UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de Bauru

Anderson Rafael Alves

Limites e Derivadas: Uma abordagem para o Ensino Médio

Bauru
2018

Anderson Rafael Alves

Limites e Derivadas: Uma abordagem para o Ensino Médio

Dissertação apresentada como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Profissional em Rede Nacional - PROFMAT, da Faculdade de Ciências da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de Bauru.

Financiadora: CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

Orientador: Prof. Dr. Agnaldo José Ferrari

Bauru

2018

Alves, Anderson Rafael.
Limites e drivadas : uma abordagem para o ensino médio / Anderson Rafael Alves. -- São José do Rio Preto, 2018
131 f. : il.

Orientador: Agnaldo José Ferrari
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática (Ensino médio) - Estudo e ensino. 2. Funções (Matemática) - Estudo e ensino. 3. Continuidade. 4. Cálculo. I. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. II. Título.

CDU – 511(07)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE ANDERSON RAFAEL ALVES, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL, DO INSTITUTO DE BIOCIÊNCIAS, LETRAS E CIÊNCIAS EXATAS - CÂMPUS DE SÃO JOSÉ DO RIO PRETO.

Aos 19 dias do mês de fevereiro do ano de 2018, às 14:00 horas, no(a) UNESP/ Câmpus de Bauru, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Prof. Dr. AGNALDO JOSÉ FERRARI - Orientador(a) do(a) Departamento de Matemática / UNESP/Bauru (SP), Profa. Dra. GRASIELE CRISTIANE JORGE do(a) Universidade Federal de São Paulo (UNIFESP), Profa. Dra. SONIA CRISTINA POLTRONIERE SILVA do(a) Departamento de Matemática / UNESP / Câmpus de Bauru, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da DISSERTAÇÃO DE MESTRADO de ANDERSON RAFAEL ALVES, intitulada ***Limites e Derivadas: Uma abordagem para o Ensino Médio***. Após a exposição, o discente foi arguido oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: APROVADO. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.

Prof. Dr. AGNALDO JOSÉ FERRARI

Grasiele C. Jorge

Profa. Dra. GRASIELE CRISTIANE JORGE

Sônia CP

Profa. Dra. SONIA CRISTINA POLTRONIERE SILVA

Anderson Rafael Alves

Limites e Derivadas: Uma abordagem para o Ensino Médio

Dissertação apresentada como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Profissional em Rede Nacional - PROFMAT, da Faculdade de Ciências da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de Bauru.

Financiadora: CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Agnaldo José Ferrari
UNESP - Bauru
Orientador

Prof^a. Dr^a. Grasiele Cristiane Jorge
UNIFESP - São José dos Campos

Prof^a. Dr^a. Sônia Cristina Poltroniere Silva
UNESP - Bauru

Bauru
19 de fevereiro de 2018

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus por tudo.

Aos meus pais e irmãos, pelo apoio absoluto em todas as minhas decisões e por sempre estarem ao meu lado nos momentos mais difíceis.

Ao meu orientador, professor Dr. Agnaldo José Ferrari, por toda disponibilidade e compreensão.

Aos colegas do PROFMAT, por dividirem comigo inseguranças, angústias e alegrias ao longo do curso.

Aos meus amigos, pela força oferecida num momento de angústias e dúvidas.

À CAPES pelo apoio oferecido a todos nós, estudantes do PROFMAT.

SUMÁRIO

RESUMO

Nesta dissertação abordamos os conceitos básicos de algumas funções elementares, limites, continuidade, além do conceito de derivada e sua aplicabilidade. Esse material apresenta uma formação sólida no que diz respeito aos pré-requistos necessários para um aluno do ensino médio ingressar num curso superior, em que o mesmo trabalhará, eventualmente, com aspectos relacionados ao Cálculo. Como uma proposta didática introduziremos os conceitos de limite e derivada utilizando ferramentas computacionais, neste, caso o software GeoGebra e apresentação em Beamer.

Palavras-Chave: Função. Limite. Continuidade. Derivada.

ABSTRACT

In this dissertation we will study the basic concepts of some elementary functions, limits, continuity, beyond the concept of derivative and it applicability. This material will present a solid training regarding the prerequisites required for a high school student to enter an upper course where he will eventually work with aspects related to Calculus. As a didactic proposal we will introduce the concepts of limits and derivative using computational tools, in this case GeoGebra software and Beamer presentation.

Keywords: *Function. Limit. Continuity. Derivative.*

INTRODUÇÃO

A Matemática está presente nas diversas áreas do conhecimento e, na Educação Básica não é diferente. Desde o primeiro ano do Ensino Fundamental ela é desenvolvida junto aos alunos devida à sua importância e aplicabilidade tanto no contexto escolar quanto no cotidiano.

O Currículo Oficial do Estado de São Paulo apresenta a Matemática como uma área específica de conhecimento e o mesmo aponta três eixos norteadores para o desenvolvimento matemático no ambiente escolar: *1. Expressão/Compreensão; 2. Argumentação/Decisão; 3. Contextualização/Abstração.*

Ao longo dos últimos anos, nota-se que os alunos vêm apresentando dificuldades relacionadas à Matemática. Grande parte dos alunos saem do Ensino Médio sem desenvolver as habilidades e competências necessárias, o que impulsiona o grande número de reprovações nas disciplinas de Cálculo nos diversos cursos de exatas das universidades públicas e privadas. A Matemática é vista com um emaranhado de fórmulas que muitas vezes não apresentam sentido algum para os alunos.

O ensino de funções inicia-se ao longo do 8º ano do Ensino Fundamental e alonga-se até a 3ª série do Ensino Médio e, mesmo após longos cinco anos trabalhando com diversos tipos de funções, o aluno ao final da 3ª série do Ensino Médio apresenta dificuldade ao definir função e apontar suas aplicabilidades. O conceito de função é um dos mais importantes no ensino de Matemática e na maioria das vezes está diretamente relacionado a algo simples, como, por exemplo, a noção de Contagem. Ponte [10] descreve a origem e o desenvolvimento desse conceito ao longo da História da Matemática, sua evolução na Educação Matemática e seu surgimento como um elemento indispensável para o estudo quantitativo dos fenômenos naturais, mostrando que esse desenvolvimento foi um processo longo e extremamente delicado.

Rezende [11] consubstanciou cinco macro-espaços de dificuldades de aprendizagem de natureza epistemológica do ensino de Cálculo e identificou, em essência, um único lugar matriz dessas dificuldades: o da evitação/ausência das ideias e problemas construtores do Cálculo no ensino básico de Matemática.

Essa dissertação vem ao encontro do que Rezende [11] constatou, pois busca apresentar uma formação sólida para o aprimoramento no desenvolvimento das habilidades e competências no ensino de função, além de apresentar um profundamento nesses conceitos para que o aluno, no Ensino Superior, já esteja familiarizado com as noções básicas de limites, continuidade e derivada.

Em [5], é destacado o conceito básico de limites, conceito esse poucas vezes trabalhado pelos professores de matemática. Além disso, é importante destacar também que no mesmo material, são apresentados problemas intuitivos sobre os conceitos primitivos de derivada, problemas estes, também, poucas vezes explorados.

Este trabalho tem como objetivo principal apresentar a importância do ensino dos conceitos básicos de limites e derivadas no Ensino Médio através dos *softwares* Beamer e GeoGebra, com a finalidade de apresentar esses conceitos de forma lúdica para que assim o aluno possa observar a importância da aplicabilidade dos conceitos de matemática no cotidiano.

No Capítulo 1, apresentamos os conceitos básicos relacionados às funções: gráficos, operações e destacamos algumas funções elementares.

No Capítulo 2, introduzimos os conceitos de limites e suas propriedades.

No Capítulo 3, definimos funções contínuas, apresentamos suas propriedades e destacamos alguns exemplos.

No Capítulo 4, apresentamos as noções de derivadas, as regras de derivação com as respectivas demonstrações, as derivadas das funções elementares, a derivada de uma função na forma implícita, na forma paramétrica, além das derivadas sucessivas.

O Capítulo 5 traz algumas aplicações de derivadas, discutindo problemas de taxa de variação e máximos e mínimos de funções.

Uma proposta didática é apresentada no Capítulo 6, dividida em 4 aulas: (i) Noção de limite e derivada usando Beamer, (ii) Noção de limite e derivada usando GeoGebra, (iii) Algumas propriedades de limites e regras de derivação, (iv) Resolução de problemas de otimização utilizando noções de derivada.

Finalmente, apresentamos as perspectivas futuras, ou seja, algumas ideias que podem contribuir com a melhoria na qualidade do ensino e que eventualmente possam ser refletidas no Ensino Superior a médio e longo prazo.

1

FUNÇÕES

Neste capítulo abordamos os conceitos primitivos de função, além das principais funções trabalhadas ao longo do Ensino Médio e dos cursos de Cálculo I no Ensino Superior.

1.1 O CONCEITO DE FUNÇÃO

Definição 1.1.1 *[3] Sejam A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$. Uma função $f : A \longrightarrow B$ é uma lei ou regra que a cada elemento de A faz correspondência a um único elemento de B. O conjunto A é chamado domínio de f e é denotado por $D(f)$. B é chamado de contra-domínio, denotado por $CD(f)$, de f. Denotamos:*

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B. \\ x &\longrightarrow f(x) \end{aligned}$$

Exemplo 1.1.1 *Sejam $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$.*

(i) A relação $f : A \longrightarrow B$ representada usando o Diagrama de Venn [1], na Figura 1.1.1, é uma função de A em B.

(ii) $g : A \rightarrow B$ dada por $g(x) = x + 1$, é uma função de A em B e está representada na Figura 1.1.2. Podemos representar g através do Diagrama de Venn.

Definição 1.1.2 *[2]*

Seja $f : A \longrightarrow B$ uma função.

(i) Dado $x \in A$, o elemento $f(x) \in B$ é denominado imagem de x por f.

(ii) O conjunto de todos os valores assumidos pela função, denotado por $Im(f)$, é chamado conjunto imagem de f, isto é, $Im(f) = \{f(x); x \in A\}$.

Exemplo 1.1.2 *Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \mathbb{Z}$ e $f : A \longrightarrow B$ definida pela regra que a cada elemento de A faz corresponder o seu triplo. Então:*

(i) a regra que define f é $f(x) = 3x$;

[1] Diagrama de Venn é uma representação gráfica, que nos mostra as relações existentes entre conjuntos.

(ii) *a imagem do elemento* 1 *é* 3*, de* 2 *é* 6 *etc.;*

(iii) *o conjunto imagem de* f*,* $Im(f) = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$.

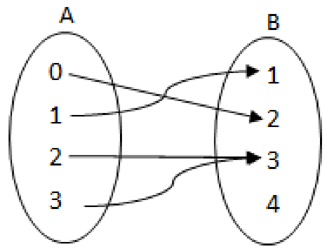


Figura 1.1.1

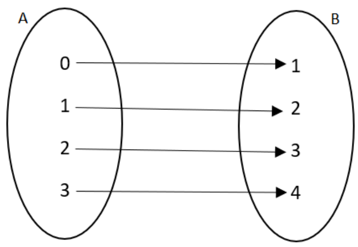


Figura 1.1.2

1.2 GRÁFICOS

Definição 1.2.1 *[3] Seja* $f : A \longrightarrow B$ *uma função. O gráfico de* f *é o conjunto*

$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = f(x)\}.$$

Para esboçarmos o gráfico de uma função, listamos uma série de pontos coordenados que são dados de acordo com a lei de formação dessa função aplicados em seu domínio e que nos dá sua respectiva imagem, à partir daí montamos uma tabela com esses dados e em seguida plotamos esses pontos no plano cartesiano.

Exemplo 1.2.1

(i) *Seja* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^2$.

O gráfico de f *consiste em todos os pares* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *tais que* $y = x^2$*, ou seja, é a coleção de todos os pares* (x, x^2) *do plano xy. A Figura 1.2.1 mostra o gráfico de* f.

(ii) *Seja* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = 2x$.

Note que os pontos do gráfico são os pares $(x, 2x) \in \mathbb{R}^2$*. Observe o esboço do gráfico de* f *na Figura 1.2.2.*

(iii) *Seja* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) = \begin{cases} -2, & se\ x \leq -2 \\ 2, & se\ -2 < x \leq 2 \\ 4, & se\ x > 2 \end{cases}$$

O gráfico de f *pode ser visto na Figura 1.2.3.*

(iv) *Seja* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = |x|$.

Sabemos que quando $x \geq 0$, $f(x) = x$ *e quando* $x < 0$, $f(x) = -x$. *A Figura 1.2.4. mostra o gráfico de* f.

(v) *Seja* $f(x) = \dfrac{1}{x}$. *Então,* $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$. *A Figura 1.2.5 mostra o gráfico de* f.

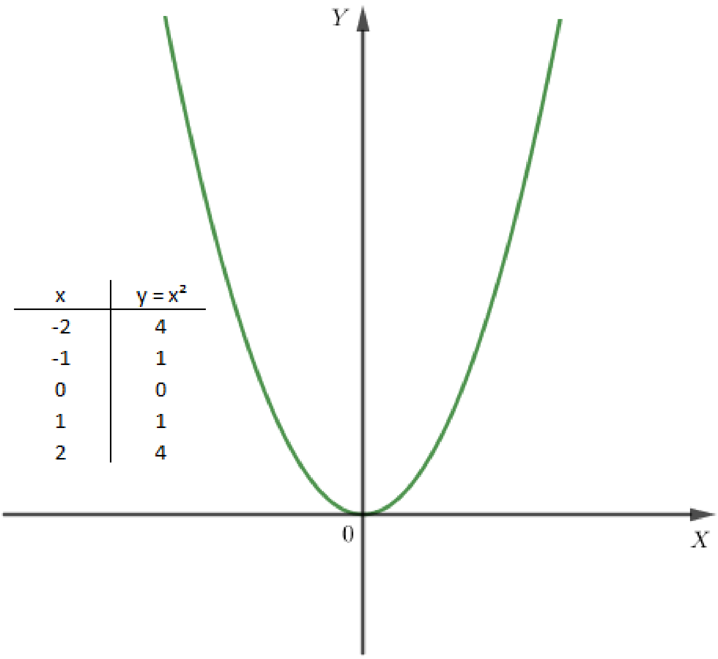
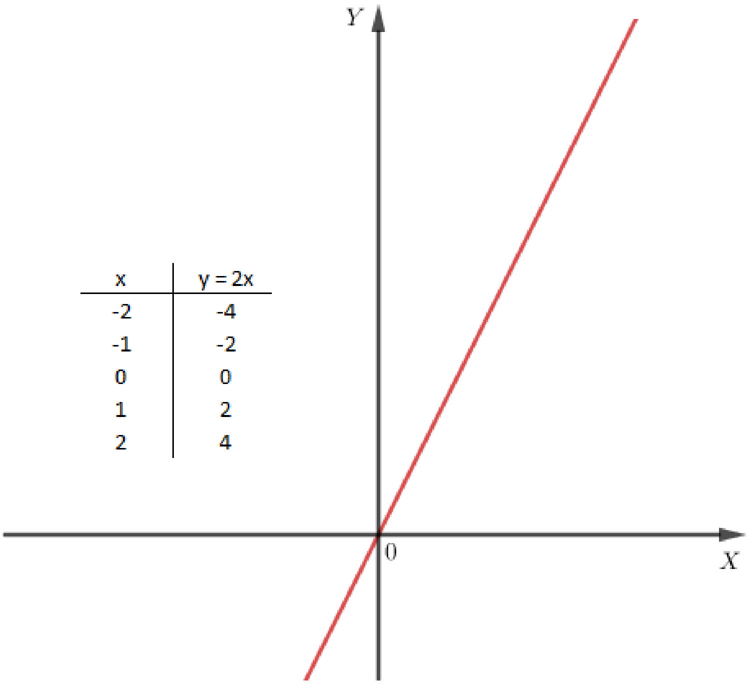


Figura 1.2.1



x	y = 2x
-2	-4
-1	-2
0	0
1	2
2	4

Figura 1.2.2

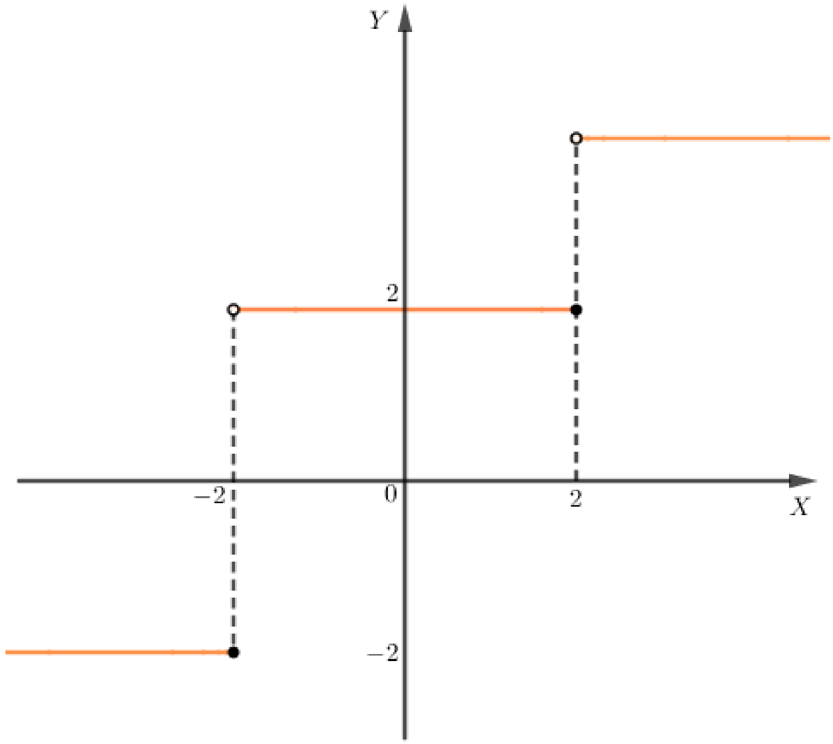


Figura 1.2.3

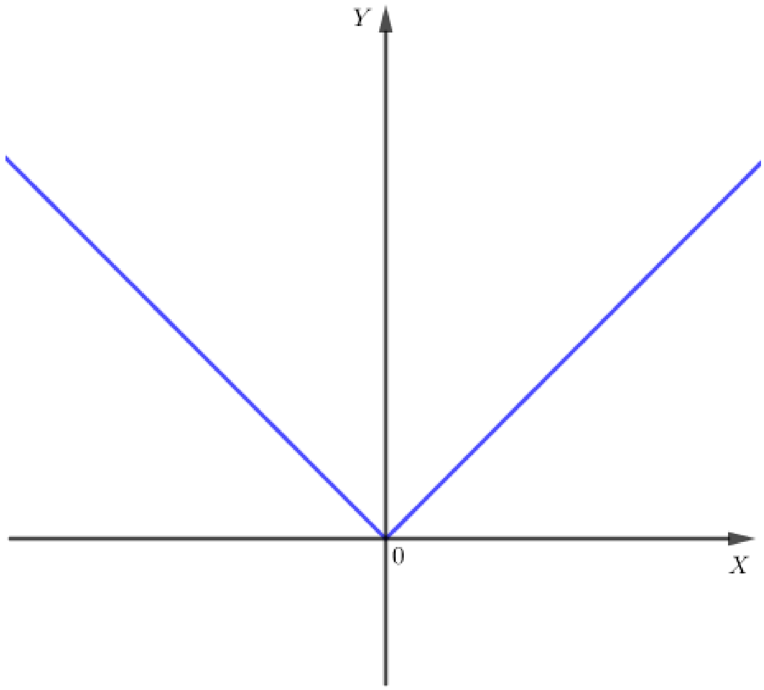


Figura 1.2.4

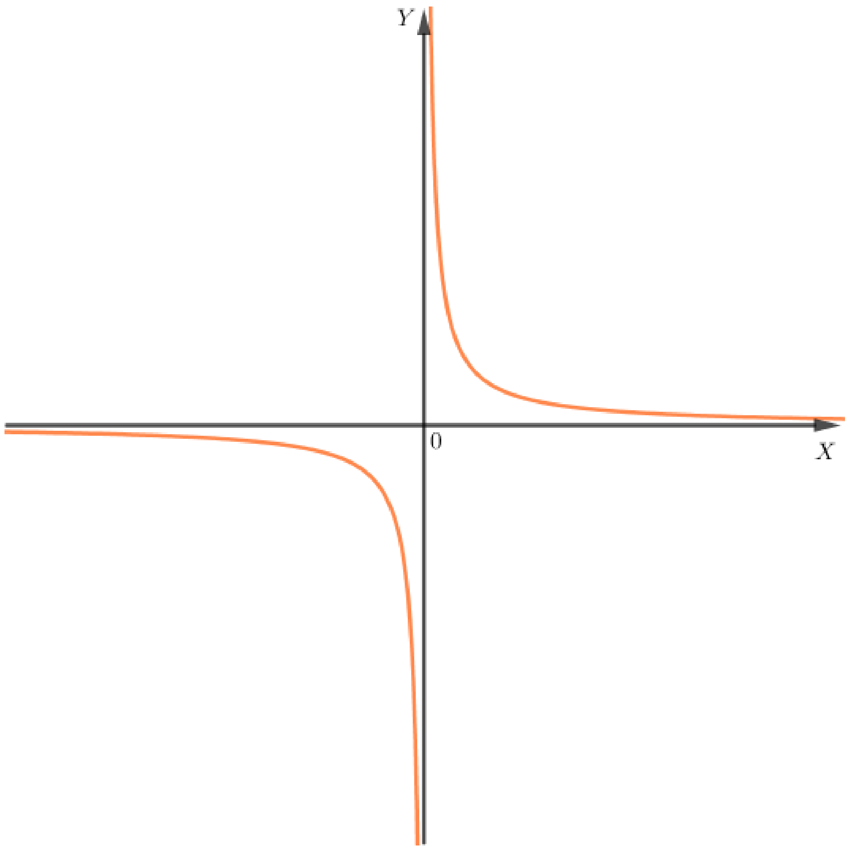


Figura 1.2.5

1.3 OPERAÇÕES

Nesta seção apresentamos algumas operações que podem ser realizadas com funções.

Definição 1.3.1 *[3] Dadas as funções $f : A \longrightarrow B$ e $g : A \longrightarrow B$ e a constante k, as operações soma $f+g$, diferença $f-g$, produto $f \cdot g$, quociente f/g e o produto $k \cdot f$, são definidas por:*

(i) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$;

(ii) $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$;

(iii) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$;

(iv) $(f/g)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, *desde que* $g(x) \neq 0$, *para todo* $x \in A$;

(v) $(kf)(x) = kf(x)$. *Note que, neste caso,* $D(kf) = D(f)$.

Exemplo 1.3.1 *Sejam* $f(x) = x+1$ *e* $g(x) = x^2$. *Então,*

(i) $(f+g)(x) = (x+1) + (x^2) = x^2 + x + 1$;

(ii) $(f-g)(x) = (x+1) - (x^2) = -x^2 + x + 1$;

(iii) $(f \cdot g)(x) = (x+1) \cdot (x^2) = x^3 + x^2$;

(iv) $(f/g) = \dfrac{x+1}{x^2}$.

Note que o $D(f) = D(g) = \mathbb{R}$ *e no item (iv), o* $D(f/g) = \mathbb{R} - \{0\}$.

Exemplo 1.3.2 *Seja* $f(x) = \sqrt{3x+1}$ *e* $k = 2$. *Então,* $(kf)(x) = 2\sqrt{3x+1}$ *e* $D(kf) = [-\frac{1}{3}, +\infty)$

Definição 1.3.2 *[3] Dadas duas funções $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$, a função composta de g com f, denotada $g \circ f$, é definida por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.*

O domínio de $g \circ f$ é o conjunto de todos os pontos x no domínio de f tais que $f(x)$ está no domínio de g. Logo, $D(g \circ f) = \{x \in D(f); f(x) \in D(g)\}$.

Observe o diagrama abaixo:

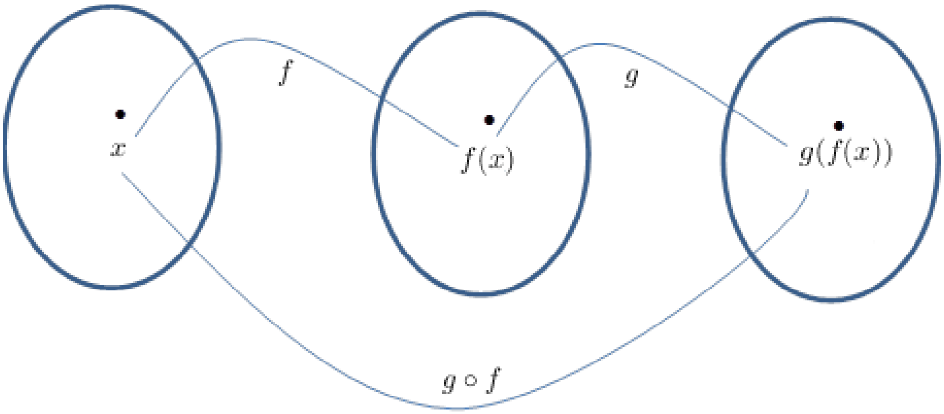


Figura 1.3.1

Exemplo 1.3.3 *Sejam* $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = \sqrt{x}$ *e* $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $g(x) = x + 1$. *Determinar* $g \circ f$.

Como $Im(f) = \mathbb{R}_+ \subseteq \mathbb{R} = D(g)$ *a composta* $g \circ f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *é definida por:*

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 1$.

Por outro lado, $Im(g) = \mathbb{R}$ *e o mesmo não está contido em* $\mathbb{R}_+ = D(f)$, *logo a composta* $f \circ g$ *não é possível.*

Exemplo 1.3.4 *Sejam*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & se\ x < 0 \\ x^2, & se\ 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & se\ x > 1 \end{cases} \quad e\ g(x) = \begin{cases} 1, & se\ x < 0 \\ 2x, & se\ 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & se\ x > 1 \end{cases}.$$

Temos que

$$D(f) = \mathbb{R},\ Im(f) = [0,1],\ D(g) = \mathbb{R}\ e\ Im(g) = [0,2]$$

Como $Im(g) \subseteq D(f)$ *a composta* $f \circ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *está definida.*

Se $x < 0$, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1) = 1$;

Se $0 \leq x \leq 1$, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x) = \begin{cases} 4x^2, & se\ 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0, & se\ \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$;

Se $x > 1$, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1) = 1$.

Por outro lado, como $Im(f) \subseteq D(g)$, *a composta* $g \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *está definida.*

Se $x < 0$, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(0) = 0$;

Se $0 \leq x \leq 1$, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 2x^2$;

Se $x > 1$, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(0) = 0$.

Os gráficos de $f \circ g$ *e* $g \circ f$ *estão representados nas Figuras 1.3.2 e 1.3.3, respectivamente.*

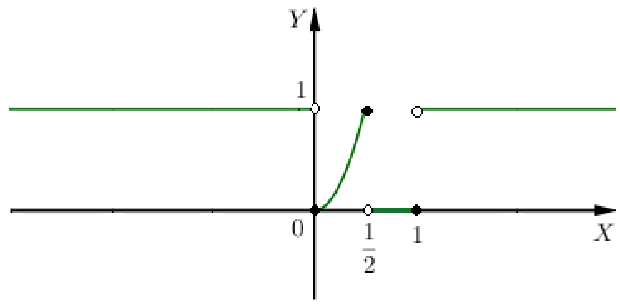


Figura 1.3.2

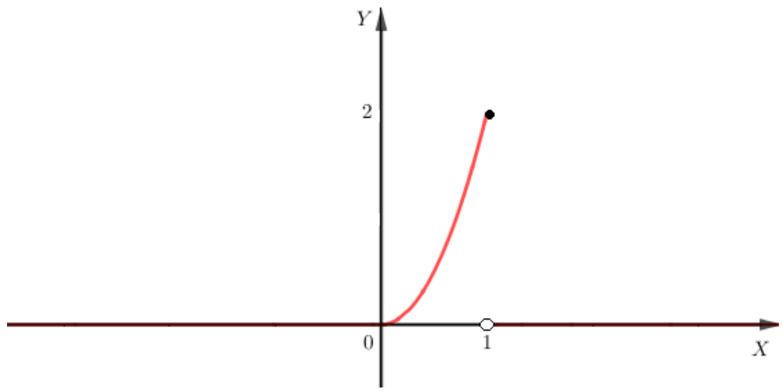


Figura 1.3.3

1.4 FUNÇÕES ELEMENTARES E SUAS PROPRIEDADES

Nesta seção iremos abordar algumas das principais funções estudadas no Ensino Médio e Superior as quais chamaremos de Funções Elementares [2] . Estudaremos também algumas funções que apresentam propriedades especiais.

Definição 1.4.1 *[3] Toda função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = K$, que associa a qualquer número real x um número real K é denominada Função Constante.*

Note que a representação gráfica de $f(x) = K$ será sempre uma reta paralela ao eixo das abscissas, passando por $y = K$.

O domínio da função $f(x) = k$ é $D(f) = \mathbb{R}$. O conjunto imagem é o conjunto unitário $Im(f) = \{k\}$.

O gráfico de f é representado na Figura 1.4.1.

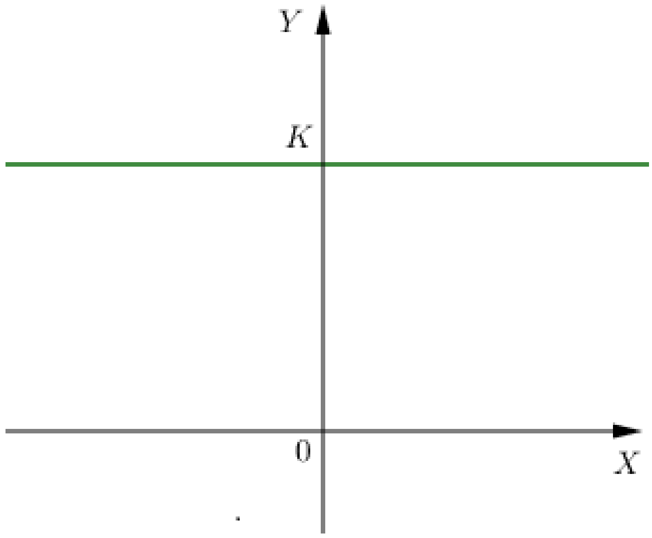


Figura 1.4.1

Definição 1.4.2 *[3] Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$ é denominada Função Identidade.*

O gráfico de f é representado na Figura 1.4.2.

O domínio e a imagem da função $f(x) = x$ é o conjunto $\mathbb{R}$. Note que o gráfico da função f é a reta bissetriz do primeiro e terceiro quadrantes.

Definição 1.4.3 *[2] Toda função que associa a cada número real x o número real $ax + b$, $a \neq 0$ é denominada Função Afim. Os números reais a e b são chamados, respectivamente, de coeficiente angular e linear. Temos que $D(f) = Im(f) = \mathbb{R}$.*

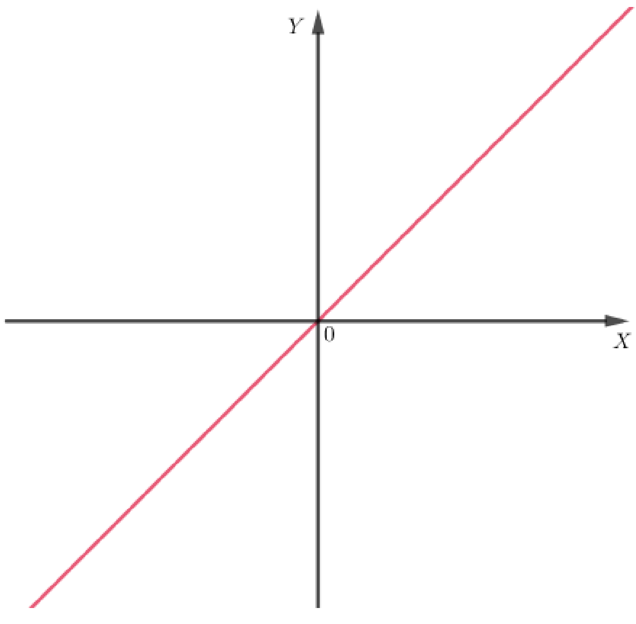


Figura 1.4.2

Proposição 1.4.1 *[2] O gráfico de uma Função Afim é uma reta não paralela aos eixos coordenados.*

Demonstração:

Para provarmos que o gráfico de uma função afim é uma reta, basta verificarmos que três pontos arbitrários de seu gráfico são colineares, isto é, estão alinhados. Sejam, $P_1 = (x_1, ax_1 + b)$, $P_2 = (x_2, ax_2 + b)$ e $P_3 = (x_3, ax_3 + b)$.

Para mostrarmos que P_1, P_2 e P_3 são colineares, basta mostrarmos que o maior dos três números $d(P_1, P_2), d(P_2, P_3)$ e $d(P_1, P_3)$ seja igual a soma dos outros dois.

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $x_1 < x_2 < x_3$. Assim, pela fórmula de distância entre pontos no plano temos que:

$$\begin{aligned} d(P_1, P_2) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (ax_2 + b - (ax_1 + b))^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (ax_2 - ax_1 + b - b)^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (a(x_2 - x_1))^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + a^2(x_2 - x_1)^2} \\ &= (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2}, \end{aligned}$$

$$d(P_2, P_3) = (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2} \quad \text{e} \quad d(P_1, P_3) = (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2}.$$

Note que

$$\begin{aligned} d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3) &= (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2} + (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2} \\ &= (x_2 - x_1 + x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2} = (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2} = d(P_1, P_3). \end{aligned}$$

Logo, $d(P_1, P_3) = d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3)$.

Além disso, como o ponto $P = (0, b)$ pertence a reta, se a reta fosse paralela aos eixos coordenados a equação seria $y = b$ ou $x = 0$ o que não ocorre, pois se $y = b$ teríamos $a = 0$, contrariando a hipótese. Se $x = 0$, então todo ponto da reta seria da forma $Q = (0, y)$, $y \in \mathbb{R}$, mas o ponto $R = (1, a + b)$ pertence à reta.

Portanto, o gráfico de uma função afim é uma reta não paralela aos eixos coordenados. ■

Definição 1.4.4 *[2] Uma função f é dita estritamente crescente num intervalo I quando para quaisquer x_1, $x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$ tem-se $f(x_1) < f(x_2)$.*

Definição 1.4.5 *[2] Uma função f é dita estritamente decrescente num intervalo I quando para quaisquer x_1, $x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$ tem-se $f(x_1) > f(x_2)$.*

Proposição 1.4.2 *[2] Uma função $f(x) = ax + b$ é estritamente crescente quando $a > 0$ e estritamente decrescente quando $a < 0$.*

Demonstração:

(i) Caso $a > 0$:

Sejam x_1 e $x_2 \in \mathbb{R}$ tais que $x_1 < x_2$, isto é, $x_1 - x_2 < 0$.

Temos que

$$f(x_1) - f(x_2) = ax_1 + b - (ax_2 + b) = ax_1 + b - ax_2 - b = ax_1 - ax_2$$

$$= a(x_1 - x_2).$$

Como $a > 0$ e $x_1 < x_2$, segue que $f(x_1) < f(x_2)$, ou seja, a função f é estritamente crescente.

(ii) Caso $a < 0$:

Sejam x_1 e $x_2 \in \mathbb{R}$, tais que $x_1 < x_2$, isto é, $x_1 - x_2 < 0$

Temos que

$$f(x_1) - f(x_2) = ax_1 + b - (ax_2 + b) = ax_1 + b - ax_2 - b = ax_1 - ax_2$$

$$= a(x_1 - x_2) > 0.$$

Como $a < 0$ e $x_1 < x_2$, segue que $f(x_1) > f(x_2)$, ou seja, a função f é estritamente decrescente.

■

Exemplo 1.4.1

(i) A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x + 1$ é uma Função Afim crescente, pois $a > 0$, conforme Figura 1.4.3.

(ii) A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -2x + 3$ é uma Função Afim decrescente, pois $a < 0$, conforme Figura 1.4.4.

Definição 1.4.6 *[3] A função definida por $f(x) = |x|$ chama-se Função Modular. O seu domínio é $D(f) = \mathbb{R}$ e sua imagem é $Im(f) = [0, +\infty)$.*

O gráfico da função f está ilustrado na Figura 1.4.5.

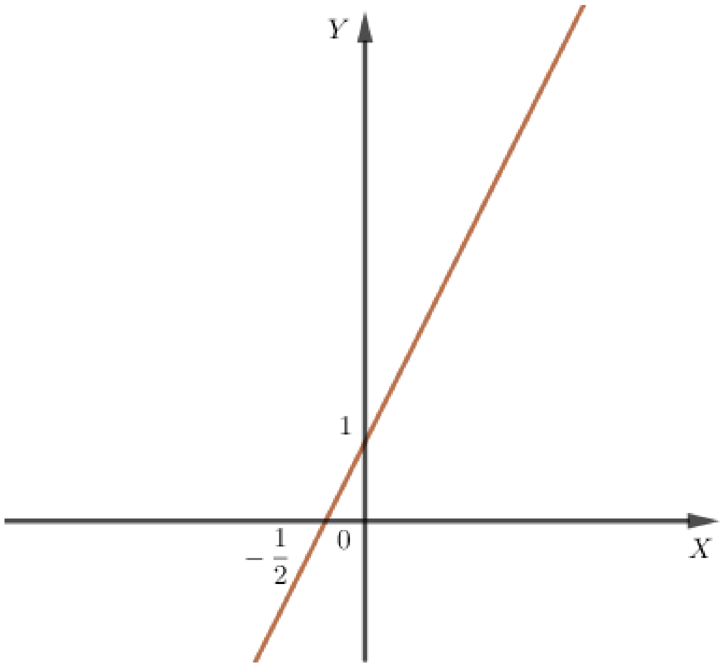


Figura 1.4.3

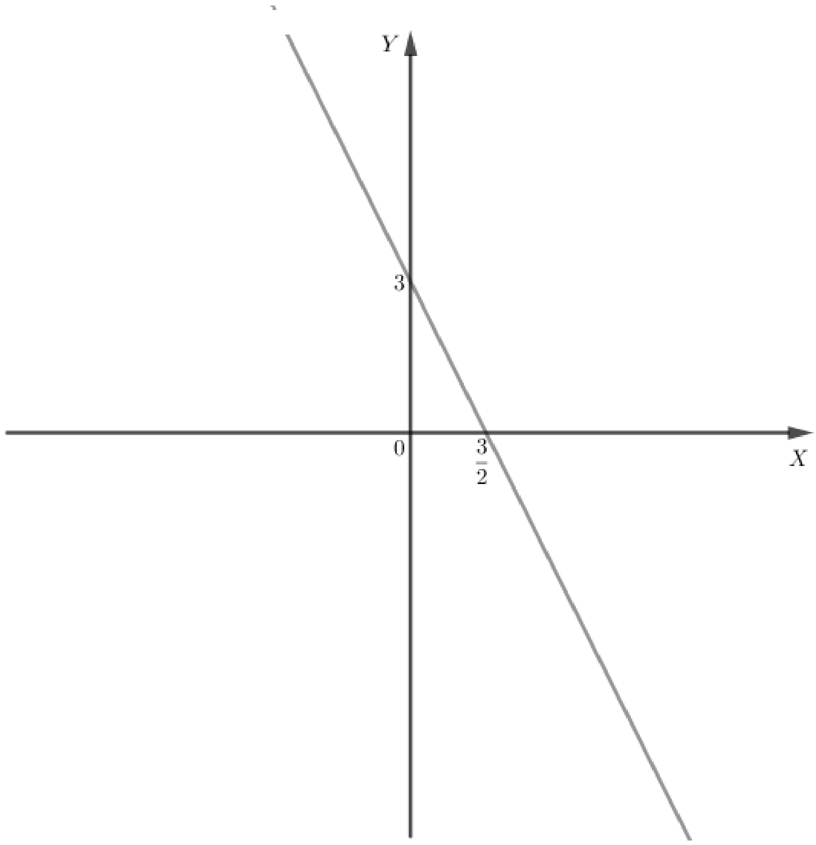


Figura 1.4.4

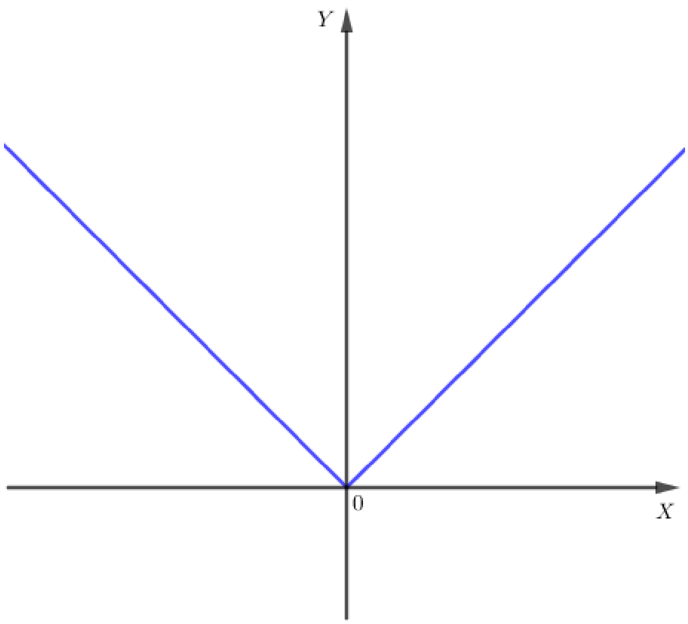


Figura 1.4.5

Definição 1.4.7 *[3] A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ é chamada Função Quadrática. Seu domínio é $D(f) = \mathbb{R}$.*

O gráfico de uma função quadrática é uma parábola com eixo de simetria paralelo ao eixo das ordenadas. Se o coeficiente a for positivo ($a > 0$), a parábola tem concavidade voltada para cima. Se $a < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo.
A intersecção do eixo de simetria com a parábola é um ponto denominado vértice.
A intersecção da parábola com o eixo das abscissas define os zeros da função.
O gráfico de f está representado na Figura 1.4.6.

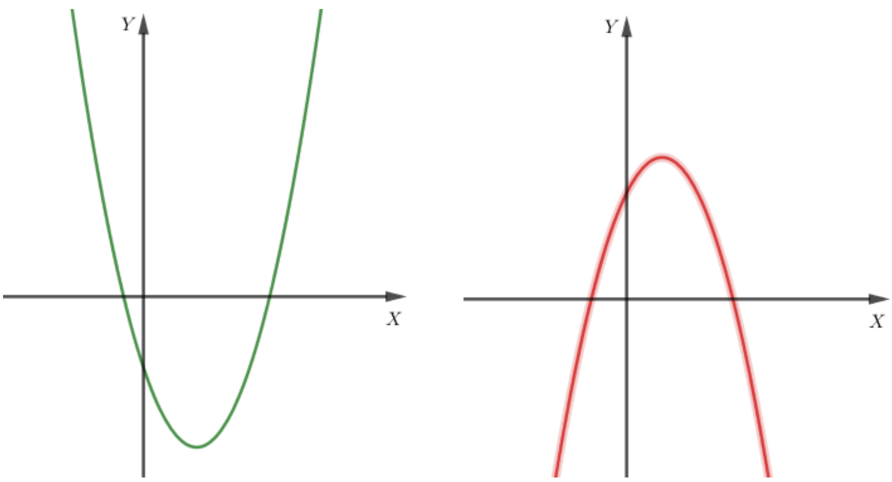


Figura 1.4.6

Definição 1.4.8 *[3] Dada uma função real definida por $y = f(x)$, x_1 é zero ou raiz dessa função se $f(x_1) = 0$.*

Definição 1.4.9 *[3] Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ onde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$,são números reais com $a_0 \neq 0$ e são chamados coeficientes e n, inteiro não negativo determina o grau da função, é denominada **função polinomial**.*

Temos que $D(f) = \mathbb{R}$.
As funções estudadas até aqui são todas funções polinomiais.

Definição 1.4.10 *[3] Uma função do tipo $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, onde p e q são funções polinomiais e $q(x) \neq 0$, para todo $x \in D(q)$, é denominada Função Racional.*

Exemplo 1.4.2
(i) A função $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ é uma função racional cujo domínio é $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$, e o gráfico é apresentado na Figura 1.4.7.

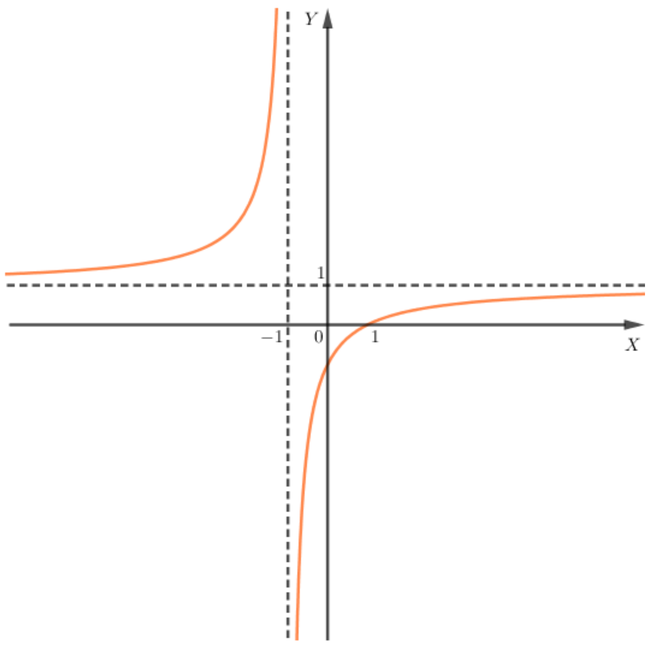


Figura 1.4.7

(ii) A função $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$ é uma função racional cujo domínio é $D(f) = \mathbb{R}^*$, cujo gráfico é representado na Figura 1.4.8.

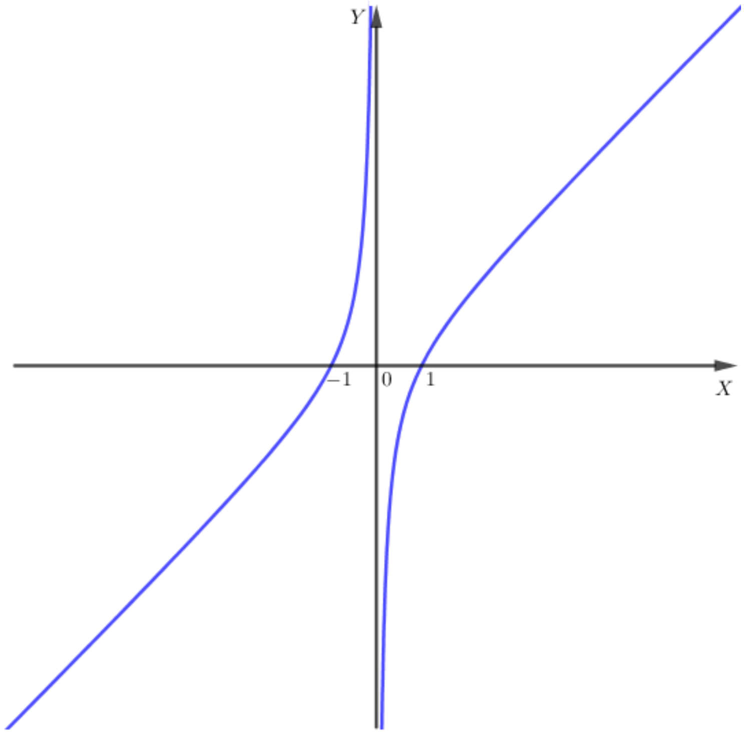


Figura 1.4.8

Definição 1.4.11 *[3] Dizemos que uma função f é* ***par*** *se, para todo $x \in D(f)$, tivermos $f(-x) = f(x)$.*
Uma função f é ***ímpar*** *se, para todo $x \in D(f)$, tivermos $f(-x) = -f(x)$.*
O gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo das ordenadas e o gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem.

Exemplo 1.4.3

(i) A função $f(x) = x^2 + 1$ é par, pois $f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$.

(ii) A função $f(x) = x^3 + x$ é ímpar, pois $f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -f(x)$.

(ii) A função $f(x) = x^3 - 1$ não é par e nem ímpar.

Definição 1.4.12 *[3] Uma função f é dita periódica se existe um número real $T \neq 0$ tal que $f(x + T) = f(x)$, para todo $x \in D(f)$.*
O número T é chamado período da função f. O gráfico de uma função periódica se repete a cada intervalo de comprimento $|T|$.

Exemplo 1.4.4

(i) A Figura 1.4.9 (a) e (b) apresenta gráficos de funções periódicas.

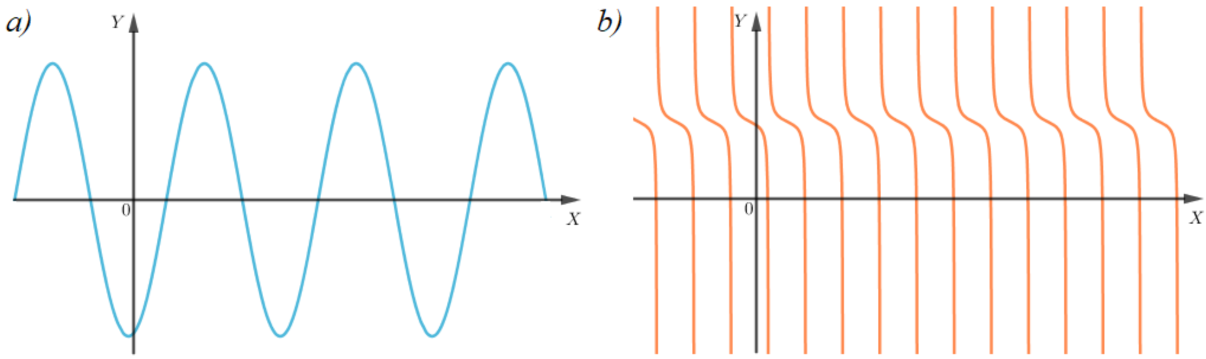


Figura 1.4.9

(ii) A função constante é periódica e tem como período qualquer número $T \neq 0$.

Definição 1.4.13 *[2] Uma função $f : A \longrightarrow B$ chama-se* ***injetiva*** *quando dados $x_1, x_2 \in A$ com $f(x_1) = f(x_2)$ implicar $x_1 = x_2$ ou equivalentemente, dados $x_1, x_2 \in A$ com $x_1 \neq x_2$ implicar $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

Definição 1.4.14 *[2] Uma função $f : A \longrightarrow B$ é* ***sobrejetiva*** *quando, dado um elemento $y \in B$, exista $x \in A$ tal que $f(x) = y$.*

Definição 1.4.15 *[2] Uma função $f : A \longrightarrow B$ é* ***bijetiva*** *quando é, simultaneamente, injetiva e sobrejetiva.*

Exemplo 1.4.5 *A função afim $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$ é injetiva. Dados $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, temos:*

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow ax_1 + b = ax_2 + b \Leftrightarrow ax_1 = ax_2 \Leftrightarrow ax_1 - ax_2 = 0 \Leftrightarrow a(x_1 - x_2).$$

Como $a \cdot (x_1 - x_2) = 0$ e $a \neq 0$, temos que $x_1 - x_2 = 0$. Logo, $x_1 = x_2$.
Portanto, a função afim é injetiva.

■

Exemplo 1.4.6 *A função quadrática $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ não é injetiva.*

Temos que $f(-1) = f(1) = 1$, mas $1 \neq -1$.

Exemplo 1.4.7 *A função afim $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$ é sobrejetiva.*

Dado $y \in \mathbb{R}$, exibiremos $x \in \mathbb{R}$, tal que $f(x) = y$. Se $y \in \mathbb{R}$, então

$$y = ax + b \Leftrightarrow y - b = ax \Leftrightarrow \; x = \frac{y - b}{a}.$$

Assim,

$$f(x) = a\left(\frac{y-b}{a}\right) + b = y.$$

Portanto, a função afim é sobrejetiva. ■

Definição 1.4.16 *[3]*

Seja $f : A \longrightarrow B$ uma função. Se, para cada $y \in B$, existir exatamente um valor de $x \in A$ tal que $y = f(x)$, então podemos definir uma função $g : B \longrightarrow A$ tal que $x = g(y)$. A função g definida desta maneira é denominada função inversa de f e é denotada por f^{-1}.

Exemplo 1.4.8

(i) A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $y = 2x - 4$ tem como função inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $x = \frac{1}{2}y + 2$.

(ii) A função $f : \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{1\}$ definida por $y = \dfrac{x}{x-1}$ tem como função inversa $f^{-1} : \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{1\}$ definida por $x = \dfrac{y}{y-1}$.

De fato,

$$y = \frac{x}{x-1} \Leftrightarrow y(x-1) = x \Leftrightarrow yx - y = x \Leftrightarrow -y = x - yx \Leftrightarrow -y = x(1-y)$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-y}{1-y} \Leftrightarrow x = \frac{y}{y-1}$$ ■

Algumas funções não possuem inversa, porém quando fazemos algumas restrições convenientes no seu domínio, passam a ter inversa.

Exemplo 1.4.9 *A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $y = x^2$ não admite inversa. Fazendo uma restrição conveniente no domínio, essa mesma função passa a admitir inversa. Por exemplo, quando tomamos $x \geq 0$ existe a inversa $x_1 = \sqrt{y}$ e quando tomamos $x \leq 0$ existe a inversa $x_2 = -\sqrt{y}$.*

Teorema 1.4.1 *[2] Uma função $f : A \longrightarrow B$ admite inversa $f^{-1} : B \longrightarrow A$ se, e somente se, é bijetiva.*

Demonstração:

Se uma função $f : A \longrightarrow B$ admite inversa $f^{-1} : B \longrightarrow A$, então da igualdade $f^{-1}(f(x)) = x$ para todo $x \in A$, segue que f é injetiva, pois para todo x_1 e $x_2 \in A$,

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2)) \Longrightarrow x_1 = x_2.$$

Como $f(f^{-1}(y)) = y$ para todo $y \in B$, temos que f é sobrejetiva pois, dado $y \in B$, arbitrário, podemos tomar $x = f^{-1}(y) \in A$ e temos que $f(x) = f(f^{-1}(y)) = y$.

Portanto, $f : A \longrightarrow B$ é bijetiva.

Por outro lado, se $f : A \longrightarrow B$ é bijetiva então f possui a inversa $f^{-1} : B \longrightarrow A$. De fato, como f é bijetiva, para cada $y \in B$, existe um único $x \in A$, tal que $y = f(x)$, definimos $f^{-1} : B \longrightarrow A$ como sendo $f^{-1}(y) = x$. Assim, temos que $f(f^{-1}(y)) = y$ e $f(f^{-1}(y)) = y$ para quaisquer $x \in A$ e $y \in B$.

Logo, $f : A \longrightarrow B$ possui inversa.

■

Proposição 1.4.3 *[2]*

(i) A função inversa, quando existe é única.

(ii) Os gráficos de f e de f^{-1}, denotados por G_f e $G_{f^{-1}}$, respectivamente, são simétricos em relação à reta $y = x$.

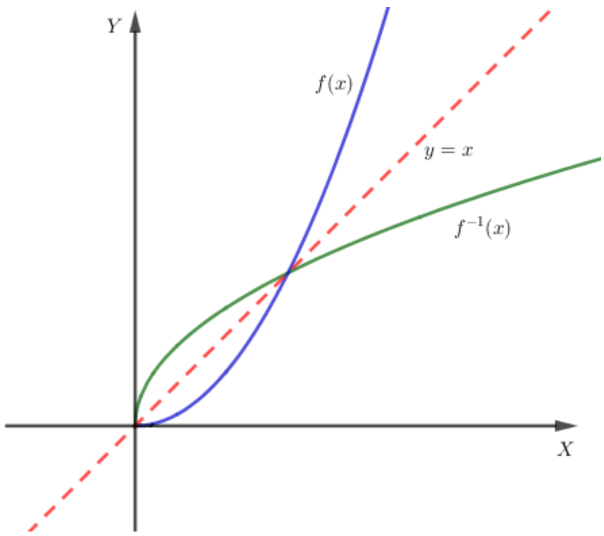


Figura 1.4.9

Demonstração:

(i) Se $g_1, g_2 : B \longrightarrow A$ são funções inversas de $f : A \longrightarrow B$, então: $D(g_1) = D(g_2) = B$, pois $D(g_1) = Im(f)$ e $D(g_2) = Im(f)$.
$CD(g_1) = CD(g_2) = A$, pois $CD(g_1) = D(f)$ e $CD(g_2) = D(f)$.
Para cada $y \in D(g_1) = D(g_2) = Im(f)$, temos que:

$$f(g_1(y)) = y = f(g_2(y)) \text{ e, como } f \text{ tem que ser injetora, } g_1(y) = g_2(y).$$

Portanto, $g_1 = g_2$. ■

(ii) Temos que

$$G_f = \{(x, f(x)); x \in D(f)\} \text{ e } G_{f^{-1}} = \{(x, f^{-1}(x)); x \in D(f^{-1})\}.$$

Assim,

$$(x_0, y_0) \in G_f \Longrightarrow y_0 = f(x_0) \Longrightarrow x_0 = f^{-1}(y_0) \in G_{f^{-1}}.$$

É claro que os pontos (x_0, y_0) *e* (y_0, x_0) *são simétricos e relação à reta* $y = x$.

■

Definição 1.4.17 *[2] Chamamos de Função Exponencial de base **a** a função de* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *que associa a cada x real o número* a^x*, sendo **a** um número real,* $0 < \boldsymbol{a} \neq 1$.

O domínio da função exponencial é $D(f) = \mathbb{R}$. *A imagem é* $Im(f) = (0, +\infty)$. *Com relação ao gráfico da função* $f(x) = a^x$*, temos:*

(i) a curva está toda acima do eixo das abscissas, visto que $y = a^x > 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$*;*

(ii) intercepta o eixo das ordenadas no ponto $(0, 1)$*;*

(iii) $f(x) = a^x$ *é crescente se* $a > 1$ *e decrescente se* $0 < a < 1$.

O gráfico de $f(x) = a^x$ está representado na Figura 1.4.10.

Definição 1.4.18 *[2] Dado um número real a, tal que* $0 < a \neq 0$*, chamamos de Função Logarítmica de base **a** a função* $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ *que se associa como* $y = \log_a x$*, onde* $a^y = x$.

Temos que $D(f) = \mathbb{R}_+^*$ *e* $Im(f) = \mathbb{R}$.

*As funções **logarítmica** e exponencial são inversas uma da outra.*

*Com relação ao gráfico da função **logarítmica**, podemos afirmar que:*

(i) está todo à direita do eixo das ordenadas;

(ii) corta o eixo das abscissas no ponto $(1, 0)$*;*

(iii) $f(x) = \log_a x$ *é crescente se* $a > 1$ *e decrescente se* $0 < a < 1$*;*

*(iv) é simétrico ao gráfico da função **exponencial** em relação à reta* $y = x$.

*Observe na Figura 1.4.11 a comparação entre os gráficos das funções **exponencial** e **logarítmica**.*

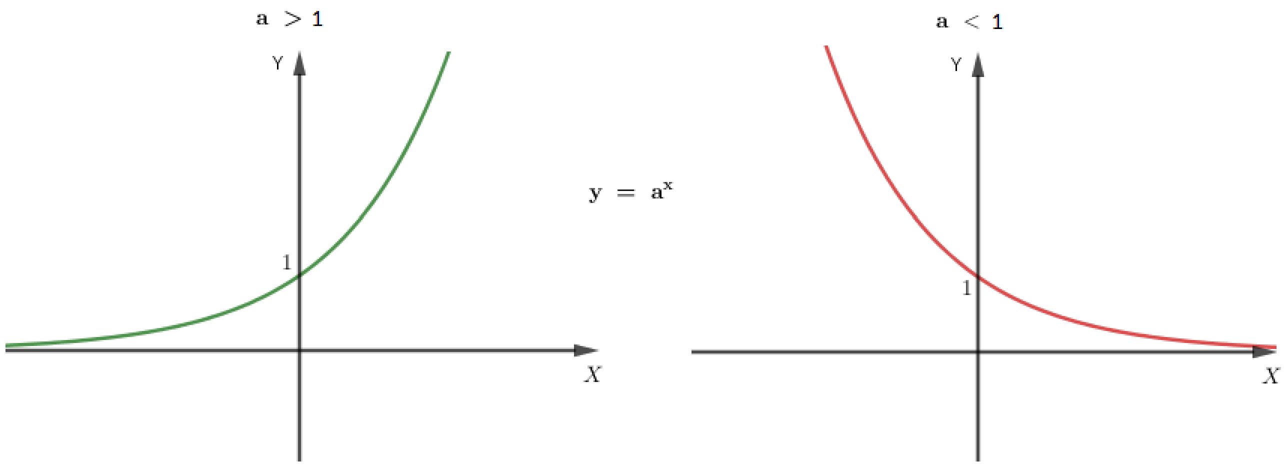


Figura 1.4.10

Definição 1.4.19 *[2] Definimos a Função Seno de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que a cada $x \in \mathbb{R}$ faz corresponder o número real $y = sen(x)$.*

O domínio da função seno é o conjunto $\mathbb{R}$ e o conjunto imagem é o intervalo $[-1, 1]$. A função $y = sen(x)$ é periódica e seu período é 2π, visto que

$$sen(x + 2\pi) = sen(x)cos(2\pi) + sen(2\pi)cos(x) = sen(x)\,1 + 0\,cos(x) = sen(x).$$

*O gráfico da função $f(x) = sen(x)$, denominada **senóide**, está representado na Figura 1.4.12.*

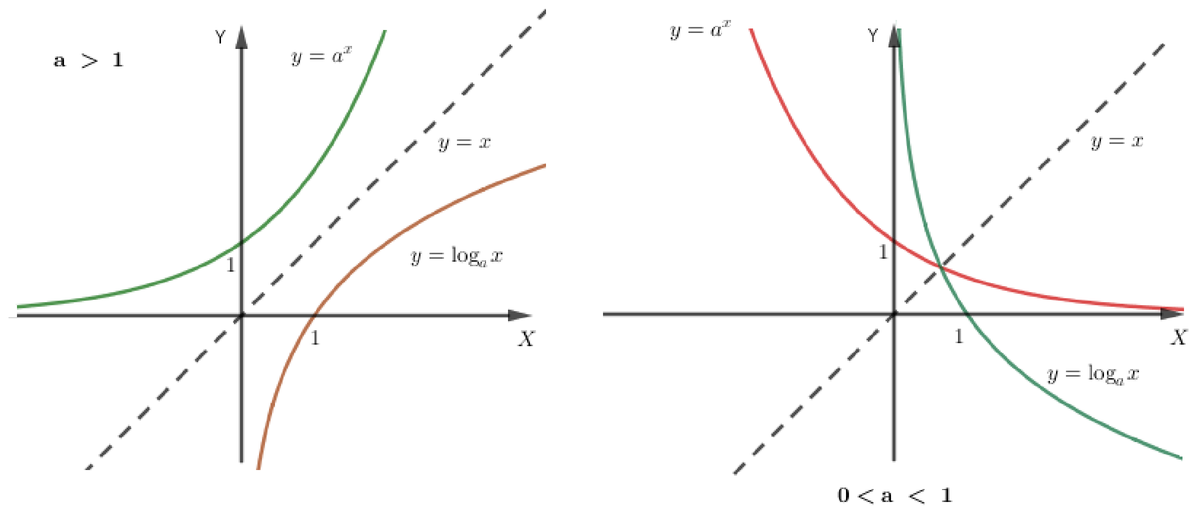


Figura 1.4.11

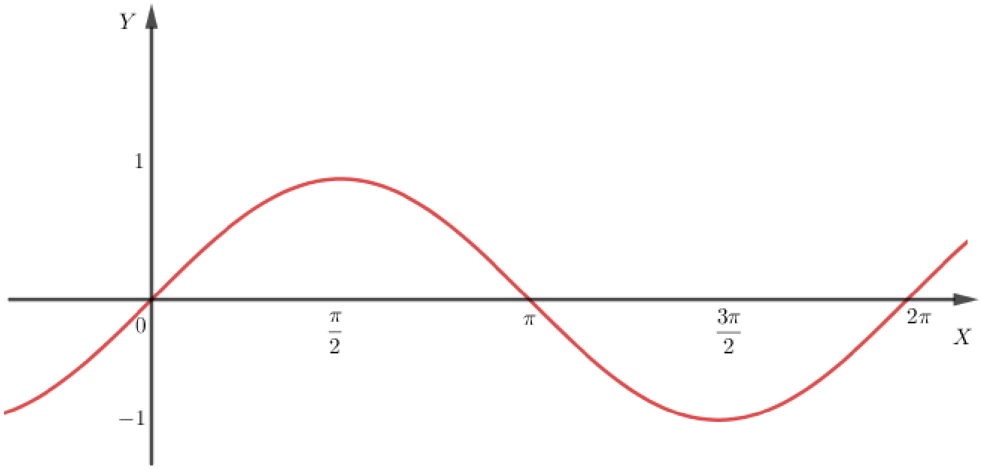


Figura 1.4.12

Definição 1.4.20 *[2] Definimos a Função Cosseno de* $\mathbb{R}$ *em* $\mathbb{R}$ *que a cada* $x \in \mathbb{R}$ *faz corresponder o número real* $y = cos(x)$.

O domínio da função cosseno é o conjunto $\mathbb{R}$ e o conjunto imagem é o intervalo $[-1, 1]$. A função $y = cos(x)$ é periódica e seu período é 2π, visto que

$$cos(x + 2\pi) = cos(x)cos(2\pi) - sen(x)sen(2\pi) = cos(x)\,1 + sen(x)\,0 = cos(x).$$

O gráfico da função $f(x) = cos(x)$, denominada **cossenóide**, está representado na Figura 1.4.13.

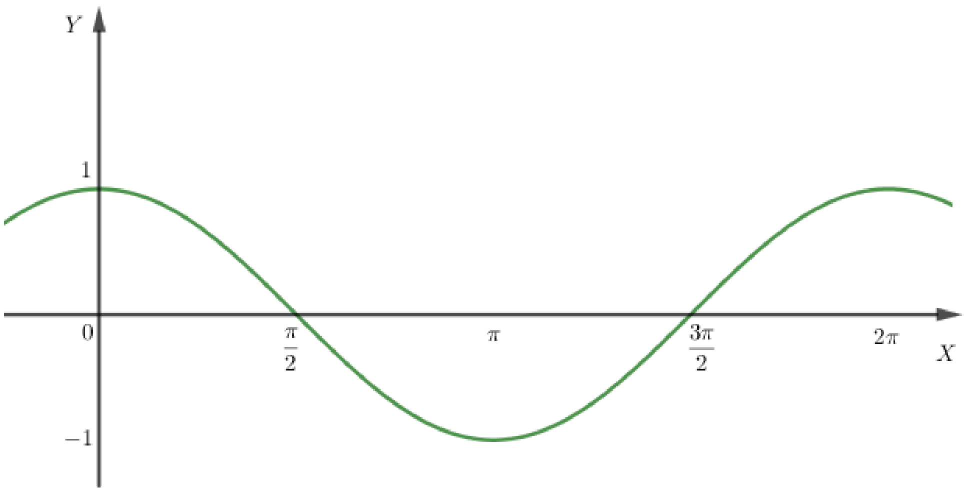


Figura 1.4.13

Definição 1.4.21 *[2] Definimos a Função Tangente como a função* f *que faz corresponder o número real* $f(x) = tg(x)$.

O domínio da função tangente são todos os números reais x para os quais $cos(x) \neq 0$. Visto que $tg(x) = \dfrac{sen(x)}{cos(x)}$, temos que $cos(x) = 0$ quando x for $\pm\dfrac{\pi}{2}, \pm\dfrac{3\pi}{2}, \pm\dfrac{5\pi}{2}, \ldots$, ou seja, quando $x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ segue que $D(f) = \{x \in \mathbb{R}; x \neq \dfrac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$.

O gráfico da função $y = tg(x)$ está representado na Figura 1.4.14.

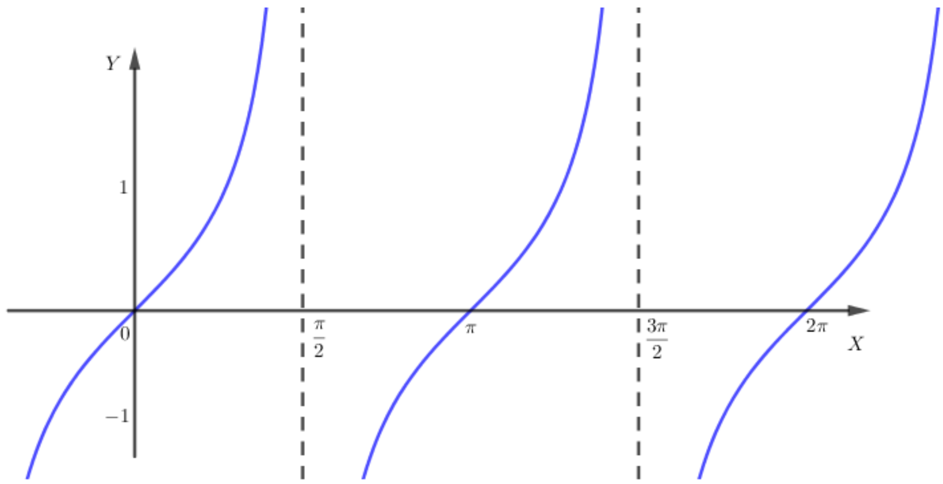


Figura 1.4.14

A função tangente é periódica e seu período é π, visto que

$$tg(x+\pi) = \frac{sen(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-sen(x)}{-\cos(x)} = tg(x).$$

Definição 1.4.22 *[2] Definimos a Função Secante como a função f que faz corresponder o número real $y = sec(x)$.*

O domínio da função secante é igual ao domínio da função tangente, visto que $sec(x) = \dfrac{1}{cosx}$.

A função $f(x) = sec(x)$ é periódica e seu período é 2π, visto que

$$sec(x+2\pi) = \frac{1}{cos(x+2\pi)} = \frac{1}{cosx} = sec(x).$$

O gráfico da função $f(x) = \sec(x)$ está representado na Figura 1.4.15.

Definição 1.4.23 *[2] Definimos a Função Cossecante como a função f que faz corresponder o número real $y = cosec(x)$.*

O domínio da função cossecante é o conjunto de todos os números reais x para os quais $sen(x) \neq 0$, visto que $cosec(x) = \dfrac{1}{sen x}$. Como $sen(x) = 0$ quando x for $0, \pi, 2\pi, \ldots$, ou seja, quando $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, segue que $D(f) = \{x \in \mathbb{R}; x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$. A função cossecante é periódica e seu período é 2π, pois

$$cosec(x + 2\pi) = \frac{1}{sen(x + 2\pi)} = \frac{1}{sen(x)} = cosec(x).$$

O gráfico da função $f(x) = cosec(x)$ está representado na Figura 1.4.16.

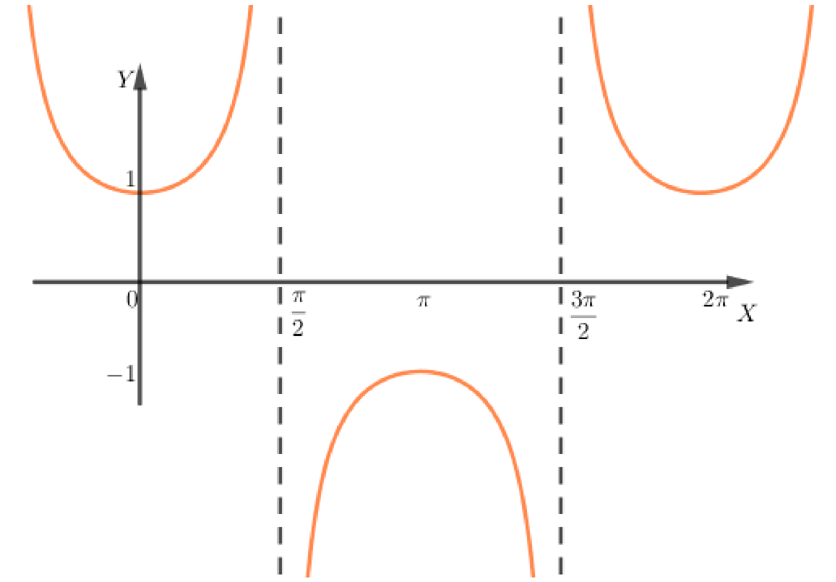


Figura 1.4.15

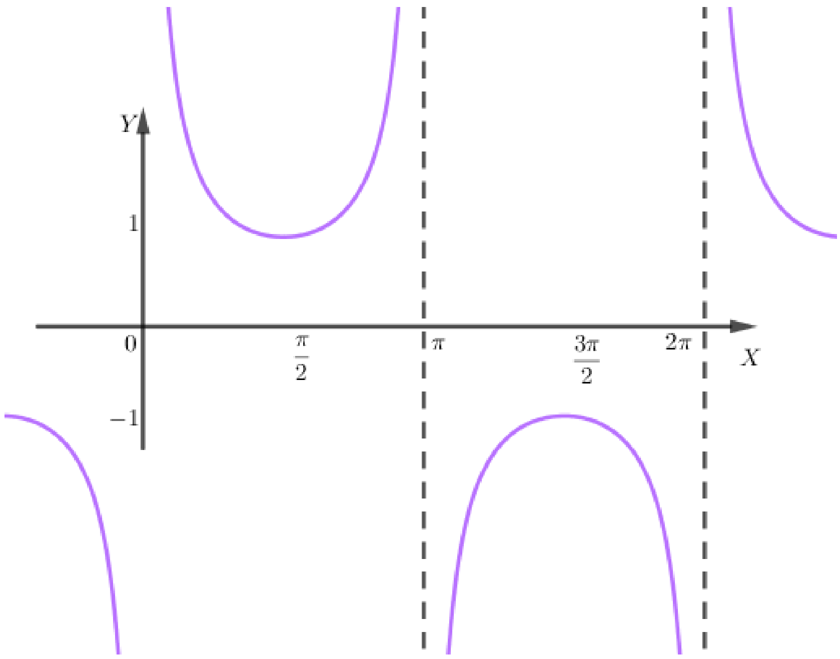


Figura 1.4.16

2

LIMITE DE FUNÇÕES

A noção intuitiva de limite está ligada a várias ideias, sendo que a principal delas é a de **tendência**. Quando dizemos que x tende a um determinado valor a, do domínio de uma dada função, significa intuitivamente que os valores de x se aproximam de a.

Na referência [5] é trabalhado, mesmo que minimamente, o conceito de limite na soma dos infinitos termos de uma Progressão Geométrica Infinita. Nossa intenção é dar um suporte maior para que o professor de matemática possa trabalhar, de fato, essa situação de aprendizagem e apresentar-lhe outras situações nas quais o mesmo possa se aprofundar um pouco mais no conceito de limite. Conceito esse muito trabalhado ao longo dos cursos superiores e nos quais os alunos apresentam muitas dificuldades.

Para compreender melhor a noção de limite, considere o exemplo abaixo:

2.1 O CONCEITO DE LIMITE

Exemplo 2.1.1 *Seja a função f definida pela expressão a seguir:*

$$f(x) = \frac{(3x-1)(x+1)}{x+1}$$

Note que a função f está definida para todo x real, exceto para $x = -1$. Logo, se $x \neq -1$ podemos dividir o numerador e o denominador de f por $(x+1)$, obtendo assim:

$$f(x) = 3x - 1, \ x \neq -1.$$

Vamos estudar o gráfico de f quando x se aproxima, isto é, tende a -1, porém nunca é igual a -1, conforme Figura 2.1.1.

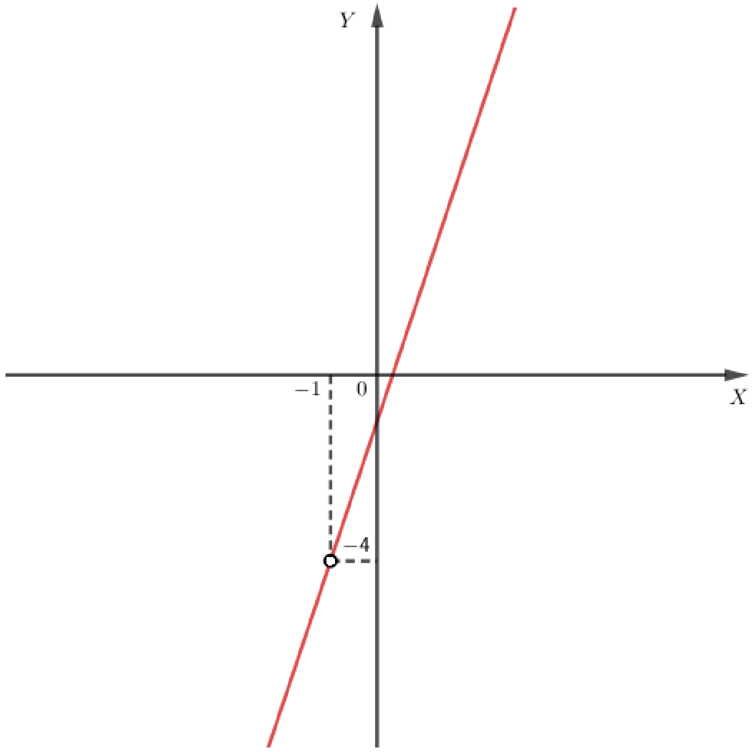


Figura 2.1.1

Observe que quando x se aproxima de -1, $f(x)$ se aproxima de -4. Simbolicamente, vamos representar essa situação da seguinte forma:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} (3x - 1) = -4$$

O limite da função $f(x)$ quando x se aproxima de -1 é -4, ou ainda, o limite quando x tende a -1 é -4. Isto significa que o valor da expressão $3x - 1$ aproxima-se de -4 à medida que x aproxima-se de -1.
Vamos considerar os valores de x cada vez mais próximos de -1, com $x < -1$ e vamos observar o que está acontecendo com os valores de $f(x)$ conforme o Quadro 2.1.1 a seguir:

x < -1	-2	-1,6	-1,4	-1,1	-1,05	-1,005	-1,001	-1,0001
f(x) = 3x -1	-7	-5,8	-5,2	-4,3	-4,15	-4,015	-4,003	-4,0003

Quadro 2.1.1

Vamos agora considerar que a variável x aproxima-se cada vez mais de -1, com $x > -1$ e observar no Quadro 2.1.2 o que está acontecendo com os valores de $f(x)$.

x > -1	0	-0,4	-0,6	-0,9	-0,99	-0,999	-0,9995	-0,9999
f(x) = 3x -1	-1	-2,2	-2,8	-3,7	-3,97	-3,997	-3,9985	-3,9997

Quadro 2.1.2

Exemplo 2.1.2 *A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 3$ tende para 5, quando $x \to 4$ e escrevemos:*

$$\lim_{x \to 4} \left(\frac{1}{2}x + 3 \right) = 5.$$

A situação é ilustrada pelos Quadros 2.1.3 e 2.1.4 e Figura 2.1.2 (gráfico da função f).

x	5	4,5	4,1	4,01	4,001	4,0001	...
y	5,5	5,25	5,05	5,005	5,0005	5,00005	...

Quadro 2.1.3

x	3	3,5	3,9	3,99	3,999	3,9999	...
y	4,5	4,75	4,95	4,995	4,9995	4,99995	...

Quadro 2.1.4

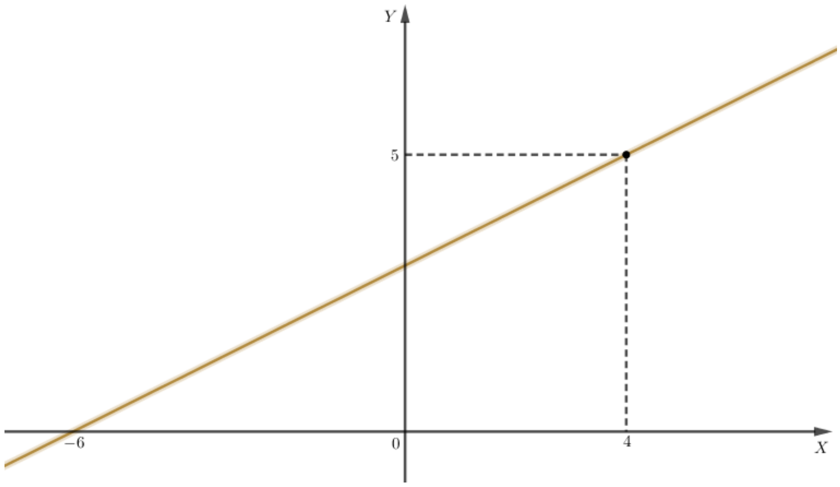


Figura 2.1.2

Podemos observar no Exemplo 2.1.2 que, à medida que tomamos valores de x cada vez mais próximos de 4 ($x \longrightarrow 4$), os valores de y se aproximam cada vez mais de 5 ($y \longrightarrow 5$), independentemente da sucessão de valores tomados.
Podemos observar que é possível tornar y tão próximo de 5 quanto desejamos, para isso basta escolhermos x suficientemente próximo de 4, com $x \neq 4$.
Matematicamente, podemos traduzir isso da seguinte forma:

$$|y - 5| < \epsilon$$

sendo ϵ um número positivo qualquer, tão pequeno quanto se possa imaginar.
A ideia quando tomamos x suficientemente próximo de 4 $(x \neq 4)$, significa que deve existir um intervalo aberto de raio $\sigma > 0$ e centro $a = 4$, tal que se $x \neq 4$ variar nesse intervalo, ou seja, $0 < |x - 4| < \sigma$, então deve valer que $|y - 5| < \epsilon$.
Uma ilustração geométrica do que está acontecendo é apresentada na Figura 2.1.3.

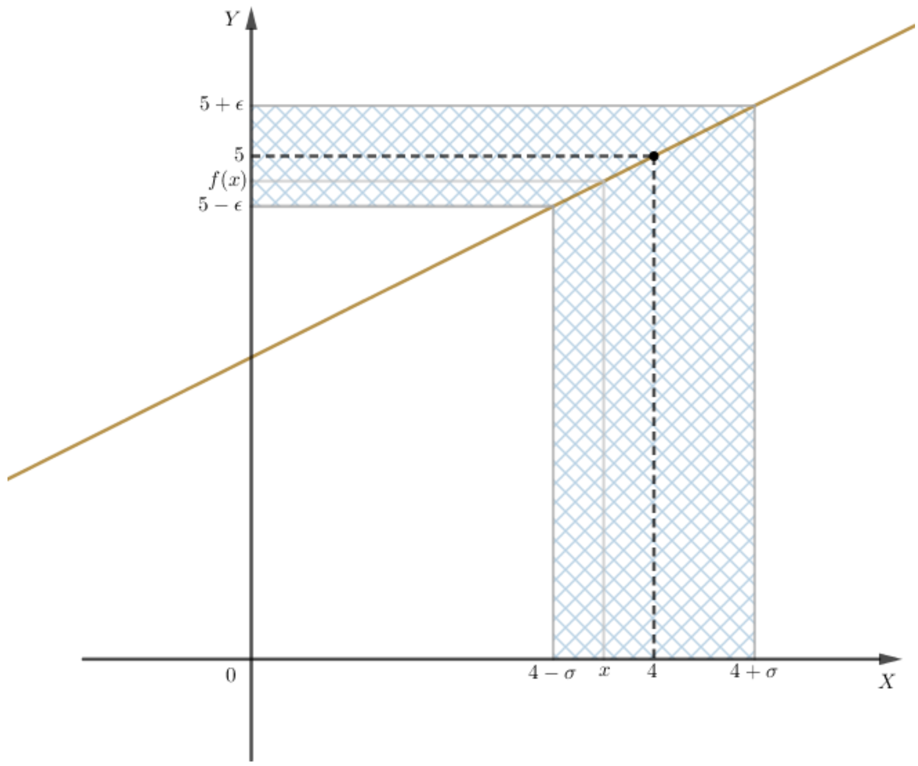


Figura 2.1.3

Definição 2.1.1 *[2] Dizemos que uma função $f(x)$ tem limite L, quando x tende para a, se é possível tornar $f(x)$ arbitrariamente próximo de L, desde que tomemos valores de x, $x \neq a$ suficientemente próximos de a.*

De maneira formal, temos:
Seja f definida num intervalo aberto I, contendo a, exceto, possivelmente, no próprio a. Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x aproxima-se de a é L e denotamos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

se, para todo $\epsilon > 0$, existe um $\sigma > 0$, tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ quando $0 < |x - a| < \sigma$.

Exemplo 2.1.3

(i) $\lim_{x \to 1} 3x - 2 = 1.$

Demonstração:
De acordo com a Definição 2.1.1 devemos mostrar que, para todo $\epsilon > 0$, existe $\sigma > 0$, tal que $|(3x-2)-1| < \epsilon$ quando $0 < |x-1| < \sigma$.
Assim, temos:

$$|(3x-2)-1| < \epsilon \Leftrightarrow |3x-2-1| < \epsilon \Leftrightarrow |3x-3| < \epsilon \Leftrightarrow |3(x-1)| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow 3|(x-1)| < \epsilon \Leftrightarrow |(x-1)| < \tfrac{\epsilon}{3}$$

Tomando $\sigma = \frac{\epsilon}{3}$, temos que $|(3x-2)-1| < \epsilon$ sempre que $0 < |x-1| < \sigma$.
Portanto, $\lim_{x \to 1} 3x - 2 = 1.$ ■

(ii) $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$

Demonstração:
Vamos mostrar que dado $\epsilon > 0$ existe $\sigma > 0$, tal que $|x^2 - 9| < \epsilon$ sempre que $0 < |x-3| < \sigma$. Assim, temos:

$$|x^2 - 9| < \epsilon \Leftrightarrow |x-3||x+3| < \epsilon.$$

É necessário substituir $|x+3|$ por um valor constante. Sendo assim, vamos supor $0 < \sigma \leq 1$, e então, de $0 < |x-3| < \sigma$, temos as seguintes desigualdades equivalentes:

$$|x-3| < 1 \Leftrightarrow -1 < x-3 < 1 \Leftrightarrow 2 < x < 4 \Leftrightarrow 5 < x+3 < 7$$

Portanto, $|x+3| < 7$, daí, $|x-3||x+3| < \epsilon$ implica $|x-3| < \dfrac{\epsilon}{7}$. Escolhendo $\sigma = min(\epsilon/7, 1)$, temos que se $|x-3| < \sigma$, então

$$|x^2 - 9| = |x-3||x+3| < \sigma\, 7 \leq \frac{\epsilon}{7}\, 7 = \epsilon.$$

Logo, $\lim_{x \to 3} x^2 = 9.$ ■

Proposição 2.1.1 *[2] (Unicidade do Limite)*
Se $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$ então $L_1 = L_2$.

Demonstração:
Seja $\epsilon > 0$ arbitrário.
Como $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$, existe $\sigma_1 > 0$ tal que $|f(x) - L_1| < \epsilon/2$ sempre que $0 < |x-a| < \sigma_1$.

Como $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$, existe $\sigma_2 > 0$ tal que $|f(x) - L_2| < \epsilon/2$ sempre que $0 < |x - a| < \sigma_2$.

Seja $\sigma = min\{\sigma_1, \sigma_2\}$. Então $|f(x) - L_1| < \epsilon/2$ e $|f(x) - L_2| < \epsilon/2$ sempre que $0 < |x - a| < \sigma$.

Seja x tal que $0 < |x - a| < \sigma$. Então, podemos escrever

$$|L_1 - L_2| = |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \leq |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Como ϵ é arbitrário, temos $|L_1 - L_2| = 0$, e portanto, $L_1 = L_2$. ∎

Proposição 2.1.2 *[2]*
Se a, m e n são números reais, então

$$\lim_{x \to a} mx + n = ma + n.$$

Demonstração:
Caso (1): $m \neq 0$
De acordo com a Definição 2.1.1, dado $\epsilon > 0$, devemos mostrar que existe $\sigma > 0$, tal que $|(mx + n) - (ma + n)| < \epsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \sigma$.
Veja que as desigualdades são equivalentes:

$$|(mx + n) - (ma + n)| < \epsilon \Leftrightarrow |mx - ma| < \epsilon \Leftrightarrow |m||x - a| < \epsilon \Leftrightarrow |x - a| < \frac{\epsilon}{|m|}.$$

Note que a última desigualdade sugere a escolha $\sigma = \frac{\epsilon}{|m|}$. De fato, se $\sigma = \frac{\epsilon}{|m|}$, temos

$$|(mx + n) - (ma + n)| = |m||x - a| < \epsilon < |m| \cdot \frac{\epsilon}{|m|},$$

sempre que $0 < |x - a| < \sigma$ e, portanto,

$$\lim_{x \to a} mx + n = ma + n.$$

Caso (2) : $m = 0$
Se $m = 0$, então $|(mx + n) - (ma + n)| = 0$ para todos os valores de x.
Assim, tomando qualquer valor de $\sigma > 0$, a definição de limite é satisfeita.
Portanto, $\lim_{x \to a} mx + n = ma + n$, para quaisquer a, m e $n \in \mathbb{R}$. ∎

Proposição 2.1.3 *[2] Se $\lim_{x \to a} f(x)$ e $\lim_{x \to a} g(x)$ existem, e c é um número real qualquer, então:*

(i) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$.

(ii) $\lim\limits_{x \to a} cf(x) = c \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

(iii) $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \; \lim\limits_{x \to a} g(x)$.

(iv) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$, com $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$.

(v) $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^n = [\lim\limits_{x \to a} f(x)]^n$ para $n \in \mathbb{Z}_+$.

(vi) $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$, se $\lim\limits_{x \to a} f(x) > 0$ e n inteiro positivo ou se $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leq 0$ e n um inteiro positivo ímpar.

(vii) $\lim\limits_{x \to a} ln[f(x)] = ln[\lim\limits_{x \to a} f(x)]$, se $\lim\limits_{x \to a} f(x) > 0$.

(viii) $\lim\limits_{x \to a} cos[f(x)] = cos[\lim\limits_{x \to a} f(x)]$.

(ix) $\lim\limits_{x \to a} sen[f(x)] = sen[\lim\limits_{x \to a} f(x)]$.

(x) $\lim\limits_{x \to a} e^{f(x)} = e^{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$.

Vamos provar os itens (i) e (v).

Demonstração:

(i) Vamos provar a soma, sendo que para a subtração a demonstração é análoga.

Sejam $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$ e $\epsilon > 0$. Devemos provar que existe $\sigma > 0$ tal que

$$|(f(x) + g(x)) - (L + M)| < \epsilon \text{ sempre que } 0 < |x - a| < \sigma.$$

Como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ e $\epsilon/2 > 0$ segue que existe $\sigma_1 > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon/2$ sempre que $0 < |x - a| < \sigma_1$.

Como $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$, segue que existe $\sigma_2 > 0$ tal que $|g(x) - M| < \epsilon/2$ sempre que $0 < |x - a| < \sigma_2$.

Seja $\sigma = min\{\sigma_1, \sigma_2\}$. Logo, $\sigma \leq \sigma_1$ e $\sigma \leq \sigma_2$ e assim , se $0 < |x - a| < \sigma$, então $|f(x) - L| < \epsilon/2$ e $|g(x) - M| < \epsilon/2$.

Assim,

$$\begin{aligned}|(f(x)+g(x))-(L+M)| &= |(f(x)-L)+(g(x)-M)| \\ &\leq |f(x)-L|+|g(x)-M| \\ &< \epsilon/2+\epsilon/2=\epsilon,\end{aligned}$$

sempre que $0<|x-a|<\sigma$ e, portanto,

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = L+M = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x).$$

■

(v) $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$ para $n \in \mathbb{Z}_+$.
Vamos demonstrar essa propriedade por indução sobre n.

Suponhamos $\lim_{x\to a}[f(x)] = L$.
(a) Base da indução ($n=1$)
É claro que é válida para $n=1$, visto que $\lim_{x\to a}[f(x)]^1 = L^1$, logo $\lim_{x\to a}[f(x)] = L$.

(b) Passo indutivo
Suponhamos que $\lim_{x\to a}[f(x)^n] = L^n$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$ seja válida. Vamos provar que a mesma é válida para $n+1$.

Temos que $\lim_{x\to a}([f(x)])^{n+1} = \lim_{x\to a}[f(x)^n \cdot f(x)]$, pelo item (iii) da Proposição 2.1.3 , segue que

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{n+1} = \lim_{x\to a}[f(x)]^n \cdot f(x) = \lim_{x\to a} f(x)^n \cdot \lim_{x\to a} f(x) = L^n \cdot L = L^{n+1}.$$

Portanto, $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = L^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$ para $n \in \mathbb{Z}_+$. ■

Exemplo 2.1.4

(i) $\lim_{x\to 2} x^2+3x-4$.

Usando as Proposições 2.1.2 e 2.1.3 temos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} x^2+3x-4 &= \lim_{x\to 2} x^2 + \lim_{x\to 2} 3x - \lim_{x\to 2} 4 = \lim_{x\to 2} x^2 + 3\cdot\lim_{x\to 2} x - \lim_{x\to 2} 4 \\ &= 2^2+3\cdot 2-4 = 6.\end{aligned}$$

(ii) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$.

Neste caso, não podemos aplicar a propriedade do quociente, visto que $\lim_{x\to 1} x-1 = 0$.

No entanto, podemos notar que $x^2-1=(x-1)(x+1)$. *Sendo assim, temos que para* $x \neq 1$,

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1,$$

assim,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2.$$

Proposição 2.1.4 *[3] Se $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ para todo x em um intervalo contendo a, exceto possivelmente em $x = a$, e se*

$$\lim_{x\to a} f(x) = L = \lim_{x\to a} g(x)$$

então,

$$\lim_{x\to a} h(x) = L.$$

Demonstração:

Dado $\epsilon > 0$, como $\lim_{x\to a} f(x) = L$, existe $\sigma_1 > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ sempre que $0 < |x-a| < \sigma_1$. Como $\lim_{x\to a} g(x) = L$, existe $\sigma_2 > 0$ tal que $|g(x) - L| < \epsilon$ sempre que $0 < |x-a| < \sigma_2$. Seja $\sigma = min\{\sigma_1, \sigma_2\}$.

Então, se $0 < |x-a| < \sigma$ temos que $|f(x) - L| < \epsilon$ e $|g(x) - L| < \epsilon$, isto é, $L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$ e $L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon$. Pela hipótese, temos que $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ e se $0 < |x-a| < \sigma$, então,

$$L - \epsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < L + \epsilon,$$

ou seja, $L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon$. Portanto, se $0 < |x-a| < \sigma$, temos que $|h(x) - L| < \epsilon$ e assim, $\lim_{x\to a} h(x) = L$.

■

A Figura 2.1.4 representa a situação descrita na Proposição 2.1.4. Esse resultado é conhecido como **Teorema do Confronto** ou **Teorema do Sanduíche**.

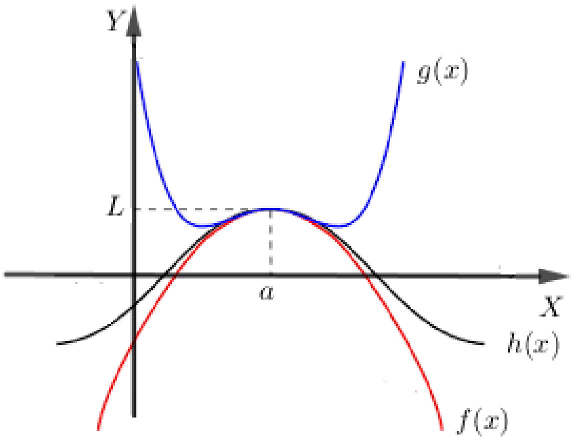


Figura 2.1.4

2.2 LIMITES LATERAIS

Definição 2.2.1 *[3] Seja f uma função, $\boldsymbol{p}$ um número real e suponhamos que exista $\boldsymbol{b}$ tal que $(p, b) \subset D(f)$.*

Definimos:

$$\lim_{x \to p^+} f(x) = L,$$

se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\sigma > 0$ tal que $p < x < p + \sigma \Longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon$. O número L, quando existe, denomina-se limite lateral à direita de f, em $\boldsymbol{p}$.

Definição 2.2.2 *[3] Seja f uma função, $\boldsymbol{p}$ um número real e suponhamos que exista $\boldsymbol{a}$ tal que $(a, p) \subset D(f)$.*

Definimos:

$$\lim_{x \to p^-} f(x) = L,$$

se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\sigma > 0$ tal que $p - \sigma < x < p \Longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon$. O número L, quando existe, denomina-se limite lateral à esquerda de f, em $\boldsymbol{p}$.

Exemplo 2.2.1

(i) Seja a função $f(x) = 2 - \sqrt{x-4}$. Determine, se possível, $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x)$.
Note que a função f só é definida para $x \geq 4$. Logo, não existe $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x)$.
Para $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x)$ temos:

$$\lim_{x \to 4^+} 2 - \sqrt{x-4} = \lim_{x \to 4^+} 2 - \lim_{x \to 4^+} \sqrt{x-4} = 2 - \sqrt{\lim_{x \to 4^+} x - 4} = 2 - 0 = 2$$

Teorema 2.2.1 *[3] Se f é definida em um intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente em a, então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ se, e somente se, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$.*

Demonstração:

Suponhamos que $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$. Então, dado $\epsilon > 0$ arbitrário, existe $\sigma_1 > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ sempre que $a < x < a + \sigma_1$ e existe $\sigma_2 > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ sempre que $a - \sigma_2 < x < a$.

Seja $\sigma = min\{\sigma_1, \sigma_2\}$. Então, $a - \sigma_2 \leq a - \sigma < a < a + \sigma \leq a + \sigma_1$, e, portanto, se $x \neq a$, temos que $|f(x) - L| < \epsilon$.

Equivalentemente, $|f(x) - L| < \epsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \sigma$ e assim, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

A prova de que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ implica $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$ segue diretamente da definição dos limites envolvidos. ∎

2.3 LIMITES: INFINITOS E NO INFINITO

Nesta seção estudaremos o comportamento das funções quando x ou $f(x)$ tendam a um número muito grande ou pequeno.

Definição 2.3.1 *[2] Seja f uma função definida no intervalo aberto $(a, +\infty)$. Escrevemos $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$, quando o número L satisfaz à seguinte condição:*

Para qualquer $\epsilon > 0$, existe $A > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ sempre que $x > A$.

Definição 2.3.2 *[2] Seja f uma função definida no intervalo aberto $(-\infty, b)$. Escrevemos $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$, quando o número L satisfaz à seguinte condição:*

Para qualquer $\epsilon > 0$, existe $B < 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ sempre que $x < B$.

Teorema 2.3.1 *[2] Se n é um número inteiro positivo, então:*

(i) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0.$

(ii) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0.$

Demonstração:

(i) Devemos provar que, para qualquer $\epsilon > 0$, existe $A > 0$, tal que $\left| \dfrac{1}{x^n} - 0 \right| < \epsilon$ sempre que $x > A$.

As seguintes desigualdades são equivalentes:

$$\left| \frac{1}{x^n} - 0 \right| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{|x|^n} < \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{|x|^n}} < \sqrt[n]{\epsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{|x|} < \sqrt[n]{\epsilon} \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{\sqrt[n]{\epsilon}}.$$

A última desigualdade nos sugere a escolha de A, ou seja, $A = \dfrac{1}{\sqrt[n]{\epsilon}}$.

Temos que $x > A$ implica $\left| \dfrac{1}{x^n} - 0 \right| < \epsilon$ e, assim, $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0.$

A demonstração para o item (ii) é análoga.

■

Definição 2.3.3 *[2] Seja f uma função definida num intervalo aberto contendo a, exceto, possivelmente, em $x = a$. Dizemos que:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty.$$

se para qualquer $A > 0$, existe $\sigma > 0$ tal que $f(x) > A$, sempre que $0 < |x - a| < \sigma$.

Definição 2.3.4 *[2] Seja f uma função definida num intervalo aberto contendo a, exceto, possivelmente, em $x = a$. Dizemos que:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty.$$

se para qualquer $B < 0$, existe $\sigma > 0$ tal que $f(x) < B$, sempre que $0 < |x - a| < \sigma$.

Proposição 2.3.1 *[2] **(Propriedades dos Limites Infinitos)***
Na tabela 1, 0^+ indica que o limite é zero e a função se aproxima à direita de zero, ou seja, por valores positivos. Já 0^-, indica que a função se aproxima à esquerda de zero, isto é, por valores negativos.

	$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$h(x) =$	$\lim h(x)$	simbolicamente
01	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$f(x) + g(x)$	$\pm\infty$	$\pm\infty \pm \infty = \pm\infty$
02	$+\infty$	$+\infty$	$f(x) - g(x)$	?	$+\infty - \infty$ é indeterminação
03	$+\infty$	k	$f(x) + g(x)$	$+\infty$	$+\infty + k = +\infty$
04	$-\infty$	k	$f(x) + g(x)$	$-\infty$	$-\infty + k = -\infty$
05	$+\infty$	$+\infty$	$f(x).g(x)$	$+\infty$	$(+\infty).(+\infty) = +\infty$
06	$+\infty$	$-\infty$	$f(x).g(x)$	$-\infty$	$(+\infty).(-\infty) = -\infty$
07	$+\infty$	$k > 0$	$f(x).g(x)$	$+\infty$	$+\infty.\ k = +\infty,\ k > 0$
08	$+\infty$	$k < 0$	$f(x).g(x)$	$-\infty$	$+\infty.\ k = -\infty,\ k < 0$
09	$\pm\infty$	0	$f(x).g(x)$	?	$\pm\infty.\ 0$ é indeterminação
10	k	$\pm\infty$	$\frac{f(x)}{g(x)}$	0	$\frac{k}{\pm\infty} = 0$
11	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\frac{f(x)}{g(x)}$	?	$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ é indeterminação
12	$k > 0$	0^+	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$+\infty$	$\frac{k}{0^+} = +\infty,\ k > 0$
13	$+\infty$	0^+	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$+\infty$	$\frac{+\infty}{0^+} = +\infty$
14	$k > 0$	0^-	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$-\infty$	$\frac{k}{0^-} = -\infty,\ k > 0$
15	$+\infty$	0^-	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$-\infty$	$\frac{+\infty}{0^-} = -\infty$
16	0	0	$\frac{f(x)}{g(x)}$	?	$\frac{0}{0}$ é indeterminação

Tabela 1

Demonstração:

(01) Sejam f e g tais que $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$ e $h(x) = f(x) + g(x)$. Devemos provar que $\lim_{x \to a} h(x) = +\infty$, ou seja, dado $A > 0$ existe $\sigma > 0$ tal que $h(x) > A$

sempre que $a < |x - a| < \sigma$. *Dado* $A > 0$, *como* $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, *existe* $\sigma_1 > 0$ *tal que* $f(x) > A/2$ *sempre que* $0 < |x - a| < \sigma_1$. *Analogamente,* $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$, *logo, existe* $\sigma_2 > 0$ *tal que* $g(x) > A/2$ *sempre que* $0 < |x - a| < \sigma_2$. *Seja* $\sigma = min\{\sigma_1, \sigma_2\}$. *Segue, então que* $h(x) = f(x) + g(x) > A/2 + A/2 = A$ *sempre que* $0 < |x - a| < \sigma$ *e assim,* $\lim_{x \to a} h(x) = +\infty$

■

(03) Como $\lim_{x \to a} g(x) = k$, *então* $g(x)$ *é limitada numa vizinhança de a. Portanto, para algum* $M > 0$ *temos que existe* $\sigma_1 > 0$ *tal que* $|g(x)| < M$ *sempre que* $0 < |x - a| < \sigma_1$. *Assim sendo, temos que existe* $\sigma_1 > 0$ *tal que* $-M < g(x) < M$ *sempre que* $|x - a| < \sigma_1$. *Logo, existe* $\sigma_1 > 0$ *tal que* $g(x) > -M$ *sempre que* $|x - a| < \sigma_1$ *Como* $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, *pela definição de limite infinito, temos para cada* $N > 0$, *tomando* $N_1 = N + M$, *existe* $\sigma_2 > 0$ *tal que* $f(x) > N_1 = N + M$ *sempre que* $|x - a| < \sigma_2$. *Então, para cada* $N > 0$, *existe* $\sigma = min\{\sigma_1, \sigma_2\}$, *tal que* $f(x) + g(x) > -M + (N + M) = N$ *sempre que* $|x - a| < \sigma$. *Donde concluímos, pela definição de limites infinitos, que* $\lim_{x \to a} f(x) + g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = +\infty$

■

(05) Como $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, *pela definição de limites infinitos, para cada* $N > 0$ *, tomando* $N_1 = \sqrt{N} > 0$, *existe* $\sigma_1 > 0$ *tal que* $f(x) > \sqrt{N}$ *sempre que* $|x - a| < \sigma_1$. *Analogamente, como* $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$, *para cada* $N > 0$, *tomando* $N_1 = \sqrt{N} > 0$, *existe* $\sigma_2 > 0$ *tal que* $g(x) > \sqrt{N}$ *sempre que* $|x - a| < \sigma_2$. *Portanto, para cada* $N > 0$, *existe* $\sigma = min\{\sigma_1, \sigma_2\} > 0$ *tal que* $f(x)g(x) > \sqrt{N}\sqrt{N} = N$ *sempre que* $|x - a| > \sigma$. *Donde concluímos, pela definição de limites infinitos, que* $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = +\infty$

■

As demais demonstrações serão omitidas neste texto.

Exemplo 2.3.1

(i) $\lim_{x \to 0} (x^2 + \sqrt{x} + 1/x^3)$.

Temos que,

$$\lim_{x \to 0} (x^2 + \sqrt{x} + 1/x^3) = \lim_{x \to 0} x^2 + \lim_{x \to 0} \sqrt{x} + \lim_{x \to 0} 1/x^3 = 0 + 0 + \infty = +\infty.$$

(ii) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 5}{x + 2}$.

Dividindo o numerador e o denominador por x^2, *temos:*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 5}{x + 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(1 + \dfrac{5}{x^2}\right)}{\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right)} = \frac{\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{5}{x^2}\right)}{\lim_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right)} = +\infty.$$

Teorema 2.3.2 *[3] Se n é um número inteiro positivo qualquer, então:*

(i) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty.$

(ii) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty, & se\ n\ par \\ -\infty, & se\ n\ impar \end{cases}.$

Demonstração:

(i) Devemos mostrar que para qualquer $A > 0$, existe um $\sigma > 0$ tal que $\dfrac{1}{x^n} > A$ sempre que $0 < x < \sigma$. Observe que as desigualdades abaixo são equivalentes, visto que $x > 0$.

$$\frac{1}{x^n} > A \Leftrightarrow x^n < \frac{1}{A} \Leftrightarrow x < \sqrt[n]{\frac{1}{A}}$$

Assim, escolhendo $\sigma = \sqrt[n]{\dfrac{1}{A}}$, temos $\dfrac{1}{x^n} > A$ sempre que $0 < x < \sigma$.

∎

(ii)

- n par:

  Seja n par, isto é, $n = 2k$, com $k \in \mathbb{Z}$. Assim, temos que:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{(x^2)^k} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{(x^k)^2} = +\infty.$$

- n ímpar:

  Seja n ímpar, isto é, $n = 2k + 1$, com $k \in \mathbb{Z}$. Assim, temos:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^{2k+1}} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{(x^2)^k} \cdot \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

∎

Exemplo 2.3.2 *A função $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ tende para 2, quando $x \longrightarrow \pm\infty$ e escrevemos:*

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x+1}{x-1} = 2$$

O gráfico da função f está representado na Figura 2.3.1.

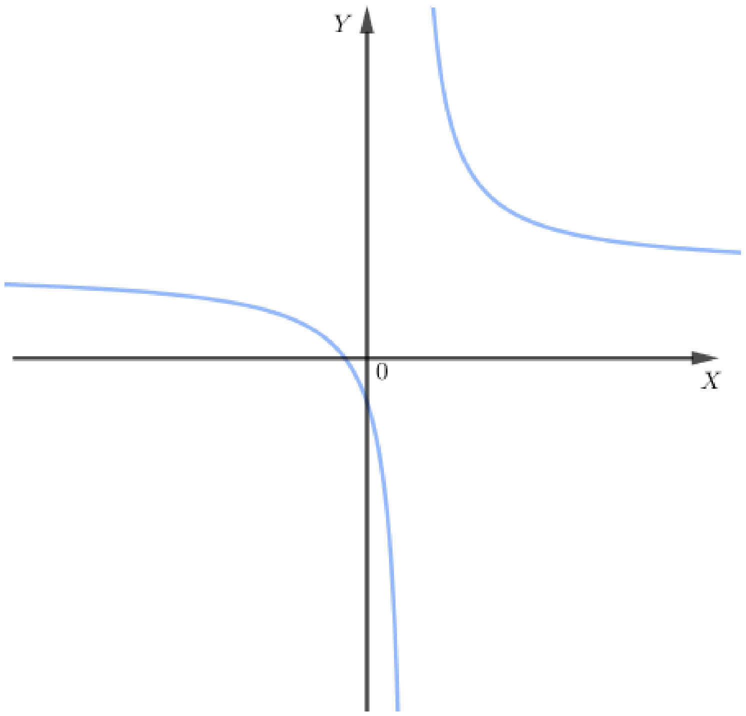


Figura 2.3.1

Exemplo 2.3.3 *A função* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ *tende para o infinito quando* x *tende a* -1 *e escrevemos:*

$$\lim_{x \to -1} \frac{1}{(x+1)^2} = +\infty$$

Veja essa situação ilustrada nos Quadros 2.3.1 e 2.3.2 e na Figura 2.3.2, que é gráfico da função $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$*, abaixo:*

x	-2	-1,5	-1,25	-1,1	-1,01	-1,001	...
y	1	4	16	100	10.000	1.000.000	...

Quadro 2.3.1

x	0	-0,5	-0,75	-0,9	-0,99	-0,999	...
y	1	4	16	100	10.000	1.000.000	...

Quadro 2.3.2

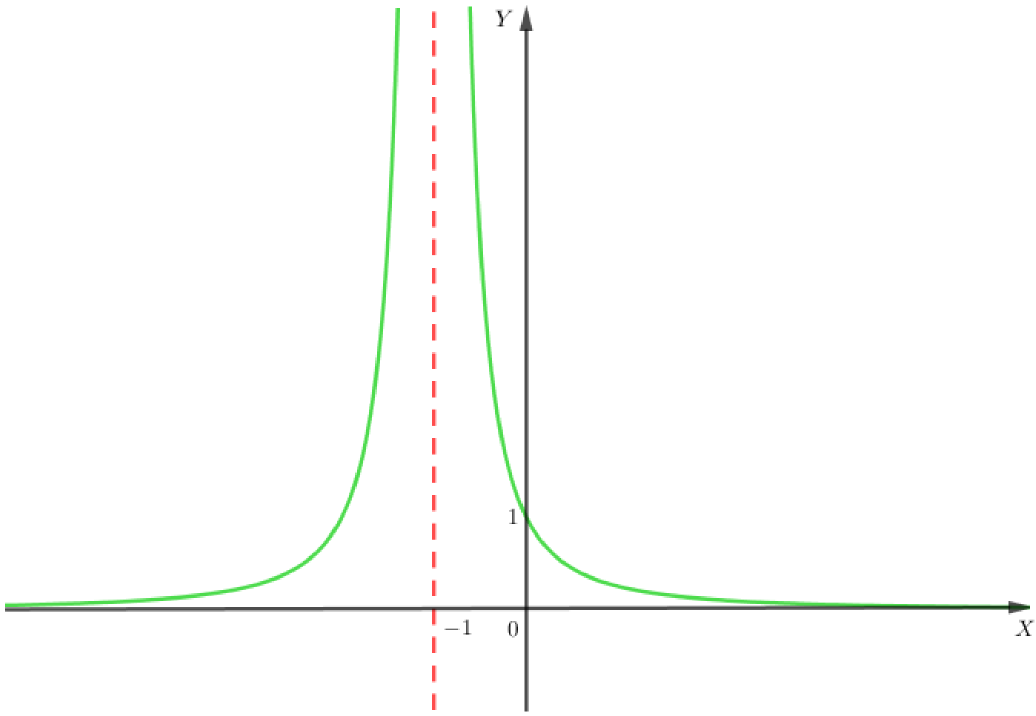


Figura 2.3.2

2.3.1 *Assíntotas*

Dizemos que uma reta é uma assíntota de uma curva quando um ponto ao mover-se ao longo da parte externa da curva se aproxima dessa reta, isto é, a reta assíntota e a curva ficam próximas à medida que x cresce ou decresce.

Na Figura 2.3.3 são representadas algumas assíntotas e algumas curvas que apresentam a propriedade citada acima.

Definição 2.3.5 *[2] A reta $x = a$ é assíntota vertical do gráfico de $y = f(x)$ se pelo menos uma das afirmações a seguir for verdadeira:*

(i) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$

(ii) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$

(iii) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$

(iv) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$

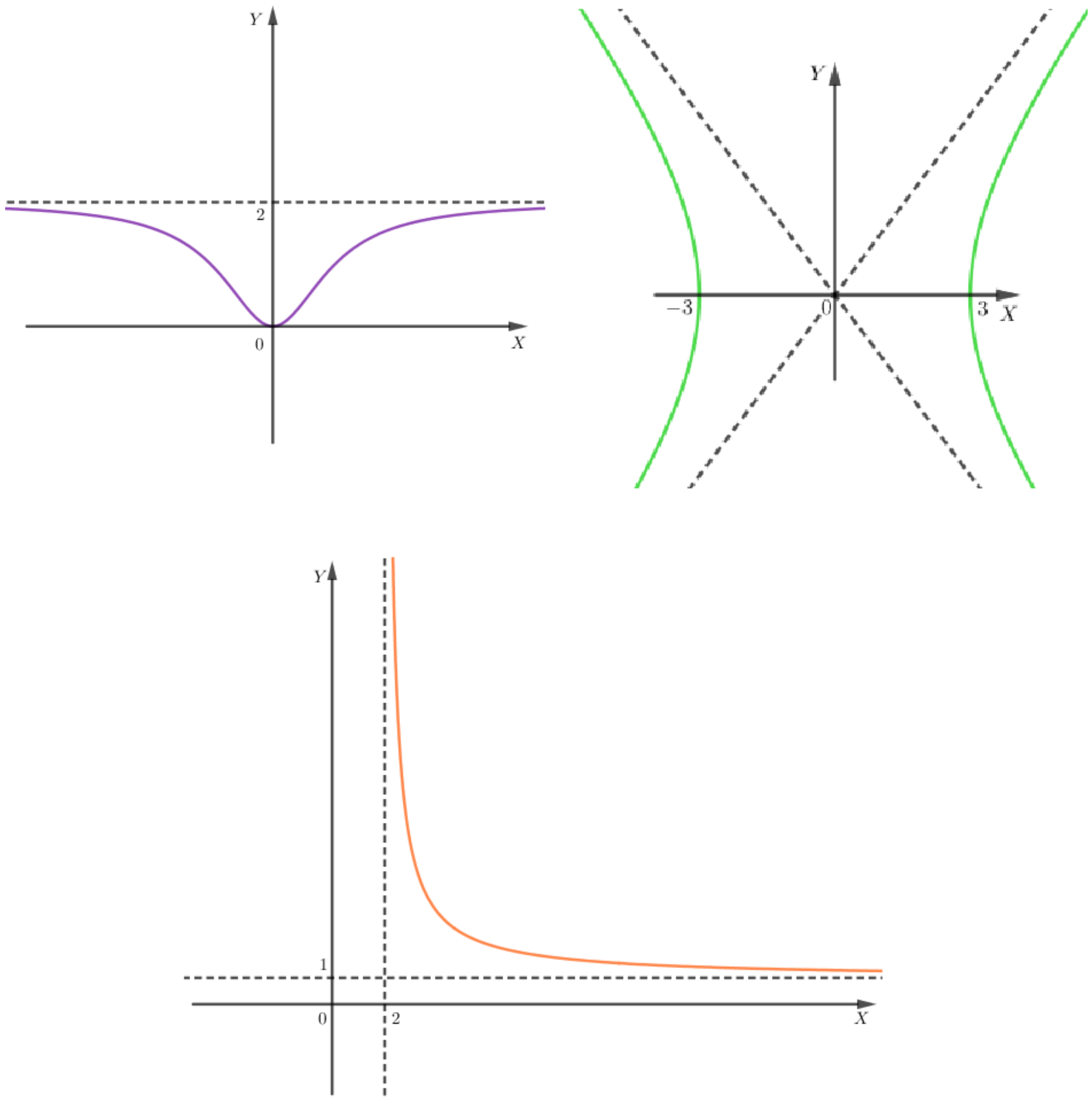


Figura 2.3.3

Exemplo 2.3.4 *A reta $x = 2$ é uma assíntota vertical do gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$.*

De fato, $\displaystyle\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$ *e também* $\displaystyle\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$.

A Figura 2.3.4 ilustra o exemplo acima.

Definição 2.3.6 *[2] A reta $y = b$ é uma assíntota horizontal do gráfico de $y = f(x)$, se pelo menos uma das seguintes propriedades for válida:*

(i) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$

(ii) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$

Exemplo 2.3.5 *As retas $y = 1$ e $y = -1$ são assíntotas horizontais do gráfico de $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{2}}}$. De fato,*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+\dfrac{1}{2}}} = 1 \text{ e } \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+\dfrac{1}{2}}} = -1$$

A Figura 2.3.5 ilustra o exemplo acima.

Definição 2.3.7 *[2] A reta $y = ax+b$ é uma assíntota inclinada do gráfico $y = f(x)$, se pelo menos uma das seguintes propriedades for válida:*

(i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0.$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$

Exemplo 2.3.6 *A reta $y = 3x$ é assíntota inclinada do gráfico de $f(x) = \dfrac{3x^3}{x^2+4}$.*
De fato,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{3x^3}{x^2+4} - 3x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[3x - \frac{12x}{x^2+4} + 3x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[-\frac{12x}{x^2+4}\right] = 0.$$

A Figura 2.3.6 ilustra o exemplo acima.

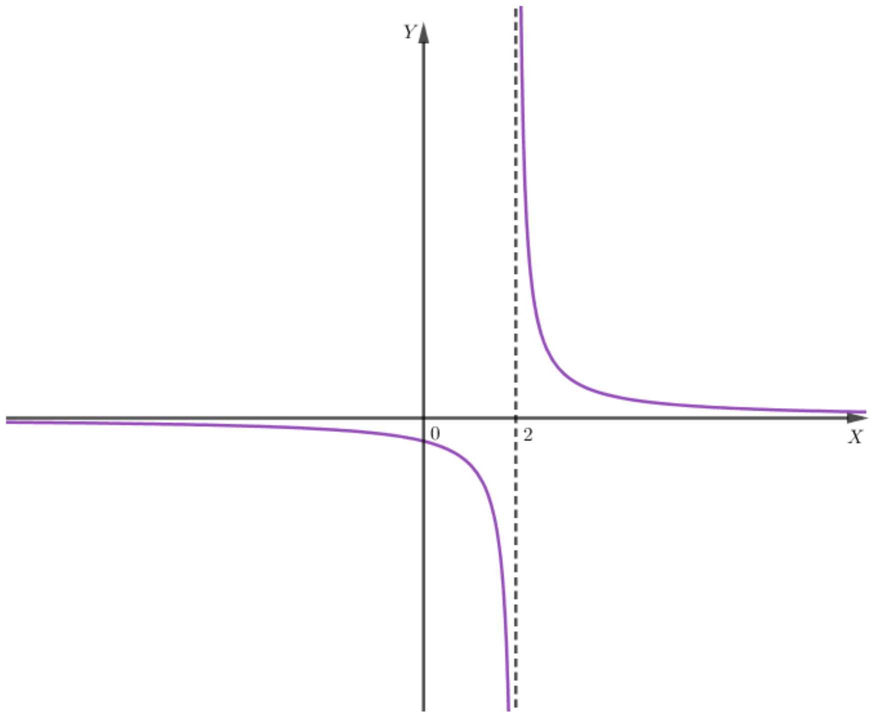


Figura 2.3.4

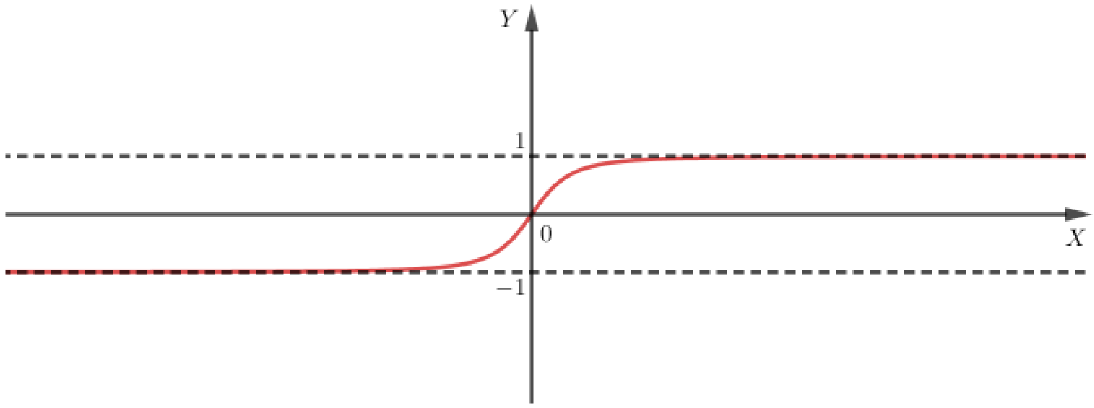


Figura 2.3.5

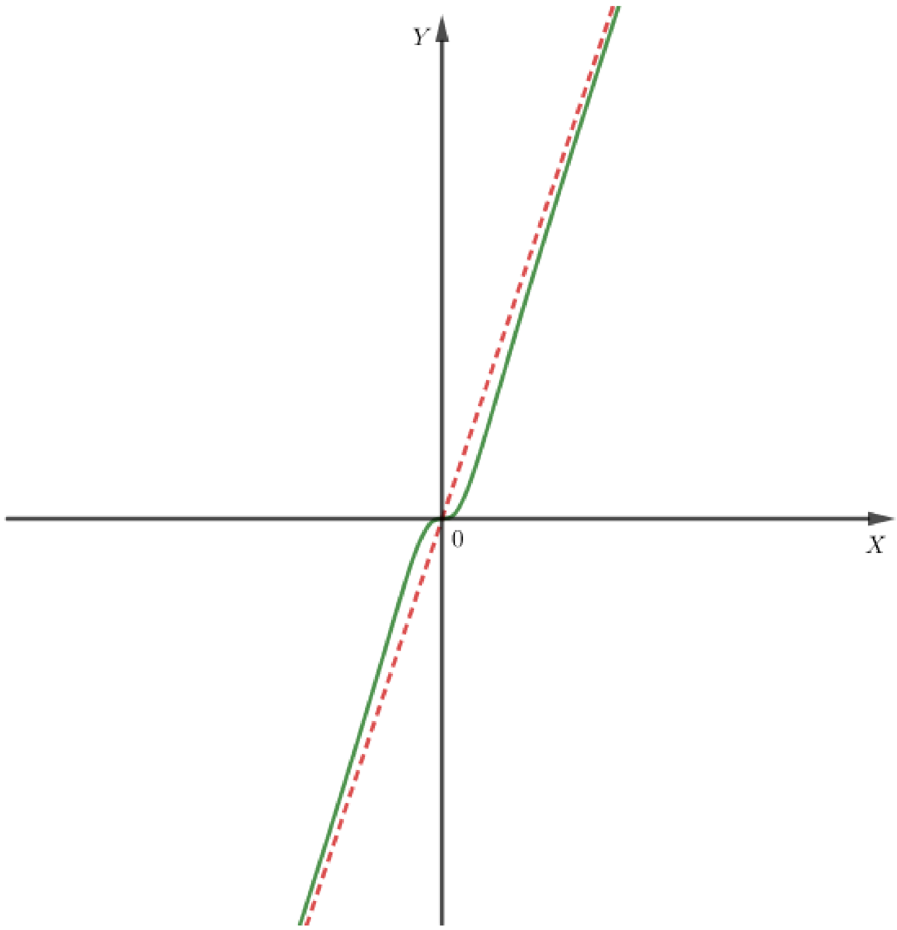


Figura 2.3.6

Os exemplos a seguir ilustram funções que apresentam mais de um tipo de assíntota.

Exemplo 2.3.7 *As retas* $x = -1$ *e* $y = 1$ *são assíntotas vertical e horizontal, respectivamente, do gráfico de* $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

De fato,

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x}{x+1} = -\infty \text{ e } \lim_{x \to -1^-} \frac{x}{x+1} = +\infty$$

Note também que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1} = 1 \text{ e } \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x+1} = 1,$$

o que garante que a reta $x = 1$ é uma assíntota horizontal.

A Figura 2.3.7 ilustra o exemplo acima.

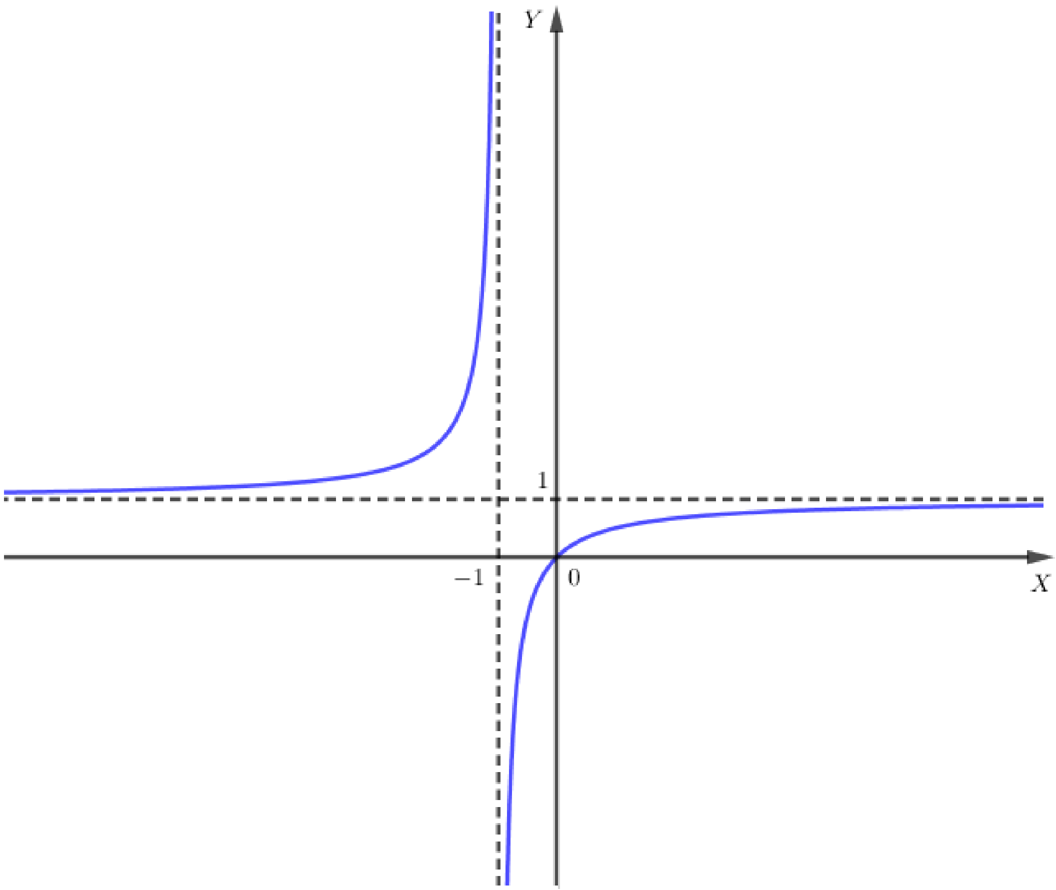


Figura 2.3.7

Exemplo 2.3.8 *As retas $y = \pm\sqrt{8}$ são assíntotas horizontais e a reta $x = 2$ é uma assíntota vertical do gráfico de $f(x) = \dfrac{\sqrt{32x^2+1}}{2x-4}$, conforme Figura 2.3.8.*

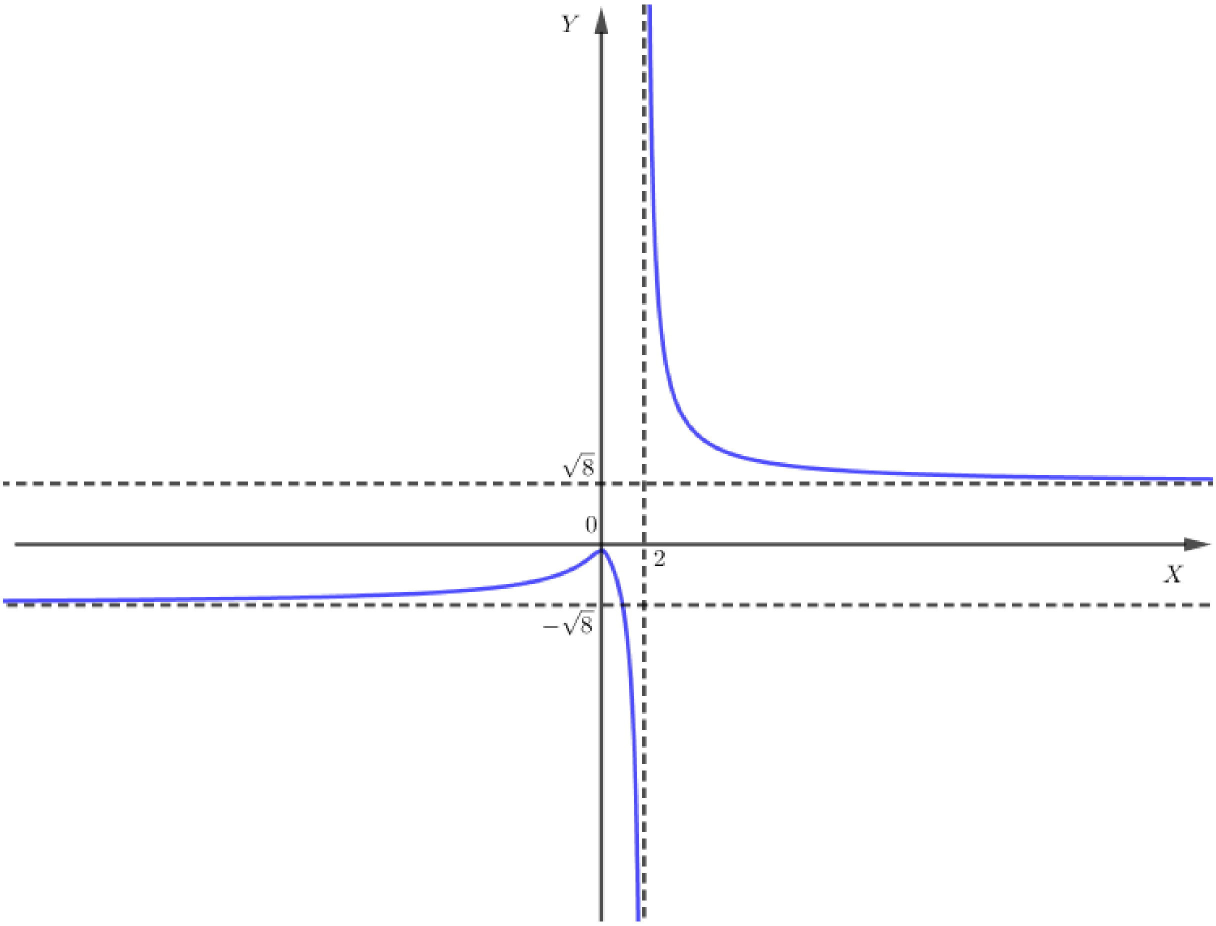


Figura 2.3.8

De fato,

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{32x^2+1}}{2x-4} = +\infty \quad e \quad \lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{32x^2+1}}{2x-4} = -\infty,$$

o que garante que a reta $x = 2$ é uma assíntota vertical do gráfico de f. Além disso, como

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{32x^2+1}}{2x-4} = \sqrt{8} \quad e \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{32x^2+1}}{2x-4} = -\sqrt{8},$$

temos que as retas $y = \sqrt{8}$ e $y = -\sqrt{8}$ são assíntotas horizontais do gráfico de f.

2.4 LIMITES FUNDAMENTAIS

Proposição 2.4.1 *[6]* $\lim_{x\to 0} \dfrac{sen(x)}{x} = 1.$

Demonstração:

Seja γ uma circunferência de raio 1 e centro O.

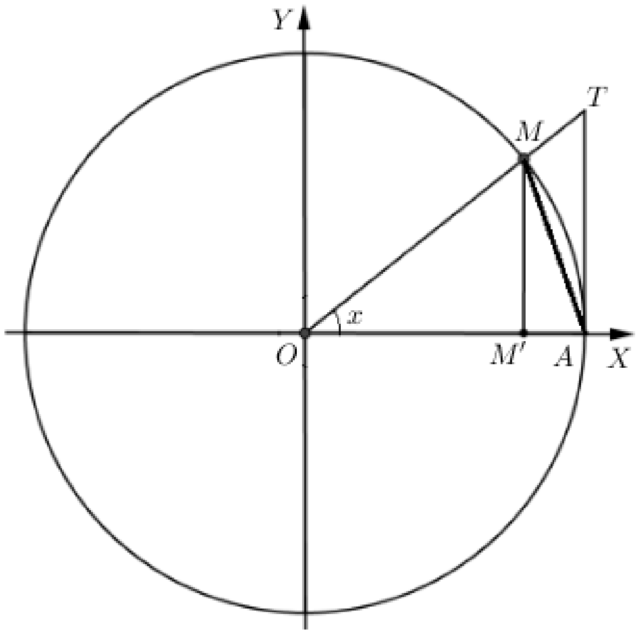


Figura 2.4.1

Seja x a medida em radianos do arco AOM. Limitamos a variação de x ao intervalo $(0, \pi/2)$.
Se A_1, A_2 e A_3 são áreas, note que são válidas as seguintes desigualdades equivalentes:

$$A_1(\Delta MOA) < A_2(\text{ Setor } M\widehat{O}A) < A_3(\Delta AOT).$$

$$\frac{\overline{OA} \cdot \overline{MM'}}{2} < \frac{\overline{OA} \cdot \widehat{AM}}{2} < \frac{\overline{OA} \cdot \overline{AT}}{2}.$$

$$\overline{MM'} < \widehat{AM} < \overline{AT}$$

$$sen(x) < x < tg(x)$$

Multiplicando a última desigualdade por $\dfrac{1}{sen(x)}$, temos:

$$1 < \frac{x}{sen(x)} < \frac{tg(x)}{sen(x)} \Longrightarrow 1 < \frac{x}{sen(x)} < \frac{sen(x)}{\cos(x)sen(x)}$$

$$\Longrightarrow 1 < \frac{x}{sen(x)} < \frac{1}{\cos(x)}.$$

Logo,

$$\cos(x) < \frac{sen(x)}{x} < 1 \text{ (I)}$$

Como $f(x) = \dfrac{sen(x)}{x}$ e $g(x) = \cos(x)$ são funções pares. Então,

$$\frac{sen(-x)}{(-x)} = \frac{sen(x)}{x} \text{ e } \cos(-x) = \cos(x).$$

Assim, a desigualdade (I) é válida para qualquer $x \in \mathbb{R}^*$. *Como* $\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1$ *e* $\lim_{x\to 0} 1 = 1$, *segue pela Proposição 3.1.4 que*

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1.$$

■

Exemplo 2.4.1

(i) $\lim_{x\to 0} \frac{3 \cdot sen(x)}{x} = 3 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} = 3 \cdot 1 = 3.$

(ii) $\lim_{x\to 0} \frac{sen(3x)}{x}$

Pela Proposição 3.4.1, tomando $u = 3x$, *temos que se* $x \to 0$ *então* $u \to 0$, *logo,*

$$\lim_{u\to 0} \frac{sen(u)}{u} = 1.$$

Assim,

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(3x)}{x} = \lim_{u\to 0} \frac{sen(u)}{u/3} = \lim_{u\to 0} \frac{3 \cdot sen(u)}{u} = 3 \cdot \lim_{u\to 0} \frac{sen(u)}{u} = 3 \cdot 1 = 3$$

(iii) $\lim_{x\to 0} \frac{sen(2x)}{sen(3x)}$.

Temos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(2x)}{sen(3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{sen(2x)}{2x} \cdot 2x}{\frac{sen(3x)}{3x} \cdot 3x} = \frac{2}{3} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\frac{sen(2x)}{2x}}{\frac{sen(3x)}{3x}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1} = \frac{2}{3}$$

(iv) $$\lim_{x\to 0} \frac{tg(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{sen(x)}{\cos(x)}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x \cdot \cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} \cdot \frac{1}{\cos(x)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(x)} = 1 \cdot 1 = 1.$$

Proposição 2.4.2 *[2]* $\lim_{x\to \pm\infty} (1 + 1/x)^x = e$ *onde e é o número irracional neperiano cujo valor aproximado é* $2,718281828459....$

A demonstração envolve alguns conceitos de sequências, sendo assim, não iremos demonstra-lá. Faremos apenas alguns testes na Tabela 2 abaixo.

$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$		
0,1	$\left(1+\frac{1}{0,1}\right)^{0,1}$	1,270981615210140638
1	$\left(1+\frac{1}{1}\right)^{1}$	2
2	$\left(1+\frac{1}{2}\right)^{2}$	2,25
5	$\left(1+\frac{1}{5}\right)^{5}$	2,48832
10	$\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10}$	2,5937424601
100	$\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}$	2,704813829421526093
1.000	$\left(1+\frac{1}{1.000}\right)^{1.000}$	2,716923932235892457
1.000.000	$\left(1+\frac{1}{1.000.000}\right)^{1.000.000}$	2,718280469319376883
1.000.000.000	$\left(1+\frac{1}{1.000.000.000}\right)^{1.000.000.000}$	2,718281827099904322

Tabela 2

Proposição 2.4.3 *[2]* $\lim_{x\to 0}(1+1/x)^{1/x} = e.$

Demonstração:

Para provarmos a proposição acima, basta provarmos que $\lim_{x\to 0^+}(1+1/x)^{1/x} = e$ e $\lim_{x\to 0^-}(1+1/x)^{1/x} = e$, ou seja, que os limites laterais são iguais. Primeiramente iremos provar que $\lim_{x\to 0^+}(1+1/x)^{1/x} = e$. Seja $x = 1/t$ temos que $t \to +\infty$ quando $x \to 0^+$. Assim,

$$\lim_{x\to 0^+}(1+1/x)^{1/x} = \lim_{t\to +\infty}(1+1/t)^{t} = e.$$

Analogamente, temos que $\lim_{x\to 0^-}(1+1/x)^{1/x} = e$. Portanto,

$$\lim_{x\to 0}(1+1/x)^{1/x} = e.$$

■

Proposição 2.4.4 *[2]* $\lim\limits_{x \to 0} \ln(1+x)^{1/x} = 1.$

Demonstração:

Pela Proposição 2.1.3 (vii), temos que:

$$\lim_{x \to 0} \ln(1+x)^{1/x} = \ln[\lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x}] = \ln e = 1.$$

■

Proposição 2.4.5 *[2]* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a \ (a > 0, a \neq 1).$

Demonstração:

Tomando $t = a^x - 1$, temos que $a^x = t + 1$. Assim,

$$\begin{aligned} a^x = t + 1 &\Longleftrightarrow \ln a^x = \ln(t+1) \\ &\Longleftrightarrow x \ \ln a = \ln(t+1) \\ &\Longleftrightarrow x = \frac{\ln(t+1)}{\ln a}. \end{aligned}$$

Note que quando $x \to 0$, $x \neq 0$ temos que $t \to 0$, $t \neq 0$ e então podemos escrever

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t \to 0} \frac{t}{\dfrac{\ln(t+1)}{\ln a}} = \ln a \cdot \lim_{t \to 0} \frac{1}{\dfrac{\ln(t+1)}{t}} = \ln a \cdot \frac{\lim\limits_{t \to 0} 1}{\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\ln(t+1)}{t}}$$

Pela Proposição 2.4.4 temos que $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\ln(t+1)}{t} = 1$ e portanto, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a.$

■

3

FUNÇÕES CONTÍNUAS

3.1 DEFINIÇÕES

Nesta seção serão apresentadas algumas definições e exemplos envolvendo funções contínuas. Mais adiante veremos que uma condição necessária para que uma função seja derivável num ponto $\boldsymbol{a}$ é que ela seja contínua nesse ponto.

Definição 3.1.1 *[2] Uma função f é dita **contínua** em $\boldsymbol{a}$ se as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) $a \in D(f)$;

(ii) $\lim_{x \to a} f(x)$ *existe;*

(iii) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Definição 3.1.2 *[2] Uma função f é dita contínua se for contínua em todo $\boldsymbol{a} \in D(f)$.*

Exemplo 3.1.1

(i) Seja $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$.

O gráfico de f está representado na Figura 3.1.1.

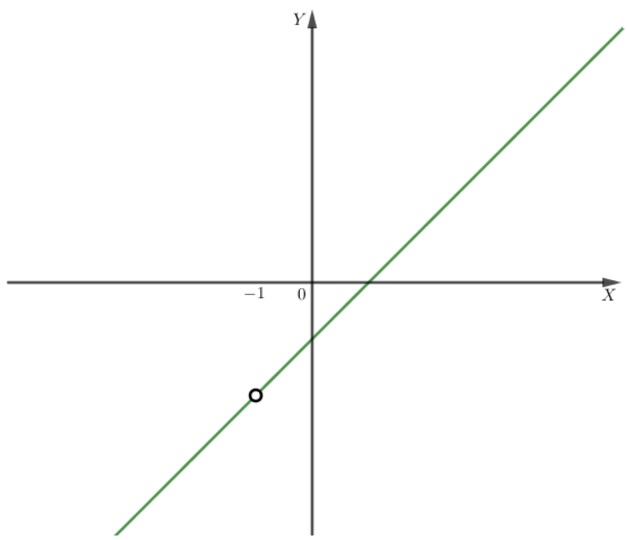


Figura 3.1.1

Note que a função f não é contínua em $a = -1$, uma vez que $-1 \notin D(f)$. Portanto, não satisfaz a condição (i) da Definição 4.1.1.

Exemplo 3.1.2 *Seja* $g = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{se } x \neq 1 \\ 1, & \text{se } x = 1 \end{cases}.$

O gráfico da função g está representado na Figura 3.1.2.

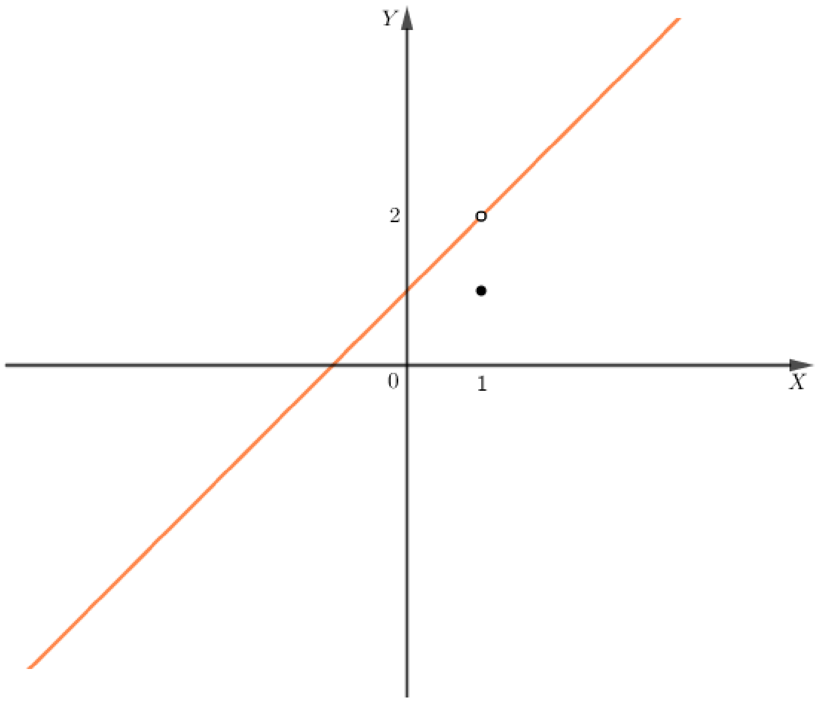


Figura 3.1.2

A função g não é contínua em $a = 1$. Embora, $g(1) = 1$, temos que

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2,$$

logo a função g não satisfaz a condição (iii) da Definição 3.1.1.

Exemplo 3.1.3 *Seja* $h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+2}, & \text{se } x \neq -2 \\ 3, & \text{se } x = -2 \end{cases}.$

O gráfico da função h está representado na Figura 3.1.3.

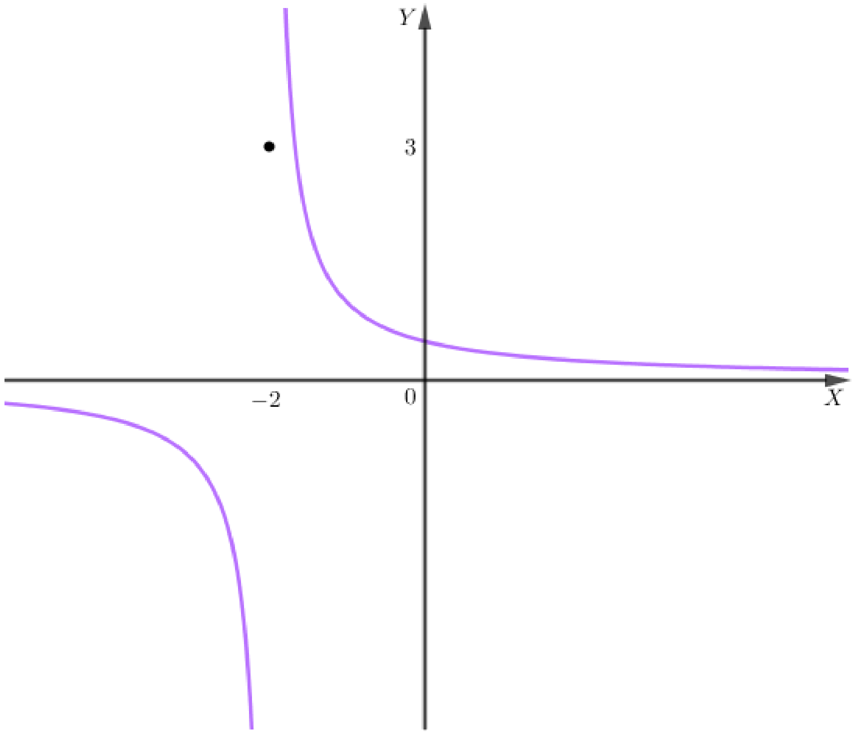


Figura 3.1.3

A função h não é contínua em $x = -2$, pois $\lim_{x \to -2^-} h(x) = \lim_{x \to -2^-} \dfrac{1}{x+2} = -\infty$ e $\lim_{x \to -2^+} h(x) = \lim_{x \to -2^+} \dfrac{1}{x+2} = +\infty$. Neste caso, embora $-2 \in D(f)$ temos que $\lim_{x \to -2} h(x)$ não existe.

3.2 PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES CONTÍNUAS

Proposição 3.2.1 *[3] Se as funções f e g são contínuas num ponto* ***a****, então*

(i) $f + g$ *é contínua em a.*

(ii) $f - g$ *é contínua em a.*

(iii) $f \cdot g$ *é contínua em a.*

(iv) f/g *é contínua em a, com $g(a) \neq 0$.*

Demonstração:

(i) Como f e g são contínuas em a, segue que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ e $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$.

Assim, pela Proposição 3.1.3, temos que:

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x)+g(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = f(a)+g(a)$$
$$= (f+g)(a).$$

Portanto, $f+g$ é contínua no ponto a.

■

(ii) Análoga à demonstração do item (i).

(iii) Como f e g são contínuas em a, segue que: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$.

Assim, pela Proposição 3.1.3, temos que:

$$\lim_{x\to a}(f\cdot g)(x) = \lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = [\lim_{x\to a} f(x)]\cdot[\lim_{x\to a} g(x)] = f(a)\cdot g(a)$$
$$= (f\cdot g)(a)$$

Portanto, $f\cdot g$ é contínua no ponto a.

■

(iv) Como f e g são contínuas em a e $g(a)\neq 0$, segue que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$

Assim, pela Proposição 3.1.3, temos que:

$$\lim_{x\to a}(f/g)(x) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} = (f/g)(a).$$

Portanto, f/g é contínua em a. ■

Proposição 3.2.2 *[2]*

(i) Uma função polinomial é contínua para todo número real.

(ii) Uma função racional é contínua em todo o seu domínio.

(iii) As funções $f(x) = sen(x)$ e $g(x) = \cos(x)$ são contínuas para todo $x\in\mathbb{R}$.

(iv) A função $f(x) = e^x$ (função exponencial) é contínua para todo $x\in\mathbb{R}$.

Vamos provar os itens (i) e (iv), as demais demonstrações dos itens restantes serão omitidas.

Demonstração:

(i) Seja $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ uma função polinomial definida nos reais. Vamos mostrar que f é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$. Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} f(x) &= \lim_{x\to x_0} [a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0] \\ &= a_n \cdot x_0^n + a_{n-1} \cdot x_0^{n-1} + ... + a_1 \cdot x_0 + a_0 \\ &= f(x_0).\end{aligned}$$

Portanto, a função f é contínua em todo $x_0 \in \mathbb{R}$.

■

(iv) Seja $f(x) = e^x$ e x_0 arbitrário, temos que:

f é definida no ponto x_0, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existe e $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} e^x = e^{x_0} = f(x_0)$.

Portanto, f é contínua no ponto arbitrário x_0 e assim, contínua para todo $x \in \mathbb{R}$.

■

Proposição 3.2.3 *[3] Sejam f e g funções tais que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ e g é contínua em b. Então, $\lim\limits_{x\to a}(g \circ f)(x) = g(b)$, ou seja, $\lim\limits_{x\to a} g[f(x)] = g[\lim\limits_{x\to a} f(x)]$*

Demonstração:

Devemos provar que $\lim\limits_{x\to a}(g \circ f)(x) = g(b)$, ou seja, dado $\epsilon > 0$, existe $\sigma > 0$, tal que $|(g \circ f)(x) - g(b)| < \epsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \sigma$. Por hipótese, g é contínua em b, logo, $\lim\limits_{y\to b} g(y) = g(b)$. Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $\sigma_1 > 0$ tal que $|g(y) - g(b)| < \epsilon$ sempre que $0 < |y - b| < \sigma_1$. Como para $y = b$, segue que $|g(y) - g(b)| = 0 < \epsilon$, assim podemos escrever $|g(y) - g(b)| < \epsilon$, sempre que $|y - b| < \sigma_1$. (1)

Por hipótese, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ e ainda para $\sigma_1 > 0$, segue pela definição de limite que existe $\sigma > 0$, tal que $|f(x) - b| < \sigma_1$ sempre que $0 < |x - a| < \sigma$. Portanto, se $0 < |x - a| < \sigma$, $y = f(x)$ satisfaz (1) e assim, $|g[f(x)] - g(b)| = |(g \circ f)(x) - g(b)| < \epsilon$.

■

Proposição 3.2.4 *[2] Se f é contínua em $\boldsymbol{a}$ e g é contínua em $f(a)$, então $g \circ f$ é contínua em $\boldsymbol{a}$.*

Demonstração:

Por hipótese, f é contínua em $\boldsymbol{a}$, assim $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Segue também por hipótese que g é contínua em $f(a)$ e pela Proposição 3.2.3 temos que

$$\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = g[\lim_{x \to a} f(x)] = g[f(a)] = (g \circ f)(a).$$

Portanto, $g \circ f$ é contínua em a.

∎

Corolário 3.2.1 *[6] Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então a imagem de f também é um intervalo. Se $I = [a, b]$, então existem reais $c \leq d$ tais que $Im(f) = [c, d]$.*

A demonstração desse Corolário envolve conceitos de sequências, portanto, será omitida nesse texto.

Definição 3.2.1 *[2] Seja f definida num intervalo fechado $[a, b]$.*

(i) Se $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$, f é denominada função contínua à direita de a.

(ii) Se $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$, f é denominada função contínua à esquerda de b.

(iii) Se f é contínua em x_0 no intervalo aberto (a, b), f é contínua à direita em a e à esquerda em b, dizemos que f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$.

Lema 3.2.1 *[6] Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $x_0 \in I$ é tal que $f(x_0) > 0$ (resp. $f(x_0) < 0$), então existe $\sigma > 0$ tal que*

$$x \in I, |x - x_0| < \sigma \Longrightarrow f(x) > \frac{f(x_0)}{2} \left(resp. f(x) < -\frac{f(x_0)}{2} \right).$$

Demonstração:

Façamos a prova no caso em que $f(x_0) > 0$, sendo a prova no outro caso totalmente análoga. A definição de continuidade garante que, para $\epsilon = \dfrac{f(x_0)}{2} > 0$, existe $\sigma > 0$ tal que

$$x \in I, |x - x_0| < \sigma \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon = \frac{f(x_0)}{2}.$$

Por outro lado, a última desigualdade acima implica

$$f(x) - f(x_0) > -\frac{f(x_0)}{2}$$

ou, o que é o mesmo, $f(x) > \dfrac{f(x_0)}{2}$, para todo $x \in I \cap (x_0 - \sigma, x_0 + \sigma)$.

∎

Teorema 3.2.1 *[6] (Bolzano)*
Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

A Figura 3.2.1 representa a situação descrita pelo teorema.

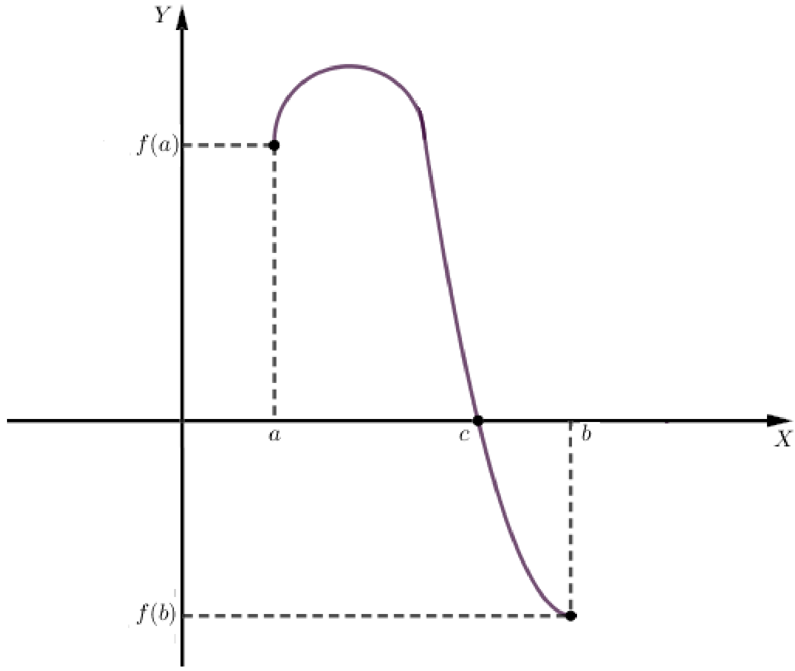


Figura 3.2.1

A demonstração desse teorema envolve alguns conceitos de sequências, portanto, será omitida nesse texto.

Teorema 3.2.2 *[6] (Teorema do Valor Intermediário)*
Se f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e d é um número real tal que $f(a) \leq d \leq f(b)$ ou $f(b) \leq d \leq f(a)$, então existe pelo menos um valor $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = d$.

A Figura 3.2.2 representa uma situação descrita pelo teorema.

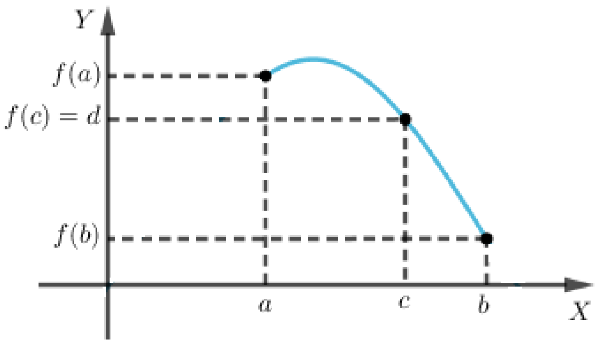


Figura 3.2.2

Demonstração:

Note que a função $h(x) = f(x) - d$ é contínua e ainda que

$$h(a) \cdot h(b) = (f(a) - d) \cdot (f(b) - d) < 0.$$

Portanto, o teorema de Bolzano garante a existência de $c \in (a,b)$ tal que $h(c) = 0$, isto é, $f(c) = d$.

$\blacksquare$

Existe uma relação biunívoca entre os dois últimos teoremas.

Teorema 3.2.3 *[6] **(Weierstrass)***

Se f é contínua no intervalo fechado $[a,b]$, então existirão x_1 e x_2 em $[a,b]$ tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, para todo $x \in [a,b]$.

A demonstração desse teorema envolve alguns conceitos de sequências, portanto, será omitida nesse texto.

Teorema 3.2.4 *[6] Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então f é injetiva se, e só se, f é crescente ou decrescente. Ademais, nesse caso:*

(a) A imagem J de f é um intervalo de mesmo tipo que I.

(b) $f^{-1} : J \to I$ é contínua.

Demonstração:

Se f não é injetiva, então f claramente não pode ser nem crescente, nem decrescente. Reciprocamente, se f não é nem crescente, nem decrescente, então existem $a < b < c$ em I tais que $f(a) \leq f(b) \geq f(c)$ ou $f(a) \geq f(b) \leq f(c)$. Suponha que $f(a) \leq f(b) \geq f(c)$ (o outro caso é análogo) e escolha $d \in \mathbb{R}$ tal que

$$\max\{f(a), f(c)\} \leq d \leq f(b)$$

O Teorema do Valor Intermediário (TVI) garante a existência de $x_0 \in (a,b)$ e $x_1 \in (b,c)$ (logo, $x_0, x_1 \in I$) tais que $f(x_0) = d$ e $f(x_1) = d$, de modo que $f(x_0) = f(x_1)$. Em particular, f não é injetiva.

(a) Pelo Corolário 3.2.1, sabemos que J é um intervalo. Como f é injetiva, podemos supor, que f é crescente (o caso em que f é decrescente é análogo). Suponha que $I = (a,b)$, com $a, b \in \mathbb{R}$ (os demais casos também podem ser tratados de modo análogo). Se $Im(f) = (c,d]$, tome $x_0 \in (a,b)$ tal que $f(x_0) = d$. Então, como f é crescente, para $x \in (x_0, b)$ temos $f(x) > f(x_0) = d$, o que contradiz o fato de que $f(x_0) \in Im(f)$. Analogamente, mostramos que $Im(f) \neq [c,d), [c,d]$, de sorte que $Im(f)$ também é um intervalo aberto.

(b) Inicialmente, observamos que f^{-1} é crescente. Agora fixado $y_0 \in (c,d)$, seja $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Dado $\epsilon > 0$, queremos $\sigma > 0$ tal que

$$y \in (c,d), |y - y_0| < \sigma \Longrightarrow |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \epsilon. \ (1)$$

Para tanto, seja $\sigma_0 = min\{y_0 - c, d - y_0\}$ e suponha inicialmente, que $0 < \sigma < \sigma_0$ (de sorte que a condição $|y - y_0| < \sigma$ seja suficiente para garantir que $y \in (c,d)$). Denotando $x = f^{-1}(y)$, temos $y = f(x)$ e podemos reescrever (1) da seguinte forma: queremos $0 < \sigma < \sigma_0$ tal que

$$|f(x) - f(x_0)| < \sigma \Longrightarrow |x - x_0| < \epsilon.$$

Observe que podemos supor $\epsilon > 0$ tão pequeno que $x_0 \pm \epsilon \in (a,b)$ (senão, diminua o $\epsilon > 0$ dado, de forma que essa condição seja satisfeita). Lembrando que f é crescente, tome

$$0 < \sigma < min\{\sigma_0, f(x_0 + \epsilon) - f(x_0), f(x_0) - f(x_0 - \epsilon)\}$$

Então,

$$f(x) - f(x_0) < \sigma \Longrightarrow f(x) - f(x_0) < f(x_0 + \epsilon) - f(x_0) \Longrightarrow f(x) < f(x_0 + \epsilon)$$

$$\Longrightarrow x < x_0 + \epsilon$$

e, analogamente,

$$f(x) - f(x_0) > -\sigma \Longrightarrow x > x_0 - \epsilon$$

Em qualquer caso, a escolha acima para σ garante que

$$|f(x) - f(x_0)| < \sigma \Longrightarrow -\sigma < f(x) - f(x_0) < \sigma \Longrightarrow -\epsilon < x - x_0 < \epsilon$$

$$\Longrightarrow |x - x_0| < \epsilon,$$

conforme desejado.

■

Exemplo 3.2.1 *Sejam f, g e h funções tais que, para todos x, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Se f e h são contínuas no ponto $x = a$ e $f(a) = g(a) = h(a)$, então g é contínua em $x = a$.*

Demonstração:

Se f e h são contínuas em a, temos que

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \text{ e } \lim_{x \to a} h(x) = f(a).$$

Segue pelo Teorema do Confronto e pelo fato de $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ que existe $\lim\limits_{x \to a} g(x) = f(a) = h(a) = g(a)$, o que garante a continuidade da função $g(x)$ em a.

■

4

DERIVADAS

Neste capítulo trabalharemos alguns conceitos básicos do estudo de derivadas, suas aplicações e algumas situações-problema que podem ser utilizadas no ensino médio.

4.1 O CONCEITO DE DERIVADA

Seja $y = f(x)$ uma curva qualquer definida no intervalo (a, b), conforme Figura 4.1.1 e tome dois pontos distintos da curva $y = f(x)$, a saber, $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$.

Se s é a reta secante à curva $y = f(x)$ que passa pelos pontos P e Q e considerando o triângulo retângulo em M, PMQ, temos que a inclinação da reta s, denotada por m_s é dada por

$$m_s = tg(\alpha) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

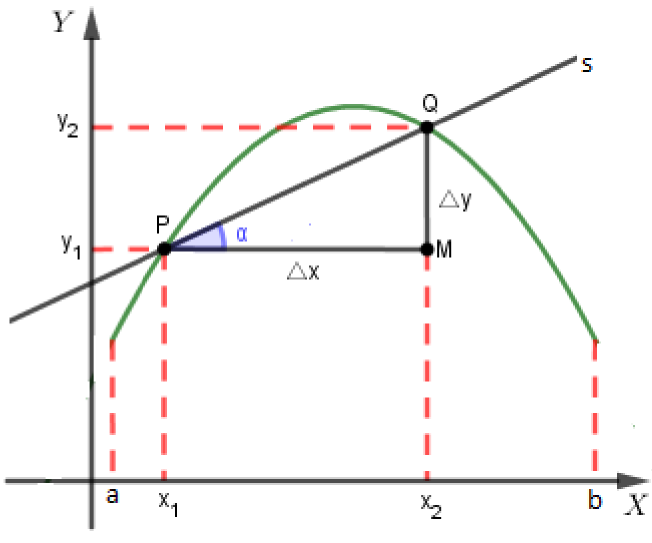


Figura 4.1.1

Suponhamos que P mantenha-se fixo e que Q mova-se sobre a curva $y = f(x)$ em direção a P. Note que a inclinação da reta secante s estará variando. À medida que Q percorre a curva aproximando-se de P a inclinação da reta s varia conforme pode ser observado pela Figura 4.1.2.

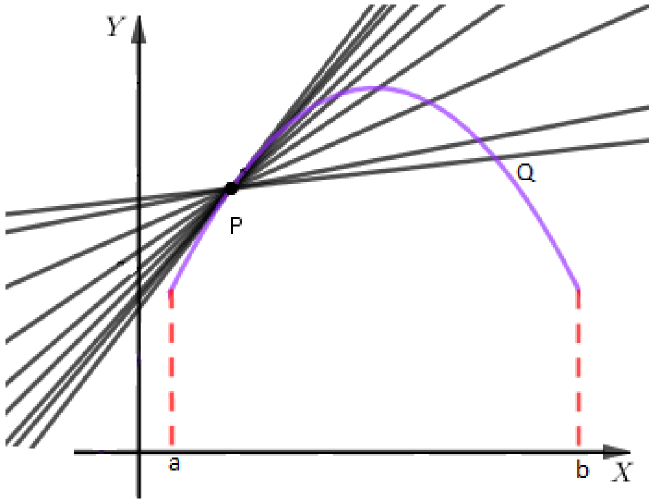


Figura 4.1.2

Definição 4.1.1 *[3] Seja f uma função e x_0 um ponto de seu domínio. A reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$ é a reta que possui coeficiente angular*

$$m_t = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

desde que o limite existe e é finito.

A existência da reta tangente está condicionada à existência da m_t definida acima. Neste caso m_t é chamado de inclinação da reta tangente ao gráfico da f no ponto $(x_0, f(x_0))$.

Exemplo 4.1.1 *Encontre a inclinação da reta tangente ao gráfico da $f(x) = x^2 - 4x + 4$ no ponto $(x_0, f(x_0))$.*

Se tomarmos $x = x_0 + h$, podemos reescrever

$$m_t = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Assim,

$$m_t = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^2 - 4(x_0 + h) + 4 - x_0^2 + 4x_0 - 4}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2x_0 + h - 4)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x_0 + h - 4) = 2x_0 - 4.$$

Portanto, a inclinação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2 - 4x + 4$ no ponto $(x_0, f(x_0))$ é $m_t = 2x_0 - 4$. Quando $x_0 = 4$, temos $tg(\alpha) = m(4) = 2 \cdot 4 - 4 = 4$.

A figura 4.1.3 representa a reta tangente ao gráfico da f em $(4, 4)$.

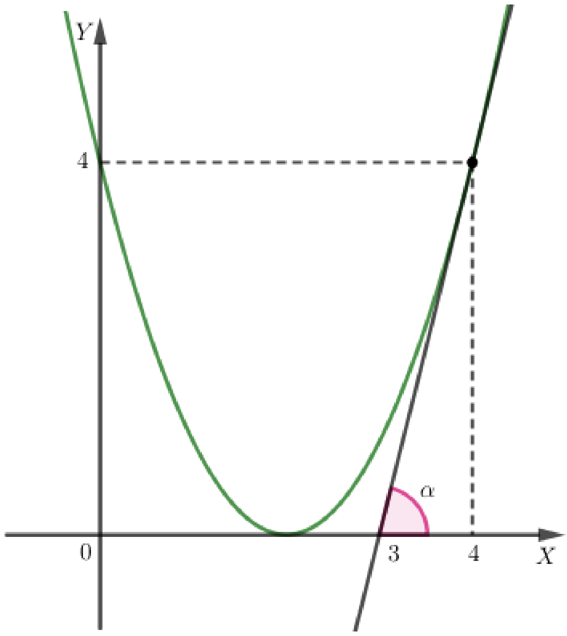


Figura 4.1.3

Definição 4.1.2 *[2]* ***(A Derivada de uma Função num Ponto)***
A derivada de uma função f no ponto x_0, denotada por $f'(x_0)$, é definida pelo limite

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

quando esse limite existe e é finito.
Se f admite derivada em x_0, então diremos que f é ***derivável*** *em x_0.*

Dizemos que f é derivável em $A \subset D(f)$ se for derivável em cada $x_0 \in A$.

Uma função é derivável quando existe derivada em todos os pontos de seu domínio.

Definição 4.1.3 *[3]* ***(Função derivada)*** *Seja f derivável em $A \subset D(f)$, definimos a função $f' : A \to \mathbb{R}$ (função derivada de f) dada por*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Note que este limite nos dá a inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(x, f(x))$. Portanto, geometricamente, a derivada da função $y = f(x)$ no ponto x representa a inclinação da reta tangente neste ponto.

Algumas formas de denotar derivadas:

(i) $y' = f'(x) \to$ (lê-se f linha de x);

(ii) $D_x f(x) \to$ (lê-se derivada de $f(x)$ em relação a x);

(iii) $D_x y \to$ (lê-se derivada de y em relação a x);

(iv) $\dfrac{dy}{dx} \to$ (lê-se derivada de y em relação a x);

Exemplo 4.1.2 *Dada a função $f(x) = x^2 + 5x - 6$, determine $f'(4)$.*

Solução

Usando a Definição 4.1.3, temos que:

$$\begin{aligned}
f'(4) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(4+h)^2+5\cdot(4+h)-6-(4^2+5\cdot 4-6)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{16+8h+h^2+20+5h-6-16-20+6}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{13h+h^2}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h(13+h)}{h} = \lim_{h\to 0} 13+h = 13.
\end{aligned}$$

Na Figura 4.1.4, o ponto A possui coordenadas $(4, f(4)) = (4, 30)$ e a reta r é tangente à curva dada por $f(x) = x^2 + 5x - 6$ no ponto A. Note que $\alpha = 85,6°$, onde α é a inclinação da reta r (reta tangente à curva dada por f no ponto A) e que $tg(\alpha) = tg(85,6°) = 13 = f'(4)$.

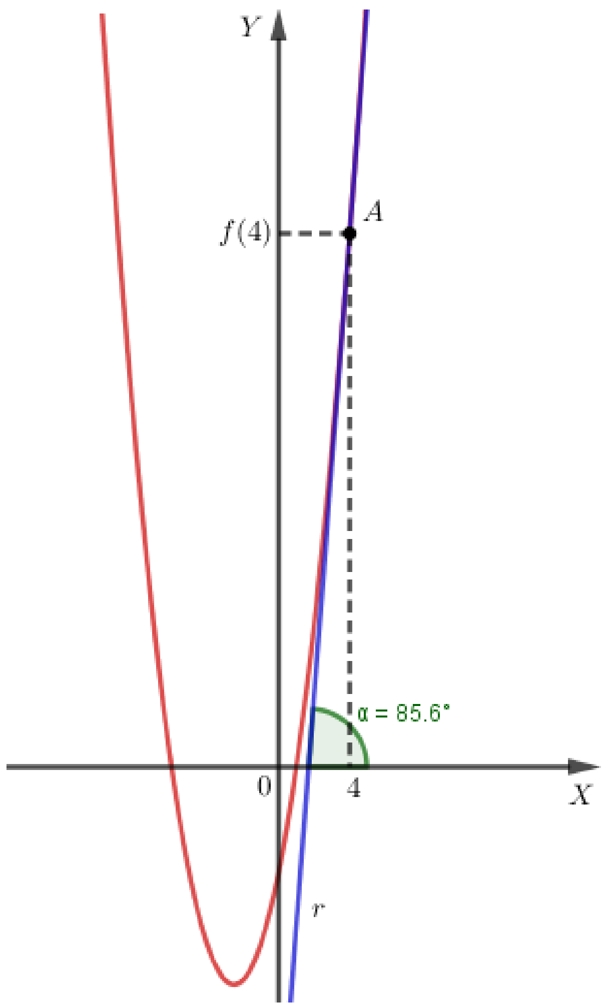


Figura 4.1.4

Exemplo 4.1.3 *Seja* $f(x) = \dfrac{x-4}{x+1}$*, determine* $f'(x)$*.*

Solução

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{x+h-4}{x+h+1} - \dfrac{x-4}{x+1}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{(x+h-4)(x+1)-(x-4)(x+h+1)}{(x+h+1)(x+1)}}{hx}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2+xh-4x+x+h-4-x^2-xh-x+4x+4h+4}{h(x^2+hx+h+2x+1)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{5h}{h(x^2+xh+h+2x+1)} = \lim_{h\to 0} \frac{5}{x^2+xh+h+2x+1}$$

$$= \frac{5}{x^2+2x+1} = \frac{5}{(x+1)^2}.$$

Teorema 4.1.1 *[3] Toda função derivável num ponto* x_0 *é contínua nesse ponto.*

Demonstração:

Pela hipótese, f é derivável em x_0, logo $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe e é igual a $f'(x_0)$. Precisamos provar que f é contínua em x_0, isto é, que $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Temos

$$f(x)-f(x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot (x-x_0),\ x \neq x_0,$$

daí,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)-f(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot \lim_{x\to x_0} (x-x_0) = f'(x_0)\cdot 0 = 0$$

e, portanto,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

■

Definição 4.1.4 *[2] Se a função* $y = f(x)$ *está definida em* x_0*, então a derivada à* ***direita*** *de* f *em* x_0*, denotada por* $f'_+(x_0)$ *é definida por*

$$f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

caso este limite exista e seja finito.

Definição 4.1.5 *[2] Se a função $y = f(x)$ está definida em x_0, então a derivada à* ***esquerda*** *de f em x_0, denotada por $f'_-(x_0)$ é definida por:*

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

caso este limite exista e seja finito.

Uma função é derivável em x_0, quando as derivadas à esquerda e à direita de x_0 existem e são iguais à derivada em x_0.

Caso as derivadas laterais existam, porém sejam diferentes em x_0, dizemos que x_0 este é um ponto **anguloso** [2] do gráfico da função.

Exemplo 4.1.4 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & se\ x < 2 \\ 7 - x, & se\ x \geq 2 \end{cases}.$$

(i) Mostre que f é contínua em 2.
(ii) Prove que f não é derivável em $x_0 = 2$.
O gráfico de f está representado na Figura 4.1.5.

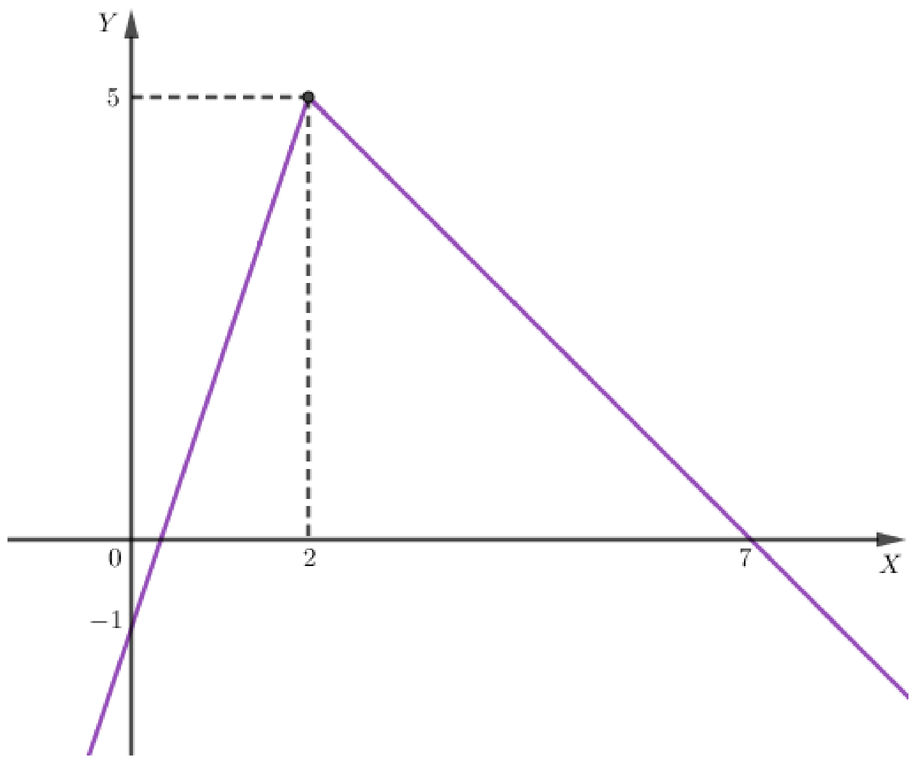


Figura 4.1.5

Solução

(i) Temos que $2 \in D(f)$ e $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 5$, logo $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 5$.
Como $f(2) = 5$, segue que $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$ e portanto f é contínua em 2.

(ii) Para provarmos que f é derivável em $x_0 = 2$, devemos mostrar que $f'_+(2) = f'_-(2)$, o que não ocorre neste caso.
De fato,

$$
\begin{aligned}
f'_+(2) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{[7-(2+h)]-5}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{7-2-h-5}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{-h}{h} = \lim_{h\to 0^+} (-1) = -1.
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
f'_-(2) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{[3\cdot(2+h)-1]-5}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{6+3h-1-5}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{3h}{h} = \lim_{h\to 0^+} 3 = 3.
\end{aligned}
$$

Portanto, f não é derivável em $x_0 = 2$.

4.2 REGRAS DE DERIVAÇÃO

Nesta seção serão apresentadas as principais regras de derivação. As mesmas permitem determinar as derivadas das funções sem a necessidade do uso da definição.

Proposição 4.2.1 *[3] (Derivada de uma constante)*
Se k é um constante e $f(x) = k$ para todo x, então $f'(x) = 0$.

Demonstração:
Seja $f(x) = k$. Logo,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k-k}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

■

Proposição 4.2.2 *[3] (Regra da Potência)*
Se n é um número inteiro positivo e $f(x) = x^n$, então $f'(x) = nx^{n-1}$.

Demonstração:
Seja $f(x) = x^n$. Logo,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}.$$

Desenvolvendo $(x+h)^n$, pelo Binômio de Newton, temos:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{[x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + ... + nxh^{n-1} + h^n] - x^n}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h + ... + nxh^{n-2} + h^{n-1}]}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} [nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h + ... + nxh^{n-2} + h^{n-1}] = nx^{n-1}
\end{aligned}$$

■

Proposição 4.2.3 *[3] (Derivada do produto de uma constante por uma função)*
Sejam f uma função, k uma constante e g uma função tal que $g(x) = kf(x)$. Se $f'(x)$ existe, então $g'(x) = kf'(x)$.

Demonstração:
Segue por hipótese que existe $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.
Assim, temos que

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{kf(x+h) - kf(x)}{h} = \lim_{h \to 0} k \left[\frac{f(x+h - f(x))}{h} \right] \\
&= kf'(x).
\end{aligned}$$

■

Proposição 4.2.4 *[3] (Derivada da soma)*
Sejam f e g duas funções e q uma função tal que $q(x) = f(x) + g(x)$. Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existem, então $q'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Demonstração:
Segue por hipótese que exitem

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ e } g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Assim, temos que:

$$q'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{q(x+h) - q(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(x) + g'(x).
\end{aligned}
$$

■

Proposição 4.2.5 *[3] **(Derivada de um produto)***

Sejam f e g funções e q a função definida por $q(x) = f(x)\ g(x)$. Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existem, então

$$q'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Demonstração:

Segue por hipótese que exitem

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{e} \quad g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Segue ainda que f é contínua (Teorema 4.1.1) e assim $\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$.

Temos que

$$q'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{q(x+h) - q(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{h}.$$

Vamos somar e subtrair ao numerador acima a expressão $f(x+h)g(x)$. Temos assim:

$$
\begin{aligned}
q'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)[g(x+h) - g(x)] + g(x)[f(x+h) - f(x)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] + \lim_{h\to 0} \left[g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] \\
&= \lim_{h\to 0} f(x+h) \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} g(x) \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= f(x)g'(x) + g(x)f'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).
\end{aligned}
$$

■

Proposição 4.2.6 *[3] (Derivada do quociente)*

Sejam f e g funções e q a função definida por $q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, onde $g(x) \neq 0$. Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existem, então

$$q'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Demonstração:

Segue por hipótese que exitem

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{e} \quad g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Segue ainda que g é contínua (Teorema 4.1.1) e assim $\lim\limits_{h \to 0} g(x+h) = g(x)$.

Temos que

$$\begin{aligned} q'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{q(x+h) - h(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)} \right] \end{aligned}$$

Vamos somar e subtrair ao numerador acima a expressão $f(x)g(x)$. Temos assim:

$$\begin{aligned} q'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)} \right] \\ &= \lim_{h \to 0} \left[\frac{\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x) - f(x) \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}}{g(x+h)g(x)} \right] \\ &= \frac{\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \lim\limits_{h \to 0} g(x) - \lim\limits_{h \to 0} f(x) \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}}{\lim\limits_{h \to 0} g(x+h) \lim\limits_{h \to 0} g(x)} \\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}. \end{aligned}$$

■

Proposição 4.2.7 *[2] Se $f(x) = x^{-n}$ tal que $n \in \mathbb{Z}_+^*$ e $x \neq 0$, então $f'(x) = -nx^{-n-1}$.*

Demonstração:

Note que $f(x) = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$. Assim, pela Proposição 4.2.6, segue que

$$f'(x) = \frac{x^n \ 0 - 1 \ nx^{n-1}}{(x^n)^2} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -n \ x^{n-1} \ x^{-2n} = -nx^{-n-1}.$$

■

4.3 DERIVADA DA FUNÇÃO COMPOSTA, INVERSA E DAS FUNÇÕES ELEMENTARES

Nesta seção apresentaremos alguns resultados que possibilitam calcular a derivada de funções compostas, inversas e de algumas funções elementares.

Proposição 4.3.1 *[3] **(Regra da Cadeia)** Se $y = g(u)$ e $u = f(x)$ e as derivadas dy/du e du/dx existem, então a função composta $y = g[f(x)]$ possui derivada e a mesma é dada por:*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

ou

$$y'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Demonstração: Omitida.

Proposição 4.3.2 *[3] Se $u = g(x)$ é uma função derivável e $n \in \mathbb{Z}^*$, então:*

$$\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1}g'(x).$$

Demonstração:
Seja $y = u^n$, onde $u = g(x)$. Aplicando a Regra da Cadeia, temos:

$$\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1}g'(x).$$

■

Podemos generalizar a Regra da Potência, isto é, se $u = g(x)$ é uma função derivável e r é um número racional não nulo arbitrário, então

$$\frac{d}{dx}[g(x)]^r = r[g(x)]^{r-1}g'(x),$$

Teorema 4.3.1 *[3] **(Derivada da Função Inversa)***

Seja f uma função inversível, com função inversa $f^{-1} = g$. Se f for derivável em $y_0 = g(x_0)$, com $f'(y_0) \neq 0$, e se g for contínua em x_0, então g será derivável em x_0 e é válido que

$$g'(x_0) = \frac{1}{f'(g(x_0))}.$$

Demonstração:

Por hipótese, f é inversível, com inversa g, assim $f(g(x)) = x$, para todo $x \in D(g)$.

Segue que para todo $x \in D(g)$

$$[f(g(x))]' = x'$$

ou

$$[f(g(x))]' = 1.$$

Se supusermos f e g deriváveis, podemos aplicar a Regra da Cadeia ao primeiro membro da equação acima:

$$f'(g(x))g'(x) = 1.$$

ou

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}, \text{ para todo } x \in D(g).$$

que é a fórmula que permite calcular a derivada de g conhecendo-se a derivada de f.

Vamos mostrar agora que g é derivável em x_0:

$$\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \frac{g(x)-g(x_0)}{f(g(x))-f(g(x_0))} = \frac{1}{\dfrac{f(g(x))-f(g(x_0))}{g(x)-g(x_0)}}, \; x \neq x_0.$$

Fazendo $u = g(x)$, pela continuidade de g em x_0, $u \to y_0$ para $x \to x_0$. Então,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \lim_{u\to y_0} \frac{1}{\dfrac{f(u)-f(y_0)}{u-y_0}}.$$

Como $\displaystyle\lim_{u\to y_0} \frac{f(u)-f(y_0)}{u-y_0} = f'(y_0) = f'(g(x_0))$, resulta

$$g'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{f'(g(x_0))}.$$

Portanto, g é derivável em x_0 e $g'(x_0) = \dfrac{1}{f'(g(x_0))}$. ∎

Proposição 4.3.3 *[2] **(Derivada da função exponencial)***
Se $y = a^x$, tal que $a > 0$ e $a \neq 1$, então $y' = a^x \ln(a)$.

Demonstração:
Seja $y = a^x$, tal que $a > 0$ e $a \neq 1$. Temos que

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h}-a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x(a^h-1)}{h} = \lim_{h\to 0} a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h}.$$

Pela Proposição 2.4.5, segue que $y' = a^x \cdot \ln(a)$.

∎

Proposição 4.3.4 *[2] (Derivada da função logarítmica)*
Se $y = \log_a(x)$, tal que $a > 0$ e $a \neq 1$, então: $y' = \dfrac{1}{x}\log_a e$.

Demonstração:
Seja $y = \log_a(x)$, tal que $a > 0$ e $a \neq 1$. Temos que

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\log_a \dfrac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \left[\frac{1}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)\right]$$
$$= \lim_{h\to 0} \log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{1/h} = \log_a\left[\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{1/h}\right] = \log_a\left[\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h/h}{x/h}\right)^{1/h}\right]$$
$$= \log_a\left[\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{1}{x/h}\right)^{x/h}\right]^{1/x} = \frac{1}{x}\log_a\left[\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{1}{x/h}\right)^{x/h}\right]$$

Pela Proposição 2.4.2, temos que $y' = \dfrac{1}{x}\log_a e$. ∎

Corolário 4.3.1 *[2] Se $y = \ln x$, então $y' = \dfrac{1}{x}$.*

Demonstração: Segue diretamente da Proposição 4.3.4.

Proposição 4.3.5 *[2] Se $y = u^v$, onde $u = u(x)$ e $v = v(x)$ são funções na variável x e deriváveis no intervalo I e $u(x) > 0$, $\forall x \in I$, então $y' = vu^{v-1}u' + u^v v' \ln u$.*

Demonstração:
Temos que $y = u^v = e^{v \ln u}$. Sendo assim, $y = (g \circ f)(x)$, onde $g(t) = e^t$ e $t = f(x) = v \ln u$. Assim, $g'(t) = e^t$ e

$$f'(x) = v' \ln u + v\frac{1}{u}u' = v' \ln u + v\frac{u'}{u}$$

Pela Regra da Cadeia, temos que

$$y' = g(t)f'(x) = e^t(v' \ln u + v\frac{u'}{u}) = e^{v\ln u}(v' \ln u + v\frac{u'}{u})$$
$$= u^v \ln u v' + u^v v\frac{u'}{u} = u^v v' \ln u + vu^{v-1}u'.$$

∎

Exemplo 4.3.1 *Se $y = x^x$, então $y' = x^x + x^x \ln x$.*

Solução:
Pela Proposição 4.3.5, temos que

$$y' = x^x\, x' \ln x + x\, x^{x-1}x' \Longrightarrow y' = x^x + x^x \ln x.$$

4.4 DERIVADA DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Nesta seção introduzimos a derivada das principais funções trigonométricas.

Proposição 4.4.1 *[2] (Derivada da função seno)*
Se $y = sen(x)$, então $y' = \cos(x)$.

Demonstração:
Seja $y = sen(x)$. Pela Definição de 4.1.3, temos

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{sen(x+h) - sen(x)}{h}.$$

Aplicando a fórmula trigonométrica $sen(a) - \cos(b) = 2\ sen\left(\frac{a-b}{2}\right)\ \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$, no limite acima, temos

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{2\ sen\left(\frac{x+h-x}{2}\right)\cos\left(\frac{x+h+x}{2}\right)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2\ sen\left(\frac{h}{2}\right)\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2\ sen\left(\frac{h}{2}\right)}{h} \lim_{h \to 0} \frac{\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)}{1} = \lim_{h \to 0} \frac{2\ sen\left(\frac{h}{2}\right)}{2\ \frac{h}{2}} \lim_{h \to 0} \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right).$$

Aplicando a Proposição 2.4.1 ao primeiro limite e resolvendo o segundo limite acima, temos $y' = 1 \cdot \cos(x) = \cos(x)$.

∎

Proposição 4.4.2 *[2] (Derivada da função cosseno)*
Se $y = \cos(x)$, então $y' = -sen(x)$.

Demonstração:

Seja $y = \cos(x)$. Pela Definição de 4.1.3, temos:

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h}.$$

Aplicando a fórmula trigonométrica $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - sen(a)sen(b)$, temos:

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x)\cos(h) - sen(x)sen(h) - \cos(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)[\cos(h)-1] - sen(x)\cdot sen(h)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)[\cos(h)-1]}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{sen(x)sen(h)}{h}$$

Multiplicando e dividindo o primeiro limite da expressão acima por $\cos(h)+1$ e aplicando a Proposição 2.4.1 ao segundo limite da expressão acima, temos

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)[\cos(h)-1]}{h} \frac{\cos(h)+1}{\cos(h)+1} - sen(x)$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)[\cos^2(h)-1^2]}{h[\cos(h)+1]} - sen(x).$$

Pela Relação Fundamental da Trigonometria, temos

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)[-sen^2(h)]}{\Delta x[\cos(h)+1]} - sen(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)[-sen(h)][sen(h)]}{h[\cos(h)+1]} - sen(x).$$

Pela Proposição 2.4.1, segue que

$$y' = \frac{\cos(x)\cdot 0 \cdot 1}{1+1} - sen(x) = 0 - sen(x) = -sen(x).$$

■

Proposição 4.4.3 *[2] Se $y = tg(x)$, então $y' = sec^2(x)$.*

Demonstração:

Como $tg(x) = \dfrac{sen(x)}{\cos(x)}$, onde $\cos(x) \neq 0$, segue pela Proposição 4.2.6, que

$$y' = \frac{\cos(x)\cdot\cos(x) - sen(x)\cdot[-sen(x)]}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)+sen^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$
$$= sec^2(x).$$ ■

Proposição 4.4.4 *[3] Se $y = cotg(x)$, então $y' = -cosec^2(x)$.*

Demonstração:

Como $cotg(x) = \dfrac{\cos(x)}{sen(x)}$, onde $sen(x) \neq 0$, segue pela Proposição 4.2.6, que

$$y' = \frac{-sen(x)sen(x) - \cos(x)[cos(x)]}{sen^2(x)} = \frac{-sen^2(x) - \cos^2(x)}{sen^2(x)} = -\frac{sen^2(x)+\cos^2(x)}{sen^2(x)}$$
$$= -\frac{1}{sen^2(x)} = -cosec^2(x).$$ ■

Proposição 4.4.5 *[3] Se $y = \sec(x)$, então $y' = sec(x) \cdot tg(x)$.*

Demonstração:
Como $\sec(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$, onde $\cos(x) \neq 0$, segue pela Proposição 4.2.6, que

$$y' = \frac{0\ \cos(x) - [-sen(x)]1}{\cos^2(x)} = \frac{sen(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos(x)}\ \frac{sen(x)}{\cos(x)} = \sec(x)\ \ tg(x).$$

■

Proposição 4.4.6 *[2] Se $y = cosec(x)$, então $y' = -cosec(x) \cdot cotg(x)$.*

Demonstração:

Como $cosec(x) = \dfrac{1}{sen(x)}$, onde $sen(x) \neq 0$, segue pela Proposição 4.2.6, que:

$$y' = \frac{0\, sen(x) - 1\cos(x)}{sen^2(x)} = -\frac{\cos(x)}{\cos^2(x)} = -\frac{1}{sen(x)}\frac{\cos(x)}{sen(x)} = -cosec(x)\, cotg(x).$$

■

Proposição 4.4.7 *[2] Seja $f : [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ dada por $f(x) = arc\ sen(x)$. Então, $y = f(x)$ é derivável em $(-1,1)$ e $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.*

Demonstração:
Se $y = arc\ sen(x)$, então $x = sen(y)$, onde $y \in [-\pi/2, \pi/2]$.
É fato que a derivada de $sen(y)$ existe e é não nula para qualquer $y \in [-\pi/2, \pi/2]$, logo

$$y' = \frac{1}{(sen(y))'} = \frac{1}{\cos(y)}$$

Como $y \in [-\pi/2, \pi/2]$, pela Relação Fundamental da Trigonometria, segue que $\cos(y) = \sqrt{1 - sen^2(y)}$. Logo, $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - sen^2(y)}}$ e como $sen(y) = x$, segue que

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ onde } x \in (-1,1).$$

■

Proposição 4.4.8 *[2] Seja $f : [-1,1] \to [0,\pi]$ definida pela regra $f(x) = arc\ \cos(x)$. Então, $f(x) = y$ é derivável em $(-1,1)$ e $y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.*

Demonstração:
Usando a relação $arc\ cos(x) = \frac{\pi}{2} - arc\ sen(x)$ e a Proposição 4.4.8, temos

$$y' = \left(\frac{\pi}{2} - arcsen(x)\right)' = 0 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

∎

Proposição 4.4.9 *[2] Seja $f : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$, tal que $f(x) = arc\ tg(x)$. Então, $f(x) = y$ é derivável e $y' = \frac{1}{1+x^2}$*

Demonstração:
Se $y = arc\ tg(x)$, então $x = tg(y)$, onde $t \in (-\pi/2, \pi/2)$. É fato que a derivada de $tg(y)$ existe e é não nula para qualquer $y \in (-\pi/2, \pi/2)$, logo

$$y' = \frac{1}{(tg(x))'} = \frac{1}{sec^2(y)}.$$

Pelas identidades trigonométricas, temos que $sec^2(y) = 1 + tg^2(y)$, assim

$$y' = \frac{1}{1 + tg^2(y)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

∎

4.5 DERIVADA DE UMA FUNÇÃO NA FORMA IMPLÍCITA

Dada uma equação envolvendo as variáveis x e y, quando conseguimos isolar a variável y, dizemos que y é uma função de x e podemos naturalmente estudá-la. Entretanto, quando não conseguimos isolar y, dizemos que y é uma função implícita de x, ou que a relação dada define y implicitamente como uma função de x.

Definição 4.5.1 *[3] Uma função $y = g(x)$ é definida implicitamente pela equação $f(x,y) = 0$ se, para todo $x \in D(g)$,*

$$f(x, g(x)) = 0$$

Teorema 4.5.1 *Seja $y = g(x)$ uma função definida implicitamente pela equação $f(x,y) = 0$. Se f e g são diferenciáveis, então*

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)},\ y = g(x),\ \textit{desde de que}\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \neq 0.$$

Demonstração:
Usaremos o conceito de derivada parcial que foge do escopo desse trabalho.
Vamos deduzir uma fórmula para o cálculo de $g'(x)$ em todo $x \in D(g)$, para os quais $\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \neq 0$. Então, derivando em relação a x os dois membros da equação anterior, obtemos,

$$\frac{d}{dx}[f(x, g(x))] = 0$$

ou

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))\,\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))\,g'(x) = 0$$

e, portanto,

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)},\ y = g(x), \text{ desde de que } \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \neq 0.$$

Da mesma forma, $x = h(y)$ é definida implicitamente pela equação $f(x, y) = 0$ se, para todo $y \in D(h)$,

$$f(h(y), y) = 0.$$

Supondo f e g diferenciáveis e derivando os dois membros da equação acima em relação a y, obtemos:

$$\frac{d}{dy}[f(h(y), y)] = 0$$

ou

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\,\frac{dx}{dy} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,\frac{dy}{dy} = 0$$

e, portanto,

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)},\ x = h(y), \text{ em todo } y \in D(h), \text{ com } \frac{\partial f}{\partial x}(h(y), y) \neq 0.$$

Exemplo 4.5.1 *A função diferenciável $y = y(x)$ é definida implicitamente pela equação*

$$y^3 + xy + x^3 = 3$$

Expresse $\frac{dy}{dx}$ em termos de x e y.

Solução:

$$f(x,y) = y^3 + xy + x^3 - 3 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)} = -\frac{y+3x^2}{3y^2+x}$$

ou seja,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y+3x^2}{3y^2+x}$$

em todo x no domínio de $y = y(x)$, com $3(y(x))^2 + x \neq 0$.

Exemplo 4.5.2

(i) A equação $x^2 - 2^x - \dfrac{y}{3} + 1 = 0$ *define implicitamente a função* $y = 3(x^2 - 2^x + 1)$.

(ii) A equação $x^2 + y^2 = 9$ *define, implicitamente uma infinidade de funções.*

Solução:

De fato, isolando y*, na equação do item* (ii)*, obtemos:*

$$y = \pm\sqrt{9 - x^2}.$$

Duas das funções obtidas acima são:

$$y = \sqrt{9 - x^2} \text{ e } y = -\sqrt{9 - x^2}.$$

O gráfico das funções acima estão representados na Figura 4.5.1.

Suponhamos que $F(x,y) = 0$ define implicitamente uma função **derivável** $y = f(x)$. Podemos determinar y' sem, necessariamente, explicitar, y.

Exemplo 4.5.3 *Sabendo que* $y = f(x)$ *é uma função derivável definida implicitamente pela equação* $x^2 + y^2 = 9$*, determine* $\dfrac{dy}{dx}$.

Tomando $F(x,y) = x^2 + y^2 - 9$ *segue que*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}.$$

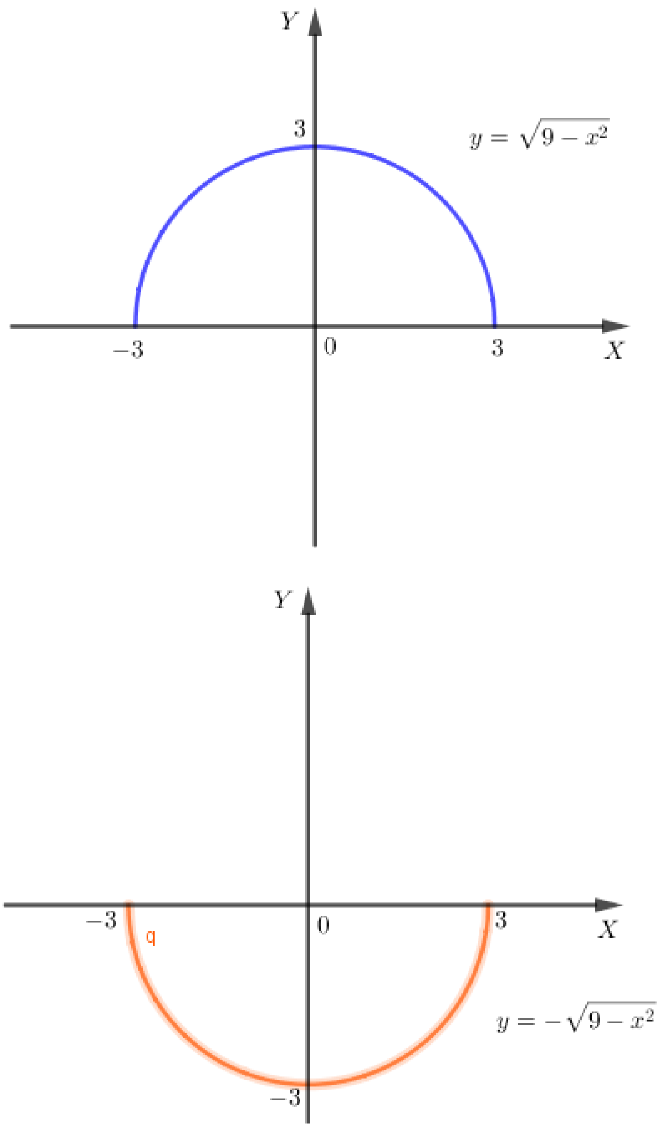


Figura 4.5.1

4.6 derivada de uma função na forma paramétrica

Sejam:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (1)$$

duas funções da mesma variável t, $t \in [a, b]$. Tomando x e y como as coordenadas de um ponto P, podemos dizer que a cada valor de t, corresponde um ponto do plano xy. Se as funções $x = x(t)$ e $y = y(t)$ forem contínuas quando t varia de a até b, o ponto $P(x(t), y(t))$ descreve uma curva no plano. As equações dadas em (1) são chamadas equações paramétricas da curva e t é chamado parâmetro, conforme Figura 4.6.1.

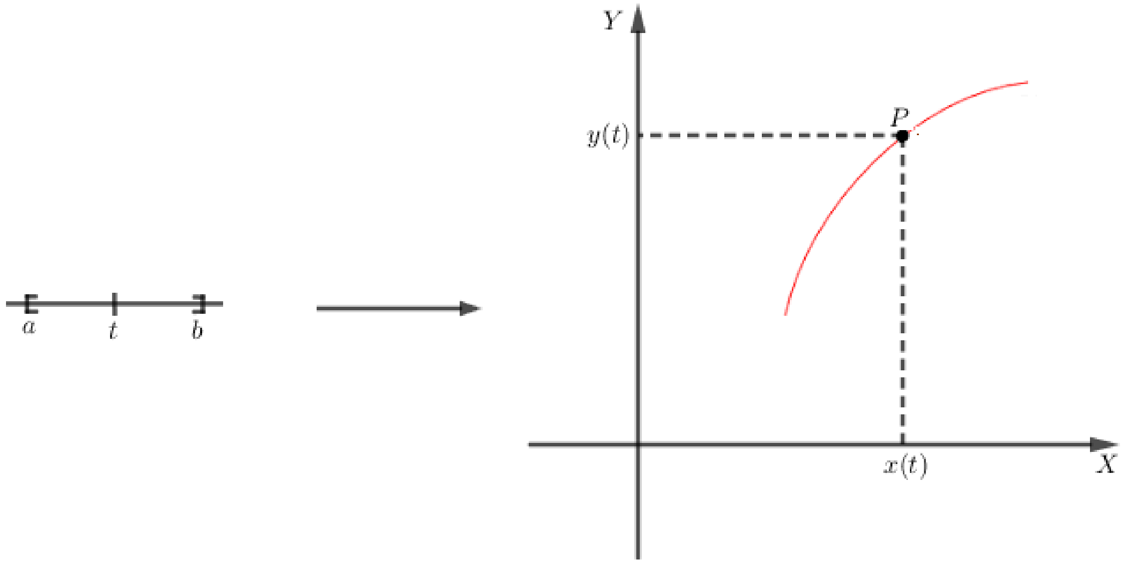


Figura 4.6.1

Proposição 4.6.1 *[3] (Derivada de uma função na forma paramétrica)*
Seja y uma função de x definida pelas equações paramétricas

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \; t \in [a,b]. \quad (1)$$

Demonstração:
Suponhamos que a função $x = x(t)$ admita uma função inversa $t = t(x)$ e ambas são deriváveis. Assim, podemos escrever $y = y[t(x)]$ e dizemos que as equações (1) definem y em função de x na forma paramétrica. Além disso,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

e como $x = x(t)$ e sua inversa $t = t(x)$ são deriváveis, segue, portanto, que $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{dt}}$, logo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

■

Exemplo 4.6.1 *As equações*

$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 3t + 1 \end{cases}$$

definem uma função $y(x)$ na forma paramétrica.

De fato, a função $x = 2t - 1$ possui inversa, a saber, $t = \frac{1}{2}(x+1)$. Substituindo $t = \frac{1}{2}(x+1)$ em $y = 3t+1$, obtemos $y = 3t+1$, logo $y = 3\left[\frac{1}{2}(x+1)\right]$ e assim, $y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$ e portanto, $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3}{2}$.

4.7 DERIVADAS SUCESSIVAS

Nesta seção veremos alguns conceitos relacionados às derivadas sucessivas e posteriormente sua empregabilidade na resolução de problemas de otimização.

Definição 4.7.1 *[2] Suponha que f é uma função derivável num certo intervalo. Se a função $f'(x)$, chamada de derivada primeira de $f(x)$, é derivável no mesmo intervalo, então existe a função derivada de $f'(x)$, indicada como $f''(x)$ (lê-se f-duas linhas de x) ou $\frac{d^2f}{dx^2}$ (lê-se derivada segunda de f em relação a x) ou $\frac{d^2y}{dx^2}$ (lê-se derivada segunda de y em relação a x), que é chamada de derivada segunda de $f(x)$. Diz-se então que $f(x)$ é derivável duas vezes.*

Seguindo esse procedimento sucessivamente e, supondo que $f(x)$ é n vezes derivável, obtém-se a função derivada n-ésima, ou derivada de ordem n, de $f(x)$ indicada como $f^n(x)$. As funções $f'(x), f''(x), ..., f^n(x)$, são as derivadas sucessivas de $f(x)$.

Exemplo 4.7.1

(i) Se $f(x) = 2x^2 - 3$, então $f'(x) = 4x$ e $f''(x) = 4$

(ii) Se $f(x) = sen(x)$, então $f'(x) = \cos(x)$, $f''(x) = -sen(x)$ e $f'''(x) = -\cos(x)$.

5 APLICAÇÕES DE DERIVADA

5.1 TAXA DE VARIAÇÃO

Nesta seção serão apresentadas algumas situações de aplicabilidade das noções de derivadas em problemas simples da Física e da Geometria.

Definição 5.1.1 *[2] Suponhamos que um corpo se move em linha reta e que $s = s(t)$ represente o espaço percorrido pelo corpo até o instante t. Então, no intervalo de tempo entre t e $t + \Delta t$, o corpo sofre um deslocamento $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$.*

Definimos velocidade média nesse intervalo de tempo como o quociente $v_m = \dfrac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$, isto é, a velocidade média é o quociente do espaço percorrido pelo tempo gasto para percorrê-lo.

Observe que para determinarmos a velocidade instantânea do móvel no instante t, calculamos a sua velocidade média em intervalos de tempo cada vez menores. Assim, a velocidade instantânea é o limite das velocidades médias quando $\Delta t \to 0$. Matematicamente, temos:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

Definição 5.1.2 *[2] A aceleração média no intervalo de tempo t até $t + \Delta t$ é dada por:*

$$a_m = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

Note que ela mede a variação da velocidade do corpo por unidade de tempo no intervalo de tempo Δt. Para obtermos a aceleração do corpo no instante t, tomamos a sua aceleração média em intervalos de tempo Δt cada vez menores. A *aceleração instantânea* é o limite

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = v'(t).$$

Quando um corpo se move em linha reta de acordo com a equação do movimento $s = s(t)$, a sua velocidade é dada por $s'(t)$.

Como é sabido, a velocidade representa a razão de variação do deslocamento por unidade de variação de tempo. Assim, a derivada $s'(t)$ é a *taxa de variação* da função $s(t)$ por unidade de variação t.

O mesmo ocorre com a aceleração que é dada por $a(t) = v'(t)$. Ela representa a razão de variação de velocidade $v(t)$ por unidade de variação do tempo t.

Toda derivada pode ser interpretada como uma taxa de variação. Dada uma função $y = f(x)$, quando a variável independente varia de x a $x + \Delta x$, a correspondente variação de y será $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. O quociente $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, representa a *taxa média* de variação de y em relação a x.

A derivada $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ é a *taxa instantânea* de y em relação a x.

Exemplo 5.1.1 *Seja l a medida do lado de um quadrado. Logo, sua área é dada por $A = l^2$. Sendo assim, determinar:*

(i) a taxa de variação média da área de um quadrado em relação ao lado quando este varia de $2,5$ a $3,0$ m.

(ii) a taxa de variação da área em relação ao lado quando este mede 4 m.

Solução:

(i) A taxa média de variação de A em relação a l quando l varia de $2,5$ m a $3,0$ m é dada por:

$$\frac{\Delta A}{\Delta l} = \frac{A(3) - A(2,5)}{3 - 2,5} = \frac{9 - 6,25}{0,5} = 5,5.$$

(ii) A taxa de variação da área em relação ao lado é dada por:

$$\frac{dA}{dl} = \frac{d}{dl}(l^2) = 2l.$$

Quando $l = 4$ m, temos que $\dfrac{dA}{dl} = 2 \cdot 4 = 8$.

Portanto, quando $l = 4$ m, a taxa de variação da área do quadrado será $8m^2$ por variação de 1 metro no comprimento do lado.

5.2 MÁXIMOS E MÍNIMOS

Nesta seção serão apresentados alguns conceitos relacionados às noções de máximos e mínimos e como determinar o ponto de máximo ou de mínimo de uma função.

Definição 5.2.1 *[2] Uma função f tem um máximo relativo em c se existir um intervalo aberto I, contendo c tal que $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in I \cap D(f)$.*

Definição 5.2.2 *[2] Uma função f tem mínimo relativo em c se existir um intervalo aberto I, contendo c, tal que $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in I \cap D(f)$*

Exemplo 5.2.1 *A função $f(x) = 3x^4 - 12x^2$ tem máximo relativo em $c_1 = 0$, pois existe o intervalo $(-2,2)$, tal que $f(0) \geq f(x)$ para $x \in (-2,2)$.*

Em $c_2 = -\sqrt{2}$ e $c_3 = \sqrt{2}$, a função dada tem mínimos relativos, pois $f(-\sqrt{2}) \leq f(x)$ para todo $x \in (-2,0)$ e $f(\sqrt{2}) \leq f(x)$ para todo $x \in (0,2)$, conforme Figura 5.2.1 abaixo.

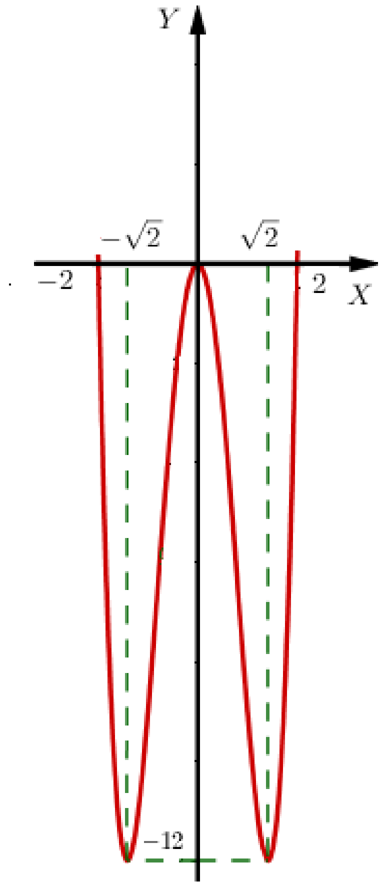


Figura 5.2.1

Definição 5.2.3 *[2] Dizemos que $f(c)$ é o máximo absoluto da função f, se $c \in D(f)$ e $f(c) \geq f(x)$ para todos os valores de x no domínio de f.*

Definição 5.2.4 *[2] Dizemos que $f(c)$ é o mínimo absoluto da função f se $c \in D(f)$, e $f(c) \leq f(x)$ para todos os valores de x no domínio de f.*

Exemplo 5.2.2

(i) A função $f(x) = x^2 + 5x - 6$ tem um mínimo absoluto igual a $-12,25$ em $c = -\dfrac{5}{2} = -2,5$, visto que $f(-2,5) = -\dfrac{49}{4} = -12,25 \leq f(x)$ para todo $x \in D(f)$.

(ii) A função $g(x) = -\dfrac{3}{5}x^2 + \dfrac{18}{5}x - 3$ *tem um máximo absoluto igual a* $\dfrac{12}{5} = 2,4$ *em* $c = 3$*, visto que* $g(3) = 2,4 \geq g(x)$ *para todo* $x \in D(g)$.

A Figura 5.2.2 (a) e (b) ilustra o comportamento das funções do Exemplo 5.2.2.

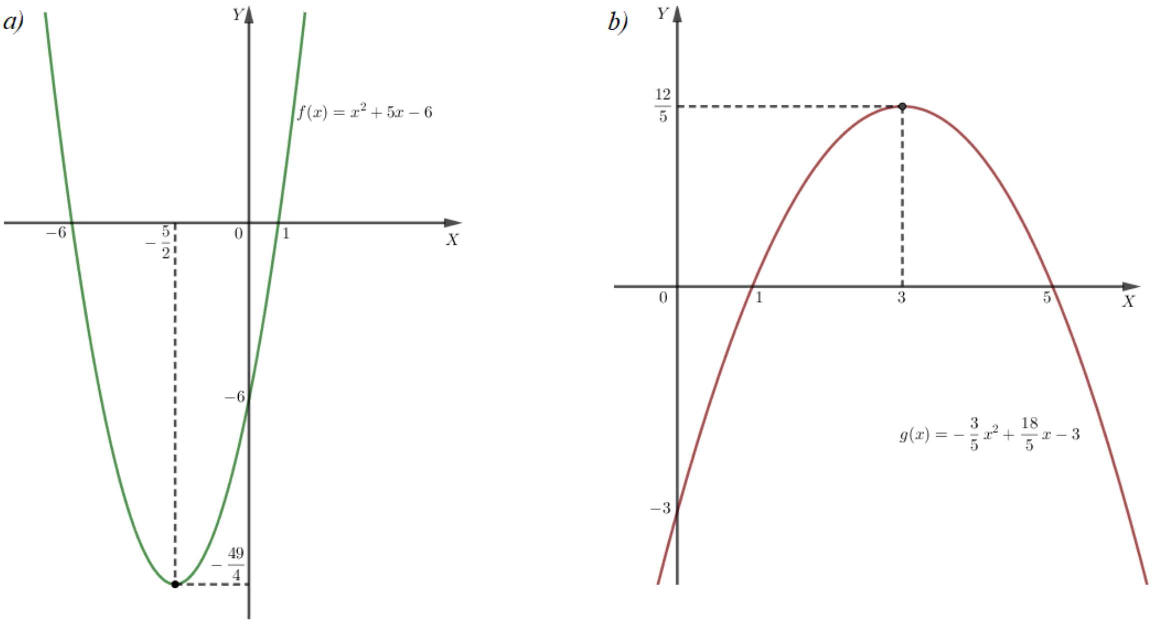


Figura 5.2.2

O resultado a seguir é uma ferramenta importante no estudo de extremos locais usando derivadas.

Teorema 5.2.1 *[3] Seja f uma função derivável em c, onde c é um ponto interior a $D(f)$. Uma condição necessária para que c seja ponto de máximo ou mínimo local é que $f'(c) = 0$.*

Demonstração:
Suponhamos que c seja ponto de máximo local. Assim, existe $r > 0$ tal que:

$$f(x) \leq f(c) \text{ em } (c - r, c + r) \cap D(f).$$

Como por hipótese, c é interior a $D(f)$, podemos escolher r de modo que $(c - r, c + r) \subset D(f)$.

Assim

$$f(x) \leq f(c) \ \forall x \in (c - r, c + r).$$

Como f é derivável em c, os limites laterais

$$\lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \quad \text{e} \quad \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

existem e são iguais a $f'(c)$:

$$f'(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Para $c < x < c + r$, $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$ e pela conservação do sinal

$$\lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

logo, $f'(c) \leq 0$. Para $c - r < x < c$, $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$; daí

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

logo, $f'(c) \geq 0$. Como $f'(c) \geq 0$ e $f'(c) \leq 0$, então $f'(c) = 0$. ■

A Figura 5.2.3 ilustra o Teorema acima.

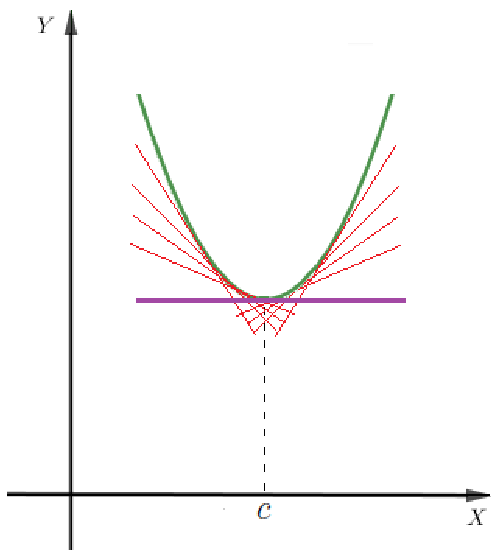


Figura 5.2.3

Geometricamente, se c é um ponto de extremo local da função f e f é derivável em c, se supormos que f é derivável, como a derivada da função em um ponto representa o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da f no ponto, percebe-se que a derivada de f decresce (respectivamente cresce) à medida que se aproxima de c pela esquerda e cresce (respectivamente decresce) à medida que se afasta de c pela direita, logo em algum momento a derivada de f tem que ser nula, e isto acontece no ponto c, ou seja, $f'(c) = 0$.

Teorema 5.2.2 *[2] Sejam f uma função derivável num intervalo (a, b) e c um ponto crítico de f neste intervalo, isto é, $f'(c) = 0$, com $a < c < b$. Se f admite a derivada f'' em (a, b), temos:*

(i) Se $f''(c) < 0$, f tem um valor máximo relativo em c.

(ii) Se $f''(c) > 0$, f tem um valor mínimo relativo em c

Demonstração:

(i) Por hipótese $f''(c)$ existe e $f''(c) < 0$. Então,

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} < 0.$$

Portanto, existe um intervalo aberto I, contendo c, tal que

$$\frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} < 0, \text{ para todo } x \in I.$$

Seja A o intervalo aberto que contém todos os pontos $x \in I$ tais que $x < c$. Então, c é extremo direito do intervalo aberto A. Seja B o intervalo aberto que contém todos os pontos $x \in I$ tais que $x > c$. Assim, c é extremo esquerdo do intervalo aberto B.

Se $x \in A$, temos $x - c < 0$. Assim, $f'(x) > f'(c)$.

Se $x \in B$, temos $x - c > 0$. Assim, $f'(x) < f'(c)$.

Como $f'(c) > 0$, concluímos que, se $x \in A$, $f'(x) > 0$ e, se $x \in B$, $f'(x) < 0$. Assim, pelo Teorema 5.2.1, f tem uma valor máximo relativo em c.

(ii) Análoga à demonstração do item (i). ∎

Exemplo 5.2.3 *Na administração de uma empresa, procura-se estabelecer relações matemáticas entre as grandezas envolvidas, tendo em vista a otimização da produção, ou seja, a busca de um custo mínimo ou de um rendimento máximo. Naturalmente, as relações obtidas decorrem de certas hipóteses sobre o modo de produção, que envolvem tanto a proporcionalidade direta quanto a inversa, a proporcionalidade entre uma grandeza e o quadrado da outra, o crescimento exponencial, entre outras possibilidades. Uma área que trata da formulação de modelos matemáticos (fórmulas) para representar tais relações de interdependência chama-se* ***Pesquisa operacional****.*

Suponha que, em certa empresa de produtos eletrônicos, a organização da produção seja tal que o custo total ***C*** *para produzir uma quantidade* ***q*** *de determinado produto seja apresentado pela função $C(q) = q^2 - 1.000q + 800.000$ (**C** em reais, **q** em unidades do produto).*

a) Determine o nível de produção (valor de **q**) que minimiza o custo total **C** e calcule o custo mínimo.

b) Represente o gráfico de $C(q)$.

c) Para $q = 0$ o custo é $R\$$ 800 mil. Como pode ser interpretado esse fato?

d) Qual é o nível de produção que corresponde a um custo de $R\$$ 800 mil?

e) Do ponto de vista do custo, tanto faz um nível de produção de $q = 300$ ou um nível de produção de $q = 700$. E do ponto de vista do rendimento bruto (faturamento da empresa)?

Solução:

a) A pergunta é qual é o valor de q que corresponde ao mínimo da função $C(q)$.

Derivando a função $C(q) = q^2 - 1.000q + 800.000$ em relação ao parâmetro q, obtemos:

$C'(q) = 2q - 1000.$

Tomando $C'(q) = 0$ (Teorema 5.2.1), temos:

$C'(q) = 2q - 1000 \Longrightarrow 2q - 1000 = 0 \Longrightarrow q = 500$, que corresponde ao nível de produção que apresenta o custo mínimo de produção (Teorema 5.2.1). E assim, o valor do custo mínimo é dado por: $C(500) = 500^2 - 1000 \cdot 500 + 800.000 = 550.000$ reais.

b) Observe na Figura 5.2.4 que o gráfico de $C(q)$ é uma parábola com concavidade para cima, cortando o eixo C no ponto de ordenada 800.000, e com vértice no ponto $(500; 550.000)$:

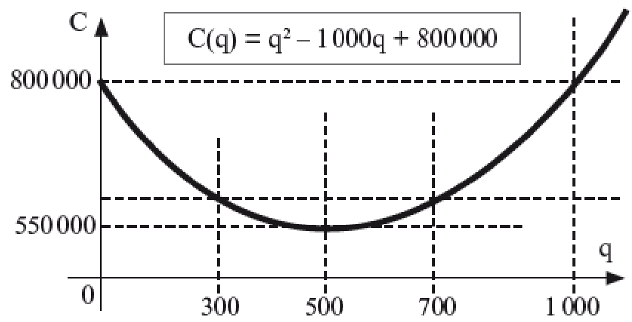


Figura 5.2.4

c) O custo inicial de $R\$$ 800.000 corresponde ao custo fixo, independentemente de se iniciar a produção (aluguéis, equipamentos, salários etc.).

d) No modelo de produção suposto, o custo de $R\$$ 800 mil corresponde a dois níveis de produção. Para determiná-los, basta resolver a equação $C(q) = 800.000$, ou seja: $q^2 - 1.000q + 800.000 = 800.000$, de onde obtemos $q = 0$ ou $q = 1.000$.

e) De fato, do ponto de vista do custo, dois níveis de produção simétricos em relação ao vértice da parábola, como são 300 mil e 700 mil reais, correspondem ao mesmo custo; no caso $C(300) = C(700) = 590.000$. Entretanto, do ponto de vista do rendimento bruto, certamente é preferível o nível de maior produção.

Exemplo 5.2.4 *Em determinado país ocorreu uma epidemia provocada por uma espécie de vírus. Inicialmente, foram detectadas* 2 *mil pessoas infectadas. A estimativa dos epidemiologistas é a de que o número* **N** *de doentes cresça até o valor máximo* **L**, *que deverá ocorrer após seis semanas do aparecimento do vírus, devendo decrescer a partir de então. Supõe-se que a diferença $N(t) - L$ seja diretamente proporcional ao quadrado da diferença entre t e* 6, *ou seja, quando dobra a distância entre t e* 6*(valor que será o pico da doença), a queda no número de infectados torna-se quatro vezes maior:*

$$N(t) = k \cdot (t-6)^2 + L \text{ (k é uma constante).}$$

Com base nesse modelo, e sabendo que duas semanas após o início da epidemia havia 2.100 pessoas infectadas, responda:

a) Quais são os valores de k e L?

b) Como é o gráfico de $N(t)$?

c) Qual será o número máximo de pessoas infectadas?

d) Depois de quantas semanas o número de infectados cairá a zero?

Solução:

a) Sabemos que o valor de N para $t = 0$ é 2.000, e para $t = 2$ é 2.100; a partir dessas informações, podemos calcular os coeficientes f e L:

$N(0) = k \cdot (0-6)^2 + L = 2.000$

$N(2) = k \cdot (2-6)^2 + L = 2.100$

Concluímos, então, que $36k + L = 2.000$ e $16k + L = 2.100$.

Daí segue que $k = -5$ e $L = 2.180$.

Temos, portanto: $N(t) = -5 \cdot (t-6)^2 + 2.180$.

b) A Figura 5.2.5 apresenta o gráfico de $N(t)$.

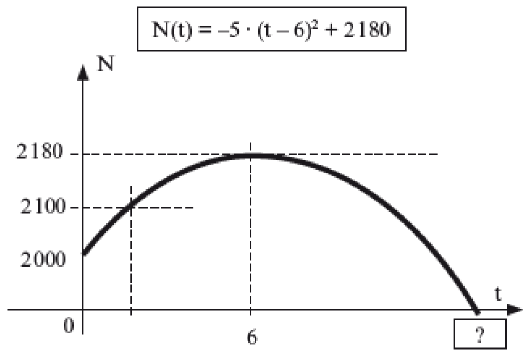


Figura 5.2.5

c) Derivando a função $N(t) = -5 \cdot (t-6)^2 + 2.180$ em relação ao parâmetro t, temos:

$N'(t) = -10t + 60$.

Fazendo $N'(t) = 0$ (Teorema 5.2.1), isto é, $-10t + 60 = 0 \Longrightarrow t = 6$. Ou seja, o número máximo de infectados ocorrerá quando $t = 6$. Sendo assim, o número máximo de infectados será: $N(6) = -5 \cdot (6-6)^2 + 2.180 = 2.180$.

Exemplo 5.2.5 *Determine o número real positivo cuja soma com o inverso de seu quadrado seja mínima.*

Solução:

Seja y o número procurado, logo, $y = x + \dfrac{1}{x^2}$.

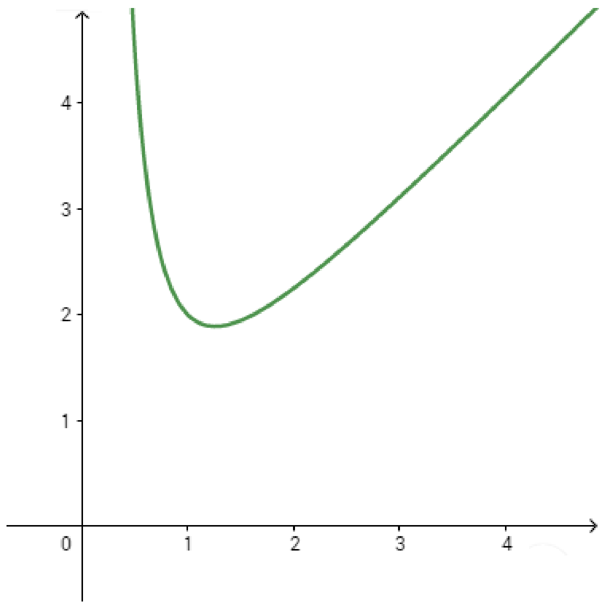


Figura 5.2.6

Assim, $y = f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$ cujo grafico é representado na Figura 5.2.6. Logo, o número y procurado é mínimo da função f.

Segue então que $y' = 1 - \dfrac{1}{x^3}$, e pelo Teorema 5.2.1, temos que $y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \dfrac{1}{x^3} = 0$ assim, $x = \sqrt[3]{2}$.

Portanto, quando $x = \sqrt[3]{2}$, y é mínimo.

Exemplo 5.2.6 *Uma rede de água potável ligará uma central de abastecimento situada à margem de um rio de* 500 *m de largura a um conjunto habitacional situado na outra margem do rio,* 2000 *m abaixo da central. O custo de obra através do rio é de R\$* 640, 00 *por metro, enquanto, em terra, custa R\$* 312, 00. *Qual é a forma mais econômica de se instalar a rede de água potável?*

Solução:

A Figura 5.2.7 ilustra o problema a ser otimizado acima.

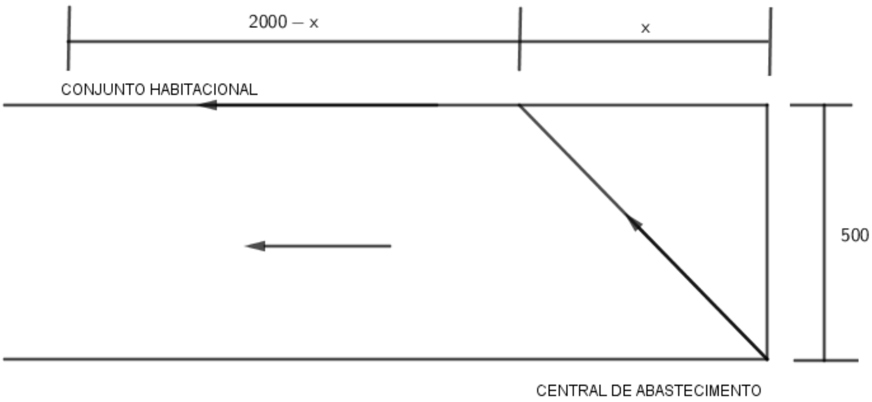


Figura 5.2.7

A função $C(x) = (2000 - x) \cdot 312 + \sqrt{x^2 + 500^2} \cdot 640$ nos dá o custo da obra.

Assim, $C'(x) = -312 + \dfrac{640x}{\sqrt{x^2 + 500^2}}$, e tomando $C'(x) = 0$ obtemos $x \cong 279,17$ m. E portando, $x \cong 279,17$ é um ponto crítico.

Note que $C''(x) = \dfrac{500^2 \cdot 640}{(x^2 + 500^2)^{\frac{3}{2}}}$ e $C''(279,19) > 0$, temos que $x = 279,17$ é um ponto de mínimo relativo (Teorema 5.2.2). Resta-nos saber se esse ponto de mínimo relativo é absoluto no intervalo $0 \leq x \leq 2000$.

Como o único ponto crítico de C no intervalo aberto $(0, 2000)$ é $x \cong 279,17$, este ponto é mínimo absoluto neste intervalo. Como $C(0) > C(279,17)$ e $C(2000) > C(279,17)$, concluímos que a obra poderá ser realizada com o menor custo possível se a canalização de água alcançar o outro lado do rio $279,17$ m abaixo da central de abastecimento.

6 PROPOSTA DIDÁTICA

Esta seção apresenta uma Proposta Didática para ser trabalhada com alunos do Ensino Médio, onde serão apresentados aspectos relacionados ao Cálculo Diferencial, como por exemplo, as noções de limites, derivadas e problemas de otimização. A forma de abordagem dos conteúdos a serem trabalhados foge do tradicional, pois apresenta essas noções de maneira lúdica e dinâmica utilizando algumas ferramentas tecnológicas.
O quadro a seguir apresenta os aspectos técnicos ao se desenvolver uma Situação de Aprendizagem que, neste caso, intitulamos "Proposta Didática".

[i] Ano/série: 1ª série do ensino médio.

[ii] Conteúdo: Noções de limites e de derivadas.

[iii] Competências e habilidades: compreender fenômenos que envolvem limites e derivadas e suas aplicações no cotidiano.

[iv] Tempo previsto: 4 aulas de 50 minutos cada.

[v] Materiais necessários: Laboratório de Informática.

[vi] Objetivos Gerais: A aplicação da matemática no dia-a-dia. Problemas envolvendo os noções básicas de limites e derivadas.

[vii] Objetivos Específicos: Formalizar os conceitos de limites e derivadas envolvendo diferentes tipos de ferramentas, como Beamer e o *software GeoGebra*.

[vii] Procedimentos Metodológicos: Serão propostas algumas atividades presentes no dia a dia dos alunos envolvendo o conteúdo abordado, e posteriormente a formalização do conceito. As atividades serão desenvolvidas em grupos de dois alunos no laboratório de informática da unidade escolar.

6.1 AULA 1: LIMITES E DERIVADAS - USANDO BEAMER.

O LaTeX é um conjunto de macros para o programa de diagramação de texto TeX, utilizado amplamente na produção de textos matemáticos e científicos, devido a sua alta qualidade tipográfica [12].

O Beamer é uma classe do LaTeX para criação de apresentações no formato PDF, o que as torna altamente portáteis. Sua estrutura é a mesma do LaTeX, com algumas características específicas. É possível desenvolver apresentações dinâmicas com sobreposições e transições animadas entre os quadros, tornando o assunto mais atrativo para os alunos [1].

O objetivo principal da aula é introduzir os conceitos relativos à limites e derivadas usando esta ferramenta, fazendo com que os alunos absorvam os conceitos de forma lúdica. Esta é a primeira das 4 aulas sequenciais e poderá ser ministrada na própria sala de aula.

Segue abaixo um roteiro da aula:

- Noção intuitiva de limite e definição de função contínua.
- Exemplo de função contínua.
- Exemplo de função onde não existe um determinado limite.
- Exemplo de função onde existe o limite num ponto mas a função não é contínua no ponto.
- Definição formal de limite usando intervalos (intuitivo).
- Exemplo de existência de limite usando intervalos.
- Exemplo de não existência de limite usando intervalos.
- Noção intuitiva de reta tangente ao gráfico de função (limite das retas secantes).
- Definição formal de derivada de uma função num ponto.
- Exemplo de função onde não existe a derivada num ponto.

Proposta de Aula

Noção intuitiva de limite e definição formal de função contínua.

Exemplo 1: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3$. Vamos estudar o comportamento de f quando $x_0 = 0$.
A Figura 6.1.1 apresenta o gráfico de f.

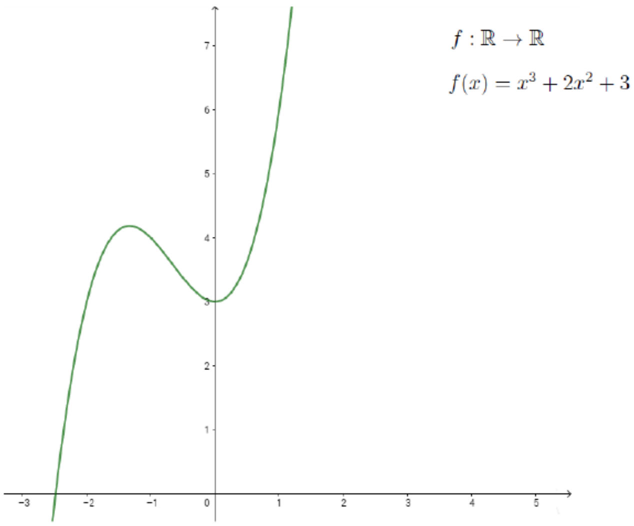


Figura 6.1.1

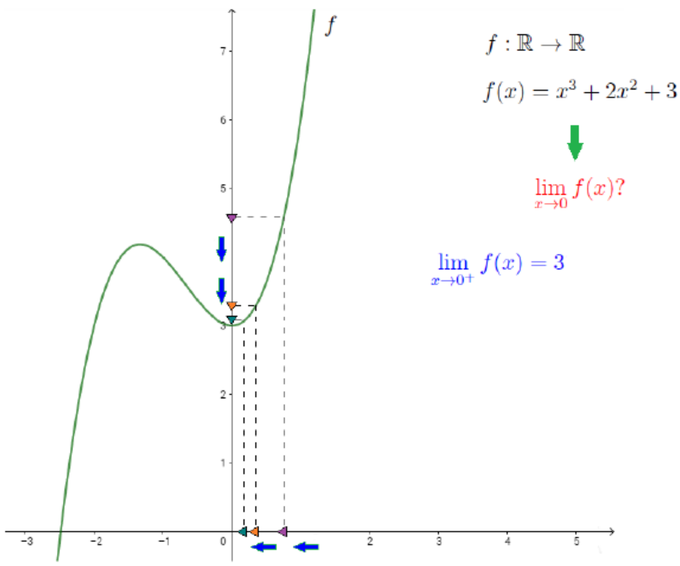


Figura 6.1.2

Observe na Figura 6.1.2 que quando nos aproximamos de 0 pela direita, f aproxima-se de 3.

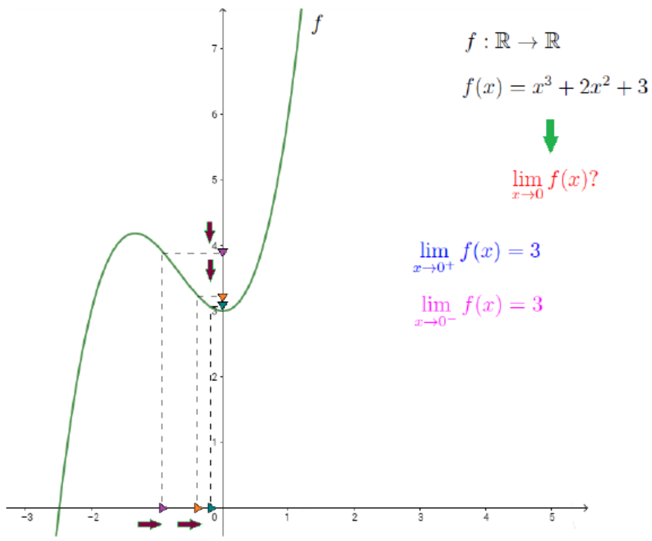


Figura 6.1.3

Observe na Figura 6.1.3 que quando aproximamos de 0 pela esquerda, f novamente aproxima-se de 3, logo, dizemos que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 3$.

Exemplo 2: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x < 2. \\ x+4, & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$

Vamos estudar o comportamento de f quando $x_0 = 2$.

A figura 6.1.4 apresenta o gráfico de f.

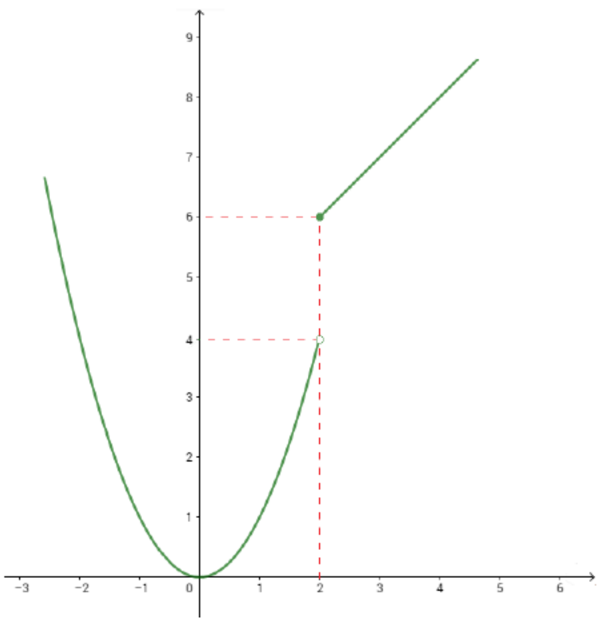


Figura 6.1.4

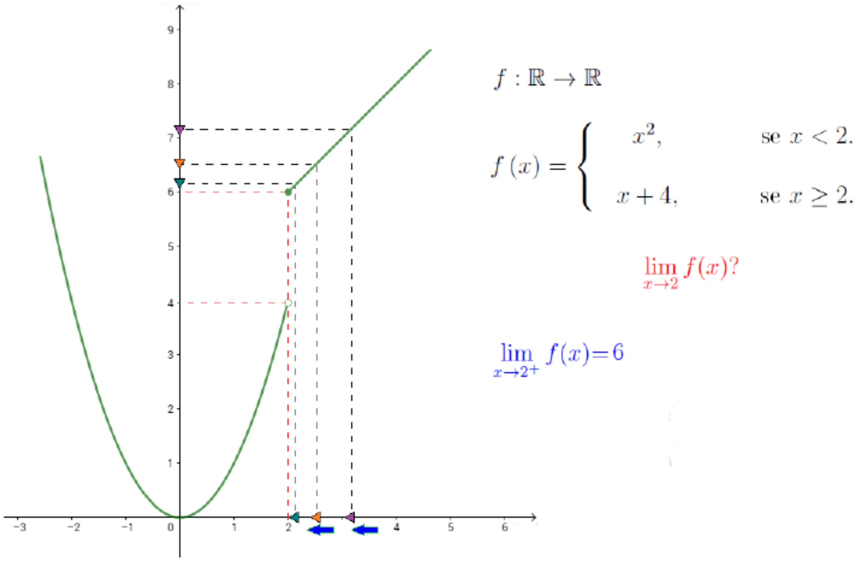


Figura 6.1.5

Observe na Figura 6.1.5 que quando nos aproximamos de 2 pela direita, f aproxima-se de 6.

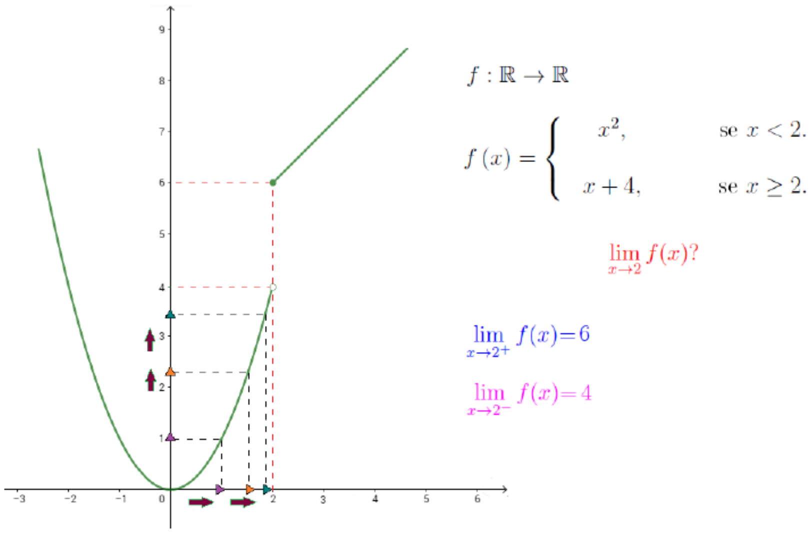


Figura 6.1.6

Observe na Figura 6.1.6 que quando nos aproximamos de 2 pela esquerda, f aproxima-se de 4, logo, $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ não existe.

Exemplo 3: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} e^{x-1}, & \text{se } x \neq 1. \\ 3, & \text{se } x = 1. \end{cases}$

Vamos estudar o comportamento de f quando $x_0 = 1$.
A Figura 6.1.7 apresenta o gráfico de f.

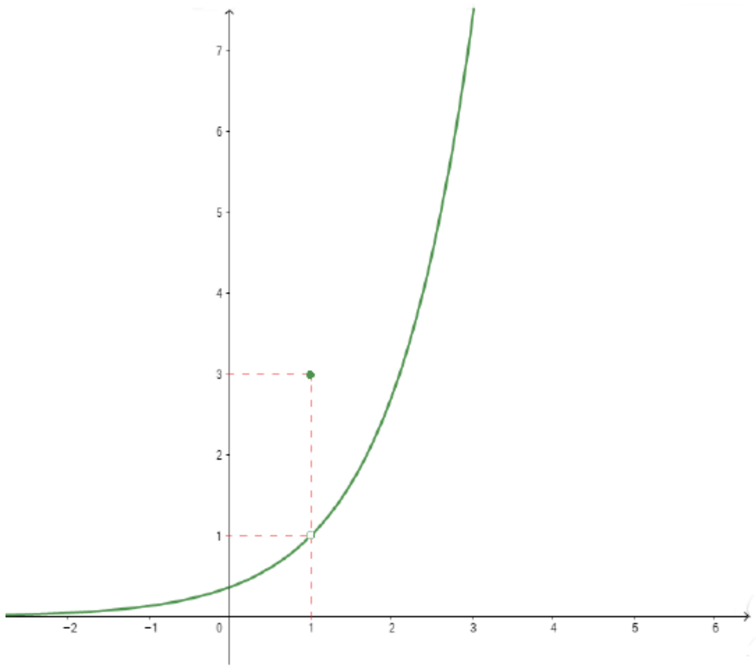


Figura 6.1.7

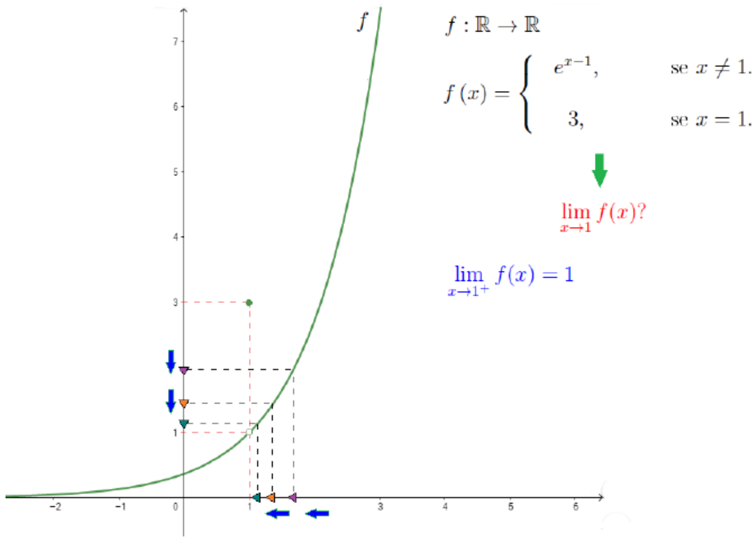


Figura 6.1.8

Observe na Figura 6.1.8 que quando nos aproximamos de 1 pela direita, f aproxima-se de 1.

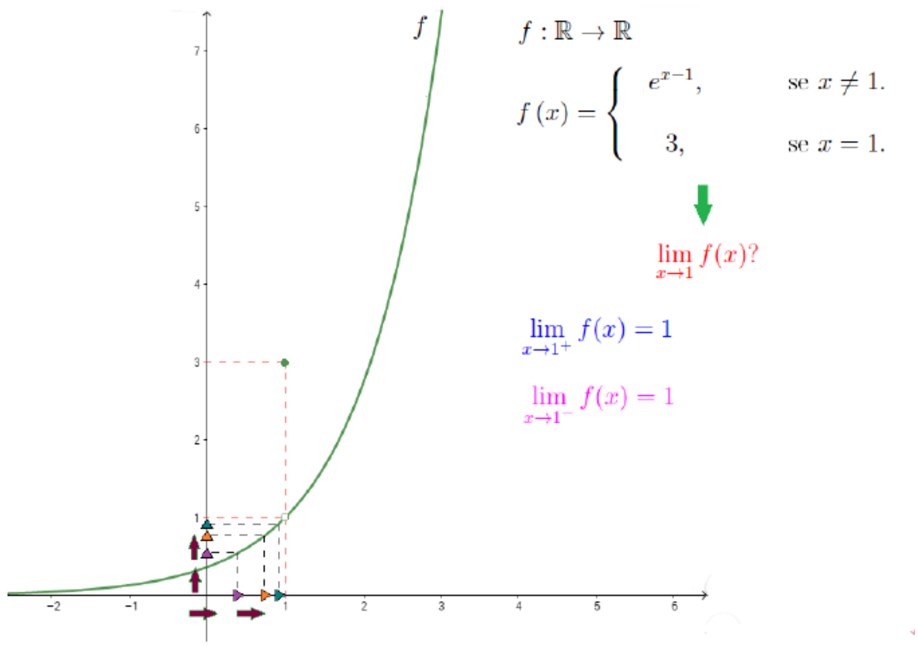


Figura 6.1.9

Observe na Figura 6.1.9 que quando nos aproximamos de 1 pela direita, f aproxima-se de 1, logo, $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$

Definição formal de limites usando intervalos (intuitivo)

Dada uma função f, dizemos que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ se, e somente, se dado qualquer intervalo aberto J centrado em L, existe um intervalo aberto I centrado em x_0, tal que pata todo $x \in I$, $x \neq x_0$, temos $f(x) \in J$.

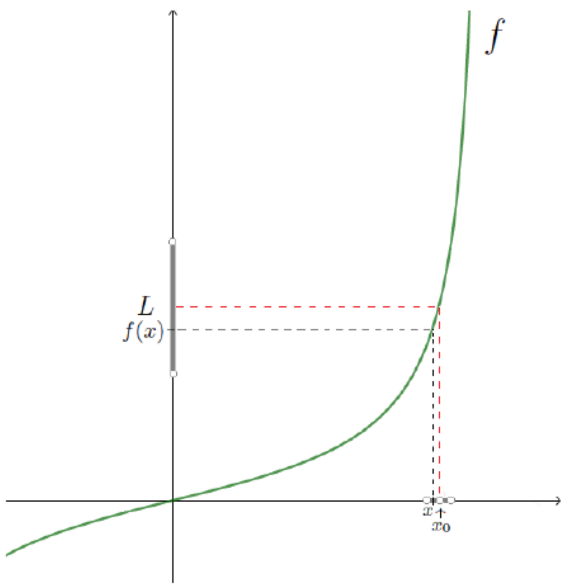


Figura 6.1.10

Observe na Figura 6.1.10 que quando tomamos qualquer intervalo aberto J centrado em L encontramos um intervalo aberto I centrado em x_0, neste caso, tomamos $x_0 > x$ e nota-se que $f(x_0) \in J$.

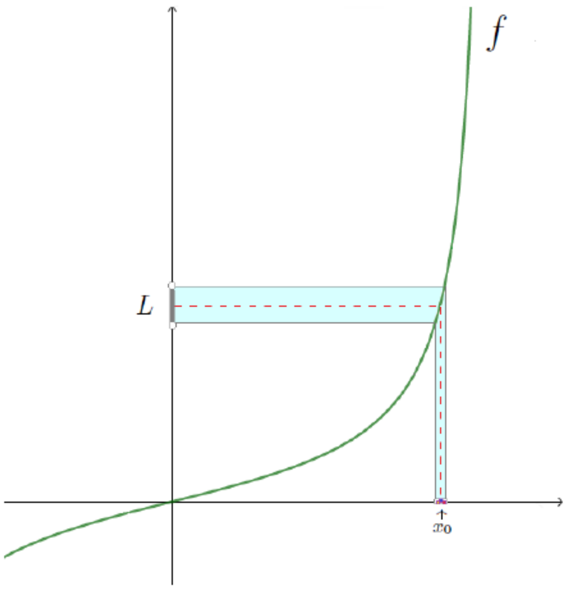


Figura 6.1.11

Observe na Figura 6.1.11 que quando reduzimos o intervalo aberto J centrado em L, ainda sim encontramos um intervalo aberto I centrado em x_0, independentemente se $x_0 > x$ ou $x_0 < x$.

Exemplo 4: $f : \mathbb{R} - \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = tg(x)$.

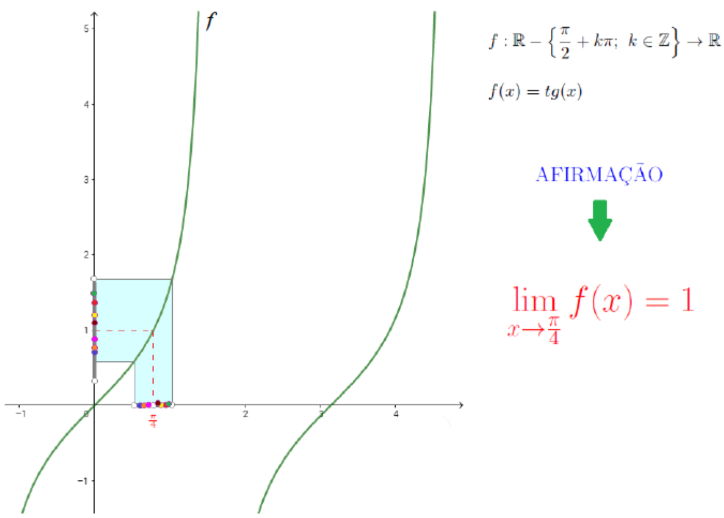


Figura 6.1.12

Observe na Figura 6.1.12 que quando tomamos um intervalo aberto J centrado em 1 (eixo das ordenadas), temos um intervalo I centrado em $\dfrac{\pi}{4}$ (eixo das abscissas).

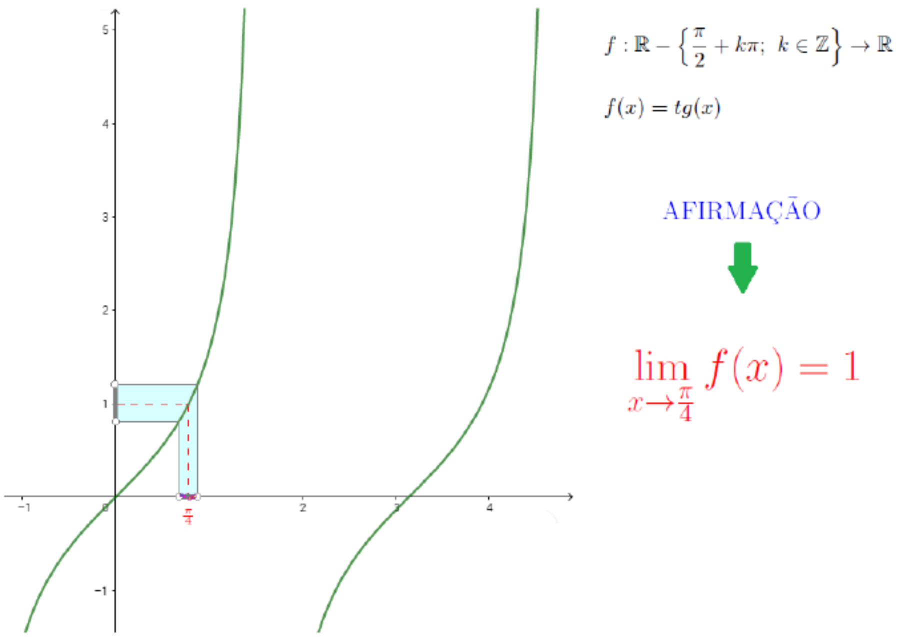


Figura 6.1.13

Note na Figura 6.1.13 que mesmo ao reduzirmos o intervalo J centrado em 1, ainda sim encontramos um intervalo aberto I centrado em $\dfrac{\pi}{4}$.

Definição de reta tangente e noção intuitiva de derivada.

Exemplo 1: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $x_0 \in \mathbb{R}$. Considere os pontos $P = (x_0, f(x_0))$ e $Q = (x_0 + h, f(x_0 + h))$, sendo h um acréscimo em x_0. Considere agora a reta s secante ao gráfico da função f pelos pontos P e Q.

A Figura 6.1.14 ilustra essa situação.

Observe na Figura 6.1.15 que o coeficiente angular da reta s é dada por $tg(\alpha) = m_s = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

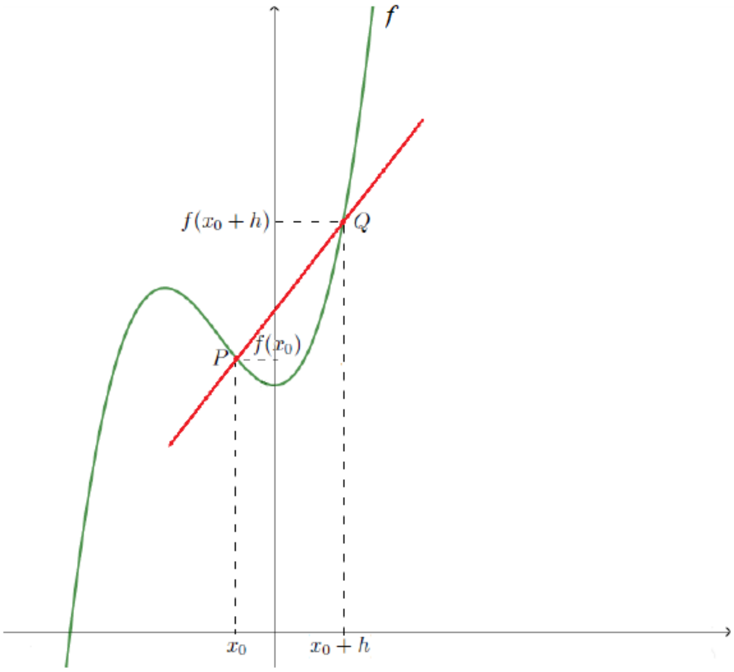


Figura 6.1.14

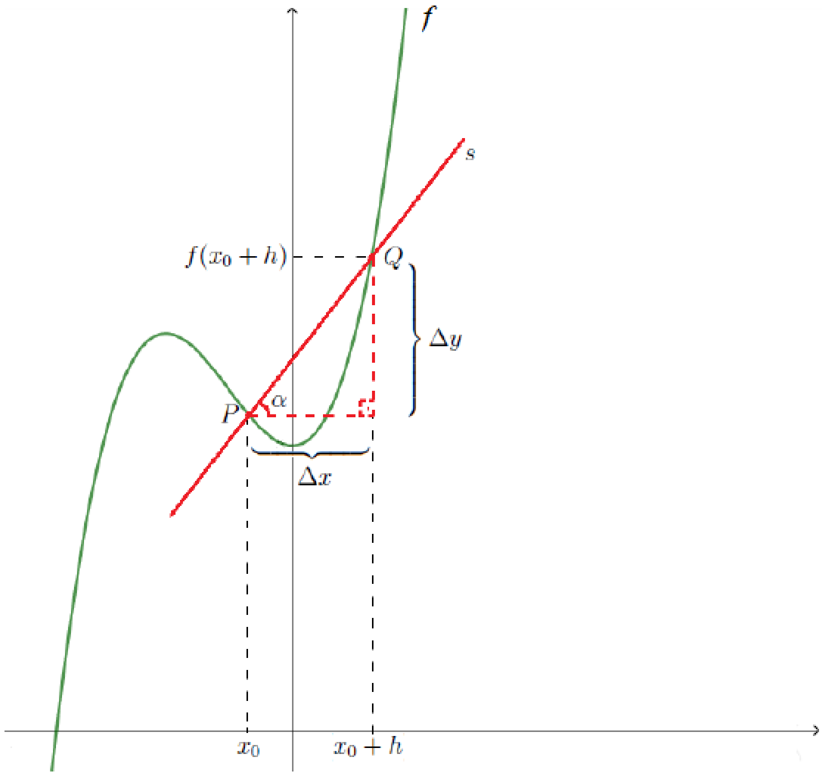


Figura 6.1.15

Observe agora nas Figuras 6.1.16 e 6.1.17 o comportamento das retas secantes quando $h \to 0$.

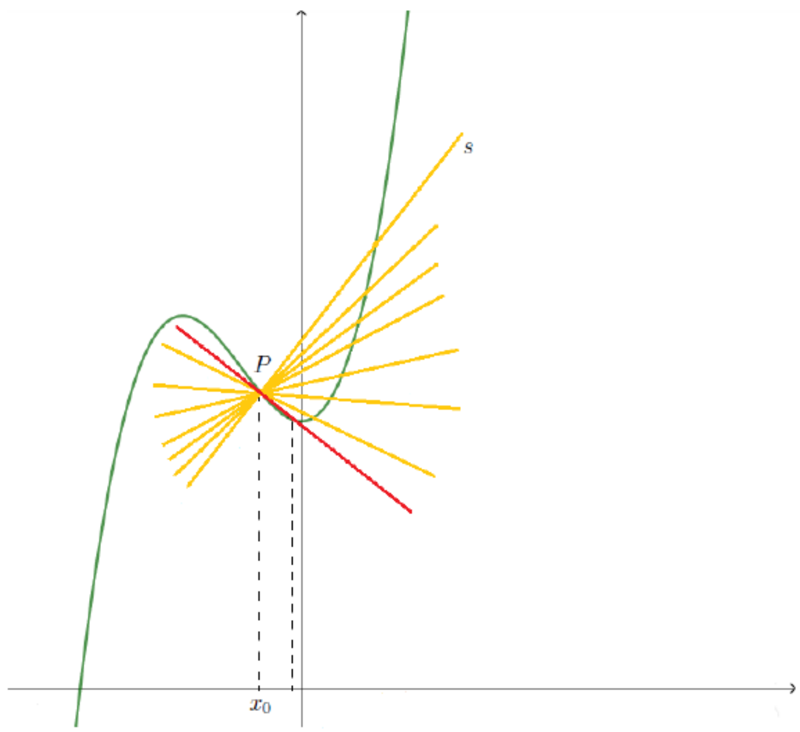


Figura 6.1.16

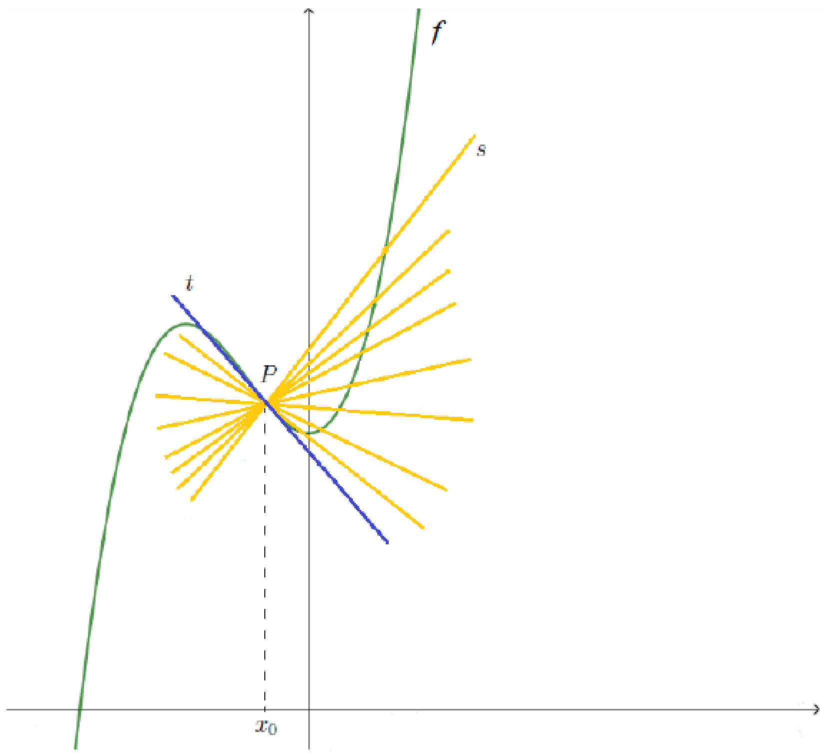


Figura 6.1.17

Geometricamente, percebemos que as retas secantes (amarelas) se aproximam da reta t (azul) à medida que h aproxima-se de zero por valores positivos $(h \to 0^+)$.

Estima-se que o coeficiente angular da reta t seja dado por

$$m_t = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Vamos observar na Figura 6.1.18 o comportamento das retas secantes quando h aproxima-se de zero por valores negativos $(h \to 0^-)$.

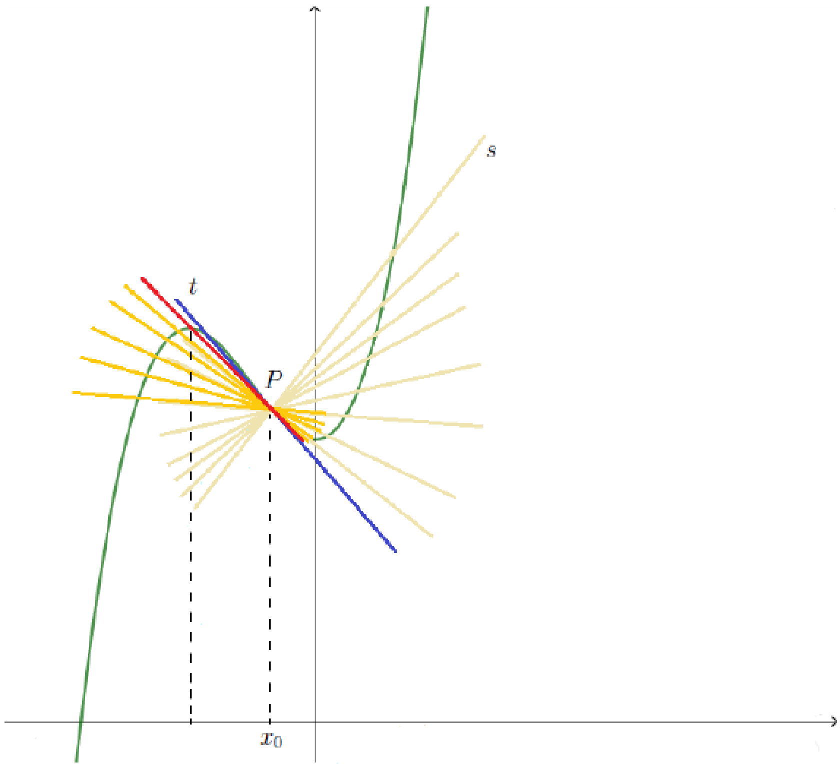


Figura 6.1.18

Estima-se que o coeficiente angular da reta t seja dado por

$$m_t = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Se existirem

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{e} \quad \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

e forem iguais, então a reta t é chamada **reta tangente ao gráfico de f** no ponto $(x_0, f(x_0))$ cujo coeficiente angular é dado por

$$m_t = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Definição: Sejam f uma função e x_0 um ponto de seu domínio. O limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

quando existe e é finito, denomina-se **derivada da f** em x_0 e indica-se por $f'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Se f admite derivada em x_0, então dizemos que f é derivável em x_0.
Se uma função f é derivável em x_0, então existe a reta tangente ao gráfico da f no ponto $(x_0, f(x_0))$ e $f'(x_0)$ é o coeficiente angular da reta tangente t, ou seja, $m_t = f'(x_0)$.

Exemplo 1: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} (x-3)^2 + 1, & \text{se } x \leq 4. \\ \\ -(x-4)^2 + 2, & \text{se } x > 4. \end{cases}$$

cujo gráfico está representado na Figura 6.1.19.

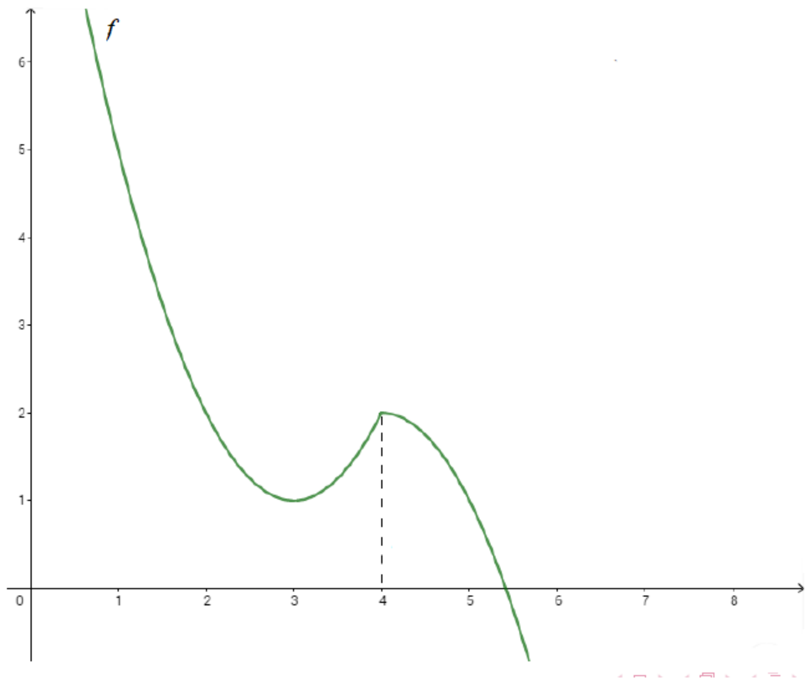


Figura 6.1.19

Existe a derivada de f em $x_0 = 4$? Ou equivalentemente, existe a reta tangente ao gráfico da f no ponto $(4, 2)$?
Observe nas Figuras 6.1.20 e 6.1.21 que ao aproximarmos de 4 pela sua direita obtemos uma determinada reta e ao aproximarmos de 4 pela sua esquerda obtemos outra reta, logo, não existe reta tangente a curva dada por f no ponto $(4, 2)$.

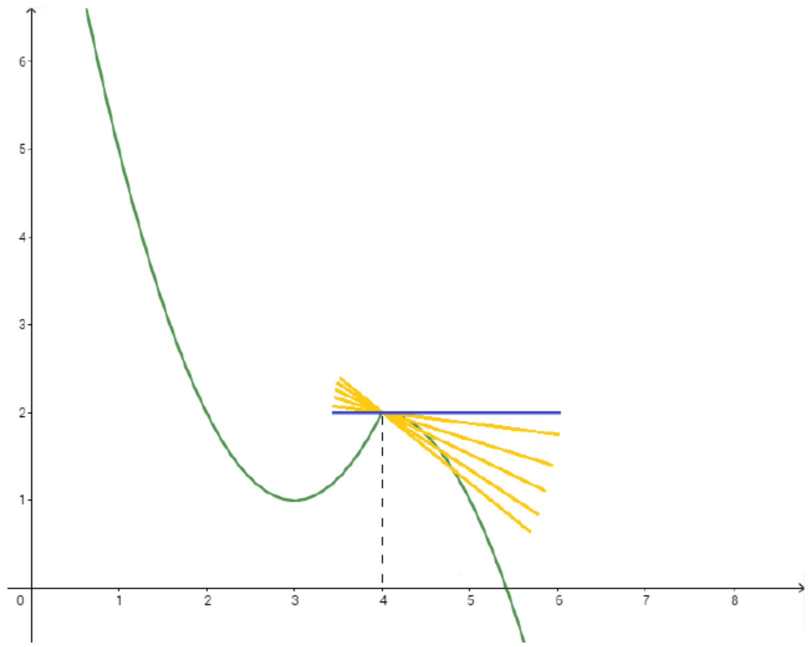


Figura 6.1.20

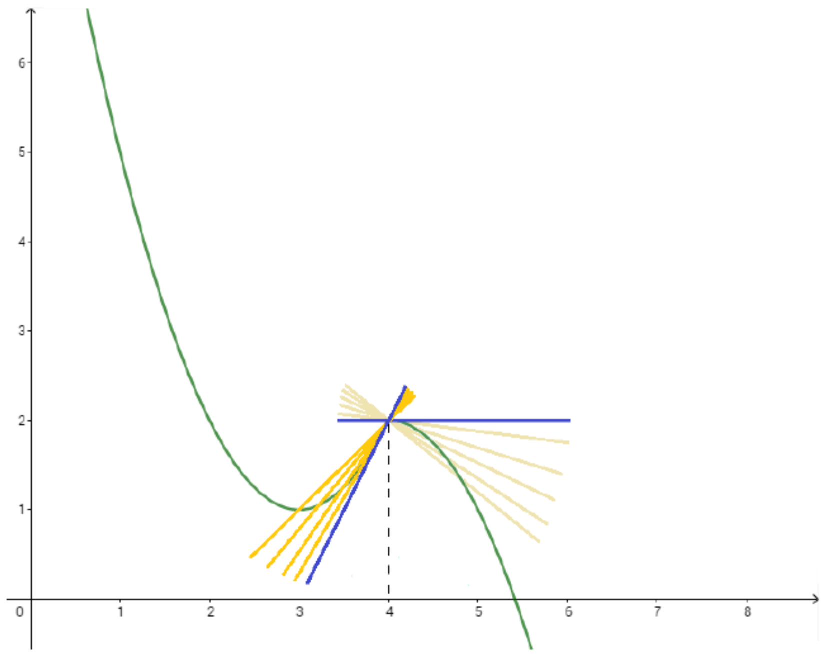


Figura 6.1.21

Podemos ainda, indicar que

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} \neq \lim_{h \to 0^-} \frac{f(4+h) - f(4)}{h},$$

logo, **não existe** a reta tangente ao gráfico da função f no ponto $(4,2)$, consequentemente, f não é derivável em $x_0 = 4$.

6.2 AULA 2: LIMITES E DERIVADAS - USANDO GEOGEBRA

Criado por Markus Hohenwarter, o GeoGebra é um *software* gratuito de matemática dinâmica desenvolvido para o ensino e aprendizagem da matemática nos vários níveis de ensino (do básico ao universitário). O *GeoGebra* reúne recursos de geometria, álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente. Assim, o *GeoGebra* tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si. Além dos aspectos didáticos, o *GeoGebra* é uma excelente ferramenta para se criar ilustrações profissionais para serem usadas no Microsoft Word, no Open Office ou no LaTeX. Escrito em JAVA e disponível em português, o *GeoGebra* é multiplataforma e, portanto, ele pode ser instalado em computadores com Windows, Linux ou Mac OS [7].

O objetivo principal dessa aula é fazer com que o aluno compreenda na prática as atividades desenvolvidas na Aula 1, isto é, que com as competências e habilidades desenvolvidas na Aula 1 possa compreender efetivamente as noções básicas de limites e derivadas utilizando o software Geogebra.

Esta aula deverá ser desenvolvida no laboratório de informática e com a intervenção do professor de matemática.

Apresentamos abaixo um roteiro da aula:

- Exemplo de função para se introduzir a noção intuitiva de limite e limites laterais.

- Exemplo de função onde não existe um determinado limite de forma animada utilizando o software Geogebra.

- Exemplo de função onde existe o limite num ponto mas a função não é contínua no ponto.

- Noção intuitiva de reta tangente ao gráfico de função (limite das retas secantes).

Proposta de Aula

Atividade 1: Noção intuitiva de limite

Nesta atividade serão propostas algumas situações com o objetivo de fazer com que o aluno compreenda na prática as atividades desenvolvidas na Aula 1.

Situação 1: Noções de limites

Os alunos devem plotar o gráfico da função f dada e observar o comportamento da mesma quando um dado x tende a um dado x_0, por exemplo, quando x tende a 4. É importante destacar, como no exemplo, o fato de que $x_2 > x_0$, desta forma é possível introduzir ao mesmo tempo as noções de limites laterais. Posteriormente, os alunos farão esse estudo também para um dado x_1 tendendo a x_0, onde $x_1 < x_0$.

Exemplo: $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 1,5^x - 3^{-x}$.

Observe nas Figuras 6.2.1 e 6.2.2 o que ocorre com f quando x_2 tende a x_0 ($x_2 > x_0$).

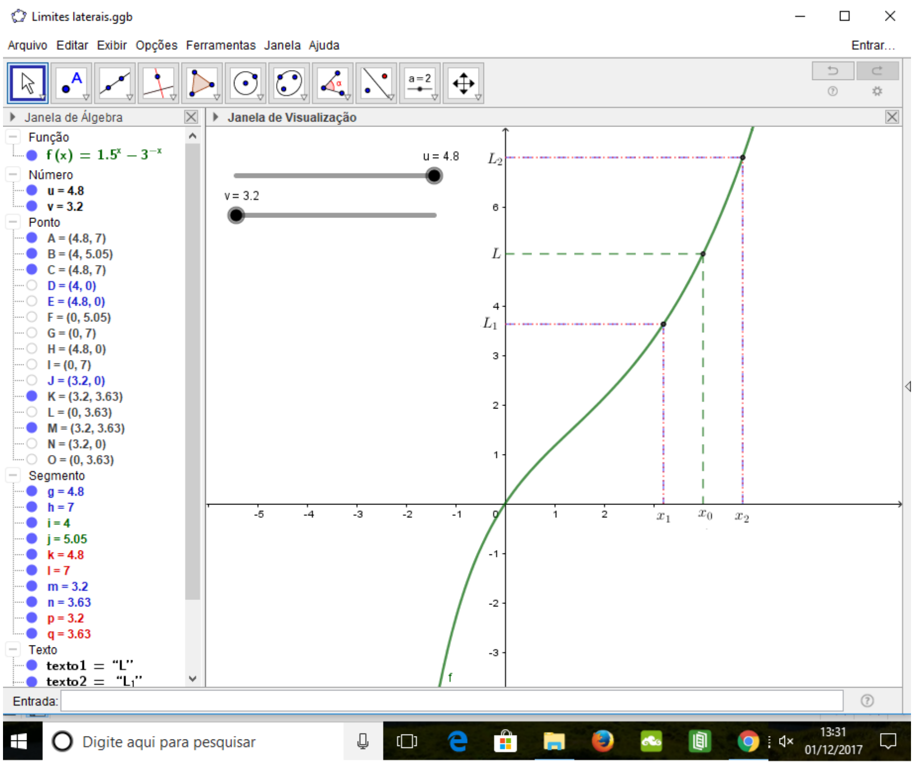


Figura 6.2.1

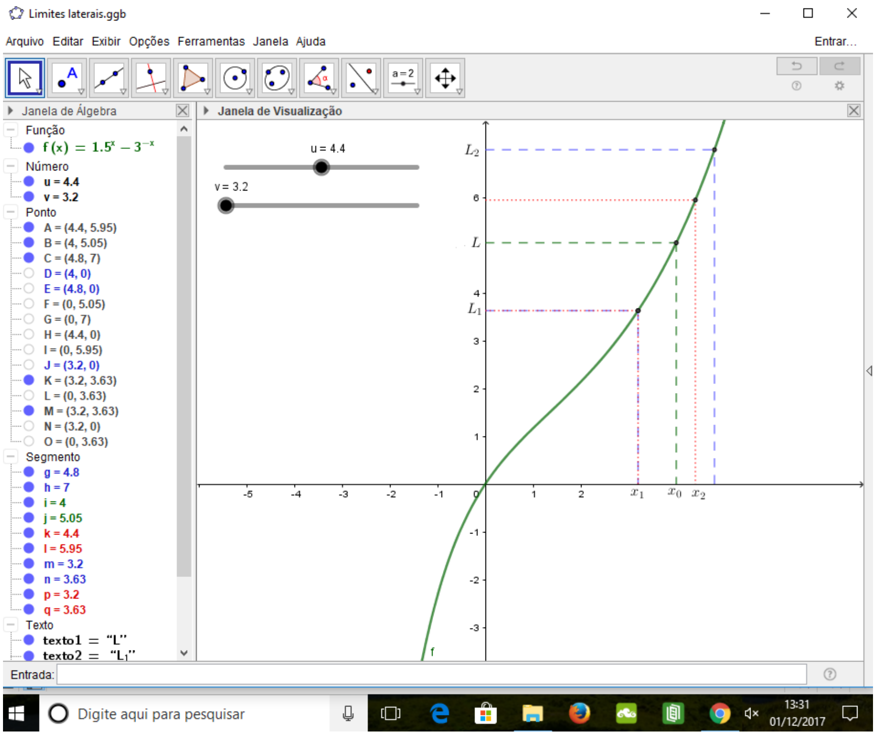


Figura 6.2.2

Note que pela Figura 6.2.2 que quando x_2 aproxima-se de x_0, f aproxima-se de L. Observe agora nas Figuras 6.2.3 e 6.2.4 o que ocorre com f quando x_1 tende a x_0 ($x_1 < x_0$).

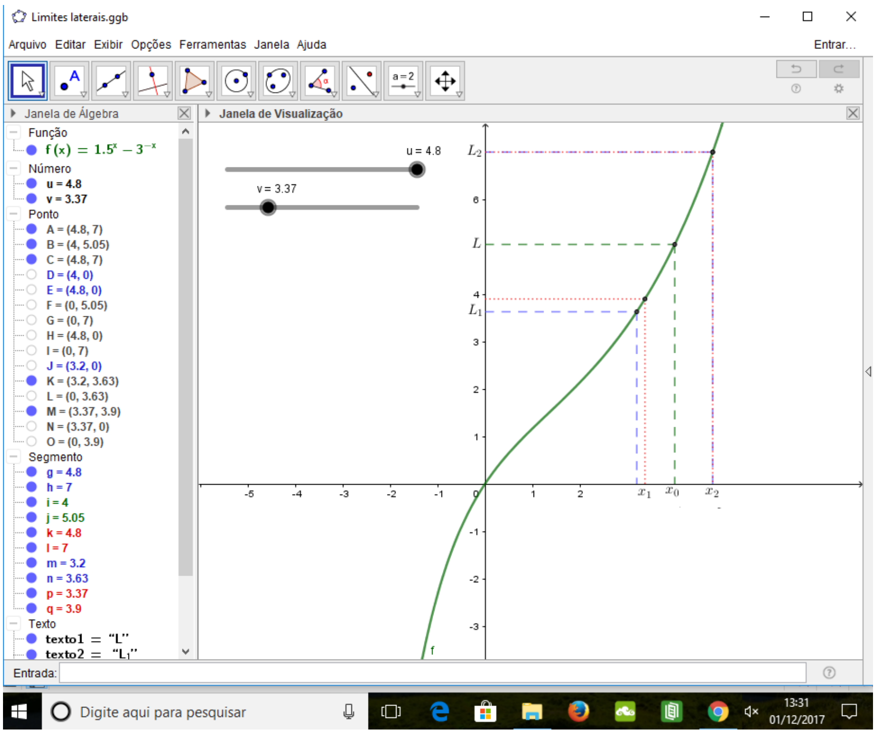


Figura 6.2.3

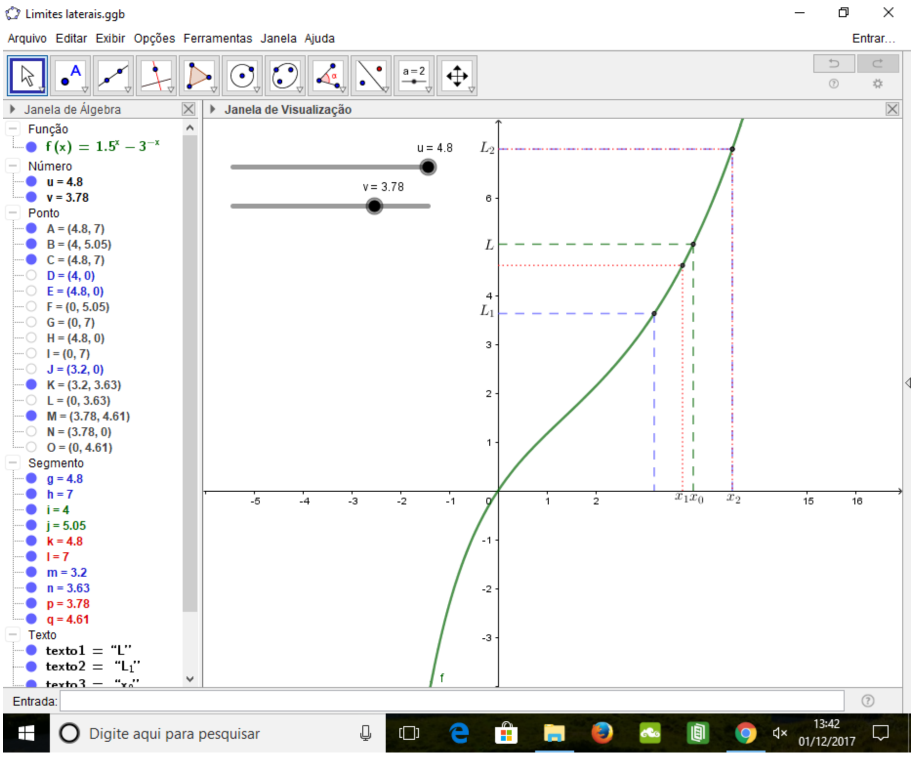


Figura 6.2.4

Analogamente, note que quando x_1 aproxima-se de x_0, f aproxima-se de L. Ver Figura 6.2.4.

Quando ocorre a situação descrita no exemplo acima, podemos indicar da seguinte forma: $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$. Isto é, o limite da função definida por $f(x)$ existe e é igual a L, quando x tende a x_0.

Situação 2: Formalizando limites laterais através de uma exemplo.

Nesta situação os alunos devem plotar o gráfico dado pela função f dada e observar o comportamento da mesma quando x tende a 1 pela direita e pela esquerda.

Exemplo: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x - 1$. Vamos visualizar o que ocorre com f quando x tende a 1 pela direita.

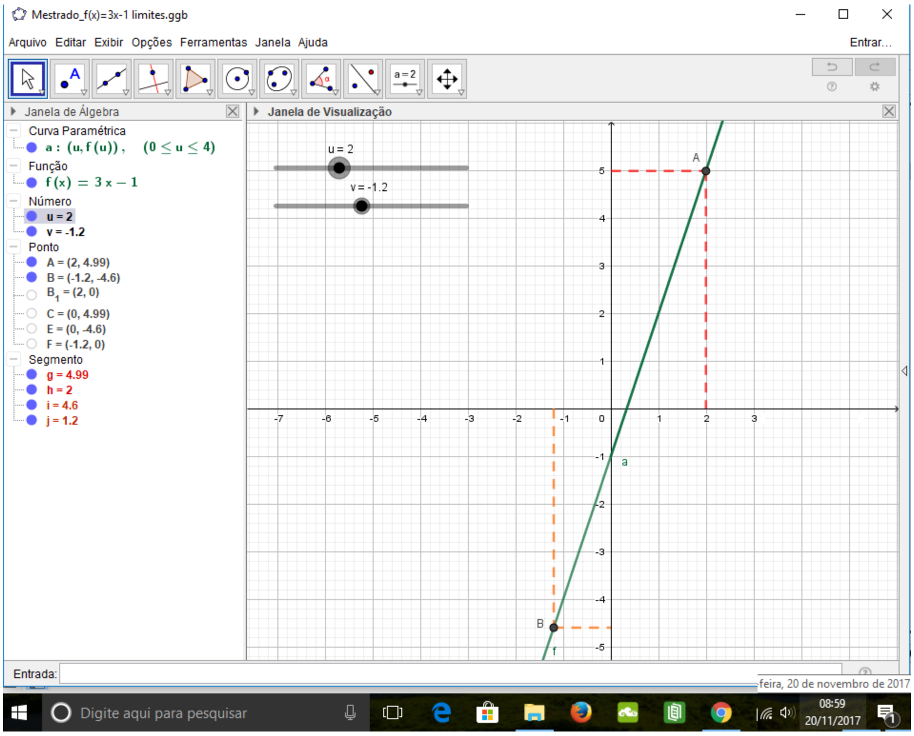


Figura 6.2.5

Observe na Figura 6.2.5 que quando $x = 2$, $f(2) = 5$.

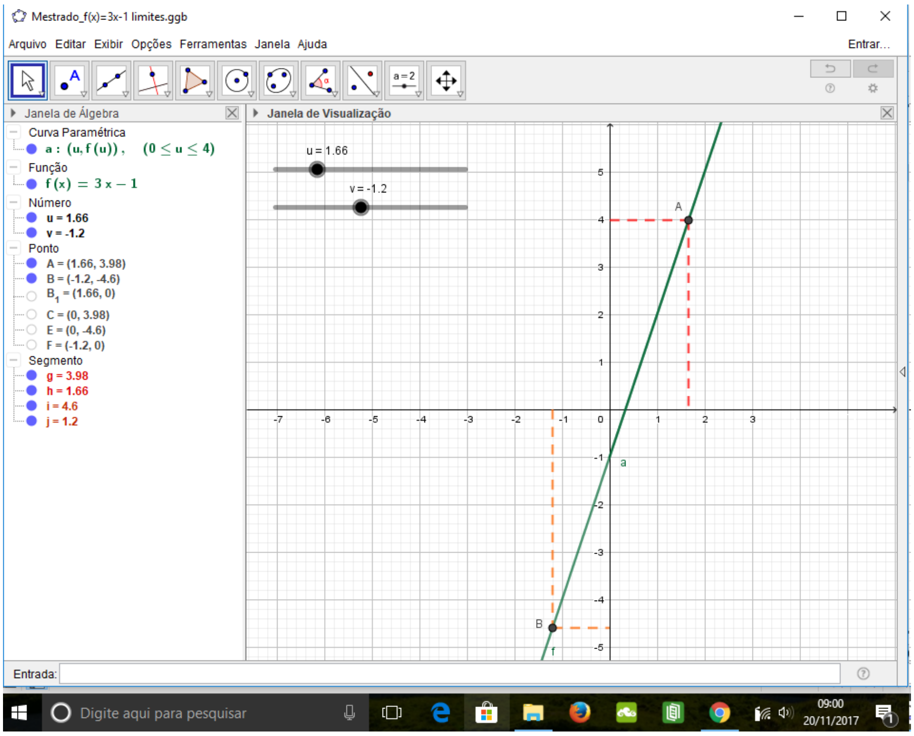


Figura 6.2.6

Pela Figura 6.2.6 é possível observar que quando $x = \dfrac{5}{3} = 1,66\ldots$, $f(5/3) = 4$.

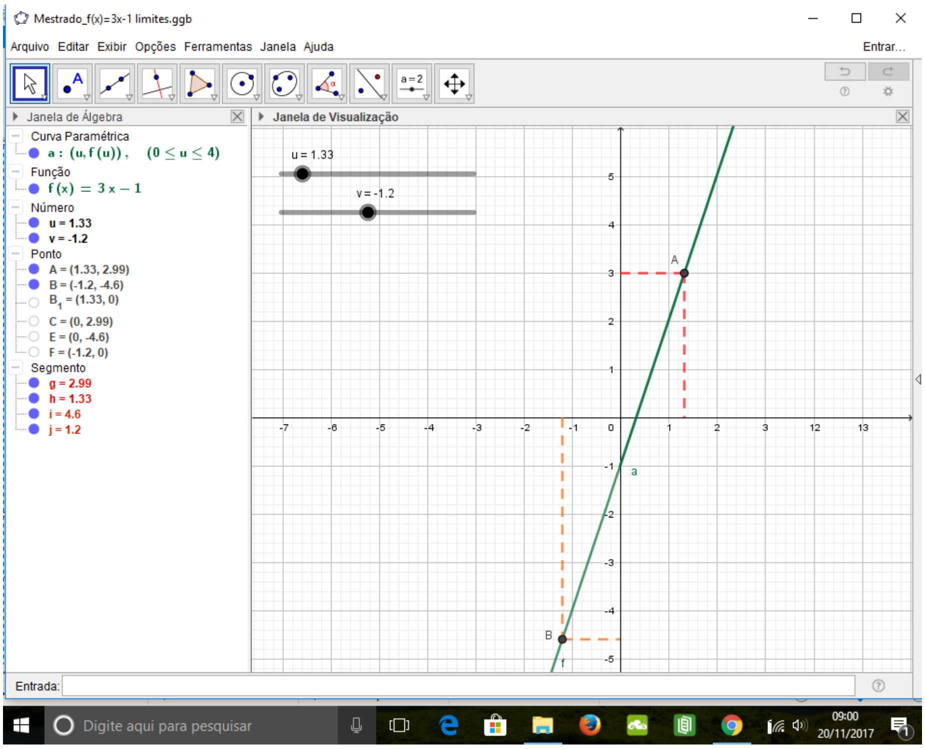


Figura 6.2.7

Note que quando $x = \dfrac{4}{3} = 1{,}33...$, $f(4/3) = 3$. Ver Figura 6.2.7.

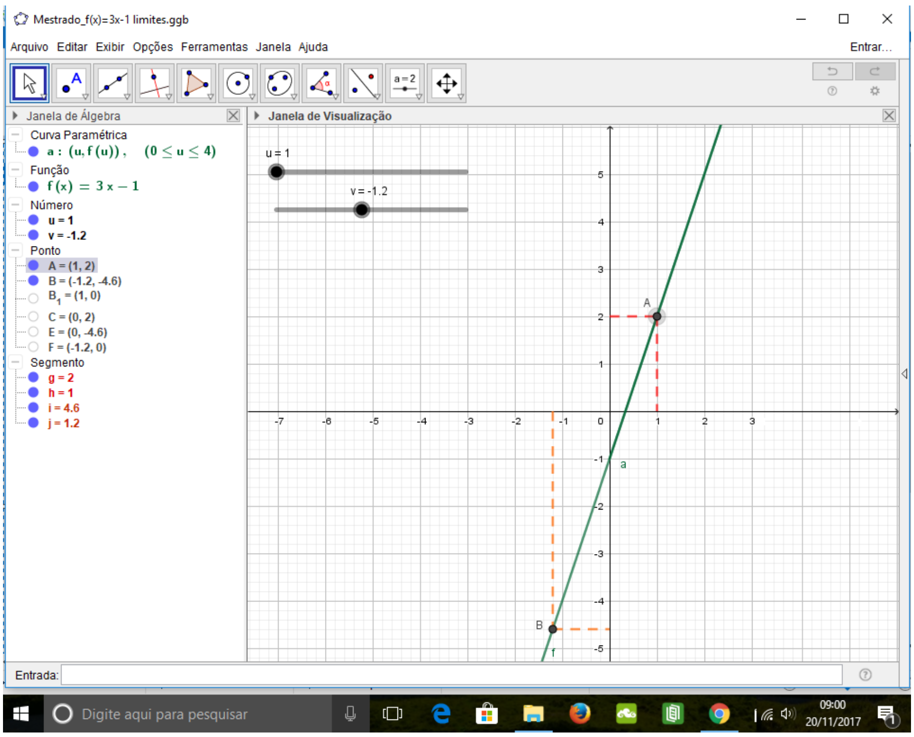


Figura 6.2.8

Observe a Figura 6.2.8, é possível notar que quando $x = 1$, $f(1) = 2$.
Vejamos agora o que ocorre com $f(x)$ quando x tende a 1 pela esquerda. Ver Figuras 6.2.9, 6.9.10, 6.9.11 e 6.9.12.

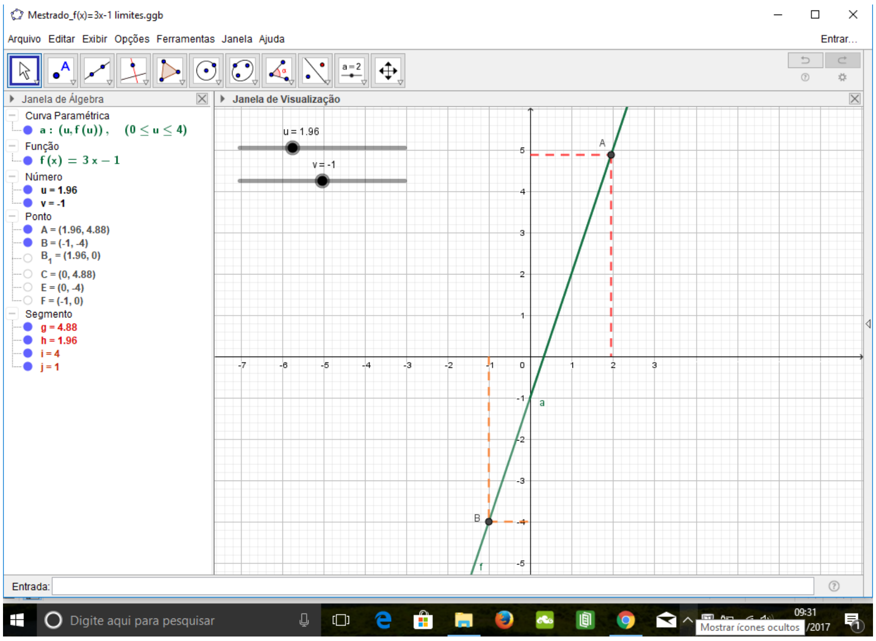


Figura 6.2.9

Veja na Figura 6.2.9 que quando $x = -1$, $f(-1) = -4$.

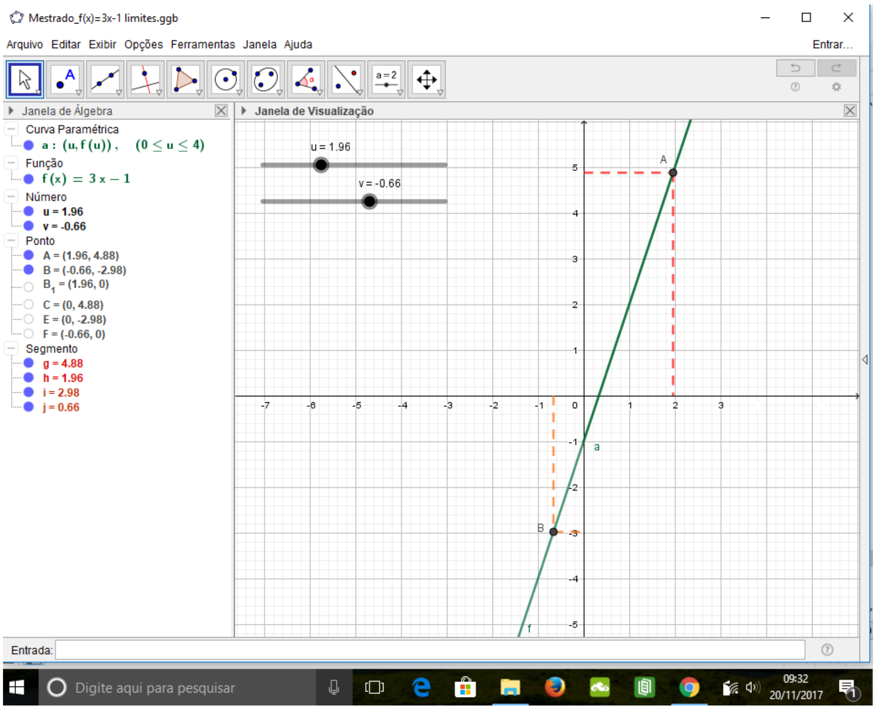


Figura 6.2.10

Note, pela Figura 6.2.10, que quando $x = -\dfrac{4}{3}$, $f(-4/3) = -3$.

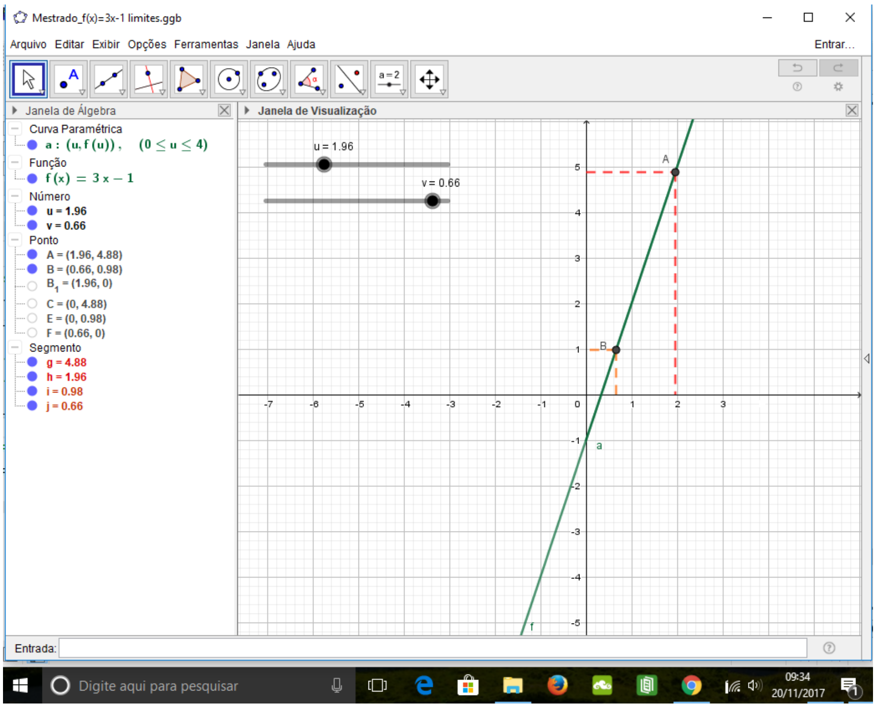


Figura 6.2.11

Observe na Figura 6.2.11 que quando $x = \dfrac{2}{3}$, $f(2/3) = 1$.

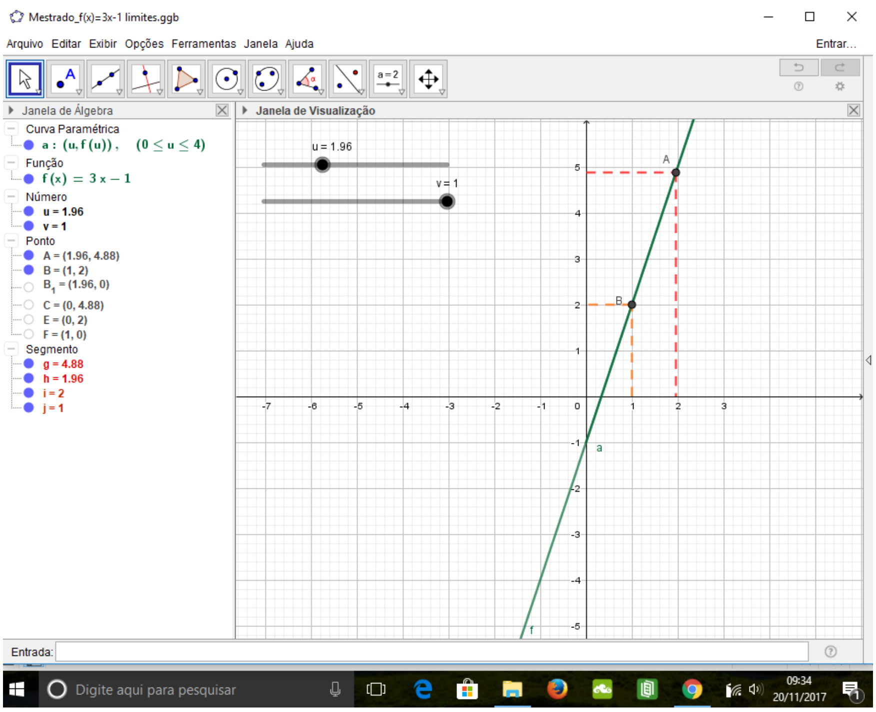


Figura 6.2.12

Por fim, quando $x = 1$, $f(1) = 2$. Ver Figura 6.2.12.
Assim, concluímos que: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (3x - 1) = 2$
Quando x tender a 1 pela direita denotaremos da seguinte forma: $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$. Já quando x tende a 1 pela sua esquerda, indicaremos da seguinte forma: $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$. Esses limites são denominados **limites laterais** e o limite de $f(x)$, quando x tende a x_0, existe se, e somente se, esses limites laterais existirem e forem iguais.

Situação 3: Função na qual os limites laterais são diferentes.

Nesta situação os alunos devem plotar o gráfico dado pela função f e observar o comportamento da função quando x tende a 1 tanto pela direita quanto pela esquerda, e concluir que como os limites laterais são diferentes o $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ não existe.

Exemplo: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x \leq 1 \\ x^2 - 3,85x + 6,85, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Vamos calcular o limite de $f(x)$, quando x tende a 1 pela direita, isto, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$. Observe na Figura 6.2.13 que quando nos aproximamos de 1 pela sua direita o limite de $f(x)$ aproxima-se de 4.

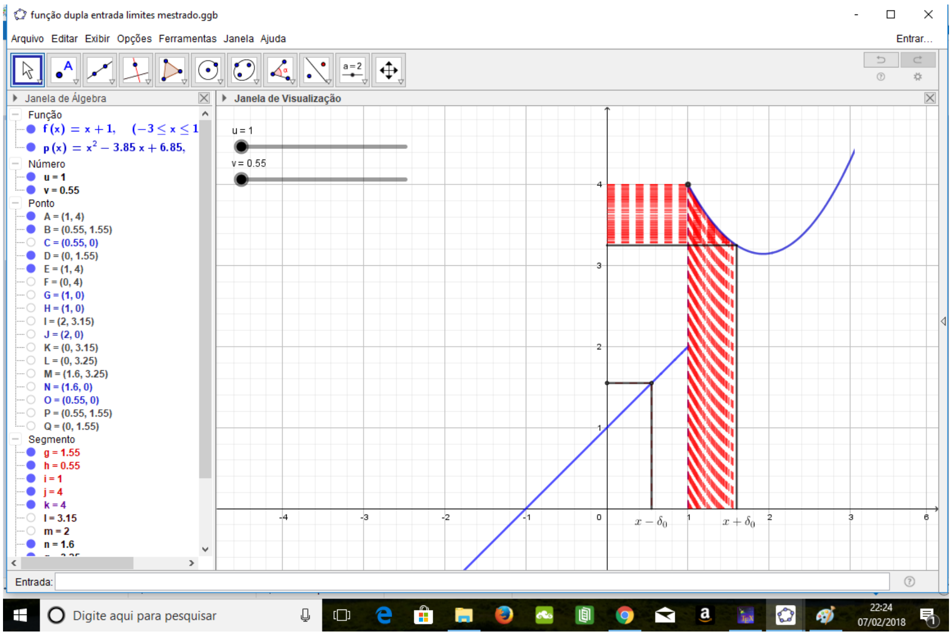


Figura 6.2.13

Assim, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 4$.

Vamos observar o que ocorre quando calculamos o limite de $f(x)$ quando x tende a 1 pela esquerda, isto é, $\lim_{x \to 1^-} f(x)$. Observe na Figura 6.2.14 que quando nos aproximamos de 1 pela sua esquerda o limite de $f(x)$ aproxima-se de 2.

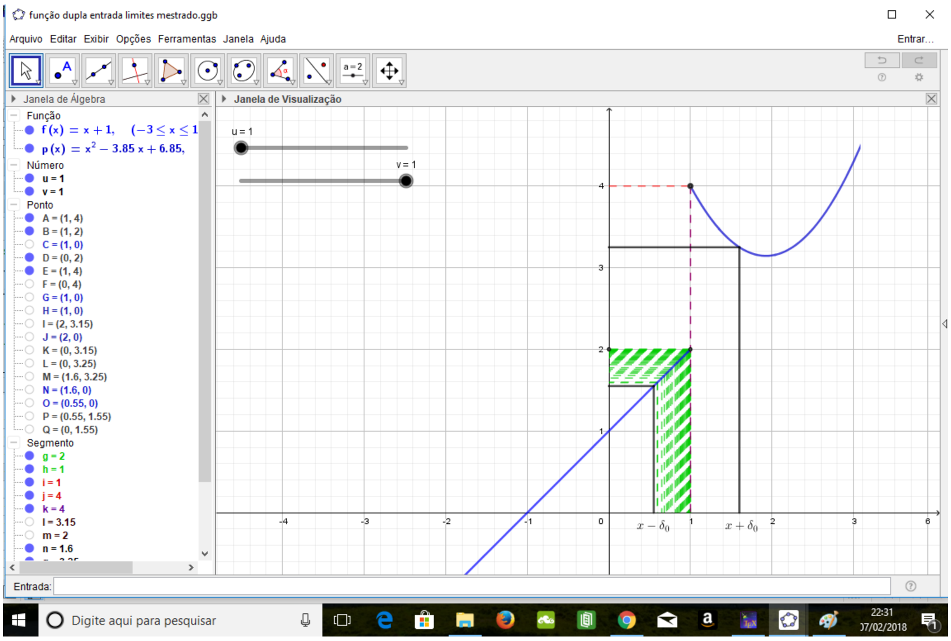


Figura 6.2.14

Assim, $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$.
Note que $\lim_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim_{x \to 1^-} f(x)$.

Portanto, $\lim_{x \to 1} f(x)$ **não existe**.

Situação 4: Função na qual $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \neq f(x_0)$, ou seja, função descontínua na qual o limite existe.

Neste exemplo os alunos podem observar que embora o $f(x_0)$ é diferente do $\lim_{x \to x_0} fx$ o mesmo existe.

Exemplo: Seja $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, definida por: $f(x) = \begin{cases} 1,4^x - 3^{-x}, & \text{se } x \neq 4 \\ 5, & \text{se } x = 4 \end{cases}$

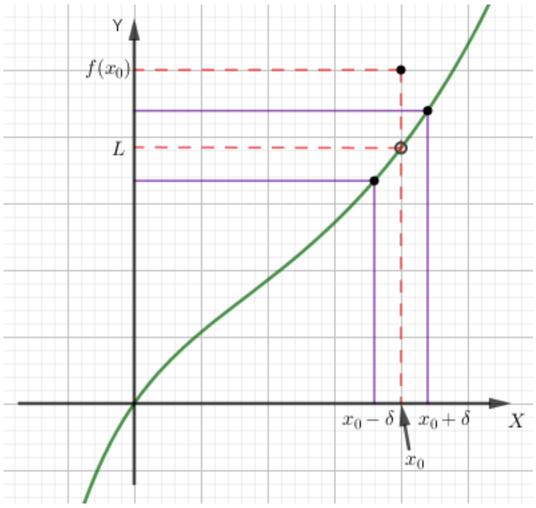


Figura 6.2.15

Observe na Figura 6.2.15 que $f(x_0) \neq L$, mas $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$.

Portanto, $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe e é igual a L.

Situação 5: Análoga à Situação 4.

Exemplo: Seja $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2$.

Observe na Figura 6.2.16 o gráfico de f.

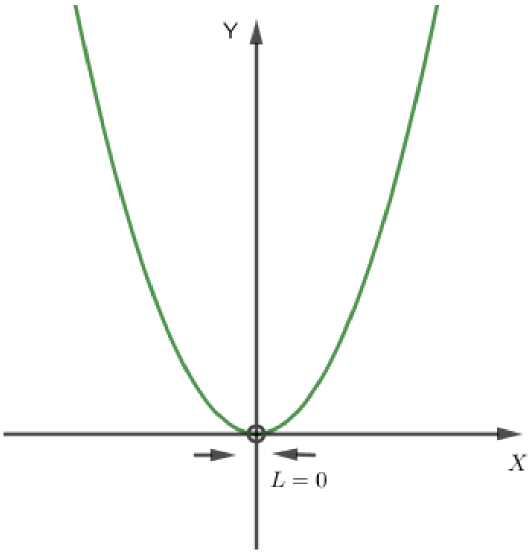


Figura 6.2.16

Note que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = L = \lim_{x\to 0^-} f(x)$.

Portanto, $\lim_{x \to 0} f(x)$ existe e é igual a $L = 0$.

Atividade 2: Noção intuitiva de derivada

Nesta atividade será proposto um exemplo onde os alunos farão uma abordagem da noção intuitiva de derivada.

Situação 1:

Neste exemplo o alunos farão uma abordagem geométrica do conceito de derivada. Os mesmos deverão plotar o gráfico de uma função quadrática qualquer, tomar dois pontos sobre a curva fixando-se um deles e traçar uma secante à curva por esses dois pontos. Posteriormente deverá mover o ponto em direção ao ponto fixo para que assim possa perceber que quanto mais próximo o ponto encontra-se do ponto fixo, a reta secante tende a ser tangente à curva naquele ponto, e a partir daí o professor deverá introduzir as noções básicas de derivadas.

Exemplo: Na situação abaixo temos que r é secante ao G_f, quando Δx tende a 0 r passa a coincidir com t, visto que t é tangente ao G_f no ponto $(x_0, f(x_0))$.

A Figura 6.2.17 ilustra a situação descrita acima.

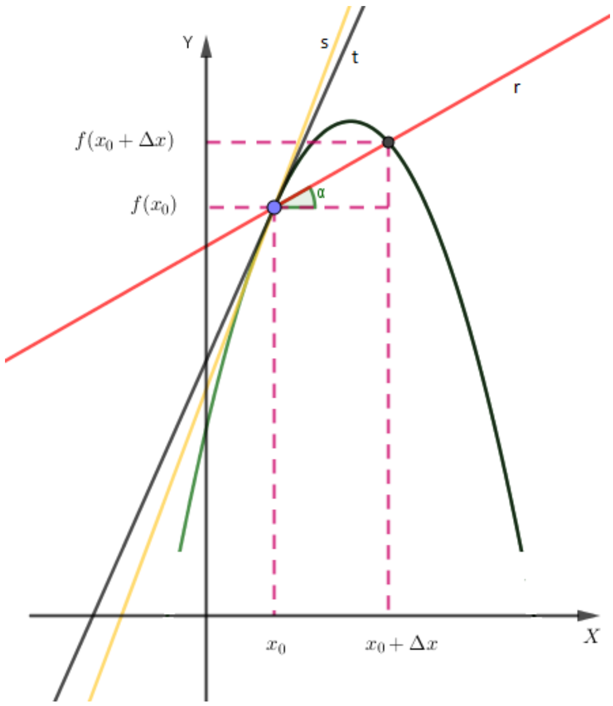


Figura 6.2.17

Conforme Δx se aproxima de zero o ponto $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ se "aproxima" do ponto $(x_0, f(x_0))$ e a reta r continua secante ao gráfico. Na posição limite, quando $\Delta x \to 0$ temos a reta tangente ao gráfico da função no ponto $(x_0, f(x_0))$ de coordenadas $(x_0, f(x_0))$. A figura abaixo ilustra a situação descrita acima.

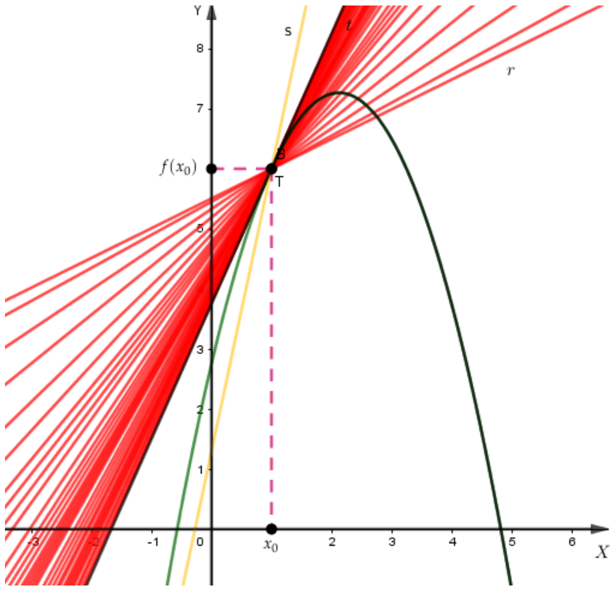


Figura 6.2.18

Quando fazemos $\Delta x \to 0$, a reta secante genérica tende à posição limite da tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$ e o quociente $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ tende ao coeficiente angular da reta em seu limite.
Dessa maneira, dizemos que, se existe e é finito o limite,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

ele é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto de abscissa x_0, isto é, $(x_0, f(x_0))$ é o ponto de tangência.

6.3 AULA 3: PROPRIEDADES DOS LIMITES E REGRAS DE DERIVAÇÃO.

O objetivo desta aula é introduzir algumas propriedades dos limites e algumas regras de derivação que o aluno precisa conhecer para serem usadas na Aula 4. Além disso, no final da aula apresentamos um exemplo que ilustra a ideia de taxa de variação instantânea relacionada ao conceito de derivada. O exemplo é uma continuação natural do final da Aula 2, onde são apresentados os conceitos de limites e derivadas usando o software *Geogebra*.

Apresentamos abaixo um roteiro da aula:

- Propriedades dos limites (sem demonstração).
  (i) Limite de função constante.
  (ii) Limite da função identidade.
  (iii) Limite do produto de uma constante por função.
  (iv) Limite da soma (ou diferença) de funções.
  (v) Limite do produto de funções.

- Regras de derivação (com demonstração).
  (i) Derivada de função constante.
  (ii) Regra da potência (inteiro positivo).
  (iii) Regra da potência (inteiro negativo).
  (iv) Derivada do produto de uma constante por função.
  (v) Derivada da soma de funções.

- Exemplo relativo à taxa de variação instantânea.

Proposta de aula

Propriedades dos limites

Se $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existem e k é um número real qualquer, então:

(i) $\lim\limits_{x\to a} k = k$;
(ii) $\lim\limits_{x\to a} x = a$;
(iii) $\lim\limits_{x\to a} kf(x) = k \lim\limits_{x\to a} f(x)$;
(iv) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$.
(v) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Algumas regras de derivação

(i) Derivada de função constante
Se $f(x) = k$, onde k é uma constante, então $f'(k) = 0$. De fato,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k-k}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

(ii) Regra da Potência (inteiro positivo)
Se n é um número inteiro positivo e $f(x) = x^n$, então $f'(x) = nx^{n-1}$. De fato,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{[x^n + nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n] - x^n}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h[nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}]}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1} = \\
&= \lim_{h\to 0} nx^{n-1} + \lim_{h\to 0} \binom{n}{2}x^{n-2}h + \cdots + \lim_{h\to 0} nxh^{n-2} + \lim_{h\to 0} h^{n-1} = \\
&= nx^{n-1}.
\end{aligned}$$

(iii) Regra da Potência (inteiro negativo)
Se n é um número inteiro negativo e $f(x) = x^n$, então $f'(x) = nx^{n-1}$.

Omitiremos a demonstração.

(iv) Derivada do produto de uma constante por função.

Sejam f uma função, k uma constante e g uma função tal que $g(x) = kf(x)$. Se $f'(x)$ existe, então $g'(x)$ existe e vale $g'(x) = kf'(x)$. De fato,

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{kf(x+h)-kf(x)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} k\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right) = k\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \\
&= kf'(x).
\end{aligned}$$

(v) Derivada da soma de funções.
Sejam f e g funções tais que $q(x) = f(x) + g(x)$. Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existem, então $q'(x)$ existe e vale $q'(x) = f'(x) + g'(x)$. De fato,

$$\begin{aligned} q'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{q(x+h)-q(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)+g(x+h)]-[f(x)+g(x)]}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)-f(x)]+[g(x+h)-g(x)]}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \\ &= f'(x)+g'(x). \end{aligned}$$

Exemplo (taxa de variação instantânea)

Suponhamos que um carro se move em linha reta e que $s(t) = 2t^2$ representa o espaço percorrido pelo carro até o instante t, onde t é em segundos e s é em metros. Então, no intervalo de tempo entre t e $t+h$ o corpo sofre um deslocamento $\Delta s = s(t+h) - s(t)$. Assim, a *velocidade média* no intervalo de tempo Δt (entre t e $t+h$) é dada por

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+h)-s(t)}{h},$$

isto é, a velocidade média é o quociente entre o espaço percorrido pelo tempo gasto para percorrê-lo. Para determinarmos a *velocidade instantânea* do carro no instante t, denotada por $v(t)$, calculamos a velocidade média em intervalos de tempo cada vez menores, ou seja, a velocidade instantânea é o limite das velocidades médias quando $h \to 0$, logo

$$v(t) = \lim_{h\to 0}\frac{s(t+h)-s(t)}{h}.$$

Portanto, a *velocidade instantânea* do carro no instante t é a derivada da função espaço percorrido no instante t, isto é, $v(t) = s'(t)$. Sendo assim, qual velocidade é marcada no velocimetro do carro no instante $t = 5$ segundos?

Solução

Primeiramente, temos que encontrar a expressão da velocidade em função do tempo $v(t)$, logo $v(t) = s'(t) = 4t$. Assim, para $t = 5$ segundos a velocidade instantânea do carro é $v(5) = 20\ m/s$ (metros por segundo), ou equivalentemente $72\ km/h$ (quilômetros por hora). Portanto, no instante $t = 5$ segundos o velocimetro do carro estará marcando $72\ km/h$.

6.4 AULA 4: ESTUDO DE MÁXIMOS E MÍNIMOS DE FUNÇÕES NO ENSINO MÉDIO

Nas mais diversas áreas do conhecimento vemos aspectos relacionados aos conceitos de função, principalmente na compreensão e resolução de problemas.

O material didático utilizado pela Rede Pública de Ensino do Estado de São Paulo contempla aspectos realcionados aos conceitos de limites e derivadas, sem ao menos citá-los diretamente. Na resolução de problemas de máximos e mínimos de funções, que quase em sua totalidade referem-se a funções quadráticas, utiliza-se os pontos notáveis da parábola, como a determinação das coordenadas do vértice da mesma, entre outras coisas.

O objetivo desta aula é apresentar e resolver alguns problemas de otimização envolvendo funções de uma variável. Nosso ponto de partida são os problemas apresentados em [5] que referem-se à funções quadráticas cujas soluções baseam-se na determinação do vértice de uma parábola. No entanto, apresentaremos aos alunos uma nova maneira de tratar estes problemas, introduzindo os conceitos relativos ao Cálculo Diferencial. Apresentamos abaixo um roteiro da aula:

- Apresentar um dos problemas de otimização, e respectiva solução, dado em [5].
- Apresentar o resultado que estabelece uma condição necessária para um ponto ser extremo local (Teorema 5.2.1), que servirá como ferramenta para solucionar, utilizando o conceito de derivada, o problema apresentado no ítem anterior.
- Resolver o problema apresentado (via Teorema 5.2.1).
- Propor mais problemas relacionados à funções quadráticas e resolvê-los das duas maneiras. Neste texto, denotaremos por **Solução A** aquela apresentada em [5] e por **Solução B** aquela baseada no Cálculo Diferencial (Teorema 5.2.1).
- Propor problemas de otimização que não estão relacionados à função quadrática, logo, não podendo ser resolvidos pela técnica apresentada em [5]. O objetivo é mostrar ao aluno o quão poderosa é a ferramenta apresentada pelo Teorema 5.2.1.

Se o tempo de uma aula não for suficiente para o conteúdo pode-se pensar em duas aulas.

Proposta de aula

Problema 1: [2] Para delimitar um galinheiro em um amplo quintal, dispõe-se de 80 metros de uma tela. Deseja-se usar completamente a tela disponível, e a região cercada deve ser um retângulo. Fixado o perímetro, são inúmeras as possibilidades para os lados do retângulo, como podemos perceber nos exemplos apresentados na Figura 6.4.1.

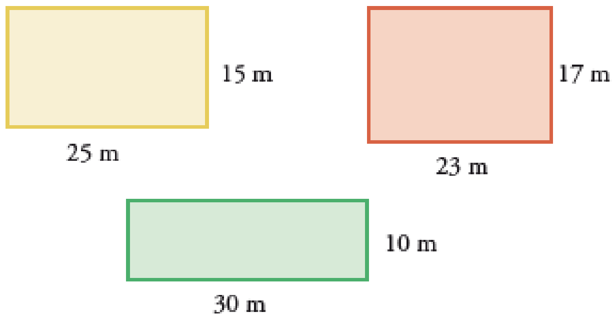


Figura 6.4.1

A área **A** do retângulo é uma função do comprimento de seus lados. Entre todas as possibilidades para os lados, procura-se, naturalmente, aquela que corresponde à maior área possível para o retângulo. O que, geometricamente, mostra a Figura 6.4.2.

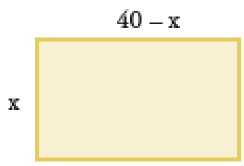


Figura 6.4.2

Dessa forma:

(a) Quais devem ser as medidas dos lados do retângulo para que sua área seja a maior possível?

(b) Qual é o valor da área máxima?

Solução A

(a) Chamando um dos lados do retângulo de x, o outro será $40 - x$, assim a área do retângulo será dada por

$$A(x) = x(40 - x) = -x^2 + 40x.$$

Buscamos o valor de x para que a área $A(x)$ seja máxima, como a função área é uma função quadrática, o valor máximo será atingido na abscissa do vértice da parábola (gráfico da função quadrática). Assim $x_v = 20$, que é o ponto médio do segmento determinados pelos pontos que são intersecção da parábola com o eixo das abscissas. Os lados do retângulo de área máxima serão, portanto 20 e 20 metros, ou seja o retângulo de área máxima é um quadrado de lado 20 metros.

(b) O valor máximo de $A(x)$ é $A(x_v) = -20^2 + 40.20 = 400m^2$.

A seguir apresentamos um resultado que serve como ferramenta para resolução de problemas de otimização, usando conceitos relativos à derivada.

Teorema: Seja f uma função derivável em x_0, onde x_0 é um ponto interior ao domínio da função f. Se x_0 é um ponto extremo local (máximo ou mínimo local) de f, então $f'(x_0) = 0$.

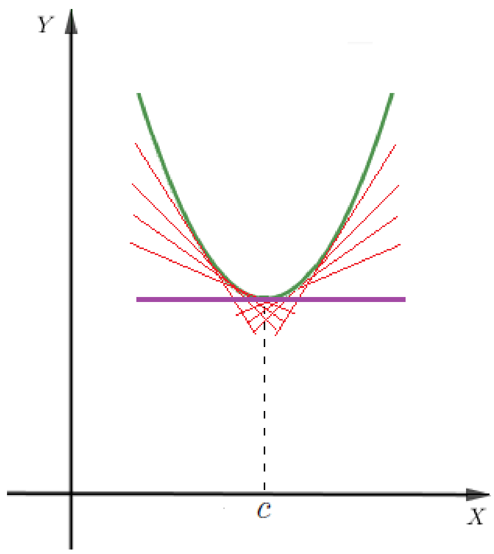


Figura 6.4.3

Geometricamente, se c é um ponto de extremo local da função f e f é derivável em c, se supormos que f é derivável, como a derivada da função em um ponto representa o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da f no ponto, percebe-se que a derivada de f decresce (respectivamente cresce) à medida que se aproxima de c pela esquerda e cresce (respectivamente decresce) à medida que se afasta de c pela direita, logo em algum momento a derivada de f tem que ser nula, e isto acontece no ponto c, ou seja, $f'(c) = 0$.

Solução B do Problema 1 (usando teorema anterior)

(a) Na solução do Problema 1, vimos que a função área é dada por $A(x) = -x^2 + 40x$, cujo domínio é o intervalo $(0, 40)$, uma vez que não faz sentido um retângulo com medida do lado nula ou negativa, Assim, pelo Teorema, se x_0 é um ponto de máximo ou mínimo local da função área, então $A'(x_0) = 0$, isto é, $-2x_0 + 40 = 0$ e consequentemente, $x_0 = 20$. Pela natureza do problema, $x_0 = 20$ não pode ser ponto de mínimo e além disso é ponto de máximo global da função área definida acima. Portanto, as dimensões do retângulo de maior área são 20 e 20 metros, isto é, um quadrado de lado 20 metros.

(b) Idem Solução A.

Problema 2**:** [2] Um foguete, que é lançado de uma base militar, apresenta um defeito em pleno voo e, segundo os cálculos, deverá cair sobre uma região habitada. O gráfico a seguir, que é uma parábola, representa a trajetória desse foguete, sendo x e y dados em metros. O gráfico também apresenta a trajetória praticamente retilínea de um míssil que foi lançado da mesma base para interceptar o foguete e evitar um possível desastre. Suponha que a trajetória do míssil seja dada pela função $y = 40x$.
A Figura 6.4.4 apresenta a situação descrita acima.

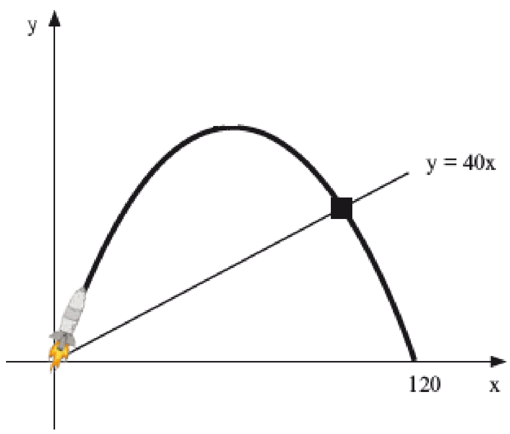


Figura 6.4.4

(a) Com base nos dados do gráfico, encontre a sentença que representa a trajetória do foguete, sabendo que quando o foguete percorre 20 metros horizontalmente, a partir do lançamento, ele se encontra a 2000 metros de altura.
(b) Calcule a que altura do solo o míssil interceptará o foguete.

(c) Calcule a altura máxima atingida pelo foguete após seu lançamento.

Solução A

(a) Como a trajetória do foguete é uma parábola, então é gráfico de uma função $f(x) = ax^2 + bx + c$ e pelo gráfico e enunciado temos que $f(0) = 0, f(20) = 2000$ e $f(120) = 0$. Assim, $c = 0$ e

$$\begin{cases} 400a + 20b = 2000 \\ 14400a + 120b = 0 \end{cases}$$

resultando em $a = -1$ e $b = 120$. Portanto, a trajetória do foguete é o grafico da função $f(x) = -x^2 + 120x$.

(b) Para calcular a altura em que o míssil interceptará o foguete temos que igualar as equações $y = -x^2 + 120x$ e $y = 40x$, resultando em $-x^2 + 80x = 0$, onde obtemos $x = 0$ ou $x = 80$. Como $y = 40x$, segue que $y = 3200$, portanto o míssil interceptará o foguete a 3200 metros de altura.

(c) Como a trajetória do foguete é uma parábola com concavidade para baixo, gráfico de $f(x) = -x^2 + 120x$, segue que a altura máxima atingida é a ordenada do vértice da parábola, isto é,

$$y = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-120^2}{-4} = 3600.$$

Portanto, a altura máxima atingida pelo foguete é 3600 metros.

Solução B

(a) e **(b)**: Idem **Solução A.**

(c) Uma condição necessária para que um ponto x_0 seja extremo local de uma função f é que tenhamos $f'(x_0) = 0$, assim $0 = f'(x_0) = -2x_0 + 120$, logo $x_0 = 60$. Como f é uma função quadrática, $x_0 = 60$ é ponto de máximo global da função $f : [0, 120] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -x^2 + 120x$. Portanto, a altura máxima atingida pelo foguete é $f(60) = 3600$ metros.

Problema 3: [2] Um criador de gado tem um bezerro de determinada raça para vender. Esse bezerro pesa atualmente 200 quilos e engorda 2 quilos por dia. Inicialmente o criador acha que, quanto mais tempo esperar para vender o bezerro, melhor será, pois o bezerro ganhará mais peso. Entretanto, um de seus funcionários lembra o criador de que o preço de venda, que hoje é de 50 reais por quilo, está caindo 40 centavos por dia. A escolha da melhor data para vender o bezerro depende, então, de duas variáveis: a engorda diária e a queda no preço pago por quilo. Com base nessas informações, mantida a situação atual, determine a melhor data para se vender o bezerro, contada a partir de hoje.

Solução A

Nossa incógnita é o valor x de dias, contados a partir de hoje, após os quais o bezerro deve ser vendido, de modo a gerar o maior retorno y possível, em reais. Para encontrar o valor de y, devemos multiplicar o peso p (massa) em quilos do bezerro pelo valor v pago por quilo, assim, $y = pv$. O enunciado informa que o peso p aumenta 2 quilos por dia, a partir do valor inicial de 200 quilos, ou seja, $p = 200 + 2x$. O valor v de cada quilo, no entanto, decresce à razão de 40 centavos por dia, a partir do valor inicial de 50 reais, ou seja, $v = 50 - 0,40x$. Logo, o valor arrecadado será

$$y = pv = (200 + 2x)(50 - 0,40x) = -0.8x^2 + 20x + 10000,$$

isto é, uma função do segundo grau $f(x) = -0.8x^2 + 20x + 10000$. Determinar a melhor data para vender o bezerro corresponde a buscar o valor de x para que $f(x)$ seja máximo. Como o gráfico da função f é uma parábola com concavidade para baixo, a função atinge seu máximo na abscissa do vértice da parábola, isto é,

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-20}{-1.6} = 12.5$$

Portanto, mantidas as condições atuais, a melhor data para se vender o bezerro é daqui a $12,5$ dias, ou seja, entre o 12^o e 13^o dia.

Solução B

Uma condição necessária para que um ponto x_0 seja extremo local de uma função f é que tenhamos $f'(x_0) = 0$, assim $0 = f'(x_0) = -1.6x_0 + 20$, logo $x_0 = 12.5$. Como f é uma função quadrática, $x_0 = 12,5$ é ponto de máximo global da função $f : [1, 125] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -0.8x^2 + 20x + 10000$. Portanto, a melhor data para se vender o bezerro é daqui a $12,5$ dias, ou seja, entre o 12^o e 13^o dia.

A seguir apresentamos problemas de otimização que não recaem em função quadrática, não sendo possível utilizar a **Solução A**. O objetivo é mostrar a importância do resultado (Teorema) apresentado.

Problema 4: Uma fábrica de latas de alumínio no formato de cilindro circular reto recebeu uma encomenda para fabricar uma lata que tenha área total S (fixa), de modo que tenha o maior volume possível. Quais as dimensões desta lata?

Solução B

Sejam r e h os raios da base e altura do cilindro circular reto, respectivamente. Assim, a área da base e da tampa da lata é dada por πr^2 e a área lateral é dada por $2\pi rh$. Assim, a área total da lata é dada por

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh.$$

Daí, $h = \dfrac{S - 2\pi r^2}{2\pi r}$, para $0 < r < \sqrt{\dfrac{S}{2\pi}}$. Assim, o volume V da lata em função de r é dado por

$$V(r) = \pi r^2 \frac{S - 2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{Sr}{2} - \pi r^3,$$

onde o domínio de V é o intervalo $\left(0, \sqrt{\dfrac{S}{2\pi}}\right)$, cujo gráfico é apresentado na Figura 6.4.5.

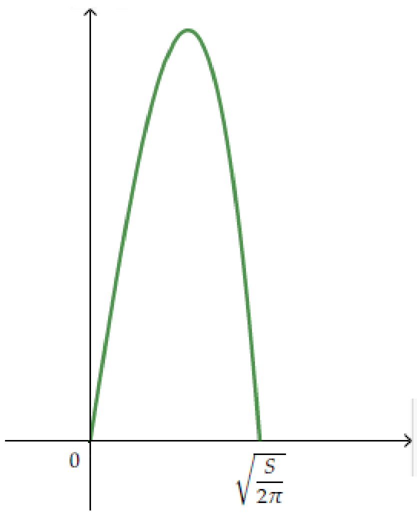


Figura 6.4.5

Uma condição necessária para que r_0 seja extremo local da função V é que tenhamos $V'(r_0) = 0$, isto é, $\dfrac{S}{2} - 3\pi {r_0}^2 = 0$ e consequentemente $r_0 = \sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$. Assim, pela Figura 6.4.5, temos que r_0 é ponto de máximo global da função V. Portanto, as dimensões da lata em formato de cilindro circular que tem área da superfície S e volume máximo são raio da base $r = \sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$ e altura $h = 2\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$.

Problema 5: Deseja-se construir uma caixa no formato de um cilindro circular reto de 1 m^3 de volume. Nas laterais e no fundo-tampa serão utilizados materiais que custam R$10,00 e R$20,00, o m^2, respectivamente. Determine as dimensões da caixa que minimizem o custo do material empregado.

Solução B

Sejam V, r e h o volume, raio da base e altura do cilindro, respectivamente. Temos que $V = \pi r^2 h$ e como por hipótese $V = 1$ m^3, segue que $\pi r^2 h = 1$ e consequentemente $h = \dfrac{1}{\pi r^2}$. Seja S a área total do cilindro, assim $S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$ e seja C o custo de confecção da caixa cilíndrica, assim $C = 10(2\pi r h) + 20(2\pi r^2 h)$. Como $h = \dfrac{1}{\pi r^2}$, segue que

$$C(r) = 40\pi r^2 + \frac{20}{r},$$

onde o domínio da função custo é o intervalo $(0, +\infty)$ e cujo o gráfico está representado na Figura 6.4.6.

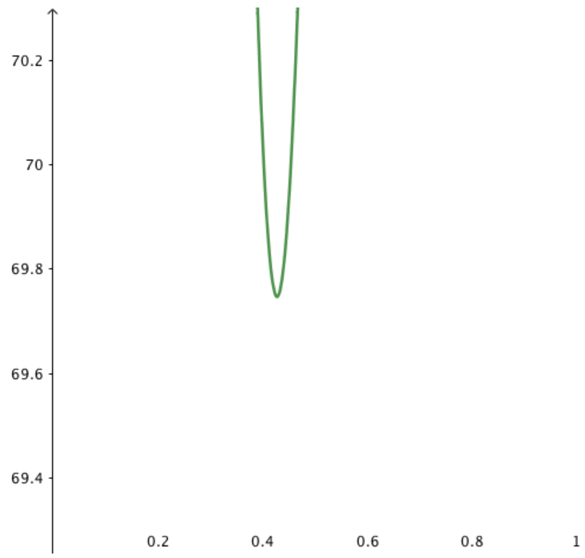


Figura 6.4.6

Assim, $C'(r_0) = 0$ se, e somente se, $80\pi r - \dfrac{20}{r^2} = 0$, o que implica que $r_0 = \sqrt[3]{\dfrac{1}{4\pi}}$. Pela Figura 6.4.6, segue que r_0 é ponto de mínimo da função custo. Portanto, $r = \sqrt[3]{\dfrac{1}{4\pi}}$ e $h = \sqrt[3]{\dfrac{16}{\pi}}$ são as dimensões da caixa cilíndrica que minimizam o custo de confecção da mesma.

CONCLUSÃO E PROPOSTAS FUTURAS

Este trabalho propôs a inserção dos conceitos primitivos de limites e derivadas no Ensino Médio buscando apresentar a importância desses conceitos através dos *softwares* Beamer e GeoGebra, com a intenção de apresentar essas ideias de forma lúdica e dinâmica para que assim o aluno possa compreender a importância da aplicabilidade da Matemática no cotidiano.

Outro fato a ser destacado o qual foi um dos principais motivos norteadores deste trabalho é o número excessivo de reprovações nas disciplinas de Cálculo no Ensino Superior [11]. Acredita-se que aos ingressantes faltam noções básicas de Cálculo como, por exemplo, o conceito de função, logo esse trabalho vem ao encontro disso, pois introduz as noções básicas de funções e apresenta um direcionamento ao ensino de limites e derivadas.

Embora a parte dessa dissertação que caberá ao aluno do Ensino Médio não tenha sido abordada com o devido rigor, quando se trata da definição de limites e derivadas, nesta dissertação, acreditamos que apresentar a ideia geométrica e intuitiva dos conceitos de limites e derivadas contribuirá para que o "repertório matemático" de nosso aluno seja maior e que ao ingressar no Ensino Superior possa não encontrar tantas dificuldades como ocorre hoje em dia.

O ensino de algumas das funções elementares está presente do Ensino Fundamental ao Ensino Superior, por exemplo, as noções de funções são introduzidas ao longo do 8º ano do Ensino Fundamental e se estendem ao logo do Ensino Médio. Assim, acreditamos que há possibilidade de se desenvolver um trabalho semelhante a esse para que seja introduzido nos anos finais do Ensino Fundamental e assim contribuir também com os alunos do Ensino Médio.

De repente, com a elaboração de tal trabalho, possa ser observada a possibilidade de introdução das noções intuitivas de limites e derivadas nos Currículos dos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio, contribuindo assim, de maneira significativa com a melhoria na qualidade do Ensino Superior.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] CORRÊA, J.W.L.A.; VAGA, A.S. de la; **Tutorial Beamer**. Pat-Telecomunicações/Escola de Engenharia - UFF, Niterói - RJ. Set-2009.

[2] FLEMMING, D., GONÇALVES, M., **Cálculo A - 6ª Edição**, São Paulo: Editora Pearson Prentice Hall, 2006.

[3] GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de Cálculo, volume 1**. São Paulo: LTC, 2001.

[4] MACHADO, Ari J. S. **Limites e derivadas para o ensino médio**.2013. 58f. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Belém.

[5] MACHADO, N. J.; GRAJA, E. S. C.; MELLO, J. L. P.; MOISÉS, R. P.; FONSECA, R. F.; PIETROPAOLO, R. C.; SPINELLI, W., **Material de apoio ao currículo do estado de São Paulo - Caderno do Aluno: Matemática - 1ª Série do Ensino Médio: Volume 1**, São Paulo: Secretaria de Educação do Estado de São Paulo $(2014-2017)$.

[6] MUNIZ, A. C. M. **Fundamentos de Cálculo - 1ª Edição**, Rio de Janeiro: Editora SBM, 2015.

[7] NASCIMENTO, M. C. do; SCARPIM, S. **Iniciando com o GeoGebra**. Departamento de Matemática - FC - Unesp/Bauru.

[8] PCN+, **Ensino Médio. Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**, 2002.

[9] PEREIRA, V. M. C. **Uma proposta para o Problema da Variabilidade**.2009. 182f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade Federal do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática, Rio de Janeiro.

[10] PONTE, J. P. **O conceito de função no currículo de Matemática**. Revista Educação e Matemática, APM, Portugal, n. 15, p. 3-9, 1990.

[11] REZENDE, W. M. **O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica**.2003. 450f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) FE - USP. São Paulo.

[12] SANTOS, R. J. **Introdução ao LaTeX**. Departamento de Matemática - ICEx - UFMG. (http://www.mat.ufmg.br/ regi) -2012.