



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Câmpus de Presidente Prudente

Raízes de equações trinômiais e quadrimoniais

Jéssica Ventura da Silva

Orientadora: Profa. Dra. Vanessa Avansini Botta Pirani

Programa: Matemática Aplicada e Computacional

Presidente Prudente, Fevereiro de 2018

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Raízes de equações trinômiais e quadrimoniais

Jéssica Ventura da Silva

Orientadora: Profa. Dra. Vanessa Avansini Botta Pirani

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente, Fevereiro de 2018

Ficha catalográfica elaborada pela Seção Técnica de Aquisição e Tratamento da Informação - Diretoria Técnica de Biblioteca e Documentação - UNESP, Campus de Presidente Prudente

S58r Silva, Jéssica Ventura.
Raízes de equações trinômiais e quadrimômiais / Jéssica Ventura da Silva.
- 2018
72 f. : il.

Orientador: Vanessa Avansini Botta Pirani
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente, 2018
Inclui bibliografia

1. Raízes. 2. Equações trinômiais e quadrimômiais. 3. Taxa de juros. 4. Argumentos e módulos. 5. Região anelar. 6. Localização de zeros. I. Pirani, Vanessa Avansini Botta. II. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências e Tecnologia. III. Título.

Claudia Adriana Spindola
CRB-8ª/5790

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Raízes de equações trinômiais e quadrinômiais

AUTORA: JÉSSICA VENTURA DA SILVA

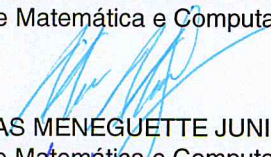
ORIENTADORA: VANESSA AVANSINI BOTTA PIRANI

Aprovada como parte das exigências para obtenção do Título de Mestra em MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, pela Comissão Examinadora:



Profa. Dra. VANESSA AVANSINI BOTTA PIRANI

Departamento de Matemática e Computação / Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente



Prof. Dr. MESSIAS MENEGUETTE JUNIOR

Departamento de Matemática e Computação / Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente



Prof. Dr. JEFFERSON LUIZ ROCHA BASTOS

Departamento de Matemática / UNESP/ Câmpus de São José do Rio Preto

Presidente Prudente, 23 de fevereiro de 2018

Aos meus pais, Lianiro e Nelci,
à minha orientadora, Vanessa,
dedico!

Agradecimentos

Não há palavras que expressem o meu sentimento de gratidão a todos que, de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho. No entanto, gostaria de deixar aqui meus sinceros agradecimentos a todos aqueles que estiveram do meu lado nas horas tranquilas e apreensivas e que me ajudaram a vencer mais esta etapa.

Agradeço à minha família pela força, pelo incentivo e pelo carinho. Em especial, agradeço aos meus pais Lianiro e Nelci, que foram o meu porto seguro nesta jornada, obrigada por estarem presentes em todos momentos, por todo o apoio e carinho.

À Vanessa, minha orientadora, pessoa pela qual sinto profunda admiração pela sua competência profissional, obrigada pela dedicação e paciência que sempre teve comigo, pela amizade e companheirismo e principalmente por acreditar em meu potencial.

Agradeço a todos os meus professores, desde aqueles da educação básica até os da pós-graduação, pelos ensinamentos e dedicação, pois graças a eles cheguei até aqui. Em especial, aos docentes do Departamento de Matemática e Computação, os quais foram minha fonte de inspiração, por eles tenho eterna admiração, respeito e gratidão.

Gostaria de agradecer a todos os meus amigos de turma, do ensino básico, graduação e pós-graduação, em especial os meus amigos Letícia, Rodrigo e Laison pelo companheirismo e principalmente pela amizade, por tornarem a caminhada menos difícil, compartilhando expectativas, risos, ansiedades e sonhos.

Agradeço à FAPESP processo n° 2015/23752-3, pelo apoio financeiro.

Finalmente, e acima de tudo, agradeço a Deus por guiar e iluminar meus passos durante esta caminhada e por ter me permitido vivenciar esta fase de grande aprendizagem.

À todos, serei eternamente grata!

*“Não é o conhecimento,
mas o ato de aprender,
não a posse mas o ato
de chegar lá, que concede
a maior satisfação”.*
Carl Friedrich Gauss

Resumo

Com o objetivo de determinar o comportamento das raízes de alguns tipos de equações trinômiais, que aparecem em determinados problemas relacionados à Matemática Financeira, esta dissertação apresenta o estudo de resultados clássicos que determinam regiões do plano complexo onde os zeros de um determinado polinômio estão localizados, bem como o estudo de resultados específicos sobre a distribuição das raízes de equações trinômiais no plano complexo, de acordo com seus argumentos e módulos. Uma vez que, a grande aplicação dos resultados sobre trinômios está relacionada à determinação da taxa de juros I de séries uniformes de pagamentos antecipadas, postecipadas e diferidas, este trabalho também apresenta o estudo das funções financeiras que envolvem juros compostos.

Assim, por meio de toda teoria apresentada, determinamos uma região anelar do plano complexo onde estão localizadas as raízes das equações trinômiais e quadrinômiais relacionadas a determinação da taxa de juros I . Além disso mostramos, sob certas condições, que as raízes das equações trinômiais são simples e determinamos setores do plano complexo que contém exatamente uma raiz destas equações trinômiais.

Palavras-Chave: *Raízes, Equações Trinômiais e Quadrinômiais, Taxa de Juros, Argumentos e Módulos, Região Anelar, Localização de Zeros.*

Abstract

In order to determine the behavior of the roots of some kinds of trinomial equations, which appear in certain problems related to Financial Mathematics, this work presents the study of classical results that determine regions of the complex plane where the zeros of a given polynomial are located, as well as the study of specific results on the distribution of the roots of trinomial equations in the complex plane, according to their arguments and modules. Since the large application of the results on trinomials is related to the determination of the interest rate I of a uniform series of payments, this work also presents the study of financial functions involving compound interest.

Then using all presented theory, we determine an annular region of the complex plane where are located the roots of the trinomial and quadrinomial equations related to the determination of the interest rate I . Furthermore we show, under certain conditions, that the roots of the trinomial equations are simple and we determine the sectors of the complex plane that contain exactly one root of these trinomial equations.

Keywords: Roots, Trinomial and Quadrinomial Equations, Interest Rate, Arguments and Modules, Anelar Region, Location of Zeros.

Lista de Figuras

2.1	$P(z) = z^6 - 2z^4 + 5z^3 - 3z^2 - 11$	20
2.2	Localização dos zeros de $P(z) = z^{12} + (-3 + i)z^7 + 10z^6 + 7z^4 - 4z^3 + 24$. .	22
2.3	Localização dos zeros de $P(z) = 2z^7 + 2z^6 + 0, 2z^5 + z^4 - 7z^3 - 0, 3z^2 + 0, 4$.	22
2.4	Localização dos zeros do polinômio $P(z) = 3z^6 + 2z^5 + 2z^4 + 1.5z^3 - 1$. . .	24
2.5	Localização dos zeros do polinômio $P(z) = 4z^9 + 3z^7 + 2, 5z^5 + 1, 2z^2 + 0, 3$.	25
2.6	Localização dos zeros de $P(z) = 12z^6 + 6, 5z^5 + 3z^4 + 2, 5z^3 + 1, 5z^2 + z + 0, 75$.	26
2.7	Localização dos zeros do trinômio $P(z) = 7, 5z^{17} - 8z^5 + 0, 5$	27
2.8	Localização dos zeros do polinômio $Q_9(z) = 1 + z + z^2 + \dots + z^8 + z^9$	29
3.1	Distribuição dos zeros do trinômio $P(z)$ de acordo com seus argumentos. .	37
3.2	Distribuição dos zeros do trinômio $Q(z) = z^{12} - (1.7 + i)z^8 - 1$ de acordo com seus argumentos.	42
3.3	Distribuição dos zeros do trinômio $Q(z) = z^{14} - (0, 3 + 0, 2i)z^9 - 1$ de acordo com seus argumentos.	45
4.1	Localização dos zeros de $P_1(z)$ e $P_2(z)$	54
4.2	Localização dos zeros de $P_1(z)$ e de $P_2(z)$ de acordo com seus argumentos e módulos.	55
4.3	Localização dos zeros de $Q_1(z)$ e de $Q_2(z)$	56
4.4	Localização dos zeros de $P_1(z)$ e $P_2(z)$	57
4.5	Localização dos zeros de $P_1(z)$ e de $P_2(z)$ de acordo com seus argumentos e módulos.	58
4.6	Localização dos zeros de $Q_1(z)$ e de $Q_2(z)$	58
5.1	Localização dos zeros de $P_1(z)$ e $P_2(z)$	64
5.2	Localização dos zeros de $P_1(z)$ e $P_2(z)$	65

Sumário

Abstract	7
Lista de Figuras	8
Capítulos	
1 Introdução	13
2 Resultados Preliminares	17
2.1 Resultados clássicos sobre zeros de polinômios	17
2.2 Limitantes para os zeros	21
2.3 Polinômios gerados por uma relação de recorrência de três termos	27
2.4 Funções financeiras que envolvem juros compostos	29
2.4.1 Séries uniformes de pagamentos	30
3 Raízes de Equações Trinomiais	35
3.1 Distribuição das raízes de equações trinomiais de acordo com seus argumentos e módulos	35
4 Equações trinomiais na Matemática Financeira	47
4.1 Considerações sobre os zeros do trinômio $P_p(z)$	48
4.2 Localização dos zeros do trinômio $P_p(z)$	51
4.3 Exemplos numéricos	53
5 Equações quadrimiais na Matemática Financeira	59
5.1 Considerações sobre os zeros dos quadrimiais $P_5(z)$ e $P_6(z)$	59
5.2 Limitantes para os zeros dos quadrimiais $P_5(z)$ e $P_6(z)$	61
5.3 Exemplos numéricos	62
6 Conclusão	67
Referências	67

Introdução

Historicamente, o “problema” de determinar os zeros de um polinômio é um dos grandes desafios da chamada Álgebra Clássica, visto que a sua complexidade sempre despertou a curiosidade humana.

No caso das equações trinômiais de grau m , representadas por

$$z^m + a_p z^p + a_0 = 0,$$

com naturais $m > p$ e a_p e a_0 números complexos, conforme [20], grandes matemáticos, tais como Nekrassov em 1887, Herglotz em 1922, e Egerváry em 1930, já dedicaram-se ao estudo de suas soluções, sendo que seus principais resultados estabelecem limitantes para o módulo das raízes ou para setores no plano complexo que contém as raízes.

Quando m, p, a_p e a_0 assumem alguns valores específicos, tais equações têm um papel fundamental em alguns problemas da Matemática Financeira que envolvem a determinação da taxa de juros em séries uniformes de pagamentos postecipadas, antecipadas e diferidas. Por exemplo, considerando o número de períodos n , o pagamento PMT , o valor presente PV e o valor futuro FV , a taxa de juros I é obtida por meio das seguintes equações

$$PMT = \frac{PV \times I(1+I)^n}{(1+I)^n - 1} \quad (\text{série uniforme de pagamentos postecipada}) \quad (1.1)$$

e

$$PMT = FV \left[\frac{I}{(1+I)^n - 1} \right] \quad (\text{série uniforme de pagamentos postecipada}), \quad (1.2)$$

com pagamento no final de cada período e

$$PMT = PV \left[\frac{(1+I)^{n-1} \times I}{(1+I)^n - 1} \right] \quad (\text{série uniforme de pagamentos antecipada}) \quad (1.3)$$

e

$$PMT = \frac{FV \times I}{[(1+I)^n - 1](1+I)} \quad (\text{série uniforme de pagamentos antecipada}), \quad (1.4)$$

com pagamento no início de cada período,

$$PMT = \left[\frac{PV(1+I)^{c-1} \times I}{1 - (1+I)^{-n}} \right] \quad (\text{série uniforme de pagamentos diferida}) \quad (1.5)$$

e

$$PMT = FV \left[\frac{(1+I)^{c-1} \times I}{(1+I)^n - 1} \right] \quad (\text{série uniforme de pagamentos diferida}). \quad (1.6)$$

Ao fazer a mudança de variável $z = 1 + I$ nas equações (1.1), (1.2), (1.3), (1.4), (1.5) e (1.6) obtemos os trinômios e quadrinômios dados respectivamente por:

$$\begin{aligned} P_1(z) &= z^{n+1} - (1 + \beta)z^n + \beta \\ P_2(z) &= z^n - \alpha z + (\alpha - 1), \\ P_3(z) &= z^n - \gamma z^{n-1} + (\gamma - 1), \\ P_4(z) &= z^{n+1} - (\alpha + 1)z + \alpha, \\ P_5(z) &= z^{n+c} - z^{n+c-1} - \beta z^n + \beta, \\ P_6(z) &= z^n - \alpha z^c + \alpha z^{c-1} - 1. \end{aligned}$$

onde $\beta = \frac{PMT}{PV}$, $\alpha = \frac{FV}{PMT}$, $\gamma = \frac{PV}{PV-PMT}$, e considerando $0 < PMT < PV$, $PMT < FV$ e $0 < PV - PMT < PV$, tem-se $0 < \beta < 1$, $\alpha > 1$ e $\gamma > 1$.

Desta forma, o problema da determinação da taxa de juros em séries uniformes de pagamentos recai na investigação dos zeros positivos dos trinômios e quadrinômios P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 e P_6 .

Observe que uma solução para $n > 4$ pode ser obtida apenas por aproximação. Neste sentido, podemos obter um resultado aproximado por meio de tentativas ou por interpolação linear. As tentativas são, em geral, penosas.

De acordo com [5], vários métodos iterativos podem ser usados para obter uma aproximação satisfatória para a taxa de juros, tais como o método de Gauss-Cantelli, o qual estima o valor da taxa $I = z - 1$ através do cálculo de z dado pela expressão

$$z = \frac{(1 + \beta) \sin^2(\varphi)}{\beta},$$

onde o ângulo φ é determinado pela equação

$$\sin^{2n}(\varphi) \cos^{2n}(\varphi) = \frac{\beta^n}{(1 + \beta)^{n+1}}.$$

O método de Baily-Lenzi, que conforme [15] consiste da equação

$$I = \frac{12h - 6k - (n-1)h^2}{6 - (n-1)h}, \quad \text{para } 3 \leq n \times I \leq 5,5,$$

onde $h = \left(\frac{nPMT}{PV}\right)^{2/(n+1)} - 1$ e $k = \left[\frac{nh}{1-(1+h)^{-n}}\right]^{2/(n+1)} - 1$. Outros métodos também podem ser utilizados, como o de Newton-Raphson, de Karpin, Interpolação Linear, entre outros.

Embora a aproximação numérica resolva o problema em questão, esta necessita de algumas informações como, por exemplo, o método de Gauss-Cantelli utiliza tábuas logarítmicas e trigonométricas para obter o ângulo φ , a Interpolação Linear utiliza tábuas que estimam o quociente $\frac{I \times (1+I)^n}{(1+I)^n - 1}$, assim como a maioria dos métodos para cálculo de raízes necessita que a mesma esteja confinada em um dado intervalo.

Além disso, convém destacar que a maioria dos livros didáticos de Matemática Financeira abordam apenas a resolução numérica deste problema, sendo a algébrica nem mencionada.

Neste sentido, o principal objetivo deste trabalho é estudar, de maneira algébrica, o comportamento das raízes das equações quadrinomiais ($P_5(z)$ e $P_6(z)$) e das equações trinômiais da forma

$$P_p(z) = z^m + a_p z^p + a_0 = 0, \quad (1.7)$$

com $m, p \in \mathbb{N}$, $m > p$, $a_0, a_p \in \mathbb{R}$, $a_0 > 0$, $a_p < 0$ e $a_p + a_0 = -1$, determinando a quantidade de raízes reais e não reais, mostrando, sob certas condições, que suas raízes são simples e determinando regiões do plano complexo onde tais raízes estão localizadas.

Para o desenvolvimento deste trabalho foi necessário o estudo de resultados clássicos, dentre os quais podemos destacar os teoremas de Cauchy, de Pellet e de Eneström-Keakeya, que determinam regiões do plano complexo onde se localizam os zeros de polinômios algébricos. E também a regra de sinais de Descartes, que estima a quantidade de zeros positivos de um polinômio através do número de mudanças de sinal da sequência de seus coeficientes. Além disso, visto que a determinação da taxa de juros de séries uniformes de pagamentos representa uma valiosa aplicação do presente trabalho, foram estudadas funções financeiras que envolvem juros compostos, sendo estes estudos apresentados no segundo capítulo.

O terceiro capítulo é composto pelo estudo de resultados específicos referentes às raízes de equações trinômiais, com ênfase na distribuição de tais raízes no plano complexo, de acordo com seus argumentos e módulos.

No quarto capítulo determinamos a quantidade de raízes reais e não reais dos trinômios relacionados à determinação da taxa de juros, mostramos, sob certas condições, que suas raízes são simples e determinamos regiões do plano complexo onde tais raízes estão localizadas.

Por fim, o quinto capítulo traz o estudo do comportamento das raízes de equações quadrinômiais relacionadas a determinação da taxa de juros em séries uniformes de pagamentos diferidas.

Resultados Preliminares

Neste capítulo apresentaremos desde resultados básicos até resultados clássicos sobre zeros de polinômios. Tais resultados e definições encontram-se principalmente nos textos de Marden [8], Milovanović [10], Pólya [12] e Prasolov [13].

2.1 Resultados clássicos sobre zeros de polinômios

Sejam a_0, a_1, \dots, a_n uma sequência de números complexos e consideremos a função $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n.$$

A função P é definida como *função polinomial* ou *polinômio* associado à sequência dada. Os números a_0, a_1, \dots, a_n são denominados *coeficientes* e as parcelas a_0, a_1z, \dots, a_nz^n são chamados *termos* do polinômio $P(z)$.

Diz-se que o número real ou complexo ξ é zero de $P(z)$ se $P(\xi) = 0$ (diz-se que ξ é raiz da equação $P(z) = 0$). Tal raiz ξ é chamada de *raiz múltipla* de $P(z) = 0$ com multiplicidade m se

$$P(\xi) = P'(\xi) = \dots = P^{(m-1)}(\xi) = 0 \quad \text{e} \quad P^{(m)}(\xi) \neq 0.$$

Além disso, um polinômio P será divisível por $(z - \xi)$ se, e somente se, ξ for um zero de P . Este resultado é atribuído à D'Alembert [11].

O teorema a seguir garante que toda equação polinomial não constante com coeficientes complexos possui todas as soluções em \mathbb{C} .

Teorema 1 (Teorema Fundamental da Álgebra) *Todo polinômio não nulo $P(z)$ de grau n com coeficientes complexos a_i , $i = 0, \dots, n$, tem exatamente n zeros complexos.*

De acordo com [13], o matemático francês Albert Girard, em 1629, foi o primeiro a formular este valioso resultado, cuja demonstração, após várias tentativas de importantes matemáticos, tais como D'Alembert em 1746, Euler em 1749, Faunsenet em 1759 e Lagrange em 1771, foi apresentada em 1799 pelo matemático alemão Carl Friedrich Gauss. Atualmente, há várias versões da prova deste teorema, algumas destas podem ser encontradas em [11] e [13].

O próximo teorema, cuja demonstração pode ser vista em [11], garante que todo polinômio de grau $n \geq 1$ pode ser decomposto em um produto de fatores lineares.

Teorema 2 (Teorema da Decomposição) *Seja $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ um polinômio de grau n , $n \geq 1$, com coeficientes complexos a_i , $i = 0, 1, \dots, n$. O polinômio $P(z)$ pode ser unicamente representado por*

$$P(z) = a_n(z - \xi_1)(z - \xi_2) \cdots (z - \xi_n),$$

onde $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ são os zeros complexos do polinômio $P(z)$.

O próximo resultado, cuja demonstração encontra-se em [10], estima, sob certas condições, a quantidade de zeros de um polinômio no interior de uma determinada curva fechada.

Teorema 3 (Teorema de Rouché) *Sejam $P(z)$ e $Q(z)$ funções analíticas no interior de uma curva de Jordan C simples e fechada. Se P e Q são contínuas em C e $|P(z)| < |Q(z)|$, $z \in C$, então $F(z) = P(z) + Q(z)$ e $Q(z)$ têm o mesmo número de zeros no interior de C .*

A seguir serão enunciados alguns resultados sobre zeros e mudanças de sinal de funções, os quais serão fundamentais na demonstração da regra de sinais de Descartes, que é um resultado que estima o número de zeros positivos e negativos de um determinado polinômio de acordo com o número de mudanças de sinal da sequência de seus coeficientes, o qual pode ser visto em [12].

Teorema 4 *Seja $f(z)$ uma função real e contínua com $f(a) \neq 0$ e $f(b) \neq 0$. Então, o intervalo (a, b) contém um número par (ou ímpar) de zeros de $f(z)$ se $f(a)$ e $f(b)$ têm o mesmo sinal (ou sinais opostos).*

Demonstração. Consideremos, primeiramente, $f(a)f(b) > 0$ e então temos dois casos:

1. Se não existe $z_k \in (a, b)$ tal que $f(z_k) = 0$, então o número de zeros de $f(z)$ em (a, b) é 0.
2. Caso exista $z_k \in (a, b)$ tal que $f(z_k) = 0$ e se em z_k $f(z)$ não muda de sinal, então z_k é um zero de multiplicidade par. E se em z_k , $f(z)$ muda de sinal, então deve existir um $z_j \in (a, b)$, $z_j \neq z_k$ onde $f(z)$ muda de sinal novamente. Portanto, $f(z)$ possui um número par de zeros em (a, b) .

Agora suponhamos que $f(a)f(b) < 0$.

Se $f(z)$ muda de sinal em z_k , então z_k é um zero de multiplicidade ímpar. Se em z_k , $f(z)$ não muda de sinal, então deve existir um $z_j \in (a, b)$, $z_j \neq z_k$, onde $f(z)$ muda de sinal. Como $f(z)$ não muda de sinal em z_k , ele apresenta multiplicidade par que, junto com z_j nos dá um número ímpar de zeros. Portanto, $f(z)$ possui um número ímpar de zeros em (a, b) . ■

Seja a sequência $\{a_0, \dots, a_n\}$ dos coeficientes do polinômio $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$. O resultado a seguir é uma consequência imediata do teorema anterior.

Corolário 1 *Sejam a_j e a_k diferentes de zero. Então a subsequência $\{a_j, a_{j+1}, \dots, a_k\}$ tem um número par (ou ímpar) de mudanças de sinal se a_j e a_k têm o mesmo sinal (ou sinais opostos).*

Teorema 5 *Seja $\alpha > 0$. Passando do polinômio $a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ para o polinômio $(\alpha - z)(a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n) = \alpha a_0 + (\alpha a_1 - a_0)z + (\alpha a_2 - a_1)z^2 + \dots - a_nz^{n+1}$ o número de mudança de sinal aumenta.*

Demonstração. Denotemos por S^- o número de mudanças de sinal da sequência dos coeficientes de determinado polinômio.

Como $\alpha > 0$, note que $S^-(a_0, a_1, \dots, a_n) = S^-(a_0, \alpha a_1, \alpha^2 a_2, \dots, \alpha^n a_n)$. Assim,

$$\begin{aligned} S^-(\alpha a_0, (\alpha a_1 - a_0), (\alpha a_2 - a_1), \dots, -a_n) &= S^-(a_0, \alpha a_1 - a_0, \alpha(\alpha a_2 - a_1), \dots, -\alpha^n a_n) \\ &> S^-(a_0, \alpha a_1, \alpha^2 a_2, \dots, \alpha^n a_n) \\ &= S^-(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n). \end{aligned}$$

Portanto, $S^-(\alpha a_0, (\alpha a_1 - a_0), (\alpha a_2 - a_1), \dots, -a_n) > S^-(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$. ■

Teorema 6 (Regra de Sinais de Descartes) *Sejam Z^+ o número de zeros positivos do polinômio $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$ e S^- o número de mudanças de sinal da sequência dos coeficientes. Então, $S^- - Z^+$ é um número par não negativo.*

Demonstração. Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ os zeros positivos de $P(z)$. Então, temos

$$\begin{aligned} P(z) &= R(z)(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_r) \\ &= R(z)(-1)^r (\alpha_1 - z)(\alpha_2 - z) \cdots (\alpha_r - z) \\ &= Q(z)(\alpha_1 - z)(\alpha_2 - z) \cdots (\alpha_r - z), \end{aligned}$$

onde $Q(z)$ é um polinômio de grau $n - r$ com coeficientes reais.

De acordo com o Teorema 5, o número de mudanças de sinal de $Q(z)$ é maior ou igual a zero, de $Q(z)(\alpha_1 - z)$ é maior ou igual a um e de $Q(z)(\alpha_1 - z)(\alpha_2 - z)$ é maior ou igual a dois. Prosseguindo desta forma sucessivamente, obtemos que o número de mudanças de sinal de $Q(z)(\alpha_1 - z)(\alpha_2 - z) \cdots (\alpha_r - z)$ é maior ou igual ao número de zeros positivos de $P(z)$. Portanto, $S^- \geq Z^+ \implies S^- - Z^+ \geq 0$.

Agora mostremos que $S^- - Z^+$ é um número par. Sejam a_α o primeiro e a_w o último coeficientes não nulos de $P(z)$, $\alpha \leq w$ (somente o caso $\alpha < w$ é interessante) e $0 < \xi < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_r < \delta < \infty$. Considerando ξ suficientemente próximo de 0 e δ tendendo ao infinito, temos

$$P(z) = a_\alpha z^\alpha + a_{\alpha+1} z^{\alpha+1} + \dots + a_w z^w = z^\alpha (a_\alpha + a_{\alpha+1} z + \dots + a_w z^{w-\alpha}) = z^\alpha p(z).$$

Observe que

- $a_\alpha > 0 \implies p(0) = a_\alpha > 0 \implies P(\xi) > 0$;
- $a_\alpha < 0 \implies p(0) = a_\alpha < 0 \implies P(\xi) < 0$;
- $a_w > 0 \implies P(\delta) > 0$;
- $a_w < 0 \implies P(\delta) < 0$.

Assim,

$$\begin{aligned} \text{sinal}(P(\xi)) &= \text{sinal}(a_\alpha) \neq 0 \\ \text{sinal}(P(\delta)) &= \text{sinal}(a_w) \neq 0. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 4 e Corolário 1, temos que Z^+ é um número par ou ímpar (de acordo com o mesmo sinal ou sinais opostos) e S^- é um número par ou ímpar (análogo).

Portanto $S^- - Z^+$ é par. ■

Analogamente, utiliza-se a regra de sinais de Descartes para estimar a quantidade de zeros negativos Z^- do polinômio $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$, fazendo a mudança de variável z para $-z$. Assim, considerando S^- o número de mudanças de sinal da sequência dos coeficientes de $P(-z)$, segue pela regra que $S^- - Z^-$ é um número par não negativo.

Exemplo 1 Considerando o polinômio $P(z) = z^6 - 2z^4 + 5z^3 - 3z^2 - 11$, temos que $S^-(1, -2, 5, -3, -11) = 3$. Aplicando a regra de sinais de Descartes, obtemos:

$$S^- - Z^+ = 2k \implies Z^+ = 3 - 2k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

- se $k = 0 \implies Z^+ = 3$; o polinômio pode apresentar no máximo três zeros positivos;
- se $k = 1 \implies Z^+ = 1$; o polinômio pode apresentar apenas um zero positivo;
- se $k = 2 \implies Z^+ = -1$; não faz sentido uma quantidade negativa de zeros.

Agora, fazendo a mudança de variável z para $-z$ obtemos

$$P(-z) = z^6 - 2z^4 - 5z^3 - 3z^2 - 11.$$

Assim, $S^-(1, -2, -5, -3, -11) = 1$. Aplicando a regra de sinais de Descartes no polinômio $P(-z)$ temos

$$S^- - Z^- = 2k \implies Z^- = 1 - 2k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

- se $k = 0 \implies Z^- = 1$; significa que o polinômio pode apresentar apenas um zero negativo;
- se $k = 1 \implies Z^- = -1$; o que não é válido, pois não faz sentido uma quantidade negativa de zeros.

A seguir será apresentado, na Figura 2.1, o gráfico do polinômio $P(z)$ e a localização de seus zeros.

Utilizando o software *Mathematica*, encontramos os zeros de $P(z)$, dados por: $z_1 = -2,2769$, $z_2 = -0,5245 + 0,947i$, $z_3 = -0,5245 - 0,947i$, $z_4 = 0,9175 + 1,3869i$, $z_5 = 0,9175 - 1,3869i$ e $z_6 = 1,4909$.

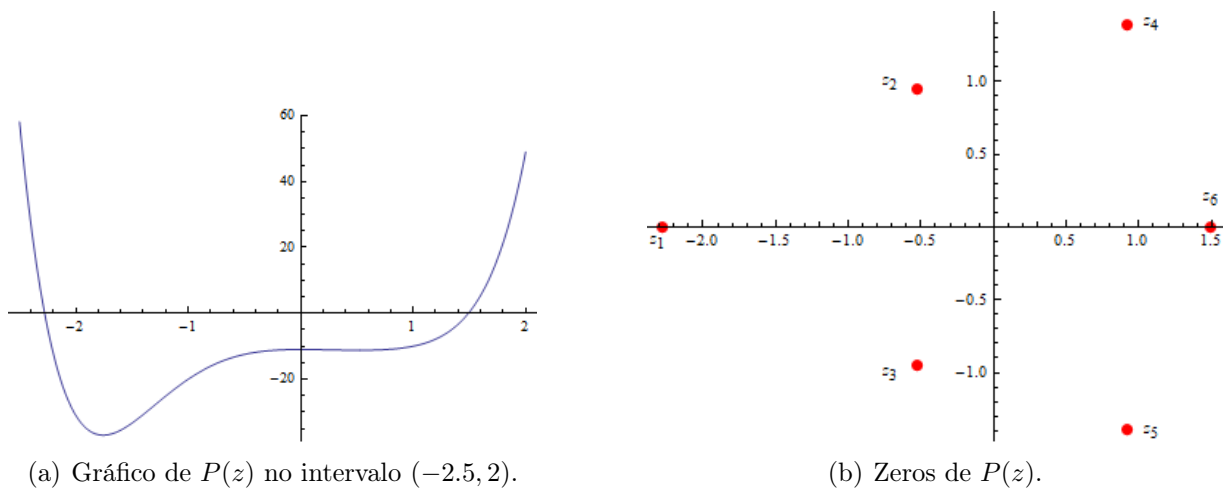


Figura 2.1: $P(z) = z^6 - 2z^4 + 5z^3 - 3z^2 - 11$.

Logo, pela regra de sinais de Descartes, podemos afirmar que $P(z)$ possui no máximo três zeros positivos e um negativo. E analisando os gráficos, concluímos que $P(z)$ possui um zero positivo e um zero negativo.

2.2 Limitantes para os zeros

Baseando-se nos textos de Henrici [6] e de Marden [8], nesta seção apresentaremos importantes resultados que indicam regiões do plano complexo onde estão localizados os zeros de polinômios.

Como um desses resultados, apresentaremos a seguir a regra de Cauchy, a qual determina um disco que contém todos os zeros de um polinômio com coeficientes complexos.

Teorema 7 (Cauchy) *Seja $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_{n-1}z^{n-1} + z^n$ um polinômio com coeficientes complexos e $a_0 \neq 0$, e seja r a única raiz positiva da equação*

$$t^n - |a_{n-1}|t^{n-1} - \dots - |a_1|t - |a_0| = 0. \quad (2.1)$$

Então, todos os zeros da equação $P(z) = 0$ encontram-se no disco $|z| \leq r$.

Demonstração. Primeiramente, mostremos que a equação (2.1) tem um único zero positivo. Para isso, considerando $t > 0$ em (2.1) temos

$$\begin{aligned} t^n &= |a_{n-1}|t^{n-1} + \dots + |a_1|t + |a_0| \\ 1 &= |a_{n-1}|\frac{1}{t} + \dots + |a_1|\frac{1}{t^{n-1}} + |a_0|\frac{1}{t^n}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

A função do lado direito de (2.2) é estritamente decrescente em $(0, \infty)$, tem valores arbitrariamente grandes quando t está próximo de zero e converge para 0 quando $t \rightarrow \infty$. Logo, o gráfico desta função cruza o gráfico da função $y(t) = 1$ uma única vez em um ponto $r \in (0, \infty)$.

Agora, consideremos $f(t) = t^n - |a_{n-1}|t^{n-1} - \dots - |a_1|t - |a_0|$. Pela observação anterior, $f(t)$ tem um único zero positivo, que é o ponto r . Como $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \infty$, então, se $f(t) \leq 0$ para algum $t > 0$, temos $t \leq r$.

Supondo que $P(z) = 0$ para algum z , então

$$z^n = -a_{n-1}z^{n-1} - \dots - a_1z - a_0$$

e, conseqüentemente,

$$|z|^n = |a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0| \leq |a_{n-1}||z|^{n-1} + \dots + |a_1||z| + |a_0|.$$

A desigualdade acima mostra que $f(|z|) \leq 0$ e, de acordo com o que já foi demonstrado acima, obtemos $|z| \leq r$. ■

Exemplo 2 *Seja $P(z) = z^{12} + (-3 + i)z^7 + 10z^6 + 7z^4 - 4z^3 + 24$ um polinômio com coeficientes complexos, e seja $r = 1,6460648$ a única raiz positiva da equação $t^{12} - |-3+i|t^7 - |10|z^6 - |7|z^4 - |-4|z^3 - |24| = 0$. Então, pelo Teorema 7 podemos concluir que todos os zeros deste polinômio, $z_1 = -1,388 - 0,745i$, $z_2 = -1,326 + 0,764i$, $z_3 = -0,906 + 0,628i$, $z_4 = -0,873 - 0,626i$, $z_5 = -0,24 + 1,193i$, $z_6 = -0,194 - 1,191i$, $z_7 = 0,218 - 1,472i$, $z_8 = 0,268 + 1,432i$, $z_9 = 0,915 - 0,674i$, $z_{10} = 0,953 + 0,709i$, $z_{11} = 1,249 + 0,539i$ e $z_{12} = 1,325 - 0,558i$, ilustrados em vermelho, encontram-se no disco $|z| \leq 1,6460648$, como pode ser observado na Figura 2.2.*

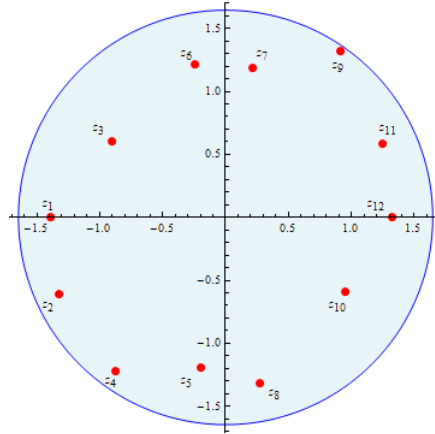


Figura 2.2: Localização dos zeros de $P(z) = z^{12} + (-3 + i)z^7 + 10z^6 + 7z^4 - 4z^3 + 24$.

O teorema a seguir trata de um importante resultado clássico que nos dá, sob certas condições, a quantidade exata de zeros de um polinômio em um determinado círculo.

Teorema 8 (Teorema de Pellet) *Dado o polinômio $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_pz^p + \dots + a_nz^n$, $a_p \neq 0$, se o polinômio*

$$F(z) = |a_0| + |a_1|z + \dots + |a_{p-1}|z^{p-1} - |a_p|z^p + |a_{p+1}|z^{p+1} + \dots + |a_n|z^n$$

tem dois zeros positivos r e R , $r < R$, então $P(z)$ tem exatamente p zeros na região $|z| \leq r$ e não tem zeros no anel $r < |z| < R$.

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [8].

Exemplo 3 *Seja $P(z) = 2z^7 + 2z^6 + 0,2z^5 + z^4 - 7z^3 - 0,3z^2 + 0,4$. Como o polinômio $F(z) = |0,4| + |0,3|z^2 - |7|z^3 + |1|z^4 + |0,2|z^5 + |2|z^6 + |2|z^7$ possui dois zeros positivos, $r = 0,41427$ e $R = 1,07132$, segue pelo Teorema de Pellet que $P(z)$ tem exatamente três zeros ($z_4 = -0,1557 - 1,3316i$, $z_5 = -0,1557 + 1,3316i$ e $z_6 = 0,38115$) em $|z| \leq 0,41427$ e não tem zeros no anel $0,41427 < |z| < 1,07132$. A saber, $z_1 = -1,75$, $z_2 = -0,2109 - 0,3269i$, $z_3 = -0,2109 + 0,3269i$ e $z_7 = 1,1021$.*

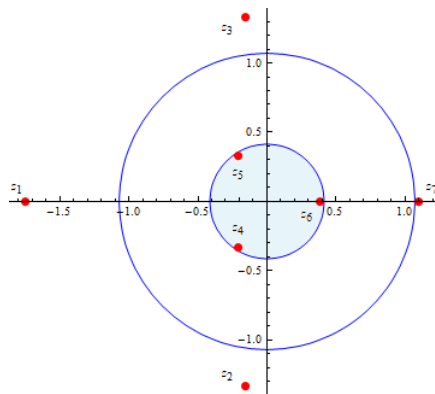


Figura 2.3: Localização dos zeros de $P(z) = 2z^7 + 2z^6 + 0,2z^5 + z^4 - 7z^3 - 0,3z^2 + 0,4$.

Agora, considerando um polinômio com coeficientes reais cuja sequência dos coeficientes é decrescente, o resultado a seguir determina um disco que contém todos os zeros desse polinômio.

Teorema 9 *Seja $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$ um polinômio de grau n tal que $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_{n-1} \leq a_n$ e $a_na_0 \neq 0$. Então todos os zeros de $P(z)$ estão no disco*

$$|z| \leq \frac{a_n - a_0 + |a_0|}{|a_n|}.$$

Demonstração. De fato, seja $R(z) = z^n Q\left(\frac{1}{z}\right)$, onde

$$Q(z) = a_n z^{n+1} + (1-z)P(z) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1})z^k.$$

Então, para $|z| \leq 1$,

$$\begin{aligned} |R(z)| &= \left| z^n Q\left(\frac{1}{z}\right) \right| = \left| a_0 z^n + \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1})z^{n-k} \right| \\ &\leq |a_0||z|^n + \left| \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1})z^{n-k} \right| \\ &\leq |a_0| + \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) = |a_0| + a_n - a_0. \end{aligned}$$

Desse modo,

$$\left| Q\left(\frac{1}{z}\right) \right| \leq \frac{|a_0| + a_n - a_0}{|z|^n},$$

e assim obtemos que

$$|Q(z)| \leq (|a_0| + a_n - a_0)|z|^n, \quad \text{com } |z| \geq 1.$$

Note que, para $|z| \geq 1$, segue que

$$\begin{aligned} |(z-1)P(z)| &= |a_n z^{n+1} - Q(z)| \geq |a_n||z|^{n+1} - |Q(z)| \\ &\geq |a_n||z|^{n+1} - (|a_0| + a_n - a_0)|z|^n \\ &= |z|^n [|a_n||z| - (|a_0| - a_n + a_0)] \\ &= |z|^n |a_n| \left[|z| - \left(\frac{|a_0| - a_n + a_0}{|a_n|} \right) \right]. \end{aligned}$$

Como $a_n - a_0 = |a_n - a_0|$, tem-se

$$r = \frac{|a_0| + a_n - a_0}{|a_n|} \geq 1.$$

Note que se $|z| > r$, então $|(z-1)P(z)| > 0$. Portanto, $P(z)$ não possui zeros em $|z| > r$, ou seja, todos os zeros de $P(z)$ encontram-se em $|z| \leq r$. ■

Exemplo 4 *Seja $P(z) = 3z^6 + 2z^5 + 2z^4 + 1.5z^3 - 1$ um polinômio cujos coeficientes satisfazem as hipóteses do teorema anterior. Então, podemos concluir que todos os zeros deste polinômio, ilustrados em vermelho, encontram-se no disco $|z| \leq 1,67$, como pode ser observado na Figura 2.4.*

Além disso, pelo software *Mathematica*, os zeros de $P(z)$ são: $z_1 = -0,949$, $z_2 = -0,398 - 0,738i$, $z_3 = -0,398 + 0,738i$, $z_4 = 0,229 - 0,868i$, $z_5 = 0,229 + 0,868i$ e $z_6 = 0,619$.

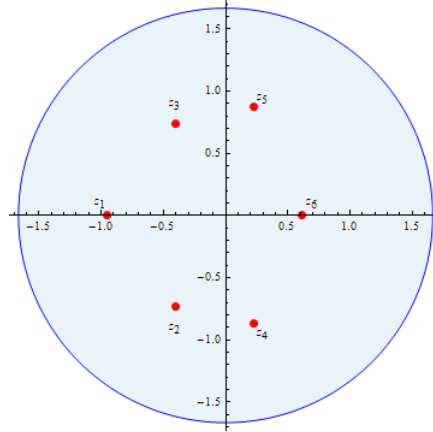


Figura 2.4: Localização dos zeros do polinômio $P(z) = 3z^6 + 2z^5 + 2z^4 + 1.5z^3 - 1$.

O próximo resultado consiste em apresentar o estudo de um resultado clássico sobre a distribuição de zeros de polinômios num determinado círculo. Trata-se do Teorema de Eneström-Kakeya, que é muito utilizado em problemas de estabilidade de métodos numéricos, onde é necessária a análise da localização dos zeros de um polinômio no disco unitário.

Teorema 10 (Eneström-Kakeya) *Seja $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$ um polinômio cujos coeficientes reais $a_i, i = 0, \dots, n$, satisfazem $a_n \geq a_{n-1} \geq \dots \geq a_0 > 0$. Então $P(z)$ não possui zeros em $|z| > 1$, ou seja, os zeros de $P(z)$ encontram-se em $|z| \leq 1$.*

Demonstração. Seja $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$ um polinômio de grau n , onde $a_n \geq a_{n-1} \geq \dots \geq a_0 > 0$. Temos, pelo Teorema 9, que todos os zeros de $P(z)$ encontram-se no disco

$$|z| \leq \frac{a_n - a_0 + |a_0|}{|a_n|}.$$

Como $a_0 > 0$ tem-se

$$|z| \leq \frac{a_n - a_0 + a_0}{a_n} \implies |z| \leq 1.$$

■

Exemplo 5 *Seja $P(z) = 4z^9 + 3z^7 + 2,5z^5 + 1,2z^2 + 0,3$ um polinômio cujos coeficientes satisfazem as condições do Teorema 10. Então, podemos concluir que todos os zeros de $P(z)$ encontram-se no disco unitário $|z| \leq 1$, como pode ser observado na Figura 2.5.*

Utilizando o software Mathematica obtemos os zeros de $P(z)$: $z_1 = -0,7096$, $z_2 = -0,5443 - 0,8129i$, $z_3 = -0,5443 + 0,8129i$, $z_4 = -0,04267 - 0,4833i$, $z_5 = -0,0427 + 0,4833i$, $z_6 = 0,319 - 0,8314i$, $z_7 = 0,319 + 0,8314i$, $z_8 = 0,6227 - 0,4516i$ e $z_9 = 0,6227 + 0,4516i$.

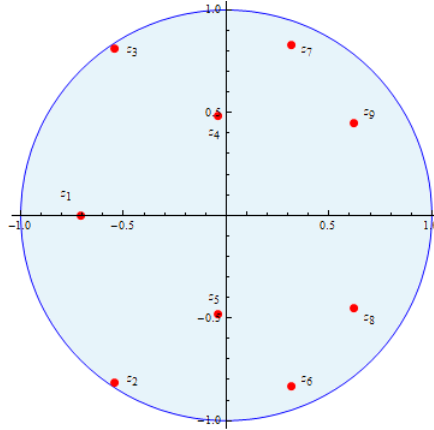


Figura 2.5: Localização dos zeros do polinômio $P(z) = 4z^9 + 3z^7 + 2,5z^5 + 1,2z^2 + 0,3$.

Corolário 2 *Seja $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ um polinômio cujos coeficientes satisfazem $a_0 > a_1 > \dots > a_n > 0$. Então $P(z)$ não tem zeros em $|z| < 1$.*

Demonstração. Considere a equação polinomial $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n = 0$ cujos coeficientes satisfazem $a_0 > a_1 > \dots > a_n > 0$. Fazendo a mudança de variável $z = \frac{1}{w}$ em $P(z)$ temos

$$a_0 + a_1 \frac{1}{w} + \dots + a_{n-1} \frac{1}{w^{n-1}} + a_n \frac{1}{w^n} = 0,$$

ou seja,

$$a_0w^n + a_1w^{n-1} + \dots + a_{n-1}w + a_n = 0. \quad (2.3)$$

Note que os coeficientes da equação polinomial (2.3) satisfazem as hipóteses do Teorema de Eneström-Kakeya, logo por tal resultado não há zeros em $|w| > 1$, o que implica que $\frac{1}{|z|} > 1$, ou seja, $|z| < 1$ e, portanto $P(z)$ não tem zeros em $|z| < 1$. ■

A seguir será apresentada uma generalização do Teorema de Eneström-Kakeya, cuja demonstração encontra-se em [2]. Tal resultado exibe uma região anelar contendo todos os zeros de um determinado polinômio.

Teorema 11 *Seja $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$ um polinômio de grau n tal que $n \geq 1$ e $a_k > 0$ para $k = 0, 1, \dots, n$. Consideremos*

$$\alpha = \min_{0 \leq k < n} \left\{ \frac{a_k}{a_{k+1}} \right\} \quad e \quad \beta = \max_{0 \leq k < n} \left\{ \frac{a_k}{a_{k+1}} \right\}.$$

Então todos os zeros de $P(z)$ estão na região anelar $A = \{z \in \mathbb{C}; \alpha < |z| < \beta\}$.

Exemplo 6 *Seja $P(z) = 12z^6 + 6,5z^5 + 3z^4 + 2,5z^3 + 1,5z^2 + z + 0,75$ um polinômio cujos coeficientes satisfazem as condições do Teorema 11. É possível exibir a região $\alpha \leq |z| \leq \beta$, onde α e β são determinados a partir do menor e maior valores, respectivamente, entre os valores dados por*

$$\frac{a_0}{a_1} = 0,75; \quad \frac{a_1}{a_2} = 0,67; \quad \frac{a_2}{a_3} = 0,6; \quad \frac{a_3}{a_4} = 0,83; \quad \frac{a_4}{a_5} = 0,46; \quad \frac{a_5}{a_6} = 0,54.$$

Assim, temos $\alpha = 0,46$ e $\beta = 0,75$. Portanto, os zeros do polinômio $P(z)$ estão em $0,46 \leq |z| \leq 0,75$, como podemos ver na Figura 2.6.

Além disso, pelo software Mathematica, os zeros de $P(z)$ são: $z_1 = -0,5916 - 0,253i$, $z_2 = -0,591605 + 0,253i$, $z_3 = -0,1069 - 0,5995i$, $z_4 = -0,1069 + 0,599i$, $z_5 = 0,4277 - 0,4735i$ e $z_6 = 0,4277 + 0,4735i$.

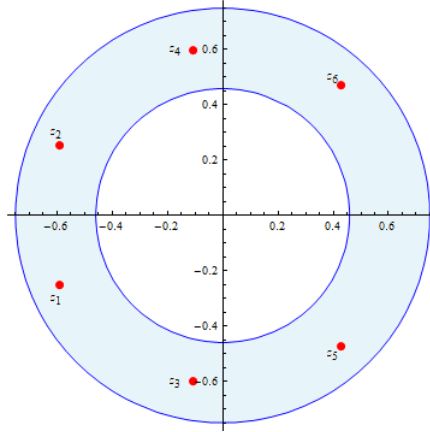


Figura 2.6: Localização dos zeros de $P(z) = 12z^6 + 6,5z^5 + 3z^4 + 2,5z^3 + 1,5z^2 + z + 0,75$.

O teorema a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em [4], relata, sob certas condições, a quantidade de zeros de um trinômio no interior do círculo unitário.

Teorema 12 *Sejam $a > b > 0$ números reais e $n > m > 0$ inteiros. Então o número de zeros de $P(z) = bz^n - az^m + a - b$ em $|z| < 1$ é*

$$\begin{cases} m - \text{mdc}(m, n), & \text{se } \frac{a}{b} \geq \frac{n}{m} \\ m, & \text{se } \frac{a}{b} < \frac{n}{m} \end{cases} .$$

Exemplo 7 *Consideremos o trinômio $P(z) = 7,5z^{17} - 8z^5 + 0,5$, onde $a = 8$, $b = 7,5$, $n = 17$ e $m = 5$. Note que $\frac{8}{7,5} = 1,0667$ e $\frac{17}{5} = 3,4$; logo, $\frac{a}{b} < \frac{n}{m}$ e, portanto, pelo Teorema 12, segue que o trinômio $P(z)$ possui 5 zeros dentro do círculo unitário, conforme podemos observar na Figura 2.7.*

Através do software Mathematica obtemos os zeros de $P(z)$, representados na Tabela 2.1.

Zeros de $P(z)$		
$z_1 = -1,0102$	$z_7 = -0,4646 + 0,3377i$	$z_{13} = 0,5055 + 0,8663i$
$z_2 = -0,8682 - 0,4979i$	$z_8 = -0,0051 - 1,0056i$	$z_{14} = 0,5745$
$z_3 = -0,8682 + 0,4979i$	$z_9 = -0,0051 + 1,0056i$	$z_{15} = 0,8732 - 0,5069i$
$z_4 = -0,5004 - 0,8751i$	$z_{10} = 0,1774 - 0,5462i$	$z_{16} = 0,8732 + 0,5069i$
$z_5 = -0,5004 + 0,8751i$	$z_{11} = 0,1774 + 0,5462i$	$z_{17} = 1$
$z_6 = -0,4646 - 0,3377i$	$z_{12} = 0,5055 - 0,8663i$	

Tabela 2.1: Zeros de $P(z) = 7,5z^{17} - 8z^5 + 0,5$.

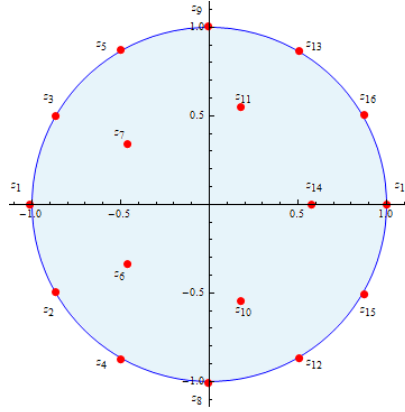


Figura 2.7: Localização dos zeros do trinômio $P(z) = 7,5z^{17} - 8z^5 + 0,5$.

2.3 Polinômios gerados por uma relação de recorrência de três termos

Consideremos a sequência de polinômios $\{Q_m\}$ obtida a partir da relação de recorrência de três termos

$$Q_{m+1}(z) = (z + \beta_{m+1})Q_m(z) - \alpha_{m+1}zQ_{m-1}(z), \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

com $Q_0(z) = 1$ e $Q_1(z) = z + \beta_1$, onde $\alpha_m, \beta_m \in \mathbb{C}$ são tais que $\alpha_m \neq 0$ para $m = 2, 3, \dots$ e $\beta_m \neq 0$ para $m = 1, 2, 3, \dots$. Tal relação de recorrência foi objeto de estudo de alguns autores, entre eles [7] e [18]. Baseado na referência [18], apresentaremos aqui alguns resultados que serão utilizados no Capítulo 4.

Da relação de recorrência (2.4), tem-se

$$Q_0(0) = 1, \quad Q_1(0) = \beta_1, \quad Q_2(0) = \beta_1\beta_2, \quad \dots, \quad Q_m(0) = \beta_1\beta_2 \dots \beta_m \neq 0.$$

Além disso, a relação (2.4) pode ser escrita como

$$\alpha_{m+1}z = (z + \beta_{m+1})\frac{Q_m(z)}{Q_{m-1}(z)} - \frac{Q_{m+1}(z)}{Q_{m-1}(z)} \quad m \geq 2. \quad (2.5)$$

Lema 1 Para qualquer $m \geq 1$, os polinômios consecutivos Q_m e Q_{m+1} não têm zeros em comum.

Demonstração. Se $w \in \mathbb{C}$ é tal que $Q_1(w) = Q_2(w) = 0$, então $\alpha_2w = 0$, mas como $\alpha_2 \neq 0$ segue que $w = 0$. Mas $Q_m(0) = \beta_1\beta_2 \dots \beta_m \neq 0$ para $m \geq 1$, o que é uma contradição. Logo, Q_1 e Q_2 não têm zeros em comum.

Agora, seja $m \geq 2$ e suponha que Q_{m-1} e Q_m não tem zeros em comum, ou seja, se $Q_m(w) = 0$ então $Q_{m-1}(w) \neq 0$. De (2.5) segue que

$$Q_{m+1}(w) = -\alpha_{m+1}wQ_{m-1}(w) \neq 0.$$

Isto significa que Q_m e Q_{m+1} não têm zeros em comum. Portanto, por indução, o resultado segue. ■

De (2.4) pode-se verificar facilmente que para qualquer $m \geq 1$,

$$Q_m(z) = \begin{vmatrix} z + \beta_1 & -\alpha_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -z & z + \beta_2 & -\alpha_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -z & z + \beta_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z + \beta_{m-1} & -\alpha_m \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -z & z + \beta_m \end{vmatrix}. \quad (2.6)$$

Teorema 13 *Os zeros de Q_n são os autovalores da matriz de Hessenberg inferior*

$$H_n = \begin{bmatrix} \eta_1 & \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \eta_1 & \eta_2 & \alpha_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \cdots & \alpha_{n-1} & 0 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \cdots & \eta_{n-1} & \alpha_n \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \cdots & \eta_{n-1} & \eta_n \end{bmatrix},$$

onde $\eta_m = \alpha_m - \beta_m$, $m = 1, 2, \dots, n$, e $\alpha_1 = 0$.

Demonstração. De (2.6) segue que $Q_n(z) = \det(zA_n - B_n)$, onde A_n e B_n são matrizes de ordem n dadas respectivamente por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\beta_1 & \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\beta_2 & \alpha_3 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\beta_n \end{bmatrix}.$$

Note que $\det(A_n) \neq 0$, ou seja, A_n é não singular. Assim,

$$Q_n(z) = \det(A_n) \det(zI - A_n^{-1}B_n).$$

Desde que $\det(A_n) = 1$ e

$$A_n^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

vemos que $Q_n(z)$ é o polinômio característico da matriz de Hessenberg inferior $H_n = A_n^{-1}B_n$. Isto completa a demonstração do teorema. ■

Agora definiremos uma região $W(\lambda_1, \lambda_2, \tau)$, onde $\lambda_2 \geq \lambda_1$ e $\tau > 0$, por

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \tau) = \left\{ z = x + iy \in \mathbb{C} : |y| \leq \tau, \lambda_1 - \sqrt{\tau^2 - y^2} \leq x \leq \lambda_2 + \sqrt{\tau^2 - y^2} \right\}. \quad (2.7)$$

Teorema 14 *Para qualquer $n \geq 2$, sejam $\alpha_n^M = \max\{|\alpha_k|, k = 2, 3, \dots, n\}$ e $\eta_n^M = \max\{|\eta_k|, k = 2, 3, \dots, n\}$. Consideremos*

$$d_1 = \frac{\sqrt{\alpha_n^M}}{\sqrt{\alpha_n^M} + \sqrt{\eta_n^M}}, \quad d_2 = \frac{\alpha_n^M}{\alpha_n^M + |\eta_1| - \eta_n^M} \quad e \quad d_3 = \frac{2\alpha_n^M}{\sqrt{(\alpha_n^M)^2 + 4\alpha_n^M(|\eta_1| - \eta_n^M) + \alpha_n^M}}.$$

Então os zeros de Q_k , $1 \leq k \leq n$, estão localizados em $|z| \leq \bar{\rho}_n$, onde

$$\bar{\rho}_n = \begin{cases} \frac{\alpha_n^M + |\eta_1| - \eta_n^M}{|\eta_1| - \eta_n^M} |\eta_1|, & \text{se } 0 < d_2 < d_1, \\ (\sqrt{\alpha_n^M} + \sqrt{\eta_n^M})^2, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Se η_k , para $k = 1, 2, \dots, n$, são todos reais, então os zeros de Q_k , $1 \leq k \leq n$, estão na região $W(\eta_{n,1}, \eta_{n,2}, \rho_n)$, onde

$$\eta_{n,1} = \min\{\eta_k, k = 1, 2, \dots, n\}, \quad \eta_{n,2} = \max\{\eta_k, k = 1, 2, \dots, n\}$$

e

$$\rho_n = \begin{cases} \frac{\sqrt{(\alpha_n^M)^2 + 4\alpha_n^M(|\eta_1| - \eta_n^M) + \alpha_n^M}}{2(|\eta_1| - \eta_n^M)} |\eta_1|, & \text{se } 0 < d_3 < d_1, \\ (\sqrt{\alpha_n^M} + \sqrt{\eta_n^M})^2 - \eta_n^M, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [18].

Exemplo 8 Seja $Q_m(z) = 1 + \lambda(z + z^2 + \dots + z^{m-1}) + z^m$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $m \geq 1$, o polinômio gerado pela relação de recorrência de três termos

$$Q_m(z) = (z + 1)Q_{m-1}(z) - zQ_{m-2}(z), \quad m \geq 2$$

com $Q_0(z) = 1$ e $Q_1(z) = 1 + z$. Considerando $\lambda = 1$ e $1 \leq m \leq 9$, segue do Teorema 14 que os zeros de $Q_m(z)$, $z_1 = -1$, $z_2 = -0,809 - 0,588i$, $z_3 = -0,809 + 0,588i$, $z_4 = -0,309 - 0,951i$, $z_5 = -0,309 + 0,951i$, $z_6 = 0,309 - 0,951i$, $z_7 = 0,309 + 0,951i$, $z_8 = 0,809 - 0,588i$ e $z_9 = 0,809 + 0,588i$ estão localizados na região

$$W(-1, 0, \rho_m) = \{z \in \mathbb{C} : |y| \leq \rho_m, -1 - \sqrt{\rho_m^2 - y^2} \leq x \leq \sqrt{\rho_m^2 - y^2}\},$$

conforme pode ser observado na Figura 2.8.

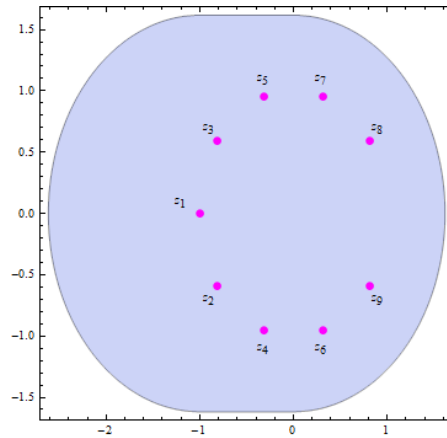


Figura 2.8: Localização dos zeros do polinômio $Q_9(z) = 1 + z + z^2 + \dots + z^8 + z^9$.

2.4 Funções financeiras que envolvem juros compostos

Atualmente a Matemática Financeira representa uma importante ferramenta utilizada tanto no dia-a-dia de um simples cidadão, quanto no cotidiano de uma empresa.

Um dos principais conceitos relacionados à Matemática Financeira é a taxa de juros, percentual cobrado sobre a remuneração do capital, a qual representa uma variável comum a todos os seres humanos, essencial tanto nas decisões de consumo de cada cidadão, quanto na escolha por investimentos produtivos. Assim sendo, é de fundamental importância conhecer a taxa de juros de uma determinada operação financeira.

Como descrito no Capítulo 1, a determinação da taxa de juros de uma série uniforme de pagamentos representa uma valiosa aplicação do presente trabalho. Em virtude desta aplicação, baseando-se nos textos de Branco [3], Puccini [14], Silva [18] e Sobrinho [19], esta seção apresentará toda teoria necessária sobre funções financeiras relacionadas aos juros compostos.

Dentre os vários conceitos existentes na Matemática Financeira, entende-se por capital qualquer valor expresso em moeda e disponível para consumo ou investimento. O capital também é conhecido como principal, valor atual, valor presente ou valor aplicado.

A remuneração do capital empregado em alguma atividade produtiva é chamada de juros. Os juros podem ser capitalizados segundo dois regimes: simples ou compostos.

Quando o regime é de juros simples, apenas o capital inicial rende juros. Neste regime de capitalização a taxa de juros varia linearmente em função do tempo.

No regime de juros compostos, os juros de cada período são somados ao capital para o cálculo de novos juros nos períodos seguintes. Os juros são capitalizados e, conseqüentemente, rendem juros. Desta forma, os juros de cada período são calculados sobre o saldo existente no início do respectivo período, e não apenas sobre o capital inicial aplicado.

Considere um valor presente PV aplicado durante n períodos a uma taxa de juros I por período. No final do primeiro período, os juros J e o montante (valor futuro) FV resultantes são

$$\begin{aligned} J_1 &= PV \times I \\ FV_1 &= PV + J_1 = PV + PV \times I = PV(1 + I). \end{aligned}$$

No final do segundo período, os juros são calculados sobre o valor acumulado no final do primeiro período (FV_1). Os juros e o montante resultantes no final do segundo período são:

$$\begin{aligned} J_2 &= FV_1 \times I = PV(1 + I) \times I \\ FV_2 &= FV_1 + J_2 = PV(1 + I) + PV(1 + I) \times I = PV(1 + I)^2. \end{aligned}$$

Generalizando para n períodos, podemos calcular diretamente o valor futuro FV resultante da aplicação do valor presente PV durante n períodos a uma taxa de juros compostos I , por

$$FV = PV(1 + I)^n. \quad (2.8)$$

A equação (2.8) expressa o valor futuro ao fim de n períodos como uma função exponencial do valor presente inicial aplicado, onde o fator $(1 + I)^n$ é chamado fator de capitalização ou fator de valor futuro.

O cálculo do valor presente de um montante é simplesmente o inverso do cálculo do montante:

$$PV = FV \frac{1}{(1 + I)^n}. \quad (2.9)$$

2.4.1 Séries uniformes de pagamentos

Presentes em muitas situações do nosso cotidiano como, por exemplo, planos de poupança, financiamentos, aposentadoria, pensões, recebimento de salários mensais, entre outros, as séries uniformes de pagamentos são definidas como sucessões de prestações, ou recebimentos, de mesmo valor, divididos regularmente num período de tempo. Tais séries podem ser postecipadas, antecipadas ou diferidas. A seguir será apresentado um estudo detalhado sobre tais séries uniformes de pagamentos.

2.4.1.1 Séries uniformes de pagamentos postecipadas

Conhecida como um sistema de pagamento ou recebimento sem entrada, as séries uniformes de pagamentos postecipadas são aquelas em que os pagamentos ocorrem no fim de cada período e não na origem. Por exemplo, pagamentos de fatura de cartão de crédito.

Quando a série é uniforme e postecipada, o valor presente corresponde à soma dos valores atuais dos termos da série. Então,

$$\begin{aligned} PV &= \frac{PMT}{(1+I)} + \frac{PMT}{(1+I)^2} + \frac{PMT}{(1+I)^3} + \dots + \frac{PMT}{(1+I)^n} \\ &= PMT [(1+I)^{-1} + (1+I)^{-2} + (1+I)^{-3} + \dots + (1+I)^{-n}]. \end{aligned}$$

Note que essa expressão se assemelha com uma progressão geométrica. Assim, utilizando a fórmula conhecida da soma dos termos de uma progressão geométrica, é possível desenvolver a seguinte expressão para o valor presente de uma série uniforme com n termos postecipados

$$PV = PMT \left[\frac{a_1 - a_n \times q}{1 - q} \right],$$

onde a_1 é o primeiro termo da série, equivalente a $(1+I)^{-1}$, a_n é o n -ésimo termo de série, igual a $(1+I)^{-n}$ e q é a razão da série, equivalente a $(1+I)^{-1}$. Assim,

$$PV = PMT \left[\frac{(1+I)^{-1} - (1+I)^{-n} \times (1+I)^{-1}}{1 - (1+I)^{-1}} \right].$$

Logo,

$$PV = PMT \left[\frac{(1+I)^n - 1}{(1+I)^n \times I} \right]. \quad (2.10)$$

Agora, isolando PMT na equação (2.10) e considerando que sejam informados a taxa de juros (I), o prazo (n) e o valor presente (PV) de uma série de pagamentos postecipada, é possível calcular o valor dos pagamentos (PMT) através da seguinte expressão

$$PMT = PV \left[\frac{(1+I)^n \times I}{(1+I)^n - 1} \right]. \quad (2.11)$$

Podemos obter uma expressão para o cálculo do valor da prestação PMT , substituindo a equação $PV = \frac{FV}{(1+I)^n}$ em (2.11), isto é,

$$PMT = \frac{FV}{(1+I)^n} \left[\frac{(1+I)^n I}{(1+I)^n - 1} \right].$$

Logo,

$$PMT = FV \left[\frac{I}{(1+I)^n - 1} \right]. \quad (2.12)$$

Além disso, da equação (2.10) segue que

$$\frac{PV}{PMT} = \left[\frac{(1+I)^n - 1}{(1+I)^n \times I} \right].$$

Logo,

$$\frac{PV}{PMT} [(1+I)^n \times I] = (1+I)^n - 1.$$

Ou seja,

$$(1+I)^n \left[1 - \left(\frac{PV}{PMT} I \right) \right] = 1.$$

Aplicando o logaritmo neperiano e suas propriedades na equação acima, obtemos

$$n = - \frac{\ln \left[1 - \left(\frac{PV}{PMT} \right) \times I \right]}{\ln(1+I)}. \quad (2.13)$$

Desta forma, considerando que sejam informados a taxa (I), o valor presente (PV) e a prestação (PMT) de uma determinada aplicação financeira, pode ser obtido através da equação (2.13) a quantidade de pagamentos ou prazo (n) de uma série uniforme de pagamentos postecipada.

De acordo com a equação (2.12), o cálculo do valor futuro é simplesmente o inverso do cálculo do valor da prestação:

$$FV = PMT \left[\frac{(1 + I)^n - 1}{I} \right]. \quad (2.14)$$

Por meio do estudo das séries de pagamentos postecipadas é possível observar a existência de fórmulas para a determinação da prestação (PMT), do valor futuro (FV), do valor presente (PV) até mesmo determinar o período (n) de uma aplicação financeira. Mas, se tratando da determinação da taxa de juros nesta série, esta não poderá ser encontrada através de uma fórmula resolutive básica.

2.4.1.2 Séries uniformes de pagamentos antecipadas

Nas séries uniformes de pagamentos antecipadas, os pagamentos são feitos no início de cada período respectivo, ou seja, o primeiro pagamento ocorre na data focal 0 (zero). Por exemplo, financiamentos com pagamentos à vista. Este tipo de sistema de pagamento é também conhecido como sistema de pagamento com entrada.

Assim, sendo informados a taxa (I), o prazo (n) e o valor da prestação (PMT) é possível determinar o valor presente (PV) de uma série de pagamento antecipada através da seguinte expressão

$$PV = PMT \left[\frac{(1 + I)^n - 1}{(1 + I)^{n-1} \times I} \right]. \quad (2.15)$$

Note que a equação (2.15) se difere da equação (2.10) em série de pagamento postecipada, apenas pelos termos $(1 + I)^n$ e $(1 + I)^{n-1}$, o que faz sentido, pois em séries de pagamentos postecipadas os pagamentos ocorrem sempre ao fim de cada período e, por outro lado, em séries de pagamentos antecipadas os pagamentos ocorrem sempre no início de cada período.

Isolando a prestação (PMT), na equação (2.15), temos uma expressão analítica para a determinação do valor da prestação:

$$PMT = PV \left[\frac{(1 + I)^{n-1} \times I}{(1 + I)^n - 1} \right]. \quad (2.16)$$

Se forem informados a taxa (I), a prestação (PMT) e o valor presente (PV) é possível calcular o período (n) através da seguinte expressão:

$$n = - \frac{\ln \left[1 - \frac{PVI}{PMT(1 + I)} \right]}{\ln(1 + I)}.$$

O valor futuro de uma série de pagamentos antecipada pode ser determinado pela equação (2.17):

$$FV = PMT \left[\frac{(1 + I)^n - 1}{I} \right] (1 + I). \quad (2.17)$$

Note que, se isolarmos PMT na equação (2.17) obtemos outra expressão para a determinação da prestação, dada por

$$PMT = \frac{FVI}{[(1 + I)^n - 1](1 + I)}.$$

Assim como em séries de pagamentos postecipadas, a determinação da taxa I , em séries uniformes de pagamentos antecipadas, não é encontrada através de uma fórmula resolutive básica, pois, o cálculo requer a resolução de um polinômio de grau n .

2.4.1.3 Série uniforme de pagamentos diferida

As séries de pagamentos diferidas são aquelas em que os períodos ou intervalos de tempo entre os pagamentos (PMT) ocorrem após um determinado período de carência (c).

Sendo informados a taxa de juros (I), a prestação (PMT), o prazo (n) e o período de carência (c), será possível calcular o valor presente (PV) em uma série uniforme de pagamento diferida através da seguinte fórmula:

$$PV = \frac{PMT \left[\frac{1 - (1 + I)^{-n}}{I} \right]}{(1 + I)^{c-1}}. \quad (2.18)$$

Isolando PMT na equação anterior obtemos a seguinte expressão para o cálculo dos pagamentos desta série.

$$PMT = \left[\frac{PV(1 + I)^{c-1}I}{1 - (1 + I)^{-n}} \right].$$

Além disso, ao isolar o prazo n obtemos uma fórmula explícita para a determinação do período desta série, dada pela expressão:

$$n = - \frac{\ln \left[1 - \frac{PVI(1 + I)^{c-1}}{PMT} \right]}{\ln(1 + I)}.$$

Como dito, a carência é o prazo inicial dado até o momento do primeiro pagamento. Este prazo é fundamental para o cálculo do valor base de um financiamento em uma série uniforme de pagamento diferida. Assim, da equação (2.18) temos que o período de carência é dado por

$$c = 1 + \frac{\ln \left(\frac{PMT}{PV} \left[\frac{1 - (1 + I)^{-n}}{I} \right] \right)}{\ln(1 + I)}.$$

Agora, multiplicando ambos os lados da equação (2.18) pelo fator $(1 + I)^n$, obtemos uma expressão para o cálculo do valor futuro dada por

$$FV = \frac{PMT}{(1 + I)^{c-1}} \left[\frac{(1 + I)^n - 1}{I} \right].$$

Raízes de Equações Trinomiais

Segundo [20], durante o final do século XIX e início do século XX, grandes matemáticos investigaram questões sobre as raízes de equações trinomiais como, por exemplo, em 1786 o matemático suéco Erland Samuel Bring, usando a transformação Tschirnhaus [1], reduziu a equação geral de quinto grau para uma equação trinomial. Tal resultado motivou vários matemáticos a começarem a busca pelas soluções de equações trinomiais. Porém, houve um fracasso nas tentativas de resolução de equações trinomiais por meio algébrico, o que proporcionou o desenvolvimento de alguns métodos de aproximação para a solução.

A aproximação das raízes foi apenas uma nova direção no estudo de equações trinomiais. De acordo com [20], Nekrasov, em 1887 determinou setores do plano complexo onde estão localizadas as raízes destas equações; Bohl, em 1914, criou um método para calcular o número de raízes de equações trinomiais num dado círculo no plano complexo; Herglotz, em 1922, estudou a conexão entre superfícies de Riemann e equações trinomiais; Egerváry, em 1930, estudou a distribuição das raízes destas equações de acordo com seus argumentos e módulos. Tais resultados motivam a dedicação de novos matemáticos a continuarem a investigação sobre as raízes destas equações como, por exemplo, Melman [9], que em 2012, refinou alguns resultados sobre a distribuição das raízes destas equações de acordo com seus argumentos e módulos.

Neste sentido, o presente capítulo busca apresentar alguns destes resultados referentes a distribuição das raízes de equações trinomiais de acordo com seus argumentos e módulos.

3.1 Distribuição das raízes de equações trinomiais de acordo com seus argumentos e módulos

Nesta seção estudaremos resultados sobre a determinação de setores do plano complexo onde estão localizadas as raízes das equações trinomiais. De acordo com [20], Egerváry determinou tais setores considerando que as raízes de equações trinomiais podem ser interpretadas como os pontos de equilíbrio de massas unitárias que estão localizadas nos vértices de dois polígonos regulares concêntricos centrados na origem do plano complexo.

Assim, considerando a equação binomial $z^n + \mu = 0$, tem-se que as raízes de tal equação estão localizadas nos vértices de um polígono regular centrado na origem do plano complexo, e estas são dadas por

$$\mu_j = |\mu|^{1/n} e^{\frac{\arg \mu + (2j+1)\pi}{n}}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Adicionando massas unitárias a μ_i , $1 \leq i \leq n$, de tal forma que sua força seja inversamente proporcional à sua distância, obtemos que o resultado das forças em z é

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\bar{z} - \bar{\mu}_i} = \frac{n\bar{z}^{n-1}}{\bar{z}^n + \bar{\mu}}.$$

De forma análoga, para a equação $z^{n+m} + w = 0$, esta força é

$$\sum_{i=1}^{n+m} \frac{1}{\bar{z} - \bar{w}_i} = \frac{(n+m)\bar{z}^{n+m-1}}{\bar{z}^{n+m} + \bar{w}}.$$

Deste modo, as posições de equilíbrio do campo de força das massas unitárias localizadas nos vértices de dois polígonos regulares concêntricos, centrados na origem, correspondem às raízes da equação

$$\frac{n\bar{z}^{n-1}}{\bar{z}^n + \bar{\mu}} + \frac{(n+m)\bar{z}^{n+m-1}}{\bar{z}^{n+m} + \bar{w}} = 0.$$

O seguinte teorema estabelece uma relação entre as raízes e os pontos de equilíbrio do campo de força para a equação trinomial.

Teorema 15 (Egerváry 1930) *A equação trinomial $Az^{n+m} + Bz^m + C = 0$, com $A = |A|e^{i\alpha}$, $B = |B|e^{i\beta}$ e $C = |C|e^{i\gamma}$, onde α, β e γ são os argumentos de A, B e C , respectivamente, determina dois polígonos regulares concêntricos P_{n+m} e P_n no plano complexo. Os vértices de P_n são*

$$\left(\frac{2n+m}{n+m} \left| \frac{B}{A} \right| \right)^{\frac{1}{n}} e^{\frac{\beta - \alpha + (2\mu+1)\pi}{n}i} \quad \mu = 1, \dots, n.$$

Os vértices de P_{n+m} são

$$\left(\frac{2n+m}{n} \left| \frac{C}{A} \right| \right)^{\frac{1}{n+m}} e^{\frac{\gamma - \alpha + (2\lambda+1)\pi}{n+m}i} \quad \lambda = 1, \dots, n+m.$$

Os pontos de equilíbrio do campo de força das massas unitárias nos vértices de P_n e P_{n+m} são as raízes da dada equação trinomial.

Agora, sejam $2(n+m)$ segmentos de retas, partindo da origem, determinados pelos argumentos:

$$\begin{aligned} \theta_i^{(n+m)} &= \frac{\gamma - \alpha + (2i+1)\pi}{n+m} \pmod{2\pi}, \\ \theta_k^{(m)} &= \frac{\beta - \alpha + (2k+1)\pi}{m} \pmod{2\pi}, \\ \theta_j^{(n)} &= \frac{\gamma - \beta + (2j+1)\pi}{n} \pmod{2\pi}, \end{aligned}$$

onde $1 \leq i \leq n+m$, $1 \leq k \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Conforme [20], tais argumentos determinam exatamente $n+m$ setores no plano complexo tais que

$$\left| \theta_i^{(n+m)} - \theta_k^{(m)} \right| \leq \frac{\pi}{n+m} \quad \text{e} \quad \left| \theta_i^{(n+m)} - \theta_j^{(n)} \right| \leq \frac{\pi}{n+m},$$

onde cada setor contém exatamente uma raiz da equação trinomial.

Para ilustrar tal resultado, consideremos o seguinte exemplo:

Exemplo 9 Considerando o trinômio $P(z) = 6z^{12} - 7z^7 + 14$, onde $A = 6$, $B = -7$ e $C = 14$ e calculando os argumentos dos coeficientes A, B e C , temos $\alpha = 0, \beta = \pi$ e $\gamma = 0$, respectivamente. Assim, usando as fórmulas para o cálculo dos argumentos descritos anteriormente, obtemos os seguintes argumentos, representados na Tabela 3.1.

$\theta_j^{(5)}$ (rad)	(grau)	$\theta_k^{(7)}$ (rad)	(grau)	$\theta_i^{(12)}$ (rad)	(grau)	Zeros de $P(z)$
1,2566	72	1,7952	102,86	0,7854	45	$z_1 = -0,9935 - 0,3359i$
2,5133	144	2,6928	154,29	1,309	75	$z_2 = -0,9935 + 0,3359i$
3,7699	216	3,5904	205,72	1,8326	105	$z_3 = -0,8378 - 0,7551i$
5,0265	288	4,488	257,14	2,3562	135	$z_4 = -0,8378 + 0,7551i$
6,2832	360,01	5,3856	308,57	2,8798	165	$z_5 = -0,2469 - 0,9788i$
--	--	6,2832	360,01	3,4034	195	$z_6 = -0,2469 + 0,9788i$
--	--	7,1809	411,43	3,927	225	$z_7 = 0,3182 - 1,1046i$
--	--	--	--	4,4506	255	$z_8 = 0,3182 + 1,1047i$
--	--	--	--	4,9741	285	$z_9 = 0,6912 - 0,7528i$
--	--	--	--	5,4978	315	$z_{10} = 0,6912 + 0,7528i$
--	--	--	--	6,0214	345	$z_{11} = 1,0688 - 0,2078i$
--	--	--	--	6,545	375	$z_{12} = 1,0688 + 0,2078i$

Tabela 3.1: Argumentos dos coeficientes de $P(z)$.

Desta forma, determinamos setores no plano complexo onde cada um contém exatamente um zero do trinômio $P(z)$, como pode ser visto na Figura 3.1.

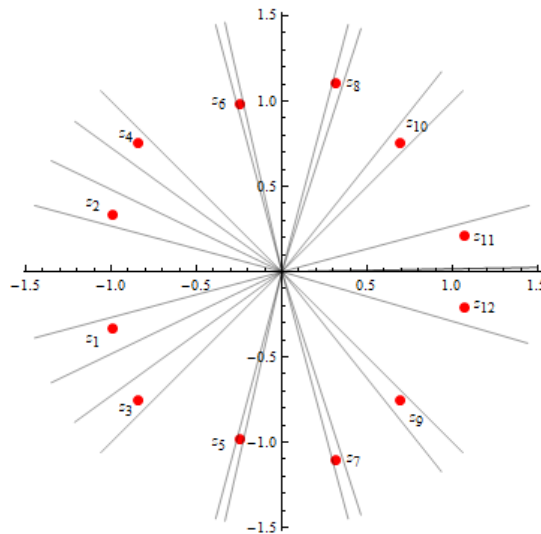


Figura 3.1: Distribuição dos zeros do trinômio $P(z)$ de acordo com seus argumentos.

Recentemente, o problema referente à localização dos zeros de um trinômio geral foi reexaminado por Melman [9], o qual em seu trabalho intitulado *Geometry of Trinomials* obteve novas regiões de inclusão dos zeros no plano complexo que complementam os resultados aqui já apresentados.

Em virtude da importância deste tema para a realização de nosso objetivo principal, prosseguiremos nesta seção com o estudo dos resultados obtidos por Melman [9].

Seja $P(w) = a_n w^n + a_k w^k + a_0$ um trinômio, onde $w, a_0, a_k, a_n \in \mathbb{C}$, $a_0, a_k, a_n \neq 0$, e n, k são inteiros positivos tais que $n \geq 3$ e $1 \leq k \leq n - 1$.

Simplificando o trinômio $P(w)$ dividindo $P(w)$ por $-a_0$ e fixando $w = (-a_0/a_n)^{1/n}z$, transformamos $P(w)$ em $Q(z)$, onde

$$Q(z) = z^n - az^k - 1,$$

com $a = \left(\frac{a_k}{a_0}\right) \left(\frac{-a_0}{a_n}\right)^{(k/n)}$.

Assim, nosso objetivo será estudar as regiões do plano complexo onde os zeros de $Q(z)$ estão localizados, de acordo com as condições $|a| > \sigma(n; k)$ ou $|a| < \sigma(n; k)$, onde $\sigma(n; k)$ será definido como um limite de separabilidade dado por $\sigma(n; k) = \frac{n}{n-k} \left(\frac{n-k}{k}\right)^{k/n}$.

Definição 1 *As seguintes funções estão definidas para um dado número complexo a , inteiros positivos n e k com $n \geq 3$, $1 \leq k \leq n-1$, $\text{mdc}(k, n) = 1$ e $x \geq 0$:*

$$\begin{aligned}\phi_k(x) &= x^n + |a|x^k - 1, \\ \chi_k(x) &= x^n - |a|x^k - 1, \\ \psi_k(x) &= x^n - |a|x^k + 1.\end{aligned}$$

Na seguinte definição descrevemos o limite de separabilidade $\sigma(n, k)$, o qual é usado para determinar o número de zeros positivos de ψ_k , que por sua vez determina se podemos separar os zeros de Q em dois grupos de k e $n-k$ zeros.

Definição 2 *O limite de separabilidade $\sigma(n, k)$ é definido para inteiros positivos k e n (com $n \geq 3$, $1 \leq k \leq n-1$, e $\text{mdc}(k, n) = 1$) como sendo*

$$\sigma(k, n) = \frac{n}{n-k} \left(\frac{n-k}{k}\right)^{k/n}.$$

Observe que

$$\sigma(n, n-k) = \frac{n}{k} \left(\frac{k}{n-k}\right)^{(n-k)/n} = \frac{n}{k} \left(\frac{k}{n-k}\right) \left(\frac{k}{n-k}\right)^{-k/n} = \sigma(n, k),$$

o que implica que $\sigma(n, k)$ é uma função simétrica de k para n fixo. Além disso, $1 < \sigma(n, k) < 2$ e, dado n , $\sigma(n, k)$ atinge o seu valor máximo em $k = \lceil n/2 \rceil - 1$ ou $\lfloor n/2 \rfloor + 1$ e seu valor mínimo em $k = 1$ ou $n-1$, onde $\lceil n/2 \rceil = \max\{m \in \mathbb{Z}; m \leq n/2\}$ e $\lfloor n/2 \rfloor = \min\{m \in \mathbb{Z}; m \geq n/2\}$.

O lema a seguir, cuja demonstração encontra-se em [9], relata algumas propriedades importantes sobre os zeros das funções ϕ_k , χ_k e ψ_k .

Lema 2 *As seguintes propriedades se mantêm para as funções ϕ_k , χ_k e ψ_k :*

1. ϕ_k tem um único zero positivo t , e ele está no intervalo $(0, 1)$; χ_k tem um único zero positivo s , que está no intervalo $(1, +\infty)$; e os zeros positivos de ϕ_k e χ_k são uns recíprocos do outro, ou seja, se ξ é zero de ϕ_k , então $1/\xi$ é zero de χ_k .
2. A função ψ_k satisfaz $\psi_k(0) > 0$ e $\psi_k(|a|) > 0$. ψ_k alcança seu único mínimo no intervalo $(0, +\infty)$ em $\mu^* = (k|a|/n)^{1/(n-k)}$, e $\psi_k(\mu^*) < 0$ se e somente se $|a| > \sigma(n, k)$.
3. Quando $|a| > \sigma(n, k)$, então ψ_k e ψ_{n-k} têm dois zeros positivos distintos. Os zeros de ψ_{n-k} são os recíprocos dos zeros de ψ_k . Quando $|a| < \sigma(n, k)$, então ψ_k e ψ_{n-k} não têm zeros positivos.

Os próximos resultados, cujas demonstrações encontram-se em [9], estabelecem limitações para os zeros positivos de ϕ_k , χ_k e ψ_k .

Lema 3 *Os zeros positivos r_1 e r_2 de ψ_k , com $r_1 < r_2$, satisfazem:*

1. Se $\sigma(n, k) < |a| \leq 2$ e $k > \frac{n}{2}$ então $1 \leq r_1 < r_2 < |a|$.
2. Se $\sigma(n, k) < |a| \leq 2$ e $k < \frac{n}{2}$ então $0 < r_1 < r_2 \leq 1 < |a|$.
3. Se $|a| > 2$, os dois zeros positivos r_1 e r_2 de ψ_k satisfazem

$$0 < r_1 < 1 < r_2 < |a|.$$

Lema 4 *Os zeros positivos t e s das funções ϕ_k e χ_k , respectivamente, e os zeros positivos r_1 e r_2 de ψ_k (quando eles existem), com $r_1 < r_2$, satisfazem:*

$$(1 + |a|)^{-1/k} < t < r_1 < \left(\frac{k}{n}|a|\right)^{1/(n-k)} < r_2 < s < (1 + |a|)^{1/(n-k)}.$$

Quando $|a| > 2$, então

$$r_1 < (|a| - 1)^{-1/k} < 1 < (|a| - 1)^{1/(n-k)} < r_2.$$

Agora definiremos conjuntos da forma $L_m(c; \rho) = \{z \in \mathbb{C} : |z^m - c| < \rho\}$.

Note que quando $|c| < \rho$, a fronteira de $L_m(c; \rho)$ é uma curva simples fechada, e quando $|c| > \rho$, é uma união de m curvas simples fechadas disjuntas.

O seguinte lema, cuja demonstração encontra-se em [9], mostra como $L_m(c; \rho)$ pode ser coberto por um disco centrado na origem ou, quando $|c| > \rho$, como m curvas simples fechadas disjuntas, podem ser circunscritas por setores anelares.

Lema 5 *Seja m um inteiro positivo, $c \in \mathbb{C}$ e $\rho > 0$. Então, $D(0; (|c| + \rho)^{1/m})$ é o menor disco centrado na origem que cobre $L_m(c; \rho)$. Além disso, quando $|c| > \rho > 0$, $\omega = \arg(c)$ e $\theta = \arcsen(\rho/|c|)$, então $L_m(c; \rho)$ é circunscrito pela seguinte união de setores anelares disjuntos:*

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : 0 < (|c| - \rho)^{1/m} < |z| < (|c| + \rho)^{1/m}, \right. \\ \left. \frac{\omega - \theta}{m} + \frac{2\pi j}{m} < \arg(z) < \frac{\omega + \theta}{m} + \frac{2\pi j}{m} \quad (j = 0, 1, \dots, m-1) \right\}.$$

O teorema a seguir estabelece limitantes inferior e superior para os módulos dos zeros do trinômio $Q(z)$.

Teorema 16 *Seja $Q(z) = z^n - az^k - 1$, com inteiros $n \geq 3$ e $1 \leq k \leq n-1$ com $\text{mdc}(n, k) = 1$, e $a \in \mathbb{C}$. Além disso, sejam s e t , com $0 < t < 1 < s$ as raízes positivas de $\chi_k(x) = x^n - |a|x^k - 1 = 0$ e $\phi_k(x) = x^n + |a|x^k - 1 = 0$, respectivamente. Então, os zeros de Q estão contidos no conjunto*

$$\bar{D}(0; s) \cap D^c(0; t),$$

isto é, tais zeros encontram-se no anel $t \leq |z| \leq s$.

O seguinte teorema determina n setores anelares disjuntos, cada um contendo apenas um zero de $Q(z)$, considerando $|a| > \sigma(n; k)$.

Teorema 17 *Sejam os zeros $\{z_i\}_{i=1}^n$ de $Q(z) = z^n - az^k - 1$ (com inteiros $n \geq 3$ e $1 \leq k \leq n-1$, $\text{mdc}(k, n) = 1$ e $|a| > \sigma(n, k)$) tal que $|z_1| \leq \dots \leq |z_n|$. Sejam δ_1 e δ_2 tais que $r_1 < \delta_1 \leq \delta_2 < r_2$, onde r_1 e r_2 são os zeros positivos de $x^n - |a|x^k + 1$. Além disso, seja $\omega = \arg(a)$, $\theta_1 = \arcsen(\delta_1^{n-k}/|a|)$ e $\theta_2 = \arcsen(\delta_2^{-k}/|a|)$. Então, os primeiros k zeros $\{z_i\}_{i=1}^k$ estão contidos no conjunto*

$$\Omega_1(Q) = \left\{ z \in \mathbb{C} : (|a| + \delta_1^{n-k})^{-1/k} < |z| < (|a| - \delta_1^{n-k})^{-1/k}, \right. \\ \left. \frac{2j\pi - \omega - \pi}{k} - \frac{\theta_1}{k} < \arg(z) < \frac{2j\pi - \omega - \pi}{k} + \frac{\theta_1}{k}, (j = 0, \dots, k-1) \right\},$$

e os $n-k$ zeros restantes $\{z_i\}_{i=k+1}^n$ estão contidos no conjunto

$$\Omega_2(Q) = \left\{ z \in \mathbb{C} : (|a| - \delta_2^{-k})^{1/(n-k)} < |z| < (|a| + \delta_2^{-k})^{1/(n-k)}, \right. \\ \left. \frac{2j\pi + \omega}{n-k} - \frac{\theta_2}{n-k} < \arg(z) < \frac{2j\pi + \omega}{n-k} + \frac{\theta_2}{n-k}, (j = 0, \dots, n-k-1) \right\}.$$

Além disso,

$$(|a| - \delta_1^{n-k})^{-1/k} < \delta_1 \leq \delta_2 < (|a| - \delta_2^{-k})^{1/(n-k)}$$

e todos os setores anelares em $\Omega_1(Q)$ e $\Omega_2(Q)$ são disjuntos e cada um contém exatamente um zero de Q .

Demonstração. Se conseguirmos que para algum círculo $|z| = \rho$ valha $|z^n - 1| < |az^k|$, então, pelo Teorema de Rouché, k dos zeros de Q estão contidos no disco $D(c; \rho)$. Como

$$|z|^n + 1 < |a||z|^k \quad \text{ou} \quad |z|^n - |a||z|^k + 1 < 0,$$

podemos escolher qualquer ρ para o qual $\psi_k(\rho) < 0$ ou $r_1 < \rho < r_2$.

Uma vez que $r_1 < \delta_1 \leq \delta_2 < r_2$, pelo Teorema de Pellet concluímos que k zeros de Q estão em $D(0; \delta_1)$, enquanto que os $n-k$ zeros restantes encontram-se no complementar de $\bar{D}(0; \delta_2)$.

Note que

$$z^n - az^k - 1 = 0 \implies |z|^k |z^{n-k} - a| = 1 \implies |z^{n-k} - a| = \frac{1}{|z|^k},$$

ou seja, as $(n-k)$ -ésimas potências dos $n-k$ maiores zeros $\{z_i\}_{i=k+1}^n$, todos que satisfazem $|z_i| > \delta_2$, devem estar em $D(a; \delta_2^{-k})$. Além disso,

$$\delta_2^n - |a|\delta_2^k + 1 < 0 \implies \delta_2^n + \delta_2^{-k} < |a|,$$

de modo que $|a| > \delta_2^{-k}$, que por sua vez implica que $D(a; \delta_2^{-k})$ é limitado. Os zeros devem estar em $L_{n-k}(a; \delta_2^{-k})$ que, pelo Lema 5, com $m = n-k$, $c = a$ e $\rho = \delta_2^{-k}$, consiste de $n-k$ curvas simples fechadas disjuntas que estão contidas em $\Omega_2(Q)$, um conjunto constituído por setores anelares disjuntos. Além disso, $\delta_2^n - |a|\delta_2^k + 1 < 0$ implica que $(|a| - \delta_2^{-k})^{1/(n-k)} > \delta_2$. Consequentemente, qualquer $z \in \Omega_2(Q)$ satisfaz $|z| > \delta_2$.

Mostremos agora que cada curva simples fechada de $L_{n-k}(a; \delta_2^{-k})$ contém exatamente um zero de Q . Para isso utilizaremos o Teorema de Rouché. Lembre-se que $L_{n-k}(a; \delta_2^{-k}) \subseteq \Omega_2(Q)$ de modo que $|z| > \delta_2$ para qualquer $z \in L_{n-k}(a; \delta_2^{-k})$, que é composto de $n-k$ curvas simples fechadas disjuntas limitadas pela origem, cada uma contendo uma raiz $(n-k)$ -ésima diferente de a . Para qualquer z na fronteira dessas curvas tem-se

$$|z^{n-k} - a| = \delta_2 \implies |z^n - az^k| = |z|^k \delta_2^{-k} > 1.$$

Pelo Teorema de Rouché segue que os polinômios $z^n - az^k - 1$ e $z^n - az^k$ têm o mesmo número de zeros no interior da curva, e esse número é exatamente um. Existem $n - k$ setores anelares disjuntos contendo uma dessas curvas e, portanto, cada um contém pelo menos um zero de Q . Uma vez que existem tais $n - k$ zeros, cada setor anelar deve conter exatamente um zero.

Para os primeiros k zeros $\{z_i\}_{i=1}^k$, note que

$$z^n - az^k - 1 = 0 \implies |-az^k - 1| = |z^n| \implies |(-a) - z^{-k}| = |z|^{n-k}.$$

Assim, $|z_i| < \delta_1$, o que significa que as k -ésimas potências dos recíprocos dos k menores zeros devem estar em $D(-a; \delta_1^{n-k})$. Além disso,

$$\delta_1^n - |a|\delta_1^k + 1 < 0 \implies \delta_1^{n-k} + \delta_1^{-k} < |a|$$

de modo que $|a| > \delta_1^{n-k}$, implicando que $D(-a; \delta_1^{n-k})$ é limitado. Analogamente ao que foi feito para os $n - k$ maiores zeros, aplicamos o Lema 5 com $m = k$, $c = -a$ e $\rho = \delta_1^{n-k}$, assim obtemos que os recíprocos dos próprios zeros devem estar em $L_k(-a; \delta_1^{n-k})$, que consiste de k curvas simples fechadas disjuntas que estão contidas no conjunto de setores anelares disjuntos $\Omega_1(Q)$, o que implica que

$$\begin{aligned} \frac{1}{|z|} < (|a| + \delta_1^{n-k})^{1/k} &\implies |z| > (|a| + \delta_1^{n-k})^{-1/k} \\ \frac{1}{|z|} > (|a| + \delta_1^{n-k})^{1/k} &\implies |z| < (|a| + \delta_1^{n-k})^{-1/k} < \delta_1. \end{aligned}$$

Os limites nos argumentos na definição de $\Omega_1(Q)$ são determinados a partir de $\arg(z) = -\arg(1/z)$ e $\arg(-a) = \arg(a) + \pi$.

Agora, para mostrar que cada setor anelar em $\Omega_1(Q)$ contém exatamente um zero, tome qualquer z na fronteira de uma curva qualquer e assim segue que

$$|-a - z^{-k}| = \delta_1^{n-k} \implies |-1||a + z^{-k}| = \delta_1^{n-k} \implies |az^k + 1| = |z^k|\delta_1^{n-k} > |z|^k|z|^{n-k} = |z|^n.$$

Logo, pelo Teorema de Rouché, $z^n - az^k - 1$ tem tantos zeros estritamente dentro desta curva quanto $az^k + 1$, o qual é exatamente um e, portanto, cada setor anelar deve conter um único zero de $Q(z)$. ■

Exemplo 10 Consideremos o trinômio $Q(z) = z^{12} - (1, 7+i)z^8 - 1$, para o qual $a = 1, 7+i$, $|a| = 1, 9723$ e $\sigma(12, 8) = 1, 8899$. Então, $\sigma(12, 8) < |a| < 2$. No Teorema 17, tomando δ_1 e δ_2 como as raízes positivas de $x^{12} - 1, 9723x^8 + 1 = 0$, ou seja, $\delta_1 = 1, 0075$ e $\delta_2 = 1, 1181$, temos que $\omega = 0, 5317(\text{rad})$, $\theta_1 = 0, 5497(\text{rad})$ e $\theta_2 = 0, 2091(\text{rad})$. Assim obtemos os limitantes inferiores e superiores para $\arg(z)$ referentes a região $\Omega_1(Q)$ e através do software Mathematica obtemos os zeros de $Q(z)$:

Limitante inferior (rad)	p/ $\arg(z)$ (grau)	Limitante superior (rad)	p/ $\arg(z)$ (grau)	Zeros de $Q(z)$
-0,5279	-30,25	-0,3905	-22,37	$z_1 = -1, 188 - 0, 124i$
0,2575	14,76	0,3949	22,63	$z_2 = -0, 873 - 0, 344i$
1,0429	59,76	1,1803	67,63	$z_3 = -0, 792 + 0, 412i$
1,8283	104,76	1,9657	112,63	$z_4 = -0, 412 - 0, 792i$
2,6137	149,76	2,7511	157,63	$z_5 = -0, 344 + 0, 873i$
3,3991	194,76	3,5365	202,63	$z_6 = -0, 124 + 1, 188i$
4,1845	239,76	4,3219	247,63	$z_7 = 0, 124 - 1, 188i$
4,9699	284,76	5,1073	292,63	$z_8 = 0, 344 - 0, 873i$

Tabela 3.2: Limitantes para os zeros de $Q(z)$.

Assim, oito zeros de $Q(z)$ estão contidos no conjunto

$$\Omega_1(Q) = \left\{ z \in \mathbb{C} : 0,8716 < |z| < 1,0075, (j = 0, \dots, 7) \right. \\ \left. \frac{2j\pi - 1,0814 - \pi}{8} < \arg(z) < \frac{2j\pi + 0,018 - \pi}{8} \right\}.$$

Encontrando os limitantes inferiores e superiores para $\arg(z)$ referentes a região $\Omega_2(Q)$, temos os seguintes elementos, descritos na tabela abaixo.

Limitante inferior (rad)	p/ $\arg(z)$ (grau)	Limitante superior (rad)	p/ $\arg(z)$ (grau)	Zeros de $Q(z)$
0,0807	4,6216	0,1852	10,61	$z_9 = 0,412 + 0,792i$
1,6515	94,62	1,7559	100,61	$z_{10} = 0,792 - 0,412i$
3,2223	184,62	3,3268	190,61	$z_{11} = 0,873 + 0,344i$
4,7931	274,62	4,8976	280,61	$z_{12} = 1,188 + 0,124i$

Tabela 3.3: Limitantes para os zeros de $Q(z)$.

Logo, os quatro zeros restantes de $Q(z)$ estão contidos no conjunto

$$\Omega_2(Q) = \left\{ z \in \mathbb{C} : 1,1181 < |z| < 1,2423, (j = 0, \dots, 3) \right. \\ \left. \frac{2j\pi + 0,3226}{4} < \arg(z) < \frac{2j\pi + 0,7408}{4} \right\}.$$

Além disso, como podemos observar na Figura 3.2, cada setor anelar das regiões Ω_1 e Ω_2 contém exatamente um zero do trinômio $Q(z) = z^{12} - (1.7 + i)z^8 - 1$.

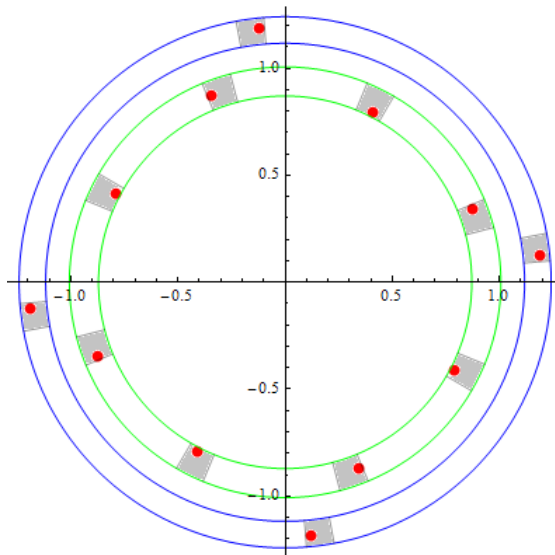


Figura 3.2: Distribuição dos zeros do trinômio $Q(z) = z^{12} - (1.7 + i)z^8 - 1$ de acordo com seus argumentos.

Agora, apresentaremos resultados para o caso $|a| < \sigma(n; k)$, para o qual o próximo teorema estabelece n setores anelares abertos adjacentes, cada um contendo um zero de $Q(z) = z^n - az^k - 1$.

Teorema 18 *Seja $Q(z) = z^n - az^k - 1$, com inteiros $n \geq 3$ e $1 \leq k \leq n-1$, $\text{mdc}(n, k) = 1$ e $|a| < \sigma(n, k)$. Sejam s e t as raízes positivas das equações $x^n - |a|x^k - 1 = 0$ e*

$x^n + |a|x^k - 1 = 0$, respectivamente, e considere n setores anelares adjacentes, cada um limitado por arcos de raio ρ_1 tal que $\rho_1 < t < 1$ e ρ_2 tal que $\rho_2 > t > 1$, com ângulo subtendido $2\pi/n$, e centrado no ângulo $2l\pi/n$ para $l = 0, 1, \dots, n-1$. Então, cada um desses setores anelares contém um zero de Q no seu interior.

A demonstração deste resultado encontra-se em [9].

Observe que os ângulos subtendidos pelos setores anelares apresentados no teorema anterior dependem apenas de n e, portanto, são fixos. O lema a seguir nos fornece uma solução para este problema.

Lema 6 *Sejam α_1 e α_2 os zeros positivos de $x^n - cx^{k_1} - 1$ e $x^n - cx^{k_2} - 1$, respectivamente, com $c > 0$ e $1 \leq k_1, k_2 \leq n-1$. Então, $k_1 < k_2$ implica que $\alpha_1 < \alpha_2$.*

Teorema 19 *Seja $Q(z) = z^n - az^k - 1$, com inteiros $n \geq 3$ e $1 \leq k \leq n-1$ e $\text{mdc}(k, n) = 1$. Sejam ρ_1 e ρ_2 tais que $0 < \rho_1 < t < 1 < s < \rho_2$, onde s e t são os zeros positivos de $x^n - |a|x^k - 1$ e $x^n + |a|x^k - 1 = 0$, respectivamente. Definimos $\tau = \min(k, n-k)$ e seja u o zero positivo de $x^n - |a|x^\tau - 1 = 0$.*

1. Se $|a| < 2^{-\tau/n}$, então existe $\bar{u} \geq u$ tal que $|a|\bar{u}^\tau < 1$, caso em que, com $\theta = \arcsen(|a|\bar{u}^\tau)$, os zeros de Q estão contidos no conjunto

$$\Omega(Q) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \rho_1 < |z| < \rho_2, \right. \\ \left. \frac{2j\pi}{n} - \frac{\theta}{n} < \arg(z) < \frac{2j\pi}{n} + \frac{\theta}{n}, (j = 0, \dots, n-1) \right\},$$

que é composto de n setores anelares disjuntos. Cada setor contém exatamente um zero de Q .

2. Se $|a|(1 + |a|)^{\tau/(n-\tau)} < 1$, então podemos usar $\bar{u} = (1 + |a|)^{\tau/(n-\tau)} \geq u$ e assim $|a|\bar{u}^\tau < 1$. Esta condição em $|a|$ é sempre satisfeita quando $|a| \leq 2(1 + \sqrt{5})^{-1} \approx 0.618$.

Demonstração. Note que $|a| < 2^{-\tau/n}$ implica que $|a| < 1$ e portanto $|a| < \sigma(n; k)$, pois $1 < \sigma(n; k) < 2$. Os limitantes em $|z|$ na definição de $\Omega(Q)$ segue diretamente do Teorema 16, que afirma que $t \leq |z_i| \leq s$ para qualquer z_i ($1 \leq i \leq n$) de Q .

Agora trabalharemos com o polinômio recíproco de Q , dado por $Q^*(z) = z^n Q(1/z)$, isto é, $Q^*(z) = z^n + az^{n-k} - 1$. Os zeros de $Q^*(z)$ são $\frac{1}{z_i}$ ($1 \leq i \leq n$). Aplicando o Teorema 16 em Q^* tem-se $\left| \frac{1}{z_i} \right| \leq \tilde{s}$, onde \tilde{s} é a raiz positiva de $x^n - ax^{n-k} - 1$.

De $Q(z_i) = 0$ obtemos que $|z_i^n - 1| = |a||z_i|^k \leq |a|s^k$ e de $Q\left(\frac{1}{z_i}\right) = 0$ tem-se que

$$\left| \left(\frac{1}{z_i} \right)^n - 1 \right| = |a| \left(\frac{1}{z_i} \right)^{n-k} \leq |a|\tilde{s}^{n-k},$$

ou seja, as n -ésimas potências de z_i e $\frac{1}{z_i}$ encontram-se no disco centrado em 1, o que mostra que os zeros e os seus recíprocos encontram-se em uma curva simples fechada composta por curvas simples fechadas e disjuntas, cada uma contendo uma raiz.

Como $\arg(1/z_i) = -\arg(z_i)$, qualquer disco pode ser usado. Pelo Lema 6 escolhemos o disco com raio $|a|s^k$ quando $k < n-k$, ou o disco com raio $|a|\tilde{s}^{n-k}$ quando $k > n-k$. Em outras palavras, o menor raio é dado por $|a|u^\tau$, onde $\tau = \min(k, n-k)$ e u é a raiz positiva de $x^n - |a|x^\tau - 1$.

Portanto, quando $|a|\bar{u}^\tau < 1$ para algum \bar{u} tal que $\bar{u} \geq u$, tem-se, pelo Lema 5, com $m = n$, $c = 1$ e $\rho = |a|\bar{u}^\tau$, que as curvas simples disjuntas acima são circunscritas por setores anelares disjuntos, cada uma subtendendo um ângulo de $2\theta/n$ com $\theta = \arcsen(|a|\bar{u}^\tau)$.

O setor anelar contendo $e^{(2j\pi i/n)}$, a n -ésima raiz da unidade, para um inteiro j , $j = 0, 1, \dots, n-1$, é simétrico em relação a um raio que parte da origem e forma um ângulo de $2j\pi/n$ com o semi-eixo real positivo. Estes são precisamente os setores anelares disjuntos de $\Omega(Q)$. Aplicando o Teorema 18 observamos que cada setor anelar definido por este teorema contém exatamente um dos setores anelares de $\Omega(Q)$ e, como cada setor anelar no Teorema 18 contém exatamente um zero de Q , este zero deve necessariamente estar no correspondente setor anelar de $\Omega(Q)$.

Para encontrar uma condição sobre $|a|$ para o qual $|a|u^\tau < 1$, notemos que $u^\tau - |a|u^\tau - 1 = 0$, que é uma condição equivalente a $u^n - 1 < 1$ e, portanto, $u < 2^{1/n}$. Logo, $(2^{1/n})^n - |a|(2^{1/n})^\tau - 1 > 0$ ou $|a| < 2^{-\tau/n}$.

Para mostrar o item 2., usamos o limite superior em s do Lema 4 com $s = u$ e $k = \tau$ para obter que $u \leq (1 + |a|)^{1/(n-\tau)}$. Definindo $\bar{u} = (1 + |a|)^{1/(n-\tau)}$ e de acordo com a suposição na afirmação do teorema, tem-se que $\bar{u} \geq u$ e $|a|\bar{u}^\tau < 1$. Além disso, observemos que $\tau < \frac{n}{2}$ e portanto $\frac{\tau}{(n-\tau)} < 1$ desde que

$$|a|(1 + |a|)^{\tau/(n-\tau)} < |a|(1 + |a|),$$

exigindo que $|a|(1 + |a|) \leq 1$, o que leva a $|a| \leq \frac{(-1+\sqrt{5})}{2} = 2(1 + \sqrt{5})^{-1}$. ■

Exemplo 11 Consideremos o trinômio $Q(z) = z^{14} - (0,3 + 0,2i)z^9 - 1$, para o qual $a = 0,3 + 0,2i$, $|a| = 0,3606$, $\sigma(14,9) = 1,9189$, $\tau = 5$ e $2^{-5/14} = 0,78$. Observe que $|a| < \sigma(12,8)$ e $|a| < 2^{-5/14}$. Desta forma, calculando os limitantes inferiores e superiores para $\arg(z)$ e utilizando o software Mathematica para obter os zeros de $Q(z)$, temos a seguinte tabela:

Limitante inferior (rad)	p/ $\arg(z)$ (grau)	Limitante superior (rad)	p/ $\arg(z)$ (grau)	Zeros de $Q(z)$
-0,0299	-1,717	0,0299	1,72	$z_1 = -0,98 + 0,013i$
0,4188	23,99	0,47877	27,43	$z_2 = -0,92 + 0,45i$
0,8676	49,712	0,9276	53,15	$z_3 = -0,89 - 0,46i$
1,3164	75,43	1,3764	78,86	$z_4 = -0,65 - 0,79i$
1,7652	101,14	1,8252	104,57	$z_5 = -0,64 + 0,76i$
2,214	126,86	2,2739	130,29	$z_6 = -0,22 - 0,95i$
2,6628	152,57	2,7228	156	$z_7 = -0,19 + 0,97i$
3,1116	178,28	3,1716	181,72	$z_8 = 0,23 + i$
3,5604	203,99	3,6204	207,43	$z_9 = 0,25 - 0,98i$
4,0092	229,71	4,0691	233,15	$z_{10} = 0,59 + 0,78i$
4,4580	255,43	4,5179	258,86	$z_{11} = 0,61 - 0,80i$
4,9068	281,14	4,9668	284,58	$z_{12} = 0,88 - 0,42i$
5,3556	306,86	5,4156	310,29	$z_{13} = 0,91 + 0,41i$
5,8044	332,57	5,8644	336	$z_{14} = 1,02 + 0,02i$

Tabela 3.4: Limitantes para os zeros de $Q(z)$.

Assim, pelo Teorema 19 podemos determinar uma região de inclusão de zeros composta por quatorze setores, cada setor contendo exatamente um zero do trinômio $Q(z)$, como pode ser visto na Figura 3.3.

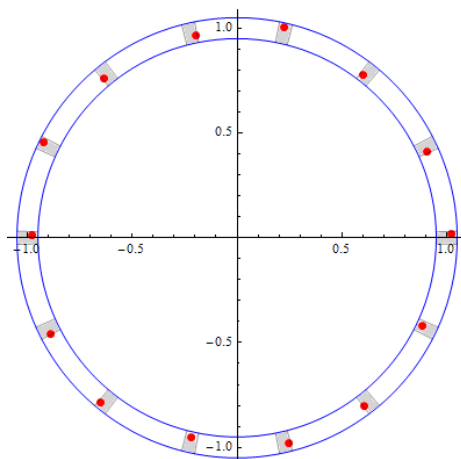


Figura 3.3: Distribuição dos zeros do trinômio $Q(z) = z^{14} - (0,3 + 0,2i)z^9 - 1$ de acordo com seus argumentos.

Equações trinômiais na Matemática Financeira

A determinação algébrica da taxa de juros I de séries uniformes de pagamento postecipadas (quando o pagamento ocorre no final de cada período), apresentada pelas equações (1.1) e (1.2), e de séries uniformes de pagamento antecipadas (quando o pagamento ocorre o início de cada período), apresentada pelas equações (1.3) e (1.4), não é uma tarefa fácil.

Como já descrito no Capítulo 1, ao fazer a mudança de variável $z = 1 + I$, a equação (1.1) pode ser reescrita como

$$P_1(z) = z^{n+1} - (1 + \beta)z^n + \beta,$$

com $\beta = \frac{PMT}{PV}$. Considerando $0 < PMT < PV$, tem-se $0 < \beta < 1$.

Para a equação (1.2) tem-se

$$P_2(z) = z^n - \alpha z + (\alpha - 1),$$

com $\alpha = \frac{FV}{PMT}$. Note que $PMT < FV$, ou seja, $\alpha > 1$.

Para a equação (1.3) obtem-se

$$P_3(z) = z^n - \gamma z^{n-1} + (\gamma - 1),$$

com $\gamma = \frac{PV}{PV - PMT}$. Observe que $0 < PV - PMT < PV$, ou seja, $\gamma > 1$.

Para a equação (1.4) tem-se

$$P_4(z) = z^{n+1} - (\alpha + 1)z + \alpha,$$

com $\alpha = \frac{FV}{PMT}$.

Portanto, o estudo do comportamento das raízes das equações trinômiais P_1, P_2, P_3 e P_4 é de grande importância na determinação da taxa de juros em séries uniformes de pagamentos, visto que as raízes positivas de tais equações estão relacionadas a taxa de juros procurada.

Neste sentido, o presente capítulo apresentará o estudo das raízes das equações trinômiais da forma

$$P_p(z) = z^m + a_p z^p + a_0 = 0, \quad (4.1)$$

com $m, p \in \mathbb{N}$, $m > p$, $a_0, a_p \in \mathbb{R}$, $a_0 > 0$, $a_p < 0$ e $a_p + a_0 = -1$, determinando a quantidade de raízes reais e não reais, mostrando, sob certas condições, que suas raízes são simples e determinando regiões do plano complexo onde tais raízes estão localizadas.

4.1 Considerações sobre os zeros do trinômio $P_p(z)$

Nesta seção, determinaremos a quantidade de zeros reais e não reais dos trinômios da forma $P_p(z) = z^m + a_p z^p + a_0$, onde $m, p \in \mathbb{N}$, $m > p$, $a_0, a_p \in \mathbb{R}$, $a_0 > 0$, $a_p < 0$ e $a_p + a_0 = -1$, e mostraremos, sob certas condições, que seus zeros são simples.

Lema 7 *Sobre os zeros de $P_p(z) = z^m + a_p z^p + a_0$, $m, p \in \mathbb{N}$, $m > p$, $a_0, a_p \in \mathbb{R}$, $a_0 > 0$, $a_p < 0$ e $a_p + a_0 = -1$, tem-se*

1. Se m é par e p é ímpar, $P_p(z)$ tem dois zeros positivos e $m - 2$ zeros não reais;
2. Se m é ímpar, $P_p(z)$ tem dois zeros positivos, um zero negativo e $m - 3$ zeros não reais;
3. Se m e p são pares, $P_p(z)$ tem dois zeros positivos, dois zeros negativos e $m - 4$ zeros não reais.

Demonstração. Pela regra de sinais de Descartes, $P_p(z) = 0$ tem 0 ou 2 raízes positivas. Como $P_p(1) = 0$, concluímos que $P_p(z)$ tem dois zeros positivos, $z = 1$ e $z = \xi_p$.

Aplicando a regra de sinais de Descartes em $P_p(-z)$ segue que

1. Se m é par e p é ímpar, então $P_p(-z) = z^m - a_p z^p + a_0$, o que implica que $P_p(z)$ não possui zeros negativos;
2. Se m é ímpar e p é par ou ímpar, então $P_p(-z) = -z^m + a_p z^p + a_0$ ou $P_p(-z) = -z^m - a_p z^p + a_0$, o que significa que $P_p(z)$ tem um zero negativo;
3. Se m e p são pares, então $P_p(-z) = z^m + a_p z^p + a_0$, ou seja, pela regra de sinal de Descartes $P_p(z)$ tem 0 ou 2 zeros negativos. Como $P_p(-1) = 0$, então $P_p(z)$ tem dois zeros negativos.

Portanto, para m par e p ímpar, $P_p(z)$ tem dois zeros positivos e $m - 2$ zeros não reais; para m ímpar, $P_p(z)$ tem dois zeros positivos, um zero negativo e $m - 3$ zeros não reais; e para m e p par, $P_p(z)$ tem dois zeros negativos e $m - 4$ zeros não reais. ■

Lema 8 *O trinômio $P_p(z) = z^m + a_p z^p + a_0$, com $m, p \in \mathbb{N}$, $m > p$, $a_0, a_p \in \mathbb{R}$, $a_0 > 0$, $a_p < 0$ e $a_p + a_0 = -1$, pode ser representado por*

$$P_p(z) = (z - 1)Q_{m-1,p}(z),$$

onde

$$Q_{m-1,p}(z) = z^{m-1} + z^{m-2} + \dots + z^p - a_0 z^{p-1} - \dots - a_0 z - a_0 = (z - \xi_p)R_p(z), \quad (4.2)$$

onde ξ_p é o zero positivo de $P_p(z)$ e

$$R_p(z) = r_{m-2}z^{m-2} + r_{m-3}z^{m-3} + \dots + r_p z^p + r_{p-1}z^{p-1} + \dots + r_1 z + r_0 \quad (4.3)$$

com $r_{-1} = 0$, $r_j = \frac{r_{j-1} + a_0}{\xi_p}$ para $j = 0, \dots, p - 2$ e $r_{m-1} = 0$, $r_{m-j} = 1 + \xi_p r_{m-j+1}$ para $j = 2, \dots, m - p + 1$.

Além disso, se m e p são pares, temos

$$P_p(z) = (z + 1)S_{m-1,p}(z),$$

onde

$$S_{m-1,p}(z) = z^{m-1} - z^{m-2} + z^{m-3} - \dots - z^p - a_0 z^{p-1} + a_0 z^{p-2} - \dots - a_0 z + a_0.$$

Demonstração. Segue diretamente do Lema 7 e de simples manipulações. ■

Observação 1 1. Se $a_p > -\frac{m}{p}$,

$$\lim_{z \rightarrow 0} Q_{m-1,p}(z) = -a_0 < 0 \quad e \quad \lim_{z \rightarrow 1} Q_{m-1,p}(z) = m + pa_p > 0.$$

Então $\xi_p \in (0, 1)$. Se m e p são pares

$$\lim_{z \rightarrow 0} S_{m-1,p}(z) = a_0 > 0 \quad e \quad \lim_{z \rightarrow -1} S_{m-1,p}(z) = -m - pa_p < 0.$$

Logo, $\omega_p \in (-1, 0)$.

2. Se $a_p = -\frac{m}{p}$, $\xi_p = 1$ (1 é um duplo zero de $P_p(z)$). Se m e p são pares, $\omega_p = -1$ (-1 é um duplo zero de $P_p(z)$).

3. Se $a_p < -\frac{m}{p}$,

$$\lim_{z \rightarrow 1} Q_{m-1,p}(z) < 0 \quad e \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} Q_{m-1,p}(z) > 0.$$

Então, $\xi_p \in (1, \infty)$. Se m e p são pares

$$\lim_{z \rightarrow -1} S_{m-1,p}(z) > 0 \quad e \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} S_{m-1,p}(z) < 0.$$

Logo, $\omega_p \in (-\infty, -1)$.

4. Se m é ímpar e p é par,

$$\lim_{z \rightarrow 0} P_p(z) = a_0 > 0 \quad e \quad \lim_{z \rightarrow -1} P_p(z) < 0.$$

Então o zero negativo de $P_p(z)$ está no intervalo $(-1, 0)$.

5. Se m e p são ímpares,

$$\lim_{z \rightarrow -1} P_p(z) > 0 \quad e \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} P_p(z) < 0.$$

Então o zero negativo de $P_p(z)$ está no intervalo $(-\infty, 0)$.

O próximo resultado nos mostra que o polinômio $Q_{m-1,p}(z)$, obtido da decomposição $P_p(z) = (z-1)Q_{m-1,p}(z)$, pode ser obtido por relações de recorrência de três termos.

Teorema 20 O polinômio $Q_{l,p}(z) = z^l + \dots + z^p - a_0 z^{p-1} - \dots - a_0 z - a_0$ ($p = 1$ ou $p = l - 1$) do Lema 8 é obtido pela relação de recorrência de três termos

$$Q_{l,p}(z) = (z+1)Q_{l-1,p}(z) - \alpha_{l,p}zQ_{l-2,p}(z), \quad l = 2, 3, \dots \quad (4.4)$$

com $Q_{0,p}(z) = 1$, $Q_{1,p}(z) = z - a_0$, $\alpha_{l,p} = 1$ para $l = 3, 4, \dots$, $\alpha_{2,1} = -a_0$ e $\alpha_{2,l-1} = 1$.

Demonstração. Consideremos o caso $p = 1$, ou seja,

$$Q_{l,1} = z^l + \dots + z - a_0.$$

Note que para $l = 2$ tem-se

$$\begin{aligned} Q_{2,1}(z) &= (z+1)Q_{1,1}(z) - \alpha_{2,1}zQ_{0,1}(z) \\ &= (z+1)(z - a_0) + a_0z \\ &= z^2 + z - a_0, \end{aligned}$$

logo para $l = 2$ a relação de recorrência (4.4) é válida.

Agora, suponhamos que a relação (4.4) é válida para $l = k - 1$ e mostremos que vale para $l = k$. Assim,

$$\begin{aligned} Q_{k,1}(z) &= (z + 1)Q_{k-1,1}(z) - \alpha_{k,1}zQ_{k-2,1}(z) \\ &= (z + 1)(z^{k-1} + \dots + z - a_0) - z(z^{k-2} + \dots + z - a_0) \\ &= z^k + z^{k-1} + \dots + z - a_0, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração para o caso $p = 1$.

Para o caso $p = l - 1$, isto é

$$Q_{l,1} = z^l - a_0z^{l-1} - \dots - a_0z - a_0.$$

Observe que se $l = 2$ temos que

$$\begin{aligned} Q_{2,l-1}(z) &= (z + 1)Q_{1,l-1}(z) - \alpha_{2,l-1}zQ_{0,l-1}(z) \\ &= (z + 1)(z - a_0) - z \\ &= z^2 - a_0z - a_0, \end{aligned}$$

e então obtemos que para $l = 2$ a relação de recorrência (4.4) é válida.

Agora suponhamos que a relação (4.4) é válida para $l = k - 1$ e mostremos que vale para $l = k$. Assim,

$$\begin{aligned} Q_{k,l-1}(z) &= (z + 1)Q_{k-1,l-1}(z) - \alpha_{k,l-1}zQ_{k-2,l-1}(z) \\ &= (z + 1)(z^{k-1} - a_0z^{k-2} - \dots - a_0) - z(z^{k-2} - a_0z^{k-3} - \dots - a_0) \\ &= z^k - a_0z^{k-1} - \dots - a_0z - a_0, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração para o caso $p = l - 1$. ■

Observação 2 De acordo com o Lema 1, observe que para qualquer $m \geq 1$, os dois polinômios consecutivos $Q_{m,p}$ e $Q_{m+1,p}$ não têm zeros em comum. Além disso, conforme o Teorema 13, os zeros de $Q_{l,p}$ são os autovalores das matrizes de Hessenberg inferiores

$$H_{m,1} = \begin{bmatrix} a_0 & -a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_0 & -(a_0 + 1) & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_0 & -(a_0 + 1) & 0 & \dots & 1 & 0 \\ a_0 & -(a_0 + 1) & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & -(a_0 + 1) & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, H_{m,m-1} = \begin{bmatrix} a_0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

para os casos $p = 1$ e $p = m - 1$, respectivamente, com $\alpha_1 = 0$.

Teorema 21 Os zeros de $P_p(z) = z^m + a_pz^p + a_0$, $m, p \in \mathbb{N}$, $m > p$, $a_0, a_p \in \mathbb{R}$, $a_0 > 0$, $a_p < 0$ e $a_p + a_0 = -1$, são simples, exceto no caso $a_p = -\frac{m}{p}$.

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned} P'_p(z) &= mz^{m-1} + pa_pz^{p-1} \\ P''_p(z) &= (m-1)mz^{m-2} + (p-1)pa_pz^{p-2}. \end{aligned}$$

Suponha que $z_0 \in \mathbb{C}$ é zero de $P_p(z)$ de multiplicidade ν , $\nu > 1$. Então,

$$P_p(z_0) = P'_p(z_0) = \dots = P_p^{(\nu-1)}(z_0) = 0 \quad \text{e} \quad P_p^{(\nu)}(z_0) \neq 0.$$

Mas,

$$\begin{aligned} P'_p(z_0) = 0 &\iff mz_0^{m-1} + pa_p z_0^{p-1} = 0 \\ &\iff z_0 = 0 \quad \text{ou} \quad z_0^{m-p} = \frac{-pa_p}{m}. \end{aligned}$$

Como $P_p(0) = a_0 \neq 0$, segue que $z_0 \neq 0$. Então $z_0^{m-p} = \frac{-pa_p}{m}$.

De $z_0^{m-p} = \frac{-pa_p}{m}$ temos que os zeros com multiplicidade ocorrerão quando $z = 1$ e, se m e p são pares, $z = -1$.

Se $z_0 = 1$, ou equivalentemente, $a_p = -\frac{m}{p}$, $z = 1$ é um duplo zero de $P_p(z)$.

Além disso, no caso em que m e p são pares, $z_0 = -1$, ou equivalentemente, $a_p = -\frac{m}{p}$. Assim, se $a_p = -\frac{m}{p}$ e m e p são pares então $z = -1$ é um duplo zero de $P_p(z)$.

Observe que $\nu = 2$ no início da prova, pois quando $a_p = -\frac{m}{p}$,

$$P_p(1) = P'_p(1) = 0 \quad \text{e} \quad P''_p(1) \neq 0,$$

e, no caso em que m e p são pares

$$P_p(-1) = P'_p(-1) = 0 \quad \text{e} \quad P''_p(-1) \neq 0.$$

■

4.2 Localização dos zeros do trinômio $P_p(z)$

Nesta seção, mostraremos que os zeros do trinômio $P_p(z)$ estão localizados em uma região anelar do plano complexo. Determinaremos setores do plano complexo contendo exatamente uma raiz de $P_p(z) = 0$ e, de acordo com [18], determinaremos uma região do plano complexo onde todos os zeros de $Q_{m-1,p}(z)$ estão localizados.

Lema 9 *Todos os zeros de $P_p(z) = z^m + a_p z^p + a_0$, $m, p \in \mathbb{N}$, $m > p$, $a_0, a_p \in \mathbb{R}$, $a_0 > 0$, $a_p < 0$ e $a_p + a_0 = -1$ estão no anel $\delta_p \leq |z| \leq \gamma_p$, onde δ_p é a única raiz positiva de $f_p(z) = z^m + a_p z^p - a_0 = 0$ e γ_p é a única raiz positiva de $g_p(z) = z^m - a_p z^p - a_0 = 0$.*

Demonstração. Primeiramente, note pela regra de sinal de Descartes que $f_p(z)$ e $g_p(z)$ tem apenas um zero positivo, denotemos por δ_p e γ_p respectivamente.

A desigualdade $|z| \leq \gamma_p$ segue diretamente do Teorema 7.

Como $\lim_{z \rightarrow +\infty} f_p(z) = +\infty$, se $f_p(z) \geq 0$ para algum $z > 0$, então $z \geq \delta_p$. Se $P_p(z) = 0$, para algum z , então

$$\begin{aligned} z^m + a_p z^p + a_0 = 0 &\iff |z|^m = |-1||a_p z^p + a_0| \\ &\iff |z|^m = |a_0 - (-a_p z^p)| \geq |a_0| - |a_p||z|^p, \end{aligned}$$

assim $|z|^m + a_p |z|^p - a_0 \geq 0$, isto é, $f(|z|) \geq 0$ e pelas considerações anteriores $|z| \geq \delta_p$. ■

Observação 3 *Se m é ímpar, $P_p(z)$ tem apenas um zero negativo ω_p . Para p par, como $P_p(-z) = (-1)g_p(z)$, segue que $\omega_p = -\gamma_p$. Se p é ímpar, como $P_p(-z) = (-1)f_p(z)$, segue que $\omega_p = -\delta_p$.*

Observação 4 *Do Teorema 12 segue que se $a_p \leq -\frac{m}{p}$, então $P_p(z)$ tem $p - \text{mdc}(p, m)$ zeros em $|z| < 1$. E, se $a_p > -\frac{m}{p}$, então $P_p(z)$ tem p zeros em $|z| < 1$.*

Os próximos resultados são específicos para os casos $p = 1$ ($P_2(z)$ e $P_4(z)$) e $p = m - 1$ ($P_1(z)$ e $P_3(z)$).

Teorema 22 *Seja $f_p(z) = z^m + a_p z^p - a_0$ e $g_p(z) = z^m - a_p z^p - a_0$. Os zeros de $P_p(z) = z^m + a_p z^p + a_0$, $m, p \in \mathbb{N}$, $m > p$, $a_0, a_p \in \mathbb{R}$, $a_0 > 0$, $a_p < 0$ e $a_p + a_0 = -1$, $p = 1$ ou $p = m - 1$, satisfazem:*

1. *Se $a_p \leq -\frac{m}{p}$, todos os zeros de $P_1(z)$ estão localizados em $1 \leq |z| \leq \gamma_1$, onde γ_1 é o único zero positivo de $g_1(z)$. Se $a_p > -\frac{m}{p}$, $P_1(z)$ tem $m - 1$ zeros em $1 \leq |z| \leq \gamma_1$ e um zero no intervalo $(0, 1)$.*
2. *Se $a_p < -\frac{m}{p}$, P_{m-1} tem $m - 1$ zeros em $\delta_{m-1} \leq |z| \leq 1$ e um zero no intervalo $(1, +\infty)$, onde δ_{m-1} é o único zero positivo de $f_{m-1}(z)$. Se $a_p \geq -\frac{m}{p}$, todos zeros de $P_{m-1}(z)$ estão localizados em $\delta_{m-1} \leq |z| \leq 1$.*

Demonstração. Para $p = 1$ e $a_p \neq -\frac{m}{p}$ a desigualdade $|z| \geq 1$ segue diretamente das Observações 3 e 4. Para $a_p = -\frac{m}{p}$, $z = 1$ é um duplo zero de $P_p(z)$, neste caso a desigualdade $|z| > 1$ segue do Corolário 2 aplicado no polinômio $R_P(z)$ do Lema 8. A desigualdade $|z| \leq \gamma_1$ segue diretamente do Lema 9.

Para $p = m - 1$ e $a_p \neq -\frac{m}{p}$, a desigualdade $|z| \leq 1$, segue diretamente das Observações 3 e 4. Para $a_p = -\frac{m}{p}$, $z = 1$ é um duplo zero de $P_p(z)$, e a desigualdade $|z| \leq 1$ segue do Corolário 2 aplicado no polinômio $R_P(z)$ do Lema 8. A desigualdade $|z| \leq \gamma_1$ segue diretamente do Lema 9. ■

Agora, de acordo com Melman [9] definamos

$$a = \left(\frac{a_p}{a_0} \right) (-a_0)^{p/m} \quad \text{e} \quad \sigma(m; p) = \frac{m}{m-p} \left(\frac{m-p}{p} \right)^{p/m}$$

e, nosso objetivo será determinar m setores no plano complexo onde cada um contém exatamente uma raiz da equação trinomial $P_p(z) = 0$, de acordo com as condições $|a| > \sigma(n; k)$ ou $|a| < \sigma(n; k)$.

Teorema 23 *Sejam os zeros $\{z_i\}_{i=1}^m$ de $P_p(z) = z^m + a_p z^p + a_0$, ($m, p \in \mathbb{N}$, $m > p$, $a_0, a_p \in \mathbb{R}$, $a_0 > 0$ e $a_p < 0$, $\text{mdc}(p, m) = 1$ e $|a| > \sigma(m, p)$). Sejam δ_1 e δ_2 tais que $r_1 < \delta_1 \leq \delta_2 < r_2$, onde r_1 e r_2 são os zeros positivos de $x^m - |a|x^p + 1$. Além disso, seja $\omega = \arg(a)$, $\theta_1 = \arcsin(\delta_1^{m-p}/|a|)$ e $\theta_2 = \arcsin(\delta_2^{m-p}/|a|)$. Então, p zeros de $P_p(z)$ estão contidos no conjunto*

$$\Omega_1(P_p) = \{z \in \mathbb{C} : t_1 < |z| < t_2, \phi_1^{(j)} < \arg(z) < \phi_2^{(j)}, (j = 0, \dots, p-1)\},$$

onde

$$t_1 = (|a| + \delta_1^{m-p})^{-1/p} (|(-a_0)^{1/m}|), \quad t_2 = (|a| - \delta_1^{m-p})^{-1/p} (|(-a_0)^{1/m}|),$$

$$\phi_1^{(j)} = \frac{2j\pi - \omega - \pi}{p} - \frac{\theta_1}{p} + \arg((-a_0)^{1/m}) \quad \text{e} \quad \phi_2^{(j)} = \frac{2j\pi - \omega - \pi}{p} + \frac{\theta_1}{p} + \arg((-a_0)^{1/m}).$$

E os $m - p$ zeros restantes estão contidos no conjunto

$$\Omega_2(P_p) = \{z \in \mathbb{C} : t_3 < |z| < t_4, \phi_3^{(j)} < \arg(z) < \phi_4^{(j)}, (j = 0, \dots, m-p-1)\},$$

onde

$$t_3 = (|a| - \delta_2^{-p})^{1/(m-p)} (|(-a_0)^{1/m}|), \quad t_4 = (|a| + \delta_2^{-p})^{1/(m-p)} (|(-a_0)^{1/m}|),$$

$$\phi_3^{(j)} = \frac{2j\pi + \omega}{m-p} - \frac{\theta_2}{m-p} + \arg((-a_0)^{1/m}) \quad e \quad \phi_4^{(j)} = \frac{2j\pi + \omega}{m-p} + \frac{\theta_2}{m-p} + \arg((-a_0)^{1/m}).$$

Além disso, todos os setores anelares em $\Omega_1(P_p)$ e $\Omega_2(P_p)$ são disjuntos e cada um contém exatamente um zero de $P_p(z)$.

Demonstração. Basta dividir $P_p(z)$ por $-a_0$, fazer a mudança de variável $z = (-a_0)^{1/m}x$ em $P_p(z)$ e o resultado segue do Teorema 17. ■

Com base em [18], apresentaremos a seguir regiões do plano complexo onde estão localizados todos os zeros do polinômio gerado pela relação de recorrência de três termos (4.4), dado por

$$Q_{m-1,p}(z) = z^{m-1} + z^{m-2} + \dots + z^p - a_0 z^{p-1} - \dots - a_0 z - a_0.$$

Primeiramente, consideremos o caso $p = 1$, ou seja,

$$Q_{m-1,1}(z) = z^{m-1} + z^{m-2} + \dots + z - a_0.$$

Aplicando o Teorema 14, temos que para $m \geq 2$, $\alpha = \max\{|a_0|, 1, \dots, 1\}$ e $\eta = a_0 + 1$, os zeros de $Q_{l,1}(z)$, $1 \leq l \leq m-1$, estão na região

$$W(-\eta, a_0, \rho) = \left\{ z = x + iy \in \mathbb{C} : |y| \leq \rho, -\eta - \sqrt{\rho^2 - y^2} \leq x \leq a_0 + \sqrt{\rho^2 - y^2} \right\},$$

com $\rho = -\frac{\sqrt{\alpha^2 - 4\alpha} + \alpha}{2}a_0$, se $0 < d_1 < d_2$, caso contrário $\rho = (\sqrt{\alpha} + \sqrt{a_0 + 1})^2 - (a_0 + 1)$, onde

$$d_1 = \frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 4\alpha} + \alpha} \quad e \quad d_2 = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{a_0 + 1}}.$$

Observe que se $a_0 > 1$ então $\alpha = a_0$, caso contrário $\alpha = 1$.

Agora, seja $p = m-1$, então

$$Q_{m-1,m-1}(z) = z^{m-1} - a_0 z^{m-2} - \dots - a_0 z - a_0.$$

Aplicando o Teorema 14 temos que para $m \geq 2$, $\alpha = 1$ e $\eta = 0$, os zeros de $Q_{l,m-1}(z)$, $1 \leq l \leq m-1$, estão na região

$$W(0, a_0, \rho) = \left\{ z = x + iy \in \mathbb{C} : |y| \leq \rho, -\sqrt{\rho^2 - y^2} \leq x \leq a_0 + \sqrt{\rho^2 - y^2} \right\},$$

com $\rho = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a_0}}{2}$, se $0 < \left(\frac{2}{\sqrt{1 + 4a_0} + 1} \right) < 1$, caso contrário $\rho = 1$.

4.3 Exemplos numéricos

Nesta seção, exemplificaremos numericamente os resultados apresentados nas seções anteriores do presente capítulo.

Exemplo 12 Seja $P(z) = z^m + a_p z^p + a_0$ e consideremos $p = 1$, $a_p = -\frac{FV}{PMT}$ e $a_0 = \frac{FV}{PMT} - 1$, para alguns valores de m , FV e PMT . Na próxima tabela temos os zeros e os coeficientes dos trinômios $P_j(z)$, $j = 1, 2$ e a taxa de juros I .

n	FV	PMT	$P_j(z)$ ($j = 1, 2$)	Zeros de $P_j(z)$	$I(\%)$
6	4500,00	420,00	$P_1(z) = z^6 - 10,7z + 9,7$	$z_1 = -1,443 - 0,963i$ $z_2 = -1,443 + 0,963i$ $z_3 = 0,327 - 1,587i$ $z_4 = 0,327 + 1,587i$ $z_5 = 1$ $z_6 = 1,23024$	23
7	2500,00	180,00	$P_2(z) = z^7 - 13,89z + 12,89$	$z_1 = -1,669$ $z_2 = -0,899 - 1,369i$ $z_3 = -0,899 + 1,369i$ $z_4 = 0,623 - 1,401i$ $z_5 = 0,623 + 1,401i$ $z_6 = 1$ $z_7 = 1,2235$	22,35

Tabela 4.1: Dados do Exemplo 12.

A Figura 4.1 apresenta os zeros dos trinômios $P_1(z)$ e $P_2(z)$, representados em vermelho. Como pode ser observado, os zeros de $P_1(z)$ encontram-se em $1 \leq |z| \leq 1,74704$, onde $z = 1,74704$ é o único zero positivo de $f_p(z) = z^6 - 10,7z - 9,7$ e, os zeros de $P_2(z)$ encontram-se em $1 \leq |z| \leq 1,66897$, onde $z = 1,66897$ é o único zero positivo de $f_p(z) = z^7 - 13,89z - 12,89$. Além disso, como $\frac{m-p}{p} \neq a_0$, segue que os zeros de P_1 e de P_2 são simples.

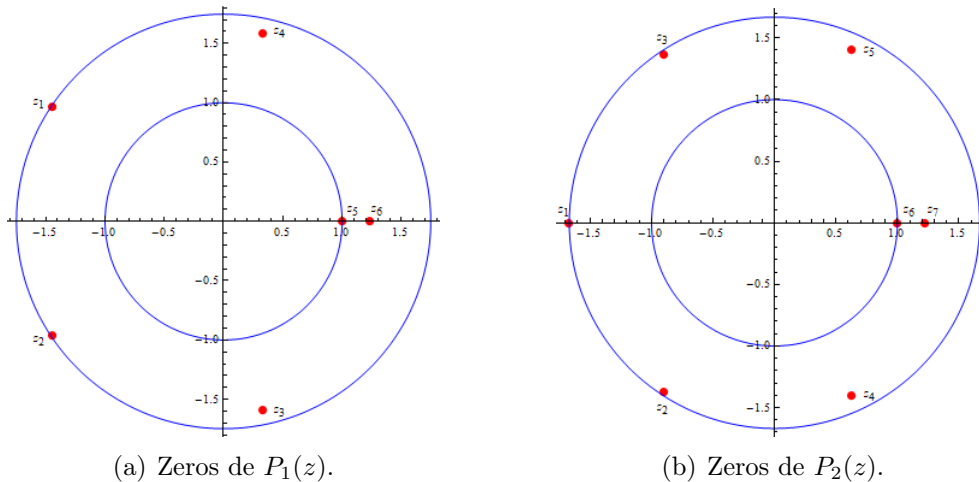


Figura 4.1: Localização dos zeros de $P_1(z)$ e $P_2(z)$.

Na Figura 4.2 temos setores do plano complexo que limitam os zeros dos trinômios $P_1(z)$ e $P_2(z)$.

Para $P_1(z)$ tomamos δ_1 e δ_2 como sendo os zeros positivos de $x^6 - 1,611x + 1$, ou seja, $\delta_1 = 0,685$ e $\delta_2 = 0,842$. Deste modo, obtemos $\omega = -2,618$ (rad), $\theta_1 = 0,064$ (rad) e $\theta_2 = 0,829$ (rad). E portanto, pelo Teorema 23 temos que um zero de $P_1(z)$ está contido no conjunto

$$\Omega_1(P_1) = \{z \in \mathbb{C} : 0,83 < |z| < 1, -0,0639 < arg(z) < 0,0639\}.$$

E os cinco zeros restantes estão contidos no conjunto

$$\Omega_2(P_1) = \{z \in \mathbb{C} : 1,23 < |z| < 1,795, \phi_1^{(j)} < \arg(z) < \phi_2^{(j)}, (j = 0, \dots, 4)\},$$

onde $\phi_1^{(j)} = \frac{2j\pi - 0,83}{5}$ e $\phi_2^{(j)} = \frac{2j\pi + 0,83}{5}$.

Para $P_2(z)$ tomamos δ_1 e δ_2 como sendo os zeros positivos de $x^7 - 1,55x + 1$, ou seja, $\delta_1 = 0,694$ e $\delta_2 = 0,849$. Assim, obtemos $\omega = -2,693$ (*rad*), $\theta_1 = 0,049$ (*rad*) e $\theta_2 = 0,861$ (*rad*). E portanto, pelo Teorema 23 temos que um zero de $P_2(z)$ está contido no conjunto

$$\Omega_3(P_2) = \{z \in \mathbb{C} : 0,866 < |z| < 1, -0,049 < \arg(z) < 0,049\}.$$

E os seis zeros restantes estão contidos no conjunto

$$\Omega_4(P_2) = \{z \in \mathbb{C} : 1,224 < |z| < 1,703, \phi_3^{(j)} < \arg(z) < \phi_4^{(j)}, (j = 0, \dots, 5)\},$$

onde $\phi_3^{(j)} = \frac{2j\pi - 0,861}{6}$ e $\phi_4^{(j)} = \frac{2j\pi + 0,861}{6}$.

Além disso, observe que todos os setores em $\Omega_1(P_1)$, $\Omega_2(P_1)$, $\Omega_3(P_2)$ e $\Omega_4(P_2)$ são disjuntos e cada um contém exatamente um zero de P_1 e de P_2 , respectivamente.

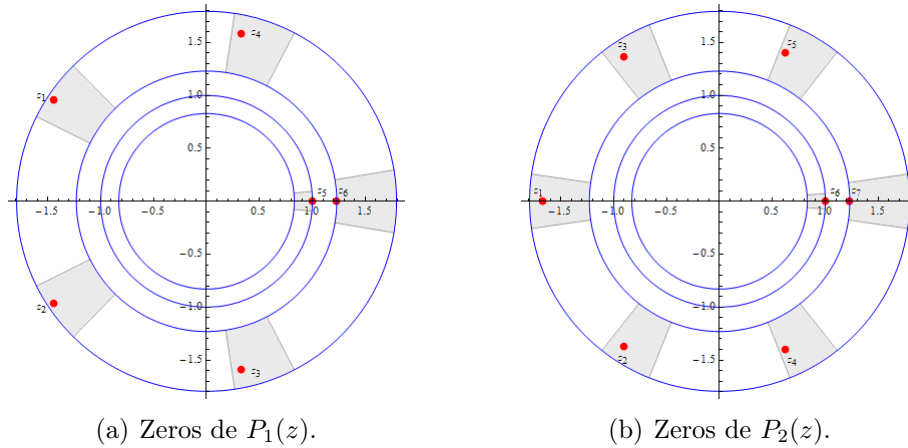


Figura 4.2: Localização dos zeros de $P_1(z)$ e de $P_2(z)$ de acordo com seus argumentos e módulos.

Além disso, de acordo com o Teorema 14, temos que os zeros de $Q_1(z) = z^5 + z^4 + \dots + z - 9,7$, estão na região $W_1(-10,7; 9,7; 30)$, onde

$$W_1 = \left\{ z = x + iy \in \mathbb{C} : |y| \leq 30; -10,7 - \sqrt{(30)^2 - y^2} \leq x \leq 9,7 + \sqrt{(30)^2 - y^2} \right\}.$$

E os zeros de $Q_2(z) = z^6 + z^5 + \dots + z - 12,9$, estão na região $W_2(-13,9; 12,9; 39,7)$, onde

$$W_2 = \left\{ z = x + iy \in \mathbb{C} : |y| \leq 39,7; -13,9 - \sqrt{(39,7)^2 - y^2} \leq x \leq 12,9 + \sqrt{(39,7)^2 - y^2} \right\},$$

como podemos observar na Figura 4.3.

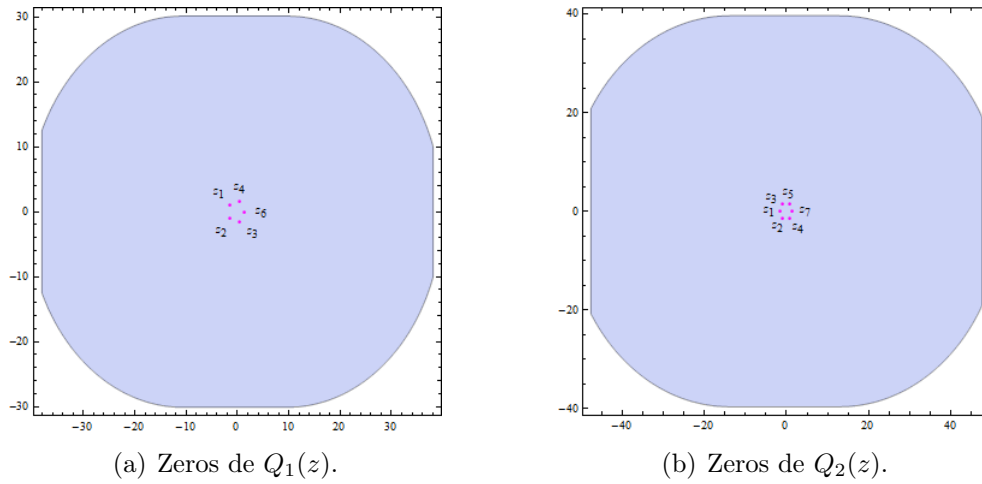


Figura 4.3: Localização dos zeros de $Q_1(z)$ e de $Q_2(z)$.

Exemplo 13 Seja $P(z) = z^m + a_p z^p + a_0$ e consideremos $p = m - 1$, $a_p = -\left(\frac{PMT}{PV} + 1\right)$ e $a_0 = \frac{PMT}{PV}$, para alguns valores de m , PV e PMT . Na tabela a seguir temos os zeros e os coeficientes dos trinômios $P_j(z)$, $j = 1, 2$, e a taxa de juros I .

n	PV	PMT	$P_j(z)$ ($j = 1, 2$)	Zeros de $P_j(z)$	$I(\%)$
7	1500,00	720,00	$P_1(z) = z^8 - 1,48z^7 + 0,48$	$z_1 = -0,731 - 0,333i$ $z_2 = -0,731 + 0,333i$ $z_3 = -0,232 - 0,789i$ $z_4 = -0,232 + 0,789i$ $z_5 = 0,481 - 0,729i$ $z_6 = 0,481 + 0,729i$ $z_7 = 1$ $z_8 = 1,44319$	44,32
12	24000,00	3500,00	$P_2(z) = z^{13} - 1,15z^{12} + 0,15$	$z_1 = -0,80561$ $z_2 = -0,706 - 0,392i$ $z_3 = -0,706 + 0,392i$ $z_4 = -0,431 - 0,691i$ $z_5 = -0,431 + 0,691i$ $z_6 = -0,042 - 0,825i$ $z_7 = -0,042 + 0,825i$ $z_8 = 0,375 - 0,759i$ $z_9 = 0,375 + 0,759i$ $z_{10} = 0,731 - 0,496i$ $z_{11} = 0,731 + 0,496i$ $z_{12} = 1$ $z_{13} = 1,0987$	9,87

Tabela 4.2: Dados do Exemplo 13.

A Figura 4.4, apresenta os zeros dos trinômios $P_1(z)$ e $P_2(z)$, representados em vermelho. Note que $\frac{m-p}{p} \neq a_0$ e, conseqüentemente os zeros de P_1 e de P_2 são simples. Além disso, $P_1(z)$ tem sete zeros em $0,8 \leq |z| \leq 1$, onde $z = 0,8$ é o único zero positivo de $f_p(z) = z^8 + 1,48z^7 - 0,48$ e, $P_2(z)$ tem doze zeros em $0,81 \leq |z| \leq 1$, onde $z = 0,81$ é o único zero positivo de $f_p(z) = z^{13} + 1,15z^{12} - 0,15$.

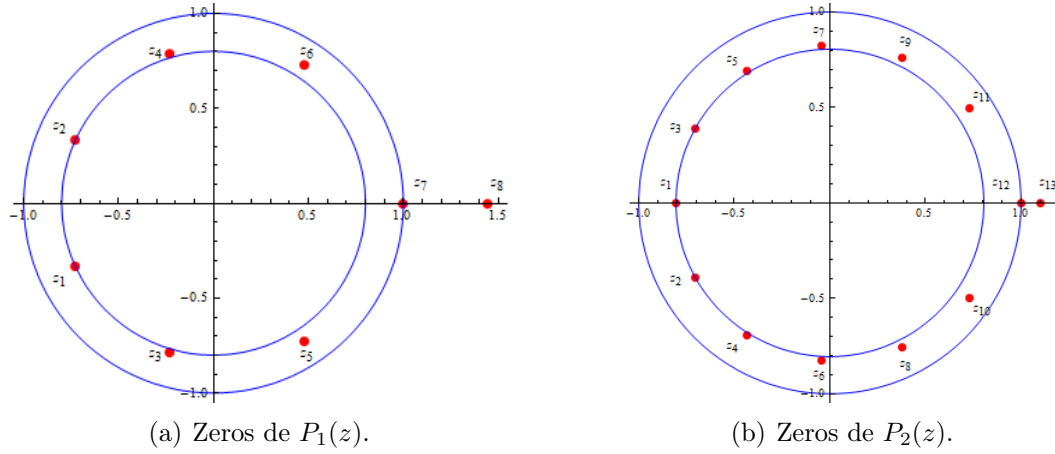


Figura 4.4: Localização dos zeros de $P_1(z)$ e $P_2(z)$.

A Figura 4.5 apresenta setores do plano complexo que limitam os zeros dos trinômios $P_1(z)$ e $P_2(z)$.

Para $P_1(z)$ tomamos δ_1 e δ_2 como sendo os zeros positivos de $x^8 - 1,622x^7 + 1$, ou seja, $\delta_1 = 1,096$ e $\delta_2 = 1,582$. Deste modo, obtemos $\omega = -0,393$ (*rad*), $\theta_1 = 0,742$ (*rad*) e $\theta_2 = 0,025$ (*rad*). Logo, pelo Teorema 23 temos que sete zeros de $P_1(z)$ estão contidos no conjunto

$$\Omega_1(P_1) = \{z \in \mathbb{C} : 0,79 < |z| < 1, \phi_1^{(j)} < \arg(z) < \phi_2^{(j)}, (j = 0, \dots, 7)\},$$

onde $\phi_1^{(j)} = \frac{2j\pi - 0,742}{7}$ e $\phi_2^{(j)} = \frac{2j\pi + 0,742}{7}$. E o outro zero está contido no conjunto

$$\Omega_2(P_1) = \{z \in \mathbb{C} : 1,44 < |z| < 1,517, -0,0249 < \arg(z) < 0,0249\}.$$

Para $P_2(z)$ tomamos δ_1 e δ_2 como sendo os zeros positivos de $x^{13} - 1,33x^{12} + 1$, ou seja, $\delta_1 = 1,1596$ e $\delta_2 = 1,274$. Deste modo, obtemos $\omega = -0,242$ (*rad*), $\theta_1 = 1,061$ (*rad*) e $\theta_2 = 0,041$ (*rad*). E portanto, pelo Teorema 23 temos que doze zeros de $P_2(z)$ estão contidos no conjunto

$$\Omega_3(P_2) = \{z \in \mathbb{C} : 0,799 < |z| < 1, \phi_3^{(j)} < \arg(z) < \phi_4^{(j)}, (j = 0, \dots, 11)\},$$

onde $\phi_3^{(j)} = \frac{2j\pi - 2,269}{6}$ e $\phi_4^{(j)} = \frac{2j\pi - 0,147544}{6}$. E o outro zero restante está contido no conjunto

$$\Omega_4(P_2) = \{z \in \mathbb{C} : 1,0987 < |z| < 1,193, -0,0411 < \arg(z) < 0,0411\}.$$

Note ainda que todos os setores em $\Omega_1(P_1), \Omega_2(P_1), \Omega_3(P_2)$ e $\Omega_4(P_2)$ são disjuntos e cada um contém exatamente um zero de P_1 e de P_2 , respectivamente.

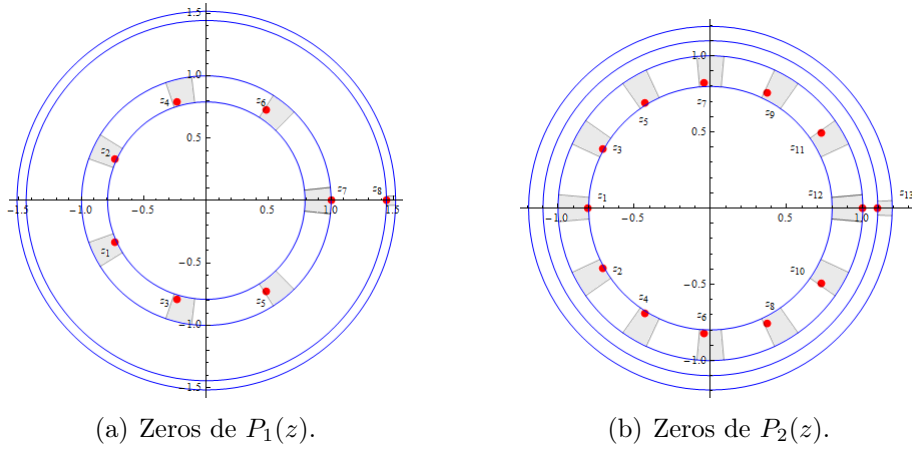


Figura 4.5: Localização dos zeros de $P_1(z)$ e de $P_2(z)$ de acordo com seus argumentos e módulos.

Os zeros de $Q_1(z) = z^7 - 0,48z^7 - \dots - 0,48z - 0,48$ estão na região $W_1(0, 0, 48, 1, 16)$, com

$$W_1 = \left\{ z = x + iy \in \mathbb{C} : |y| \leq 1,16, -\sqrt{(1,16)^2 - y^2} \leq x \leq 0,48 + \sqrt{(1,16)^2 - y^2} \right\}.$$

E os zeros de $Q_2(z) = z^{12} - 0,15z^{11} - \dots - 0,15z - 0,15$ estão na região $W_2(0, 0, 15, 1, 06)$, onde

$$W_2 = \left\{ z = x + iy \in \mathbb{C} : |y| \leq 1,06, -\sqrt{(1,06)^2 - y^2} \leq x \leq 0,15 + \sqrt{(1,06)^2 - y^2} \right\},$$

conforme mostra a Figura 4.6.

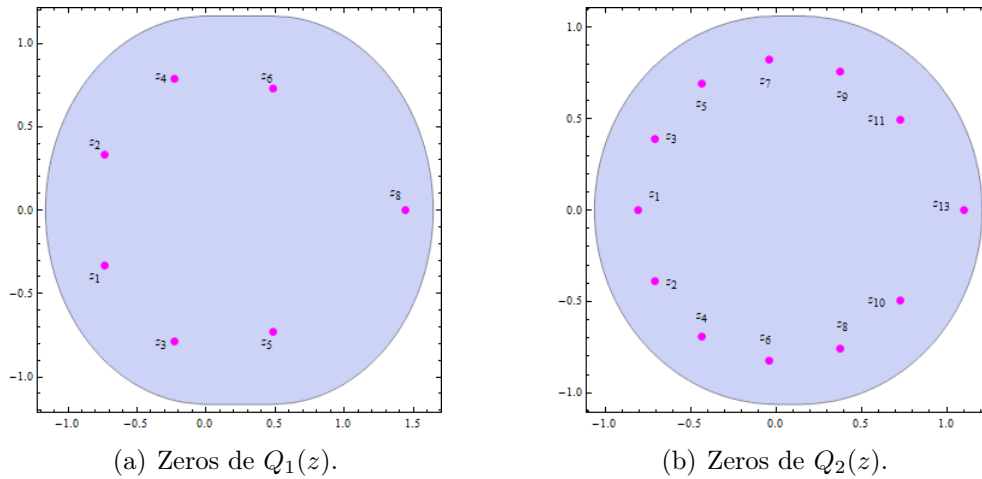


Figura 4.6: Localização dos zeros de $Q_1(z)$ e de $Q_2(z)$.

Equações quadrinomiais na Matemática Financeira

Na Matemática Financeira, além das séries uniformes de pagamentos postecipadas e antecipadas, há também as séries de pagamentos diferidas, que são caracterizadas por apresentarem um período de carência c antes do primeiro pagamento.

Conforme descrito no Capítulo 1, nas séries diferidas, a taxa de juros I pode ser obtida por meio das equações (1.5) e (1.6).

Fazendo a mudança de variável $z = 1 + I$ a equação (1.5) pode ser reescrita como

$$P_5(z) = z^{n+c} - z^{n+c-1} - \beta z^n + \beta$$

com $\beta = \frac{PMT}{PV}$, $0 < \beta < 1$.

Para a equação (1.6) tem-se

$$P_6(z) = z^n - \alpha z^c + \alpha z^{c-1} - 1$$

com $\alpha = \frac{FV}{PMT}$, $\alpha > 1$.

Uma vez que os zeros positivos dos quadrinômios (1.5) e (1.6) estão relacionados a taxa de juros procurada, o estudo do comportamento dos zeros de $P_5(z)$ e $P_6(z)$ torna-se algo valioso na literatura.

Nas próximas seções mostraremos a quantidade de zeros reais e não reais dos quadrinômios $P_5(z)$ e $P_6(z)$ e, determinaremos regiões do plano complexo onde seus zeros estão localizados.

5.1 Considerações sobre os zeros dos quadrinômios $P_5(z)$ e $P_6(z)$

Nesta seção, determinaremos a quantidade de zeros reais e não reais dos quadrinômios $P_5(z) = z^{n+c} - z^{n+c-1} - \beta z^n + \beta$ e $P_6(z) = z^n - \alpha z^c + \alpha z^{c-1} - 1$, onde $0 < \beta < 1$, $\alpha > 1$, $P_5(1) = 0$ e $P_6(1) = 0$.

Lema 10 *Sobre os zeros de $P_5(z) = z^{n+c} - z^{n+c-1} - \beta z^n + \beta$, $0 < \beta < 1$ e $P_5(1) = 0$ tem-se*

1. Se $n+c$ é par com n e c pares, $P_5(z)$ tem dois zeros positivos, 0 ou 2 zeros negativos e $n+c-2$ zeros não reais ou $n+c-4$ zeros não reais.

2. Se $n + c$ é par com n e c ímpares, $P_5(z)$ tem dois zeros positivos e $n + c - 2$ zeros não reais.
3. Se $n + c$ ímpar, $P_5(z)$ tem dois zeros positivos, um zero negativo e $n + c - 3$ zeros não reais.

Demonstração. Pela a regra de sinais de Descartes, $P_5(z)$ têm dois zeros positivos ou não têm zeros positivos. Como $P_5(1) = 0$, concluímos que $P_5(z)$ têm dois zeros positivos, $z = 1$ e $z = \xi$.

Aplicando a regra de sinais de Descartes no quadrinômio $P_5(-z)$, segue que para $n + c$ par, com n e c ímpares, $P_5(z)$ não têm zeros negativos, para $n + c$ par (com n e c pares), $P_5(z)$ têm 0 ou 2 zeros negativos e para $n + c$ ímpar, $P_5(z)$ têm um zero negativo.

Portanto, para $n + c$ par, com n e c ímpares, $P_5(z)$ tem dois zeros positivos e $n + c - 2$ zeros não reais e, para $n + c$ ímpar, $P_5(z)$ tem dois zeros positivos, um zero negativo e $n + c - 3$ zeros não reais. ■

Lema 11 Sobre os zeros de $P_6(z) = z^n - \alpha z^c + \alpha z^{c-1} - 1$, $\alpha > 1$, $P(1) = 0$, tem-se

1. Se n é par e c é par ou ímpar, $P_6(z)$ tem um ou três zeros positivos, um zero negativo e $n - 2$ ou $n - 4$ zeros não reais.
2. Se n e c são ímpares, $P_6(z)$ tem um ou três zeros positivos, zero ou dois zeros negativos e $n - 1$, ou $n - 3$ ou $n - 5$ zeros não reais.
3. Se n é ímpar e c é par, $P_6(z)$ tem um ou três zeros positivos e $n - 1$ ou $n - 3$ zeros não reais.

Demonstração. Pela Regra de sinais de Descartes, $P_6(z) = 0$ tem um ou três zeros positivos. E aplicando a regra de sinais em $P_6(-z)$ segue que

1. Se n é par e c é par ou ímpar, então $P_6(-z) = z^n - \alpha z^c - \alpha z^{c-1} - 1$ ou $P_6(-z) = z^n + \alpha z^c + \alpha z^{c-1} - 1$, o que significa que $P_6(z)$ tem um zero negativo.
2. Se n e c são ímpares, então $P_6(-z) = -z^n + \alpha z^c + \alpha z^{c-1} - 1$, ou seja, $P_6(z)$ tem zero ou dois zeros negativos.
3. Se n é ímpar e c é par, então $P_6(-z) = -z^n - \alpha z^c - \alpha z^{c-1} - 1$, o que implica que neste caso $P_6(z)$ não tem zeros negativos. ■

Lema 12 Os quadrinômios $P_5(z) = z^{n+c} - z^{n+c-1} - \beta z^n + \beta$ e $P_6(z) = z^n - \alpha z^c + \alpha z^{c-1} - 1$, $\alpha > 1$, $0 < \beta < 1$, $\alpha > 1$, podem ser representados por

$$P_j(z) = (z - 1)Q_j(z) \quad j = 5, 6$$

onde

$$Q_5(z) = z^{n+c-1} - \beta z^{n-1} - \dots - \beta z - \beta$$

e

$$Q_6(z) = z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z^c + (1 - \alpha)z^{c-1} + z^{c-2} + \dots + z + 1.$$

Demonstração. Segue diretamente do Lema 7 e de simples manipulações. ■

Observação 5 1. Observe que

$$\lim_{z \rightarrow 0} Q_5(z) = -\beta < 0$$

e considerando $\beta < \frac{1}{n}$ tem-se

$$\lim_{z \rightarrow 1} Q_5(z) = 1 - \beta n > 0,$$

logo $\xi \in (0, 1)$. Além disso, se $\beta > \frac{1}{n}$ então

$$\lim_{z \rightarrow 1} Q_5(z) = 1 - \beta n < 0 \quad \text{e como} \quad \lim_{z \rightarrow 2} Q_5(z) = 2^{n+c-1} - \beta(2^n - 1) > 0,$$

segue que $\xi \in (1, 2)$.

Se $n + c$ é ímpar tem-se

$$\lim_{z \rightarrow 0} P_5(z) = \beta > 0 \quad \text{e como} \quad \lim_{z \rightarrow -1} P_5(z) < 0,$$

logo se $n + c$ é ímpar, o zero negativo de $P_5(z)$ está no intervalo $(-1, 0)$.

2. Quando $c = 1$, o polinômio $Q_5(z) = z^{n+c-1} - \beta z^{n-1} - \dots - \beta z - \beta$ é obtido pela relação de recorrência de três termos:

$$Q_k(z) = (z + 1)Q_{k-1} - zQ_{k-2}(z) \quad \text{para } k = 2, 3, \dots, n + c - 1,$$

com $Q_0(z) = 1$ e $Q_1(z) = z - \beta$.

3. Note que

$$\lim_{z \rightarrow 0} Q_6(z) = 1 > 0$$

e considerando $\alpha > 2c$ tem-se

$$\lim_{z \rightarrow 1} Q_6(z) = 2c - \alpha < 0,$$

logo $\xi \in (0, 1)$. Além disso, se $\alpha < 2c$ então

$$\lim_{z \rightarrow 1} Q_6(z) = 2c - \alpha > 0.$$

5.2 Limitantes para os zeros dos quadrinômios $P_5(z)$ e $P_6(z)$

Nesta seção, mostraremos que os zeros do quadrinômio $P_5(z)$ estão localizados em uma região anelar do plano complexo e determinaremos um disco que contém todos os zeros do quadrinômio $P_6(z)$.

Teorema 24 *Seja $P_5(z) = z^{n+c} - z^{n+c-1} - \beta z^n + \beta$, $0 < \beta < 1$. Todos os zeros de $P_5(z)$ estão em*

$$\gamma \leq |z| \leq \delta,$$

onde γ é a única raiz positiva da equação

$$f(z) = z^{n+c} + z^{n+c-1} + \beta z^n - \beta = 0,$$

e δ é a única raiz positiva da equação

$$g(z) = z^{n+c} - z^{n+c-1} - \beta z^n - \beta = 0.$$

Demonstração. A desigualdade $|z| \leq \delta$ segue diretamente do Teorema 7, onde δ é a única raiz positiva da equação

$$g(z) = z^{n+c} - z^{n+c-1} - \beta z^n - \beta = 0.$$

Agora, mostremos que $|z| \geq \gamma$. Note que pela regra de sinais de Descartes,

$$f(z) = z^{n+c} + z^{n+c-1} + \beta z^n - \beta = 0$$

tem uma única raiz positiva γ .

Como $\lim_{z \rightarrow +\infty} f(z) = +\infty$, se $f(z) \geq 0$, para algum $z > 0$, então $z \geq \gamma$.

Se $P_5(z) = 0$ para algum z , então

$$\begin{aligned} z^{n+c} - z^{n+c-1} - \beta z^n + \beta = 0 &\iff z^{n+c} = (-1)[\beta - z^{n+c-1} - \beta z^n] \\ &\iff |z|^{n+c} = |\beta - z^{n+c-1} - \beta z^n| \geq |\beta - z^{n+c-1}| - |\beta||z|^n \\ &\geq |\beta| - |z|^{n+c-1} - |\beta||z|^n = \beta - |z|^{n+c-1} - \beta|z|^n, \end{aligned}$$

e, portanto $|z|^{n+c} + |z|^{n+c-1} + \beta|z|^n - \beta \geq 0$, isto é, $f(|z|) \geq 0$ e pelas considerações acima segue que $|z| \geq \gamma$. ■

Teorema 25 *Seja $P_6(z) = z^n - \alpha z^c + \alpha z^{c-1} - 1$, $\alpha > 1$, então*

1. *Todos os zeros de $P_6(z)$ encontram-se em $|z| \leq \mu$, onde μ é a única raiz positiva da equação*

$$f(z) = z^n - \alpha z^c - \alpha z^{c-1} - 1.$$

2. *Se $f(z) = z^n - \alpha z^c + \alpha z^{c-1} + 1$ tem dois zeros positivos r e R , $r < R$, então $P_6(z)$ tem c zeros em $|z| \leq r$ e não tem zeros em $r < |z| < R$.*

Demonstração.

1. Pela regra de sinais de Descartes, $f(z) = z^n - \alpha z^c - \alpha z^{c-1} - 1$ tem uma única raiz positiva μ .

Aplicando o Teorema 7 segue que todos os zeros de $P_6(z)$ estão em $|z| \leq \mu$.

2. Segue diretamente do Teorema 8. ■

5.3 Exemplos numéricos

Nesta seção, exemplificaremos numericamente os resultados apresentados nas seções anteriores do presente capítulo.

Exemplo 14 *Seja $P(z) = z^{n+c} - z^{n+c-1} - \beta z^n + \beta$, com $\beta = \frac{PV}{PMT}$, para alguns valores de n, c, PV e PMT . Na próxima tabela temos os zeros e os coeficientes dos quadrinômios P_j , $j = 1, 2$ e a taxa de juros I .*

n	c	PMT	PV	$P_j(z)$ ($j = 1, 2$)	Zeros de $P_j(z)$	$I(\%)$
14	4	250,00	8000,00	$P_1(z) = z^{18} - z^{17} - 0,03z^{14} + 0,03$	$z_1 = -0,78 - 0,14i$ $z_2 = -0,78 + 0,14i$ $z_3 = -0,68 - 0,41i$ $z_4 = -0,68 + 0,41i$ $z_5 = -0,49 - 0,62i$ $z_6 = -0,49 + 0,62i$ $z_7 = -0,24 - 0,76i$ $z_8 = -0,24 + 0,76i$ $z_9 = 0,04 - 0,81i$ $z_{10} = 0,04 + 0,81i$ $z_{11} = 0,33 - 0,75i$ $z_{12} = 0,33 + 0,75i$ $z_{13} = 0,58 - 0,59i$ $z_{14} = 0,58 + 0,59i$ $z_{15} = 0,78 - 0,36i$ $z_{16} = 0,78 + 0,36i$ $z_{17} = 0,928$ $z_{18} = 1$	-7,18
10	5	950,00	3200,00	$P_2(z) = z^{15} - z^{14} - 0,3z^{10} + 0,3$	$z_1 = -0,861$ $z_2 = -0,79 - 0,39i$ $z_3 = -0,79 + 0,39i$ $z_4 = -0,59 - 0,68i$ $z_5 = -0,59 + 0,68i$ $z_6 = -0,24 - 0,84i$ $z_7 = -0,24 + 0,84i$ $z_8 = 0,17 - 0,88i$ $z_9 = 0,17 + 0,88i$ $z_{10} = 0,53 - 0,79i$ $z_{11} = 0,53 + 0,79i$ $z_{12} = 0,79 - 0,49i$ $z_{13} = 0,79 + 0,49i$ $z_{14} = 1$ $z_{15} = 1,1284$	12,84

Tabela 5.1: Dados do Exemplo 14.

A Figura 5.1 apresenta os zeros dos quadrinômios $P_1(z)$ e $P_2(z)$, representados em vermelho. Observe que os zeros de $P_1(z)$ estão localizados em $0,786566 \leq |z| \leq 1,04286$ onde $z = 0,786566$ é a única raiz positiva da equação $f(z) = z^{18} + z^{17} + 0,03z^{14} - 0,03 = 0$, e $z = 1,04286$ é a única raiz positiva da equação $g(z) = z^{18} - z^{17} - 0,03z^{14} - 0,03 = 0$, e os zeros de $P_2(z)$ estão localizados em $0,861309 \leq |z| \leq 1,18128$ onde $z = 0,861309$ é a única raiz positiva da equação $f(z) = z^{15} + z^{14} + 0,3z^{10} - 0,3 = 0$, e $z = 1,18128$ é a única raiz positiva da equação $g(z) = z^{15} - z^{14} - 0,3z^{10} - 0,3 = 0$.

Observe que a taxa de juros relacionada ao quadrinômio $P_1(z)$ é negativa, isto significa que o dinheiro se movimenta na direção oposta.

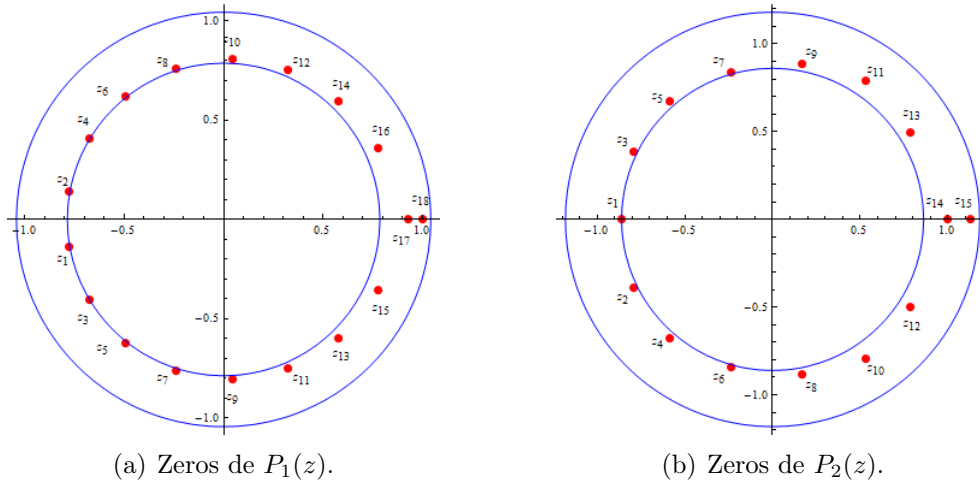


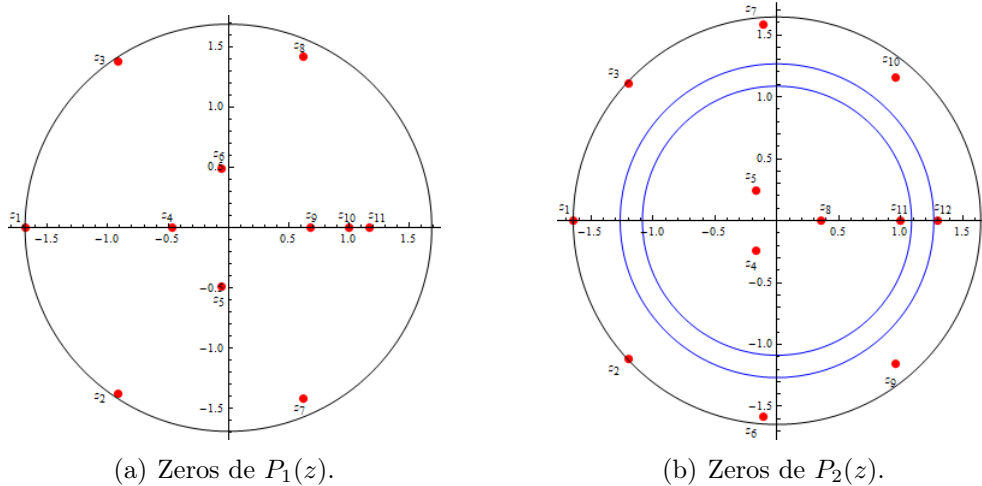
Figura 5.1: Localização dos zeros de $P_1(z)$ e $P_2(z)$.

Exemplo 15 Seja $P(z) = z^n - \alpha z^c + \alpha z^{c-1} - 1$, com $\alpha = \frac{FV}{PMT}$, para alguns valores de n, c, FV e PMT . Na próxima tabela temos os zeros e os coeficientes dos quadrinômios $P_j, j = 1, 2$ e a taxa de juros I .

n	c	FV	PMT	P _j (z) (j = 1, 2)	Zeros de P _j (z)	I(%)
11	5	6500,00	450,00	$P_1(z) = z^{11} - 14z^5 + 14z^4 - 1$	$z_1 = -1,69$ $z_2 = -0,91 - 1,38i$ $z_3 = -0,91 + 1,38i$ $z_4 = -0,47$ $z_5 = -0,054 - 0,49i$ $z_6 = -0,054 + 0,49i$ $z_7 = 0,62 - 1,42i$ $z_8 = 0,62 + 1,42i$ $z_9 = 0,679$ $z_{10} = 1$ $z_{11} = 1,168$	16,8
12	4	24000,00	720,00	$P_2(z) = z^{12} - 33z^4 + 33z^3 - 1$	$z_1 = -1,65$ $z_2 = -1,19 - 1,11i$ $z_3 = -1,19 + 1,11i$ $z_4 = -0,16 - 0,24i$ $z_5 = -0,16 + 0,24i$ $z_6 = -0,11 - 1,59i$ $z_7 = -0,11 + 1,59i$ $z_8 = 0,361$ $z_9 = 0,96 - 1,15i$ $z_{10} = 0,96 + 1,15i$ $z_{11} = 1$ $z_{12} = 1,2963$	29,6

Tabela 5.2: Dados do Exemplo 15.

Observe que os zeros do quadrinômio $P_1(z)$ estão localizados em $|z| \leq 1,68733$. E que o quadrinômio $P_2(z)$ possui quatro zeros em $|z| \leq 1,08685$ e oito zeros em $1,26679 \leq |z| \leq 1,64541$, conforme mostra a Figura 5.2.

(a) Zeros de $P_1(z)$.(b) Zeros de $P_2(z)$.Figura 5.2: Localização dos zeros de $P_1(z)$ e $P_2(z)$.

Conclusão

Com o objetivo de investigar o comportamento das raízes de equações trinômiais e quadrinômiais relacionadas à determinação da taxa de juros I em séries uniformes de pagamentos, foi realizado o estudo de resultados clássicos que determinam regiões do plano complexo onde os zeros de um determinado polinômio estão localizados.

Por meio de tais resultados foi possível mostrar que o trinômio $P_p(z) = z^m + a_p z^p + a_0$, com $m, p \in \mathbb{N}$, $m > p$, $a_0, a_p \in \mathbb{R}$, $a_0 > 0$, $a_p < 0$ e $a_p + a_0 = -1$, tem exatamente dois zeros positivos, $z = 1$ e $z = \xi_p$, onde $\xi_p - 1$ representa a taxa de juros procurada. Além disso foi possível determinar uma região anelar do plano complexo onde estão localizados os zeros de $P_p(z)$.

Provamos também que os zeros de $P_p(z)$ são todos distintos, exceto no caso $a_p = \frac{-m}{p}$, e que o polinômio $Q_{m-1,p}(z) = \frac{P_p(z)}{(z-1)}$ é obtido por relações de recorrência de três termos.

Por meio dos resultados apresentados em [9] foi possível determinar limitantes para os zeros de $P_p(z)$ de acordo com seus argumentos e módulo e, com base em [18] exibimos uma região do plano complexo onde todos os zeros de $Q_{m-1,p}(z)$ estão localizados.

Por fim, determinamos uma região do plano complexo onde estão localizadas as raízes das equações quadrinômiais relacionadas à determinação da taxa de juros I em série uniformes de pagamentos diferida.

Referências

- [1] V. S. Adamchik; D. J. Jeffrey. Polynomial Transformations of Tschirnhaus, Bring and Jerrard. *ACM SIGSAM Bulletin*, 37(3):90–94, 2003.
- [2] N. Anderson; E. B. Saff; R. S. Varga. On the Eneström-Keakeya theorem and its sharpness. *Linear Algebra App.*, 28:5–16, 1979.
- [3] A. C. C. Branco. *Matemática Financeira Aplicada: Método Algébrico, HP-12C, Microsoft Excel*. Cengage Learning, 2010.
- [4] K. Dilcher; J. D. Nulton; K. B. Stolarsky. The zeros of a certain family of trinomials. *Glasgow Mathematical Journal*, 34:55–74, 1992.
- [5] J. A. Estrugo. Lá inversión parcial de series aplicada a la investigación del tanto de interés en las rentas ciertas. <http://www.fundacionmapfre.org/documentacion/publico/es/catalogo_imagenes/grupo.cmd?path=1057032>. Acesso em 15 Ago. 2017.
- [6] P. Henrici. *Applied and Computational Complex Analysis: Power Series, Integration, Conformal Mapping, Location of Zeros*. Wiley-Interscience, 1988.
- [7] W. B. Jones; W. J. Thron; H. Waadeland. A strong stieltjes moment problem. *Transactions of the american mathematical society*, 261(2), 1980.
- [8] M. Marden. *Geometry of Polynomials*. American Mathematical Society, 1966.
- [9] A. Melman. Geometry of trinomials. *Pacific Journal of Mathematics*, 259:141–159, 2012.
- [10] G. V. Milovanović; D. S. Mitrinović; Th. M. Rassias. *Topics in Polynomials: Extremal Problems, Inequalities, Zeros*. World Scientific, 1994.
- [11] A. C. M. Neto. *Tópicos de Matemática Elementar: Polinômios*. SBM, Rio de Janeiro, 2012.
- [12] G. Pólya; G. Szegő. *Problems and Theorems in Analysis I: Series, Integral Calculus, Theory of Functions*. Springer-Verlag, Berlin, 1978.
- [13] V. V. Prasolov. *Polynomials*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [14] A. Puccini. *Matemática Financeira Objetiva e Aplicada*. Elsevier, Rio de Janeiro, 9 edition, 2011.
- [15] C. P. Samanez. *Matemática Financeira*. Pearson Prentice Hall, São Paulo, 5 edition, 2010.

-
- [16] E. G. Santos. A regra de sinais de Descartes. *Revista do Professor de Matemática*, 83:45–49, 2014.
- [17] A. L. C. Silva. *Matemática Financeira Aplicada*. Atlas, São Paulo, 2 edition, 2008.
- [18] A. P. Silva; A. Sri Ranga. Polynomials generated by a three term recurrence relation: bounds for complex zeros. *Linear Algebra and its Applications*, pages 299–324, 2004.
- [19] J. D. V. Sobrinho. *Matemática Financeira*. Atlas, São Paulo, 7 edition, 2008.
- [20] P. G. Szabó. On the roots of the trinomial equation. *Springer-Verlag*, 18:97–104, 2009.