unesp

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Interrelações entre Matemática e Música

Pedro Valim Sampaio

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO

Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Interrelações entre Matemática e Música

Pedro Valim Sampaio

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, mestrado profissional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de Rio Claro.

Orientadora

Profa. Dra. Elíris Cristina Rizziolli

2017

510 Sampaio, Pedro Valim
S192i Interrelações entre matemática e música / Pedro Valim Sampaio. - Rio Claro, 2017
163 f. : il., figs., tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientadora: Elíris Cristina Rizziolli

1. Matemática. 2. Música. 3. Funções. 4. Aritmética modular. 5. Séries de Fourier. I. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP - Adriana Ap. Puerta Buzzá / CRB 8/7987

TERMO DE APROVAÇÃO

Pedro Valim Sampaio

Interrelações entre Matemática e Música

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Matemática, mestrado profissional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Elíris Cristina Rizziolli
Orientadora

Prof. Dr. Pedro Luiz Aparecido Malagutti
Departamento de Matemática – CCET-UFSCar

Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti
Departamento de Matemática – IGCE-UNESP

Rio Claro, 18 de dezembro de 2017

Dedico esta dissertação a meu sobrinho Samael Sampaio Martins.

Agradecimentos

Ao meu pai João Carlos Vieira Sampaio e à minha mãe Elsa Machado Valim Sampaio.

À minha orientadora Profa. Dra. Elíris Cristina Rizziolli, por toda atenção, encorajamento, apoio irrestrito em horas difíceis, orientação construtiva e, sobretudo, amizade.

À Profa. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi, e também ao Prof. Dr. João Peres Vieira, por apoio recebido em horas difíceis e amizade de longa data.

Aos professores Prof. Dr. João Peres Vieira e à Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti, por sugestões construtivas a esta dissertação.

À minha irmã Joana Valim Sampaio, e ao meu sobrinho Samael Sampaio Martins, por fazerem parte de minha vida.

Sem estas pessoas meu mundo não faria sentido, pois me ajudaram muito em minha recuperação.

Que ninguém hesite em se dedicar à filosofia enquanto jovem, nem se canse de fazê-lo depois de velho, porque ninguém é demasiado jovem ou demasiado velho para alcançar a saúde do espírito.

Epicuro

Resumo

Esta dissertação explora fundamentos comuns de dois temas, Música e Matemática, que são desenvolvidos lado a lado. Noções musicais e matemáticas são reunidas, como escalas e aritmética modular, intervalos e logaritmos, música de doze tons e aritmética modular, timbre e análise de Fourier. Quando possível, as discussões de noções musicais e matemáticas estão diretamente interligadas. Ocasionalmente o texto permanece por um tempo sobre um assunto e não sobre o outro, mas finalmente a conexão é estabelecida, tornando este um tratamento integrador dos dois assuntos. É uma tradução matematicamente comentada de uma grande parte de *Mathematics and Music* de David Wright.

Palavras-chave: Matemática, Música, Funções, Aritmética modular, Séries de Fourier.

Abstract

This dissertation explores the common foundations of the two subjects, Music and Mathematics, which are developed side by side. Musical and mathematical notions are brought together, such as scales and modular arithmetic, intervals and logarithms, twelve tone music and modular arithmetic, timbre and Fourier analysis. When possible, discussions of musical and mathematical notions are directly interwoven. Occasionally the text stays for a while on one subject and not the other, but eventually the connection is established, making this an integrative treatment of the two subjects. It is a mathematically commented translation (to portuguese) of a major part of David Wright's *Mathematics and Music*.

Keywords: Mathematics, Music, Functions, Modular arithmetic, Fourier series.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

1 Introdução

Esta monografia tem como objetivo explorar interrelações entre a Matemática, provavelmente a mais abstrata das ciências, e a Música, provavelmente a mais abstrata das artes. Ao longo do trabalho, as duas áreas serão discutidas lado a lado, com linguagens entremeadas e unificadas.

Matemática e música são, desde há muito tempo, interesses comuns do mestrando autor desta dissertação. Enquanto a matemática tenta estabelecer verdades conceituais e lógicas e aprecia a beleza intrínseca de ambas, a música evoca humor e emoção por meio de áudio de tons e ritmos sem recorrer a meios circunstanciais de provocar tais reações humanas inatas.

Intuitivamente sabemos que existe uma conexão entre matemática e música. Se nada soubermos a respeito disso, sabemos ao menos que ambas envolvem conhecimento de contagem. Na dissertação são apresentadas outras interligações entre noções musicais e matemáticas, tais como escalas e aritmética modular, identificação de oitavas e relações de equivalência, intervalos musicais e logaritmos, temperamentos iguais e expoentes, sobretons e inteiros, timbre e séries de Fourier. Quando possível, as discussões sobre noções musicais e matemáticas são diretamente entrelaçadas. Ocasionalmente, o desenvolvimento do texto trata por um tempo de um assunto e não do outro, mas o alvo principal é sempre estabelecer uma ligação entre música e matemática pelos conceitos apresentados.

O texto que apresentamos é em sua maior parte uma tradução de *Mathematics and Music*, de David Wright, nossa referência principal ([1]). O texto de Wright revê conceitos básicos de matemática e música à medida em que se fazem necessários para a compreensão dos temas tratados.

À medida que o assunto se desenvolve, a matemática recapitulada salta da matemática do ensino médio à matemática dos primeiros anos na universidade, incluindo conceitos de sistemas algébricos abstratos, como anéis, o anel dos inteiros módulo m e elementos da teoria dos grupos. David Wright, em sua obra única, trata de fazer o leitor entender conceitos de música, assumindo que o leitor tenha familiaridade com pautas musicais, claves padrões e armaduras de clave. No entanto, os conceitos musicais, apresentados por definições bem formalizadas, não requerem formação em teoria musical, mas isto certamente seria valioso auxiliar para um leitor do trabalho.

Enquanto na parte sobre Música o autor tratou de entender (e traduzir adequadamente) os conceitos musicais da referência principal, na parte que diz respeito à Matemática, o autor tratou de elaborar aprimoramentos para maior clareza na formulação dos conceitos e melhor construção de justificativas para os fatos apresentados.

No que segue, apresentamos um pequeno sumário explicativo sobre os conteúdos de cada capítulo apresentado.

– Conceitos básicos: conjuntos, relações de equivalência, funções e gráficos, números inteiros, números racionais, números reais, altura sonora, claves, notas, intervalos musicais, escalas e armações de clave;

– Estrutura horizontal: valores das notas e fórmulas de compasso;

– Harmonia e Numerologia relacionada: acordes, harmonia convencional, numerologia da identificação de acordes;

– Razão e intervalos musicais: intervalos musicais explicados como razões matemáticas, intervalos de teclado padrão são introduzidos nesta linguagem;

– Logaritmos e intervalos musicais: fundamentos matemáticos para a medição aditiva de intervalos musicais, relacionando isso com logaritmos e exponenciais;

– Escalas cromáticas: temperamentos iguais (padrão e não padrão), e breve introdução à música dodecafônica.

– Identificação de oitavas: fundamentos matemáticos da aritmética modular e sua relevância à música, com resumo básico de álgebra, desenvolvido a partir de primeiros princípios;

– Propriedades de inteiros: álgebra abstrata, derivando propriedades de inteiros, tais como a fatoração única e a função *Fi de Euler*, bases de certos fenômenos musicais.

– Inteiros como intervalos: interpretação de inteiros como intervalos musicais e aproximações de tais intervalos no teclado.

– Timbre e funções periódicas: relação entre timbre e harmonia, dando uma breve e intuitiva introdução à continuidade, funções periódicas e análise harmônica (ou análise de Fourier).

2 Conceitos Básicos em Matemática e Música

Neste capítulo coletamos alguns conceitos básicos de matemática e de música que serão utilizados ao longo do trabalho.

2.1 Conjuntos e números

Nesta monografia, assumiremos familiaridade com as notações básicas da teoria de conjuntos, tais quais como os conceitos de elemento em um conjunto, subconjunto de um conjunto, união e intersecção de conjuntos, e de função $f\colon A \to B$, sendo A e B dois conjuntos dados. Assumiremos também familiaridade com os conceitos de função injetora ou 1-1 (para as quais $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$), sobrejetora (para as quais $f(A) = \{f(x) \in B \mid x \in A\} = B$) e bijetora (injetora e sobrejetora).

Seguindo o padrão convencional denotaremos por $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais, por $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais e por $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros. Estes conjuntos possuem uma relação de ordem "$<$" habitual, e então assumimos familiaridade com os símbolos: $<$, $\leq$, $>$, $\geq$ e com propriedades básicas tais como:

Se $a, b, c \in \mathbb{R}$ *com* $a < b$ *e* $c > 0$*, então* $ac < bc$;

se $a, b, c \in \mathbb{R}$ *com* $a < b$ *e* $c < 0$ *então* $ac > bc$.

Denotaremos por $\mathbb{R}^+$ o conjunto dos números reais positivos, por $\mathbb{Q}^+$ o conjunto dos racionais positivos, e por $\mathbb{Z}^+$ o conjunto dos inteiros positivos:

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}, \quad \mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}, \quad \mathbb{Z}^+ = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\}$$

Assumiremos que o conjunto $\mathbb{Z}^+$ é o conjunto dos números naturais, representado por $\mathbb{N}$.

Assim, em nosso contexto, 1 é o primeiro número natural.

2.2 Algoritmo da divisão em $\mathbb{Z}$ e boa ordem em $\mathbb{Z}^+$

Dados $m, n \in \mathbb{Z}$, dizemos que "m divide n" e escrevemos $m \mid n$, se existir $q \in \mathbb{Z}$ tal que $n = qm$.

Da aritmética dos inteiros temos que para quaisquer inteiros positivos m, n, podemos dividir n por m e obter um quociente q e um resto r com a propriedade $n = m \cdot q + r$ e $0 \leq r < m$. Por exemplo, no caso em que $n = 123$ e $m = 9$ temos $123 = 13 \cdot 9 + 6$, daí $q = 13$ e $r = 6$.

Em teoria dos números, o princípio anterior pode ser generalizado para o caso em que n é um inteiro qualquer pelo teorema seguinte.

Algoritmo da Divisão. *Dados $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, existem $q, r \in \mathbb{Z}$ tais que $n = qm + r$ e $0 \leq r < |m|$.*

Ocasionalmente apelaremos para um dos axiomas da aritmética dos inteiros chamado de *Princípio da Boa Ordem*, o qual enuncia:

Princípio da Boa Ordem. *Qualquer subconjunto não vazio de $\mathbb{Z}^+$ possui um primeiro ou menor elemento.*

Tal princípio aparenta ser evidente, mas não pode ser demonstrado se não assumirmos uma axiomática adequada, e por isso nos o tomaremos como um axioma.

2.3 Intervalos de números reais

Consideraremos a notação usual para os intervalos em $\mathbb{R}$, que são subconjuntos de $\mathbb{R}$ definidos como: para $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$,

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

De maneira análoga escrevemos, $(a, b]$ e $[a, b)$ para os intervalos semi-abertos. Os quatro tipos de intervalos descritos são os intervalos limitados.

Os ilimitados são intervalos da forma

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x\}$$

sendo a um número real. Analogamente, definem-se os intervalos ilimitados $(-\infty, a)$ e $(-\infty, a]$. Por último, temos $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

2.4 Funções e gráficos

Uma função $f\colon A \to \mathbb{R}$, sendo A um subconjunto de $\mathbb{R}$, possui um gráfico, que é o conjunto

$$graf(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \in A,\ y = f(x)\}$$

Usaremos frequentemente a convenção padrão e despojada, encontrada em livros de Cálculo para as engenharias, que expressa a função como definida por uma equação $y = f(x)$, $x \in A$, em que x é denominada variável independente e y é a variável dependente.

Sendo a função f dada por uma expressão $y = f(x)$, x e y variáveis reais, se não fizermos referência ao conjunto A, que é o domínio de f, este será o mais amplo subconjunto de $\mathbb{R}$, cujos elementos x satisfazem $f(x) \in \mathbb{R}$.

Por exemplo, se definirmos f apenas pela equação $f(x) = \sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{3-x}}$ ou pela equação $y = \sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{3-x}}$, fica subentendido que o domínio de f será o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \le x < 3\}$.

Quando a variável independente parametriza o tempo, esta será representada por t, daí a função será escrita como $y = f(t)$.

Um exemplo familiar de função é dado por $y = mx + b$, em que $m, b \in \mathbb{R}$, cujo gráfico é uma reta de inclinação m e que intercepta o eixo y em uma altura b, isto é, no ponto $(0, b)$ (figura 2.1). Outro exemplo é a função $y = x^2$, cujo gráfico é uma parábola com vértice em $(0, 0)$ e concavidade voltada "para cima" (figura 2.2)[1]. Duas funções que serão especialmente relevantes para nosso estudo são as funções trigonométricas definidas por $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$ (figuras 2.3 e 2.4).

[1] As figuras desta dissertação, ilustrando conceitos matemáticos, foram elaboradas pelo autor, utilizando o editor Mayura Draw.

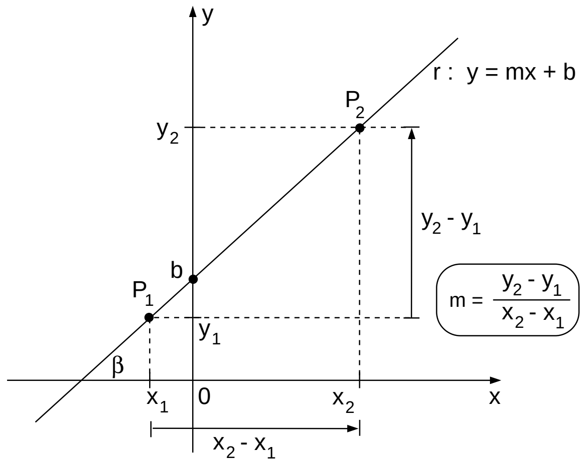


Figura 2.1: Gráfico de $y = mx + b$

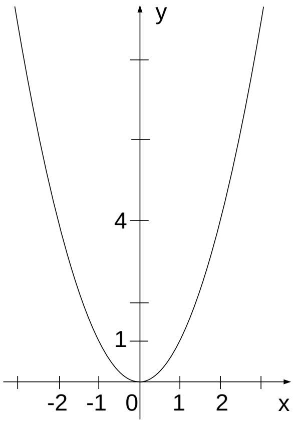


Figura 2.2: Gráfico de $y = x^2$

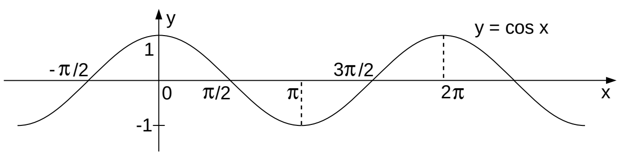


Figura 2.3: Gráfico de $y = \cos x$

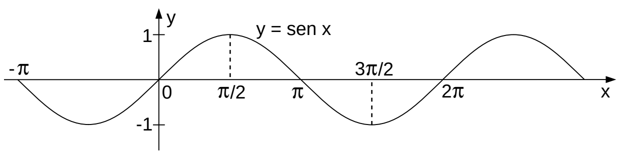


Figura 2.4: Gráfico de $y = \operatorname{sen} x$

2.5 Transformações de gráficos

Revisamos agora alguns procedimentos conhecidos como transformações geométricas, as quais movem ou deformam um gráfico de certos modos. Seja $c \in \mathbb{R}$.

1. Translado vertical: O gráfico de $y = f(x) + c$ é obtido por uma translação vertical para cima do gráfico de $y = f(x)$ através de uma distância c, se $c > 0$. Se $c < 0$, a translação é para baixo através de uma distância $|c|$.

2. Translado horizontal: O gráfico de $y = f(x-c)$ é obtido por uma translação horizontal do gráfico de $y = f(x)$, para a direita numa distância c se $c > 0$, e para a esquerda numa distância $|c|$ se $c < 0$.

3. Esticamento vertical: O gráfico de $y = cf(x)$ é obtido esticando-se verticalmente o gráfico $y = f(x)$ por um fator c, se $c > 0$. Ou o gráfico de $y = f(x)$ é encolhido (ou comprimido) se $0 < c < 1$. E se $c < 0$, o gráfico de $y = f(x)$ é esticado verticalmente pelo fator $|c|$ e é rebatido (ou refletido) em relação ao eixo x.

4. Esticamento horizontal: O gráfico de $y = f(x/c)$ é obtido pelo esticamento horizontal do gráfico de $y = f(x)$ por um fator c, sendo $c > 0$. O gráfico de $y = f(x)$ é encolhido (ou comprimido) horizontalmente se $c > 1$. Se $c < 0$, o gráfico de $y = f(x)$ é esticado horizontalmente pelo fator $|c|$ e é refletido em relação ao eixo y.

Nas figuras 2.5, 2.6 e 2.7 exemplificamos gráficos de $y = x^2$ e seus transladados $y = (x-2)^2$ e $y = (x-2)^2 + 1$.

Nas figuras 2.8, 2.9 e 2.10 exemplificamos gráficos de $y = \cos x$ e de seus "esticados" verticais $y = 2\cos x$ e $y = \frac{1}{2}\cos x$.

Nas figuras 2.12 e 2.13 exemplificamos gráficos de "esticados" horizontais do gráfico da função cosseno, $y = \cos 2x$ e $y = \cos(x/2)$.

2.6 Relações de equivalência

Seja S um conjunto, e consideremos $\sim$ como o sinal de relação entre dois elementos de S. Se a relação é verificada entre dois elementos $s, t \in S$, escrevemos $s \sim t$. Por exemplo se S for um conjunto de objetos coloridos, para objetos $s, t \in S$, podemos definir que $s \sim t$

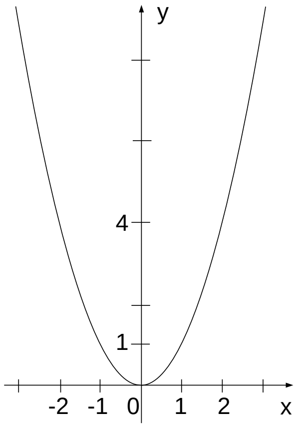


Figura 2.5: $y = x^2$

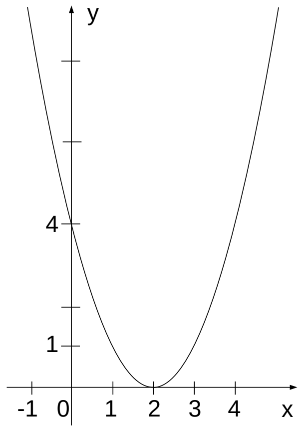


Figura 2.6: $y = (x - 2)^2$

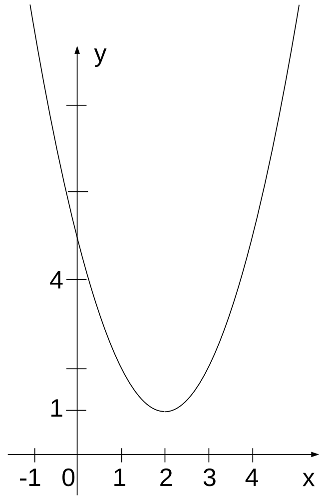


Figura 2.7: $y = (x - 2)^2 + 1$

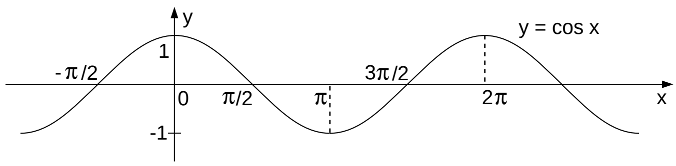


Figura 2.8: $y = \cos x$

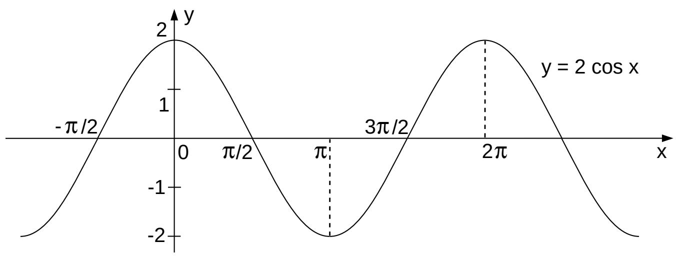


Figura 2.9: $y = 2 \cos x$

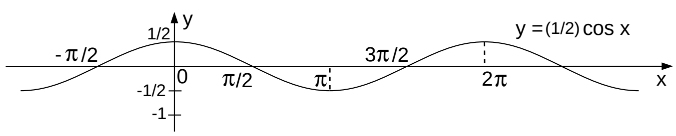


Figura 2.10: $y = \frac{1}{2} \cos x$

se s e t possuem a mesma cor. Na verdade $\sim$ define uma coleção R de pares ordenados de elementos de S, de tal forma que $(s, t) \in R$ se $s \sim t$.

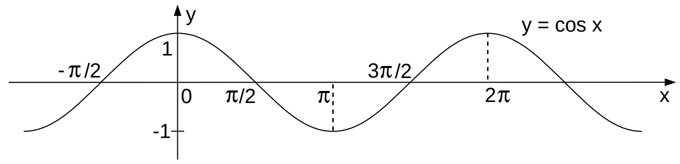


Figura 2.11: $y = \cos x$

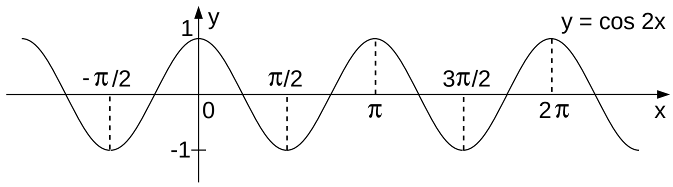


Figura 2.12: $y = \cos 2x$

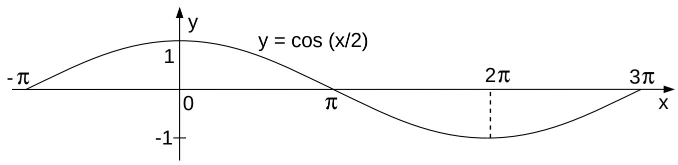


Figura 2.13: $y = \cos(x/2)$

Dizemos que $\sim$ é uma relação de equivalência se as três propriedades a seguir são válidas para todos $s, t, u \in S$:

1. $s \sim s$ ($\sim$ é reflexiva)

2. Se $s \sim t$, então $t \sim s$ ($\sim$ é simétrica)

3. Se $s \sim t$ e $t \sim u$, então $s \sim u$ ($\sim$ é transitiva)

Quando as três afirmações acima são garantidas, definimos a classe de equivalência de $s \in S$ como sendo o conjunto $\overline{s} = \{t \in S \mid t \sim s\}$. As classes de equivalência de uma relação de equivalência $\sim$ formam uma partição de S, significando que S é a reunião disjunta das classes de equivalência da relação $\sim$. Em outras palavras,

Cada classe de equivalência da relação $\sim$ é um conjunto não vazio;

A reunião dessas classes de equivalência é o conjunto $S/\sim$.

2.7 Altura

Um tom musical é o resultado de uma vibração regular transmitida através do ar como onda sonora. A *altura* de um tom é a frequência da vibração.

Frequência é geralmente medida em ciclos por segundo, ou *hertz*, (depois da existência do físico Heinrich Hertz (1857-1894)) e possui abreviatura Hz.

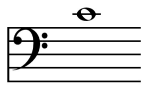
Por exemplo, a afinação padrão coloca a nota A (*lá*) acima do C central (*dó central*) em uma pauta musical a 440 Hz. A nota *lá* possui a seguinte notação na *clave de sol*:

A variação de capacidade auditiva de um ouvido humano vai de 20Hz a 20000Hz. Teoricamente, no entanto, podemos associar cada número real positivo x à frequência x Hz, e daí teremos uma correspondência biunívoca entre o conjunto de alturas e o conjunto $\mathbb{R}^+$.

2.8 Notas musicais

Em se tratando de partitura musical, alturas específicas são chamadas em uma partitura por notas em uma pauta. Assumimos familiaridade com as usuais clave de sol e clave de fá, nomeando as notas nas linhas e no espaço entre linhas da pauta, usando letras que variam de A até G. O arranjo dessas notas em um teclado é ilustrado na Figura 2.14[2].

dó central na clave de sol



dó central na clave de fá

Note a presença das "notas brancas" e "notas pretas" e o padrão dado a justaposição das mesmas.

De maneira abstrata, podemos idealizar um teclado que se estende infinitamente (além da capacidade da audição humana) em ambas as direções, nos dando um conjunto infinito de notas. Este conjunto infinito não representa todas as possíveis alturas, pode-se notar

[2]As pautas musicais desta dissertação, bem como as ilustrações relacionadas a conceitos musicais, tem como fonte Wright [1].

que há tons entre duas notas adjacentes. Iremos nomear as notas que aparecem nas teclas do piano como *notas do teclado*.

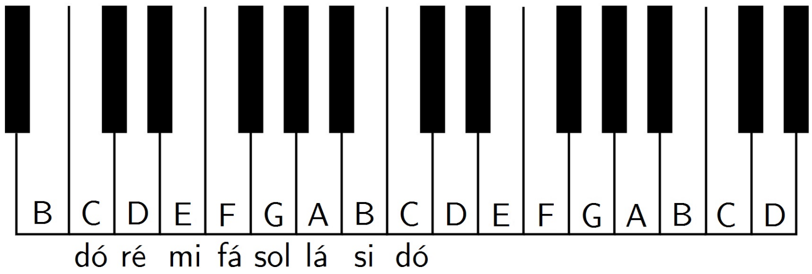


Figura 2.14: Notas do teclado.
Fonte da ilustração: [1].

Vamos precisar de uma maneira concisa para nos referirmos especificamente às *notas do teclado*, daí empregaremos a notação usual: A nota C que aparece quatro oitavas abaixo do C *central* é chamada de C_0. Esta nota está abaixo do alcance do teclado do piano. Para qualquer inteiro n, a nota C que aparece n oitavas acima de C_0 (ou abaixo de C_0 quando n é negativo) é representada por C_n. Portanto o C central é representado por C_4. A nota C logo abaixo do C central é representada por C_3, e a menor C nas *notas do teclado* é C_1. As outras notas serão identificadas pelo inteiro correspondente ao maior C encontrado acima da nota.

As outras notas serão identificadas pelo seguinte procedimento:

Primeiramente descartamos qualquer sinal de bemol ou sustenido da mesma, e aí encontramos o maior C que é menor do que ou igual a esta nota. A nota original leva então o índice desse C. Portanto o $F^\sharp$ (F *sustenido*) abaixo de C_4 é $F^\sharp_3$, enquanto que o acima desta é $F^\sharp_4$. A menor $B^\flat$ (B *bemol*) no conjunto de *notas do teclado* é $B^\flat_0$, e $B^\flat$ no meio da pauta é $B^\flat_4$. Observamos que $B^\sharp_3$ coincide com C_4 e $C^\flat_4$ coincide com B_3.

2.9 Intervalos musicais

O intervalo entre duas notas musicais pode ser tomado informalmente como a "distância" entre as alturas associadas (isto se distingue do uso do termo " intervalo" em Matemática, designando por exemplo um subconjunto $[a, b]$ de $\mathbb{R}$).

O piano é afinado usando *temperamento igual* (o que será discutido ulteriormente), e isto significa que o intervalo entre duas teclas adjacentes (pretas ou brancas) é o mesmo.

Este intervalo é chamado de semitom. O intervalo entre dois semitons é o *passo*, ou *segunda maior*, daí um semitom é *meio-passo*, algumas vezes chamado de *segunda menor*. Uma oitava é 12 semitons. A seguir temos uma lista da nomenclatura de vários intervalos:

- meio-passo, ou segunda menor – 1 semitom
- passo, segunda maior, ou tom inteiro – 2 semitons
- terça menor – 3 semitons
- terça maior – 4 semitons
- quarta, ou quarta perfeita – 5 semitons
- tritom – 6 semitons
- quinta, ou quinta perfeita – 7 semitons
- sexta menor, ou quinta aumentada – 8 semitons
- sexta maior – 9 semitons
- sétima menor, ou sexta aumentada – 10 semitons
- sétima maior – 11 semitons
- oitava – 12 semitons
- nona menor – 13 semitons
- nona – 14 semitons

O significado do termo "intervalo" será feito matematicamente preciso mais adiante, mas por agora o entenderemos em termos de passo, meio-passo, quartas, oitavas, etc. Ulteriormente discutiremos pequenas modificações destes intervalos (introduzindo, por exemplo, *intervalos justos* e *intervalos pitagóricos*) e, assim, de modo a evitar confusão algumas vezes nos referimos aos intervalos entre notas no teclado infinito idealizado chamando-os de *intervalos do teclado* ou *intervalos temperados*. Citando um exemplo, apresentaremos a *terça maior de Pitágoras*, a qual é maior que a terça maior de teclado.

Chamaremos os intervalos de *positivos* ou *negativos*, de acordo com a construção por notas sendo crescente ou decrescente, respectivamente. Algumas vezes os mencionamos usando os termos *crescente* e *decrescente*, ou *positivo* e *negativo* (ou *mais* e *menos*). O intervalo de C_4 até E_3 pode ser descrito como uma sexta menor decrescente, ou como sexta menor negativa.

2.10 Equivalência de oitavas

Notações musicais e terminologias frequentemente tomam formas que identificam notas distantes entre si por oitavas. Neste cenário existem apenas doze notas no piano, e "A" se refere a qualquer nota A, sem distinção, por exemplo, entre A_5 e A_1. Isto nada mais é que uma relação das notas na escala cromática: duas notas estarão relacionadas se o intervalo entre elas é de n oitavas, para algum inteiro n. De maneira trivial, pode-se verificar que as propriedades *reflexiva*, *transitiva* e *simétrica* são satisfeitas; portanto, de fato, essa relação é uma relação de equivalência.

Usaremos o termo *módulo oitava* para este tipo de classe de equivalência; então, por exemplo, $B_2^\flat$ e $B_5^\flat$ são equivalentes módulo oitava. Uma nota que é identificada por uma letra sem índice (sub-índice) pode ser vista como uma classe de equivalência por esta relação de equivalência. Daí $B^\flat$, pode ser vista como classe de equivalência de todas as notas $B_n^\flat$, com $n \in \mathbb{Z}$. Chamaremos então as classes de equivalência desta relação de equivalência de *classes de notas*.

Esta equivalência com identificações de oitavas é, de modo análogo, aplicada aos intervalos: os intervalos de um passo inteiro e uma nona são equivalentes módulo oitava. Cada classe de equivalência tem um único representante que é positivo e estritamente menor que uma oitava. Como intervalos são geralmente medidos a partir de passos, semitons, isto relembra o conceito matemático de aritmética modular, e mais tarde faremos uma conexão precisa.

Na discussão de escalas e tonalidades adotaremos a identificação por oitavas como padrão.

2.11 Acidentes (sustenidos e bemóis)

Notas podem ser alteradas usando sustenidos ou bemóis. O símbolo de sustenido, $\sharp$, colocado antes de uma nota na partitura aumentará sua altura em um semitom, enquanto que o bemol $\flat$ diminuirá a altura em um semitom, e um "natural" $\natural$ cancela o efeito de um sustenido ou bemol. A notação musical também algumas vezes usa o duplo sustenido $\times$, e o duplo-bemol $\flat\flat$, o que altera a nota em dois semitons. Representamos a classe de uma nota alterada escrevendo um sustenido ou um bemol junto à nota, como em $D^\sharp$ ou $A^\flat$. Estes sinais de alteração são chamados de *acidentes*. Note que $F^\sharp$ é a mesma classe que $G^\flat$ e que $C_5^\flat$ é a mesma nota que B_4. Quando duas notas possuem a mesma altura nesse sentido dizemos que são *enarmonicamente equivalentes*[3]. Isto nos dá uma percepção maior para as classes de equivalência em notas.

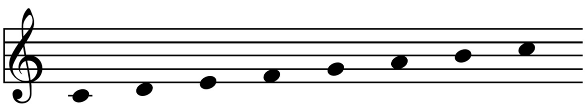
2.12 Escalas

A escala padrão, com base em C, é uma sequência crescente de notas C D E F G A B C. Como estamos usando a equivalência módulo oitava a última nota C é uma redundância já que a escala é determinada pela sequência C D E F G A B. Estas são teclas brancas no teclado. O passo inteiro e os intervalos de meio-passo entre notas sucessivas na escala são dados por:

$$C \xrightarrow{1} D \xrightarrow{1} E \xrightarrow{\frac{1}{2}} F \xrightarrow{1} G \xrightarrow{1} A \xrightarrow{1} B \xrightarrow{\frac{1}{2}} C$$

Esta sequência $1, 1, \frac{1}{2}, 1, 1, 1, \frac{1}{2}$ de passos e meio-passos em intervalos iniciando-se com C é incorporada na notação musical, fazendo C a tonalidade *default*.

Devemos ter consciência de que, com esta convenção, não há nada na notação indicando que a distância de E a F é de meio-passo, e que a distância de F a G é um passo inteiro. A escala acima pode ser representada na clave de sol, começando com C_4 (C central ou dó central), como:

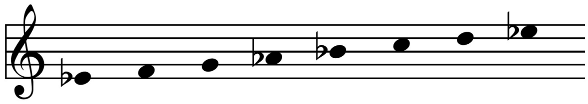


Diremos que duas sequências de alturas são equivalentes se a sequência dos respectivos intervalos é a mesma. Notemos, por exemplo, que a escala contém dois *tetra-acordes* equivalentes (ou seja, quatro sequências de notas limitadas pelo intervalo de uma quarta-perfeita) CDEF e GABC.

[3]Tradução livre de *enharmonically*.

2.13 Armações de claves

Provisoriamente chamaremos qualquer sequência de oito notas consecutivas de *escala padrão* se esta for equivalente à escala de C. Notemos que a sequência E$^\flat$ F G A$^\flat$ B$^\flat$ C D E$^\flat$ é uma escala padrão.



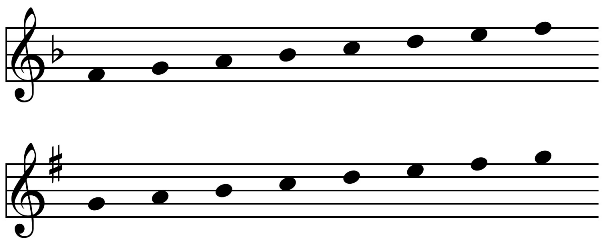
Verifica-se facilmente que a sequência ascendente de qualquer de oito notas consecutivas brancas que fazem uma escala padrão deve ser uma sequência de C a C. Para formar uma escala padrão começando e terminando com uma nota diferente de C precisamos de notas pretas. As escalas F a F e G a G necessitam de apenas uma nota preta. Por exemplo se B for substituída por B$^\flat$, então a escala de F a F, dada por

$$\mathrm{F} \xrightarrow{1} \mathrm{G} \xrightarrow{1} \mathrm{A} \xrightarrow{\frac{1}{2}} \mathrm{B}^\flat \xrightarrow{1} \mathrm{C} \xrightarrow{1} \mathrm{D} \xrightarrow{1} \mathrm{E} \xrightarrow{\frac{1}{2}} \mathrm{F}$$

torna-se equivalente à escala de C a C, portanto é uma *escala padrão*. De modo análogo se trocarmos F por F$^\sharp$, a escala de G a G,

$$\mathrm{G} \xrightarrow{1} \mathrm{A} \xrightarrow{1} \mathrm{B} \xrightarrow{\frac{1}{2}} \mathrm{C} \xrightarrow{1} \mathrm{D} \xrightarrow{1} \mathrm{E} \xrightarrow{1} \mathrm{F}^\sharp \xrightarrow{\frac{1}{2}} \mathrm{G}$$

torna-se uma *escala padrão*. Isto explica as armações de claves para as claves maiores de F e G:



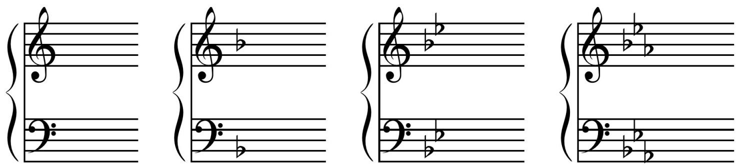
Uma armação da clave apenas "modela" as notas de modo a efetivar a escala padrão no tom desejada.

De modo mais geral, abaixando-se a sétima nota de quaisquer escala padrão induz-se uma nova escala padrão baseada na quarta nota da escala original. Consequentemente substituindo E por E$^\flat$ na escala de F a F produz a escala de B$^\flat$ a B$^\flat$,

$$B^\flat \xrightarrow{1} C \xrightarrow{1} D \xrightarrow{\frac{1}{2}} E^\flat \xrightarrow{1} F \xrightarrow{1} G \xrightarrow{1} A \xrightarrow{\frac{1}{2}} B^\flat$$

Portanto a armação de clave de $B^\flat$ é dada por:

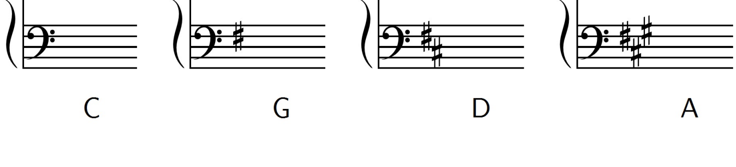
Continuando isto, obtemos uma sequência de teclas C, F, $B^\flat$, $E^\flat$, $A^\flat$, $D^\flat$, $G^\flat$, $C^\flat$. Em teoria, esta sequência continua, mas as armações de clave subsequentes exigem bemóis duplos, e finalmente outros bemóis duplos. Estes são mostrados a seguir, com a colocação adequada de bemóis na clave de Fá e clave de Sol:



C F $B^\flat$ $E^\flat$

$A^\flat$ $D^\flat$ $G^\flat$ $C^\flat$

Notemos que cada tônica sucessiva na notação por tonalidade aparece no intervalo de quarta (5 semitons) acima do anterior. Como estamos identificando notas separadas por oitavas, é também correto afirmar que cada tônica sucessiva aparece em quintas (7 semitons) abaixo da anterior. Da mesma forma, sustenizando a quarta nota de qualquer escala padrão, induz-se uma nova escala padrão, baseada na quinta nota da escala original, levando à sequência de tonalidades C, G, D, A, E, B, $F^\sharp$, $C^\sharp$, mostrada a seguir.



C G D A

E B F$^\sharp$ C$^\sharp$

Observe que as duas sequências de armações de claves, aquelas que utilizam bemóis e aquelas que utilizam sustenidos, se envolvem uma contra a outra, obtendo-se três pares de tons que são enarmonicamente equivalentes: $D^\flat \sim C^\sharp$, $G^\flat \sim F^\sharp$ e $C^\flat \sim B$.

2.14 Notas diatônicas e cromáticas

A escala padrão é chamada de *escala diatônica*, enquanto que a escala que contém todas as notas é chamada de *escala cromática*. Note-se que a escala cromática tem doze notas, módulo oitava, e por outro lado há sete notas da escala diatônica, módulo oitava. Em uma determinada tonalidade, essas notas que se encontram dentro da escala diatônica são chamadas de notas diatônicas. Elas formam um subconjunto do conjunto de notas da escala cromática. Na verdade, uma escala pode ser definida como uma subsequência da sequência de notas da escala cromática.

2.15 Permutações cíclicas

Dada uma sequência finita $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de elementos de um conjunto qualquer, podemos obter uma *permutação cíclica* deste conjunto ordenado escolhendo um inteiro i com $1 \leq i \leq n$, tomando as entradas $x_1, \ldots, x_i$ e colocando-as nesta ordem ao final da sequência, deixando o início com os termos remanescentes, de modo a obter a sequência

$$x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n, x_1, x_2, \ldots, x_i$$

Se organizarmos a sequência $x_1, x_2, \ldots, x_n$ em um relógio com n posições digamos, no sentido horário, com x_1 no topo, e em seguida, rotacionarmos a sequência por i posições no sentido antihorário, esta permutação cíclica será obtida pela leitura dos elementos no sentido horário, a partir do topo. Se escolhermos $i = n$ obteremos a sequência original, de modo que qualquer sequência finita é uma permutação cíclica de si mesma. As permutações cíclicas correspondentes aos números inteiros $i = 1, \ldots, n-1$ são chamadas de permutações cíclicas não triviais de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Por exemplo, considere a sequência de números 7, 4, 1, 7. Suas permutações cíclicas são as sequências 4, 1, 7, 7; 1, 7, 7, 4; 7, 7, 4, 1 e 7, 4, 1, 7, as três primeiras sendo as não-triviais. Note que é possível que uma sequência seja uma permutação cíclica não-trivial de si mesma. Por exemplo, se permutarmos ciclicamente a sequência 3, 5, 3, 3, 5, 3 usando $i = 3$, temos a mesma sequência.

2.16 Modalidade e tonalidade

Fizemos descrição da escala padrão, numa dada tonalidade, como uma sequência de notas: em C é a sequência $CDEFGABC$. Como dito, a última nota é redundante, já que estamos usando equivalência por oitavas, de modo que a escala é dada pela sequência de 7 entradas $CDEFGAB$, e isto determina a sequência de intervalos adjacentes $1, 1, \frac{1}{2}, 1, 1, 1, \frac{1}{2}$ (que ainda tem 7 entradas).

Considere agora uma permutação cíclica da escala padrão. Por exemplo, considere a sequência $EFGABCD$. Notemos que isto também nomeia todas as notas que são as teclas brancas do teclado. Isto dá a sequência de intervalos de $\frac{1}{2}, 1, 1, 1, \frac{1}{2}, 1, 1$, que é diferente da sequência de intervalos da escala padrão. Portanto esta sequência começando com E não é equivalente à escala padrão.

Vê-se que a sequência de intervalos de $1, 1, \frac{1}{2}, 1, 1, 1, \frac{1}{2}$ para a escala padrão não é igual a nenhuma permutação cíclica não-trivial, e, portanto, nenhuma permutação não-trivial da escala padrão é uma escala padrão. Isto é subjacente ao fato de que as sete escalas obtidas permutando-se ciclicamente a escala padrão, para $i = 1, \ldots, 7$, são distintas.

O termo *modo* é usado na música para denotar a escala em que uma composição musical é mais naturalmente acomodada. Com bastante frequência as cadências da peça chegarão na primeira nota da escala, ou *tônica* do modo da composição.

As escalas derivadas da escala padrão, por uma permutação cíclica, são modos que foram usados e nomeados pelos gregos antigos. Estes nomes foram incorretamente identificados pelo teórico musical suíço Heinrich Glarean (1488-1563), no século XVI, ainda assim seu nomes *eclesiásticos* errôneos para os modos é que se tornaram aceitos. Eles são indicados no quadro abaixo, tabela 2.1. A coluna da esquerda indica a escala quando tocada nas notas brancas do teclado; a segunda coluna é o nome dado por Glarean para a escala; as próximas oito colunas nomeiam as notas da escala quando tocadas na forma de C a C.

Tabela 2.1: Modos Musicais

C-C	Jônico	C	D	E	F	G	A	B	C
D-D	Dórico	C	D	$E^\flat$	F	G	A	$B^\flat$	C
E-E	Frígio	C	$D^\flat$	$E^\flat$	F	G	$A^\flat$	$B^\flat$	C
F-F	Lídio	C	D	E	$F^\sharp$	G	A	B	C
G-G	Mixolídio	C	D	E	F	G	A	$B^\flat$	C
A-A	Eólio	C	D	$E^\flat$	F	G	$A^\flat$	$B^\flat$	C
B-B	Lócrio	C	$D^\flat$	$E^\flat$	F	$G^\flat$	$A^\flat$	$B^\flat$	C

Nota-se que a armação da clave determina uma escala única em cada um dos sete modos. Daí a armação da clave não determina o modo: a tonalidade Jônica de C tem a mesma assinatura que a tonalidade Lídia de F, por exemplo. Para determinar o modo de uma composição é preciso fazer algumas observações sobre a música, tal como descrito abaixo.

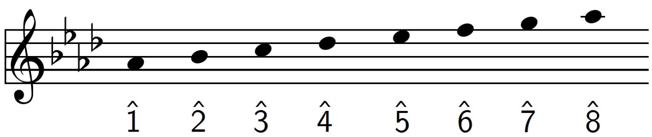
A nota inicial de escala da escala modal de uma composição é chamada de *tônica*. A tônica juntamente com a designação do modo, por exemplo, $B^\flat$ Dórico, G Frígio, ou $F^\sharp$ maior (veja a próxima seção), é chamado a tonalidade da peça. Assim, a tonalidade é determinada pela armação da clave e a tônica. A tônica geralmente pode ser identificada pelo seu aparecimento frequente como ponto de retorno da melodia e a raiz de acordes, quase sempre incluindo o acorde final (a ser explicado no capítulo 4) na harmonia; é muitas vezes referido como a tônica, ou o *centro tonal*, e geralmente serve como um "ponto de partida" para ambos, melodia e harmonia.

2.17 Modos maior e menor

No século XVIII apenas dois modos eram considerados satisfatórios: o Jônico, que é a nossa escala padrão, e o Eólio. Com esta restrição de possibilidades, cada armação de clave representa duas possibilidades: o modo maior e um modo menor. O modo maior tem como tônica a primeira nota da escala padrão ou Jônica, escala determinada pela armação da clave, e o modo menor tem como tônica a primeira nota da escala Eólica, determinada pela armação da clave. A tonalidade menor, que tem a mesma armação da clave como uma tonalidade maior e é chamada tonalidade relativa menor para essa tonalidade maior. A tônica da tonalidade relativa menor encontra-se um terço abaixo do que corresponde à tônica da tonalidade maior. Por exemplo, sustenidos e bemóis indicam a tonalidade de C maior e a tonalidade de A menor. O caráter da música determina qual modo prevalece.

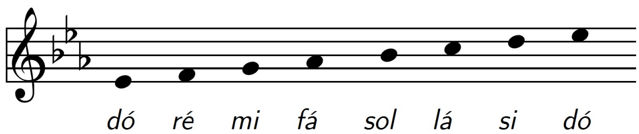
2.18 Números de escalas e solmização

A utilização básica e tradicional da numerologia na música é a numeração dos tons da escala. Números com acento circunflexo, ou "chapeuzinho", $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \ldots$, serão usados para denotar notas específicas da escala diatônica maior. Assim, na tonalidade de $A^\flat$, $A^\flat$ é o primeiro tom da escala e, portanto, é denotado por $\hat{1}$. $\mathrm{B}^\flat$ é denotada por $\hat{2}$, C por $\hat{3}$, e assim por diante.



Se estamos pensando na escala diatônica com equivalência de oitavas, apenas sete dos números são necessários. No entanto números maiores são por vezes usados em contextos onde a identificação por oitava não está sendo assumida; Por exemplo, $\hat{9}$ indica uma nota diatônica colocada um nono acima de alguma escala tônica específica $\hat{1}$.

Outra prática comum, chamada de *solmização*, nomeia os tons da escala pelas sílabas *dó, ré, mi, fá, sol, lá, si*.



Os tons da escala cromática que se encontram a meio passo acima ou abaixo das notas diatônicas são indicados precedendo-se o número com $\sharp$ ou $\flat$. Assim, na tonalidade de G, $\flat\hat{6}$ denota $\mathrm{E}^\flat$. Notemos que isso pode coincidir com uma nota diatônica, por exemplo, $\sharp\hat{3} = \hat{4}$. A solmização também fornece nomes para esses tons, mas não vamos exibi-los aqui.

3 Estrutura Horizontal

Em Matemática, o tempo é frequentemente parametrizado por um eixo horizontal (eixo x, ou eixo t). Como a música é percebida através de um intervalo de tempo, ela é representada visualmente pela sua colocação ao longo de um eixo horizontal. Em uma partitura musical há uma progressão da esquerda para a direita, a qual representa o passar do tempo, enquanto o eixo vertical (eixo y) designa altura. Assim, referimo-nos aos seus aspectos temporais, por exemplo, as durações de notas sustentadas e a sequência de eventos e episódios, como sendo sua *estrutura horizontal*. Uma maneira pela qual a maioria das músicas desperta interesse e prazer do ouvinte é pela apresentação de padrões temporais que são satisfatórios e coerentes. A notação e organização da estrutura horizontal da música contêm uma série de relações com conceitos de matemática básica.

3.1 Duração das notas

Durações de tempo na música são muitas vezes medidas em *batidas*, que são as unidades temporais pelo qual a música é anotada. Frequentemente uma batida representa o intervalo de tempo pelo qual se poderia "contar" a passagem de tempo enquanto a música é executada. O termo *tempo* refere-se à frequência desta contagem, normalmente medido em batimentos por minuto. Podemos dizer entretanto que música nem sempre é executada com tempo constante. É observável que uma composição pode ter mudanças de tempo internas ou passagens executadas livremente, na qual o tempo dá margem à liberdade artística.

Em uma partitura musical o designador básico de tempo é, é claro, a nota, e a duração de notas é determinada por coisas tais como cabeças de notas, hastes de colchetes, pontos, ligaduras, e designações *quiálteras*.

Os nomes *duracionais* de notas na música ocidental baseiam-se na nota inteira, que tem uma duração em batidas (frequentemente quatro) ditada pela *indicação de compasso*, o que será discutido posteriormente neste capítulo. Notas cuja duração tem proporção $1/2^n$, n um número inteiro não negativo, juntamente com a nota inteira, são nomeadas de acordo com essa proporção. Assim, se a nota inteira tem uma determinada duração em batidas então a meia nota tem a metade dessa duração, o quarto de nota tem um quarto da duração, etc. Na situação em que uma nota inteira recebe quatro batidas, uma meia nota recebe duas batidas e a nota semifusa (*sixth-fourth note*) representa $\frac{1}{16}$ de uma batida.

Usaremos o termo (não-padrão) *nota duracional* para significar que uma nota se distingue pela sua duração, como meia nota ou semínima, independentemente da sua altura associada.

Observe que essas designações para as notas tacitamente empregam o conceito de classe de equivalência. Aqui estamos declarando que, duas notas são equivalentes se elas têm a mesma duração, de modo que "nota duracional" refere-se à classe de equivalência de todas as notas com uma determinada duração (por exemplo, "meia nota" designada para a classe de equivalência de todas as meias notas, independentemente de sua altura).

Isto deve ser distinguido da equivalência em oitavas, discutida no Capítulo I, cujas classes de equivalência são chamadas de "classes de notas".

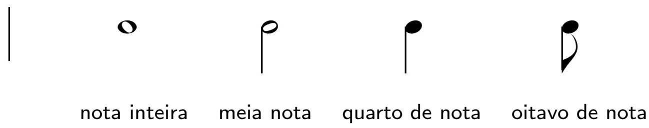
A altura de uma nota é dada pela posição vertical de sua *cabeça da nota* (uma elípse) na pauta musical. A duração da nota é ditada por vários detalhes que discutiremos individualmente. Elas são:

1. se o interior da cabeça da nota é preenchido.
2. a presença ou ausência de uma haste de nota, e, se presente, o número de colchetes (*flags*) sobre a haste ou o número de travessões (*beams*) ligados à haste.
3. o número de pontos após a nota, se houver.
4. a designação *quiáltera* da nota (*tuplet designation*), se houver.[1]

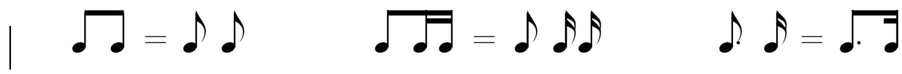
[1] quiáltera é qualquer ritmo que envolva dividir a batida em um número diferente de subdivisões iguais às normalmente permitidas pelo sinal de compasso.

3.2 Cabeças de notas, hastes, colchetes e travessões

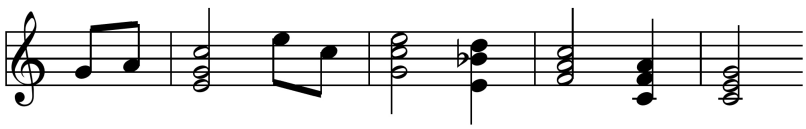
A nota inteira e semi-nota são escritas com a cabeça de nota (de forma elíptica) por preencher. Para $n \geq 2$ a $\frac{1}{2^n}$-ésima é escrita com a cabeça de nota preenchida. Todas as $\frac{1}{2^n}$-ésimas exceto a nota inteira (ou seja, o caso $n = 0$) possuirão uma haste da nota que, ou se estende para cima a partir do lado direito da cabeça de nota, ou para baixo a partir do lado esquerdo da cabeça de nota. Para $n \geq 3$, o travessão da $\frac{1}{2^n}$-ésima nota é escrito com $n - 2$ colchetes. Assim, uma colcheia (*eight note*, $n = 3$) tem um colchete, uma semicolcheia (*sixteenth note*, $n = 4$) tem dois colchetes, etc.



Nas notas adjacentes, colchetes podem ser substituídos por travessões ligando as hastes:

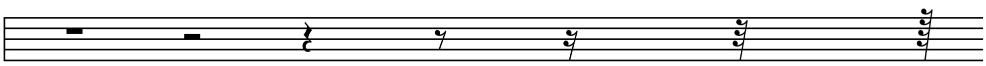


O terceiro exemplo acima (com um ponto) será esclarecido pela seção sobre *pontos* abaixo. Alturas que devem ser soadas simultaneamente podem ser anotadas tendo duas ou mais cabeças de nota que compartilham uma haste em comum, como nesta passagem:



3.3 Pausas

Uma pausa é um símbolo em notação que indica o silêncio por um período determinado pelo tipo de pausa que aparece. Pausas são representados nos mesmos tipos duracionais como notas, que se distinguem por sua aparência. A *pausa inteira*, por exemplo, é um retângulo ligado no lado de baixo de uma linha. Isto e outras pausas são indicadas abaixo.



pausa inteira   meia pausa   quarto de pausa   oitavo de pausa   1/16 de pausa   1/32 de pausa   1/64 de pausa

A posição vertical da pausa sobre uma partitura é geralmente como indicado acima, mas nem sempre. Em algumas circunstâncias torna-se mais desejável colocá-las em uma linha superior ou inferior, por exemplo quando duas partes vocais (por exemplo, soprano e alto) compartilham a mesma partitura e a pausa ocorre em apenas uma das partes.

3.4 Pontos

O ponto ao lado de uma nota ou pausa estende sua duração por uma metade de sua duração original ou, equivalentemente, multiplica a duração original por 3/2. Daí a duração de uma semicolcheia (*sixteenth note*) com ponto, em batidas, (assumindo para o momento que toda a nota recebe quatro batidas) é dada por $\frac{1}{4}(1+\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{8}$. Um segundo ponto ao lado da nota apela para uma duração adicional de um quarto da duração original (para além da duração adicional evocada pelo primeiro ponto), de modo que, na situação acima descrita, uma nota semicolcheia com dois pontos tem uma duração $\frac{1}{4}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}\cdot\frac{7}{4} = \frac{7}{16}$. Embora possa parecer um exercício puramente acadêmico (desde que só raramente são mais do que dois pontos usados), podemos observar que uma nota de duração d, seguida por m pontos tem duração d_m dada por:

$$
\begin{aligned}
d_m &= d\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^m}\right) = d\sum_{i=0}^{m}\left(\frac{1}{2}\right)^i \\
&= d\left[\frac{1-(\frac{1}{2})^{m+1}}{1-\frac{1}{2}}\right] = d\left[2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}\right)\right] \\
&= d\left[2-\left(\frac{1}{2}\right)^m\right] = d\left[1+1-\frac{1}{2^m}\right] = d\left[1+\frac{2^m-1}{2^m}\right]
\end{aligned}
$$

A terceira linha na sequência de igualdades acima usa o seguinte fato:

$$\sum_{i=0}^{m} r^i = 1+r+r^2+\cdots+r^m = \frac{1-r^{m+1}}{1-r}$$

que é válido para todo inteiro $m \geq 0$ e qualquer número real $r \neq 1$. Talvez a expressão mais esclarecedora para d_m na sequência acima de igualdades é a expressão $d\left[2-(\frac{1}{2})^m\right]$, que reafirmamos:

$$\boxed{\begin{array}{c}\textit{Uma nota de duração } d \textit{ seguida por m pontos tem duração} \\ d_m = d\left[2-\left(\frac{1}{2}\right)^m\right]\end{array}} \tag{3.1}$$

Torna-se evidente a partir desta fórmula que a duração de uma nota m-pontilhada (i.e., com m pontos) aproxima-se de $2d$ conforme m torna-se suficientemente grande (d sendo a duração de uma nota sem pontos). Isto pode ser visto do fato que $\left[2-\left(\frac{1}{2}\right)^m\right]$ tende a 2 quando m tende ao infinito, ou seja,

$$\lim_{m\to\infty}\left[2-\left(\frac{1}{2}\right)^m\right] = 2$$

É também evidente, a partir de (3.1), que o valor de d_m é sempre menor do que $2d$. O fato do somatório $\sum_{i=0}^{m}(\frac{1}{2})^i$ aproxima-se arbitrariamente de 2 quando m torna-se suficientemente grande é expresso na série infinita:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i = 2. \tag{3.2}$$

Essas noções, que envolvem o conceito de limite, são tratadas de modo preciso em Cálculo. Vamos usar a fórmula (3.1) acima para calcular um certo período. Suponha que estamos em um contexto em que uma semibreve tem 2 batidas (por exemplo, quando a indicação de compasso é $\frac{2}{2}$, que será explicado mais adiante neste capítulo). Daí surge a pergunta: Qual é a duração de uma semicolcheia triplamente pontilhada?

Primeiramente calculamos a duração d da nota semicolcheia sem pontos como $\frac{1}{16}$ da duração de uma nota completa, ou $d = \frac{1}{16}\cdot 2 = \frac{1}{8}$. Aqui, o número de pontos é $m = 3$, de modo que a fórmula nos dá:

$$d_3 = \tfrac{1}{8}\left[2-\left(\tfrac{1}{2}\right)^3\right] = \tfrac{1}{8}\left(2-\tfrac{1}{8}\right) = \tfrac{1}{8}\cdot\tfrac{15}{8} = \tfrac{15}{64}.$$

A duração é portanto $\frac{15}{64}$ (em música diz-se *uma* $\frac{15}{64}$*-ésima*) de uma batida.

3.5 Quiálteras

A notação temporal da música é altamente orientada em torno do número primo 2 e suas potências. Não usamos termos como "quinta nota" ou "nona nota".

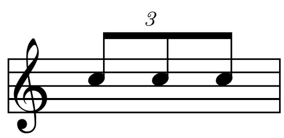
Para dividir a $\dfrac{1}{2^n}$-ésima nota em k notas iguais, em que k não é uma potência de 2, formamos um k-*quiáltera* como se segue:

Encontre o único número inteiro positivo r tal que

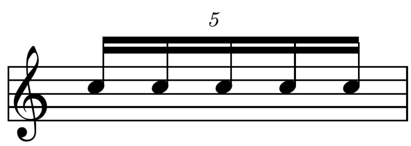
$$2^r < k < 2^{r+1}$$

e então denote as quiálteras como um grupo de k $\frac{1}{2^{n+r}}$-ésimas notas indicadas pelo número inteiro k sobreposto ou subposto. A quiáltera resultante é chamada de $\frac{1}{2^{n+r}}$-ésima nota k-quiáltera. Isto é a forma mais básica de polirritmia, que é a imposição simultânea de ritmos diferentes.

Por exemplo, suponha que desejamos dividir um quarto de nota ($\frac{1}{2^2}$-ésima nota) em 3 peças iguais, formando um trio. Aqui n = 2, e como $2^1 < 3 < 2^2$, temos que r = 1. Escreveremos uma sequência de 3 $\frac{1}{2^{2+1}}$-ésimas notas, ou colcheias, sobrepondo um 3, formando um trio de oitavas. Se, ao contrário, queremos dividir um quarto de nota em 5 notas de igual duração, notamos que $2^2 < 5 < 2^3$, assim $r = 2$, e então teremos que escrever uma sequência de 5 $\frac{1}{2^{2+2}}$-ésimas notas, ou semicolcheias, sobrepondo um 5. Nós chamaremos isso de uma nota semicolcheia 5-quiáltera.



notação de trio de oitavas

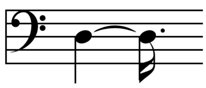


5-quiáltera de semicolcheias

O conceito de divisão de uma unidade de duração em partes iguais por uma n-quiáltera tem uma semelhança interessante para a noção da n-ésima harmônica, que é uma vibração n vezes mais rápido do que a vibração de uma altura fundamental. Harmônicos serão discutidos ulteriomente neste texto.

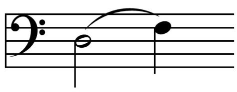
3.6 Ligaduras de prolongação e de expressão

Duas notas da mesma altura podem ser ligadas por uma *ligadura*, que é uma linha curva que indica que elas devem ser consideradas como uma nota cujo valor é a soma das durações das duas notas ligadas. Assim, se uma nota inteira recebe quatro batidas, então a ligadura a um quarto de nota, cuja duração é 1, a uma semicolcheia pontilhada, cuja duração é de $\frac{1}{4}(1 + \frac{1}{2}) = \frac{3}{8}$,



nos dá uma duração de $1 + \frac{3}{8} = \frac{11}{8}$ batidas.

Intimamente relacionada é a *ligadura de expressão*, que se parece com uma ligadura, mas conecta notas de alturas diferentes.



Isso indica ao executante que ele deve proceder de uma nota para a próxima, sem (ou com mínima) rearticulação. Por exemplo, um violinista interpreta isso com o significado de que as notas devem ser tocadas com um golpe do arco.

3.7 Compasso

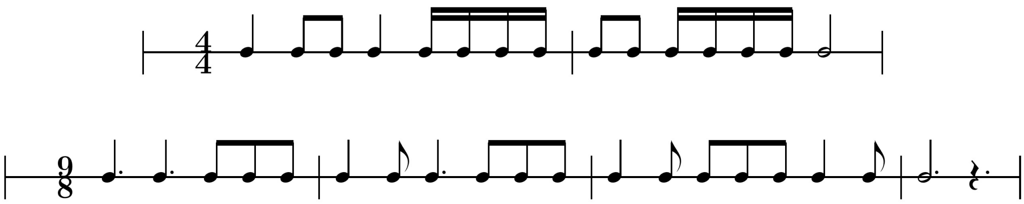
Uma peça musical é comumente dividida em grupos de n batidas, para algum inteiro $n \geq 1$. Esses grupos são chamados de *medidas* ou *compassos*. O compasso da peça é o número n de batidas por medida, juntamente com uma indicação de qual a nota duracional que tem a duração de uma batida. Estes parâmetros são especificados pela *indicação de compasso*, que é colocado imediatamente após o símbolo da clave e em posições subsequentes se houver mudanças de compassos. A indicação de compasso é composta de dois inteiros $\genfrac{}{}{0pt}{}{n}{r}$, em que $n \in \mathbb{Z}+$ e r é uma potência de 2. Evita-se escrever $\frac{n}{r}$ para evitar confusão com frações. Os significados de n e r são dados como se segue:

- *Significado Usual.* O inteiro n superior especifica o número de batidas a um compasso e o número inteiro inferior $r = 2^m$ designa que a $\frac{1}{2^m}$-ésima nota fica em uma batida. Assim, indicação de compasso $\genfrac{}{}{0pt}{}{2}{4}$ indica 2 batidas em um compasso com uma semínima recebendo uma batida.

- *Caso Excepcional. 3 divide n e $n > 3$:* Nesta situação, habitualmente interpretamos o compasso como um compasso composto, o que significa que o número de batidas a uma medida deve ser $n/3$ em vez de n; assim, três $\frac{1}{2^m}$-ésimas notas dão uma batida, sendo, mais uma vez, $r = 2^m$. Isto significa que uma batida é indicada por uma $\frac{1}{2^{m-1}}$-ésima nota pontilhada. Assim, no tempo $\genfrac{}{}{0pt}{}{6}{8}$ existem $6/3 = 2$ batimentos por compasso e uma batida é representada por três colcheias, ou um quarto de nota pontilhada. Na prática, o inteiro r em uma indicação de compasso $\frac{n}{r}$ é quase sempre 2, 4, ou 8.

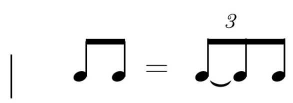
3.8 Ritmo

O ritmo é o modo em que o tempo é organizado no âmbito dos compassos. Considere estes exemplos:



Executando-em andamento (com simples toques) observa-se que uma certa quantidade de satisfação musical surge a partir da variação artística nos modos em que os compassos são preenchidas com notas duracionais. Ritmos podem ser diretos ou sutis. Jazz frequentemente evita o óbvio, obscurecendo temporariamente o compasso usando sequências complexas.

As vezes, certos tipos de ritmos estão implícitos mas não escritos, o ritmo *swing* sendo o exemplo principal. Em uma peça onde a figura consistindo em uma colcheia tripla com as duas primeiras notas ligadas é generalizada, a notação trio torna-se complicada e é frequentemente suprimida. A figura é simplesmente denotada por duas notas oitavas. Isso geralmente é indicado pelas palavras "ritmo swing", ou por uma marcação, como



colocado acima do primeiro compasso da peça. Naturalmente, este ritmo pode ser denotado precisamente usando um tempo composto com assinaturas $\frac{3n}{8}$ e escrito como uma semínima seguida por uma colcheia.

3.9 Regras sobre acidentes

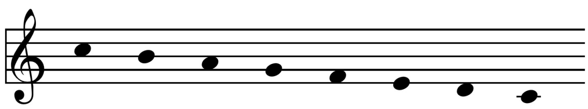
É importante saber que quando um acidente ocorre ele aplica-se, posteriormente, dentro do compasso para todas as notas com mesma classe de nota como a nota alterada, a menos que o acidente seja cancelado ou alterado por outro acidente. Quando uma nota alterada é ligada a uma outra nota, a alteração na primeira nota aplica-se também para a segunda nota mesmo que a segunda nota esteja no próximo compasso. Na última situação o acidente não se aplica a todas as notas da mesma classe de notas no compasso contendo a segunda nota. Assim, no trecho a seguir todos os D's são D-naturais (♮), e o segundo acidente é requerido para efetuar isto.

Às vezes, para o benefício do leitor, a música inclui acidentes que não exigem as regras dadas acima. Tais acidentes redundantes são chamados *acidentes de advertência*, e aparecem entre parênteses.

3.10 Melodia

Melodia é a sucessão de alturas (notas individuais com duração prescrita) que são mais proeminentes em uma composição musical e que servem para definir e caracterizar a peça. Por exemplo, em uma canção popular é a sequência de notas que um vocalista solo canta, enquanto outras notas são reproduzidas em acompanhamento. Em uma sinfonia a melodia muitas vezes (mas nem sempre) é tocada pelo instrumento mais alto, tipicamente a primeira seção de violino.

Deve ser enfatizado que uma melodia é definida e reconhecida não só pela sua sequência de alturas, mas pelo seu ritmo. Isto é exemplificado pela escala descendente no modo Jônico (maior),



que por si só, não evoca uma canção particular. No entanto, a mesma sequência de notas definidas para o ritmo

é imediatamente reconhecida como *Joy To The World*[2].

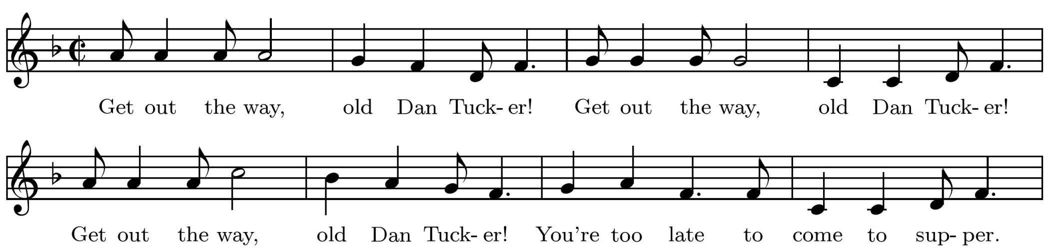
3.11 Repetição de padrões

Uma forma com que a música alcança coesão é através da repetição de certos padrões melódicos, muitas vezes com variação e embelezamento.

Isto pode significar a repetição de uma grande parte da peça ou, mais "localmente", a justaposição de figuras melódicas breves. O fenômeno anterior será discutido mais tarde, sob a denominação *forma*. No momento, entretanto, vamos discutir os tipos locais de repetições que correspondem ao conceito matemático de transformação geométrica.

3.12 Translações

Um exemplo simples de translação é um deslocamento horizontal, ou translação, que é efetuado no gráfico de uma função $y = f(x)$ quando é substituído pelo gráfico de $y = f(x-c)$ (veja capítulo 2). Isso frequentemente aparece na música como as repetições (translações horizontais) da sequência de alturas ou do padrão rítmico. Aqui um exemplo familiar que ilustra a translação rítmica:



Note que o ritmo das duas primeiras barras é repetido duas vezes, enquanto que a sequência de alturas varia. Um exemplo de translação melódica (bem como rítmica) é encontrado na musica espiritual *When The Saints Go Marching In*[3],

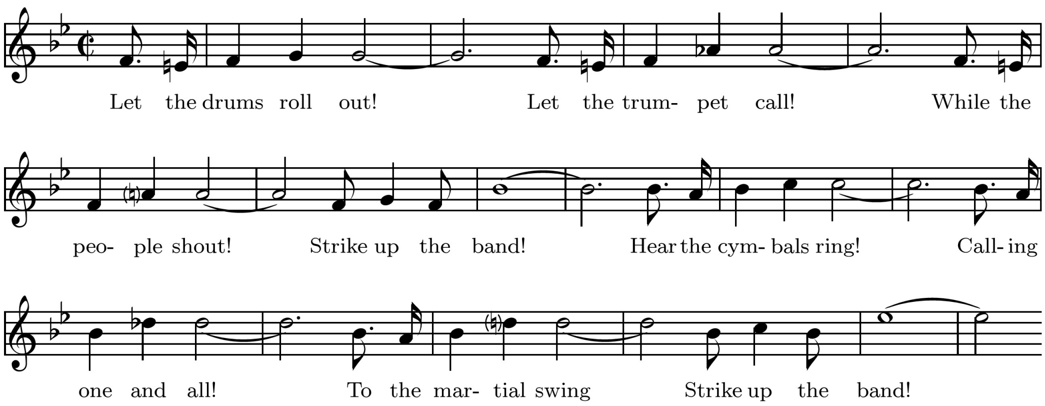
[2] Canção de Natal atribuída a George Frederick Handel, Isaac Watts e Lowell Mason.
[3] Hino gospel estadunidense, de autor desconhecido.

em que a sequência melódica F-A-$B^\flat$-C aparece três vezes consecutivas. Este exemplo é dado em [2] (apud [1]). Também são oriundos de [2] (apud [1]) os trechos de *O Tannenbaun*[4] e *Raindrops Keep Falling on My Head*[5], que aparecerão mais adiante no texto.

3.13 Transposição

Quando um padrão repetitivo está sendo representado melodicamente, é possível aplicar também um deslocamento vertical ou transposição, análogo ao feito substituindo o gráfico de $y = f(x)$ pelo de $y = f(x)+c$. Tal mudança pode repetir um trecho melódico, transpondo cada nota para cima ou para baixo por um intervalo fixo na escala cromática, como nas primeiras 16 barras de *Strike Up The Band*, de George e Ira Gershwin, na qual os oito segundos compassos repetem a melodia do primeiro, transposto para cima no intervalo de uma quarta.

Este tipo de transposição, exemplificado abaixo, é chamado transposição cromática.

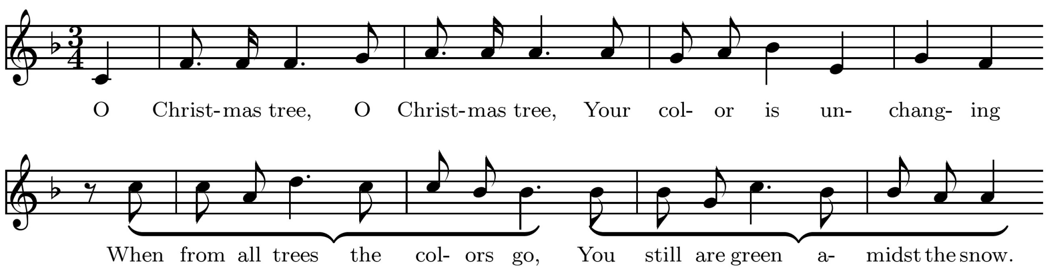


Uma forma variante da transposição, chamado de *transposição diatônica*, ocorre quando uma melodia diatônica é movida para cima ou para baixo pelo mesmo número de tons na escala diatônica, produzindo uma melodia que tem a mesma forma geral, mas com intervalos cromáticos não perfeitamente preservados devido aos intervalos diferentes entre

[4]Canção de Natal alemã, de Ernst Anchütz

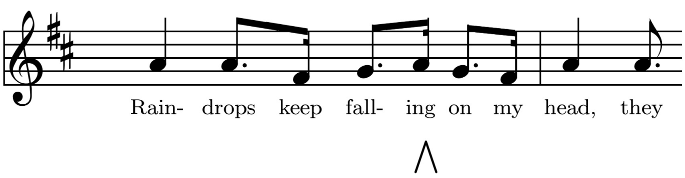
[5]Canção de Hal David e Burt Bacharach, escrita para o filme de 1969 *Butch Cassidy and the Sundance Kid*.

notas diatônicas adjacentes. Isso ocorre na cantiga alemã de Natal *O Tannenbaum* (*O Christmas Tree*). Note que a primeira sequência abaixo entre barras é deslocada para cima por um tom de escala diatônica na segunda sequência entre barras.



3.14 Retrogressão

Ainda outra forma de transformação na música é o retrogresso, que é análogo ao conceito matemático de reflexão horizontal. Tal como uma reflexão, é exemplificado quando se substitui o gráfico de $y = f(x)$ pelo de $y = f(-x)$, sendo o gráfico refletido através do eixo y. Na música, *retrogressão* significa *inversão da ordem das notas*, de modo que a sequência resultante forma uma reflexão da sequência inicial. Neste trecho de *Raindrops Keep Falling On My Head*, observe a simetria da melodia em torno do ponto designado pelo $\wedge$:



3.15 Forma

A sequência de seções maiores da música em que a música pode ser organizada às vezes é chamada de *forma*. O número de compassos em uma seção é muitas vezes uma potência de 2. Por exemplo, composições de jazz consistem tipicamente de três ou quatro seções, cada seção com 16 compassos; por vezes, uma ou mais destas secções é repetida uma vez. Estas seções são distinguíveis pelo ouvinte em virtude do caráter rítmico e melódico diferente. Se uma composição consiste de três seções, podemos denotar a forma por: ABC.

Se as duas primeiras seções forem repetidas, a forma seria AA BB C. *Maple Leaf Rag* de Scott Joplin (1868-1917) tem a forma AA BB A CC DD.

Dois tipos clássicos de formas são *forma binária* e *forma ternária*. A primeira apresenta uma peça de música como duas secções principais que são repetidas, dando uma forma $AABB$. Muitos dos minuetos e scherzos do final dos séculos 18 e 19 têm esta forma. A forma ternária apresenta três seções, com a primeira e a terceira lugar sendo a mesma, ou muito semelhantes, dando padrão ABA. é frequentemente encontrada nas *nocturnes* de Frédérik Chopin (1810-1849) e nas peças para piano de Johannes Brahms (1833-1897).

A maioria das canções da música popular e da música popular americana pode ser naturalmente dividida em segmentos, alguns dos quais normalmente se repetem. Um padrão comum é $AABA$, exemplificado pela música de Tin Pan Alley, *Five Foot Two, Eyes of Blue*. Se uma secção carrega forte semelhança com outra, pode ser dada a mesma letra seguido por $'$. Por exemplo, a forma da música *Edelweiss*[6] é representada por $AA'BA'$.

3.16 Simetria

A palavra simetria é usada na música em referencia geral a fenômenos de transformações e seções de repetição. A meta composicional em muitos estilos de música é criar porções equilibradas de unidade e contraste, com suficiente repetição para dar à peça interesse e coesão, mas não tanto como para não torná-la repetitiva ou chata. Como um exemplo de uma peça simples, que ilustra o uso e múltiplas simetrias, referimo-nos novamente ao canto de Natal *O Tannenbaum*. Aqui a forma do coro completo é ABA, mas cada seção tem simetrias internas também. Ambas as seções A e B incorporam transposição melódica e translação rítmica, com a seção B apresentando uma transposição descendente diatônica, discutida anteriormente neste capítulo.

[6]Do musical de Rodgers e Hammerstein, *The Sound of Music* (no Brasil, *A Noviça Rebelde*).

4 Harmonia e Numerologia Relacionada

4.1 Harmonia

Harmonia é um aspecto de musica, no qual diferentes alturas são tocadas simultaneamente. A mais nova harmonia no mundo ocidental consiste em oitavas, quartas e quintas paralelas. Ao longo dos séculos uma rica lista de padrões de harmonia e clichês evoluíram e, adiante examinaremos alguns desses padrões e o papel da matemática desempenhado nesse desenvolvimento.

O bloco básico de construção da harmonia é o *acorde*, que é uma coleção de notas, habitualmente três ou mais, tocadas simultaneamente. Acordes possuem um tipo determinado por intervalos, modulo oitava, entre as notas do *acorde*. Um acorde também possui uma marca numérica, a qual é determinada por sua justaposição com a nota tônica da tonalidade.

4.2 Intervalos e aritmética modular

Antes iniciar nossa discussão sobre harmonia, iremos introduzir a noção de inteiros modulares, que nos permitirá refinar a noção de intervalo modular que foi dada no capítulo 2.

Para um inteiro fixado $n \in \mathbb{Z}^+$, a relação $k \equiv \ell$, definida por $k \equiv \ell$ se $n \mid (k - \ell)$, é uma relação de equivalência no conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros.

Expressaremos esta relação dizendo que k *é congruente a* ℓ *módulo* n, ou $k \equiv \ell \pmod{n}$.

Pode ser demonstrado que $k \equiv \ell \pmod{n}$ se, e somente se, k e ℓ possuem o mesmo resto r quando aplicamos o algoritmo da divisão euclidiana por n. Isto é consequência do fato de que se o inteiro a é dividido por n, produzindo quociente q e resto r, então $a = nq + r$, logo $a - r = nq$, e portanto $a \equiv r \pmod{n}$. Como a congruência módulo n é uma relação de equivalência, sendo r_1 e r_2 os restos das divisões de k e ℓ, respectivamente, por n, se $k \equiv \ell \pmod{n}$ então $r_1 \equiv r_2 \pmod{n}$, daí $n \mid (r_1 - r_2)$ e portanto $r_1 = r_2$, pois $0 \leq r_1, r_2 \leq n - 1$. A propriedade recíproca é mais simples: se $r_1 = r_2$ então $r_1 \equiv r_2 \pmod{n}$, logo $k \equiv \ell \pmod{n}$.

Por esse motivo, cada classe de equivalência da relação de congruência módulo n possui precisamente um representante no conjunto $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Assim, há n classes de equivalência da relação de congruência módulo n em $\mathbb{Z}$, sendo elas as classes $[1]$, $[2]$, $\ldots$, $[n-1]$. O conjunto dessas classes de equivalência é denotado por $\mathbb{Z}_n$.

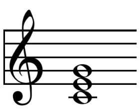
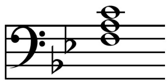
O caso $n = 12$ tem um significado especial na música, como segue. Medindo os intervalos em semitons, o conjunto dos intervalos é identificado com o conjunto dos inteiros $\mathbb{Z}$, com um inteiro k correspondente ao intervalo de k semitons, para cima se k for positivo, para baixo se k for negativo. Com esta identificação, a equivalência módulo 12 não é mais do que a identificação de oitavas: Dois intervalos k semitons e ℓ semitons são equivalentes módulo oitava se, e somente se, $k \equiv \ell \pmod{12}$. Assim, cada classe de equivalência de intervalos contém um intervalo único de r semitons com $0 \leq r < 12$ (i.e., um intervalo não negativo menor do que uma oitava), e este r é obtido como o resto no algoritmo da divisão por $n = 12$.

Por exemplo, o intervalo de uma nona, que é de 14 semitons, é equivalente ao intervalo de um passo, 2 semitons, pois $14 \equiv 2 \pmod{12}$. Analogamente, verifica-se que descer uma quarta é equivalente a subir uma quinta, pois $-5 \equiv 7 \pmod{12}$.

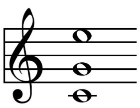
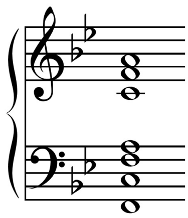
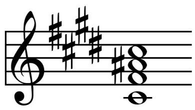
Em alguns contextos quando falamos de intervalos musicais, de fato estamos falando de classes de intervalos módulo oitava, das quais existem doze. Nós tentaremos fazer esta distinção clara em todos os momentos. Notemos que há uma classe de intervalos bem definida entre qualquer par ordenado de classes de notas, que pode ser representada de modo único por um intervalo não negativo inferior a uma oitava. Por exemplo, o intervalo de $E^\flat$ a B é representado por 8 semitons, ou uma sexta menor.

4.3 Acordes maiores

O primeiro acorde que vamos considerar é o *acorde maior*, que consiste em uma nota soando simultaneamente com as notas que estão uma terça maior e uma quinta acima da nota dada. Abaixo estão alguns exemplos de acordes:


A nota do acorde maior que tem notas de acordes situadas em uma terça maior e uma quinta acima é chamada de *raiz*. As duas notas subsequentes são chamadas de a *terceira* e a *quinta*, respectivamente. Assim, no exemplo do meio acima, a raiz do acorde maior é F, a terceira é A e a quinta é C . Em geral, os acordes são definidos pelas *classes de notas* (e intervalos modulares) que eles empregam. Assim, qualquer das notas de um acorde pode ser deslocada e/ou dobrada pelo intervalo de uma ou mais oitavas. Daí as seguintes variações são também acordes maiores:

4.4 Vocalização

O termo vocalização é usado para denotar a maneira particular como um acorde é escrito, isto é, as notas específicas, em oposição às classes de notas, que são escolhidas. Observe que a raiz não precisa ser a nota inferior. No modo de expressão mais à direita na figura anterior, a nota mais baixa é a quinta do acorde maior. Mas observe que, independentemente da expressão, não há nenhuma ambiguidade sobre qual nota é a raiz, terceira, ou quinta de um acorde maior. Isto porque, assim como a escala padrão, a sequência de intervalos modulares $(4,3,5)$ (medida em semitons por elementos de $\mathbb{Z}_{12}$) entre classes de notas sucessivas compreendendo o acorde maior,

$$\text{raiz} \xrightarrow{4} \text{terça} \xrightarrow{3} \text{quinta} \xrightarrow{5} (\text{raiz})$$

tem a propriedade de que nenhuma permutação cíclica não-trivial da sequência dá a mesma sequência, ou seja, não tem *simetrias cíclicas não-triviais*.

4.5 Acordes menores

O acorde menor é definido pela sequência de intervalos modulares $(3,4,5)$. Assim, consiste em uma raiz juntamente com as notas que estão uma terça menor e uma quinta, modulo oitava, acima da raiz. Tal como acontece com os acordes maiores, os dois tons sucessivos são chamados terceira e quinta,

$$\text{raiz} \xrightarrow{3} \text{terça} \xrightarrow{4} \text{quinta} \xrightarrow{5} \text{(raiz)}$$

e novamente a raiz, terceira e quinta são determinadas unicamente pela sequência de intervalos modulares. Aqui estão alguns acordes menores:

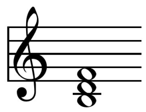

4.6 Tríades

Os acordes que contêm exatamente três notas, modulo oitava, são chamados *tríades*. Os acordes maior e menor são exemplos. As tríades têm sido uma parte fundamental da harmonia na música ocidental desde o século 17. O termo triádico é às vezes aplicado à música que apresenta principalmente tríades.

Para evitar qualquer possível confusão entre o acorde maior e outros acordes que contêm o acorde maior (a ser introduzido adiante), muitas vezes nos referimos ao acorde maior como a *tríade maior*. Da mesma forma, usamos o termo *tríade menor* para o acorde menor.

4.7 Acordes diminuídos e aumentados

Duas outras tríades que desempenham papéis significativos na música ocidental são o *acorde diminuído*, definido pela sequência de intervalos modulares $(3,3,6)$, e o *acorde* *aumentado*, definido pela sequência $(4,4,4)$.



diminuído

aumentado

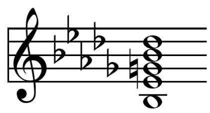
Note que o acorde aumentado, ao contrário de todos os acordes previamente introduzidos, não tem raiz discernível. Qualquer permutação cíclica da sua sequência de intervalos dá a mesma sequência.

4.8 Acorde em sétima

Introduzimos agora alguns acordes importantes de quatro notas. O primeiro é o *acorde em sétima*, definido pela sequência de intervalos $(4,3,3,2)$. As notas são chamadas raiz, terceira, quinta e sétima, respectivamente,

$$\text{raiz} \overset{4}{\to} \longrightarrow \text{terça} \overset{3}{\to} \longrightarrow \text{quinta} \overset{3}{\to} \longrightarrow \text{sétima } (\overset{2}{\to} \longrightarrow \text{raiz})$$

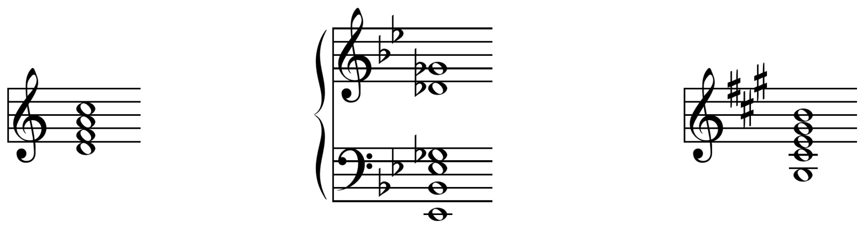
Esta sequência não tem simetrias cíclicas não triviais, daí a raiz, a terceira, a quinta e sétima são distinguíveis. Alguns exemplos são:



Observe que este acorde contém o acorde maior com a mesma raiz, terceira e quinta. Mais tarde diremos um pouco sobre o papel desta regra de acordes no desenvolvimento da harmonia ocidental e os obstáculos de afinação associados a isto.

4.9 Acorde menor em sétima

Outro acorde de quatro notas a ser introduzido aqui é o *menor em sétima*, definido pela sequência $(3,4,3,2)$, que não admite simetrias cíclicas não-triviais. Suas notas também são chamadas de raiz, terceira, quinta e sétima. Aqui estão alguns exemplos:



O acorde de sétima menor contém o acorde menor com a mesma raiz, terceira e quinta.

4.10 Acorde em sétima maior

Uma variação um tanto dissonante é o *acorde sétima maior*, que tem a sequência $(4, 3, 4, 1)$. Ele também não admite simetrias cíclicas não triviais. Observe que ele, como o acorde em sétima, contém a tríade maior, sendo a diferença que o intervalo da quinta à sétima é uma terça maior ao invés de uma terça menor.

Este tipo de harmonia tornou-se popular no século 20, e é um dos sons característicos do "smooth jazz". A dissonância surge com o intervalo de semitons entre a classe de notas da sétima e a da raiz.

4.11 Sétima diminuto

O acorde em sétima diminuto, ou o acorde inteiramente diminuto é definido pela sequência de intervalos modulares $(3, 3, 3, 3)$. Tal como o acorde aumentado, cada permutação cíclica de sua sequência resulta na mesma sequência, então ele também não tem nenhuma raiz discernível. Aqui estão dois exemplos:

Este acorde transmite uma sensação de tensão ou instabilidade. Resolve-se muitas vezes a um acorde mais consonante, como uma tríade maior ou menor.

4.12 Sétima meio-diminuto

O acorde sétima meio-diminuto, é definido pela sequência de intervalos modulares $(3,3,4,2)$. Possui uma raiz discernível, não possui permutações cíclicas não-triviais. Exemplos:

Este acorde também tem uma aura um tanto instável e sugere a necessidade de resolução. Como a sétima, muitas vezes se resolve em torno do círculo de quintos.

4.13 Etiquetagem de acordes

Os acordes são frequentemente rotulados e/ou denotados por identificação pela raiz seguido de um sufixo que indica o tipo de acorde. As raízes podem ser rotuladas identificando-se uma classe de nota específica, como D ou $\mathrm{B}^\flat$, ou um tom de escala. No último caso, o tom de escala é indicado por um númeral romano, possivelmente precedido por $\sharp$ ou $\flat$, tal como $\sharp\,\mathrm{III}$ ou $\flat\,\mathrm{VI}$. Para isso, o modo apropriado deve ser incorporado.

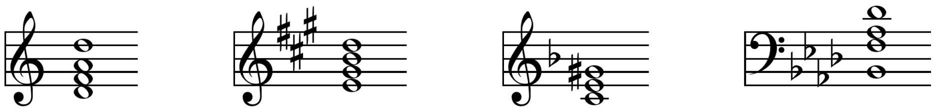
Existem várias convenções para escrever o sufixo que indica o tipo de acorde. Iremos aderir às seguintes notações para estes sufixos:

- tríade maior: sem sufixo
- tríade menor: m
- aumentado: aum ou $^+$
- diminuto: dim ou ^{0}
- sétima: ^{7}
- sétima menor: m^7
- sétima maior: M^7

- sétima diminuto: ^{o7}
- sétima meio-diminuto: $^{\varnothing 7}$

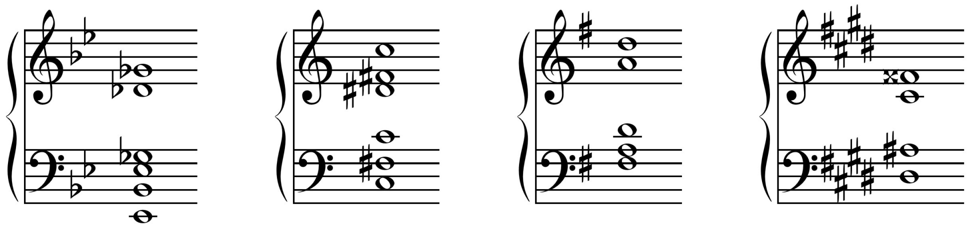
Por exemplo, uma tríade maior cuja raiz é C é denotada por C. Na tonalidade de F maior, seria denotado por V. Na tonalidade de A menor, seria denotado por III. O acorde em sétima menor cuja raiz é F♯ é denotado $\mathrm{F}^\sharp\mathrm{m}^7$. Na tonalidade de D maior, seria IIIm^7. Na tonalidade de G menor, seria denotado por $\sharp\,\mathrm{VIIm}^7$. Frequentemente rotulamos acordes aumentados ou diminuídos em sétima, que não possuem raiz discernível, declarando a raiz como sendo a nota mais baixa em sua vocalização.

Aqui estão alguns acordes rotulados de acordo com a classe de nota da raiz.



Dm E^7 C aum $\mathrm{B}^\flat\mathrm{m}^7$

Abaixo estão alguns acordes rotulados de acordo com a raiz. Aqui assumimos o modo maior (Ioniano).



IVm^7 I dim V VII^7

Um capítulo posterior apresentará razões matemáticas pelas quais certos acordes parecem possuir uma qualidade "harmoniosa", ou consonante, enquanto outros têm um efeito "chocante", ou dissonante.

4.14 Etiquetagem alternativa de acordes

Outro método bastante comum de rotulação de acordes usa letras maiúsculas e minúsculas, e números, para indicar se a terceira do acorde é maior ou menor, respectivamente.

Assim, um acorde em sétima menor enraizado em $\mathrm{B}^\flat$ seria denotado $\mathrm{b}^{\flat 7}$ e uma tríade menor enraizada na escala de tom $\hat{4}$ é escrita iv.

Todos os outros sufixos são os mesmos, geralmente escolhendo a segunda alternativa das listadas acima para as tríades diminuídas e aumentadas. Assim, a tríade diminuída em $\hat{2}$ é escrita $\mathtt{ii}^{0}$.

4.15 Solfejo (spelling) de acordes

Como observamos no Capítulo 1, o uso de acidentes permite qualquer nota de teclado ser escrita por mais de uma maneira. Por exemplo, $A^\sharp$ produz a mesma altura que $B^\flat$, assim como G e $A^{\flat\flat}$. Na notação musical, o termo "solfejo" (quase sinônimo de *soletramento*) refere-se à escolha dessa representação para uma nota dada, ou para as notas em um acorde dado. Os músicos preferem, em geral, que na música escrita haja certas regras no solfejo dos acordes.

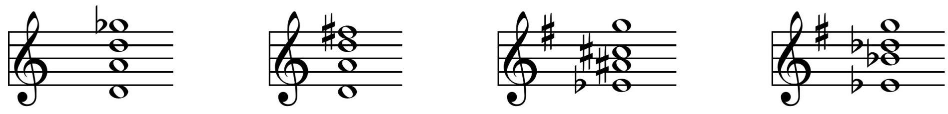
Para explicar o solfejo correto dos acordes, vamos adotar o termo *notas solfejadas* para se referir a uma nota ou classe nota como denotada. Notas solfejadas, então, diferenciam diferentes solfejos de notas diferentes que são harmonicamente iguais; Assim $A^\sharp$ é uma classe de nota solfejada diferentemente de $B^\flat$.

Além disso, para qualquer nota (classe) solfejada, definimos a sua *nota subjacente inalterada* (classe) como sendo a classe obtida por remoção dos acidentes da nota, na tonalidade padrão. Assim, na chave de C maior, A é a classe de nota subjacente inalterada de $A^\sharp$; Na tonalidade de B menor, $C^\sharp$ é a classe de nota subjacente inalterada de $C^\natural$. Obviamente, a nota inalterada subjacente, ou classe de nota, sempre está em um tom de escala diatônica.

Solfejo correto agora pode ser explicado da seguinte maneira: a terça de um acorde deve ser solfejada de modo que sua classe de nota subjacente inalterada corresponda a duas classes de escala de tom acima daquela da raiz; a quinta de um acorde deve ser solfejada de modo que sua classe de nota inalterada subjacente corresponda a quatro classes de escala de tom acima daquela da raiz; e a sétima de um acorde deve ser solfejada de modo que sua classe de nota inalterada subjacente corresponda a seis classes de escala de tom acima daquela da raiz.

Como um exemplo, se a raiz de um acorde maior é solfejada como $C^\sharp$, então sua terça deve ser solfejada como $E^\sharp$, não F. Abaixo estão dois exemplos de acordes mal solfejados seguidos pelo mesmo acorde harmônico com solfejo correto.

Observa-se que no primeiro exemplo (D) a terça é mal solfejada e no segundo exemplo ($\flat\mathrm{III}^7$) ambas a quinta e a sétima são mal solfejadas.

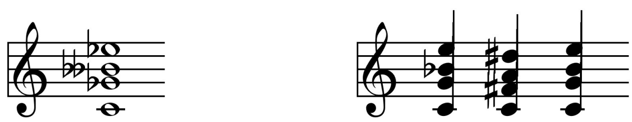


D mal solfejado   D $\flat\mathrm{III}^7$ mal solfejado $\flat\mathrm{III}^7$

Solfejo correto muitas vezes requer o uso de bemóis duplos, sustenidos duplos e notas não-diatônicas que possuem equivalentes harmonias diatônicas. Consideremos estes exemplos:

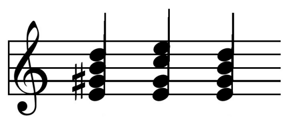
$\sharp\mathrm{II}^7$ em B maior $\flat\mathrm{III}$ em $A^\flat$ maior

Para acordes aumentados e de sétima diminuto, cujas raízes não podem ser determinadas apenas a partir das classes das alturas dos acordes, o solfejo correto identificará a raiz. As regras de solfejo, no entanto, tendem a ser seguidas com menos rigor para esses acordes, bem como para as tríades diminuídas. Observe, por exemplo, que o acorde I dim no exemplo é mal solfejado. O primeiro exemplo a seguir nos dá o solfejo correto de C^{07}. O acorde do meio, do segundo exemplo dá o mesmo acorde harmonicamente solfejado como $D\sharp^{07}$; Porém em alguns contextos (como o que aparece aqui) este acorde pode ser visto como um erro de solfejo de C^{07}.



C^{07} C^7 ? C^7

No exemplo a seguir, o acorde médio, por causa do contexto, provavelmente seria rotulado como E aum, embora seja solfejado como C aum (aqui o sustenido aplica-se de fora a fora, pois não há linha de barra) para permitir que a quinta aumentada seja escrita diatonicamente como C em vez de B♯.



E^7 ? E^7

Em alguns casos, a música dá um nome diferente a um solfejo alternativo de um acorde. Não nos aprofundaremos, mas um exemplo que vem à mente é o sexto acorde aumentado, que é harmonicamente equivalente à sétima como um sexto aumentado, como no primeiro acorde do exemplo a seguir.

Não discutiremos a questão de quando e por que o acorde pode ser escrito como um sexta aumentada em vez de acorde em sétima, exceto para dizer que ele aparece em um papel "dominante", isto é, quando conduz ao redor do círculo de quintas (veja figura 4.1 a seguir)[1], ele deve ser sempre solfejado como um acorde em sétima.

Finalmente, deve-se admitir que os acordes são intencionalmente por vezes solfejados incorretamente para tornar a voz mais natural e/ou legível ao vocalista ou instrumentista.

4.16 Progressões

O "caráter" musical é criado em parte pela maneira como tipos de acordes são organizados e justapostos em tempo real. O procedimento de um acorde ao próximo é chamado de *progressão*. Uma certa quantidade de satisfação musical é obtida meramente a partir de uma sequência de progressões agradáveis ou cativantes. Certos padrões são comuns, dando assim clichês musicais que são muito familiares para a maioria dos ouvintes.

Um exemplo clássico é uma progressão na qual a raiz se move no sentido anti-horário ao redor do círculo de quintos, ilustrado acima.

Observe que, à medida que avançamos no sentido horário, as progressões sobem um quinto, ou, equivalentemente, módulo oitava, abaixo em um quarto; à medida que avançamos no sentido antihorário as progressões são um quarto acima, ou uma quinta abaixo. Nota-se também que cada tom da escala cromática ocupa uma e apenas uma posição de relógio. Diremos mais sobre isso adiante.

[1]Como mencionado anteriormente, as ilustrações desta dissertação, relacionadas a conceitos musicais, tem como fonte Wright [1].

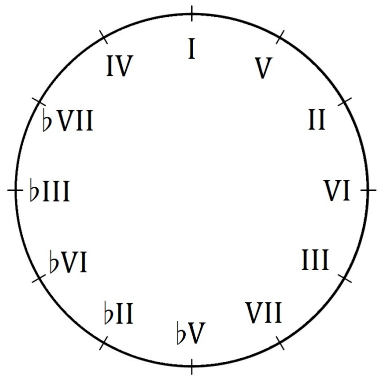


Figura 4.1: O Círculo de quintas.
Fonte da ilustração: [1].

A progressão clássica do círculo de quintas é aquela em que a raiz de um acorde é uma quarta acima da raiz do acorde precedente. Em outras palavras, o movimento da raiz vai no sentido anti-horário, como na sequência de progressão no modo maior,

$$\mathrm{VI}^7 \rightarrow \mathrm{IIm} \rightarrow \mathrm{V}^7 \rightarrow \mathrm{I}$$

Muitas vezes, uma melodia sugere os acordes que devem subjazê-la, oferecendo uma sequência de notas que se encontram principalmente dentro de um certo acorde. Às vezes esta "harmonia implícita" básica pode ser artisticamente alterada ou aprimorada. Por exemplo, esta melodia, em F maior:

é confortavelmente acomodada pela sequência $\mathrm{I} \rightarrow \mathrm{V}^7 \rightarrow \mathrm{I}$ (ou $\mathrm{F} \rightarrow \mathrm{C}^7 \rightarrow \mathrm{F}$), Cada acorde sustentado ou tocado em *arpeggio* para um compasso. Todas as notas melódicas estão dentro dos respectivos acordes, exceto para o D no segundo compasso, que não se encontra em C^7. Mas observa-se que as seguintes harmonizações também funcionam:

$$\mathrm{I} \rightarrow \mathrm{IIm} \rightarrow \mathrm{IIIm}$$
$$\mathrm{I} \rightarrow \mathrm{IV} \rightarrow \mathrm{V}$$
$$\mathrm{I} \rightarrow \flat\mathrm{VII} \rightarrow \mathrm{I}$$
$$\mathrm{I} \rightarrow \flat\mathrm{VII} \rightarrow \mathrm{V}$$

cada uma dando à passagem uma personalidade diferente.

5 Razões e Intervalos Musicais

Em música, geralmente pensa-se em um intervalo como a "distância" entre duas alturas. o intervalo mais básico é a oitava. Se alguém ouvir as alturas $440\text{Hz}(A_4)$ e 880Hz, reconhecerá a última como sendo uma oitava acima do primeira, portanto 880 Hz é A_5. O tom 220 é uma oitava abaixo de A_4, portanto é A_3. A diferença entre as frequências de A_3 e A_4 é de 220, enquanto a diferença entre as frequências de A_4 e A_5 é 440, contudo os intervalos são os mesmos menos uma oitava. Isso reflete o fato de que a oitava corresponde a um fator de 2, e que um intervalo não deve estar associado à diferença entre as duas frequências, mas sim à razão entre as duas frequências.

5.1 A relação de equivalência de razões

Considere a relação no conjunto dos pares ordenados de $\mathbb{R}^+$ (isto é, o conjunto $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ = (\mathbb{R}^+)^2$, na qual dois pares (a, b) e (a', b') estão relacionados se as razões de suas coordenadas forem iguais, ou seja, se $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$, o que equivale a dizer $a'b = ab'$. É fácil verificar que isto define uma relação de equivalência em $(\mathbb{R}^+)^2$. Denotamos a classe de equivalência de $(a, b) \in (\mathbb{R}^+)^2$ por $(a : b)$, ou às vezes apenas $a : b$, e a chamamos de razão de a por b. Observamos, por exemplo, que $(2 : 3) = (4 : 6) = (\frac{1}{2} : \frac{3}{4})$. Denotando o conjunto quociente da relação, ou seja o conjunto das classes de equivalência por $(\mathbb{R}^+ : \mathbb{R}^+)$, vemos que a função:

$$\varphi : (\mathbb{R}^+ : \mathbb{R}^+) \to \mathbb{R}^+ \text{ definida por } \varphi((a : b)) = \frac{a}{b} \tag{5.1}$$

está bem-definida, e que é bijetora.

5.2 A razão associada a um intervalo

Como identificamos o conjunto $\mathbb{R}^+$ com o conjunto de alturas, ou frequências, a relação de equivalência definida acima se aplica a pares de notas (f_2, f_1), colocando tal par numa classe de equivalência $f_2 : f_1$, que está associada através de φ ao número real $r = \frac{f_2}{f_1}$, que também chamamos de razão de f_2 para f_1. Este número r é uma medida do intervalo da altura f_1 à altura f_2. Iremos nos referir a r e à classe correspondente $f_2 : f_1$ como o intervalo, ou razão de intervalo, determinado pelas frequências f_1 e f_2. Assim, cada $r \in \mathbb{R}^+$ dá um único intervalo. Um exercício esclarecedor é ouvir os intervalos determinados por várias razões r, tais como 3, $3/2$, $\sqrt{2}$, $0,7$ e mesmo números transcendentes $\pi \approx 3,1415926535$ e $e \approx 2,718281828$.

5.3 Orientação de intervalos

Os intervalos possuem uma orientação para cima ou para baixo. Dizemos que o intervalo dado por alturas (f_2, f_1) (que lemos como o intervalo de f_1 para f_2) é orientado para cima se $f_2 > f_1$ e para baixo se $f_2 < f_1$. Como estamos em $\mathbb{R}^+$, no primeiro caso temos $\frac{f_2}{f_1} > 1$ e no segundo caso $\frac{f_2}{f_1} < 1$. Assim, os intervalos ascendentes são dados pelos números reais x que são maiores do que 1, já os intervalos descendentes são dados pelos números reais positivos x que são menores que 1.

$$\text{Conjunto de intervalos descendentes} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\} = (0, 1)$$

$$\text{Conjunto de intervalos ascendentes} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x\} = (1, \infty)$$

O intervalo criado quando $f_1 = f_2$ será aqui chamado de intervalo uníssono. Isto é dado pela razão $f : f$ (para qualquer $f \in \mathbb{R}^+$), que corresponde, via φ, ao número 1. Cada intervalo $f_2 : f_1$ tem um único intervalo oposto, dado pela razão $f_1 : f_2$. É o intervalo que tem a mesma "distância" na direção oposta: se $f_2 : f_1$ é ascendente então $f_1 : f_2$ é descendente, e vice-versa. Se $r \in \mathbb{R}^+$ é o número real de um intervalo, então seu intervalo oposto tem razão r^{-1}. Se a orientação de um intervalo não for indicada, será assumido que significa um intervalo ascendente. Por exemplo, se dissermos "o intervalo de uma quarta" será tomado para significar "o intervalo ascendente de uma quarta".

5.4 Multiplicatividade

Observemos que os intervalos têm as seguintes propriedades multiplicativas:

Se x_1 representa o intervalo $f_2 : f_1$ e x_2 o intervalo $f_3 : f_2$, então $x_1 x_2$ representa o intervalo $f_3 : f_1$. Isto é óbvio, pois $x_1 x_2 = \frac{f_2}{f_1}\frac{f_3}{f_2} = \frac{f_3}{f_1}$.

Assim, o resultado de justapor dois intervalos, isto é, seguir um intervalo por outro, é dado pela multiplicação dos dois números reais correspondentes.

5.5 Medições multiplicativas e aditivas

A medição de intervalos por razão é chamada multiplicativa, por causa da propriedade declarada acima. As medições usuais de intervalos, como semitons, passos ou oitavas, são chamadas aditivas porque quando nós justapomos dois intervalos pensamos em adicionar ou subtrair. Por exemplo, dizemos que 2 semitons mais 3 semitons são iguais a 5 semitons; uma quinta é uma terça maior mais uma terça menor; um semitom é uma sexta maior menos uma sexta menor. Mostraremos adiante como esta noção mais convencional de intervalo se relaciona à noção multiplicativa de um intervalo como uma razão.

5.6 Semitons

O princípio da multiplicatividade permite determinar qual número real dá o intervalo de um semitom. Vamos denotar este número por s. Uma vez que doze iterações desse intervalo dão a oitava, que tem razão 2, devemos ter $s^{12} = 2$, que equivale (uma vez que s é positivo) $s = 2^{1/12} = \sqrt[12]{2}$.

Se iteramos esse intervalo n vezes para obter n semitons, a razão será $(2^{1/12})^n = 2^{n/12}$. É natural estender esta fórmula de conversão para um intervalo, medido em semitons, x, para qualquer $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\boxed{\text{O intervalo de } x \text{ semitons tem razão } 2^{x/12}.} \tag{5.2}$$

Isto simplesmente decorre do fato de que $(2^{1/12})^n = 2^{n/12}$.

Exemplos. O intervalo de uma terça maior (4 semitons) tem a razão de

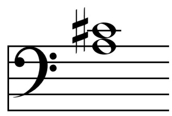
$2^{4/12} = 2^{1/3} = \sqrt[3]{2} \approx 1,259921.$

O intervalo de uma terça menor (−3 semitons) tem a razão de

$2^{-3/12} = 2^{-1/4} = 1/\sqrt[4]{2} \approx 0,840896.$

5.7 Frequência das notas de teclado

Se uma nota N tem frequência f e um intervalo tem razão r, a nota que fecha um intervalo r de N tem frequência rf. Dado que A_4 é sintonizado a 440 Hz, agora podemos usar uma calculadora para obter a frequência de qualquer outra nota no teclado. Por exemplo, usando o cálculo acima da proporção da terça maior como $2^{1/3}$, calculamos em hertz a frequência f de $C_4^\sharp$, que se encontra uma terça maior acima de A_3.



Como A_3 tem uma frequência de 220 Hz (sendo uma oitava abaixo de A_4) temos

$$f = 220 \cdot 2^{1/3} \approx 277,18$$

Portanto $C_4^\sharp$ deve ser afinado em $277,18$Hz.

5.8 Micro-afinações e centésimos

Veremos adiante que a afinação matemática envolve intervalos que não podem ser realizados como múltiplos inteiros de semitons. O termo micro-afinação refere-se a sistemas de afinação que alteram as frequências das notas na escala cromática igualmente temperada, ou que adicionam novas notas a essa escala.

Para isso, o semitom é dividido em 100 intervalos iguais, a subdivisão sendo chamada um centésimo. Assim, 1200 iterações desse intervalo dão uma oitava. O intervalo de um centésimo é tão pequeno que é imperceptível para a maioria de nós. Até o intervalo de 10 centésimos é difícil de se perceber. Portanto, a medição de intervalos em centésimos é suficientemente boa para ser bastante satisfatória para micro-afinação. Os centésimos, como os semitons e as oitavas, são uma medida aditiva dos intervalos.

5.9 Conversão de centésimos em uma razão

Denotando por c a razão correspondente a um centésimo, então como fizemos com semitons, temos $c^{1200} = 2$, ou seja, $c = 2^{1/1200} \approx 1,0005778$. Para qualquer número x (não necessariamente um inteiro), o intervalo de x centésimos tem a razão r dada por:

$$r = c^x = (2^{1/1200})^x = 2^{x/1200}$$

Assim $r = 2^{x/1200}$ dá a conversão de x centésimos para a uma razão r.

$$\boxed{\text{O intervalo de } x \text{ centésimos tem razão } 2^{x/1200}.} \tag{5.3}$$

Essa relação nos permite converter centésimos a uma razão usando uma calculadora científica. Por exemplo, o intervalo de 17 centésimos corresponde ao número $2^{17/1200} \approx 1,009868$.

5.10 Unidades cromáticas arbitrárias

Suponha que n é um número inteiro positivo e desejamos dividir a oitava em n subintervalos iguais, que chamaremos de unidades n-cromáticas. O mesmo raciocínio que levou às fórmulas (5.2) e (5.3) nos diz que:

$$\boxed{\text{O intervalo de } x \text{ unidades } n\text{-cromáticas tem razão } 2^{x/n}.} \tag{5.4}$$

5.11 Equivalência por oitavas de razões de intervalos

Por definição, dois intervalos são equivalentes módulo oitava se diferirem por um intervalo de n oitavas, para algum $n \in \mathbb{Z}$. A diferença de dois intervalos é o resultado da justaposição do primeiro com o oposto do segundo. Se os intervalos são dados pelas razões r_1 e r_2, Esta diferença é dada pela razão de intervalos $r_1 r_2^{-1}$. O intervalo de n oitavas tem razão 2^n. Assim temos:

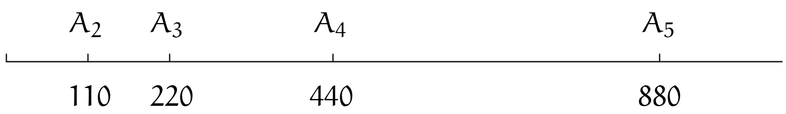
Proposição 1. Duas razões de intervalo r_1 e r_2 são equivalentes módulo oitava se, e somente se, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $r_1 r_2^{-1} = 2^n$.

Por exemplo, as razões de intervalo 41 e 328 são equivalentes módulo oitava, pois $41 \cdot 328^{-1} = \dfrac{41}{328} = \dfrac{1}{8} = 2^{-3}$.

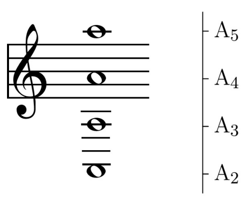
5.12 Conversão para medidas aditivas

Nós precisaremos eventualmente sermos capazes de converter a medida da razão de um intervalo musical para uma medida aditiva como centésimos ou semitons. Suponhamos que nos é dada uma razão r para ser convertida em centésimos.

Nesta situação devemos resolver em x a equação $r = 2^{x/1200}$. Isso requer tomar *logaritmos*, um tópico que será visto e desenvolvido na próxima seção. A seguinte observação nos dá motivação adicional para evocar logaritmos. Se plotarmos alturas em um eixo de acordo com suas frequências, veremos que os intervalos musicais não são representados como distâncias ao longo do eixo. Por exemplo, as notas A_2, A_3, A_4 e A_5 aparecem como:



As distâncias no eixo de frequências entre A_n e A_{n+1}, para vários inteiros n são diferentes embora os intervalos musicais sejam todos iguais a uma oitava. Isso é um pouco insatisfatório, pois estamos acostumados a pensar que dois pares de alturas que representam o mesmo intervalo como separados pela mesma distância, que é mais ou menos a situação em uma pauta musical, em que a "distância" vertical entre cada A sucessivo, anotado na mesma pauta, parece ser o mesmo:



No entanto, se plotarmos as alturas de acordo com os logaritmos de suas frequências, obteremos um resultado mais satisfatório. O logaritmo também nos permitirá dar a medida em semitons de um intervalo expresso como uma razão r ou dado por uma razão de duas frequências $f_1 : f_2$.

5.13 Vibração de cordas

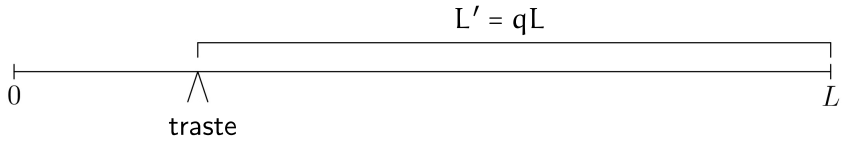
Sabia-se pelos antigos gregos que a frequência de vibração de uma corda é inversamente proporcional ao comprimento da corda, desde que a tensão na corda e o peso da corda por unidade de comprimento permaneçam as mesmas. Isto diz qual a relação entre o comprimento L e a frequência F, que pode ser expressa como:

$$F = \frac{k}{L} \tag{5.5}$$

para algum $k \in \mathbb{R}^+$.

Alguns instrumentos de cordas, como guitarras, têm trastes para que o comprimento da corda e, portanto, a altura que soa quando tocada, pode ser alterada no desempenho. Isto é efetuado com um maior grau de liberdade em instrumentos de cordas que não têm um traste, como violinos, onde o dedo do instrumentista segura a corda firmemente contra o braço do instrumento, mudando assim o comprimento da porção vibratória dela.

Consideremos como o traste (ou, equivalentemente, a posição do dedo, no braço do instrumento, de um instrumentista em um instrumento sem trastes) pode ser posicionada para causar uma mudança de frequência. Suponha que a corda tem comprimento L e sua frequência é F. Visualize a corda esticando horizontalmente, e suponha que uma casa está posicionada à distância L′ da, digamos, extremidade direita da corda:



Queremos calcular a razão de intervalos $F' : F$, onde F' é a frequência do segmento de corda à direita do traste. Este segmento tem comprimento L', então por (5.5) temos:

$$F' : F = \left(\frac{k}{L'} : \frac{k}{L}\right) = \left(\frac{1}{L'} : \frac{1}{L}\right) \tag{5.6}$$

que corresponde, através da função φ definida em (5.1) ao número

$$\varphi(F' : F) = \frac{\frac{1}{L'}}{\frac{1}{L}} = \frac{L}{L'} \tag{5.7}$$

.

Se L' é expresso em termos da sua proporção para L, isto é, $L' = qL$, a fração torna-se

$$\frac{L}{L'} = \frac{L}{qL} = \frac{1}{q}$$

Juntando tudo isso, temos:

$$\frac{F'}{F} = \frac{1}{q} \tag{5.8}$$

Então, suponha que queremos colocar um traste para mover a altura para cima por uma razão especificada $r \geq 1$. Isto quer dizer que $r = \frac{F}{F'} = \frac{1}{q}$, por (4.6), portanto

$$q = r^{-1} \tag{5.9}$$

Exemplo. Suponha que queremos colocar um traste para mover a altura para cima uma terça maior acima de F. Uma vez que a terça maior tem razão $r = 2^{1/3}$, temos $q = (2^{1/3})^{-1} = 2^{-1/3} \approx 0,7937$. A posição do traste é $(0{,}7937)L$, que está perto de $(0{,}8)L = \frac{4}{5}L$.

6 Logaritmos e Intervalos Musicais

O logaritmo permite converter as razões em centésimos ou semitons, que são as representações mais naturais dos intervalos. Vamos rever alguns fatos básicos sobre logaritmos. Na discussão que segue, b é um número real tal que $b > 0$ e $b \neq 1$, servindo como a base do logaritmo.

6.1 Expoentes

Seja n um inteiro positivo, então b^n é o produto $\overbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}^{\text{n termos}}$, $b^{-n} = \dfrac{1}{b^n}$, e para $n \geq 2$, $b^{1/n} = \sqrt[n]{b}$. Esses fatos, juntamente com a regra dos expoentes

$$b^{st} = (b^s)^t$$

dão significado a b^x para todos os números racionais x. Por exemplo, $b^{-2/3}$ pode ser calculado da seguinte maneira

$$b^{-2/3} = b^{(-2)\cdot(\frac{1}{3})} = (b^{-2})^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{b^2}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{b^2}}$$

6.2 Funções exponenciais.

Um conceito do cálculo, o limite, fornece uma definição de b^x para todos os números reais x de tal forma que $f(x) = b^x$ seja uma função contínua (o conceito de continuidade será discutido no Capítulo 11), seu domínio é o conjunto de números reais $\mathbb{R}$ e, já que $b > 0$ e $b \neq 1$, sua imagem é o conjunto de valores positivos dos números reais $\mathbb{R}^+$, de modo que a função exponencial pode ser definida como

$$\begin{aligned} f\colon\ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto f(x) = b^x \end{aligned} \tag{6.1}$$

A função exponencial define uma correspondência um-a-um entre os conjuntos $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^+$, pois para $b > 1$ a função é crescente, sendo $\lim\limits_{x\to+\infty} b^x = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} b^x = 0$. Para $0 < b < 1$ é decrescente e os valores dos limites no infinito são trocados. O gráfico de $f(x) = b^x$, para $b > 1$, tem qualitativamente a forma indicada na figura 6.1.

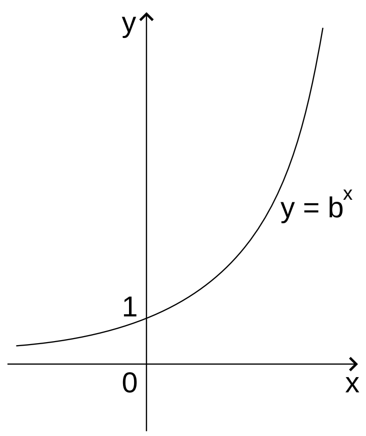


Figura 6.1: Gráfico de $f(x) = b^x$, $b > 1$.

O número b é chamado de base da função exponencial. Será sempre um número real positivo, e no nosso contexto será maior do que 1.

6.3 Funções Logarítmicas.

Uma vez que a função $f(x)$ é um-a-um e sobrejetora , ela tem uma função inversa. A função $g(x) = \log_b x$ é definida como a função inversa de $f(x) = b^x$, ou seja, $f(g(x)) = x$, o que significa que $b^{\log_b x} = x$ e $g(f(x)) = x$, o que significa que $\log_b(b^x) = x$. Assim, a igualdade $\log_b x = y$ é equivalente à igualdade $b^y = x$.

O domínio da função g (que é a imagem de f) é $\mathbb{R}^+$; A imagem de g (que é o domínio de f) é $\mathbb{R}$. Assim define-se a função logaritmo de base b,

$$\begin{aligned} g\colon\ \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g(x) = \log_b x \end{aligned} \tag{6.2}$$

O gráfico de $g(x) = \log_b x$ obtém-se por reflexão do gráfico de $f(x) = b^x$ através da reta $y = x$ (fenômeno geométrico que ocorre para funções reais de variáveis reais f e g quando uma é inversa da outra). Novamente assumindo $b > 1$, vemos que $g(x) = \log_b x$ é crescente, portanto, um-a-um, cujo gráfico tem qualitativamente a forma ilustrada na figura 6.2.

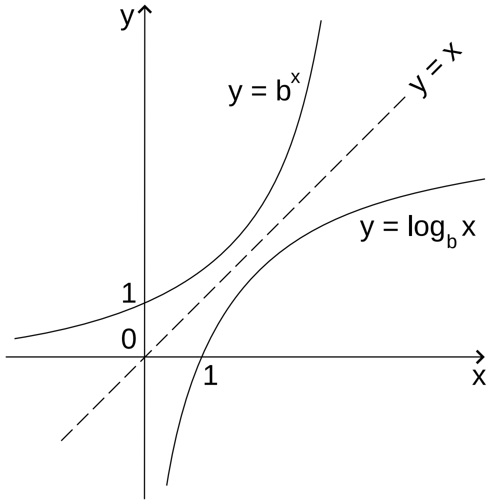


Figura 6.2: Gráficos de $f(x) = b^x$ e $g(x) = \log_b x$, $b > 1$.

O número b é chamado de base do logaritmo. Lembrando que b é sempre positivo, e, no nosso contexto, $b > 1$.

Se reconhecermos um número x como uma potência de b então podemos dizer imediatamente o valor de $\log_b x$. Por exemplo, $\log_3 9 = 2$ (pois $3^2 = 9$) e $\log_b \sqrt{b} = \frac{1}{2}$ (pois $b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b}$).

6.4 Propriedades dos logaritmos.

Em certo sentido, os logaritmos transformam multiplicação em adição, e é por isso que eles são úteis na compreensão da medição de intervalos. As propriedades básicas que estão subjacentes a isto são:

$$\boxed{\log_b xy = \log_b x + \log_b y} \tag{6.3}$$

$$\boxed{\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y} \tag{6.4}$$

$$\boxed{\log_b x^p = p \log_b x} \tag{6.5}$$

para quaisquer números reais positivos x e y e qualquer número real p.

A Propriedade (6.3) deriva da lei dos expoentes $b^{s+t} = b^s b^t$ como segue:

Sejam $s = \log_b x$ e $t = \log_b y$. Temos então $b^s = x$, $b^t = y$, e daí

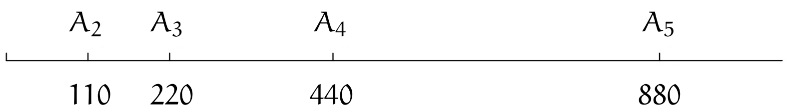
$$b^{s+t} = b^s b^t = xy$$

Mas $b^{s+t} = xy$ significa $\log_b xy = s + t$, provando (6.3).

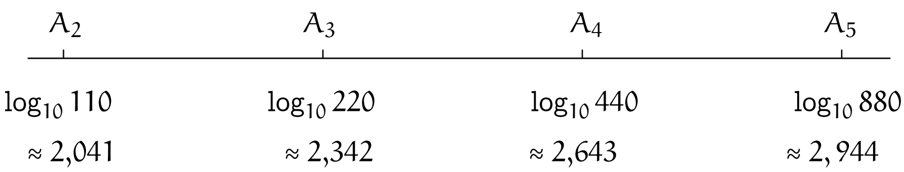
6.5 Escala logarítmica para as alturas

A propriedade (6.4) nos garante um resultado satisfatório se plotarmos as alturas em um eixo correspondente aos logaritmos de suas frequências: Pares de alturas que tem o mesmo intervalo estarão à mesma distância entre eles no eixo. Supondo que alturas (ou seja, frequências) x e y criam o mesmo intervalo que x' e y'. Isto significa que a razão das frequências é a mesma, i.e., $x/y = x'/y'$. De acordo com (6.4), então, temos $\log_b x - \log_b y = \log_b x' - \log_b y'$, que diz que a distância entre $\log_b x$ e $\log_b y$ é igual à distância entre $\log_b x'$ e $\log_b y'$.

Quando fizemos a plotagem A_2, A_3, A_4 e A_5 de acordo com suas frequências obtivemos:



Se, em vez disso, plotarmos essas notas de acordo com o logaritmo de suas frequências descobriremos que eles estão igualmente espaçados. Por exemplo, escolhendo $b = 10$, obtemos:



6.6 Bases diferentes

Vamos precisar comparar logaritmos de diferentes bases. Se a é outro número positivo diferente de 1, temos a seguinte relação entre $\log_b x$ e $\log_a x$:

$$\boxed{\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}} \tag{6.6}$$

Isto é estabelecido como segue. Sejam $u = \log_a x$, $v = \log_b x$, e $w = \log_a b$. Então $a^u = x$, $b^v = x$ e $a^w = b$. As duas últimas equações nos dão que $x = (a^w)^v = a^{wv}$ Isto estabelece que $wv = \log_a x = u$ da qual (6.6) é imediata.

O resultado é que as funções $\log_b x$ e $\log_a x$ são proporcionais como funções, com constante de proporcionalidade $1/\log_a b$.

Por exemplo, se compararmos os gráficos de $g(x) = \log_6 x$ e $h(x) = \log_3 x$ vemos que este último é obtido pelo "esticamento" do primeiro verticalmente por um fator de $\log_3 6 \approx 1{,}631$.

6.7 Cálculo usando o logaritmo natural

Os cientistas preferem o logaritmo natural, que tem como base o número transcendente e, aproximado por $2{,}71828$. Este número e o logaritmo que tem ele como base são altamente significativos na matemática, por razões que não serão explicadas aqui. É comum denotar $\log_e x$ por $\ln x$. Qualquer calculadora que tenha $\ln$ como uma função fornecida pode ser usada para calcular qualquer logaritmo, usando (6.6). Definindo $a = e$ a fórmula fica:

$$\boxed{\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}} \tag{6.7}$$

Da mesma forma, pode-se calcular qualquer logaritmo usando $\log_{10}$, que é fornecido por muitas calculadoras.

6.8 Convertendo intervalos de medição multiplicativo para medição aditiva

Suponha que queremos que o intervalo de oitava apareça como uma distância 1 no eixo logarítmico. Se duas frequências x e y são uma oitava separadas, x sendo a maior frequência, então sabemos que $x/y = 2$. Necessitamos, então que ocorra

$$1 = \log_b x - \log_b y = \log_b (x/y) = \log_b 2$$

Mas $\log_b 2 = 1$ significa $b^1 = 2$, isto é, $b = 2$. Portanto 2 é a nossa base desejada.

Voltando a um problema apresentado na última seção, suponhamos que temos um intervalo musical representado como uma razão r e queremos convertê-la em uma das medidas padrão para intervalos tais como oitavas, tons, semitons ou centésimos. Observamos que se x é a medida do intervalo em centésimos, então $r = 2^{x/1200}$. Aplicando a função $\log_2$ a ambos os lados desta equação resulta em $\log_2 r = \log_2 (2^{x/1200}) = x/1200$, i.e., $x = 1200 \log_2 r$. Portanto:

$$\boxed{\text{A razão de intervalos } r \text{ é medida em centésimos por } 1200 \log_2 r.} \tag{6.8}$$

Um raciocínio semelhante nos mostra que:

$$\boxed{\text{A razão de intervalos r é medida em semitons por } 12 \log_2 r.} \tag{6.9}$$

e que:

$$\boxed{\text{A razão de intervalos r é medida em oitavas por } \log_2 r.} \tag{6.10}$$

Usando (6.6) podemos fazer essas conversões usando qualquer base. Por exemplo, se a nossa calculadora fornece apenas o logaritmo natural, apelamos a (6.7) para fazer a conversão avaliando $x = 1200 \log_2 r$ como

$$x = 1200 \left(\frac{\ln r}{\ln 2} \right)$$

Observa-se que se r é menor que 1, então $\ln r < 0$, portanto, a medida x em centésimos é negativa. Isso é lógico, pois se r é o intervalo da frequência f_1 à frequência f_2 temos $r = f_2/f_1 < 1$. Isto diz que f_2 é menor que f_1, de modo que o intervalo em centésimos é dado por um número negativo.

Observamos que as conversões em (6.8) e (6.9) podem ser expressas como $\log_b r$ para uma base apropriada b. Por exemplo, se queremos expressar a razão r como x semitons, temos

$$r = 2^{\frac{x}{12}} = \left(2^{\frac{1}{12}}\right)^x = \left(\sqrt[12]{2}\right)^x$$

Aplicando $\log_b$ com $b = \sqrt[12]{2}$ obtemos

$$x = \log_{\sqrt[12]{2}} r$$

Exemplo. Vamos medir, em centésimos, o intervalo dado pela razão 3/2 e encontrar o intervalo cromático que melhor se aproxima desse intervalo. Se x é a medida em centésimos, temos

$$\begin{aligned} x &= 1200\left(\frac{\ln(3/2)}{\ln 2}\right) \\ &= 1200\left(\frac{\ln 3 - \ln 2}{\ln 2}\right) && \text{(devido a 6.4)} \\ &= 1200\left(\frac{\ln 3}{\ln 2} - 1\right) \\ &\approx 701{,}955 && \text{(usando-se uma calculadora)} \end{aligned}$$

Assim, a razão 3/2 é muito próxima de 702 centésimos. Uma quinta é de 700 centésimos (o mesmo que 7 semitons), então nosso intervalo é 2 centésimos maior que uma quinta. Uma quinta é o intervalo cromático que dá a melhor aproximação.

7 Escalas Cromáticas

Como vimos, o intervalo de uma oitava é dado por uma razão de dois para um de frequências.

Duas alturas separadas por uma oitava, tocadas simultaneamente, apresentam ao ouvido um padrão de dois-para-um, que o cérebro reconhece facilmente como uma consonância agradável. Portanto, é fácil entender o que levou a música ocidental, bem como outras tradições musicais, abraçarem a oitava e incorporar oitavas em sua notação.

O que não é tão aparente, é o que levou à subdivisão da oitava em doze intervalos iguais, um costume que é menos universal, e que só foi aceito nos últimos 200 anos. É natural perguntarmos se a subdivisão da oitava em 12 intervalos iguais é puramente arbitrária, ou se algum fenômeno natural levou a música ocidental em direção a essa prática. Isso será discutido mais tarde.

Enquanto isso, podemos explorar o som de uma escala cromática que igualmente divide a oitava de forma diferente. Por exemplo, podemos querer projetar e ouvir uma escala cromática que divide a oitava em 19, 10 ou 5 intervalos iguais.

7.1 Escalas cromáticas não padronizadas

Se obtemos uma unidade cromática dividindo a oitava em n intervalos iguais, em que n é um inteiro positivo, esta unidade medida como uma razão é $2^{\frac{1}{n}}$, e medida em centésimos é $1200/n$. Nos referiremos à escala cromática resultante como a *escala n-cromática* e o menor intervalo cromático (= $\frac{1}{n}$ oitavas) como a *unidade n-cromática*. Assim, a unidade 12-cromática é o semitom habitual. A unidade n-cromática é medida em centésimos por $1200/n$ e tem razão de intervalo $\sqrt[n]{2}$.

7.2 Desafinando

Muitos sintetizadores permitem que notas da escala cromática sejam desafinadas individualmente em centésimos, e esta característica permitirá vivenciar o som de tais escalas cromáticas não padronizadas em que $n < 12$.

Se escolhemos $n = 4$ o menor intervalo será 1200/4 = 300 centésimos, que é a terceira menor do teclado. Assim a escala pode ser tocada em um teclado sem desafinação. Por exemplo, em G tocaríamos $G, B\flat, D\flat$, e E. Para $n = 3$ o menor intervalo cromático seria a terça maior, e para $n = 6$ seria o tom (inteiro).

Se escolhemos $n = 5$, algum desafinamento é necessário. Poderíamos desafinar as notas A, B, C, D de forma que as cinco teclas G, A, B, C, D reproduzam a escala cromática de cinco notas. O intervalo em centésimos seria 1200/5 = 240. Precisamos do intervalo entre G e A sendo 240. O intervalo padrão é um tom, ou 200 centésimos, assim A deve ser desafinada para cima por 40 centésimos. B deve ser de 240 centésimos acima do A desafinado, assim B deve ser desafinada para cima por 80 centésimos. C, que por padrão (*default*) é apenas 100 centésimos acima do padrão B, terá de ser desafinada para cima por 220 centésimos. Desafinando D para cima em 260 centésimos completa-se a tarefa. Com isso realizado, e usando somente estas cinco notas, nós podemos escutar o som da escala cromática de cinco notas e experimentar com melodia e harmonia nesse ambiente de afinação.

7.3 Intervalos geradores

Agora daremos uma breve prévia de um tópico que será reintroduzido e desenvolvido nos capítulos 8 e 9. Para um número inteiro positivo fixado n, os *intervalos geradores* são aqueles intervalos n-cromáticos modulares I para o quais todos os intervalos n-cromáticos modulares possam serem expressos como iterações de I.

Veremos mais adiante que os intervalos geradores correspondem àqueles $[m] \in \mathbb{Z}_n$ que são geradores do grupo aditivo $\mathbb{Z}_n$, o que, será mostrado, é equivalente dizer que $\mathrm{mdc}(m, n) = 1$. Aqui, $\mathrm{mdc}(m, n)$ denota o *máximo divisor comum de* m *e* n, a ser discutido no capítulo 9. É definido, como o próprio nome diz, como o maior inteiro que é divisor de ambos m e n. Os matemáticos definem separadamente $\mathrm{mdc}(0, 0) = 0$.

Dois números m e n são chamados relativamente primos, ou primos entre si, se $mdc(m, n) = 1$. Na Teoria dos Números, a *função fi de Euler*, ϕ é definida como a função $\phi: \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$, que associa cada inteiro positivo n ao número de inteiros positivos m satisfazendo $m < n$ e $mdc(m, n) = 1$.

Assim $\phi(n)$ também conta o número de intervalos geradores na n-escala igualmente temperada. Para qualquer tal I o "círculo" baseado em I (o significado disso ficará claro no exemplo abaixo) contém todos os intervalos na escala cromática.

Exemplo. Considere o caso $n = 14$. Os números 1, 3, 5, 9, 11 e 13 são os inteiros positivos, menores que 14, e que são relativamente primos com 14, assim $\phi(14) = 6$. Estes seis números, módulo 14, dão os seis intervalos geradores na escala 14-cromática. Para o intervalo I correspondente a $[5]$, seu círculo de intervalos é o da figura 7.1.

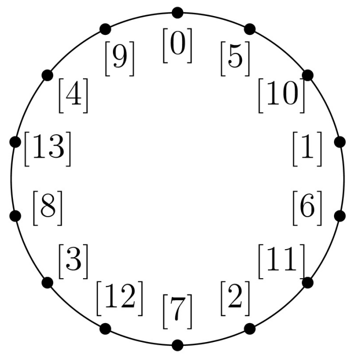


Figura 7.1: Círculo de intervalos do intervalo I correspondente a $[5]$.
Fonte da ilustração: [1].

7.4 Aproximando intervalos de teclado padrão

Determinemos quão próximo alguns dos intervalos padrão da escala 12-cromática padrão podem ser aproximados usando a escala 14-cromática. Claramente o tritom é precisamente 7 unidades cromáticas na escala 14, sendo metade de uma oitava.

Mais geralmente, ℓ semitons pode ser calculado por:

$$\ell \text{ semitons } = \ell \cdot \frac{14 \text{ unidades 14-cromáticas}}{12 \text{ semitons}} = \frac{7}{6}\ell \text{ unidades 14-cromáticas}$$

Por exemplo, o intervalo do teclado de uma quarta, sendo 5 semitons, é $\frac{7}{6} \cdot 5 = \frac{35}{6} \approx 5{,}833$ unidades 14-cromáticas. Por isso é melhor aproximado na escala 14 por 6 unidades. Agora, como a unidade cromática é 1/14-ésimos de uma oitava, é medida em centésimos por $1200/14 \approx 85{,}714$. Portanto 6 unidades é $6 \cdot (1200/14) \approx 514{,}29$ centésimos, que é 14,29 centésimos maior do que uma quarta.

Para calcular uma razão r em unidades 14-cromáticas, raciocinamos como segue:

A unidade 14-cromática tem razão $2^{\frac{1}{14}} = \sqrt[14]{2}$. Se x é a medida de r em unidades 14-cromáticas, então $r = (\sqrt[14]{2})^x = 2^{x/14}$. Resolvendo em x usando logaritmos, temos

$$x = 14 \cdot \log_2 r = 14 \cdot \frac{\ln r}{\ln 2}$$

Por exemplo, a razão $0,75$ é $14 \ln(0{,}75)/\ln 2 \approx -5{,}81$ unidades cromáticas (isto é, 5,81 unidades para baixo).

7.5 Música de doze tons

Nos anos 1920, Arnold Schoenberg (1874-1951) começou a desenvolver a técnica de composição de doze tons, um método que é fortemente baseado na subdivisão da oitava em 12 unidades iguais. Foi continuado por Anton Webern (1883-1945), Alban Berg (1885-1935), e Milton Babbitt (1916-2011). Aqui a consonância é largamente abandonada em favor da combinatória. Isso representa um tipo de *música serial*, que constrói música a partir de conjuntos das classes de notas.

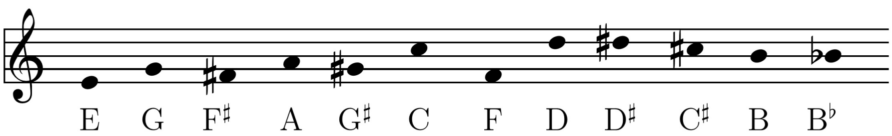
Uma composição de doze tons é baseada em uma tabela de linhas, que é uma matriz 12 por 12, com as seguintes propriedades:

- Cada entrada é uma das 12 classes de notas, módulo oitava.
- Cada linha e cada coluna contém cada classe de nota precisamente uma vez.
- Todas as entradas são obtidas da linha superior, chamada linha original, ou linha prima, como se segue.
  - A coluna mais à esquerda é a *inversão* da linha superior. Isto quer dizer que o intervalo (módulo oitava) da classe de notas superior esquerda à n-ésima entrada na coluna da esquerda é o oposto do intervalo da classe de nota superior esquerda à n-ésima entrada na linha superior.
  - As linhas subsequentes são *transposições* da linha superior. Elas são preenchidas começando com a entrada esquerda que foi definida anteriormente e transpondo

a primeira linha, de modo que o intervalo de entrada 1 à entrada m na n-ésima linha é o mesmo que o intervalo da entrada 1 à entrada m na primeira linha.

Quando terminamos, as colunas serão transposições da inversão da linha original, ou, de forma equivalente, inversões das várias transposições da linha original. A razão para este resultado é bastante óbvia, mas veremos exatamente por que isso acontece quando fizermos a conexão com a aritmética modular no próximo capítulo.

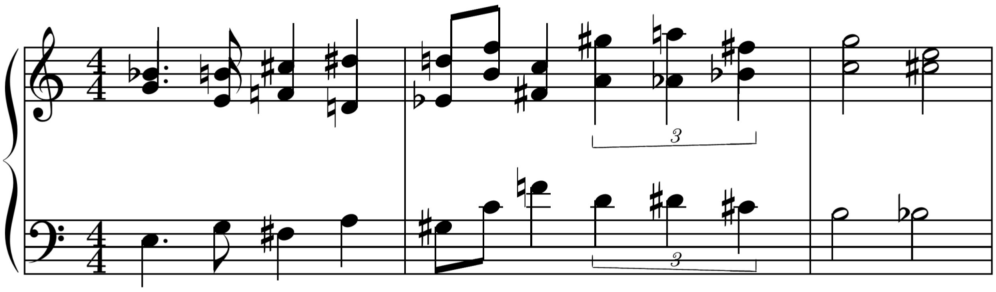
O número de linhas originais possíveis é $12! = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 479\,001\,600$, um número enorme o suficiente para tornar as possibilidades aparentemente infinitas. Como exemplo, considere esta sequência de classes de 12 notas:



O solfejo de notas em música de doze tons geralmente consiste em uma mistura de sustenidos e bemóis com nenhum padrão aparente. Observe acima que o sustenido é usado quatro vezes e o bemol uma vez. Como cada uma das 12 classes de notas aparece exatamente uma vez, esta se qualifica como uma linha original (superior), que gera o quadro de linhas da tabela 7.1.

O objetivo da composição de doze tons é criar uma composição musical que usa as sequências de classes de nota encontradas nas linhas e/ou colunas, ou tomando suas retrógradas, que invertem a ordem das sequências. As retrógradas são obtidas lendo as linhas da direita para a esquerda ou as colunas de baixo para cima.

Este exemplo, tomado de [3] (apud [1]), é baseado no quadro de linhas acima.



Observe que a sequência de notas na clave de fá é a linha original, a linha superior na clave de sol é a retrógrada da linha original e a linha de fundo na chave de sol é a segunda

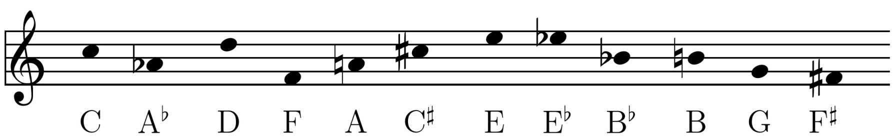
Tabela 7.1: Exemplo de tabela de linhas para composições de 12 tons.

E	G	F♯	A	G♯	C	F	D	D♯	C♯	B	B♭
C♯	E	D♯	F♯	F	A	D	B	C	B♭	G♯	G
D	F	E	G	F♯	B♭	D♯	C	C♯	B	A	G♯
B	D	C♯	E	D♯	G	C	A	B♭	G♯	F♯	F
C	D♯	D	F	E	G♯	C♯	B♭	B	A	G	F♯
G♯	B	B♭	C♯	C	E	A	F♯	G	F	D♯	D
D♯	F♯	F	G♯	G	B	E	C♯	D	C	B♭	A
F♯	A	G♯	B	B♭	D	G	E	F	D♯	C♯	C
F	G♯	G	B♭	A	C♯	F♯	D♯	E	D	C	B
G	B♭	A	C	B	D♯	G♯	F	F♯	E	D	C♯
A	C	B	D	C♯	F	B♭	G	G♯	F♯	E	D♯
B♭	C♯	C	D♯	D	F♯	B	G♯	A	G	F	E

coluna do gráfico de linhas, que é transposição da inversão. As sequências do quadro de linhas são aplicadas horizontalmente na música, muitas vezes produzindo o efeito de acordes dissonantes.

Uma vez que há pouca sensação de centro tonal, a música de doze tons é frequentemente escrita na chave de C. O solfejo pode ser diferente do que aparece no quadro de linhas (observe o A♭, em vez de G♯, no exemplo acima), e eles podem mudar durante a composição.

Às vezes as notas de uma sequência são montadas na forma vertical. Considere a seguinte linha original.



O exemplo a seguir, novamente tomado de [3] (apud [1]), emprega essa linha usando verticalmente grupos de classes de notas.

8 Identificação de Oitavas e Aritmética Modular

8.1 Identificação de oitavas

Como observamos anteriormente, a notação musical frequentemente, de forma implícita, iguala notas que diferem por um intervalo de m oitavas, em que m é um número inteiro. Neste cenário, a escala cromática contém todas as notas da notação musical padrão, das quais há doze. Partindo de C, nós podemos enumerá-las de 0 a 11 da seguinte forma:

(0) C

(1) $C\sharp = D\flat$

(2) D

(3) $D\sharp = E\flat$

(4) E

(5) F

(6) $F\sharp = G\flat$

(7) G

(8) $G\sharp = A\flat$

(9) A

(10) $A\sharp = B\flat$

(11) B

Claro que existem outras representações enarmônicas das classes de notas listadas acima, tais como $F = E\sharp$ e $A = B\flat\flat$.

Da mesma forma, identificamos intervalos que diferem em m oitavas, para algum inteiro m. Nessa perspectiva, subir uma oitava é o mesmo que o intervalo identidade. Daí o intervalo de uma quarta seguido pelo intervalo de uma quinta, produz o intervalo uníssono. Do mesmo modo subir duas quintas é o mesmo que subir um tom. Desta forma, os intervalos criados entre as notas na escala cromática (isto é, aqueles que podem ser medidos como múltiplos inteiros de um semitom) são parametrizados pelo grupo aditivo modular $\mathbb{Z}_{12}$ e iterar intervalos resulta em adicionar ou subtrair neste sistema algébrico. Vamos agora investigar este fenômeno.

8.2 Variações sobre o Princípio da Boa Ordem

Em breve daremos uma prova que irá apelar para o Princípio da Boa Ordem, que tomaremos como um axioma. Enunciamos quatro formulações diferentes desse princípio, que são facilmente vistas como equivalentes. A primeira é precisamente como foi dito no Capítulo 2. Na segunda formulação $\mathbb{Z}^-$ denota o conjunto de números inteiros estritamente negativos.

Um número real y é chamado de *limite inferior* de um conjunto não vazio T, de números reais, se $y \leq t$ para todo $t \in T$. Dizemos que, neste caso, T é limitado inferiormente (por y). Se adicionalmente $y \in T$, y é chamado de *mínimo* de T. Analogamente, definem-se os conceitos de limite superior, conjunto limitado superiormente, e máximo de um subconjunto S dos números reais.

As "variações" equivalentes do Princípio da Boa Ordem(PBO) que enunciaremos são as seguintes.

PBO.1 Qualquer subconjunto não vazio de $\mathbb{Z}^+$ possui um menor elemento, ou seja, um elemento mínimo.

PBO.2 Qualquer subconjunto não vazio de $\mathbb{Z}^-$ tem um maior elemento, ou seja, um elemento máximo

PBO.3 Qualquer subconjunto não vazio de $\mathbb{Z}$ que seja limitado inferiormente tem um menor elemento.

PBO.4 Qualquer subconjunto não vazio de $\mathbb{Z}$ que seja limitado superiormente tem um maior elemento.

8.3 Algoritmo da divisão generalizado

Agora, apresentamos uma versão mais geral do Algoritmo de Divisão do que a apresentada no capítulo 1. Nessa generalização permitimos que o "dividendo" x seja qualquer número real em vez de ser apenas um inteiro.

Proposição 8.1 (Algoritmo da divisão generalizado). *Dados* $m \in \mathbb{Z}^+$ *e* $x \in \mathbb{R}$ *existem* $q \in \mathbb{Z}$ *e* $r \in \mathbb{R}$ *com*

$$0 \leq r < m \tag{1}$$

de tal modo que

$$x = qm + r \tag{2}$$

Os elementos $q \in \mathbb{Z}$ *e* $r \in \mathbb{R}$ *são determinados de forma única por (1) e (2).*

Demonstração. Consideremos o conjunto $S = \{\ell \in \mathbb{Z} \mid \ell m \leq x\} \subset \mathbb{Z}$.

Sendo m inteiro positivo, a condição $\ell m \leq x$ é equivalente a $\ell \leq \frac{x}{m}$, e então temos que x/m é um limite superior para S.

Por **PBO.4**, S tem um maior elemento q. Devemos ter $q + 1 \notin S$, pela maximalidade de q e, portanto, temos

$$qm \leq x < (q+1)m = qm + m \tag{3}$$

Definindo $r = x - qm$, temos claramente $x = qm + r$, e subtraindo qm dos três membros de (3), temos $0 \leq r < m$ conforme desejado.

Quanto à unicidade de q e r, suponhamos que tenhamos ainda $q' \in \mathbb{Z}, r' \in \mathbb{R}$ tais que $x = q'm + r'$ e $0 \leq r' < m$. Então

$$\begin{aligned} x &= qm + r = q'm + r' \\ &\Rightarrow r - r' = q'm - qm = (q' - q)m \\ &\Rightarrow |r - r'| = m|q - q'| \end{aligned}$$

Sendo $0 \leq r < m$ e $0 \leq r' < m$, temos $|r - r'| < m$. Logo $m|q - q'| = |r - r'| < m$, do que se deduz $|q - q'| < 1$. Como $|q - q'|$ é inteiro não negativo, necessariamente $q - q' = 0$, logo $q = q'$, bem como também $r = r'$. □

8.4 Equivalência modular nos números reais

Seja m um inteiro positivo fixado. Dados números reais x e y, diremos que x é equivalente a y módulo m, ou simplesmente que x é equivalente a y (quando m está subentendido), se $x - y$ for um múltiplo de m em $\mathbb{Z}$, isto é, se existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $x - y = qm$, ou equivalentemente $x = y + qm$. Esta relação é denotada por $x \sim y$. De certa forma é uma congruência módulo m generalizada para os reais. Esta relação depende da escolha de m.

Proposição 8.2. *A relação $\sim$ define uma relação de equivalência no conjunto $\mathbb{R}$*

Demonstração. A demonstração segue os mesmos passos daquela em que demonstramos que a relação de congruência em $\mathbb{Z}$ é uma relação de equivalência. □

Sendo $\sim$ uma relação de equivalência em $\mathbb{R}$, $\sim$ divide (particiona) $\mathbb{R}$ em classes de equivalência.

Para $x \in \mathbb{R}$ denotemos por $\bar{x}$ a classe de equivalência de x. Assim, se $m = 8$ temos $\overline{13} = \overline{53} = \overline{-11}$ e $\overline{6{,}5} = \overline{-1{,}5}$.

Denotaremos o conjunto de classes de equivalência de $\sim$ por $\mathbb{R}/\sim$. Este é o *conjunto quociente* da relação de equivalência $\sim$.

A função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\sim$, que associa cada $x \in \mathbb{R}$ à sua classe de equivalência $f(x) = \bar{x} \in \mathbb{R}/\sim$ pode ser interpretada geometricamente como a função que "enrola" a linha numérica em torno de um círculo de comprimento m, de tal maneira que a distância é preservada como comprimento do arco (figura 8.1). Frequentemente fazemos isso de modo que a origem $x = 0$ é associada ao ponto no topo do círculo. Isso é ilustrado a seguir para o caso $m = 8$.

Assim, $\mathbb{R}/\sim$ é parametrizado pelo círculo da mesma forma que $\mathbb{R}$ é parametrizado pela reta. O Algoritmo da divisão generalizado afirma que para cada $x \in \mathbb{R}$, há precisamente um representante de classe de equivalência $r \in \bar{x}$ tal que $0 \leq r < m$, isto é, o número r para o

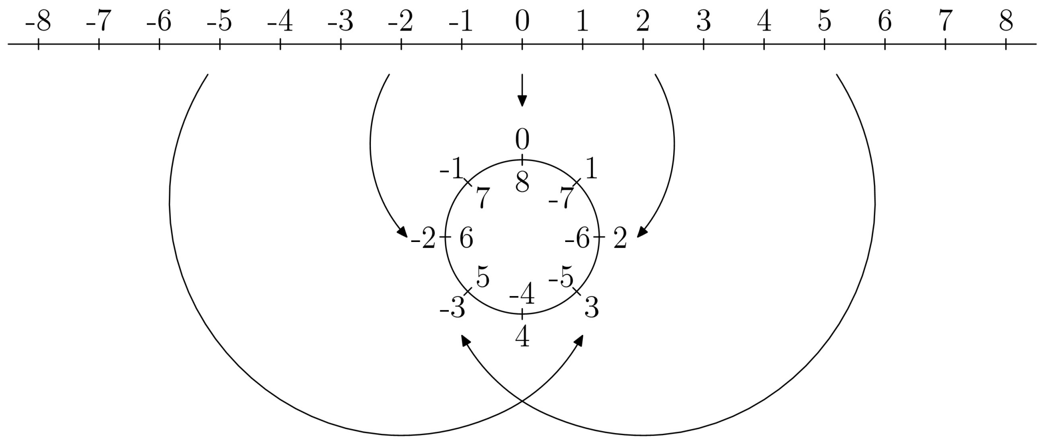


Figura 8.1: Interpretação geométrica da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\sim$, para $m = 8$.
Fonte da ilustração: [1].

qual $x = qm + r$ no algoritmo. Isto reflete no fato de que para qualquer ponto p no círculo há precisamente um ponto no Intervalo $[0, m)$ que se "enrola" sobre p.

8.5 Equivalência modular nos inteiros

Observemos que se $x \sim y$ e se $x \in \mathbb{Z}$ então $y \in \mathbb{Z}$. Portanto $\sim$ também restringe-se a uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}$. Denotamos por $\mathbb{Z}_m$ o conjunto de classes de equivalência de $\mathbb{Z}$ pela relação $\sim$. Elementos de $\mathbb{Z}_m$ são chamados *inteiros modulares* ou *inteiros módulo* m. Para $k, \ell \in \mathbb{Z}$ expressamos a condição $k \sim \ell$ por $k \equiv \ell \pmod{m}$.

Para $k \in \mathbb{Z}$, denotamos por $[k]$ a classe de equivalência contendo k. Note que o símbolo $[\ ]$ não faz referência a m, então novamente m deve sempre ser estabelecido e subentendido. Tenhamos em mente que $[k] = [\ell]$ se, e somente se, $m \mid (k - \ell)$ em $\mathbb{Z}$. Como exemplo, note que $5 \equiv 19 \pmod{7}$ e, portanto, $[5] = [19]$ em $\mathbb{Z}_7$. O conjunto $\mathbb{Z}_m$ é um subconjunto de $\mathbb{R}/\sim$, e pode ser visto como a imagem de $\mathbb{Z}$ pela função de "enrolamento" descrita acima. Se colocarmos m pontos igualmente espaçados sobre o círculo, esses pontos serão a imagem de $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/\sim$. Eles correspondem às classes $[0], [1], [2], \ldots, [m-1]$, que é todo $\mathbb{Z}_m$. Assim, elementos de $\mathbb{Z}_m$ podem ser vistos como "posições de relógio" no "relógio de m horas". Isto é ilustrado na figura 8.2, novamente para $m = 8$.

Introduzimos agora alguns conceitos da álgebra abstrata que serão úteis nesta discussão.

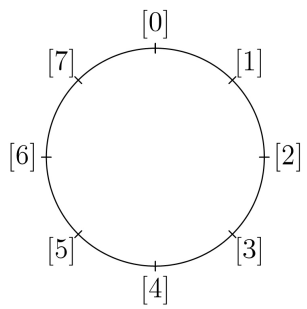


Figura 8.2: $\mathbb{Z}_8$ como "relógio de 8 horas".
Fonte da ilustração: [1].

8.6 Monóides

Um monóide é um conjunto M com uma lei associativa de composição, ou uma *operação* associativa em M que tem um elemento identidade. Por operação em M entendemos uma regra que atribui a cada par ordenado de elementos $(x, y) \in M \times M = M^2$ um elemento z de M. Essa operação é geralmente denotada pela escolha de algum símbolo, como $\cdot$ e cuja imagem z do par (x, y) é denotada por $x \cdot y = z$. A propriedade da associatividade e a existência de uma identidade são definidas da seguinte forma:

(1) Associatividade: Para qualquer $x, y, z \in M$ temos $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

(2) Existência do elemento identidade: Existe um elemento $e \in M$, denominado elemento identidade, com a propriedade de que para todo $x \in M$, $x \cdot e = e \cdot x = x$.

Observe que a propriedade associativa nos permite descartar os parênteses sem ambiguidade: sendo $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, qualquer desses produtos pode ser escrito como $x \cdot y \cdot z$.

Afirmamos que o elemento identidade e é o único elemento de M tendo sua propriedade definidora, justificando nosso uso do artigo "o". Pois se e' é outro elemento de identidade, então

$$e = e \cdot e' = e'$$

Exemplos. Aqui estão alguns exemplos de monóides.

(A) O conjunto $\mathbb{R}$ com a operação $\cdot$ (multiplicação usual). O elemento identidade é 1.

(B) O conjunto $\mathbb{Z}$ juntamente com a operação $+$ (adição usual). O elemento identidade é 0.

(C) Seja S um conjunto e seja $\mathcal{F}(S)$ o conjunto de funções $f : S \to S$. Tomemos a lei de composição como sendo a composição usual de funções: para $f, g \in \mathcal{F}(S)$, $f \circ g$ é a função definida por $(f \circ g)(s) = f(g(s))$ para todo $s \in S$. O elemento identidade é a "função identidade" id_S definida por $id_S(s) = s$ para todo $s \in S$. Um caso especial é $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, o monóide das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

(D) O conjunto $\mathbb{Z}_m$, para um dado $m \in \mathbb{Z}^+$. A lei de composição será denotada por $+$ (Vamos chamá-la de *adição*), e é definida por $[k] + [\ell] = [k + \ell]$. Aqui devemos mostrar que isso é uma operação bem definida, devido ao fato de termos definido a adição usando representantes de classes de equivalência.

Suponhamos então que $[k'] = [k]$ e $[\ell'] = [\ell]$.

Isto significa que $k' \equiv k \pmod{m}$ e $\ell' \equiv \ell \pmod{m}$.

Portanto, temos $k' = k + pm$ e $\ell' = \ell + qm$ para certos $p, q \in Z$.

Daí $k' + \ell' = (k + pm) + (\ell + qm) = k + \ell + (p + q)m$, que mostra $k' + \ell' \equiv k + \ell \pmod{m}$. Isto significa que $[k' + \ell'] = [k + \ell]$, e isso mostra que nossa adição está bem-definida.

O elemento identidade da adição em $\mathbb{Z}_m$ é a classe $[0]$.

Às vezes denotamos um monóide escrevendo $(M, \cdot)$ para indicar sua lei de composição. Isto é necessário quando a operação pretendida precisa estar clara no contexto.

Por exemplo $(Z, +)$ e $(Z, \cdot)$ são duas estruturas de monóide diferentes tendo o mesmo conjunto subjacente. Observe que um monóide é sempre um conjunto não vazio, uma vez que sempre contém o elemento e.

8.7 Comutatividade

Um monóide M é chamado comutativo se para quaisquer $x, y \in M$ temos $x \cdot y = y \cdot x$.

Verifica-se facilmente que os monóides definidos em (A), (B) e (D) acima são comutativos.

No entanto, o exemplo (C) não o é, em geral: considere por exemplo as funções $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ dadas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = x + 1$. Então $(f \circ g)(x) = (x + 1)^2$ e $(g \circ f)(x) = x^2 + 1$. Estas duas não são iguais como funções; elas diferem em $x = 1$, por exemplo.

Na verdade, a composição de funções deixa de ser comutativa se S tiver ao menos dois elementos. Por convenção, usamos o símbolo + apenas para operações comutativas.

8.8 Grupo

Um grupo é um monóide G com a seguinte propriedade: para cada $x \in G$ há um elemento x_{inv}, chamado o inverso (ou simétrico) de x, com a propriedade $x \cdot x_{inv} = e = x_{inv} \cdot x$ (sendo e o elemento identidade do monóide).

O elemento inverso x_{inv} é único para cada $x \in G$. Pois se x'_{inv} é também inverso de x temos

$$x_{inv} = x_{inv} \cdot e = x_{inv} \cdot (x \cdot x'_{inv}) = (x_{inv} \cdot x) \cdot x'_{inv} = e \cdot x'_{inv} = x'_{inv}$$

Quando estamos usando o símbolo + para a lei da composição em um grupo comutativo, denotamos o inverso de um elemento x por $-x$, e escrevemos $x - y$ para $x + (-y)$. Neste caso, também chamamos $-x$ de elemento *oposto* de x.

Exemplos. Dentre os exemplos de monóides (A), (B), (C) e (D) acima, nota-se que (B) e (D) são grupos: O inverso de $k \in \mathbb{Z}$ é $-k$, e o inverso de $[k] \in \mathbb{Z}_m$ é $[-k]$. O exemplo (A) não é um grupo pois $0 \in \mathbb{R}$ e 0 não tem nenhum inverso multiplicativo. No entanto, se substituírmos $\mathbb{R}$ por $\mathbb{R} - \{0\}$ ou $\mathbb{R}^+$ teremos um grupo, em que o inverso de x é $\dfrac{1}{x} = x^{-1}$. No monóide dado pelo exemplo (C), tem inversos somente as funções bijetoras.

8.9 Aritmética modular

O grupo Z_m é chamado um grupo modular, e operações envolvendo sua lei de composição, como $[6] + [13] = [1]$ em $\mathbb{Z}_9$, são denominadas de aritmética modular.

8.10 Homomorfismo

Suponha que tenhamos dois grupos $(G, \cdot)$ e $(G', *)$. Uma função $\varphi : G \to G'$ é chamada homomorfismo de grupos se para quaisquer $x, y \in G$ tivermos

$$\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) * \varphi(y)$$

Proposição 8.3. *Sendo* $\varphi\colon G \to G'$ *um homomorfismo de grupos, se* $e \in G$ *e* $e' \in G'$ *são os elementos identidades de* G *e* G'*, então* $\varphi(e) = e'$.

Demonstração. Temos $\varphi(e) = \varphi(e \cdot e) = \varphi(e) * \varphi(e)$, e então sendo $\varphi(e) = y$, temos

$y * e' = y = y * y$, o que implica $y_{inv} * y * e' = y_{inv} * y * y$, logo $e' * e' = e' * y$, ou seja $\varphi(e) = y = e'$. □

Um homomorfismo $\varphi : G \to G'$ é chamado de isomorfismo se for função bijetora, i.e., injetora e sobrejetora.

Neste caso a função inversa $\varphi^{-1} : G' \to G$, e φ^{-1} será um isomorfismo também.

Se tal isomorfismo existir, dizemos que G e G' são isomorfos.

Exemplos:

(1) Seja S o conjunto $\{1, -1\} \subset \mathbb{R}$. Com a multiplicação de reais, S é um grupo. A função $\varphi\colon S \to \mathbb{Z}_2$ definida por $\varphi(1) = [0], \varphi(-1) = [1]$ é um homomorfismo e, de fato, um isomorfismo.

(2) Considere a função discutida anteriormente que enrola a reta real ao redor do circulo. Esta é a função $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\sim$ definida por $w(x) = \bar{x}$. O conjunto $\mathbb{R}/\sim$ herda de $\mathbb{R}$ a lei de composição $+$, pela qual $\overline{x} + \overline{y} = \overline{x + y}$. Mostra-se que tal adição em $\mathbb{R}/\sim$ está bem-definida, por uma prova análoga a prova dada em (D) de que a adição está bem definida em $\mathbb{Z}_m$.

Assim temos grupos $(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{R}/\sim, +)$, e a função w é um homomorfismo de grupos. Este homomorfismo é sobrejetivo mas não injetivo, portanto, não é um isomorfismo.

(3) Para $b \in \mathbb{R}^+$, $b \neq 1$, temos as funções exponencial e logarítmica de base b, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ e $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definidas por $f(r) = b^r$ e $g(x) = \log_b x$. Estes são homomorfismos entre os grupos $(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{R}^+, \cdot)$, sendo f e g funções uma inversa da outra, logo isomorfismos de grupos. Portanto, esses dois grupos são isomorfos.

8.11 O grupo de intervalos

O último exemplo acima é especialmente relevante, pois identificamos o conjunto de intervalos musicais com os conjuntos $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^+$, o primeiro dando medição aditiva (com as unidades dependendo da base b), o último dando medição multiplicativa, ou razão de intervalos.

Vemos que por qualquer uma das indentificações, o conjunto de intervalos forma um grupo, onde a lei de composição é a composição usual de intervalos, isto é, seguir um intervalo pelo outro. Vemos, então que o elemento identidade no grupo de intervalos é o intervalo uníssono e o inverso de um intervalo é seu intervalo oposto. Os isomorfismos f e g são precisamente a conversão de multiplicativos para a medição aditiva, e vice-versa.

8.12 O grupo de intervalos modulares

Quando $m = 8$, elementos do grupo $(\mathbb{R}/\sim, +)$ podem ser identificados com o conjunto de classes de equivalência de intervalos módulo oitava. Assim, o conjunto dessas classes se torna um grupo, que chamaremos de *grupo de intervalos modulares*. A lei da composição é definida pelos representantes, somando-os, e tomando-se a classe da soma. Assim, temos, por exemplo *terça* + *nona* = *tritom*, e *quarta* + *quinta* = *uníssono*.

8.13 O grupo de intervalos cromáticos modulares

Observamos que o conjunto de intervalos do teclado, medidos em semitons, podem ser identificados com o grupo $\mathbb{Z}_{12}$.

Notemos que a relação de equivalência que diz intervalos de k e ℓ semitons são equivalentes de oitava é apenas a afirmação de que $k - \ell$ é um múltiplo de 12, ou seja, $k \equiv \ell \pmod{12}$. Vamos chamar as classes de equivalência de *intervalos cromáticos modulares*. Portanto, o conjunto de intervalos cromáticos modulares pode ser identificado com $\mathbb{Z}_{12}$, tornando-o um grupo cuja lei de composição é a iteração de intervalos. Qualquer intervalo cromático modular pode ter uma única classe de equivalência representando n semitons, sendo $0 \leq n \leq 11$. Assim como a adição em $\mathbb{Z}_{12}$, a iteração de intervalos cromáticos modulares pode ser vista como uma sequência de rotações no relógio modular.

Exemplo. Considere a composição de uma terça menor, uma oitava e uma quarta. Estes intervalos são representados em semitons como $3, 12$ e 5, respectivamente. No entanto, a oitava pode ser representada por 0 semitons. A composição dos três intervalos produz o intervalo cromático modular representado por 8 semitons, que é uma quinta aumentada.

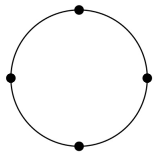
Esta é apenas a afirmação que $[3] + [12] + [5] = [8]$ em $\mathbb{Z}_{12}$, que decorre do fato de que $20 \equiv 8 \pmod{12}$.

8.14 Intervalos cromáticos não padronizados

Se dividimos a oitava em n intervalos iguais e medimos os intervalos por unidades n-cromáticas, o grupo de intervalos é identificado com $\mathbb{Z}_n$.

8.15 Relógio modular

O grupo $\mathbb{Z}_n$ pode ser realizado como o grupo de rotações de um n-ágono regular, ou de um "relógio" com n posições, dividindo o círculo em n arcos iguais, com uma posição no topo do círculo. Por exemplo, $\mathbb{Z}_4$ é o grupo de rotações do quadrado, ou um relógio com quatro posições:



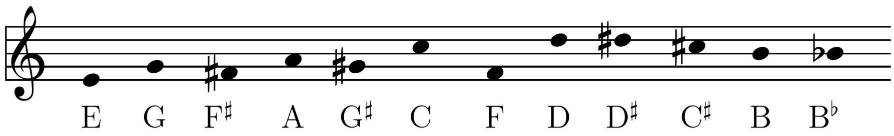
Nomeamos uma posição do relógio pelo elemento do grupo que rotaciona, no sentido horário, a posição do topo para essa posição. Assim, a posição superior é nomeada $[0]$, a primeira posição no sentido horário a partir de $[0]$ está marcada como $[1]$, etc. As posições do relógio de n posições estão assim em uma correspondência um-a-um com os elementos de $\mathbb{Z}_n$. Com esta nomeação a adição de elementos $[k]$ e $[\ell]$ em $\mathbb{Z}_n$ pode ser calculada rotacionando a posição do topo do relógio no sentido horário por k posições (sentido anti-horário se k for negativo), depois por ℓ posições. A soma $[k] + [\ell]$ estará onde a posição do topo cair após estas duas rotações.

8.16 Criando uma tabela dodecafônica de linhas, por aritmética modular

Podemos gerar uma linha de doze tons, designando uma classe de notas, cada uma das doze classes de nota da linha com seu intervalo cromático modular da classe de notas designada.

Isto apenas significa que nós listamos os elementos de $\mathbb{Z}_{12}$ em alguma ordem. Para o que está a seguir, será importante deixar que a nota designada seja a primeira classe de nota da sequência, de modo que o primeiro inteiro modular seja [0].

Exemplo. Vamos rever o primeiro exemplo de uma sequência de classes de 12 notas, do capítulo 7, que gera a tabela de linhas cuja linha original é:



Conforme prescrito acima, seja E nossa classe de nota designada. A sequência, dada de acordo com o intervalo modular a partir de E, é então:

$$[0] \quad [3] \quad [2] \quad [5] \quad [4] \quad [8] \quad [1] \quad [10] \quad [11] \quad [9] \quad [7] \quad [6]$$

Desde que nossa sequência comece com [0], a inversão dessa linha é obtida substituindo cada entrada na sequência pelo seu inverso aditivo, ou oposto.

Isso ocorre porque queremos que o intervalo da primeira entrada à n-ésima entrada na inversão seja o oposto do intervalo da primeira entrada à n-ésima entrada na linha original. Daí a sequência de intervalos para a inversão da nossa linha dada é:

$$[0] \quad [9] \quad [10] \quad [7] \quad [8] \quad [4] \quad [11] \quad [2] \quad [1] \quad [3] \quad [5] \quad [6]$$

Vamos numerar as linhas de uma coluna pelos números de 1 a 12 e usar o par ordenado (i, j) para se referir à posição na linha i e na coluna j. Nomeamos as entradas da linha original como:

$$a_1 = [0] \quad a_2 = [3] \quad a_3 = [2] \quad a_4 = [5] \quad a_5 = [4] \quad a_6 = [8]$$
$$a_7 = [1] \quad a_8 = [10] \quad a_9 = [11] \quad a_{10} = [9] \quad a_{11} = [7] \quad a_{12} = [6]$$

A primeira coluna será a inversão, dada pelos negativos em $\mathbb{Z}_{12}$:

$$-a_1 = [0] \quad -a_2 = [9] \quad -a_3 = [10] \quad -a_4 = [7] \quad -a_5 = [8] \quad -a_6 = [4]$$
$$-a_7 = [11] \quad -a_8 = [2] \quad -a_9 = [1] \quad -a_{10} = [3] \quad -a_{11} = [5] \quad -a_{12} = [6]$$

Procederemos agora a preencher cada posição da tabela com o elemento de $\mathbb{Z}_{12}$ correspondente à classe de notas apropriada. De acordo com o procedimento descrito no capítulo 7, a entrada na posição (i, j) deve produzir o intervalo a_j com a entrada mais à esquerda na i-ésima linha, que é $-a_i$. Portanto, o elemento correto de $\mathbb{Z}_{12}$ é $a_j - a_i$.

Por exemplo, a entrada na posição $(8, 5)$ é $a_5 - a_8 = [4] - [10] = [6]$. Preenchendo o gráfico desta forma produz-se a tabela de linhas:

Tabela 8.1: Tabela 7.1 interpretada com aritmética modular de $\mathbb{Z}_{12}$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	[0]	[3]	[2]	[5]	[4]	[8]	[1]	[10]	[11]	[9]	[7]	[6]
2	[9]	[0]	[11]	[2]	[1]	[5]	[10]	[7]	[8]	[6]	[4]	[3]
3	[10]	[1]	[0]	[3]	[2]	[6]	[11]	[8]	[9]	[7]	[5]	[4]
4	[7]	[10]	[9]	[0]	[11]	[3]	[8]	[5]	[6]	[4]	[2]	[1]
5	[8]	[11]	[10]	[1]	[0]	[4]	[9]	[6]	[7]	[5]	[3]	[2]
6	[4]	[7]	[6]	[9]	[8]	[0]	[5]	[2]	[3]	[1]	[11]	[10]
7	[11]	[2]	[1]	[4]	[3]	[7]	[0]	[9]	[10]	[8]	[6]	[5]
8	[2]	[5]	[4]	[7]	[6]	[10]	[3]	[0]	[1]	[11]	[9]	[8]
9	[1]	[4]	[3]	[6]	[5]	[9]	[2]	[11]	[0]	[10]	[8]	[7]
10	[3]	[6]	[5]	[8]	[7]	[11]	[4]	[1]	[2]	[0]	[10]	[9]
11	[5]	[8]	[7]	[10]	[9]	[1]	[6]	[3]	[4]	[2]	[0]	[11]
12	[6]	[9]	[8]	[11]	[10]	[2]	[7]	[4]	[5]	[3]	[1]	[0]

Para converter isto em uma tabela de classes de notas, é útil desenhar um relógio modular, adicionalmente rotulando cada posição pela classe de notas que tem o intervalo dado a partir de E, como na figura 8.3.

Usando isso, podemos obter de volta a tabela 7.1 dada no capítulo 7.

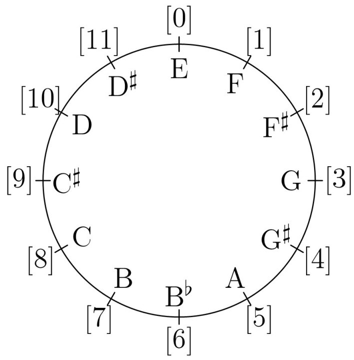


Figura 8.3: Relógio modular de conversão de classes de $\mathbb{Z}_{12}$ em classes de notas, a partir de $[0]$ como classe de notas E.

Fonte da ilustração: [1].

8.17 Criando uma tabela de linhas de n tons usando aritmética modular

Este método é igualmente válido, é claro, se formos criar, para algum $n \in \mathbb{Z}^+$, uma tabela de linhas de n-tons a partir de uma linha original de n-tons. Dada uma linha original

$$a_1 = [0], a_2, \ldots, a_n$$

de elementos de $\mathbb{Z}_n$, formamos o gráfico de linhas $n \times n$, tomando:

$$\boxed{\text{entrada } (i, j) = a_j - a_i} \tag{1}$$

Aqui a aritmética ocorre em $\mathbb{Z}_n$.

Exemplo. Vamos nos preparar para construir uma composição de sete tons usando esta linha de $\mathbb{Z}_7$:

$$a_1 = [0] \quad a_2 = [4] \quad a_3 = [1] \quad a_4 = [6] \quad a_5 = [5] \quad a_6 = [2] \quad a_7 = [3] \tag{2}$$

Começamos por desafinar o sintetizador para tocar em temperamento igual de sete tons. Suponha que decidimos usar as teclas brancas no teclado, desafinadas em torno de C. O intervalo 7-cromático é dado em centésimos por $1200/7 \approx 171,43$. Usando o método descrito no Capítulo 7, desafinamos as teclas brancas da seguinte forma:

C	D	E	F	G	A	B
0	-29	-57	14	-14	-43	-71

(3)

Agora associamos cada uma dessas sete classes de notas redefinidas a um elemento de $\mathbb{Z}_7$ de acordo com o seu intervalo modular a partir de C. O relógio modular da figura 8.4 nos permite converter facilmente de um para o outro.

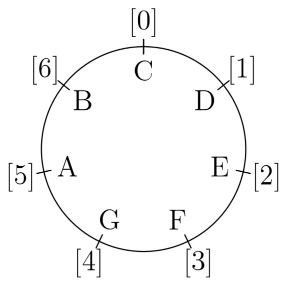


Figura 8.4: Relógio modular de conversão de elementos de $\mathbb{Z}_7$ em classes de notas.
Fonte da ilustração: [1].

Com referência a (1), preenchemos as linhas da tabela de linhas 7×7 com elementos de $\mathbb{Z}_7$ usando (2). Isto dá a tabela a seguir à esquerda, que é traduzida à tabela à direita usando-se o relógio acima.

Tabela 8.2: Tabela de linhas de 7 tons, em inteiros módulo 7.

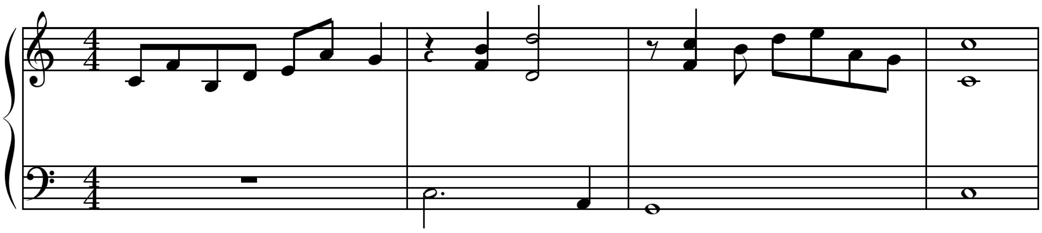
	1	2	3	4	5	6	7
1	[0]	[4]	[1]	[6]	[5]	[2]	[3]
2	[3]	[0]	[4]	[2]	[1]	[5]	[6]
3	[6]	[3]	[0]	[5]	[4]	[1]	[2]
4	[1]	[5]	[2]	[0]	[6]	[3]	[4]
5	[2]	[6]	[3]	[1]	[0]	[4]	[5]
6	[5]	[2]	[6]	[4]	[3]	[0]	[1]
7	[4]	[1]	[5]	[3]	[2]	[6]	[0]

Tabela 8.3: Tabela de linhas de 7 tons, em classes de notas.

	1	2	3	4	5	6	7
1	C	G	D	B	A	E	F
2	F	C	G	E	D	A	B
3	B	F	C	A	G	D	E
4	D	A	E	C	B	F	G
5	E	B	F	D	C	G	A
6	A	E	B	G	F	C	D
7	G	D	A	F	E	B	C

Uma composição de sete tons baseada nesta tabela de linhas pode conter a seguinte notação:

Isso emprega a inversão da linha original, que é a coluna à esquerda do gráfico de linhas. A sequência é usada três vezes, primeiro melodicamente, depois duas vezes com algum conteúdo harmônico. A passagem deve ser tocada com a desafinação dada em (3).



8.18 Notação exponencial em um grupo

Seja $(G, \cdot)$ um grupo, e sejam $x \in G$, $n \in \mathbb{Z}^+$. Definimos x^n como a composição de n termos iguais a x, ou seja, $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}_{\text{n termos}}$ em G. Definimos x^0 como sendo e, o elemento identidade de G. Finalmente definimos x^{-n} como sendo a composição de n termos $\underbrace{x^{-1} \cdot x^{-1} \cdot \cdots \cdot x^{-1}}_{\text{n termos}}$. Desse modo, definimos x^n para qualquer $n \in \mathbb{Z}$. Como $(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}$, pode ser demonstrado, por indução sobre n, que para n inteiro positivo, $x^{-n} = (x^n)^{-1}$.

Com essas definições e propriedades, pode-se demonstrar que as seguintes regras de expoentes de aparência familiar são válidas para quaisquer $x \in G$, $n, m \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} x^{n+m} &= x^n \cdot x^m \\ (x^n)^m &= x^{nm} \end{aligned} \tag{4}$$

No caso em que o grupo é comutativo e a operação do grupo é denotada por $+$, denotamos a soma de n termos iguais a x, $x + x + \cdots + x$ por nx em vez de x^n. Nesta situação, as regras dadas em (4) ficam assim:

$$\begin{aligned} (n + m)x &= nx + mx \\ n(mx) &= (nm)x \end{aligned} \tag{5}$$

8.19 Geradores e grupos cíclicos

Dado um elemento $t \in G$, G um grupo, chamamos t de gerador de G se cada elemento de G pode ser escrito na forma t^n (ou nt, no caso de um grupo aditivo) para algum $n \in \mathbb{Z}$, em outras palavras,

$$\{t^n \mid n \in \mathbb{Z}\} = G.$$

Se G tem um gerador, chamamos G um *grupo cíclico*.

Suponha que G seja cíclico e que $t \in G$ seja um gerador. Considere o conjunto

$$S = \{n \in \mathbb{Z}^+ \mid t^n = e\}.$$

Se $S = \varnothing$, então quaisquer duas potências t^n e t^m de t serão distintas a menos que tenhamos $n = m$, pois supondo $n > m$, $t^n = t^m \Rightarrow t^{n-m} = e \Rightarrow n - m \in S = \varnothing$. Logo, $t^n \neq t^m$, para quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$

Neste caso os elementos de G estarão em correspondência injetora com elementos de $\mathbb{Z}$, e a correspondência

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{G} \\ & n & \longmapsto & f(n) = t^n \end{array}$$

define um isomorfismo entre $\mathbb{Z}$ e G.

Se $S \neq \varnothing$, o conjunto S tem o menor elemento m, pelo Princípio da Boa Ordem. Se $m = 1$, G é um grupo cíclico trivial, isto é, $G = \{e\}$.

O inteiro positivo m será chamado a ordem de t. Podemos afirmar que qualquer elemento $x \in G$ tem uma única forma $x = t^r$ com $0 \leq r < m$. Isso decorre do algoritmo da divisão, sendo n um inteiro qualquer, temos $n = qm + r$, para certos q e r inteiros, $0 \leq r < m$, como no algoritmo, e temos

$$t^n = t^{mq+r} = t^{mq} \cdot t^r = (t^m)^q \cdot t^r = e^q \cdot t^r = e \cdot t^r = t^r$$

Aqui fizemos uso das regras de expoentes enunciadas em (4).

Podemos ainda estabelecer unicidade de r. Se dois inteiros r e r', com $0 \leq r < r' < m$, são tais que $t^r = t^{r'}$, então teremos $t^{r'-r} = e$ e $0 < r' - r < m$, violando a minimalidade de m.

Assim sendo, temos que, se G é um grupo cíclico de ordem m, sendo t um gerador de G, então

$$G = \{e, t, t^2, \ldots, t^{m-1}\}$$

sendo os elementos listados distintos entre si.

Portanto G tem precisamente m elementos. O que definimos como ordem de G é o número de elementos de G.

Exemplo. Sendo $m \geq 2$, o grupo Z_m é um grupo cíclico, e $[1]$ é um gerador tendo ordem m. Isso ocorre porque m é o menor inteiro positivo n tal que $n[1] = [0]$.

Um grupo cíclico pode ter mais de um gerador. Considere como exemplo um grupo G com um gerador t de ordem 8. Neste caso, G consiste de oito elementos

$$e, t, t^2, t^3, t^4, t^5, t^6, t^7.$$

Considere $u = t^3 \in G$. Afirmamos que u é também um gerador. Podemos mostrar isto de forma direta, calculando as potencias de u e mostrando que elas nos dão todas as potências de t.

Temos $u^2 = (t^3)^2 = t^6$ e $u^3 = (t^3)^3 = t^9 = t$. Continuando dessa forma, temos:

$$e, u = t^3, u^2 = t^6, u^3 = t, u^4 = t^4, u^5 = t^7, u^6 = t^2, u^7 = t^5.$$

E isso gera todos os elementos de G. Na verdade, poderíamos já ter observado que sendo $u^3 = t^9 = t$, as potências de t são potências de u^3, e portanto u também é gerador de G.

No próximo capítulo veremos que se t é um gerador de um grupo G, de ordem m, então a potência t^n será também um gerador de G quando (e somente quando) tivermos $\mathrm{mdc}(m, n) = 1$.

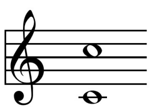
8.20 Intervalos geradores

O grupo de intervalos n-cromáticos modulares é identificado com $\mathbb{Z}_n$. Chamamos um intervalo de um *intervalo gerador* se ele gerar o grupo $\mathbb{Z}_n$. Estes intervalos geradores serão os intervalos cujas iterações dão todos os intervalos n-cromáticos. Pelo critério anunciado acima, estes coincidem com as classes $[m] \in \mathbb{Z}_n$ para o qual 1 é o único inteiro positivo que divide m e n. Assim, existem $\phi(n)$ geradores em $\mathbb{Z}_n$, sendo ϕ a função *fi* de Euler, definida por $\phi(n) =$ (*número de inteiros positivos* ℓ*, tais que* $\ell < n$ *e* $\mathrm{mdc}(\ell, n) = 1$).

Com este critério verifica-se facilmente que os intervalos 12-cromáticos geradores são o meio passo ([1]), a quarta ([5]), a quinta ([7]) e a sétima maior ([11]).

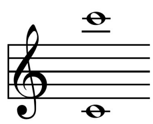
9 Propriedades Algébricas dos Inteiros

Fizemos a identificação de cada intervalo musical I com um número real positivo $x \in \mathbb{R}^+$. Como $\mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{R}^+$, cada inteiro positivo dá um intervalo. Por exemplo, vimos que o inteiro 2 representa uma oitava, e que o inteiro 3 é um intervalo de cerca de 2 centésimos maior do que a oitava-e-uma-quinta do teclado (1900 centésimos), como mostrado pelo cálculo $1200 \log_2 3 \approx 1901,96$.



2 = intervalo de oitava

3 = intervalo oitava-e-uma-quinta



4 = intervalo de duas oitavas

Vamos agora investigar alguns conceitos de álgebra abstrata e algumas propriedades dos inteiros $\mathbb{Z}$ que tem relação com os fenômenos musicais.

9.1 Anéis

Um conjunto não vazio R dotado de duas leis associativas de composição $+$ e $\cdot$ é chamado um anel se $(R, +)$ é um grupo comutativo, $(R, \cdot)$ é um monóide, e para quaisquer $a, b, c \in R$ temos $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ e $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ (esta última propriedade é chamada distributividade da operação $+$ em relação à operação $\cdot$). Chamamos $+$ de operação de adição e $\cdot$ de operação de multiplicação, e muitas vezes, quando não suscitar confusão, ocultamos o $\cdot$ e simplesmente escrevemos ab no lugar de $a \cdot b$.

Denotamos por 0 e 1 para os elementos identidades aditivo e multiplicativo, respectivamente. Dizemos que o anel R é comutativo se o monóide $(R, \cdot)$ é comutativo. (Convencionalmente temos sempre $(R, +)$ comutativo.) Trataremos apenas de anéis comutativos aqui, então doravante, quando dissermos "anel", estaremos tratando de "anel comutativo".

Duas propriedades válidas para qualquer x em um anel R são estas:

$$(-1) \cdot x = -x$$

$$0 \cdot x = 0$$

9.2 Elementos invertíveis

Temos que $(R, \cdot)$ é um monóide; não será um grupo, em geral, uma vez que 0 não possui nenhum inverso multiplicativo. No entanto, alguns elementos de R (1, por exemplo) terão inversos multiplicativos. Se $x \in R$ é um tal elemento, chamamos x de um *elemento invertível*, e usualmente denotamos seu inverso multiplicativo por x^{-1}. O conjunto de invertíveis em R, que denotaremos por R^*, forma um grupo em relação à multiplicação.

9.3 Cancelamentos

Um anel R é chamado de *domínio de integridade*, ou simplesmente um *domínio*, quando tem a seguinte propriedade: se $a, b \in R$ são elementos quaisquer e $ab = 0$ então necessariamente $a = 0$ ou $b = 0$.

Proposição 9.1 (Lei do cancelamento em um domínio). *Seja R um domínio de integridade. Se $a, b, c \in R$, com $a \neq 0$, e $ab = ac$, então $b = c$.*

Demonstração. Sendo $ab = ac$, temos $0 = ab - ac = a(b - c)$.

Como $a \neq 0$ e R é um domínio de integridade, devemos ter $b - c = 0$, isto é, $b = c$. □

Os primeiros exemplos de anéis e seus subgrupos de elementos invertíveis são

(1) O anel dos inteiros $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, sendo $\mathbb{Z}^* = \{1, -1\}$. $\mathbb{Z}$ é um dos primeiros exemplos de anel de integridade.

(2) O anel dos números reais $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, sendo $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$. $\mathbb{R}$ é o que chamamos de *corpo*, isto é, um anel (comutativo), cujos elementos não nulos são todos invertíveis.

(3) O anel dos números racionais $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, sendo $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$. Q é também um corpo.

(4) O anel $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ dos inteiros módulo m (para um dado $m \geq 2$). A adição em $\mathbb{Z}_m$ já definimos anteriormente. Quanto à multiplicação, sendo k e ℓ inteiros, definimos $[k][\ell] = [k\ell]$.

Podemos mostrar que a multiplicação em $\mathbb{Z}_m$ é bem-definida: se $[k] = [k']$ e $[\ell] = [\ell']$, então $k \equiv k'$ e $\ell \equiv \ell' \pmod m$, logo $m \mid (k - k')$ e $m \mid (\ell - \ell')$

Daí, $m \mid (k\ell - k'\ell)$ e $m \mid (k'\ell - k'\ell')$, e portanto $m \mid (k\ell - k'\ell')$, pois $k\ell - k'\ell' = (k\ell - k'\ell) + (k'\ell - k'\ell')$. Portanto $[k\ell] = [k'\ell']$.

Veremos adiante que $\mathbb{Z}_m^* = \{[a] \mid a \in \mathbb{Z} \text{ e } \mathrm{mdc}(a, m) = 1\}$.

9.4 Ideais

Sendo R um anel, um subconjunto $J \subseteq R$ é chamado ideal de R se J for um sub-grupo do aditivo $(R, +)$ e se, além disso, sempre que $a \in R$ e $d \in J$ temos $ad \in J$.

Um exemplo de um ideal em R é o ideal nulo $\{0\}$. Qualquer outro ideal será chamado um ideal não-nulo. O anel R em si é um ideal de R.

Dado $a \in R$ podemos formar o conjunto de todos os "múltiplos" de a em R, ou seja, o conjunto $aR = \{ax \mid x \in R\}$.

Tal ideal é chamado de um *ideal principal*, e o elemento a é chamado de *gerador do ideal*.

Notemos que $\{0\}$ e R são ideais principais de R, pois $\{0\} = 0R$ e $R = 1R$.

Se R é um domínio de integridade em que todo ideal é principal, chamamos R de *domínio de ideais principais*, DIP abreviado. Por exemplo, o conjunto de inteiros pares forma um ideal em $\mathbb{Z}$. Este ideal é um ideal principal, já que é igual a $2\mathbb{Z}$. Vamos agora demonstrar:

Proposição 9.2. *$\mathbb{Z}$ é um domínio de ideais principais.*

Demonstração. Seja J um ideal em $\mathbb{Z}$. Se $J = \{0\}$, então $J = 0\mathbb{Z}$.

Caso contrário, J contém inteiros não nulos, e como $n \in J$ implica $(-1)n = -n$ está em J, então J deve conter alguns inteiros positivos.

Seja n o menor inteiro positivo em J (tal n existe pelo Princípio da Boa Ordem). Afirmamos que $J = n\mathbb{Z}$. Claramente $n\mathbb{Z} \subseteq J$. Para ver a outra inclusão, seja $m \in J$. Pelo algoritmo da divisão em $\mathbb{Z}$, existem $q, r \in \mathbb{Z}$, tais que $m = qn + r$ e $0 \leq r < n$. Então r está em J pois $r = m - qn$. Pela minimalidade de n, concluímos $r = 0$, portanto $m = qn \in n\mathbb{Z}$, e assim $J \subseteq n\mathbb{Z}$. Portanto, $J = n\mathbb{Z}$.

Assim, $\mathbb{Z}$ é um domínio de ideais principais. □

Observamos que se $J \subseteq Z$ é um ideal com $J \neq \{0\}$, e se n é um gerador para J, então há apenas outro gerador para J que é $-n$. Assim, qualquer ideal não-nulo de Z tem um único gerador positivo.

9.5 Máximo divisor comum (mdc)

Suponhamos dados $m, n \in \mathbb{Z}$, sendo pelo menos um deles diferente de zero. O subconjunto $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z}$, com o qual queremos dizer o conjunto de todos os inteiros a que podem serem escritos como $a = hm + kn$ com $h, k \in \mathbb{Z}$, é um ideal em $\mathbb{Z}$.

Portanto $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z}$ tem um único gerador positivo d, que portando divide m e n, pois $m = dx$ e $n = dy$ para certos inteiros x e y. Sendo d gerador de $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z}$, temos $d = mr + ns$, para certos inteiros r e s. Se e é qualquer outro inteiro positivo que divide m e n então e divide $mr + ns$, isto é, e divide d. Daí $d \geq e$ e nós (apropriadamente) chamamos d o *máximo divisor comum* de m e n e denotamos este fato por $\mathrm{mdc}(m, n) = d$.

Pelas observações que acabamos de estabelecer, temos que $\mathrm{mdc}(m, n) = 1$ quando os únicos divisores comuns de m e n em $\mathbb{Z}$ são ± 1. Neste caso, dizemos que m e n são *relativamente primos*. Podemos também afirmar que $\mathrm{mdc}(m, n) = 1$ se, e somente se, existem $r, s \in \mathbb{Z}$ com $mr + ns = 1$.

9.6 Números primos

Um inteiro positivo p é chamado primo se for divisível em $\mathbb{Z}$ por precisamente dois inteiros positivos, ou seja, 1 e p. (note que 1 não é primo em virtude da palavra "precisamente").
Os primeiros dez números primos são:

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29 \tag{9.1}$$

Se p é primo e $n \in \mathbb{Z}$, então p divide n ou $\mathrm{mdc}(p, n) = 1$, pois se $p \nmid n$, como os únicos divisores positivos de p são 1 e p, teremos $\mathrm{mdc}(p, n) = 1$.

9.7 Crivo de Eratóstenes

Um procedimento sistemático para encontrar os números primos foi dado pelo astrônomo grego e matemático Eratóstenes de Cirene (século III aC). Concebemos os inteiros positivos como uma lista $1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$. Em seguida, procedemos a cortar certos números da lista, do seguinte modo. Depois de cortar o 1, nós cortamos todos os números que sucedem 2 e que são divisíveis por 2.

$\cancel{1}$, 2, 3, $\cancel{4}$, 5, $\cancel{6}$, 7, $\cancel{8}$, 9, $\cancel{10}$, 11, $\cancel{12}$, 13, $\cancel{14}$, 15, $\cancel{16}$, 17, $\cancel{18}$, 19, $\cancel{20}$, 21, $\cancel{22}$, 23, $\cancel{24}$, 25, $\cancel{26}$, 27, $\cancel{28}$, 29, $\cancel{30}$, ...

Em seguida, encontramos o próximo número após 2 que ainda está na lista, que é 3. Então cortamos todos os números após 3 que são divisíveis por 3.

$\cancel{1}$, 2, 3, $\cancel{4}$, 5, $\cancel{6}$, 7, $\cancel{8}$, $\cancel{9}$, $\cancel{10}$, 11, $\cancel{12}$, 13, $\cancel{14}$, $\cancel{15}$, $\cancel{16}$, 17, $\cancel{18}$, 19, $\cancel{20}$, $\cancel{21}$, $\cancel{22}$, 23, $\cancel{24}$, 25, $\cancel{26}$, $\cancel{27}$, $\cancel{28}$, 29, $\cancel{30}$, ...

Se este processo é continuado em uma lista que vá até um inteiro n, os números menores que n, que permanecem na lista, são precisamente os primos que são menores ou iguais a n. Os inteiros "sobreviventes" na lista serão números primos, pois se não forem cortados é porque não são múltiplos de inteiros precedentes.

$\cancel{1}$, 2, 3, $\cancel{4}$, 5, $\cancel{6}$, 7, $\cancel{8}$, $\cancel{9}$, $\cancel{10}$, 11, $\cancel{12}$, 13, $\cancel{14}$, $\cancel{15}$, $\cancel{16}$, 17, $\cancel{18}$, 19, $\cancel{20}$, $\cancel{21}$, $\cancel{22}$, 23, $\cancel{24}$, $\cancel{25}$, $\cancel{26}$, $\cancel{27}$, $\cancel{28}$, 29, $\cancel{30}$, ...

Assim, os primos menores que 30 são os dez inteiros não cortados na lista acima, que são os inteiros da lista (9.1). Se o procedimento for continuado indefinidamente, a lista completa de primos será a lista de inteiros remanescentes.

Proposição 9.3. *Se p é um número primo, e se p divide mn, sendo $m, n \in \mathbb{Z}$, então p divide m ou p divide n.*

Demonstração. Suponhamos que p não divide m. Então $mdc(m, p) = 1$ e podemos escrever $1 = hm + kp$ para alguns inteiros h e k. Multiplicando esta equação por n temos:

$$n = hmn + kpn.$$

Temos que p divide as duas somas à direita, já que p divide mn, portanto p divide n. □

Podemos então concluir que se um número primo p divide um produto $m_1 m_2 \cdots m_s$, então p divide pelo menos um dos inteiros da lista $m_1, m_2, \ldots, m_s$.

9.8 Fatoração única

Agora estabelecemos o fato de que cada inteiro positivo, pode ser fatorado de forma única como produto de primos (a menos da ordem dos fatores).

Proposição 9.4 (Fatoração única de inteiros positivos). *Seja* $n \geq 2$ *um inteiro. Então* n *pode ser fatorado como:*

$$n = p_1{}^{\alpha_1} p_2{}^{\alpha_2} \cdots p_r{}^{\alpha_r}$$

sendo $r \geq 1$, $p_1, p_2, \ldots, p_r$ *inteiros primos distintos, e* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ *inteiros positivos.*

Além disso, esta fatoração é única, significando que se $n = q_1{}^{\beta_1} q_2{}^{\beta_2} \cdots q_t{}^{\beta_t}$ *é outra tal fatoração, então* $t = r$ *e depois de reindexar temos* $p_1 = q_1,\ p_2 = q_2,\ \ldots,\ p_r = q_r$.

Demonstração. Primeiro estabelecemos a existência de uma fatoração em primos para todos os inteiros maiores ou iguais a 2.

Se nem todos esses inteiros admitem uma fatoração em primos, então pelo Princípio da Boa Ordem podemos escolher um menor inteiro n, $n \geq 2$, que falha em admitir uma fatoração.

Observamos que n em si não poderia ser primo, caso contrário ele admite a fatoração no teorema com $r = 1$ e $p_1 = n$, $\alpha_1 = 1$. Como n não é primo, n tem um divisor positivo m que não é nem n nem 1. Temos $n = m\ell$ e claramente ℓ não é nem n nem 1.

Devemos ter $1 < m, \ell < n$, portanto pela minimalidade de n, m e ℓ possuem fatoração em primos. Mas se m e ℓ tiverem fatorações em primos, então n também terá, pois $n = m\ell$. Isto nos leva a uma contradição.

Conseqüentemente todos os inteiros maiores que ou iguais a 2 possuem uma fatoração em primos.

Nos resta agora mostrar a unicidade da fatoração em primos.

Se $p_1{}^{\alpha_1} p_2{}^{\alpha_2} \cdots p_r{}^{\alpha_r} = q_1{}^{\beta_1} q_2{}^{\beta_2} \cdots q_t{}^{\beta_t}$, então p_1 divide $q_1{}^{\beta_1} q_2{}^{\beta_2} \cdots q_t{}^{\beta_t}$. Como p_1 é primo, deve dividir um primo da lista $q_1, q_2, \ldots, q_t$. Digamos que p_1 divide q_1 (após reindexação se necessário). Como q_1 também é primo, devemos ter $p_1 = q_1$, então podemos aplicar cancelamento para obter $p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r} = p_1^{\beta_1-1}p_2^{\beta_2}\cdots p_t^{\beta_t}$. Continuamos cancelando p_1 para deduzir que $\alpha_1 = \beta_1$.

A igualdade remanescente é $p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}\cdots p_r^{\alpha_r} = q_2^{\beta_2}q_3^{\beta_3}\cdots q_t^{\beta_t}$.

Como mostrado acima podemos argumentar que $p_2 = q_2$ (depois de reindexar) e que $\alpha_2 = \beta_2$. Continuando o método de sucessivos cancelamentos, obtemos o resultado desejado. $\square$

9.9 Inteiros modulares

As propriedades algébricas que foram estabelecidas para $\mathbb{Z}$ nos dizem muitas coisas sobre os anéis de inteiros modulares $\mathbb{Z}_m$, para $m \in \mathbb{Z}^+$. Uma dessas propriedades diz respeito à questão de quando um elemento $[n] \in \mathbb{Z}_m$ é um gerador do grupo aditivo $(\mathbb{Z}_m, +)$, que agora enunciamos de maneira mais completa.

Proposição 9.5. *Dado $[n] \in \mathbb{Z}_m$, as três afirmações seguintes são equivalentes.*

(1) $\mathrm{mdc}(m, n) = 1$.

(2) $[n]$ *é um gerador do grupo aditivo* $(\mathbb{Z}_m, +)$.

(3) $[n]$ *é um elemento invertível no anel* $\mathbb{Z}_m$ *(isto é,* $[n] \in \mathbb{Z}_m^*$*).*

Demonstração. Demonstraremos primeiro a equivalência das afirmações (2) e (3).

Se $[n]$ for um gerador de $(\mathbb{Z}_m, +)$, então todos os elementos de $\mathbb{Z}_m$ podem ser escritos como $k \cdot [n]$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Em particular, temos que $[1] = k \cdot [n]$ para algum inteiro k. Mas, pela definição de multiplicação em $\mathbb{Z}_m, k \cdot [n] = [k] \cdot [n]$. Portanto $[k] \cdot [n] = [1]$, o que mostra que $[n]$ é invertível.

Reciprocamente, sendo $[n] \in \mathbb{Z}_m^*$, $[n]$ tem um inverso $[k] = [n]^{-1}$. Daí $[k][n] = [1]$ e então para qualquer $[\ell] \in \mathbb{Z}_m$ temos $[\ell] = [\ell] \cdot [1] = [\ell] \cdot [k] \cdot [n] = [\ell k] \cdot [n] = \ell k \cdot [n]$, o que mostra que $[\ell]$ é um múltiplo de $[n]$. Consequentemente $[n]$ é um gerador de grupo para $(\mathbb{Z}_m, +)$.

Agora demonstraremos a equivalência das afirmações (1) e (3):

Sendo $\text{mdc}(m, n) = 1$, temos que existem inteiros h e k com $hm + kn = 1$, logo $[1] = [hm + kn] = [hm] + [kn] = [0] + [k][n] = [k][n]$, portanto $[n]$ tem inverso multiplicativo em $\mathbb{Z}_m$.

Reciprocamente, se $[n] \in \mathbb{Z}_m^*$, $[n][k] = [1]$, para algum inteiro k. Então $[nk] = [1]$, daí $nk \equiv 1 \pmod m$. Logo, $m \mid (nk - 1)$, isto é, $nk - 1 = mq$ para algum inteiro q. Portanto $kn - qm = 1$, o que significa que $\text{mdc}(m, n) = 1$.

Portanto, as afirmações (1), (2) e (3) são equivalentes entre si. □

9.10 Função Fi de Euler

Para qualquer $m \in \mathbb{Z}^+$, definimos a *função Fi de Euler* da seguinte forma: $\phi(m)$ é o *número de inteiros positivos* n, com $1 \leq n \leq m$, que são relativamente primos com m. Se $m \geq 2$, podemos dizer também que $\phi(m)$ é o *número de inteiros positivos* n, com $1 \leq n < m$, que são relativamente primos com m.

De acordo com a proposicao 9.5, $\phi(m)$ também nos dá o número de elementos invertíveis em $\mathbb{Z}_m^*$, e simultaneamente o número de geradores do grupo aditivo $(\mathbb{Z}_m, +)$.

Em virtude deste último resultado, $\phi(m)$ conta o número de intervalos geradores na escala m-cromática.

Por exemplo $\phi(12) = 4$, uma vez que os números $1, 5, 7, 11$ são os únicos números inteiros positivos menores que 12 que são relativamente primos com 12.

Isto se reflete no fato de que os intervalos geradores na escala 12-cromática são o semitom, a quarta, quinta e sétima maior.

O cálculo de $\phi(n)$ a partir de uma fatoração de n em fatores primos é estabelecido na seguinte proposição.

Proposição 9.6. *Sendo $\phi\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ a função Fi de Euler, temos*

(a) Se p é primo, $\phi(p) = p - 1$

(b) Se p é primo e α é um inteiro positivo, $\phi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} = p^\alpha\left(1 - \frac{1}{p}\right)$

(c) Se a e b são inteiros positivos primos entre si então $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$

(d) *Se n é um inteiro positivo e decompõe-se em fatores primos como $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$, sendo os expoentes $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ inteiros positivos, então*

$$\phi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$$

Demonstração.

(a) Se p é primo, seus únicos divisores positivos são 1 e p, logo os inteiros de 1 a $p-1$ são primos com p, portanto $\phi(p) = p - 1$.

(b) Sendo α um inteiro positivo, se $\alpha = 1$, $\phi(p^\alpha) = \phi(p) = p - 1 = p^\alpha - p^{\alpha-1}$.

Se $\alpha \geq 2$, os inteiros positivos n satisfazendo $1 \leq n \leq p^\alpha$, que não são primos com p^α, são os que tem um fator primo p.

Assim, a lista completa desses inteiros é p, $2p$, $3p$, $\ldots$, $(p^{\alpha-1} - 1)p$, $p^{\alpha-1}p$, ou seja, ela contém todos os inteiros da forma np, com $1 \leq n \leq p^{\alpha-1}$, tendo um total de $p^{\alpha-1}$ inteiros.

Descartando esses $p^{\alpha-1}$ inteiros, concluímos que os inteiros n, $1 \leq n \leq p^\alpha$, que são primos com p^α são dados por $\phi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} = p^\alpha\left(1 - \frac{1}{p}\right)$.

(c) Provaremos esta parte cumprindo três etapas.

i. Se $(R, +, \cdot)$ e $(S, +, \cdot)$ são dois anéis, podemos definir o anel produto $R \times S$, com operações adição $+$ e multiplicação $\cdot$ da seguinte maneira: sendo (x, y) e (x', y') pares de $R \times S$,

$$(x, y) + (x', y') := (x + x', y + y')$$
$$(x, y) \cdot (x', y') := (x \cdot x', y \cdot y')$$

Temos três adições diferentes, uma em R, outra em S e outra em $R \times S$, usando para as três a mesma notação, pelo bem da simplicidade; o mesmo se dá para a multiplicação. Não é difícil ver que $R \times S$ tem elemento neutro $(0_R, 0_S)$ para a adição e $(1_R, 1_S)$ para a multiplicação. Além disso, os elementos invertíveis em $R \times S$ são pares da forma (a, b), com a invertível em R e b invertível em S, sendo $(a, b)^{-1} = (a^{-1}, b^{-1})$. Assim sendo, $(R \times S)^* = R^* \times S^*$.

ii. Se a e b são inteiros primos entre si, com $a \geq 2$ e $b \geq 2$, e se $m = ab$, temos um isomorfismo de anéis

$$\begin{aligned} f\colon\ \mathbb{Z}_m &\longrightarrow \mathbb{Z}_a \times \mathbb{Z}_b \\ [n] &\longmapsto f([n]) = (\bar{n}, \bar{\bar{n}}) \end{aligned}$$

sendo $[n]$, $\bar{n}$ e $\bar{\bar{n}}$ as classes do inteiro n em $\mathbb{Z}_m$, $\mathbb{Z}_a$ e $\mathbb{Z}_b$, respectivamente.

Podemos mostrar que de fato

- f é bem-definida:

  Se $[n_1] = [n_2]$ então $n_1 \equiv n_2 \pmod m$. Daí, $m \mid (n_1 - n_2)$, ou seja, $ab \mid (n_1 - n_2)$. Como $a \mid ab$ e $b \mid ab$, temos que $a \mid (n_1 - n_2)$ e $b \mid (n_1 - n_2)$, isto é, $n_1 \equiv n_2 \pmod a$ e $n_1 \equiv n_2 \pmod b$. Assim sendo, $\overline{n_1} = \overline{n_2}$ e $\overline{\overline{n_1}} = \overline{\overline{n_2}}$.

- f é injetora:

  Se $f([n_1]) = f([n_2])$ então $(\overline{n_1}, \overline{\overline{n_1}}) = (\overline{n_2}, \overline{\overline{n_2}})$. Daí $\overline{n_1} = \overline{n_2}$ e $\overline{\overline{n_1}} = \overline{\overline{n_2}}$. Isto quer dizer que $n_1 \equiv n_2 \pmod a$ e $n_1 \equiv n_2 \pmod b$, ou seja, $a \mid (n_1 - n_2)$ e $b \mid (n_1 - n_2)$. Como a e b são primos entre si, $ab \mid (n_1 - n_2)$, ou seja $m \mid (n_1 - n_2)$, e portanto $[n_1] = [n_2]$

- f é sobrejetora:

  Aqui devemos mostrar que sendo $(\bar{x}, \bar{\bar{y}})$ um elemento qualquer de $\mathbb{Z}_a \times \mathbb{Z}_b$, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $f([n]) = (\bar{n}, \bar{\bar{n}}) = (\bar{x}, \bar{\bar{y}})$. Para que isto seja possível devemos encontrar $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \equiv x \pmod a$ e $n \equiv y \pmod b$.

  Pois bem, como $\mathrm{mdc}(a, b) = 1$, existem inteiros r, s tais que $ra + sb = 1$.

  Consideremos $n = yra + xsb$.

  Então temos $n \equiv xsb \pmod a$ e $n \equiv yra \pmod b$. Porém

  $sb = 1 - ra \Rightarrow xsb = x - xra \Rightarrow xsb \equiv x \pmod a$. Logo, $n \equiv x \pmod a$

  $ra = 1 - sb \Rightarrow yra = y - ysb \Rightarrow yra \equiv y \pmod b$. Logo, $n \equiv y \pmod b$

  Portanto, $f([n]) = (\bar{n}, \bar{\bar{n}}) = (\bar{x}, \bar{\bar{y}})$.

iii. Tendo sido estabelecido um isomorfismo entre $\mathbb{Z}_{ab}$ e $\mathbb{Z}_a \times \mathbb{Z}_b$, no caso em que a e b são primos entre si, teremos também que o número de elementos invertíveis de $\mathbb{Z}_{ab}$ é o número de elementos invertíveis de $\mathbb{Z}_a \times \mathbb{Z}_b$. Na verdade, o isomorfismo de anéis f restringe-se a um isomorfismo de grupos $f\colon \mathbb{Z}_{ab}^* \longrightarrow \mathbb{Z}_a^* \times \mathbb{Z}_b^*$.

Logo, pela igualdade dos números de elementos de $\mathbb{Z}_{ab}^*$ e $\mathbb{Z}_a^* \times \mathbb{Z}_b^*$, temos $\phi(ab) = \phi(a) \cdot \phi(b)$.

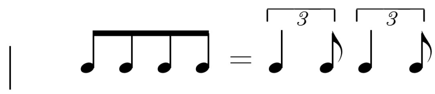
(d) Os fatores primos de $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ são dois a dois primos entre si, daí generalizando o resultado do item (c), teremos $\phi(n) = \phi(p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}) = \phi(p_1^{\alpha_1})\phi(p_2^{\alpha_2}) \cdots \phi(p_r^{\alpha_r})$, e a fórmula final é deduzida pelo resultado do item (b).

$\square$

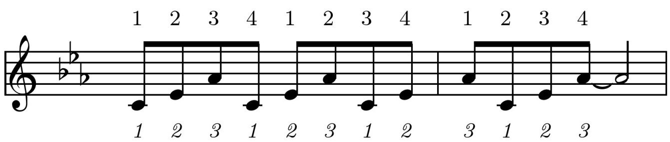
9.11 Padrões de m sobre n na música

Os compositores criam às vezes passagens musicais engenhosas impondo um teste padrão de m notas ou batidas contra um padrão de n notas, com $\mathrm{mdc}(m, n) = 1$. Esta técnica explora (talvez sem ser sabida pelo compositor) o fato de que $[m]$ é um gerador em $\mathbb{Z}_n$ (e vice-versa).

Uma maneira em que isso pode ocorrer é circulando m alturas através de um padrão repetidamente rítmico de n notas. Isto é exemplificado na linha melódica principal da canção *In The Mood*, composição de Joe Garland e Andy Razaf, gravada por Glenn Miller. Aqui $m = 3$ e $n = 4$. O "gancho" da canção reside na repetição da figura rítmica compreendendo quatro oitavas em *tempo-swing*, mostrado abaixo.

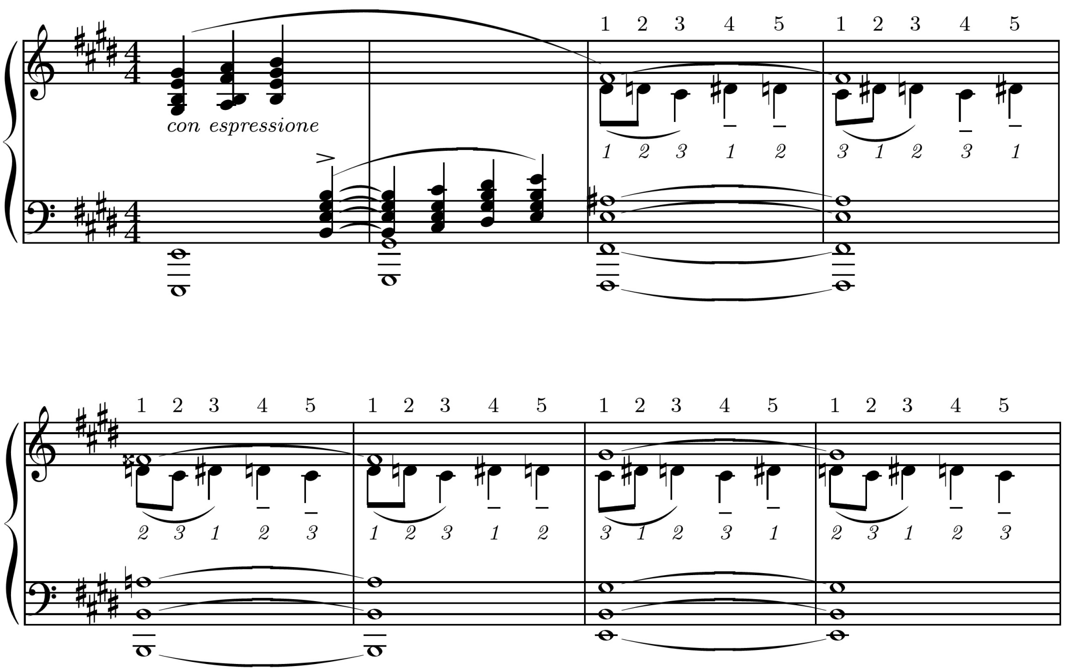


A melodia repete a sequência de três tons $C_4, E_4^\flat, A_4^\flat$, através do padrão rítmico acima, tal como segue:



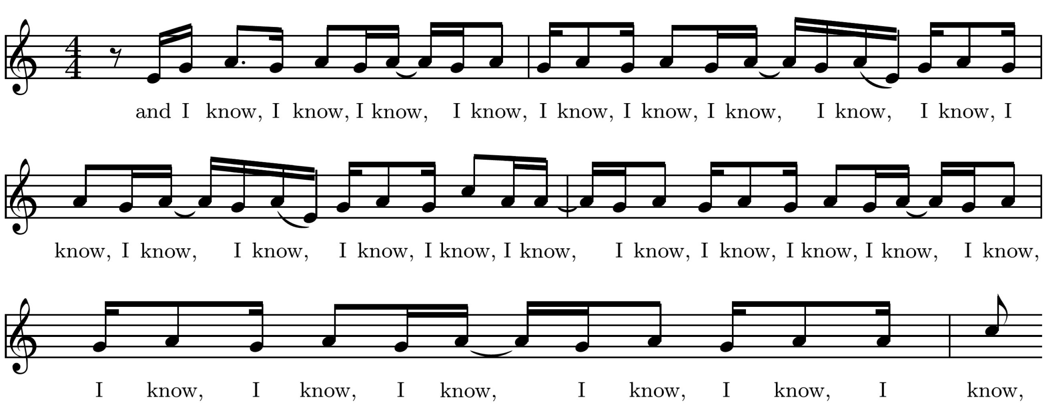
Observe que ambos os padrões terminam seu ciclo nas décimas segundas notas oitavas e não antes. A razão para isso reside na proposição anterior. Suponhamos que os números superiores representam os elementos de $\mathbb{Z}_4 = \{[1], [2], [3], [4] = [0]\}$. Identificando cada um dos números inferiores com o elemento de $\mathbb{Z}_4$ representado diretamente sobre ele, nós podemos ver o efeito da adição sucessiva de $[3]'$s em $\mathbb{Z}_4$. Os múltiplos de $[3]$ (isto é, os elementos de $\mathbb{Z}_4$ situados acima dos *3*'s) são, respectivamente $[3], [2], [1], [4] = [0]$, que esgotam o conjunto $\mathbb{Z}_4$. Isto porque, como $\mathrm{mdc}(3, 4) = 1$, $[3]$ é um gerador de $\mathbb{Z}_4$, então todos os quatro números $1, 2, 3$ e 4 devem aparecer acima dos *3*'s antes que qualquer deles se seja repetido acima de um *3*. Cada ciclo de três notas começa em um número diferente $1, 2, 3$ e 4 acima, e os dois ciclos culminam juntos apenas em $3 \times 4 = 12$ notas oitavas, e não antes.

Há simetria entre os dois padrões: podemos considerar que os números da base representam elementos de $\mathbb{Z}_3 = \{[\mathit{1}], [\mathit{2}], [\mathit{3}] = [\mathit{0}]\}$. Em seguida, os ciclos acima estão apenas adicionando sucessivos [4]s em $\mathbb{Z}_3$. Cada um dos ciclos de quatro notas começa em um número diferente $1, 2$ ou 3, pelas mesmas razões acima. A pungente passagem abaixo, de *Rhapsody in Blue*, de George Gershwin, exibe o mesmo fenômeno com $m = 3, n = 5$, começando no terceiro compasso.



Aqui as tres alturas $D_4^\sharp, D_4$ e $C_4^\sharp$ formam um ciclo contra o padrão rítmico de cinco notas, composto por duas notas oitavas seguido por três notas quartas. O padrão duplo 3 sobre 5 se completa após $3 \times 5 = 15$ notas, ocupando compassos $3 - 5$. O padrão todo é então repetido nos compassos $6 - 8$ com harmonia diferente.

Outro tipo de padrão m sobre n ocorre quando uma figura melódica de duração m de batidas é repetido em um medidor que tem o ouvinte contando em grupos de n batidas. Um exemplo disto ocorre na *vamp section* da musica *blues-pop* de 1971 *Ain't No Sunshine*, composição de Bill Withers.



Neste exemplo, uma figura rítmica compreendendo uma semicolcheia seguida de uma colcheia (ou duas semicolcheias ligadas) repetida em tempo $\frac{4}{4}$. Como o comprimento da figura é 3 semicolcheias, e cada compasso tem 16 semicolcheias, nós vemos isto como um padrão de 3 sobre 16. Ambos os ciclos começam juntos no início do segundo compasso, e o padrão duplo segue seu curso em três compassos, ou $3 \times 16 = 48$ semicolcheias.

O padrão m sobre n representa uma forma de polirritmia fundamentalmente diferente da quiáltera, apresentando aqui ao ouvinte a escolha de contar as batidas em grupos de m ou em grupos de n.

Cada um destes exemplos é um "jogo" ligeiramente diferente tocado pelo compositor, e em cada um o ouvinte recebe uma sensação de preenchimento apenas quando o padrão está completo.

10 Os Inteiros como Intervalos

Vamos agora determinar, para cada um dos primeiros números inteiros positivos $n = 1, 2, 3, \ldots$, quais intervalos de escalas igualmente temperadas melhor se aproximam do intervalo dado pela razão n, e vamos calcular a proximidade da aproximação. Isso nos dirá como desafinar intervalos do teclado para que as razões inteiras possam ser ouvidas. Uma vez feito isso, é esclarecedor "ouvir os inteiros", observando que cada um possui uma única "personalidade" que parece determinada pela fatoração prima do inteiro.

Iremos ocasionalmente empregar o termo, um pouco desajeitado, *intervalo inteiro*, para se referir a um intervalo musical cuja razão é um número inteiro. Nós chamamos tal intervalo como um *intervalo primo* se sua razão é um primo.

O conjunto de intervalos inteiros forma um monóide sob composição de intervalos. Este monóide pode ser identificado com $(\mathbb{Z}, \cdot)$.

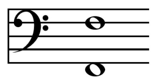
10.1 Um

A razão 1, representando *uníssono*, é o elemento de identidade de $(\mathbb{Z}, \cdot)$ de intervalos inteiros, e também é o elemento de identidade do grupo $(\mathbb{R}, \cdot)$ de todas as razões de intervalos. Não é muito interessante, já que é a razão de duas freqüências dando a mesma altura.

10.2 Dois

Já observamos o fato de que o primeiro primo, 2, dá a *oitava*, que pode ser chamado de intervalo mais consonante da música. Quando duas notas separadas por uma oitava soam elas se misturam quase como uma única. A equivalência de oitavas é enraizada na notação musical em virtude do fato de que as notas que formam um intervalo de uma ou mais oitavas são atribuídas à mesma letra do alfabeto. Somente usando subíndices como C_2 ou $A_5^\flat$ (ou usando uma partitura musical) nós podemos distingui-las notacionalmente.

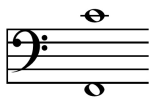
Além disso, a escala cromática igualmente temperada do teclado é afinada para dar uma oitava perfeita (uma vez que o temperamento igual é obtido dividindo-se o intervalo dado por 2 em 12 intervalos iguais). Assim, a razão 2 é renderizada precisamente pelo temperamento igual. O intervalo de F_2 a F_3, mostrado abaixo, tem razão de freqüências exatamente 2.



Representação exata de 2 no teclado.

10.3 Três

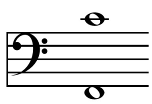
Observamos que o intervalo principal 3 é melhor aproximado no teclado por 19 semitons, ou uma oitava mais uma quinta, mostrado abaixo como o intervalo de F_2 para C_4.



Aproximação de 3 no teclado, ≈ 2 centésimos bemol.

Esta aproximação é de cerca de 2 centésimos abaixo, uma vez que 3 é medido em centésimos por $1200 \log_2 3 \approx 1901{,}96$ e 1900 centésimos é de 19 semitons, que é uma oitava mais uma quinta. Este é uma aproximação muito boa. É muito difícil para a maioria perceber a diferença entre a oitava mais uma quinta e o intervalo dado por 3.

10.4 Quatro



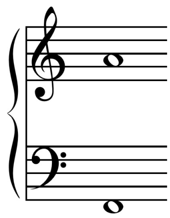
Representação exata de 4 no teclado.

A razão 4 é de duas oitavas em virtude de $4 = 2^2$. Ela pode ser reproduzida precisamente no teclado, como pode qualquer razão inteira que seja uma potência de dois.

Veremos que as potências de 2 são os únicos números inteiros positivos que podem ser reproduzidos perfeitamente em um teclado afinado para uma escala igualmente temperada de 12 tons, ou na verdade em qualquer escala cromática que divide igualmente a oitava. Ainda veremos que a harmonia deriva dos inteiros.

10.5 Cinco

A próxima razão inteira interessante é o número primo 5, que é dado em centésimos por $1200\log_2 5 \approx 2786,31$. O intervalo mais próximo disso no teclado é o de 2800 centésimos, que é de duas oitavas mais uma terça maior.

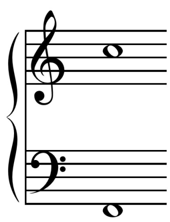


Aproximação de 5 no teclado, ≈ 2 centésimos bemol.

Isto é sustenido por aproximadamente 14 centésimos. Ao contrário da aproximação da quinta de 2, esta diferença é perceptível, após uma escuta cuidadosa, pela maioria das pessoas com discriminação razoavelmente boa de notas. A escala temperada foi evitada por muitos anos principalmente devido a esta discrepância particular.

10.6 Seis

O inteiro $6 = 3 \cdot 2$ é o menor inteiro cuja fatoração prima envolve mais de um primo. Em virtude da fatoração $6 = 2 \cdot 3$, a multiplicatividade nos diz que esse intervalo é obtido iterando os intervalos correspondentes a 2 e 3. Assim, obtemos um intervalo que é aproximado em teclado por uma oitava mais uma oitava e uma quinta, ou duas oitavas e uma quinta.



Aproximação de 6 no teclado, ≈ 2 centésimos bemol.

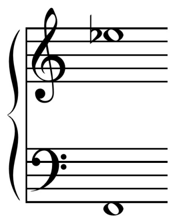
Uma vez que o teclado realiza a oitava com precisão, sua realização de 6 deve ter o mesmo erro que sua aproximação de 3, que é aproximadamente 2 centésimos. Isto é verificado pelo cálculo:

$$\begin{aligned}1200\log_2 6 &= 1200(\log_2 2 + \log_2 3)\\ &= 1200\log_2 2 + 1200\log_2 3\\ &\approx 1200 + 1901,96 = 3101,96\end{aligned}$$

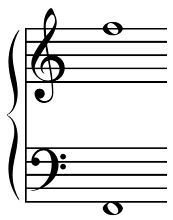
o que mostra a razão 6 sendo cerca de 2 centésimos maior do que 3100 centésimos (= 31 semitons), que é as duas oitavas mais um quinto no teclado.

10.7 Sete

O primo 7 é o menor inteiro que é mal aproximado pela escala cromática temperada. Em centésimos é dado por $1200\log_2 7 \approx 3368,83$. O intervalo mais próximo no teclado é 3400 centésimos, que superestima o intervalo de 7 em cerca de 31 centésimos. Esta aproximação é de 34 semitons, que equivale a duas oitavas mais uma sétima menor.



Aproximação de 7 no teclado, $\approx$ 31 centésimos sustenido.



Representação exata de 8 no teclado

10.8 Oito

Continuando, notamos que 8, sendo 2^3, é exatamente três oitavas, e é precisamente realizado no teclado.

10.9 Nove

Como $9 = 3^2$, a razão 9 é aproximada compondo um intervalo oitava-mais-um-quinto consigo mesmo, o que produz duas oitavas mais uma nona ou três oitavas mais um passo. Isto tem o dobro do erro da aproximação de 3, então o erro na aproximação de 9 é de cerca de 4 centésimos bemol.

Aproximação de 9 no teclado, ≈ 4 centésimos bemol.

10.10 Dez

Temos $10 = 2 \cdot 5$, portanto 10 é aproximado pela composição de uma oitava com o intervalo de duas oitavas-mais-um-terço, produzindo três oitavas e um terço, e com o mesmo erro que a aproximação de 5 (já que 2 é realizado exatamente), que é de cerca de 14 centésimos sustenido.

Aproximação de 10 no teclado, ≈ 14 centésimos sustenido.

10.11 Onze

O próximo inteiro, o primo 11, tem a pior aproximação de escala temperada encontrada até agora: $1200 \log_2 11 \approx 4151,32$. Observe que ele está muito perto da metade entre 41 semitons (três oitavas mais um quarto) e 42 semitons (três oitavas mais um tritom), ligeiramente mais perto do último.

Aproximação de 11 no teclado, ≈ 49 centésimos sustenido.

Este intervalo está verdadeiramente "nas rachaduras", situando-se cerca de um quarto de passo dos intervalos de escala temperada mais próximos.

10.12 Doze

Observamos que 12, sendo $2^2 \cdot 3$, é aproximado por três oitavas mais um quinto em 14 centésimos sustenido.

Aproximação de 12 no teclado, ≈ 2 centésimos bemol.

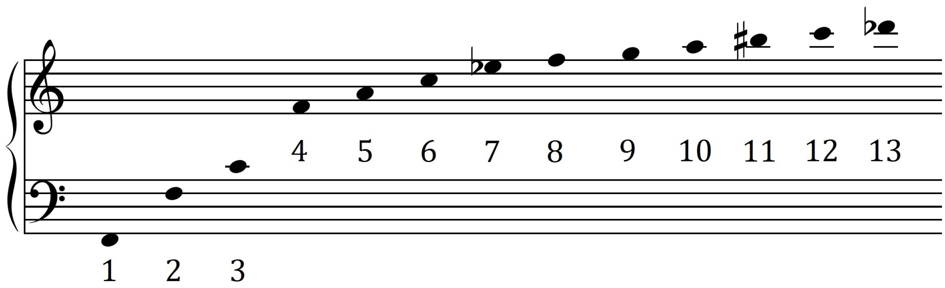
10.13 Treze

O último número inteiro que consideraremos aqui é o primo 13. Como $1200 \log_2 13 \approx 4440,53$, temos que 13 é melhor aproximado no teclado por 44 semitons, ou três oitavas mais uma sexta menor, e a aproximação é de cerca de 41 centésimos bemol.

Aproximação de 13 no teclado, ≈ 41 centésimos bemol.

10.14 Resumo

A sequência de notas cromáticas que melhor se aproximam das alturas tendo a razão n, para $n = 1, 2, 3, \ldots, 13$ é:



A discussão acima revela que algumas dessas aproximações são muito próximas, outras não são próximas de modo algum.

10.15 Natureza não-cromática dos intervalos que não sejam oitavas múltiplas

Note que os únicos intervalos inteiros no teclado até agora são as potências de 2 (intervalos de várias oitavas). O seguinte teorema mostra que não ocorrem outras razões inteiras n no teclado.

Teorema 10.1. *Os únicos intervalos de teclado que têm razões inteiras são as potências de 2.*

Demonstração. Suponha que $n \in \mathbb{Z}^+$ é um intervalo do teclado. Isto significa que é obtido por composição de k semitons, para algum inteiro $k \geq 0$. Uma vez que o semitom tem razão de intervalos $2^{1/12}$, temos $n = (2^{1/12})^k = 2^{k/12}$, logo $n^{12} = 2^k$. Pelo teorema da fatoração única, n pode ter apenas fatores primos iguai a 2 em sua fatoração. $\square$

11 Timbre e Funções Periódicas

11.1 Timbre

O termo timbre refere-se à qualidade ou propriedades distinguidas em um tom musical, diferentes da sua altura, que permitem distinguir entre um violino, um trombone, uma flauta, a vogal *óh*, ou a vogal *eh*, mesmo quando os tons tem a mesma altura. Para tratar desse fenômeno, precisamos discutir alguns novos conceitos relacionados a funções e gráficos.

11.2 Funções definidas por partes e continuidade

Uma função pode ser definida em por partes, como no exemplo

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \leq 1 \\ 1, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

cujo gráfico é esboçado na figura 11.1.

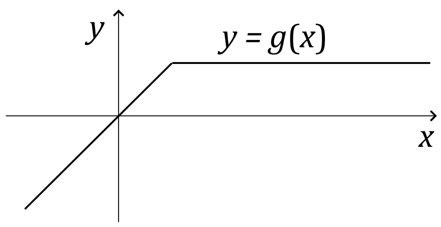


Figura 11.1: Gráfico da função g.

Como outro exemplo temos a função h definida por

$$h(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \leq 1 \\ 2, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

tendo agora o gráfico esboçado na figura 11.2.

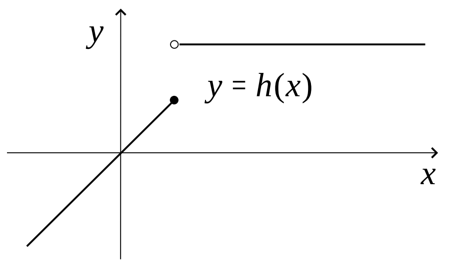


Figura 11.2: Gráfico da função h.

Observe o "salto" que aparece no gráfico de $y = h(x)$ em $x = 1$. Este é um exemplo de uma descontinuidade, isto é, a situação num ponto $x = a$ no qual a função não é contínua, conforme a seguinte definição.

Definição 11.1. *Uma função $y = f(x)$ é definida como contínua em $x = a$, se:*

para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ sempre que $|x - a| < \delta$.

Esta definição diz que $f(x)$ estará arbitrariamente próximo de $f(a)$ quando x estiver suficientemente próximo de a.

No exemplo da função $h(x)$ acima, observamos que, para $a = 1$ e $\varepsilon = 1/2$, não existe $\delta > 0$ tal que se x pertencer ao intervalo $(1 - \delta, 1 + \delta) \subset \mathbb{R}$ então $h(x)$ pertencerá ao intervalo $(h(1) - 1/2, h(1) + 1/2) \subset \mathbb{R}$, sendo $h(1) = 1$. Pois quando x se aproxima de 1 pela direita, isto é, assumindo valores maiores que 1, todos os valores de $h(x)$ são iguais a 2, e é imediato ver que $2 \notin (1/2, 3/2)$.

A função

$$h_1(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x < 1 \\ 2, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

tem o mesmo gráfico que $h(x)$, exceto em $x = 1$. Podemos redefinir $h_1(1)$ como sendo um outro número real, como em

$$h_2(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x < 1 \\ 3, & \text{se } x = 1 \\ 2, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

tendo h_2 o gráfico esboçado na figura 11.3,

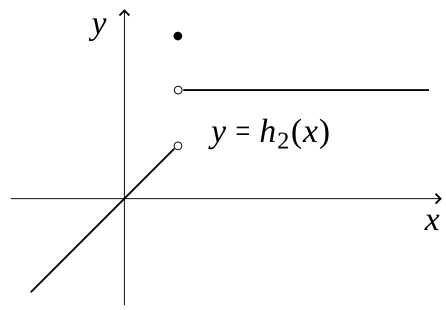


Figura 11.3: Gráfico da função h_2.

que tem novamente uma descontinuidade em $x = 1$. Não é difícil provar que, de fato, não existe nenhuma maneira de redefinir $h(1)$, deixando todos os outros valores de h inalterados, de tal forma que h seja contínua em $x = 1$. Pois se $x > 1$, temos $h(x) = 2$, e se $x < 1$, temos $h(x) = x$. Suponhamos que $h(1) = a$, sendo a um número real qualquer, e suponhamos que $h(x)$ seja contínua em $x = 1$. Então, para $\varepsilon = 1/2$, podemos encontrar $\delta > 0$, tal que $|x - 1| < \delta \Rightarrow |h(x) - a| < 1/2$. Mas existem $x_1 < 1$ e $x_2 > 1$, com $|x_1 - 1| < \delta$ e $|x_2 - 1| < \delta$. Nesse caso, temos $h(x_1) = x_1$ e $h(x_2) = 2$. Daí teremos

$$\begin{aligned} |x_1 - 2| &= |h(x_1) - h(x_2)| \\ &= |(h(x_1) - a) - (h(x_2) - a)| \\ &\leq |h(x_1) - a| + |h(x_2) - a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

do que deduzimos que $|x_1 - 2| < 1$. Daí, $-1 < x_1 - 2 < 1$, ou seja $1 < x_1 < 3$, uma contradição, pois $x_1 < 1$.

Uma interpretação grosseira de uma descontinuidade é um "salto" no gráfico. Isto não é uma terminologia matemática precisa, mas nos serve muito bem intuitivamente.

Uma função que é contínua num intervalo I é uma cujo gráfico não tem "saltos" para qualquer $x \in I$.

11.3 Funções periódicas

Uma função $f(x)$ cujo domínio é todo $\mathbb{R}$ é chamada *periódica* se existe um número positivo P tal que para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x + P) = f(x)$. Isto significa que o comportamento da função é completamente determinado pelo seu comportamento no intervalo semi-aberto $[0, P)$. (ou em qualquer intervalo semi-aberto de comprimento P).

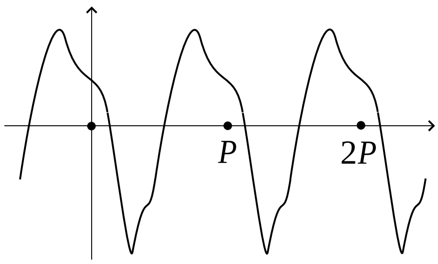


Figura 11.4: Gráfico de uma função periódica de período P.

O número P é chamado de período da função.

Exemplo. As funções $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$ são periódicas do período 2π. Qualquer função $f(x)$ definida no intervalo $[0, P)$ pode ser estendida (unicamente) para uma função periódica $g(x)$ de período P cujo domínio é todo $\mathbb{R}$. Isto é feito pela definição de $g(x) = f(x - nP)$ para $x \in [nP, (n+1)P)$, para todos os inteiros n. Nós vamos nos referir a este procedimento como "extensão de $[0, P)$ a $\mathbb{R}$ por periodicidade".

11.4 Efeito do deslocamento e alongamento sobre a periodicidade

Se $y = f(x)$ é uma função periódica com período P, então as translações verticais e horizontais de comprimento c, $y = f(x)+c$ e $y = f(x-c)$, para $c \in \mathbb{R}$, também são periódicas com período P. Também é periódica de período P a função alongamento vertical $y = cf(x)$.

No entanto, o alongamento horizontal $y = f(x/c)$ passa a ter período cP. Isto é fácil de ser verificado pois, sendo $f(x)$ de período P, e sendo $h(x) = f(x/c)$, temos $h(x + cP) = f((x + cP)/c) = f((x/c) + P) = f(x/c) = h(x)$.

11.5 Deslocamento e alongamento de seno e cosseno

As duas funções trigonométricas $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$ desempenham um papel central na discussão restante, e elas são relacionados da seguinte maneira: O gráfico de $y = \cos x$ é obtido por um deslocamento do gráfico de $y = \operatorname{sen} x$ à esquerda por $c = \pi/2$. Isso ocorre porque o seno e cosseno possuem a relação

$$\cos x = \operatorname{sen}(x + \pi/2)$$

que é um caso especial da "fórmula da soma"

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta \tag{11.1}$$

Observe que a equação anterior é obtida a partir desta última, ajustando $\alpha = x$ e $\beta = \pi/2$, pois $\cos(\pi/2) = 0$ e $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$. De modo mais geral, se tratarmos 11.1 como uma equação funcional substituindo α pela variável independente x e considerar β como sendo um número fixado (considerando β como sendo um ângulo medido em radianos), temos:

$$\operatorname{sen}(x + \beta) = \cos\beta \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}\beta \cos x. \tag{11.2}$$

Os números $\cos\beta$ e $\operatorname{sen}\beta$, são as coordenadas do ponto Q no círculo unitário (isto é, o círculo de raio um) centrado na origem, de modo que o comprimento de arco no sentido anti-horário, ao longo do círculo, de $(1, 0)$ a Q é igual a β.

Sejam $k, d \in \mathbb{R}$ com $d \geq 0$. Substituindo x por kx em 11.2 e multiplicando ambos os lados da equação acima por d resulta na equação da função $g(x)$ obtida começando com $f(x) = \operatorname{sen} x$, deslocando o gráfico desta para a esquerda por β, comprimindo o gráfico horizontalmente por um factor de k (i.e., alongamento por $1/k$) e alongamento vertical por um fator de d. A transformação geral resultante de $\operatorname{sen} x$ é:

$$\boxed{g(x) = d\operatorname{sen}(kx + \beta) = d(\cos\beta \operatorname{sen} kx + \operatorname{sen}\beta \cos kx)} \tag{11.3}$$

Agora vamos considerar uma função arbitrária da forma

$$h(x) = A\operatorname{sen} kx + B\cos kx \tag{11.4}$$

em que de $A, B \in \mathbb{R}$ são números quaisquer. O ponto (A, B) tem a distância $\sqrt{A^2 + B^2}$ da origem. Se A e B não são simultaneamente nulos, então tomando

$$a = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \; b = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

o ponto (a, b) está à distância 1 da origem, portanto encontra-se no círculo unitário centrado na origem. Assim, há um ângulo $\beta > 0$ para o qual $a = \cos\beta$, $b = \operatorname{sen}\beta$, e tomando $d = \sqrt{A^2 + B^2}$ temos $da = A$, $db = B$, e

$$h(x) = d(a \operatorname{sen} kx + b \cos kx) = d(\cos\beta \operatorname{sen} kx + \operatorname{sen}\beta \cos kx) = d \operatorname{sen}(kx + \beta)$$

Portanto $h(x)$ é uma transformação de $\operatorname{sen} x$ tendo a forma 11.3, em que $d = \sqrt{A^2 + B^2}$. O ângulo β é chamado de deslocamento de fase, e o número $d > 0$ é a amplitude.

Exemplo. Considere a função $h(x) = 3 \operatorname{sen} x + 2 \cos x$. Temos $A = 3$, $B = 2$, $d = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$, $a = \frac{3}{\sqrt{13}}$, e $b = \frac{2}{\sqrt{13}}$. O ângulo $\beta = \frac{2}{\sqrt{13}}$ é um ângulo agudo, já que o ponto (3, 2) está no primeiro quadrante. Uma calculadora nos dá $\beta = \operatorname{arcsen} \frac{2}{\sqrt{13}} \approx 0{,}588 \approx 33{,}69^\circ$. Daí, temos

$$\begin{aligned} h(x) &= \sqrt{13}\left(\frac{3}{\sqrt{13}} \operatorname{sen} x + \frac{2}{\sqrt{13}} \cos x\right) \\ &= \sqrt{13}(\cos\beta \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}\beta \cos x) \\ &= \sqrt{13} \operatorname{sen}(x + \beta) \end{aligned}$$

A amplitude é $\sqrt{13}$ e o deslocamento de fase é $\beta \approx 0{,}588$.

11.6 Vibrações

Usaremos o termo vibração para significar uma oscilação com um padrão que se repete a cada intervalo de P unidades de tempo. A frequência da vibração, isto é, o número de repetições do seu padrão por unidade de tempo, é $1/P$. Para os nossos propósitos, o tempo será medido em segundos. Se realizamos uma vibração como um movimento para cima e para baixo de um ponto, a vibração é dada por uma função $y = f(t)$ em que y é a posição da partícula no instante t. A função será periódica, tendo como período o número P acima.

Movimento vibratório pode surgir a partir das cordas de um violino, de uma coluna de ar dentro de uma trombeta, das cordas vocais humanas, etc. A vibração é transmitida através do ar por contração e expansão (isso é chamado de onda sonora).

É recebida pelo ouvido humano quando o tímpano é posto em movimento, vibrando no mesmo padrão que o objeto vibratório. O cérebro interpreta a vibração como um tom musical. Se a vibração tiver o período P, medido em segundos, então a altura ou frequência do tom será $F = 1/P$ Hz.

11.7 Tons musicais e funções periódicas

Dada qualquer função periódica $y = f(t)$ do período P, podemos contemplar um objeto oscilante cuja posição no momento t é $f(t)$ e perguntar qual é o som de tal vibração. Esperamos que a altura do tom seja $1/P$ Hz, mas queremos investigar outros aspectos de $y = f(t)$ que determinam o caráter, ou timbre, do som que estamos ouvindo.

Se uma função $y = f(t)$ de fato representasse a posição de um objeto, seria de esperar que a função $f(t)$ fosse contínua. Isto é baseado na suposição de que a posição dos objetos não "salta" instantaneamente. Apesar deste fato ser um reflexo da realidade, em nossa discussão iremos entretanto associar uma vibração com qualquer função periódica $y = f(t)$ de período $P \in \mathbb{R}^+$ satisfazendo as seguintes propriedades mais gerais:

1. f possui um número finito de descontinuidades em $[0, P)$.
2. f é *limitada*, isto é, existem números $b, B \in \mathbb{R}$ tais que para todo $t \in \mathbb{R}$, $b < f(t) < B$.

Interpretamos as descontinuidades como momentos em que o objeto vibratório apresente mudança de posição muito rapidamente, de modo que a transição de uma posição a outra parece instantânea. Isso exemplifica o fato de que a Matemática apresenta modelos de fenômenos físicos, não representações exatas de fenômenos físicos.

Suponha que $y = f(t)$ é uma função periódica, com período P, satisfazendo as condições 1 e 2. Conforme descrito acima, $f(t)$ está associada a um tom de altura (frequência) $F = 1/P$. De acordo com nossas observações sobre o efeito de mudança de periodicidade, a altura não é alterada se alterarmos $f(t)$ por um deslocamento horizontal. Uma vez que tal deslocamento pode ser pensado como um atraso, não esperamos que ele afete o timbre do tom, e na verdade não afeta.

O deslocamento vertical descreve um movimento com amplitude alterada, mas a mesmo altura (tom) e a mesma "personalidade" básica. A observação confirma que tal alongamento ajusta a intensidade, com muito pouco efeito, se houver, no timbre do tom.

A compressão horizontal $y = f(ct)$ muda o período para P/c, daí o passo fica $\dfrac{1}{P/c} = c/P = cF$. Assim, o efeito da compressão horizontal por um fator de c é multiplicar a frequência de $f(t)$ por c.

11.8 Efeito do alongamento horizontal no passo

A observação final da seção anterior nos diz como aplicar uma compressão horizontal a $f(t)$ para alcançar qualquer altura (frequência) desejada r.

Suponha que o período P seja dado em segundos. Queremos que $r = cF = c/P$, o que dá $c = rP$. Assim, a função

$$y = f(rPt)$$

Representa um tom com frequência r ciclos por segundo, isto é, r Hz.

Exemplo. Suponha que $y = \operatorname{sen} t$ dá um movimento em segundos. Aqui $P = 2\pi$, e então a frequência é $1/(2\pi)$ Hz (que é muito abaixo do limiar de audibilidade humana). Vamos ajustar o passo para dar A_4, afinado para $r = 440\mathrm{Hz}$. Assim, escrevemos $y = \operatorname{sen}(rPt)$, isto é,

$$y = \operatorname{sen}(880\pi t)$$

O tom dado por uma função seno como acima é às vezes chamado de "tom puro". É um zumbido indescritível, muito semelhante ao tom produzido por um diapasão.

11.9 Teoria de Fourier

Iremos agora descrever como todas as funções periódicas com comportamento razoavelmente bom podem ser escritas em termos das funções $\operatorname{sen} t$ e $\cos t$. Este é um resultado fundamental da *Análise Harmônica*, mais especificamente *Teoria de Fourier*, que se baseia no trabalho do matemático e físico francês Joseph Fourier (1768-1830). Primeiro fazemos as seguintes observações.

A primeira é que se $f(t)$ e $g(t)$ são duas funções periódicas de período P, então assim é $(f+g)(t)$, que é definida como $f(t)+g(t)$. Isto é elementar pois $(f+g)(t+P) = f(t+P)+g(t+P) = f(t)+g(t) = (f+g)(t)$.

De um modo mais geral, temos que se $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ são periódicas do período P, então também é periódica de período P a função $\sum_{k=1}^{n} f_k(t)$.

Em segundo lugar, suponhamos que $f(t)$ é periódica do período P, e seja $k \in \mathbb{Z}^+$. Como vimos, a função $f(kt)$ tem como gráfico o gráfico de $f(t)$ comprimido horizontalmente por um fator de compressão k, e tem período P/k. No entanto, também tem período P, já que $f(k(t+P)) = f(kt+kP) = f(kt)$.

Obviamente, a função $af(kt)$, para qualquer $a \in \mathbb{R}$, é também periódica do período P.

Portanto, a soma $\sum_{k=1}^{n} a_k f(kt)$, em que $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, é novamente periódica de período P. Em particular, uma soma $\sum_{k=1}^{n} a_k \operatorname{sen}(kt)$ tem como período 2π.

O seguinte teorema, básico para a análise harmônica, envolve dois conceitos de cálculo: derivadas e séries (somas com um número infinito de termos).

Teorema 11.1. *Suponhamos que* $f(t)$ *é periódica de período* 2π, *e que* $f(t)$ *é limitada e tem derivada* $f'(t)$ *contínua e limitada em todos os pontos de* $[0, 2\pi)$, *exceto possivelmente em um número finito de pontos. Então existe um número real* C *e sequências de números reais* $A_1, A_2, A_3, \ldots$ *e* $B_1, B_2, B_3, \ldots$, *tais que para cada* t *em que* $f(t)$ *é contínua temos* $f(t)$ *representada pela série convergente*

$$f(t) = C + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \operatorname{sen}(kt) + B_k \cos(kt)]. \tag{11.5}$$

Note que existe uma condição em $f(t)$ para além das condições 1 e 2 mencionadas anteriormente neste capítulo. Envolve o conceito de derivada, que aprendemos em cursos universitários de Cálculo. A condição sobre a derivada diz intuitivamente que, exceto num conjunto finito de pontos, o gráfico de $f(t)$ é suave e as retas tangentes a ele tem inclinações limitadas por uma inclinação maior e uma inclinação menor.

Aqui o termo inclinação pode ser entendido como coeficiente angular. A reta de equação $y = mt + n$ tem inclinação m. A reta tangente ao gráfico de $y = f(t)$, em um ponto $P_0 = (t_0, f(t_0))$, sendo t_0 um ponto em que $f(t)$ tem derivada $f'(t_0)$, é dada pela equação $y = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0)$, tendo assim inclinação $f'(t_0)$.

Os números reais C, $A_1, A_2, A_3, \ldots$ e $B_1, B_2, B_3, \ldots$, cuja existência é enunciada no teorema 11.1, são chamados coeficientes de Fourier da função $f(t)$.

A soma infinita 11.5, chamada *Série de Fourier de* f, baseia-se nas noções de limite e convergência, também de análise. Com definições e desenvolvimento adequados, torna-se possível o fato de que uma soma infinita tenha um limite, isto é, possa "somar-se" (convergir) a um número. Um exemplo é a série $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$, que tem 2 como seu limite. Esta é a mesma soma dada pala fórmula 3.2 do Capítulo 3, encontrada em nossa discussão de notas pontilhadas.

Esta moral da história contada no teorema acima é que funções periódicas bem-comportadas podem ser aproximadas por uma série de múltiplos de funções seno e cosseno. Há mais na história, que, novamente, pode ser entendida por qualquer pessoa familiarizada com cálculo:

Teorema 11.2. *Os coeficientes da série 11.5 são unicamente determinados pelas integrais abaixo:*

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt \\ A_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(kt)\,f(t)\,dt \\ B_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(kt)\,f(t)\,dt \end{aligned} \tag{11.6}$$

Para leitores não familiarizados com cálculo diferencial e integral, para uma função $h(t)$, limitada e com derivada $h'(t)$ contínua em limitada em todos os pontos do intervalo $[a, b]$, exceto possivelmente em um número finito de pontos, o símbolo $\int_a^b h(t)\,dt$ denota a *integral definida, sobre o intervalo* $[a, b]$*, da função* $h(t)$. Essa integral pode ser intuitivamente interpretada como sendo o valor numérico da área delimitada pelo gráfico de $h(t)$ e pelo eixo t, e pelas retas verticais $t = a$ e $t = b$. Áreas acima do eixo t são tomadas como positivas e áreas abaixo do eixo t são tomadas como negativas, e para o cálculo da integral essas áreas, tanto as positivas como as negativas, entre o gráfico de $h(t)$ e o eixo t, são somadas.

Se $g(t)$ é uma função de período P, satisfazendo as hipóteses do teorema 11.1, então $g\left(\frac{P}{2\pi}t\right)$ tem o período 2π e temos:

$$g\left(\frac{P}{2\pi}t\right) = C + \sum_{k=1}^{\infty}[A_k \operatorname{sen}(kt) + B_k \cos(kt)] \tag{11.7}$$

Recuperando $g(t)$, pela substituição de t por $\frac{2\pi t}{P}t$ na série 11.7, obtemos a série de Fourier para uma função arbitrária de período P, desde que satisfaça as outras hipóteses do teorema 11.1.

$$\boxed{g(t) = C + \sum_{k=1}^{\infty}\left[A_k \operatorname{sen}\frac{2\pi kt}{P} + B_k \cos\frac{2\pi kt}{P}\right]} \tag{11.8}$$

11.10 Harmônicos e sobretons

Associando a função $g(t)$, tendo período P como acima, com um tom musical de altura $F = 1/P$, notamos que

$$g(t) = C + \sum_{k=1}^{\infty}[A_k \operatorname{sen}(2\pi Fkt) + B_k \cos(2\pi Fkt)] \tag{11.9}$$

Cada somando $A_k \operatorname{sen}(2\pi Fkt) + B_k \cos(2\pi kFt)$ em 11.9 tem a forma 11.4, e, portanto, representa uma transformação de $\operatorname{sen}(2\pi Ft)$ que pode ser escrito na forma 11.3 como

$$d_k[\cos\beta_k \operatorname{sen}(2\pi Fkt) + \operatorname{sen}\beta_k \cos(2\pi Ft)] = d_k \operatorname{sen}(2\pi kFt + \beta_k),$$

sendo

$$d_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}, \quad \cos\beta_k = \frac{A_k}{d_k}, \quad \operatorname{sen}\beta_k = \frac{B_k}{d_k}$$

desde que A_k e B_k não sejam simultaneamente nulos. Portanto temos

$$\boxed{g(t) = C + \sum_{k=1}^{\infty} d_k \operatorname{sen}(2\pi Fkt + \beta_k)} \tag{11.10}$$

O k-ésimo termo $d_k \operatorname{sen}(2\pi Fkt + \beta_k)$ é obtido de $\operatorname{sen} t$ via deslocamento por β_k (o k-ésimo deslocamento de fase), comprimindo horizontalmente por um fator de k e esticando verticalmente por um fator de d_k (a k-ésima amplitude).

Esta função tem o mesmo som básico (altura e timbre) de $\operatorname{sen}(2\pi kFt)$, com um ajuste de volume resultante da amplitude d_k. É chamado o k-ésimo harmônico da função $g(t)$. Para $k \geq 1$, também é chamado de $(k-1)$-ésimo tom de $g(t)$.

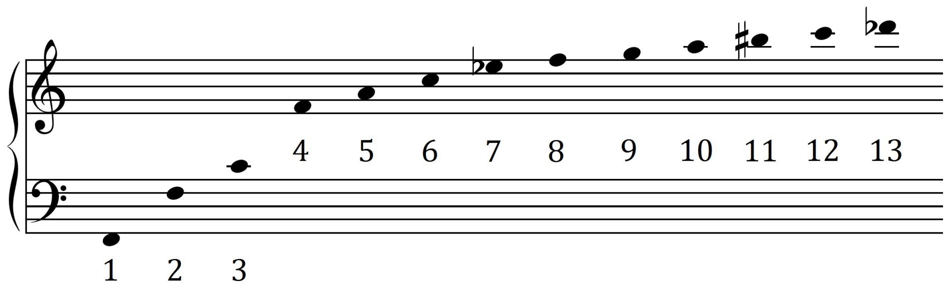
Quando isolado, este harmônico dá a altura kF, então a sequência de alturas associadas aos harmônicos dá a sequência de razões inteiras com a frequência fundamental F. Estes são os intervalos discutidos no Capítulo 10; recapitulemos que se tomamos F_2 como o fundamental (primeiro harmônico), os 13 primeiros harmônicos são aproximados no teclado como segue:

Para uma determinada frequência fundamental F, a sequência infinita de alturas

$$F,\ 2F,\ 3F,\ 4F,\ 5F, \ldots$$

é chamada de *série de sobretons.*

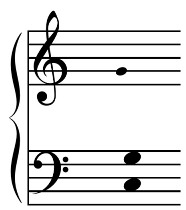
Para um determinado tom (altura), são os tamanhos relativos das amplitudes (não negativas) $d_1, d_2, d_3, \ldots$ que determinam o timbre, ou "personalidade", de um tom sustentado,



permitindo-nos distinguir entre diferentes vozes musicais e instrumentos. Podemos pensar em d_k como o "peso" ou "grau de presença" da k-ésima harmônica no som representado por $g(t)$. O timbre do tom parece depender só desta sequência, independente da sequência das mudanças de fase $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$, que certamente afetam a forma do gráfico de $g(t)$, mas não o som.

Sobretons (harmônicos) não são geralmente percebidos pelo ouvido como alturas; em vez disso, a totalidade dos sobretons que se enquadram no espectro audível são ouvidos como um único tom integrado, com harmônicos determinando o timbre, como explicado acima. No entanto, existem momentos em que sobretons podem realmente ser ouvidos como alturas. O canto com sobretom é um tipo de canto no qual o cantor manipula as cavidades ressonantes da boca movendo a língua e o maxilar de modo a isolar sobretons específicos um a cada vez. O sobretom isolado então torna-se claramente audível. Enquanto mantém uma altura fundamental constante, o cantor pode, assim, "tocar uma melodia" com os sobretons.

Outra situação em que os sobretons podem se tornar audíveis ocorre quando um certo tom aparece como um *sobretom reforçado*, ou seja, um sobretom de duas ou mais notas em um acorde bem afinado. Por exemplo, suponha que um acorde tenha raiz C_3 e quinta G_3. Note, então, que G_4 é o terceiro harmônico da raiz (na verdade, fora por dois centésimos, como discutido no Capítulo 9) e é o segundo harmônico da quinta.



G_4, a nota pequena, aparece na série de sobretons de ambos C_3 e G_3.

Uma vez que o G_4 é reforçado, às vezes é ouvido como um tom. Sua audibilidade é ainda mais provável se ele estiver dentro de um formante (um termo a ser explicado mais adiante no capítulo) para a vogal sendo cantada ou nos instrumentos tocando a corda. Os cantores de uma música *à capela* costumam dizer que a corda "soa" quando esse fenômeno é vivenciado.

Exemplo: A onda quadrada. Para ilustrar o uso do teorema, e das equações 11.6, 11.8 e 11.10, para calcular harmônicos de um tom, consideraremos uma chamada "onda quadrada", a função periódica definida no intervalo $[0, 2\pi)$ definida por:

$$s(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq t < \pi \\ -1, & \text{se } \pi \leq t < 2\pi \end{cases}$$

e estendida por periodicidade a uma função cujo domínio é $\mathbb{R}$. O gráfico de um período, sobre $[0, 2\pi)$, aparece na figura 11.5.

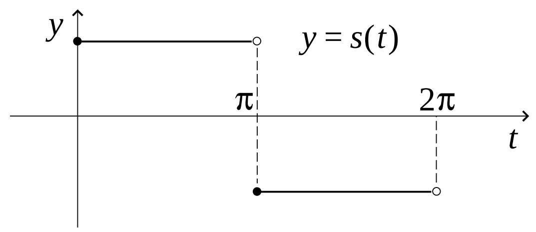


Figura 11.5: Gráfico da função de "onda quadrada" s.

Esta forma de onda, encontrada em eletrônicos e processadores de sinais, e disponível na maioria dos sintetizadores, produz um timbre distintivo que lembra vagamente o som de um clarinete. A função satisfaz as hipóteses do teorema 11.1, e assim podemos fazer uso do teorema 11.2 para calcular os coeficientes C, A_k e B_k que aparecem na sua série de Fourier.

Neste ponto, retomaremos a interpretação comum da integral que afirma que para uma função bem comportada $y = f(t)$ a integral $\int_a^b f(t)dt$ dá a área delimitada pelo gráfico de f e pelo eixo t entre as retas verticais $t = a$ e $t = b$, com a ressalva que a área abaixo do eixo x assume valor negativo.

Embora não matematicamente rigorosa, esta concepção informal da integral servirá aqui como uma definição de trabalho.

De acordo com (11.6), temos $C = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} s(t)dt$. Agora se torna claro, a partir do gráfico de $s(t)$, que $\int_0^{2\pi} s(t)dt = 0$, uma vez que o retângulo formado acima do eixo t entre 0 e π tem a mesma área que o retângulo abaixo do eixo entre π e 2π. Daí $C = 0$.

Agora, consideremos os coeficientes $B_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos(kt)s(t)dt$ (novamente a partir de 10.6). Primeiro, vamos observar que, para $k \in \mathbb{Z}$, o gráfico de $y = \cos(kt)$ é simétrico em torno de $t = \pi$, ou seja $\cos(k(\pi - t)) = \cos(k(\pi + t))$. Isso é ilustrado pelos gráficos exibidos na figura 11.6 para $k = 2$ e $k = 5$.

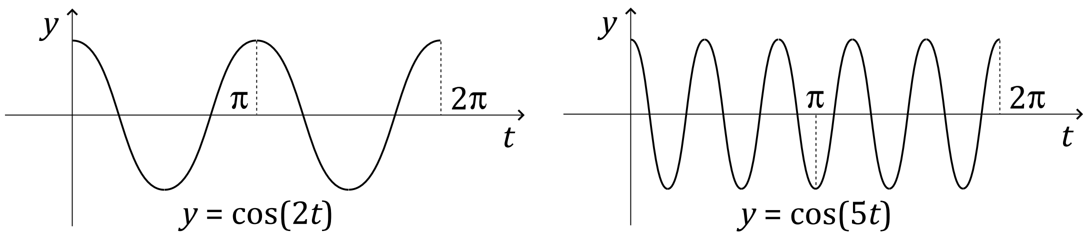


Figura 11.6: Gráficos de $y = \cos(kt)$ para um valor par e um valor ímpar de k.

A igualdade $\cos(k(\pi - t)) = \cos(k(\pi + t))$ é derivada facilmente da fórmula do cosseno da soma:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \tag{11.11}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\cos(k(\pi - t)) &= \cos(k\pi - kt)) \\
&= \cos(k\pi)\cos(-kt) - \operatorname{sen}(k\pi)\operatorname{sen}(-kt) \\
&= \cos(k\pi)\cos(kt) \qquad\qquad (\operatorname{sen}(k\pi) = 0) \\
&= \cos(k\pi)\cos(kt) - \operatorname{sen}(k\pi)\operatorname{sen}(kt) \\
&= \cos(k\pi + kt) = \cos(k(\pi + t))
\end{aligned}$$

Consequentemente, pela simetria do gráfico em relação à reta vertical $x = \pi$, temos que:

$$\int_0^{\pi}\cos(kt)\,dt = \int_{\pi}^{2\pi}\cos(kt)\,dt \tag{11.12}$$

pois

Apelando às propriedades básicas da integral, e relembrando a definição de $s(t)$, temos:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\cos(kt)\,s(t)\,dt &= \int_0^{\pi}\cos(kt)\,s(t)dt + \int_{\pi}^{2\pi}\cos(kt)\,s(t)\,dt \\
&= \int_0^{\pi}\cos(kt)\cdot 1\,dt + \int_{\pi}^{2\pi}\cos(kt)\cdot(-1)\,dt \\
&= \int_0^{\pi}\cos(kt)\,dt - \int_{\pi}^{2\pi}\cos(kt)\,dt = 0
\end{aligned}$$

sendo esta última igualdade devido a 11.12. Isso mostra que na série de Fourier de $s(t)$, temos $B_k = 0$, para todo $k \geq 1$.

Para avaliar $A_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}(kt)s(t)dt$, fazemos algumas observações sobre o comportamento de $\mathrm{sen}(kt)$ no intervalo $[0, 2\pi]$. Especificamente, queremos ver como seu gráfico em $[0, \pi]$ se compara ao seu gráfico em $[\pi, 2\pi]$. Agora $\mathrm{sen}(kt)$ tem período $2\pi/k$, sendo cada período uma compressão horizontal do gráfico de $y = \mathrm{sen}\, t$ ao longo do intervalo $[0, 2\pi]$, compreendendo assim um "lóbulo superior" e um "lóbulo inferior", cada um com a mesma quantidade de área entre o gráfico e o eixo t. Deste fato segue-se que a integral de $\mathrm{sen}(kt)$ em qualquer período, ou em qualquer número de períodos completos, é zero. Além disso, o ponto $t = \pi$ encontra-se no ponto entre dois períodos adjacentes ou no ponto médio de um período, dependendo se k é par ou ímpar, respectivamente. Ilustramos este fato na figura 11.7, para as funções $\mathrm{sen}(2t)$ e $\mathrm{sen}(5t)$.

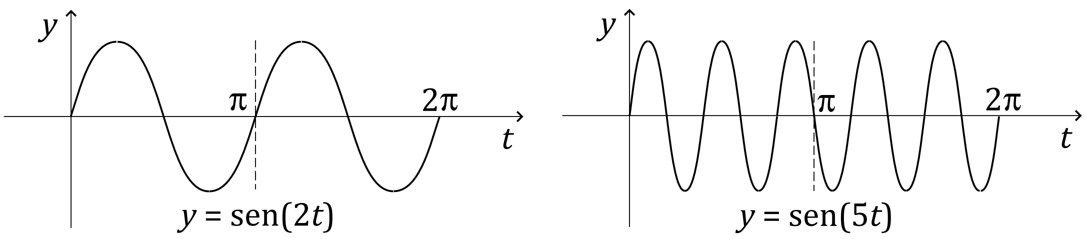


Figura 11.7: Gráficos de $y = \mathrm{sen}(kt)$ para um valor par e um valor ímpar de k.

No caso em que k é par (veja o caso $k = 2$, ilustrado na figura), o gráfico é exatamente o mesmo em ambos os intervalos, $[0, \pi]$ e $[\pi, 2\pi]$, portanto a integral em ambos os intervalos é a mesma (e na verdade igual a zero, uma vez que em cada período temos iguais quantidades de área abaixo e acima do eixo t). Daí,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}(kt)\, s(t)\, dt &= \int_0^{\pi} \mathrm{sen}(kt)\, s(t)\, dt + \int_{\pi}^{2\pi} \mathrm{sen}(kt)\, s(t)\, dt \\ &= \int_0^{\pi} \mathrm{sen}(kt) \cdot 1\, dt + \int_{\pi}^{2\pi} \mathrm{sen}(kt) \cdot (-1), dt \\ &= \int_0^{\pi} \mathrm{sen}(kt)\, dt - \int_{\pi}^{2\pi} \mathrm{sen}(kt)\, dt = 0 - 0 = 0\end{aligned}$$

Portanto, temos $A_k = 0$ quando k é par.

Quando k for ímpar (veja o caso $k = 5$, ilustrado acima), escreva $k = 2n+1$ e observe que o intervalo $[0, \pi]$ contém n períodos completos, mais um lóbulo superior do $(n+1)$-ésimo período, e o intervalo $[\pi, 2\pi]$ tem um lóbulo inferior do $(n+1)$-ésimo período seguido por

n períodos completos. Como a integral sobre períodos completos é zero, temos então que $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(kt)dt = R$ e $\int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen}(kt)dt = -R$, sendo R a área sob um lóbulo superior. Assim sendo,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(kt)\, s(t)\, dt &= \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(kt)\, s(t)\, dt + \int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen}(kt)\, s(t)\, dt \\
&= \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(kt) \cdot 1\, dt + \int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen}(kt) \cdot (-1)\, dt \\
&= \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(kt)\, dt - \int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen}(kt)\, dt \\
&= R - (-R) = 2R
\end{aligned} \tag{11.13}$$

Nossa tarefa agora se reduz a avaliar R. Nós apelamos para outra máxima intuitiva: *Quando uma região no plano é esticada (ou comprimida) horizontalmente por um fator λ, a área da região esticada é igual à área da região original multiplicada por λ.* Daí,

$$R = \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(kt)\, dt = \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(t) dt \tag{11.14}$$

e aqui, nós apelamos para o Teorema Fundamental do Cálculo para um breve cálculo e obtemos:

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} t dt = (-\cos t)\Big|_0^{\pi} = -\cos(\pi) + \cos(0) = -(-1) + 1 = 2. \tag{11.15}$$

Isso diz que a área sob um lóbulo superior do gráfico padrão do seno (ou do cosseno) é igual a 2. Adiante, ao final do capítulo, fazemos uma dedução deste fato sem apelar para o Teorema Fundamental do Cálculo.

Usando 11.13, 11.14 e 11.15 obtemos:

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(kt)\, s(t)\, dt = \frac{1}{\pi} \cdot 2R = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{4}{k} = \frac{4}{k\pi}$$

quando k for ímpar.

Para resumir, acabamos de mostar que:

$$C = 0, \qquad B_k = 0 \text{ para cada } k, \qquad A_k = \begin{cases} 0, & \text{se } k \text{ for ímpar} \\ \dfrac{4}{k\pi}, & \text{se } k \text{ for par} \end{cases}$$

Escrevendo os inteiros positivos ímpares na forma $k = 2n + 1$, para $n = 0, 1, 2, \ldots$, e colocando em evidência à esquerda o fator comum $4/\pi$, a série 11.8 da função $s(t)$ pode é escrita como:

$$s(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \operatorname{sen}((2n+1)t) \tag{11.16}$$

ou seja,

$$s(t) = \frac{4}{\pi}\operatorname{sen} t + \frac{4}{3\pi}\operatorname{sen} 3t + \frac{4}{5\pi}\operatorname{sen} 5t + \frac{4}{7\pi}\operatorname{sen} 7t + \cdots$$

A ausência de cossenos na série diz que os deslocamentos de fases β_k são todos nulos. As amplitudes d_k são 0 para k ímpar e $4/k\pi$ para k par.

Um fato interessante é que podemos "visualizar" o somatório 11.16 convergir por plotamento dos gráficos das séries truncadas (finitas) $\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2n+1} \operatorname{sen}((2n+1)t)$ à medida em que N vai se tornando grande.

Observe como os gráficos da figura 11.8, para $N = 0$, 3, 8 e 15 se parecem cada vez mais com o gráfico de $s(t)$.

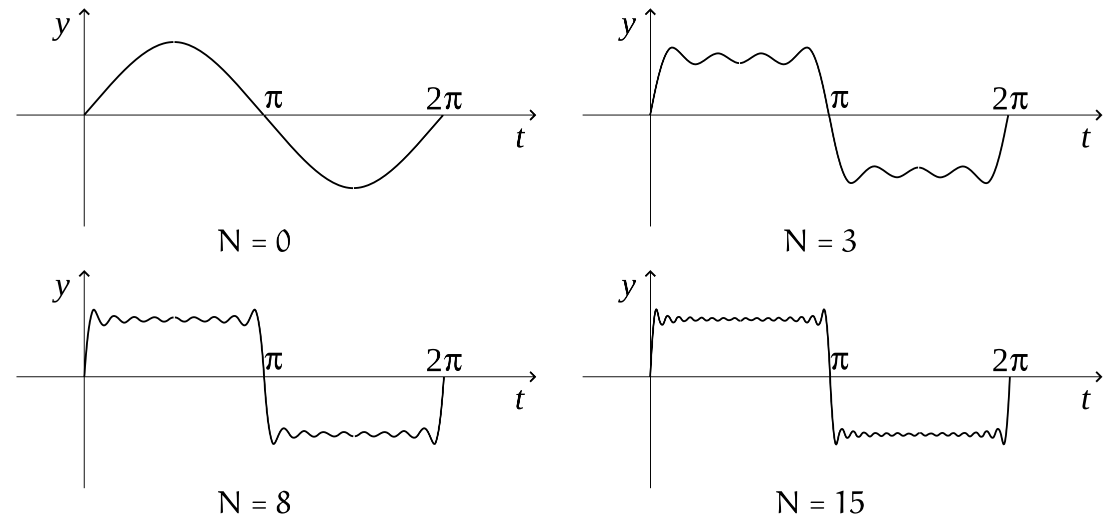


Figura 11.8: Gráficos de somas finitas da série de Fourier de $s(t)$.

Devemos observar que todos, com exceção de um número finito de sobretons, estão fora do alcance da audibilidade humana. Por isso, alguns truncamentos da série de Fourier são suficientes para representar o som audível.

Por razões baseadas na física do som, o clarinete também tem apenas harmônicos impares, o que explica a leve semelhança do seu som com o da onda quadrada.

11.11 Formantes

Suponhamos que uma forma de onda seja dada pela equação 11.10, e suponhamos que variamos apenas a altura (tom) F, mantendo os números d_k fixados. Não nos preocuparemos sobre os números β_k, uma vez que eles não contribuem muito para o caráter do som. Então a amplitude de cada harmônica permanece inalterada. Este seria o caso se soássemos a onda quadrada em diferentes frequências. Os pesos das harmônicas não são afetados.

No entanto, isso não é o que acontece quando um instrumento musical ou um cantor muda o tom. Em vez disso, os harmônicos que caem em certas faixas de frequência terão consistentemente maiores pesos do que aqueles que não caem. Esses intervalos de frequências, chamados de *formantes*, dependem apenas do instrumento musical que está sendo tocado ou tipo de som humano de vogal sendo cantado. Eles permanecem inalterados enquanto o tom F varia. Assim, cada peso d_k mudará de nota para nota, dependendo de se o k-ésimo harmônico está dentro de um desses formantes.

Isso explica por que acelerar ou abrandar uma gravação distorce o som para além de simplesmente mudar o tom. Quando um tom gravado é reproduzido a uma taxa diferente da qual foi gravado, a onda sonora é simplesmente esticada ou comprimida ao longo do tempo, isto é, a frequência F é alterada, enquanto todos os outros parâmetros em 11.10 permanecem inalterados. Assim, os formantes não são preservados, mas sim deslocados junto com F. Acelerar a música gravada produz o familiar "efeito chipmunk". A música que é desacelerada produz sons tristes e nebulosos. Em ambos os casos, o personagem da música é alterado a um modo bastante cômico.

Os sons musicais tendem a ter dois ou três formantes. Estes formantes são criados pelas câmaras de ressonância dentro do instrumento ou boca do cantor. Uma câmara favorece uma certa faixa de frequência, determinada pelo seu tamanho e forma. Frequências dentro desse intervalo são amplificadas.

Como exemplos, consideraremos os três sons de vogais, como normalmente falamos em português brasileiro. A vogal *u* (como em "cubo") tem três formantes centrados respectivamente próximos de 310 Hz, 870 Hz e 2250 Hz. A vogal *a* (como em "padre") tem formantes em torno de 710 Hz, 1100 Hz e 2640 Hz. A vogal *i* (como em "livro") tem formantes a 280 Hz, 2250 Hz e 2900 Hz. Os gráficos representando intensidade (eixo vertical) versus altura (em Hz) para estas vogais são representados nas figuras seguintes.

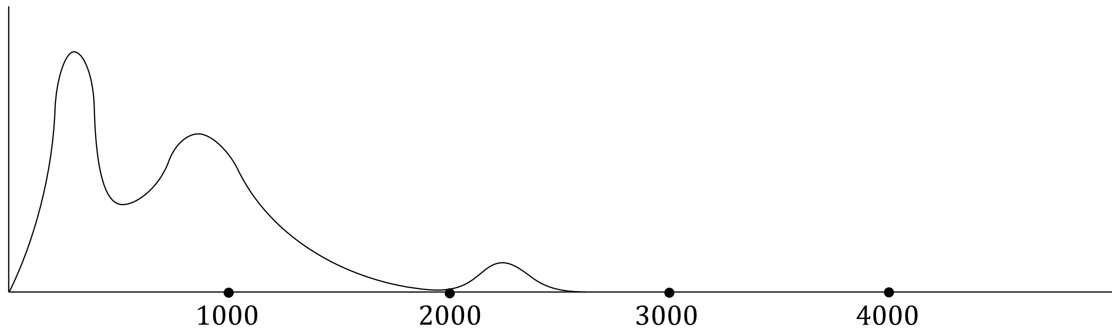


Figura 11.9: Formantes para a vogal *u*.

Fonte da ilustração: [1].

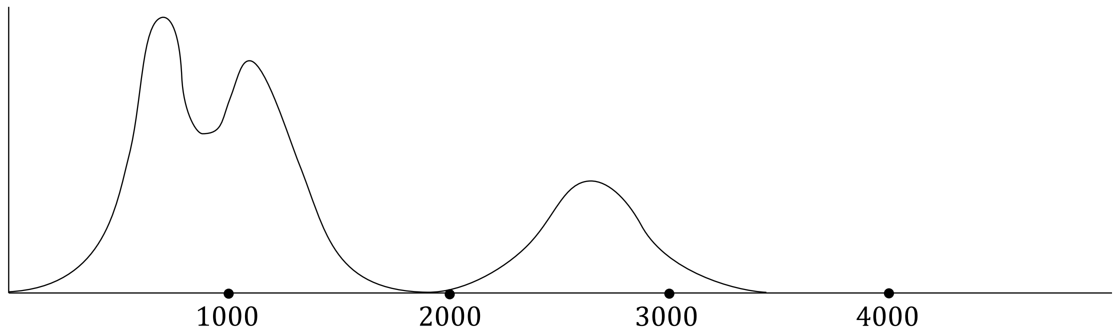


Figura 11.10: Formantes para a vogal *a*.

Fonte da ilustração: [1].

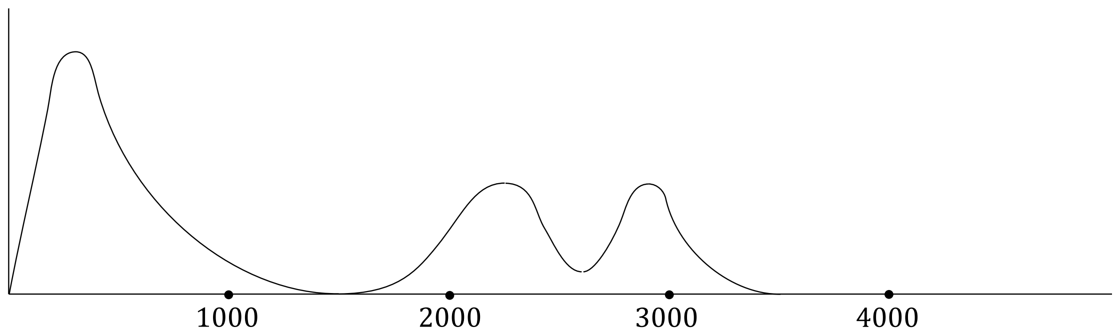


Figura 11.11: Formantes para a vogal *i*.

Fonte da ilustração: [1].

Frequentemente usamos a palavra "brilhante" para descrever sons com um ou mais formantes proeminentemente altos e "escuro" para sons cujos formantes estão todos baixos. Note que a vogal *i* tem o segundo e terceiro formantes superiores mais altos do que os outros dois, o que explica o seu som relativamente brilhante. Observe também que um formante não terá efeito sobre o timbre se o tom fundamental for cantado acima desse formante. Portanto, se uma soprano canta A_5 (880 Hz) em uma vogal *u*, o formante mais baixo, centrado em torno de 310 Hz, não possui harmônicos para amplificar.

Os instrumentos musicais também possuem formantes característicos. Por exemplo, o clarinete possui formantes nas faixas 1500-1700 Hz, e a trombeta tem um formante na faixa de 1200-1400 Hz e outro centrado em torno de 2500 Hz. Finalmente, devemos reconhecer que o termo "volume" (loudness) usado acima é subjetivo e difícil de quantificar, pois varia de pessoa para pessoa. Isto não é diretamente proporcional à mera amplitude. A Física tenta medir isso em função da "pressão sonora", medida em decibéis.

11.12 Uma dedução elementar de que $\int_0^\pi \operatorname{sen} t \, dt = 2$

Nesta seção, usamos fatos elementares de trigonometria e limites de sequências para deduzir que $\int_0^\pi \operatorname{sen} t \, dt = 2$.

Mencionamos inicialmente que, sendo k um inteiro positivo (grande), temos a igualdade[1]

$$\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}2\theta + \operatorname{sen}3\theta + \cdots + \operatorname{sen}(k-1)\theta + \operatorname{sen}k\theta = \frac{\operatorname{sen}((k+1)\theta/2)\cdot\operatorname{sen}(k\theta/2)}{\operatorname{sen}(\theta/2)} \quad (11.17)$$

Para calcular a área dada por $\int_0^\pi \operatorname{sen} t \, dt$, subdividimos o intervalo $[0, \pi]$ em k intervalos de comprimentos iguais a π/k, através de pontos

$$t_0 = 0,\ t_1 = \pi/k,\ t_2 = 2\pi/k,\ t_3 = 3\pi/k,\ \ldots,\ t_{k-1} = (k-1)\pi/k,\ t_k = k\pi/k = \pi$$

Formamos então a soma

$$S_k = (\operatorname{sen} t_1)\cdot\frac{\pi}{k} + (\operatorname{sen} t_2)\cdot\frac{\pi}{k} + (\operatorname{sen} t_3)\cdot\frac{\pi}{k} + \cdots + (\operatorname{sen} t_{k-1})\cdot\frac{\pi}{k} + (\operatorname{sen} t_k)\cdot\frac{\pi}{k} \quad (11.18)$$

Para cada i, $1 \le i \le k$, o termo $(\operatorname{sen} t_i)\cdot\frac{\pi}{k}$ pode ser interpretado como sendo a área de um retângulo de base π/k e altura $\operatorname{sen} t_i$. A *soma integral* dada por 11.18 é interpretada geometricamente como sendo soma das áreas desses retângulos, e está representada em cinza na figura 11.12.

À medida em que k cresce, o número de retângulos também cresce, as "bases" desses retângulos, de comprimento π/k, vão ficando cada vez mais estreitas, e a soma S_k se

[1] Uma dedução desta igualdade, que não faz uso de números complexos, é encontrada em Maor, E., *Trigonometric Delights*. Princeton: Princeton Univ. Press, 1998, p. 113-114.

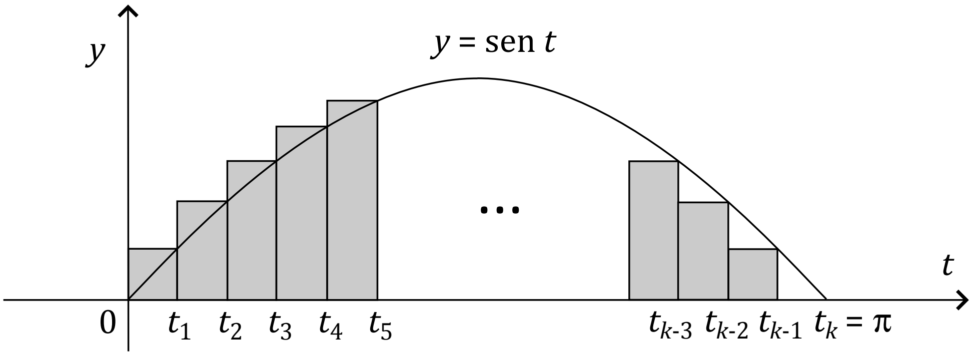


Figura 11.12: Interpretação geométrica da soma integral S_k como soma de áreas de retângulos.

aproxima mais e mais do valor da área entre a curva $y = \operatorname{sen} t$ e o eixo t, no intervalo $0 \leq t \leq \pi$. Dizemos que $\lim S_k = \int_0^\pi \operatorname{sen} t\, dt$ quando $k \to \infty$.

Agora, usando 11.17 (com $\theta = \pi/k$) e 11.18 temos

$$\begin{aligned}
S_k &= (\operatorname{sen} t_1 + \operatorname{sen} t_2 + \operatorname{sen} t_3 + \cdots + \operatorname{sen} t_{k-1} + \operatorname{sen} t_k) \cdot \frac{\pi}{k} \\
&= (\operatorname{sen} \pi/k + \operatorname{sen} 2\pi/k + \operatorname{sen} 3\pi/k + \cdots + \operatorname{sen}(k-1)\pi/k + \operatorname{sen} k\pi/k) \cdot \frac{\pi}{k} \\
&= \frac{\operatorname{sen}((k+1)\pi/(2k)) \cdot \operatorname{sen}(k\pi/(2k))}{\operatorname{sen}(\pi/(2k))} \cdot \frac{\pi}{k} \\
&= \frac{\operatorname{sen}((1+1/k)\pi/2) \cdot \operatorname{sen} \pi/2}{\operatorname{sen}(\pi/(2k))} \cdot \frac{\pi}{k}
\end{aligned}$$

Assim, temos

$$S_k = \operatorname{sen}\left(\left(1 + \frac{1}{k}\right)\frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{\pi/k}{\operatorname{sen}(\pi/(2k))}$$

e então

$$S_k = \operatorname{sen}\left(\left(1 + \frac{1}{k}\right)\frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{\pi/(2k)}{\operatorname{sen}(\pi/(2k))} \cdot 2 \tag{11.19}$$

Quando $k \to \infty$, $1/k \to 0$ e também $\pi/(2k) \to 0$.

Lançamos mão do fato não tão elementar, mas de dedução intuitiva, que afirma que $\dfrac{\theta}{\operatorname{sen}\theta} \to 1$ quando $\theta \to 0$, para $\theta > 0$.

Daí, sendo $\theta = \pi/(2k)$, $\theta \to 0$ quando $k \to \infty$, e então $\dfrac{\pi/(2k)}{\operatorname{sen}(\pi/(2k))} \to 1$.

Assim, quando $k \to \infty$, temos $\lim S_k = \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 2$.

Para justificar que $\dfrac{\theta}{\operatorname{sen}\theta} \to 1$ quando $\theta \to 0$ e $\theta > 0$, lançamos mão da interpretação geometrica seguinte.

Sendo θ dado em radianos, para $0 < \theta < \pi/2$, pode ser demonstrado que

$$\operatorname{sen}\theta < \theta < \operatorname{tg}\theta \tag{11.20}$$

conforme ilustrado pela figura 11.13, em que $P'P = \operatorname{sen}\theta$, o arco AP tem comprimento θ, e $AT = \operatorname{tg}\theta$.

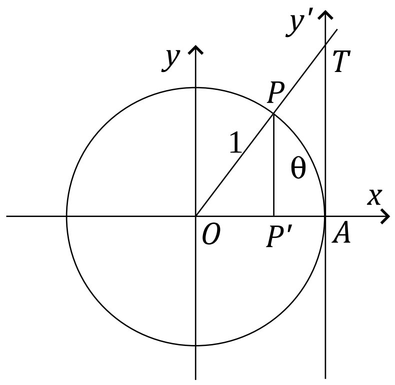


Figura 11.13: Interpretação geométrica da desigualdade $\operatorname{sen}\theta < \theta < \operatorname{tg}\theta$ para $0 < \theta < \pi/2$.

Daí, por 11.20,

$$1 < \frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta} < \frac{1}{\cos\theta} \tag{11.21}$$

Quando $\theta \to 0$, $\cos\theta \to 1$, $\dfrac{1}{\cos\theta} \to 1$, e então $\dfrac{\theta}{\operatorname{sen}\theta} \to 1$.

12 Conclusões

O autor deste trabalho tem formação musical autodidática, jamais tendo frequentado um conservatório de formação musical. Porém desde os 9 anos vem conhecendo e exercitando a arte do violão, interrompida parcialmente desde um grave acidente em junho de 2014, que lhe tolheu as habilidades manuais ao violão. Ao longo de sua vida, música tem sido um componente essencial, intrigante, despertando-lhe grande interesse em instrumentos musicais, bem como em composição e execução de canções.

Por outro lado, o autor tem boa formação matemática, advinda de curso de graduação (licenciatura) na UFSCar, disciplinas isoladas cursadas no programa de bacharelado e também do mestrado em Matemática daquela instituição, e finalmente de disciplinas cursadas no programa de Mestrado Profissional em Matemática deste IGCE-UNESP de Rio Claro.

Apesar de ter ciência da conexão entre música e matemática, neste trabalho o autor teve sua primeira oportunidade de apreciar com profundidade alguns detalhes dessa conexão.

Como tornar matemática e musicalmente precisa a ideia de qual escala completará um certo tipo de harmonia musical criada? Essa e outras perguntas do tipo são problemas dos quais se ocupa o texto estudado, traduzido e matematicamente comentado dessa monografia.

O autor poderia ter trilhado um tratamento mais matemático das relações entre Matemática em Música, como o encontrado em Benson ([4]), por exemplo. Mas com a generosa concordância de sua orientadora, Profª Eliris Cristina Rizziolli, optou por um tratamento que julgava mais simples, porém agora reconhecido como não tão simples assim, traçado por David Wright ([1]). Um montante razoável de dificuldade na leitura e subsequente estudo adveio da necessidade de tarefa não trivial da tradução de termos técnicos musicais. Mencionamos como exemplos algumas palavras chaves em inglês e suas traduções: *key* = *tonalidade*; *key signatures* = *armação da clave*; *flat* = *bemol*; *meter* = *compasso*; *quarter*

= *semínima*; *score* = *partitura*; *staff* = *pauta*; *tuning* = *afinação*; *spelling* = *solfejo*. Nessa tarefa de tradução, foram providenciais dois pequenos dicionários encontrados na internet ([5], [6]) e um imponente dicionário multilíngue de termos musicais, de 800 páginas [7]. Mas mesmo assim o caminho trilhado tornou-se interessante e proveitoso. Um excelente texto sobre teoria musical para iniciantes foi encontrado em ([8]).

O autor teve dificuldades intransponíveis na confecção de partituras, que pretendia reproduzir no texto desta monografia utilizando linguagem MusiXTEX. Por não ter conseguido vencer essas dificuldades, transformou as partituras do texto de Wright em imagens para utilizá-las nesta monografia.

Como últimos temas explorados, após apresentação prévia do trabalho em exame de qualificação, foi feito um estudo sobre intervalos musicais representados por inteiros, aproximações desses intervalos no teclado, e também sobre o conceito de *timbre musical*, que diferencia tons musicais em diferentes instrumentos, tendo relação com harmonia e conceitos matemáticos tais como continuidade, funções periódicas e análise de Fourier.

Referências

[1] WRIGHT, D. *Mathematics and Music*. 1. ed. Providence: American Mathematical Society, 2009.

[2] GARLAND, T. H.; KHAN, C. V. *Math and Music: Harmonious Conections*. 1. ed. New York: Dale Seymour Publications, 1995.

[3] COPE, D. *New Music Composition*. 1. ed. New York: Shirmer Books, 1977.

[4] BENSON, D. J. *Music: A Mathematical Offering*. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.

[5] FERREIRA, A. J. et al. *Meloteca - Dicionário Inglês-Português de termos musicais*. [S.l.]: http://www.meloteca.com/glossary-english-portuguese.htm#p, acesso em 31/7/2016.

[6] BORDINI, R. M. *Dicionário de Termos Técnicos Musicais*. [S.l.]: http://musica.ufma.br/bordini/dic_mus/dic_mus.htm, acesso em 12/12/2016.

[7] MARQUES, H. de O. *Dicionário de Termos Musicais. Português-Francês-Italiano-Inglês-Alemão*. 1. ed. Lisboa: Editorial Estampa, 1986.

[8] MED, B. *Teoria da Música*. 4. ed. Brasília: Livraria MusiMed, 1996.