

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

PEDRO HENRIQUE FUSCO NOGUEIRA

Modelos para partículas massivas de *spin-2* via tensor simétrico

Guaratinguetá
2018

Pedro Henrique Fusco Nogueira

Modelos para partículas massivas de *spin-2* via tensor simétrico

Dissertação apresentada ao Conselho de Curso de Pós Graduação em Física da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Mestre em Física na área de partículas de campos.

Orientador: Prof^o Dr. Denis Dalmazi

Coorientador:

Guaratinguetá

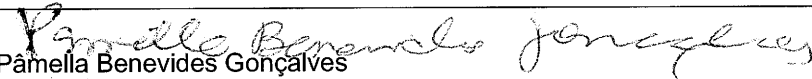
2018

Nogueira, Pedro Henrique Fusco
N778m Modelos para partículas massivas de spin-2 via tensor simétrico /
Pedro Henrique Fusco Nogueira – Guaratinguetá, 2018
55 f. : il.
Bibliografia: f. 54-55

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de
Engenharia de Guaratinguetá, 2018.
Orientador: Prof. Dr. Denis Dalmazi

1. Gravitação. 2. Partículas (Física nuclear). 3. Movimento rotacional
I. Título

CDU 531.5 (043)


Pâmella Benevides Gonçalves
Bibliotecária CRB/8: 9203

PEDRO HENRIQUE FUSCO NOGUEIRA

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
“MESTRE EM FÍSICA”

PROGRAMA: FÍSICA

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO



Prof. Dr. Konstatin Georgiev Kostov
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:



Prof. Dr. DENIS DALMAZI
Orientador / UNESP/FEG



Prof. Dr. ELIAS LEITE MENDONÇA
UNESP/FEG



Prof. Dr. FABRICIO AUGUSTO BARONE RANGEL
UNIFEI

Fevereiro de 2018

DADOS CURRICULARES

PEDRO HENRIQUE FUSCO NOGUEIRA

NASCIMENTO 08 de março de 1985 - Pindamonhangaba
/ SP

FILIAÇÃO Persio de Souza Nogueira
Marcia Fusco

2011 / 2015 Bacharelado em Física
Universidade Estadual Paulista "Júlio de
Mesquita Filho- UNESP

Este trabalho contou com o apoio da seguinte entidade:

CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoa de Nível Superior

RESUMO

Neste trabalho buscamos encontrar a teoria mais geral para partículas massivas de spin-2 via tensor simétrico. Começamos expondo o caminho que seguiremos para calcular a amplitude de dois pontos saturada por fontes e obter o conteúdo físico de uma dada teoria livre. Como primeira tentativa partimos de uma teoria semelhante a teoria de Fierz-Pauli, mas com termo de massa generalizado. Após isto exploramos uma densidade lagrangiana mais geral, com no máximo duas derivadas. Em ambos os casos retornamos a teoria de Fierz-Pauli como a única viável. Em busca de maior generalidade, posteriormente, propomos uma densidade lagrangiana com coeficientes arbitrários e com potência arbitrária nas derivadas, relacionamos os coeficientes desta teoria com os coeficientes da densidade lagrangiana encontrada anteriormente na literatura via imersão de Euler das equações de Fierz Pauli, o propósito foi verificar se existe uma teoria mais geral que esta última. Por último, a fim de complementar o assunto tratado neste trabalho, verificaremos as consequências de uma dada simetria local no conteúdo físico de uma teoria, de spin-2 massiva.

PALAVRAS-CHAVE: modelo geral. spin-2. gravitação massiva. Fierz-Pauli. ordem superior.

ABSTRACT

In this project we seek to find the most general theory for massive particles of spin-2 through symmetric tensor. We begin by the path we will follow to calculate the amplitude of two points, saturated by sources, and obtain physical content of a free theory. As first attempt, we started with a theory similar to the Fierz-Pauli's theory, but with a generalized mass term. After this we explored a more general Lagrangian density, with two derivatives in the most. In both cases we return to the Fierz-Pauli's theory as the only viable one. In search of a greater generality, we later proposed a Lagrangian density with arbitrary coefficients and arbitrary power in the derivatives. We related the coefficients of this theory with the Lagrangian density's coefficients found previously in the literature through insertion of Euler of the Fierz-Pauli's equations. The purpose was to verify if there is a more general theory than this last one. Finally, in order to complement the subject discussed in this paper, we will verify the consequences of a certain local symmetry on the physical content of a massive spin-2 theory.

KEYWORDS: General model. Spin-2. Massive gravitation. Fierz-Pauli. higher order.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	Caminho utilizado para calcular a integral de resíduo	49
----------	---	----

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	7
2	IDEIA GERAL	9
2.1	O conteúdo físico na teoria de Maxwell-Proca	9
2.2	Conteúdo físico na teoria de spin-2	12
3	TERMO DE MASSA GENERALIZADO NA TEORIA DE FIERZ-PAULI	16
3.1	Teoria de Fierz-Pauli ($a = 1$)	21
3.2	Teoria com polos coincidentes ($a = 1/2$)	22
3.3	Terceiro caso: $1/D < a < 1$ e $a \neq 1/2$	23
4	MODELO MAIS GERAL COM DUAS DERIVADAS	25
4.1	Introdução	25
4.2	$C_2 = -4/D$	28
4.3	$C_2 \neq -4/D$	31
5	TEORIA GERAL DE ORDEM SUPERIOR	34
6	SIMETRIA E CONTEÚDO FÍSICO	39
6.1	Simetria de spin-1	40
6.2	Simetria de spin-0	40
6.2.1	Simetria por reparametrização longitudinal	40
6.2.2	Simetria de Weyl	41
6.3	Caso geral	42
7	CONCLUSÃO	44
A	OPERADORES $P_{IJ}^{(s)}$	47
B	UNITARIEDADE	48
C	POLOS DUPLOS	51
	REFERÊNCIAS	52

1 INTRODUÇÃO

A Relatividade Geral de Einstein (RG) é, certamente, a teoria de maior sucesso para a descrição da gravitação, vide detecção recente de ondas gravitacionais (ABBOTT, 2016). A interação descrita por esta teoria, aparentemente, é mediada por partículas de spin-2 sem massa. Porém, após a publicação dos dados experimentais do *supernova team* (RIESS, 2016), (PERLMUTTER, 1999), que indicam uma expansão acelerada do universo, houve um aumento de interesse por uma possível gravitação massiva. A partícula responsável pela transmissão da informação da força gravitacional é o graviton, teoricamente, se esta partícula possuir uma pequena massa a interação gravitacional será menor a grandes distancias, assim, a aceleração da expansão do universo pode ser explicada sem a introdução do conceito de energia escura. Dois conhecidos obstáculos acerca da gravitação massiva são o fantasma de *Boulware-Deser* (BOULWARE; DESER, 1982) e a descontinuidade de massa de *van Dam-Veltman-Zakharov* (DAM; VELTMAN, 1970), (ZAKHAROV, 1970) e estes foram resolvidos simultaneamente em (RHAM; GABADADZE; TOLLEY, 2011b), (RHAM; GABADADZE, 2010), (HASSAN; ROSEN, 2012). Há ainda ao longo das ideias de (VAINSHTEIN, 1972) e (ARKANI-HAMED; GEORGI; SCHWARTZ, 2003) uma grande discussão em aberto sobre causalidade em teorias de gravitação massiva (SERGEI et al., 2006), (GRUZINOV, 2011), (RHAM; GABADADZE; TOLLEY, 2011a), (DESER; WALDRON, 1984), (FROMONT et al., 2013), (FIERZ; PAULI, 1939). É preciso ter em mente que as teorias de gravitação massiva citadas acima são baseadas na teoria de Fierz-Pauli (FIERZ; PAULI, 1939). Veja também os trabalhos de revisão (HINTERBICHLER,), (RHAM, 2014), (RUBAKOV; TINYAKOV, 2008). Espera-se que partindo de teorias distintas de Fierz-Pauli chegaremos em novas gravitações massivas. É importante investigar se as consequências físicas das modernas teorias de gravitação massiva são independentes do modelo livre de spin-2 massivo (Fierz-Pauli) de partida e se não seria possível uma gravitação de ordem superior em derivadas, o que seria bem vindo do ponto de vista de divergências para grandes valores do momento (ultravioletas), é nesse contexto que buscamos novas teorias de spin-2 massivas.

No capítulo 2 iremos apresentar a ideia geral do trabalho. Neste capítulo mostraremos como analisar o conteúdo físico de uma teoria calculando a parte imaginária do resíduo da amplitude saturada de dois pontos, como feito por exemplo em (BOULWARE; DESER, 1982) e em (HASSAN; ROSEN; SCHMIDT-MAY, 2012). No capítulo 3 iremos explorar a teoria de Fierz-Pauli com um coeficiente arbitrário no termo de massa. Vamos explorar os valores possíveis para estes coeficientes, de forma que possamos encontrar novas teorias

sem alterar o termo cinético de Fierz-Pauli (teoria de Einstein-Hilbert linearizada). No capítulo 4 passamos para uma teoria geral com no máximo duas derivadas. Para isso, como Ansatz, iremos escrever uma densidade lagrangiana, com no máximo duas derivadas e com coeficientes arbitrários, iremos impor que a teoria descreva apenas partículas massivas de spin-2, dessa forma procuraremos os valores possíveis para cada coeficiente a fim de encontrar a teoria mais geral, dentro dessas regras. No capítulo 5 vamos procurar uma teoria ainda mais geral que a do capítulo anterior, para isso vamos propor uma densidade lagrangiana com coeficientes que sejam funções de $\square = \partial_\mu \partial^\mu$ arbitrárias, com isso iremos mapear estes coeficientes com os propostos em (DALMAZI; SANTOS; MENDONÇA, 2015) a fim de mostrar que existem outras teorias para partículas massivas de spin-2 que dependem de uma família de funções de \square , que satisfazem uma determinada equação algébrica. Por último, a fim de complementar o assunto em questão, vamos verificar as consequências de uma dada simetria local na análise do conteúdo físico de uma teoria geral de spin-2 via propriedades analíticas do propagador.

- Notações e convenções: Neste trabalho utilizamos unidades onde $\hbar = c = 1$, onde \hbar é a constante de Planck dividida por 2π e c é a velocidade da luz. D representa o número de dimensões espaço-temporais. Convencionamos aqui que nossa métrica é $\eta_{\mu\nu} = (-, +, \dots, +)$. Os índices espaço-temporais são denotados por letras gregas, enquanto letras do alfabeto latino denotam somente índices espaciais. $\square = \partial^\mu \partial_\mu = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$ é o operador d'Alembertiano. Usamos também como traço de um tensor $h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$ e a convenção de índices simétricos de um tensor: $\varepsilon_{(\mu\nu)} = (\varepsilon_{\mu\nu} + \varepsilon_{\nu\mu})/2$.

2 IDEIA GERAL

Buscamos neste trabalho encontrar a teoria mais geral para partículas massivas de spin-2 via tensor simétrico. Para isso precisamos encontrar o espectro da teoria, ou seja, o conteúdo físico da teoria, o que será feito calculando a parte imaginária do resíduo dos polos da amplitude de dois pontos saturada com fontes. Primeiramente, a fim de demonstrar o caminho que iremos seguir no processo de calcular a parte imaginária do resíduo da amplitude, vamos aplicar a análise do conteúdo físico na teoria de partículas de spin-1 massivas (Maxwell-Proca). Posteriormente apresentaremos o mesmo algoritmo utilizado na teoria de Maxwell-Proca, porém, em uma teoria de spin-2 geral com campos simétricos.

2.1 O CONTEÚDO FÍSICO NA TEORIA DE MAXWELL-PROCA

Analisemos, primeiramente, o conteúdo físico da teoria de Maxwell-Proca. Esta é uma teoria que descreve partículas de spin-1 massivas. Neste caso a densidade lagrangiana pode ser escrita como $\mathcal{L} = A_\mu G^{\mu\nu} A_\nu$. Escreveremos o operador $G_{\mu\nu}$ em termos dos projetores de spin $\theta_{\mu\nu}$ e $\omega_{\mu\nu}$. Com o operador $G_{\mu\nu}$ em termos desses projetores poderemos encontrar o propagador da teoria $G_{\mu\nu}^{-1}$ de forma simples.

Os operadores $\theta_{\mu\nu}$ e $\omega_{\mu\nu}$ são definidos como:

$$\theta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} \quad e \quad \omega_{\mu\nu} = \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} \quad (2.1)$$

e satisfazem as álgebras:

$$\theta_\mu^\nu \theta_\nu^\alpha = \theta_\mu^\alpha \quad (2.2)$$

$$\omega_\mu^\nu \omega_\nu^\alpha = \omega_\mu^\alpha \quad (2.3)$$

$$\omega_\mu^\nu \theta_\nu^\alpha = 0 = \theta_\mu^\nu \omega_\nu^\alpha. \quad (2.4)$$

Note que:

$$\theta_\mu^\nu + \omega_\mu^\nu = \delta_\mu^\nu. \quad (2.5)$$

Além disto, o traço de projetores é igual a dimensão do espaço onde ele projeta. Como partículas de spin- s tem $2s + 1$ graus de liberdade, com $D = 3 + 1$, temos:

$$\eta^{\mu\nu} \theta_{\mu\nu} = 3 = 2s + 1 \Rightarrow s = 1, \quad (2.6)$$

$$\eta^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} = 1 = 2s + 1 \Rightarrow s = 0. \quad (2.7)$$

Logo, $\theta_{\mu\nu}$ é um projetor de spin-1 e $\omega_{\mu\nu}$ é um projetor de spin-0. Então, com $G_{\mu\alpha} = A \theta_{\mu\alpha} + B \omega_{\mu\alpha}$ e $(G^{-1})^{\alpha\nu} = C \theta^{\alpha\nu} + D \omega^{\alpha\nu}$, onde A, B, C e D são coeficientes arbitrários, obtemos:

$$(G)_{\mu\alpha}(G^{-1})^{\alpha\nu} = (A \theta_{\mu\alpha} + B \omega_{\mu\alpha})(C \theta^{\alpha\nu} + D \omega^{\alpha\nu}) = AC \theta_{\mu}^{\nu} + BD \omega_{\mu}^{\nu} = \delta_{\mu}^{\nu}, \quad (2.8)$$

onde usamos as álgebras (2.2), (2.3) e (2.4). Então, concluímos que:

$$G_{\mu\nu}^{-1} = \frac{1}{A} \theta_{\mu\nu} + \frac{1}{B} \omega_{\mu\nu}. \quad (2.9)$$

Podemos agora analisar o conteúdo físico da teoria de Maxwell-Proca. A densidade lagrangiana desta é dada por:

$$\mathcal{L}_{MP} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{m^2}{2} A_{\mu} A^{\mu}, \quad (2.10)$$

onde $F^{\mu\nu} = \partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu}$ é um tensor antissimétrico de rank-2 conhecido como tensor campo eletromagnético e $A^{\mu} = (A^0, \vec{A})$ é o quadrivetor potencial. Substituindo $F^{\mu\nu}$ na (2.10) e utilizando integração por partes, temos:

$$\mathcal{L}_{MP} = \frac{1}{2} A^{\mu} G_{\mu\nu} A^{\nu}, \quad (2.11)$$

com

$$G_{MP}^{\mu\nu} = (\square - m^2) \eta^{\mu\nu} - \partial^{\mu} \partial^{\nu} = (\square - m^2) \theta^{\mu\nu} - m^2 \omega^{\mu\nu}, \quad (2.12)$$

onde utilizamos (2.1). Através de (2.9) podemos escrever o propagador $G_{\mu\nu}^{-1}$.

$$G_{\mu\nu}^{-1} = \frac{1}{\square - m^2} \theta_{\mu\nu} - \frac{1}{m^2} \omega_{\mu\nu}. \quad (2.13)$$

Com isso podemos calcular a amplitude saturada de dois pontos, no espaço dos momenta, isso é, com: $G^{-1}(\partial) \rightarrow G^{-1}(ip)$ e $J^{\mu}(x) \rightarrow J^{\mu}(p)$, onde $J^{\mu}(p)$ é a transformada

de Fourier de $J^\mu(x)$:

$$\mathcal{A}_2(p) = -\frac{i}{2} J_\mu^* (G^{-1})^{\mu\nu} J_\nu = \frac{i}{2} J_\mu^* \left[\frac{1}{p^2 + m^2} \theta^{\mu\nu} + \frac{1}{m^2} \omega^{\mu\nu} \right] J_\nu. \quad (2.14)$$

Temos então um polo massivo em $p^2 = -m^2$, como a massa é real e este é um polo simples podemos afirmar, de acordo com (2.30), que esta teoria não descreve partículas taquiônicas. Note que o polo aparece no setor de spin-1 ($\theta_{\mu\nu}$) o que indica que temos uma partícula massiva de spin-1. Calculemos o resíduo de \mathcal{A}_2 em $p^2 = -m^2$, pois é com a parte imaginária do resíduo da amplitude que poderemos afirmar se a partícula em questão é fantasma ou não:

$$\begin{aligned} \text{Res}(\mathcal{A}_2(p)) \Big|_{p^2=-m^2} &= \lim_{p^2 \rightarrow -m^2} \frac{i}{2} (p^2 + m^2) J_\mu^* \left[\frac{1}{p^2 + m^2} \theta^{\mu\nu} + \frac{1}{m^2} \omega^{\mu\nu} \right] J_\nu \\ &= \frac{i}{2} J_\mu^* (\theta^{\mu\nu}) J_\nu = \frac{i}{2} \left(J_\mu^* \eta^{\mu\nu} J_\nu + J_\mu^* \frac{p^\mu p^\nu}{m^2} J_\nu \right) \\ &= \frac{i}{2} \left[J_\mu^* J^\mu + \frac{(J_\mu^* p^\mu)(J_\nu p^\nu)}{m^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Como aqui temos uma partícula massiva e \mathcal{A}_2 é um escalar, podemos escolher o referencial de repouso da partícula: $p^\mu = (m, 0, 0, 0)$. Assim temos:

$$\begin{aligned} \text{Res}(\mathcal{A}_2(p)) \Big|_{p^2=-m^2} &= \frac{i}{2} \left(-J^{0*} J^0 + J^{i*} J^i + \frac{(J^{0*} m)(J^0 m)}{m^2} \right) \\ &= \frac{i}{2} (J^{i*} J^i) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Tomando, por fim, a parte imaginária do resíduo da amplitude encontramos:

$$\text{Im} \left[\text{Res}(\mathcal{A}_2(p)) \Big|_{p^2=-m^2} \right] = \frac{J^{i*} J^i}{2} > 0 \quad (2.17)$$

Como a parte imaginária do resíduo da amplitude é maior que zero podemos afirmar que esta teoria não descreve partículas fantasmas (veja apêndice B). Concluimos então que a teoria de Maxwell-Proca descreve partículas físicas, de spin-1 e massivas. Note que não foi necessário usar a conservação da fonte $\partial^\mu J_\mu = 0$ já que esta não é uma exigência que a teoria massiva deva satisfazer já que não existe uma simetria local em (2.10) para $m \neq 0$.

2.2 CONTEÚDO FÍSICO NA TEORIA DE SPIN-2

Para uma teoria de partículas de spin-2, a primeira coisa que temos que fazer é escrever a lagrangiana em termos dos operadores de spin de Barnes-Rivers $(P_{IJ}^{(s)})^{\alpha\beta\mu\nu}$ (veja apêndice A), via rank - 2 (BARNES, 1965), (RIVERS, 1964), vide também (NIEUWENHUIZEN, 1973). Estes operadores são construídos a partir dos projetores de spin-1 (θ) e de spin-0 (ω) que foram apresentados na seção anterior.

De forma geral a densidade lagrangiana pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = h_{\alpha\beta} G^{\alpha\beta\mu\nu}(\partial) h_{\mu\nu}, \quad (2.18)$$

onde $h_{\mu\nu}$ é um tensor de campo, simétrico e de rank-2. Supomos que o operador $G^{\alpha\beta\mu\nu}(\partial)$, com os índices suprimidos, pode ser expandido em termos dos operadores $P_{IJ}^{(s)}$:

$$G = AP_{SS}^{(2)} + BP_{SS}^{(1)} + CP_{SS}^{(0)} + \tilde{D}P_{WW}^{(0)} + E \left(P_{SW}^{(0)} + P_{WS}^{(0)} \right) \quad (2.19)$$

e seu inverso $1/G$, semelhantemente¹:

$$G^{-1} = FP_{SS}^{(2)} + HP_{SS}^{(1)} + IP_{SS}^{(0)} + JP_{WW}^{(0)} + K \left(P_{SW}^{(0)} + P_{WS}^{(0)} \right). \quad (2.20)$$

Para encontrar os coeficientes F, G, H, I e J, em termos dos coeficientes de (2.19), multiplicamos $G \cdot G^{-1}$ impomos que o resultado seja a identidade. Usando a álgebra dos operadores $P_{IJ}^{(s)}$:

$$P_{IJ}^{(s)} P_{KL}^{(r)} = \delta^{sr} \delta_{JK} P_{IL}^{(s)} \quad (2.21)$$

temos que os coeficientes de G^{-1} , em termos dos coeficientes do operador G , são

$$F = \frac{1}{A}; \quad H = \frac{1}{B} \quad I = \frac{\tilde{D}}{\tilde{D}C - E^2}$$

$$J = \frac{C}{\tilde{D}C - E^2}; \quad K = -\frac{E}{\tilde{D}C - E^2}$$

Logo:

$$G^{-1} = \frac{1}{A}P_{SS}^{(2)} + \frac{1}{B}P_{SS}^{(1)} + \frac{\tilde{D}}{k^{(0)}}P_{SS}^{(0)} + \frac{C}{k^{(0)}}P_{WW}^{(0)} - \frac{E}{k^{(0)}} \left(P_{SW}^{(0)} + P_{WS}^{(0)} \right) \quad (2.22)$$

onde o determinante $k^{(0)}$ é dado por:

$$k^{(0)} = \tilde{D}C - E^2. \quad (2.23)$$

¹ Repare que \tilde{D} é um coeficiente arbitrário e não dimensão (D)

Com esses primeiros passos vamos encontrar G^{-1} para uma densidade lagrangiana geral para um campo simétrico de rank-2. A densidade lagrangiana geral é dada por:

$$\mathcal{L} = \partial^\mu h_{\mu\nu} C_1 \partial_\alpha h^{\alpha\nu} + \partial^\mu h C_2 \partial^\nu h_{\mu\nu} + h C_3 h + h_{\mu\nu} C_4 h^{\mu\nu} + \partial^\mu \partial^\nu h_{\mu\nu} C_5 \partial_\beta \partial_\alpha h^{\beta\alpha} \quad (2.24)$$

onde os C_j 's são coeficientes arbitrários, funções de $\square = \partial^\mu \partial_\mu$ em geral, isto é, $C_j = C_j(\square)$ ($j = 1, 2, 3, 4, 5$). Seguindo essa ideia, cada termo da densidade lagrangiana, escrito em termos dos operadores, sob integral, pode ser escrito como:

- $(\partial^\mu h_{\mu\nu})^2 = -h_{\alpha\beta} \left[\frac{\square}{2} \left(P_{SS}^{(1)} \right)^{\alpha\beta\mu\nu} + \square \left(P_{WW}^{(0)} \right)^{\alpha\beta\mu\nu} \right] h_{\mu\nu}$
- $\partial^\mu h \partial^\nu h_{\mu\nu} = -h_{\alpha\beta} \left\{ \square \left(P_{WW}^{(0)} \right)^{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{\square}{2} \sqrt{D-1} \left[\left(P_{SW}^{(0)} \right)^{\alpha\beta\mu\nu} + \left(P_{WS}^{(0)} \right)^{\alpha\beta\mu\nu} \right] \right\} h_{\mu\nu}$
- $h^2 = h_{\alpha\beta} \left\{ (D-1) \left(P_{SS}^{(0)} \right)^{\alpha\beta\mu\nu} + \left(P_{WW}^{(0)} \right)^{\alpha\beta\mu\nu} + \sqrt{D-1} \left[\left(P_{SW}^{(0)} \right)^{\alpha\beta\mu\nu} + \left(P_{WS}^{(0)} \right)^{\alpha\beta\mu\nu} \right] \right\} h_{\mu\nu}$
- $h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} = h_{\alpha\beta} \left[\left(P_{SS}^{(2)} \right)^{\alpha\beta\mu\nu} + \left(P_{SS}^{(1)} \right)^{\alpha\beta\mu\nu} + \left(P_{SS}^{(0)} \right)^{\alpha\beta\mu\nu} + \left(P_{WW}^{(0)} \right)^{\alpha\beta\mu\nu} \right] h_{\mu\nu}$
- $(\partial^\mu \partial^\nu h_{\mu\nu})^2 = h_{\alpha\beta} \left[\square^2 \left(P_{WW}^{(0)} \right)^{\alpha\beta\mu\nu} \right] h_{\mu\nu}$

e com isto a densidade lagrangiana (2.24) pode ser escrita como em (2.18), onde:

$$\begin{aligned} G^{\alpha\beta\mu\nu} &= C_4 \left(P_{SS}^{(2)} \right)^{\alpha\beta\mu\nu} + \left(C_4 - \frac{C_1 \square}{2} \right) \left(P_{SS}^{(1)} \right)^{\alpha\beta\mu\nu} \\ &+ [C_3 (D-1) + C_4] \left(P_{SS}^{(0)} \right)^{\alpha\beta\mu\nu} \\ &+ [C_3 + C_4 + C_5 \square^2 - \square (C_1 + C_2)] \left(P_{WW}^{(0)} \right)^{\alpha\beta\mu\nu} \\ &+ \sqrt{D-1} \left(C_3 - \frac{C_2 \square}{2} \right) \left[\left(P_{SW}^{(0)} \right)^{\alpha\beta\mu\nu} + \left(P_{WS}^{(0)} \right)^{\alpha\beta\mu\nu} \right]. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Utilizando a (2.22) podemos encontrar G^{-1} facilmente. Este, em termos das funções arbitrárias $C_j(\square)$, é:

$$\begin{aligned}
(G^{-1})^{\alpha\beta\mu\nu} &= \frac{1}{C_4} (P_{SS}^{(2)})^{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{1}{C_4 - \frac{C_1 \square}{2}} (P_{SS}^{(1)})^{\alpha\beta\mu\nu} \\
&+ \frac{[C_4 + C_3(D-1)]}{k^{(0)}} (P_{WW}^{(0)})^{\alpha\beta\mu\nu} \\
&+ \frac{[C_3 + C_4 + C_5 \square^2 - \square(C_1 + C_2)]}{k^{(0)}} (P_{SS}^{(0)})^{\alpha\beta\mu\nu} \\
&- \frac{\left[\left(C_3 - \frac{\square C_2}{2} \right) \sqrt{D-1} \right]}{k^{(0)}} \left[(P_{SW}^{(0)})^{\alpha\beta\mu\nu} + (P_{WS}^{(0)})^{\alpha\beta\mu\nu} \right], \quad (2.26)
\end{aligned}$$

onde o determinante $k^{(0)}$ é:

$$k^{(0)} = [C_3 + C_4 + C_5 \square^2 - \square(C_1 + C_2)] [C_4 + C_3(D-1)] - (D-1) \left[C_3 - \frac{\square C_2}{2} \right]^2. \quad (2.27)$$

Com G^{-1} em mãos o próximo passo para descobirmos o conteúdo físico de uma dada teoria é calcular a amplitude saturada de dois pontos. No espaço dos momenta, com $G^{-1}(p) = G^{-1}(\partial_\alpha \rightarrow ip_\alpha)$, a amplitude é dada por:

$$\mathcal{A}_2(p) = -\frac{i}{2} T_{\alpha\beta}^*(p) [G^{-1}(p)]^{\alpha\beta\mu\nu} T_{\mu\nu}(p) \quad (2.28)$$

onde $T_{\mu\nu}(p)$ é a transformada de Fourier da fonte da teoria². Por fim identifica-se os polos de $\mathcal{A}_2(p)$ e então calcula-se seus resíduos. Os critérios para que a partícula descrita pela teoria seja uma partícula física são os seguintes:

$$\text{Im} \left[\text{Res}(\mathcal{A}_2(p)) \Big|_{p^2 = -m^2} \right] > 0 \quad (2.29)$$

$$p^\mu p_\mu \leq 0 \quad (2.30)$$

Se o critério (2.29) não for satisfeito a partícula corresponde a um fantasma e a unitariedade é quebrada, isto é, aparecem amplitudes de transição maiores que um (como demonstrado no apêndice B). Já no caso de não ser satisfeito o critério (2.30) a partícula corresponde a um táquion, partícula com velocidade maior que a velocidade da luz, logo teremos problema com causalidade.

² Note que $T_{\alpha\beta}^*(p) = T_{\alpha\beta}(-p)$, pois $T_{\alpha\beta}(p) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^4} \int d^4x T_{\alpha\beta}(x) e^{ip_\mu x^\mu}$ e $T_{\alpha\beta}^*(x) = T_{\alpha\beta}(x)$.

Este é o método que iremos aplicar nos capítulos subsequentes desta dissertação. O primeiro passo será aplicar o método em uma teoria semelhante a teoria de Fierz-Pauli usual, porém com um coeficiente arbitrário no termo de massa. Queremos verificar se é possível encontrar alguma nova teoria sem alteração no termo cinético de Fierz-Pauli.

3 TERMO DE MASSA GENERALIZADO NA TEORIA DE FIERZ-PAULI

As teorias de gravitação massiva de maior sucesso atualmente (veja (RHAM; GABADADZE; TOLLEY, 2011b) e (HASSAN; ROSEN, 2012)), são baseadas na teoria de Fierz-Pauli para partículas de spin-2 massivas. Como primeira tentativa de encontrar uma teoria mais geral para partículas massivas de spin-2, neste capítulo, iremos explorar uma variação da teoria de Fierz-Pauli em $D > 2$ dimensões, com uma constante arbitrária no termo de massa, e assim tentar encontrar outras possibilidades com conteúdo físico relevante. Para o campo de spin-2, $h^{\mu\nu}$, temos dois possíveis termos de massa para que a dimensão mantenha-se correta, esses termos são h^2 e $(h^{\mu\nu})^2$. Iremos combinar os dois termos e usar uma constante adimensional no termo de traço ao quadrado, já que, para que a partícula de spin-2 tenha massa, o segundo termo não pode ser nulo. Procurando valores possíveis para esta constante adimensional, queremos encontrar alguma outra teoria com termo de massa diferente daquele encontrado na teoria de Fierz-Pauli e ao mesmo tempo entender a lógica por trás da teoria de Fierz-Pauli.

Com isso a densidade lagrangiana com constante arbitrária no termo de massa é escrita como:

$$\mathcal{L}_a = h_{\mu\nu} \square h^{\mu\nu} - h \frac{\square}{2} h + (\partial^\mu h_{\mu\nu})^2 - \partial^\mu h \partial^\alpha h_{\alpha\mu} - \frac{m^2}{2} (h_{\mu\nu}^2 - ah^2) \quad (3.1)$$

Note que $a = 1$ corresponde a teoria de Fierz-Pauli [16]. Analisemos primeiramente a equação de movimento. Variando a ação funcionalmente e a igualando a zero, temos:

$$\delta S = \frac{\delta S}{\delta h_{\mu\nu}} \delta h_{\mu\nu} = 0, \quad (3.2)$$

que equivale a

$$\square h_{\mu\nu} - (\partial_\mu \partial^\alpha h_{\alpha\nu} + \partial_\nu \partial^\alpha h_{\alpha\mu}) + \partial_\mu \partial_\nu h + \eta_{\mu\nu} (\partial^\alpha \partial^\beta h_{\alpha\beta} - \square h) = m^2 (h_{\mu\nu} - a \eta_{\mu\nu} h). \quad (3.3)$$

Pode-se provar de primeiros princípios (KOENIGSTEIN; GIACOSA; RISCHKE, 2016) sem o uso de uma ação específica, que partículas de spin-2 massivas descritas por um tensor de rank-2, devem satisfazer as condições de Fierz-Pauli. Isto é, como o tensor já é simétrico, no final ele deve ser ainda:

$$\begin{aligned}
\text{Transversal} \quad & (\partial_\mu h^{\mu\nu} = 0), \\
\text{Sem traço} \quad & (\eta_{\mu\nu} h^{\mu\nu} = 0)
\end{aligned} \tag{3.4}$$

e, além disto, deve satisfazer a equação de Klein-Gordon. Então, aplicando ∂^μ na equação (3.3), encontramos:

$$\partial^\mu (h_{\mu\nu} - a\eta_{\mu\nu}h) = 0. \tag{3.5}$$

Onde definimos:

$$\tilde{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - a\eta_{\mu\nu}h \tag{3.6}$$

Substituindo (3.6) na equação (3.3), encontramos:

$$(\square - m^2)h_{\mu\nu} - (2a - 1)\partial_\mu\partial_\nu h + \eta_{\mu\nu}[\square(a - 1) + m^2a]h = 0. \tag{3.7}$$

Aplicando $\eta^{\mu\nu}$ na equação (3.7), temos:

$$[(a - 1)(D - 2)\square - (1 - aD)m^2]h = 0 \tag{3.8}$$

Se $a = 1$ obtemos um dos vínculos ou condições de Fierz-Pauli: $h = 0$. Porém, se $a \neq 1$, temos:

$$(\square - m_s^2)h = 0, \tag{3.9}$$

onde

$$m_s^2 = \frac{(1 - aD)}{(a - 1)(D - 2)}m^2. \tag{3.10}$$

Note que, se $a = 1/2$, $m_s^2 = m^2$. A equação (3.9) descreve a dinâmica do traço do campo, ou seja, parte escalar (spin-0). Queremos agora encontrar a equação que descreve partículas de spin-2. Para isto vamos usar como *Ansatz*:

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv \tilde{h}_{\mu\nu} + \frac{B}{m^2}\square\theta_{\mu\nu}h \tag{3.11}$$

onde $\square\theta_{\mu\nu} = \square\eta_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu$. Note que $\bar{h}_{\mu\nu}$ é um campo transversal, porém como não fizemos restrições para o valor de B não podemos afirmar que este campo é sem traço.

Substituindo (3.11) na equação de movimento (3.7), esta se torna:

$$\begin{aligned} (\square - m^2)\bar{h}_{\mu\nu} &= \left[B \frac{m_s^2}{m^2} - B - 2a + 1 \right] \square \theta_{\mu\nu} h \\ &= \left\{ B \left[\frac{(1-aD)}{(a-1)(D-2)} - 1 \right] - 2a + 1 \right\} \square \theta_{\mu\nu} h \end{aligned} \quad (3.12)$$

Para que o lado direito da equação (3.12) seja igual a zero temos que ter $a = 1/2$ ou

$$B = \frac{(D-2)(1-a)}{(D-1)}, \quad \text{para } a \neq 1/2. \quad (3.13)$$

O valor encontrado para B , além de resultar na equação de onda adequada, também faz com que $\bar{h}_{\mu\nu}$ seja um campo sem traço, como deve ser. Ficamos então com as equações:

$$(\square - m^2)\bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (3.14)$$

$$(\square - m_s^2)h = 0 \quad (3.15)$$

$$\partial^\mu h_{\mu\nu} = 0, \quad \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = 0 \quad (3.16)$$

onde (3.15)¹ descreve partículas massivas de spin-0 com massa m_s e (3.14) descreve partículas massivas de spin-2 com massa m , com as condições de Fierz-Pauli (3.4) sendo satisfeitas.

Vamos verificar o que acontece com a equação de movimento quando $a = 1/2$, ou seja, quando $m_s^2 = m^2$. Neste caso a equação para h é dada por $(\square - m^2)h = 0$. Como $\bar{h}_{\mu\nu}$ foi escolhido de maneira a ser um campo transverso, precisamos verificar se, com $a = 1/2$, este campo é também sem traço. Então, para

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\mu\nu} &= \tilde{h}_{\mu\nu} + \frac{B}{m^2} \square \theta_{\mu\nu} h \\ &= h_{\mu\nu} - (1/2)\eta_{\mu\nu} h + (1/2)B \square \theta_{\mu\nu} h, \end{aligned} \quad (3.17)$$

temos:

¹ Vale lembrar que esta equação só existe por conta da generalização da massa na teoria de Fierz-Pauli, ou seja, com a presença de $a \neq 1$.

$$\eta^{\mu\nu}\bar{h}_{\mu\nu} = \left[1 - \frac{D}{2} + B(D-1)\right] h. \quad (3.18)$$

Impondo $\bar{h} = 0$, encontramos:

$$B = \frac{(D-2)}{2(D-1)}, \quad (3.19)$$

que coincide com (3.13) com $a = 1/2$. Com isto temos as duas equações:

$$(\square - m^2)h = 0 \quad (3.20)$$

$$(\square - m^2)\bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (3.21)$$

onde (3.20) descreve partículas massivas de spin-0 e (3.21) descreve partículas massiva de spin-2, tanto uma quanto a outra com massa m . Sabemos então que a generalização ($a \neq 1$) do termo de massa na teoria usual de Fierz-Pauli faz com que apareça um campo h nas equações de onda, descrevendo partículas escalares (partículas com spin-0). Porém não podemos afirmar se tais partículas são físicas ou não sem verificar o conteúdo físico da teoria via análise das propriedades analíticas do propagador. Ou seja, uma simples análise das equações de movimento não nos permite identificar a quebra de unitariedade (fantasmas).

Para encontrarmos o conteúdo físico da teoria vamos seguir o que foi feito no capítulo anterior. Primeiramente escrevemos a densidade lagrangiana (3.1) em termos dos operadores de spin no formato (2.18) com:

$$\begin{aligned} G^{\alpha\beta\mu\nu} = & \left(\frac{\square - m^2}{2}\right) (P_{SS}^{(2)})^{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{m^2}{2} (P_{SS}^{(1)})^{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{m^2(a-1)}{2} (P_{WW}^{(0)})^{\alpha\beta\mu\nu} \\ & - \frac{1}{2} \{ \square(D-2) + m^2[1 - a(D-1)] \} (P_{SS}^{(0)})^{\alpha\beta\mu\nu} \\ & + \frac{m^2 a \sqrt{D-1}}{2} \left[(P_{SW}^{(0)})^{\alpha\beta\mu\nu} + (P_{WS}^{(0)})^{\alpha\beta\mu\nu} \right]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Com isso podemos inverter o operador acima para encontrar G^{-1} . Com

$$k^{(0)} = -\frac{m^2}{4} [\square(D-2)(a-1) - m^2(1-aD)], \quad (3.23)$$

temos:

$$\begin{aligned}
(G^{-1})^{\alpha\beta\mu\nu} &= \frac{2}{(\square - m^2)} \left(P_{SS}^{(2)} \right)^{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{2}{m^2} \left(P_{SS}^{(1)} \right)^{\alpha\beta\mu\nu} \\
&\quad - \frac{2}{(D-2)(\square - m_s^2)} \left(P_{SS}^{(0)} \right)^{\alpha\beta\mu\nu} \\
&\quad + \frac{2 \{ \square (D-2) + m^2 [1 - a(D-1)] \}}{m^2 (D-2)(a-1)(\square - m_s^2)} \left(P_{WW}^{(0)} \right)^{\alpha\beta\mu\nu} \\
&\quad + \frac{2a\sqrt{D-1}}{(D-2)(a-1)(\square - m_s^2)} \left[\left(P_{SW}^{(0)} \right)^{\alpha\beta\mu\nu} + \left(P_{WS}^{(0)} \right)^{\alpha\beta\mu\nu} \right]. \tag{3.24}
\end{aligned}$$

Saturando G^{-1} com as fontes encontramos a amplitude saturada de dois pontos, no espaço dos momenta, ela é dada por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_2(p) &= -\frac{i}{2} T^*(p)_{\alpha\beta} (G^{-1}(p))^{\alpha\beta\mu\nu} T(p)_{\mu\nu} \\
&= \frac{i}{2} T^*_{\alpha\beta} \left\{ \frac{2}{p^2 + m^2} \left(P_{SS}^{(2)} \right) + \frac{2}{m^2} \left(P_{SS}^{(1)} \right) - \frac{2}{(D-2)(p^2 + m_s^2)} \left(P_{SS}^{(0)} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{2 \{ p^2 (D-2) - m^2 [1 - a(D-1)] \}}{m^2 (D-2)(a-1)(p^2 + m_s^2)} \left(P_{WW}^{(0)} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{2a\sqrt{D-1}}{(D-2)(a-1)(p^2 + m_s^2)} \left[\left(P_{SW}^{(0)} \right) + \left(P_{WS}^{(0)} \right) \right] \right\}^{\alpha\beta\mu\nu} T_{\mu\nu} \tag{3.25}
\end{aligned}$$

Temos um polo em $p^2 = -m^2$ no setor de spin-2 e outro em $p^2 = -m_s^2$, para $a \neq 1$, no setor de spin-0 em concordância com o que obtivemos antes via análise das equações de movimento da teoria. Esses polos coincidem para $a = 1/2$ e neste caso haverá contribuição para o resíduo em $p^2 = -m^2 = -m_s^2$ vinda de ambos os setores. Da condição (2.30), para que o polo represente uma partícula não taquiônica, quando $a \neq 1$, temos que ter $m_s > 0$, ou seja, de (3.10) isso equivale a:

$$\frac{(1 - aD)}{(a - 1)} > 0 \tag{3.26}$$

A primeira possibilidade para que a condição acima seja satisfeita é:

$$\begin{aligned}
(1 - aD) > 0 &\implies a < 1/D && \text{e} \\
(a - 1) > 0 &\implies a > 1 \tag{3.27}
\end{aligned}$$

Esta não é uma possibilidade que pode ser aceita, pois as duas condições não podem ser satisfeitas mutuamente. A segunda possibilidade é:

$$\begin{aligned} (1 - aD) < 0 &\implies a > 1/D && \text{e} \\ (a - 1) < 0 &\implies a < 1 \end{aligned} \quad (3.28)$$

Estas condições sim, podem ser satisfeitas mutuamente: $1/D < a < 1$.

Concluimos portanto que temos três possibilidades, $a = 1$ (Fierz-Pauli), $a = 1/2$ (polos coincidentes) ou $1/D < a < 1$, tal que $a \neq 1/2$. Analisemos o conteúdo físico para os valores possíveis de a . O primeiro caso que queremos explorar é $a = 1$, que corresponde a teoria de Fierz-Pauli e depois $a = 1/2$, quando os polos coincidem, $m_s^2 = m^2$. Por fim analisaremos para a arbitrário, tal que $1/D < a < 1$ e $a \neq 1/2$.

3.1 TEORIA DE FIERZ-PAULI ($a = 1$)

Com $a = 1$ a teoria proposta se torna a de Fierz-Pauli usual, seu conteúdo físico está no campo $h_{\mu\nu}$ que satisfaz as condições de Fierz-Pauli e a equação de Klein-Gordon. Consequentemente, nesse caso temos apenas um polo no setor de spin-2, vide (3.25), e a parte imaginária do resíduo da amplitude é dada por:

$$Im = Im \left\{ Res[\mathcal{A}_2(p)] \Big|_{p^2 \rightarrow -m^2} \right\} = T_{\alpha\beta}^* \left(P_{SS}^{(2)} \right)^{\alpha\beta\mu\nu} T_{\mu\nu} \quad (3.29)$$

Como estamos com uma partícula massiva e Im é um escalar, podemos estudar o conteúdo físico da teoria no referencial de repouso $p^\mu = (m, 0, 0, 0)$, sem perda de generalidade. Levando em conta que $P_{SS}^{(2)}$ projeta a fonte transversalmente e que o quadrado do projetor é igual a ele mesmo, podemos substituir $T_{\mu\nu}$ por $\tilde{T}_{\mu\nu} = (P_{SS}^{(2)})_{\mu\nu}{}^{\gamma\alpha} T_{\gamma\alpha}$ em (3.29). Logo, no referencial de repouso, temos:

$$\partial^\mu \tilde{T}_{\mu\nu} = m \tilde{T}_{0\nu} = 0 \implies \tilde{T}_{0\nu} = 0 \quad (3.30)$$

Considerando a condição acima e a forma dos projetores $(P_{SS}^{(2)})$, encontramos o seguinte (veja [20]):

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_{\alpha\beta}^*(P_{SS}^{(2)})^{\alpha\beta\mu\nu}\tilde{T}_{\mu\nu} &= \tilde{T}_{\alpha\beta}^* \frac{(\theta^{\alpha\mu}\theta^{\beta\nu} + \theta^{\beta\mu}\theta^{\alpha\nu})}{2} \tilde{T}_{\mu\nu} - \tilde{T}_{\alpha\beta}^* \frac{\theta^{\alpha\beta}\theta^{\mu\nu}}{(D-1)} \tilde{T}_{\mu\nu} \\
&= \tilde{T}_{\alpha\beta}^* \frac{(\eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu} + \eta^{\beta\mu}\eta^{\alpha\nu})}{2} \tilde{T}_{\mu\nu} - \tilde{T}_{\alpha\beta}^* \frac{\eta^{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu}}{(D-1)} \tilde{T}_{\mu\nu} \\
&= \tilde{T}_{\mu\nu}^* \tilde{T}^{\mu\nu} - \frac{(\tilde{T}_{\alpha\beta}^* \eta^{\alpha\beta})(\tilde{T}_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu})}{D-1} = |\tilde{T}_{ij}|^2 - \frac{(\tilde{T}_{ii}^*)(\tilde{T}_{jj})}{(D-1)} \\
&= 2 \sum_{i<j}^{D-1} |\tilde{T}_{ij}|^2 + \sum_{j=1}^{D-1} \left[|\tilde{T}_{jj}|^2 - \frac{|\tilde{T}_{jj}|^2}{D-1} \right] - \sum_{i \neq j}^{D-1} \frac{(\tilde{T}_{ii}^*)(\tilde{T}_{jj})}{D-1} \\
&= 2 \sum_{i<j}^{D-1} |\tilde{T}_{ij}|^2 + \frac{1}{D-1} \left\{ \sum_{j=1}^{D-1} (D-2) |\tilde{T}_{jj}|^2 \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i<j}^{D-1} [(\tilde{T}_{ii}^*)(\tilde{T}_{jj}) + (\tilde{T}_{jj}^*)(\tilde{T}_{ii})] \right\} \\
&= \sum_{i<j}^{D-1} \left\{ 2|\tilde{T}_{ij}|^2 + \frac{1}{D-1} [|\tilde{T}_{ii}|^2 + |\tilde{T}_{jj}|^2 - (\tilde{T}_{ii}^*)(\tilde{T}_{jj}) - (\tilde{T}_{jj}^*)(\tilde{T}_{ii})] \right\} \\
&= \sum_{i<j}^{D-1} \left[2|\tilde{T}_{ij}|^2 + \frac{|\tilde{T}_{ii} - \tilde{T}_{jj}|^2}{(D-1)} \right] \geq 0 \tag{3.31}
\end{aligned}$$

Logo, esta teoria com $a = 1$ é uma teoria que descreve uma partícula massiva, física e de spin-2, como esperado. Note que não foi necessário usar $\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$, assim como no caso de Maxwell-Proca não foi usado $\partial^\mu J_\mu = 0$.

3.2 TEORIA COM POLOS COINCIDENTES ($a = 1/2$)

Com $a = 1/2$ os dois polos, tanto no setor de spin-2 quanto no setor de spin-0, estão em $p^2 = -m^2$. Logo, o resíduo da amplitude saturada de dois pontos, nesta situação, é:

$$\begin{aligned}
Res[\mathcal{A}_2(p)]|_{p^2 \rightarrow -m^2} &= iT_{\alpha\beta}^* \left\{ \left(P_{SS}^{(2)} \right) - \frac{1}{(D-2)} \left(P_{SS}^{(0)} \right) - \frac{(D-1)}{(D-2)} \left(P_{WW}^{(0)} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\sqrt{D-1}}{(D-2)} \left[\left(P_{SW}^{(0)} \right) + \left(P_{WS}^{(0)} \right) \right] \right\}^{\alpha\beta\mu\nu} T_{\mu\nu} \tag{3.32}
\end{aligned}$$

Para calcularmos o conteúdo físico da teoria é importante decompor a fonte da seguinte forma: $T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{TT} + \eta_{\mu\nu}J + i(p_\mu J_\nu + p_\nu J_\mu)$. Onde $T_{\mu\nu}^{TT}$ é a parte transversa e sem traço, $\eta_{\mu\nu}J$ é o traço e $i(p_\mu J_\nu + p_\nu J_\mu)$ é a parte longitudinal do tensor $T_{\mu\nu}$. Assim:

$$\begin{aligned}
Res[\mathcal{A}_2(p)]|_{p^2 \rightarrow -m^2} = i \left\{ T_{\alpha\beta}^* (P_{SS}^{(2)})^{\alpha\beta\mu\nu} T_{\mu\nu} - \frac{1}{(D-2)(D-1)} T_{\alpha\beta}^* \left[\theta^{\alpha\beta} \theta^{\mu\nu} \right. \right. \\
\left. \left. + (D-1)^2 \omega^{\alpha\beta} \omega^{\mu\nu} + (D-1) \theta^{\alpha\beta} \omega^{\mu\nu} + (D-1) \omega^{\alpha\beta} \theta^{\mu\nu} \right] T_{\mu\nu} \right\} \quad (3.33)
\end{aligned}$$

Que pode ser escrito como:

$$Res[\mathcal{A}_2(p)]|_{p^2 \rightarrow -m^2} = i \left\{ T_{\alpha\beta}^* (P_{SS}^{(2)})^{\alpha\beta\mu\nu} T_{\mu\nu} - \frac{1}{(D-2)(D-1)} |A^{\mu\nu} T_{\mu\nu}|^2 \right\}, \quad (3.34)$$

onde $A^{\mu\nu} = \theta^{\mu\nu} + (D-1)\omega^{\mu\nu}$. Calculemos o operador $A^{\mu\nu}$ saturado com a fonte decomposta.

$$\begin{aligned}
\theta^{\mu\nu} T_{\mu\nu} &= J(D-1); & \omega^{\mu\nu} T_{\mu\nu} &= J + 2i(p \cdot J). \quad \text{Logo:} \\
A^{\mu\nu} T_{\mu\nu} &= J(D-1) + (D-1)[J + 2i(p \cdot J)] = 2(D-1)[J + i(p \cdot J)] \quad (3.35)
\end{aligned}$$

Com isto, e sabendo que o operador $P_{SS}^{(2)}$ projeta a fonte transversalmente, podemos escrever a parte imaginária do resíduo da amplitude saturada de dois pontos como:

$$Im = Im \left\{ Res[\mathcal{A}_2(p)]|_{p^2 \rightarrow -m^2} \right\} = \left\{ |T_{\mu\nu}^{TT}|^2 - \frac{4(D-1)}{(D-2)} |J + i(p \cdot J)|^2 \right\} \quad (3.36)$$

Não existe maneira de organizar o resultado acima para que fique garantido que a parte imaginária do resíduo da amplitude saturada de dois pontos tenha sinal definido, pois $T_{\mu\nu}^{TT}$ é independente de J e J_μ . Portanto, como existe a possibilidade da amplitude de transição vácuo-vácuo ter probabilidades maiores que um, a teoria não é válida. Por conter fantasmas, a unitariedade é quebrada. Portanto o caso $m_s^2 = m^2$ é não físico.

Verifiquemos que conclusões podemos chegar se os cálculos acima forem repetidos com $1/D < a < 1$, tal que $a \neq 1/2$.

3.3 TERCEIRO CASO: $1/D < a < 1$ E $a \neq 1/2$

Para $1/D < a < 1$, tal que $a \neq 1/2$, temos que a amplitude é dada por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_2(p) = & iT_{\alpha\beta}^* \left\{ \frac{1}{p^2 + m_s^2} \left(P_{SS}^{(2)} \right) + \frac{1}{m^2} \left(P_{SS}^{(1)} \right) - \frac{1}{(D-2)(p^2 + m_s^2)} \left(P_{SS}^{(0)} \right) \right. \\
& - \frac{\{p^2(D-2) - m^2[1 - a(D-1)]\}}{m^2(D-2)(a-1)(p^2 + m_s^2)} \left(P_{WW}^{(0)} \right) \\
& \left. + \frac{a\sqrt{D-1}}{(D-2)(a-1)(p^2 + m_s^2)} \left[\left(P_{SW}^{(0)} \right) + \left(P_{WS}^{(0)} \right) \right] \right\}^{\alpha\beta\mu\nu} T_{\mu\nu}. \quad (3.37)
\end{aligned}$$

De fato o setor de spin-2 corresponde a uma partícula massiva física, pois o cálculo do resíduo é o mesmo do caso $a = 1$ (Fierz-Pauli), uma vez que o setor de spin-2 não depende do parâmetro a . Porém no setor de spin-0 encontramos sinal negativo quando calculamos a parte imaginária do resíduo da amplitude no polo $p^2 = -m_s^2$:

$$\begin{aligned}
Im_s \equiv Im \left\{ Res[\mathcal{A}_2(p)]|_{p^2 \rightarrow -m_s^2} \right\} &= -\frac{1}{(D-2)(D-1)} |V^{\mu\nu} T_{\mu\nu}|^2 \\
&= -\frac{(D-1)}{(D-2)} \left[\left| J + \frac{a}{(a-1)} (J + 2ip \cdot J) \right|^2 \right] \quad (3.38)
\end{aligned}$$

onde $V^{\mu\nu} = \theta^{\mu\nu} + \frac{a(D-1)}{a-1} \omega^{\mu\nu}$.

Portanto o setor de spin-0 irá descrever uma partícula fantasma para qualquer valor de “ a ” tal que $1/D < a < 1$ e $a \neq 1/2$. Logo, somos levados a fixar $a = 1$.

A tentativa de adicionar uma constante arbitrária apenas no termo de massa da teoria de Fierz-Pauli não trás nenhuma nova teoria que descreva partículas massivas de spin-2. Como uma nova abordagem, no próximo capítulo, nosso *Ansatz* será uma densidade lagrangiana, com campos simétricos de ordem 2, com apenas duas derivadas por termo e abrimos mão dos termos de Fierz-Pauli tanto no setor de derivadas como no setor sem derivadas. A partir desta suposição buscaremos impor que ela descreva apenas partículas massivas de spin-2.

4 MODELO MAIS GERAL COM DUAS DERIVADAS

4.1 INTRODUÇÃO

Buscando maior generalidade, neste capítulo, vamos partir de uma teoria geral com no máximo duas derivadas em cada termo da densidade lagrangiana. Queremos encontrar os coeficientes que permitam apenas partículas físicas de spin-2 massivas. Para isto devemos partir da densidade lagrangiana geral dada em (2.24). Olhando para o operador (2.26) concluímos que devemos ter $C_4 = \square - m^2$ para garantir que a teoria descreva partículas massivas de spin-2¹. A expressão para C_4 fixa $C_1 = 2$ a fim de evitar polos, ou seja, partículas, no setor de spin-1. Além disto, para que a teoria tenha no máximo duas derivadas, devemos ter: $C_5 = 0$ e $C_3 = a + b\square$, onde a e b são coeficientes arbitrários e constantes. Por fim C_2 deve ser uma constante, a princípio arbitrária. Dessa forma, a densidade lagrangiana de interesse para o propósito deste capítulo é dada por:

$$\mathcal{L} = 2(\partial^\mu h_{\mu\nu})^2 + C_2 \partial^\mu h \partial^\nu h_{\mu\nu} + h(a + b\square)h + h_{\mu\nu}(\square - m^2)h^{\mu\nu}, \quad (4.1)$$

Neste caso o operador (2.26) é:

$$\begin{aligned} (G^{-1})^{\alpha\beta\mu\nu} = & \frac{1}{(\square - m^2)} (P_{SS}^{(2)})^{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{1}{m^2} (P_{SS}^{(1)})^{\alpha\beta\mu\nu} \\ & + \frac{[(\square - m^2) + (a + b\square)(D - 1)]}{k^{(0)}} (P_{WW}^{(0)})^{\alpha\beta\mu\nu} \\ & + \frac{[(a + b\square) + (\square - m^2) - \square(2 + C_2)]}{k^{(0)}} (P_{SS}^{(0)})^{\alpha\beta\mu\nu} \\ & - \frac{\left\{ \left[(a + b\square) - \frac{\square C_2}{2} \right] \sqrt{D - 1} \right\}}{k^{(0)}} \left[(P_{SW}^{(0)})^{\alpha\beta\mu\nu} + (P_{WS}^{(0)})^{\alpha\beta\mu\nu} \right] \end{aligned} \quad (4.2)$$

e o determinante $k^{(0)}$, dado em (2.27), é:

¹ Neste trabalho, embora tenhamos considerado teorias que possuem derivadas de ordem superior, nos restringimos apenas àquelas que possuem polos simples no propagador. Pois o caso de múltiplos polos levam, em geral, a fantasmas (veja apêndice C).

$$k^{(0)} = [(a + b\Box) + (\Box - m^2) - \Box(2 + C_2)] [(\Box - m^2) + (a + b\Box)(D - 1)] - (D - 1) \left[(a + b\Box) - \frac{\Box C_2}{2} \right]^2 \quad (4.3)$$

Separando os coeficientes de \Box e de \Box^2 em $k^{(0)}$, temos:

$$k^{(0)} = m^2(m^2 - Da) + [D(a - bm^2) + m^2C_2 - 2(D - 1)a] \Box + \left[1 + C_2 + b(D - 2) + \frac{C_2^2}{4}(D - 1) \right] \Box^2 \quad (4.4)$$

Como queremos que o setor de spin-0 não tenha polos devemos zerar os coeficientes que multiplicam \Box e \Box^2 , isso é:

$$D(a - bm^2) + m^2C_2 - 2(D - 1)a = 0 \quad e \quad (4.5)$$

$$1 + C_2 + b(D - 2) + \frac{C_2^2}{4}(D - 1) = 0 \quad (4.6)$$

Da equação (4.6):

$$b = -\frac{(1 + C_2)}{(D - 2)} - \frac{C_2^2(D - 1)}{4(D - 2)} \quad (4.7)$$

Substituindo (4.7) na (4.5), encontramos

$$a = \frac{m^2}{4(D - 2)^2} [C_2(8 + DC_2)(D - 1) + 4D] \quad (4.8)$$

Substituindo (4.7) e (4.8) na constante $C_3 = a + b\Box$, temos:

$$C_3 = \frac{1}{4(D - 2)} \left\{ \frac{m^2}{(D - 2)} [C_2(8 + DC_2)(D - 1) + 4D] - [4(1 + C_2) + C_2^2(D - 1)] \Box \right\} \quad (4.9)$$

e o $k^{(0)}$ fica dado por:

$$k^{(0)} = -\frac{m^4}{(D - 2)^2} \left(2 + \frac{DC_2}{2} \right)^2 (D - 1). \quad (4.10)$$

Nota-se que, se $C_2 = -4/D$, o determinante $k^{(0)}$ será igual a zero. Há uma correlação entre o anulamento de $k^{(0)}$ e o aparecimento de simetrias locais, como veremos a seguir.

Primeiramente vamos provar que a ocorrência de simetrias locais de spin-0 leva a $k^{(0)} = 0$. Veremos então que tipo de simetria levou a $k^{(0)} = 0$.

- PROVA:

Seja a ação:

$$S = \frac{1}{2} \int d^D x h_{\mu\nu} G^{\mu\nu\alpha\beta} h_{\alpha\beta}, \quad (4.11)$$

onde o setor de spin-0 do operador $G^{\mu\nu\alpha\beta}$, com índices suprimidos, é escrito como:

$$G = A_{IJ} P_{IJ}^{(0)} = A_{WW} P_{WW}^{(0)} + A_{WS} P_{WS}^{(0)} + A_{SW} P_{SW}^{(0)} + A_{SS} P_{SS}^{(0)}. \quad (4.12)$$

Os $P_{IJ}^{(0)}$ são os operadores de projeção e transição e os A_{IJ} são seus coeficientes, com $I, J = S, W$. Variando a ação (4.11), com $\delta h_{\alpha\beta} = B_{KL} (P_{KL}^{(0)})_{\alpha\beta}{}^{\sigma\gamma} \Delta_{\sigma\gamma}$, sendo B_{KL} os coeficientes que definem a transformação de simetria e $\Delta_{\sigma\gamma}$ um tensor simétrico arbitrário representando os parâmetros da transformação, devemos ter:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^D x h_{\mu\nu} G^{\mu\nu\alpha\beta} \delta h_{\alpha\beta} = \int d^D x h_{\mu\nu} A_{IJ} (P_{IJ}^{(0)})^{\mu\nu\alpha\beta} B_{KL} (P_{KL}^{(0)})_{\alpha\beta}{}^{\sigma\gamma} \Delta_{\sigma\gamma} \\ &= \int d^D x h_{\mu\nu} (A \cdot B)_{IL} (P_{IL}^{(0)})^{\mu\nu\sigma\gamma} \Delta_{\sigma\gamma} = 0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

onde foi usada a álgebra dos operadores mostrada no apêndice A (A.8). Como o tensor $\Delta_{\sigma\gamma}$ é arbitrário, a imposição da simetria nos leva a concluir que $(A \cdot B)_{IL} = 0$. Como nem todos os B_{IJ} podem ser nulos, pois são os coeficientes que definem a variação do campo, temos que ter:

$$\det A_{IJ} = A_{SS} A_{WW} - A_{SW} A_{WS} = k^{(0)} = 0 \quad (4.14)$$

Portanto a existência de simetrias locais no setor de spin-0 implica em $k^{(0)} = 0$. O contrário também é verdadeiro, ou seja, a partir de $k^{(0)} = 0$ mostra - se que devemos ter simetrias locais de spin-0, como provaremos a seguir.

- PROVA:

De $k^{(0)} = \det A_{IJ} = 0$ concluímos que a matriz A_{IJ} deve possuir pelo menos um autovalor nulo, ou seja, $A_{IJ} V_J = 0$. Escolhendo

$$B_{IJ} = \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ V_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então temos:

$$(A \cdot B) = \begin{pmatrix} A_{SS} & A_{SW} \\ A_{WS} & A_{WW} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ V_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Logo, fazendo uso do B_{IJ} escolhido acima, podemos definir uma transformação $\delta h_{\alpha\beta} = B_{KL}(P_{KL}^{(0)})_{\alpha\beta}{}^{\sigma\gamma}\Delta_{\sigma\gamma}$, que em (4.11) produz:

$$\delta S = \int dx^D h_{\mu\nu} (A \cdot B)_{IL} (P_{IL}^{(0)})^{\mu\nu\alpha\beta} \Delta_{\alpha\beta} = 0. \quad (4.15)$$

Portanto $k^{(0)} = 0$ implica em uma simetria de spin-0. Logo, temos uma simetria no setor de spin-0 para $C_2 = -4/D$, vide (4.10).

4.2 $C_2 = -4/D$

Antes de continuar a explorar a teoria com C_2 arbitrário, vamos ver ao que leva esse valor especial. Com $C_4 = (\square - m^2)$, $C_1 = 2$, $C_3 = [m^2 - (D+2)\square/D]/D$ e $C_2 = -4/D$, a densidade lagrangiana é:

$$\mathcal{L} = 2(\partial^\mu h_{\mu\nu})^2 - \frac{4}{D}\partial^\mu h\partial^\nu h_{\mu\nu} + h\frac{1}{D}\left[m^2 - \frac{(D+2)}{D}\square\right]h + h_{\mu\nu}(\square - m^2)h^{\mu\nu}. \quad (4.16)$$

Organizando esta densidade lagrangiana, termo a termo, encontramos o operador:

$$\begin{aligned} G^{\alpha\beta\mu\nu} &= (\square - m^2) \left(P_{SS}^{(2)}\right)^{\alpha\beta\mu\nu} - m^2 \left(P_{SS}^{(1)}\right)^{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{1}{D^2} [m^2 D + (D-2)\square] \left(P_{SS}^{(0)}\right)^{\alpha\beta\mu\nu} \\ &+ \frac{\sqrt{D-1}}{D^2} [m^2 D + (D-2)\square] \left(P_{SW}^{(0)} + P_{WS}^{(0)}\right)^{\alpha\beta\mu\nu} \\ &- \frac{(D-1)}{D^2} \{m^2 D + [(D-2)\square]\} \left(P_{WW}^{(0)}\right)^{\alpha\beta\mu\nu} \end{aligned} \quad (4.17)$$

A consequência de escolher o valor especial de C_2 foi fazer com que $k^{(0)}$ fosse igual a zero, isto é, o autovetor nulo de $G^{\alpha\beta\mu\nu}$ se encontra no setor de spin-0. Portanto, espera-se que seja encontrado uma simetria escalar na teoria. Analisemos isto fazendo: $\delta h_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}\gamma + \partial_\alpha\partial_\beta\phi$. Escrevendo a variação do campo em termos dos operadores de

spin que atuam em tensores de rank-2 é conveniente reescrever γ e ϕ em termos de tensores: $\gamma = \eta_{\gamma\sigma}\Delta^{\gamma\sigma}$ e $\phi = \eta_{\gamma\sigma}\Phi^{\lambda\sigma}$, assim temos:

$$\begin{aligned}\delta h_{\alpha\beta} &= \eta_{\alpha\beta}\eta_{\gamma\sigma}\Delta^{\gamma\sigma} + \partial_\alpha\partial_\beta\eta_{\gamma\sigma}\Phi^{\gamma\sigma} \\ &= \left[(D-1)P_{SS}^{(0)} + \sqrt{D-1}(P_{SW}^{(0)} + P_{WS}^{(0)}) + (P_{WW}^{(0)}) \right]_{\alpha\beta\gamma\sigma} \Delta^{\gamma\sigma} \\ &\quad + \left[\sqrt{D-1}\square(P_{WS}^{(0)}) + \square(P_{WW}^{(0)}) \right]_{\alpha\beta\gamma\sigma} \Phi^{\gamma\sigma}\end{aligned}\quad (4.18)$$

Aplicando a variação na lagrangiana temos:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \delta\left(h_{\alpha\beta}G^{\alpha\beta\mu\nu}h_{\mu\nu}\right) = 2(\delta h_{\alpha\beta})G^{\alpha\beta\mu\nu}h_{\mu\nu} \\ &= 2\left[(D-1)(P_{SS}^{(0)}) + \sqrt{D-1}(P_{SW}^{(0)} + P_{WS}^{(0)}) + (P_{WW}^{(0)}) \right]_{\alpha\beta\gamma\sigma} \Delta^{\gamma\sigma} G^{\alpha\beta\mu\nu}h_{\mu\nu} \\ &\quad + 2\left[\sqrt{D-1}\square(P_{WS}^{(0)}) + \square(P_{WW}^{(0)}) \right]_{\alpha\beta\gamma\sigma} \Phi^{\gamma\sigma} G^{\alpha\beta\mu\nu}h_{\mu\nu}\end{aligned}\quad (4.19)$$

Usando o operador $G^{\alpha\beta\mu\nu}$, de (4.17), vemos que apenas a primeira linha de (4.19) é igual a zero. Portanto temos uma simetria de Weyl, $\delta h_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}\gamma$. Como essa simetria é responsável por tornar $k^{(0)} = 0$ quando $C_2 = -4/D$ para obtermos G^{-1} é necessário acrescentando um termo de fixação de gauge para quebrar a simetria. Uma condição de gauge possível, que quebra a simetria de Weyl, é $h = 0$ e a fixação de gauge é feita acrescentando o termo $\lambda h^2/2$, onde λ é uma constante arbitrária. A densidade lagrangiana com o termo de fixação de gauge pode ser escrita, de forma geral, como:

$$\mathcal{L}_T = h_{\alpha\beta}G_T^{\alpha\beta\mu\nu}h_{\mu\nu}\quad (4.20)$$

onde $G_T^{\alpha\beta\mu\nu} = G^{\alpha\beta\mu\nu} + G_{FG}^{\alpha\beta\mu\nu}$. O operador $G^{\alpha\beta\mu\nu}$ é dado na equação (4.17) e

$$G_{FG}^{\alpha\beta\mu\nu} = \lambda \left[(D-1) \left(P_{SS}^{(0)} \right)^{\alpha\beta\mu\nu} + \left(P_{WW}^{(0)} \right)^{\alpha\beta\mu\nu} + \sqrt{D-1} \left(P_{SW}^{(0)} + P_{WS}^{(0)} \right)^{\alpha\beta\mu\nu} \right]\quad (4.21)$$

é a parte do operador que vem da fixação de gauge da simetria de Weyl.

Com o determinante $k^{(0)} = -\lambda[m^2D + (D-2)\square]$, agora G^{-1} é dado por:

$$\begin{aligned}
(G_T^{-1})^{\alpha\beta\mu\nu} &= \frac{1}{\square - m^2} (P_{SS}^{(2)})^{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{1}{m^2} (P_{SS}^{(1)})^{\alpha\beta\mu\nu} \\
&\quad - \frac{\{\lambda D^2 - (D-1)[m^2 D + (D-2)\square]\}}{\lambda D^2 [m^2 D + (D-2)\square]} (P_{SS}^{(0)})^{\alpha\beta\mu\nu} \\
&\quad - \frac{\{\lambda D^2 (D-1) - [m^2 D + (D-2)\square]\}}{\lambda D^2 [m^2 D + (D-2)\square]} (P_{WW}^{(0)})^{\alpha\beta\mu\nu} \\
&\quad + \frac{\sqrt{D-1} \{\lambda D^2 + [m^2 D + (D-2)\square]\}}{\lambda D^2 [m^2 D + (D-2)\square]} (P_{SW}^{(0)} + P_{WS}^{(0)})^{\alpha\beta\mu\nu}
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Para calcularmos a amplitude saturada de dois pontos,

$$\mathcal{A}_2(p) = -\frac{i}{2} T_{\alpha\beta}^* (G^{-1})^{\alpha\beta\mu\nu} T_{\mu\nu}, \tag{4.23}$$

temos que ter em mente que o termo de fonte, $\mathcal{L}_F = T^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$, deve ter a mesma simetria que o restante da ação (simetria de Weyl). Temos:

$$\delta \mathcal{L}_F = T^{\mu\nu} \delta h_{\mu\nu} = T^{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} \gamma = 0, \tag{4.24}$$

isso é, $\eta^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = T = 0$. Então, **sobre fontes sem traço**, encontramos:

$$(P_{SS}^{(0)})^{\alpha\beta\mu\nu} \longrightarrow \left(\frac{1}{D-1}\right) (P_{WW}^{(0)})^{\alpha\beta\mu\nu} \tag{4.25}$$

$$(P_{SW}^{(0)} + P_{WS}^{(0)})^{\alpha\beta\mu\nu} \longrightarrow -\left(\frac{2}{\sqrt{D-1}}\right) (P_{WW}^{(0)})^{\alpha\beta\mu\nu} \tag{4.26}$$

Substituindo o resultado acima em (4.22) chegamos em

$$G_T^{-1} = \frac{P_{SS}^{(2)}}{\square - m^2} - \frac{P_{SS}^{(1)}}{m^2} - \frac{P_{WW}^{(0)}}{(\square + m_t^2)} \frac{D^2}{(D-1)(D-2)} \tag{4.27}$$

onde $m_t^2 = \frac{D}{D-2} m^2$. Logo, a dependência no parâmetro arbitrário de gauge λ desaparece com a saturação com fontes sem traço. O polo no terceiro termo de G_T^{-1} representa uma partícula taquiónica de spin-0, como o coeficiente deste termo não se anula teremos um táquion propagante e esta teoria não é válida. Portanto, o valor $C_2 = -4/D$, que gera a simetria de Weyl no setor de spin-0, não é um valor fisicamente aceitável.

4.3 $C_2 \neq -4/D$

Voltemos para o caso onde C_2 é uma constante arbitrária, tal que $C_2 \neq -4/D$. Com isso, temos a seguinte lagrangiana:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & 2(\partial^\mu h_{\mu\nu})^2 + C_2 \partial^\mu h \partial^\nu h_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} (\square - m^2) h^{\mu\nu} \\ & + \frac{h}{4(D-2)} \left\{ \frac{m^2}{(D-2)} [C_2(8 + DC_2)(D-1) + 4D] \right. \\ & \left. - [4(1 + C_2) + C_2^2(D-1)] \square \right\} h \end{aligned} \quad (4.28)$$

e o operador G , com índices suprimidos, é:

$$\begin{aligned} G = & (\square - m^2) P_{SS}^{(2)} - m^2 P_{SS}^{(1)} \\ & + \frac{(C_2 + 2)(D-1)}{4(D-2)} \left\{ \frac{m^2}{(D-2)} [8 - D(C_2 - 2)] - (C_2 + 2) \right\} P_{WW}^{(0)} \\ & + \frac{\sqrt{D-1}}{4(D-2)} \left\{ \frac{m^2}{(D-2)} [C_2(8 + DC_2)(D-1) + 4D] \right. \\ & \left. - (C_2 + 2) [C - 2(D-1) + 2] \square \right\} (P_{SW}^{(0)} + P_{WS}^{(0)}) \\ & + \frac{m^2}{4(D-2)^2} [(C_2(8 + DC_2)(D-1) + 4D)(D-1) - 4(D-2)^2] P_{SS}^{(0)} \\ & - \frac{m^2}{4(D-2)} [(4(1 + C_2) + C_2^2(D-1))(D-1) - 4(D-2)] \square P_{SS}^{(0)}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

com o determinante $k^{(0)}$ dado por:

$$k^{(0)} = -\frac{m^4(D-1)}{4(D-2)^2} (4 + DC_2)^2; \quad C_2 \neq -\frac{4}{D}, \quad (4.30)$$

logo, G^{-1} é:

$$\begin{aligned}
G^{-1} &= \frac{P_{SS}^{(2)}}{\square - m^2} - \frac{P_{SS}^{(1)}}{m^2} \\
&- \frac{(C_2 - 2)}{m^4(4 + DC_2)^2} \{m^2[8 - D(C_2 - 2)] - (D - 2)(C_2 + 2)\} P_{SS}^{(0)} \\
&- \frac{1}{m^4(D - 1)(4 - DC_2)^2} m^2[(C_2(8 + DC_2)(D - 1) + 4D)(D - 1) \\
&- 4(D - 2)^2] P_{WW}^{(0)} + \frac{1}{m^4(D - 1)(4 + DC_2)^2} (D - 2)[(4(1 + C_2) \\
&+ C_2^2(D - 1))(D - 1) - 4(D - 2)] P_{WW}^{(0)} \\
&- \frac{1}{m^4\sqrt{D - 1}(4 + DC_2)^2} \{m^2[C_2(8 + DC_2)(D - 1) + 4D] \\
&- (D - 2)(C_2 + 2)[C_2(D - 1) + 2]\square\} \left(P_{SW}^{(0)} + P_{WS}^{(0)}\right) \tag{4.31}
\end{aligned}$$

Como temos um polo massivo apenas no setor de spin-2, que é o mesmo da teoria de Fierz-Pauli, encontramos:

$$\text{Im} \left\{ \text{Res}[\mathcal{A}_2(p)]|_{p^2 = -m^2} \right\} = \frac{1}{2} \sum_{i < j}^{D-1} \left[|T_{ij}|^2 + \frac{|T_{ii} - T_{jj}|^2}{D - 1} \right] \geq 0 \tag{4.32}$$

Que corresponde a uma partícula física de spin-2 massiva. Portanto o lagrangiano, com no máximo duas derivadas, mais geral que representa uma teoria válida para partículas massivas de spin-2 é dado por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= 2(\partial^\mu h_{\mu\nu})^2 + C_2 \partial^\mu h \partial^\nu h_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(\square - m^2)h^{\mu\nu} \\
&+ \frac{h}{4(D - 2)} \left\{ \frac{m^2}{(D - 2)} [C_2(8 + DC_2)(D - 1) + 4D] \right. \\
&\left. - [4(1 + C_2) + C_2^2(D - 1)] \square \right\} h, \tag{4.33}
\end{aligned}$$

onde a constante C_2 é uma constante arbitrária diferente de $-4/D$.

A fim de descobrir qual o papel de C_2 nesta teoria, iremos redefinir o campo $h_{\mu\nu}$ da seguinte forma:

$$h_{\mu\nu} \rightarrow \frac{h_{\mu\nu}}{2} + \frac{a}{2} \eta_{\mu\nu} h. \tag{4.34}$$

Substituindo o campo redefinido na densidade lagrangiana (4.33) e fazendo:

$$a = -\frac{(C_2 + 2)}{(4 + C_2 D)} \quad (4.35)$$

eliminamos a constante C_2 completamente e encontramos a teoria de Fierz-Pauli usual:

$$\mathcal{L}_{FP} = (\partial^\mu h_{\mu\nu})^2 - \partial^\mu h \partial^\alpha h_{\mu\alpha} + h_{\mu\nu} \frac{(\square - m^2)}{2} h^{\mu\nu} - h \frac{(\square - m^2)}{2} h \quad (4.36)$$

Portanto, podemos afirmar que encontramos uma teoria geral com no máximo duas derivadas em cada termo da densidade lagrangiana. Porém esta teoria não acrescenta nada de novo, pois com o redefinição local do campo (4.34), com o valor de a dado em (4.35), vemos que ela é a própria teoria de Fierz-Pauli. Resumindo, a única maneira de descrever partículas massivas de spin-2 via tensor simétrico e com no máximo duas derivadas é através da teoria de Fierz-Pauli. Essa é a mesma conclusão obtida em (NIEUWENHUIZEN, 1973).

No próximo capítulo tentaremos generalizar ao máximo, para isso usaremos como *Ansatz* uma densidade lagrangiana com todos os termos possíveis para campos tensoriais simétricos de *rank* - 2 e com coeficientes que sejam funções de \square , com ordem arbitrária nas derivadas.

5 TEORIA GERAL DE ORDEM SUPERIOR

Neste capítulo queremos generalizar ao máximo a teoria para partículas massivas de spin-2. Para isso iremos propor uma densidade lagrangiana geral (2.24), permitindo que os coeficientes sejam funções de qualquer ordem em \square . Antes de calcularmos o conteúdo físico desta teoria queremos tentar relacionar os coeficientes dela com os coeficientes encontrados através do método de imersão de Euler das equações de Fierz-Pauli (DALMAZI; SANTOS; MENDONÇA, 2015) e assim descobrir se os C_j podem ser mais gerais que estes.

Na [22] é demonstrado que a ideia de adicionar termos quadráticos no tensor de Euler na teoria de Fierz-Pauli de forma conveniente leva a equações de movimento equivalentes as equações originais. O tensor de Euler é definido como a derivada funcional da ação em relação ao campo, no caso da teoria de Fierz-Pauli este tensor é dado por:

$$\begin{aligned} K^{\mu\nu} &= \frac{\delta S_{FP}}{\delta h_{\mu\nu}} \\ &\equiv (\square - m^2)h^{\mu\nu} + \partial^\mu \partial^\nu h - \partial^\mu \partial_\alpha h^{\alpha\nu} - \partial^\nu \partial_\alpha h^{\alpha\mu} + \eta^{\mu\nu}(\partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta} - \square h + m^2 h) \end{aligned} \quad (5.1)$$

onde S_{FP} é ação de Fierz-Pauli (3.1) com $a = 1$ e $h_{\mu\nu}$ é o campo da teoria, portanto $K^{\mu\nu} = 0$ é a própria equação de movimento. Note que, ao adicionarmos termos quadráticos em $K_{\mu\nu}$ à ação de Fierz-Pauli, obtemos, por exemplo, uma ação do tipo:

$$S' = S_{FP} + \int \frac{d^D x}{2} K_{\mu\nu} K^{\mu\nu}, \quad (5.2)$$

que ao ser minimizada leva a:

$$\delta S' = \int \left(\frac{\delta S_{FP}}{\delta h_{\mu\nu}} \delta h_{\mu\nu} + K_{\mu\nu} \delta K^{\mu\nu} \right) d^D x = \int K_{\mu\nu} (\delta h_{\mu\nu} + \delta K_{\mu\nu}) d^D x = 0 \quad (5.3)$$

Logo, fica garantido que as antigas equações de movimento $K_{\mu\nu} = 0$ ainda sejam soluções das novas equações de movimento. Ou seja, as equações $K_{\mu\nu} = 0$ estarão imersas nas equações de movimento $\delta S'/\delta h_{\mu\nu} = 0$. Entretanto isso não garante a equivalência entre S' e S_{FP} .

Em cada termo quadrático no tensor de Euler, adicionado a teoria de Fierz-Pauli,

podemos colocar uma função de \square como coeficiente. O que se quer encontrar são os possíveis coeficientes para que a teoria modificada descreva apenas partículas massivas de spin-2, ou seja, tal que S' e S_{FP} sejam realmente equivalentes. Aqui, iremos utilizar a teoria proposta no artigo em questão, Fierz-Pauli com termos quadráticos no tensor de Euler, e tentar relacionar os coeficientes desta teoria com coeficientes de uma lagrangiana com campos simétricos de rank-2 mais geral possível como (2.24). Partimos então da teoria de Fierz-pauli:

$$\mathcal{L}_{FP} = (\partial^\mu h_{\mu\nu})^2 - \partial^\mu h \partial^\alpha h_{\mu\alpha} + h_{\mu\nu} \frac{(\square - m^2)}{2} h^{\mu\nu} - h \frac{(\square - m^2)}{2} h \quad (5.4)$$

Acrescentando a esta os termos quadráticos no tensor $K^{\mu\nu}$ de Euler mais gerais possíveis, temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_G[h_{\mu\nu}] = & \mathcal{L}_{FP}[h_{\mu\nu}] + \partial^\mu K_{\mu\nu} \frac{a(\square)}{2} \partial_\alpha K^{\alpha\nu} + \partial_\mu K b(\square) \partial_\alpha K^{\alpha\mu} \\ & + \partial_\mu \partial_\nu K^{\mu\nu} \frac{c(\square)}{2} \partial_\alpha \partial_\beta K^{\alpha\beta} + K_{\mu\nu} \frac{d(\square)}{2} K^{\mu\nu} + K \frac{f(\square)}{2} K, \end{aligned} \quad (5.5)$$

onde a , c , d e f são funções de \square a serem determinadas de forma a garantir equivalência entre \mathcal{L}_G e \mathcal{L}_{FP} . Na seção três de (DALMAZI; SANTOS; MENDONÇA, 2015), quando calculado o operador G^{-1} da teoria (5.5), nos setores de spin-2 ($s(2)$) e de spin-1 ($s(1)$). Obtemos:

$$G_{s(2)s(1)}^{-1} = \frac{2}{(\square - m^2)[d(\square - m^2) + 1]} P_{SS}^{(2)} + \frac{2}{m^2(2 + am^2\square - 2dm^2)} P_{SS}^{(1)} \quad (5.6)$$

Olhando para os denominadores de cada setor vemos que devemos fazer $d = 0$ para que não apareça polos duplos no setor de spin-2(veja apêndice C), o que leva a partículas fantasmas, e $a = 0$ para que não apareça partículas de spin-1 na teoria. Dessa forma a densidade lagrangiana \mathcal{L}_G é:

$$\mathcal{L}_G[h_{\mu\nu}] = \mathcal{L}_{FP}[h_{\mu\nu}] + \partial_\mu K b(\square) \partial_\alpha K^{\alpha\mu} + \partial_\mu \partial_\nu K^{\mu\nu} \frac{c(\square)}{2} \partial_\alpha \partial_\beta K^{\alpha\beta} + K \frac{f(\square)}{2} K \quad (5.7)$$

Calculando cada termo desta densidade lagrangiana, temos:

$$\partial_\mu K \partial_\alpha K^{\alpha\mu} = 2m^2 [(\square - \frac{3}{2}m^2)h\square h + (2\square - \frac{3}{2}m^2)\partial_\mu h \partial_\alpha h^{\alpha\mu} + (\partial_\mu \partial_\alpha h^{\alpha\mu})^2] \quad (5.8)$$

$$(\partial_\mu \partial_\nu K^{\mu\nu})^2 = m^4 [(\partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu})^2 + 2\square \partial_\beta h \partial_\alpha h^{\alpha\beta} + h\square^2 h] \quad (5.9)$$

$$K^2 = 4[h(\square - \frac{3}{2}m^2)^2 h + (\partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu})^2 + 2(\square - \frac{3}{2}m^2)\partial_\mu h \partial_\alpha h^{\alpha\mu}] \quad (5.10)$$

Inserindo os termos acima em \mathcal{L}_G e juntamente com a densidade lagrangiana de Fierz-Pauli, os autores de (DALMAZI; SANTOS; MENDONÇA, 2015) encontraram¹:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_G = & (\partial^\mu h_{\mu\nu})^2 + \partial_\mu h [-1 + 2bm^2(2\square - \frac{3}{2}m^2) + cm^4\square + 4(\square - \frac{3}{2}m^2)f] \partial_\alpha h^{\mu\alpha} \\ & + \partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta} (2bm^2 + \frac{cm^4}{2} + 2f) \partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \frac{1}{2} (\square - m^2) h^{\mu\nu} \\ & + h [-\frac{1}{2}(\square - m^2) + 2bm^2\square(\square - \frac{3}{2}m^2) + \frac{cm^4\square^2}{2} + 2(\square - \frac{3}{2}m^2)^2 f] h \end{aligned} \quad (5.11)$$

Em (DALMAZI; SANTOS; MENDONÇA, 2015) ao exigir que a teoria de ordem superior (5.11) fosse equivalente a Fierz-Pauli chegou-se a conclusão que:

$$m^4(D-1)^2(b^2 - cf)\square^2 - (D-1)(2bm^2 + (D-2)f)\square + D(D-1)m^2f + 1 = C \quad (5.12)$$

Essa condição vem de $k^{(0)} = C$, onde C é uma constante diferente de zero, o que garante que não haverá polos no setor de spin-0 e simetrias locais.

Por outro lado, considerando uma densidade lagrangiana geral, que descreva partículas massivas de spin-2 com campo de rank-2 simétrico e de ordem arbitrária em derivadas, como em (2.24):

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \partial^\mu h_{\mu\nu} C_1(\square) \partial^\alpha h_{\alpha\nu} + \partial_\mu h C_2(\square) \partial_\alpha h^{\alpha\mu} + h C_3(\square) h + h_{\mu\nu} C_4(\square) h^{\mu\nu} \\ & + \partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} C_5(\square) \partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (5.13)$$

podemos relacionar as funções $b(\square)$, $c(\square)$ e $f(\square)$ de (5.11) com as funções $C_2(\square)$, $C_3(\square)$ e $C_5(\square)$ de (5.13).

¹ Nessas fórmulas temos: $b = b(\square)$, $c = c(\square)$ e $f = f(\square)$

$$C_1(\square) = 1 \quad (5.14)$$

$$C_2(\square) = -1 + 2m^2(2\square - \frac{3}{2}m^2)b(\square) + m^4\square c(\square) + 4(\square - \frac{3}{2}m^2)f(\square) \quad (5.15)$$

$$C_3(\square) = -\frac{1}{2}(\square - m^2) + 2m^2\square(\square - \frac{3}{2}m^2)b(\square) + \frac{m^4\square^2}{2}c(\square) + 2(\square - \frac{3}{2}m^2)^2f(\square) \quad (5.16)$$

$$C_4(\square) = \frac{1}{2}(\square - m^2) \quad (5.17)$$

$$C_5(\square) = 2m^2b(\square) + \frac{m^4}{2}c(\square) + 2f(\square) \quad (5.18)$$

O que pretendemos fazer é encontrar uma matriz que relacione as funções $C_j(\square)$ ($j = 2, 3, 5$) com os coeficientes $b(\square)$, $c(\square)$ e $f(\square)$ da densidade lagrangiana (5.11) que veio da imersão de Euler (DALMAZI; SANTOS; MENDONÇA, 2015). Se essa matriz for não singular poderemos afirmar que ela possui inversa, isso é, existe uma transformação inversível que relaciona a densidade lagrangiana geral (5.13) com a lagrangiana (5.11). Com isso podemos afirmar que a teoria para partículas massivas de spin-2 mais geral é aquela encontrada no artigo (DALMAZI; SANTOS; MENDONÇA, 2015). Verificamos que os coeficientes se relacionam da seguinte forma, veja (5.14) - (5.18):

$$\begin{pmatrix} C_2(\square) \\ C_3(\square) \\ C_5(\square) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m^2(2\square - \frac{3}{2}m^2) & m^4\square & 4(\square - \frac{3}{2}m^2) \\ 2m^2\square(\square - \frac{3}{2}m^2) & \frac{m^4\square^2}{2} & 2(\square - \frac{3}{2}m^2)^2 \\ 2m^2 & \frac{m^4}{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b(\square) \\ c(\square) \\ f(\square) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2}(\square - m^2) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

Calculando o determinante da matriz de transformação, temos:

$$\det \begin{vmatrix} 2m^2(2\square - \frac{3}{2}m^2) & m^4\square & 4(\square - \frac{3}{2}m^2) \\ 2m^2\square(\square - \frac{3}{2}m^2) & \frac{m^4\square^2}{2} & 2(\square - \frac{3}{2}m^2)^2 \\ 2m^2 & \frac{m^4}{2} & 2 \end{vmatrix} = \frac{27}{4}m^{12} \quad (5.20)$$

Como o determinante acima, surpreendentemente, não depende de \square a matriz de transformação entre os coeficientes pode ser invertida. Logo a formulação (5.11) é equivalente

a (5.13), ou seja, não há perda de generalidade ao usar (5.7) ao invés de (5.13). Portanto, a lagrangiana mais geral possível que descreve partículas de spin-2 massivas é dada por (5.13) com $C_j(\square)$ dados em (5.14) a (5.18) com $b(\square)$, $c(\square)$ e $f(\square)$ satisfazendo a equação (5.12).

Algumas soluções de (5.12) foram exploradas em (DALMAZI; SANTOS; MENDONÇA, 2015), não foi feita uma análise geral. Em (DALMAZI; SANTOS; MENDONÇA, 2015) foi suposto que $k^{(0)} = C \neq 0$, com C constante, no próximo capítulo analisaremos o caso $C = 0$ que implica em simetrias locais, como provamos no capítulo quatro.

6 SIMETRIA E CONTEÚDO FÍSICO

Neste capítulo queremos fazer um estudo sistemático de como uma dada simetria local afeta o conteúdo de uma teoria. Estaremos especialmente interessados em simetrias no setor de spin-0 que corresponde ao caso em que $C = 0$ na (5.12). Para isso vamos, novamente, propor uma lagrangiana geral, com coeficientes que são funções arbitrárias de \square como em (5.13). Aplicando a variação na densidade lagrangiana (5.13), encontramos:

$$\delta\mathcal{L} = 2h_{\mu\nu}G^{\mu\nu\alpha\beta}\delta h_{\alpha\beta} \quad (6.1)$$

Uma transformação de simetria de spin-0 e spin-1 pode ser decomposta, tensorialmente, em três tipos de transformação:

- Difeomorfismo transverso (TDIFF) ou reparametrização transversal $\rightarrow \partial_{(\mu}\varepsilon_{\nu)}^T$
- Reparametrização longitudinal $\rightarrow \partial_\mu\partial_\nu\psi$
- Simetria de Weyl $\rightarrow \eta_{\mu\nu}\phi$,

onde ψ , ϕ e ε_ν^T são parâmetros locais da transformação do campo, com $\partial^\nu\varepsilon_\nu^T = 0$, isto é,

$$\delta h_{\mu\nu} = \partial_{(\mu}\varepsilon_{\nu)}^T + \partial_\mu\partial_\nu\psi + \eta_{\mu\nu}\phi. \quad (6.2)$$

Colocando isso na variação da densidade lagrangiana e organizando os termos, ficamos com:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} = h^{\mu\nu} \{ & [(-2C_1\square - C_2\square + 2C_4 + 2C_5\square^2)\partial_\mu\partial_\nu + (-C_2\square + 2C_3)\square\eta_{\mu\nu}] \psi \\ & + [(-2C_1 - DC_2 + 2C_5\square)\partial_\mu\partial_\nu + (-C_2\square + 2DC_3 + 2C_4)\eta_{\mu\nu}] \phi \\ & + (-C_1\square + 2C_4)\partial_{(\mu}\varepsilon_{\nu)}^T \} \end{aligned} \quad (6.3)$$

Assim podemos trabalhar com cada tipo de simetria separadamente fixando o gauge de forma apropriada, dessa forma poderemos verificar as consequências das simetrias propostas para o conteúdo físico da teoria. Para isso devemos impor que o termo cada parâmetro da transformação seja identicamente zero, supondo inicialmente que ψ e ϕ sejam independentes.

6.1 SIMETRIA DE SPIN-1

Para que exista simetria por difeomorfismo transverso (ε_V^T), de (6.3) devemos impor:

$$-C_1\Box + 2C_4 = 0 \quad (6.4)$$

Comparando o operador geral com coeficientes arbitrários (2.26) podemos perceber que quando a simetria por difeomorfismo transverso é imposta, o que está sendo anulado é o denominador do coeficiente do projetor $P_{SS}^{(1)}$, logo esse tipo de simetria atua no setor de spin-1. Lembramos o leitor que, como aqui estamos interessados em partículas massivas de spin-2, devemos impor $C_4 = \Box - m^2$. Dessa forma, temos:

$$C_1\Box - 2(\Box - m^2) = 0 \quad (6.5)$$

Logo, a simetria por difeomorfismo transverso é incompatível com a existência de partículas de spin-2 massivas no espectro da teoria (5.13), mesmo que fixemos $C_1 = 2$.

6.2 SIMETRIA DE SPIN-0

Por outro lado temos as simetrias escalares (spin-0). Essas simetrias são a simetria de Weyl (ϕ) e a reparametrização longitudinal (ψ) e elas fazem com que o denominador do setor de spin-0 se anule. Isto é, tanto uma simetria quanto a outra torna $k^{(0)} = C = 0$.

6.2.1 Simetria por reparametrização longitudinal

Para que tenhamos simetria por reparametrização longitudinal (ψ), devemos impor, vide (6.3),

$$-2C_1\Box - C_2\Box + 2C_4 + 2C_5\Box^2 = 0 \quad e \quad -C_2\Box + 2C_3 = 0. \quad (6.6)$$

Notemos que, quando fixamos $C_4 = \Box - m^2$, não existe maneira de zerar a primeira das equações acima. Portanto, já podemos afirmar que a simetria por reparametrização longitudinal também é incompatível com a existência de partículas de spin-2 massivas.

6.2.2 Simetria de Weyl

Para simetria de Weyl (ψ) impomos:

$$-2C_1 - DC_2 + 2C_5\Box = 0 \quad e \quad -C_2\Box + 2DC_3 + 2C_4 = 0 \quad (6.7)$$

O que nos permite eliminar as constantes C_2 e C_3 da seguinte forma:

$$C_2 = \frac{2(C_5\Box - C_1)}{D} \quad e \quad C_3 = \frac{(C_5\Box - C_1)\Box}{D^2} - \frac{C_4}{D} \quad (6.8)$$

Usando $\frac{\lambda h^2}{2}$ como o termo de fixação de gauge, a densidade lagrangiana é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \partial_\mu h^{\mu\nu} C_1 \partial^\alpha h_{\alpha\nu} + \partial_\mu h^{\mu\nu} \frac{2(C_5\Box - C_1)}{D} \partial_\nu h^{\mu\nu} + h \left[\frac{(C_5\Box - C_1)\Box}{D^2} - \frac{C_4}{D} + \frac{\lambda}{2} \right] h \\ & + h_{\mu\nu} C_4 h^{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} C_5 \partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (6.9)$$

Logo, o operador G , com índices suprimidos, fica sendo:

$$\begin{aligned} G = & C_4 P_{SS}^2 + \left(C_4 - \frac{C_1\Box}{2} \right) P_{SS}^{(1)} \\ & + \left\{ \frac{(D-1)}{D^2} \left(C_5\Box^2 - C_1\Box + \frac{\lambda D^2}{2} \right) + \frac{C_4}{D} \right\} P_{SS}^{(0)} \\ & + \left\{ \frac{(D-1)^2}{D^2} (C_5\Box - C_1)\Box + \frac{(D-1)}{D} C_4 + \frac{\lambda}{2} \right\} P_{WW}^{(0)} \\ & + \sqrt{(D-1)} \left\{ \frac{(D-1)}{D^2} (C_1 - C_5\Box)\Box - \frac{C_4}{D} + \frac{\lambda}{2} \right\} \left(P_{SW}^{(0)} + P_{WS}^{(0)} \right) \end{aligned} \quad (6.10)$$

Com isso podemos encontrar o operador inverso G^{-1} :

$$\begin{aligned} G^{-1} = & \frac{1}{C_4} P_{SS}^{(2)} + \frac{1}{C_4 - C_1\Box/2} P_{SS}^{(1)} \\ & + \frac{[2(D-1)^2(C_5\Box - C_1)\Box + 2(D-1)DC_4 + \lambda D^2]}{2D^2 k^{(0)}} P_{SS}^{(0)} \\ & + \frac{[(D-1)(2C_5\Box^2 - 2C_1\Box + \lambda D^2) + 2C_4 D]}{2D^2 k^{(0)}} P_{WW}^{(0)} \\ & - \frac{\sqrt{(D-1)} [2(D-1)(C_1 - C_5\Box)\Box - 2C_4 D + \lambda D^2]}{2D^2 k^{(0)}} \left(P_{SW}^{(0)} + P_{WS}^{(0)} \right), \end{aligned} \quad (6.11)$$

onde

$$k^{(0)} = \frac{\lambda}{2} [C_5(D-1)\square^2 - C_1(D-1)\square + C_4D]. \quad (6.12)$$

Aqui, sobre fontes sem traço, temos novamente (4.25) e (4.26). Com isso encontramos:

$$G^{-1} = \frac{1}{C_4} P_{SS}^{(2)} + \frac{1}{C_4 - C_1\square/2} P_{SS}^{(1)} - \frac{D^2}{(D-1)[(D-1)(C_1 - C_5\square)\square - DC_4]} P_{WW}^{(0)} \quad (6.13)$$

Vemos que no operador (6.13) temos polos duplos no setor de spin-0, para evitar isto devemos fazer $C_5 = 0$. Escolhendo $C_4 = \square - m^2$ e $C_1 = 2$, somos levados a um polo taquiônico em $\square = -m_t^2 = -[D/(D-1)]m^2$. Logo, a simetria de Weyl não leva a um conteúdo físico de interesse. Isto é, com simetria de Weyl temos partículas taquiônicas como discutido no capítulo 4.

6.3 CASO GERAL

As condições (6.6) e (6.7) não são as únicas possibilidades para que $k^{(0)} = C = 0$. Com $C_1 = 2$ e $C_4 = \square - m^2$ em (2.27) temos a seguinte condição geral para simetria de spin-0:

$$\begin{aligned} k^{(0)} &= [C_3 + C_5\square^2 - (1 + C_2)\square - m^2][\square + (D-1)C_3 - m^2] \\ &\quad - (D-1) \left(C_3 - \frac{\square C_2}{2} \right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (6.14)$$

Analisando o termo independente de \square em (6.14) podemos fixar o termo que não depende de \square em C_3 , isto sugere o *Ansatz*:

$$C_3 = \frac{m^2}{D} + \square g(\square) \quad (6.15)$$

onde $g(\square)$ é uma função analítica. Assim, de (6.14), temos:

$$\begin{aligned} m^2 [D - 2 - DC_2 + D^2 g(\square)] + D\square \left[\frac{(D-1)C_2^2}{4} + C_2 + (2-D)g(\square) + \frac{m^2 C_5}{D} + 1 \right] \\ - DC_5\square^2 [(D-1)g(\square) + 1] = 0 \end{aligned} \quad (6.16)$$

Expandindo cada função analítica $g(\square)$, $C_2(\square)$ e $C_5(\square)$ em potências de \square poderemos classificar todas as teorias para partículas massivas de spin-2 que possuem simetria no setor de spin-0, que certamente inclui o caso de simetria de Weyl anterior. Esta é uma abordagem que deixaremos para um futuro artigo, pois, embora tentamos encontrar soluções além de Weyl, um estudo sistemático das soluções de (6.16) ainda está em andamento.

7 CONCLUSÃO

Buscamos neste trabalho encontrar a teoria mais geral para partículas massivas de spin-2, com tensor simétrico. Para isso propusemos densidades lagrangianas mais gerais do que a teoria de Fierz-Pauli, que é a teoria usual para partículas massivas de spin-2. A ideia geral para encontrarmos o conteúdo físico de uma dada teoria é descrita no capítulo dois. Neste capítulo mostramos o caminho que seguimos em todo o trabalho para calcular a parte imaginária da amplitude saturada de dois pontos a fim de encontrar o conteúdo físico da teoria.

No capítulo três partimos de uma teoria semelhante a teoria de Fierz-Pauli, porém com uma constante arbitrária “ a ” no termo de massa (o que chamamos de termo de massa generalizado), sem alterar a parte cinética da teoria. Primeiramente analisamos a equação de movimento para $a \neq 1$. Desta análise concluímos que: com $a \neq 1/2$ encontramos uma equação para partículas massivas de spin-2 com massa “ m ” e uma equação para partículas de spin-0 com massa m_s (definido na (3.10)). Com $a = 1/2$ encontramos uma equação para partículas massivas de spin-0 e outra para partículas massivas de spin-2, ambas com massa m . Porém, isso é o máximo de informações que podemos obter analisando as equações de movimento. Para sabermos mais sobre a teoria proposta nós calculamos o operador G^{-1} . Descobrimos que, para que a teoria não descreva partículas taquiônicas, “ a ” deve satisfazer $1/D < a < 1$, além dos valores especiais: $a = 1$, que corresponde a teoria usual de Fierz-Pauli e $a = 1/2$, que faz com que os polos do setor de spin-0 e do setor de spin-2 coincidam. Após calcular a parte imaginária do resíduo da amplitude saturada, o conteúdo físico da teoria nos fez concluir que a única maneira para a teoria não descrever partículas não físicas é fazer $a = 1$, o que nos levou a concluir que, não é possível encontrar novas teorias mudando apenas o termo de massa da teoria de Fierz-Pauli.

No quarto capítulo exploramos uma densidade lagrangiana com coeficientes arbitrários, tal que esta tenha no máximo duas derivadas. Olhando para o operador inverso G^{-1} dado em (2.26) vimos que, para que a teoria descreva partículas de spin-2 massivas, devemos ter $C_4 = \square - m^2$, isto nos fez fixar $C_1 = 2$, para evitar polos no setor de spin-1. Para evitar polos no setor de spin-0 tivemos que impor que o determinante $k^{(0)}$ não dependesse de \square , isto nos fez encontrar o valor de C_3 , porém C_2 continuou sendo uma constante arbitrária. Tendo definido os coeficientes da teoria calculamos $k^{(0)}$ e vimos que se fizermos $C_2 = -4/D$ iremos ter $k^{(0)} = 0$. O que mostramos que leva a uma simetria escalar e descobrimos que se tratava de uma simetria de Weyl. Fixamos o gauge para esta simetria e buscamos o conteúdo desta teoria. Porém vimos que essa teoria não tem significado

físico válido, pois ela descreve partículas taquiônicas. Voltamos então para o caso inicial, desta vez tendo em mente que $C_2 \neq -4/D$. Calculando novamente a amplitude de dois pontos \mathcal{A}_2 mostramos que existe uma teoria geral, com no máximo duas derivadas, que descreve uma partícula massiva com spin-2. A constante C_2 permanece arbitrária, tal que deve ser diferente de $-4/D$. Fazendo uma redefinição local do campo descobrimos que a teoria encontrada equivale a teoria de Fierz-Pauli, o que nos faz concluir que ainda não encontramos uma nova teoria para partículas massivas de spin-2.

No capítulo cinco propomos uma densidade lagrangiana ainda mais geral, desta vez os coeficientes são tomados como funções arbitrárias de \square . Aqui queremos encontrar as possibilidades para os coeficientes C_j , de forma que a teoria mais geral em questão descreva partículas massivas de spin-2. Antes de buscar o conteúdo físico da teoria relacionamos os coeficientes da densidade lagrangiana proposta com os coeficientes encontrados a partir da técnica de imersão de Euler das equações de Fierz-Pauli (DALMAZI; SANTOS; MENDONÇA, 2015). Para isto buscamos uma matriz de transformação que relacionasse os coeficientes da densidade lagrangiana proposta, $C_j(\square)$ ($j = 2, 3, 5$), com os da lagrangiana encontrada através do método de imersão de Euler, $b(\square)$, $c(\square)$ e $f(\square)$. A ideia foi a seguinte: se o determinante da matriz que relaciona os coeficientes em questão não depender de \square , esta matriz tem inversa, logo, a formulação proposta por nós é equivalente a formulação proposta em [22]. Surpreendentemente o determinante encontrado é independente de \square , o que nos fez concluir que a formulação mais geral proposta por nós é equivalente a formulação encontrada através do método de imersão de Euler das equações de Fierz-Pauli. Concluimos então que a teoria mais geral que descreve partículas de spin-2 massivas via tensor simétrico pode ser obtida da ação de Fierz-Pauli via imersão de Euler sem perda de generalidade. Os coeficientes indeterminados $b(\square)$, $c(\square)$ e $f(\square)$ devem satisfazer a equação algébrica (5.12), que vem da condição de ausência de polos no setor de spin-0, ou seja, $k^{(0)} = C \neq 0$.

Por fim, no capítulo seis, a fim de complementar o assunto tratado neste trabalho, verificamos as consequências de uma dada simetria local no conteúdo físico de uma teoria geral, o que implica em $k^{(0)} = C = 0$ em (5.12). Isso não foi analisado em (DALMAZI; SANTOS; MENDONÇA, 2015). Primeiramente analisamos a simetria por difeomorfismo transverso, $\delta h_{\mu\nu} = \partial_{(\mu} \varepsilon_{\nu)}^T$ com $\partial^\mu \varepsilon_\mu^T = 0$, que está ligada com simetria vetorial (spin-1) e concluimos que ela só é possível para o caso não massivo, caso este que não está sendo alvo do nosso trabalho.

Passamos então para simetrias locais escalares (spin-0). A teoria com simetria por reparametrização longitudinal, $\delta h_{\mu\nu} = \partial_\mu \partial_\nu \psi$, após a fixação do gauge, se mostrou incompatível com a localidade da densidade lagrangiana. A terceira simetria que exploramos foi

a simetria de Weyl, $\delta h_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}\phi$ neste caso obtivemos uma teoria local. Porém, quando calculamos o operador G^{-1} descobrimos um pólo duplo no setor de spin-0, para evitar este pólo duplo tivemos que fazer $C_5 = 0$ nesse caso, além de descrever partículas de spin-2 massivas, temos também partículas taquiônicas de spin-0. Este é o mesmo caso de simetria de Weyl estudado no capítulo quatro. Logo, a simetria de Weyl também não é possível.

Por último partimos de (6.14), que é uma condição mais geral para que $k^{(0)} = C = 0$. Analisando do termo independente de \square em (6.14) vimos a possibilidade de usar o *Ansatz* (6.15), definindo assim C_3 . Com isso, chegamos em (6.16) que nos permite expandir as funções analíticas $g(\square)$, $C_2(\square)$ e $C_5(\square)$ em potências de \square , de forma a classificar todas as teorias de spin-2 massivas que possuem simetria no setor de spin-0. A análise desta possibilidade ainda está em andamento.

Concluimos então que a teoria com termo de massa generalizado só descreve partículas físicas, massivas e de spin-2 quando fixamos $a = 1$, este valor nos leva a teoria de Fierz-Pauli usual. Portanto, não foi possível encontrar uma nova teoria alterando apenas o termo de massa da teoria de Fierz-Pauli. Ao analisarmos a teoria com no máximos duas derivadas nos deparamos com uma teoria que descreve partículas massivas de spin-2 físicas, esta teoria depende de uma constante arbitrária que deve ser diferente de $-4/D$. Porém, redefinindo o campo, mostramos que a teoria encontrada é equivalente a teoria de Fierz-Pauli. Partindo de uma teoria mais geral possível, com coeficientes sendo funções de \square de ordem arbitrária, conseguimos encontrar uma teoria que descreve partículas massivas de spin-2. Esta teoria depende dos parâmetros C_j ($j = 1, 2, 3, 4, 5$) dados em (5.14) a (5.18) e com $b(\square)$, $c(\square)$ e $f(\square)$ satisfazendo a equação (5.12), que vem de impor que: $k^{(0)} = C \neq 0$. Por fim analisamos as consequências de uma dada simetria local no conteúdo físico de uma teoria geral. Mostramos que a simetria por difeomorfismo transversal (TDIFF) ou reparametrização transversal ($\delta h_{\mu\nu} = \partial_{(\mu}\varepsilon_{\nu)}^T$), que está ligada com simetria vetorial (spin-1), só é possível para o caso sem massa. Para simetria escalar (spin-0), mostramos que a simetria por reparametrização longitudinal ($\delta h_{\mu\nu} = \partial_\mu\partial_\nu\psi$) é incompatível com partícula de spin-2 massiva. Já a simetria de Weyl ($\delta h_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}\phi$) nos levou a uma teoria que descreve partículas taquiônicas de spin-0, logo, esta também não é uma simetria válida. Por último propomos uma condição geral para $k^{(0)} = C = 0$ de forma a classificar todas as teorias de spin-2 massivas que possuem simetria no setor de spin-0, este caso ainda está sob análise.

A OPERADORES $P_{IJ}^{(s)}$

Os operadores de Barnes-Rivers são construídos a partir dos projetores de spin-0 e de spin-1 dados em (2.1). Os operadores simétricos de projeção, em D dimensões, são definidos como:

$$(P_{SS}^{(2)})^{\lambda\mu\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\theta^{\lambda\alpha}\theta^{\mu\beta} + \theta^{\mu\alpha}\theta^{\lambda\beta}) - \frac{\theta^{\lambda\mu}\theta^{\alpha\beta}}{D-1} \quad (\text{A.1})$$

$$(P_{SS}^{(1)})^{\lambda\mu\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\theta^{\lambda\alpha}\omega^{\mu\beta} + \theta^{\mu\alpha}\omega^{\lambda\beta} + \theta^{\lambda\beta}\omega^{\mu\alpha} + \theta^{\mu\beta}\omega^{\lambda\alpha}) \quad (\text{A.2})$$

$$(P_{SS}^{(0)})^{\lambda\mu\alpha\beta} = \frac{1}{D-1}\theta^{\lambda\mu}\theta^{\alpha\beta} \quad (\text{A.3})$$

$$(P_{WW}^{(0)})^{\lambda\mu\alpha\beta} = \omega^{\lambda\mu}\omega^{\alpha\beta}. \quad (\text{A.4})$$

Estes projetores satisfazem a relação de completiza:

$$[P_{SS}^{(2)} + P_{SS}^{(1)} + P_{SS}^{(0)} + P_{WW}^{(0)}]_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha}}{2}. \quad (\text{A.5})$$

Além destes projetores temos também os operadores simétricos de transição. Os quais são definidos como:

$$(P_{SW}^{(0)})^{\lambda\mu\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{D-1}}\theta^{\lambda\mu}\omega^{\alpha\beta} \quad (\text{A.6})$$

$$(P_{WS}^{(0)})^{\lambda\mu\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{D-1}}\omega^{\lambda\mu}\theta^{\alpha\beta}. \quad (\text{A.7})$$

Todos os operadores satisfazem a álgebra:

$$P_{IJ}^{(s)}P_{KL}^{(r)} = \delta^{sr}\delta_{JK}P_{IL}^{(s)}. \quad (\text{A.8})$$

B UNITARIEDADE

A existência de fantasmas em teoria quântica de campos está associada com amplitudes de transição de probabilidades maiores que um. Vamos apresentar uma breve análise dessa relação no caso simples de um campo escalar massivo. Iniciamos com a amplitude de transição de vácuo a vácuo na presença de fontes arbitrárias¹ $J(x)$.

$$Z[J] = \int D\phi \exp \left\{ i \int dx \left[\phi \frac{(\square - m^2)}{2} \phi + \phi J \right] \right\} \equiv \int D\phi \exp \left\{ i \int dx \left[\phi \frac{G(\partial)}{2} \phi + \phi J \right] \right\} \quad (\text{B.1})$$

esta amplitude de transição pode ser escrita ainda como:

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int D\phi \exp \left\{ i \int dx \left[\frac{1}{2} \left(\phi + \frac{J}{\square - m^2} \right) (\square - m^2) \left(\phi + \frac{J}{\square - m^2} \right) - \frac{1}{2} J \left(\frac{1}{\square - m^2} \right) J \right] \right\} \\ &= C \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int dx \int dy J(x) \left[\int dp \left(\frac{-e^{ip(x-y)}}{p^2 + m^2} \right) \right] J(y) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Note que

$$(\square - m^2) \int dp \left(\frac{-e^{ip(x-y)}}{p^2 + m^2} \right) = \delta(x-y) \quad (\text{B.3})$$

e que

$$C = \int D\phi \exp \left\{ i \int dx \left[\frac{1}{2} \left(\phi + \frac{J}{\square - m^2} \right) (\square - m^2) \left(\phi + \frac{J}{\square - m^2} \right) \right] \right\}. \quad (\text{B.4})$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned} Z[J] &= C \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int dp \frac{J(-p)J(p)}{[-(p^2 + m^2)]} \right\} \\ &= C \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int dp J^*(p) G^{-1}(p) J(p) \right\} \equiv C \exp \left\{ \int dp \mathcal{A}_2(p) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Temos então a definição da amplitude de dois pontos saturada por fontes.

¹ Neste apêndice $\int dp$ significa $\int d^D p = \int dp_0 dp_1 \cdots dp_{D-1}$

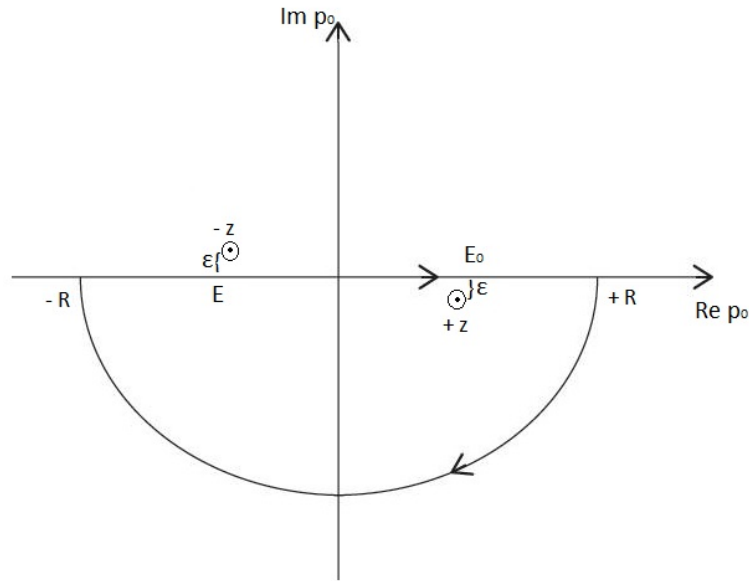
$$\mathcal{A}_2(p) = -\frac{i}{2} J^*(p) G^{-1}(p) J(p) = \frac{i}{2} \frac{|J(p)|^2}{(p^2 + m^2)}. \quad (\text{B.6})$$

Calculamos agora o resíduo do polo de (B.5).

$$\begin{aligned} Z[J] &= C \exp \left\{ \frac{i}{2} \int d^{D-1} p \int dp_0 \left[\frac{|J(p)|^2}{(-p_0^2 + p_i^2 + m^2 - i\varepsilon)} \right] \right\} \\ &= C \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int d^{D-1} p \int dp_0 \left[\frac{|J(p)|^2}{(p_0 - z)(p_0 + z)} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

onde $\varepsilon > 0$ e $z = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} - i\varepsilon = E_+ - i\varepsilon$. Calculando a integral em dp_0 no plano complexo em torno de um caminho fechado em torno do ponto $+z$ e no sentido horário:

Figura 1 – Caminho utilizado para calcular a integral de resíduo



fonte: Produção do próprio autor.

Tomando o limite $R \rightarrow \infty$, temos:

$$\begin{aligned} Z[J] &= C \exp \left\{ -\frac{i}{2} (-1) 2\pi i \int d^{D-1} p \left[\frac{|J(p)|^2}{(2z)} \right] \right\} = C \exp \left\{ -\frac{\pi}{2} \int d^{D-1} p \left[\frac{|J(p)|^2}{z} \right] \right\} \\ &= C \exp \left\{ -\frac{\pi}{2} \int d^{D-1} p \left[\frac{|J(p)|^2}{(E_+ - i\varepsilon)} \right] \Bigg|_{p_0=z} \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Com $\varepsilon \rightarrow 0$, temos:

$$Z[J, \varepsilon \rightarrow 0] = Cexp \left\{ -\frac{\pi}{2} \int d^{D-1}p \left[\frac{|J(p)|^2}{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} \right] \Big|_{p_0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} \right\} \quad (\text{B.9})$$

Note que: $p_0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ implica em $p^\mu p_\mu = -m^2$ e que a parte imaginária do resíduo de (B.6):

$$Im \equiv Im \left[Res(\mathcal{A}_2(p)) \Big|_{p^2 = -m^2} \right] = Im \left\{ \frac{i}{2} \lim_{p^2 \rightarrow -m^2} (p^2 + m^2) \frac{|J(p)|^2}{(p^2 + m^2)} \right\} = \frac{|J(p)|^2}{2}. \quad (\text{B.10})$$

Então a amplitude de transição (B.9) pode ser escrita como:

$$\langle \infty | -\infty \rangle_J = Cexp \left\{ -\pi \int \frac{d^3p}{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} Im \left[Res(\mathcal{A}_2(p)) \Big|_{p^2 = -m^2} \right] \right\} \quad (\text{B.11})$$

Como para assegurar a unitariedade da teoria temos que ter $\langle \infty | -\infty \rangle_J < 1$ isto implica que, para que a teoria não descreva partículas fantasmas, temos que ter

$$Im \left[Res(\mathcal{A}_2(p)) \Big|_{p^2 = -m^2} \right] > 0. \quad (\text{B.12})$$

C POLOS DUPLOS

Neste trabalho nós supomos que $C_4 = \square - m^2$ pois um polinômio de \square com grau maior que dois no denominador do projetor de spin-2 $P_{\zeta\zeta}^{(2)}$ leva a múltiplos polos e um deles, pelo menos, leva a sinal negativo. Veja, por exemplo:

$$f(p^2) = \frac{C}{(p^2 + m_1^2)(p^2 + m_2^2)} = \frac{C}{(m_2^2 - m_1^2)} \left[\frac{1}{(p^2 + m_1^2)} - \frac{1}{(p^2 + m_2^2)} \right] \quad (\text{C.1})$$

Calculando os resíduos da função acima, temos:

$$I_1 = \lim_{p^2 \rightarrow -m_1^2} f(p^2) = \frac{C}{(m_2^2 - m_1^2)} \quad (\text{C.2})$$

$$I_2 = \lim_{p^2 \rightarrow -m_2^2} f(p^2) = -\frac{C}{(m_2^2 - m_1^2)} \quad (\text{C.3})$$

Logo, como I_1 e I_2 , possuem sinais opostos pelo menos um deles descreveria partículas não física (fantasmas). Uma exceção a isso é a "New Massive Gravity" de [28] em $D = 2 + 1$. Apesar desta teoria possuir dois polos, um sem massa em $\square = 0$ e outro outro massivo em $\square = -m^2$, o polo em $\square = 0$ tem resíduo nulo, pois devido a baixa dimensionalidade uma contribuição do setor de spin-0 cancela com a contribuição do setor de spin-2.

REFERÊNCIAS

- ABBOTT, B. e. a. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. **Phys. Rev. Lett.**, v. 116, n. 6, p. 061102, 2016.
- ARKANI-HAMED, N.; GEORGI, H.; SCHWARTZ, M. Effective field theory for massive gravitons and gravity in theory space. **Annals of Physics**, v. 305, n. 2, p. 96 – 118, 2003.
- BARNES, K. Lagrangian theory for the second-rank tensor field. **Journal of Mathematical Physics**, v. 6, n. 5, p. 788–794, 1965.
- BOULWARE, D.; DESER, S. Inconsistency of finite range gravitation. **Physics Letters B**, v. 40, n. 2, p. 227 – 229, 1982.
- DALMAZI, D.; SANTOS, A. dos; MENDONÇA, E. Massive spin-2 particles via embedment of the fierz-pauli equations of motion. **Class. Quant. Grav.**, v. 32, n. 1, p. 015022, 2015.
- DAM, H. van; VELTMAN, M. Massive and mass-less yang-mills and gravitational fields. **Nuclear Physics B**, v. 22, n. 2, p. 397 – 411, 1970.
- DESER, S.; WALDRON, A. Acausality of massive gravity. **Phys. Rev. Lett.**, v. 110, n. 11, p. 111101, 1984.
- FIERZ, M.; PAULI, W. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field. **Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, v. 173, n. 953, p. 211–232, 1939.
- FROMONT, P. de et al. Superluminality in the bi- and multi-galileon. **Journal of High Energy Physics**, v. 2013, n. 7, p. 67, 2013.
- GRUZINOV, A. All fierz-paulian massive gravity theories have ghosts or superluminal modes. 2011.
- HASSAN, S.; ROSEN, R. Resolving the ghost problem in nonlinear massive gravity. **Phys. Rev. Lett.**, v. 108, n. 4, p. 041101, 2012.
- HASSAN, S.; ROSEN, R.; SCHMIDT-MAY, A. Ghost-free massive gravity with a general reference metric. **Journal of High Energy Physics**, v. 2012, n. 2, p. 26, 2012.
- HINTERBICHLER, K. Theoretical aspects of massive gravity. **Rev. Mod. Phys.**, v. 84.
- KOENIGSTEIN, A.; GIACOSA, F.; RISCHKE, D. Classical and quantum theory of the massive spin-two field. **Annals of Physics**, v. 386, p. 16–55, 2016.
- NIEUWENHUIZEN, P. V. On ghost-free tensor lagrangians and linearized gravitation. **Nucl. Phys.**, B60, p. 478–492, 1973.

- PERLMUTTER, S. e. a. Measurements of ω and δ from 42 high-redshift supernovae. **The Astrophysical Journal**, v. 517, n. 2, p. 565, 1999.
- RHAM, C. de. Massive gravity. "**Living Reviews in Relativity**", v. 17, n. 1, p. 7, 2014.
- RHAM, C. de; GABADADZE, G. Generalization of the fierz-pauli action. **Phys. Rev. D**, v. 82, n. 4, p. 044020, 2010.
- RHAM, C. de; GABADADZE, G.; TOLLEY, A. Comments on (super)luminality. 2011.
- RHAM, C. de; GABADADZE, G.; TOLLEY, A. Resummation of massive gravity. **Phys. Rev. Lett.**, v. 106, n. 23, p. 231101, 2011.
- RIESS, A. e. a. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. **Phys. Rev. Lett.**, v. 116, n. 6, p. 061102, 2016.
- RIVERS, R. Lagrangian theory for neutral massive spin-2 fields. **Il Nuovo Cimento (1955-1965)**, v. 34, n. 2, p. 386–403, 1964.
- RUBAKOV, V.; TINYAKOV, P. Infrared-modified gravities and massive gravitons. **Physics-Uspekhi**, v. 51, n. 8, p. 759, 2008.
- SERGEI, D. et al. Null energy condition and superluminal propagation. **Journal of High Energy Physics**, v. 2006, n. 3, p. 25, 2006.
- VAINSHTEIN, A. To the problem of nonvanishing gravitation mass. **Physics Letters B**, v. 39, n. 3, p. 393 – 394, 1972.
- ZAKHAROV, V. I. Linearized gravitation theory and the graviton mass. **JETP Lett.**, v. 12, p. 312, 1970.