



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

Câmpus de São José do Rio Preto

Carolinne Stefane de Souza

Existência de soluções periódicas e permanência de soluções
de equações diferenciais funcionais com retardo

São José do Rio Preto
2018

Carolinne Stefane de Souza

Existência de soluções periódicas e permanência de soluções
de equações diferenciais funcionais com retardo

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientadora: Profa. Dra. Suzete Maria Silva Afonso

São José do Rio Preto
2018

Souza, Carolinne Stefane de.

Existência de soluções periódicas e permanência de soluções de equações diferenciais funcionais com retardo / Carolinne Stefane de Souza . -- São José do Rio Preto, 2018

125 f. : il.

Orientador: Suzete Maria Silva Afonso

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Equações diferenciais. 3. Equações com retardamento.
I. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. II. Título.

CDU – 517.91

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Carolinne Stefane de Souza

Existência de soluções periódicas e permanência de soluções
de equações diferenciais funcionais com retardo

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Comissão Examinadora

Profa. Dra. Suzete Maria Silva Afonso
Orientadora

Prof. Dr. André Luiz Furtado
Instituto de Matemática e Estatística- UERJ/Rio de Janeiro

Profa. Dra. Renata Zotin Gomes de Oliveira
Departamento de Matemática - IGCE/UNESP/Rio Claro

São José do Rio Preto
16 de fevereiro de 2018

Aos meus pais, Angela e Geraldo.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus, por toda benção, saúde, coragem e perseverança para que eu pudesse concluir este trabalho.

Aos meus pais, Angela M. C. de Souza e Geraldo C. de Souza, e ao meu padrinho Tarciso Conceição, por todo apoio, incentivo, educação, amor, carinho e sacrifício que me forneceram em toda essa jornada.

À minha avó Odette S. Cassimiro, por sempre rezar e pedir que eu concluísse essa etapa e obtivesse sucesso em minha vida. Ao meu avô Mário Cassimiro, *in memoriam*, por ter me aturado quando criança dando aulas de Matemática a ele todos os dias.

À Profa. Dra. Suzete Maria Silva Afonso, pelos três anos de orientação (graduação e mestrado), pela amizade, apoio, incentivo, paciência, dedicação e por sempre confiar que eu podia mais.

A todos os meus amigos e professores da Unesp que de alguma forma me ajudaram tanto na graduação quanto no mestrado, pelas conversas, pelos puxões de orelha, pelos apoios e por aumentar minha autoestima quando eu necessitava.

À minha família que de algum modo me apoiou, especialmente à minha prima Emely A. Souza, que teve de aguentar minhas paranoias, meus medos, mas sempre me ajudou como pôde, à Maria H. Xavier e ao Rubens Xavier por todo apoio, podendo contar sempre que eu precisasse.

E, por fim, à Capes, pelo auxílio financeiro, sem o qual não seria possível concluir este trabalho.

“Sim, eu me faço de forte, mas já chorei no meu quarto, em silêncio, a porta fechada, travesseiro no rosto, chorei por dentro, sofri. Mas sabe o que tudo isso resultou; nada, é preciso aprender a crescer, viver, ser “gente grande” e enfrentar os próprios problemas.”

Dom Casmurro - Machado de Assis

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo principal investigar condições que garantam a existência de soluções periódicas para certos tipos de equações diferenciais funcionais com retardamento e condições que garantam a permanência das soluções dessas equações. A teoria do grau coincidente será a principal ferramenta utilizada para obter os resultados referentes à existência de solução periódica. Por essa razão, uma atenção especial a essa teoria será dada nos primeiros capítulos. Resultados inéditos sobre permanência de soluções serão exibidos no último capítulo e ilustrados com exemplos numéricos.

Palavras-chave: Teoria do grau, Teorema da Continuação de Mawhin, Soluções periódicas, Permanência de soluções, Equações diferenciais funcionais com retardamento.

ABSTRACT

The main objective of this work is to investigate conditions that guarantee the existence of periodic solutions to certain types of functional differential equations with delay and conditions that guarantee the permanence of the solutions of those equations. The coincidence degree theory will be the main tool used to obtain the results concerning the existence of periodic solution. For that reason, a special attention to that theory will be given in the first chapters. New results on the permanence of solutions will be shown in the last chapter and illustrated with numerical examples.

Keywords: Theory of degree, Mawhin's Continuation Theorem, Periodic solutions, Permanence of solutions, Functional differential equations with delay.

Lista de Figuras

5.1 Exemplo 5.6	86
5.2 Exemplo 5.7	87
5.3 Os três tipos de resposta funcional propostos por Holling.	89

Lista de Símbolos

\mathbb{R} intervalo $(-\infty, \infty)$

$|\mu|$ módulo do número μ

\langle , \rangle produto interno usual em \mathbb{R}^n

$\|\cdot\|$ norma exibida em cada capítulo

\sim relação de equivalência exibida quando necessária

\approx aproximadamente igual

\simeq indica isomorfismo

$\det M$ determinante da matriz quadrada M

$\text{dist}(a, b)$ distância do ponto a ao ponto b com a métrica escolhida

$\text{dist}(b, A)$ ínfimo do conjunto $\{\text{dist}(a, b); a \in A\}$

$\text{dist}(A, B)$ ínfimo do conjunto $\{\text{dist}(a, b); a \in A, b \in B\}$

$\text{int } A$ interior do conjunto A

\bar{A} fecho do conjunto A

∂A fronteira do conjunto A

C_b componente conexa que contém o ponto b

$A \setminus B$ $\{x \in A; x \notin B\}$

$B(a, r)$ $\{b \in A; \text{dist}(a, b) < r\}$, onde $r > 0$

B_r $\{a \in A; \text{dist}(a, 0) < r\}$, onde $r > 0$

S^n $\{a \in \mathbb{R}^{n+1}; \text{dist}(a, 0) = 1\}$

$C^k(A, B)$ espaço das funções $f : A \rightarrow B$ k -vezes diferenciáveis, com $k > 0$

$C(A, B)$ espaço das funções $f : A \rightarrow B$ contínuas

$C^k(A)$ espaço das funções $f : A \rightarrow B$ k -vezes diferenciáveis, onde $A \subset B$ e $k > 0$

$C(A)$ espaço das funções $f : A \rightarrow B$ contínuas, onde $A \subset B$

$D^{(j)}f$ derivada de ordem j da função $f \in C^k(A)$, com $A \subset \mathbb{R}^n$ e $0 \leq j \leq k$

$J_f[x]$ matriz Jacobiana da função f no ponto x

S_f $\{x \in A; \det J_f[x] = 0\}$, onde $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $A \subset \mathbb{R}^n$

C $\{f \in C(A, B); |f(t)| \leq c, t \in A, \text{ para algum } c > 0\}$, onde $A, B \subset \mathbb{R}$

C_+ $\{f \in C(\mathbb{R}, [0, \infty)); |f(t)| \leq c, t \in \mathbb{R}, \text{ para algum } c > 0\}$

C_ω^+ $\{f \in C(\mathbb{R}, [0, \infty)); f(t + \omega) = f(t), t \in \mathbb{R}\}$, com $\omega > 0$

\mathbb{N}_ω $\{f \in C_\omega^+; f \equiv m\omega, \text{ para algum } m \in \mathbb{N}\}$, com $\omega > 0$

$f|_A$ restrição da função $f : B \rightarrow D$, com $A \subset B$

Id função identidade $Id : A \rightarrow A$

sgn função $\text{sgn} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \{-1, 1\}$ definida por $\text{sgn } t = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$

$\delta_{i,j}$ função $\delta_{i,j} : A \rightarrow \{0, 1\}$ definida por $\delta_{i,j}(a) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$

m_f ínfimo do conjunto $\{|f(t)|; t \in \mathbb{R}\}$

M_f supremo do conjunto $\{|f(t)|; t \in \mathbb{R}\}$

\bar{f} número $\frac{1}{\omega} \int_0^\omega f(t)dt$, com $\omega > 0$

$[x_1, \dots, x_n]$ subespaço gerado pelo conjunto $\{x_1, \dots, x_n\}$

$\dim Y$ número de elementos da base do espaço Y

$\text{codim } Y$ número $\dim Z - \dim Y$, onde Y é um subespaço de Z

$A + B$ $\{a + b; a \in A, b \in B\}$

$A \oplus B$ conjunto $A + B$ tal que $A \cap B = \{0\}$, em que A e B são subespaços de um espaço vetorial

$Q(A, B)$ espaço dos operadores compactos $f : A \rightarrow B$

$Q(A)$ espaço dos operadores compactos $f : A \longrightarrow B$, onde $A \subset B$

$\text{dom } T$ espaço onde o operador $T : \text{dom } T \longrightarrow Z$ está definido

$\text{Ker } T = \{x \in X; Tx = 0\}$, onde $T : \text{dom } T \longrightarrow Z$

$\text{Im } T = \{Tx \in Z; x \in \text{dom } T\}$, onde $T : \text{dom } T \longrightarrow Z$

Sumário

Introdução	14
1 Teoria do grau de Brouwer	16
1.1 Definição do grau de Brouwer para funções diferenciáveis	16
1.1.1 Propriedades do grau de Brouwer para funções diferenciáveis	18
1.2 Definição do grau de Brouwer para funções contínuas	22
1.2.1 Propriedades principais do grau de Brouwer	24
1.2.2 Consequências das propriedades principais do grau de Brouwer	25
2 Teoria do grau de Leray-Schauder	29
2.1 Definição do grau de Leray-Schauder	29
2.2 Propriedades do grau de Leray-Schauder	32
3 Grau de coincidência para perturbações de operadores de Fredholm	35
3.1 Preliminares algébricas	35
3.2 Definição do grau de coincidência para perturbações de operadores de Fredholm	41
3.3 Propriedades do grau coincidente de L e N em Ω	47
3.4 Teorema de Continuação de Mawhin	51
4 Existência de soluções periódicas	55
4.1 Modelo de moscas-varejeiras de Nicholson com retardo	56
4.1.1 Introdução ao modelo	56
4.1.2 Existência de soluções periódicas	58
4.1.3 Exemplos	69
4.2 Um tipo de equação diferencial de terceira ordem com retardo	69
4.2.1 Introdução ao modelo	70
4.2.2 Existência de soluções periódicas	70
4.2.3 Exemplos	77

5 Permanência de soluções	79
5.1 Modelo de moscas-varejeiras de Nicholson com retardo	80
5.1.1 Introdução ao modelo	80
5.1.2 Permanência de soluções	82
5.1.3 Exemplos	86
5.2 Modelo predador-presa	87
5.2.1 Introdução ao modelo	88
5.2.2 Preliminares	91
5.2.3 Permanência de soluções	97
5.3 Aplicações e exemplos numéricos	101
Conclusão	105
Referências	106
A Conceitos e resultados de Álgebra Linear e Análise Funcional	110
A.1 Espaços vetoriais normados	110
A.2 Operadores lineares	111
A.2.1 Operadores limitados	112
A.2.2 Operadores compactos	114
B Conceitos e resultados de Análise e Topologia	118
B.1 Espaços topológicos	118
B.2 Conjuntos conexos e conexos por caminhos	119
B.3 Resultados sobre aplicações contínuas e diferenciáveis	120
B.4 Integrais reais	122
B.5 Sequências de funções	123

Introdução

“Nos últimos anos, as equações diferenciais funcionais com retardo têm sido objeto de intensa pesquisa. Isto se deve a duas razões principais. Uma delas consiste na grande utilidade de tais equações na modelagem de diversos fenômenos que ocorrem nas mais diversas áreas do conhecimento como, por exemplo, dinâmica populacional, engenharia, física, química, medicina e economia. Além disso, o estudo de tais equações é fortemente motivado pelo interesse intrinsecamente matemático que possuem.

As equações diferenciais ordinárias e parciais estão consolidadas como eficazes modelos matemáticos de numerosos fenômenos reais. Tais equações são poderosas representações teóricas de processos de evolução em que a taxa de variação do estado do processo em cada instante t depende do estado do processo nesse instante. No entanto, existe uma grande quantidade de fenômenos reais em que a taxa de variação do estado em cada instante depende, não somente do estado do processo nesse instante, mas também do histórico de estados do fenômeno. Dessa forma, para tais casos, as equações diferenciais ordinárias e parciais não se apresentam como os modelos mais convenientes e faz-se necessário a utilização de outras ferramentas teóricas que descrevam tais fenômenos de forma mais realista. Tais ferramentas são as equações diferenciais funcionais com retardo.” (Furtado, A. L., [18])

Estamos interessados, neste trabalho, em estabelecer condições para garantir a existência de solução periódica e a permanência de soluções para determinados tipos de equações diferenciais funcionais com retardo. Para obtermos os resultados referentes à existência de solução periódica, utilizamos a teoria do grau coincidente, à qual destinamos os primeiros capítulos do trabalho, pelas suas complexidade e beleza matemática.

O texto está organizado da seguinte forma: no Capítulo [1](#), fazemos uma introdução à teoria do grau de Brouwer, exibindo as principais propriedades do grau de Brouwer e algumas de suas importantes consequências, tais como o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, o Teorema de Borsuk e o Teorema de Borsuk-Ulam. O Capítulo [2](#) está dedicado à teoria do grau de Leray-Schauder. Exibimos as principais propriedades do

grau de Leray-Schauder e uma de suas consequências, a saber, o Teorema do Ponto Fixo de Schaeffer. No Capítulo [3](#), desenvolvemos a teoria do grau de coincidência para perturbações de operadores de Fredholm e demonstramos o Teorema de Continuação de Mawhin, que foi a ferramenta principal para a obtenção dos resultados do Capítulo [4](#). No Capítulo [4](#), estabelecemos condições que garantem a existência de soluções periódicas para dois modelos específicos envolvendo equações diferenciais funcionais com retardo, a saber, o modelo de moscas-varejeiras de Nicholson com retardo e um tipo de equação diferencial de terceira ordem com retardo. No Capítulo [5](#), a questão da permanência de solução para certos tipos de equações diferenciais funcionais com retardo é analisada. Neste capítulo também estudamos dois modelos: o modelo de moscas-varejeiras de Nicholson com retardo e o modelo predador-presa dependente da razão com retardo e um tipo de resposta funcional.

Nos Apêndices [A](#) e [B](#), recordamos alguns conceitos e resultados de Álgebra Linear, Análise Funcional, Topologia e Análise que foram mencionados e utilizados ao longo do texto.

A maioria dos resultados presentes nos Capítulos [1](#) e [2](#) podem ser encontrados nos nossos trabalhos de divulgação [4](#) e [6](#). Os resultados provados no Capítulo [4](#) estão presentes nos nossos trabalhos [5](#) e [7](#). Por fim, destacamos que o Capítulo [5](#), Seção [5.1](#), apresenta resultados novos para a literatura, os quais estão presentes em [3](#).

É de grande valia mencionar que este trabalho teve como inspiração as referências [1](#), [11](#), [13](#), [15](#), [18](#), [20](#), [34](#), [35](#), [45](#), [46](#) e [47](#).

1 Teoria do grau de Brouwer

O grau de Brouwer é definido para espaços de dimensão finita. Por este motivo, consideraremos, aqui, funções definidas em um subconjunto do espaço euclidiano \mathbb{R}^n tomando valores em \mathbb{R}^n . Consideraremos \mathbb{R}^n munido da norma euclidiana $\|\cdot\|$.

Este capítulo teve como referência principal a tese de Doutorado de Berestycki ([10]), intitulada “*Méthodes Topologiques et Problèmes Aux Limites non Linéaires*”, defendida em 1975, na Universidade de Paris. Os trabalhos [8, 37] auxiliaram na elaboração do mesmo.

Observamos que todas as notações utilizadas ao longo deste capítulo e do trabalho estão descritas na lista de símbolos. Portanto, quando alguma notação não estiver especificada, sugerimos ao leitor que consulte tal lista.

1.1 Definição do grau de Brouwer para funções diferenciáveis

Consideraremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto limitado e $C^k(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ o espaço das funções $\varphi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ que são k -vezes continuamente diferenciáveis, isto é, φ e todas as suas derivadas até a ordem k são contínuas em $\bar{\Omega}$. Denotaremos por $J_\varphi[x]$ a matriz Jacobiana de φ no ponto $x \in \bar{\Omega}$.

Para facilitarmos a notação, denotaremos o espaço $C^k(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ por $C^k(\bar{\Omega})$.

No espaço $C^k(\bar{\Omega})$, usaremos a seguinte norma:

$$\|\varphi\|_{C^k(\bar{\Omega})} = \max\{C_j; 0 \leq j \leq k\},$$

em que

$$C_j = \sup\{\|D^{(j)}\varphi(x)\|; x \in \bar{\Omega}\}$$

e $D^{(j)}\varphi$ representa a derivada de ordem j de φ .

Proposição 1.1. *Sejam $\varphi \in C^1(\bar{\Omega})$ e $S_\varphi = \{x \in \bar{\Omega}; \det J_\varphi[x] = 0\}$. Se $b \notin \varphi(\partial\Omega \cup S_\varphi)$, então o conjunto $\{x \in \bar{\Omega}; \varphi(x) = b\}$ é finito.*

Demonstração. Se $\varphi^{-1}(b) = \emptyset$, nada temos a fazer.

Suponhamos, então, $\varphi^{-1}(b) \neq \emptyset$. Dado $x \in \varphi^{-1}(b)$, temos $J_\varphi[x] \neq 0$, pois $b \notin \varphi(S_\varphi)$.

Pelo Teorema da Função Inversa (Teorema [B.21](#)), existe um aberto O_x contendo x , tal que $\varphi|_{O_x}$ é um difeomorfismo entre O_x e $\varphi(O_x)$, com $b \in \varphi(O_x)$.

Como φ é contínua e $\{b\} \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto fechado, segue que $\varphi^{-1}(b)$ é um conjunto fechado em $\bar{\Omega}$. Mas $\bar{\Omega}$ é compacto (fechado e limitado em \mathbb{R}^n), portanto $\varphi^{-1}(b)$ é compacto.

Uma vez que

$$\varphi^{-1}(b) \subseteq \bigcup_{x \in \varphi^{-1}(b)} O_x,$$

existem $x_1, \dots, x_n \in \varphi^{-1}(b)$, de forma que

$$\varphi^{-1}(b) \subseteq \bigcup_{i=1}^n O_{x_i}.$$

Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, segue que $\varphi|_{O_{x_i}} : O_{x_i} \rightarrow \varphi(O_{x_i})$ é um difeomorfismo, ou seja, existe um único $x_i \in O_{x_i}$ tal que $\varphi(x_i) = b$, o que implica $\varphi^{-1}(b) = \{x_1, \dots, x_n\}$. \square

Definição 1.2. *Sejam $\varphi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 e $b \notin \varphi(\partial\Omega \cup S_\varphi)$. O grau de Brouwer de φ em Ω relativamente a b , denotado por $\deg(\varphi, \Omega, b)$, é definido por*

$$\deg(\varphi, \Omega, b) = \sum_{x \in \varphi^{-1}(b)} \text{sgn}(\det J_\varphi[x]).$$

Exemplo 1.3. *Considere a função $\varphi : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $\varphi(x) = \cos x$ para $x \in (0, \pi)$, e seja $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$.*

Temos $\varphi'(x) = -\text{sen } x$, $\varphi^{-1}(b) = \{\frac{\pi}{4}\}$ e $J_\varphi[\frac{\pi}{4}] = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Note que $b \notin \varphi(\partial\Omega \cup S_\varphi)$, uma vez que $\partial\Omega = S_\varphi = \{0, \pi\}$. Portanto,

$$\deg\left(\varphi, \Omega, \frac{\pi}{4}\right) = -1.$$

Observação 1.4. *Se $b \notin \varphi(\bar{\Omega})$, então definimos $\deg(\varphi, \Omega, b) = 0$.*

Observação 1.5. *Note que $\deg(\varphi, \Omega, b) = \deg(\varphi - b, \Omega, 0)$.*

De fato, sejam $\psi = \varphi - b$ e $x \in \varphi^{-1}(b)$. Temos

$$x \in \varphi^{-1}(b) \iff \varphi(x) = b \iff \varphi(x) - b = 0 \iff \psi(x) = 0 \iff x \in \psi^{-1}(0).$$

Além disso, $J_\varphi[x] = J_\psi[x]$, pois ψ difere de φ por uma constante, a saber b .

O próximo lema afirma que o grau topológico de Brouwer é localmente constante na topologia de $C^1(\bar{\Omega})$.

Lema 1.6 (Lema I.1, [\[10\]](#)). *Se $\varphi \in C^1(\bar{\Omega})$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega \cup S_\varphi)$, então existe uma vizinhança U , na topologia de $C^1(\bar{\Omega})$, de φ tal que, para qualquer $\psi \in U$, tem-se:*

$$b \notin \psi(\partial\Omega \cup S_\psi) \quad e \quad \deg(\varphi, \Omega, b) = \deg(\psi, \Omega, b).$$

1.1.1 Propriedades do grau de Brouwer para funções diferenciáveis

Sejam $\varphi \in C^1(\bar{\Omega})$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega \cup S_\varphi)$. O número $\deg(\varphi, \Omega, b)$ tem as seguintes propriedades:

Propriedade 1.7 (Existência). *Se $\deg(\varphi, \Omega, b) \neq 0$, então existe $x_0 \in \Omega$ tal que $\varphi(x_0) = b$.*

Demonstração. Se supuséssemos que b não pertencesse a $\varphi(\bar{\Omega})$, então não existiria $x_0 \in \bar{\Omega}$ tal que $\varphi(x_0) = b$ e, pela definição de grau (Observação 1.4), teríamos $\deg(\varphi, \Omega, b) = 0$. \square

Para a próxima propriedade, precisaremos definir o conceito de homotopia entre duas aplicações contínuas.

Definição 1.8. *Sejam duas aplicações contínuas $f, g : X \rightarrow Y$ entre espaços topológicos. Diz-se que f e g são homotópicas se existir uma aplicação contínua $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$, chamada homotopia, tal que $H_0 = f$ e $H_1 = g$, onde $H_t = H|_{X \times \{t\}}$.*

Propriedade 1.9 (Invariância do Grau por Homotopia). *Seja $H \in C^1(\bar{\Omega} \times [0, 1], \mathbb{R}^n)$ uma homotopia entre aplicações contínuas. Se $b \notin H((\partial\Omega \times [0, 1]) \cup S_{H_t})$, em que $t \in [0, 1]$ e $S_{H_t} = \{x \in \bar{\Omega}; \det J_{H_t}[x] = 0\}$, então $\deg(H(\cdot, t), \Omega, b)$ é constante, para todo $t \in [0, 1]$.*

Demonstração. Como a homotopia H é contínua e definida em um compacto, segue que H é uniformemente contínua. Assim, para cada $\tau \in [0, 1]$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$t \in [0, 1], |\tau - t| < \delta \Rightarrow \|H(\cdot, t) - H(\cdot, \tau)\|_{C^1(\bar{\Omega})} < \varepsilon.$$

Sendo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, segue do Lema 1.6 que

$$\deg(H(\cdot, t), \Omega, b) = \deg(H(\cdot, \tau), \Omega, b), \quad \text{quando } t \approx \tau.$$

Logo, a aplicação $t \mapsto \deg(H(\cdot, t), \Omega, b)$ é localmente constante. Como $[0, 1]$ é um intervalo, pelo Teorema B.9, podemos concluir que a função $\deg(H(\cdot, t), \Omega, b)$ é constante. \square

Propriedade 1.10 (Aditividade). *Se $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, onde Ω_1 e Ω_2 são subconjuntos abertos e disjuntos de Ω , e $b \notin \varphi((\partial\Omega_1) \cup (\partial\Omega_2))$, então*

$$\deg(\varphi, \Omega, b) = \deg(\varphi, \Omega_1, b) + \deg(\varphi, \Omega_2, b).$$

Demonstração. Seja $x \in \varphi^{-1}(b)$. Como Ω_1 e Ω_2 são disjuntos, sabemos que ou $x \in \Omega_1$ ou $x \in \Omega_2$. Assim,

$$\begin{aligned} \deg(\varphi, \Omega, b) &= \sum_{x \in \varphi^{-1}(b)} \operatorname{sgn}(\det J_\varphi[x]) = \sum_{x \in \varphi^{-1}(b) \cap \Omega_1} \operatorname{sgn}(\det J_\varphi[x]) + \\ &+ \sum_{x \in \varphi^{-1}(b) \cap \Omega_2} \operatorname{sgn}(\det J_\varphi[x]) = \deg(\varphi, \Omega_1, b) + \deg(\varphi, \Omega_2, b). \end{aligned}$$

□

Propriedade 1.11. *O grau é constante em componentes conexas de $\mathbb{R}^n \setminus \varphi(\partial\Omega)$. Ou seja, se b_1 e b_2 estão na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^n \setminus \varphi(\partial\Omega)$ e $b_1, b_2 \notin \varphi(S_\varphi)$, então*

$$\deg(\varphi, \Omega, b_1) = \deg(\varphi, \Omega, b_2).$$

Demonstração. Se provarmos que $\deg(\varphi, \Omega, b_2) = \deg(\varphi - b_1 + b_2, \Omega, b_2)$, o resultado seguirá da Observação [1.5](#).

Considere $\psi = \varphi - b_1 + b_2$ e defina a homotopia $H : \bar{\Omega} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ entre φ e ψ por $H(x, t) = t\psi(x) + (1 - t)\varphi(x)$, para $(x, t) \in \bar{\Omega} \times [0, 1]$.

Afirmamos que $b_2 \notin H((\partial\Omega \times [0, 1]) \cup S_{H_t})$, para todo $t \in [0, 1]$.

Com efeito, para cada $t \in [0, 1]$, $H(\cdot, t)$ difere de φ por uma constante, a saber $t(b_2 - b_1)$. Sendo assim, para todo ponto $(x, t) \in H^{-1}(b_2)$, temos $(x, t) \notin S_{H_t}$.

Sejam $(x_0, t_0) \in \partial\Omega \times [0, 1]$ tal que $H(x_0, t_0) = b_2$. Assim,

$$H(x_0, t_0) = b_2 \iff \varphi(x_0) = (1 - t_0)b_2 + t_0b_1.$$

Como b_1 e b_2 pertencem a mesma componente conexa contida em $\mathbb{R}^n \setminus \varphi(\partial\Omega)$, segue que $\varphi(x_0)$ pertence a essa mesma componente conexa, ou seja, $\varphi(x_0) \notin \varphi(\partial\Omega)$, contradizendo o fato de x_0 pertencer a $\partial\Omega$. Portanto, $b_2 \notin H((\partial\Omega \times [0, 1]) \cup S_{H_t})$.

Consequentemente,

$$\deg(\varphi, \Omega, b_2) = \deg(H(\cdot, 0), \Omega, b_2) = \deg(H(\cdot, 1), \Omega, b_2) = \deg(\psi, \Omega, b_2).$$

□

Propriedade 1.12. *Se $Id : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}$ é a aplicação identidade, então $\deg(Id, \Omega, b) = 1$, para qualquer $b \in \Omega$.*

Demonstração. Como $Id' = Id$, então $J_{Id}[b]$ é a matriz identidade, para todo $b \in \Omega$ e, por conseguinte,

$$\deg(Id, \Omega, b) = \operatorname{sgn}(\det J_{Id}[b]) = 1.$$

□

Propriedade 1.13 (Exclusão). *Se K é fechado, com $K \subset \bar{\Omega}$, e $b \notin \varphi(K)$, então*

$$\deg(\varphi, \Omega, b) = \deg(\varphi, \Omega \setminus K, b).$$

Demonstração. Seja $\Omega_0 = \Omega \setminus K$. Temos dois casos a considerar:

- Se $b \notin \varphi(\Omega)$, consequentemente $b \notin \varphi(\Omega_0)$. Assim,

$$\deg(\varphi, \Omega, b) = 0 = \deg(\varphi, \Omega_0, b).$$

- Se $b \in \varphi(\Omega)$, então $b \in \varphi(\Omega_0)$, já que, por hipótese, $b \notin \varphi(K)$.

Note que $b \notin \varphi(\partial\Omega_0)$, uma vez que $\partial\Omega_0 = \partial K \subset K$. Deste modo,

$$\deg(\varphi, \Omega, b) = \sum_{x \in \varphi^{-1}(b)} \operatorname{sgn}(\det J_\varphi[x]) = \sum_{x \in \varphi^{-1}(b) \cap \Omega_0} \operatorname{sgn}(\det J_\varphi[x]) = \deg(\varphi, \Omega_0, b).$$

□

Como Ω é um subconjunto aberto e limitado de \mathbb{R}^n , $\varphi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua e $\varphi(\partial\Omega)$ é compacto, o conjunto $\mathbb{R}^n \setminus \varphi(\partial\Omega)$ possui uma componente conexa ilimitada K_∞ se $n \geq 2$ e duas componentes conexas ilimitadas se $n = 1$ e, nesse caso, K_∞ denotará a união dessas duas componentes. Consideraremos K_i , $0 \leq i < \infty$, as componentes conexas limitadas de $\mathbb{R}^n \setminus \varphi(\partial\Omega)$. Como as componentes conexas de $\mathbb{R}^n \setminus \varphi(\partial\Omega)$ determinam uma partição de $\mathbb{R}^n \setminus \varphi(\partial\Omega)$, podemos admitir a seguinte igualdade

$$\mathbb{R}^n \setminus \varphi(\partial\Omega) = \bigcup_i K_i \cup K_\infty. \quad (1.1)$$

Estabelecidas as notações preliminares, provaremos a seguinte propriedade:

Propriedade 1.14 (Produto). *Se $\varphi \in C^1(\bar{\Omega})$, $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $b \notin f\varphi(\partial\Omega \cup S_{f\varphi})$ e $K_i, i \in \mathbb{N}$, são componentes conexas limitadas de $\mathbb{R}^n \setminus \varphi(\partial\Omega)$, então*

$$\deg(f\varphi, \Omega, b) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \deg(\varphi, \Omega, b_i) \deg(f, K_i, b), \quad (1.2)$$

em que $b_i \in K_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Inicialmente, verificaremos que a soma no lado direito da equação (1.2) é finita e, portanto, bem definida.

Seja $r > 0$ tal que $\varphi(\bar{\Omega}) \subset B_r$ e consideremos o conjunto compacto $M = \bar{B}_r \cap f^{-1}(b)$ contido em $\mathbb{R}^n \setminus \varphi(\partial\Omega)$.

Por (1.1), o conjunto

$$\bigcup_i K_i \cup [K_\infty \cap B_{r+1}]$$

constitui uma cobertura de conjuntos abertos, conexos e limitados para M .

Do fato de M ser compacto, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$M \subset \bigcup_{i=1}^{p+1} K_i,$$

em que $K_{p+1} = K_\infty \cap B_{r+1}$.

Como $\varphi(\bar{\Omega})$ é limitado, podemos deduzir que K_∞ contém pontos \tilde{b} que não pertencem a $\varphi(\bar{\Omega})$. Em tais pontos, temos $\deg(\varphi, \Omega, \tilde{b}) = 0$. Como o grau é constante em componentes conexas, podemos afirmar que $\deg(\varphi, \Omega, b_i) = \deg(\varphi, \Omega, \tilde{b}) = 0$, para todo $b_i \in K_i$, com $i = p + 1$. Além disso, $\deg(f, K_i, b) = 0$ para $i = p + 1$, uma vez que $f^{-1}(b) \cap K_{p+1} = \emptyset$. Portanto, podemos inferir que a soma no lado direito da equação (1.2) é finita.

Provemos agora que a igualdade (1.2) ocorre. Com efeito,

$$\begin{aligned} \deg(f\varphi, \Omega, b) &= \sum_{x \in (f\varphi)^{-1}(b)} \operatorname{sgn}(\det J_{f\varphi}[x]) = \sum_{x \in (f\varphi)^{-1}(b)} \operatorname{sgn}(\det J_f[\varphi(x)]) \operatorname{sgn}(\det J_\varphi[x]) = \\ &= \sum_{y \in f^{-1}(b) \cap \varphi(\Omega)} \operatorname{sgn}(\det J_f[y]) \left(\sum_{x \in \varphi^{-1}(y)} \operatorname{sgn}(\det J_\varphi[x]) \right) = \\ &= \sum_{y \in f^{-1}(b) \cap \varphi(\Omega)} \operatorname{sgn}(\det J_f[y]) \deg(\varphi, \Omega, y). \end{aligned}$$

Agora, na última soma, podemos substituir $y \in \varphi(\Omega)$ por $y \in \bar{B}_r \setminus \varphi(\partial\Omega)$, uma vez que $\deg(\varphi, \Omega, y) = 0$ se $y \notin \varphi(\Omega)$. Dessa forma, obtemos

$$\begin{aligned} \deg(f\varphi, \Omega, b) &= \sum_{i=1}^p \sum_{y \in f^{-1}(b) \cap K_i} \operatorname{sgn}(\det J_f[y]) \deg(\varphi, \Omega, y) = \\ &= \sum_{i=1}^p \deg(\varphi, \Omega, b_i) \left(\sum_{y \in f^{-1}(b) \cap K_i} \operatorname{sgn}(\det J_f[y]) \right) = \sum_{i=1}^p \deg(\varphi, \Omega, b_i) \deg(f, K_i, b). \end{aligned}$$

□

Propriedade 1.15. *Se $\varphi \in C^1(\bar{\Omega})$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow U$ é uma aplicação linear bijetora, onde $U \subset \mathbb{R}^n$, então $f\varphi : \bar{\Omega} \rightarrow U$ é continuamente diferenciável e $\deg(f\varphi, \Omega, 0) = \operatorname{sgn}(\det f) \deg(\varphi, \Omega, 0)$.*

Demonstração. Como \mathbb{R}^n possui dimensão finita, segue que f é contínua e, mais ainda, continuamente diferenciável, visto que f é linear.

Do fato de f ser bijetora e linear, vale que $(f\varphi)(x) = 0$ se, e somente se, $\varphi(x) = 0$. Logo,

$$\deg(f\varphi, \Omega, 0) = \sum_{x \in (f\varphi)^{-1}(0)} \operatorname{sgn}(\det J_{f\varphi}[x]) = \sum_{x \in (f\varphi)^{-1}(0)} \operatorname{sgn}(\det J_f[\varphi(x)]) \operatorname{sgn}(\det J_\varphi[x]) =$$

$$= \operatorname{sgn}(\det f) \sum_{x \in \varphi^{-1}(0)} \operatorname{sgn}(J_\varphi[x]) = \operatorname{sgn}(\det f) \operatorname{deg}(\varphi, \Omega, 0).$$

□

Até agora, definimos o grau de Brouwer para $b \notin \varphi(\partial\Omega \cup S_\varphi)$. Pelo Teorema de Sard (Teorema [B.20](#)), para $b \in \varphi(S_\varphi)$, existe $c \notin \varphi(\partial\Omega \cup S_\varphi)$ tal que

$$\|b - c\| < \operatorname{dist}(b, \varphi(\partial\Omega)).$$

A partir disso, é possível estender a definição do grau de Brouwer do seguinte modo:

Definição 1.16. *Sejam $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. Definimos o grau de φ em Ω com relação a b como sendo o número*

$$\operatorname{deg}(\varphi, \Omega, b) = \operatorname{deg}(\varphi, \Omega, c), \text{ onde } c \in C_b \setminus \varphi(S_\varphi).$$

Todas as propriedades anteriores ainda valem para este caso, pois para $b \in \varphi(S_\varphi) \setminus \varphi(\partial\Omega)$, temos

$$\operatorname{deg}(\varphi, \Omega, b) = \operatorname{deg}(\varphi, \Omega, c),$$

onde $c \in C_b \setminus \varphi(S_\varphi)$ e o número do lado direito da igualdade satisfaz as propriedades do grau de Brouwer. Os detalhes referentes a essa afirmação podem ser analisados no trabalho [\[8\]](#).

1.2 Definição do grau de Brouwer para funções contínuas

Sejam $\varphi \in C(\overline{\Omega})$, $b \notin \varphi(\partial\Omega)$ e $r = \operatorname{dist}(\varphi(\partial\Omega), b)$. Sendo $C^2(\overline{\Omega})$ denso em $C(\overline{\Omega})$, pelo Teorema da Aproximação de Weierstrass, existe $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$ satisfazendo

$$\|\psi - \varphi\|_{C(\overline{\Omega})} < \frac{r}{2}. \quad (1.3)$$

Lema 1.17. *Se $\psi_1, \psi_2 : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ são funções de classe $C^2(\overline{\Omega})$ que satisfazem [\(1.3\)](#), então $b \notin \psi_i(\partial\Omega)$, $i = 1, 2$, e $\operatorname{deg}(\psi_1, \Omega, b) = \operatorname{deg}(\psi_2, \Omega, b)$.*

Demonstração. Sejam $x_1, x_2 \in \partial\Omega$. Para $i = 1, 2$, temos

$$\|b - \psi_i(x_i)\| \geq \|b - \varphi(x_i)\| - \|\varphi(x_i) - \psi_i(x_i)\| > r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2} > 0.$$

Portanto, $b \notin \psi_i(\partial\Omega)$, para $i = 1, 2$.

Para mostrarmos a segunda afirmação, definiremos a homotopia $H : \overline{\Omega} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$H(x, t) = t\psi_1(x) + (1 - t)\psi_2(x), \quad \text{para } (x, t) \in \overline{\Omega} \times [0, 1].$$

Note que, para $t \in [0, 1]$, temos

$$\begin{aligned} \|H(\cdot, t) - \varphi\|_{C(\bar{\Omega})} &= \|t\psi_1 + (1-t)\psi_2 - \varphi\|_{C(\bar{\Omega})} = \|t\psi_1 + (1-t)\psi_2 - t\varphi - (1-t)\varphi\|_{C(\bar{\Omega})} \leq \\ &\leq t\|\psi_1 - \varphi\|_{C(\bar{\Omega})} + (1-t)\|\psi_2 - \varphi\|_{C(\bar{\Omega})} < t\frac{r}{2} + (1-t)\frac{r}{2} = \frac{r}{2}, \end{aligned}$$

de onde segue que $H(\cdot, t)$ satisfaz (1.3), para todo $t \in [0, 1]$.

Afirmamos que $b \notin H(\partial\Omega \times [0, 1])$. De fato, seja $(x, t) \in (\partial\Omega) \times [0, 1]$. Então,

$$\|b - H(x, t)\| \geq \|b - \varphi(x)\| - \|\varphi(x) - H(x, t)\| > r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2} > 0,$$

o que valida a afirmação.

Pela Invariância do Grau por Homotopia (Propriedade 1.9), segue que $\deg(H(\cdot, t), \Omega, b)$, é constante, para todo $t \in [0, 1]$. Logo,

$$\deg(\psi_2, \Omega, b) = \deg(H(\cdot, 0), \Omega, b) = \deg(H(\cdot, 1), \Omega, b) = \deg(\psi_1, \Omega, b).$$

□

Definição 1.18. *Definimos o grau de Brouwer de uma função contínua φ em Ω com relação a b por*

$$\deg(\varphi, \Omega, b) = \deg(\psi, \Omega, b),$$

onde $\psi \in C^2(\bar{\Omega})$ e $\|\varphi - \psi\|_{C(\bar{\Omega})} < \frac{r}{2}$, com $r = \text{dist}(\varphi(\partial\Omega), b)$.

Lema 1.19. *Se $\varphi \in C(\bar{\Omega})$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega)$, então $\deg(\varphi, \Omega, b) = \deg(\varphi - b, \Omega, 0)$.*

Demonstração. Pela definição do grau de Brouwer para aplicações contínuas, temos

$$\deg(\varphi, \Omega, b) = \deg(\psi, \Omega, b), \text{ com } \psi \in C^2(\bar{\Omega}), \|\psi - \varphi\|_{C(\bar{\Omega})} < \frac{r}{2} \text{ e } r = \text{dist}(b, \varphi(\partial\Omega)).$$

Além disso, temos também

$$\deg(\varphi - b, \Omega, 0) = \deg(\psi - b, \Omega, 0), \text{ pois } \|\varphi - b - \psi + b\|_{C(\bar{\Omega})} = \|\varphi - \psi\|_{C(\bar{\Omega})} < \frac{r}{2}.$$

Como $\deg(\psi, \Omega, b) = \deg(\psi - b, \Omega, 0)$, pela Observação 1.5, concluímos que

$$\deg(\varphi, \Omega, b) = \deg(\psi, \Omega, b) = \deg(\psi - b, \Omega, 0) = \deg(\varphi - b, \Omega, 0).$$

□

1.2.1 Propriedades principais do grau de Brouwer

Na sequência, listaremos as principais propriedades do grau de Brouwer para funções contínuas. Tais resultados podem ser encontrados em [8] e [10].

Consideraremos $\varphi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua e $b \notin \varphi(\partial\Omega)$.

Propriedade 1.20 (Existência). *Se $\deg(\varphi, \Omega, b) \neq 0$, então existe $x_0 \in \Omega$ tal que $\varphi(x_0) = b$.*

Propriedade 1.21 (Invariância do Grau por Homotopia). *Seja $H \in C(\bar{\Omega} \times [0, 1], \mathbb{R}^n)$ uma homotopia, com $b \notin H(\partial\Omega \times [0, 1])$. Então, $\deg(H(\cdot, t), \Omega, b)$ é constante, para todo $t \in [0, 1]$.*

Propriedade 1.22 (Aditividade). *Se $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, onde Ω_1 e Ω_2 são subconjuntos abertos, disjuntos de Ω , e $b \notin \varphi((\partial\Omega_1) \cup (\partial\Omega_2))$, então*

$$\deg(\varphi, \Omega, b) = \deg(\varphi, \Omega_1, b) + \deg(\varphi, \Omega_2, b).$$

Propriedade 1.23. *O grau de Brouwer é constante em componentes conexas de $\mathbb{R}^n \setminus \varphi(\partial\Omega)$. Ou seja, se b_1, b_2 estão na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^n \setminus \varphi(\partial\Omega)$, então*

$$\deg(\varphi, \Omega, b_1) = \deg(\varphi, \Omega, b_2).$$

Propriedade 1.24. *Se $Id : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}$ é a aplicação identidade, então $\deg(Id, \Omega, b) = 1$, para qualquer $b \in \Omega$.*

Propriedade 1.25 (Exclusão). *Se K é fechado, com $K \subset \bar{\Omega}$, e $b \notin \varphi(K)$, então*

$$\deg(\varphi, \Omega, b) = \deg(\varphi, \Omega \setminus K, b).$$

Propriedade 1.26 (Continuidade). *Se $\varphi \in C(\bar{\Omega})$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega)$, então existe uma vizinhança V de φ em $C(\bar{\Omega})$ tal que, para qualquer $\psi \in V$, tem-se*

$$b \notin \psi(\partial\Omega) \quad e \quad \deg(\varphi, \Omega, b) = \deg(\psi, \Omega, b).$$

Propriedade 1.27. *Se $b \notin \varphi(\bar{\Omega})$ então $\deg(\varphi, \Omega, b) = 0$.*

Propriedade 1.28 (Produto). *Se $\varphi \in C(\bar{\Omega})$, $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $b \notin f\varphi(\partial\Omega)$ e K_i , $i \in \mathbb{N}$, são componentes conexas limitadas em $\mathbb{R}^n \setminus \varphi(\partial\Omega)$, então*

$$\deg(f\varphi, \Omega, b) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \deg(\varphi, \Omega, b_i) \deg(f, K_i, b),$$

onde $b_i \in K_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

Propriedade 1.29. *Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow U$ é uma aplicação linear bijetora, onde $U \subset \mathbb{R}^n$, e $\varphi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função contínua, tal que $0 \notin \varphi(\partial\Omega)$, então $f\varphi : \bar{\Omega} \rightarrow U$ é uma aplicação contínua e*

$$\deg(f\varphi, \Omega, 0) = \text{sgn}(\det f) \deg(\varphi, \Omega, 0).$$

1.2.2 Consequências das propriedades principais do grau de Brouwer

O próximo teorema é uma consequência importante das propriedades vistas anteriormente.

Teorema 1.30 (Teorema do Ponto Fixo de Brouwer). *Se $f : \overline{B}_r \rightarrow \overline{B}_r$ é uma função contínua, então existe $x_0 \in \overline{B}_r$ tal que $f(x_0) = x_0$.*

Demonstração. Definamos $\varphi : \overline{B}_r \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $\varphi(x) = x - f(x)$, para $x \in \overline{B}_r$. Claramente, φ é uma função contínua.

Se existir $x_0 \in \partial B_r$ com $f(x_0) = x_0$, o resultado está demonstrado.

Suponhamos, então, $f(x_0) \neq x_0$, isto é, $\varphi(x_0) \neq 0$, para qualquer $x_0 \in \partial B_r$. Nesse caso, $0 \notin \varphi(\partial B_r)$.

Consideremos a homotopia $H : \overline{B}_r \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ entre a função identidade e φ , definida por $H(x, t) = x - tf(x)$, para $(x, t) \in \overline{B}_r \times [0, 1]$.

Afirmamos que $0 \notin H(\partial B_r \times [0, 1])$. Com efeito, se $t = 1$, então

$$H(x, 1) = x - f(x) = \varphi(x) \neq 0, \text{ para todo } x \in \partial B_r.$$

Agora, se $t_0 \in [0, 1)$, então para $x \in \partial B_r$, teremos

$$\|t_0 f(x)\| = t_0 \|f(x)\| \leq t_0 r < r = \|x\|,$$

o que mostra que $t_0 f(x) \neq x$, para qualquer $x \in \partial B_r$. Assim $H(x, t_0) \neq 0$, de onde segue que $0 \notin H(\partial B_r \times [0, 1])$.

Pela Propriedade [1.21](#), segue que $\deg(H(\cdot, t), B_r, 0)$ é constante, para todo $t \in [0, 1]$. Deste modo,

$$\deg(H(\cdot, 0), B_r, 0) = \deg(H(\cdot, 1), B_r, 0).$$

Mas,

$$H(x, 0) = x \quad \text{e} \quad H(x, 1) = \varphi(x), \quad \text{para todo } x \in \overline{B}_r$$

e, conseqüentemente, temos

$$\deg(\varphi, B_r, 0) = \deg(Id, B_r, 0) = 1.$$

Portanto, $\deg(\varphi, B_r, 0) \neq 0$, de onde podemos inferir que existe $x_0 \in B_r$ tal que $\varphi(x_0) = 0$. Ou seja, existe $x_0 \in B_r$ tal que

$$f(x_0) = x_0.$$

□

A seguir, enunciaremos um lema que será de grande valia para demonstrarmos o Teorema da Não Contração da Bola.

Lema 1.31 (Corolários 11 e 12, [10]). *Sejam $\varphi, \psi \in C(\overline{\Omega})$. As seguintes propriedades são válidas:*

- i) *Se $\varphi(x) = \psi(x)$ para todo $x \in \partial\Omega$, então para todo $b \notin \varphi(\partial\Omega)$, tem-se $\deg(\varphi, \Omega, b) = \deg(\psi, \Omega, b)$;*
- ii) *Se $H : \partial\Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma homotopia tal que $H(\cdot, 0) = \varphi|_{\partial\Omega}$, $H(\cdot, 1) = \psi|_{\partial\Omega}$ e $b \notin H(\partial\Omega \times [0, 1])$, então $\deg(\varphi, \Omega, b) = \deg(\psi, \Omega, b)$.*

Como conseqüências do lema anterior, obtemos os seguintes resultados:

Teorema 1.32 (Teorema da Não Contração da Bola). *Não existe uma função contínua $\varphi : \overline{B_1} \rightarrow \partial B_1$ tal que $\varphi|_{\partial B_1} = Id$.*

Demonstração. Suponhamos que exista tal função. Percebamos que, se $0 \notin \partial B_1$, então $0 \notin \varphi(\overline{B_1})$, portanto

$$\deg(\varphi, B_1, 0) = 0. \quad (1.4)$$

Por outro lado, segue do primeiro item do Lema [1.31] que

$$\deg(\varphi, B_1, 0) = \deg(Id, B_1, 0) = 1,$$

que está em contradição com (1.4). □

Ambos os corolários expostos em seguida seguem do Teorema da Não Contração da Bola e podem ser encontrados em [10].

Corolário 1.33. *Se n é ímpar, então não existe uma aplicação contínua $H : S^{n-1} \times [0, 1] \rightarrow S^{n-1}$ tal que $H(x, 0) = -x$ e $H(x, 1) = x$, para qualquer $x \in S^{n-1}$.*

Corolário 1.34. *Se n é ímpar, então não existe uma aplicação contínua $\varphi : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\varphi(x) \neq 0$ e $\langle \varphi(x), x \rangle = 0$, para qualquer $x \in S^{n-1}$.*

A próxima aplicação a ser apresentada é o Teorema de Borsuk que requer um resultado preliminar. Tal resultado será exibido a seguir e sua demonstração pode ser encontrada em nosso trabalho de divulgação “O Teorema de Borsuk e a Teoria do Grau de Brouwer” ([4]).

Lema 1.35 (Lema 25, [4]). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto, limitado, simétrico em relação a origem, com $0 \notin \overline{\Omega}$. Se $\varphi \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ é uma aplicação ímpar sobre $\partial\Omega$, tal que $0 \notin \varphi(\partial\Omega)$, então $\deg(\varphi, \Omega, 0)$ é um número inteiro par.*

Através do resultado anterior, podemos demonstrar o Teorema de Borsuk. No que segue, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ denotará um subconjunto aberto, limitado, simétrico em relação a origem, tal que $0 \in \Omega$.

Teorema 1.36 (Teorema de Borsuk). *Seja $\varphi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua. Se φ é ímpar em $\partial\Omega$ e $0 \notin \varphi(\partial\Omega)$, então $\deg(\varphi, \Omega, 0)$ é um número inteiro ímpar.*

Demonstração. Seja $r > 0$ tal que $\bar{B}_r \subset \Omega$ e consideremos $Id : \bar{B}_r \rightarrow \bar{B}_r$.

Definamos $\tilde{\varphi} : (\partial\Omega) \cup \bar{B}_r \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{se } x \in \partial\Omega \\ x, & \text{se } x \in \bar{B}_r \end{cases}.$$

Pelo Lema da Colagem (Lema [B.15](#)), a função $\tilde{\varphi}$ é contínua em $(\partial\Omega) \cup \bar{B}_r$.

O Teorema de Extensão de Tietze (Teorema [B.14](#)) garante que existe uma aplicação contínua $\psi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\psi = \tilde{\varphi}$ em $(\partial\Omega) \cup \bar{B}_r$, ou seja,

$$\begin{cases} \psi = \varphi & \text{em } \partial\Omega \\ \psi = Id & \text{em } \bar{B}_r \end{cases}.$$

Pelo primeiro item do Lema [1.31](#), segue que

$$\deg(\varphi, \Omega, 0) = \deg(\psi, \Omega, 0). \quad (1.5)$$

Por outro lado, segue das Propriedades [1.22](#) e [1.25](#) que

$$\deg(\psi, \Omega, 0) = \deg(\psi, \Omega \setminus \partial B_r, 0) = \deg(\psi, B_r, 0) + \deg(\psi, \Omega \setminus \bar{B}_r, 0). \quad (1.6)$$

Note que

$$\deg(\psi, B_r, 0) = \deg(Id, B_r, 0) = 1. \quad (1.7)$$

Das equações [\(1.5\)](#), [\(1.6\)](#) e [\(1.7\)](#), obtemos

$$\deg(\varphi, \Omega, 0) = \deg(\psi, \Omega, 0) = \deg(\psi, B_r, 0) + \deg(\psi, \Omega \setminus \bar{B}_r, 0) = 1 + \deg(\psi, \Omega \setminus \bar{B}_r, 0).$$

Como $\deg(\psi, \Omega \setminus \bar{B}_r, 0)$ é um número par pelo Lema [1.35](#), podemos concluir que $\deg(\varphi, \Omega, 0)$ é um número ímpar. \square

Os resultados a seguir são consequências do Teorema de Borsuk.

Corolário 1.37 (Corolário 29, [\[4\]](#)). *Seja $\varphi \in C(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$ uma aplicação ímpar. Se $\varphi(\partial\Omega)$ está contido em um subespaço próprio de \mathbb{R}^n , então existe $x_0 \in \partial\Omega$ tal que $\varphi(x_0) = 0$.*

Teorema 1.38 (Teorema de Borsuk-Ulam). *Seja $\varphi \in C(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$, tal que $\varphi(\partial\Omega)$ está contido em um subespaço próprio de \mathbb{R}^n . Então, existe $x_0 \in \partial\Omega$ tal que $\varphi(x_0) = \varphi(-x_0)$.*

Demonstração. Definamos $\psi(x) = \varphi(x) - \varphi(-x)$, para $x \in \partial\Omega$. Note que ψ cumpre as condições do corolário [1.37](#). Logo, existe $x_0 \in \partial\Omega$ tal que $\psi(x_0) = 0$, ou seja, existe $x_0 \in \partial\Omega$ tal que

$$\varphi(x_0) = \varphi(-x_0).$$

□

Finalizaremos este capítulo com o seguinte resultado.

Corolário 1.39. *Não existe uma aplicação ímpar $\varphi \in C(S^n, S^m)$, para $n > m$.*

Demonstração. Suponhamos que tal φ exista. Então, φ cumpre as condições do Corolário [1.37](#) e, portanto, existe $x_0 \in S^n$ tal que $\varphi(x_0) = 0$, o que é um absurdo, visto que $S^m = \{x \in \mathbb{R}^{m+1}; \|x\| = 1\}$. □

O próximo capítulo apresenta conceitos e resultados básicos da teoria do grau para espaços de Banach de dimensão infinita.

2 Teoria do grau de Leray-Schauder

Neste capítulo, introduziremos a teoria do grau para espaços de Banach de dimensão infinita a partir da teoria do grau de Brouwer. Novamente, a principal referência para a confecção deste capítulo foi [10]. Cabe informar que os resultados presentes aqui podem também ser encontrados no nosso trabalho de divulgação “Sobre a Teoria do Grau de Brouwer e a Teoria do Grau de Leray-Schauder” ([6]).

No que segue, E denota um espaço de Banach munido de uma norma denotada por $\|\cdot\|$.

2.1 Definição do grau de Leray-Schauder

Definição 2.1. *Seja Ω um subconjunto aberto e limitado de E . Diremos que uma aplicação do tipo $\phi = Id - T : \bar{\Omega} \rightarrow E$ é uma perturbação de dimensão finita da identidade, onde $Id : E \rightarrow E$ é a aplicação identidade e $T \in C(\bar{\Omega}, E)$, quando $T(\bar{\Omega})$ estiver contido em um subespaço de dimensão finita de E .*

Definição 2.2. *Seja $\phi = Id - T$ uma perturbação de dimensão finita da identidade. Se $b \notin \phi(\partial\Omega)$ e F é um subespaço de dimensão finita contendo b e $T(\bar{\Omega})$, então definiremos o grau de Leray-Schauder de ϕ em Ω com relação a b por*

$$\deg(\phi, \Omega, b) := \deg(\phi|_{\bar{\Omega} \cap F}, \Omega \cap F, b).$$

Na sequência, mostraremos que a definição [2.2] é consistente, isto é, independe da escolha do subespaço F .

Proposição 2.3. *Se F_1 e F_2 são subespaços de E de dimensão finita contendo b e $T(\bar{\Omega})$, então*

$$\deg(\phi|_{\bar{\Omega} \cap F_1}, \Omega \cap F_1, b) = \deg(\phi|_{\bar{\Omega} \cap F_2}, \Omega \cap F_2, b).$$

Demonstração. Seja $F = F_1 \cap F_2$ o subespaço de E que contém b e $T(\bar{\Omega})$. Pela Definição [2.2], temos:

$$\deg(\phi|_{\bar{\Omega} \cap F_1}, \Omega \cap F_1, b) = \deg(\phi|_{\bar{\Omega} \cap F}, \Omega \cap F, b)$$

e

$$\deg(\phi|_{\overline{\Omega \cap F_2}}, \Omega \cap F_2, b) = \deg(\phi|_{\overline{\Omega \cap F}}, \Omega \cap F, b).$$

Portanto,

$$\deg(\phi|_{\overline{\Omega \cap F_1}}, \Omega \cap F_1, b) = \deg(\phi|_{\overline{\Omega \cap F_2}}, \Omega \cap F_2, b).$$

□

Definição 2.4. Diremos que um operador $T : \overline{\Omega} \rightarrow E$ é compacto se T for contínuo e ImT for um conjunto pré-compacto, isto é, se T for contínuo e \overline{ImT} for um conjunto compacto.

Denotaremos o conjunto de todos os operadores compactos $T : \overline{\Omega} \rightarrow E$ por $Q(\overline{\Omega})$. Não é difícil verificar que $Q(\overline{\Omega})$, munido da norma

$$\|T\|_{Q(\overline{\Omega})} = \sup_{x \in \overline{\Omega}} \|T(x)\|, \quad T \in Q(\overline{\Omega}),$$

é um espaço de Banach.

Lema 2.5. Seja $K \subset E$ compacto. Dado $\varepsilon > 0$, existe um subespaço de dimensão finita F_ε e uma aplicação contínua $g_\varepsilon : K \rightarrow F_\varepsilon$ tal que $\|x - g_\varepsilon(x)\| < \varepsilon$, para qualquer $x \in K$.

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, consideremos a seguinte cobertura aberta para K : $\{B(x, \varepsilon); x \in K\}$. Segue da compacidade de K que existem $y_1, \dots, y_n \in E$ tais que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^n B(y_i, \varepsilon).$$

Consideremos $F_\varepsilon = [y_1, \dots, y_n]$ (subespaço gerado por y_1, \dots, y_n). Notemos que $\dim F_\varepsilon \leq n < \infty$.

Para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, consideremos as seguintes funções:

$$b_i : E \rightarrow \mathbb{R}, \text{ definida por}$$

$$b_i(x) = \begin{cases} \varepsilon - \|x - y_i\|, & \text{se } x \in B(y_i, \varepsilon) \\ 0, & \text{se } x \notin B(y_i, \varepsilon) \end{cases}.$$

Usando as funções b_i 's, definimos $g_\varepsilon : K \rightarrow F_\varepsilon$ por

$$g_\varepsilon(x) = \frac{\sum_{i=1}^n b_i(x)y_i}{\sum_{i=1}^n b_i(x)}.$$

Como as funções b_i 's são contínuas, segue que g_ε também é contínua.

Ademais, para $x \in K$, temos

$$\|x - g_\varepsilon(x)\| = \left\| \frac{\sum_{i=1}^n b_i(x)x}{\sum_{i=1}^n b_i(x)} - \frac{\sum_{i=1}^n b_i(x)y_i}{\sum_{i=1}^n b_i(x)} \right\| = \left\| \frac{\sum_{i=1}^n b_i(x)(x - y_i)}{\sum_{i=1}^n b_i(x)} \right\| \leq$$

$$\leq \frac{\sum_{i=1}^n b_i(x) \|x - y_i\|}{\sum_{i=1}^n b_i(x)} < \frac{\sum_{i \in I_x} b_i(x)}{\sum_{i \in I_x} b_i(x)} \varepsilon = \varepsilon,$$

onde $I_x = \{i \in \{1, \dots, n\}; x \in B(y_i, \varepsilon) \cap K\}$. □

Definição 2.6. Se $T : \bar{\Omega} \rightarrow E$ for um operador compacto, diremos que a aplicação $\phi = Id - T$ é uma perturbação compacta da identidade.

Se $T \in Q(\bar{\Omega})$, então a aplicação $\phi = Id - T : \bar{\Omega} \rightarrow E$ é fechada e própria (Proposição A.25).

Veremos agora que é possível aproximar $\phi = Id - T$, com $T \in Q(\bar{\Omega})$, por uma perturbação de dimensão finita da identidade $\phi_r = Id - T_r$, com $r > 0$.

Lema 2.7. Se $\phi = Id - T : \bar{\Omega} \rightarrow E$ é uma perturbação compacta da identidade, $b \notin \phi(\partial\Omega)$ e $r = \text{dist}(b, \phi(\partial\Omega))$, então existe uma perturbação de dimensão finita da identidade $\phi_r = Id - T_r$, com $r > 0$, tal que $b \notin \phi_r(\partial\Omega)$ e

$$\|\phi - \phi_r\|_{C(\bar{\Omega})} < \frac{r}{2},$$

onde $\|\psi\|_{C(\bar{\Omega})} = \sup\{\|\psi(x)\|; x \in \bar{\Omega}\}$.

Demonstração. Seja $K = \overline{\text{Im}T}$. Como T é um operador compacto, K é um subconjunto compacto de E . Pelo Lema 2.5, existe um subespaço de dimensão finita $F_{\frac{r}{2}}$ e uma aplicação contínua $g_{\frac{r}{2}} : K \rightarrow F_{\frac{r}{2}}$ tal que $\|y - g_{\frac{r}{2}}(y)\| < \frac{r}{2}$, para qualquer $y \in K$.

Defina $T_r : \bar{\Omega} \rightarrow F_{\frac{r}{2}}$ e $\phi_r : \bar{\Omega} \rightarrow E$ por $T_r(x) = (g_{\frac{r}{2}} \circ T)(x)$ e $\phi_r(x) = x - T_r(x)$, para $x \in \bar{\Omega}$, respectivamente.

Afirmamos que $b \notin \phi_r(\partial\Omega)$. Com efeito, dado $x_0 \in \partial\Omega$, temos

$$\begin{aligned} \|b - \phi_r(x_0)\| &\geq \|b - \phi(x_0)\| - \|\phi(x_0) - \phi_r(x_0)\| \geq r - \|T(x_0) - T_r(x_0)\| = \\ &= r - \|T(x_0) - (g_{\frac{r}{2}} \circ T)(x_0)\| > r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2} > 0, \end{aligned}$$

o que comprova a afirmação. E, dado $x \in \bar{\Omega}$, temos

$$\|\phi(x) - \phi_r(x)\| = \|T(x) - T_r(x)\| = \|T(x) - g_{\frac{r}{2}}(Tx)\| < \frac{r}{2},$$

de onde segue que $\|\phi - \phi_r\|_{C(\bar{\Omega})} < \frac{r}{2}$. □

Definição 2.8. Seja $\phi = Id - T$ com $T \in Q(\bar{\Omega})$ e $b \notin \phi(\partial\Omega)$. Definimos o grau de Leray-Schauder de ϕ em Ω com relação a b por

$$\text{deg}(\phi, \Omega, b) = \text{deg}(\phi_r, \Omega, b),$$

em que $\phi_r = Id - T_r$ é uma perturbação de dimensão finita da identidade que satisfaz

$$\|\phi - \phi_r\|_{C(\bar{\Omega})} < \frac{r}{2},$$

com $r = \text{dist}(b, \phi(\partial\Omega))$.

Note que o conjunto das perturbações de dimensão finita da identidade que usaremos para calcular $\deg(\phi, \Omega, b)$ é não vazio, pois a aplicação $\phi_r = Id - T_r$, com $T_r = g_{\frac{r}{2}} \circ T$, obtida no Lema 2.7, cumpre as exigências da definição.

Proposição 2.9. A Definição 2.8 independe da escolha de ϕ_r .

Demonstração. Sejam $\phi_{r_1} = Id - T_{r_1}$ e $\phi_{r_2} = Id - T_{r_2}$, onde $\phi_{r_1}, \phi_{r_2} : \bar{\Omega} \rightarrow E$ são duas perturbações de dimensão finita da identidade, satisfazendo

$$\|\phi - \phi_{r_i}\|_{C(\bar{\Omega})} < \frac{r}{2}, \quad i = 1, 2$$

e $r = \text{dist}(b, \phi(\partial\Omega))$.

Sejam F_1 e F_2 subespaços de dimensão finita tais que $T_{r_i}(\bar{\Omega}) \subset F_i$ e $b \in F_i$ para $i = 1, 2$.

O subespaço $F = F_1 + F_2$ contém b e $T_{r_i}(\bar{\Omega})$, para $i = 1, 2$.

Para facilitar a notação, tomemos $\tilde{\phi}_{r_i} = \phi_{r_i}|_{\bar{\Omega} \cap F}$, $i = 1, 2$. Por definição, temos

$$\deg(\phi_{r_i}, \Omega, b) = \deg(\tilde{\phi}_{r_i}, \Omega \cap F, b), \quad i = 1, 2. \quad (2.1)$$

Consideremos, agora, a homotopia $H : (\bar{\Omega} \cap F) \times [0, 1] \rightarrow F$ definida por $H(x, t) = t\tilde{\phi}_{r_1}(x) + (1-t)\tilde{\phi}_{r_2}(x)$, para $(x, t) \in (\bar{\Omega} \cap F) \times [0, 1]$.

Veja que, para $(x, t) \in (\bar{\Omega} \cap F) \times [0, 1]$, vale

$$\begin{aligned} \|\phi(x) - H(x, t)\| &= \|t\phi(x) + (1-t)\phi(x) - t\tilde{\phi}_{r_1}(x) + (1-t)\tilde{\phi}_{r_2}(x)\| \leq \\ &\leq t\|\phi(x) - \tilde{\phi}_{r_1}(x)\| + (1-t)\|\phi(x) - \tilde{\phi}_{r_2}(x)\| < t\frac{r}{2} + (1-t)\frac{r}{2} = \frac{r}{2}. \end{aligned}$$

Deste modo $b \notin H(\partial(\bar{\Omega} \cap F) \times [0, 1])$, pois, para $(x_0, t_0) \in \partial(\bar{\Omega} \cap F) \times [0, 1]$, temos

$$\|b - H(x_0, t_0)\| \geq \|b - \phi(x_0)\| - \|\phi(x_0) - H(x_0, t_0)\| > r - \frac{r}{2} > \frac{r}{2}.$$

Usando a invariância do Grau de Brouwer por homotopia (Propriedade 1.23), obtemos

$$\deg(\phi_{r_1}, \Omega, b) = \deg(\tilde{\phi}_{r_1}, \Omega \cap F, b) = \deg(\tilde{\phi}_{r_2}, \Omega \cap F, b) = \deg(\phi_{r_2}, \Omega, b).$$

□

2.2 Propriedades do grau de Leray-Schauder

Nesta seção, listaremos as principais propriedades do grau de Leray-Schauder e demonstraremos uma consequência importante de uma delas. Para tal, assumiremos que $b \notin \phi(\partial\Omega)$, onde $\phi = Id - T$ e $T \in Q(\bar{\Omega})$.

Todas as propriedades posteriores seguem imediatamente das propriedades do grau de Brouwer.

Propriedade 2.10. *Se Ω é um subconjunto aberto e limitado de E e $Id : E \rightarrow E$ é a aplicação identidade, então:*

$$\deg(Id, \Omega, b) = \begin{cases} 1, & b \in \Omega, \\ 0, & b \notin \bar{\Omega}. \end{cases}$$

Propriedade 2.11 (Existência). *Se $\deg(\phi, \Omega, b) \neq 0$, então existe $x_0 \in \Omega$ tal que $\phi(x_0) = b$.*

Propriedade 2.12 (Invariância do Grau por Homotopia Compacta). *Seja H uma aplicação em $C(\bar{\Omega} \times [0, 1], E)$, definida por $H(x, t) = x - S(x, t)$, onde $S \in Q(\bar{\Omega} \times [0, 1], E)$. Se $b \notin H(\partial\Omega \times [0, 1])$, então $\deg(H(\cdot, t), \Omega, b)$ é constante em $[0, 1]$.*

Propriedade 2.13 (Aditividade). *Se $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, onde Ω_1 e Ω_2 são subconjuntos abertos e disjuntos de Ω , e $b \notin \phi((\partial\Omega_1) \cup (\partial\Omega_2))$, então*

$$\deg(\phi, \Omega, b) = \deg(\phi, \Omega_1, b) + \deg(\phi, \Omega_2, b).$$

Propriedade 2.14. *O grau de Leray-Schauder é constante nas componentes conexas de $E \setminus \phi(\partial\Omega)$.*

Propriedade 2.15 (Exclusão). *Se K é fechado, com $K \subset \bar{\Omega}$, e $b \notin \phi(K)$, então*

$$\deg(\phi, \Omega, b) = \deg(\phi, \Omega \setminus K, b).$$

Propriedade 2.16 (Produto). *Se $\phi \in C(\bar{\Omega})$, $f \in C(E, E)$, $b \notin f\phi(\partial\Omega)$ e $K_i, i \in \mathbb{N}$, são componentes conexas limitadas de $E \setminus \phi(\partial\Omega)$, então*

$$\deg(f\phi, \Omega, b) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \deg(\phi, \Omega, b_i) \deg(f, K_i, b),$$

onde $b_i \in K_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

Propriedade 2.17. *Se $f : \phi(\bar{\Omega}) \rightarrow U$ é uma aplicação linear bijetora, onde $U \subset E$, então $f\phi : \bar{\Omega} \rightarrow U$ é contínua e $\deg(f\phi, \Omega, 0) = \text{sgn}(\det f) \deg(\phi, \Omega, 0)$.*

Propriedade 2.18. *É válido que $\deg(\phi, \Omega, b) = \deg(\phi - b, \Omega, 0)$.*

Propriedade 2.19 (Teorema de Borsuk). *Seja $\Omega \subset E$ um subconjunto aberto, limitado, simétrico em relação a origem, tal que $0 \in \Omega$. Seja $\phi : \bar{\Omega} \rightarrow E$ uma aplicação contínua. Se ϕ é ímpar em $\partial\Omega$ e $0 \notin \phi(\partial\Omega)$, então $\deg(\phi, \Omega, 0)$ é um número inteiro ímpar.*

Como consequência das Propriedades [2.10](#) e [2.12](#) descritas anteriormente, obtemos o seguinte teorema de ponto fixo.

Teorema 2.20 (Teorema do Ponto Fixo de Schaeffer). *Seja $T : E \longrightarrow E$ um operador compacto. Se existe $r > 0$ tal que*

$$\sigma T(u) = u, u \in E, \sigma \in [0, 1] \Rightarrow \|u\| < r,$$

então T admite um ponto fixo em E .

Demonstração. Defina $H : \bar{B}_r \times [0, 1] \longrightarrow E$ por $H(u, \sigma) = u - \sigma T(u)$.

Note que $0 \notin H(\partial B_r \times [0, 1])$, pois

$$0 = H(u, \sigma) \implies 0 = u - \sigma T(u) \implies u = \sigma T(u) \implies \|u\| < r \implies u \in B_r.$$

Segue da Propriedade [2.12](#) que

$$\deg(H(\cdot, 0), B_r, 0) = \deg(H(\cdot, 1), B_r, 0),$$

ou seja, $\deg(Id, B_r, 0) = \deg(Id - T, B_r, 0)$.

Pela Propriedade [2.10](#), temos $\deg(Id, B_r, 0) = 1$. Logo, $\deg(Id - T, B_r, 0) \neq 0$ e, portanto, existe $u \in B_r$ tal que

$$(Id - T)u = 0, \text{ isto é, } u = T(u),$$

de onde segue que u é um ponto fixo de T . □

No próximo capítulo, definiremos o grau de coincidência para perturbações de operadores de Fredholm e provaremos o Teorema de Continuação de Mawhin.

3 Grau de coincidência para perturbações de operadores de Fredholm

Os objetivos fundamentais do presente capítulo são definir o grau de coincidência para perturbações de operadores de Fredholm e demonstrar o Teorema de Continuação de Mawhin.

As principais referências utilizadas para a elaboração deste capítulo foram o livro intitulado “*Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations*” de Gaines e Mawhin ([19]) e os trabalhos [37, 43].

3.1 Preliminares algébricas

Nesta seção, exporemos conceitos e resultados introdutórios à definição do grau de coincidência para perturbações de operadores de Fredholm.

Definição 3.1. *Sejam X, Z espaços vetoriais normados sobre \mathbb{R} e $\text{dom} L \subset X$ um subespaço de X . Diremos que um operador linear $L : \text{dom} L \rightarrow Z$ é um operador de Fredholm se as seguintes condições forem satisfeitas:*

- i) $\text{Ker} L$ possui dimensão finita ($\dim \text{Ker} L < \infty$);*
- ii) $\text{Im} L$ possui codimensão finita ($\text{codim} \text{Im} L < \infty$);*
- iii) $\text{Im} L$ é um conjunto fechado ($\text{Im} L = \overline{\text{Im} L}$).*

Diremos que L é um operador de Fredholm de índice zero quando

- iv) $\dim \text{Ker} L = \text{codim} \text{Im} L$.*

Seja $\text{Coker} L = Z/\text{Im} L$ o espaço quociente de Z sob a seguinte relação de equivalência

$$z \sim z' \text{ se, e somente se, } z - z' \in \text{Im} L.$$

Podemos fazer a seguinte identificação: $\text{Coker } L = \{[z]; z \in Z\}$, em que $[z] = \{z' \in Z; z \sim z'\}$. Consideremos em $\text{Coker } L$ a norma

$$\|z\|_q = \inf_{y \in \text{Im } L} \|z + y\|_Z, \quad z \in Z,$$

onde $\|\cdot\|_Z$ é uma norma em Z .

Como $\text{codim Im } L = \dim \text{Coker } L$, diremos que o operador linear $L : X \rightarrow Z$ é um *operador de Fredholm* se $\text{Im } L$ for fechado e os subespaços $\text{Ker } L$ e $\text{Coker } L$ possuírem dimensões finitas.

No que segue, X e Z denotarão espaços de Banach com as normas $\|\cdot\|_X$ e $\|\cdot\|_Z$, respectivamente.

O próximo resultado mostra que, dado um operador de Fredholm de índice zero, é possível obter projeções contínuas $P : X \rightarrow X$ e $Q : Z \rightarrow Z$ tais que

$$\text{Ker } L = \text{Im } P \quad \text{e} \quad \text{Im } L = \text{Ker } Q.$$

Proposição 3.2. *Se as condições (i) – (iv) forem satisfeitas, então existirão projeções contínuas $P : X \rightarrow X$ e $Q : Z \rightarrow Z$ tais que $\text{Ker } L = \text{Im } P$ e $\text{Im } L = \text{Ker } Q$.*

Demonstração. Seja $\{v_1, \dots, v_n\} \subset \text{Ker } L$ uma base para $\text{Ker } L$. Consideremos os funcionais lineares contínuos $\varphi_i : \text{Ker } L \rightarrow \mathbb{R}$ definidos por $\varphi_i(v_j) = \delta_{i,j}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Para cada $i = 1, \dots, n$, pelo Teorema de Hahn-Banach (Teorema [A.14](#)), existe um funcional linear contínuo $\Phi_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ que estende φ_i .

Definamos $P : X \rightarrow X$ por $Px = \sum_{i=1}^n \Phi_i(x)v_i$.

Claramente, o operador P é uma projeção contínua e $\text{Im } P \subset \text{Ker } L$. Resta-nos mostrar que $\text{Ker } L \subset \text{Im } P$, para concluirmos que $\text{Ker } L = \text{Im } P$. Com efeito, tomemos $x \in \text{Ker } L$. Então, existem $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, tais que $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$. Para $j \in \{1, \dots, n\}$, temos

$$\Phi_j(x) = \Phi_j \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \Phi_j(v_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_j(v_i) = \alpha_j.$$

Portanto, $x = \sum_{i=1}^n \Phi_i(x)v_i \in \text{Im } P$.

Mostremos agora que o operador Q citado anteriormente existe. Como $\dim \text{Coker } L$ é finita, pelo Lema [A.3](#), segue que $Z = \text{Im } L \oplus N$, onde N é um subespaço vetorial fechado de Z com dimensão finita.

Seja $\{w_1, \dots, w_n\} \subset N$ uma base para N e definamos os funcionais lineares contínuos $\psi_i : N \rightarrow \mathbb{R}$ por $\psi_i(w_j) = \delta_{i,j}$. Pelo Teorema de Hahn-Banach (Teorema [A.14](#)),

para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, existe um funcional linear contínuo $\Psi_i : Z \rightarrow \mathbb{R}$ que estende ψ_i .

Definamos a projeção contínua $Q : Z \rightarrow Z$ por $Q(z) = \sum_{i=1}^n \Psi_i(z)w_i$.

Utilizando um procedimento análogo ao anterior, obtemos $\text{Im } Q = N$. Para completarmos a prova, basta demonstrarmos que $Z = \text{Ker } Q \oplus \text{Im } Q$.

Primeiramente, notemos que $\text{Im } Q \cap \text{Ker } Q = \{0\}$, pois se $x \in \text{Ker } Q$, então $Qx = 0$. Por outro lado, se $x \in \text{Im } Q$, então existe $y \in Z$ tal que $Qy = x$. Portanto,

$$0 = Qx = Q^2y = Qy = x.$$

Além disso, dado $z \in Z$, temos

$$z = (z - Qz) + Qz \in \text{Ker } Q + \text{Im } Q,$$

de onde concluímos que $Z = \text{Ker } Q \oplus \text{Im } Q$. □

Como consequência da Proposição 3.2, segue que a restrição L_P do operador L ao conjunto $\text{dom } L \cap \text{Ker } P$ é invertível, com inversa $K_P : \text{Im } L \rightarrow \text{dom } L \cap \text{Ker } P$. É o que atesta a próxima proposição.

Proposição 3.3. *Se as condições (i) – (iv) forem satisfeitas, então o operador $L_P : \text{dom } L \cap \text{Ker } P \rightarrow \text{Im } L$ será invertível.*

Demonstração. Para provarmos o resultado, devemos mostrar que o operador L_P é bijetor. Pois bem, do mesmo modo que foi provado que $Z = \text{Ker } Q \oplus \text{Im } Q$, é possível provar que $X = \text{Ker } P \oplus \text{Im } P$.

Sejam $x, y \in \text{dom } L \cap \text{Ker } P$ tais que $Lx = Ly$, ou seja, $x - y \in \text{Ker } L = \text{Im } P$. Como $x, y \in \text{Ker } P$, temos $x - y \in \text{Ker } P$. Consequentemente, $x - y = 0$, de onde segue que L_P é um operador injetor.

Vejam, agora, que L_P é sobrejetor. Se $\text{Im } L = \{0\}$, então o resultado segue de forma trivial. Suponhamos, pois, que $\text{Im } L \neq \{0\}$. Dado $y \in \text{Im } L$, existe $x \in \text{dom } L$ tal que $Lx = y$. Suponha que $x \notin \text{Ker } P$. Então, $x \in \text{Im } P = \text{Ker } L$ e, consequentemente, $y = 0$. Portanto, $x \in \text{Ker } P \cap \text{dom } L$, de onde concluímos que L_P é um operador sobrejetor. □

Proposição 3.4. *Se as condições (i) – (iv) forem satisfeitas, então*

- (a) $PK_P = 0$;
- (b) $LK_P = Id$;
- (c) $K_PL = Id - P$.

Demonstração. (a) Basta observar que $\text{Im } K_P = \text{dom } L \cap \text{Ker } P \subset \text{Ker } P$.

(b) Para $x \in \text{dom } L$, temos $(Id - P)x \in \text{Ker } P$. Como $PK_P = 0$ por (a), segue que

$$LK_P = LK_P + LPK_P = L(Id - P)K_P = L_P(Id - P)K_P = L_PK_P = Id.$$

(c) Usando o fato de que $LP = 0$ (veja Proposição 3.2) e $(Id - P)x \in \text{Ker } P$ para todo $x \in \text{dom } L$, obtemos

$$K_PL = K_PL - K_PLP = K_PL(Id - P) = K_PL_P(Id - P) = Id - P.$$

□

Considerando a topologia quociente em $\text{Coker } L$, definimos a aplicação contínua e sobrejetora $\Pi : Z \rightarrow \text{Coker } L$ por $\Pi z = [z]$. A norma de Π é dada por:

$$\|\Pi\| = \sup_{z \neq 0} \frac{\|\Pi z\|_q}{\|z\|_Z}.$$

Proposição 3.5. *Se as condições (i) – (iv) forem satisfeitas, então*

(a) $Qz = 0 \iff z \in \text{Im } L \iff \Pi z = [0]$;

(b) $\Pi = \Pi Q$;

(c) $\Pi_Q = \Pi|_{\text{Im } Q} : \text{Im } Q \rightarrow \text{Coker } L$ é um isomorfismo.

Demonstração. (a) A primeira equivalência decorre do fato de que $\text{Ker } Q = \text{Im } L$. Já a segunda equivalência é decorrente da definição da aplicação quociente Π .

(b) Seja $z \in Z$. Como Q é uma projeção, segue que $Q(Id - Q)z = 0$. Do item anterior, obtemos $\Pi(Id - Q)z = [0]$.

(c) É fácil ver que Π_Q é uma aplicação linear e contínua pela definição da aplicação Π . Se $\{w_1, \dots, w_n\} \subset \text{Im } Q$ é uma base de $\text{Im } Q$, então o conjunto $\{[w_1], \dots, [w_n]\} \subset \text{Coker } L$ é uma base de $\text{Coker } L$. Deste modo, a aplicação Π_Q leva base em base e, portanto, possui uma inversa linear, $\Pi_Q^{-1} : \text{Coker } L \rightarrow \text{Im } L$. Como Π_Q^{-1} é linear e $\text{dom } \Pi_Q^{-1}$ possui dimensão finita, concluímos que Π_Q^{-1} é contínua.

□

Denotaremos por $K_{P,Q} : Z \rightarrow \text{dom } L \cap \text{Ker } P$ a inversa generalizada de L , definida por $K_{P,Q} = K_P(Id - Q)$.

Proposição 3.6. *Suponhamos que as condições (i) – (iv) estão satisfeitas. Se existe uma aplicação linear injetora $\Lambda : \text{Coker } L \rightarrow \text{Ker } L$, então a equação $Lx = y$, com $y \in Z$, é equivalente a equação*

$$(Id - P)x = (\Lambda\Pi + K_{P,Q})y.$$

Demonstração. Como $\text{Im } L = \text{Ker } Q$, segue que $Qy = 0$ para $y \in \text{Im } L$. Pela Proposição 3.5-(a), temos $\Pi y = [0]$. Do fato de Λ ser linear e injetora segue que $\Lambda \Pi y = 0$.

Lembramos que, pela Proposição 3.4 - (c), temos $K_P L = Id - P$. Portanto, o resultado é obtido da seguinte cadeia de equivalências:

$$\begin{aligned} Lx = y &\iff Lx = (Id - Q)y \iff K_P Lx = K_P (Id - Q)y \\ &\iff (Id - P)x = K_{P,Q}y \iff (Id - P)x = \Lambda \Pi y + K_{P,Q}y = (\Lambda \Pi + K_{P,Q})y. \end{aligned}$$

□

Se $P' : X \rightarrow X$ e $Q' : Z \rightarrow Z$ denotarem outras projeções contínuas, tais que $\text{Ker } L = \text{Im } P'$ e $\text{Im } L = \text{Ker } Q'$, então teremos

$$LK_P = Id \text{ e } LK_{P'} = Id.$$

Portanto, $L(K_P - K_{P'}) = 0$, de onde segue que o operador $K_P - K_{P'}$ está definido em $\text{Im } L$ com valores em $\text{Ker } L$.

Proposição 3.7. *Sob as hipóteses impostas previamente aos operadores L, P, Q, P' e Q' , são válidas as seguintes igualdades:*

- (a) $K_P - K_{P'} = P(K_P - K_{P'}) = P'(K_P - K_{P'})$;
- (b) $PK_{P'} = -P'K_P = 0$;
- (c) $K_{P'} = (Id - P')K_P$.

Demonstração. (a) Como $L(K_P - K_{P'}) = 0$, temos $K_P L(K_P - K_{P'}) = 0$. Pela Proposição 3.4 - (c), temos $K_P L = Id - P$. Por conseguinte, $(Id - P)(K_P - K_{P'}) = 0$, ou seja, $K_P - K_{P'} = P(K_P - K_{P'})$.

De modo análogo, prova-se que $K_P - K_{P'} = P'(K_P - K_{P'})$.

- (b) Segue do item anterior que

$$P(K_P - K_{P'}) - P'(K_P - K_{P'}) = 0 \implies PK_P - PK_{P'} - P'K_P + P'K_{P'} = 0.$$

Como $PK_P = P'K_{P'} = 0$, concluímos que

$$PK_{P'} = -P'K_P.$$

Para provarmos que $PK_{P'} = 0$, basta notarmos que $\text{Im } K_{P'} \subset \text{Ker } P' = \text{Ker } P$.

(c) Por (a), temos $K_P - K_{P'} = P'(K_P - K_{P'}) = P'K_P$. Portanto,

$$K_{P'} = K_P - P'K_P = (Id - P')K_P.$$

□

Definição 3.8. Dados Ω um subconjunto aberto e limitado de X e um operador $N : \bar{\Omega} \rightarrow Z$, diremos que N é um operador L -compacto em $\bar{\Omega}$ se as seguintes condições forem satisfeitas:

v) o operador $\Pi N : \bar{\Omega} \rightarrow \text{Coker } L$ é contínuo e $\Pi N(\bar{\Omega})$ é limitado;

vi) $K_{P,Q}N$ é um operador compacto.

Observação 3.9. ΠN é contínuo e $\Pi N(\bar{\Omega})$ é limitado se, e somente se, QN é contínuo e $QN(\bar{\Omega})$ é limitado.

De fato, consideremos no espaço dos operadores lineares contínuos $T : X \rightarrow Z$ a seguinte norma:

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_Z}{\|x\|_X}.$$

Suponhamos que o operador ΠN seja contínuo e $\Pi N(\bar{\Omega})$ seja um conjunto limitado.

Dado $x \in \bar{\Omega}$, temos

$$\|\Pi Nx\|_q \leq \|\Pi N\| \|x\|_X < \infty. \quad (3.1)$$

Como $\Pi = \Pi_Q$, temos $\Pi_Q QN = \Pi N$. Do fato de Π_Q^{-1} ser uma aplicação contínua, por (3.1), obtemos

$$\|QNx\|_Z = \|\Pi_Q^{-1} \Pi_Q QNx\|_Z \leq \|\Pi_Q^{-1}\| \|\Pi_Q QNx\|_q = \|\Pi_Q^{-1}\| \|\Pi N\| \|x\|_X < \infty,$$

para todo $x \in \bar{\Omega}$. Assim, $QN(\bar{\Omega})$ é um conjunto limitado e QN é um operador limitado e, portanto, contínuo.

Reciprocamente, supondo que QN é um operador contínuo e $QN(\bar{\Omega})$ é um conjunto limitado, obtemos

$$\|QNx\|_Z \leq \|QN\| \|x\|_X < \infty, \text{ para todo } x \in \bar{\Omega}. \quad (3.2)$$

Como Π_Q é contínuo, segue de (3.2) que

$$\|\Pi Nx\|_q = \|\Pi_Q QNx\|_q \leq \|\Pi_Q\| \|QNx\|_Z \leq \|\Pi_Q\| \|QN\| \|x\|_X < \infty,$$

para todo $x \in \bar{\Omega}$. Portanto, ΠN é um operador limitado e, conseqüentemente, ΠN é contínuo e o conjunto $\Pi N(\bar{\Omega})$ é limitado, concluindo o desejado.

Consequentemente, dados um conjunto aberto e limitado $\Omega \subset X$ e um operador $N : \overline{\Omega} \rightarrow Z$, podemos dizer que o operador N é L -compacto em $\overline{\Omega}$ se o operador QN é contínuo, o conjunto $QN(\overline{\Omega})$ é limitado e $K_{P,Q}N$ é um operador compacto.

O próximo resultado infere que, sob as condições (i) – (vi), o operador $K_{P,Q}N$ é compacto, independente das projeções P e Q escolhidas.

Proposição 3.10. *Se as condições (i) – (vi) forem satisfeitas para (L, N, Ω) , então o operador $K_{P',Q'}$ é compacto, para qualquer par de projeções contínuas (P', Q') .*

Demonstração. Consideremos os seguintes isomorfismos $\Pi_Q : \text{Im } Q \rightarrow \text{Coker } L$ e $\Pi_{Q'} : \text{Im } Q' \rightarrow \text{Coker } L$.

Afirmamos que K_P está definida em $\text{Im}(Q - Q')$, isto é, $\text{Im}(Q - Q') \subset \text{Im } L$. De fato, dado $z \in Z$, temos

$$Q(Q - Q')z = Qz - QQ'z = Q(Id - Q')z = 0,$$

pois $(Id - Q')z \in \text{Ker } Q' = \text{Ker } Q$.

Assim, $\text{Im}(Q - Q') \subset \text{Ker } Q = \text{Im } L$, provando a afirmação feita.

Pela Proposição 3.7, segue que

$$\begin{aligned} K_{P',Q'}N &= K_{P'}(Id - Q')N = K_{P'}(Id - Q)N + K_{P'}(Q - Q')N = \\ &= (Id - P')K_P(Id - Q)N + (Id - P')K_P(Q - Q')N = \\ &= (Id - P')K_{P,Q}N + (Id - P')\tilde{K}_P(\Pi_Q^{-1} - \Pi_{Q'}^{-1})\Pi N, \end{aligned}$$

onde $\tilde{K}_P = K_P|_{\text{Im}(Q - Q')}$.

Como $\text{Im}(Q - Q') \subset \text{Im } Q$ e $\text{Im } Q$ possui dimensão finita, concluímos que \tilde{K}_P é contínua e, por conseguinte, $K_{P',Q'}N$ é contínua.

Mostremos, agora, que conjunto $K_{P',Q'}N(\overline{\Omega})$ é pré-compacto. Com efeito, por hipótese, $\Pi N(\overline{\Omega})$ é limitado. Como \tilde{K}_P, Π_Q^{-1} e $\Pi_{Q'}^{-1}$ são operadores contínuos e lineares, esses também são limitados. Logo, o conjunto $\tilde{K}_P(\Pi_Q^{-1} - \Pi_{Q'}^{-1})(\Pi N(\overline{\Omega}))$ é limitado. Segue da Proposição A.5 que $\dim \text{Im}(\tilde{K}_P) \leq \dim \text{Im}(Q - Q') < \infty$. Assim, $\tilde{K}_P(\Pi_Q^{-1} - \Pi_{Q'}^{-1})(\Pi N(\overline{\Omega}))$ está contido em um espaço de dimensão finita, concluindo o resultado. \square

3.2 Definição do grau de coincidência para perturbações de operadores de Fredholm

No capítulo posterior, teremos interesse em estudar a existência de solução para equações do tipo

$$Lx = Nx, \tag{3.3}$$

em um certo conjunto Ω , onde L é um operador de Fredholm e N é um operador L -compacto em $\bar{\Omega}$.

O conceito de grau coincidente de L e N em Ω será introduzido nesta seção a fim de auxiliar esse estudo.

Consideremos o seguinte operador $M : \bar{\Omega} \rightarrow X$ definido por $M = P + (\Lambda\Pi + K_{P,Q})N$, em que Λ é um isomorfismo de $\text{Coker } L$ sobre $\text{Ker } L$.

Proposição 3.11. *É válido que x é solução da equação (3.3) se, e somente se, $(Id - P)x = (\Lambda\Pi + K_{P,Q})Nx$, isto é, o conjunto de soluções de (3.3) é igual ao conjunto de pontos fixos da aplicação M .*

Demonstração. Basta tomarmos $y = Nx$ na Proposição 3.6. □

Proposição 3.12. *Se as condições (i) – (vi) forem satisfeitas, então o operador M será compacto em $\bar{\Omega}$.*

Demonstração. É fácil constatar que $(P + \Lambda\Pi N)(\bar{\Omega})$ é um conjunto limitado. Como $\text{Im}(P + \Lambda\Pi N) \subset \text{Ker } L$ e $\text{Ker } L$ possui dimensão finita, o operador $P + \Lambda\Pi N$ é compacto. E, como N é L -compacto em $\bar{\Omega}$, segue que $K_{P,Q}N$ é compacto, de onde concluímos que M também é um operador compacto. □

Se

$$vii) \ 0 \notin (L - N)(\text{dom } L \cap \partial\Omega),$$

então o grau de Leray-Schauder, $\text{deg}(Id - M, \Omega, 0)$, está bem definido.

Na sequência, vamos mostrar que $\text{deg}(Id - M, \Omega, 0)$ independe das projeções P e Q tomadas e que o número $|\text{deg}(Id - M, \Omega, 0)|$ também independe do isomorfismo $\Lambda : \text{Coker } L \rightarrow \text{Ker } L$ escolhido.

Denotemos por \mathbb{I}_L o conjunto dos isomorfismos de $\text{Coker } L$ sobre $\text{Ker } L$.

Definição 3.13. *Sejam Λ e Λ' dois isomorfismos pertencentes a \mathbb{I}_L . Diremos que Λ e Λ' são homotópicos em \mathbb{I}_L se existir uma aplicação contínua $\Gamma : \text{Coker } L \times [0, 1] \rightarrow \text{Ker } L$ tal que $\Gamma(\cdot, 0) = \Lambda$, $\Gamma(\cdot, 1) = \Lambda'$ e $\Gamma(\cdot, \lambda) \in \mathbb{I}_L$, para qualquer $\lambda \in [0, 1]$.*

Para facilitar a notação, ao invés de denotarmos a base do espaço $\text{Coker } L$ por $\{[v_1], \dots, [v_n]\}$, denotá-la-emos por $\{v_1, \dots, v_n\}$.

Proposição 3.14. *Os isomorfismos Λ e Λ' são homotópicos em \mathbb{I}_L se, e somente se, $\det(\Lambda'\Lambda^{-1}) > 0$.*

Demonstração. Suponhamos que os isomorfismos Λ e Λ' sejam homotópicos e consideremos $\Gamma : \text{Coker } L \times [0, 1] \rightarrow \text{Ker } L$ a aplicação contínua tal que $\Gamma(\cdot, 0) = \Lambda$, $\Gamma(\cdot, 1) = \Lambda'$ e $\Gamma(\cdot, \lambda) \in \mathbb{I}_L$, para qualquer $\lambda \in [0, 1]$.

Sejam $\{v_1, \dots, v_n\}$ e $\{w_1, \dots, w_n\}$ bases dos subespaços $\text{Coker } L$ e $\text{Ker } L$, respectivamente. Denotaremos as representações matriciais dos isomorfismos Λ e Λ' nas bases $\{v_1, \dots, v_n\}$ e $\{w_1, \dots, w_n\}$, em $\text{Coker } L$ e $\text{Ker } L$, respectivamente, pelos mesmos símbolos dos isomorfismos.

Consideremos a aplicação contínua $\Delta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\Delta(\lambda) = \det(\Gamma(\cdot, \lambda))$. Para todo $\lambda \in [0, 1]$, $\Gamma(\cdot, \lambda)$ é um isomorfismo e, portanto, $\Delta(\lambda) \neq 0$, para todo $\lambda \in [0, 1]$. Pela continuidade de Δ , sabemos que Δ possui o mesmo sinal em $[0, 1]$. Sendo assim,

$$\det(\Lambda' \Lambda^{-1}) = \det(\Lambda') \det(\Lambda^{-1}) = \frac{\det(\Lambda')}{\det(\Lambda)} = \frac{\det(\Gamma(\cdot, 1))}{\det(\Gamma(\cdot, 0))} = \frac{\Delta(1)}{\Delta(0)} > 0.$$

Reciprocamente, por hipótese, $\det \Lambda$ e $\det \Lambda'$ possuem o mesmo sinal e, por conseguinte, estão na mesma componente conexa do espaço das matrizes $n \times n$ invertíveis sob o corpo dos números reais, $GL(n, \mathbb{R})$. Mas, como $GL(n, \mathbb{R})$ é um conjunto conexo por caminhos (Teorema [B.13](#)), existe uma aplicação contínua $\tilde{\Gamma} : [0, 1] \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ tal que $\tilde{\Gamma}(0) = \Lambda$, $\tilde{\Gamma}(1) = \Lambda'$ e $\tilde{\Gamma}(\lambda) \in \mathbb{I}_L$, para todo $\lambda \in [0, 1]$. \square

Como consequência da Proposição [3.14](#), temos o próximo resultado.

Corolário 3.15. *O conjunto \mathbb{I}_L é particionado em duas classes de homotopia, a saber, as que possuem determinante positivo e as que possuem determinante negativo.*

Fixemos orientações para $\text{Coker } L$ e $\text{Ker } L$. Seja $\{v_1, \dots, v_n\}$ uma base do espaço $\text{Coker } L$ com a orientação adotada. Diremos que um isomorfismo $\Lambda : \text{Coker } L \rightarrow \text{Ker } L$ preserva a orientação se $\{\Lambda v_1, \dots, \Lambda v_n\}$ possuir a orientação adotada em $\text{Ker } L$. Caso contrário, diremos que Λ reverte a orientação.

Proposição 3.16. *Se $\text{Coker } L$ e $\text{Ker } L$ são orientados, então Λ e Λ' são homotópicos em \mathbb{I}_L se, e somente se, tais isomorfismos, simultaneamente, preservam a orientação ou revertem a orientação.*

Demonstração. Sejam $\{v_1, \dots, v_n\}$ e $\{w_1, \dots, w_n\}$ bases de $\text{Coker } L$ e $\text{Ker } L$, respectivamente, com as orientações escolhidas.

Sabemos que $\{\Lambda v_1, \dots, \Lambda v_n\} \subset \text{Ker } L$ segue a orientação de $\{w_1, \dots, w_n\}$ se, e somente se, a matriz $S = (s_{ij})$ definida por

$$\Lambda v_i = \sum_{j=1}^n s_{ji} w_j,$$

possuir determinante positivo ($\det S > 0$).

Consideremos $S' = (s'_{ij})$ a matriz correspondente a $\{\Lambda'v_1, \dots, \Lambda'v_n\}$ e $G = (g_{ij})$ a representação matricial de $\Lambda'\Lambda^{-1}$ na base $\{w_1, \dots, w_n\}$. Temos

$$\sum_{j=1}^n s'_{ji} w_j = \Lambda'v_i = (\Lambda'\Lambda^{-1})\Lambda v_i = \sum_{k=1}^n s_{ki} (\Lambda'\Lambda^{-1})w_k = \sum_{k=1}^n s_{ki} \sum_{j=1}^n g_{jk} w_j,$$

de onde segue que $S' = GS$.

Se Λ e Λ' são homotópicos, então, pela Proposição 3.14, temos $\det G > 0$. Portanto, $\det S > 0$ (ou $\det S < 0$) se, e somente se, $\det S' > 0$ (ou $\det S' < 0$), isto é, Λ preserva (ou reverte) a orientação se, e somente se, Λ' preserva (ou reverte) a orientação.

Reciprocamente, se supusermos que Λ e Λ' preservam (ou revertem) a orientação simultaneamente, teremos $\det S > 0$ e $\det S' > 0$ (ou $\det S < 0$ e $\det S' < 0$) e, portanto, $\det G > 0$. Segue, pois, da Proposição 3.14 que Λ e Λ' são homotópicos. \square

A prova do próximo lema pode ser encontrada em [19], página 16.

Lema 3.17 (Lema III.1, [19]). *Se Y é um espaço vetorial e $S, S' : Y \rightarrow Y$ são duas projeções tais que*

$$\text{Im } S = \text{Im } S' \neq \{0\},$$

então $S'' = aS + bS'$, com $a, b \in \mathbb{R}$, é uma projeção tal que $\text{Im } S'' = \text{Im } S$ se, e somente se, $a + b = 1$.

Para o próximo resultado, admitiremos que as condições (i) – (iv) estão satisfeitas para (L, N, Ω) .

Lema 3.18. *Se $P, P' : X \rightarrow X$ são projeções contínuas tais que $\text{Im } P = \text{Im } P' \neq \{0\}$ e $P'' = aP + bP'$ com $a + b = 1$, então*

$$K_{P''} = aK_P + bK_{P'}.$$

Demonstração. Da Proposição 3.7 segue que $K_{P'} = (Id - P')K_P$. Portanto,

$$\begin{aligned} K_{P''} &= (Id - P'')K_P = (Id - aP - bP')K_P = K_P - bP'K_P = (a + b)K_P - bP'K_P = \\ &= aK_P + b(Id - P')K_P = aK_P + bK_{P'}. \end{aligned}$$

\square

Proposição 3.19. *Se as condições (i) – (vii) estão satisfeitas para (L, N, Ω) , então $\deg(Id - M, \Omega, 0)$ depende apenas de L, N, Ω e da classe de homotopia Λ em \mathbb{I}_L .*

Demonstração. Sejam $P, P' : X \longrightarrow X$ e $Q, Q' : Z \longrightarrow Z$ projeções contínuas tais que

$$\text{Im } P = \text{Ker } L = \text{Im } P' \quad \text{e} \quad \text{Ker } Q = \text{Im } L = \text{Ker } Q'.$$

Sabemos que

$$\dim \text{Im } P = \dim \text{Ker } L = \dim \text{Coker } L = \dim \text{Im } Q.$$

Observamos que estamos admitindo que X e Z são espaços vetoriais não nulos. Caso contrário, o resultado seria trivial. Temos dois casos: ou $\text{Im } P = \{0\}$ ou $\text{Im } P \neq \{0\}$.

Se $\text{Im } P = \{0\}$, então $\text{Im } P' = \{0\}$, $\text{Im } Q = \{0\}$ e $\text{Im } Q' = \{0\}$. Dessa forma, para qualquer par de projeções (P, Q) , obtemos o mesmo operador $M = (\Lambda\Pi + K_{P,Q})N$.

Segue do item (vii) e da Proposição 3.11 que $x \neq Mx$, para todo $x \in \bar{\Omega}$.

Como $\text{Im } \Lambda\Pi N(\bar{\Omega})$ está contido em um espaço de dimensão finita, concluimos que M é um operador compacto. Isso nos mostra que o grau de Leray-Schauder está bem definido para o operador $Id - M$ e, obviamente, independe das projeções escolhidas.

Quando $\text{Im } P \neq \{0\}$, temos também $\text{Im } Q \neq \{0\}$.

Consideremos os isomorfismos $\Lambda, \Lambda' : \text{Coker } L \longrightarrow \text{Ker } L$ pertencentes a mesma classe de homotopia. Seja $\Gamma : \text{Coker } L \times [0, 1] \longrightarrow \text{Ker } L$ uma aplicação contínua tal que $\Gamma(\cdot, 0) = \Lambda$, $\Gamma(\cdot, 1) = \Lambda'$ e $\Gamma(\cdot, \lambda) \in \mathbb{I}_L$, para todo $\lambda \in [0, 1]$.

Para $\lambda \in [0, 1]$, defina $P_\lambda = (1 - \lambda)P + \lambda P'$, $Q_\lambda = (1 - \lambda)Q + \lambda Q'$ e $M_\lambda = P_\lambda + \Gamma(\Pi N(\cdot), \lambda) + K_{P_\lambda, Q_\lambda}N$.

Segue do Lema 3.17 que os operadores P_λ e Q_λ são projeções contínuas tais que $\text{Im } P_\lambda = \text{Ker } L$ e $\text{Ker } Q_\lambda = \text{Im } L$. Já pelo Lema 3.18, obtemos $K_{P_\lambda} = (1 - \lambda)K_P + \lambda K_{P'}$.

Por outro lado, para $\lambda \in [0, 1]$ qualquer, da condição (vii) e da Proposição 3.11, segue que

$$x \neq M_\lambda(x), \text{ para todo } x \in \partial\Omega.$$

Além disso, temos $M_0 = M$ e $M_1 = P' + (\Lambda'\Pi + K_{P', Q'})N := M'$.

Mostremos que M_λ é compacta em $\bar{\Omega}$, para todo $\lambda \in [0, 1]$. Pela Proposição 3.7, temos

$$\begin{aligned} K_{P_\lambda, Q_\lambda}N &= K_{P_\lambda}(Id - Q_\lambda)N = [(1 - \lambda)K_P + \lambda K_{P'}][Id - (1 - \lambda)Q - \lambda Q']N = \\ &= [(1 - \lambda)K_P - (1 - \lambda)^2K_PQ - \lambda(1 - \lambda)(Id - P)K_{P'}Q' + \lambda K_{P'} - \lambda(1 - \lambda)(Id - P')K_PQ]N - \\ &= -\lambda^2K_{P'}Q'N = (1 - \lambda)K_P(Id - Q)N + \lambda K_{P'}(Id - Q')N = (1 - \lambda)K_{P, Q}N + \lambda K_{P', Q'}N, \end{aligned}$$

de onde segue que K_{P_λ, Q_λ} é um operador compacto para todo $\lambda \in [0, 1]$.

Como $\text{Im } P_\lambda$ e $\text{Im } \Gamma(\Pi N(\cdot), \lambda)$, para todo $\lambda \in [0, 1]$, estão contidos em um espaço de dimensão finita ($\text{Ker } L$) e os conjuntos $P_\lambda(\bar{\Omega})$ e $\Gamma(\Pi N(\cdot), \lambda)(\bar{\Omega})$ são limitados, concluimos que M_λ é um operador compacto.

Segue da invariância do grau de Leray-Schauder por homotopia compacta que

$$\deg(Id - M, \Omega, 0) = \deg(Id - M_0, \Omega, 0) = \deg(Id - M_1, \Omega, 0) = \deg(Id - M', \Omega, 0).$$

□

Acabamos de ver que o número $\deg(Id - M, \Omega, 0)$ independe das projeções sobre X e Z escolhidas. Veremos adiante que o módulo desse número não dependerá também da classe do isomorfismo de Coker L sobre $\text{Ker } L$ adotada.

Lema 3.20. *Se $G : \text{Ker } L \rightarrow \text{Ker } L$ é um isomorfismo e $M' = P + (G\Pi + K_{P,Q})N$, então $Id - M' = (Id - P + GP)(Id - M)$.*

Demonstração. Usando o fato de que $M = P + (\Lambda\Pi + K_{P,Q})N$, obtemos

$$\begin{aligned} (Id - P + GP)(Id - M) &= Id - P - \Lambda\Pi N - K_{P,Q}N + P\Lambda\Pi N + \\ &\quad + PK_{P,Q}N - GP\Lambda\Pi N - GPK_{P,Q}N. \end{aligned}$$

Como Λ é um isomorfismo de Coker L sobre $\text{Ker } L$, $\text{Ker } L = \text{Im } P$ e $P^2 = P$, segue que $P\Lambda = \Lambda$. Em particular,

$$P\Lambda\Pi N = \Lambda\Pi N. \quad (3.4)$$

Pela Proposição 3.4 e por (3.4), concluímos que

$$(Id - P + GP)(Id - M) = Id - P - K_{P,Q}N - G\Lambda\Pi N = Id - M'.$$

□

Proposição 3.21. *Se $\Lambda, \Lambda' \in \mathbb{I}_L$ e $M' = P + (\Lambda'\Pi + K_{P,Q})N$, então*

$$\deg(Id - M', \Omega, 0) = \text{sgn}(\det \Lambda'\Lambda^{-1}) \deg(Id - M, \Omega, 0).$$

Demonstração. Considerando $G = \Lambda'\Lambda^{-1}$ no Lema 3.20, temos $Id - M' = (Id - P + \Lambda'\Lambda^{-1}P)(Id - M)$. Segue da Propriedade 2.16 que

$$\deg(Id - M', \Omega, 0) = \deg(Id - P + \Lambda'\Lambda^{-1}P, B_1, 0) \deg(Id - M, \Omega, 0).$$

Por outro lado, segue da definição do grau de Leray-Schauder que

$$\begin{aligned} \deg(Id - P + \Lambda'\Lambda^{-1}P, B_1, 0) &= \deg((Id - P + \Lambda'\Lambda^{-1})|_{B_1 \cap \text{Ker } L}, B_1 \cap \text{Ker } L, 0) = \\ &= \deg(\Lambda'\Lambda^{-1}, B_1 \cap \text{Ker } L, 0) = \text{sgn} \det(\Lambda'\Lambda^{-1}). \end{aligned}$$

□

O próximo resultado segue imediatamente da Proposição 3.21.

Corolário 3.22. *Se as condições (i) – (vii) forem satisfeitas para (L, N, Ω) , então $|\deg(\text{Id} - M, \Omega, 0)|$ dependerá apenas de L, N e Ω .*

Fixadas as orientações em $\text{Ker } L$ e $\text{Coker } L$, podemos introduzir o conceito de grau coincidente de L e N em Ω .

Definição 3.23. *Se os operadores L, N e o subconjunto Ω aberto limitado de X satisfazem as condições (i) – (vii), o grau coincidente $\deg((L, N), \Omega)$ de L e N em Ω é o número inteiro*

$$\deg((L, N), \Omega) = \deg(\text{Id} - M, \Omega, 0),$$

em que $M : \bar{\Omega} \rightarrow X$ é a aplicação definida por $M = P + (\Lambda\Pi + K_{P,Q})N$, onde $\Lambda : \text{Coker } L \rightarrow \text{Ker } L$ é um isomorfismo que preserva a orientação.

Observação 3.24. *Se $Z = X$ e $L = \text{Id}$, então $\text{Ker } L = \{0\}$ e $\text{Coker } L = \{0\}$ e, portanto, o operador identidade é um operador de Fredholm de índice zero. Considerando as projeções contínuas $P = 0 = Q$, temos $K_{P,Q} = \text{Id}$.*

Se N é um operador Id -compacto qualquer, teremos

$$\deg((\text{Id}, N), \Omega) = \deg(\text{Id} - N, \Omega, 0).$$

3.3 Propriedades do grau coincidente de L e N em Ω

Aqui, veremos as principais propriedades do grau coincidente de L e N em Ω , que são conseqüências das propriedades do grau de Leray-Schauder.

Suponhamos que as condições de (i) – (vii) estejam satisfeitas para (L, N, Ω) .

Propriedade 3.25 (Existência). *Se $\deg((L, N), \Omega) \neq 0$, então $0 \in (L - N)(\text{dom } L \cap \Omega)$.*

Propriedade 3.26 (Exclusão). *Se $\Omega_0 \subset \Omega$ é um conjunto aberto tal que $(L - N)^{-1}(0) \subset \Omega_0$, então $\deg((L, N), \Omega) = \deg((L, N), \Omega_0)$.*

Propriedade 3.27 (Aditividade). *Se $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, em que $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$ são conjuntos abertos e disjuntos, e $0 \notin (L - N)(\text{dom } L \cap \partial\Omega_i)$, para $i = 1, 2$, então $\deg((L, N), \Omega) = \deg((L, N), \Omega_1) + \deg((L, N), \Omega_2)$.*

Propriedade 3.28 (Teorema de Borsuk). *Se Ω é um conjunto aberto limitado de X que contém 0 , é simétrico em relação a 0 e $N(-x) = -Nx$ em $\partial\Omega$, então $\deg((L, N), \Omega)$ é um número ímpar.*

Definição 3.29. *Sejam $L : X \rightarrow Z$ um operador de Fredholm de índice zero, Ω um subconjunto aberto e limitado de X e \tilde{N} um operador definido em $\bar{\Omega} \times [0, 1]$ com valores em Z . Diremos que \tilde{N} é um operador L -compacto em $\bar{\Omega} \times [0, 1]$ se o operador $\tilde{N}_\lambda = \tilde{N}(\cdot, \lambda)$ for L -compacto em $\bar{\Omega}$, para cada $\lambda \in [0, 1]$.*

Teorema 3.30 (Invariância do grau por homotopia). *Se L é um operador de Fredholm de índice zero, $\tilde{N} : \bar{\Omega} \times [0, 1] \rightarrow Z$ é um operador L -compacto em $\bar{\Omega} \times [0, 1]$ e, para $\lambda \in [0, 1]$, tem-se*

$$0 \notin (L - \tilde{N}(\cdot, \lambda))(dom L \cap \partial\Omega),$$

então $\deg((L, \tilde{N}(\cdot, \lambda)), \Omega)$ independe de $\lambda \in [0, 1]$.

Demonstração. Esse resultado segue imediatamente da invariância por homotopia compacta do grau de Leray-Schauder. \square

Corolário 3.31. *O número $\deg((L, N), \Omega)$ depende somente de L, Ω e da restrição de N em $\partial\Omega$.*

Demonstração. Sejam N e N' operadores L -compactos em Ω tais que $N|_{\partial\Omega} = N'|_{\partial\Omega}$. Definamos a homotopia compacta $\tilde{N} : \bar{\Omega} \times [0, 1] \rightarrow Z$ por $\tilde{N}(\cdot, \lambda) = (1 - \lambda)N + \lambda N'$.

Afirmamos que $0 \notin (L - \tilde{N}(\cdot, \lambda))(dom L \cap \partial\Omega)$, para todo $\lambda \in [0, 1]$.

De fato, sejam $x \in \partial\Omega$ e $\lambda \in [0, 1]$. Por hipótese, temos $Nx = N'x$ e, portanto,

$$\tilde{N}(x, \lambda) = (1 - \lambda)Nx + \lambda N'x = Nx \neq Lx,$$

o que comprova a afirmação.

Logo, pelo Teorema [3.30](#), obtemos

$$\deg((L, N), \Omega) = \deg((L, \tilde{N}_0), \Omega) = \deg((L, \tilde{N}_1), \Omega) = \deg((L, N'), \Omega).$$

\square

Corolário 3.32 (Teorema de Rouché - Primeira Forma). *Suponhamos que as condições (i) – (vii) estejam satisfeitas para (L, N, Ω) . Seja $\mu > 0$ definido por*

$$\mu = \inf_{x \in \partial\Omega} \|x - Px - (\Lambda\Pi + K_{P,Q})Nx\|_X.$$

Então, para cada operador $N' : \bar{\Omega} \rightarrow Z$ tal que

$$\sup_{x \in \partial\Omega} \|(\Lambda\Pi + K_{P,Q})(Nx - N'x)\|_X < \mu,$$

tem-se

$$\deg((L, N), \Omega) = \deg((L, N'), \Omega).$$

Demonstração. Segue da Proposição 3.11 que $(\Lambda\Pi + K_{P,Q})N \neq (Id - P)$ em $\partial\Omega$. Assim, μ está bem definido e

$$\mu = \inf_{x \in \partial\Omega} \|x - Px - (\Lambda\Pi + K_{P,Q})Nx\|_X > 0.$$

Seja a homotopia L -compacta $\tilde{N} : \bar{\Omega} \times [0, 1] \rightarrow Z$ definida por $\tilde{N}(\cdot, \lambda) = (1 - \lambda)N + \lambda N'$.

Para $x \in \partial\Omega$, temos

$$\begin{aligned} \|x - Px - (\Lambda\Pi + K_{P,Q})\tilde{N}(x, \lambda)\|_X &\geq \|x - Px - (\Lambda\Pi + K_{P,Q})Nx\|_X - \\ &- \lambda\|(\Lambda\Pi + K_{P,Q})(Nx - N'x)\|_X > (1 - \lambda)\mu \geq 0. \end{aligned}$$

Portanto, $L \neq \tilde{N}(\cdot, \lambda)$ em $\partial\Omega$, para todo $\lambda \in [0, 1]$, e com isso o resultado segue do Teorema 3.30. \square

Para provarmos o Teorema de Rouché - Segunda Forma, precisaremos dos dois lemas a seguir.

Lema 3.33. *Para cada $x \in \text{dom } L \cap \bar{\Omega}$, tem-se*

$$(Id - M)x = (\Lambda\Pi + K_{P,Q})(L - N)x,$$

onde $\Lambda\Pi + K_{P,Q}$ é um isomorfismo algébrico entre Z e $\text{dom } L$.

Demonstração. Note que $QL = 0$ e $\Pi L = 0$, uma vez que $\text{Im } L = \text{Ker } Q = \text{Ker } \Pi$. Da Proposição 3.4, segue que

$$\begin{aligned} (\Lambda\Pi + K_{P,Q})(L - N) &= \Lambda\Pi L - \Lambda\Pi N + K_P(Id - Q)L - K_{P,Q}N = \\ &= K_P L - (\Lambda\Pi + K_{P,Q})N = Id - P - (\Lambda\Pi + K_{P,Q})N = Id - M. \end{aligned}$$

Na sequência, obteremos a inversa do operador $\Lambda\Pi + K_{P,Q}$ e, com isso, provaremos que $\Lambda\Pi + K_{P,Q}$ é um isomorfismo algébrico.

Dado $y \in \text{dom } L$, consideremos a equação

$$(\Lambda\Pi + K_{P,Q})z = y. \tag{3.5}$$

A equação (3.5) é equivalente a

$$\Lambda\Pi z = Py \quad \text{e} \quad K_{P,Q}z = (I - P)y. \tag{3.6}$$

Como $\Pi Q = \Pi$ e $\Lambda\Pi Q = \Lambda\Pi|_{\text{Im } Q}$ é um isomorfismo sobre $\text{Ker } L$, a equação (3.6) é equivalente a

$$Qz = (\Lambda\Pi_Q)^{-1}Py \quad \text{e} \quad (Id - Q)z = Ly. \tag{3.7}$$

Portanto, $z = [(\Lambda\Pi_Q)^{-1}P + L]y$, de onde concluímos que $(\Lambda\Pi + K_{P,Q})^{-1} = (\Lambda\Pi_Q)^{-1}P + L$. \square

Lema 3.34. *Se as condições (i) – (vii) forem satisfeitas para (L, N, Ω) e $K_{P,Q}$ for contínua, então existirá $\mu > 0$ tal que*

$$\inf_{x \in \text{dom } L \cap \partial\Omega} \|(Lx - Nx)\|_Z \geq \mu.$$

Demonstração. Suponhamos que o resultado não seja verdadeiro. Então, existe uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \partial\Omega \cap \text{dom } L$ tal que

$$\|Lx_n - Nx_n\|_Z \leq \frac{1}{n}.$$

Como $\Lambda\Pi + K_{P,Q}$ é contínuo, segue que $k = \|\Lambda\Pi + K_{P,Q}\| < \infty$.

Pelo Lema 3.33, temos

$$\|Idx_n - Mx_n\|_X \leq \|\Lambda\Pi + K_{P,Q}\| \|Lx_n - Nx_n\|_Z \leq \frac{k}{n}. \quad (3.8)$$

Como $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada e M é um operador compacto, pelo Lema A.18, a sequência $(Mx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência $(Mx_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ convergente, onde $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$. Seja $y \in X$ o limite dessa subsequência.

Pela equação (3.8), segue que y é limite da subsequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ e, portanto, $y \in \partial\Omega$. De (3.8) podemos inferir que $y - My = 0$, de onde segue que $y \in \partial\Omega \cap \text{dom } L$.

Como y é ponto fixo de M , temos $Ly = Ny$, contradizendo a hipótese descrita em (vii). Logo, o resultado é válido, ou seja, existe $\mu > 0$ tal que

$$\inf_{x \in \partial\Omega \cap \text{dom } L} \|Lx - Nx\|_Z \geq \mu.$$

□

Teorema 3.35 (Teorema de Rouché - Segunda Forma). *Suponhamos que as condições (i) – (vii) estejam satisfeitas para (L, N, Ω) . Se o operador $K_{P,Q}$ é contínuo, então, para cada operador L -compacto N' em $\bar{\Omega}$ tal que*

$$\sup_{x \in \partial\Omega} \|Nx - N'x\|_Z < \mu,$$

onde μ é o número obtido no Lema 3.34, temos $\deg((L, N), \Omega) = \deg((L, N'), \Omega)$.

Demonstração. Consideremos a homotopia L -compacta $\tilde{N} : \bar{\Omega} \times [0, 1] \rightarrow Z$ definida por $\tilde{N}(\cdot, \lambda) = (1 - \lambda)N + \lambda N'$, para $\lambda \in [0, 1]$.

Pelo Lema 3.34, segue que

$$\|Lx - \tilde{N}(x, \lambda)\|_Z \geq \|Lx - Nx\|_Z - \lambda \|Nx - N'x\|_Z > (1 - \lambda)\mu \geq 0,$$

para $x \in \partial\Omega \cap \text{dom } L$ e $\lambda \in [0, 1]$.

Portanto, $0 \notin (L - \tilde{N}(\cdot, \lambda))(\text{dom } L \cap \partial\Omega)$, para todo $\lambda \in [0, 1]$, e o resultado segue do Teorema 3.30. □

3.4 Teorema de Continuação de Mawhin

Conforme dito anteriormente, temos interesse em provar a existência de solução para a equação

$$Lx = Nx. \quad (3.9)$$

Nesta seção ganhará destaque o Teorema de Continuação de Mawhin, provado pelo matemático belga Jean Mawhin em 1972, que estabelece condições sobre L e N que garantem a existência de solução para a equação (3.9).

Sejam $L : \text{dom } L \rightarrow Z$ um operador de Fredholm de índice zero e $N' : \bar{\Omega} \times [0, 1] \rightarrow Z$ um operador L -compacto em $\bar{\Omega} \times [0, 1]$. Consideremos $N = N'(\cdot, 1)$ e a família de equações

$$Lx = \lambda N'(x, \lambda), \quad \lambda \in [0, 1]. \quad (3.10)$$

Lema 3.36. *Para cada $\lambda \in (0, 1]$, o conjunto de soluções da equação (3.10) é igual ao conjunto de soluções da equação*

$$Lx = QN'(x, \lambda) + \lambda(Id - Q)N'(x, \lambda). \quad (3.11)$$

E, se $\lambda = 0$, toda solução de (3.11) é uma solução de (3.10).

Demonstração. Sejam $\lambda \in (0, 1]$ e $x \in \text{dom } L$ uma solução de (3.10). Como $\text{Ker } Q = \text{Im } L$, temos $Lx \in \text{Ker } Q$. Assim,

$$0 = QLx = \lambda QN'(x, \lambda) \implies QN'(x, \lambda) = 0.$$

Portanto,

$$Lx = \lambda N'(x, \lambda) = \lambda N'(x, \lambda) - \lambda QN'(x, \lambda) + QN'(x, \lambda) = QN'(x, \lambda) + \lambda(Id - Q)N'(x, \lambda),$$

de onde concluímos que x é solução da equação (3.11).

Consideremos, agora, $\lambda \in (0, 1]$ e $x \in \text{dom } L$ uma solução da equação (3.11). Como $Lx \in \text{Ker } Q$, temos

$$0 = QLx = Q^2N'(x, \lambda) + \lambda(Q - Q^2)N'(x, \lambda) = QN'(x, \lambda).$$

Dessa forma,

$$Lx = QN'(x, \lambda) + \lambda(Id - Q)N'(x, \lambda) = \lambda N'(x, \lambda)$$

e, conseqüentemente, $x \in \text{dom } L$ é solução de (3.10).

Finalmente, consideremos o caso em que $\lambda = 0$ e tomemos $x \in \text{dom } L$ uma solução de (3.11). Conforme feito anteriormente, temos $QN'(x, 0) = 0$ e

$$Lx = QN'(x, 0) + 0(Id - Q)N'(x, 0) = QN'(x, 0) = 0 = 0N'(x, 0),$$

de onde segue que $x \in \text{dom } L$ é solução de (3.10). □

Agora, somos capazes de demonstrar o teorema principal deste capítulo.

Teorema 3.37 (Teorema de Continuação de Mawhin). *Sejam X, Z espaços de Banach e Ω um subconjunto aberto e limitado de X . Consideremos a equação*

$$Lx = \lambda N'(x, \lambda),$$

em que $L : \text{dom } L \subset X \rightarrow Z$ é um operador de Fredholm de índice zero, $\lambda \in [0, 1]$ e $N' : \bar{\Omega} \times [0, 1] \rightarrow Z$ é um operador L -compacto em $\bar{\Omega} \times [0, 1]$.

Sejam $P : X \rightarrow X$ e $Q : Z \rightarrow Z$ projeções contínuas tais que $\text{Im } P = \text{Ker } L$ e $\text{Ker } Q = \text{Im } L$.

Ademais, suponhamos que as seguintes condições estejam satisfeitas:

- (I) Para $\lambda \in (0, 1)$ e $x \in \partial\Omega \cap \text{dom } L$, tem-se $Lx \neq \lambda N'(x, \lambda)$;
- (II) Para $x \in \partial\Omega \cap \text{Ker } L$, tem-se $\Pi N'(x, 0) \neq 0$;
- (III) $\deg(\Pi N'(\cdot, 0)|_{\Omega \cap \text{Ker } L}, \Omega \cap \text{Ker } L, 0) \neq 0$.

Sob as condições anteriores, a equação $Lx = N'(x, 1) = Nx$ possui pelo menos uma solução em $\bar{\Omega} \cap \text{dom } L$.

Demonstração. Definamos o operador $\tilde{N} : \bar{\Omega} \times [0, 1] \rightarrow Z$ por $\tilde{N}(x, \lambda) = QN'(x, \lambda) + \lambda(\text{Id} - Q)N'(x, \lambda)$, para $(x, \lambda) \in \bar{\Omega} \times [0, 1]$.

Se existir solução em $\bar{\Omega} \cap \text{dom } L$ para a equação

$$Lx = \tilde{N}(x, 1) = N'(x, 1) = Nx,$$

o resultado estará provado.

Pois bem, suponhamos então que $Lx \neq \tilde{N}(x, 1)$ para todo $x \in \text{dom } L \cap \bar{\Omega}$, em particular, para $x \in \text{dom } L \cap \partial\Omega$.

Para demonstrarmos este resultado, utilizaremos o Teorema 3.30. Para isso, precisamos provar que $0 \notin (L - \tilde{N}(\cdot, \lambda))(\text{dom } L \cap \partial\Omega)$, para $\lambda \in [0, 1]$, levando em conta que foi suposto que $0 \notin (L - N)(\text{dom } L \cap \partial\Omega)$. É o que faremos nas próximas linhas.

Inicialmente, observemos que, como N' é um operador L -compacto em $\bar{\Omega} \times [0, 1]$ e Q é um operador contínuo, então \tilde{N} é um operador compacto em $\bar{\Omega} \times [0, 1]$.

Quando $\lambda \in (0, 1)$ e $x \in \partial\Omega \cap \text{dom } L$, segue de (I) e do Lema 3.36 que $Lx \neq \tilde{N}(x, \lambda)$.

Consideremos, pois, $\lambda = 0$ e suponhamos que exista $x \in \partial\Omega \cap \text{dom } L$ tal que $Lx = \tilde{N}(x, 0)$. Pelo Lema 3.36, temos $Lx = 0 = 0N'(x, 0)$, de onde segue que $x \in \text{Ker } L$. Porém, como $x \in \text{Ker } L$, $QN'(x, 0) = 0$ e, portanto, $\Pi N'(x, 0) = 0$, o que contradiz a hipótese descrita em (II).

Portanto, $0 \notin (L - \tilde{N}(\cdot, \lambda))(\text{dom } L \cap \partial\Omega)$, para todo $\lambda \in [0, 1]$. Pelo Teorema (3.30), segue que $\deg((L, \tilde{N}(\cdot, \lambda), \Omega)$ independe de $\lambda \in [0, 1]$. Logo,

$$\begin{aligned} \deg((L, \tilde{N}(\cdot, 1), \Omega) &= \deg((L, \tilde{N}(\cdot, 0), \Omega) = \deg((L, QN'(\cdot, 0)), \Omega) = \\ &= \deg(Id - P - (\Lambda\Pi + K_{P,Q})QN'(\cdot, 0), \Omega, 0) = \deg(Id - P - \Lambda\Pi QN'(\cdot, 0), \Omega, 0) = \\ &= \deg(Id - P - \Lambda\Pi N'(\cdot, 0), \Omega, 0). \end{aligned}$$

Há dois casos para estudarmos: quando $\text{Ker } L = \{0\}$ e quando $\text{Ker } L \neq \{0\}$.

Se $\text{Ker } L = \{0\}$, então $P = Q = \Pi = 0$. Assim,

$$\deg(Id - P - \Lambda\Pi N'(\cdot, 0), \Omega, 0) = \deg(Id, \Omega, 0).$$

Afirmamos que $0 \in \Omega$. De fato, como $\Pi = 0$, por (II), temos $\text{Ker } L \cap \partial\Omega = \emptyset$, de onde segue que $0 \notin \partial\Omega$. E, se $0 \notin \bar{\Omega}$, teríamos $\deg(\Pi N'(\cdot, 0)|_{\Omega \cap \text{Ker } L}, \Omega \cap \text{Ker } L, 0) = 0$, contradizendo (III).

Então,

$$\deg((L, \tilde{N}(\cdot, 1), \Omega) = \deg(Id, \Omega, 0) \neq 0.$$

Se $\text{Ker } L \neq \{0\}$, então, pela definição do grau de Leray-Schauder, temos

$$\begin{aligned} \deg(Id - P - \Lambda\Pi N'(\cdot, 0), \Omega, 0) &= \deg((Id - P - \Lambda\Pi N'(\cdot, 0))|_{\Omega \cap \text{Ker } L}, \Omega \cap \text{Ker } L, 0) = \\ &= \deg(-\Lambda\Pi N'(\cdot, 0)|_{\Omega \cap \text{Ker } L}, \Omega \cap \text{Ker } L, 0) = \\ &= \pm \text{sgn}(\det \Lambda) \deg(\Pi N'(\cdot, 0)|_{\Omega \cap \text{Ker } L}, \text{Ker } L \cap \Omega, 0). \end{aligned}$$

Por (III) segue que $\deg(\Pi N'(\cdot, 0)|_{\Omega \cap \text{Ker } L}, \text{Ker } L \cap \Omega, 0) \neq 0$ e, por conseguinte, $\deg(Id - P - \Lambda\Pi N'(\cdot, 0), \Omega, 0) \neq 0$.

Em ambos os casos, concluímos que $\deg((L, N'(\cdot, 1), \Omega) \neq 0$ e, da Propriedade 3.25, segue que a equação $Lx = N'(x, 1)$ possui solução. \square

No Teorema de Continuação de Mawhin, podemos substituir a condição (III) por

$$\deg(QN'(\cdot, 0)|_{\Omega \cap \text{Ker } L}, \Omega \cap \text{Ker } L, 0) \neq 0,$$

conforme veremos a seguir.

Corolário 3.38. *Sejam X, Z espaços de Banach e Ω um subconjunto aberto e limitado de X . Consideremos a equação*

$$Lx = \lambda N'(x, \lambda),$$

em que $L : \text{dom } L \subset X \rightarrow Z$ é um operador de Fredholm de índice zero, $\lambda \in [0, 1]$ e $N' : \bar{\Omega} \times [0, 1] \rightarrow Z$ é um operador L -compacto em $\bar{\Omega} \times [0, 1]$.

Sejam $P : X \rightarrow X$ e $Q : Z \rightarrow Z$ projeções contínuas tais que $\text{Im } P = \text{Ker } L$ e $\text{Ker } Q = \text{Im } L$.

Suponhamos, também, que as seguintes condições estejam satisfeitas:

(I) Para $\lambda \in (0, 1)$ e $x \in \partial\Omega \cap \text{dom} L$, tem-se $Lx \neq \lambda N'(x, \lambda)$;

(II) Para $x \in \partial\Omega \cap \text{Ker} L$, tem-se $QN'(x, 0) \neq 0$;

(III) $\deg(QN'(\cdot, 0)|_{\Omega \cap \text{Ker} L}, \Omega \cap \text{Ker} L, 0) \neq 0$.

Sob as condições anteriores, a equação $Lx = N'(x, 1) = Nx$ possui pelo menos uma solução em $\bar{\Omega} \cap \text{dom} L$.

Demonstração. Notemos que $QN' = \Pi_Q^{-1} \Pi_Q QN'$, em que Π_Q é um isomorfismo. Usando o fato de que $\Pi_Q = \Pi$, obtemos

$$\begin{aligned} \deg(QN'(\cdot, 0)|_{\Omega \cap \text{Ker} L}, \Omega \cap \text{Ker} L, 0) &= \deg(\Pi_Q^{-1} \Pi_Q QN'(\cdot, 0)|_{\Omega \cap \text{Ker} L}, \Omega \cap \text{Ker} L, 0) = \\ &= \text{sgn}(\det \Pi_Q^{-1}) \deg(\Pi_Q QN'(\cdot, 0)|_{\Omega \cap \text{Ker} L}, \Omega \cap \text{Ker} L, 0) = \\ &= \text{sgn}(\det \Pi_Q^{-1}) \deg(\Pi QN'(\cdot, 0)|_{\Omega \cap \text{Ker} L}, \Omega \cap \text{Ker} L, 0) = \\ &= \text{sgn}(\det \Pi_Q^{-1}) \deg(\Pi N'(\cdot, 0)|_{\Omega \cap \text{Ker} L}, \Omega \cap \text{Ker} L, 0). \end{aligned}$$

Portanto, $\deg(QN'(\cdot, 0)|_{\Omega \cap \text{Ker} L}, \Omega \cap \text{Ker} L, 0) \neq 0$ se, e somente se, $\deg(\Pi N'(\cdot, 0)|_{\Omega \cap \text{Ker} L}, \Omega \cap \text{Ker} L, 0) \neq 0$.

O resultado segue imediatamente do Teorema de Continuação de Mawhin. \square

No próximo capítulo, também será usada a seguinte versão do Teorema de Continuação de Mawhin.

Corolário 3.39. *Sejam X, Z espaços de Banach e Ω um subconjunto aberto e limitado de X . Consideremos a equação*

$$Lx = \lambda N'(x),$$

em que $L : \text{dom} L \subset X \rightarrow Z$ é um operador de Fredholm de índice zero, $\lambda \in [0, 1]$ e $N' : \bar{\Omega} \rightarrow Z$ é um operador L -compacto em $\bar{\Omega}$.

Sejam $P : X \rightarrow X$ e $Q : Z \rightarrow Z$ projeções contínuas tais que $\text{Im} P = \text{Ker} L$ e $\text{Ker} Q = \text{Im} L$.

Além disso, suponhamos que as seguintes condições estejam satisfeitas:

(I) Para $\lambda \in (0, 1)$ e $x \in \partial\Omega \cap \text{dom} L$, tem-se $Lx \neq \lambda N'(x)$;

(II) Para $x \in \partial\Omega \cap \text{Ker} L$, tem-se $QN'(x) \neq 0$;

(III) $\deg(QN'|_{\Omega \cap \text{Ker} L}, \Omega \cap \text{Ker} L, 0) \neq 0$.

Sob as condições anteriores, a equação $Lx = N'x$ possui pelo menos uma solução em $\bar{\Omega} \cap \text{dom} L$.

Demonstração. Definamos $N'' : \bar{\Omega} \times [0, 1] \rightarrow Z$ por $N''(x, \lambda) = N'(x)$, para $(x, \lambda) \in \bar{\Omega} \times [0, 1]$. Pelo Corolário [3.38](#), a equação $Lx = N''(x, 1) = N'x$ possui pelo menos uma solução em $\bar{\Omega} \cap \text{dom} L$. A prova está completa. \square

4 Existência de soluções periódicas para certas equações diferenciais funcionais com retardo

Neste capítulo, estudaremos a existência de soluções periódicas para dois modelos envolvendo equações diferenciais funcionais com retardo. Como dito previamente, utilizaremos o Teorema da Continuação de Mawhin. Para tal, precisaremos definir espaços de Banach X e Z , um subconjunto Ω aberto e limitado de X , um operador L de Fredholm de índice zero, um operador N L -compacto em $\bar{\Omega}$ e projeções contínuas P e Q sobre X e Z , respectivamente, tais que $\text{Ker } L = \text{Im } P$ e $\text{Im } L = \text{Ker } Q$, que satisfaçam as condições do Teorema da Continuação de Mawhin.

Inicialmente, introduziremos, o conceito de solução de um tipo de equação diferencial funcional com retardo que engloba as equações que serão abordadas no trabalho.

Sejam $\sigma, \varsigma : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ funções contínuas e limitadas e $\tau = \sup_{t \in \mathbb{R}} \{\sigma(t), \varsigma(t)\}$. Denotemos por \tilde{C} o espaço de Banach $C([-\tau, 0], \mathbb{R})$ munido da norma

$$\|\phi\|_{\tilde{C}} = \sup_{s \in [-\tau, 0]} |\phi(s)|.$$

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$, $A > 0$, $D \subset \mathbb{R}^7$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $k \geq 1$. A equação

$$x^{(k)}(t) = f(t, x(t), x^{k-1}(t), x(t - \sigma(t)), x'(t - \sigma(t)), x(t - \varsigma(t)), x'(t - \varsigma(t))) \quad (4.1)$$

é um tipo de *equação diferencial funcional com retardo (EDFR) em D de ordem k* .

Definição 4.1. Diremos que $x \in C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ é solução de (4.1) em $[\alpha - \tau, \alpha + A)$, se $(t, x(t), x^{k-1}(t), x(t - \sigma(t)), x'(t - \sigma(t)), x(t - \varsigma(t)), x'(t - \varsigma(t))) \in D$ e $x(t)$ satisfizer (4.1), para $t \in [\alpha, \alpha + A)$.

Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\phi \in \tilde{C}$, diremos que $x(\alpha, \phi)$ é solução da equação (4.1) passando por (α, ϕ) , se $x(\alpha, \phi)$ for solução de (4.1) em $[\alpha - \tau, \alpha + A)$ e $x(\alpha, \phi) = \phi$ em $[-\tau, 0]$.

Além disso, dado $\omega > 0$, se $x \in C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ for uma solução de (4.1) em \mathbb{R} e $x(t + \omega) = x(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, então diremos que x é uma solução ω -periódica de (4.1).

Para um estudo mais abrangente a respeito dessas e outras classes de equações diferenciais funcionais (EDF) e equações diferenciais funcionais com retardo (EDFR), sugerimos ao leitor que consulte as referências [21], [25] e [27].

As notações utilizadas ao longo deste capítulo estão especificadas na lista de símbolos.

4.1 Modelo de moscas-varejeiras de Nicholson com retardo

Nesta seção, estudaremos as equações diferenciais funcionais com retardo usadas no modelo de moscas-varejeiras de Nicholson com parâmetros periódicos considerando o retardo constante. Devido às mudanças no ambiente, torna-se inadequado admitirmos o modelo com retardo constante e, por este motivo, também analisaremos o modelo de moscas-varejeiras modificado de Nicholson, onde o retardo não é necessariamente constante. Dentre os dois modelos, o modelo modificado é considerado o mais próximo do mundo real.

Usando o Teorema de Continuação de Mawhin e a teoria do grau coincidente, obtemos condições suficientes para garantir a existência de soluções periódicas positivas para o modelo de moscas-varejeiras de Nicholson modificado. Ao considerar o retardo constante, veremos que o primeiro modelo citado é um caso particular do modelo modificado, o que possibilita a obtenção de condições suficientes para a existência de soluções periódicas positivas para o primeiro modelo.

A referência para esta seção é o artigo “*Periodic solutions of delayed periodic Nicholson’s blowflies models*”, de Chen ([13]). Aqui, acrescentamos a demonstração da existência de solução periódica para o caso em que o retardo é um múltiplo do período e exemplos para estender o trabalho de Chen.

É de grande valia informar que o conteúdo desta seção é o nosso trabalho “*Soluções periódicas dos modelos de moscas varejeiras de Nicholson com retardo*” ([7]), com o acréscimo de alguns poucos detalhes.

4.1.1 Introdução ao modelo

Modelos mais realistas e interessantes de dinâmica populacional de uma única ou múltiplas espécies devem levar em conta o ambiente e os efeitos do tempo passado. A equação

$$x'(t) = -\delta(t)x(t) + R(t)x(t - m\omega) \exp[-ax(t - m\omega)] \quad (4.2)$$

foi introduzida por Nicholson para modelar uma população de moscas de laboratório, na qual é assumido que os parâmetros biológicos e ambientais são periódicos com um período comum. Para saber mais a respeito do experimento de Nicholson, sugerimos ao leitor que consulte a referência [41].

Na equação (4.2), a é uma constante positiva, m é um número inteiro positivo, $\delta(t)$ e $R(t)$ são funções contínuas, periódicas e positivas de período $\omega > 0$. Em termos biológicos, x é o tamanho da população de moscas-varejeiras, R é o máximo per capita de produção diária de ovos, $\frac{1}{a}$ é o tamanho que a população reproduz a sua taxa diária máxima, δ é o máximo per capita da taxa de mortalidade diária adulta e o retardo $m\omega$ é o tempo de geração, ou seja, o tempo que leva do nascimento até a maturidade. Em [42], Saker e Agarwal provaram que a equação (4.2) possui solução ω -periódica se

$$\min_{t \in [0, \omega]} R(t) > \max_{t \in [0, \omega]} \delta(t). \quad (4.3)$$

Com as constantes mudanças no ambiente, torna-se inadequado admitirmos o modelo com retardo sendo uma constante e muito menos um múltiplo do período. Portanto, consideraremos o seguinte modelo de moscas-varejeiras modificado de Nicholson

$$x'(t) = -\delta(t)x(t) + R(t)x(t - \sigma(t)) \exp[-a(t)x(t - \zeta(t))], \quad (4.4)$$

em que

- (a) $\delta, R, \sigma, \zeta : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ são funções contínuas e ω -periódicas, com $\omega > 0$;
- (b) $a : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ é uma função contínua e ω -periódica;
- (c) $\int_0^\omega \delta(t) dt > 0$;
- (d) $\int_0^\omega R(t) dt > 0$.

Apesar de já terem sido descritos no início do trabalho na lista de símbolos, a fim de facilitarmos a leitura, destacamos que os próximos símbolos serão usados na sequência.

- ▷ $C_\omega^+ = \{\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+); \varphi(t + \omega) = \varphi(t), t \in \mathbb{R}\}$;
- ▷ $\mathbb{N}_\omega = \{\varphi \in C_\omega^+; \varphi = m\omega, \text{ para algum } m \in \mathbb{N}\}$;
- ▷ $M_f = \max\{f(t); t \in [0, \omega]\}$;
- ▷ $m_f = \min\{f(t); t \in [0, \omega]\}$;
- ▷ $\bar{f} = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega f(t) dt$.

4.1.2 Existência de soluções periódicas

Vamos considerar a equação (4.4) com as condições (a), (b), (c) e (d) satisfeitas. Assumamos que

$$(C_1) \quad \bar{R} > \bar{\delta} \exp(2\omega\bar{\delta}) \text{ se } \sigma \in C_\omega^+ \setminus \mathbb{N}_\omega.$$

$$(C_2) \quad \bar{R} > \bar{\delta} \text{ se } \sigma \in \mathbb{N}_\omega.$$

Os principais resultados desta seção são os seguintes teoremas.

Teorema 4.2. *Se a condição (C₁) está satisfeita, então a equação (4.4) tem pelo menos uma solução ω -periódica em \mathbb{R} .*

Teorema 4.3. *Se a hipótese (C₂) está satisfeita, então a equação (4.4) tem pelo menos uma solução ω -periódica em \mathbb{R} .*

Visando utilizar o Teorema de Continuação de Mawhin (Corolário 3.39) para demonstrar os Teoremas 4.2 e 4.3, encontraremos uma equação a operadores $Lx = Nx$, onde L é um operador de Fredholm de índice zero e N é um operador L -compacto, ambos definidos e tomando valores em espaços adequados de funções, de forma que da existência de solução para tal equação seja possível concluir que a equação (4.4) possui pelo menos uma solução ω -periódica em \mathbb{R} .

Primeiramente, notemos que, quando $\sigma \in \mathbb{N}_\omega$, a equação (4.4) se reduz a

$$x'(t) = -\delta(t)x(t) + R(t)x(t - m\omega) \exp[-a(t)x(t - \zeta(t))]. \quad (4.5)$$

Então, uma função é solução ω -periódica de (4.5) se, e somente se, é solução ω -periódica de

$$x'(t) = -\delta(t)x(t) + R(t)x(t) \exp[-a(t)x(t - \zeta(t))]. \quad (4.6)$$

Sejam $\tau = \max_{t \in [0, \omega]} \{\sigma(t), \zeta(t)\}$ e $\varphi \in C([- \tau, 0], [0, \infty))$ com $\varphi(0) > 0$. Pelo método de passos (veja [24], página 28) é possível mostrar que existe uma única solução de (4.4) definida em $[- \tau, \infty)$. O próximo resultado afirma que a solução da equação (4.4), $x(t)$, passando por $(0, \varphi)$ satisfaz $x(t) > 0$, para $t > 0$.

Lema 4.4. *Sejam τ e φ definidos anteriormente. Se $x(t)$ é solução do sistema*

$$\begin{cases} x'(t) = -\delta(t)x(t) + R(t)x(t - \sigma(t)) \exp[-a(t)x(t - \zeta(t))] \\ x(t) = \varphi(t), t \in [-\tau, 0] \end{cases}, \quad (4.7)$$

então $x(t) > 0$, para todo $t > 0$.

Demonstração. Suponhamos que exista $t_0 \in [0, \tau]$ tal que $x(t_0) = 0$. Sem perda de generalidade, podemos tomar t_0 como sendo o zero da equação $x(t) = 0$ mais próximo de 0. Pelo Teorema do Valor Intermediário (Teorema [B.16](#)), podemos afirmar que $x(t) \geq 0$, para todo $t \in [0, t_0]$. Como $\phi(t) \geq 0$ para todo $t \in [-\tau, 0]$, segue que $x(t) \geq 0$, para todo $t \in [-\tau, t_0]$.

Como $-\tau \leq t - \sigma(t) \leq t \leq t_0$, para todo $t \in [0, t_0]$, segue que

$$x(t - \sigma(t)) \geq 0. \quad (4.8)$$

Por [\(4.8\)](#), temos

$$x'(t) = -\delta(t)x(t) + R(t)x(t - \sigma(t)) \exp[-a(t)x(t - \varsigma(t))] \geq -m_\delta x(t),$$

para todo $t \in [0, t_0]$, de onde obtemos

$$(x(t) \exp(m_\delta t))' \geq 0, \text{ para todo } t \in [0, t_0].$$

Portanto,

$$\exp(m_\delta t_0)x(t_0) \geq \varphi(0) > 0,$$

de onde segue que $x(t_0) > 0$, contradizendo o fato de que $x(t_0) = 0$.

Logo, $x(t) > 0$ para todo $t \in [0, \tau]$ e, pelo método de passos, podemos concluir que $x(t) > 0$ para todo $t > 0$. \square

Podemos, assim, tomar $x(t) = \exp[y(t)]$ e reescrever as equações [\(4.4\)](#) e [\(4.6\)](#) como

$$y'(t) = -\delta(t) + R(t) \exp[y(t - \sigma(t)) - y(t) - a(t) \exp[y(t - \varsigma(t))]] \quad (4.9)$$

e

$$y'(t) = -\delta(t) + R(t) \exp[-a(t) \exp[y(t - \varsigma(t))]], \quad (4.10)$$

respectivamente.

Sejam

$$Z = X = \{y \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}); y(t + \omega) = y(t), t \in \mathbb{R}\}$$

munidos da norma $\|y\| = \max_{t \in [0, \omega]} |y(t)|$. Tais espaços são de Banach.

Definamos $\text{dom } L = \{y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}); y(t + \omega) = y(t), t \in \mathbb{R}\}$ e

$$Ly = y', \quad \text{para } y \in \text{dom } L.$$

Claramente $\text{dom } L \subset X$.

Definamos, agora,

$$N_1(y(t)) = -\delta(t) + R(t) \exp[y(t - \sigma(t)) - y(t) - a(t) \exp[y(t - \varsigma(t))]]$$

e

$$N_2(y(t)) = -\delta(t) + R(t) \exp[-a(t) \exp[y(t - \varsigma(t))]].$$

Consideremos as seguintes projeções contínuas:

$$Py(t) = Qy(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega y(t) dt, \text{ para } y \in X, t \in \mathbb{R}.$$

Proposição 4.5. *L é um operador de Fredholm de índice zero.*

Demonstração. Faremos a prova deste resultado em três etapas.

- (I) Primeiro, verificaremos que $\text{Im } L = \{z \in Z; \int_0^\omega z(t) dt = 0\}$. De fato, se $z \in \text{Im } L$, então existe $x \in \text{dom } L$ tal que $x' = Lx = z$. Logo,

$$\int_0^\omega z(t) dt = \int_0^\omega x'(t) dt = x(\omega) - x(0) = 0,$$

uma vez que x é ω -periódica.

Agora, seja $z \in Z$ tal que $\int_0^\omega z(t) dt = 0$. Considere $x(t) = \int_0^t z(s) ds$. Perceba que x é diferenciável e, além disso,

$$\begin{aligned} x(t + \omega) &= \int_0^{t+\omega} z(s) ds = \int_0^\omega z(s) ds + \int_\omega^{t+\omega} z(s) ds = 0 + \int_0^t z(s - \omega) ds = \\ &= \int_0^t z(s) ds = x(t), \end{aligned}$$

pois z é ω -periódica. Portanto, $x \in \text{dom } L$ e, conseqüentemente, $z \in \text{Im } L$.

Vamos, então, provar que $\text{Im } L$ é um conjunto fechado. Pois bem, se $z \in \overline{\text{Im } L}$, então existe uma sequência $(z_n) \subset \text{Im } L$ tal que

$$\int_0^\omega z_n(t) dt = 0 \quad \text{e} \quad z_n \rightarrow z.$$

Como a convergência $z_n \rightarrow z$ é uniforme, temos

$$\int_0^\omega z_n(t) dt \rightarrow \int_0^\omega z(t) dt,$$

de onde segue que $\int_0^\omega z(t) dt = 0$ e $z \in \text{Im } L$. Por conseguinte, o conjunto $\text{Im } L$ é fechado.

- (II) Se $z \in \text{Ker } L$, então $z' = 0$, ou seja, $z'(t) = 0$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Deste modo, $z(t) = c_1 \in \mathbb{R}$, para todo $t \in \mathbb{R}$, ou seja, z é uma função constante. Portanto,

$$\dim \text{Ker } L = \dim \mathbb{R} = 1.$$

(III) Da forma como a projeção Q foi definida, vemos que $\text{Im } Q \simeq \mathbb{R}$. Então,

$$\dim \text{Im } Q = \dim \mathbb{R} = 1.$$

Sabemos que

$$Z = \text{Im } Q \oplus \text{Ker } Q. \quad (4.11)$$

Vimos em (I) que $\text{Ker } Q = \text{Im } L$. Logo,

$$\dim \text{Ker } Q = \dim \text{Im } L. \quad (4.12)$$

Das igualdades (4.11) e (4.12), obtemos

$$\text{codim Im } L = \dim \text{Im } Q = 1.$$

De (I), (II) e (III), segue que L é um operador de Fredholm de índice zero. \square

Fixemos $\lambda \in (0, 1)$ e consideremos as equações

$$Ly(t) = \lambda N_1(y(t)) \quad (4.13)$$

e

$$Ly(t) = \lambda N_2(y(t)), \quad (4.14)$$

que são, respectivamente, equivalentes a

$$y'(t) = -\lambda\delta(t) + \lambda R(t) \exp[y(t - \sigma(t)) - y(t) - a(t) \exp[y(t - \zeta(t))]] \quad (4.15)$$

e

$$y'(t) = -\lambda\delta(t) + \lambda R(t) \exp[-a(t) \exp[y(t - \zeta(t))]]. \quad (4.16)$$

Proposição 4.6. *Se a condição (H1) está satisfeita, então existe uma constante positiva A_0 , que não depende de λ , tal que se $y \in \text{dom } L$ satisfaz (4.15) então $\|y\| < A_0$.*

Demonstração. Se $y \in \text{dom } L$ é uma solução da equação (4.15), então

$$\frac{1}{\lambda} y'(t) + \delta(t) = R(t) \exp [y(t - \sigma(t)) - y(t) - a(t) \exp[y(t - \zeta(t))]].$$

Integrando ambos os membros da equação anterior em relação a t de 0 a ω , obtemos

$$\frac{1}{\lambda} \int_0^\omega y'(t) dt + \int_0^\omega \delta(t) dt = \int_0^\omega R(t) \exp [y(t - \sigma(t)) - y(t) - a(t) \exp[y(t - \zeta(t))]] dt,$$

de onde segue que

$$\omega \bar{\delta} = \int_0^\omega R(t) \exp [y(t - \sigma(t)) - y(t) - a(t) \exp[y(t - \zeta(t))]] dt. \quad (4.17)$$

Das equações (4.13) e (4.17) temos

$$\begin{aligned} \int_0^\omega |y'(t)| dt &= \lambda \int_0^\omega |-\delta(t) + R(t) \exp[y(t - \sigma(t)) - y(t) - a(t) \exp[y(t - \varsigma(t))]]| dt \leq \\ &\leq \int_0^\omega |-\delta(t) + R(t) \exp[y(t - \sigma(t)) - y(t) - a(t) \exp[y(t - \varsigma(t))]]| dt \leq \\ &\leq \int_0^\omega |\delta(t)| dt + \int_0^\omega |R(t) \exp[y(t - \sigma(t)) - y(t) - a(t) \exp[y(t - \varsigma(t))]]| dt = \\ &= \omega \frac{1}{\omega} \int_0^\omega \delta(t) dt + \omega \frac{1}{\omega} \int_0^\omega R(t) \exp[y(t - \sigma(t)) - y(t) - a(t) \exp[y(t - \varsigma(t))]] dt = 2\omega\bar{\delta}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\int_0^\omega |y'(t)| dt \leq 2\omega\bar{\delta}. \quad (4.18)$$

Como $y \in X$ é contínua, existem $\xi, \eta \in [0, \omega]$ tais que

$$y(\xi) = \min\{y(t); t \in [0, \omega]\} \quad e \quad y(\eta) = \max\{y(t); t \in [0, \omega]\}. \quad (4.19)$$

De (4.17) e (4.19), temos

$$\bar{\delta}\omega \geq \bar{R}\omega \exp[y(\xi) - y(\eta) - M_a \exp[y(\eta)]],$$

de onde segue que

$$y(\xi) \leq \ln \left(\frac{\bar{\delta}}{\bar{R}} \exp[y(\eta) + M_a \exp[y(\eta)]] \right). \quad (4.20)$$

Como

$$y(t) - y(\xi) \leq \int_0^\omega |y'(s)| ds,$$

das equações (4.18) e (4.20) temos

$$y(t) \leq y(\xi) + \int_0^\omega |y'(t)| dt \leq \ln \left(\frac{\bar{\delta}}{\bar{R}} \exp[y(\eta) + M_a \exp[y(\eta)]] \right) + 2\omega\bar{\delta}, \text{ para } t \in [0, \omega].$$

Em particular,

$$y(\eta) \leq \ln \left(\frac{\bar{\delta}}{\bar{R}} \exp[y(\eta) + M_a \exp[y(\eta)]] \right) + 2\omega\bar{\delta},$$

de onde segue que

$$y(\eta) \geq \ln \left(\frac{1}{M_a} \left[\ln \left(\frac{\bar{R}}{\bar{\delta}} \right) - 2\omega\bar{\delta} \right] \right), \quad (4.21)$$

desde que $\bar{R} > \bar{\delta} \exp(2\omega\bar{\delta})$. Como

$$- \int_0^\omega |y'(s)| ds \leq y(t) - y(\eta),$$

das equações (4.18) e (4.21), obtemos

$$y(t) \geq y(\eta) - \int_0^\omega |y'(t)|dt \geq \ln \left(\frac{1}{M_a} \left[\ln \left(\frac{\bar{R}}{\bar{\delta}} \right) - 2\omega\bar{\delta} \right] \right) - 2\omega\bar{\delta} = A_1. \quad (4.22)$$

Similarmente, temos

$$y(t) \leq y(\xi) + \int_0^\omega |y'(t)|dt \leq \ln \left(\frac{1}{m_a} \left[\ln \left(\frac{\bar{R}}{\bar{\delta}} \right) + 2\omega\bar{\delta} \right] \right) + 2\omega\bar{\delta} = A_2. \quad (4.23)$$

Seja

$$A_0 > \max\{|A_1|, |A_2|\}. \quad (4.24)$$

Por (4.22) e (4.23), concluímos que se $y \in \text{dom } L$ satisfaz (4.15) então $\|y\| < A_0$. \square

Proposição 4.7. *Se a condição (H2) está satisfeita, então existe uma constante positiva B_0 , que não depende de λ , tal que se $y \in \text{dom } L$ satisfaz (4.16) então $\|y\| < B_0$.*

Demonstração. Se $y \in \text{dom } L$ é uma solução da equação (4.16), então

$$\frac{1}{\lambda}y'(t) + \delta(t) = R(t) \exp[-a(t) \exp[y(t - \varsigma(t))]].$$

Integrando ambos os membros da equação anterior em relação a t de 0 a ω , temos

$$\frac{1}{\lambda} \int_0^\omega y'(t)dt + \int_0^\omega \delta(t)dt = \int_0^\omega R(t) \exp[-a(t) \exp[y(t - \varsigma(t))]]dt,$$

de onde obtemos

$$\omega\bar{\delta} = \int_0^\omega R(t) \exp[-a(t) \exp[y(t - \varsigma(t))]]. \quad (4.25)$$

Das equações (4.14) e (4.25), temos

$$\begin{aligned} \int_0^\omega |y'(t)|dt &= \lambda \int_0^\omega |-\delta(t) + R(t) \exp[-a(t) \exp[y(t - \varsigma(t))]]|dt \leq \\ &\leq \int_0^\omega |-\delta(t) + R(t) \exp[-a(t) \exp[y(t - \varsigma(t))]]|dt \leq \\ &\leq \int_0^\omega |\delta(t)|dt + \int_0^\omega |R(t) \exp[-a(t) \exp[y(t - \varsigma(t))]]|dt = \\ &= \omega \frac{1}{\omega} \int_0^\omega \delta(t)dt + \omega \frac{1}{\omega} \int_0^\omega R(t) \exp[-a(t) \exp[y(t - \varsigma(t))]]dt = 2\omega\bar{\delta}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\int_0^\omega |y'(t)|dt \leq 2\omega\bar{\delta}. \quad (4.26)$$

Como $y \in X$ é contínua, existem $\xi, \eta \in [0, \omega]$ tais que

$$y(\xi) = \min\{y(t); t \in [0, \omega]\} \quad \text{e} \quad y(\eta) = \max\{y(t); t \in [0, \omega]\}. \quad (4.27)$$

Por (4.25), temos

$$\omega\bar{\delta} \leq \omega\bar{R} \exp[-m_a \exp[y(\xi)]].$$

Assim,

$$y(\xi) \leq \ln \left[\frac{1}{m_a} \ln \left(\frac{\bar{R}}{\bar{\delta}} \right) \right], \quad (4.28)$$

desde que $\bar{R} > \bar{\delta}$.

Segue das equações (4.26) e (4.28) que

$$y(t) \leq y(\xi) + \int_0^\omega |y'(s)| ds \leq \ln \left[\frac{1}{m_a} \ln \left(\frac{\bar{R}}{\bar{\delta}} \right) \right] + 2\omega\bar{\delta} = B_2. \quad (4.29)$$

Por outro lado, por (4.25), temos

$$\omega\bar{\delta} \geq \omega\bar{R} \exp[-M_a \exp[y(\eta)]].$$

Assim,

$$y(\eta) \geq \ln \left[\frac{1}{M_a} \ln \left(\frac{\bar{R}}{\bar{\delta}} \right) \right], \quad (4.30)$$

desde que $\bar{R} > \bar{\delta}$.

Das equações (4.26) e (4.30) obtemos

$$y(t) \geq y(\eta) - \int_0^\omega |y'(s)| ds \geq \ln \left[\frac{1}{M_a} \ln \left(\frac{\bar{R}}{\bar{\delta}} \right) \right] - 2\omega\bar{\delta} = B_1. \quad (4.31)$$

Seja

$$B_0 > \max\{|B_1|, |B_2|\}. \quad (4.32)$$

Por (4.29) e (4.31), concluímos que se $y \in \text{dom } L$ satisfaz (4.16) então $\|y\| < B_0$. \square

A seguir, obteremos dois conjuntos abertos e limitados $\Omega_1, \Omega_2 \subset X$ tais que os operadores N_1 e N_2 são L -compactos em $\bar{\Omega}_1$ e $\bar{\Omega}_2$, respectivamente.

Definamos

$$\Omega_1 = \{y \in X; \|y\| < A_0\}$$

e

$$\Omega_2 = \{y \in X; \|y\| < B_0\}.$$

Proposição 4.8. *O operador N_1 é L -compacto em $\bar{\Omega}_1$.*

Demonstração. Se $y \in \bar{\Omega}_1$, então $\|y\| \leq A_0$ e

$$\begin{aligned} |Q(N_1(y(t)))| &= \left| \frac{1}{\omega} \int_0^\omega N_1(y(t)) dt \right| = \\ &= \frac{1}{\omega} \left| - \int_0^\omega \delta(t) dt + \int_0^\omega R(t) \exp[y(t - \sigma(t)) - y(t) - a(t) \exp[y(t - \varsigma(t))]] dt \right| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{\omega} \int_0^\omega |\delta(t)| dt + \frac{1}{\omega} \int_0^\omega |R(t) \exp[y(t - \sigma(t)) - y(t) - a(t) \exp[y(t - \varsigma(t))]]| dt \leq \\ &\leq M_\delta + M_R \exp[2A_0 + M_a \exp(A_0)]. \end{aligned}$$

Portanto, o conjunto $QN_1(\overline{\Omega}_1)$ é limitado.

Denotando por $K_P : \text{Im } L \rightarrow \text{dom } L \cap \text{Ker } P$ a inversa do operador L restrito a $\text{dom } L \cap \text{Ker } P$, temos

$$K_P(z(s)) = -\frac{1}{\omega} \int_0^\omega \int_0^t z(s) ds dt + \int_0^t z(s) ds.$$

Com o auxílio do Teorema de Arzelà-Ascoli (Teorema [B.31](#)), é possível provar que $K_{P,Q}N_1 = K_P(Id - Q)N_1$ é um operador compacto. A prova desse fato foi omitida aqui por ser demasiada extensa. Para realizá-la, basta lembrar do conceito de operador compacto e verificar que as condições do Teorema de Arzelà-Ascoli são satisfeitas.

Logo, N_1 é um operador L -compacto em $\overline{\Omega}_1$. □

Proposição 4.9. *O operador N_2 é L -compacto em $\overline{\Omega}_2$.*

Demonstração. Se $y \in \overline{\Omega}_2$ então $\|y\| \leq B_0$ e

$$\begin{aligned} |QN_2(y(t))| &= \left| \frac{1}{\omega} \int_0^\omega N_2(y(t)) dt \right| = \\ &= \frac{1}{\omega} \left| -\int_0^\omega \delta(t) dt + \int_0^\omega R(t) \exp[-a(t) \exp[y(t - \varsigma(t))]] dt \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\omega} \int_0^\omega |\delta(t)| dt + \frac{1}{\omega} \int_0^\omega |R(t) \exp[-a(t) \exp[y(t - \varsigma(t))]]| dt \leq M_\delta + M_R \exp[M_a \exp(B_0)]. \end{aligned}$$

Portanto, o conjunto $QN_2(\overline{\Omega}_2)$ é limitado.

Seja $K_P : \text{Im } L \rightarrow \text{dom } L \cap \text{Ker } P$ a inversa do operador L restrito a $\text{dom } L \cap \text{Ker } P$, temos

$$K_P(z(s)) = -\frac{1}{\omega} \int_0^\omega \int_0^t z(s) ds dt + \int_0^t z(s) ds.$$

Através do Teorema de Arzelà-Ascoli (Teorema [B.31](#)), é possível mostrar que $K_{P,Q}N_2 = K_P(Id - Q)N_2$ é um operador compacto. Como na demonstração da Proposição [4.8](#), omitiremos essa parte da demonstração.

Portanto, N_2 é um operador L -compacto em $\overline{\Omega}_2$. □

Proposição 4.10. *Se a condição (C_1) estiver satisfeita, então se cumprirão as condições seguintes:*

- (I) Para $\lambda \in (0, 1)$ e $y \in \partial\Omega_1 \cap \text{dom } L$, tem-se $Ly \neq \lambda N_1(y)$;
- (II) Para $y \in \partial\Omega_1 \cap \text{Ker } L$, tem-se $QN_1(y) \neq 0$;

(III) $\deg(QN_1|_{\Omega_1 \cap \text{Ker } L}, \Omega_1 \cap \text{Ker } L, 0) \neq 0$.

Demonstração. (I) Sejam $\lambda \in (0, 1)$ e $y \in \bar{\Omega} \cap \text{dom } L$. Se $Ly = \lambda N_1(y)$, pela Proposição 4.6, temos $\|y\| < A_0$.

Portanto, $y \in \Omega_1 = \text{int } \Omega_1$ e, conseqüentemente, $y \notin \partial\Omega_1 \cap \text{dom } L$.

(II) Seja $y \in \partial\Omega_1 \cap \text{Ker } L \simeq \partial\Omega_1 \cap \mathbb{R}$. Então, y é uma função constante.

Se $QN_1(y) = 0$, então

$$-\bar{\delta} + \overline{R \exp[-a(t) \exp(y)]} = 0.$$

Como $\overline{R \exp[-M_a \exp(y)]} \leq \overline{R(t) \exp[-a(t) \exp(y)]} \leq \overline{R \exp[-m_a \exp(y)]}$, temos

$$\overline{R \exp[-M_a \exp(y)]} \leq \bar{\delta} \leq \overline{R \exp[-m_a \exp(y)]},$$

conseqüentemente,

$$\ln \left[\frac{1}{M_a} \ln \left(\frac{\bar{R}}{\bar{\delta}} \right) \right] \leq y \leq \ln \left[\frac{1}{m_a} \ln \left(\frac{\bar{R}}{\bar{\delta}} \right) \right],$$

ou seja,

$$-A_0 < A_1 < y < A_2 < A_0.$$

Portanto, $y \in \Omega_1$, contradizendo o fato de que $y \in \partial\Omega_1$.

Sendo assim, se $y \in \partial\Omega_1 \cap \text{Ker } L$, concluímos que $QN_1(y) \neq 0$.

(III) Consideremos a homotopia

$$H_1(y(t), \mu) = -\mu y(t) + \frac{1-\mu}{\omega} \int_0^\omega QN_1(y(t)) dt, \text{ para todo } \mu \in [0, 1].$$

Para $y \in \partial\Omega_1 \cap \text{Ker } L$, temos $y = \pm A_0$. Então,

$$QN_1(-A_0) > 0 \text{ e } QN_1(A_0) < 0. \quad (4.33)$$

De fato, se $QN_1(A_0) > 0$, então

$$0 < -\frac{1}{\omega} \int_0^\omega \delta(t) dt + \frac{1}{\omega} \int_0^\omega R(t) \exp[-a(t) \exp(A_0)] dt,$$

ou seja,

$$\omega \bar{\delta} < \omega \overline{R \exp[-m_a \exp(A_0)]}$$

e, portanto,

$$A_0 < \ln \left[\frac{1}{m_a} \ln \left(\frac{\bar{R}}{\bar{\delta}} \right) \right] < A_2,$$

contradizendo a escolha de A_0 , definida em (4.24).

Analogamente, obtemos $QN_1(-A_0) < 0$.

Então, para $y \in \partial\Omega_1 \cap \text{Ker } L$ e $\mu \in [0, 1]$, da condição (4.33), segue que

$$yH_1(y, \mu) = -\mu y^2 + \frac{1-\mu}{\omega} \int_0^\omega yQN_1(y)dt < 0,$$

de onde podemos inferir que $0 \notin H_1((\partial\Omega_1 \cap \text{Ker } L) \times [0, 1])$. Usando a propriedade da invariância do grau por homotopia, concluimos que

$$\deg(QN_1|_{\Omega_1 \cap \text{Ker } L}, \Omega_1 \cap \text{Ker } L, 0) = \deg(-Id|_{\Omega_1 \cap \text{Ker } L}, \Omega_1 \cap \text{Ker } L, 0) \neq 0.$$

□

Proposição 4.11. *Se a condição (C_2) estiver satisfeita, então se cumprirão as condições seguintes:*

- (I) Para $\lambda \in (0, 1)$ e $y \in \partial\Omega_2 \cap \text{dom } L$, tem-se $Ly \neq \lambda N_2(y)$;
- (II) Para $y \in \partial\Omega_2 \cap \text{Ker } L$, tem-se $QN_2(y) \neq 0$;
- (III) $\deg(QN_2|_{\Omega_2 \cap \text{Ker } L}, \Omega_2 \cap \text{Ker } L, 0) \neq 0$.

Demonstração. (I) Sejam $\lambda \in (0, 1)$ e $y \in \bar{\Omega} \cap \text{dom } L$. Se $Ly = N_2(y)$, pela Proposição 4.7, obtemos $\|y\| < B_0$.

Portanto, $y \in \Omega_2 = \text{int } \Omega_2$, de onde segue que $y \notin \partial\Omega_2 \cap \text{dom } L$.

(II) Seja $y \in \partial\Omega_2 \cap \text{Ker } L \simeq \partial\Omega_2 \cap \mathbb{R}$. Então, y é uma função constante.

Se $QN_2(y) = 0$, então

$$-\bar{\delta} + \overline{R \exp[-a(t) \exp(y)]} = 0.$$

Como $\bar{R} \exp[-M_a \exp(y)] \leq \overline{R(t) \exp[-a(t) \exp(y)]} \leq \bar{R} \exp[-m_a \exp(y)]$, obteríamos

$$\ln \left[\frac{1}{M_a} \ln \left(\frac{\bar{R}}{\bar{\delta}} \right) \right] \leq y \leq \ln \left[\frac{1}{m_a} \ln \left(\frac{\bar{R}}{\bar{\delta}} \right) \right],$$

ou seja,

$$-B_0 < B_1 < y < B_2 < B_0.$$

Portanto, $y \in \Omega_2$. Logo, se $y \in \partial\Omega_2 \cap \text{Ker } L$, então $QN_2(y) \neq 0$.

(III) Consideremos a homotopia

$$H_2(y(t), \mu) = -\mu y(t) + \frac{1-\mu}{\omega} \int_0^\omega QN_2(y(t))dt, \text{ para todo } \mu \in [0, 1].$$

Para $y \in \partial\Omega_2 \cap \text{Ker } L$, temos $y = \pm B_0$. Então,

$$QN_2(-B_0) > 0 \text{ e } QN_2(B_0) < 0. \tag{4.34}$$

Com efeito, se $QN_2(-B_0) < 0$, então

$$0 > - \int_0^\omega \delta(t)dt + \int_0^\omega R(t) \exp[-a(t) \exp(-B_0)]dt,$$

ou seja,

$$\omega \bar{\delta} > \omega \bar{R} \exp[-M_a \exp(-B_0)],$$

obtendo

$$B_1 < \ln \left[\frac{1}{M_a} \ln \left(\frac{\bar{R}}{\bar{\delta}} \right) \right] < -B_0,$$

o que contradiz a escolha de B_0 , definida em (4.32).

Similarmente, obtemos $QN(B_0) < 0$.

Então, para $y \in \partial\Omega_2 \cap \text{Ker } L$ e $\mu \in [0, 1]$, da condição (4.34), segue que

$$yH_2(y, \mu) = -\mu y^2 + \frac{1-\mu}{\omega} \int_0^\omega yQN_2(y)dt < 0,$$

de onde podemos concluir que $0 \notin H_2((\partial\Omega_2 \cap \text{Ker } L) \times [0, 1])$. Usando a propriedade da invariância do grau por homotopia, obtemos

$$\deg(QN_2|_{\Omega_2 \cap \text{Ker } L}, \Omega_2 \cap \text{Ker } L, 0) = \deg(-Id|_{\Omega_2 \cap \text{Ker } L}, \Omega_2 \cap \text{Ker } L, 0) \neq 0.$$

□

Agora, podemos demonstrar os Teoremas (4.2) e (4.3).

Demonstração. (do Teorema (4.2)) Suponha que a condição (C_1) esteja satisfeita. Pelas Proposições (4.5), (4.6), (4.8) e (4.10), as condições do Corolário (3.39) estão satisfeitas. Portanto, a equação (4.9) tem pelo menos uma solução ω -periódica em $\text{dom } L \cap \bar{\Omega}_1$, a qual denotaremos por y_1 .

Deste modo, $x(t) = \exp[y_1(t)]$ é uma solução ω -periódica da equação (4.4) em \mathbb{R} .

□

Demonstração. (do Teorema (4.3)) Suponhamos que a condição (C_2) esteja satisfeita. Pelas Proposições (4.5), (4.7), (4.9) e (4.11), as condições do Corolário (3.39) estão satisfeitas. Portanto, a equação (4.10) tem pelo menos uma solução ω -periódica em $\text{dom } L \cap \bar{\Omega}_2$. Denotá-la-emos por y_2 .

Então, $x(t) = \exp[y_2(t)]$ é uma solução ω -periódica da equação (4.6) em \mathbb{R} e, conseqüentemente, $x(t) = \exp[y_2(t)]$ é uma solução ω -periódica da equação (4.5) em \mathbb{R} .

□

Observação 4.12. Vemos que a equação (4.2) é um caso particular da equação (4.4) com $\sigma = \varsigma = m\omega$, para algum $m \in \mathbb{N}$. A condição (4.3) é muito restritiva, uma vez que

$$\bar{R} \geq \min_{t \in [0, \omega]} R(t) > \max_{t \in [0, \omega]} \delta(t) \geq \bar{\delta}.$$

Portanto, o Teorema (4.3) estende o teorema provado por Saker e Agarwal.

4.1.3 Exemplos

Exemplo 4.13. Consideremos a seguinte equação:

$$x'(t) = -\frac{1}{10} \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{\cos t}{10} \right) x(t) + \left(0, 9 - \frac{\sin t}{10} \right) x \left(t - \frac{|\sin t|}{10} \right) \exp \left[-x \left(t - \frac{|\cos t|}{10} \right) \right]. \quad (4.35)$$

Na equação (4.35), temos

$$\delta(t) = \frac{1}{10} \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \cos t \right), \quad R(t) = \left(0, 9 - \frac{1}{10} \sin t \right),$$

$$\sigma(t) = \frac{1}{10} |\sin t|, \quad \varsigma(t) = \frac{1}{10} |\cos t| \quad \text{e} \quad a \equiv 1$$

satisfazendo as condições (a), (b), (c) e (d) para $\omega = 2\pi$.

Temos também

$$\bar{\delta} = 0, 11, \quad \bar{R} = 0, 9, \quad \bar{R} > \bar{\delta} \exp(2\pi\bar{\delta}) \approx 0, 22 \quad \text{e} \quad \sigma \notin \mathbb{N}_{2\pi}.$$

Neste caso, pelo Teorema 4.2, a equação (4.35) possui pelo menos uma solução 2π -periódica.

Exemplo 4.14. Consideremos, agora, a equação a seguir:

$$x'(t) = -(1 + \cos t)x(t) + \exp(2)(1 + \sin t)x(t - 4\pi) \exp[-3x(t - 1 - |\cos t|)]. \quad (4.36)$$

Note que as funções

$$\delta(t) = 1 + \cos t, \quad R(t) = \exp(2)(1 + \sin t), \quad \sigma \equiv 4\pi, \quad \varsigma(t) = 1 + |\cos t| \quad \text{e} \quad a \equiv 3$$

satisfazem as condições (a), (b), (c) e (d), com $\omega = 2\pi$.

Ademais,

$$\bar{\delta} = 1, \quad \bar{R} = \exp(2), \quad \bar{R} > \bar{\delta} \quad \text{e} \quad \sigma \in \mathbb{N}_{2\pi}.$$

Logo, pelo Teorema 4.3, a equação (4.36) possui pelo menos uma solução 2π -periódica.

4.2 Um tipo de equação diferencial de terceira ordem com retardo

Aqui, estabeleceremos condições para garantir a existência de solução ω -periódica para a equação diferencial funcional com retardo de terceira ordem

$$x'''(t) + ax''(t) + g(x'(t - \sigma(t))) + f(x(t - \sigma(t))) = p(t),$$

em que a é uma constante positiva, $g, f, p, \sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas, σ e p são ω -periódicas, com $\omega > 0$, e $\int_0^\omega p(t)dt \neq 0$. Para isso, definiremos operadores L e $N_\lambda = N(\cdot, \lambda)$, com $\lambda \in [0, 1]$, e um conjunto Ω de modo que (L, N_λ, Ω) satisfaça as condições do Teorema da Continuação de Mawhin (Corolário 3.38).

Esta seção é uma complementação do artigo “*A priori bounds for periodic solutions of a kind of third-order delay differential equation*” de Gui e Ge ([20]) e teve também como referência o artigo [1]. Cabe informar que os resultados expostos aqui estão presentes no nosso trabalho “*Soluções periódicas de um tipo de equação diferencial de terceira ordem com retardo*” ([5]).

4.2.1 Introdução ao modelo

Nos últimos anos, alguns resultados sobre existência de solução periódica de equações diferenciais de segunda ordem com retardo têm sido obtidos através do Teorema de Continuação de Mawhin, veja os artigos [34, 35, 36], por exemplo. Em [36], Ma *et al.* obtiveram resultados sobre a existência de solução periódica para a equação de Duffing com retardo:

$$x''(t) + m^2x(t) + g(x(t - \tau)) = p(t).$$

Em [20], Gui e Ge estabeleceram condições que garantem a existência de solução periódica para a equação diferencial com retardo de terceira ordem:

$$x'''(t) + ax''(t) + g(x'(t - \sigma(t))) + f(x(t - \sigma(t))) = p(t), \quad (4.37)$$

em que

- (a) a é uma constante positiva;
- (b) $g, f, \sigma, p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas;
- (c) σ e p são funções ω -periódicas, com $\omega > 0$;
- (d) $\int_0^\omega p(t)dt \neq 0$.

Nesta seção, vamos apresentar uma análise detalhada do trabalho [20] a respeito da equação (4.37). Cabe mencionar que fizemos uma pequena alteração nas hipóteses (H3) e (H4) do Teorema 1-[20].

4.2.2 Existência de soluções periódicas

Vamos considerar a equação (4.37), com as condições (a), (b), (c) e (d) satisfeitas. Assumiremos que existem três constantes positivas K, D, M tais que:

(C₁) $|g(x)| \leq K$, para todo $x \in \mathbb{R}$;

(C₂) $|f(x)| > K + \|p\|$ e $xf(x) > 0$ para $|x| \geq D$;

(C₃) $|f(x)| \leq M$ para $x \leq -D$;

(C₄) $\omega < \frac{1}{a}$.

Para demonstrarmos o resultado seguinte, precisaremos demonstrar alguns resultados primeiramente.

Teorema 4.15. *Se as condições (C₁) – (C₄) estão satisfeitas, então a equação (4.37) tem pelo menos uma solução ω -periódica em \mathbb{R} .*

Como dito anteriormente, nosso objetivo é usar o Teorema de Continuação de Mawhin (Corolário 3.38) para demonstrar o Teorema 4.15. Iremos encontrar uma equação de operadores $Lx = N_\lambda(x)$, onde $\lambda \in [0, 1]$, L é um operador de Fredholm de índice zero e N_λ é um operador L -compacto, ambos definidos e tomando valores em espaços adequados de funções. Ao provarmos a existência de solução para tal equação, poderemos concluir que a equação (4.37) possui pelo menos uma solução ω -periódica em \mathbb{R} .

Sejam

$$X = \{x \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}); x(t + \omega) = x(t), t \in \mathbb{R}\}$$

e

$$Z = \{z \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}); z(t + \omega) = z(t), t \in \mathbb{R}\}$$

munidos das normas $\|\cdot\|_0, \|\cdot\|$, respectivamente, dadas por

$$\|x\|_0 = \max\{\|x\|, \|x'\|, \|x''\|\}, \quad x \in X,$$

e

$$\|z\| = \sup\{|z(t)|; t \in [0, \omega]\}, \quad z \in Z.$$

Note que os espaços X e Z são espaços de Banach munidos das normas $\|\cdot\|_0$ e $\|\cdot\|$, respectivamente.

Defina $\text{dom } L = \{x \in C^3(\mathbb{R}, \mathbb{R}); x(t + \omega) = x(t), t \in \mathbb{R}\}$ e

$$Lx = x''', \quad \text{para } x \in \text{dom } L.$$

Claramente, $\text{dom } L \subset X$.

Definamos, agora, para $\lambda \in [0, 1]$,

$$N_\lambda(x(t)) = -ax''(t) - \lambda g(x'(t - \sigma(t))) - f(x(t - \sigma(t))) + \lambda p(t).$$

Consideremos as seguintes projeções contínuas:

$$Px(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega x(t) dt \text{ e } Qz(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega z(t) dt, \text{ para } x \in X, z \in Z, t \in \mathbb{R}.$$

Proposição 4.16. L é um operador de Fredholm de índice zero.

Demonstração. A demonstração de que o conjunto $\text{Im } L$ é fechado e possui codimensão finita é análoga ao que foi provada na Proposição 4.5. Nos resta apenas provarmos que o $\text{Ker } L$ possui dimensão finita.

Sendo assim, se $x \in \text{Ker } L$, então $x''' = 0$, ou seja, $x'''(t) = 0$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Deste modo, $x''(t) = c_1$, para todo $t \in \mathbb{R}$, o que implica $x'(t) = c_1t + c_2$, para todo $t \in \mathbb{R}$, em que c_1 e c_2 são constantes reais.

Do fato de x ser periódica, podemos concluir que x' é periódica e, portanto, $x'(t) = c_2$ e $x(t) = c_2t + c_3$ para todo $t \in \mathbb{R}$, em que c_3 é uma constante real. Como x é periódica, concluímos que $x(t) = c_3$ para todo $t \in \mathbb{R}$, ou seja, x é uma função constante. Por conseguinte,

$$\dim \text{Ker } L = \dim \mathbb{R} = 1.$$

Portanto, concluímos que L é um operador de Fredholm de índice zero. \square

Na sequência, encontraremos um conjunto aberto e limitado $\Omega \subset X$ tal que N_λ é um operador L -compacto em $\overline{\Omega}$, para todo $\lambda \in [0, 1]$.

Fixemos $\lambda \in (0, 1)$ e consideremos a equação

$$Lx(t) = \lambda N_\lambda(x(t)), \quad (4.38)$$

que é equivalente a

$$x'''(t) + \lambda ax''(t) + \lambda^2 g(x'(t - \sigma(t))) + \lambda f(x(t - \sigma(t))) = \lambda^2 p(t). \quad (4.39)$$

Proposição 4.17. Se as condições $(C1) - (C4)$ estão satisfeitas, então existe uma constante positiva A_0 , que não depende de λ , tal que se $x \in \text{dom } L$ satisfaz (4.39) então $\|x\| < A_0$.

Demonstração. Seja $x \in \text{dom } L$ uma solução da equação (4.39).

Integrando ambos os membros da igualdade (4.39) em relação a t sobre o intervalo $[0, \omega]$, obtemos

$$-\int_0^\omega [x'''(t) + \lambda ax''(t)] dt = \lambda \int_0^\omega [\lambda g(x'(t - \sigma(t))) + f(x(t - \sigma(t))) - \lambda p(t)] dt.$$

Como x' e x'' são periódicas, obtemos

$$0 = \int_0^\omega [\lambda g(x'(t - \sigma(t))) + f(x(t - \sigma(t))) - \lambda p(t)] dt. \quad (4.40)$$

De (4.40), temos

$$\int_0^\omega [f(x(t - \sigma(t))) - K - \|p\|] dt \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_0^\omega [f(x(t - \sigma(t))) - \lambda|g(x'(t - \sigma(t)))| - \lambda p(t)] dt \leq \\ &\leq \int_0^\omega [f(x(t - \sigma(t))) + \lambda g(x'(t - \sigma(t))) - \lambda p(t)] dt = 0, \end{aligned}$$

isto é,

$$\int_0^\omega [f(x(t - \sigma(t))) - K - \|p\|] dt \leq 0. \quad (4.41)$$

Defina $E_1 = \{t \in [0, \omega]; x(t - \sigma(t)) > D\}$ e $E_2 = [0, \omega] \setminus E_1$. Então,

$$\int_{E_2} |f(x(t - \sigma(t)))| dt \leq 2\omega \max\{M, \sup\{|f(x)|; |x| \leq D\}\}. \quad (4.42)$$

Com efeito, se $t \in E_2$, então $x(t - \sigma(t)) \leq D$.

Considere $E_3 = \{t \in [0, \omega]; x(t - \sigma(t)) < -D\}$ e $E_4 = \{t \in [0, \omega]; |x(t - \sigma(t))| \leq D\}$.

Veja que $E_2 = E_3 \cup E_4$. Assim,

$$\begin{aligned} \int_{E_2} |f(x(t - \sigma(t)))| dt &= \int_{E_3} |f(x(t - \sigma(t)))| dt + \int_{E_4} |f(x(t - \sigma(t)))| dt \leq \\ &\leq \int_0^\omega M + \int_0^\omega \sup\{|f(x)|; |x| \leq D\} \leq 2\omega \max\{M, \sup\{|f(x)|; |x| \leq D\}\}, \end{aligned}$$

comprovando a validade da desigualdade (4.42).

Segue de (4.41) que

$$\begin{aligned} \int_{E_1} [|f(x(t - \sigma(t)))| - K - \|p\|] dt &\leq \int_{E_1} |f(x(t - \sigma(t))) - K - \|p\|| dt = \\ &= \int_{E_1} [f(x(t - \sigma(t))) - K - \|p\|] dt = \int_0^\omega [f(x(t - \sigma(t))) - K - \|p\|] dt - \\ &- \int_{E_2} [f(x(t - \sigma(t))) - K - \|p\|] dt \leq - \int_{E_2} [f(x(t - \sigma(t))) - K - \|p\|] dt \leq \\ &\leq \int_{E_2} |f(x(t - \sigma(t))) - K - \|p\|| dt \leq \int_{E_2} |f(x(t - \sigma(t)))| dt + \int_{E_2} [K + \|p\|] dt. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_0^\omega |f(x(t - \sigma(t)))| dt &= \int_{E_1} |f(x(t - \sigma(t)))| dt + \int_{E_2} |f(x(t - \sigma(t)))| dt \leq \\ &\leq \int_{E_2} |f(x(t - \sigma(t)))| dt + \int_{E_2} [K + \|p\|] dt + \int_{E_1} [K + \|p\|] dt + \int_{E_2} |f(x(t - \sigma(t)))| dt = \\ &= 2 \int_{E_2} |f(x(t - \sigma(t)))| dt + \int_0^\omega [K + \|p\|] dt \leq 4\omega \max\{M, \sup\{|f(x)|; |x| > D\}\} + \\ &+ \omega (K + \|p\|) = \omega [4 \max\{M, \sup\{|f(x)|; |x| > D\}\} + K + \|p\|] = \omega M_1, \end{aligned}$$

em que $M_1 = 4 \max\{M, \sup\{|f(x)|; |x| > D\}\} + K + \|p\|$.

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_0^\omega |x'''(s)|ds &= \int_0^\omega |-\lambda ax''(s) - \lambda^2 g(x'(s - \sigma(s))) - \lambda f(x(s - \sigma(s))) + \lambda^2 p(s)|ds \leq \\ &\leq a \int_0^\omega |x''(s)|ds + \int_0^\omega |g(x'(s - \sigma(s)))|ds + \int_0^\omega |f(x(s - \sigma(s)))|ds + \int_0^\omega \|p\|ds \leq \\ &\leq a \int_0^\omega |x''(s)|ds + \omega(K + M_1 + \|p\|) \leq a\sqrt{\omega} \left[\int_0^\omega |x''(s)|^2 ds \right]^{\frac{1}{2}} + \omega(K + M_1 + \|p\|), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_0^\omega |x'''(s)|ds \leq a\sqrt{\omega} \left[\int_0^\omega |x''(s)|^2 ds \right]^{\frac{1}{2}} + \omega(K + M_1 + \|p\|). \quad (4.43)$$

Cabe observar que, para obter a última desigualdade, utilizamos a Desigualdade de Hölder (Teorema [B.27](#)).

A igualdade [\(4.40\)](#) implica que existe $t_1 \in [0, \omega]$ tal que

$$\lambda g(x'(t_1 - \sigma(t_1))) + f(x(t_1 - \sigma(t_1))) - \lambda p(t_1) = 0.$$

Assim,

$$|f(x(t_1 - \sigma(t_1)))| \leq \lambda [|g(x'(t_1 - \sigma(t_1)))| + \|p\|] \leq |g(x(t_1 - \sigma(t_1)))| + \|p\| \leq K + \|p\|.$$

Por (C_2) , podemos concluir que $|x(t_1 - \sigma(t_1))| < D$.

Finalmente, se $t_1 - \sigma(t_1) \in [0, \omega]$, tomemos $t_2 = t_1 - \sigma(t_1)$. Se $t_1 - \sigma(t_1) \notin [0, \omega]$, como x é periódica, então existe $t_2 \in [0, \omega]$ tal que $x(t_2) = x(t_1 - \sigma(t_1))$. De qualquer forma, existe $t_2 \in [0, \omega]$ tal que $|x(t_2)| < D$.

Então,

$$\begin{aligned} |x(t)| &= |x(t_2) + [x(t) - x(t_2)]| = \left| x(t_2) + \int_{t_2}^t x'(s)ds \right| \leq |x(t_2)| + \int_{t_2}^t |x'(s)|ds \leq \\ &\leq D + \int_0^\omega |x'(s)|ds \leq D + \sqrt{\omega} \left[\int_0^\omega |x'(s)|^2 ds \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$|x(t)| \leq D + \sqrt{\omega} \left[\int_0^\omega |x'(s)|^2 ds \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.44)$$

Como $x(0) = x(\omega)$, pelo Teorema de Rolle (Teorema [B.18](#)), existe $t_0 \in [0, \omega]$ tal que $x'(t_0) = 0$. Portanto,

$$|x'(t)| = \left| \int_{t_0}^t x''(s)ds \right| \leq \int_0^\omega |x''(s)|ds \leq \sqrt{\omega} \left[\int_0^\omega |x''(s)|^2 ds \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.45)$$

Temos então

$$\left[\int_0^\omega |x'(s)|^2 ds \right]^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\omega} \max\{|x'(t)|; t \in [0, \omega]\} \leq \omega \left[\int_0^\omega |x''(s)|^2 ds \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.46)$$

Como x'' é periódica, novamente pelo Teorema de Rolle, existe $\tilde{t} \in [0, \omega]$ tal que

$$|x''(t)| = \left| \int_{\tilde{t}}^t x'''(s) ds \right| \leq \int_0^\omega |x'''(t)| dt.$$

Então,

$$\left[\int_0^\omega |x''(s)|^2 ds \right]^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\omega} \max\{|x''(t)|; t \in [0, \omega]\} \leq \sqrt{\omega} \int_0^\omega |x'''(t)| dt. \quad (4.47)$$

Utilizando (4.43) em (4.47), temos

$$\left[\int_0^\omega |x''(s)|^2 ds \right]^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\omega^{\frac{3}{2}}}{1 - a\omega} (K + M_1 + \|p\|). \quad (4.48)$$

Utilizando (4.48) em (4.43), obtemos

$$\|x''\| \leq \int_0^\omega |x'''(t)| dt \leq \frac{\omega}{1 - a\omega} (K + M_1 + \|p\|) = A_3. \quad (4.49)$$

Utilizando (4.48) em (4.45), temos

$$\|x'\| \leq \frac{\omega^2}{1 - a\omega} (K + M_1 + \|p\|) = A_2. \quad (4.50)$$

Agora, usando as desigualdades (4.44), (4.46) e (4.48), obtemos

$$\|x\| \leq D + \frac{\omega^3}{1 - a\omega} (K + M_1 + \|p\|) = A_1. \quad (4.51)$$

Seja $A_0 = \max\{A_1, A_2, A_3\} + 1$. Por (4.49), (4.50) e (4.51), concluímos que se $x \in \text{dom } L$ satisfaz (4.38) então $\|x\|_0 < A_0$. \square

O próximo resultado afirma que o operador N_λ é L -compacto em $\overline{\Omega}$, onde $\Omega = \{x \in X; \|x\|_0 < A_0\}$.

Proposição 4.18. *Para cada $\lambda \in [0, 1]$, N_λ é um operador L -compacto em $\overline{\Omega}$.*

Demonstração. Se $x \in \overline{\Omega}$, então $\|x\|_0 \leq A_0$ e

$$\begin{aligned} |Q(N_\lambda(x(t)))| &= \left| \frac{1}{\omega} \int_0^\omega N_\lambda((x(t))) dt \right| = \\ &= \frac{1}{\omega} \left| \int_0^\omega [-ax''(t) - \lambda g(x'(t - \sigma(t))) - f(x(t - \sigma(t))) + \lambda p(t)] dt \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\omega} \int_0^\omega |g(x'(t - \sigma(t)))| dt + \frac{1}{\omega} \int_0^\omega |f(x(t - \sigma(t)))| dt + \frac{1}{\omega} \int_0^\omega |p(t)| dt \leq \\ &\leq \sup\{|g(z)|; z \in [-A_0, A_0]\} + \sup\{|f(z)|; z \in [-A_0, A_0]\} + \|p\|. \end{aligned}$$

Portanto, o conjunto $QN_\lambda(\overline{\Omega})$ é limitado.

Denotando por $K_P : \text{Im } L \rightarrow \text{dom } L \cap \text{Ker } P$ a inversa do operador L restrito a $\text{dom } L \cap \text{Ker } P$, temos

$$K_P(y(t)) = \frac{t}{2} \int_0^\omega (\omega - s)y(s)ds - \frac{t}{2\omega} \int_0^\omega (\omega - s)^2 y(s)ds - \\ - \frac{t^2}{2\omega} \int_0^\omega (\omega - s)y(s)ds + \frac{1}{2} \int_0^t (t - s)^2 y(s)ds.$$

Com o auxílio do Teorema de Arzelà-Ascoli (Teorema [B.31](#)), é possível provar que $K_{P,Q}N_\lambda$ é um operador compacto para cada $\lambda \in [0, 1]$. A prova desse fato não apresenta detalhes de difícil compreensão; basta lembrar do conceito de operador compacto e verificar que as condições do Teorema de Arzelà-Ascoli são satisfeitas. Ela é omitida aqui apenas por ser extensa.

Logo, para cada $\lambda \in [0, 1]$, N_λ é um operador L -compacto. \square

Proposição 4.19. *Se as condições $(C_1) - (C_4)$ forem satisfeitas, então se cumprirão as condições seguintes:*

- (I) Para $\lambda \in (0, 1)$ e $x \in \partial\Omega \cap \text{dom } L$, tem-se $Lx \neq \lambda N_\lambda(x)$;
- (II) Para $x \in \partial\Omega \cap \text{Ker } L$, tem-se $QN_0(x) \neq 0$;
- (III) $\deg(QN_0|_{\Omega \cap \text{Ker } L}, \Omega \cap \text{Ker } L, 0) \neq 0$.

Demonstração. (I) Sejam $\lambda \in (0, 1)$ e $y \in \bar{\Omega} \cap \text{dom } L$. Se $Lx = \lambda N_\lambda(x)$, pela Proposição [4.17](#), temos $\|x\| < A_0$.

Logo, $x \in \Omega = \text{int } \Omega$, de onde segue que $x \notin \partial\Omega \cap \text{dom } L$.

- (II) Seja $x \in \partial\Omega \cap \text{Ker } L = \partial\Omega \cap \mathbb{R}$. Então, x é uma função constante.

Portanto, para $x \in \partial\Omega \cap \text{Ker } L$, temos

$$QN_0(x(t)) = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega [-ax''(t) - f(x(t - \sigma(t)))] dt = -\frac{1}{\omega} \int_0^\omega f(\pm A_0) dt = \\ = -f(\pm A_0) \neq 0,$$

pois $A_0 > A_1 > D$ e $|f(\pm A_0)| > K + \|p\| > 0$ pela condição (C_2) .

- (III) Consideremos a homotopia

$$H(x(t), \mu) = \mu x(t) + \frac{1 - \mu}{\omega} \int_0^\omega f(x(t)) dt, \quad \mu \in [0, 1].$$

Para $x \in \partial\Omega \cap \text{Ker } L$ e $\mu \in [0, 1]$, temos $x \equiv \pm A_0$ e

$$xH(x, \mu) = \mu x^2 + \frac{1 - \mu}{\omega} \int_0^\omega x f(x) dt > 0,$$

de onde podemos inferir que $0 \notin H((\partial\Omega \cap \text{Ker } L) \times [0, 1])$. Usando a propriedade da invariância do grau por homotopia, concluimos que

$$\deg(QN_0|_{\Omega \cap \text{Ker } L}, \Omega \cap \text{Ker } L, 0) = \deg(-Id|_{\Omega \cap \text{Ker } L}, \Omega \cap \mathbb{R}, 0) \neq 0.$$

□

Agora, estamos aptos a demonstrar o Teorema [4.15](#).

Demonstração. (do Teorema [4.15](#)) Suponhamos que as condições $(C_1) - (C_4)$ estejam satisfeitas. Pelas Proposições [4.16](#), [4.17](#), [4.18](#) e [4.19](#), as condições do Corolário [3.38](#) estão satisfeitas. Portanto, a equação [\(4.38\)](#) tem pelo menos uma solução em $\bar{\Omega} \cap \text{dom } L$ para $\lambda = 1$, e, conseqüentemente, a equação [\(4.37\)](#) tem pelo menos uma solução ω -periódica em \mathbb{R} . □

4.2.3 Exemplos

O artigo [\[20\]](#) contém um erro no exemplo no final do trabalho. A função $f(u) = 2(\text{sen } u)^2 \arctg u$ não satisfaz a condição $(H2)$ do Teorema 1-[\[20\]](#), para $K = 1$, $D > \frac{\pi}{4}$ e $M = \pi$, e $a = 0,4$ não cumpre $\omega = 2\pi < \frac{1}{a^2}$, o que torna o exemplo inviável para ilustrar o resultado obtido. Aqui, nós apresentamos um exemplo válido para estender o trabalho de Gui e Ge.

Exemplo 4.20. *Consideremos a seguinte equação*

$$x'''(t) + \frac{3}{20}x''(t) + \exp[-(x'(t - \cos(t)))^2] + 2 \arctg(x(t - \cos(t))) = 1 + \text{sen}(t). \quad (4.52)$$

Notemos que $a = \frac{3}{20}$, $g(u) = \exp(-u^2)$, $f(u) = 2 \arctg(u)$, $\sigma(t) = \cos(t)$ e $p(t) = 1 + \text{sen}(t)$ cumprem as condições (a) , (b) , (c) e (d) .

Através de cálculos simples, podemos verificar que as condições do Teorema [4.15](#) estão satisfeitas para $K = 1$, $M = \pi$ e $D = 20$ e $\omega = 2\pi$. Então, a equação [\(4.52\)](#) admite pelo menos uma solução 2π -periódica.

Exemplo 4.21. *Considere a seguinte equação diferencial de terceira ordem com retardo*

$$x'''(t) + \frac{1}{4}x''(t) + \exp[\cos(x'(t - 1 - \text{sen } 2t))] + f(x(t - 1 - \text{sen } 2t)) = 1 + \cos 2t, \quad (4.53)$$

$$\text{em que } f(u) = \begin{cases} -10, & \text{se } u \in (-\infty, -10), \\ u, & \text{se } u \in [-10, 10], \\ 10, & \text{se } u \in (10, \infty). \end{cases}$$

A constante $a = \frac{1}{4}$ e as funções $g(u) = \exp(\cos u)$, $f(u)$, $\sigma(t) = 1 + \sin 2t$ e $p(t) = 1 + \cos 2t$ satisfazem (a), (b), (c) e (d). Além disso, as condições do Teorema 4.15 estão satisfeitas para $K = \exp(1)$, $M = 10$, $D = 10$ e $\omega = \pi$.

Portanto, a equação (4.53) possui pelo menos uma solução π -periódica.

5 Permanência de soluções de equações diferenciais funcionais com retardo específicas

Sejam $\sigma \in C([0, \infty), [0, \infty))$ uma função limitada, $\tau = \sup_{t>0} \{\sigma(t)\}$ e $\varphi : [-\tau, 0] \rightarrow [0, \infty)$ uma função contínua tal que $\varphi(0) > 0$. Consideremos o seguinte sistema

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x(t - \sigma(t))) \\ x(t) = \varphi(t), t \in [-\tau, 0] \end{cases}, \quad t > 0, \quad (5.1)$$

em que $f \in C(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.

Definição 5.1. *Diremos que o sistema (5.1) é permanente se existirem constantes $k, K > 0$ tais que, se $x(t) = x(t, \varphi)$ for solução de (5.1) em $[-\tau, \infty)$ e $x(t) > 0$ para todo $t > 0$, então*

$$k \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} x(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} x(t) \leq K.$$

Grosso modo, o sistema (5.1) será dito permanente quando, dado um valor inicial φ , for possível limitar, inferior e superiormente, a solução $x(t, \varphi)$, a partir de um ponto t . Partindo desse conceito, se estivermos trabalhando com um modelo de população e houver a permanência do sistema, a população nunca será extinta, mas também não crescerá de maneira ilimitada.

Neste capítulo, estudaremos a permanência de dois modelos de população, a saber, o modelo de moscas-varejeiras de Nicholson com retardo e o modelo predador-presa dependente da razão com retardo e um tipo de resposta funcional.

5.1 Modelo de moscas-varejeiras de Nicholson com retardo

Nesta seção, estudaremos a permanência do seguinte modelo de moscas-varejeiras de Nicholson com retardo

$$\begin{cases} x'(t) = -\delta(t)x(t) + R(t)x(t - \sigma(t)) \exp[-a(t)x(t - \sigma(t))] \\ x(t) = \varphi(t), \text{ para } t \in [-\tau, 0] \end{cases}, \quad t > 0, \quad (5.2)$$

em que $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ é uma função contínua e limitada, $\tau = \sup_{t \in \mathbb{R}} \sigma(t)$, a função $\varphi : [-\tau, 0] \rightarrow [0, \infty)$ é contínua tal que $\varphi(0) > 0$ e $\delta, a : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ são funções contínuas e limitadas.

Notemos que, se obtivermos a permanência do sistema (5.2) e considerarmos as funções a, R, δ e σ ω -periódicas, obteremos a permanência do modelo de moscas-varejeiras de Nicholson com parâmetros periódicos e retardo (4.4), em que $\varsigma = \sigma$, estudado na Seção 4.1.

Esta seção teve como inspiração o trabalho “*Persistence, permanence and global stability for an n -dimensional Nicholson system*” de Faria e Röst, [16]. Por conter resultados novos para a literatura, a mesma foi redigida em forma de artigo científico ([3]).

Alertamos que as notações utilizadas aqui também estão descritas na lista de símbolos.

5.1.1 Introdução ao modelo

Como dito no capítulo anterior, modelos mais realistas e interessantes de dinâmica populacional de uma única ou múltiplas espécies devem levar em conta o ambiente e os efeitos do tempo passado. A equação

$$x'(t) = -\delta x(t) + R x(t - \tau) \exp[-a x(t - \tau)], \quad (5.3)$$

onde $\delta, R, a, \tau > 0$, também modela uma população de moscas-varejeiras, mas as taxas de produção de ovos, reprodução, geração e mortalidade são consideradas constantes. Em [11], Berezansky *et al* estudaram a permanência de soluções dessa equação.

Ultimamente, a permanência de soluções de diversas modificações da equação (5.3) vem sendo analisada. Em [32], os autores obtiveram condições para garantir a permanência do seguinte sistema

$$\begin{cases} x'_1(t) = -D_{11}(t, x_1(t)) + D_{12}(t, x_2(t)) + c_1(t)x_1(t - \sigma_1(t)) \exp[-\gamma_1(t)x_1(t - \sigma_1(t))], \\ x'_2(t) = -D_{22}(t, x_2(t)) + D_{21}(t, x_1(t)) + c_2(t)x_2(t - \sigma_2(t)) \exp[-\gamma_2(t)x_2(t - \sigma_2(t))] \end{cases},$$

onde

$$D_{ij}(t, x) = \frac{a_{ij}(t)x}{b_{ij}(t) + x} \quad \text{ou} \quad D_{ij}(t, x) = a_{ij}(t) - b_{ij}(t) \exp[-x],$$

$a_{ij}, b_{ij}, c_i, \gamma_i : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ são todas funções contínuas e limitadas por constantes positivas, $\sigma_i : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ é uma função contínua e limitada, $\tau_i = \sup_{t \in \mathbb{R}} \sigma_i(t) > 0$ e $i, j = 1, 2$. Em 2012, Chen ([47]) generalizou esse modelo.

Em [16], Faria e Röst estudaram a permanência de soluções do seguinte modelo

$$x'_i(t) = -d_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j(t) + \sum_{j=1}^m \beta_{ij} x_i(t - \tau_{ij}) \exp[-x_i(t - \tau_{ij})],$$

onde $d_i > 0$, $a_{ij} \geq 0$, para $j \neq i$, $\tau_{ik} > 0$, $\beta_{ik} \geq 0$ com $\beta_i = \sum_{k=1}^m \beta_{ik} > 0$ para $i, j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m$.

Como os coeficientes e retardos em equações diferenciais de problemas populacionais e ecológicos geralmente variam no tempo, no mundo real, o modelo (5.3) pode ser naturalmente estendido para a seguinte equação diferencial não linear com retardo

$$x'(t) = -\delta(t)x(t) + R(t)x(t - \sigma(t)) \exp[-a(t)x(t - \sigma(t))],$$

onde

(a) $\delta, a \in C(\mathbb{R}, (0, \infty))$ e $R, \sigma \in C(\mathbb{R}, [0, \infty))$ são funções limitadas.

Aqui, assumiremos que

(b) $m_a > 0$ e $m_\delta > 0$.

Nosso propósito é investigar condições suficientes para garantir a permanência de soluções do seguinte sistema

$$\begin{cases} x'(t) = -\delta(t)x(t) + R(t)x(t - \sigma(t)) \exp[-a(t)x(t - \sigma(t))], & t > 0, \\ x(t) = \varphi(t), & t \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (5.4)$$

onde $\tau = \sup_{t \in \mathbb{R}} \sigma(t)$, $\varphi \in C([-\tau, 0], [0, \infty))$ é tal que $\varphi(0) > 0$ e as condições (a) e (b) estão satisfeitas.

O sistema (5.4) é um tipo de sistema de moscas-varejeiras de Nicholson com retardo, mas, de acordo com nosso conhecimento, os resultados provados em [11, 16, 32, 47] e nas referências relacionadas a esses trabalhos não podem ser aplicáveis para obter a permanência da solução de (5.4). Isso implica que os resultados desta seção são essencialmente novos.

5.1.2 Permanência de soluções

Do mesmo modo que no capítulo anterior, é possível mostrar que existe uma única solução x de (5.4) definida em $[-\tau, \infty)$ satisfazendo $x(t) > 0$, para todo $t > 0$. Para recordar esse fato, leia a Subseção 4.1.2.

O resultado seguinte atesta que se x é solução de (5.4) então $\limsup_{t \rightarrow \infty} x(t) < \infty$.

Teorema 5.2. *A solução x de (5.4) satisfaz $\limsup_{t \rightarrow \infty} x(t) < \infty$.*

Demonstração. Sejam $s > 0$ e $v_s = \limsup_{t \in [0, s]} x(t)$. Como

$$x \exp(-m_a x) \leq \frac{1}{m_a} \exp(-1), \text{ para } x \geq 0,$$

temos

$$x'(t) = -\delta(t)x(t) + R(t)x(t - \sigma(t)) \exp[-a(t)x(t - \sigma(t))] \leq -m_\delta x(t) + \frac{1}{m_a} M_R \exp(-1).$$

Então, para todo $t \in [0, s]$, obtemos

$$[x(t) \exp(m_\delta t)]' = x'(t) \exp(m_\delta t) + m_\delta x(t) \exp(m_\delta t) \leq \frac{1}{m_a} M_R \exp(-1) \exp(m_\delta t)$$

e, conseqüentemente,

$$\exp(m_\delta t)x(t) \leq \varphi(0) + \frac{1}{m_a m_\delta} [\exp(m_\delta t) - 1] M_R \exp(-1), \text{ para todo } t \in [0, s].$$

Dessa forma, para $t \in [0, s]$, temos

$$x(t) \leq \exp(-m_\delta t) \varphi(0) + \frac{1}{m_a m_\delta} [1 - \exp(-m_\delta t)] M_R \exp(-1) \leq \varphi(0) + \frac{1}{m_a m_\delta} M_R \exp(-1)$$

e, portanto, $v_s \leq \varphi(0) + \frac{1}{m_a m_\delta} M_R \exp(-1)$. Concluimos, assim, que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} x(t) \leq \varphi(0) + \frac{1}{m_a m_\delta} M_R \exp(-1).$$

□

Daqui em diante, para simplificarmos a notação, denotaremos o número $\varphi(0) + \frac{1}{m_a m_\delta} M_R \exp(-1)$ por c . Então,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} x(t) \leq c.$$

Para os próximos resultados, consideraremos a função $h : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ definida por

$$h(x) = x \exp(-M_a x), \text{ para } x \in [0, \infty). \quad (5.5)$$

É fácil ver que h é estritamente crescente em $\left[0, \frac{1}{M_a}\right]$ e estritamente decrescente em $\left[\frac{1}{M_a}, \infty\right)$.

Sob certas condições, a solução x de (5.4) satisfaz $\liminf_{t \rightarrow \infty} x(t) > 0$. É o que veremos a seguir.

Teorema 5.3. *Se $m_R \exp(-1) \geq M_\delta$ e x é solução de (5.4), então $\liminf_{t \rightarrow \infty} x(t) > 0$.*

Demonstração. Como $\limsup_{t \rightarrow \infty} x(t) < \infty$ e $x(t) > 0$, para $t \geq 0$, segue que x é limitada. Assim, existe uma constante $K > \frac{1}{M_a}$ tal que $0 < x(t) \leq K$, para $t \geq 0$. Escolhamos um número real k tal que $0 < k < \frac{1}{M_a}$ e $h(k) = h(K) = \min\{h(x); x \in [k, K]\}$.

Argumentaremos por contradição. Suponhamos que exista $t_0 > \tau$ tal que

$$x(t_0) = \min\{x(t); t \in [0, t_0]\} \quad \text{e} \quad x(t_0) < k. \quad (5.6)$$

Afirmamos que $h(x(t_0)) \leq h(x(t))$, para todo $t \in [0, t_0]$. De fato, se $x(t) \leq k$, para $t \in [0, t_0]$, então $x(t_0) \leq x(t) \leq k < \frac{1}{M_a}$. Como h é crescente em $\left[0, \frac{1}{M_a}\right]$, obtemos $h(x(t_0)) \leq h(x(t))$. Por outro lado, se existe $\tilde{t} \in [0, t_0]$ tal que $x(\tilde{t}) > k$, então $x(\tilde{t}) \in [k, K]$ e $h(x(\tilde{t})) \geq h(k)$. Além disso, $0 < x(t_0) < k < \frac{1}{M_a}$ e, conseqüentemente, $h(x(t_0)) < h(k)$. Portanto, $h(x(t_0)) < h(x(\tilde{t}))$.

Segue de (5.6) que $x'(t_0) \leq 0$. Em contrapartida, temos

$$\begin{aligned} x'(t_0) &= -\delta(t_0)x(t_0) + R(t_0)x(t_0 - \sigma(t_0)) \exp[-a(t_0)x(t_0 - \sigma(t_0))] \geq \\ &\geq -M_\delta x(t_0) + m_R h(x(t_0 - \sigma(t_0))) \geq -M_\delta x(t_0) + m_R h(x(t_0)) > \\ &> [-M_\delta + m_R \exp(-M_a k)] x(t_0) \geq 0, \end{aligned}$$

que é uma contradição.

Dessa forma, $x(t) \geq k$, para todo $t > \tau$. Por conseguinte, $\liminf_{t \rightarrow \infty} x(t) > 0$. \square

O próximo teorema é crucial para obtermos a permanência do sistema (5.4).

Teorema 5.4. *Assumamos que $\lambda = \frac{m_R}{M_\delta} \exp(-1) \geq 1$, $\tilde{t} \geq 0$, $K > \frac{1}{M_a}$ e x é solução de (5.4) tais que $x(t) \leq K$, para $t \geq \tilde{t}$.*

Seja $k > 0$ tal que $M_a k < 1$, $h(k) \leq h(K)$, onde h está definida em (5.5), e $\exp(M_a k) \leq \lambda$.

Então, $\liminf_{t \rightarrow \infty} x(t) \geq k$.

Demonstração. Seja $\zeta < \tau$.

Passo 1. Vamos provar que se $\min_{t \in [T, T+\zeta]} x(t) \geq k$ para algum $T \geq \tilde{t}$, então $x(t) \geq k$ para $t \geq T$.

Sem perda de generalidade, tomamos $T = \tilde{t} = 0$ e admitimos $x(t) \geq k$, para $t \in [0, \zeta]$. Seja $x(t_0) = \min_{t \in [\zeta, 2\zeta]} x(t)$.

Se $x(t_0) < k$, então

$$0 \geq x'(t_0) = -\delta(t_0)x(t_0) + R(t_0)x(t_0 - \sigma(t_0)) \exp[-a(t_0)x(t_0 - \sigma(t_0))]. \quad (5.7)$$

Afirmamos que se $x(t_0) < k$ então $h(x(t_0 - \sigma(t_0))) \geq \min\{h(x(t_0)), h(k)\}$. Com efeito, há dois casos a serem considerados: ou $t_0 - \sigma(t_0) \in [0, \zeta]$ ou $t_0 - \sigma(t_0) \in [\zeta, t_0]$.

Se $t_0 - \sigma(t_0) \in [0, \zeta]$, então $x(t_0 - \sigma(t_0)) \geq k$ e, portanto, $x(t_0 - \sigma(t_0)) \in [k, K]$. No caso em que $x(t_0 - \sigma(t_0)) \leq \frac{1}{M_a}$, temos $h(k) \leq h(x(t_0 - \sigma(t_0)))$. E, no caso em que $x(t_0 - \sigma(t_0)) \geq \frac{1}{M_a}$, obtemos $h(k) \leq h(K) \leq h(x(t_0 - \sigma(t_0)))$.

Se $t_0 - \sigma(t_0) \in [\zeta, t_0]$, então $x(t_0 - \sigma(t_0)) \geq x(t_0)$. No caso em que $x(t_0 - \sigma(t_0)) \leq \frac{1}{M_a}$, temos $h(x(t_0 - \sigma(t_0))) \geq h(x(t_0))$. E, se $x(t_0 - \sigma(t_0)) \geq \frac{1}{M_a}$, então $h(x(t_0 - \sigma(t_0))) \geq h(K) \geq h(k)$. Entretanto, como $x(t_0) \leq k < \frac{1}{M_a}$, segue que $h(x(t_0)) \leq h(k)$ e, portanto, $h(x(t_0 - \sigma(t_0))) \geq h(x(t_0))$.

Pelos argumentos anteriores, confirmamos que

$$h(x(t_0 - \sigma(t_0))) \geq \min\{h(x(t_0)), h(k)\}.$$

Por (5.7) e pelas hipóteses, obtemos

$$\begin{aligned} 0 \geq x'(t_0) &\geq -M_\delta x(t_0) + m_R h(x(t_0 - \sigma(t_0))) \geq -M_\delta x(t_0) + m_R h(x(t_0)) = \\ &= [-M_\delta + m_R \exp[-M_a x(t_0)]]x(t_0) > [-M_\delta + m_R \exp(-M_a k)]x(t_0) \geq 0, \end{aligned}$$

que é uma contradição. Portanto, $x(t_0) \geq k$. Pelo método de passos, isso completa o Passo 1.

Seja $s_0 = \min_{t \in [0, \zeta]} x(t) > 0$.

Se $s_0 \geq k$, o resultado segue do Passo 1, isto é, $x(t) \geq k$ para $t \geq T$.

Se $s_0 < k$, definamos $s_1 = \min\{k, \lambda h(s_0)\}$.

Notemos que

$$\lambda h(s_0) = \lambda s_0 \exp(-M_a s_0) \geq s_0 \exp[M_a(k - s_0)] > s_0,$$

e, portanto, $s_1 > s_0$.

Passo 2. Vamos mostrar que $\min_{t \in [\zeta, 2\zeta]} x(t) \geq s_1$.

De fato, suponhamos o contrário, ou seja, que existe $t_1 \in [\zeta, 2\zeta]$ tal que $x(t_1) < s_1$ e $x(t) \geq x(t_1)$, para $t \in [\zeta, t_1]$. Então, substituindo t_0 por t_1 em (5.7), obtemos

$$0 \geq x'(t_1) = -\delta(t_1)x(t_1) + R(t_1)x(t_1 - \sigma(t_1)) \exp[-a(t_1)x(t_1 - \sigma(t_1))]$$

e também obtemos $h(x(t_1 - \sigma(t_1))) \geq \min\{h(s_0), h(x(t_1))\}$.

Se $h(s_0) \geq h(x(t_1))$, então $s_0 \geq x(t_1)$, uma vez que h é crescente em $[0, \frac{1}{M_a}]$. Logo,

$$\begin{aligned} 0 \geq x'(t_1) &\geq -M_\delta x(t_1) + m_R h(x(t_1 - \sigma(t_1))) \geq -M_\delta x(t_1) + m_R h(x(t_1)) = \\ &= [-M_\delta + m_R \exp[-M_a x(t_1)]]x(t_1) > [-M_\delta + m_R \exp(-M_a k)]x(t_1) \geq 0, \end{aligned}$$

o que não é possível.

Se $h(x(t_1)) > h(s_0)$, então $x(t_1) > s_0$. Como $x(t_1) < s_1 \leq \lambda h(s_0)$, segue que

$$0 \geq x'(t_1) \geq -M_\delta x(t_1) + m_R h(x(t_1 - \sigma(t_1))) > -M_\delta \lambda h(s_0) + m_R h(s_0) =$$

$$= [-M_\delta \lambda + m_R]h(s_0) \geq 0,$$

o que também não é possível. Isso completa o Passo 2.

Agora, definamos por recorrência a sequência

$$s_{p+1} = \min\{k, \lambda h(s_p)\}.$$

Se $s_p = k$ para algum $p \geq 0$, então $\lambda h(s_p) = \lambda k \exp(-M_a k) \geq k$ e $s_r = k$, para $r > p$. Nesse caso, o resultado segue do Passo 1.

Se $s_p < k$, para algum $p \in \mathbb{N}$, então

$$s_{p+1} = \lambda h(s_p) = \lambda s_p \exp(-M_a s_p) \geq s_p \exp[M_a(k - s_p)] > s_p, \quad (5.8)$$

de onde podemos concluir que (s_p) é uma sequência estritamente crescente.

Seja $\tilde{s} = \lim_{p \rightarrow \infty} s_p$. É óbvio que $0 \leq \tilde{s} \leq k$. Além disso, por (5.8), temos $\tilde{s} \geq \tilde{s} \exp[M_a(k - \tilde{s})] \geq \tilde{s}$. Portanto, $\tilde{s} = k$.

Por outro lado, o Passo 2 e um argumento indutivo implicam que

$$\min_{t \in [p\zeta, (p+1)\zeta]} x(t) \geq s_p, \text{ para } p \geq 0.$$

Por conseguinte,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} x(t) \geq \tilde{s} = k.$$

□

A permanência do sistema (5.4) é consequência dos resultados anteriores e será demonstrada a seguir.

Teorema 5.5. *Se $\lambda = \frac{m_R}{M_\delta} \exp(-1) \geq 1$, então o sistema (5.4) é permanente.*

Demonstração. Sejam $K > \max\{\frac{1}{M_a}, c\}$ e $k \in (0, \frac{1}{M_a})$ tais que $k < \frac{1}{M_a} \ln \lambda$ e $h(k) \leq h(K)$.

Dado $\varepsilon > 0$, definamos $K_\varepsilon = K + \varepsilon$ e $k_\varepsilon \in (0, k)$ tais que $h(k_\varepsilon) \leq h(K_\varepsilon)$ e $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} k_\varepsilon = k$.

Seja x uma solução de (5.4). Denotemos os limites $\liminf_{t \rightarrow \infty} x(t)$ e $\limsup_{t \rightarrow \infty} x(t)$ por u e v , respectivamente. Pelo Teorema 5.2, temos $v \leq c \leq K < K + \varepsilon$. Além disso, pelo Teorema 5.4, obtemos $u \geq k_\varepsilon$. Portanto,

$$k_\varepsilon \leq u \leq v \leq K_\varepsilon.$$

Consequentemente, ao fazermos ε tender a zero, concluímos que

$$k \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} x(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} x(t) \leq K.$$

□

5.1.3 Exemplos

Nos exemplos a seguir, usamos o Método de Range-Kutta para obter soluções de certos sistemas no MATLAB, a fim de visualizarmos a permanência de suas soluções através de gráficos. O leitor interessado em estudar o Método de Runge-Kutta para equações diferenciais funcionais com retardo pode consultar as referências [14] e [23], por exemplo. Aqui, nos limitamos a somente usá-lo para obter gráficos de soluções usando o software MATLAB.

Exemplo 5.6. *Consideremos o seguinte sistema:*

$$\begin{cases} x'(t) = -(2 + \cos t)x(t) + (10 + \sin t)x(t - 6\pi) \exp[-(2 - \cos t)x(t - 6\pi)], & t > 0, \\ x(t) = 7, & t \in [-6\pi, 0]. \end{cases} \quad (5.9)$$

Nesse sistema, as funções $\delta(t) = 2 + \cos t$, $R(t) = 10 + \sin t$, $a(t) = 2 - \cos t$ e $\sigma(t) \equiv 6\pi$ satisfazem (a) e (b).

Portanto, $M_\delta = 3$, $m_R = 9$ e $\lambda = 3 \exp(-1) \approx 1,10 > 1$.

Segue do Teorema 5.5 que o sistema (5.9) é permanente.

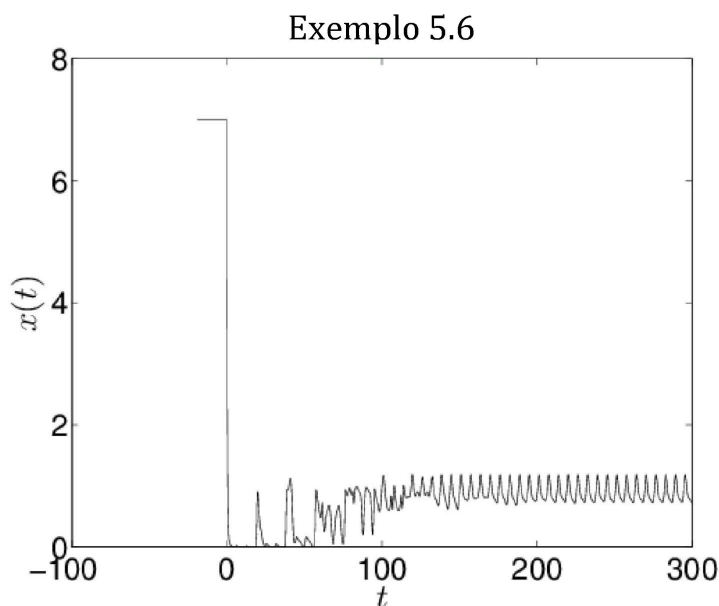


Figura 5.1: Exemplo 5.6

Exemplo 5.7. *Consideremos, agora, o sistema a seguir:*

$$\begin{cases} x'(t) = -(0.5 + |\sin t|)x(t) + (13 \exp(\cos t))x(t - 4\pi) \exp[-(2 + \sin t)x(t - 4\pi)], & t > 0, \\ x(t) = |t - 1|, & t \in [-4\pi, 0]. \end{cases} \quad (5.10)$$

Aqui, as funções $\delta(t) = 0,5 + |\text{sen } t|$, $R(t) = 13 \exp(\cos t)$, $a(t) = 2 + \text{sen } t$ e $\sigma \equiv 4\pi$ satisfazem (a) e (b). Ademais, $M_\delta = 1,5$, $m_R = 13 \exp(-1)$ e $\lambda = \frac{13}{1,5} \exp(-1) \approx 3,19 > 1$. Logo, pelo Teorema 5.5, concluímos que o sistema (5.10) é permanente.

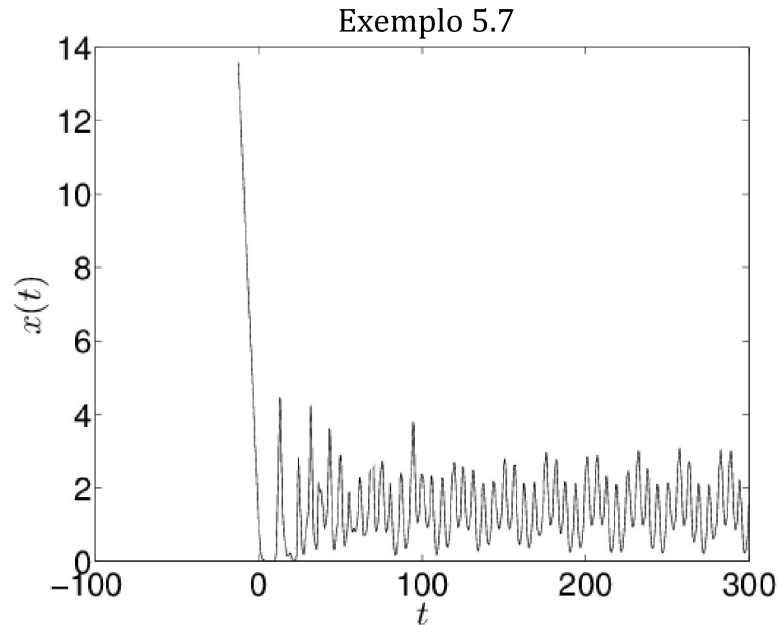


Figura 5.2: Exemplo 5.7

5.2 Modelo predador-presa dependente da razão com retardo e um tipo de resposta funcional

Nesta seção, estabeleceremos critérios para garantir a permanência da solução de um tipo de modelo predador-presa generalizado. A partir desse modelo será possível obtermos critérios para atestarmos a permanência de dois modelos: predador-presa não autônomo dependente da razão com respostas funcionais Holling dos tipos II e III, onde ambos consideram o retardo constante. Devido às mudanças contínuas do ambiente, expandiremos tais resultados considerando o retardo variável, como uma função contínua e limitada. Nosso objetivo é encontrar constantes positivas que limitem as densidades das populações de presas e predadores.

Cabe destacar que os resultados presentes nesta seção estendem os resultados provados no artigo “*Permanence in delayed ratio-dependent predator-prey models with monotonic functional responses*” de Fan e Li ([15]). Os resultados obtidos serão ilustrados com exemplos numéricos.

5.2.1 Introdução ao modelo

O modelo predador-presa foi proposto independentemente por Alfred. J. Lotka (1925) e Vito Volterra (1926). Este modelo descreve a interação entre duas espécies, sendo que uma delas dispõe de alimentos para sobreviver – presa – e a outra se alimenta da primeira espécie – predador.

O modelo predador-presa de Lotka-Volterra foi proposto do seguinte modo

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)[a - by(t)] \\ y'(t) = y(t)[bcx(t) - d] \end{cases}, t > 0,$$

em que a, b, c e d são constantes positivas.

Neste modelo, a é a taxa de crescimento intrínseca de densidade populacional das presas, b é a eficiência de captura, isto é, o efeito de um predador sobre a densidade populacional das presas, bc é a eficiência de conversão, ou seja, os incrementos na própria população decorrentes de cada presa consumida e d é a taxa de mortalidade per capita dos predadores. Para obter mais informações biológicas a respeito do modelo, o leitor pode consultar as referências [9], [39] e [40].

Notemos que, dada uma densidade de predadores, a eficiência de captura aumenta na proporção direta da densidade das presas, isto é, o predador nunca é saciado, uma vez que ele simplesmente continua se alimentando, independente do número de presas capturadas. Por essa razão, este modelo é considerado irreal. Foi proposto, então, o modelo modificado de Lotka-Volterra

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) \left[1 - \frac{x(t)}{b} \right] - f(x(t))y(t) \\ y'(t) = y(t)[f(x(t)) - d] \end{cases}, t > 0,$$

onde as constantes a, b, d , que medem a taxa de crescimento intrínseca de crescimento das presas, a eficiência de captura e a taxa de mortalidade do predador, respectivamente, são positivas, e f é uma função denominada resposta funcional, com $f(0) = 0$ e $f'(x) > 0$ para todo $x > 0$, introduzida por C. S. Holling, que reflete a relação entre o consumo dos predadores e a quantidade disponível de presas. Holling assumiu que existiam três tipos de resposta funcional, I, II e III. O gráfico posterior mostra tais tipos.

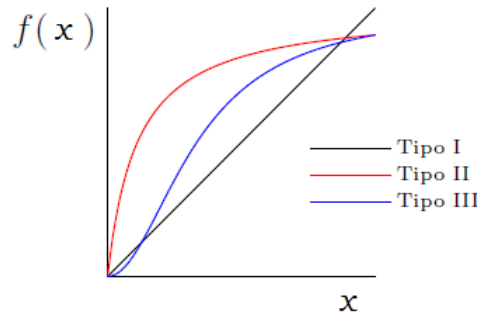


Figura 5.3: Os três tipos de resposta funcional propostos por Holling.

A partir desse gráfico, vemos que na função do tipo I, o consumo de presas é linearmente crescente com a densidade de presas, essa é a função resposta assumida no modelo de Lotka-Volterra. Na função do tipo II, o consumo de presas cresce até alcançar um valor de saturação, que corresponde a saciação do predador. A função do tipo III se parece com a função do tipo II, também tem um valor de saturação, mas, para valores pequenos de densidade de presas, há um crescimento não-linear, que pode ser causado por uma mudança da espécie predada ou por alguma aprendizagem para melhoria das habilidades de captura pelo predador. Para obter mais informações sobre respostas funcionais, o leitor pode consultar [2].

Recentemente, foram notadas evidências biológicas e fisiológicas que, em certas situações, especialmente quando o predador tem que procurar por comida e, conseqüentemente, compartilhá-la ou competir por ela, uma situação geral do modelo predador-presa deveria se basear na teoria dependente da razão, onde a taxa de crescimento de predadores per capita deve ser uma função da razão de presas para a abundância de predadores. Essa teoria pode ser encontrada em [38]. Em virtude disso, as respostas funcionais não dependerão apenas das presas, mas também dos predadores. Assim, consideremos o modelo predador-presa dependente da razão com resposta funcional Holling do tipo II

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) [a(t) - b(t)x(t)] - c(t) \frac{x(t)}{\rho y(t) + x(t)} y(t) \\ y'(t) = y(t) \left[\frac{e(t)x(t - \tau)}{\rho y(t - \tau) + x(t - \tau)} - d(t) \right] \end{cases}, t > 0. \quad (5.11)$$

A função resposta neste caso é $\frac{x}{\rho y - x}$, com $\rho > 0$ e as funções $a, b, c, d, e : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ são contínuas com período $\omega > 0$.

Em [44], Wang e Li estudaram o modelo predador-presa não autônomo dependente

da razão com resposta funcional Holling tipo III

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) [a(t) - b(t)x(t)] - c(t) \frac{x^2(t)}{\rho^2 y^2(t) + x^2(t)} y(t) \\ y'(t) = y(t) \left[\frac{e(t)x^2(t-\tau)}{\rho^2 y^2(t-\tau) + x^2(t-\tau)} - d(t) \right] \end{cases}, t > 0, \quad (5.12)$$

enquanto Fan e Wang, em [15], estudaram o modelo predador-presa dependente da razão com retardo e um tipo de resposta funcional

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) [a(t) - b(t)x(t)] - c(t)g\left(\frac{x(t)}{y(t)}\right) y(t) \\ y'(t) = y(t) \left[e(t)g\left(\frac{x(t-\tau)}{y(t-\tau)}\right) - d(t) \right] \end{cases}, t > 0, \quad (5.13)$$

onde $\tau > 0$ é uma constante real e

- (a) $a, b, c, d, e \in C(\mathbb{R}, [0, \infty))$ tem período comum $\omega > 0$.
- (b) $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}, \bar{e}$ são maiores do que zero.
- (c) $g \in C^1([0, \infty), [0, \infty))$ é tal que $g(0) = 0$ e $g'(u) > 0$ para todo $u > 0$.
- (d) existem constantes $h, r > 0$ tais que $u^2 g'(u) \leq h$ e

$$\lim_{u \rightarrow \infty} g(u) = r. \quad (5.14)$$

Devido às constantes mudanças no ambiente, torna-se inadequado admitirmos o modelo com retardo constante. Por essa razão, nós consideraremos a seguinte extensão do modelo (5.13):

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) [a(t) - b(t)x(t)] - c(t)g\left(\frac{x(t)}{y(t)}\right) y(t) \\ y'(t) = y(t) \left[e(t)g\left(\frac{x(t-\sigma(t))}{y(t-\sigma(t))}\right) - d(t) \right] \end{cases}, t > 0, \quad (5.15)$$

onde as condições (a), (b), (c) e (d) ocorrem. Assumiremos também que

- (e) $\sigma \in C([0, \infty), [0, \infty))$ é uma função limitada.

Como as funções $g_1(u) = \frac{u}{\rho+u}$ e $g_2(u) = \frac{u^2}{\rho^2+u^2}$ satisfazem (b) e (c), ao considerarmos $\sigma \equiv \tau$ no sistema (5.15), vemos que os sistemas (5.11) e (5.12) são casos particulares de (5.15). Além disso, claramente, o sistema (5.13) é um caso particular de (5.15).

Em termos biológicos, as funções x e y são as densidades das populações de presas e predadores, respectivamente, a é a taxa de crescimento intrínseca populacional das

presas, d é a taxa de mortalidade do predador, c e e são as taxas de conversão. Nos sistemas (5.11) e (5.12), ρ é a metade da saturação de captura.

A função $[a(t) - b(t)x(t)]$ representa a taxa de crescimento das presas na ausência de predadores e as funções g, g_1, g_2 , a capacidade de captura do predador (resposta funcional).

5.2.2 Preliminares

Para provarmos a permanência de (5.15) a partir de uma condição inicial, precisaremos de alguns resultados auxiliares.

Primeiramente, notemos que a condição (c) implica que g é uma função estritamente crescente. E, de (5.14), podemos concluir que

$$0 < g(u) \leq r, \text{ para todo } u \in (0, \infty).$$

A seguir, provaremos que o número $\sup_{u>0} \left\{ \frac{g(u)}{u} \right\}$ existe.

Lema 5.8. *Se a função g cumpre as condições (c) e (d), então $\sup_{u>0} \left\{ \frac{g(u)}{u} \right\}$ existe.*

Demonstração. Faremos a prova deste lema em duas etapas.

(I) Para $u \geq 1$, temos

$$0 < \frac{g(u)}{u} \leq g(u) \leq r.$$

Logo,

$$0 < \sup_{u \geq 1} \left\{ \frac{g(u)}{u} \right\} \leq r.$$

(II) Para $u \in (0, 1)$, segue pelo Teorema do Valor Médio de Lagrange (Teorema B.19), que existe $z_u \in [0, u]$ tal que

$$g'(z_u) = \frac{g(u) - g(0)}{u - 0} = \frac{g(u)}{u} > 0.$$

Como g é continuamente diferenciável, o conjunto $g'([0, u])$ é compacto e, portanto, limitado, isto é, existe $\tilde{R} > 0$ tal que, para todo $z \in (0, u)$, tem-se $|g'(z)| \leq \tilde{R}$. Dessa forma,

$$0 < \left| \frac{g(u)}{u} \right| = |g'(z_u)| \leq \tilde{R}$$

e, conseqüentemente,

$$0 < \sup_{u \in (0,1)} \left\{ \frac{g(u)}{u} \right\} < \infty.$$

Por (I) e (II), concluímos que

$$0 < \sup_{u>0} \left\{ \frac{g(u)}{u} \right\} < \infty.$$

□

Seja

$$R = \sup_{u>0} \left\{ \frac{g(u)}{u} \right\}. \quad (5.16)$$

Lema 5.9. *Consideremos os seguintes sistemas*

$$\begin{cases} u'(t) = u(t)F(t, u(t), u(t - \sigma(t))), & t > 0, \\ u(t) = \phi(t), & t \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (5.17)$$

e

$$\begin{cases} v'(t) = v(t)[p(t) - q(t)v(t)]v(t), & t > 0, \\ v(0) = v_0 \end{cases} \quad (5.18)$$

em que $\tau = \sup_{t \in [0, \infty)} \sigma(t)$, $\phi \in C([-\tau, 0], [0, \infty))$ é tal que $\phi(0) > 0$, $F \in C(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, $v_0 > 0$, $p \in C$ e $q \in C_+$.

Seja $u(t)$ a solução do sistema (5.17), a qual é estritamente positiva em $[-\tau, \infty)$, e consideremos v a solução do sistema (5.18).

1) Suponhamos $u(t)F(t, u(t), u(t - \sigma(t))) \leq u(t)[p(t) - q(t)u(t)]$, para todo $(t, u(t))$ em $[0, \infty) \times [0, \infty)$.

Se $v_0 \geq \phi(0)$, então $v(t) \geq u(t)$, para todo $t \in [0, \infty)$;

2) Suponhamos $u(t)F(t, u(t), u(t - \sigma(t))) \geq u(t)[p(t) - q(t)u(t)]$, para todo $(t, u(t))$ em $[0, \infty) \times [0, \infty)$.

Se $v_0 \leq \phi(0)$, então $v(t) \leq u(t)$, para todo $t \in [0, \infty)$.

Demonstração. Demonstraremos apenas o caso 1), uma vez que o caso 2) é análogo.

Não é difícil verificar que v está definida em $[0, \infty)$ e é estritamente positiva. Podemos, pois, fazer as seguintes mudanças de variáveis:

$$u(t) = \exp[z(t)] \quad \text{e} \quad v(t) = \exp[s(t)].$$

De (5.17), (5.18) e da hipótese presente em 1), segue que

$$z'(t) \leq p(t) - q(t) \exp[z(t)] \quad \text{e} \quad s'(t) = p(t) - q(t) \exp[s(t)]. \quad (5.19)$$

Seja

$$f(t) = z(t) - s(t). \quad (5.20)$$

Segue de (5.19) e (5.20) que

$$f'(t) \leq -q(t) \exp[s(t)] [\exp[f(t)] - 1]. \quad (5.21)$$

Como $v_0 \geq \phi(0)$, temos

$$f(0) \leq 0.$$

Se $f(t) \leq 0$ para todo $t \in [0, \infty)$, a demonstração está completa.

Suponhamos que exista $\tilde{t} \in (0, \infty)$ tal que $f(\tilde{t}) > 0$. Como $f(0) \leq 0$, a equação $f(t) = 0$ possui pelo menos uma raiz em $[0, \tilde{t})$, pelo Teorema do Valor Intermediário (Teorema [B.16](#)).

Seja t_0 a raiz de $f(t) = 0$ mais próxima de \tilde{t} . Então, $f(t) \geq 0$ para todo $t \in [t_0, \tilde{t}]$.

Por [\(5.21\)](#), obtemos

$$f'(t) \leq 0, \text{ para todo } t \in [t_0, \tilde{t}],$$

de onde segue que f é não crescente em $[t_0, \tilde{t}]$.

Consequentemente, $f(\tilde{t}) \leq f(t_0) = 0$, o que está em contradição com $f(\tilde{t}) > 0$. \square

Existência de soluções periódicas

Lema 5.10. *O problema*

$$\begin{cases} u'(t) = u(t)[p(t) - q(t)u(t)], & t > 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (5.22)$$

tem exatamente uma solução ω -periódica contínua $u : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, se $q \in C_+$, $p \in C$, p e q são funções contínuas e ω -periódicas, com $\bar{p} > 0$, $\bar{q} > 0$ e $u_0 > 0$. Além disso,

$$\frac{\bar{p}}{\bar{q}} \exp \left[- \left(\bar{p} + \overline{|p|} \right) \omega \right] \leq u \leq \frac{\bar{p}}{\bar{q}} \exp \left[\left(\bar{p} + \overline{|p|} \right) \omega \right]. \quad (5.23)$$

Se $p \in C_+$, então

$$\frac{\bar{p}}{\bar{q}} \exp(-2\bar{p}\omega) \leq u \leq \frac{\bar{p}}{\bar{q}} \exp(2\bar{p}\omega). \quad (5.24)$$

Para mostrar que o problema [\(5.22\)](#) tem uma solução ω -periódica, utilizaremos o Teorema de Continuação de Mawhin (Corolário [3.39](#)). E, para aplicarmos tal resultado, encontraremos uma equação de operadores $Lx = \lambda Nx$, em que $\lambda \in [0, 1]$, L é um operador de Fredholm de índice zero e N é um operador L -compacto.

Através de cálculos simples, podemos verificar que se u é solução de [\(5.22\)](#) então u é positiva e está definida em $[0, \infty)$. Isso nos permite fazer a mudança de variáveis $u(t) = \exp[v(t)]$ e reescrever a equação presente em [\(5.22\)](#) como

$$v'(t) = p(t) - q(t) \exp[v(t)]. \quad (5.25)$$

Consideremos os espaços de Banach

$$Z = X = \{v \in C([0, \infty), \mathbb{R}); v(t + \omega) = v(t), t \in [0, \infty)\},$$

munidos da norma $\|v\| = \sup\{|v(t)|; t \in [0, \infty)\} = \sup\{|v(t)|; t \in [0, \omega]\}$.

Definamos $\text{dom } L = \{v \in C^1([0, \infty), \mathbb{R}); v(t + \omega) = v(t), t \in [0, \infty)\}$ e

$$Lv = v', \quad \text{para } v \in \text{dom } L.$$

Claramente, $\text{dom } L \subset X$.

Definamos, agora,

$$N(v(t)) = p(t) - q(t) \exp[v(t)].$$

Consideremos as seguintes projeções contínuas

$$Pv(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega v(t) dt \text{ e } Qv(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega v(t) dt, \text{ para } v \in X, t \in [0, \omega].$$

A demonstração do próximo resultado segue os mesmos passos da demonstração da Proposição [4.5](#).

Proposição 5.11. *L é um operador de Fredholm de índice zero.*

Fixemos $\lambda \in (0, 1)$ e consideremos a equação

$$Lv(t) = \lambda N(v(t)), \tag{5.26}$$

que é equivalente a

$$v'(t) = -\lambda p(t) - \lambda q(t) \exp[v(t)]. \tag{5.27}$$

Proposição 5.12. *Existe uma constante positiva A_0 , que não depende de λ , tal que se $v \in \text{dom } L$ satisfaz [\(5.27\)](#) então $\|v\| < A_0$.*

Demonstração. Seja v solução de [\(5.27\)](#). Então,

$$\frac{1}{\lambda} v'(t) = p(t) - q(t) \exp[v(t)].$$

Integrando ambos os membros da igualdade anterior em relação a t de 0 a ω , temos

$$\frac{1}{\lambda} \int_0^\omega v'(t) dt = \int_0^\omega [p(t) - q(t) \exp[v(t)]] dt,$$

de onde segue que

$$\bar{p} = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega q(t) \exp[v(t)] dt. \tag{5.28}$$

Aplicando a Fórmula do Valor Médio para integrais (Teorema [B.26](#)) em [\(5.28\)](#), existe um $\xi \in [0, \omega]$ tal que

$$\bar{p} = \bar{q} \exp[v(\xi)]$$

e, conseqüentemente, $v(\xi) = \ln\left(\frac{\bar{p}}{\bar{q}}\right)$.

Para $t \in [0, \omega]$, segue de [\(5.28\)](#) que

$$v(t) = v(\xi) + \int_\xi^t v'(s) ds \leq \ln\left(\frac{\bar{p}}{\bar{q}}\right) + \int_0^\omega |v'(s)| ds \leq$$

$$\leq \ln\left(\frac{\bar{p}}{\bar{q}}\right) + \int_0^\omega |p(s)|ds + \int_0^\omega q(s) \exp[v(s)]ds = \ln\left(\frac{\bar{p}}{\bar{q}}\right) + \omega\left(\overline{|p|} + \bar{p}\right) = A_2$$

e

$$\begin{aligned} v(t) &= v(\xi) + \int_\xi^t v'(s)ds \geq \ln\left(\frac{\bar{p}}{\bar{q}}\right) - \int_0^\omega |v'(s)|ds \geq \\ &\geq \ln\left(\frac{\bar{p}}{\bar{q}}\right) - \int_0^\omega |p(s)|ds - \int_0^\omega q(s) \exp[v(s)]ds = \ln\left(\frac{\bar{p}}{\bar{q}}\right) - \omega\left(\overline{|p|} + \bar{p}\right) = A_1. \end{aligned}$$

Portanto,

$$A_1 \leq v(t) \leq A_2, \quad \text{para todo } t \in [0, \omega]. \quad (5.29)$$

Tomando $A_0 > \max\{|A_1|, |A_2|\}$, completamos a demonstração. \square

Vamos considerar $\Omega = \{v \in X; \|v\| < A_0\}$.

Proposição 5.13. *O operador N é L -compacto em $\bar{\Omega}$.*

Demonstração. Se $v \in \bar{\Omega}$, então $\|v\| \leq A_0$. Portanto,

$$\begin{aligned} |QN(v(t))| &= \left| \frac{1}{\omega} \int_0^\omega N(v(t))dt \right| = \frac{1}{\omega} \left| \int_0^\omega [p(t) - q(t) \exp[v(t)]] dt \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\omega} \int_0^\omega |p(t)|dt + \frac{1}{\omega} \int_0^\omega q(t) \exp[v(t)]dt \leq M_{|p|} + M_q \exp(A_0), \end{aligned}$$

de onde segue que o conjunto $QN(\bar{\Omega})$ é limitado.

Assim como na Proposição 4.8, é possível mostrar que o operador $K_{P,Q}N$ é compacto. \square

Proposição 5.14. *Consideremos os operadores L, N, P, Q e o conjunto Ω definidos anteriormente. Estão satisfeitas as seguintes condições:*

- (I) Para $\lambda \in (0, 1)$ e $v \in \partial\Omega \cap \text{dom } L$, tem-se $Lv \neq \lambda Nv$;
- (II) Para $v \in \partial\Omega \cap \text{Ker } L$, tem-se $QNv \neq 0$;
- (III) $\text{deg}(QN|_{\Omega \cap \text{Ker } L}, \Omega \cap \text{Ker } L, 0) \neq 0$.

Demonstração. (I) Sejam $\lambda \in (0, 1)$ e $v \in \bar{\Omega} \cap \text{dom } L$. Se $Lv = \lambda Nv$, então $\|v\| < A_0$, pela Proposição 5.12. Logo, $v \in \Omega = \text{int } \Omega$, ou seja, $v \notin \partial\Omega$.

(II) Se $v \in \partial\Omega \cap \text{Ker } L$, então $\|v\| = A_0$, ou seja, v é constante.

Suponhamos que $QNv = 0$. Então, $\bar{p} - \bar{q} \exp(v) = 0$ e, conseqüentemente, $v = \ln\left(\frac{\bar{p}}{\bar{q}}\right)$. Portanto, $A_1 < v < A_2$ e $v \in \text{int } \Omega = \Omega$, o que é uma contradição.

(III) Definamos a seguinte homotopia

$$H(v(t), \mu) = -\mu v(t) + \frac{1-\mu}{\omega} \int_0^\omega QN(v(t)) dt, \text{ para } \mu \in [0, 1].$$

Se $v \in \partial\Omega \cap \text{Ker } L$, então v é uma função constante, mais especificamente, $v = \pm A_0$.

Afirmamos que $QN(-A_0) > 0$ e $QN(A_0) < 0$. De fato, se $QN(A_0) > 0$, então

$$0 < \frac{1}{\omega} \int_0^\omega [p(t) - q(t) \exp(A_0)] dt = \bar{p} - \bar{q} \exp(A_0).$$

Logo,

$$A_0 < \ln \left(\frac{\bar{p}}{\bar{q}} \right) < A_2,$$

o que contradiz a definição de A_0 .

De forma análoga, é possível provar que $QN(-A_0) > 0$.

Portanto, se $v \in \partial\Omega \cap \text{Ker } L$ e $\mu \in [0, 1]$, então $vH(v, \mu) = -\mu v^2 + (1-\mu)vQN(v) < 0$, de onde segue que $0 \notin H((\partial\Omega \cap \text{Ker } L) \times [0, 1])$. Pela invariância do grau por homotopia, concluímos que

$$\deg(QN|_{\Omega \cap \text{Ker } L}, \Omega \cap \text{Ker } L, 0) = \deg(-Id|_{\Omega \cap \text{Ker } L}, \Omega \cap \text{Ker } L, 0) \neq 0.$$

□

Neste momento, estamos em condições de demonstrar o Lema [5.10](#).

Demonstração. (do Lema [5.10](#)) Visto que o sistema [\(5.22\)](#) é linear, existe apenas uma solução u de [\(5.22\)](#). Pelas Proposições [5.11](#), [5.12](#), [5.13](#) e [5.14](#), as condições do Corolário [3.39](#) estão satisfeitas e, portanto, existe uma solução ω -periódica $v(t)$ para a equação [\(5.25\)](#). Por conseguinte, $u(t) = \exp[v(t)]$ é a única solução ω -periódica da equação [\(5.22\)](#).

Considerando $\lambda = 1$ na demonstração da Proposição [5.12](#), assim como em [\(5.29\)](#), obtemos

$$\ln \left(\frac{\bar{p}}{\bar{q}} \right) - \omega (\overline{|p|} + \bar{q}) \leq v \leq \ln \left(\frac{\bar{p}}{\bar{q}} \right) + \omega (\overline{|p|} + \bar{q}).$$

Como $u(t) = \exp[v(t)]$, concluímos que

$$\frac{\bar{p}}{\bar{q}} \exp \left[- (\overline{|p|} + \bar{q}) \omega \right] \leq u \leq \frac{\bar{p}}{\bar{q}} \exp \left[(\overline{|p|} + \bar{q}) \omega \right].$$

No caso em que $p \in C_+$, temos $\overline{|p|} = \bar{p}$, de onde segue a desigualdade [\(5.24\)](#). □

5.2.3 Permanência de soluções

Sejam $\tau = \sup_{t \in [0, \infty)} \{\sigma(t)\}$ e $\varphi, \psi \in C([-\tau, 0], [0, \infty))$ tais que $\varphi(0) > 0$ e $\psi(0) > 0$.

Consideremos o seguinte sistema

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) [a(t) - b(t)x(t)] - c(t)g\left(\frac{x(t)}{y(t)}\right) y(t) \\ y'(t) = y(t) \left[e(t)g\left(\frac{x(t - \sigma(t))}{y(t - \sigma(t))}\right) - d(t) \right] \end{cases}, \quad t > 0, \quad (5.30)$$

sujeito ao sistema inicial

$$\begin{cases} x(t) = \varphi(t) \\ y(t) = \psi(t) \end{cases}, \quad t \in [-\tau, 0]. \quad (5.31)$$

com as condições (a), (b), (c), (d) e (e) satisfeitas.

Seja $(x(t, \varphi), y(t, \psi))$ o par de soluções do sistema (5.30)-(5.31). Como estamos interessados em provar a permanência de soluções do sistema (5.30)-(5.31), queremos encontrar constantes $k, K > 0$ tais que

$$k \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} x(t, \varphi) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} x(t, \varphi) \leq K$$

e

$$k \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} y(t, \psi) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} y(t, \psi) \leq K.$$

Daqui em diante, o par de soluções $(x(t, \varphi), y(t, \psi))$ do sistema (5.30)-(5.31) será denotado por $(x(t), y(t))$, por simplicidade de notação.

Para provarmos a permanência do sistema (5.30)-(5.31), devemos mostrar que as soluções $x(t)$ e $y(t)$ de (5.30) e (5.31), respectivamente, são positivas. Faremos isso nas próximas linhas.

Lema 5.15. *O par de soluções $(x(t), y(t))$ do sistema (5.30)-(5.31) está definido em $[0, \infty)$ e satisfaz $x(t) > 0$ e $y(t) > 0$ para todo $t \geq 0$.*

Demonstração. Basta notarmos que

$$x(t) = \varphi(0) \exp \left[\int_0^t \left[a(s) - b(s)x(s) - c(s)g\left(\frac{x(s)}{y(s)}\right) y(s) \right] ds \right]$$

e

$$y(t) = \psi(0) \exp \left[\int_0^t \left[e(s)g\left(\frac{x(s - \sigma(s))}{y(s - \sigma(s))}\right) - d(s) \right] ds \right].$$

□

Vamos assumir que as funções a, c, d e e no sistema (5.30)-(5.31) cumprem as seguintes condições:

$$(C_1) \bar{a} > R\bar{c};$$

$$(C_2) r\bar{e} > \bar{d},$$

em que r e R foram dados em (5.14) e (5.16), respectivamente.

Os resultados a seguir nos darão as condições necessárias para a permanência do sistema (5.30)-(5.31), onde x e y representam as soluções do sistema citado.

Proposição 5.16. *Sob as condições (a), (b), (c), (d) e (e), existe uma constante $K_1 > 0$ tal que*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} x(t) \leq K_1.$$

Demonstração. Notemos que

$$x'(t) \leq x(t)[a(t) - b(t)x(t)]$$

e consideremos o seguinte sistema auxiliar

$$\begin{cases} z'(t) = z(t)[a(t) - b(t)z(t)] \\ z(0) = \varphi(0) \end{cases}. \quad (5.32)$$

Pelo Lema 5.10, o sistema (5.32) possui uma única solução $z(t)$ tal que

$$z(t) \leq \frac{\bar{a}}{b} \exp(2\bar{a}\omega) = K_1.$$

Por outro lado, segue do primeiro item do Lema 5.9 que

$$x(t) \leq z(t) \leq K_1, \text{ para todo } t \in [0, \infty).$$

Portanto,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} x(t) \leq K_1.$$

□

Proposição 5.17. *Se as condições (a), (b), (c), (d), (e), (C₁) está satisfeita, então existe uma constante $k_1 > 0$ tal que*

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} x(t) \geq k_1.$$

Demonstração. É fácil ver que

$$x'(t) \geq x(t)[a(t) - Rc(t) - b(t)x(t)].$$

Consideremos o seguinte sistema auxiliar:

$$\begin{cases} z'(t) = z(t)[a(t) - Rc(t) - b(t)z(t)] \\ z(0) = \varphi(0) \end{cases}, \quad t > 0. \quad (5.33)$$

Segue de (C_1) e do Lema 5.10 que o sistema (5.33) possui uma única solução $z(t)$ ω -periódica em $[0, \infty)$. Tomemos $k_1 = m_z$. Do segundo item do Lema 5.9, temos

$$x(t) \geq z(t) \geq k_1, \quad \text{para todo } t \in [0, \infty).$$

Portanto,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} x(t) \geq k_1.$$

□

Proposição 5.18. *Se as condições (a), (b), (c), (d), (e), (C_1) e (C_2) estão satisfeitas, então existe uma constante $k_2 > 0$ tal que*

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} y(t) \geq k_2.$$

Demonstração. Para t suficientemente grande, temos $y(t - \sigma(t)) > 0$. Definamos a função $f : [0, y(t - \sigma(t))] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(u) = \begin{cases} r, & \text{se } u = 0 \\ g\left(\frac{k_1}{u}\right), & \text{se } u > 0 \end{cases}.$$

Ao aplicarmos o Teorema do Valor Médio de Lagrange (Teorema B.19) à função f no intervalo $[0, y(t - \sigma(t))]$, obtemos $\xi \in (0, y(t - \sigma(t)))$ tal que

$$f'(\xi)y(t - \sigma(t)) = f(y(t - \sigma(t))) - f(0),$$

ou seja

$$-g'\left(\frac{k_1}{\xi}\right) \frac{k_1}{\xi^2} y(t - \sigma(t)) + r = g\left(\frac{k_1}{y(t - \sigma(t))}\right).$$

Como $g'(u)u^2 \leq h$, temos

$$-\frac{h}{k_1} y(t - \sigma(t)) + r \leq g\left(\frac{k_1}{y(t - \sigma(t))}\right).$$

Da Proposição 5.17 e do fato de g ser crescente, segue que

$$-\frac{h}{k_1} y(t - \sigma(t)) + r \leq g\left(\frac{x(t - \sigma(t))}{y(t - \sigma(t))}\right). \quad (5.34)$$

Por outro lado, do sistema (5.30), temos

$$y'(t) \geq -d(t)y(t).$$

Integrando ambos os membros da desigualdade anterior de $t - \sigma(t)$ a t , obtemos

$$-\int_{t-\sigma(t)}^t \frac{y'(s)}{y(s)} ds \leq \int_{t-\sigma(t)}^t d(s) ds \leq \int_{t-\sigma(t)}^t M_d ds \leq M_d \tau,$$

de onde segue que

$$y(t - \sigma(t)) \leq y(t) \exp(M_d \tau). \quad (5.35)$$

Por (5.34) e (5.35), temos

$$y'(t) \geq y(t) \left[\left(-\frac{h}{k_1} \exp(M_d \tau) y(t) + r \right) e(t) - d(t) \right],$$

para t suficientemente grande.

Consideremos o seguinte sistema auxiliar:

$$\begin{cases} z'(t) = z(t) \left[r e(t) - d(t) - \frac{h}{k_1} \exp(M_d \tau) e(t) z(t) \right], & t > 0. \\ z(0) = \psi(0) \end{cases} \quad (5.36)$$

Das hipóteses e do Lema 5.10, segue que existe uma única solução ω -periódica z do sistema (5.36) em $[0, \infty)$. Seja $k_2 = m_z$. Para t suficientemente grande, segue do segundo item do Lema 5.9 que

$$y(t) \geq z(t) \geq k_2.$$

Portanto,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} y(t) \geq k_2.$$

□

Proposição 5.19. *Sob as condições (a), (b), (c), (d) e (e), existe uma constante $K_2 > 0$ tal que*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} y(t) \leq K_2.$$

Demonstração. Seja $u(t) = \frac{1}{y(t)}$, para $t \geq 0$. Então, para $t > 0$, temos

$$u'(t) = -\frac{y'(t)}{y^2(t)} = u(t) [d(t) - e(t)g(x(t - \sigma(t))u(t - \sigma(t)))].$$

Como g é crescente em $[0, \infty)$, d é uma função positiva e $\lim_{u \rightarrow \infty} g(u) = r$, segue que, para t suficientemente grande,

$$u(t) [d(t) - e(t)g(x(t - \sigma(t))u(t - \sigma(t)))] \geq -u(t)e(t)g(K_1 u(t - \sigma(t))) \geq -ru(t)e(t).$$

Portanto,

$$u'(t) \geq -ru(t)e(t),$$

para t suficientemente grande, de onde obtemos

$$u(t - \sigma(t)) \leq u(t) \exp(rM_e \tau).$$

Como $R = \sup_{u>0} \frac{g(u)}{u}$, segue que $g(u) \leq Ru$ para todo $u \geq 0$. Deste modo,

$$u'(t) \geq u(t)[d(t) - e(t)g(K_1u(t - \sigma(t)))] \geq u(t)[d(t) - K_1Re(t)u(t - \sigma(t))]$$

e

$$u'(t) \geq u(t)[d(t) - K_1R \exp(rM_e\tau)e(t)u(t)],$$

para t suficientemente grande.

Consideremos o seguinte sistema auxiliar:

$$\begin{cases} z(t) = z(t) [d(t) - K_1R \exp(rM_e\tau)e(t)z(t)] \\ z(0) = \psi(0) \end{cases}, \quad t > 0. \quad (5.37)$$

Pelo Lema 5.10, existe uma única solução ω -periódica z de (5.37) tal que

$$z(t) \geq \frac{\bar{d} \exp(-2\bar{d}\omega)}{K_1R \exp(rM_e\tau)\bar{e}}.$$

Seja $K_2 = \frac{K_1R \exp(rM_e\tau)\bar{e}}{\bar{d} \exp(-2\bar{d}\omega)}$. Para t suficientemente grande, segue do segundo item do Lema 5.9 que

$$u(t) \geq z(t) \geq \frac{1}{K_2},$$

de onde obtemos

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} u(t) \geq \frac{1}{K_2}.$$

Por conseguinte,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} y(t) \leq K_2.$$

□

Teorema 5.20. *Se as condições (C_1) e (C_2) estão satisfeitas, então o sistema (5.30)-(5.31) é permanente.*

Demonstração. O resultado segue das Proposições 5.16, 5.17, 5.18 e 5.19, tomando $k = \min\{k_1, k_2\}$ e $K = \max\{K_1, K_2\}$. □

5.3 Aplicações e exemplos numéricos

Consideremos o seguinte modelo predador-presa dependente da razão com retardo e um tipo de resposta funcional

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) [a(t) - b(t)x(t)] - c(t)g\left(\frac{x(t)}{y(t)}\right)y(t) \\ y'(t) = y(t) \left[e(t)g\left(\frac{x(t - \sigma(t))}{y(t - \sigma(t))}\right) - d(t) \right] \end{cases}, \quad t > 0 \quad (5.38)$$

sujeito ao sistema inicial

$$\begin{cases} x(t) = \varphi(t) \\ y(t) = \psi(t) \end{cases}, t \in [-\tau, 0], \quad (5.39)$$

onde $\tau = \sup_{t \in [0, \infty)} \{\sigma(t)\}$, $\varphi, \psi \in C([-\tau, 0], [0, \infty))$ são tais que $\varphi(0) > 0$ e $\psi(0) > 0$, a, b, c, d e e satisfazem (a) e (b), σ satisfaz (e) e a função g será exposta em cada aplicação.

Aplicação 5.1. *Sejam $\alpha > 0$, $\beta \geq 1$ e $\rho > 0$. Consideremos*

$$g(u) = \alpha \frac{u^\beta}{u^\beta + \rho}, \quad \text{para } u \geq 0.$$

Mostraremos que a função g cumpre as condições (c) e (d).

É evidente que $g(0) = 0$, g é continuamente diferenciável e $g'(u) = \alpha\beta\rho \frac{u^{\beta-1}}{(u^\beta + \rho)^2} > 0$, para todo $u > 0$. Portanto, g cumpre a condição (c).

Agora, notemos que $\lim_{u \rightarrow \infty} g(u) = \alpha = r$. Além disso, para $u > 0$, temos

$$u^2 g'(u) = \alpha\beta\rho \frac{u^{\beta+1}}{u^{2\beta} + 2u^\beta\rho + \rho^2}.$$

Se $u \geq 1$, então

$$u^2 g'(u) = \alpha\beta\rho \frac{u^{\beta+1}}{u^{2\beta} + 2u^\beta\rho + \rho^2} \leq \alpha\beta\rho.$$

Se $u \in (0, 1)$, então

$$u^2 g'(u) = \alpha\beta\rho \frac{u^{\beta+1}}{u^{2\beta} + 2u^\beta\rho + \rho^2} \leq \alpha \frac{\beta\rho}{2\rho + \rho^2} = \alpha \frac{\beta}{2 + \rho}.$$

Tomando $h \geq \max \left\{ \alpha\beta\rho, \alpha \frac{\beta}{2 + \rho} \right\}$, comprovamos que g cumpre a condição (d).

Pelo Lema 5.8, existe $R = \sup_{u > 0} \left\{ \frac{g(u)}{u} \right\}$. Então, se as funções a, c, d e e no sistema (5.38)-(5.39) satisfizerem as condições (C_1) e (C_2) , com a função g definida anteriormente, seguirá do Teorema 5.20 que o sistema (5.38)-(5.39) é permanente.

Aplicação 5.2. *Sejam $\alpha > 0$ e $\rho > 0$. Vemos que*

$$g_1(u) = \alpha \frac{u}{u + \rho}, \quad \text{para todo } u \geq 0,$$

é um caso particular da Aplicação 5.1. É fácil verificar que $R_1 = \sup_{u > 0} \left\{ \frac{g_1(u)}{u} \right\} = \frac{\alpha}{\rho}$.

Se as funções a, c, d e e no sistema (5.38)-(5.39) satisfizerem as condições (C_1) e (C_2) , com a função g_1 dada anteriormente, então o sistema (5.38)-(5.39) será permanente, pelo Teorema 5.20.

Aplicação 5.3. *Sejam $\alpha > 0$ e $\rho > 0$. Vemos que*

$$g_2(u) = \alpha \frac{u^2}{u^2 + \rho}, \text{ para todo } u \geq 0,$$

também é um caso particular da Aplicação 5.1. É possível verificar que

$$R_2 = \sup_{u>0} \left\{ \frac{g_2(u)}{u} \right\} = \frac{\alpha}{2\sqrt{\rho}}.$$

Se as funções a, c, d e e no sistema (5.38)-(5.39) satisfizerem as condições (C_1) e (C_2) , com a função g_2 dada anteriormente, então o sistema (5.38)-(5.39) será permanente, pelo Teorema 5.20.

Na sequência, exibiremos um exemplo para cada aplicação.

Exemplo 5.21. *Consideremos o seguinte sistema dependente da razão com resposta funcional Holling do tipo II:*

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) [1 - \sin t - \exp(\cos t)x(t)] - (2 + \cos t) \frac{x(t)}{2,8y(t) + x(t)} y(t) \\ y'(t) = y(t) \left[\ln(7 - \sin t) \frac{x(t - |\sin t|)}{2,8y(t - |\sin t|) + x(t - |\sin t|)} - 1 - 0,2 \cos t \right] \end{cases}, t > 0, \tag{5.40}$$

sujeito ao sistema inicial

$$\begin{cases} x(t) = \ln(t + 3) \\ y(t) = \arctg t + 1 \end{cases}, t \in [-1, 0]. \tag{5.41}$$

Temos $a(t) = 1 - \sin t$, $b(t) = \exp(\cos t)$, $c(t) = 2 + \cos t$, $d(t) = 1 + 0,2 \cos t$, $e(t) = \ln(7 - \sin t)$, $\sigma(t) = |\sin t|$ e $\rho = 2,8$.

As funções a, b, c, d, e, σ e g satisfazem (a), (b), (c), (d) e (e), onde $g(u) = \frac{u}{2,8 + u}$. Além disso, $\omega = 2\pi$, $\bar{a} = 1$, $\bar{c} = 2$, $\tau = 1$, $R = \frac{1}{2,8}$, $r = 1$ e $h = 2,8$.

Notemos também que

$$\bar{a} = 1 > 0,71 \approx R\bar{c}$$

e

$$\bar{d} \leq M_d = 1,02 < \ln(6) = m_e \leq \bar{e} = r\bar{c},$$

de onde segue que as condições (C_1) e (C_2) estão satisfeitas.

Portanto, da Aplicação 5.2, concluímos que o problema (5.40)-(5.41) é permanente.

Exemplo 5.22. *Agora, consideremos o sistema dependente da razão com resposta funcional Holling do tipo III:*

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) \left[\left| \cos \frac{t}{3} - 2 \right| - \ln \left(2,5 - \sin \frac{t}{3} \right) x(t) \right] - (1 - \sin \frac{t}{3}) \frac{0,9x^2(t)}{0,3^2y^2(t) + x^2(t)} y(t) \\ y'(t) = y(t) \left(1 + \exp \left(1 - \sin \frac{t}{3} \right) \right) \left[\frac{0,9x^2(t - \exp(-t))}{0,3^2y^2(t - \exp(-t))x^2(t - \exp(-t))} - 1 + 0,75 \cos \frac{t}{3} \right] \end{cases}, t > 0, \tag{5.42}$$

sujeito ao sistema inicial

$$\begin{cases} x(t) = |t - 1| \\ y(t) = \sqrt{t + 3} \end{cases}, \quad t \in [-1, 0]. \quad (5.43)$$

Aqui, as funções $a(t) = |\cos \frac{t}{3} - 2|$, $b(t) = \ln(2, 5 - \sin \frac{t}{3})$, $c(t) = 1 - \sin \frac{t}{3}$, $d(t) = 1 - 0,75 \cos \frac{t}{3}$, $e(t) = 1 + \exp(1 - \sin \frac{t}{3})$, $\sigma(t) = \exp(-t)$, $\rho = 0,3^2$ e $g(u) = \frac{0,9u^2}{0,3^2 + u^2}$ cumprem as condições (a), (b), (c), (d) e (e).

Ademais, $\omega = 6\pi$, $\bar{a} = 2$, $\bar{c} = 1$, $\tau = 1$, $R = 1,5$, $r = 0,9$, $h = 0,87$,

$$\bar{a} = 2 > 1,5 = R\bar{c}.$$

e

$$\bar{d} \leq M_d = 1,75 < 1,8 = rm_e \leq r\bar{e},$$

de onde concluímos que as condições (C₁) e (C₂) estão satisfeitas.

Segue da Aplicação 5.3 que o sistema (5.42)-(5.43) é permanente.

Exemplo 5.23. Por fim, consideremos o seguinte sistema dependente da razão com retardo e um tipo de resposta funcional:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) \left[\frac{5}{2 + \cos 2t} - |\cos 2t - 3|x(t)| - (1,5 - \sin 2t) \frac{0,1x^{2,5}(t)}{0,5y^{2,5}(t) + x^{2,5}(t)} y(t) \right] \\ y'(t) = y(t) \left[(18 + \sin 2t) \frac{0,1x^{2,5}(t - \frac{2}{1+t})}{0,5y^{2,5}(t - \frac{2}{1+t}) + x^{2,5}(t - \frac{2}{1+t})} - \sqrt{2 + \sin 2t} \right] \end{cases}, \quad t > 0, \quad (5.44)$$

sujeito ao sistema inicial

$$\begin{cases} x(t) = 3 \\ y(t) = \ln(5 + t) \end{cases}, \quad t \in [-2, 0]. \quad (5.45)$$

As funções $a(t) = \frac{5}{2 + \cos 2t}$, $b(t) = |\cos 2t - 3|$, $c(t) = 1,5 - \sin 2t$, $d(t) = \sqrt{2 + \sin 2t}$, $e(t) = 18 + \sin 2t$, $\sigma(t) = \frac{2}{1 + t}$, $\rho = 0,5$ e $g(u) = \frac{0,1u^{2,5}}{0,5 + u^{2,5}}$ cumprem as condições (a), (b), (c), (d) e (e).

Além disso, $\omega = \frac{\pi}{2}$, $\bar{c} = 1,5$, $\bar{e} = 18$, $\tau = 2$, $R \leq 1$, $r = 0,1$, $h = 0,125$,

$$\bar{a} \geq m_a = \frac{5}{3} > 1,5 \geq R\bar{c}$$

e

$$\bar{d} \leq M_d = \sqrt{3} < 1,8 = rm_e \leq r\bar{e}.$$

Portanto, as condições (C₁) e (C₂) estão satisfeitas.

Segue da Aplicação 5.1 que o sistema (5.44)-(5.45) é permanente.

Conclusão

Com o intuito de provarmos a existência de soluções periódicas para certas classes de equações diferenciais funcionais com retardo, utilizamos a teoria do grau de coincidência para perturbações de operadores de Fredholm, uma ferramenta topológica que pode ser utilizada, de forma bastante elegante, para garantir a existência de soluções de vários tipos de equações diferenciais. Mas, tal teoria tem como fundamentos a teoria do grau de Brouwer, válida somente para espaços de dimensões finitas, e a teoria do grau de Leray-Schauder, válida para espaços de Banach quaisquer. Esses fundamentos também foram abordados no presente trabalho.

Posteriormente, estudamos a permanência de soluções de dois modelos muito conhecidos: um deles modela a população de moscas-varejeiras em um laboratório, enquanto o outro modela a densidade de populações de predadores e presas. Ao provarmos que um sistema é permanente, garantimos que as espécies tratadas nos modelos nunca serão extintas e também não crescerão ilimitadamente.

Referências

- [1] ABOU-EL-ELA, A. M. A.; SADEK, A. I.; MAHMOUD, A. M. Periodic solutions for a kind of third-order delay differential equations with a deviating argument. *Journal of Mathematical Sciences*, v. 18, p. 35–49, 2011.
- [2] ABRAMS, P. A. Functional responses of optimal foragers. *The American Naturalist*, v. 120, p. 382–390, 1982.
- [3] AFONSO, S. M.; SOUZA, C. S. A note on permanence for a Nicholson’s blowflies model with delay. *Submetido*.
- [4] AFONSO, S. M.; SOUZA, C. S. O teorema de Borsuk e a teoria do grau de Brouwer. *C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, v. 51C, p. 62–73, 2015.
- [5] AFONSO, S. M.; SOUZA, C. S. Soluções periódicas de um tipo de equação diferencial de terceira ordem com retardo. *C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, v. 9, p. 56–65, 2017.
- [6] AFONSO, S. M.; SOUZA, C. S. Sobre a teoria do grau de Brouwer e a teoria do grau de Leray-Schauder. *Matemática e Estatística em Foco*, v. 4, p. 1–9, 2016.
- [7] AFONSO, S. M.; SOUZA, C. S. Soluções periódicas dos modelos de moscas-varejeiras de Nicholson com retardo. *C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, v. 10, p. 4–18, 2017.
- [8] ALMEIDA, O. B. *Teoria do Grau e Aplicações*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Campina Grande, 2006.
- [9] BATTEL, A. P. M. B.; MORAL, R. A.; GODOY, W. A. C. Modelos matemáticos predador-presa e aplicações ao manejo integrado de pragas. *Oecologia Australis*, v. 16, p. 43–62, 2012.
- [10] BERESTYCKI, H. *Méthodes Topologiques et Problèmes Aux Limites non Linéaires*. Tese (Doutorado) — l’Université de Paris, 1975.

-
- [11] BEREZANSKY, L.; BRAVERMAN, E.; IDELS, L. Nicholson's blowflies differential equations revisited: main results and open problems. *Applied Mathematical Modelling*, v. 34, p. 1405–1417, 2010.
- [12] BREZIS, H. *Analyse fonctionnelle : Théorie et applications*. 1. ed. Paris: Masson, 1983.
- [13] CHEN, Y. Periodic solutions of delayed periodic Nicholson's blowflies models. *The Canadian Applied Mathematics Quarterly*, v. 11, p. 23–28, 2003.
- [14] ENRIGHT, W. H.; HAYASHI, H. A delay differential equation solver based on a continuous Runge–Kutta method with defect control. *Numerical Algorithms*, v. 16, p. 349–364, 2002.
- [15] FAN, Y.-H.; LI, W.-T. Permanence in delayed ratio-dependent predator–prey models with monotonic functional responses. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, v. 8, p. 424–434, 2007.
- [16] FARIA, T.; RÖST, G. Persistence, permanence and global stability for an n-dimensional Nicholson system. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, v. 26, p. 723–744, 2014.
- [17] FONSECA, I.; GANGBO, W. *Degree theory in analysis and applications*. 1. ed. Oxford: Oxford University Press, 1995.
- [18] FURTADO, A. L. *Sobre soluções periódicas de equações diferenciais com retardo e impulsos*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2012.
- [19] GAINES, R. E.; MAWHIN, J. *Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations*. 1. ed. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 1977.
- [20] GUI, Z.; GE, W. A priori bounds for periodic solutions of a kind of third-order delay differential equation. *Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities*, v. 20, p. 59–63, 2005.
- [21] HALE, J. K.; LUNEL, S. M. V. *Introduction to functional differential equations*. 1. ed. New York: Springer-Verlag New York, 1991.
- [22] HOLLING, C. S. Some characteristics of simple types of predation and parasitism. *The Canadian Entomologist*, v. 91, p. 385–398, 1959.
- [23] ISMAIL, F. et al. Numerical treatment of delay differential equations by Runge–Kutta method using Hermite interpolation. *Matematika*, v. 18, p. 79–90, 2002.

-
- [24] JUMAA, S. I. *Solving linear first order delay differential equations by MOC and steps method comparing with MATLAB solver*. Dissertação (Mestrado) — Near East University - Turkish, 2017.
- [25] KOLMANOVSKII, V.; MYSHKIS, A. *Introduction to the theory and applications of functional differential equations*. 1. ed. Netherlands: Springer Science & Business Media, 2013.
- [26] KREYSZIG, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. 1. ed. Canadá: John Wiley and Sons, 1978.
- [27] KUANG, Y. *Delay differential equations: with applications in population dynamics*. 1. ed. London: Academic Press, 1993.
- [28] LIMA, E. L. *Curso de Análise, volume 1*. 11. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2004.
- [29] LIMA, E. L. *Análise Real, volume 1: funções de uma variável*. 10. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.
- [30] LIMA, E. L. *Análise Real, volume 2*. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2004.
- [31] LIMA, E. L. *Espaços métricos*. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2003.
- [32] LIU, B.; GONG, S. Permanence for Nicholson-type delay systems with nonlinear density-dependent mortality terms. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, v. 12, p. 1931–1937, 2011.
- [33] LONG, F. Positive almost periodic solution for a class of Nicholson’s blowflies model with a linear harvesting term. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, v. 13, p. 686–693, 2012.
- [34] LU, S.; GE, W.; ZHENG, Z. Periodic solutions for a kind of Rayleigh equation with a deviating argument. *Applied mathematics letters*, v. 17, p. 443–449, 2004.
- [35] LU, S.; GE, W. Periodic solutions for a kind of second order differential equation with multiple deviating arguments. *Applied Mathematics and Computation*, v. 146, p. 195–209, 2003.
- [36] MA, S.; WANG, Z.; YU, J. Coincidence degree and periodic solutions of Duffing equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, v. 34, p. 443–460, 1998.
- [37] MAWHIN, J. *Topological degree methods in nonlinear boundary value problems*. United States of America: American Mathematical Society, 1977.

-
- [38] MEZA, M. E. M. *Sistemas não-lineares do tipo predador-presa: projeto de controles via funções de Liapunov*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2004.
- [39] MURRAY, J. D. *Mathematical biology I: an introduction*. 1. ed. New York: Springer, 2002.
- [40] RICKEFLIS, R. E. *A Economia da Natureza*. 5. ed. São Paulo: Guanabara Koogan, 2003.
- [41] ROMÃO, A. R. R. *Dinâmica populacional, anautogenia e dependência da densidade em moscas-varejeiras: experimentação e teoria populacional*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, 2011.
- [42] SAKER, S. H.; AGARWAL, S. Oscillation and global attractivity in a periodic Nicholson's blowflies model. *Mathematical and computer modelling*, v. 35, p. 719–731, 2002.
- [43] SIRMA, A.; SEVGİN, S. A note on coincidence degree theory. *Abstract and Applied Analysis*, v. 2012, p. 1–18, 2012.
- [44] WANG, L.-L.; LI, W.-T. Periodic solutions and permanence for a delayed nonautonomous ratio-dependent predator-prey model with Holling type functional response. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 162, p. 341–357, 2004.
- [45] WANG, L.-L.; FAN, Y.-H. Permanence and existence of periodic solutions for a generalized system with feedback control. *Applied Mathematics and Computation*, v. 216, p. 902–910, 2010.
- [46] WANG, L.-L.; FAN, Y.-H. Permanence for a discrete Nicholson's blowflies model with feedback control and delay. *International Journal of Biomathematics*, v. 1, p. 433–442, 2008.
- [47] WEI, C. Permanence for Nicholson-type delay systems with patch structure and nonlinear density-dependent mortality terms. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, v. 2012, p. 1–14, 2012.

A Conceitos e resultados de Álgebra Linear e Análise Funcional

Neste apêndice, faremos uma revisão concisa de certos tópicos de Álgebra Linear e Análise Funcional que envolvem espaços vetoriais normados e espaços de Banach. Visando abordar somente conceitos e resultados preliminares à dissertação, limitaremos nossa exposição aos espaços vetoriais sobre o corpo \mathbb{R} dos números reais.

A.1 Espaços vetoriais normados

Definição A.1. *Seja X um espaço vetorial sobre \mathbb{R} . Uma norma em X é uma função $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$ tal que*

- 1) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, para quaisquer $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x \in X$;
- 2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, para quaisquer $x, y \in X$;
- 3) $\|x\| = 0 \iff x = 0$.

No item 1), $|\lambda|$ é o valor absoluto do número real λ .

Um espaço vetorial X munido de uma norma $\|\cdot\|$ é denominado espaço vetorial normado.

Ao considerar a função $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\rho(x, y) = \|x - y\|$, para quaisquer $x, y \in X$, é possível mostrar que todo espaço vetorial normado é um espaço métrico.

Daqui em diante, ao mencionarmos os espaços X e Y , consideraremos espaços vetoriais normados sobre \mathbb{R} , com suas respectivas normas, as quais denotaremos com o mesmo símbolo, $\|\cdot\|$, apenas por simplicidade de notação. Quando X e Y forem somente espaços vetoriais sobre \mathbb{R} , explicitaremos isso no texto.

Definição A.2. *Seja X um espaço vetorial normado. Diremos que X é um espaço de Banach se X for completo, isto é, se toda sequência de Cauchy em X convergir em X .*

Para o próximo resultado, consideraremos Y um espaço de Banach, M um subespaço de Y e Y/M o subespaço quociente de Y segundo a relação de equivalência:

$$x \sim y \text{ se, e somente se, } x - y \in M.$$

Lema A.3. *Se $\dim Y/M$ é finita, então existe um subespaço vetorial fechado $N \subset Y$ tal que $Y = M \oplus N$.*

Demonstração. Seja $\{w_1, \dots, w_n\} \subset Y$ tal que $\{[w_1], \dots, [w_n]\} \subset Y/M$ é uma base de Y/M . Definamos N como sendo o subespaço gerado pelo conjunto $\{w_1, \dots, w_n\}$. Como N tem dimensão finita, N é fechado.

Afirmamos que $Y = M + N$. De fato, dado $y \in Y$ arbitrário, segue que $[y] \in Y/M$ e, portanto, existem $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$[y] = \sum_{i=1}^n \alpha_i [w_i] \text{ ou seja, } \left(y - \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i \right) \in [0].$$

Seja $x_y = y - \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i \in M$. Então, $y = x_y + \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i \in M + N$.

Notemos que $M \cap N = \{0\}$. Com efeito, seja $y \in M \cap N$. Como $y \in M$, temos $[y] = [0]$. Por outro lado, como $y \in N$, existem $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que $y = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i$ e, por conseguinte,

$$[0] = [y] = \sum_{i=1}^n \alpha_i [w_i].$$

Como $\{[w_1], \dots, [w_n]\}$ é base de Y/M , segue que $\alpha_i = 0$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Logo, $y = 0$ e $Y = M \oplus N$. \square

A.2 Operadores lineares

Definição A.4. *Sejam X e Y espaços vetoriais sobre \mathbb{R} . Um operador ou uma transformação $T : X \rightarrow Y$ é linear se, para quaisquer $x, y \in X$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se*

$$T(x + y) = T(x) + T(y) \quad \text{e} \quad T(\alpha x) = \alpha T(x).$$

Denotaremos $T(x)$ por Tx , para $x \in X$, a menos que seja necessário fazer alguma distinção.

No caso em que $Y = \mathbb{R}$ e $T : X \rightarrow \mathbb{R}$ é linear, dizemos que $T : X \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear.

Proposição A.5. *Sejam X e Y espaços vetoriais sobre \mathbb{R} e seja $T : X \rightarrow Y$ um operador linear. Se $\dim \text{dom} T = n < \infty$, então $\dim \text{Im} T \leq n$.*

Demonstração. Seja $\{y_1, \dots, y_{n+1}\}$ um subconjunto arbitrário de $\text{Im } T$. Vamos mostrar que esse conjunto é linearmente dependente e, assim, vamos concluir que $\dim \text{Im } T \leq n$.

Com efeito, para $y_i \in \text{Im } T$, existe $x_i \in X$ tal que $Tx_i = y_i$, para todo $i = 1, \dots, n+1$.

Podemos afirmar que $\{x_1, \dots, x_{n+1}\} \subset \text{dom } T$ é linearmente dependente, uma vez que $\dim \text{dom } T = n$. Portanto, se $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{n+1} x_{n+1} = 0$, então existe $\alpha_{i_0} \neq 0$, para algum $i_0 \in \{1, \dots, n+1\}$.

Sendo T linear, temos $T(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{n+1} x_{n+1}) = 0$ e, por conseguinte,

$$\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_{i_0} y_{i_0} + \dots + \alpha_{n+1} y_{n+1} = 0,$$

com $\alpha_{i_0} \neq 0$, para algum $i_0 \in \{1, \dots, n+1\}$.

Logo, $\{y_1, \dots, y_{n+1}\}$ é linearmente dependente e a prova está completa. \square

Proposição A.6. *Sejam X e Y espaços vetoriais sobre \mathbb{R} . Se $T : X \rightarrow Y$ é um operador linear bijetor, então o operador inverso de T , $T^{-1} : Y \rightarrow X$, também é linear.*

Demonstração. Dados $a, b \in Y$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, devemos provar que

$$T^{-1}(\beta a + \alpha b) = \beta T^{-1}a + \alpha T^{-1}b.$$

Com efeito, como T é uma bijeção, existem $x, y \in X$ tais que $Tx = a$ e $Ty = b$. Consequentemente, $x = T^{-1}a$ e $y = T^{-1}b$. Assim, como T é linear, obtemos

$$T^{-1}(\beta a + \alpha b) = T^{-1}(\beta Tx + \alpha Ty) = T^{-1}(T(\beta x + \alpha y)) = \beta x + \alpha y = \beta T^{-1}a + \alpha T^{-1}b.$$

\square

Definição A.7. *Seja X um espaço vetorial sobre \mathbb{R} e seja $T : X \rightarrow X$ um operador linear. Diremos que T é uma projeção se $T^2 = T \circ T = T$.*

A.2.1 Operadores limitados

Definição A.8. *Seja $T : X \rightarrow Y$ um operador linear. Diremos que T é limitado se existir $c > 0$ tal que*

$$\|Tx\| \leq c\|x\|, \quad \text{para todo } x \in X.$$

O conjunto dos operadores lineares limitados $T : X \rightarrow Y$ será denotado por $L(X, Y)$. É fácil verificar que $L(X, Y)$ é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} . A norma neste espaço é definida por

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}, \quad T \in L(X, Y).$$

Através de cálculos simples, podemos verificar que

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|.$$

Portanto, também temos

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|, \quad T \in L(X, Y).$$

Proposição A.9. *Um operador linear $T : X \rightarrow Y$ é contínuo se, e somente se, ele é limitado.*

Demonstração. Suponhamos que T seja contínuo. Então, em particular, T é contínuo em 0. Tomando $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x\| < \delta \Rightarrow \|Tx\| < 1. \quad (\text{A.1})$$

Sejam $x \in X \setminus \{0\}$ arbitrário e $y = \frac{x}{\|x\|}$. Então, $\|\frac{\delta}{2}y\| = \frac{\delta}{2} < \delta$. Segue de (A.1) que

$$\left\| T \left(\frac{\delta}{2}y \right) \right\| < 1, \text{ ou seja, } \|Ty\| < \frac{2}{\delta}.$$

Como $y = \frac{x}{\|x\|}$, temos $\|Tx\| < \frac{2}{\delta}\|x\|$. Sendo $x \in X \setminus \{0\}$ arbitrário, concluímos que T é limitado.

Reciprocamente, suponhamos que T seja limitado, isto é, que existe $c > 0$ tal que $\|Tx\| \leq c\|x\|$, para todo $x \in X$.

Dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$, temos

$$x, y \in X, \|x - y\| < \delta \Rightarrow \|Tx - Ty\| = \|T(x - y)\| \leq c\|x - y\| < \varepsilon,$$

de onde segue que T é uniformemente contínuo e, portanto, contínuo. \square

O próximo lema é essencial para que seja embasada a teoria do grau de Brouwer.

Lema A.10. *Se X é um espaço vetorial normado de dimensão finita n , então existe um homeomorfismo entre X e \mathbb{R}^n .*

Demonstração. Sejam $\mathbb{B}_X = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathbb{B} = \{w_1, \dots, w_n\}$ bases de X e \mathbb{R}^n , respectivamente.

Se $x \in X$, então $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i$, com $x_i \in \mathbb{R}$, para todo $i = 1, \dots, n$.

A aplicação $T : X \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida por

$$Tx = \sum_{i=1}^n x_i w_i,$$

é um homeomorfismo. \square

Para o próximo resultado, consideraremos \mathbb{R}^n munido da norma do máximo: $\|x\| = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$, onde $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Proposição A.11. *Toda aplicação linear $T : \mathbb{R}^n \rightarrow Y$ é contínua.*

Demonstração. Consideremos a base canônica $\mathbb{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ de \mathbb{R}^n . Dado $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, temos $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$.

Tomando $c = \sum_{i=1}^n \|Te_i\|$, temos

$$\|Tx\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|Te_i\| \leq \|x\| \sum_{i=1}^n \|Te_i\| = c\|x\|.$$

Portanto, T é limitada e, pela Proposição [A.9](#), T é contínua. \square

Corolário A.12. *Seja X um espaço vetorial normado de dimensão finita. Toda aplicação linear $T : X \rightarrow Y$ é contínua.*

Os próximos teoremas são resultados clássicos e bastante conhecidos da Análise Funcional. Não apresentaremos suas demonstrações aqui, porém elas podem ser encontradas nas referências [\[12\]](#) e [\[26\]](#), por exemplo.

Teorema A.13 (Teorema de Hahn-Banach). *Sejam X um espaço vetorial sobre \mathbb{R} e $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional tal que, para $x, y \in X$ e $\alpha \geq 0$, tem-se*

$$p(\alpha x) = \alpha p(x) \quad e \quad p(x + y) \leq p(x) + p(y).$$

Sejam G um subespaço vetorial de X e $g : G \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear tal que $g(x) \leq p(x)$, para qualquer $x \in G$. Então, existe um funcional linear $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f|_G = g$ e $f(x) \leq p(x)$, para qualquer $x \in X$.

Teorema A.14 (Teorema de Hahn Banach - versão para espaços normados). *Se X é um espaço vetorial normado sobre \mathbb{R} e $g : G \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear limitado, em que G é um subespaço de X , então existe um funcional linear limitado $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f|_G = g$.*

A.2.2 Operadores compactos

A definição posterior de operador compacto é equivalente à definição utilizada na dissertação.

Definição A.15. *Seja $T : X \rightarrow Y$ um operador linear. Diremos que o operador T é compacto se $\overline{T(M)} \subset Y$ for compacto, para todo $M \subset X$ limitado.*

Denotaremos por $Q(X, Y)$ o conjunto dos operadores compactos $T : X \rightarrow Y$.

Observação A.16. Se X for limitado, então T é compacto se, e somente se, $\overline{T(X)}$ é compacto.

Proposição A.17. Todo operador compacto $T : X \rightarrow Y$ é contínuo.

Demonstração. Seja $S_X = \{x \in X; \|x\| = 1\}$. Como $\overline{T(S_X)}$ é compacto, segue que $\overline{T(S_X)}$ limitado, isto é, existe $c > 0$ tal que

$$\|Tx\| \leq c, \text{ para todo } x \in S_X.$$

Consequentemente, $\|T\| \leq c$, de onde segue que T é limitado. \square

Lema A.18. Um operador linear $T : X \rightarrow Y$ é um operador compacto se, e somente se, para qualquer sequência $(x_n) \subset X$ limitada, a sequência (Tx_n) possui uma subsequência convergente.

Demonstração. Se $T : X \rightarrow Y$ é um operador compacto e $(x_n) \subset X$ é uma sequência limitada, então o fecho do conjunto (Tx_n) é compacto em Y . Portanto, (Tx_n) possui uma subsequência convergente.

Reciprocamente, suponhamos que, para toda sequência $(x_n) \subset X$ limitada, a sequência (Tx_n) possui uma subsequência convergente. Seja $M \subset X$ um conjunto limitado qualquer e consideremos (y_n) uma sequência em $\overline{T(M)} \subset Y$. Temos dois casos a considerar: ou existem infinitos ou existem finitos pontos da sequência (y_n) em $T(M)$.

No primeiro caso, podemos supor, sem perda de generalidade, que $y_n \in T(M)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $(x_n) \subset M$ tal que $Tx_n = y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como M é limitado, segue da hipótese que (y_n) possui uma subsequência convergente, o que prova que $\overline{T(M)}$ é compacto.

No segundo caso, podemos assumir, também sem perda de generalidade, que $y_n \in \overline{T(M)} \setminus T(M)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in M$ tal que

$$\|Tx_n - y_n\| < \frac{1}{n}. \tag{A.2}$$

Como M é limitado, (Tx_n) possui uma subsequência convergente e, por (A.2), (y_n) também possui uma subsequência convergente, de onde concluímos que $\overline{T(M)}$ é compacto. \square

As demonstrações dos dois próximos resultados são bem simples e, por isso, não julgamos necessário exibi-las aqui.

Proposição A.19. $Q(X, Y)$ é um subespaço vetorial de $L(X, Y)$.

Proposição A.20. *Sejam X, Y, Z e W espaços vetoriais normados. Se $T : X \rightarrow Y$ é um operador compacto e $S : Z \rightarrow W$ é um operador limitado, onde $S(Z) \subset X$ e $T(X) \subset Z$, então $T \circ S$ e $S \circ T$ são operadores compactos.*

Definição A.21. *Seja $T : X \rightarrow Y$ um operador linear e limitado. Diremos que T tem posto finito se $\dim \text{Im} T < \infty$.*

Proposição A.22. *Todo operador de posto finito é compacto.*

Demonstração. Sejam $T : X \rightarrow Y$ um operador de posto finito e $M \subset X$ um conjunto limitado arbitrário.

Obviamente, $\overline{T(M)}$ é fechado e, como T é limitado, o conjunto $\overline{T(M)}$ é limitado. Agora, como $\text{Im} T$ possui dimensão finita, segue que $\overline{T(M)}$ é compacto e, pela arbitrariedade de M , T é um operador compacto. \square

Definição A.23. *Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação qualquer. Diremos que f é uma aplicação fechada se para todo fechado $F \subset X$ tem-se $f(F) \subset Y$ fechado.*

Definição A.24. *Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação qualquer. Diremos que f é uma aplicação própria se para todo compacto $K \subset Y$ tem-se $f^{-1}(K) \subset X$ compacto.*

Proposição A.25. *Sejam $\Omega \subset X$ um conjunto aberto e limitado e $\phi = \text{Id} - T : \overline{\Omega} \rightarrow X$, com $T \in Q(\overline{\Omega}, X)$. Então, ϕ é uma aplicação fechada e própria.*

Demonstração. Primeiramente, provaremos que ϕ é fechada. Com efeito, seja $\Delta \subset \overline{\Omega}$ um conjunto fechado.

Para $y \in \overline{\phi(\Delta)}$, existe uma sequência $(y_n) \subset \phi(\Delta)$ tal que $y_n \rightarrow y$ em X . Consideremos a sequência $(x_n) \subset \Delta$ tal que $\phi(x_n) = y_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então,

$$\phi(x_n) \rightarrow y. \quad (\text{A.3})$$

Como T é um operador compacto, segue que a sequência (Tx_n) possui uma subsequência (Tx_{n_k}) convergente. Seja $x \in X$ o limite dessa sequência. Assim,

$$T(x_{n_k}) \rightarrow x. \quad (\text{A.4})$$

De (A.3) e (A.4), obtemos

$$x_{n_k} = \phi(x_{n_k}) + T(x_{n_k}) \rightarrow x + y \in X.$$

Mas, como Δ é fechado e $(x_{n_k}) \subset \Delta$, temos $y + x \in \Delta$. Pela continuidade de ϕ , segue que

$$\phi(x_{n_k}) \rightarrow \phi(x + y). \quad (\text{A.5})$$

De (A.3) e (A.5), concluímos

$$y = \phi(x + y) \in \phi(\Delta)$$

e, conseqüentemente, $\phi(\Delta)$ é fechado.

Provemos, agora, que ϕ é própria. Seja $K \subset X$ um conjunto compacto. Para provarmos que $\phi^{-1}(K)$ é compacto, devemos mostrar que toda seqüência em $\phi^{-1}(K)$ possui uma subsequência convergente em $\phi^{-1}(K)$.

Pois bem, seja (x_n) uma seqüência contida em $\phi^{-1}(K)$. Obviamente, $(\phi(x_n)) \subset K$.

Como K é compacto, existem $x \in K$ e $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$ tais que

$$\lim_{n \in \mathbb{N}_1} \phi(x_n) = x. \quad (\text{A.6})$$

E, como T é compacto, existem $y \in X$ e $\mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1$ tais que

$$\lim_{n \in \mathbb{N}_2} T(x_n) = y. \quad (\text{A.7})$$

De (A.6) e (A.7), temos

$$\lim_{n \in \mathbb{N}_2} x_n = \lim_{n \in \mathbb{N}_2} [\phi(x_n) + T(x_n)] = x + y \in X.$$

Pela continuidade da ϕ , obtemos

$$\lim_{n \in \mathbb{N}_2} \phi(x_n) = \phi(x + y).$$

Como K é compacto e $(\phi(x_n)) \subset K$, concluímos que $\phi(x + y) \in K$ e, conseqüentemente, $x + y \in \phi^{-1}(K)$.

Portanto, a seqüência (x_n) possui uma subsequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_2}$ convergente em $\phi^{-1}(K)$ e a prova está finalizada. \square

B Conceitos e resultados de Análise e Topologia

Este apêndice será voltado para alguns conceitos e resultados básicos de Análise e Topologia que foram mencionados e utilizados na dissertação. A maioria dos resultados exibidos aqui terão suas demonstrações omitidas.

B.1 Espaços topológicos

Definição B.1. *Seja X um conjunto não vazio. Uma topologia em X é coleção Θ de subconjuntos de X satisfazendo:*

- $\emptyset, X \in \Theta$;
- *para qualquer coleção $A_i, i \in I$, de elementos de Θ , tem-se $\bigcup_{i \in I} A_i \in \Theta$, em que I é um conjunto de índices;*
- *para qualquer coleção $A_1, \dots, A_n \in \Theta$, tem-se $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \Theta$.*

Cada elemento de Θ é chamado de aberto de X na topologia Θ e X é chamado de espaço topológico.

Observação B.2. *Todo espaço topológico possui pelos menos a topologia trivial, Θ_t , e a topologia discreta, Θ_d , onde $\Theta_t = \{\emptyset, X\}$ e Θ_d contém todos os subconjuntos de X .*

Observação B.3. *No caso em que X for um espaço métrico, os abertos de X são uniões arbitrárias e interseções finitas de bolas abertas.*

No que segue, X e Z denotarão espaços topológicos.

B.2 Conjuntos conexos e conexos por caminhos

Definição B.4. Uma cisão de um subconjunto Y de X é uma decomposição

$$A \cup B = Y,$$

em que $A, B \subset Y$ são conjuntos abertos e $A \cap B = \emptyset$.

No caso em que um dos abertos é o próprio conjunto Y , tal cisão será denominada cisão trivial.

Observação B.5. Se $Y = A \cup B$ é uma cisão, então A e B são abertos e fechados, simultaneamente.

Definição B.6. Diremos que um subconjunto Y de X é conexo se ele possuir apenas a cisão trivial.

Teorema B.7 (Proposição 6, [31], página 96). *Todo intervalo de \mathbb{R} é conexo.*

Definição B.8. Seja $f : X \rightarrow Z$ uma função qualquer. Diremos que f é localmente constante se, para todo $x \in X$, existir $\varepsilon_x > 0$ tal que

$$f(y) = f(x), \text{ para todo } y \in B(x, \varepsilon_x) \cap X.$$

Teorema B.9. *Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função localmente constante, então f é constante.*

Demonstração. Seja $a \in I$ qualquer. Consideremos os conjuntos $A = \{x \in I; f(x) = f(a)\}$ e $B = \{x \in I; f(x) \neq f(a)\}$. Claramente, $I = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ e $A \neq \emptyset$.

Para todo $x \in A$, como f é localmente constante, existe um $\varepsilon_x > 0$ tal que $f(y) = f(x)$, para todo $y \in I \cap (x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x)$. Dessa forma, $x \in \text{int } A$ e, portanto, $A = \text{int } A$, ou seja, A é um conjunto aberto.

Afirmamos que A também é um conjunto fechado. Com efeito, suponhamos que exista $x \in \bar{A} \setminus A$, ou seja, $x \in \bar{A} \cap B$. Então, para todo $\varepsilon > 0$, existe $y_\varepsilon \in A \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Em particular, para ε_x obtido anteriormente pelo fato de f ser localmente constante, existe $y_{\varepsilon_x} \in A \cap (x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x)$. Assim,

$$f(x) = f(y_{\varepsilon_x}) = f(a),$$

ou seja, $x \in A \cap B$, o que é uma contradição.

Deste modo, como I é conexo (Teorema B.7) e A é aberto e fechado em I , devemos ter $B = \emptyset$. Por conseguinte, $I = A$, o que implica que f é uma função constante em I ($f(x) = f(a)$ para todo $x \in A$). \square

Considere a seguinte relação de equivalência no espaço topológico X :

$$x \sim y \iff \text{existe } C \subset X \text{ conexo, tal que } x, y \in C.$$

Definição B.10. *As classes de equivalência segundo a relação definida anteriormente são denominadas componentes conexas de X .*

Definição B.11. *Um caminho em X é uma função contínua $f : [0, 1] \rightarrow X$.*

Definição B.12. *Diremos que X é conexo por caminhos se, para quaisquer pontos $x, y \in X$, existir um caminho $f : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $f(0) = x$ e $f(1) = y$.*

Teorema B.13 (Exercício 33, [31], página 112). *O conjunto das matrizes $n \times n$ invertíveis com entradas reais, $GL(n, \mathbb{R})$, é conexo por caminhos.*

B.3 Resultados sobre aplicações contínuas e diferenciáveis

Teorema B.14 (Teorema de Extensão de Tietze - Exercício 33, [31], página 112). *Sejam Λ um subconjunto fechado de \mathbb{R}^n e $f : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, existe uma função contínua $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $F|_{\Lambda} = f$.*

Lema B.15 (Lema da Colagem). *Sejam $f : A \rightarrow X$ e $g : B \rightarrow X$ funções contínuas, com A e B abertos ou fechados em X , simultaneamente, tais que $f|_{A \cap B} = g|_{A \cap B}$. Então, a função $h : A \cup B \rightarrow X$ definida por*

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in A \\ g(x), & \text{se } x \in B \end{cases}$$

é contínua.

Demonstração. Suponhamos que A e B sejam conjuntos fechados em X . Seja $F \subset X$ um conjunto fechado arbitrário. Temos $h^{-1}(F) = f^{-1}(F) \cup g^{-1}(F)$.

Como f e g são contínuas, segue que $f^{-1}(F)$ e $g^{-1}(F)$ são conjuntos fechados em A e B , respectivamente. Do fato de A e B serem fechados, segue que $f^{-1}(F)$ e $g^{-1}(F)$ são fechados em $A \cup B$. Por conseguinte, $h^{-1}(F)$ é fechado em $A \cup B$. Isso prova que h é contínua.

No caso em que A e B são abertos em X , basta tomarmos $F \subset X$ um conjunto aberto arbitrário e a demonstração seguirá de forma similar. \square

Teorema B.16 (Teorema do Valor Intermediário - Corolário 2, [31], página 96). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se $f(a) < d < f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.*

Definição B.17. *Diremos que uma aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, definida em um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, é diferenciável no ponto $a \in U$ se existir uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - T(h)}{\|h\|} = 0.$$

A transformação linear T é denotada por $f'(a)$ e chamada de derivada de f em a .

Diremos que f é diferenciável quando f é diferenciável em todo ponto $a \in U$.

A matriz representante da transformação linear $f'(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ nas bases canônicas de \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m é denominada matriz Jacobiana de f , $J_f[a]$, e o seu determinante é denominado Jacobiano.

Diremos que $a \in U$ é um ponto regular e $f(a)$ é um valor regular quando $\det J_f[a] \neq 0$. Caso contrário, a é denominado ponto crítico e $f(a)$ valor crítico.

Se f for diferenciável e a aplicação derivada $f' : U \rightarrow L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ for contínua, diremos que f é de classe C^1 .

Teorema B.18 (Teorema de Rolle - Teorema 6, [29], página 96). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, com $f(a) = f(b)$. Se f é derivável em (a, b) , então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Teorema B.19 (Teorema do Valor Médio de Lagrange - Teorema 7, [29], página 96). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se f é diferenciável em (a, b) , então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c)[b - a] = f(b) - f(a)$.*

Teorema B.20 (Teorema de Sard - Lema 1.4, [17], página 9). *Seja Λ um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n . Se $f : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação de classe C^1 , então o conjunto $f(S_f)$ é mensurável e possui medida nula. Em particular, o conjunto dos valores regulares de f é denso em \mathbb{R}^n .*

Teorema B.21 (Teorema da Função Inversa - Teorema 4, [30], página 115). *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^1 tal que, em um ponto $a \in U$, a transformação linear $f'(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo, isto é, $\det(J_f[a]) \neq 0$. Então, existe um aberto $A \subset U$ contendo a tal que a restrição $f|_A : A \rightarrow f(A)$ é um difeomorfismo de classe C^1 entre os abertos A e $f(A)$.*

B.4 Integrais reais

Definição B.22. Uma partição do intervalo $[a, b]$ é um subconjunto finito de pontos $P = \{t_0, \dots, t_n\} \subset [a, b]$, tais que $t_0 = a, t_n = b$ e $t_i < t_{i+1}$, com $i = 0, \dots, n-1$. O intervalo $[t_i, t_{i+1}]$ é denominado i -ésimo intervalo da partição P .

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. Denotemos por

$$m_f = \min\{f(x); x \in [a, b]\} \quad \text{e} \quad M_f = \max\{f(x); x \in [a, b]\}.$$

Dada uma partição $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ de $[a, b]$, para cada $i = 1, \dots, n$, denotemos por

$$m_i(f) = \min\{f(x); x \in [t_{i-1}, t_i]\} \quad \text{e} \quad M_i(f) = \max\{f(x); x \in [t_{i-1}, t_i]\}.$$

Definição B.23. Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada e $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ uma partição de $[a, b]$. A soma inferior de f relativamente à partição P é o número

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i(f)(t_i - t_{i-1}).$$

E a soma superior de f relativamente à partição P é o número

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i(f)(t_i - t_{i-1}).$$

É evidente que

$$m_f(b-a) \leq s(f, P) \leq S(f, P) \leq M_f(b-a).$$

Definição B.24. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada. Diremos que f é Riemann - integrável ou simplesmente integrável em $[a, b]$ quando

$$\sup_{P \in \mathcal{P}} s(f, P) = \inf_{P \in \mathcal{P}} S(f, P),$$

em que \mathcal{P} denota o conjunto de todas as partições do intervalo $[a, b]$. O número

$$\int_a^b f(x) dx = \sup_{P \in \mathcal{P}} s(f, P) = \inf_{P \in \mathcal{P}} S(f, P)$$

é denominado a integral de f no intervalo $[a, b]$.

Usando a definição [B.24](#), é possível mostrar que se f é integrável, então, para cada $\varepsilon > 0$, existe uma partição $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ de $[a, b]$ tal que

$$S(f, P) - s(f, P) = \sum_{i=1}^n (M_i(f) - m_i(f))(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon.$$

Teorema B.25 (Teorema 5, [29], página 127). *Toda função contínua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável.*

Teorema B.26 (Fórmula do Valor Médio para integrais - Teorema 4, [29], página 134). *Sejam $f, p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções. Se f é contínua em $[a, b]$ e p é integrável em $[a, b]$, com $p(x) \geq 0$, para todo $x \in [a, b]$, então existe um número $c \in [a, b]$ tal que*

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = f(c) \int_a^b p(x)dx.$$

O teorema a seguir é um caso particular da Desigualdade de Hölder, que pode ser encontrada em [12], na página 56.

Teorema B.27 (Desigualdade de Hölder). *Se $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas, então*

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left[\int_a^b |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_a^b |g(x)|^q dx \right]^{\frac{1}{q}},$$

onde $p, q \geq 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

B.5 Sequências de funções

Definição B.28. *Seja $X \subset \mathbb{R}$. Diremos que uma sequência de funções $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ converge simplesmente para f se para cada ponto $x \in X$ tem-se*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_x = n_x(x, \varepsilon) \in \mathbb{N}; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall n \geq n_x.$$

Definição B.29. *Seja $X \subset \mathbb{R}$. Diremos que uma sequência de funções $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ converge uniformemente para $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ se*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall n \geq n_0, \forall x \in X.$$

Definição B.30. *Uma família $(f_i)_{i \in I}$ de funções reais contínuas em um intervalo $[a, b]$ é equicontínua se, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$x, y \in [a, b], |x - y| < \delta \Rightarrow |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon, \text{ para todo } i \in I.$$

Teorema B.31 (Teorema de Arzelà-Ascoli - Teorema 23, [28], página 413). *Seja (f_n) uma sequência equicontínua de funções contínuas $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tais que*

$$|f_n(x)| \leq K, \text{ para todo } x \in [a, b] \text{ e para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Então, (f_n) possui uma subsequência que converge uniformemente para uma função contínua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Índice Remissivo

Aplicação

fechada, [127](#)

própria, [127](#)

Caminho, [131](#)

Cisão, [130](#)

Componente conexa, [131](#)

Conjunto

conexo, [130](#)

conexo por caminhos, [131](#)

Desigualdade de Hölder, [134](#)

Espaço

de Banach, [121](#)

topológico, [129](#)

vetorial normado, [121](#)

Fórmula do Valor Médio para integrais,
[134](#)

Família equicontínua, [134](#)

Função

de classe C^1 , [132](#)

diferenciável, [132](#)

integrável, [133](#)

localmente constante, [130](#)

Grau

coincidente, [57](#)

de Brouwer para funções contínuas, [32](#)

de Brouwer para funções diferenciáveis
relativo a valores críticos, [31](#)

de Brouwer para funções diferenciáveis
relativo a valores regulares, [26](#)

de Leray-Schauder para perturbação com-
pacta da identidade, [42](#)

de Leray-Schauder para perturbação de
dimensão finita da identidade, [39](#)

Homotopia, [27](#), [52](#)

Jacobiano, [132](#)

Lema da Colagem, [131](#)

Matriz jacobiana, [132](#)

Norma, [121](#)

Operador

L -compacto, [50](#), [58](#)

compacto, [40](#), [126](#)

de Fredholm, [45](#)

de Fredholm de índice zero, [45](#)

de posto finito, [127](#)

limitado, [124](#)

linear, [122](#)

Partição de um intervalo, [133](#)

Perturbação

compacta da identidade, [41](#)

de dimensão finita da identidade, [39](#)

Ponto

crítico, [132](#)

regular, [132](#)

Projeção, [123](#)

Sequência de funções

convergência simples, [134](#)

convergência uniforme, [134](#)

Sistema permanente, [89](#)

Solução

ω -periódica, [65](#)

da equação diferencial funcional com
retardo, [65](#)

Soma

inferior de uma função em relação à
uma partição, [133](#)

superior de uma função em relação à
uma partição, [133](#)

Teorema

da Não Contração da Bola, [35](#)

da Função Inversa, [132](#)

de Arzelà-Ascoli, [134](#)

de Borsuk, [35](#), [44](#), [57](#)

de Borsuk-Ulam, [36](#)

de Continuação de Mawhin, [62](#)

de Extensão de Tietze, [131](#)

de Hahn-Banach, [125](#)

de Hahn-Banach - versão para espaços
normados, [125](#)

de Rolle, [132](#)

de Rouché - Primeira Forma, [58](#)

de Rouché - Segunda Forma, [60](#)

de Sard, [132](#)

do Ponto Fixo de Brouwer, [33](#)

do Ponto Fixo de Schaeffer, [44](#)

do Valor Intermediário, [131](#)

do Valor Médio de Lagrange, [132](#)

Topologia, [129](#)

Valor

crítico, [132](#)

regular, [132](#)