fibonacci e Fermat

Fermat observou que os números 1, 3, 8, 120 possuem a seguinte propriedade:

*Um (1) mais o produto de quaisquer dois deles é um quadrado perfeito.*

Assim:

$$1 + 1 \cdot 3 = 2^2$$

$$1 + 1 \cdot 8 = 3^2$$

$$1 + 1 \cdot 120 = 11^2$$

$$1 + 3 \cdot 8 = 5^2$$

$$1 + 3 \cdot 120 = 19^2$$

$$1 + 8 \cdot 120 = 31^2$$

Davenport <sup>3</sup> mostrou que para 1, 3, 8 e  $x$  terem a mesma propriedade, então  $x$  deve ser 120 e que é impossível encontrar  $x$  e  $y$  de tal forma que os cinco números 1, 3, 8,  $x$  e  $y$  tenham essa mesma propriedade.

Se observarmos a sequência dos números de Fibonacci rapidamente veríamos que 1, 3 e 8 correspondem respectivamente a  $F_2$ ,  $F_4$  e  $F_6$  e que  $120 = 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 4F_3F_4F_5$ .

<sup>3</sup>Harold Davenport, matemático inglês, 1907-1969

**Teorema 6.2.1** (Os números  $F_{2n}$ ,  $F_{2n+2}$ ,  $F_{2n+4}$  e  $4F_{2n+1}F_{2n+2}F_{2n+3}$  tem a propriedade de um mais o produto de quaisquer dois deles é um quadrado perfeito).

**Demonstração:** Lembrando que por Cassini temos:

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

$$F_{n-1}F_{n+1} - (-1)^n = F_n^2$$

Deixando do jeito que precisamos para demonstração, temos:

$$+1 + F_{2n}F_{2n+2} = F_{2n+1}^2$$

$$-1 + F_{2n+1}F_{2n+3} = F_{2n+2}^2$$

$$+1 + F_{2n+2}F_{2n+4} = F_{2n+3}^2$$

Partindo que

$$A = 1 + F_{2n}(4F_{2n+1}F_{2n+2}F_{2n+3}) \text{ é quadrado perfeito.}$$

$$A = 1 + 4(F_{2n}F_{2n+2})(F_{2n+1}F_{2n+3})$$

Por Cassini, vamos substituir

$$F_{2n}F_{2n+2} = F_{2n+1}^2 - 1 \text{ e } F_{2n+1}F_{2n+3} = F_{2n+2}^2 + 1, \text{ assim:}$$

$$= 1 + 4(F_{2n+1}^2 - 1)(F_{2n+2}^2 + 1)$$

$$= 1 + 4(F_{2n+1}^2 F_{2n+2}^2 - F_{2n+1}^2 - F_{2n+2}^2 - 1)$$

$$= 1 + 4F_{2n+1}^2 F_{2n+2}^2 - 4F_{2n+1}^2 - 4F_{2n+2}^2 - 4$$

Vamos substituir  $F_{2n+2}^2$  por  $F_{2n+1}F_{2n+3} - 1$

$$= 1 + 4F_{2n+1}^2 F_{2n+2}^2 - 4F_{2n+1}^2 - 4(F_{2n+1}F_{2n+3} - 1) - 4$$

Vamos substituir  $F_{2n+3}$  por  $F_{2n+1} + F_{2n+2}$

$$= 1 + 4F_{2n+1}^2 F_{2n+2}^2 + 4F_{2n+1}^2 - 4F_{2n+1}(F_{2n+1} + F_{2n+2}) - 4 + 4$$

$$= 1 + 4F_{2n+1}^2 F_{2n+2}^2 + 4F_{2n+1}^2 - 4F_{2n+1}^2 - 4F_{2n+1}F_{2n+2}$$

$$= 1 + 4F_{2n+1}^2 F_{2n+2}^2 - 4F_{2n+1}F_{2n+2}$$

$$= (2F_{2n+1}F_{2n+2} - 1)^2$$

■

As demais demonstrações seguem analogamente.

## 6.3 A Proporção Áurea

”O matemático, tal como o pintor ou o poeta, é um criador de padrões. Um pintor faz padrões com formas e cores, um poeta com palavras e o matemático com ideias. Todos os padrões devem ser belos. As ideias, tal como as cores, as palavras ou os sons, devem ajustar-se de forma perfeita e harmoniosa”.

(Godfrey Harold Hardy)

**Definição 6.3.1** (Proporção Áurea). *É uma constante algébrica irracional denotada pela letra grega  $\Phi$  (lê-se "fi") dada pela divisão entre um elemento da sequência de Fibonacci e seu antecessor, que tende a se aproximar de  $\Phi=1,618033988749895$ .*

A Proporção Áurea foi muito usada por Phidias <sup>4</sup>, e em função das primeiras letras de seu nome usamos  $\Phi$  para representar o valor numérico do que conhecemos como razão dourada, proporção Divina, pois os antigos achavam que este era um número predeterminado pelo Criador do Universo. Vale lembrar tantos outros nomes dados a esta razão: Proporção áurea, número de ouro, número áureo, secção áurea, proporção de ouro, seção áurea (do latim sectio aurea), razão áurea, razão de ouro, média e extrema razão (Euclides), divina seção (do latim sectio divina), proporção em extrema razão, divisão de extrema razão ou áurea excelência...

Uma aproximação para  $\Phi$

1.6180339887498948482045868343656381177203091798057628621254486227052604  
 6281890244970720720418939113748475408807538689175212663386222353693179  
 3180060766726354433389086595939582905638322661319928290267880675208766  
 8925017116962070322210432162695486262963136144381497587012203408058879  
 5445474924618569536486444924104432077134494704956584678850987433944221  
 2544977066478091588460749988712400765217057517978834166256249407589069  
 7040002812104276217711177780531531714101170466659914669798731761356006  
 7087480710131795236894275219484353056783002287856997829778347845878228  
 9110973250030269615617002504643382437764861028383126833037242926752631

---

<sup>4</sup>escultor grego, 480 - 430 a. C.

$F_n$	$L_n$				
		$F_{n+1}/F_n=Phi$	$L_{n+1}/L_n=Phi$	$L_n/F_n=Raiz(5)$	$F_n/L_n=Raiz(0,2)$
1	1	1	3	1	1
1	3	2	1,333333333	3	0,333333333
2	4	1,5	1,75	2	0,5
3	7	1,666666667	1,571428571	2,333333333	0,428571429
5	11	1,6	1,636363636	2,2	0,454545455
8	18	1,625	1,611111111	2,25	0,444444444
13	29	1,615384615384620	1,620689655172410	2,230769230769230	0,448275862068966
21	47	1,619047619047620	1,617021276595740	2,238095238095240	0,446808510638298
34	76	1,617647058823530	1,618421052631580	2,235294117647060	0,447368421052632
55	123	1,618181818181820	1,617886178861790	2,236363636363640	0,447154471544715
89	199	1,617977528089890	1,618090452261310	2,235955056179780	0,447236180904523
144	322	1,618055555555560	1,618012422360250	2,236111111111110	0,447204968944099
233	521	1,618025751072960	1,618042226487520	2,236051502145920	0,447216890595010
377	843	1,618037135278510	1,618030842230130	2,236074270557030	0,447212336892052
610	1364	1,618032786885250	1,618035190615840	2,236065573770490	0,447214076246334
987	2207	1,618034447821680	1,618033529678300	2,236068895643360	0,447213411871319
1597	3571	1,618033813400130	1,618034164099690	2,236067626800250	0,447213665639877
2584	5778	1,618034055727550	1,618033921772240	2,236068111455110	0,447213568708896
4181	9349	1,618033963166710	1,618034014333080	2,236067926333410	0,447213605733233
6765	15127	1,618033998521800	1,618033978977990	2,236067997043610	0,447213591591195
10946	24476	1,618033985017360	1,618033992482430	2,236067970034720	0,447213596992973
17711	39603	1,618033990175600	1,618033987324190	2,236067980351190	0,447213594929677
28657	64079	1,618033988205320	1,618033989294460	2,236067976410650	0,447213595717786
46368	103682	1,618033988957900	1,618033988541890	2,236067977915800	0,447213595416755
75025	167761	1,618033988670440	1,618033988829350	2,236067977340890	0,447213595531739
121393	271443	1,618033988780240	1,618033988719550	2,236067977560490	0,447213595487819

Figura 6.1: Fonte: Microsoft Excel

1653392473167111211588186385133162038400522216579128667529465490681131

71599343235973494985090409476213222981017261070596

Conseguimos obter  $\Phi$  matematicamente através de deduções algébricas, sequências contínuas infinitas ou deduções geométricas.

**Definição 6.3.2** (Números irracionais). *Representados pela letra I (maiúscula), são números que não se pode expressar como quociente de dois números inteiros a e b, pois em suas formas decimais, consistem em números infinitos não periódicos.*

### Dedução algébrica de $\Phi$

Assim como 8 está para 5, 13 está para 8, 21 está para 13, generalizando  $F_{n+1}$  está para  $F_n$ . Por exemplo: utilizando o 10º elemento, a divisão seria:  $\frac{F_9}{F_8}$ . Algebricamente, calculamos a Proporção Áurea tomando como base duas medidas: a e b utilizando dois segmentos de retas:

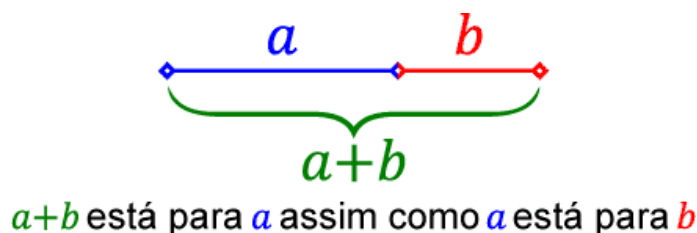


Figura 6.2: Sequência de Fibonacci - Fonte: <http://blog.wesleycota.com/fibonacci-parte-2-proporcao-aurea/>, em 23/06/17

Temos:

**Demonstração:** Vamos provar que  $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \Phi$ .

A partir da figura:  $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$ , chamamos esse valor  $x$ , daí:

$$(I) \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = x$$

$$(II) \frac{a+b}{a} = \frac{a}{a} + \frac{b}{a} = 1 + \frac{b}{a}$$

Se  $\frac{a}{b} = x$ , por (I)  $\frac{b}{a} = \frac{1}{x}$ , substituindo em (II),

$1 + \frac{1}{x}$ , multiplicando ambos os lados por  $x$ , obtemos  $x + 1 = x^2$

Resolvendo a equação  $x^2 - x - 1 = 0$  encontramos duas raízes  $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ , ou seja  $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  e  $x' = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ , como não queremos medida negativa:

$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618033988749895 = \Phi$ , esse é o valor da Proporção Áurea.

■

## Dedução de $\Phi$ através de sequências infinitas

### Sequência das frações contínuas infinitas

$$\frac{1}{1} = 1$$

$$1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = \frac{5}{3} = 1,666666667$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}} = \frac{8}{5} = 1,6$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}} = \frac{13}{8} = 1,625$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}}} = \frac{21}{13} = 1,6153846154$$



$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}}}}} = \frac{34}{21} = 1,6190476190$$

Como as frações tendem a  $\Phi$ , podemos dizer:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

$$\Phi(n+1) = 1 + \frac{1}{\Phi(n)}, \quad \Phi(1) = 1$$

Essa sequência tem limite:

Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(n) = \alpha$ , então

$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(n+1) = \alpha$ , portanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(n+1) = 1 + \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(n)}$$

Daí,  $\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha}$ , ou seja  $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$

Resolvendo a equação encontramos as raízes

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ e}$$

$$\alpha' = \frac{1 - \sqrt{5}}{2},$$

O limite da sequência é positivo pois todos os termos são positivos, temos:

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618033988749895 = \Phi$$

■

**Sequência de radicais contínuos infinitos:**

$$\sqrt{1} = 1$$

$$\sqrt{1 + \sqrt{1}} = 1,414213562373100$$

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1}}} = 1,553773974030040$$

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}} = 1,598053182478620$$

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}}} = 1,611847754125250$$

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}}}} = 1,616121206508120$$

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}}}}} = 1,617442798527390$$

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}}}}}} = 1,617851290609670$$

Como os radicais tendem a  $\Phi$ , podemos dizer:

$$\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}}}$$

$$\Phi(n+1) = \sqrt{1 + \Phi(n)}, \Phi(1) = 1$$

Essa sequência tem limite:

Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(n) = \beta$ , então

$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(n+1) = \beta$ , portanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(n+1) = \sqrt{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(n)}$$

$$\text{Daí, } \beta = \sqrt{1 + \beta}$$

$$\beta^2 = 1 + \beta, \text{ ou seja:}$$

$$\beta^2 - \beta - 1 = 0$$

Resolvendo a equação encontramos duas raízes

$$\beta = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ e}$$

$$\beta' = \frac{1 - \sqrt{5}}{2},$$

O limite da sequência é positivo pois todos os termos são positivos, temos:

$$\beta = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618033988749895 = \Phi$$

■

### Dedução geométrica de $\Phi$

Para obter geometricamente o número  $\Phi$ , podemos partir de um segmento de reta com extremidades A e B e determinar um ponto D entre A e B tal que a razão entre o segmento AB e o segmento AD seja  $\Phi = 1,618 \dots$ ,  $\frac{AB}{AD} = \Phi$

Vamos então determinar o Ponto D.

Obtenha o ponto médio do segmento AB e trace uma reta perpendicular a AB passando por B com a metade do comprimento de AB, temos agora uma nova reta BC perpendicular a AB com exatamente a metade do comprimento AB. Una este ponto que acabou de encontrar com o ponto A da primeira reta para formar um triângulo ABC. Coloque a ponta seca do compasso no vértice C do triângulo e abra-o até o ponto B. Use este raio para marcar o ponto E na hipotenusa do triângulo; Com a ponta seca do compasso em A, abra-o até o novo ponto E marcado na hipotenusa, e use este raio para marcar o ponto D

na primeira reta AB. Este ponto divide o segmento AB em duas partes e o maior segmento é 1,6183... vezes o menor. Obtivemos assim o ponto D que estávamos procurando

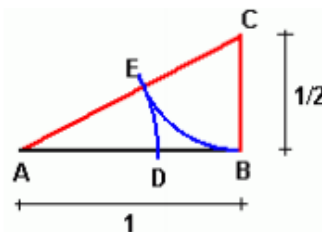


Figura 6.3: Razão entre o segmento AB e o segmento AD é igual a  $\Phi$  - Fonte: <http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/pde/rosania-razao-aurea.pdf>, em 02/08/17

**Demonstração:** Queremos provar que  $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \Phi$

Chamemos o segmento AB de  $a$ ,  $\overline{AB} = a$ , portanto  $\overline{BC} = \frac{a}{2}$ , como o triângulo ABC foi construído de maneira que fosse um triângulo retângulo,  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$  são os catetos e  $\overline{AC}$  é a hipotenusa. A hipotenusa  $\overline{AC} = \overline{CE} + x$ , ou seja,  $\overline{AC} = \overline{BC} + x$ , pois  $\overline{CE}$  foi feito a partir do tamanho do  $\overline{BC}$ .

Pelo Teorema de Pitágoras temos:

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Resolvendo chegamos em  $x^2 + ax - a^2 = 0$ , encontrando duas raízes:

$$x = a\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right) \text{ e } x' = a\left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right).$$

Daí  $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{a}{x} = \frac{a}{a\left(\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ , para nosso segmento a solução é  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ , assim

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cong 1,618\dots = \Phi$$

Provamos que  $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \Phi$

■

### 6.3.1 O retângulo Áureo

Nada melhor que começarmos a seção por uma figura auto explicativa e que relaciona a Sequência de Fibonacci com a Proporção Áurea com harmonia.

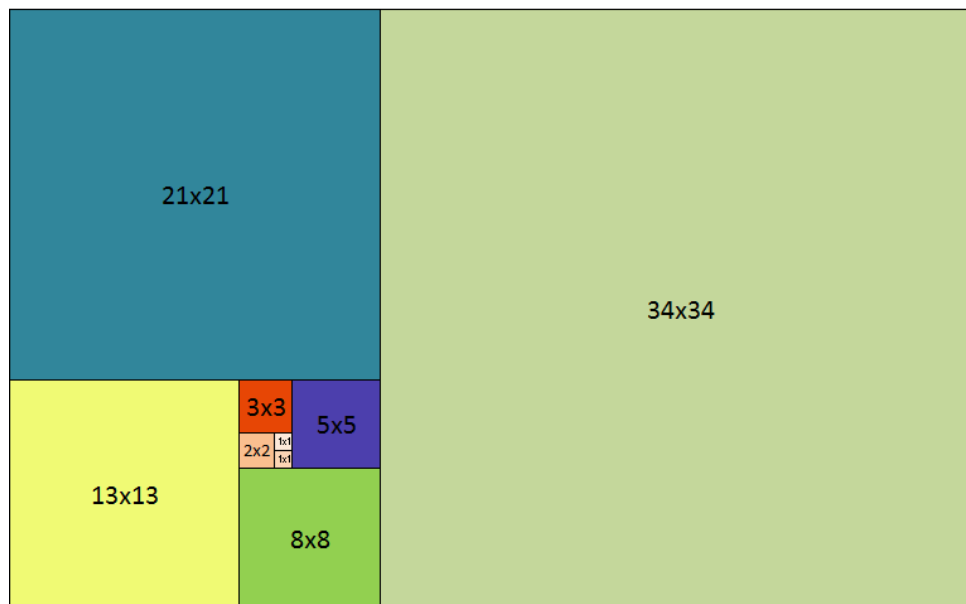


Figura 6.4: Retângulo Áureo - Fonte: Microsoft Excel

Ao observarmos o desenho, qualquer momento em que pare a construção tem sempre um retângulo. O quadrado seguinte é sempre determinado pelo atual retângulo. Se repararmos no retângulo temos que:  $1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 + 13^2 + 21^2 + 34^2 = 34 \cdot 55$

Começando pelo primeiro retângulo, temos:

$$1^2 + 1^2 = 1 \cdot 2$$

$$1^2 + 1^2 + 2^2 = 2 \cdot 3$$

$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 3 \cdot 5$$

$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 5 \cdot 8$$

$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 8 \cdot 13$$

$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 13 \cdot 21$$

$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 = 21 \cdot 34$$

Pode-se então deduzir:  $1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$ , com  $n \gg 1$ . Demonstrando pelo Retângulo Áureo a Propriedade da Soma dos quadrados dos números de Fibonacci.

### 6.3.2 A espiral Áurea

A espiral Áurea, formada a partir do retângulo Áureo, é a curva formada pelos infinitos arcos de  $90^\circ$  inscritos em cada um dos quadrados e ligados entre si. Os centros desses arcos são os vértices dos quadrados. A figura abaixo ilustra a espiral Áurea.

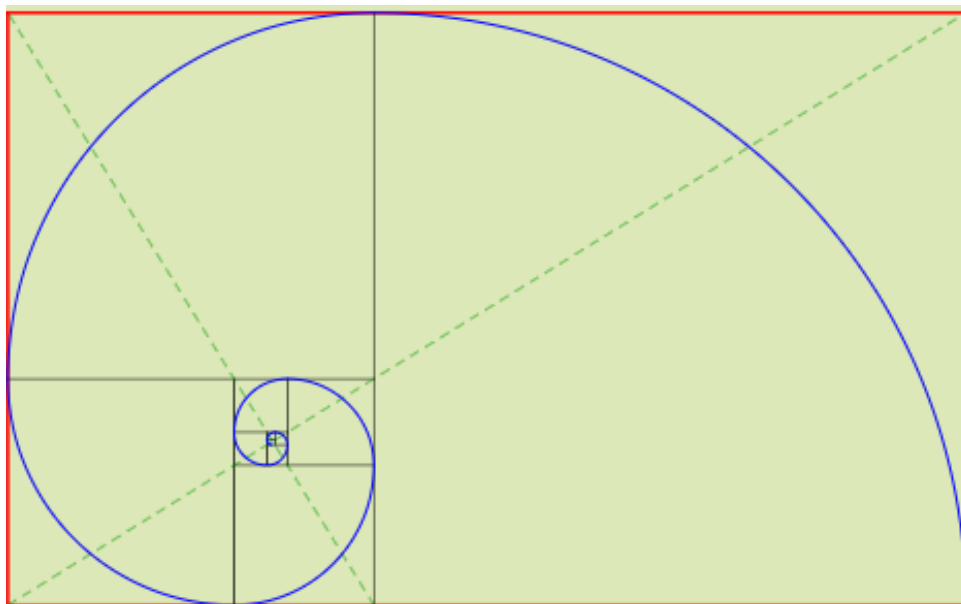


Figura 6.5: Espiral Áurea - Fonte: <http://www.dinamica.com.br/2014/05/espiral-aurea-de-fibonacci.html>, em 07/2017

# Capítulo 7

## O Triângulo de Pascal x Sequência de Fibonacci em sala de aula

### 7.1 Metodologia

A escolha do tema foi devido a pouca abordagem dada em sala de aula, principalmente nas Escolas Públicas do Estado de São Paulo, fato confirmado analisando o Currículo Oficial, onde o Triângulo de Pascal é abordado em meia página na 2ª série do Ensino Médio e a Sequência de Fibonacci nem é lembrada. Nos capítulos anteriores tratamos de sua história, construção e desenvolvimento de propriedades, a partir daqui vamos elencar dicas para sua utilização em sala. Vale ressaltar que são conteúdos muito ricos e graças aos padrões do Triângulo de Pascal, sua diversidade e as aplicações cotidianas da Sequência de Fibonacci, a atenção dos alunos já está garantida, as estruturas são simples e não há necessidade das demonstrações das propriedades, pois falta também conhecimentos prévios dos alunos para tal feito.

## 7.2 Aplicações do Triângulo de Pascal

### 7.2.1 Aplicações - Encontrando os coeficientes das linhas

Essa propriedade é utilizada quando queremos encontrar os elementos de uma linha sem que conheçamos a linhas anteriores e sem a utilização dos Números Binomiais para o cálculo.

**Exemplo 7.2.1.** *Encontrar a linha 13 do Triângulo de Pascal (lembrando que não utilizaremos os Números binomiais, assim ficaria fácil, pois seria só calcular  $\binom{13}{0}$ ,  $\binom{13}{1}$ ,  $\binom{13}{2}$ ,  $\binom{13}{3}$ ,  $\binom{13}{4}$ ,  $\binom{13}{5}$ ,  $\binom{13}{6}$ ,  $\binom{13}{7}$  e os demais são complementares.*

*Resolução:*

**I :** *Sabemos que a linha 13 terá  $n + 1$  elementos, ou seja,  $13 + 1 = 14$  elementos;*

**II :** *O primeiro e o último elemento são iguais a  $1 = C_n^0$ ;*

**III :** *O 2º elemento é igual a  $n$ , aqui tomado como  $13 = C_n^1$ ;*

**IV :** *Como os elementos equidistantes são iguais então: 2º e o 13º são iguais, assim como: 3º e 12º, 4º e 11º, 5º e 10º, 6º e 9º, 7º e 8º também são complementares.*

*Vamos calculá-los:*

**3º elemento :** *É da forma  $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ , que é a 3ª diagonal, calculando temos  $\frac{13(13-1)}{2} = 78$*

**4º elemento :** *É da forma  $C_n^3 = \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{n-2}{3}$ , que é a 4ª diagonal, calculando temos  $\frac{13(13-1)}{2} \cdot \frac{13-2}{3} = 286$*

**5º elemento :** *Seguindo o mesmo raciocínio, vamos determinar os demais elementos  $C_n^4 = \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n-3}{4} = 715$*

**6º elemento :**  $C_n^5 = \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n-3}{4} \cdot \frac{n-4}{5} = 1287$

**7º elemento :**  $C_n^6 = \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n-3}{4} \cdot \frac{n-4}{5} \cdot \frac{n-5}{6} = 1716$



**Demais elementos que são complementares** : 1716, 1287, 715, 286, 78, 13, 1

*Assim a Linha 13 pedida possui os elementos:* 1, 13, 78, 286, 715, 1287, 1716, 1716, 1287, 715, 276, 78, 13, 1.

## 7.2.2 Aplicações - Binômio de Newton

O conhecimento sobre o Triângulo Aritmético é um pré-requisito para o docente que trabalhará em suas aulas Binômio de Newton, por isso não é justificável a tão pouca atenção a este tema no Currículo Oficial do Estado de São Paulo, como já citado. Há uma relação forte entre a construção do Triângulo de Pascal e os coeficientes binomiais no desenvolvimento do Binômio de Newton. Essa relação entre os temas desperta interesse e curiosidade nos alunos, promovendo um ambiente propício para a aprendizagem, soma-se isso ao próprio Triângulo Aritmético apresentar algumas propriedades, por si mesmas, muito interessantes. Tais propriedades vistas detalhadamente anteriormente.

Pelos produtos notáveis, sabemos que  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ .

Se quisermos calcular  $(a + b)^3$ , podemos escrever:  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ .

Se quisermos calcular  $(a + b)^4$ , podemos adotar o mesmo procedimento:  $(a + b)^4 = (a + b)^3(a + b) = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)(a + b) = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ .

De modo análogo, podemos calcular as quintas e sextas potências e, de modo geral, obter o desenvolvimento da potência  $(x + a)^n$  a partir da anterior, ou seja, de  $(x + a)^{n-1}$ . Porém quando o valor de  $n$  é grande, este processo gradativo de cálculo é muito trabalhoso. Existe um método para desenvolver a  $n$ -ésima potência de um binômio, conhecido como Binômio de Newton <sup>1</sup>. Para esse método é necessário saber o que são coeficientes binomiais, algumas de suas propriedades e o Triângulo de Pascal.

**Definição 7.2.2** (O Binômio de Newton). *A fórmula do binômio de Newton é a fórmula que dá o desenvolvimento de  $(x + a)^n$ . Para obtê-la, basta multiplicar*

$$(x + a)(x + a)(x + a) \cdots (x + a)$$

---

<sup>1</sup>Newton, Isaac (1642-1727), matemático e físico inglês

O termo genérico do produto é obtido tomando em  $p$  dos fatores,  $p = 0, 1, 2, \dots, n$ , a segunda parcela e tomando o restante  $n - p$  fatores a primeira parcela. Como isso pode ser feito de  $C_n^p$  modos, o termo genérico do produto é  $C_n^p a^p x^{n-p}$  e

$$\begin{aligned}(x + a)^n &= \sum_{p=0}^n C_n^p a^p x^{n-p} \\ &= C_n^0 a^0 x^n + C_n^1 a^1 x^{n-1} + \dots + C_n^n a^n x^0\end{aligned}$$

### Exemplo de Utilização do Binômio de Newton

**Exemplo 7.2.3.** Determine o coeficiente de  $x^3$  no desenvolvimento de  $(x^4 - \frac{1}{x})^7$ .

*Resolução:*

O termo genérico do desenvolvimento é

$$C_7^p \left(-\frac{1}{x}\right)^p (x^4)^{7-p} = C_7^p (-1)^p x^{28-5p}$$

O termo em  $x^3$  é obtido se  $28 - 5p = 3$ , ou seja, se  $p = 5$ .

O termo procurado é  $C_7^5 (-1)^5 x^3 = -21x^3$ . O coeficiente é  $-21$ .

**Exemplo 7.2.4.**  $(2x + 1)^4 = \binom{4}{0 \cdot (2x)^4 \cdot 1^0} + \binom{4}{1 \cdot (2x)^3 \cdot 1^1} + \binom{4}{2 \cdot (2x)^2 \cdot 1^2} + \binom{4}{3 \cdot (2x)^1 \cdot 1^3} + \binom{4}{4 \cdot (2x)^0 \cdot 1^4}$

Para saber rapidamente quais são os valores dos números binomiais, basta pesquisarmos o Triângulo de Pascal:

	$(C_0)$	$(C_1)$	$(C_2)$	$(C_3)$	$(C_4)$	$(C_5)$	$(C_6)$
$L_0$	1						
$L_1$	1	1					
$L_2$	1	2	1				
$L_3$	1	3	3	1			
$L_4$	1	4	6	4	1		
$L_5$	1	5	10	10	5	1	
$L_6$	1	6	15	20	15	6	1

Analisando a linha  $L_4$ , obtemos a expressão:

$$1 \cdot 16x^4 \cdot 1 + 4 \cdot 8x^3 \cdot 1 + 6 \cdot 4x^2 \cdot 1 + 4 \cdot 2x \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1$$

**Exemplo 7.2.5.** *Determine a soma dos coeficientes numéricos de:*

a)  $(3x^2 + 5x)^3$

*Resolução:*  $(3x^2 + 5x)^3 = \binom{3}{0 \cdot (3x^2)^3 \cdot (5x)^0} + \binom{3}{1 \cdot (3x^2)^2 \cdot (5x)^1} + \binom{3}{2 \cdot (3x^2)^1 \cdot (5x)^2} + \binom{3}{3 \cdot (3x^2)^0 \cdot (5x)^3} (3x^2 + 5x)^3 = \binom{3}{0 \cdot 3^3 \cdot 5^0 \cdot x^6} + \binom{3}{1 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot x^5} + \binom{3}{2 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot x^4} + \binom{3}{3 \cdot 3^0 \cdot 5^3 \cdot x^3}$  *Vamos usar*  $x = 1$

$$(3x^2 + 5x)^3 = 1 \cdot 1 \cdot 127 \cdot 1 + 3 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \cdot 25 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 125 \cdot 1 = 512$$

*Ou podemos simplesmente, colocar*  $x = 1$  *no início do exercício. Assim:*

$$(3x^2 + 5x)^3 = (3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1)^3 = 8^3 = 512$$

Assim, caso seja pedido a soma dos coeficientes numérico do desenvolvimento de um binômio, não é necessário fazer todo o desenvolvimento pelo Binômio de Newton, basta saber a seguinte dica: troque qualquer letra do binômio por 1, calcule o valor que ficará dentro dos parênteses, e pronto.

### 7.2.3 Aplicações - Uso da Planilha do Microsoft Excel para o triângulo de Pascal

Após a apresentação do Triângulo de Pascal e algumas de suas propriedades básicas em sala de aula, é hora de colocar a mão na massa. Levar os alunos no laboratório de Informática da escola e deixá-los analisar os padrões encontrados no triângulo quando coloridos os múltiplos dos números que eles escolherem, é uma ideia bem boa para a contextualização do conteúdo. E também com o erro encontrado na planilha pré elaborada do Microsoft Excel, após a linha de número 46, o professor pode abordar os critérios de divisibilidade para que os próprios alunos pintem os múltiplos dos números escolhidos. Para que o docente não fuja do foco, trabalhe com os múltiplos até o número 11 e depois somente com os números primos, para que possam analisar os padrões semelhantes que esses números apresentam entre si.

Resumo dos critérios de divisibilidade:

**Divisibilidade por 2 :** Um número natural é divisível por 2 quando ele termina em 0, ou 2, ou 4, ou 6, ou 8, ou seja, quando ele é par.

**Divisibilidade por 3** :Um número é divisível por 3 quando a soma dos valores absolutos dos seus algarismos for divisível por 3.

**Divisibilidade por 4** :Um número é divisível por 4 quando termina em 00 ou quando o número formado pelos dois últimos algarismos da direita for divisível por 4.

**Divisibilidade por 5** :Um número natural é divisível por 5 quando ele termina em 0 ou 5.

**Divisibilidade por 6** :Um número é divisível por 6 quando é divisível por 2 e por 3.

**Divisibilidade por 7** :Um número é divisível por 7 se o dobro do último algarismo, subtraído do número sem o último algarismo, resultar um número divisível por 7. Se o número obtido ainda for grande, repete-se o processo até que se possa verificar a divisão por 7.

**Divisibilidade por 8** :Um número é divisível por 8 quando termina em 000, ou quando o número formado pelos três últimos algarismos da direita for divisível por 8.

**Divisibilidade por 9** :Um número é divisível por 9 quando a soma dos valores absolutos dos seus algarismos for divisível por 9.

**Divisibilidade por 10** :Um número natural é divisível por 10 quando ele termina em 0.

**Divisibilidade por 11** :Um número é divisível por 11 quando a diferença entre as somas dos valores absolutos dos algarismos de ordem ímpar e a dos de ordem par é divisível por 11. O algarismo das unidades é de 1ª ordem, o das dezenas de 2ª ordem, o das centenas de 3ª ordem, e assim sucessivamente.

#### 7.2.4 Aplicações - Probabilidade

As aplicações de probabilidade do Triângulo de Pascal são impressionantes. Na verdade não dá para escolher qual conteúdo é mais fascinante. 'O Tratado do triângulo aritmético' de Pascal possuía alguns princípios de probabilidade. Por exemplo os termos da **linha 3**: 1, 3, 3, 1 representam o número de possibilidades no lançamento de três moedas; e esses termos, as ocorrências possíveis:

**uma possibilidade de três caras** (kkk)

**três possibilidades de duas coroas e uma cara** (ckc,cck,kcc)

**três possibilidades de duas caras e uma coroa** (kck, kkc, ckk)

**uma possibilidade de três coroas** (ccc)

Podemos perceber o mesmo feito no lançamento de quatro moedas olhando para a **linha 4**: 1, 4, 6, 4, 1:

**uma possibilidade de quatro caras** (kkkk)

**quatro possibilidades de uma cara e três coroas** (kecc, ckcc, cckc, ccck)

**seis possibilidades de duas caras e duas coroas** (kkcc, kckc, keck, ckkc, ckck, cckk)

**quatro possibilidades de uma coroa e três caras** (ckkk, kckk, kkck, kkkc)

**uma possibilidade de quatro coroas** (cccc)

E assim sucessivamente.

Os cálculos envolvendo probabilidades estão presentes nas situações ligadas à genética em Biologia, abrangendo diversos estudos relacionados às leis de Mendel. Vamos utilizar as noções de probabilidade na determinação do sexo dos filhos de um casal. Suponhamos que um casal deseja ter dois filhos e quer saber qual a probabilidade de ocorrer os seguintes pares: dois meninos ou duas meninas. Para determinarmos a probabilidade do sexo dos filhos, precisamos saber as seguintes condições: O sexo do segundo filho independe do sexo do primeiro, e assim sucessivamente. Vamos olhar para a **linha 2**: 1, 2, 1 do Triângulo de Pascal:

**uma possibilidade de ter duas meninas** (MM)

**duas possibilidades de ter um menino e uma menina** (Mm, mM)

**uma possibilidade de ter dois meninos** (mm)

Se quisermos a probabilidades dos eventos, como neste caso temos quatro opções de acontecimentos, então 25% para cada evento. Para termos duas meninas 25%, para termos dois meninos 25% e para termos uma menina e um menino 50%.

## 7.3 Aplicações da Sequência de Fibonacci e Proporção Áurea

### 7.3.1 Aplicações - Triângulo retângulo e a Sequência de Fibonacci

Encontramos algumas generalizações envolvendo a sequência de Fibonacci e o Teorema de Pitágoras, uma delas é quando tomamos dois elementos consecutivos da sequência de Fibonacci representando o valor das medidas dos catetos de um triângulo retângulo e o valor da hipotenusa desse triângulo será a raiz quadrada de um dos elementos da sequência de Fibonacci, veja a figura abaixo:

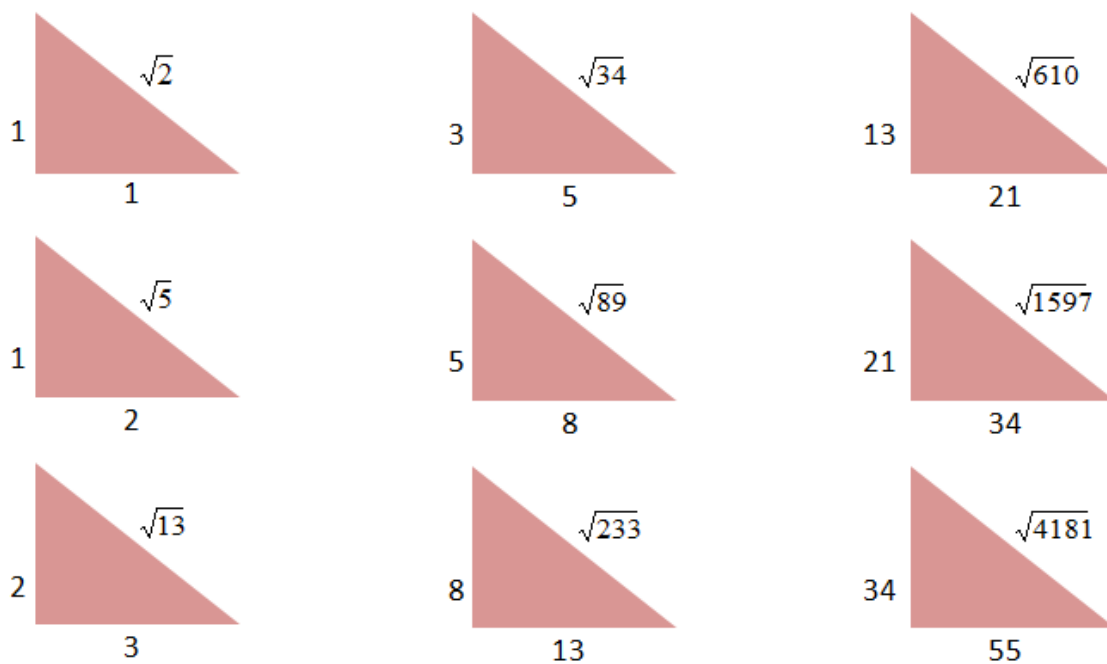


Figura 7.1: Fonte: Microsoft Word

Catetos	Hipotenusa
$a_1 = 1$ e $a_2 = 1$	$a_3 = \sqrt{2}$
$a_2 = 1$ e $a_3 = 2$	$a_5 = \sqrt{5}$
$a_3 = 2$ e $a_4 = 3$	$a_7 = \sqrt{13}$
$a_4 = 3$ e $a_5 = 5$	$a_9 = \sqrt{34}$
$a_5 = 5$ e $a_6 = 8$	$a_{11} = \sqrt{89}$
$a_6 = 8$ e $a_7 = 13$	$a_{13} = \sqrt{233}$
$a_7 = 13$ e $a_8 = 21$	$a_{15} = \sqrt{610}$
$a_8 = 21$ e $a_9 = 34$	$a_{17} = \sqrt{1597}$
$a_9 = 34$ e $a_{10} = 55$	$a_{19} = \sqrt{4181}$
$\vdots$	$\vdots$

Tabela 7.1: Triângulo retângulo e a Sequência de Fibonacci

### 7.3.2 Aplicações - Na natureza

Tudo na natureza nasce e se manifesta através desse princípio matemático: plantas, animais, nós seres humanos, os ventos, as ondas do mar. Tudo está se formando e se organizando através dessa ordem natural de desenvolvimento. Nosso planeta Terra está vibrando e se sustentando através dessa maravilhosa sequência/frequência porque é ela que impulsiona nossa galáxia e nossa galáxia se desenvolve pela força natural e vibratória dessa lei universal. (MMSorge)

Os elementos da natureza nos quais está presente a sequência Fibonacci ou proporção áurea são alvo de pesquisadores, artistas e escritores, pois aparece nas conchas dos caramujos, no comportamento da refração da luz, dos átomos, do crescimento das plantas, nas espirais das galáxias, dos marfins de elefantes, nas ondas no oceano, furacões, dentre muito mais.

### Concha do caramujo

A razão de cada diâmetro da espiral do *Nautilus Pompilius* (Molusco que bombeia gás para dentro de sua concha repleta de câmaras pra poder regular a profundidade de sua flutuação) para a seguinte proporciona o crescimento aproximado a proporção áurea. As conchas crescem de fora para dentro e não modifica seu formato ao longo do tempo.

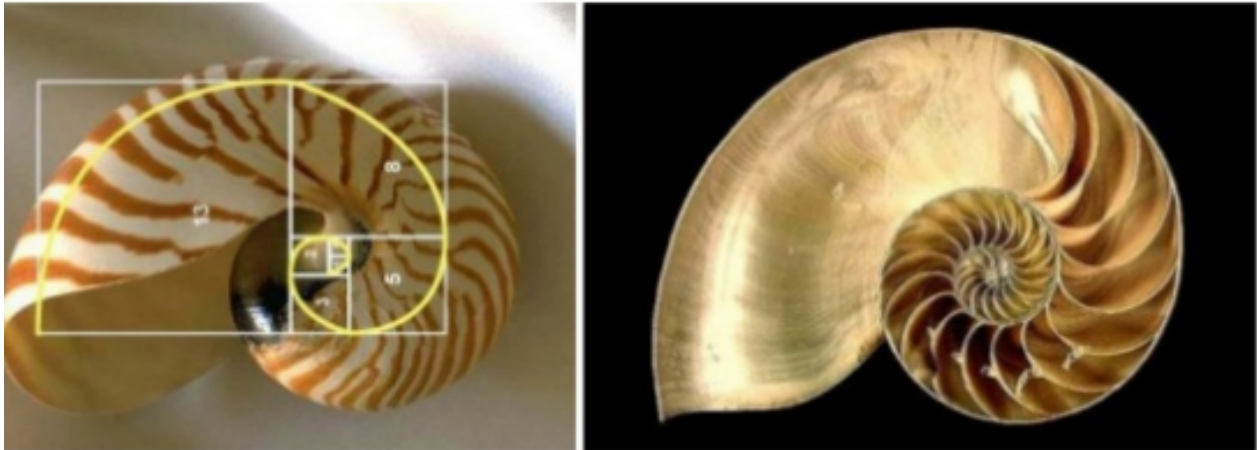


Figura 7.2: Proporção Áurea e a concha do caramujo - <http://www.online-convert.com/result/9ac45982-7cb3-4a9c-9320-c5b47a6bb738>, em 26/07/17

### Camaleão

O rabo do camaleão, quando contraído, é uma das representações mais perfeitas da espiral de Fibonacci.

### Elefante

Se as presas de marfim dos elefantes crescessem sem parar, ao final do processo teriam o formato de uma espiral de Fibonacci. Olha que interessante a foto abaixo e a tromba do elefante contraída, fica muito parecida com o rabo do camaleão citado anteriormente.

### Plantas

Certas plantas mostram os números de Fibonacci no crescimento de seus galhos, é o caso da *Achillea ptarmica*, enquanto outras regulam a posição ou número de suas folhas ou





Figura 7.3: Espiral de Fibonacci e o rabo do camaleão - <http://estheticsdog.com.br/blog/>, em 26/07/17



Figura 7.4: Espiral de Fibonacci e as presas do elefante - <http://estheticsdog.com.br/blog/>, em 26/07/17

pétalas pela mesma sequência. Como exemplificamos no esquema seguinte, 1, 2, 3 e 5 são quatro números consecutivos da sucessão de Fibonacci e no total 8 flores que é o próximo número da sequência.

### **Pinhas, girassóis e ananás**

Se observarmos uma pinha ou um girassol veremos neles a manifestação dessa lei divina da matemática.

As sementes dos girassóis preenchem o miolo dispostas em dois conjuntos de espirais: geralmente, 21 no sentido horário e 34 no anti-horário, já das pinhas são 8 irradiando no

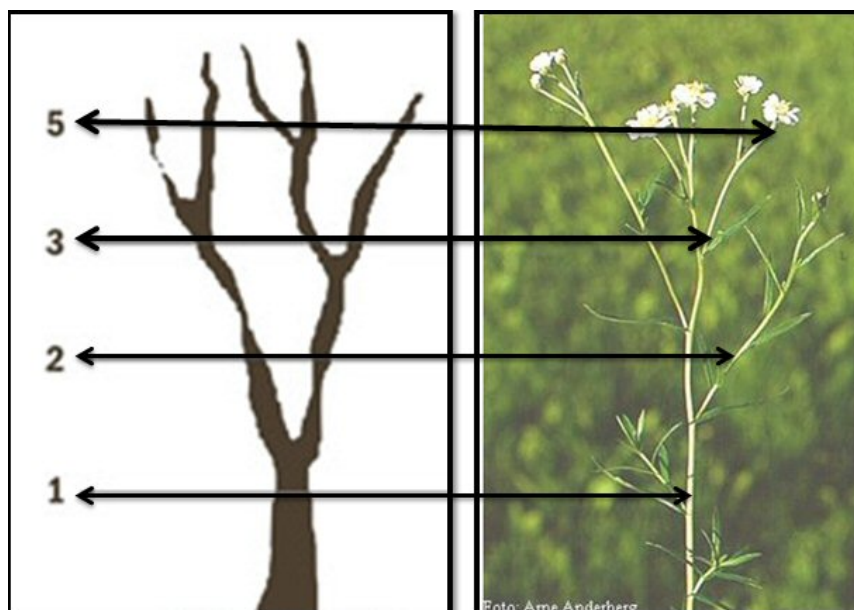


Figura 7.5: *Achillea ptarmica* - <http://http://www.estgv.ipv.pt>, em 26/07/17

sentido horário e 13 no anti-horário os ananás seguem o mesmo padrão das pinhas, sem falhar nenhum.

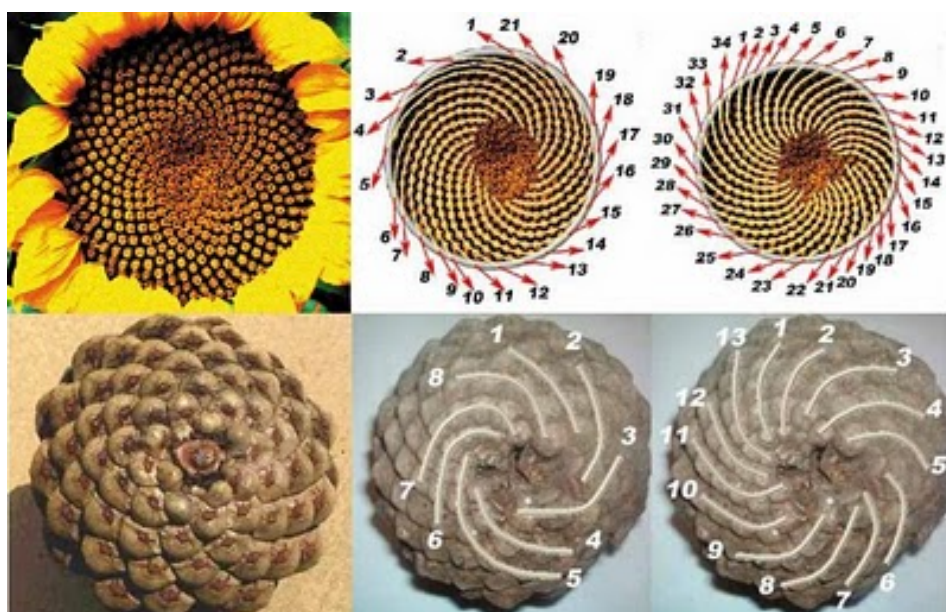


Figura 7.6: Fibonacci presente na pinha - <http://osolinterno.blogspot.com.br/2015/08/fibonacci-e-mmsorge-estas-frequencias.html>, em 27/07/17



Figura 7.7: Espiral de Fibonacci na pinha e no girassol - <http://osolinterno.blogspot.com.br/2015/08/fibonacci-e-mmsorge-estas-frequencias.html>, em 27/07/17

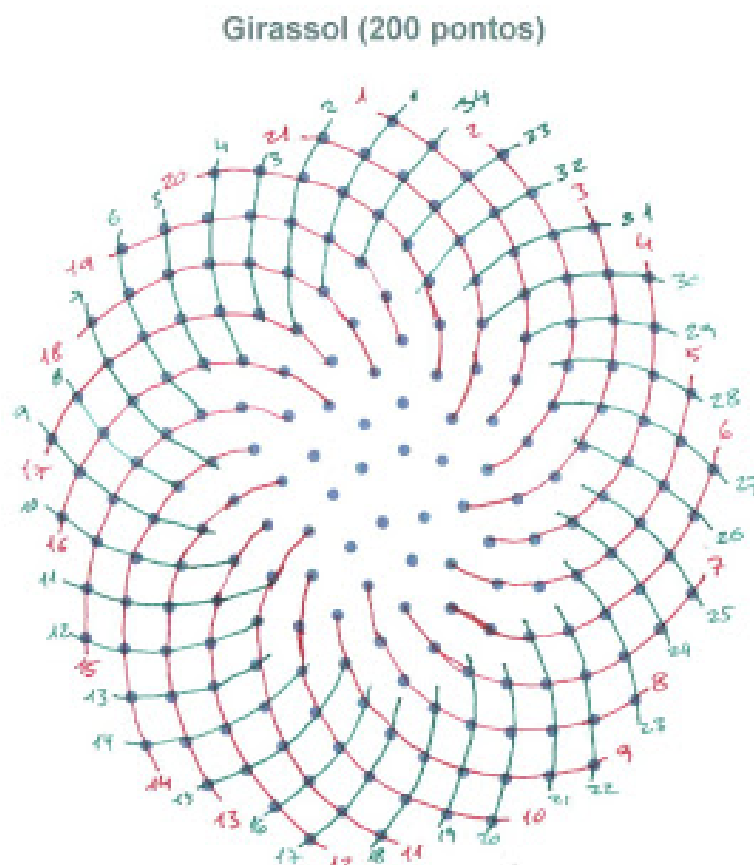


Figura 7.8: Desenho da espiral de Fibonacci no girassol - <http://osolinterno.blogspot.com.br/2015/08/fibonacci-e-mmsorge-estas-frequencias.html>, em 27/07/17

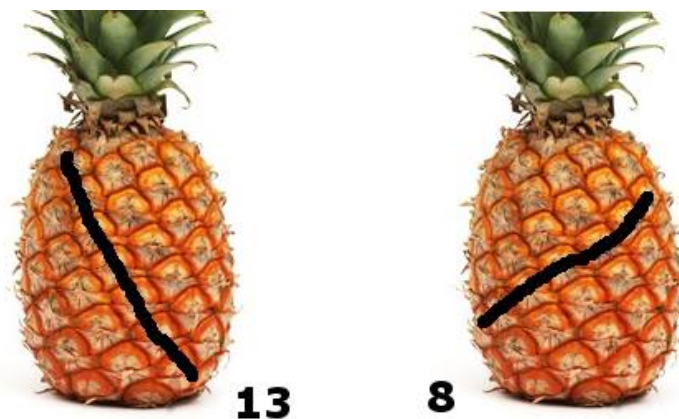


Figura 7.9: Espiral de Fibonacci em abacaxis - <http://cienciapatodos.webnode.pt/news/os-ananases-e-a-matematica/>, em 27/07/17

### As galáxias

Além de encontrarmos a proporção Áurea em muitos lugares na Terra, as galáxias e as estrelas se distribuem em torno de um astro principal numa espiral, obedecendo a proporção de 1,618. Também por isso, o número  $\Phi$  ficou conhecido como a Divina Proporção.



Figura 7.10: Sequência de Fibonacci e a formação das galáxias - <https://flordelizespacoterapeuticosp.blogspot.com.br/2016/02/sequencia-fibonacci.html>, em 26/07/17



### 7.3.3 Aplicações - Na arte

#### As pirâmides de Quéops, Quefren e Miquerinos

Na construção das pirâmides cada bloco é 1,618 vezes maior que o bloco do nível imediatamente acima. Em algumas, as câmaras internas têm comprimento 1,618 vezes maior que sua largura.

E na pirâmide de Quéops, a razão entre a altura de uma face e a metade do lado da base da grande pirâmide é igual ao Número de Ouro. O Papiro de Rhind refere-se a uma "razão sagrada" que se crê ser o número de ouro.



Figura 7.11: Sequência de Fibonacci e as três grandes pirâmides - <http://www.ufobr.net/os-misterios-das-piramides-queops-quefren-e-miquerinos/>, em 26/07/17

**Demonstração:** Vamos demonstrar que a razão entre a altura de uma face e a metade do lado da base da grande pirâmide é igual ao Número de Ouro. Chamemos  $H$  a altura da pirâmide,  $h$  a altura de uma face,  $b$  a base da pirâmide.

Em valores reais temos,  $H = 146,4m$ ,  $b = 230m$ , daí pelo Teorema de Pitágoras:

$$H^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = h^2$$

$$146,4^2 + 115^2 = h^2$$

$$h^2 = 34657,96$$

$$h = 186,1664846314$$

Razão entre a altura de uma face e a metade do lado da base:

$$\frac{h}{\frac{b}{2}} = \frac{186,1664846314}{115} = 1,618 = \Phi$$

## Mona Lisa de Leonardo Da Vinci

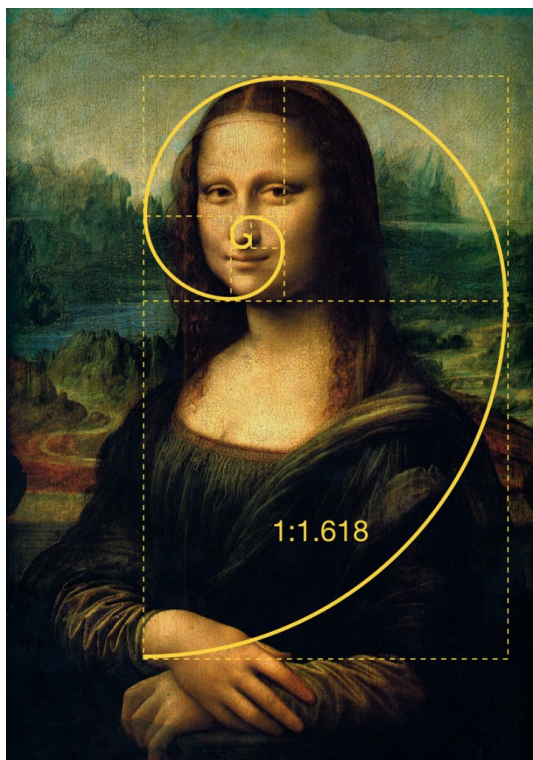


Figura 7.12: Sequência de Fibonacci e a Mona Lisa - <https://danielcapello.wordpress.com/tag/mona-lisa/>, em 26/07/17

### 7.3.4 Aplicações - No corpo humano

#### Mãos

Com exceção do dedão das nossas mãos, em todos os outros dedos as articulações se relacionam na proporção áurea.

#### E muito mais exemplos...

**População de abelhas** A proporção entre abelhas fêmeas com abelhas machos em qualquer colmeia é de 1,618.

Devido ao fato do zangão não possuir pai, apenas mãe, sua árvore genealógica é bastante interessante. Na primeira geração há um membro (o zangão), uma geração antes

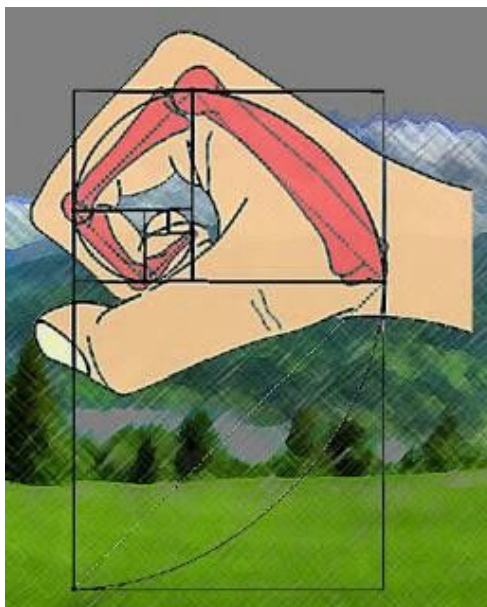


Figura 7.13: Proporção Áurea e os dedos das mãos - <https://flordelizespacoterapeuticosp.blogspot.com.br/2016/02/sequencia-fibonacci.html>, em 26/07/17

há um membro (a mãe), duas gerações atrás há dois membros (a mãe e o pai da mãe), três gerações atrás há três membros (a mãe do avô e o pai e a mãe da avó), quatro gerações atrás há cinco membros, cinco gerações atrás há oito membros. Isto é, o número de membros em cada geração, contando para trás é 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13...

**Cartões de crédito** Os retângulos dos cartões de crédito são retângulos de ouro porque a razão entre o lado maior e o menor é igual a  $\Phi$ .

**Folhas das árvores** A proporção em que se diminuem as folhas de uma árvore a medida que subimos de altura é de 1,618.

**Anatomia humana (dentição)** Vistos frontalmente, os dentes anteriores estão na proporção áurea entre si. Por exemplo, a largura do incisivo central está proporcional à largura do incisivo lateral, assim como o incisivo lateral está proporcional ao canino, e o canino ao primeiro pré-molar.

**Conversão de milhas para quilômetros** O fator de conversão entre milhas e quilômetros é de 1,609; muito próximo do número de ouro, que é aproximadamente: 1,618. Citando um exemplo, para saber aproximadamente a quantos quilômetros 5 milhas correspondem, basta observar o número seguinte na sequência de Fibonacci, no caso,

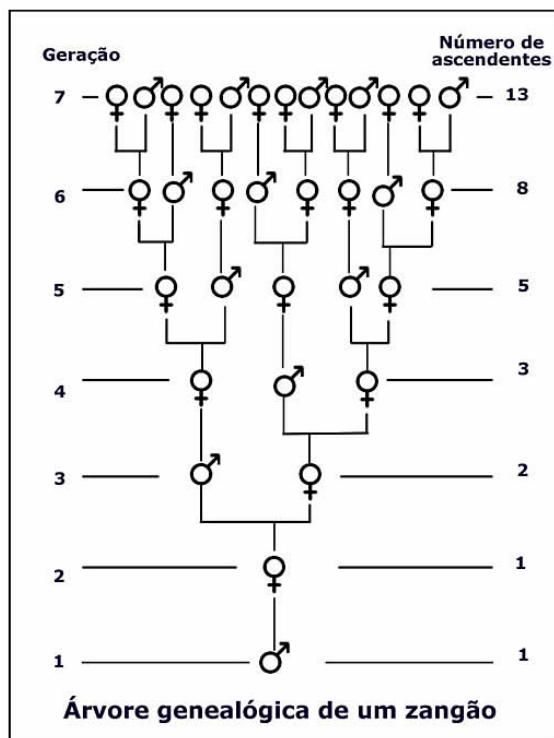


Figura 7.14: Proporção Áurea e os dedos das mãos - <https://www.bpiropo.com.br/fpc20070319.htm>, em 04/08/17

5 milhas correspondem aproximadamente a 8 km, pois  $8/5 = 1,6$ ; ou seja,  $5 \cdot 1,6 = 8$ .

## Aplicações - Uso de medida para o Ensino Fundamental

**Público alvo:** alunos do Ensino Fundamental anos finais.

**Duração:** 2 aulas.

**Materiais:** barbante, fita métrica, régua, lápis, cola, papel...

### Desenvolvimento:

Meçam a distância que vai do alto da cabeça até o chão, depois dividam o resultado pela distância do umbigo até o chão. O que vão encontrar?

Meçam a distância de um ombro até a ponta dos dedos, depois dividam-na pela distância entre o cotovelo até a ponta dos dedos. Resultado?

Meçam a distância dos quadris até o chão, e dividir pelo joelho até o chão.

Meçam a distância do ombro à ponta do dedo e a medida do cotovelo à ponta do dedo e dividirmos esses valores.



Peçam que andem pelos arredores da escola e procure a Espiral de Fibonacci. Na volta registrem o que encontraram.

# Capítulo 8

## Conclusão

Esse projeto foi bem imprevisível, muitos outros temas se encaixam perfeitamente e são transmitidos com a sensação de beleza e estética concomitantemente, daí o fato do tema ser tão surpreendente. Sabe-se da importância do Triângulo de Pascal e o segmento Áureo em tantos lugares impressionantes, muitos destes nem citados aqui e nos leva a perceber a importância desta razão e o motivo pelo qual foi chamada de divina proporção.

Será que tudo isso seria somente coincidências ou será que todas as coisas estão sendo cada vez mais esclarecidas para nós?!

Que continuemos nos deixando fascinar pela Matemática que seja explorada com novos olhares, novos algoritmos de criação, novas geometrias (não euclidianas, fractais...), que seja expandida, apreciada e contada através do fascínio e da beleza, passada de gerações para gerações.

# Referências Bibliográficas

- [1] HEFEZ, ABRAMO. Elementos da Aritmética. *Editora SBM*, 2ª edição. Rio de Janeiro, 2011. Disponível em: <https://pt.slideshare.net/castelobrancoj/elementos-de-aritmtica-abramo-hefezi>
- [2] BARBOSA, RUY MADSEN. Descobrimo a geometria factal para a sala de aula. *Autêntica Editora*, 3º edição. São Paulo, 2007.
- [3] BOYER, CARL B. História da matemática. *Editora Blucher*, 3º edição, p. 140, 141, 174 , 175 , 249-251, 275, 276. São Paulo, 1996.
- [4] LIMA, ELON LAGES, CARVALHO, PAULO CESAR P., WAGNER, EDUARDO, MORGADO, AUGUSTO C. A Matemática do Ensino Médio. *Editora SBM*, v. 2. 6º edição, p 131-136. Rio de Janeiro, 2006.
- [5] EVES, HOWARD. Introdução à história da matemática. *Editora UNICAMP*, 1º reimpressão, p. 250, 292-293. Campinas, 2011.
- [6] HAZZAN, SAMUEL. Fundamentos de Matemática Elementar - combinatória e probabilidade. *Atual Editora*, v. 5. 7º edição, p 58-84. São Paulo, 2004.
- [7] LIVIO, MARIO. História de Fi, um número surpreendente. *Record Editora*. Rio de Janeiro, Edição 2006.
- [8] ALMEIDA, EDJANE G. DOS S. Propriedades e Generalizações dos números de Fibonacci. *PROFMAT*, João Pessoa, 2014.
- [9] QUEIROZ, ROSANIA M. Razão Áurea. *IES*. Londrina, 2007.

- [10] FERREIRA, ROGÉRIO. A. Sequência de Fibonacci. *UNIFIEO*. Osasco, 2007.
- [11] Sequência de Fibonacci. *Universidade Estadual de Campinas*. Campinas, 2013.
- [12] DEPARTMENT OF MATHEMATICS - NANJING UNIVERSITY Fibonacci numbers and Fermat's last theorem. Produced by Zhi-Hong Sun and Zhi-Wei Sun. Disponível em: <http://matwbn.icm.edu.pl/ksiazki/aa/aa60/aa6046.pdf>, Acesso em 09 de agosto de 2017.
- [13] SAO JOSE STATE UNIVERSITY AND SOUTH DAKOTA STATE UNIVERSITY A problem of fermat and the Fibonacci Sequence. Produced by V.E.HOGGATTJR. and G.E. BERGUIV. Disponível em: <http://www.fq.math.ca/Scanned/15-4/hoggatt1.pdf> ; Acesso em 09 de agosto de 2017.
- [14] <https://netnature.wordpress.com/2013/11/25/sequencia-fibonacci-e-a-matemagica-inteligente/>, acessado em 30/07/2017.
- [15] <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/alegria/fibonacci/seqfib1.htm>, acessado em 30/07/2017.
- [16] <http://oitavoano2011-poliana.blogspot.com.br/2011/09/triangulo-aritmetico.html>, acessado em 30/07/2017.
- [17] <https://pt.slideshare.net/MauricioMalletDuprat/proporcao-urea>, acessado em 30/07/2017.
- [18] <http://blog.wesleycota.com/fibonacci-parte-2-proporcao-aurea/>, acessado em 30/07/2017.
- [19] <http://www.uff.br/cdme/pascal/pascal-html/pascal-pow-11-br.html>, acessado em 30/07/2017.
- [20] Livro de Pascal baixado disponível em: <https://www.repository.cam.ac.uk/handle/1810/244353>, acessado em 30/07/2017.
- [21] <http://www.planetainvertebrados.com.br>, acessado em 26/07/17.

- [22] <https://flordelizespacoterapeuticosp.blogspot.com.br/2016/02/sequencia-fibonacci.html>, acessado em 26/07/17.