



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de Bauru

CINTHIA CRISTHINA CROTTI CARRARA

**UMA ABORDAGEM TEÓRICO-PRÁTICA DA
MATEMÁTICA FINANCEIRA NO ENSINO MÉDIO**

Bauru

2018

CINTHIA CRISTHINA CROTTI CARRARA

**UMA ABORDAGEM TEÓRICO-PRÁTICA DA
MATEMÁTICA FINANCEIRA NO ENSINO MÉDIO**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do Departamento de Matemática da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de Bauru.

Orientador: Prof^a. Dr^a. Tatiana Miguel Rodrigues de Souza

Bauru

2018

Carrara, Cinthia Cristhina Crotti.

Uma abordagem teórico-prática da matemática financeira no ensino médio / Cinthia Cristhina Crotti Carrara. -- São José do Rio Preto, 2018

58 f. : il., tabs.

Orientador: Tatiana Miguel Rodrigues de Souza

Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE UNESP -
Câmpus de São José do Rio Preto

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE CINTHIA CRISTHINA CROTTI CARRARA, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL, CURSO DE MESTRADO, DO(A) INSTITUTO DE BIOCÊNCIAS, LETRAS E CIÊNCIAS EXATAS DE SÃO JOSÉ DO RIO PRETO.

Aos 21 dias do mês de fevereiro de 2018, às 15:00 horas, na UNESP / Câmpus de Bauru, reuniu-se a Comissão Examinadora composta pelos seguintes membros: Profa. Dra. TATIANA MIGUEL RODRIGUES DE SOUZA, orientadora, do Departamento de Matemática, da UNESP/ Câmpus de Bauru, Prof. Dr. GUSTAVO ANTONIO PAVANI, do Departamento de Matemática, da Universidade do Centro-Oeste do Paraná e o Prof. Dr. FABIANO BORGES DA SILVA, do Departamento de Matemática, da UNESP/ Câmpus de Bauru, sob a presidência da primeira, a fim de proceder a arguição pública da DEFESA DE DISSERTAÇÃO de MESTRADO de CINTHIA CRISTHINA CROTTI CARRARA, intitulada ***Uma abordagem teórico-prática para a aprendizagem da Matemática Financeira no Ensino Médio***, nos termos do Regulamento do Programa, tendo a candidata recebido o conceito final: APROVADA. O Prof. Dr. GUSTAVO ANTONIO PAVANI, participou da Sessão Pública através de videoconferência, nos termos do artigo 27, § 3º da Resolução Unesp – 30/2010 – Regimento Geral da Pós-Graduação da Unesp, sendo que seu parecer circunstanciado será recebido via postal e juntado a esta ata. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata que após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.

Tatiana M. Rodrigues de Souza
Profa. Dra. Tatiana Miguel Rodrigues de Souza

Prof. Dr. Gustavo Antonio Pavani

FABIANO BORGES DA SILVA
Prof. Dr. Fabiano Borges da Silva

CINTHIA CRISTHINA CROTTI CARRARA

**UMA ABORDAGEM TEÓRICO-PRÁTICA DA MATEMÁTICA
FINANCEIRA NO ENSINO MÉDIO**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do Departamento de Matemática da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de Bauru.

Comissão Examinadora

Prof^a. Dr^a. Tatiana Miguel Rodrigues de Souza

UNESP – Bauru

Orientador

Prof. Dr. Gustavo Antônio Pavani

UNICENTRO - Universidade Estadual do Centro-Oeste do Paraná

Prof. Dr. Fabiano Borges da Silva

UNESP – Bauru

Bauru

21 de fevereiro de 2018.

Dedico este trabalho ao meu esposo, minha
família e a Deus.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus, por tudo.

Ao meu marido, que sempre acreditou em mim e me deu forças para continuar nas horas mais difíceis, que compreendeu minha ausência durante as horas de estudos e a elaboração deste trabalho.

Aos meus pais e meu irmão, que me apoiaram em todos os meus sonhos e que foram meu alicerce para chegar até aqui.

Aos meus colegas de turma, que me ajudaram nos estudos e durante a caminhada.

Aos meus professores, que procuraram transmitir seus conhecimentos da melhor maneira possível, muito atenciosos e preocupados com a aprendizagem dos alunos.

À minha orientadora Tatiana, sempre muito aplicada e presente. Agradeço por acreditar em mim, por toda a paciência e dedicação.

À diretora Gisleine, por todo o apoio e confiança em meu trabalho.

A todos que de alguma forma contribuíram para a conclusão deste trabalho.

“Há uma única ciência, a matemática, a qual ninguém se pode jactar de conhecer porque suas conquistas são, por natureza, infinitas; dela toda gente fala, sobretudo os que mais a ignoram.”

(Malba Tahan)

RESUMO

Após o ensino médio espera-se que o aluno ingresse em uma faculdade, no mercado de trabalho ou provavelmente vá morar longe dos pais, tendo assim que administrar seu próprio dinheiro. Esta é uma das etapas na vida do indivíduo que a Matemática Financeira se torna uma fiel companheira, estando presente em seu cotidiano. Sendo assim, este trabalho tem como objetivo mostrar aos alunos a importância da aprendizagem da Matemática Financeira no ensino médio, bem como as vantagens de sua correta utilização na vida adulta. Inicialmente verifica-se a história da Matemática Financeira, o que orientam os documentos oficiais como PCN e Diretrizes Curriculares a seu respeito, e os tipos de juros que irão ser trabalhados. Sugere-se uma revisão dos principais conceitos de Matemática Financeira usados no ensino médio e em seguida desenvolve-se uma atividade que abrange caderneta de poupança e outros tipos de investimentos. Nesta atividade propõe-se a abordagem da Matemática Financeira de uma maneira simplificada, fundamentada principalmente na responsabilidade dos alunos, pois seus atos passam a ter consequências como lançamentos de créditos ou débitos em suas planilhas. Busca-se por consequência incentivar o estudo da Matemática Financeira e seu real aproveitamento na fase que está por vir.

Palavras-chave: Matemática Financeira. Educação Financeira. Ensino Médio.

ABSTRACT

After high school students are expected to enter a college, the job market, or either to live away from their parents, thus managing their own money. This is one of the stages in the life of an individual that Financial Mathematics becomes a faithful companion, being present in its daily life. Thus, this work aims to show to the students the importance of learning Financial Mathematics in High School, as well as the advantages of its correct use in the adult life. Initially, the history of Financial Mathematics is exposed, based on Official Documents such as NCPs and Curriculum Guidelines about them, and the types of interests that will be worked out. It is suggested a review of the main concepts of Financial Mathematics used in High School and then develop an activity that covers saving accounts and other types of investments. In this activity, the approach of Financial Mathematics is proposed in a simplified way, based mainly on the responsibility of the students, since their acts have consequences as credit or debit entries in their worksheets. The aim is to encourage the study of Financial Mathematics and its real use in the next phases.

Keywords: Financial Mathematics. Financial Education. Secondary Education.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 1 – JUROS SIMPLES (LINEAR)	23
FIGURA 2 - JUROS COMPOSTOS (EXPONENCIAL)	24
FIGURA 3 – SISTEMA PRICE	44
FIGURA 4 – SAC	45

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – CRESCIMENTO DE R\$200,00 A JUROS SIMPLES DE 10% A.A.	22
TABELA 2 – CRESCIMENTO DE R\$200,00 A JUROS COMPOSTOS DE 10% A.A.	24
TABELA 3 – COMPARAÇÃO ENTRE TAXAS ANUAIS PROPORCIONAIS E EQUIVALENTES	32
TABELA 4 – TABELA DE FINANCIAMENTO NO SISTEMA PRICE	44
TABELA 5 – TABELA DE FINANCIAMENTO NO SAC.....	45
TABELA 6 – TABELA DE FINANCIAMENTO.....	47
TABELA 7 – TABELA DOS ALUNOS DA 2ª S.E.M.....	50
TABELA 8 – TABELA DOS ALUNOS DA 3ª S.E.M.....	51

ÍNDICE

1 CONCEITOS BÁSICOS E SIMBOLOGIA	14
1.1 Introdução	14
1.2 História da Matemática Financeira	14
1.3 O estudo da Matemática Financeira pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)	16
1.4 O estudo da Matemática Financeira na Lei de Diretrizes e Bases (LDB)	17
2 CONCEITOS BÁSICOS.....	19
2.1 Porcentagem	19
2.2 Progressão Geométrica	19
2.3 Logaritmos.....	20
2.4 Tipos de juros	21
2.5 Juros simples	25
2.6 Problemas.....	266
2.7 Taxa de Desconto e Taxa de Rentabilidade.....	27
2.8 Problemas	27
2.9 Juros compostos.....	288
2.10 Problemas.....	299
2.11 Expressão para Desconto	30
2.12 Problemas.....	31
2.13 Taxas de juros.....	31
2.14 Problemas.....	33
2.15 Descontos	35
2.16 Problemas.....	37
2.17 Inflação e Correção Monetária	39
2.18 Problemas.....	40
2.19 Amortização	41
2.20 Problemas.....	46
3 ATIVIDADE PRÁTICA	48
3.1 Introdução	48
3.2 Regras e coleta dos objetivos dos alunos.....	48
3.3 Desenvolvimento	51
4 CONCLUSÃO.....	54
BIBLIOGRAFIA	55
ANEXOS	57

1 Conceitos básicos e simbologia

1.1 Introdução

Para Assaf Neto (1998, p.13) matemática financeira é o "estudo do dinheiro no tempo, ao longo do tempo". Segundo Zentgraf (2003, p.2), além de estudar os aspectos temporais do dinheiro, tais estudos objetivam estabelecer relações entre quantias monetárias expressas em datas diferentes. Entretanto, a matemática financeira pode ser definida de forma mais simplificada sendo a aplicação da matemática para decisões gerenciais a respeito de operações financeiras. Para que as operações financeiras sejam executadas, faz-se necessário a aplicação de cálculos adequados, sendo que o estudo desses cálculos é o objeto de estudo da matemática financeira (Veras, 2001, p.53).

Com o conceito de matemática financeira a partir de diversos autores, continuaremos nosso estudo sobre essa vasta área da matemática.

1.2 História da Matemática Financeira

A matemática financeira, historicamente, esteve muito ligada ao conceito e ao significado de comércio, tanto que a maior parte dos autores de livros desta área do conhecimento denominou suas obras de Matemática comercial e financeira. Humberto Grande, no prefácio da obra de Carvalho (1971, p. 3), chega a escrever que “a história do comércio é a própria história da civilização” e, ainda, que “o comércio é o sangue da economia.”

Pode-se verificar que na troca direta, as mercadorias apresentavam-se no seu estado natural e eram destinadas a suprir as necessidades fundamentais dos membros do grupo. Mais tarde, com o contato cada vez maior entre as comunidades e com o desenvolvimento do artesanato e da cultura, começaram a surgir dificuldades nas trocas, por não haver uma medida comum de valor entre os produtos a serem permutados.

A invenção da moeda de troca, no sentido moderno do termo, segundo a opinião da maioria dos especialistas, foi atribuída à Grécia antiga e à Lídia (era o nome de uma região na porção ocidental da antiga Ásia Menor), no século VII antes da era cristã. Em razão das múltiplas vantagens que comportava, seu uso teria se espalhado rapidamente por Grécia, Fenícia, Roma e entre inúmeros outros povos, inclusive na China. (Ifrah, 1997, p. 152).

Quando o comércio começava a atingir o seu auge, com a figura do mercador iniciou-se uma atividade nova: o comércio do próprio dinheiro, na época, o ouro e a prata. Com as relações entre países aumentando cada vez mais, moedas de diversos países eram trocadas, “mas, ao passar as fronteiras, a questão – quantidade de ouro em cada moeda – se torna muito importante, pois o país comprador paga com sua moeda, uma soma equivalente à quantidade de ouro contida na moeda do país vendedor.” (Robert, 1989, p. 31).

Definiu-se, então, o primeiro critério para determinar a equivalência entre moedas, o qual se baseou na quantidade de ouro em poder de cada país, o chamado “padrão ouro”, só abandonado no início do século XX (pouco antes de 1930). Alguns comerciantes, conhecendo muito essas moedas estrangeiras (ouro e prata), começaram a se interessar por acumular grandes quantidades para, então, se dedicar à atividade de troca ou câmbio de dinheiro. Assim,

“[...]num espaço de tempo relativamente curto, acumularam-se fantásticas somas em dinheiro nas mãos dos cambistas. Paulatinamente, foram se ocupando de uma nova atividade: guardar e emprestar dinheiro. Imaginemos um cambista qualquer que tenha acumulado, desta forma, em seus cofres, imensa quantidade de dinheiro. Era natural que a seguinte ideia lhe ocorresse: porque estas grandes somas de dinheiro haverão de permanecer em nosso poder sem qualquer lucro para mim? [...] emprestarei parte deste dinheiro a quem pedir, sob a condição de que seja devolvido num prazo determinado. E como meu devedor empregará o dinheiro como quiser durante este período – talvez em transações comerciais -, é natural que eu obtenha alguma vantagem. Por isso, além do dinheiro emprestado, deverá entregar-me, no vencimento do prazo estipulado, uma soma adicional”. (Robert, 1989, p. 55-56).

A partir desse procedimento, evidencia-se o lucro, o ganho ou, então, o juro. Assim, ficaram caracterizadas, ainda que de uma forma bastante rudimentar, o que seriam as primeiras operações de crédito. A Igreja, apesar das ameaças e das maldições, não conseguiu conter a voracidade das pessoas por ganhos e lucros. O próprio desenvolvimento do comércio já exigia a criação de uma rede bancária mais vasta. As pioneiras nessa atividade foram as cidades-estados da Itália, que atuavam até os mais distantes confins do mundo conhecidos na época, sendo que o primeiro banco privado foi fundado em Veneza, pelo duque Vitali, no ano de 1157.

Mais tarde, com o crescimento significativo da atividade comercial no Renascimento e o interesse pela educação, foram elaborados os primeiros escritos populares sobre a aritmética, tendo sido impressas várias obras na Europa, ainda antes do século XVII, e, de acordo com Eves (2004, p. 299), “essas obras eram de dois tipos, basicamente aquelas escritas em latim por intelectuais de formação clássica, muitas vezes ligados à escolas da Igreja, e

outras escritas no vernáculo por professores práticos interessados em preparar jovens para carreiras comerciais.”

Segundo Poitras (2000), dada a adoção rápida da nova aritmética no mundo dos negócios italianos, o texto da primeira matemática impresso na Itália, em 1478, foi um livro de 52 páginas sobre aritmética comercial: um trabalho anônimo e intitulado hoje conhecido como *Aritmetica di Treviso* (*Aritmete Treviso*). Logo depois, Piero Borghi trouxe uma edição mais longa e completa, impressa em Veneza em 1484, que se tornou um verdadeiro best-seller, com quinze reimpressões, duas no 1400 e o último em 1564. Esses textos aritméticos impressos iniciais foram logo seguidos por muitos outros.

Portanto, a aritmética foi a precursora nos cálculos dos problemas nas relações comerciais de vários povos, evoluindo mais tarde para o uso da álgebra (fórmulas ou modelos matemáticos) e teve a sua contribuição importante na forma como hoje são resolvidas as questões da matemática comercial e financeira.

Até pouco tempo atrás, a maior parte das obras deste ramo da matemática trazia bem clara a denominação de matemática comercial e financeira. Carvalho (1971) distinguiu a matemática comercial (juros e descontos simples, ligas, moeda, câmbio e títulos de renda) da matemática financeira (juros e descontos compostos, rendas certas, empréstimos, depreciação e as tábuas financeiras).

Acredita-se que a classificação de comercial ou financeira esteja mesmo ligada à forma de resolução dos problemas. Os cálculos relacionados à utilização de fórmulas matemáticas, porcentagens, juros e descontos simples, por exemplo, estão mais próximos do conceito de comércio; os cálculos de juros compostos, séries de pagamentos, amortizações de empréstimos bancários são entendidos como financeiros, pois, em geral, utilizam-se calculadoras financeiras para a solução dos problemas apresentados.

1.3 O estudo da Matemática Financeira pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)

Os PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais) são diretrizes elaboradas para orientar os educadores por meio da normatização de alguns aspectos fundamentais referentes a cada disciplina. Esses parâmetros abrangem tanto a rede pública, como a rede privada de ensino, conforme o nível de escolaridade dos alunos. Sua meta é garantir aos educandos o direito de desfrutar dos conhecimentos necessários para o exercício da cidadania. Embora não sejam

obrigatórios, os PCNs servem como norteadores para professores, coordenadores e diretores, que podem adaptá-los às realidades locais, levando em consideração o cotidiano de seus alunos e a comunidade em que a escola está inserida.

O PCN de Matemática ajuda o professor a diagnosticar o domínio que cada aluno possui sobre os conteúdos a serem abordados, além de identificar quais são suas dificuldades diante da aprendizagem desses conteúdos. Daí a necessidade de estimular os alunos a buscar em explicações e finalidades, relativas à utilidade da Matemática, e como ela pode contribuir para a solução tanto de problemas do cotidiano, como de problemas ligados à investigação científica.

Um dos requisitos dos temas transversais do PCN é favorecer a compreensão da realidade e a participação social, para que o aluno desenvolva a capacidade de se tornar consciente e saber se posicionar nas questões referentes à vida coletiva, intervindo no meio em que vive de forma crítica e responsável. O estudo da Matemática Financeira sob essa visão contribui significativamente para a formação recomendada pelos PCNs.

1.4 O estudo da Matemática Financeira na Lei de Diretrizes e Bases (LDB)

Uma educação financeira bem fundamentada vem de encontro com os princípios de liberdade citados na LDB, pois um cidadão endividado é privado de exercer sua cidadania sob diversos aspectos, como, por exemplo, ter uma conta bancária com cartão de crédito (elementos que hoje em dia podem significar segurança, pois é uma alternativa para não andar com dinheiro). Além disso, um cidadão que sabe lidar de forma saudável com seu próprio dinheiro inegavelmente será um profissional que saberá lidar com o dinheiro envolvido em seu ambiente de trabalho, seja público ou privado.

Ainda para firmar a importância da educação financeira nas escolas, o Art. 3º da LDB define entre os princípios do ensino a valorização da experiência extraescolar, onde “o aluno pode (e deve) vincular a prática na sala de aula com sua realidade, aprendendo estratégias de ação e internalização de valores que servirão para melhora de sua vida como cidadão. É válido ainda ressaltar, uma vez que tais conteúdos têm como uma de suas diretrizes a difusão de valores fundamentais ao interesse social, aos direitos e deveres dos cidadãos, de respeito ao bem comum e à ordem democrática” (Lei no 9394/96, Art. 27º).

Segundo a Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OECD, 2005), Educação Financeira é o processo mediante o qual os indivíduos e as sociedades

melhoram a sua compreensão em relação aos conceitos e produtos financeiros, de maneira que com informação, formação e orientação possam desenvolver os valores e as competências necessários para se tornarem mais conscientes das oportunidades e riscos neles envolvidos e, então, poderem fazer escolhas bem informadas, saber onde procurar ajuda, adotar outras ações que melhorem o seu bem-estar e, assim, tenham a possibilidade de contribuir de modo mais consistente para a formação de indivíduos e sociedades responsáveis, comprometidos com o futuro.

Durante todo esse trabalho usaremos a seguinte simbologia:

- n número de períodos.
- j juros simples após n períodos.
- J juros compostos após n períodos.
- r taxa percentual de juros.
- i taxa unitária de juros $i = \frac{r}{100}$.
- P Principal ou valor atual.
- M Montante.
- A Valor atual.
- N Valor nominal.

2 Conceitos básicos

2.1 Porcentagem

A porcentagem é um dos conceitos da Matemática mais conhecidos. Podemos afirmar que é utilizada em várias outras áreas, quando queremos estimar o crescimento de algo, comparar grandezas, expressar uma quantidade de aumento ou desconto do preço de alguma mercadoria, entre outros. Trabalhamos com porcentagem o tempo todo e, mesmo quando não percebemos, estamos fazendo uso dela.

Definição: Toda razão $\frac{a}{b}$, na qual $b = 100$, chama-se porcentagem.

Ao invés do uso da expressão “por cento” usamos o símbolo %, que significa uma divisão por 100. Assim, 60 por cento = $60\% = \frac{60}{100} = 0,60$.

2.1.1 *Exemplo:* 52% de 750 alunos: $\frac{52}{100} \cdot 750 = \frac{39.000}{100} = 390$ alunos.

2.1.2 *Exemplo:* se num grupo de 100 pessoas existem 65 mulheres e 35 homens, podemos dizer que a porcentagem de mulheres é 65%, enquanto a porcentagem de homens é 35%.

2.2 Progressão Geométrica

Vamos analisar algumas sequências:

a) (4, 8, 16, 32, 64)

b) (6, -18, 54, -162)

c) (32, 8, 2, $\frac{1}{2}$)

Em todas essas sequências, a lei de formação é: cada termo posterior, a partir do segundo, é igual ao anterior, multiplicado por um número fixo.

Toda sequência que tiver essa lei de formação será denominada *progressão geométrica*. O número fixo pelo qual estamos multiplicando cada termo é chamado razão da progressão.

A representação matemática de uma progressão geométrica (P.G.) é $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n)$. Logo, temos que $a_{n+1} = a_n \cdot q$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$ e $q \in \mathbb{R}$.

2.2.1 *Exemplo:* Escreva uma P.G. de cinco termos em que $a_1=2$ e $q=3$.

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = a_1 \times q = 2 \times 3 = 6$$

$$a_3 = a_2 \times q = 6 \times 3 = 18$$

$$a_4 = a_3 \times q = 18 \times 3 = 54$$

$$a_5 = a_4 \times q = 54 \times 3 = 162$$

2.2.2 *Exemplo:* Se a sequência $(x, 3x+2, 10x+12)$ é uma P.G., calcule o valor de x .

Temos que $\frac{3x+2}{x} = \frac{10x+12}{3x+2}$. Sendo assim, $10x^2 + 12x = 9x^2 + 12x + 4$. Logo, $x^2 = 4$.

Portanto, $x = 2$ ou $x = -2$.

2.3 Logaritmos

O logaritmo de um número real e positivo b , na base a , positiva e diferente de 1, é o número x ao qual se deve elevar a para se obter b .

$$\log_a b = x \quad \Leftrightarrow \quad a^x = b, \text{ com } b > 0, a > 0 \text{ e } a \neq 1.$$

Na forma logarítmica, a é a base do logaritmo, b é o logaritmando e x é o logaritmo. Já na forma exponencial, a é a base da potência, b é a potência e x é o expoente.

Aos logaritmos que se indicam $\log_a b$ chamamos de sistemas de logaritmos de base a , e existe uma infinidade de sistemas de logaritmos. Dentre todos os sistemas, o mais importante é o sistema de logaritmos decimais, ou base 10. Indica-se: $\log_{10} x$ ou $\log x$.

2.3.1 *Exemplo:* Considerando a definição dada, calcular o valor do $\log_5 25$.

Temos que $\log_5 25 = x \quad \Leftrightarrow \quad 25 = 5^x$. Sendo assim, $5^2 = 5^x$. Portanto, $x = 2$.

2.3.2 *Exemplo:* Sabendo que $\log_a 16 = 4$, calcule o valor de a .

Temos que $\log_a 16 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 16 = a^4$. Sendo assim, $a = \pm 2$. Como $a > 0$, o

valor -2 não deve ser considerado. Portanto, $a = 2$.

Podemos destacar também as propriedades dos logaritmos, sendo elas:

a) Logaritmo do produto: o logaritmo de um produto é igual à soma dos logaritmos dos fatores tomados na mesma base, isto é:

Se $0 < a \neq 1, b > 0$ e $c > 0$, então $\log_a^{(b,c)} = \log_a b + \log_a c$.

b) Logaritmo do quociente: O logaritmo de um quociente é igual ao logaritmo do numerador menos o logaritmo do denominador tomados na mesma base, isto é:

Se $0 < a \neq 1, b > 0$ e $c > 0$, então $\log_a (b/c) = \log_a b - \log_a c$.

c) Logaritmo da potência: O logaritmo de uma potência é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência, isto é:

Se $0 < a \neq 1, b > 0$, então $\log_a(b^n) = n \cdot \log_a b$.

2.3.3 *Exemplo:* Sendo $\log_b a = 4$, $\log_b c = 6$ e $\log_b d = -1$, calcule $\log_b(\frac{a \cdot c}{d})$.

Temos que $\log_b(\frac{a \cdot c}{d}) = \log_b a \cdot c - \log_b d = \log_b a + \log_b c - \log_b d = 4 + 6 - (-1)$.

Logo, $\log_b(\frac{a \cdot c}{d}) = 11$.

2.4 Tipos de juros

Segundo Puccini (1993, p. 5), o conceito de juros pode ser introduzido através das expressões:

- dinheiro pago pelo uso de dinheiro emprestado, ou seja, custo do capital de terceiros colocados à nossa disposição;
- remuneração do capital empregado em atividades produtivas ou, ainda, remuneração paga pelas instituições financeiras sobre o capital nelas aplicado.

Os juros são fixados através de uma taxa percentual que sempre se refere a uma unidade de tempo: ano, semestre, trimestre, mês, dia.

2.4.1 *Exemplo:* 12% ao ano = 12% a.a.

1% ao mês = 1% a. m.

As taxas de juros terão duas representações:

2.4.2 *Exemplo:* a) Porcentagem: 12% ao ano

b) Fração decimal = 0,01 ao mês

A representação em porcentagem é a comumente utilizada, entretanto, todos os cálculos e desenvolvimentos de fórmulas serão feitos através da notação em fração decimal, assim podendo enfatizar o conteúdo matemático já aprendido pelos alunos.

Os juros são normalmente classificados em *simples* ou *compostos*, dependendo do processo de cálculo utilizado.

Juros simples

Neste caso, os juros de cada período são calculados sempre em função do capital inicial empregado.

2.4.3 *Exemplo*: Um indivíduo aplicou no banco R\$200,00, e este lhe prometeu juros simples, à razão de 10% ao ano. Qual será seu saldo credor no final de cada um dos próximos quatro anos?

Vejam a tabela 1:

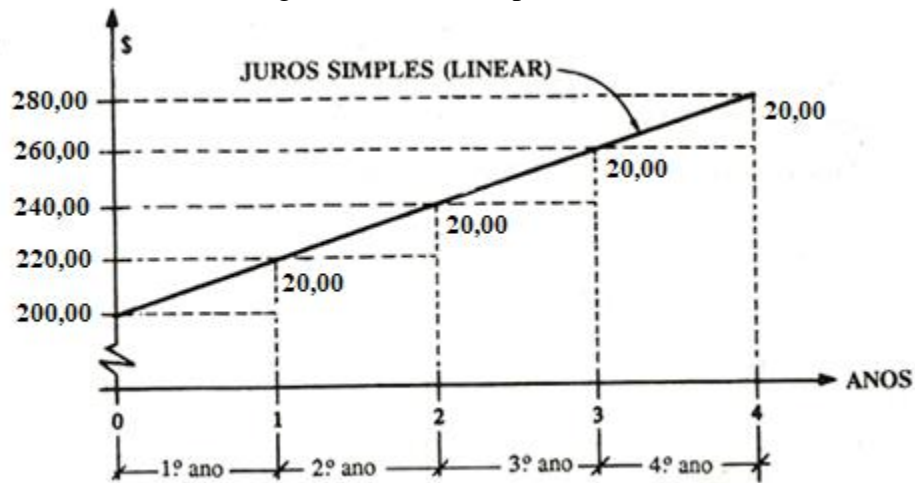
Tabela 1 – Crescimento de R\$200,00 a juros simples de 10% a.a.

Final do	Escala	Saldo no início de cada ano	Juros de cada ano	Saldo no final de cada ano
-	0	-	-	200,00
1º ano	1	200,00	$0,1 \times 200,00 = 20,00$	220,00
2º ano	2	220,00	$0,1 \times 200,00 = 20,00$	240,00
3º ano	3	240,00	$0,1 \times 200,00 = 20,00$	260,00
4º ano	4	260,00	$0,1 \times 200,10 = 20,00$	280,00

Fonte: a própria autora

Portanto, após 4 anos, segundo a tabela cima, o saldo será de R\$ 280,00.

Figura 1 – Juros simples (linear)



Fonte: própria autora

É importante ressaltar que o banco sempre aplicou a taxa de juros de 10% a.a. sobre o capital inicial de R\$200,00.

Juros compostos

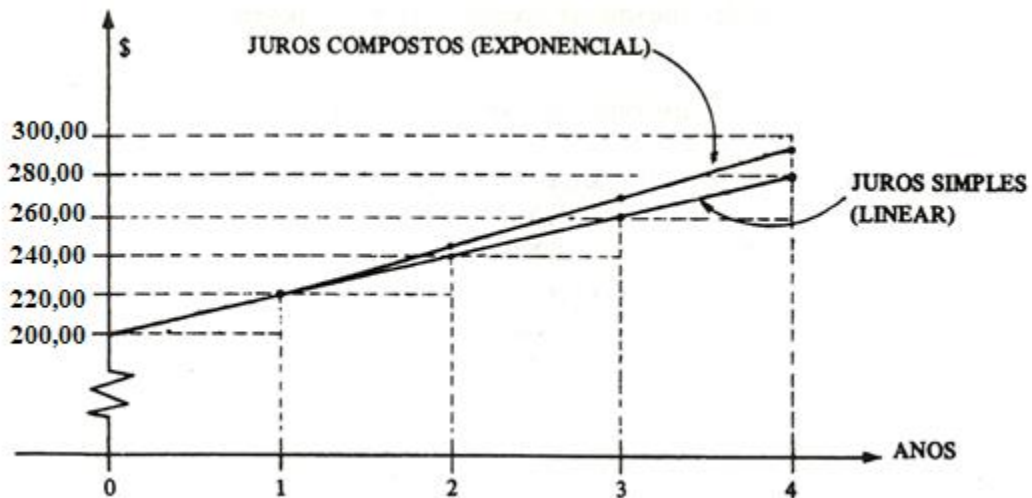
Nessa hipótese, os juros de cada período são calculados sempre em função do saldo existente no início do período correspondente.

2.4.4 *Exemplo:* Imagine que o mesmo indivíduo do exemplo anterior tivesse colocado os seus R\$200,00 em um banco que pagasse juros compostos, à razão de 10% ao ano. Como se comportaria o seu saldo credor (composto pelos “créditos básicos”, decorrentes do confronto positivo entre créditos e débitos nas operações do contribuinte) ao longo dos próximos quatro anos?

Tabela 2 – Crescimento de R\$200,00 a juros compostos de 10% a.a.

Final do	Escala	Saldo no início de cada ano	Juros de cada ano	Saldo no final de cada ano
-	0	-	-	200,00
1º ano	1	200,00	$0,1 \times 200,00 = 20,00$	220,00
2º ano	2	220,00	$0,1 \times 220,00 = 22,00$	242,00
3º ano	3	242,00	$0,1 \times 242,00 = 24,20$	266,20
4º ano	4	266,20	$0,1 \times 266,20 = 26,62$	292,82

Fonte: a própria autora

Figura 2 - Juros compostos
(exponencial)

Fonte: a própria autora

É importante observar que este banco sempre aplicou a taxa de juros de 10% a.a. sobre o saldo existente no início de cada período. Assim, após cada período os juros são incorporados ao saldo anterior e passam, por sua vez, a render juros. A esse processo dá-se o nome de *capitalização de juros*.

Ao capital inicial empregado dá-se o nome de *principal*, e à soma do principal mais juros dá-se o nome de *montante*. Assim, a juros simples apenas o capital rende juros, já a

juros compostos, os rendimentos são calculados sobre os montantes, havendo assim uma incidência de juros sobre juros.

O mercado financeiro segue integralmente a lei de juros compostos. Entretanto, os juros simples são muito utilizados pela facilidade de cálculo e, também, como grande argumento de vendas. Os detalhes destas contas serão vistos a seguir.

2.5 Juros simples

Desenvolveremos aqui a expressão genérica do crescimento do dinheiro no regime de juros simples e mostraremos a sua aplicação através de exemplos numéricos.

Reportemo-nos ao Exemplo (2.4.3) deste capítulo. Vamos agora deduzir a expressão genérica do montante, no regime de juros simples. Nesse regime, os juros de cada período são obtidos pela aplicação da taxa de juros sempre sobre o principal, fazendo com que o valor dos juros seja o mesmo em todos os períodos. Assim, para um principal $P = R\$200,00$ aplicado a uma taxa de juros simples de 10% a.a. ($i = 0,10$), o valor dos juros de cada ano será igual a:

$$\text{Juros} = j = 200,00 \times 0,10 = R\$20,00 \text{ ou } j = P \cdot i \quad (2.5.1)$$

O total de juros acumulados em dois anos será R\$40,00 ou $2(P \cdot i)$, em três anos, R\$60,00 ou $3(P \cdot i)$. Assim, o total de juros acumulados em n anos será igual a $n(P \cdot i)$.

Assim, o total de juros sobre o principal P , decorridos n períodos, é igual a:

$$\text{Juros} = j = P \cdot i \cdot n \quad (2.5.2)$$

O montante M resultante da aplicação de um principal P a uma taxa i de juros simples, durante n períodos será obtido por:

$$\text{Montante} = M = \text{Principal} + \text{juros} \text{ ou } M = P + j, \quad (2.5.3)$$

em que:

- a) a unidade de medida do tempo n deve ser a mesma que a utilizada na medida taxa de juros i .
- b) a taxa de juros está expressa em fração decimal.

2.6 Problemas

2.6.1 Qual o montante acumulado em 24 meses, a uma taxa de 2% a.m., no regime de juros simples, a partir de um principal igual a R\$10.000,00?

Solução:

Usando a expressão (2.5.3) teremos:

$$M = P + j = 10.000,00 + 10.000,00 \times 0,02 \times 24 = 10.000,00 + 4.800,00 = 14.800,00.$$

Logo, o montante acumulado em 24 meses será de R\$14.800,00.

2.6.2 Qual o principal necessário para se ter um montante de R\$2.000,00, daqui a seis semestres a uma taxa de 12% a.s, no regime de juros simples?

Solução:

Usando a expressão (2.5.3) teremos:

$$M = P + j. \text{ Então } 2.000,00 = P + P \times 0,12 \times 6, \text{ logo, } 2.000,00 = 1,72 \times P. \text{ Assim, } P = R\$1.162,79.$$

Logo, o principal necessário em 6 semestres é R\$1.162,79.

2.6.3 Qual a taxa mensal de juros simples que faz um principal de R\$5.000,00 se transformar em um montante de R\$7.500,00 daqui a 20 meses?

Solução:

Usando a expressão (2.5.3) teremos:

$$M = P + j. \text{ Então } 7.500,00 = 5.000,00 + 5.000,00 \times i \times 20, \text{ logo, } 7.500,00 = 5.000,00 + 100.000,00 \times i. \text{ Assim, } 2.500,00 = 100.000,00 \times i, \text{ temos } i = 0,025.$$

Logo, a taxa mensal de juros simples necessária em 20 meses é de 2,5% a.m.

2.6.4 Uma distribuidora oferece aos seus clientes uma taxa de 2,1% a.m., a juros simples. Qual será a renda de uma aplicação de R\$1.000,00 nessa taxa, por um prazo de 18 dias?

Solução:

Neste caso, se $r = 2,1\%$ a.m. então $i = 0,021$ a.m. Logo $i = 0,021/30$ a.d., assim, $i = 0,0007$ a.d.

Usando a expressão (2.5.2) teremos:

$j = P.i.n$. Então $j = 1.000,00 \times 0,0007 \times 18$. Portanto, $j = R\$12,60$.

Portanto, a renda será de R\$12,60.

2.7 Taxa de Desconto e Taxa de Rentabilidade

Vamos desenvolver a fórmula genérica para o relacionamento entre o principal P , o montante M e o período n , juntamente com as taxas de desconto e rentabilidade i .

É válido sabermos que a taxa de rentabilidade i é aplicada sobre o principal P , durante n períodos, para produzir o montante M . Por outro lado, a taxa de desconto i é aplicada sobre o montante M , durante n períodos, para produzir o principal P .

Usando a taxa de rentabilidade i teremos:

- (i) juros de cada período: $P.i$;
- (ii) juros de n períodos: $P.i.n$;
- (iii) montante = principal + juros ou $M = P + P.i.n$.

Usando a taxa de desconto i teremos:

- (i) juros de cada período: $M.i$;
- (ii) juros de n períodos: $M.i.n$;
- (iii) principal = montante – juros ou $P = M - M.i.n$. (2.7.1)

2.8 Problemas

2.8.1 Um banco comercial realiza operações de desconto de notas promissórias (título cambiário em que seu criador assume a obrigação direta e principal de pagar o valor correspondente no título) de acordo com os seguintes critérios:

- a) o prazo da operação é de 3 meses;
- b) a taxa cobrada pelo banco é de 2% a.m., ou seja, 6% ao trimestre;
- c) os juros são pagos antecipadamente.

Assim, se o cliente desejar realizar uma operação de R\$100.000,00, deverá assinar uma nota promissória nesse valor, com vencimento dentro de 3 meses. Os juros da operação serão de 6% de R\$100.000,00, isto é, R\$6.000,00 e o valor líquido recebido pelo cliente, na data da operação, será de R\$94.000,00, uma vez que os juros são pagos antecipadamente.

Solução:

Usando a expressão (2.7.1) teremos:

$P = M - M.i.n$. Então $P = 100.000,00 - 100.000,00 \times 0,02 \times 3$. Logo, $P = 100.000,00 - 6.000,00$.

Assim $P = 94.000,00$.

2.8.2 Nas mesmas condições do problema anterior, vamos fazer o caminho contrário, descobrindo assim a taxa de rentabilidade.

Solução:

Usando a expressão (2.5.3) teremos:

Se $M = P + j$ então $100.000,00 = 94.000,00 + 94.000,00 \times i \times 3$. Logo, $100.000,00 = 94.000,00 + 282.000,00 \times i$, assim, $6.000,00 = 282.000,00i$. Portanto $i = 0,02128$.

Esta é a taxa ao mês de rentabilidade que usaremos neste exemplo.

Assim, se o cliente emprestar R\$94.000,00 do banco, este no período de 3 meses, pagará no final da operação R\$100.000,00, pois a taxa de rentabilidade, ao ser aplicada sobre o principal de R\$94.000,00, proporcionará ao banco uma rentabilidade mensal de R\$2.000,00. Esses juros, ao serem acumulados por três meses, proporcionarão uma rentabilidade total de R\$6.000,00, e transformarão o principal de R\$94.000,00 no montante de R\$100.000,00.

Usando a expressão (2.5.3) teremos:

Se $M = P + P.i.n$ então $M = 94.000,00 + 94.000,00 \times 0,02128 \times 3$. Logo, $M = 94.000,00 + 6.000,00$. Portanto, $M = 100.000,00$.

2.9 Juros compostos

Desenvolveremos aqui o problema da capitalização, isto é, aquele voltado para o crescimento do dinheiro ao longo do tempo, no regime de juros compostos e mostraremos a sua aplicação através de exemplos numéricos.

Reportemo-nos ao Exemplo 2.4.4 deste Capítulo 2. Vamos agora deduzir a expressão genérica do montante, no regime de juros compostos. Nesse regime, o valor dos juros de cada período é obtido pela aplicação da taxa de juros sempre sobre o saldo existente no início do período correspondente. Assim, um principal $P = R\$200,00$ aplicado a uma taxa de juros compostos de 10% a.a. ($i = 0,10$), terá a evolução dos seus montantes ao longo dos próximos anos, conforme demonstrado abaixo:

a) valor do montante M no final do 1º ano:

O valor dos juros do 1º ano será igual a:

Juros = $j = P.i = 200,00 \times 0,10 = R\$20,00$ e o montante $M = P + j$. Então, $M = 200,00 + 20,00$, logo, $M = 220,00$.

b) valor do montante M no final do 2º ano:

O valor dos juros do 2º ano será obtido pela aplicação da taxa de juros sobre o montante existente no final do 1º ano, isto é,

Juros = $j = P.i = 220,00 \times 0,10 = R\$22,00$ e o montante $M = P + j$. Então, $M = 220,00 + 22,00$, logo, $M = 242,00$.

ou

$M = (P + j) + (P + j) \times i = (P + P.i) + (P + P.i) \times i = (P + P.i)(1 + i) = P(1 + i)(1 + i) = P(1 + i)^2$.

c) valor do montante M no final do 3º ano:

A expressão para o montante M no final do 3º ano pode ser obtida de forma análoga à anterior: $M = P(1 + i)^3$.

Em função dos resultados anteriores, podemos concluir que a expressão genérica para a obtenção do montante M , resultante da aplicação do principal P a uma taxa de juros compostos de i , durante n períodos de capitalização é $M = P(1 + i)^n$,

$$(2.9.1)$$

em que:

- a) a unidade de medida do tempo n deve ser a mesma que a utilizada na medida taxa de juros i .
- b) a taxa de juros está expressa em fração decimal.

2.10 Problemas

2.10.1 Qual o montante acumulado em 24 meses, a uma taxa de 2% a.m., no regime de juros compostos, a partir de um principal igual a R\$1.000,00?

Solução:

Usando a expressão (2.9.1) teremos:

$M = P(1 + i)^n$ então $M = 1.000,00(1 + 0,02)^{24}$. Logo, $M = 1.000,00(1,02)^{24}$, assim, $M = 1.000,00 \times 1,608$. Temos, $M = R\$1.608,00$.

Logo, o montante acumulado será de R\$1.608,00.

2.10.2 João vai comprar um carro novo no valor de R\$52.000,00, a uma taxa de juros compostos de 0,98% a.m., e fará um empréstimo no banco da concessionária em 48 vezes. Qual será o montante que João pagará ao final desses 4 anos?

Solução:

Usando a expressão (2.9.1) teremos:

$M = P(1 + i)^n$ então $M = 52.000,00(1 + 0,0098)^{48}$. Logo $M = 52.000,00(1,0098)^{48}$, assim, $M = 52.000,00 \times 1,597$. Temos $M = R\$83.044,00$.

Logo, o valor pago por João no final de 4 anos será de R\$83.044,00.

2.10.3 Uma pessoa aplicou a importância de R\$ 500,00 em uma instituição bancária, que paga juros mensais de 3,5%, no regime de juros compostos. Quanto tempo após a aplicação o montante será de R\$ 3.500,00?

Solução:

Usando a expressão (2.9.1) teremos:

$M = P(1 + i)^n$ então $3.500,00 = 500,00(1 + 0,035)^t$. Logo, $7 = (1,035)^t$, assim, $\log 7 = t \log(1,035)$. Temos $t \log 1,035 = \log 7$. Logo, $t \cdot 0,0149 = 0,8451$. Assim, $t = 56,7$.

Logo, o montante será originado após 56 meses de aplicação.

2.11 Expressão para Desconto

Para se achar o principal P necessário para produzir o montante M , após n períodos de capitalização, a uma taxa i de juros compostos, basta utilizar a fórmula (2.7.1):

$$\text{Como } M = P(1 + i)^n, \text{ logo } \frac{M}{(1 + i)^n} = P. \text{ Então, } P = M \cdot \frac{1}{(1 + i)^n}. \quad (2.11.1)$$

2.12 Problemas

2.12.1 Qual o principal P que deve ser aplicado hoje, para se acumular um montante de R\$1.000,00 daqui a 12 meses, no regime de juros compostos, a uma taxa de 3% a.m.?

Solução:

Usando a expressão (2.11.1) teremos:

Se $P = M \cdot \frac{1}{(1+i)^n}$ então $P = 1.000,00 \times \frac{1}{(1+0,03)^{12}}$. Logo, $P = 1.000,00 \times \frac{1}{(1,03)^{12}}$, assim, $P = 1.000,00 \times 0,70126$. Portanto, $P = R\$701,26$.

Logo, o principal que deverá ser aplicado hoje é de R\$701,26.

2.13 Taxas de juros

Até o presente momento, trabalhamos com taxas de juros cuja unidade de tempo da taxa de juros coincide com a unidade de tempo dos períodos de capitalização. Essas são as chamadas taxas efetivas de juros, no qual trataremos no próximo tópico.

Quando relacionamos taxas efetivas com unidades de tempo diferentes, estamos tratando das taxas proporcionais (no regime de juros simples) e das taxas equivalentes (juros compostos). Veremos então as taxas nominais (cujas unidades de tempo não coincidem com as unidades de tempo dos períodos de capitalização) em contraposição às taxas efetivas.

Taxa efetiva

Definição: Taxa efetiva é aquela em que a unidade de referência de seu tempo coincide com a unidade de tempo dos períodos de capitalização. Por exemplo: 1% ao mês capitalizados mensalmente, 14% ao trimestre capitalizados trimestralmente, 27% ao ano capitalizados anualmente, etc.

Taxas proporcionais

Definição: Duas ou mais taxas de juros são proporcionais quando, ao serem aplicadas a um mesmo principal durante um mesmo prazo, produzem um mesmo montante acumulado no final daquele prazo, no regime de juros simples.

O conceito de taxas proporcionais está, portanto, diretamente ligado ao regime de juros simples.

Taxas equivalentes

Definição: Duas ou mais taxas de juros são equivalentes quando, ao serem aplicadas a um mesmo principal durante um mesmo prazo, produzem um mesmo montante acumulado no final daquele prazo, no regime de juros compostos.

O conceito de taxas equivalentes está, portanto, diretamente ligado ao regime de juros compostos.

Assim, a diferença entre taxas proporcionais e taxas equivalentes se prende exclusivamente ao regime de juros considerado.

O conteúdo descrito acima pode ser observado na tabela abaixo:

Tabela 3 – Comparação entre taxas anuais proporcionais e equivalentes

Taxa Efetiva Mensal	Taxa Anual Proporcional	Taxa Anual Equivalente
1%	12%	12,68%
3%	36%	42,58%
5%	60%	79,59%
7%	84%	125,22%
10%	120%	213,84%
12%	144%	289,60%
15%	180%	435,03%
20%	240%	791,61%

Fonte: PUCCINI, 1993, p. 116

Taxa nominal

Definição: Taxa nominal é aquela em que a unidade de referência de seu tempo não coincide com a unidade de tempo dos períodos de capitalização. A taxa nominal é quase sempre fornecida em termos anuais, e os períodos de capitalização podem ser semestrais, trimestrais ou mensais. Por exemplo: 12% ao ano, capitalizados mensalmente, 24% ao ano, capitalizados semestralmente, 10% ao ano, capitalizados trimestralmente, etc.

A taxa nominal é bastante usada no mercado, entretanto seu valor nunca é usado nos cálculos por não representar uma taxa efetiva. O que realmente interessa é a taxa efetiva

embutida na taxa nominal, pois ela é que será efetivamente aplicada em cada período de capitalização.

Nos exemplos acima as taxas efetivas implícitas são calculadas do seguinte modo:

$$\text{a) } 12\% \text{ a.a. capitalizados mensalmente} = \frac{12\% \text{ a.a.}}{12 \text{ meses}} = 1\% \text{ a.m.}$$

$$\text{b) } 24\% \text{ a.a. capitalizados semestralmente} = \frac{24\% \text{ a.a.}}{2 \text{ semestres}} = 12\% \text{ a.s.}$$

$$\text{c) } 10\% \text{ a.a. capitalizados trimestralmente} = \frac{10\% \text{ a.a.}}{4 \text{ trimestres}} = 2,5\% \text{ a.t.}$$

Assim, devemos levar em consideração as taxas efetivas no momento de realizar os cálculos. Conforme observamos, a obtenção da taxa efetiva embutida na taxa nominal é feita no regime de juros simples. Logo, a taxa de juros anual equivalente a essa taxa efetiva embutida será maior do que a taxa nominal que lhe originou, pois essa equivalência é feita no regime de juros compostos.

2.14 Problemas

Faremos exemplos usando o mesmo principal de R\$100,00, porém usando taxas diferentes. Observar que com valores mais simples é mais didático.

2.14.1 (Taxas proporcionais) Qual o montante acumulado no final de quatro anos, a partir de um principal de R\$100,00, com uma taxa de juros de 6% a.s., no regime de juros simples?

Solução:

Usando a expressão (2.5.3) teremos:

$$M = P + j = 100,00 + 100,00 \times 0,06 \times 8 = 100,00 + 48,00 = 148,00.$$

Logo, o montante acumulado em 4 anos será de R\$148,00.

2.14.2 (Taxas proporcionais) Qual o montante acumulado no final de quatro anos, a partir de um principal de R\$100,00, com uma taxa de juros de 3% a.t., no regime de juros simples?

Solução:

Usando a expressão (2.5.3) teremos:

$$M = P + j = 100,00 + 100,00 \times 0,03 \times 16 = 100,00 + 48,00 = 148,00.$$

Logo, o montante acumulado em 4 anos será de R\$148,00. Observe que é o mesmo valor com taxa de 6% a.s. (2 trimestres).

2.14.3 (Taxas equivalentes) Qual o montante acumulado no final de um ano, a partir de um principal de R\$100,00, com uma taxa de juros de 1% a.m., no regime de juros compostos?

Solução:

Usando a expressão (2.9.1) teremos:

Se $M = P(1 + i)^n$ então $M = 100,00(1 + 0,01)^{12}$. Logo, $M = 100,00(1,01)^{12}$, assim, $M = 100,00 \times 1,1268$. Portanto $M = R\$112,68$.

Logo, o montante acumulado será de R\$112,68.

2.14.4 (Taxas equivalentes) Qual o montante acumulado no final de um ano, a partir de um principal de R\$100,00, com uma taxa de juros de 12,683% a.a., no regime de juros compostos?

Solução:

Usando a expressão (2.9.1) teremos:

Se $M = P(1 + i)^n$, então $M = 100,00(1 + 0,12683)^1$. Logo, $M = 100,00(1,12683)^1$, assim, $M = R\$112,68$.

Portanto, o montante acumulado será de R\$112,68. Observe que é o mesmo valor com taxa de 1% a.m.

2.14.5 (Taxa nominal) Obtenha as taxas efetivas anuais equivalentes a uma taxa nominal de 24% ao ano com os seguintes períodos de capitalização:

- a) mensal;
- b) trimestral;
- c) semestral.

a) *Solução:*

24% a.a. capitalizados mensalmente são equivalentes a $\frac{24\% \text{ a.a.}}{12 \text{ meses}} = 2\% \text{ a.m.}$

Temos $(1 + i)^{12} = (1 + 0,02)^{12} = (1,02)^{12} = 1,2682$. Portanto, com uma taxa de 2% a.m., obtemos uma taxa anual equivalente de 26,82%.

b) *Solução:*

Agora, 24% a.a. capitalizados trimestralmente são equivalentes a $\frac{24\% \text{ a.a.}}{4 \text{ trimestres}} = 6\% \text{ a.t.}$

Temos $(1 + i)^4 = (1 + 0,06)^4 = (1,06)^4 = 1,2625$. Portanto, com uma taxa de 6% a.t., obtemos uma taxa anual equivalente de 26,25%.

c) *Solução:*

E, 24% a.a. capitalizados semestralmente são equivalentes a $\frac{24\% \text{ a.a.}}{2 \text{ semestres}} = 12\% \text{ a.s.}$

Temos $(1 + i)^2 = (1 + 0,12)^2 = (1,12)^2 = 1,2544$. Portanto, com uma taxa de 12% a.s., obtemos uma taxa anual equivalente de 25,44%.

Podemos concluir que a taxa efetiva anual é sempre maior do que a taxa nominal correspondente. A diferença entre as duas taxas será tanto maior quanto:

- a) maior for o número de períodos de capitalização;
- b) maior for o valor da taxa nominal.

2.15 Descontos

Alguns títulos de crédito (documento comprobatório de uma dívida, como por exemplo a nota promissória) podem sofrer um desconto, que consiste em o portador do título resgatá-lo antes do vencimento, pagando por ele um valor menor do que pagaria se aguardasse a data do vencimento.

O valor antecipado pago pelo portador chama-se valor atual A e representa a diferença entre o valor nominal N e o desconto. O desconto corresponde aos juros cobrados pela antecipação do pagamento.

O conceito de “Desconto” pode ser assim resumido: $D = N - A$, em que N e A foram descritos anteriormente.

Existem dois tipos de desconto: o desconto comercial (por fora) e o desconto racional (por dentro), nos quais trataremos nos próximos tópicos.

Desconto comercial

Definição: Desconto comercial, também chamado de desconto “por fora”, é calculado sobre o valor nominal de um título. Este pode ser simples ou composto.

Desconto Comercial Simples (D_{cs})

O cálculo deste desconto é análogo ao cálculo dos juros simples, substituindo-se o Capital P na fórmula de juros simples pelo Valor Nominal N do título.

$$\text{Temos } j = P.i.n, \text{ logo, } D_{cs} = N.i.n. \quad (2.15.1)$$

$$\text{Assim, o valor atual no } D_{cs} \text{ é calculado pela fórmula } A = N - D_{cs} = N - N.i.n \quad (2.15.2)$$

Desconto Comercial Composto (D_{cc})

O cálculo deste desconto é análogo ao cálculo dos juros compostos, substituindo-se o Capital P na fórmula de juros compostos pelo Valor Nominal N do título.

$$\text{Temos } M = P(1 + i)^n, \text{ logo, } D_{cc} = N(1 - i)^n. \quad (2.15.3)$$

Lembrando que, quando tratamos de desconto, usamos o sinal de subtração na fórmula ao invés do sinal de soma.

Desconto racional

Definição: Desconto racional, também chamado de desconto “por dentro”, é calculado sobre o valor atual de um título. Este pode ser simples ou composto.

Desconto Racional Simples (D_{rs})

O cálculo deste desconto é análogo ao cálculo dos juros simples, substituindo-se o Capital P na fórmula de juros simples pelo Valor Atual A do título.

$$\text{Temos } j = P.i.n, \text{ logo, } D_{rs} = A.i.n. \quad (2.15.4)$$

Assim, usando a fórmula $D = N - A$, o valor atual no D_{rs} pode ser calculado pela fórmula

$$N = A + D_{rs}. \text{ Logo, } N = A + A.i.n, \text{ assim, } N = A(1 + i.n). \text{ Então } A = \frac{N}{1+i.n}. \quad (2.15.5)$$

Desconto Racional Composto (D_{rc})

O cálculo deste desconto é análogo ao cálculo dos juros compostos, substituindo-se o Capital P na fórmula de juros compostos pelo Valor Atual A do título, e considerando o Valor Nominal N como o montante M dessa aplicação.

Assim, usando a fórmula $D = N - A$, o valor atual no D_{rc} pode ser calculado pela fórmula $N = A + D_{rc}$ e, adaptando a fórmula (2.9.1) obtemos $M = P(1 + i)^n$. Logo, $N = A(1 + i)^n$, assim, $A = \frac{N}{(1+i)^n}$. Temos:

$$\text{Se } N = \frac{N}{(1+i)^n} + D_{rc}, \text{ então } D_{rc} = N - \frac{N}{(1+i)^n}.$$

$$\text{Assim, } D_{rc} = N - N(1 + i)^{-n}, \text{ logo, } D_{rc} = N[1 - (1 + i)^{-n}]. \quad (2.15.6)$$

Vale ressaltar que o tipo de desconto mais usado no Brasil é o Desconto Racional.

2.16 Problemas

2.16.1 (Desconto comercial simples) Um título de R\$20.000,00 é descontado à taxa de 1,5% ao mês, faltando 25 dias para o vencimento. Determine:

- o valor do desconto comercial simples.
- o valor atual comercial do título.

a) *Solução:*

Como $r = 1,5\%$ a.m. então $i = 0,015$ a.m. Logo, $i = 0,015/30$ a.d., assim, $i = 0,0005$ a.d.

Usando a expressão (2.15.1) teremos:

$$D_{cs} = N.i.n, \text{ logo, } D_{cs} = 20.000,00 \times 0,0005 \times 25. \text{ Assim } D_{cs} = \text{R}\$250,00.$$

Logo, o valor do desconto comercial simples é de R\$250,00.

Para o item (b) temos $N = 20.000,00$ e $D_{cs} = \text{R}\$250,00$.

Usando a expressão (2.15.2) teremos:

$$A = N - D_{cs}, \text{ logo, } A = 20.000,00 - 250,00. \text{ Assim, } A = \text{R}\$19.750,00.$$

Portanto, o valor atual comercial do título é de R\$19.750,00.

2.16.2 (Desconto comercial composto) Uma duplicata (título de crédito nominativo pelo qual o comprador fica obrigado a pagar, em determinada data, a quantia correspondente à fatura de mercadoria vendida a prazo) de valor nominal de R\$20.000,00 foi resgatada 3 meses antes do seu vencimento, pelo regime de desconto comercial composto. Tendo sido contratada à taxa de 10% ao mês, qual é valor atual do título na época do resgate e qual foi o desconto comercial composto concedido?

Solução:

Como $r = 10\%$ a.m. então $i = 0,10$ a.m.

Usando a expressão (2.15.3) teremos:

$D_{cc} = N(1 - i)^n$. Então, $D_{cc} = 20.000,00(1 - 0,10)^3$, logo, $D_{cc} = 20.000,00(0,9)^3$. Assim, $D_{cc} = 20.000,00 \times 0,729$, portanto, $D_{cc} = R\$14.580,00$.

Logo, o valor atual do título é de R\$14.580,00 e o desconto comercial composto foi de $20.000,00 - 14.580,00 = R\$5.420,00$.

2.16.3 (Desconto racional simples) Seja um título de valor nominal de R\$8.000,00 vencível em um ano, que está sendo liquidado 3 meses antes de seu vencimento. Sendo de 42% a.a. a taxa nominal de juros simples, pede-se calcular o desconto racional e o valor descontado desta operação.

Solução:

Como $r = 42\%$ a.a. então $i = 0,42$ a.a. Logo, $i = 0,42/12$ a.m., assim, $i = 0,035$ a.m.

Usando a expressão (2.15.5) teremos:

$A = \frac{N}{1+i.n}$, logo, $A = \frac{8.000,00}{1+0,035.3}$. Então $A = \frac{8.000,00}{1,105}$, assim, $A = R\$7.239,82$.

Logo, o desconto racional simples foi de $8.000,00 - 7.239,82 = R\$760,18$ e o valor descontado desta operação é de R\$7.239,82.

2.16.4 (Desconto racional composto) Uma duplicata de valor nominal de R\$ 150.000,00 foi resgatada 3 meses antes do seu vencimento, tendo sido contratada à taxa de 24% a.a., capitalizados mensalmente. Qual foi o desconto racional composto concedido?

Solução:

Novamente, se $r = 24\%$ a.a. então $i = 0,24$ a.a. Logo, $i = 0,24/12$ a.m., assim, $i = 0,02$ a.m.

Usando a expressão (2.15.6) teremos:

$D_{rc} = N[1 - (1 + i)^{-n}]$, logo, $D_{rc} = 150.000,00[1 - (1 + 0,02)^{-3}]$. Então, $D_{rc} = 150.000,00[1 - 0,942]$, assim, $D_{rc} = 150.000,00(0,058)$. Portanto, $D_{rc} = R\$8.700,00$.

Logo, o desconto racional composto concedido foi de R\$8.700,00.

2.17 Inflação e Correção Monetária

Definição: Inflação é o aumento generalizado dos preços de bens e serviços num certo intervalo de tempo. Já a deflação é a queda generalizada dos preços. No Brasil, foram criados órgãos especializados em medir a inflação e essas medidas fornecem uma média da variação dos preços, como por exemplo o IPCA (Índice de Preços ao Consumidor) é medido mês a mês pelo IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística), entre outros.

É importante, antes de selecionar um índice para atualização de uma série de valores monetários, provir-se a uma análise de sua representatividade em relação aos propósitos em consideração. (ASSAF, 1998).

Para atualizar monetariamente uma importância afetada pela inflação, usamos o mesmo raciocínio desenvolvido em juros compostos.

Podemos calcular a taxa de inflação através da fórmula $J_i = \frac{P_1}{P_0} - 1$, (2.17.1)

em que:

- a) P_1 é o preço final de certo produto.
- b) P_0 é o preço inicial de certo produto.
- c) J_i é a taxa de inflação.

Também conseguimos calcular a taxa acumulada de inflação através da fórmula

$$J_{ac} = (1 + J_1) \cdot (1 + J_2) \dots (1 + J_n) - 1, \quad (2.17.2)$$

em que:

- a) J_1 é a taxa (em fração decimal) referente ao período 1.
- b) J_2 é a taxa (em fração decimal) referente ao período 2.
- c) J_{ac} é a taxa acumulada de inflação.
- d) J_n é a taxa (em fração decimal) referente ao período n.

Quando falamos sobre a inflação no Brasil, referimo-nos maioritariamente à inflação baseada no índice de preços ao consumidor (IPC). O IPC brasileiro reflete a evolução dos

preços de um pacote de produtos e serviços padrão que as famílias no Brasil contraem para consumo. Para determinar a inflação, compara-se percentualmente o nível IPC de um determinado período em relação ao nível do período anterior. Havendo uma descida dos preços estamos então perante a deflação (inflação negativa). Em dezembro de 2017 a inflação foi de 2,947%, em novembro do mesmo ano 2,804% e em outubro 2,701% (segundo o Valor Econômico).

Uma inflação descontrolada pode ocasionar diversos distúrbios na economia de um país. Pode-se citar como exemplo a perda do poder de compra do dinheiro, o aumento do desemprego, a instabilidade da moeda, os preços de produtos em colapso, entre diversas outras disfunções.

De acordo com Dornbusch e Fischer (2006), a inflação é impopular, visto que os produtos que as pessoas estão comprando estão aumentando. A impopularidade da inflação se mantém mesmo se as rendas das pessoas aumentarem proporcionalmente aos preços. Ela está relacionada a diferentes distúrbios econômicos, como o choque dos preços de petróleo da década de 60.

Com a finalidade da atualização dos preços, provocada pela inflação, foi institucionalizada no Brasil, no período de outubro de 1964 a fevereiro de 1986, a aplicação da correção monetária. A atualização dos preços era feita mensal, trimestral ou anualmente, bastando multiplicar o preço antigo pelo fator de atualização $1 + f$, em que f era a taxa unitária da inflação verificada no respectivo período. Sendo assim, a correção monetária nada mais é do que o reajuste dos capitais envolvidos em operações financeiras, com o objetivo de anular, ou pelo menos atenuar, os efeitos da inflação.

O índice utilizado para a aplicação da correção monetária era o da variação das Obrigações Reajustáveis do Tesouro Nacional (ORTN), que, depois, passaram a ser denominadas Obrigações do Tesouro Nacional (OTN), também conhecidos como indexador.

Generalizando, para a importância de um capital C , submetida sucessivamente às taxas, todas na mesma unidade de tempo, é corrigida para um montante M dado pela fórmula

$$M = C.(1 + J_1). (1 + J_2)... (1 + J_n). \quad (2.17.3)$$

2.18 Problemas

2.18.1 No ano de 2009, o preço de uma capinha de celular era de R\$20,00. Em 2010, o preço do mesmo produto passou para R\$25,00. Qual a taxa de inflação desse período?

Solução:

Usando a expressão (2.17.1) teremos:

$$\text{Se } J_i = \frac{P_1}{P_0} - 1, \text{ então } J_i = \frac{25}{20} - 1. \text{ Logo, } J_i = 1,25 - 1. \text{ Portanto, } J_i = 0,25.$$

Logo, a taxa de inflação desse período é de 25% a.p.

2.18.2 A taxa de inflação em dezembro de 2017 no Brasil foi de 2,947%. Em novembro, essa mesma taxa foi de 2,804%. Qual a inflação acumulada nesses dois meses?

Solução:

Usando a expressão (2.17.2) teremos:

$$\text{Se } J_{ac} = (1 + J_1) \cdot (1 + J_2) \dots (1 + J_n) - 1, \text{ então } J_{ac} = (1 + 0,02947) \cdot (1 + 0,02804) - 1. \text{ Logo, } J_{ac} = 1,02947 \times 1,02804 - 1, \text{ assim, } J_{ac} = 1,0583 - 1. \text{ Temos } J_{ac} = 0,0583.$$

Logo, a taxa de inflação acumulada nesses dois meses é de 5,83%.

2.18.3 Qual é o valor de R\$ 100.000,00 corrigido pelas taxas mensais de inflação de três meses consecutivos de 5%, 10% e 20%, respectivamente?

Solução:

Usando a expressão (2.17.3) teremos:

$$\text{Se } M = C \cdot (1 + J_1) \cdot (1 + J_2) \cdot (1 + J_3), \text{ então } M = 100.000 \times (1 + 0,05) \times (1 + 0,10) \times (1 + 0,20). \text{ Logo } M = 100.000 \times 1,05 \times 1,1 \times 1,2, \text{ assim, } M = R\$138.600,00.$$

Portanto, o valor corrigido pela inflação será de R\$138.600,00.

2.19 Amortização

Amortização e juros

Definição: Amortização é um processo de extinção de uma dívida através de pagamentos periódicos, que são realizados em função de um planejamento, de modo que cada prestação corresponde à soma do reembolso do Capital ou do pagamento dos juros do saldo

devedor, podendo ser o reembolso de ambos, sendo que os juros sempre são calculados sobre o saldo devedor.

No pagamento de dívidas, a juros compostos, cada parcela de pagamento pode incluir:

- a) juros do período, calculados sobre o saldo da dívida no início do período;
- b) amortização do principal, correspondente ao pagamento parcial (ou integral) do principal.

Os principais sistemas de amortização são: Sistema de Pagamentos variáveis; Sistema Americano; Sistema de Pagamento único; Sistema de Amortização Constante (SAC); Sistema Price ou Francês (PRICE); Sistema de Amortização Misto (SAM); Sistema Alemão. Em todos os sistemas de amortização, cada pagamento é a soma do valor amortizado com os juros do saldo devedor.

No exemplo a seguir serão mostradas duas maneiras em que essas duas parcelas, amortização e juros, podem ser combinadas na liquidação de financiamentos nos dois sistemas de amortização mais utilizados, o Price e o de Amortização Constante. Para isso, imagine o caso de um financiamento feito por um estudante para pagar a primeira mensalidade de um curso de odontologia em uma faculdade particular, no interior do estado de São Paulo, com as seguintes características:

Principal: R\$2.628,00

Taxa de juros: 1% a.m.

Prazo: 4 meses

Sistema Price

Nesse sistema, o financiamento é pago em quatro prestações mensais iguais, cada uma sendo subdividida em duas parcelas: juros do período, calculados sobre o saldo no início do período; e amortização do principal, obtida pela diferença entre o valor de prestação e o valor de juros do período.

A utilização desse sistema é bastante difundida, cabendo ressaltar as aplicações como: financiamentos imobiliários e Crédito Direto ao Consumidor.

Podemos obter o valor fixo da prestação neste sistema de amortização através da fórmula $P = p_v \cdot \left(\frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1} \right)$, em que “ p_v ” é o presente valor, “ P ” é o valor da prestação, “ n ” é o número de parcelas e “ i ” é a taxa de juros na forma unitária.

Demonstração:

O montante M , no final do período de ordem n , acumulado por essas prestações, corresponde à soma dos montantes individualmente calculados para cada prestação até esse mesmo período. Assim temos:

- (i) a prestação capitaliza juros durante $(n - 1)$ períodos, e seu valor futuro no final do período n é igual a $P(1 + i)^{n-1}$.
- (ii) a prestação capitaliza juros durante $(n - 2)$ períodos, e seu valor futuro no final do período n é igual a $P(1 + i)^{n-2}$.
- (iii) a penúltima prestação capitaliza juros durante 1 período, e seu valor futuro no final do período n é igual a $P(1 + i)$.
- (iv) a última prestação não capitaliza juros, e seu valor no final do período n é igual a P .

Assim, o montante M é obtido pela soma dessas parcelas, isto é:

$$M = P[(1 + i)^{n-1} + (1 + i)^{n-2} + \dots + (1 + i) + 1]. \quad (2.19.1)$$

Os termos entre colchetes correspondem à soma dos termos de uma progressão geométrica, cuja fórmula pode ser obtida multiplicando-se ambos os lados da Expressão

(2.19.1) por $(1 + i)$. Assim temos:

$$M(1 + i) = P[(1 + i)^n + (1 + i)^{n-1} + \dots + (1 + i)^2 + (1 + i)]. \quad (2.19.2)$$

Subtraindo-se da Expressão (2.19.2) a Expressão (2.19.1):

$$M \times i = P[(1 + i)^n - 1]$$

e portanto:

$$M = \frac{P[(1 + i)^n - 1]}{i}. \quad (2.19.3)$$

Sabemos também que $M = P(1 + i)^n$. Logo, $\frac{P[(1 + i)^n - 1]}{i} = P(1 + i)^n$.

$$\text{Assim, } P = P_v \cdot \left(\frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1} \right).$$

Neste plano, o financiamento dos R\$2.628,00 será pago em quatro prestações iguais de R\$673,50. Cabe ainda comentar que a primeira prestação contém R\$26,28 de juros (1% de R\$2.628,00) e R\$647,22 de amortização do principal. Assim, o saldo no início do segundo mês será igual a R\$2.628,00 – R\$647,22 = R\$1.980,77. Logo, os juros do segundo mês R\$19,80 serão obtidos pela aplicação de 1% sobre R\$1.980,77. E assim, sucessivamente.

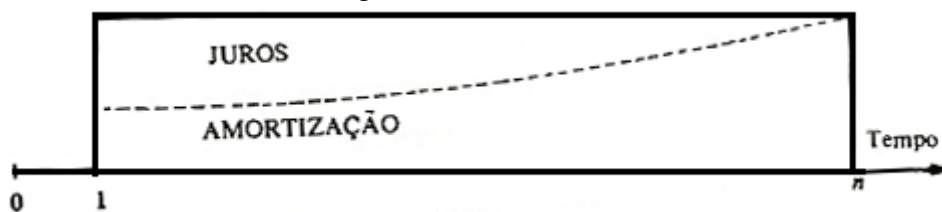
Assim, ao longo do tempo, os juros vão decrescendo ao passo que as amortizações vão crescendo, de tal modo que a soma dessas duas parcelas se mantenha sempre igual ao valor constante da prestação. Veja na tabela e no esquema abaixo:

Tabela 4 – Tabela de financiamento no Sistema PRICE

Mês	saldo no início do mês	juros	saldo no fim do mês antes do pagamento	Pagamentos			Saldo no fim do mês após pagamento
				juros	amortização	Total	
1	2.628,00	26,28	2.654,28	26,28	647,22	673,50	1.980,77
2	1.980,77	19,80	2.000,57	19,80	653,69	673,50	1.327,07
3	1.327,07	13,27	1.340,34	13,27	660,23	673,50	666,83
4	666,83	6,66	673,49	6,66	666,83	673,50	0,00

Fonte: a própria autora

Figura 3 – Sistema PRICE



Fonte: PUCCINI, 1993, p. 18

Acima observamos o esboço de uma amortização pelo sistema PRICE, em que o valor da prestação se mantém com o passar do tempo, conforme relatado anteriormente.

Sistema de Amortizações Constantes (SAC)

Nesse sistema, o financiamento é pago em quatro prestações uniformemente decrescentes, cada uma sendo subdividida em duas parcelas: juros do período, calculados sobre o saldo no início do período; e amortização do principal, obtida pela divisão do principal pelo número total de prestações.

A relação prestação = amortização + juros continua válida, entretanto, a ordem de obtenção das parcelas passou a ser:

- cálculo da amortização do principal, que tem valor constante em todas as prestações, através da divisão do principal pelo número de prestações;
- cálculo dos juros do período, pela aplicação da taxa do contrato sobre o valor do saldo (principal remanescente) no início do período;
- cálculo do valor da prestação pela soma da amortização do principal com os juros do período.

Esse sistema também é conhecido como Método Hamburguês, e tem grande aplicação em financiamentos imobiliários e financiamento às empresas, por parte de várias entidades governamentais.

Neste plano, o financiamento dos R\$2.628,00 será pago em quatro amortizações iguais de R\$657,00 e mais quatro parcelas de R\$26,28, R\$19,71, R\$13,14 e R\$6,57, a título de juros de primeiro ao quarto mês, respectivamente. Sendo assim, a primeira prestação contém R\$26,28 de juros (1% de R\$2.628,00), a segunda contém R\$19,71 de juros (1% de R\$1.971,00), e assim sucessivamente.

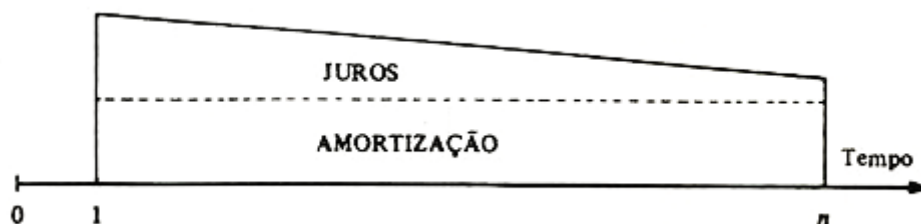
Assim, ao longo do tempo, os juros são uniformemente decrescentes, e como todas as amortizações são iguais, o decréscimo do principal será uniforme. Veja na tabela e no esquema abaixo:

Tabela 5 – Tabela de financiamento no SAC

mês	saldo no início do mês	juros	saldo no fim do mês antes do pagamento	Pagamentos			Saldo no fim do mês após pagamento
				juros	Amortizaçã o	Total	
1	2.628,00	26,28	2.654,28	26,28	657,00	683,28	1.971,00
2	1.971,00	19,71	1.990,71	19,71	657,00	676,71	1.314,00
3	1.314,00	13,14	1.327,14	13,14	657,00	670,14	657,00
4	657,00	6,57	663,57	6,57	657,00	663,57	0,00

Fonte: a própria autora

Figura 4 – SAC



Fonte: PUCCINI, 1993, p. 19

Conforme observado no item (a), com o passar do tempo o valor da amortização é constante.

2.20 Problemas

2.20.1 Calcule o valor das prestações de um financiamento de R\$10.000,00 com taxa de juros de 1% a.m. que deve ser pago no prazo de 10 meses, pelo modelo SAC.

Solução:

No 1º mês, temos que o saldo no início do ano é R\$10.000,00, o juro é $0,01 \times 10.000,00 = R\$100,00$ e o saldo no final do ano antes do pagamento é de R\$10.100,00. Logo, a amortização será de R\$1.000,00 ($R\$10.000,00/10$) e o valor da parcela será de R\$1.100,00.

No 2º mês, o saldo no início do ano é R\$9.000,00, o juro é $0,01 \times 9.000,00 = R\$90,00$ e o saldo no final do ano antes do pagamento é de R\$9.090,00. Assim, a amortização será de R\$1.000,00 ($R\$10.000,00/10$) e o valor da parcela será de R\$1.090,00.

Aplicando o mesmo raciocínio, mês a mês, obtemos no 10º mês um saldo no início do ano de R\$1.000,00, o juro de $0,01 \times 1.000,00 = R\$10,00$ e o saldo no final do ano antes do pagamento de R\$1.010,00. Logo, a amortização será de R\$1.000,00 ($R\$10.000,00/10$) e o valor da parcela será de R\$1.010,00.

2.20.2 Construa uma tabela de financiamento envolvendo a quantia de R\$ 30.000,00 divididos em 12 parcelas a juros mensais de 1,5%. Utilize a seguinte fórmula matemática para o cálculo do valor fixo da prestação: $P = pv \cdot \left(\frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1} \right)$, em que “pv” é o presente valor, “P” é o valor da prestação, “n” é o número de parcelas e “i” é a taxa de juros na forma unitária, neste caso, 0,015.

Solução:

Faremos o cálculo dos juros (saldo devedor do mês anterior multiplicado por 1,5%):

$$1^\circ \text{ mês: } 30.000,00 \times 1,5\% = 450,00.$$

$$2^\circ \text{ mês: } 27.699,60 \times 1,5\% = 415,49.$$

A amortização é a subtração entre o valor da prestação e o juro:

$$1^\circ \text{ mês: } 2.750,40 - 450,00 = 2.300,40.$$

$$2^\circ \text{ mês: } 2.750,40 - 415,49 = 2.334,91.$$

Já o cálculo do saldo devedor é: saldo devedor do mês anterior subtraído da amortização do período em questão:

$$1^\circ \text{ mês: } 30.000,00 - 2.300,40 = 27.699,60.$$

$$2^\circ \text{ mês: } 27.699,60 - 2.334,91 = 25.364,69.$$

Abaixo, a tabela completa:

Tabela 6 – Tabela de financiamento

mês	prestação	Juros	amortização	saldo devedor
				30.000,00
1	2.750,40	450,00	2.300,40	27.699,60
2	2.750,40	415,49	2.334,91	25.364,69
3	2.750,40	380,47	2.369,93	22.994,76
4	2.750,40	344,92	2.405,48	20.589,28
5	2.750,40	308,84	2.441,56	18.147,72
6	2.750,40	272,22	2.478,18	15.669,54
7	2.750,40	235,04	2.515,36	13.154,18
8	2.750,40	197,31	2.553,09	10.601,09
9	2.750,40	159,02	2.591,38	8.009,71
10	2.750,40	120,15	2.630,25	5.379,46
11	2.750,40	80,69	2.669,71	2.709,75
12	2.750,40	40,65	2.709,75	0,00

Obs.: Para encontrarmos o valor das prestações no Sistema Price, é necessário fazer uso de tabelas financeiras.

3 Atividade Prática

3.1 Introdução

A atividade prática relacionada ao tema foi aplicada na escola particular Colégio “Max Beny Macena”, Sistema COC de Ensino, localizada na cidade de Bariri, interior de São Paulo, e teve duração de três meses. As séries escolhidas foram 2ª e 3ª séries do Ensino Médio, tendo em vista que os alunos já conheciam os conceitos de juros simples e compostos, introdução à matemática financeira e progressão geométrica.

O objetivo foi mostrar aos alunos de um modo prático o rendimento de uma caderneta de poupança ou de um investimento, como por exemplo o L.C.I. (Letras de Crédito Imobiliário), na vida real. Sendo assim, conscientizá-los sobre a melhor aplicação de um capital e o tempo necessário para alcançar o montante desejado.

3.2 Regras e coleta dos objetivos dos alunos

Para os alunos da 2ª série do ensino médio foi solicitado que estipulassem uma quantia em reais que fosse suficiente para realizar um sonho ou uma vontade, como por exemplo uma viagem, um videogame, entre outros. Já para os alunos da 3ª série do ensino médio foi solicitado o curso de uma faculdade particular que gostariam de fazer e um carro para adquirir, que seriam aspirações dos jovens nesta faixa etária.

Diariamente os alunos estavam expostos a regras pré-estabelecidas que lhes permitiam “ganhar ou perder” dinheiro, este obtido através da soma de suas médias na disciplina de Matemática referentes ao primeiro e segundo bimestre (2ª série = soma x 50, 3ª série = soma x 1.000). Assim, perante suas atitudes e atividades eles creditavam ou debitavam percentuais de seus valores através de uma planilha de controle (Anexo A). Essa planilha foi preenchida semanalmente durante três meses.

Ressaltamos que contamos também com a colaboração do professor de Biologia e laboratório.

Abaixo as regras impostas aos alunos e seguidas ao longo da atividade.

Atividades para crédito (+)

Tarefas: 5%

(Entregues no dia solicitado – na disciplina de matemática).

Comportamento: 2,5%

(Conduta apropriada em sala de aula).

Trabalhos: 5%

(BAC (Bloco de Acompanhamento de Classe), revisão AN (Avaliação Nacional COC) ou simulado, outros – na disciplina de matemática).

Laboratórios: 2,5% (2ª S.E.M.)

(Relatórios, atividades, comportamento – na disciplina de biologia).

Simulados: 2,5% (3ª S.E.M.)

(Simulados do bimestre – nota proporcional do aluno).

Média do bimestre: nota x 50 (2ª S.E.M.)

(média final do bimestre – na disciplina de matemática).

Média do bimestre: nota x 1.000 (3ª S.E.M.)

(média final do bimestre – na disciplina de matemática).

Atividades para débito (-)

Falta: 5%

(Faltas nos dias letivos).

Atraso de trabalhos: 2,5%

(Não entregues no dia solicitado – nas disciplinas de matemática e biologia).

Tarefas: 5%

(Não entregues no dia solicitado – na disciplina de matemática).

Atraso de horário: 2,5%

(Chegar atrasado em sala - após o sinal).

Comportamento: 5%

(Assinar advertência, sair da sala, outros).

Abaixo os objetivos e valores destacados pelos alunos da 2ª série do ensino médio:

Tabela 7 – Tabela dos alunos da 2ª S.E.M.

Aluno	Objetivo	Valor
Ana Beatriz	Viagem	R\$ 2.500,00
Ana Maude	Viagem para Miami	R\$ 6.000,00
Davi	Comprar um cavalo	R\$ 5.000,00
Enzo	Iniciar criação de gado	R\$ 3.000,00
Giovanna	Participar XXXPERIENCE	R\$ 2.000,00
Guilherme	Viagem para Inglaterra	R\$ 8.000,00
Isabela	Valor para pagar um ano da ESPM	R\$ 3.600,00
João Gabriel	Viagem	R\$ 2.000,00
José Roberto	Comprar Playstation	R\$ 2.000,00
Júlia	Ingresso Rock in Rio	R\$ 3.500,00
Letícia	Participar XXXPERIENCE	R\$ 2.000,00
Luis Felipe	Comprar gol turbo	R\$ 8.000,00
Luiza	Viagem para EUA	R\$ 10.000,00
Miguel	Viagem para EUA	R\$ 7.500,00
Priscila	Ingresso Rock in Rio	R\$ 3.500,00
Thiago	Viagem para Pantanal	R\$ 6.000,00
Victória	Viagem para Itália	R\$ 6.000,00

Fonte: a própria autora

Abaixo o curso e o automóvel destacados pelos alunos da 3ª série do ensino médio:

Tabela 8 – Tabela dos alunos da 3ª S.E.M.

Aluno	Curso	Automóvel
Amanda	Medicina	Gol bola
Ester	Medicina	Civic
Giovana	Farmácia	Ká
Giovane	Direito	Montana
Guilherme	Engenharia Civil	Gol bola
Heloísa	Medicina	HB20
João Antonio	Administração	Corsa Hatch
João Marcos	Odontologia	Sandero
José Francisco	Odontologia	Gol bola
Laura Cintra	Medicina	Sandero
Laura Forchetto	Odontologia	Classic
Luciano	Engenharia Agrônômica	Cruze LT
Pedro	Ciências Biológicas	Gol bola
Rodrigo	Engenharia Química	Gol bola

Fonte: a própria autora

Após esse levantamento, foi pesquisado em conjunto com os alunos da 3ª série do ensino médio o valor das mensalidades das faculdades escolhidas referente a cada curso selecionado, e feito uma simulação do FIES (Programa de Financiamento Estudantil) para verificar o montante que seria necessário para cada aluno cursar a totalidade de sua graduação com financiamento de 50%. O FIES utiliza taxa de 6,5% a.a. e um prazo de carência de 18 meses. Foi pesquisado também um valor razoável para o automóvel que gostariam de adquirir e o ano deste para ser somado ao financiamento da faculdade. (Anexo B)

3.3 Desenvolvimento

Após a coleta dos dados e explicação das regras aos alunos, foram revisados conceitos necessários para a realização da atividade, sendo esses: porcentagem (diferentes formas), juros simples e juros compostos. Abordados de uma maneira simples através de exemplos do cotidiano, tais como desvalorização de um automóvel ao longo dos anos, empréstimo bancário e desconto em boletos de cobrança, os alunos interagiram e puderam vivenciar a

importância da organização financeira na prática. Também foi explicado o significado de uma caderneta de poupança e um investimento, seus diferentes rendimentos e riscos.

Cada aluno optou por um tipo de investimento, entre poupança (rendimento mensal de 0,5%) e L.C.I. (rendimento trimestral de 1,6%). Em sua totalidade, os alunos da 3ª série do ensino médio não podendo arriscar optaram pelo investimento em poupança. Dos alunos da 2ª série do ensino médio, 12% optaram pelo L.C.I.

Para crédito inicial foi considerada a soma das notas do 1º e do 2º bimestre de cada aluno na disciplina de Matemática. No caso do 2º ano esta soma foi multiplicada por 50, e do 3º ano, multiplicada por 1.000 devido aos seus valores serem mais altos. Considerando as ações dos alunos ao longo de três meses, estes chegavam mais perto ou não de alcançar seus objetivos com o passar dos dias, e percebiam a dificuldade em alcançar o montante desejado com rendimentos baixos e débitos constantes em alguns casos.

No 2º ano o valor a ser alcançado foi estipulado pelos próprios alunos. Já no 3º ano foi calculado da seguinte maneira: valor de 50% da mensalidade (FIES) da faculdade particular que optaram, durante toda a extensão do curso, mais o valor do carro que gostariam de adquirir. As faculdades escolhidas, bem como o valor de suas mensalidades e dos carros seletos pelos alunos estão presentes no anexo B.

De acordo com as novas regras estabelecidas para o FIES, os estudantes passaram a contar em seus financiamentos com taxa de juros anuais de 6,5% ao ano, prazo de carência de 18 (dezoito) meses e ainda com período de amortização de até 3 (três) vezes o tempo de permanência na condição de financiado.

Também, sem prejuízo do prazo de amortização, as fases do financiamento foram reduzidas de 4 para 3, ou seja, excluiu-se a fase em que o estudante pagava nos primeiros 12 (doze) meses seguintes ao da conclusão do curso o valor correspondente à parcela paga à instituição de ensino.

Temos abaixo as fases do financiamento FIES:

- 1 - UTILIZAÇÃO: período compreendido entre o ingresso do estudante no Fies e o mês imediatamente anterior ao início da fase de carência. Ao longo deste período, o estudante financiado fica obrigado a pagar trimestralmente os juros incidentes sobre o financiamento, limitados a R\$ 150,00 (cento e cinquenta reais).
- 2 - CARÊNCIA: período compreendido entre o mês subsequente ao término da fase de utilização e o mês imediatamente anterior ao início do período de amortização. Durante este

período, o estudante financiado fica obrigado a pagar os mesmos juros previstos na fase de utilização.

3 - AMORTIZAÇÃO: período iniciado no 19º (décimo nono) mês imediatamente subsequente à fase de utilização. Nesta fase, o saldo devedor do financiamento é amortizado com base no valor apurado mediante a aplicação da Tabela "Price", em parcelas mensais, iguais e sucessivas, pelo prazo de até 3 vezes o prazo de permanência do estudante na condição de financiado.

Semanalmente, a planilha de controle individual (Anexo A) foi alimentada de acordo com as regras citadas acima, e para que fosse possível tais informações necessárias para seu preenchimento, como a relação dos alunos que chegavam atrasados ou que faltavam, foi escolhido entre os alunos de cada classe um “espião”, sendo esse trocado a cada semana e responsável pelas anotações.

A atividade teve início no dia 15 de agosto e término no dia 15 de novembro, com alguns alunos atingindo seus objetivos e outros não.

4 Conclusão

Podemos concluir com o término do projeto que os alunos adquiriram um conhecimento real de como seria trabalhar e administrar suas finanças quando assim fosse necessário. De uma maneira simples porém divertida, eles mergulharam no mundo da economia, vivenciaram situações problemas que enfrentariam em suas vidas e concretizaram conceitos importantes, que não só os auxiliaram em sua formação acadêmica, como também em seus papéis como cidadãos.

A abordagem da matemática financeira através da atividade prática fez com que os alunos pudessem resgatar seus entusiasmos pela disciplina e ver a aplicabilidade da matemática, na qual esta, apesar de muito abstrata, ser constantemente empregada no dia-a-dia. Todo tipo de mudança proporciona ao aluno curiosidade e, conseqüentemente, um melhor entendimento do conteúdo, sendo esses objetivos os principais alcançados aqui.

Finalizamos este trabalho com uma citação do brilhante filósofo e educador Paulo Freire:

“A teoria sem a prática vira “verbalismo”, assim como a prática sem teoria vira ativismo. No entanto, quando se une a prática com a teoria tem-se a práxis, a ação criadora e modificadora da realidade.”

BIBLIOGRAFIA

_____. **PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** Disponível em: <<https://www.cpt.com.br/pcn/parametros-curriculares-nacionais-matematica>>. Acesso em: 12 jul. 2017.

_____. **LDB: O que é e quais são seus fundamentos?** Disponível em: <http://www2.senado.leg.br/bdsf/bitstream/handle/id/529732/lei_de_diretrizes_e_bases_1ed.pdf>. Acesso em: 12 jul. 2017.

_____. **Orientação para Educação Financeira nas escolas.** Disponível em: <www.edufinanceiranaescola.gov.br>. Acesso em: 13 jul. 2017.

ASSAF NETO, Alexandre. **Matemática Financeira e suas aplicações.** 4ª ed. São Paulo: Atlas, 1998.

AYRES JR., Frank. **Matemática Financeira.** São Paulo: McGraw-Hill, 1981.

CARVALHO, Thales Mello. **Matemática comercial e financeira: complementos de matemática.** 2. ed. Rio de Janeiro: Fename, 1971.

CASTELO BRANCO, Anísio Costa. **Matemática Financeira Aplicada.** São Paulo: Thomson-Pioneira, 2002.

D'AMBRÓSIO, Nicolau; D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Matemática Comercial e Financeira.** 23. ed. São Paulo: Companhia Nacional, 1975.

DORNBUSCH, Rudiger; FISCHER, Stanley. **Macroeconomia.** 5.ed. São Paulo: Makron Books, 2006.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática.** Campinas: Editora Unicamp, 2004.

FARIAS, Gisele Valle de. **A Matemática Financeira na Educação Básica e sua importância para a formação de um cidadão consciente.** Disponível em: <<http://www2.unirio.br/unirio/ccet/profmat/tcc/2011/a-matematica-financeira-na-educacao-basica-e-sua-importancia-para-a-formacao-de-um-cidadao-consciente>>. Acesso em: 08 jul. 2017.

FRANCISCO, Walter de. **Matemática Financeira.** 6. ed. São Paulo: Atlas, 1988.

FREIRE, Wilhelm Passarella; HALLACK, André Arbex. **Notas de aulas.** Departamento de Matemática – UFJF, 2016.

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto; JR. GIOVANNI, José Ruy. **Matemática Completa.** vol. único. São Paulo: FTD, 2002.

GRANDO, Neiva Ignês; SCHNEIDER, Ido José. **Matemática financeira: alguns elementos históricos e contemporâneos.** ZETETIKÉ – FE – Unicamp – v. 18, n. 33 – jan/jun – 2010.

HAZZAN, Samuel. **Matemática Financeira**. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2007.

IFRAH, Georges. **História universal dos algarismos : a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo**. Tomo I. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.

PARENTE, Eduardo Afonso de Medeiros; CARIBE, Roberto. **Matemática Comercial e Financeira**. São Paulo: FTD, 1996.

OECD, **Handbook on Economic Globalisation Indicators**, OECD, Paris, 2005.

POITRAS, Geoffrey. **The Early History of Financial Economics, 1478-1776: From Commercial Arithmetic to Life Annuities and Joint Stocks**. Cheltenham, U.K.: Elgar, 2000.

POMPEO, José Nicolau; HAZZAN, Samuel. **Matemática Financeira**. 5. ed. São Paulo: Saraiva, 2001.

PUCCINI, Abelardo de Lima. **Matemática Financeira. Objetiva e Aplicada**. 5. ed. São Paulo: LTC, 1993.

RIBEIRO, Viviane Morais, **A inflação e seus efeitos na renda da população**. Disponível em: <https://www.webartigos.com/artigos/a-inflacao-e-seus-efeitos-na-renda-da-populacao/95969/#ixzz55IE0b9zh>. Acesso em: 23 dez. 2017.

ROBERT, Jozsef. **A origem do dinheiro**. 2. ed. São Paulo: Global, 1989.

SILVA, Cássio Silveira da. **Matemática Financeira: um desafio para os professores e estudantes**. Disponível em: http://www.sinepesc.org.br/imprimir.php?id=990&nivel_user1=1&link=not&desc=1. Acesso em: 19 jul. 2017.

UNIVERSIDADE ANHEMBI MORUMBI. [2013]. Disponível em: http://www2.anhembi.br/html/ead01/mat_financeira/site/lu08/lo3/index.htm. Acesso em: 20 jul. 2017.

VALOR ECONÔMICO. Disponível em: <http://www.valor.com.br/valor-data/tabela/5800/inflacao>. Acesso em: 27 fev. 2018.

VERAS, Lilia Ladeira. **Matemática financeira: uso de calculadoras financeiras, aplicações ao mercado financeiro, introdução à engenharia econômica, 300 exercícios resolvidos e propostos com respostas**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2001.

VIEIRA SOBRINHO, José Dutra. **Matemática Financeira**. 3. ed. São Paulo: Atlas, 1988.

ZENTGRAF, Roberto. **Matemática Financeira Objetiva**. 4. ed. Rio de Janeiro: ZTG, 2003.

ANEXOS

ANEXO B – Descrição detalhada das escolhas dos alunos da 3ª série do ensino médio

nº	Aluno	Graduação	Instituição	Valor mensalidade	Automóvel	Ano	Valor médio
1	Amanda	Medicina	Santa Casa	R\$ 5.393,00	Gol bola	2011	R\$ 22.000,00
2	Ester	Medicina	Uniará	R\$ 5.665,00	Civic	2007	R\$ 29.000,00
3	Giovana	Farmácia	Unaerp	R\$ 1.434,00	Ka	2013	R\$ 20.000,00
4	Giovane	Direito	PUC-SP	R\$ 1.200,00	Montana	2011	R\$ 25.000,00
5	Guilherme	Engenharia Civil	Unip	R\$ 1.134,00	Gol bola	2011	R\$ 22.000,00
6	Heloisa	Medicina	Unaerp	R\$ 7.116,00	HB20	2013	R\$ 31.000,00
7	João Antônio	Administração	FGV	R\$ 3.100,00	Corsa Hatch	2012	R\$ 23.000,00
8	João Marcos	Odontologia	USC	R\$ 2.628,00	Sandero	2012	R\$ 22.000,00
9	José Francisco	Odontologia	USC	R\$ 2.628,00	Gol bola	2011	R\$ 22.000,00
10	Laura Cintra	Medicina	Facisb	R\$ 6.144,00	Sandero	2012	R\$ 22.000,00
11	Laura Forchetto	Odontologia	USC	R\$ 2.628,00	Classic	2013	R\$ 22.000,00
12	Luciano	Engenharia Agrônoma	USC	R\$ 1.610,00	Cruze LT	2012	R\$ 44.000,00
13	Pedro	Ciências Biológicas	USC	R\$ 904,00	Gol bola	2011	R\$ 22.000,00
14	Rodrigo	Engenharia Química	USC	R\$ 1.610,00	Gol bola	2011	R\$ 22.000,00