UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Câmpus de Presidente Prudente

# Resultados de existência de soluções para problemas elípticos assintoticamente lineares

Anderson dos Santos Gonzaga

Orientador: Prof. Dr. Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta

Coorientador: Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo

Programa: Matemática Aplicada e Computacional

Presidente Prudente, Fevereiro de 2017

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

# Resultados de existência de soluções para problemas elípticos assintoticamente lineares

Anderson dos Santos Gonzaga

Orientador: Prof. Dr. Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta

Coorientador: Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente, Fevereiro de 2017

FICHA CATALOGRÁFICA


G65r

Gonzaga, Anderson dos Santos.

Resultados de existência de soluções para problemas elípticos assintoticamente lineares / Anderson dos Santos Gonzaga. - Presidente Prudente: [s.n], 2017

65 f.

Orientador: Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências e Tecnologia

Inclui bibliografia

1. Equação de Schrödinger. 2. Equações assintoticamente lineares. 3.Métodos Variacionais. I. Pimenta, Marcos Tadeu de Oliveira. II. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências e Tecnologia. III. Título.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**

**Câmpus de Presidente Prudente**

**CERTIFICADO DE APROVAÇÃO**

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: **Resultados de existência de soluções para problemas elípticos assintoticamente lineares**

**AUTOR: ANDERSON DOS SANTOS GONZAGA**
**ORIENTADOR: MARCOS TADEU DE OLIVEIRA PIMENTA**
**COORIENTADOR: GIOVANY DE JESUS MALCHER FIGUEIREDO**

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. MARCOS TADEU DE OLIVEIRA PIMENTA
Departamento de Matemática e Computação / Faculdade de Ciencias e Tecnologia de Presidente Prudente

Prof. Dr. MESSIAS MENEGUETTE JUNIOR
Departamento de Matemática e Computação / Faculdade de Ciencias e Tecnologia de Presidente Prudente

Edcar Dom de Silva.
Prof. Dr. EDCARLOS DOMINGOS DA SILVA
Departamento de Matemática / UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

Presidente Prudente, 21 de fevereiro de 2017

*Aos meus pais Francisco e Helena, ao meu irmão Adriano*
*e a minha irmã Andreia.*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado a gratidão de concluir mais esta etapa da minha vida e por ter permitido conhecer pessoas especiais que me ajudaram muito durante este período.

Agradeço aos meus pais Francisco e Helena pelo amor que sempre demonstraram por mim e pela educação sólida que me deram. Agradeço aos meus irmãos e à minha família no geral que sempre me apoiaram em cada passo desta conquista.

Agradeço aos meus amigos, principalmente ao Juan, Leonardo, Letícia, Laison, Jéssica, Rodrigo, Maria Cecília e todos aqueles que de alguma maneira contribuíram ajudando direta ou indiretamente.

Agradeço ao meu orientador Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta pela sua infinita paciência e preocupação comigo, pela dedicação integral em me atender e tirar minhas dúvidas.

Ao professor Giovany de Jesus Malcher Figueiredo pela coorientação, pelos ensinamentos que me ajudaram muito durante os estudos.

Estendo meus agradecimentos aos demais professores do Departamento de Matemática da Fct Unesp, pelos quais nutro grande admiração. Muitos deles fizeram parte da minha formação. Também agradeço aos demais funcionários do Departamento de Matemática, que muitas vezes agiram a meu favor.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

*A persistência é o caminho do êxito.*

***Charles Chaplin***

# Resumo

Nesse trabalho teórico na área das equações diferenciais parciais elípticas, estudamos uma versão estacionária da equação de Schrödinger não-linear, com não-linearidade do tipo assintoticamente linear. O objetivo principal versa sobre obter resultados de existência de uma solução nodal radialmente simétrica. Ainda, sob algumas condições, buscamos também obter informações sobre o seu índice de Morse.

Palavras-Chave: *Equação de Schrödinger, Equações assintoticamente lineares, Métodos Variacionais.*

# Abstract

In this theoretical work in elliptic partial differential equations, we study a stationary version for the nonlinear Schödinger equation with nonlinearity of the assymptotically linear type. The main objective is getting, some results of existence for a radially symmetric nodal solution. Moreover, under some conditions, we look also obtaining information about its Morse index.

Keywords: *Schrödinger equation, elliptically asymptotically linear equations, Variant Methods.*

# Notação

- $u_n \longrightarrow u$ : convergência forte (em norma);
- $u_n \rightharpoonup u$: u convergência fraca;
- $C^k(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R};$ é continuamente $k$ vezes diferenciável $\}$;
- $C_0^k(\Omega) = \{u \in C^k(\Omega); supp(u)$ é compacto $\}$;
- $W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \ \ para \ \ todo \ \ |\alpha| \leqslant m\}$;
- $\|u\|_{m,p,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \|u\|_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}$;
- $H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), \ \ para \ \ todo \ \ |\alpha| \leqslant m\}$;
- $u^+(x) = max\{u(x), 0\}$;
- $u^-(x) = min\{u(x), 0\}$.

# Sumário

Capítulo 1

# Introdução

O objetivo deste trabalho é apresentar um resultado de existência de solução nodal e radialmente simétrica para uma classe de equações de Schrödinger assintoticamente linear no infinito. Em [1] foi provado um resultado de existência de uma solução positiva para este tipo de problema em um domínio exterior assumindo em particular que $f$ é convexa. Outro trabalho bastante importante no estudo desse tipo de problema é o artigo [6], onde os autores provam resultados de simetria para soluções clássicas de equações elípticas semi-lineares em todo o $\mathbb{R}^N$ ou no exterior de uma bola, no caso em que a não linearidade é convexa ou tem uma primeira derivada convexa.

Neste trabalho, realizamos um estudo detalhado do trabalho [8], onde estudamos a existência de uma solução nodal para uma versão estacionária da equação de Schrödinger:

$$-\Delta u + \lambda u = f(u), \text{ em } \mathbb{R}^N, \text{ para } N \geqslant 3 \text{ e } \lambda > 0, \tag{1.1}$$

onde a não-linearidade $f$ satisfaz o seguinte conjunto de hipóteses:

$(f_1)$ $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$;

$(f_2)f(-t) = -f(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$;

$(f_3)\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{t} = 0$;

$(f_4)$ existe $s > 0$, tal que $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t} = \frac{1}{s}$ e $\frac{f(t)}{t} \leqslant \frac{1}{s}$, para todo $t \in \mathbb{R}$;

$(f_5)$ $\frac{f(t)}{t}$ é uma função crescente para todo $t > 0$.

Assumimos ainda uma condição de não-quadraticidade, de Costa e Magalhães

$$\lim_{t\to\infty}[f(t)t - 2F(t)] = +\infty \;\; e \;\; [f(t)t - 2F(t)] \geqslant 0, \forall t \in \mathbb{R}, \tag{1.2}$$

onde $F(t) = \int_0^t f(z)dz$.

Um modelo especial que satisfaz as hipóteses $(f_1) - (f_5)$ é dado por:

$$-\Delta u + \lambda u = \frac{u^3}{1 + su^2}, \;\; \text{em} \;\; \mathbb{R}^N,$$

para $N \geqslant 3$ e $\lambda > 0$.

Em óptica não linear, este modelo de equação descreve a propagação de um feixe de luz de um meio saturável sob um efeito de auto-focagem, onde o parâmetro $\lambda$ denota a velocidade de propagação da onda e o parâmetro $s$ denota o de saturação.

Os principais resultados desse trabalho são:

**Teorema 1** *Assuma que $(f_1) - (f_5)$ e (1.2) sejam satisfeitas. Se o parâmetro $s > 0$, dado em $(f_4)$, satisfaz $s \in (0, \frac{1}{\lambda})$, então existe uma solução radial de (1.1) que muda de sinal uma única vez em $\mathbb{R}$. Se esta solução é não degenerada e $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, então ela tem índice de Morse $j \geqslant N + 2$.*

Na prova do Teorema 1 vamos utilizar um resultado de existência de uma solução radial e positiva, para um problema em domínio exterior, o qual enunciamos a seguir:

**Proposição 1** *Assuma que $(f_1) - (f_5)$. Então existe uma solução radial positiva de:*

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f(u) \;\; em \;\; \Omega \\ u = 0 \qquad\qquad sobre \;\; \partial\Omega, \end{cases}$$

*onde $\Omega = \mathbb{R}^N \backslash B_R(0)$ para algum $R > 0$ fixo.*

Na demonstração de ambos resultados, empregamos métodos variacionais e utilizamos os argumentos de [4] para estabelecer a existência de uma solução fraca que muda de sinal para a equação (1.1) com $s \in (0, \frac{1}{\lambda})$.

Nossa proposta é tornar o trabalho [8] mais acessível para iniciantes na área de Equações Diferenciais Parciais Elípticas. Para isso, procuramos detalhar todos os cálculos e as passagens no decorrer do mesmo. O presente trabalho está estruturado como segue. No Capítulo 2, para melhor entendimento do trabalho, serão apresentados alguns resultados preliminares, como por exemplo o conhecido Lema da Deformação e o Teorema de Miranda. No Capítulo 3 vamos exibir uma prova para o teorema principal baseada em [8], [4] e [6]. Vamos utilizar o Princípio Variacional de Ekeland para obter uma sequência de Cerami no nível do Passo da Montanha para o funcional energia, utilizada na argumentação do apêndice B.

Capítulo

2

# Preliminares

Neste capítulo veremos algumas definições, notações e resultados importantes para o desenvolvimento deste trabalho.

## 2.1 Distribuições

**Definição 1** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um conjunto aberto. Chamamos de suporte de uma função* $\phi : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$*(ou* $\mathbb{C}$*), o conjunto definido por* $supp(\phi) = \overline{\{x \in \Omega : \phi(x) \neq 0\}}$*. Se este conjunto além de fechado for compacto, então dizemos que* $\phi$ *é de suporte compacto.*

**Definição 2** *Representamos por* $\mathscr{D}(\Omega)$ *o espaço vetorial das funções definidas em* $\Omega$*, com suporte compacto, possuindo em* $\Omega$ *derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Os elementos de* $\mathscr{D}(\Omega)$ *são denominados funções testes em* $\Omega$*.*

**Definição 3** *Um* ***multi-índice*** $\alpha$ *é uma n-úpla* $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$*, onde* $\alpha_i \in \mathbb{N}$*, para todo* $0 < i \leqslant n$*. Temos associado ao multi-índice* $\alpha$ *alguns símbolos, um deles é*

$$D^\alpha = \frac{\partial^\alpha}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} ... \partial_{x_n}^{\alpha_n}},$$

*onde* $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$*, é chamado de ordem do multi-índice* $\alpha$*.*

**Definição 4** *Uma sequência de funções* $\{\phi_m\}$ *em* $\mathscr{D}(\Omega)$ *é dita convergente para* $0$*, se existe um conjunto compacto fixo* $K \subset \Omega$ *tal que* $supp(\phi_m) \subset K$*, para todo* $m$*, e todas as suas derivadas convergem uniformemente para* $0$*, em* $K$*.*

**Definição 5** *Um funcional linear* $T$ *sobre* $\mathscr{D}(\Omega)$ *é dita ser uma* ***distribuição*** *em* $\Omega$*, se sempre que,* $\phi_m \to 0$ *em* $\mathscr{D}(\Omega)$*, tem-se* $T(\phi_m) \to 0$ *quando* $m \to \infty$*. O espaço das distribuições, que é o dual do espaço de funções teste, é denotado por* $\mathscr{D}'(\Omega)$*.*

**Definição 6** *A função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)é dita ser localmente integrável, se para todo conjunto compacto $K \subset \Omega$, $\int_K |f| < \infty$. Para, $1 \leqslant p < \infty$, tem-se:*

$$\mathscr{D}(\Omega) \subset L^P_{loc}(\Omega) \subset \mathscr{D}'(\Omega).$$

**Definição 7** *Considere uma distribuição $T$ sobre $\Omega$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$. A derivada de $\alpha$ de $T$ é definida por:*

$$(D^\alpha T)(\phi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \phi), \quad \textit{para } \phi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

*Mostremos que $D^\alpha$ está bem definida, isto é, $D^\alpha T \in \mathscr{D}'(\Omega)$, para todo $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$. De fato, seja $(\phi_m) \subset \mathscr{D}(\Omega)$ tal que $\phi_m \to 0$ em $\mathscr{D}(\Omega)$. Então existe um subconjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^N$ tal que supp$(\phi_m) \subset K$ e $D^\alpha \phi_m \to 0$, uniformemente em $K$, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Além disso, sendo $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$, temos que $T(D^\alpha \phi_m) \to 0$, em $K$, quando $m \to \infty$. Assim,*

$$|(D^\alpha T)\phi_m)| = |T(D^\alpha \phi_m)| \to 0, \quad \textit{quando } m \to \infty.$$

*Logo, $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições.*

**Exemplo 1** *Seja $x \in \mathbb{R}^N$. Defina $\delta_x$ por $\delta_x(\phi) = \phi(x)$ com $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Prova-se que $\delta_x$ é uma distribuição, a qual chamamos Distribuição de Dirac em $x$.*

**Exemplo 2** *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Considere a forma linear $T_u$ definida por:*

$$T_u \phi = \int_\Omega u(x)\phi(x)dx, \phi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

*Então, $T_u$ é uma distribuição.*

**Exemplo 3** *Seja $H$ a função Heaviside definida em $\mathbb{R}$ do seguinte modo:*

$$H(x) = \begin{cases} 1, & se\ x > 0 \\ 0, & se\ x < 0. \end{cases}$$

Note que $H$ é localmente integrável em $\mathbb{R}$, mas sua derivada $H'(x)$ no sentido das distribuições não é localmente integrável. De fato,

$$
\begin{aligned}
(D^1 T_H) &= (-1)^1 T_H(D\phi) \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N} \phi'(x)H(x)dx \\
&= -\lim_{L\to\infty}\left[\int_0^L \phi'(x)dx\right] \\
&= -\lim_{L\to\infty}[\phi(L)-\phi(0)] \\
&= \delta_0(\phi).
\end{aligned}
$$

**Afirmação:** A distribuição delta de Dirac não é gerada por funções localmente Integráveis. Com efeito, suponha que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ seja tal que $T_f = \delta$, isto é, $T_f : \mathscr{D}'(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por,

$$T_f\phi = \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)dx, \text{ para todo } \phi \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}).$$

Então para todo $\epsilon > 0$, seja $\phi_\epsilon \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ com $supp(\phi_\epsilon) \subset B(0,\epsilon), 0 \leqslant \phi_\epsilon \leqslant 1$ e $\phi_\epsilon = 1$. Assim,

$$\delta(\phi_\epsilon) = 1, \text{ em } B\left(0, \frac{\epsilon}{2}\right). \tag{2.1}$$

Por outro lado,

$$\delta(\phi_\epsilon) = T_f\phi_\epsilon = \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi_\epsilon(x)dx = \int_{B(0,\epsilon)} f(x)\phi_\epsilon(x)dx \leqslant \int_{B(0,\epsilon)} f(x)dx.$$

Note que quando $\epsilon \to 0$, tem-se $\delta(\phi_\epsilon) \to 0$, o que contradiz (2.1).

## 2.2 Espaço de Sobolev

Se $u \in L^p(\Omega)$ então $u$ possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições, mas em geral, não é verdade que $D^\alpha u$ seja uma distribuição definida por uma função de $L^p(\Omega)$. Quando $D^\alpha u$ é definida por uma função de $L^p(\Omega)$, defini-se o seguinte espaço:

**Definição 8** *Seja $m > 0$ um inteiro e seja $1 \leqslant p < \infty$. O espaço de Sobolev $W^{m,p}$ é definido por:*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \text{ para todo } |\alpha| \leqslant m\}, \tag{2.2}$$

*com a norma*

$$\|u\|_{m,p,\Omega} = \left( \sum_{|\alpha| \leqslant m} \|u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.3}$$

*$(i)$ o caso $p = 2$, denota o espaço*

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), \ \textit{para todo} \ \ |\alpha| \leqslant m\}, \tag{2.4}$$

*com a norma*

$$\|u\|_{m,2,\Omega} = \left( \sum_{|\alpha| \leqslant m} \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.5}$$

*$(ii)$ Iremos também usar as semi-normas qual consiste as normas $L^p$das derivadas da mais alta ordem. Denotemos essa norma por*

$$|u|_{m,2,\Omega} = \left( \sum_{|\alpha| \leqslant m} \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

*$(iii)$ Consideremos naturalmente $L^p(\Omega)$ como o caso especial de classe de Sobolev, quando $m = 0$. O espaço $H^m(\Omega)$ tem um produto interno definida por:*

$$\langle u, v \rangle = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_\Omega D^\alpha u D^\alpha v \ \ , \ \textit{para todos} \ \ u, v \in H^m(\Omega),$$

*esse produto interno, induz a norma dada pela formula (2.5). Observe ainda que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, mas não é verdade que $C_0^\infty(\Omega)$ seja denso em $W^{m,p}(\Omega)$ para $m \geqslant 1$. Motivado por esta razão defini-se o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$.*

**Lema 1** *Seja $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Temos*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p*}(\Omega), \quad \textit{onde} \ \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}, \ \textit{se} \ \ p < N,$$

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \ \forall q \in [p, +\infty), \ \textit{se} \ \ p = N,$$

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega), \ \textit{se} \ \ p > N,$$

*e todas estas imersões são contínuas. Assim, se $p > N$ temos que, para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$,*

$$|u(x) - u(y)| \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}}|x-y|^{\alpha} q.t.p.\ x, y \in \Omega,$$

*com $\alpha = 1 - (\frac{N}{P})$ e $C$ dependente de $\Omega, p$ e $N$. Em particular, $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$.*

Demonstração: Ver [3].

**Teorema 2** *(Rellich-Kondrachov). Supondo que $\Omega$ é limitado e $f$ de classe $C^1$. Temos as seguintes imersões compactas:*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega),\ \ \forall q \in [1, p^*),\ \ onde\ \ \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N},\ \ se\ \ p < N,$$

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega),\ \ \forall q \in [p, +\infty),\ \ se\ \ p = N,$$

$$W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega}),\ \ se\ \ p > N,$$

*Em particular, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ com imersões compactas para todo $p$(e todo $N$).*

Demonstração: Ver [3].

## 2.3 Resultados preliminares

Primeiramente enunciaremos alguns resultados que serão utilizados no decorrer deste trabalho.

**Lema 2** *Seja $1 \leqslant q < +\infty$, $1 \leqslant p < +\infty$ com $q \neq \frac{NP}{N-P}$ se $p < N$. Assuma que $u_n$ é limitada em $L^q(\mathbb{R}^N), \nabla u_n$ é limitada em $L^q(\mathbb{R}^N)$ e*

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{y+B_R} |u_n|^q dx \to 0, n \to \infty,$$

*para algum $R > 0$. Então $u_n \to 0$ em $L^{\alpha}(\Omega)$ para $\alpha$ entre $q$ e $\frac{Np}{N-p}$.*

Ver Lema I.1 de [7].

**Teorema 3** ***(de Vainberg)*** *Sejam $(f_j)$ uma sequência de funções em $L^q(\Omega)$ e $f \in L^q(\Omega)$ tais que*

$$f_j \to f\ \ em\ \ L^q(\Omega).$$

*Então, existe $(f_{j_k}) \subset f_j$ e uma função $g \in L^q(\Omega)$ tal que*

$$|f_{j_k}| \leqslant g(x)\ \ \ q.t.p\ em\ \Omega$$

*e*

$$f_{j_k}(x) \to f\ \ \ q.t.p\ em\ \ \Omega.$$

Demonstração: Ver [3].

**Teorema 4** ***(de Miranda)*** *Seja $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N : |x_i| \leqslant L, i = 1, ..., n\}$ e seja $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ uma função contínua satisfazendo,*

$$f_i(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, -L, x_{i+1}, ..., x_n) \geqslant 0$$

*e*

$$f_i(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, +L, x_{i+1}, ..., x_n) \leqslant 0,$$

*para todo $i \in \{1, ..., n\}$, onde $f = (f_1, ..., f_n)$. Então, $f(x) = 0$ tem uma solução em $\Omega$.*

Demonstração: Ver [9].

**Lema 3** ***(da Deformação)*** *Seja $X$ um espaço de Banach e $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$, $S \subset X$, $c \in \mathbb{R}$ e $\epsilon, \delta > 0$ tais que para todo*

$$u \in \varphi^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon]) \cap S_{2\delta},$$

*tem-se que$\|\varphi'(u)\| > \frac{8\epsilon}{\delta}$. Então existe $\eta \in C^1([0, 1] \times X, X)$ tal que:*

*(i)$\eta(t, u) = u$ se $t = 0$ ou se $u \notin \varphi^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon]) \cap S_{2\delta}$;*

*(ii)$\eta(1, \varphi^{c+\epsilon} \cap S) \subset \varphi^{c-\epsilon}$;*

*(iii) $t \to \varphi(\eta(t, v))$ é não-crescente, para todo $v \in X$,*

*onde $\varphi^a = \{v \in X; \varphi(v) \leqslant a\}$.*

Para provar este resultado, precisamos de algumas definições.

**Definição 9** *Seja $M$ um espaço métrico, $X$ um espaço normado e $h : M \longrightarrow X\backslash\{0\}$ uma função contínua. Um campo vetorial $g$ é dito um campo pseudo-gradiente para $h$ em $M$ se $g : M \to X$ é contínuo localmente de Lipschitz e tal que, para todo $u \in M$,*

$$\|g(u)\| \leqslant 2\|h(u)\|, \ \ \langle h(u), g(u)\rangle \geqslant \|h(u)\|^2.$$

*Observe que*

$$\|h(u)\|^2 \leqslant \langle h(u), g(u)\rangle \leqslant \|h(u)\|\|g(u)\|$$

*e*

$$\|h(u)\| \leqslant \|g(u)\| \leqslant 2\|h(u)\|,$$

*onde*

$$\|h(u)\| = \sup_{\|y\|=1; y\in X} \langle h(u), y\rangle.$$

Precisamos ainda do seguinte resultado de existência de campos pseudo-gradientes.

**Lema 4** *Seja $M$ um espaço métrico, $X$ um espaço normado e $h : M \to X'\backslash\{0\}$uma função contínua. Então existe um campo vetorial pseudo-gradiente para $h$ em $M$.*

Demonstração ver [10].

**Demonstração do Lema da Deformação.** Pelo Lema anterior , existe um campo pseudo-gradiente $g$ para $\varphi'$ em $M := \{u \in X; \varphi'(u) \neq 0\}$, o qual satisfaz

$$\|\varphi'(u)\| \leqslant \|g(u)\| \leqslant 2\|\varphi'(u)\|. \tag{2.6}$$

Vamos definir

$$A := \varphi^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon]) \cap S_{2\delta}, \text{ e } \ B := \varphi^{-1}([c-\epsilon, c+\epsilon]) \cap S_{\delta}.$$

Note que $A$ e $B$ são fechados e ainda $B \subset A$. Assim, $dist(u, X \setminus A)$ e $dist(u, B)$ não são simultaneamente nulos, e mais, dado $u \in X$, existem $c, d$ em $\mathbb{R}$ e uma vizinhança $V_u$ de $u$ tais que se $v \in V_u$

$$0 < c \leqslant dist(v, X \setminus A) + dist(v, B) \leqslant d < \infty.$$

Defina $\Psi : X \to \mathbb{R}$, pondo

$$\Psi(u) := \frac{dist(u, X \setminus A)}{dist(u, X \setminus A) + dist(u, B)}.$$

Note que $\Psi$ está bem definido (pois o denominador é diferente de zero para todo $u \in X$) $0 \leqslant \Psi \leqslant 1$ com $\Psi(u) = 0$ se $u \in B, \Psi(u) = 1$ se $u \in X \setminus A$. Pode-se mostrar que $dist(u, X \setminus A)$ e $dist(u, B)$ são funções lipschitzianas e assim que $\Psi$ é Lipschitz contínua.

Consideremos o seguinte campo vetorial em $X$ definido por

$$f(u) := \begin{cases} \frac{-\Psi(u)g(u)}{\|g(u)\|^2}, u \in A \\ 0, \text{ se } \ u \in X \setminus A \end{cases} \tag{2.7}$$

Note que $A \subset M$ (logo podemos definir $g$ em $A$), e por (2.6) temos que

$$\begin{aligned}\|f(u)\| = \| - \Psi(u)\| \left\| \frac{g(u)}{\|g(u)\|^2} \right\| &\leqslant \frac{1}{\|g(u)\|} \\ \leqslant \frac{1}{\|\varphi'(u)\|} &\leqslant \frac{\delta}{8\epsilon},\end{aligned}$$

para todo $u \in X$. Portanto, $f$ está bem definida.

Verifiquemos que $f$ é localmente lipschitziana. Dado $u \in X$, tomemos $V_u$ vizinhança de $u$ tal que $g|_{V_u}$ e $\Psi|_{V_u}$ são lipschitz. Dados $a, b$ em $u \in V_u$

- Se $a, b \in X \backslash A$, temos

$$\|f(a) - f(b)\| = 0 \leqslant \|a - b\|.$$

- Se $a \in A$ e $b \in X \setminus A$, temos

$$\begin{aligned}\|f(a) - f(b)\| &= \left\| \Psi(a) \frac{g(a)}{\|g(a)\|^2} \right\| \\ &= \left\| \Psi(a) \frac{g(a)}{\|g(a)\|^2} - \Psi(b) \frac{g(a)}{\|g(a)\|^2} \right\| \\ &= \left\| \frac{g(a)}{\|g(a)\|^2} \right\| |\Psi(a) - \Psi(b)| \\ &= \frac{1}{\|g(a)\|} |\Psi(a) - \Psi(b)| \\ &\leqslant \frac{\delta}{8\epsilon} |\Psi(a) - \Psi(b)|,\end{aligned}$$

  e temos o resultado usando o fato de $\Psi$ ser localmente de Lipschitz

- Se $a, b \in A$, temos

$$\begin{aligned}\|f(a) - f(b)\| &= \left\| \Psi(a) \frac{g(a)}{\|g(a)\|^2} - \Psi(b) \frac{g(b)}{\|g(b)\|^2} \right\| \\ &\leqslant \left\| \Psi(a) \frac{g(a)}{\|g(a)\|^2} - \Psi(a) \frac{g(b)}{\|g(b)\|^2} \right\| + \left\| \Psi(a) \frac{g(b)}{\|g(b)\|^2} - \Psi(b) \frac{g(b)}{\|g(b)\|^2} \right\| \\ &= |\Psi(a)| \left\| \frac{g(a)}{\|g(a)\|^2} - \frac{g(b)}{\|g(b)\|^2} \right\| + |\Psi(a) - \Psi(b)| \left\| \frac{g(b)}{\|g(b)\|^2} \right\| \\ &\leqslant \left\| \frac{g(a)}{\|g(a)\|^2} - \frac{g(b)}{\|g(b)\|^2} \right\| + \frac{\delta}{8\epsilon} |\Psi(a) - \Psi(b)|.\end{aligned}$$

  Novamente, pela desigualdade triangular

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{g(a)}{\|g(a)\|^2}-\frac{g(b)}{\|g(b)\|^2}\right\| &\leqslant \left\|\frac{g(a)}{\|g(a)\|^2}-\frac{g(a)}{\|g(b)\|^2}\right\|+\left\|\frac{g(a)}{\|g(b)\|^2}-\frac{g(b)}{\|g(b)\|^2}\right\| \\
&= \left\|\frac{g(a)\|g(b)\|^2-g(a)\|g(a)\|^2}{\|g(a)\|^2\|g(b)\|^2}\right\|+\left(\frac{1}{\|g(b)\|}\right)^2\|g(a)-g(b)\| \\
&\leqslant \|g(a)\|\left\|\frac{\|g(b)\|^2-\|g(a)\|^2}{\|g(a)\|^2\|g(b)\|^2}\right\|+\frac{\delta^2}{64\epsilon^2}\|g(a)-g(b)\| \\
&\leqslant \frac{|\langle g(b)-g(a), g(b)-g(a)\rangle|}{\|g(a)\|\|g(b)\|^2}+\frac{\delta^2}{64\epsilon^2}\|g(a)-g(b)\| \\
&\leqslant \frac{\|g(b)-g(a)\|\|g(b)-g(a)\|}{\|g(a)\|\|g(b)\|^2}+\frac{\delta^2}{64\epsilon^2}\|g(a)-g(b)\| \\
&= k\|g(a)-g(b)\|.
\end{aligned}$$

Donde segue que $f$ é localmente de lipschitz.

Para cada $u \in X$, o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\sigma(t,u)=f(\sigma(t,u)) \\ \sigma(0,u)=u \end{cases} \tag{2.8}$$

tem uma única solução, contínua e definida em todo $t \geqslant 0$.

Vamos definir $\eta : [0,1]\times X \to X$, por $(t,u)\mapsto \sigma(8\epsilon t, u)$.

Se $t \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}
\|\sigma(t,u)-\sigma(0,u)\| = \|\sigma(t,u)-u\| &= \left\|\int_0^t f(\sigma(\tau,u))d\tau\right\| \\
&\leqslant \int_0^t \|f(\sigma(\tau,u))\|d\tau \\
&\leqslant \|f\|(t-0) \leqslant \frac{\delta t}{8\epsilon}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\|\eta(t,u)-\eta(0,u)\| = \|\eta(t,u)-u\| &= \left\|\int_0^t f(\sigma(\tau,u))d\tau\right\| \\
&\leqslant \int_0^{t8\epsilon} \|f(\sigma(\tau,u))\|d\tau \\
&\leqslant \|f\|(t8\epsilon) \leqslant \delta t.
\end{aligned}$$

**Verificação de** (i): Note que $\eta(0,u)=u$.

Se $u \in X \setminus A, f(u)=0$ e $\sigma(t,u)=u$ é solução do problema (2.8), ou seja

$$\frac{d}{dt}\sigma(t,u) = 0 = f(u).$$

Portanto, $\eta(t,u) = u$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Notemos agora que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\varphi(\sigma(t,u)) &= \langle \varphi'(\sigma(t,u)), \frac{d}{dt}\sigma(t,u)\rangle \\
&= \langle \varphi'(\sigma(t,u)), f(\sigma(t,u))\rangle \\
&= -\Psi(\sigma(t,u))\frac{\langle \varphi'(\sigma(t,u)), g(\sigma(t,u))\rangle}{\|g(\sigma(t,u))\|^2} \\
&\leqslant -\frac{\Psi(\sigma(t,u))}{4}, \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

e essa última desigualdade temos pois

$$\frac{\langle \varphi', g\rangle}{\|g\|^2} \geqslant \frac{\langle \varphi', g\rangle}{\|4\varphi'\|^2} \geqslant \frac{1}{4}.$$

**Verificação de** $(iii)$: Como $0 \leqslant \Psi$, de (2.9) segue que $t \longmapsto \varphi(\eta(t,u))$ é não crescente.

**Verificação de** $(ii)$ : Seja $u \in \varphi^{c+\epsilon} \cap S_\delta$. Se existe $t \in [0, 8\epsilon]$ tal que $\varphi(\sigma(t,u)) < c-\epsilon$, então $\varphi(\sigma(8\epsilon, u)) < c - \epsilon$, e (ii) é satisfeito, pois $\varphi$ é não crescente.

Se $\sigma(t,u) \in \varphi^{-1}([c-\epsilon, c+\epsilon])$ para todo $t \in [0, 8\epsilon]$ temos:

$$\begin{aligned}
\varphi(\sigma(8\epsilon,u)) &= \varphi(u) + \int_0^{8\epsilon} \frac{d}{dt}\varphi(\sigma(t,u))dt \\
&\leqslant \varphi(u) - \frac{1}{4}\int_0^{8\epsilon} \Psi(\sigma(t,u))dt \\
&= \varphi(u) - \frac{1}{4}8\epsilon \\
&\leqslant c + \epsilon - 2\epsilon = c - \epsilon,
\end{aligned}$$

donde segue $(ii)$.

■

**Teorema 5** ***(Teorema do Passo da Montanha)*** *Seja $X$ um espaço de Banach e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ com $I(0) = 0$ suponha que: existem $\alpha, \rho > 0$ tais que*

$(H1)$ *$I(u) \geqslant \alpha > 0$ para todo $u \in X$ com $\|u\| = \rho$,*

$(H2)$ *existe $e \in X$ tal que com $\|u\| > \rho$ e $I(e) < 0$.*

*Então para cada* $\epsilon > 0$ *existe* $u_\epsilon \in X$ *tal que*

(*a*) $c - 2\epsilon \leqslant I(u_\epsilon) \leqslant c + 2\epsilon$,

(*b*) $(1 + \|u\|)\,\|I'(u_\epsilon)\| < 8\epsilon$,

*onde*

$$0 < c = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) \quad e \quad \Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X), \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}.$$

Demonstração ver [2].

**Lema 5** ***(A identidade de Pohozaev)****: Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um domínio,* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função continua e* $u \in H_0^1 \cap H_{loc}^2(\Omega)$ *uma solução fraca do problema* $-\Delta u = f(u)$ *em* $\Omega$ *e* $u = 0$ *sobre* $\partial\Omega$.

*Então,*

$$\frac{N-2}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2.\eta(x)dS_x = N\int_\Omega F(u)dx,$$

*onde,*

$$F(s) = \int_0^s f(s)ds$$

*e* $\eta(x)$ *é o vetor normal exterior no ponto* $x \in \partial\Omega$.

*Se* $\Omega = \mathbb{R}^N$, *então*

$$\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2.\eta(x)dS_x = N\int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx.$$

**Definição 10** *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto conexo, e* $L : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ *um operador diferencial parcial tendo a forma*

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^n a^{ij}u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} + cu.$$

*Dizemos que* $L$ *é simétrico quando*

$$a^{ij} = a^{ji}, \forall i, j = 1, ..., N.$$

*Além disso, dizemos que* $L$ *é uniformemente elíptico quando existe uma constante* $R > 0$, *tal que para todo* $x \in \Omega$ *e* $y \in \mathbb{R}^N$ , *vale que*

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}y_iy_j \geqslant R|y|^2.$$

Para o próximo resultado conhecido como Princípio do Máximo Forte, vamos considerar L como sendo um operador diferencial parcial, simétrico, uniformemente elíptico, com os coeficientes $a^{ij}, b^i$ e $c$ contínuos.

**Teorema 6** ***(Principio do máximo forte:)*** *Assumindo* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\Omega)$ *e* $c \geqslant 0$ *em* $\Omega$*. Supondo ainda que* $\Omega$ *é conexo, então vale:*

*(i) se* $Lu \leqslant 0$ *em* $\Omega$*, e* $u$ *atinge máximo não negativo sobre* $\overline{\Omega}$*, em um ponto interior, então* $u$ *é constante em* $\Omega$*;*

*(ii) se* $Lu \leqslant 0$ *em* $\Omega$*, e* $u$ *atinge mínimo não positivo sobre* $\overline{\Omega}$*, em um ponto interior, então* $u$ *é constante em* $\Omega$*.*

Ver referência [5].

Capítulo

# 3

# Resultados de existência

Neste capítulo, nosso objetivo é provar que o problema

$$-\Delta u + \lambda u = f(u), \text{ em } \mathbb{R}^N, \text{ para } N \geqslant 3 \text{ em } \lambda > 0, \tag{1.1}$$

com $f$ satisfazendo as condições iniciais, ou seja, vamos mostrar que se $(f_1) - (f_5)$ e (1.2) são satisfeitas, então existe uma solução $u$ de (1.1). Para isso, vamos mostrar alguns resultados preliminares.

Um conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é dito **radialmente simétrico** se satisfazer a propriedade:

$$\text{se } x_0 \in \Omega \text{ e } |x| = |x_0| \text{ então } x \in \Omega.$$

**Definição 11** *Sejam $\Omega$ um subconjunto radialmente simétrico do $\mathbb{R}^N$ e $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Dizemos que $u$ é uma função radialmente simétrica, se existir $\tilde{u} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ tal que*

$$u(x) = \tilde{u}(|x|) \;\; q.t.p \;\; em \;\; x \in \Omega.$$

Consideremos o espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$ com a seguinte norma:

$$\|u\| = \left( \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla(u)|^2 + \lambda u^2) dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

a qual é induzida pelo seguinte produto interno.

$$\langle u, v \rangle_{H^1} = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + \lambda uv) dx, \text{ para quaisquer } u, v \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Segue que $(H^1\mathbb{R}^N, \langle ., \rangle)$ é um espaço de Hilbert.

Uma vez que estamos buscando por soluções radialmente simétricas, consideremos

$$H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N); u(x) = u(|x|)\}.$$

Mostremos que $(H^1_{rad}(\mathbb{R}^N), \langle.,.\rangle_{H^1})$ é um espaço de Hilbert.

Como $H^1(\mathbb{R}^N)$ é um espaço de Hilbert, basta mostrar que $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ é um subespaço vetorial fechado de $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Primeiramente note que , se $u$ é radialmente simétrica, então para um transformação ortogonal linear $O : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, vale que

$$u(Ox) = u(x) \quad \text{q.t.p em} \quad \in \mathbb{R}^N, \tag{3.1}$$

pois $O$ é uma isometria.

Seja $(u_n)$ uma sequência em $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Basta mostrar que u é radial, isto é, que $u \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$. Como $H^1(\mathbb{R}^N)$ está imerso continuamente em $L^2(\mathbb{R}^N)$ , então $u_n \to u$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Assim, a menos de subsequência, podemos assumir que

$$u_n(x) \to u(x) \ \text{q.t.p em} \ \ \mathbb{R}^N.$$

Portanto

$$u(Ox) = \lim_{n\to+\infty} u_n(Ox) = \lim_{n\to+\infty} u_n(x) = u(x) \ \text{q.t.p em} \ \ \mathbb{R}^N.$$

Logo, $u \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ e o que mostra que $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ é fechado.

Denotemos por $E$ o espaço de Sobolev $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ com o produto interno $\langle.,.\rangle$.

Seja o funcional $I : E \to \mathbb{R}$, definido por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + \lambda u^2)dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx;$$

o qual está bem definido.

No apêndice A provaremos ainda que $I \in C^1(E, \mathbb{R})$. Além disso, um vez que

$$I'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + \lambda uv)dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)vdx,$$

segue que pontos críticos de $I$ correspondem a soluções fracas de (1.1).

Seja $\gamma : E \to \mathbb{R}$ dado por

$$\gamma(u) = I'(u)u = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + \lambda u^2)dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)udx.$$

Definimos a seguir a variedade de Nehari onde se encontra todas as soluções fracas não-triviais do problema (1.1).

**Definição 12** *Definimos a Variedade de Nehari como sendo um subconjunto de $E$ dado por*

$$S = \left\{u \in E\backslash\{0\}; \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + \lambda u^2\right) dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)udx\right\}. \tag{3.2}$$

Definimos ainda alguns subconjuntos que também serão utilizados

$$\widehat{S} = \{u \in S; u^+ \neq 0, u^- \neq 0\} \text{ e } S_1 = \{u \in \widehat{S} : \gamma(u^+) = 0\},$$

onde, $u^+(x) = \max\{u(x), 0\}$ e $u^-(x) = \min\{u(x), 0\}$.

**Observação 1** *Note que* $S_1 = \{u \in E; u^\pm \neq 0$ *e* $I'(u^\pm)u^\pm = 0\}$.

## 3.1 Lemas preliminares

Nesta seção provaremos algumas propriedades do conjunto $S_1$.

**Lema 6** *O conjunto* $S_1$ *é não vazio.*

**Demonstração.** Fixe um número real positivo R e seja $\overline{u} \in E$ a solução positiva de menor energia do seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f(u) \text{ em } B_R(0) \\ u = 0 \text{ sobre } \partial B_R(0), \end{cases}$$

cuja a existência é provada em [4]. Pela Proposição 1 do Apêndice B, existe uma solução radial positiva $\overline{v} \in E$ , do problema em domínio exterior

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f(u) \text{ em } \mathbb{R}^N \backslash B_R(0) \\ u = 0 \text{ sobre } \partial(\mathbb{R}^N \backslash B_R(0)). \end{cases}$$

Vamos definir $z = \overline{u} - \overline{v}$ ( assim, $z^+ = \overline{u}$ e $z^- = -\overline{v}$) e fixe $\overline{u}$ e $\overline{v}$ como 0 em $\mathbb{R}^N \backslash B_R(0)$ e $B_R(0)$ respetivamente. Assim, defina $G : E \to \mathbb{R}$, por

$$G(u) = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla(u)|^2 + \lambda u^2)dx - \frac{1}{s}\int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx = \langle u, u\rangle - \frac{1}{s}\int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx.$$

Então,

$$
\begin{aligned}
G(z) &= G(z^+ + z^-)\\
&= G(\overline{u} - \overline{v})\\
&= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla(\overline{u} - \overline{v})|^2 + \lambda(\overline{u} - \overline{v})^2)dx - \frac{1}{s}\int_{\mathbb{R}^N} (\overline{u} - \overline{v})^2 dx\\
&= \int_{B_R(0)} (|\nabla\overline{u}|^2 + \lambda(\overline{u})^2)dx - \frac{1}{s}\int_{B_R(0)} (\overline{u})^2 dx\\
&+ \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} (|\nabla(\overline{v})|^2 + \lambda(\overline{v})^2)dx - \frac{1}{s}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} (\overline{v})^2 dx\\
&= \int_{B_R(0)} f(\overline{u})\overline{u}dx - \frac{1}{s}\int_{B_R(0)} \overline{u}^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} f(\overline{v})\overline{v}dx - \frac{1}{s}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} \overline{v}^2 dx\\
&= \int_{B_R(0)} \frac{f(\overline{u})}{\overline{u}}\overline{u}^2 dx - \frac{1}{s}\int_{B_R(0)} \overline{u}^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} \frac{f(\overline{v})}{\overline{v}}\overline{v}^2 dx - \frac{1}{s}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} \overline{v}^2 dx\\
&= \int_{B_R(0)} \left(\frac{f(\overline{u})}{\overline{u}} - \frac{1}{s}\right)\overline{u}^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} \left(\frac{f(\overline{v})}{\overline{v}} - \frac{1}{s}\right)\overline{v}^2 dx\\
&= G(z^+) + G(z^-).
\end{aligned}
$$

Por $(f_4)$, temos

$$G(z^+) = G(\overline{u}) = \int_{B_{R(0)}} \left(\frac{f(\overline{u})}{\overline{u}} - \frac{1}{s}\right)\overline{u}^2 dx < 0 \tag{3.3}$$

e

$$G(z^-) = G(\overline{v}) = \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{R(0)}} \left(\frac{f(\overline{v})}{\overline{v}} - \frac{1}{s}\right)\overline{v}^2 dx < 0. \tag{3.4}$$

Assim, de (3.3) e (3.4)

$$G(z) = G(z^+) + G(z^-) < 0. \tag{3.5}$$

Agora, definimos a função $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ por

$$g(0) = \langle z, z\rangle \ \text{ e } \ g(t) = \frac{I'(tz)}{t^2}tz = \langle z, z\rangle - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(tz)}{t}zdx, \ \text{ para } \ t > 0.$$

De $(f_3)$, e pelo o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue tem-se que

$$g(0) = \lim_{t\to 0^+} g(t) = \langle z, z\rangle > 0,$$

pois

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0^+} g(t) &= \lim_{t\to 0^+}\left[\langle z,z\rangle - \int_{\mathbb{R}^N}\frac{f(tz)}{t}zdx\right]\\
&= \langle z,z\rangle - \lim_{t\to 0^+}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{f(tz)}{tz}z^2dx\\
&= \langle z,z\rangle.
\end{aligned}$$

Como $g(0) = \lim\limits_{t\to 0^+} g(t)$, então $g : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ é uma função contínua. Por outro lado, usando $(f_4)$, (3.5) e novamente o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to +\infty} g(t) &= \langle z,z\rangle - \lim_{t\to +\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{f(tz)}{t}zdx\\
&= \langle z,z\rangle - \lim_{t\to +\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{f(tz)}{tz}z^2dx\\
&= \langle z,z\rangle - \int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{s}z^2dx\\
&= G(z)\\
&< 0.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Assim, existe $T > 0$ tal que

$$\frac{I'(Tz)Tz}{T^2} = 0,$$

isto é, $\gamma(Tz) = 0$. Definindo $w = Tz$, usando a identidade anterior e o fato que $z^{\pm} \neq 0$, temos que $w \in \hat{S}$.

Note que

$$w^+ = Tz^+ = T\overline{u}. \tag{3.7}$$

Substituindo na expressão para G e usando (3.3), temos que

$$\begin{aligned}
G(w^+) &= \langle w^+,w^+\rangle - \frac{1}{s}\int_{\mathbb{R}^N}(w^+)^2dx\\
&= \langle T\overline{u},T\overline{u}\rangle - \frac{1}{s}\int_{\mathbb{R}^N}(T\overline{u})^2dx\\
&= T^2\left\{\langle \overline{u},\overline{u}\rangle - \frac{1}{s}\int_{B_R(0)}(\overline{u})^2dx\right\}\\
&= T^2G(z^+)\\
&< 0.
\end{aligned}$$

Analogamente, usando (3.4),

$$\begin{aligned}
G(w^-) &= \langle w^-, w^- \rangle - \frac{1}{s}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{R(0)}} (w^+)^2 dx\\
&= \langle T\overline{v}, T\overline{v} \rangle - \frac{1}{s}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{R(0)}} (T\overline{v})^2 dx\\
&= T^2\{\langle \overline{v}, \overline{v} \rangle - \frac{1}{s}\int_{B_{R(0)}} (\overline{v})^2 dx\}\\
&= T^2 G(z^-)\\
&< 0.
\end{aligned}$$

Como $G(w^+) < 0$ e $G(w^-) < 0$, podemos proceder como em (3.6) e mostrar que existem números reais $a, b > 0$ tais que $aw^+ \in S$ e $bw^- \in S$.

Consequentemente $\gamma(aw^+ + bw^-) = 0$, pois por $(f_2)$

$$\begin{aligned}
\gamma(aw^+ + bw^-) &= \gamma(aT\overline{u} - bT\overline{v})\\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla(aT\overline{u} - bT\overline{v})|^2 - \lambda(aT\overline{u} - bT\overline{v})^2\right] dx\\
&- \int_{\mathbb{R}^N} f(aT\overline{u} - bT\overline{v})(aT\overline{u} - bT\overline{v}) dx\\
&= \int_{B_{R(0)}} [|\nabla(aT\overline{u})|^2 + \lambda(aT\overline{u})^2] dx - \int_{B_{R(0)}} f(aT\overline{u})(aT\overline{u}) dx\\
&+ \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{R(0)}} [|\nabla(bT\overline{v})|^2 + \lambda(bT\overline{v})^2] dx - \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{R(0)}} f(bT\overline{u})(bT\overline{u}) dx\\
&= \gamma(aT\overline{u}) + \gamma(bT\overline{v})\\
&= \gamma(aw^+) + \gamma(bw^-)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Combinando o fato de que $aw^+ + bw^- \neq 0$ com a equação $\gamma(aw^+ + bw^-) = 0$, concluímos que $aw^+ + bw^- \in S$. Podemos concluir ainda que $aw^+ + bw^- \in S_1$, pois $aw^+ + bw^- \in \hat{S}$ e $\gamma((aw^+ + bw^-)^+) = \gamma(aw^+) = 0$, pois $(aw^+ \in S)$, o que completa a demonstração.

■

**Lema 7** *O conjunto $S_1$ é fechado.*

**Demonstração**. Primeiramente observe que, para $2 < q < 2^*$, existe uma constante positiva C tal que $|u|_{L^q} \geq C > 0$, para todo $u \in S$. De fato, pelas hipóteses $(f_3) - (f_4)$ e dado $\epsilon > 0$, existe uma constante positiva tal que $c(\epsilon)$ tal que

$$|f(t)| \leq \epsilon|t| + c(\epsilon)|t|^{q-1} \text{e } |F(t)| \leq \epsilon\frac{t^2}{2} + \frac{c(\epsilon)}{q}|t|^q, \;\; \forall t \in \mathbb{R} \tag{3.8}$$

para $2 < q < 2^*$.

Como $\gamma(u) = 0$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + \lambda u^2) dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)u \leq \epsilon \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx + c(\epsilon) \int_{\mathbb{R}^N} (|u|^q) dx. \tag{3.9}$$

Assim,

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + \lambda u^2) dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + (\lambda - \epsilon) u^2) dx \leq c(\epsilon) \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx.$$

Pela imersão de Sobolev e da inequação acima temos que

$$c|u|^2_{L^q} \leq \frac{1}{2} \|u\|^2 \leq c(\epsilon) |u|^q_{L^q}. \tag{3.10}$$

Utilizando (3.10) e o fato de que $u \neq 0$, obtemos que

$$|u|_{L^q} \geq C > 0 \quad \text{para alguma constante } C. \tag{3.11}$$

Lembremos que

$$S_1 = \gamma^{-1}\{0\} \cap (\gamma \circ h)^{-1}\{0\} \cap \{u \in E : u^+ \neq 0, u^- \neq 0\},$$

onde $h : E \to E$ é dado por $h(u) = u^+$.

Seja $(u_n) \subset S_1$ tal que $u_n \to u$ em E, para $n \to \infty$. Como $\gamma(u_n^+) = 0$, segue que $\gamma(u_n^-) = 0$ e de (3.10) temos

$$|(u_n)^+|_{L^q}, |(u_n)^-|_{L^q} \geq C > 0. \tag{3.12}$$

Como $\|(u_n)^\pm\| \leq \|u_n\|$ , a sequência $(u_n)^\pm$ é limitada em E. Usando o fato de que o espaço $E = H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ é compactamente imerso em $L^2(\mathbb{R}^N)$, encontramos que $u^+ \neq 0$ e $u^- \neq 0$ depois de fazer $n \to \infty$ em (3.11). Como $\gamma$ é uma função contínua, segue que $u \in \gamma^{-1}\{0\}$. Pelo Lema 2.3 de [4], $h$ é contínua e, como uma consequência, $u \in (\gamma \circ h)^{-1}\{0\}$. Portanto, $u \in S_1$ e segue que $S_1$ é fechado em E.

$\blacksquare$

**Observação 2** *Note que, de (3.11), existe $C(q) > 0$ tal que se $\gamma(u) = 0$ e $u \neq 0$, então*

$$|u|_{L^q} \geqslant C(q).$$

*Assim, se $u \in S_1$, então*

$$|u^+|_{L^q} \geqslant C(q) \ \text{ e } \ |u^-|_{L^q} \geqslant C(q).$$

**Lema 8** *Seja $\{u_n\} \subset S_1$ uma sequência tal que $\{I(u_n)\}$ é uma sequência limitada. Então $\{u_n\}$ é limitada.*

**Demonstração.** Suponha por contradição que exista uma subsequência, também denotada por $\{u_n\}$, tal que $\|u_n\| \to \infty$ quando $n \to \infty$. Como a sequência $\{I(u_n)\}$ é limitada em $\mathbb{R}$, consideremos uma subsequência de $\{I(u_n)\}$ convergente. Então seja $c \in \mathbb{R}$, tal que $\lim_{n\to\infty} I(u_n) = c$. Temos, por (1.2) que :

$$\begin{aligned}
I(u_n) &= I(u_n) - \frac{1}{2}I'(u_n)u_n \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_n|^2 + \lambda u_n^2 dx\right] - \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n)dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_n|^2 + \lambda u_n^2)dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)u_n(x)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)u_n dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}[f(u_n)u_n - 2F(u_n)]dx \geq 0.
\end{aligned}$$

Logo $c \geq 0$.

Primeiramente estudemos o caso $c > 0$. Defina

$$v_n = 2\sqrt{c}\frac{u_n}{\|u_n\|}.$$

Então $\|v_n\| = 2\sqrt{c}$.

Mostremos que existe $R > 0, \rho > 0$ e uma sequência $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^N$ tal que

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{B_{R(y_n)}} {v_n}^2 dx \geq \rho. \tag{3.13}$$

De fato, suponha por contradição que valha a negação de (3.13). Então,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_{R(y)}} {v_n}^2 dx = 0. \tag{3.14}$$

e pelo Lema de Lions do Capítulo 2, $v_n \to 0$, na norma $L^q(\mathbb{R}^N)$, para todo $2 < q < 2^*$.

Por (3.10),

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} F(v_n)dx\right| \leq \epsilon \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^2 dx + c(\epsilon)\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^q dx \leq \frac{4c\epsilon}{\lambda} + c(\epsilon)\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^q dx \tag{3.15}$$

o que implica que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} F(v_n)dx = 0$$

e ainda que

$$I(v_n) = \frac{1}{2}\|v_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(v_n)dx = \frac{1}{2}4c - \int_{\mathbb{R}^N} F(v_n)dx = 2c + o_n(1). \tag{3.16}$$

Por outro lado, caso seja possível que

$$I(v_n) \le c + o_n(1), \tag{3.17}$$

então obteremos uma contradição com (3.16), o que provará (3.13).

Para provar então (3.17), seja

$$\xi(t) = \frac{1}{2}t^2 f(u_n)u_n - F(tu_n), \ \ t \ge 0.$$

Note que,

$$\xi'(t) = tf(u_n)u_n - f(tu_n)u_n = \left[\frac{f(u_n)}{u_n} - \frac{f(tu_n)}{tu_n}\right] t(u_n)^2.$$

**Afirmação:** A função $t \longmapsto \xi(t)$ tem ponto de máximo em $t = 1$.
Com efeito,

- Se $0 < t < 1$ e $u_n > 0$, tem-se por $(f_5)$ que $u_n > tu_n$, então $\dfrac{f(u_n)}{u_n} > \dfrac{f(tu_n)}{tu_n}$, implicando que $\xi'(t) > 0$.
- Se $t > 1$ e $u_n > 0$, tem-se por $(f_5)$ que $u_n < tu_n$, então $\dfrac{f(u_n)}{u_n} < \dfrac{f(tu_n)}{tu_n}$, implicando que $\xi'(t) < 0$.

Assim, para $t = 1$, $\xi(t)$ tem valor máximo. Se $u_n < 0$, os cálculos são análogos, pois $f$ é uma função ímpar.

Consequentemente,

$$I(tu_n) = \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{2}t^2 f(u_n)u_n - F(tu_n)\right] dx \le \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{2}f(u_n)u_n - F(u_n)\right] dx = I(u_n).$$

Tomando $t = t_n = \dfrac{2\sqrt{c}}{\|u_n\|} < 1$, encontramos

$$I(v_n) = I(tu_n) \le I(u_n) = c \tag{3.18}$$

o que é impossível por (3.16), provando assim (3.13).

Existem dois casos a considerar,

$(i)$ A sequência $\{y_n\}$ é limitada;

$(ii)$ $|y_n| \to \infty$ quando $n \to \infty$.

Se $(i)$ vale, então existe $R_1 > R$, para R dado em (3.13) tal que

$$\int_{B_{R_1(0)}} v_n^2 dx \geq \frac{\rho}{2}.$$

Como $\|v_n\| = 2\sqrt{c}$ segue que $v_n$ é limitada e assim a menos de subsequência $v_n \rightharpoonup v$ em E, $v_n \to v$ em $L^q_{loc}(\mathbb{R}^N), 2 < q < 2^*$, e $v_n(x) \to v(x)$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$.

Assim temos

$$\int_{B_{R_1(0)}} v^2 dx \geq \frac{\rho}{2}$$

provando que $v \neq 0$.

Logo existe $\Lambda \subset B_{R_1}(0)$, com medida positiva tal que $v(x) \neq 0$, para todo $x \in \Lambda$. Por (1.2) temos

$$I(u_n) = I(u_n) - \frac{1}{2}I'(u_n)u_n = \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{2}f(u_n)u_n - F(u_n)\right] dx \geq \int_{\Lambda} \left[\frac{1}{2}f(u_n)u_n - F(u_n)\right] dx.$$

Note que se $x \in \Lambda$, então $u_n(x) \to +\infty$ e assim, por (1.2) e pelo Lema de Fatou obtemos

$$\liminf_{n\to\infty} \left[I(u_n) - \frac{1}{2}I'(u_n)u_n\right] \geq \int_{\Lambda} \liminf_{n\to\infty} \left[\frac{1}{2}f(u_n)u_n - F(u_n)\right] dx = +\infty,$$

o que implica que $I(u_n) \to \infty$. Isto contradiz o fato que o limite $I(u_n) \to c$, quando $n \to \infty$ e concluímos que o caso $(i)$ é impossível.

Suponhamos agora que $(ii)$ valha. Defina

$$\tilde{v_n}(x) = v_n(x + y_n)$$

Assim,

$$\|\tilde{v_n}(.)\| = \|v_n(. + y_n)\| = 2\sqrt{c}.$$

Como $\{\tilde{v_n}\}$ é limitada, a menos de subsequência $\tilde{v_n} \rightharpoonup \tilde{v}$ em E, $\tilde{v_n} \to \tilde{v}$ em $L^q_{Loc}(B_{R(0)})$, $2 \leq q < 2^*$, de (3.13). Assim,

$$\liminf_{n\to+\infty}\int_{B_{R(0)}} \tilde{v_n}^2 dx \geq \rho.$$

Logo

$$\int_{B_{R(0)}} \tilde{v}^2 dx \geq \rho$$

e então $\tilde{v} \neq 0$. Portanto, existe $\Lambda \subset B_R(0)$, com medida positiva tal que $\tilde{v}(x) \neq 0$, para todo $x \in \Lambda$. Como uma consequência de $\|u_n(.+y_n)\| \to \infty$ quando $n \to \infty$, temos $|u_n(x+y_n)| \to \infty$ quando $n \to \infty$, para todo $x \in \Lambda$.

Combinando (1.2) com o Lema de Fatou obtemos

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to+\infty} I(u_n) - \frac{1}{2}I'(u_n)u_n &= \liminf_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\left[\frac{1}{2}f(u_n(x))u_n(x) - F(u_n(x))\right]dx \\
&= \liminf_{n\to+\infty}\int_{B_R(y_n)}\left[\frac{1}{2}f(u_n(x))u_n(x) - F(u_n(x))\right]dx \\
&= \liminf_{n\to+\infty}\int_{B_R(0)}\left[\frac{1}{2}f(u_n(x+y_n))u_n(x+y_n) - F(u_n(x+y_n))\right]dx \\
&\geqslant \liminf_{n\to+\infty}\int_{\Lambda}\left[\frac{1}{2}f(u_n(x+y_n))u_n(x+y_n) - F(u_n(x+y_n))\right]dx \\
&\geqslant \int_{\Lambda}\liminf_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}f(u_n(x+y_n))u_n(x+y_n) - F(u_n(x+y_n))\right)dx = +\infty,
\end{aligned}$$

o que contradiz o fato que

$$I(u_n) - \frac{1}{2}I'(u_n)u_n = c + o_n(1).$$

Portanto $(ii)$ não vale. O que concluímos que $c > 0$ não ocorre.

Assumimos agora c $= 0$. Defina $t_n = \dfrac{1}{\|u_n\|}$ e $w_n = t_n u_n$, concluímos que existem $R_2 > 0, \rho_2 > 0$ e uma sequência $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^N$ tal que

$$\liminf_{n\to\infty}\int_{B_{R(y_n)}} {w_n}^2 dx \geq \rho. \tag{3.19}$$

De fato, se

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{y\in\mathbb{R}^N}\int_{B_{R(y)}} {w_n}^2 dx = 0, \tag{3.20}$$

pelo Lema de Lions, $w_n \to 0$, na norma $L^q$, para todo $2 < q < 2^*$.

Por (3.10), temos

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} f(w_n)w_n dx = 0.$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} I(w_n) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}\|w_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(w_n)dx\right] = \frac{1}{2}. \tag{3.21}$$

De (3.18)

$$I(w_n) = I(t_n u_n) \leq I(u_n) = c = 0, \tag{3.22}$$

para $n \to \infty$, contrariando (3.21). Assim (3.20) é valido com $\rho_2 > 0$.

Há novamente dois casos a considerar,

$(i)$ A sequência $\{y_n\}$ é limitada;

$(ii)$ $|y_n| \to \infty$ quando $n \to \infty$.

Procedendo de forma análoga como no caso $c > 0$, podemos concluir que os casos $(i)$ e $(ii)$ acima são impossíveis, o que prova que o caso $c = 0$ também é impossível, e a prova está completa. ■

**Observação 3** *Podemos usar a (3.11) e o lema anterior, para provar que se* $\{u_n\} \subset S_1$, *for uma sequência tal que* $\{I(u_n)\}$ *é limitada, então existem* $L, M > 0$ *tais que* $L \leq |u_n|_q \leq M$, $q \in (2, 2^*)$, *e* $L \leq \|u_n\|_q \leq M$, *para todo* $n$.

**Lema 9** *Existe* $\sigma > 0$ *tal que* $\inf_{S_1} I \geq \sigma$.

**Demonstração**. Pela hipótese (1.2), para todo $u \in S_1$, temos

$$\begin{aligned} I(u) &= I(u) - \frac{1}{2}I'(u)u \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2 + \lambda u^2)dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx - \frac{1}{2}\left[\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2 + \lambda u^2)dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)udx\right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{2}f(u)udx - F(u)\right)dx \geq 0. \end{aligned}$$

Assim, $\inf_{S_1} I \geq 0$. Suponha por contradição que exista uma sequência $\{u_n\} \subset S_1$ tal que $I(u_n) \to 0$ quando $n \to \infty$. Do Lema (8), $\{u_n\}$ é limitada. Portanto, existe $u_0 \in E$ e uma subsequência, também denotada por $\{u_n\}$, tal que $u_n \rightharpoonup u_0$ em E, $u_n \to u_0$ em $L^q_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $2 \leqslant q < 2^*$, e $u_n(x) \to u_0(x)$ q.t.p em $\mathbb{R}^N$.

Por (1.2) e pelo Lema de Fatou,

$$
\begin{aligned}
0 &= \liminf_{n\to\infty} I(u_n) \\
&= \liminf_{n\to\infty} \left[ I(u_n) - \frac{1}{2} I'(u_n)u_n \right] \\
&= \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left[ \frac{1}{2} f(u_n)u_n - F(u_n) \right] dx \\
&\geqslant \int_{\mathbb{R}^N} \left( \frac{1}{2} f(u_0)u_0 - F(u_0) \right) dx \\
&\geq 0.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\frac{1}{2} f(u_0)u_0 - F(u_0) = 0 \quad \text{q .t. p em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Por (1.2), $u_0(x) = 0$ q .t. p em $\mathbb{R}^N$ e da Observação 3, $L \leq \|u_n\|_{L^q}$ para todo n. Como E é compactamente imerso em $L^q(\mathbb{R}^N)$, temos que $u_n$ converge fortemente $u_0$ na norma $L^q$, assim

$$0 < L \leq |u_0|_{L^q},$$

contrariando o fato de que $u_0 = 0$.

■

**Lema 10** *Se o ínfimo c de I em $S_1$ é atingido, então c é um valor crítico de I.*

*Demonstração.* Seja $u_c \in S_1$ tal que $I(u_c) = c = \inf_{S_1} I$. Temos que provar que $I'(u_c) = 0$. Suponha por contradição, que $I'(u_c) \neq 0$. Desde que $I \in C^1(E, \mathbb{R})$, existe $\delta > 0$ e $\nu > 0$ tal que

$$\|I'(v)\| \geq \nu, \forall v \in E, \|v - u_c\| \leq 2\delta. \tag{3.23}$$

Da Observação 2, temos que, existe $L > 0$ tal que $\|u_c^+\| \geqslant L$ e $\|u_c^-\| \geqslant L$ e, podemos assumir que $6\delta < L$. Seja $D = [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}] \times [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ e $\phi(\zeta, \tau) = \zeta u_c^+ + \tau u_c^-$, para $(\zeta, \tau) \in D$. Observamos que $I'(u_c^\pm)u_c^\pm = 0$ e usando $(f_5)$ temos que se $(\zeta, \tau) \in D$ e $(\zeta, \tau) \neq (1, 1)$, então

$$I(\phi(\zeta, \tau)) = I(\zeta u_c^+) + I(\tau u_c^-) < I(u_c^+) + I(u_c^-) = c. \tag{3.24}$$

De fato,

$$\begin{aligned}I(\phi(\zeta,\tau)) &= I(\zeta u_c^+ + \tau u_c^-)\\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla(\zeta u_c^+ + \tau u_c^-)|^2 + \lambda(\zeta u_c^+ + \tau u_c^-)^2)dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(\zeta u_c^+ + \tau u_c^-)dx\\ &= I(\zeta u_c^+) + I(\tau u_c^-).\end{aligned}$$

Ainda tal como na demonstração do Lema 3.6, temos que , se $\zeta \neq 1$ e $\tau \neq 1$, tem-se que $I(\zeta u_c^+) < I(u_c^+)$ e $I(\tau u_c^-) < I(u_c^-)$. Dessa forma, para $(\zeta,\tau) \in D$ com $\zeta \neq 1$ ou $\tau \neq 1$ obtém-se (3.24).

Consequentemente, como $I \circ \phi$ é contínua e $\partial D$ compacto,

$$c_0 = \max_{\partial D} I \circ \phi < c. \tag{3.25}$$

Aplicando o Lema da Deformação ( Lema 2 do Capítulo 2) para $X = E$, $\epsilon = min\{\frac{c-c_0}{2}, \frac{\tau\delta}{8}\}$, $\varphi = I, \kappa = \delta$ e $S = B(u_c,\delta)$, então existe $\eta \in C([0,1] \times E, E)$ tal que

$(i)$ $\eta(\theta,u) = u$ se $\theta = 0$ ou se $u \notin I^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon]) \cap B(u_c, 2\delta)$;

$(ii)$ $\eta\left(1, I^{c+\epsilon} \cap B(u_c,\delta)\right) \subset I^{c-\epsilon}$;

$(iii)$ $I(\eta(1,v)) \leq I(v), \forall v \in E$;

onde $I^a = \{v \in E; I(v) \leq a\}$.

Combinando $(i) - (iii)$ com (3.24) - (3.25) obtemos

$$\max_{(\zeta,\tau)\in D} I(\eta(1,\phi(\zeta,\tau)) < c. \tag{3.26}$$

De fato, seja $(\zeta,\tau) \in D$. Então

1. se $(\zeta,\tau) = (1,1)$, então $\phi(\zeta,\tau) \in I^{c+\epsilon} \cap B(u_c,\delta)$ e então pelo item , $ii)$

$$I(\eta(1,\phi(\zeta,\tau))) < c - \epsilon < c;$$

2. se $(\zeta,\tau) \neq (1,1)$, então por $iii)$ e (3.24),

$$I(\eta(1,\phi(\zeta,\tau))) \leqslant I(\phi(\zeta,\tau)) = I(\zeta u_c^+ + \tau u_c^-) < c.$$

Como $(\zeta, \tau) \longmapsto I(\eta(1, \phi(\zeta, \tau)))$ é contínua em D, segue (3.26). Obtemos ainda que

$$\eta(1, \phi(D)) \cap S_1 \neq \emptyset. \tag{3.27}$$

De fato, defina $\varphi(\zeta, \tau) = \eta(1, \phi(\zeta, \tau))$ e $\Psi : D \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$\Psi(\zeta, \tau) = (\psi_1(\zeta, \tau), \psi_2(\zeta, \tau)) = (I'(\varphi^+(\zeta, \tau))\varphi^+(\zeta, \tau), (I'(\varphi^-(\zeta, \tau))\varphi^-(\zeta, \tau)) \tag{3.28}$$

Para $\zeta, \tau > 0$, vamos mostrar que existe $(\zeta_0, \tau_0) \in D$ tal que $\Psi(\zeta_0, \tau_0) = (0, 0)$. Note que

$$\begin{aligned}
\|u_c - \phi(\zeta, \tau)\| &= \|(u_c^+ + u_c^-) - (\zeta u_c^+ + \tau u_c^-)\| \\
&= \|(1-\zeta)u_c^+ + (1-\tau)u_c^-\| \\
&= \|(1-\zeta)u_c^+\| + \|(1-\tau)u_c^-\| \\
&= |(1-\zeta)|\|u_c^+\| + \|(1-\tau)|\|u_c^-\| \\
&\geq |(1-\zeta)|\|u_c^+\| \\
&\geq |(1-\zeta)|L \\
&\geq |(1-\zeta)|6\delta \\
&> 2\delta \Leftrightarrow \zeta < \frac{2}{3} \text{ ou } \zeta > \frac{4}{3}.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Da propriedade $(i)$ de $\eta$ e da inequação (3.29),temos que $\varphi(\zeta, \tau) = \phi(\zeta, \tau)$, se $\zeta = \frac{1}{2}$ para $\tau \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$.

Assim,

$$\begin{aligned}
\Psi\left(\frac{1}{2}, \tau\right) = \left(\psi_1\left(\frac{1}{2}, \tau\right), \psi_2\left(\frac{1}{2}, \tau\right)\right) &= \left(I'\left(\varphi^+\left(\frac{1}{2}, \tau\right)\right)\varphi^+\left(\frac{1}{2}, \tau\right), \left(I'(\varphi^-\left(\frac{1}{2}, \tau\right)\right)\varphi^-\left(\frac{1}{2}, \tau\right)\right) \\
&= \left(I'\left(\phi^+\left(\frac{1}{2}, \tau\right)\right)\phi^+\left(\frac{1}{2}, \tau\right), \left(I'\left(\phi^-\left(\frac{1}{2}, \tau\right)\right)\phi^-\left(\frac{1}{2}, \tau\right)\right) \\
&= \left(I'\left(\frac{1}{2}u_c^+\right)\frac{1}{2}u_c^+, I'\left(\tau u_c^-\right)\tau u_c^-\right),
\end{aligned} \tag{3.30}$$

e de $(f_5)$ e (3.23), temos

$$\psi_1\left(\frac{1}{2}, \tau\right) = I'\left(\frac{1}{2}u_c^+\right)\frac{1}{2}u_c^+ > 0, \forall \tau \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right], \tag{3.31}$$

pois

$$
\begin{aligned}
I'\left(\frac{1}{2}u_c^+\right)\frac{1}{2}u_c^+ &= \frac{1}{4}\left[\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla(u_c^+)|^2+\lambda(u_c^+)^2)dx\right]-\int_{\mathbb{R}^N} f\left(\frac{1}{2}u_c^+\right)\left(\frac{1}{2}u_c^+\right)dx\\
&= \frac{1}{4}\left[\int_{\mathbb{R}^N} f(u_c^+)u_c^+dx\right]-\int_{\mathbb{R}^N} f\left(\frac{1}{2}u_c^+\right)\left(\frac{1}{2}u_c^+\right)dx\\
&= \frac{1}{4}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{f(u_c^+)}{(u_c^+)}-\frac{f(\frac{1}{2}u_c^+)}{\frac{1}{2}u_c^+}\right)u_c^+dx\right)\\
&> 0.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, usando a propriedade $(i)$ de $\eta$ e $\zeta=\frac{3}{2}$ em (3.29),

$$\varphi(\zeta,\tau)=\phi(\zeta,\tau),\text{ para } \tau\in\left[\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2}\right].$$

Para $\tau\in\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$,

$$
\begin{aligned}
\Psi\left(\tfrac{3}{2},\tau\right) &= \left(I'\left(\varphi^+\left(\tfrac{3}{2},\tau\right)\right)\varphi^+\left(\tfrac{3}{2},\tau\right)\right),\left(I'\left(\varphi^-\left(\tfrac{3}{2},\tau\right)\right)\varphi^-\left(\tfrac{3}{2},\tau\right)\right)\\
&= \left(I'(\phi^+\left(\tfrac{3}{2},\tau\right)\right)\phi^+\left(\tfrac{3}{2},\tau\right)\right),\left(I'\left(\phi^-\left(\tfrac{3}{2},\tau\right)\right)\phi^-\left(\tfrac{3}{2},\tau\right)\right)\\
&= \left(I'\left(\tfrac{3}{2}u_c^+\right)\tfrac{3}{2}u_c^+, I'\left(\tau u_c^-\right)\tau u_c^-\right)
\end{aligned}
$$

e de $f_5$ e (3.23), temos

$$\psi_1\left(\frac{3}{2},\tau\right)=I'\left(\frac{3}{2}u_c^+\right)\frac{3}{2}u_c^+<0,\forall\tau\in\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right], \tag{3.32}$$

pois,

$$
\begin{aligned}
I'\left(\tfrac{3}{2}u_c^+\right)\tfrac{3}{2}u_c^+ &= \tfrac{9}{4}\left[\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla\left(u_c^+\right)|^2+\lambda(u_c^+)^2\right)dx\right]-\int_{\mathbb{R}^N} f\left(\tfrac{3}{2}u_c^+\right)\left(\tfrac{3}{2}u_c^+\right)dx\\
&= \tfrac{9}{4}\left[\int_{\mathbb{R}^N} f\left(u_c^+\right)u_c^+dx\right]-\int_{\mathbb{R}^N} f\left(\tfrac{3}{2}u_c^+\right)\left(\tfrac{3}{2}u_c^+\right)dx\\
&= \tfrac{9}{4}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\left(\tfrac{f\left(u_c^+\right)}{\left(u_c^+\right)}-\tfrac{f\left(\frac{3}{2}u_c^+\right)}{\frac{3}{2}u_c^+}\right)u_c^+dx\right)\\
&< 0.
\end{aligned}
$$

Analogamente,

$$\psi_2\left(\zeta,\frac{1}{2}\right)=I'\left(\frac{1}{2}u_c^-\right)\frac{1}{2}u_c^->0,\forall\zeta\in\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right], \tag{3.33}$$

e

$$\psi_2\left(\zeta, \frac{3}{2}\right) = I'\left(\frac{3}{2}u_c^-\right)\frac{3}{2}u_c^- < 0, \forall \zeta \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]. \tag{3.34}$$

Note que a função $\Psi$ em (3.28) é contínua em $D$, pois $\eta$ e $\phi$ são contínuas, e considerando (3.30)-(3.34), podemos aplicar o Teorema de Miranda e concluir que existe $(\zeta_0, \tau_0) \in D$ tal que $\Psi(\zeta_0, \tau_0) = (0,0)$, como é requerido em (3.27). Disto e de (3.26), temos uma contradição com a definição de $c$. De fato, se $\Psi(\zeta_0, \tau_0) = (0,0)$, então $\varphi(\zeta_0, \tau_0) \in S_1$ e então $c \leqslant I(\varphi(\zeta_0, \tau_0)) < c$. Assim, temos que $I'(u_c) = 0$ e concluímos a prova do teorema.

■

## 3.2 Prova do resultado principal

Nesta seção provaremos o Teorema 1, ou seja, que existe uma solução que muda de sinal $u$ tal que $I(u) = c$. Para este fim definiremos alguns resultados que serão utilizados na prova do teorema.

**Definição 13** *Seja $x \in \mathbb{R}^N$ e $h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Suponha que $x$ seja um ponto crítico de $h$. Se a matriz Hessiana de $h$ em $x$ possui determinante não-nulo, então $x$ é um ponto crítico não-degenerado de $h$. Caso contrário, $x$ é um ponto crítico degenerado de $h$.*

**Definição 14** *Denotemos a forma quadrática corresponde a solução de (1.1) por*

$$I''(u)(\psi, \phi) = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla\psi\nabla\phi + f'(u)\psi\phi)\, dx,$$

*com $\psi, \phi \in E$.*

**Definição 15** *A solução $u$ tem um índice de Morse $j \geqslant 1$, se $j$ é a dimensão máxima de um subespaço $X$ de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que*

$$I''(u)(\psi, \psi) < 0,$$

*para todo $\psi \in X\backslash\{0\}$.*

**Demonstração do Teorema 1.** Seja $c = \inf_{S_1} I$ e $\{u_n\} \subset S_1$ uma sequência minimizante, isto é, $I(u_n) \to c$. Do Lema 8, a sequência $\{u_n\}$ é limitada . Assim podemos assumir que $u_n \rightharpoonup u$ em $E$ e, da compacidade das imersões $E \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N), 2 < q < 2^*$, segue que $u_n \to u$ em $L^q(\mathbb{R}^N)$. Como $\gamma(u_n^+) = 0$, segue que $\gamma(u_n^-) = 0$.

Da observação 2, temos que existe $L > 0$ tal que

$$|u_n^+|_{L^q}, |u_n^-|_{L^q} \geq L > 0. \tag{3.35}$$

Ainda, $u_n^+ \to u^+$ e $u_n^- \to u^-$ na norma $L^q(\mathbb{R}^N)$, pois o espaço E está imerso compactamente em $L^q(\mathbb{R}^N)$, assim fazendo $n \to \infty$ em (3.35), vemos que $u^+ \not\equiv 0$ e $u^- \not\equiv 0$. Logo, $u = u^+ + u^-$ é uma função que muda de sinal.

Obtemos ainda que $u_n^+ \to u^+$ em E. De fato, suponha por contradição que existe uma subsequência também denotada por $u_n^+$, tal que

$$\|u^+\| < \limsup_{n\to\infty} \|u_n^+\|.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\gamma(u^+) &= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u^+|^2 + \lambda(u^+)^2)dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u^+)u^+dx \\
&= \|u^+\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(u^+)u^+dx \\
&< \liminf_{n\to\infty} \|u_n^+\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(u^+)u^+dx \\
&= \liminf_{n\to\infty} \|u_n^+\|^2 - \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n^+)u_n^+dx
\end{aligned}$$

$$= \liminf_{n\to\infty} \left( \|u_n^+\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n^+)u_n^+dx \right) = 0. \tag{3.36}$$

Por outro lado, de $(f_3), (f_4)$, dado $2 \leqslant q < 2^*$ e $0 < \epsilon < \frac{\lambda}{4}$, existe uma constante positiva $c(\epsilon)$ tal que $f(t)t \leqslant \epsilon|t|^2 + c(\epsilon)|t|^q, \forall t \in \mathbb{R}$ e consequentemente existe $\delta > 0$ tal que

$$\gamma(u) \geqslant \frac{1}{4}\|u\|^2, \forall u \in E, \|u\| < \delta. \tag{3.37}$$

Considerando a função $g_1 : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, dada por $g_1(t) = \gamma(tu^+)$ da inequação (3.37), para $t$ suficientemente pequeno temos que , $g_1(t) > 0$ pois

$$g_1(t) = \gamma(tu^+) \geqslant \frac{1}{4}\|tu^+\|^2 = \frac{t^2}{4}\|u^+\|^2 > 0.$$

Enquanto, (3.36) implica que $g_1(1) < 0$. Desde que, $g_1$ é contínua , existe $0 < \alpha < 1$ tal que $\gamma(\alpha u^+) = 0$. Analogamente existe $0 < \beta < 1$ tal que $\gamma(\beta u^-) = 0$. Portanto,

$\alpha u^+ + \beta u^- \in S_1$ e

$$
\begin{aligned}
I(\alpha u^+ + \beta u^-) &< \liminf_{n\to\infty} \left( \frac{1}{2}\|\alpha u_n^+ + \beta u_n^-\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(\alpha u_n^+ + \beta u_n^-)dx \right) \\
&= \liminf_{n\to\infty} \left( I(\alpha u_n^+) + I(\beta u_n^-) \right) \\
&\leqslant \liminf_{n\to\infty} \left( I(u_n^+) + I(u_n^-) \right) \\
&= \liminf_{n\to\infty} \left( I(u_n) \right) \\
&= c \\
&= \inf_{S_1} I, \qquad (3.38)
\end{aligned}
$$

o que é impossível. Portanto, $\{u_n^+\}$ converge fortemente para $u^+$ em E. Analogamente, $\{u_n^-\}$ converge fortemente para $u^-$ em E e assim $u_n \to$ para $u$ em E. Desde que pelo Lema 7 $S_1$ é fechado, $u \in S_1$. Portanto $I(u) = c = \inf_{S_1} I$. Do Lema 10 segue que $u$ é um ponto critico de $I$ e então uma solução que muda de sinal de (1.1) em E, com a menor energia entre todas as soluções que são radialmente simétricas e nodais.

Mostraremos agora que $u$ muda de sinal uma única vez. De fato, desde que $u \in C^2$, assim contínua, temos que $F = \{x \in \mathbb{R}^N : u(x) \neq 0\}$ é aberto.

Se $u$ muda de sinal mais de uma vez, podemos assumir que existem componentes conexas $A, B, C$ de $E$ tais que $u > 0$ em A e $u < 0$ em B. Sejam $u_A, u_B$ e $u_C$ extensões nulas de $u|_A, u|_B$ e $u|_C$ respectivamente. Então para todo $x \in \mathbb{R}^N$,

$$
-\Delta u + \lambda u = f(u) \text{ em } \mathbb{R}^N \text{ e } \gamma(u_A) = \gamma(u_B) = \gamma(u_C) = 0.
$$

Assim, como (1.2) implica que $I > 0$ em $S$, então

$$
I(u_A + u_B) < I(u_A + u_B + u_C) \leqslant I(u) = c,
$$

o que contradiz o fato de que $u_A + u_B \in S$.

Suponha agora que $u$ é um ponto crítico não-degenerado. Desde que $u$ é radialmente simétrica, podemos utilizar os argumentos apresentados na demonstração do teorema 1.6 do artigo ([6]) para encontrar direções canônicas $e_i$ com $i = 1, ..., n$, e uma função $\psi_i \in C^\infty$ com suporte compacto sobre o semi-espaço $\sum(e_i) = \{x \in \mathbb{R}^N : x.e_i > 0\}$ tal que $I''(u)(\psi_i, \psi_i) < 0$. Pelo artigo ([4]) juntamente com hipótese $(f_5)$ tem-se que $I''(u)(v, v) < 0$, para $v = u^+$ e $v = u^-$.

Combinando o fato de que $supp(u^+) \subset B_R(0)$ e $supp(u^-) \subset \mathbb{R}^N \backslash B_R(0)$, com o fato de que o suporte de $\psi$ está contido no semi-espaço $\sum(e_i)$ para todo $i \in \{1, ..., N\}$, segue que $u^+$ e $u^-$ não é gerada por $span\{\psi_1, ..., \psi_N\}$ e assim concluímos que $u$ tem índice de Morse $j \geqslant N + 2$.

■

Capítulo

# 4

# Considerações Finais

Neste trabalho foi estudado um resultado de existência de solução nodal e radialmente simétrica para uma classe de equações de Schrödinger assintoticamente linear no infinito e o objeto principal do estudo foi o artigo de Maia, Myagaki e Soares [8]. No capítulo introdutório é enunciado o Teorema 1, o qual busca uma solução radial que muda de sinal uma única vez no $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ do problema (1.1). No segundo capítulo foi apresentado estudos preliminares para abordar as técnicas necessárias para o desenvolvimento desse trabalho. Já no terceiro Capítulo demonstra-se o Teorema 1, entretanto para isto foi preciso demonstrar alguns lemas preliminares. No apêndice A foi mostrado a regularidade do funcional energia do problema 1, ou seja, que este funcional é de classe $C^1$. No Apêndice B foi demonstrado a existência de uma solução nodal do problema (1.1) em um domínio exterior. No decorrer do trabalho tive a oportunidade de conhecer vários outros trabalhos relacionado a esse assunto, onde foram utilizadas varias técnicas, me proporcionando assim uma certa familiaridade com as formas de abordagem das Equações Elípticas, este fato julgo ser fundamental para dar continuidade aos meus estudos em nível de doutorado.

APÊNDICE

# A

# Regularidade do funcional associado

Provaremos que $I \in C^1(E, \mathbb{R})$, com sua derivada de Fréchet dada por

$$I'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + \lambda uv)dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)vdx.$$

Antes disso, faremos uma breve revisão sobre diferenciabilidade de funcionais em Espaços de Banach.

**Definição 16** *Seja $X$ um espaço de Banach. Dado um funcional $I : X \to \mathbb{R}$ dizemos que $I$ possui Derivada de* ***Gâteaux*** *no ponto $u \in X$ quando existe um funcional $T_0 \in X'$ tal que*

$$\lim_{t \to 0} \frac{I(u+tv) - I(u) - T_0 v}{t} = 0, \forall x \in X.$$

**Definição 17** . *Seja $X$ um espaço de Banach. Dado um funcional $I : X \to \mathbb{R}$, dizemos que $I$ possui Derivada de* ***Fréchet*** *no ponto $u \in X$ quando existe um funcional $T \in X'$ tal que*

$$\lim_{v \to 0} \frac{I(u+v) - I(u) - Tv}{t} = 0, \forall x \in X.$$

Observe que pela unicidade do limite a Derivada de Fréchet no ponto $u \in X$, bem como a Derivada de Gâteaux no ponto $u \in X$, quando existe, é única. Denotaremos por $DI(u)$ a Derivada de Gâteaux no ponto $u \in X$ e por $I'(u)$ a Derivada de Fréchet no ponto $u \in X$. Note ainda que se existe a Derivada de Fréchet $I'(u)$ em $u \in X$, então também existe a Derivada de Gâteaux $DI(u)$ em $u \in X$, além disso, $I'(u) = DI(u)$. No lema seguinte tem-se que em certas condições, a Derivada de Fréchet coincide com a Derivada de Gâteaux. Antes do lema, veremos a definição de funcionais de classe $C^1$.

**Definição 18** . *Seja $X$ um espaço de Banach e $A \subset X$ um aberto em $X$. Dizemos que o funcional $I$ é de classe $C^1$. em $A$ e denotamos $I \in C^1(X; \mathbb{R})$, quando sua derivada de Fréchet existe em todo ponto $u \in Ae$ a aplicação $I' : A \to X'$ é continua.*

Acima vimos todo funcional que possui Derivada de Gâteaux possui necessariamente Derivada de Fréchet. Porém, vale o seguinte resultado:

**Lema 11** *Seja $I : A \to \mathbb{R}$, onde $A$ é um aberto no espaço de Banach $X$. Se $I$ possui Derivada de Gâteaux para todo $u \in A$ e se, além disso, $DI : A \to \mathbb{R}$ é continua em $A$, então $I \in C^1(A;\mathbb{R})$.*

Provaremos que $I \in C^1(E,\mathbb{R})$, com sua derivada de Fréchet dada por

$$I'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + \lambda uv)dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)vdx.$$

Para tanto, vamos considerar $I = I_1 + I_2 - I_3$, em que

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx, \;\; I_2 = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \lambda u^2 dx \;\text{ e }\; I_3(u) = -\int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx, \quad \text{para todo } u, v \in E$$

Em seguida mostraremos que $I_1, I_2$ e $I_3$ estão bem definidos e são de classe $C^1(E,\mathbb{R})$, com

$$I_1'(u)v \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v dx, I_2'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} \lambda uv dx \;\text{ e }\; I_3'(u)v = -\int_{\mathbb{R}^N} f(u)vdx.$$

Dividiremos a demonstração desta regularidade em três afirmações.

**Afirmação 1**. O funcional $I_1 \in C^1(E,\mathbb{R})$. Para demonstrar a afirmação, mostraremos que $I_1$ possui Derivada de Gateaux. Seja $t \in \mathbb{R}$ com $0 < |t| < 1$ e $u, v \in E$. Considere $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ função definida por $g(s) = \frac{1}{2}|\nabla u + st\nabla v|^2$.

Observe que

$$g'(s) = (\nabla u + st\nabla v)t\nabla v, \;\; g(1) = \frac{1}{2}|\nabla u + t\nabla v|^2 \;\text{ e }\; g(0) = \frac{1}{2}|\nabla u|^2.$$

Sendo $g$ contínua em $[0,1]$ e diferenciável em $(0,1)$ então, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\gamma \in (0,1)$ tal que $g(1) - g(0) = g'(\gamma)$, isto é,

$$\frac{\frac{1}{2}|\nabla u + t\nabla v|^2 - \frac{1}{2}|\nabla u|^2}{t} = (\nabla u + st\nabla v)\nabla v.$$

Logo, sendo $(t_n)$ uma sequência tal que $t_n \to 0$ quando $n \to \infty$, temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}|\nabla u + t_n\nabla v|^2 - \frac{1}{2}|\nabla u|^2}{t_n} = \nabla u \nabla v.$$

Note que

$$\left|\frac{\frac{1}{2}|\nabla u + t\nabla v|^2 - \frac{1}{2}|\nabla u|^2}{t}\right| \leqslant (|\nabla u + st\nabla v|)|\nabla v|.$$

Desde que $(|\nabla u + st\nabla v|) \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e $\nabla v \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Da desigualdade de Hölder,

$(|\nabla u + st\nabla v|)|\nabla v| \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\frac{1}{2}|\nabla u(x)+t_n\nabla v(x)|^2-\frac{1}{2}|\nabla u(x)|^2}{t_n}dx=\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u(x)\nabla v(x)dx.$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
I_1'(u)v &= \lim_{t_n\to\infty}\frac{I_1(u+t_nv)-I_1(u)}{t_n}\\
&= \lim_{t_n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\frac{1}{2}|\nabla u(x)+t_n\nabla v(x)|^2-\frac{1}{2}|\nabla u(x)|^2}{t_n}dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\nabla u(x)\nabla v(x)dx.
\end{aligned}$$

Mostrando que existe a derivada de Gateaux do funcional $I_1(u)$, sendo

$$I_1'(u)v=\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u\nabla vdx$$

Mostraremos a continuidade da derivada de Gateaux de $E_1$. Seja $(u_n)\subset E$ tal que $u_n\to u$ em $E$. Assim, $|\nabla u_n|\to|\nabla u|$ *em* $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Logo, a menos de uma subsequência,

$$|\nabla u_n(x)|\to|\nabla u(x)|\ \ q.t.p\ \ em\ \ \mathbb{R}^N. \tag{A.1}$$

e

$$|\nabla u_n(x)|\leqslant R(x)\ \ q.t.p\ \ em\ \ \mathbb{R}^N, \tag{A.2}$$

onde $R\in L^p(\mathbb{R}^N)$. Para todo $v\in E$ com $\|v\|\leqslant 1$ temos que

$$\begin{aligned}
|I_1'(u_n)v-I_1'(u)v| &= \left|\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u_n\nabla vdx-\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u\nabla vdx\right|\\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^N}\nabla(u_n-\nabla u)\nabla vdx\right|.
\end{aligned}$$

Usando Holder para 2 e $\frac{1}{2}$, obtemos que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N}\nabla(u_n-\nabla u)\nabla vdx\right|\leqslant\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla(u_n-\nabla u)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\|v\|.$$

Assim,

$$|I_1'(u_n)v - I_1'(u)v| \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n - \nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}} \|v\|.$$

Como

$$\sup_{\|v\|\leqslant 1} |I_1'(u_n)v - I_1'(u)v| = \|I_1'(u_n)v - I_1'(u)\|_{E'}$$

então

$$\|I_1'(u_n)v - I_1'(u)\|_{E'} \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n - \nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{A.3}$$

Segue de (A.1) que

$$|\nabla u_n(x) - \nabla u(x)|^2 \to 0, \ \ q.t.p \ \ em \ \ \mathbb{R}^N,$$

e por (A.2)

$$|\nabla u_n(x) - \nabla u(x)|^2 \leqslant 4(R^2 + |\nabla u|^2), \forall n \in \mathbb{R}^N,$$

onde $4|\nabla u|^2 \in L^1(\mathbb{R}^N)$, e, assim, $4(R^2 + |\nabla u|^2) \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n(x) - \nabla u(x)|^2 dx = 0$$

De (A.3), quando $n \to \infty$

$$\|I_1'(u_n) - I_1'(u)\|_{E'} \to 0,$$

ou seja,

$$I_1'(u_n) \to I_1'(u) \ \ em \ \ E'.$$

Portanto, $I_1 \in C^1(E, \mathbb{R})$.

**Afirmação 2**. O funcional $I_2 \in C^1(E, \mathbb{R})$. Para demonstrar a afirmação, mostraremos que $I_2$ possui Derivada de Gateaux. Seja $t \in \mathbb{R}$ com $0 < |t| < 1$ e $u, v \in E$. Considere $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ função definida por $g(s) = \frac{1}{2}|\nabla u + st\nabla v|^2$.

Observe que

$$g'(s) = (\nabla u + st\nabla v)tv, \ \ g(1) = \frac{1}{2}|u + tv|^2 \ \text{ e } \ g(0) = \frac{1}{2}|u|^2.$$

Sendo $g$ contínua em $[0,1]$ e diferenciável em $(0,1)$ então, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\gamma \in (0,1)$ tal que $g(1)-g(0)=g'(\gamma)$, isto é,

$$\frac{\frac{1}{2}|u+tv|^2-\frac{1}{2}|u|^2}{t}=(u+\gamma tv)v.$$

Logo, sendo $(t_n)$ uma sequência tal que $t_n \to 0$ quando $n \to \infty$, temos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}|u+t_nv|^2-\frac{1}{2}|u|^2}{t_n}=uv$$

Note que

$$\left|\frac{\frac{1}{2}|u+tv|^2-\frac{1}{2}|u|^2}{t}\right| \leqslant (|u+\gamma tv|)|v|,$$

com $|\gamma t|<1$ . Desde que $(|u+\gamma tv|) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $v \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Da desigualdade de Hölder, $(|u+\gamma tv|)|\nabla v| \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\frac{1}{2}|u(x)+t_nv(x)|^2-\frac{1}{2}|u(x)|^2}{t_n}dx=\int_{\mathbb{R}^N}u(x)v(x)dx.$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
I_2'(u)v &= \lim_{t_n\to\infty}\frac{I_1(u+t_nv)-I_1(u)}{t_n}\\
&= \lim_{t_n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\frac{1}{2}|u(x)+t_nv(x)|^2-\frac{1}{2}|u(x)|^2}{t_n}dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^N}u(x)v(x)dx.
\end{aligned}$$

Mostrando que existe a derivada de Gateaux do funcional $I_2(u)$, sendo

$$I_2'(u)v=\lambda\int_{\mathbb{R}^N}uvdx$$

Mostraremos a continuidade da derivada de Gateaux de $E_2$. Seja $(u_n) \subset E$ tal que $u_n \to u$ em $E$. Assim, $|u_n| \to |u|$ *em* $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Logo, a menos de uma subsequência,

$$|u_n(x)| \to |u(x)| \ \ q.t.p \ \ em \ \ \mathbb{R}^N. \tag{A.4}$$

e

$$|u_n(x)| \leqslant S(x) \ \ q.t.p \ \ em \ \ \mathbb{R}^N, \tag{A.5}$$

onde $S \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Para todo $v \in E$ com $\|v\| \leqslant 1$ temos que

$$
\begin{aligned}
|I_2'(u_n)v - I_2'(u)v| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} u_n v dx - \int_{\mathbb{R}^N} uv dx \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^N} (u_n - u) v dx \right|.
\end{aligned}
$$

Usando Holder para 2 e $\frac{1}{2}$, obtemos que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} (u_n - u) v dx \right| \leqslant \left( \int_{\mathbb{R}^N} |(u_n - u)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|v\|.$$

Assim,

$$|I_2'(u_n)v - I_2'(u)v| \leqslant \left( \int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|v\|.$$

Como

$$\sup_{\|v\| \leqslant 1} |I_2'(u_n)v - I_2'(u)v| = \|I_2'(u_n)v - I_2'(u)\|_{E'}$$

então

$$\|I_2'(u_n)v - I_2'(u)\|_{E'} \leqslant \left( \int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{A.6}$$

Segue de (A.4) que

$$|u_n(x) - u(x)|^2 \to 0, \ \ q.t.p \ \ em \ \ \mathbb{R}^N.$$

e por (A.5)

$$|u_n(x) - u(x)|^2 \leqslant 4(S^2 + |\nabla u|^2), \forall n \in \mathbb{R}^N,$$

onde $4|\nabla u|^2 \in L^1(\mathbb{R}^N)$, e, assim, $4(S^2 + |\nabla u|^2) \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n(x) - u(x)|^2 dx = 0$$

De (A.6), quando $n \to \infty$

$$\|I_2'(u_n) - I_2'(u)\|_{E'} \to 0,$$

ou seja,

$$I_2'(u_n) \to I_2'(u) \ \ em \ \ E'.$$

Portanto, $I_2 \in C^1(E,\mathbb{R})$.

**Afirmação 3**. O funcional $I_3 \in C^1(E,\mathbb{R})$. Para demonstrar a afirmação, mostraremos que $I_3$ possui Derivada de Gateaux. Seja $t \in \mathbb{R}$ com $0 < |t| < 1$ e $u, v \in E$. Considere $q : [0,1] \to \mathbb{R}$ função definida por $q(s) = F(u + stv)$

Observe que

$$q'(s) = (f(u + stv))tv, \ \ q(1) = F(u + tv) \ \text{ e } \ q(0) = F(u),$$

sendo $q$ contínua em $[0,1]$ e diferenciável em $(0,1)$ então, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\gamma \in (0,1)$ tal que $q(1) - q(0) = q'(\gamma)$, isto é,

$$\frac{F(u+tv) - F(u)}{t} = f(u + \gamma tv)v.$$

Note que

$$\left| \frac{F(u+tv) - F(u)}{t} \right| = |f(u + \gamma tv)||v|.$$

Da condição de crescimento da $f$ temos que

$$|f(u + \gamma tv)| \leqslant 2\epsilon(|u| + |v|) + 2^s C(\epsilon)(|u|^s + |v|^s).$$

Daí

$$\left| \frac{F(u+tv) - F(u)}{t} \right| \leqslant 2\epsilon\left(|u| + |v|\right) + 2^s C(\epsilon)\left(|u|^s + |v|^s\right),$$

onde $2\epsilon\left(|u| + |v|\right) + 2^s C(\epsilon)\left(|u|^s + |v|^s\right) \in \mathbb{R}^N$.

Observe que

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(u+tv) - F(u)}{t} = f(u)v.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_{\mathbb{R}^N} \lim_{t\to 0} \frac{F(u+tv) - F(u)}{t} = f(u)v.$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
I_3'(u)v &= \lim_{t\to 0}\frac{I_3(u+tv)-I_3(u)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{F(u+tv)-F(u)}{t}dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^N} f(u)vdx.
\end{aligned}
$$

Mostrando que o funcional $I_3$ é Gateaux Diferenciável e

$$I_3'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)vdx, \forall v \in E.$$

Mostraremos a continuidade da derivada de Gateaux de $I_3$. Seja $(u_n) \subset E$ tal que $u_n \to u$ em $E$. Assim, $|u_n| \to |u|$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Logo, existe uma subsequência, ainda denotada por $(u_n)$ e uma função $h \in L^p$ tais que

$$|u_n(x)| \to |u(x)| \;\; q.t.p \;\; em \;\; \mathbb{R}^N. \tag{A.7}$$

e

$$|u_n(x)| \leqslant h(x) \;\; q.t.p \;\; em \;\; \mathbb{R}^N, \tag{A.8}$$

onde $h \in L^P(\mathbb{R}^N)$. Como $f$ é contínua temos que

$$f(u_n(x)) \to f(u(x)) \;\; q.t.p \;\; em \;\; \mathbb{R}^N \tag{A.9}$$

e

$$f(u_n(x))v(x) \to f(u(x))v(x) \;\; q.t.p \;\; em \;\; \mathbb{R}^N. \tag{A.10}$$

Da condição de crescimento da $f$ temos que

$$|f(u_n(x))v(x)| \leqslant \epsilon|u_n(x)||v(x)| + C(\epsilon)|u_n(x)|^s|v(x)|.$$

Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)vdx \to \int_{\mathbb{R}^N} f(u)vdx;$$

Logo, para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)vdx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)vdx\right| \leqslant \epsilon,$$

para todo $n \geqslant n_0$. O que implica

$$\sup_{\|v\|\leqslant 1}\left|\int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)vdx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)vdx\right| \leqslant \epsilon,$$

para todo $n \geqslant n_0$, ou seja, $\|I_3 - I_3'\|_E < \epsilon$ mostrando que $u \longmapsto I_3'(u)$ é contínua no dual de $E$ e o funcional $I_3$ é de classe $C^1(E,\mathbb{R})$. Pelas afirmações anteriores temos que $I \in C^1(E,\mathbb{R})$.

Apêndice

# B

# Prova da Proposição 1

Neste apêndice provaremos a Proposição 1, ou seja, apresentaremos a existência de uma solução radial positiva para seguinte equação assintoticamente linear de Schrödinger no domínio exterior

$$(B) \qquad \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f(u) \text{ em } \Omega \\ u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega = \mathbb{R}^N \backslash B_R(0)$ para algum $R > 0$ fixo.

A prova será feita através da verificação das seguintes etapas. consideremos o espaço de Sobolev

$$E_\Omega \equiv H^1_{0,rad}(\Omega) = \{u \in {H_0}^1(\Omega) : u(x) = u(|x|)\},$$

com norma

$$\|u\|^2_\Omega = \int_\Omega (|\nabla u|^2 + \lambda u^2)dx,$$

a qual é induzida pelo seguinte produto interno

$$\langle u, v\rangle_\Omega = \int_\Omega (\nabla u \nabla v + \lambda uv)dx, \text{ para todo } \quad u, v \in E_\Omega.$$

Desde que o nosso interesse é o de encontrar soluções positivas de (B), nesta seção assumimos que $f(t) = 0$ quando $t \leq 0$. O ponto crítico associado ao funcional de classe de $C^1$, $I_\Omega : E_\Omega \to \mathbb{R}$ dado por

$$I_\Omega(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla u|^2 + \lambda u^2)dx - \int_\Omega F(u)dx,$$

são precisamente as soluções fraca de (B). Se $u$ denota essa solução, então

$$\begin{aligned}
0 = I'_\Omega(u)u^- &= \int_\Omega \left(\nabla u \nabla u^- + \lambda u u^-\right) dx - \int_\Omega f(u)u^- dx \\
&= \int_\Omega \left(\nabla(u^+ + u^-)\nabla(u^-) + \lambda(u^+ + u^-)u^-\right) dx - \int_\Omega f(u^+ + u^-)u^- dx \\
&= \int_\Omega \left(|\nabla(u^-)|^2 + \lambda(u^-)^2\right) dx + \int_\Omega f(u^-)u^- dx \\
&= \|u^-\|^2_\Omega.
\end{aligned} \tag{B.1}$$

Logo $u^- \equiv 0$, implicando que

$$u = u^+ + u^- = u^+ \geq 0.$$

Desde que $f(u) \geqslant 0$ em (B), podemos aplicar o Principio do Máximo Forte (ver Teorema 6 do Capítulo 2) e concluir que $u > 0$ em $\Omega$.

Assumindo que $(f_1), (f_3)$ e $(f_4)$ são satisfeitas, podemos mostrar que $I_\Omega$ satisfaz as hipóteses geométricas do Teorema do Passo da Montanha (ver Teorema 5 do Capítulo 2).

**Lema 12** *Assumindo que $(f_1), (f_3)$ e $(f_4)$ são satisfeitas. Então existem números positivos $b, \rho$ e $e \in E_\Omega$ tal que*

(1) $I_\Omega(u) \geq b$, *para todo* $u \in E_\Omega$ *tal que* $\|u\|_\Omega = \rho$;

(2) $\|e\|_\Omega > \rho$ *e* $I_\Omega(e) < 0$.

*Demonstração.* Por $(f_1), (f_3)$ e $(f_4)$, dado $\epsilon \in (0, \lambda)$ e $q \in (2, 2^*)$, onde $2^* = \frac{2N}{N-2}$; existe uma constante $c(\epsilon)$ tal que

$$|f(t)| \leqslant \epsilon|t| + c(\epsilon)|t|^{q-1} \ \ e \ \ |F(t)| \leqslant \frac{\epsilon}{2}|t|^2 + \frac{c(\epsilon)}{q}|t|^q, \forall t \in \mathbb{R}. \tag{B.2}$$

Assim, para todo $u \in E_\Omega$, temos pelas imersões contínuas de Sobolev que

$$\begin{aligned}\int_\Omega F(u)dx &\leqslant \frac{\epsilon}{2}\int_\Omega u^2dx + \frac{c(\epsilon)}{q}\int_\Omega u^q dx\\ &= \frac{\epsilon}{2}|u|^2_{L^2} + \frac{c(\epsilon)}{q}|u|^q_{L^q}dx\\ &\leqslant d\left(\frac{\epsilon}{2}\|u\|^2_\Omega + \frac{c(\epsilon)}{q}\|u\|^q_\Omega\right)\\ &\leqslant d\|u\|^2_\Omega\left(\frac{\epsilon}{2} + \frac{c(\epsilon)}{q}\|u\|^{q-2}_\Omega\right).\end{aligned}$$

Tomando $\|u\|_\Omega = \left(\frac{q.\epsilon}{2c(\epsilon)}\right)^{\frac{1}{q-2}}$, temos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega F(u)dx &\leqslant d\|u\|^2_\Omega\left(\frac{\epsilon}{2} + \frac{c(\epsilon)}{q}\|u\|^{q-2}_\Omega\right)\\ &= d.\epsilon.\|u|^2_\Omega.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}I_\Omega(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega\left(|\nabla u|^2 + \lambda u^2\right)dx - \int_\Omega F(u)dx\\ &\geqslant \frac{1}{2}\int_\Omega\left(|\nabla u|^2 + \lambda u^2\right)dx - \epsilon d\int_\Omega\left(|\nabla u|^2 + \lambda u^2\right)dx\\ &= \left(\frac{1}{2} - \epsilon d\right)\|u|^2_\Omega,\end{aligned}$$

e tomando $\epsilon$ de modo que $\frac{1}{2} - \epsilon d > 0$, se $\|u\| = \rho$, temos que $I_\Omega(u) \geqslant b$ onde $b = \rho^2\left(\frac{1}{2} - \epsilon d\right)$. Isso prova (1).

(2) Seja $u_0$ uma solução positiva e radial de

$$(C) \qquad \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f(u), \text{ em } \mathbb{R}^N\\ u(x) \to 0, \ |x| \to +\infty,\end{cases}$$

e a função

$$v_\sigma(x) = u_0\left(\frac{x}{\sigma}\right) \ \ para \ \ \sigma > 0.$$

Para $\sigma > 0$ temos que

$$\|v_\sigma\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla(v_\sigma(x))|^2 + \lambda v_\sigma(x)^2\right)dx = \int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla u_0\left(\frac{x}{\sigma}\right)|^2 + \lambda u_0\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2\right)dx.$$

Fazendo a mudança de variável $z = \frac{x}{\sigma}$, pelo teorema de mudança de variável, temos que

$$\|v_\sigma\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\sigma^N}{\sigma^2} |\nabla(u_0(z))|^2 dz + \lambda \sigma^N \int_{\mathbb{R}^N} u_0(z)^2 dz,$$

ou seja,

$$\|v_\sigma\|^2 = \sigma^{N-2} |\nabla u_0|_{L^2}^2 + \sigma^N \lambda |u_0|_{L^2}^2.$$

Com a mudança feita acima obtemos que

$$\begin{aligned} I(v_\sigma) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla(v_\sigma)|^2 + \lambda v_\sigma^2) dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(v_\sigma) dx \\ &= \frac{\sigma^{N-2}}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^2 dx - \sigma^N \int_{\mathbb{R}^N} \left( -\frac{\lambda}{2} u_0^2 - F(u_0) \right) dx. \end{aligned}$$

Desde que $u_0$ é solução do problema (C), temos que $u_0$ satisfaz a identidade de Pohozaev. Logo

$$2N \int_{\mathbb{R}^N} \left( -\frac{\lambda}{2} u_0^2 - F(u_0) \right) dx = (N-2) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^2 dx,$$

o que implica que

$$2N \int_{\mathbb{R}^N} \left( -\frac{\lambda}{2} u_0^2 - F(u_0) \right) dx > 0$$

e então que

$$I(v_\sigma) \to -\infty, \quad \text{quando } \sigma \to +\infty.$$

Seja $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ uma função radial crescente tal que $\varphi(x) = 0$, para $|x| \leqslant R$ e $\varphi(x) = 1$, quando $|x| \geqslant R$ e $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$. Recordando que $\Omega = \mathbb{R}^N \setminus B_{R(0)}$, podemos escrever

$$I_\Omega(\phi v_\sigma) = I_\Omega(v_\sigma) + I_{B_{2R(0)} \setminus B_{R(0)}}(v_\sigma) - I_{B_{2R(0)}}(v_\sigma), \tag{B.3}$$

onde

$$I_{B_{2R(0)}}(v_\sigma) = \frac{1}{2} \int_{B_{2R(0)}} (|\nabla v_\sigma|^2 + \lambda v_\sigma^2) dx - \int_{B_{2R(0)}} F(v_\sigma) dx$$

e

$$I_{B_{2R(0)}\setminus B_{R(0)}}(\phi v_\sigma) = \frac{1}{2}\int_{B_{2R(0)}\setminus B_{R(0)}} (|\nabla \phi v_\sigma|^2 + \lambda \phi v_\sigma^2)dx - \int_{B_{2R(0)}\setminus B_{R(0)}} F(\phi v_\sigma)dx.$$

Observe que

$$I_{B_{2R(0)}}(v_\sigma) \text{ e } I_{B_{2R(0)}\setminus B_{R(0)}}(\phi v_\sigma) \text{ são uniformemente limitadas quando } \sigma \geqslant \sigma_0. \tag{B.4}$$

Se $(B.4)$ verifica, então combinando (B.3)- $(B.4)$, temos $\sigma_0 > 1$ suficientemente grande tal que $I_\Omega(\phi v_\sigma) < 0$ para $\sigma > \sigma_0$.

Tomando $e = \phi v_\sigma$, note que $e \in E_\Omega$ e $\|e\|^2 \geqslant \sigma^{N-2}\ \|u_0\|^2$. Assim podemos supor que $\|e\|^2 > \rho$, com $\rho$ dado na prova de (1). Portanto, $I_\Omega(\phi v_\sigma) < 0$ e $\|e\|^2 > \rho$ , e (2) estaria provado.

Verifiquemos então $(B.4)$.

Pela definição de $v_\sigma$, como $u_0(0) = \max\limits_{\mathbb{R}^N} u_0$, temos que

$$|v_\sigma(x)| \leqslant |u_0(0)| \text{ e } |\nabla(v_\sigma(x))| \leqslant \frac{C}{\sigma}, \forall x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

para alguma constante positiva C.

Assim, podemos supor aumentando $\sigma_0$ se necessário que $\frac{C}{\sigma_0} < 1$. Consequentemente,

$$\int_{B_{2R(0)}} \left(|\nabla v_\sigma|^2 + \lambda v_\sigma^2\right) dx \leqslant \left(1 + \lambda u_0^2(0)\right) |B_{2R(0)}|.$$

Desde que $0 \leqslant v_\sigma(x) \leqslant u_0(0)$ e $F$ é contínua, existe $M > 0$ tal que

$$\left|\int_{B_{2R(0)}} F(v_\sigma)dx\right| \leqslant M|B_{2R(0)}|.$$

Analogamente,

$$|\phi v_\sigma(x)| \leqslant u_0(0) \ \ e \ \ |\nabla(\phi v_\sigma(x))| \leqslant C(R), \forall x \in \mathbb{R}^N$$

para alguma constante positiva $C(R)$. Assim existe uma constante $C(R)$ positiva tal que

$$|I_{B_{2R(0)}}(v_\sigma)| \leqslant C(R) \ \ e \ \ |I_{B_{2R(0)}\setminus B_{R(0)}}(\phi v_\sigma)| \leqslant C(R),$$

uniformemente em $\sigma$, e a prova do lema está completa.

■

Pelo Teorema do Passo da Montanha, existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ uma sequência de Cerami no nível $C_\Omega$, isto é,

$$I_\Omega \to C_\Omega \;\; e \;\; \|I'_\Omega(u_n)\|_{E_\Omega^{-1}} (1 + \|u\|_\Omega) \to 0,$$

onde

$$C_\Omega = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I_\Omega(\Gamma(t)), \;\; \text{e} \;\; \Gamma = \{\gamma \in C\left([0,1], X\right); \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}.$$

Como $E_\Omega$ está imerso compactamente em $L^P(\Omega)$, para $2 < p < 2^*$, segue que $I_\Omega$ satisfaz a condição de Cerami e, assim $u_n \to u$ em $E_\Omega$ a menos de subsequência.

Logo $u \in E_\Omega$ é solução positiva de (4) tal que $I_\Omega(u) = C_\Omega > 0$ e, portanto, não-trivial.

# Referências Bibliográficas


[1] G. Li , G.F. Zheng. The existence of positive solution to some asymptocally linear elliptic equations in exterior domains. *Revista Matemática Iberoamericana*, 2006.

[2] K. C. Barroso. Existência de soluções homoclínicas para uma classe de sistemas hamiltonianos. Master's thesis, Universidade Federal de Campina Grande centro de ciências e Tecnologia Programa de Pós- Graduação em Matematíca, 2011.

[3] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* Springer Science & Business Media, 2010.

[4] A. Castro ; J. Cossio ; J. M. Neuberger . A sign-changing solution for a superlinear dirichlet problem. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 27(4):1041–1053, 1997.

[5] L. C. Evans. *Partial differential equations.* Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, Providence (R.I.), 1998.

[6] F. Gladiali ; F. Pacella; T. Weth. Symmetry and nonexistence of low morse index solutions in unbounded domains. *Journal de Mathematiques Pures et Appliquees*, 93(5):536 – 558, 2010.

[7] P. L. Lions. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. the locally compact case, part 2. *Annales de l'I.H.P. Analyse non linéaire*, 1(4):223–283, 1984.

[8] L. A. Maia ; O. H. Miyagaki ; S. H. M. Soares. A sign-changing solution for an asymptotically linear schrödinger equation. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 58(3):697–716, 2015.

[9] C. Miranda. *Un'osservazione su un teorema di Brauwer.* stituto per le applicazioni del calcolo, 1940.

[10] M. Willem. *Minimax theorems.* Number 24. Springer Science and Business Media, 1996.