



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

Raul Felipe Appis

CICLOS LIMITE EM SISTEMAS DE FILIPPOV
NO PLANO

São José do Rio Preto
2018

Raul Felipe Appis

Ciclos limite em sistemas de Filippov no plano

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Concentração - Sistemas Dinâmicos, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: FAPESP - Proc. 2015/24803-0

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Luci Any Francisco Roberto

São José do Rio Preto

2018

Appis, Raul Felipe.

Ciclos limite em sistemas de Filippov no plano / Raul Felipe
Appis. -- São José do Rio Preto, 2018
125 f. : il.

Orientador: Luci Any Francisco Roberto
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista “Júlio
de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Teoria dos sistemas dinâmicos. 3. Ciclo limite.
4. Filippov, Sistemas de. 5. Teoria da bifurcação. I. Universidade Estadual
Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e
Ciências Exatas. II. Título.

CDU – 517.93

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Raul Felipe Appis

Ciclos limite em sistemas de Filippov no plano

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Concentração - Sistemas Dinâmicos, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: FAPESP - Proc. 2015/24803-0

BANCA EXAMINADORA

Prof^ª. Dr^ª. Luci Any Francisco Roberto

UNESP - São José do Rio Preto

Orientadora

Prof. Dr. Francisco Braun

UFSCar - São Carlos

Prof. Dr. Tiago de Carvalho

UNESP - Bauru

São José do Rio Preto, 2 de março de 2018.

*Dedico à minha família, professores e
amigos.*

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todos que direta ou indiretamente me apoiaram para que eu chegasse até aqui.

Agradeço a todos os professores que me acompanharam durante a minha graduação e o meu mestrado, em especial à Prof^a. Dr^a. Maria Gorete Carreira Andrade, que me acompanhou como tutora no grupo PET-Matemática.

Agradeço fortemente a minha orientadora de iniciação científica e mestrado, Prof^a. Dr^a. Luci Any Francisco Roberto, por toda a confiança e dedicação que depositou em mim. Com absoluta certeza, foi a professora de maior importância durante minha jornada acadêmica, depositando em mim todo seu conhecimento e sempre confiando em meu potencial, com muita paciência.

Ao Departamento de Matemática e todos os funcionários do IBILCE.

Aos meus familiares como um todo, em particular, a minha mãe Izildinha, ao meu pai Antônio e ao meu irmão Rodolpho. Obrigado por toda ajuda, paciência e apoio que me deram desde a minha entrada na vida acadêmica.

Aos meus amigos desde a escola e aos que ingressaram na faculdade em 2012, em especial à minha grande amiga Mayara, minha grande parceira durante a graduação e, com toda certeza, minha eterna amiga. Aos meus amigos Plínio e Wesley, meus grandes parceiros em todos os momentos. Aos meus amigos Vinicius, Duda, Juliana e Isabela, parceiros para a vida inteira. Ao meus amigos de mestrado e doutorado, em muito especial aos que vieram sempre junto comigo nessa jornada, Ana Livia, Otávio, Eliton, Yagor, Wender, Jamielli, Carol, Elo, Jéssica e André, que sempre me ajudaram e sempre tiveram uma grande paciência comigo. Aos meus amigos da Rep. do Vale. A minha melhor amiga durante a faculdade Débora Nakanishi, com quem morei durante toda a minha graduação e que eu amo muito.

Não por último e não sem importância à FAPESP pelo apoio financeiro para a realização deste trabalho (proc. 2015/24803-0).

Por fim, fica o meu muito obrigado a minha banca examinadora por aceitarem o convite e permitirem a conclusão deste trabalho.

“Deus, se um dia eu estiver prestes a perder as esperanças, me ajude a lembrar que os teus planos são maiores que os meus sonhos.”

Resumo

Neste trabalho, nosso principal objetivo é estudar a existência e estabilidade de ciclos limite de costura em sistemas lineares planares de Filippov descontínuos obtidos pela agregação de dois sistemas lineares planares do tipo foco, e tendo apenas um ponto de equilíbrio. Ao usar uma forma normal adequada com cinco parâmetros, é realizado um estudo completo de algumas aplicações de Poincaré. São encontradas diferentes bifurcações que são responsáveis pelo aparecimento de ciclos limite de costura e regiões abertas no espaço de parâmetros com nenhum, um, dois e três ciclos limite de costura.

Palavras-chave: Filippov, ciclos limite de costura, bifurcações.

Abstract

In this work our main aim is to study the existence and stability of crossing limit cycles in planar linear systems of discontinuous Filippov obtained by the aggregation of two planar linear systems of focus type, and having only one equilibrium point is considered. By using an adequate normal form with five parameters, a thorough study of some Poincaré maps is performed. Different bifurcations which are responsible for the appearance of crossing limit cycles are detected and open regions in the parameters space with none, one, two and three crossing limit cycles are found.

Keywords: Filippov, crossing limit cycles, bifurcations.

Lista de Figuras

1.1	Campo vetorial suave por partes com uma fronteira de descontinuidade.	17
1.2	(1) Região atratora em Σ_d ; (2) Região repulsora em Σ_d	20
1.3	Regiões de costura.	21
1.4	Campo de Filippov.	22
1.5	(1) ponto de tangência visível do campo F^+ ; (2) ponto de tangência invisível do campo F^+	24
1.6	Uma trajetória local por um ponto p em uma região de costura.	26
1.7	Uma trajetória local por um ponto de equilíbrio de fronteira p do campo F^-	26
1.8	Uma trajetória local por um ponto p tal que p é um ponto de tangência visível do campo F^- e um ponto de tangência invisível do campo F^+	27
1.9	Algumas trajetórias locais por um ponto $p \in \Sigma_d$ tal que p não se encaixa nos itens c) e d)	27
3.1	Esboço do gráfico da função φ_γ para um valor $\gamma > 0$	59
3.2	(1) Uma trajetória local de (3.3), com $\sigma = 0$, $\bar{x} = x_L < 0$ e $\gamma = \gamma_L$, por um ponto $(0, y_0)$, com $y_0 \geq 0$, que segue por Σ^- e encontra Σ em um ponto $(0, y_1)$, com $y_1 \leq 0$; (2) Uma trajetória local de (3.3), com $\sigma = 0$, $\bar{x} = x_L < 0$ e $\gamma = \gamma_L$, por um ponto $(0, y_0)$, com $y_0 \geq 0$, que segue por Σ^- e não encontra Σ novamente.	60
3.3	Uma trajetória local de (3.3), com $\sigma = b \geq 0$, $\bar{x} = x_R < 0$ e $\gamma = \gamma_R$, por um ponto $(0, z_0)$, com $z_0 < b$, que segue por Σ^+ e encontra Σ em um ponto $(0, z_1)$, com $y_1 > b$	64
3.4	Esboço do gráfico da aplicação P_L para diferentes valores do parâmetro γ_L	67
3.5	Esboço do gráfico da aplicação P_R para $b = 0$ e diferentes valores do parâmetro γ_R	73
3.6	Esboço dos gráficos das aplicações $P_R^{-1}(\cdot; 0)$ e $P_R^{-1}(\cdot; b)$	86
3.7	Uma trajetória local para $\gamma_L > 0$	95
3.8	Trajétória periódica deslizante para $\hat{y} \leq b$	96
3.9	Trajétória periódica deslizante para $\hat{y} > b$ e $0 < y^* < b$	96

3.10	Ciclo crítico de costura instável.	97
3.11	Esboço do gráfico da aplicação P_L para $\gamma_L < 0$ e esboço do gráfico das aplicações $P_R^{-1}(\cdot; b_{CC}(\gamma_R))$ e $P_R^{-1}(\cdot; b)$, com $b_{CC}(\gamma_R) - \varepsilon < b < b_{CC}(\gamma_R)$	100
3.12	Ciclo limite de costura com região de deslize.	101
3.13	Esboço dos gráficos das aplicações P_L (gráfico em azul) e P_R^{-1} (gráfico em vermelho) para $\hat{y} < b_\infty$, $0 < -\gamma_L = \gamma_R$ e $b = b_{CC}(\gamma_R)$, mostrando a existência do ciclo crítico de costura e de 1 ciclo limite de costura.	118
3.14	Esboço dos gráficos das aplicações P_L (gráfico em azul) e P_R^{-1} (gráfico em vermelho) para $\hat{y} < b_\infty$, $0 < -\gamma_L < \gamma_R < -\gamma_L + \varepsilon_2$ e $b = b_{CC}(\gamma_R)$, mostrando a existência do ciclo crítico de costura e de 2 ciclos limite de costura.	119
3.15	Esboço dos gráficos das aplicações P_L (gráfico em azul) e P_R^{-1} (gráfico em vermelho) para $\hat{y} < b_\infty$, $0 < -\gamma_L < \gamma_R < -\gamma_L + \varepsilon_2$ e $b_{CC}(\gamma_R) - \varepsilon_3(\gamma_R) < b < b_{CC}(\gamma_R)$, mostrando a existência de 3 ciclos limite de costura.	120
3.16	Representação parcial do diagrama de bifurcação no plano (γ_R, b) para $x_L = -1$, $x_R = -7$ e $\gamma_L \approx -0,27441$	121
3.17	Retângulo tracejado ampliado da Figura 3.16. Os números indicam a quantidade de trajetórias periódicas de costura do sistema em cada região.	122
4.1	Diagrama de bifurcação no plano (γ_R, b) para $\gamma_L < 0$ e $-a_L < a_R < 0 < a_L$, onde $A = \left(\frac{a_R \gamma_L}{a_L}, 0\right)$, $B = (-\gamma_L, b_\infty)$ e $C = (-\gamma_L, 0)$. A direção das setas simbolizam o nascimento de ciclos limite de costura estáveis (setas pretas) e de ciclos limite de costura instáveis (setas vermelhas).	125
4.2	Diagrama de bifurcação no plano (γ_R, b) para $\gamma_L < 0$ e $a_R < 0 < a_L < -a_R$, onde $A = \left(\frac{a_R \gamma_L}{a_L}, 0\right)$, $B = (-\gamma_L, b_\infty)$ e $C = (-\gamma_L, 0)$. A direção das setas simbolizam o nascimento de ciclos limite de costura estáveis (setas pretas) e de ciclos limite de costura instáveis (setas vermelhas).	125

Lista de Tabelas

3.1	Simetrias para a forma canônica (3.2).	53
-----	--	----

Sumário

Introdução	13
1 Sistemas suaves por partes	16
1.1 Sistemas de Filippov	19
2 Sistemas lineares planares de Filippov descontínuos	29
2.1 Forma normal para os sistemas lineares planares de Filippov descontínuos com a possibilidade de existência de trajetórias periódicas de costura	33
3 Sistemas lineares planares de Filippov descontínuos do tipo foco-foco	49
3.1 Análise da aplicação de Poincaré	56
3.2 Estudo das trajetórias periódicas deslizantes e dos ciclos limite de costura	85
3.2.1 Estudo das trajetórias periódicas deslizantes	94
3.2.2 Estudo dos ciclos limite de costura	100
3.3 Conclusões	123
4 Apêndice	124
Referências Bibliográficas.	126

Introdução

A teoria de sistemas dinâmicos tem construído ferramentas importantes para analisar e entender o comportamento de uma variada gama de problemas. Existe uma abordagem qualitativa bem desenvolvida tal que a evolução dos sistemas é definida por uma função suave de seus argumentos. Esta abordagem tem-se mostrado bastante efetiva para entender importantes fenômenos físicos tais como fluxo de fluidos, deformação elástica, óptica não linear e sistemas biológicos. Contudo, esta teoria exclui muitos sistemas significantes que surgem na prática. Estes sistemas dinâmicos são aqueles que contêm termos que são funções não suaves de seus argumentos. Estes problemas se enquadram na teoria de sistemas dinâmicos descontínuos. Como eles surgem com frequência em diversas áreas, como por exemplo engenharia mecânica, de controle, elétrica, biologia e física, a teoria dos sistemas dinâmicos descontínuos tem sido alvo de muitos estudos. Além das aplicações, a compreensão matemática de tais sistemas é por si só um incentivo para a sua análise, e usaremos este argumento como a motivação central do nosso estudo.

A teoria de sistemas dinâmicos descontínuos tem apresentado avanços desde a década de 1940, período de A. A. Andronov. As análises iniciais eram desenvolvidas em exemplos particulares que surgiam na engenharia elétrica ou mecânica, veja [1]. Um dos problemas que inicialmente surgiu foi o de definir de forma precisa o que seria uma trajetória em um sistema dinâmico descontínuo, uma vez que a definição que se tinha era para sistemas cujos argumentos eram contínuos e com condições de Lipschitz satisfeitas. Este problema foi resolvido por Filippov em [3], quando foram definidas regras, que foram chamadas de *convenções de Filippov*, para a transição de uma região de descontinuidade a outra passando ou permanecendo pela descontinuidade. Além disso, Filippov definiu um campo de vetores na região de descontinuidade que dá um critério de escolha, eliminando o fato de, nesse conjunto, o campo assumir dois valores. Tal campo é denominado de *campo de Filippov*. Apesar de não haver unicidade das trajetórias, tal campo é um modelo útil nas aplicações e se adapta bem para o estudo das bifurcações de tais campos.

Inicialmente, definimos o conceito de sistema suave por partes, bem como algumas carac-

terísticas que nos dizem se um sistema suave por partes é um sistema suave contínuo por partes ou um sistema do tipo Filippov. Com ênfase no estudo dos sistemas do tipo Filippov, definimos os conceitos de fronteira de descontinuidade, região de deslize, região de costura e campo de Filippov. Diante de tais definições, apresentamos os sistemas de Filippov, caracterizamos os diversos tipos de pontos que podem aparecer e definimos o conceito de trajetória local por um ponto.

Em seguida, consideramos a família de sistemas lineares planares de Filippov descontínuos, constituída por sistemas da forma

$$\mathbf{x}' = \begin{cases} F^+(\mathbf{x}) & = A^+\mathbf{x} + b^+, \mathbf{x} \in \Sigma^+ \\ F^-(\mathbf{x}) & = A^-\mathbf{x} + b^-, \mathbf{x} \in \Sigma^- \end{cases}, \quad (1)$$

onde $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $F^+ : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F^- : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $A^+ = (a_{ij}^+)$ e $A^- = (a_{ij}^-)$ são matrizes 2×2 constantes, $b^+ = (b_1^+, b_2^+)$ e $b^- = (b_1^-, b_2^-)$ são vetores constantes,

$$\Sigma^+ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x > 0\} \text{ e } \Sigma^- = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x < 0\},$$

sob as condições $|a_{12}^+| + |a_{12}^-| \neq 0$ e

$$A^+ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} + b^+ \neq A^- \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} + b^-.$$

Notamos que o sistema (1) possui doze parâmetros. Sob certas condições, apresentamos uma forma normal com sete parâmetros que facilita o estudo de um sistema da forma (1). Além disso, a existência e a caracterização da região de deslize é determinada por apenas um dos parâmetros. Sob a condição de focos em ambos os campos F^+ e F^- , exibimos uma forma normal mais simples com apenas cinco parâmetros. Utilizando esta forma normal, consideramos o caso com um foco virtual e um foco real e descrevemos qualitativamente diferentes retratos de fase que podem ocorrer no espaço dos parâmetros. Por fim, definimos algumas aplicações de Poincaré com a finalidade de estudarmos as trajetórias periódicas deslizantes e os ciclos limite de costura, apresentando diferentes bifurcações e regiões no espaço dos parâmetros com nenhum, um, dois ou três ciclos limite de costura.

Estruturamos este trabalho da seguinte maneira:

Capítulo 1: apresentamos os principais conceitos que serão utilizados neste trabalho, entre eles a definição de sistema suave por partes, sistema de Filippov, fronteira de descontinuidade, região de deslize e região de costura. Além disso, caracterizamos os diversos tipos de pontos

que podem aparecer sobre a fronteira de descontinuidade de um sistema de Filippov, com a finalidade de definirmos o conceito de trajetória local por um ponto.

Capítulo 2: damos ênfase ao estudo dos sistemas lineares planares de Filippov descontínuos. Definimos o conceitos de trajetória periódica deslizante, trajetória periódica de costura e ciclo limite de costura. Em seguida, exibimos uma forma normal com 7 parâmetros para esta classe de sistemas e apresentamos alguns resultados.

Capítulo 3: apresentamos um estudo detalhado da classe dos sistemas lineares planares de Filippov descontínuos do tipo foco-foco, sendo um foco virtual e outro real. Para esta classe de sistemas, exibimos uma forma normal com 5 parâmetros, definimos a aplicação de Poincaré e estudamos condições para a existência e não existência de trajetórias periódicas deslizantes e ciclos limite de costura. Sobre certas condições, mostramos a existência de alguns tipos de bifurcações no espaço dos parâmetros.

Apêndice: tratamos brevemente do estudo desenvolvido em [4] sobre a classe dos sistemas lineares planares de Filippov descontínuos do tipo foco-foco, onde os dois focos são virtuais. Apresentamos dois diagramas globais de bifurcação que nos fornecem a existência de três tipos diferentes de bifurcação.

Este trabalho é baseado no artigo [5] e complementado pela referência [4]. Utilizamos as referências [2], [7] e [9] como base para as definições e para a caracterização de alguns tipos de bifurcações.

Capítulo 1

Sistemas suaves por partes

Com a finalidade de estudarmos os sistemas lineares planares de Filippov descontínuos com um ponto de equilíbrio real e um ponto de equilíbrio virtual, ambos pontos de equilíbrio do tipo foco, apresentamos neste capítulo uma introdução aos sistemas suaves por partes n -dimensionais com superfícies $(n-1)$ -dimensionais como fronteiras de descontinuidade. Exibimos algumas definições para este caso geral e em seguida damos ênfase à classe dos sistemas suaves por partes deslizantes com uma única fronteira de descontinuidade.

Definição 1.0.1. *Sejam $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$ abertos disjuntos não vazios em \mathbb{R}^n tais que cada intersecção*

$$\Sigma_{ij} := \bar{\Sigma}_i \cap \bar{\Sigma}_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad i \neq j \quad (1.1)$$

é uma superfície suave $(n-1)$ -dimensional não vazia contida nas fronteiras $\partial\Sigma_i$ e $\partial\Sigma_j$. Denote

$$\mathcal{C} = \bigcup_{i=1}^n \Sigma_i$$

e considere aplicações suaves

$$F_i : \mathcal{A} \stackrel{ab}{\subset} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$
$$x \longmapsto F_i(x)$$

com $\mathcal{C} \subset \bigcup_{i=1}^n \bar{\Sigma}_i \subset \mathcal{A}$. Chamamos um conjunto finito de equações diferenciais ordinárias

$$x' = \begin{cases} F_1(x), & \text{se } x \in \Sigma_1 \\ F_2(x), & \text{se } x \in \Sigma_2 \\ \vdots \\ F_n(x), & \text{se } x \in \Sigma_n \end{cases} \quad (1.2)$$

de **sistema suave por partes**. Chamamos as superfícies Σ_{ij} , com $i, j = 1, 2, \dots, n$, de **fronteiras de descontinuidade**. Geometricamente, veja a Figura 1.1.

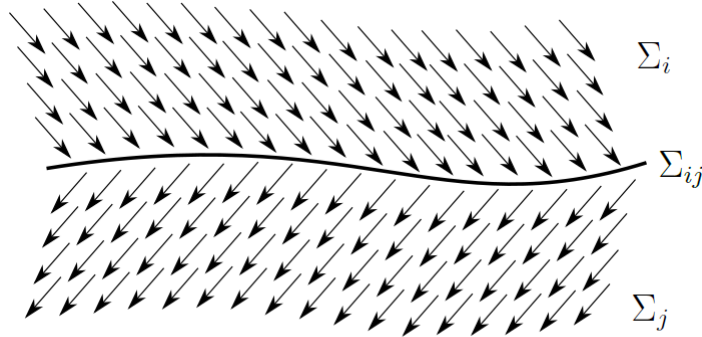


Figura 1.1: Campo vetorial suave por partes com uma fronteira de descontinuidade.

Observação 1.0.1. Dado um sistema da forma (1.2), observamos que cada campo vetorial F_i gera um fluxo suave φ_i bem definido sobre a fronteira $\partial\Sigma_i$ e em seus respectivos lados, com $i = 1, 2, \dots, n$. Além disso, não especificamos como a dinâmica do sistema (1.2) evolui sobre uma fronteira de descontinuidade Σ_{ij} , pois a dinâmica depende de como os campos vetoriais F_i e F_j se comportam próximo a Σ_{ij} .

Definição 1.0.2. Considere um sistema suave por partes da forma (1.2). Tome um ponto $p \in \Sigma_{ij}$. Dizemos que o ponto p tem **grau de suavidade r** se a primeira derivada parcial não nula em relação a t , aplicada em $t = 0$, da diferença $[\varphi_i(t, p) - \varphi_j(t, p)]$ é de ordem r .

No que segue, estamos interessados nos sistemas suaves por partes com uma única fronteira de descontinuidade. Consideramos o sistema suave por partes

$$x' = \begin{cases} F_1(x), & \text{se } x \in \Sigma_1 \\ F_2(x), & \text{se } x \in \Sigma_2 \end{cases}, \quad (1.3)$$

onde o campo $F_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gera um fluxo φ_1 e o campo $F_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gera um fluxo φ_2 . Tomamos $p \in \Sigma_{12}$. Denotamos por $F_{i,p}$ a matriz jacobiana do campo F_i aplicada no ponto p , com $i = 1, 2$. Temos, para $i = 1, 2$,

$$\left. \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}(t, p) \right|_{t=0} = F_i(\varphi_i(0, p)) = F_i(p),$$

$$\left. \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2}(t, p) \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial(F_i \circ \varphi_i)}{\partial t}(t, p) \right|_{t=0} = F_{i,p} \left. \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}(t, p) \right|_{t=0} = F_{i,p} F_i(p),$$

e assim por diante. Desta forma, se $F_1(p) \neq F_2(p)$, então p tem grau de suavidade um. Se $F_1(p) = F_2(p)$ e $F_{1,p} \neq F_{2,p}$, então p tem grau de suavidade dois, e assim por diante. Chamamos de **sistema suave contínuo por partes** um sistema da forma (1.3) onde todos os pontos de Σ_{12} tem grau de suavidade $r \geq 2$.

Exemplo 1.0.1. Consideramos o sistema suave por partes

$$x' = (x'_1, x'_2) = \begin{cases} F_1(x_1, x_2), & \text{se } x_2 > 0 \\ F_2(x_1, x_2), & \text{se } x_2 < 0 \end{cases},$$

onde $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $F_1(x_1, x_2) = (1, -x_1)$ e $F_2(x_1, x_2) = (1, 1)$. Observamos que

$$\Sigma_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_2 > 0\}, \Sigma_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_2 < 0\}$$

e $\Sigma_{12} = \overline{\Sigma_1} \cap \overline{\Sigma_2} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_2 = 0\} \neq \emptyset$. Temos

$$F_1(x_1, x_2) = F_2(x_1, x_2) \iff x_1 = -1.$$

Desta forma, os pontos de Σ_{12} que possuem grau de suavidade um são os pontos que pertencem ao conjunto $\Sigma_{12} \setminus \{(-1, 0)\}$. Por outro lado, para $p = (-1, 0)$, $F_1(p) = F_2(p)$ e

$$F_{1,p} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = F_{2,p}.$$

Logo, o ponto $(-1, 0)$ tem grau de suavidade dois.

Pela teoria de Variedades Diferenciáveis podemos escrever, localmente, um sistema do tipo (1.3) da forma

$$x' = \begin{cases} F_1(x), & \text{se } H(x) > 0 \\ F_2(x), & \text{se } H(x) < 0 \end{cases},$$

onde $H : \Omega \stackrel{ab}{\subset} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação suave tal que Ω é um conjunto conexo, 0 é um valor regular de H , com $H^{-1}(0) \subset \Sigma_{12}$, e $H^{-1}(0)$ divide o conjunto Ω nos conjuntos

$$\{x \in \Omega; H(x) > 0\} = \Sigma_1 \cap \Omega \text{ e } \{x \in \Omega; H(x) < 0\} = \Sigma_2 \cap \Omega.$$

1.1 Sistemas de Filippov

Estamos interessados em apresentar a classe dos sistemas de Filippov. Esta classe de sistemas, que está contida na classe dos sistemas suaves por partes com uma única fronteira de descontinuidade, exhibe alguns tipos de comportamento sobre a fronteira de descontinuidade. Nesta seção, analisamos um sistema da forma (1.3) com a finalidade de definirmos e estudarmos um sistema de Filippov.

Para analisarmos um sistema da forma (1.3) consideramos, sem perda de generalidade, um sistema local da forma

$$x' = F(x) = \begin{cases} F^+(x), & \text{se } x \in \Sigma^+ \\ F^-(x), & \text{se } x \in \Sigma^- \end{cases}, \quad (1.4)$$

com $F^+ := F_1$, $F^- := F_2$, $\Sigma^+ := \Sigma_1 = \{x \in \Omega; H(x) > 0\}$, $\Sigma^- := \Sigma_2 = \{x \in \Omega; H(x) < 0\}$, $\Omega = \Sigma^- \cup \Sigma \cup \Sigma^+$ e $\Sigma := H^{-1}(0) \subset \Omega$. Esta forma local será útil para introduzirmos o conceito de “movimento deslizante” que a classe dos sistemas da forma (1.3) pode apresentar. Dado uma aplicação suave $L : \Omega \stackrel{ab}{\subset} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ denotamos, para todo $x \in \Sigma$,

$$(L_x F^+)(x) = \langle \nabla L(x), F^+(x) \rangle \text{ e } (L_x F^-)(x) = \langle \nabla L(x), F^-(x) \rangle$$

deixando claro que x na notação L_x não possui ligação alguma com x .

Definição 1.1.1. *Considere o sistema (1.4). Chamamos de **região de deslize** o conjunto*

$$\Sigma_d = \{x \in \Sigma; (H_x F^+)(x)(H_x F^-)(x) \leq 0\}.$$

Chamamos de **região de costura** o conjunto

$$\Sigma_c = \{x \in \Sigma; (H_x F^+)(x)(H_x F^-)(x) > 0\}.$$

Se a região de deslize Σ_d do sistema (1.4) tem interior não vazio, dizemos que o sistema possui **movimento deslizante** e o chamamos de **sistema suave por partes deslizante**.

Consideramos um sistema suave por partes deslizante. Observamos que o interior do conjunto Σ_d é dado por

$$\text{int } \Sigma_d = \{x \in \Sigma_d; (H_x F^+)(x)(H_x F^-)(x) < 0\}.$$

Logo, em pontos do interior de Σ_d , a $\text{proj}_{\nabla H} F^+$ e a $\text{proj}_{\nabla H} F^-$ estão em sentidos opostos. Dizemos que $D \subseteq \Sigma_d$ é uma **região atratora** se, para todo $x \in D$,

$$(H_x F^+)(x) < 0 \text{ e } (H_x F^-)(x) > 0.$$

Da mesma forma, $D \subseteq \Sigma_d$ é uma **região repulsora** se, para todo $x \in D$,

$$(H_x F^+)(x) > 0 \text{ e } (H_x F^-)(x) < 0.$$

Geometricamente, veja a Figura 1.2.

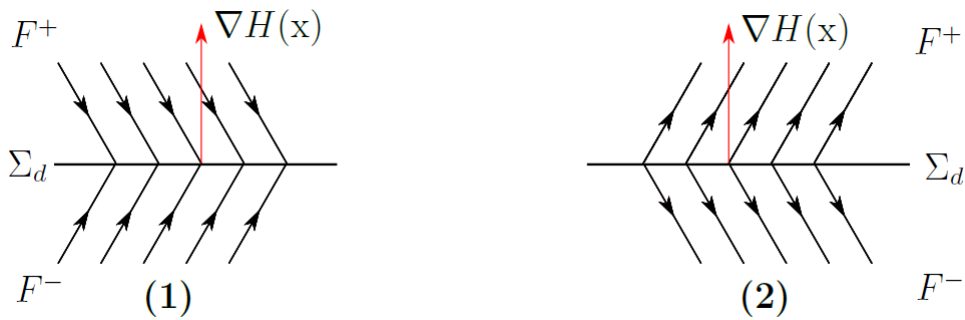


Figura 1.2: (1) Região atratora em Σ_d ; (2) Região repulsora em Σ_d .

Em pontos de uma região de costura, a $\text{proj}_{\nabla H} F^+$ e a $\text{proj}_{\nabla H} F^-$ possuem o mesmo sentido. Geometricamente, veja a Figura 1.3.

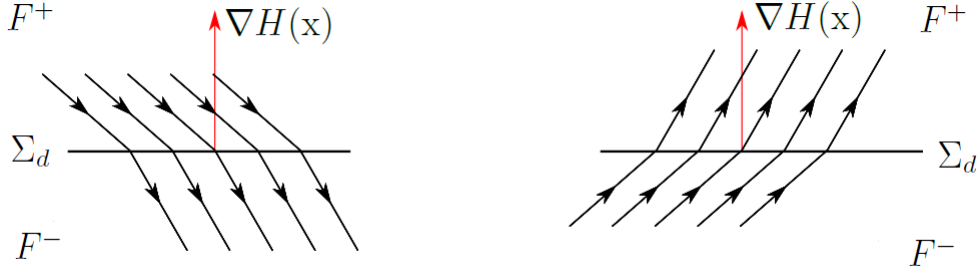


Figura 1.3: Regiões de costura.

Notamos que

$$\partial\Sigma_d = \partial\Sigma_c \subset \{x \in \Sigma; (H_x F^+)(x)(H_x F^-)(x) = 0\} \subset \Sigma_d.$$

Teorema 1.1.1. *Considere um sistema suave por partes deslizante. O grau de suavidade de todos os pontos do interior da região de deslize é um.*

Demonstração

Seja Σ_d a região de deslize. Supomos, por absurdo, que existe $p \in \text{int } \Sigma_d$ tal que

$$F^+(p) = F^-(p).$$

Logo, $(H_x F^+)(p) = (H_x F^-)(p)$ e então,

$$[(H_x F^+)(p)][(H_x F^-)(p)] = [(H_x F^+)(p)]^2 \geq 0.$$

Absurdo, pois pela definição de região de deslize, $[(H_x F^+)(x)][(H_x F^-)(x)] < 0$ para todo $x \in \text{int } \Sigma_d$. Desta forma, para todo $x \in \text{int } \Sigma_d$, $F^+(x) \neq F^-(x)$.

Portanto, todos os pontos do interior da região de deslize tem grau de suavidade um. ■

Para estudarmos o comportamento do fluxo de um sistema suave por partes deslizante sobre a região de deslize, consideramos o sistema

$$x' = \mathcal{F}(x) = (1 - \alpha)F^+(x) + \alpha F^-(x), \quad (1.5)$$

definido na região de deslize, onde escolhemos $\alpha \in \mathbb{R}$ de tal forma que

$$\langle \nabla H(x), \mathcal{F}(x) \rangle = 0,$$

isto é, escolhemos $\alpha = \alpha(x)$ de tal forma que o campo vetorial \mathcal{F} seja tangente à fronteira de descontinuidade nos pontos da região de deslize. Chamamos o campo \mathcal{F} de **campo de Filippov** do sistema (1.4). Geometricamente, veja a Figura 1.4.

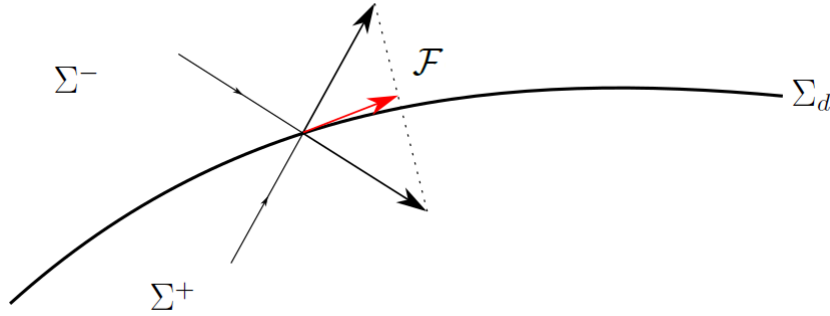


Figura 1.4: Campo de Filippov.

Seja Σ_d a região de deslize. Se $x \in \Sigma_d$ e $|(H_x F^+)(x)| + |(H_x F^-)(x)| \neq 0$, temos

$$\alpha = \alpha(x) = \frac{(H_x F^+)(x)}{[H_x(F^+ - F^-)](x)} \text{ e } \mathcal{F}(x) = \frac{F^-(x)(H_x F^+)(x) - F^+(x)(H_x F^-)(x)}{[H_x(F^+ - F^-)](x)}. \quad (1.6)$$

Definição 1.1.2. Chamamos de **sistema de Filippov** um sistema suave por partes deslizante tal que o comportamento na região de deslize é determinado pelo sistema (1.5).

Definição 1.1.3. Considere um sistema de Filippov e tome $p \in \Sigma^- \cup \Sigma \cup \Sigma^+$.

- a) Se $p \in \Sigma^+$ e $F^+(p) = 0$, dizemos que p é um **ponto de equilíbrio real** do campo F^+ .
Da mesma forma, se $p \in \Sigma^-$ e $F^-(p) = 0$, dizemos que p é um **ponto de equilíbrio real** do campo F^- ;
- b) Se $p \in \Sigma^+$ e $F^-(p) = 0$, dizemos que p de **ponto de equilíbrio virtual** do campo F^- .
Da mesma forma, se $p \in \Sigma^-$ e $F^+(p) = 0$, dizemos que p é um **ponto de equilíbrio virtual** do campo F^+ ;
- c) Se $p \in \Sigma_d$ e $\mathcal{F}(p) = 0$, chamamos p de **pseudo-equilíbrio**;

d) Se $p \in \Sigma_d$, $(H_x F^+)(p) = 0$ e $F^+(p) \neq 0$, chamamos p de **ponto de tangência** do campo F^+ . Dizemos que o contato da trajetória de F^+ no ponto p é **quadrático** se p é um ponto de tangência do campo F^+ e

$$[(H_x F^+)_x F^+](p) \neq 0.$$

Se p é um ponto de tangência do campo F^+ e

$$[(H_x F^+)_x F^+](p) > 0 \text{ (respectivamente, } [(H_x F^+)_x F^+](p) < 0),$$

dizemos que p é **ponto de tangência visível** (respectivamente, **ponto de tangência invisível**) do campo F^+ . De forma análoga, se $p \in \Sigma_d$, $(H_x F^-)(p) = 0$ e $F^-(p) \neq 0$, chamamos p de **ponto de tangência** do campo F^- . Dizemos que o contato da trajetória de F^- no ponto p é **quadrático** se p é um ponto de tangência do campo F^- e

$$[(H_x F^-)_x F^-](p) \neq 0.$$

Se p é um ponto de tangência do campo F^- e

$$[(H_x F^-)_x F^-](p) < 0 \text{ (respectivamente, } [(H_x F^-)_x F^-](p) > 0),$$

dizemos que p é um **ponto de tangência visível** (respectivamente, **ponto de tangência invisível**) do campo F^- . Se $p \in \Sigma_d$ é um ponto de tangência de ambos os campos F^+ e F^- , dizemos que p é um **ponto de tangência dupla**. Geometricamente, veja a Figura 1.5.

e) Dizemos que $p \in \Sigma_d$ é um **ponto de equilíbrio de fronteira** de F^+ (respectivamente, F^-) se $F^+(p) = 0$ (respectivamente, $F^-(p) = 0$);

f) Dizemos que $p \in \Sigma_d$ é um **ponto de equilíbrio deslizante** se ou é ponto de tangência para ambos os campos F^+ e F^- , ou é ponto de tangência para um dos campos e ponto de equilíbrio de fronteira para o outro, ou é ponto de equilíbrio de fronteira para ambos os campos F^+ e F^- .

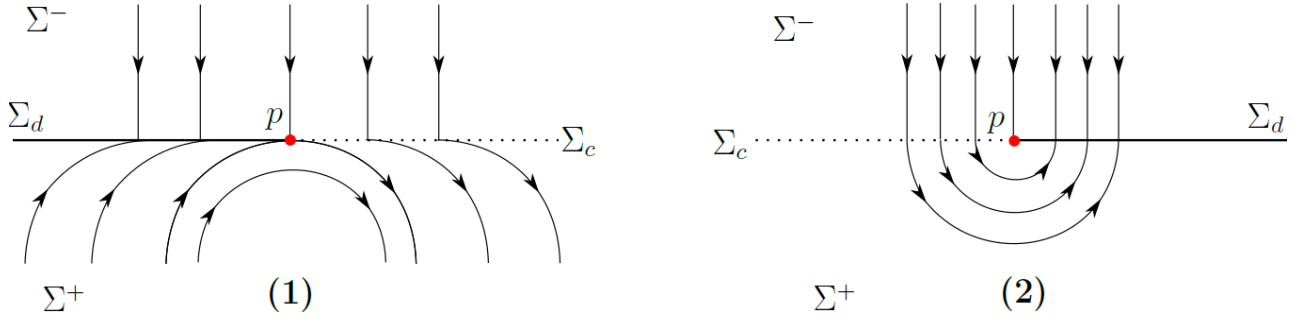


Figura 1.5: (1) ponto de tangência visível do campo F^+ ; (2) ponto de tangência invisível do campo F^+ .

Lema 1.1.1. *Considere um sistema de Filippov. Seja $p \in \Sigma_d$ e suponha $|(H_x F^+)(p)| + |(H_x F^-)(p)| \neq 0$. Então, p é um pseudo-equilíbrio se, e somente se, os vetores $F^+(p)$ e $F^-(p)$ são linearmente dependentes.*

Demonstração

(\implies) Supomos que $p \in \Sigma_d$ é um pseudo-equilíbrio. Primeiramente, assumimos

$$(H_x F^+)(p) \neq 0 \text{ e } (H_x F^-)(p) \neq 0.$$

Pela definição de região de deslize, os números $(H_x F^+)(p)$ e $(H_x F^-)(p)$ possuem sinais opostos. Como $\mathcal{F}(p) = 0$ temos, da equação (1.6),

$$F^-(p)(H_x F^+)(p) - F^+(p)(H_x F^-)(p) = 0.$$

Denotamos $\lambda_1 = -(H_x F^-)(p)$ e $\lambda_2 = (H_x F^+)(p)$. Logo,

$$\lambda_1 F^+(p) + \lambda_2 F^-(p) = 0.$$

Desta forma, os vetores $F^+(p)$ e $F^-(p)$ são linearmente dependentes.

Assumimos

$$(H_x F^+)(p) = 0 \text{ ou } (H_x F^-)(p) = 0,$$

com $|(H_x F^+)(p)| + |(H_x F^-)(p)| \neq 0$. Sem perda de generalidade, supomos $(H_x F^+)(p) = 0$ e $(H_x F^-)(p) \neq 0$. Como $\mathcal{F}(p) = 0$ obtemos, da equação (1.6), $F^+(p) = 0$. Denotamos $\lambda_2 = (H_x F^-)(p) \neq 0$. Então,

$$0F^-(p) + \lambda_2 F^+(p) = 0.$$

Desta forma, $F^+(p)$ e $F^-(p)$ são linearmente dependentes.

Portanto, os vetores $F^+(p)$ e $F^-(p)$ são linearmente dependentes.

(\Leftarrow) Supomos que os vetores $F^+(p)$ e $F^-(p)$ são linearmente dependentes. Logo, existem $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, com $|\lambda_1| + |\lambda_2| \neq 0$, tais que

$$\lambda_1 F^+(p) + \lambda_2 F^-(p) = 0.$$

Assumimos, sem perda de generalidade, $\lambda_1 \neq 0$. Desta forma, $F^+(p) = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} F^-(p)$ e então,

$$(H_x F^+)(p) = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} (H_x F^-)(p).$$

Logo,

$$\mathcal{F}(p) = \frac{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1} F^-(p)(H_x F^-)(p) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} F^-(p)(H_x F^-)(p)}{[H_x(F^+ - F^-)](p)} = 0.$$

Portanto, p é um pseudo-equilíbrio. ■

Definição 1.1.4. *Considere um sistema de Filippov e tome $p \in \Sigma^- \cup \Sigma \cup \Sigma^+$. Definimos o conceito de uma **trajetória local** de um sistema de Filippov por p da seguinte forma:*

- a) *Se $p \in \Sigma^-$ (respectivamente, Σ^+), então uma trajetória local por p é uma trajetória local de $\mathbf{x}' = F^-(\mathbf{x})$ (respectivamente, $\mathbf{x}' = F^+(\mathbf{x})$) contida em Σ^- (respectivamente, Σ^+);*
- b) *Se $p \in \Sigma_c$, então uma trajetória local por p ou é uma trajetória local de $\mathbf{x}' = F^-(\mathbf{x})$ por p contida em $\Sigma^- \cup \{p\}$, ou uma trajetória local de $\mathbf{x}' = F^+(\mathbf{x})$ por p contida em $\Sigma^+ \cup \{p\}$, ou uma concatenação de segmentos de trajetórias locais dos sistemas $\mathbf{x}' = F^-(\mathbf{x})$ e $\mathbf{x}' = F^+(\mathbf{x})$ que passam por p , onde p é ponto de partida de uma das trajetórias e ponto de chegada da outra, respeitando a continuidade do tempo t . Geometricamente, veja a Figura 1.6;*

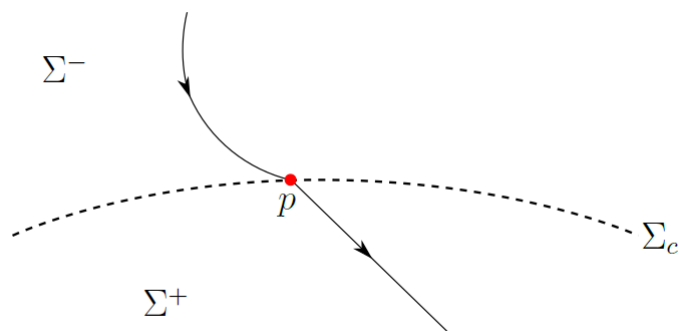


Figura 1.6: Uma trajetória local por um ponto p em uma região de costura.

- c) Se $p \in \Sigma_d$ é um pseudo-equilíbrio, ou um ponto de equilíbrio de fronteira de ambos os campos F^- e F^+ , ou um ponto de tangência de um dos campos e um ponto de equilíbrio de fronteira do outro campo, ou um ponto de tangência visível / invisível de ambos os campos F^- e F^+ , então uma trajetória local por p é o próprio ponto p . Geometricamente, veja a Figura 1.7;

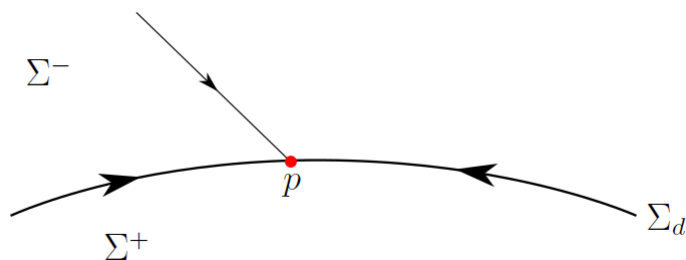


Figura 1.7: Uma trajetória local por um ponto de equilíbrio de fronteira p do campo F^- .

- d) Se $p \in \Sigma_d$, $F^-(p) = cF^+(p)$, com $c > 0$, e p é ponto de tangência visível de um dos campos F^- ou F^+ , digamos F^- , e ponto de tangência invisível do campo F^+ , então uma trajetória local por p uma trajetória local de $\mathbf{x}' = F^-(\mathbf{x})$ por p contida em $\Sigma^- \cup \{p\}$. Geometricamente, veja a Figura 1.8;

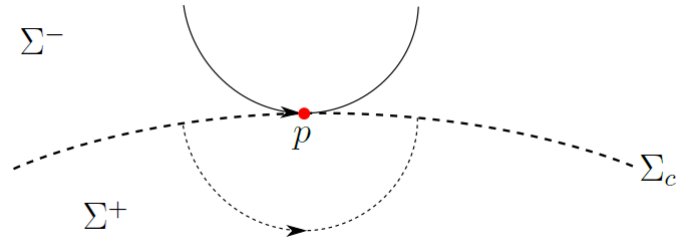


Figura 1.8: Uma trajetória local por um ponto p tal que p é um ponto de tangência visível do campo F^- e um ponto de tangência invisível do campo F^+ .

e) Se $p \in \Sigma_d$ e p não se encaixa nos itens **c)** e **d)**, então uma trajetória local por p é ou uma trajetória local de $x' = F^-(x)$ por p contida em $\Sigma^- \cup \{p\}$ (veja a imagem **(1)** da Figura 1.9), ou uma trajetória local de $x' = F^+(x)$ por p contida em $\Sigma^+ \cup \{p\}$ (veja a imagem **(2)** da Figura 1.9), ou uma trajetória local de $x' = \mathcal{F}(x)$ por p (veja a imagem **(3)** da Figura 1.9), ou uma concatenação de segmentos de trajetórias locais de $x' = F^-(x)$ e $x' = F^+(x)$ passando por p com um segmento de uma trajetória local de $x' = \mathcal{F}(x)$ por p , respeitando a continuidade do tempo t (veja a imagem **(4)** da Figura 1.9).

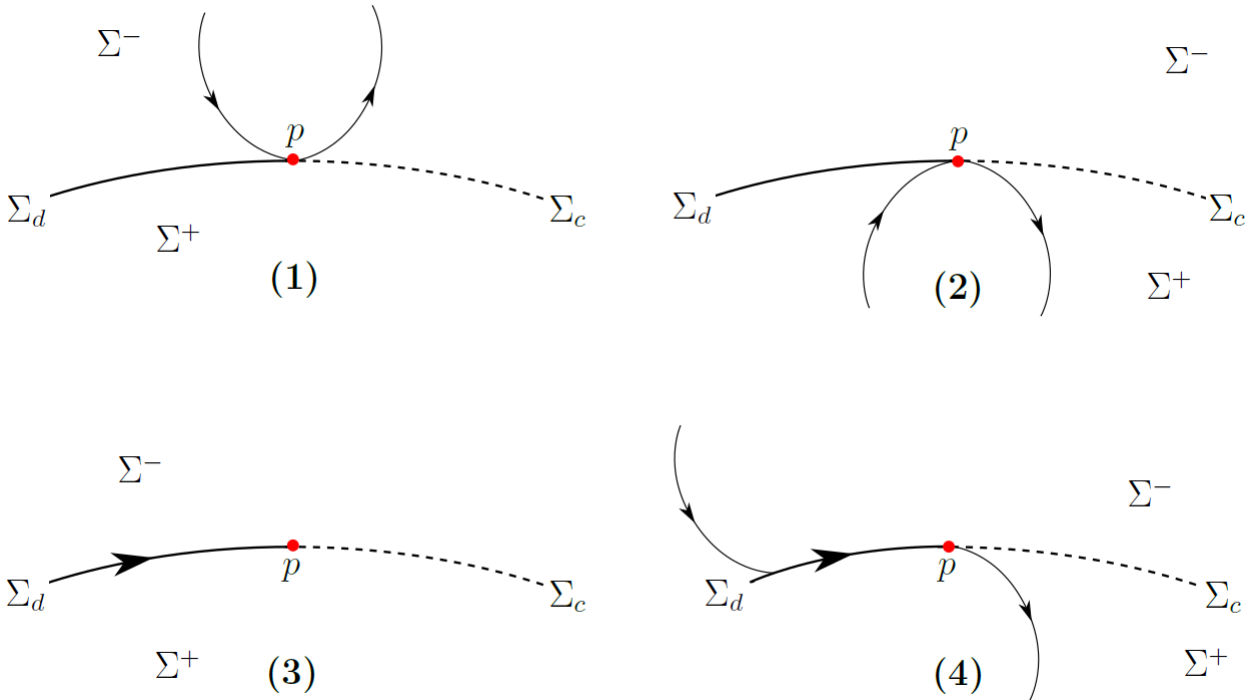


Figura 1.9: Algumas trajetórias locais por um ponto $p \in \Sigma_d$ tal que p não se encaixa nos itens **c)** e **d)**.

Observação 1.1.1. Diante do item **c)** da Definição 1.1.4 assumimos que todo ponto p tal que p é um ponto de tangência visível /invisível de ambos os campos F^+ e F^- , ou um ponto de

tangência de um dos campos e um ponto de equilíbrio de fronteira do outro campo ou um ponto de equilíbrio de fronteira de ambos os campos F^+ e F^- , é um pseudo-equilíbrio.

Definição 1.1.5. *Considere um sistema de Filippov. Seja γ uma trajetória periódica deste sistema que não está totalmente contida em Σ^+ ou Σ^- . Dizemos que γ é uma **trajetória periódica deslizante** se γ contém pontos do interior da região de deslize. Dizemos que γ é uma **trajetória periódica de costura** se γ não contém pontos da região de deslize. Chamamos γ de **ciclo limite de costura** se γ é uma trajetória periódica de costura e se existe uma vizinhança V de γ tal que γ é a única trajetória periódica de costura, do sistema considerado, que intercepta V .*

Capítulo 2

Sistemas lineares planares de Filippov descontínuos

No capítulo anterior, apresentamos a definição de sistema de Filippov, definimos o conceito de trajetória local por um ponto e caracterizamos alguns pontos importantes que podem surgir no estudo dos sistemas de Filippov. Neste capítulo, estudamos a classe dos sistemas de Filippov definidos em todo o espaço \mathbb{R}^2 , sendo a fronteira de descontinuidade Σ uma reta e os campos F^- e F^+ lineares de tal forma que, para todo $x \in \Sigma$, $F^+(x) \neq F^-(x)$. Em seguida, exibimos uma forma normal com 7 parâmetros que representa um sistema qualquer desta classe e apresentamos alguns resultados.

Consideramos a aplicação $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $H(x, y) = x$, e um sistema de Filippov definido em todo o espaço \mathbb{R}^2 , onde Σ é uma reta e os campos vetoriais $F^+ : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $F^- : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ são campos lineares. Sem perda de generalidade, admitimos que tal sistema é da forma

$$x' = F(x) = \begin{cases} F^+(x) = A^+x + b^+, & x \in \Sigma^+ \\ F^-(x) = A^-x + b^-, & x \in \Sigma^- \end{cases}, \quad (2.1)$$

onde $x \in \mathbb{R}^2$, $F^+ = (F_1^+, F_2^+)$, $F^- = (F_1^-, F_2^-)$, $A^+ = (a_{ij}^+)$ e $A^- = (a_{ij}^-)$ são matrizes 2×2 constantes, $b^+ = (b_1^+, b_2^+)$ e $b^- = (b_1^-, b_2^-)$ são vetores constantes,

$$\Sigma^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}, \Sigma^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\} \text{ e } \Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}.$$

Observação 2.0.1. Se $|a_{12}^+| + |a_{12}^-| = 0$, então $a_{12}^+ = 0$ e $a_{12}^- = 0$. Logo,

$$F^+(0, y) = (b_1^+, F_2^+(0, y)) \text{ e } F^-(0, y) = (b_1^-, F_2^-(0, y)).$$

Conseqüentemente, uma trajetória local por um ponto de Σ não pode cruzar Σ duas vezes em sentidos opostos. Por outro lado, sob a condição $|a_{12}^+| + |a_{12}^-| \neq 0$, há a possibilidade de existência de uma trajetória local de (2.1) que cruza Σ pelo menos duas vezes em sentidos opostos.

Diante da Definição 1.1.1, as regiões de costura e deslize relativas ao sistema (2.1) são dadas por

$$\Sigma_c = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : F_1^+(0, y)F_1^-(0, y) > 0\}$$

e

$$\Sigma_d = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : F_1^+(0, y)F_1^-(0, y) \leq 0\}.$$

Consideramos o sistema

$$x' = (x', y') = \mathcal{F}(x) = (1 - \alpha)F^+(x) + \alpha F^-(x) \tag{2.2}$$

definido em Σ_d com $\alpha = \alpha(x) \in \mathbb{R}$ e

$$(1 - \alpha)F_1^+(x) + \alpha F_1^-(x) = 0.$$

Notamos que o campo \mathcal{F} é o campo de Filippov do sistema (2.1).

Se $x \in \Sigma_d$ e $|F_1^+(x)| + |F_1^-(x)| \neq 0$, então

$$\alpha = \frac{F_1^+(x)}{F_1^+(x) - F_1^-(x)}$$

e

$$x' = 0, \quad g(y) := y' = \frac{F_1^+(x)F_2^-(x) - F_1^-(x)F_2^+(x)}{F_1^+(x) - F_1^-(x)}.$$

Assumimos que o sistema (2.1) satisfaz a condição

$$A^+ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} + b^+ \neq A^- \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} + b^-,$$

isto é, possui grau de suavidade um em todos os pontos de Σ , de acordo com a Definição 1.0.2. Sob esta condição, dizemos que o sistema (2.1) é um **sistema linear planar de Filippov descontínuo**.

A seguir, reproduzimos a Definição 1.1.3 para um sistema linear planar de Filippov descontínuo e acrescentamos outras definições.

Consideramos o sistema (2.1) e tomamos $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$.

- a) O ponto p é um **ponto de equilíbrio real** do campo F^+ se $p \in \Sigma^+$ e $F^+(p) = 0$. Da mesma forma, o ponto p é um **ponto de equilíbrio real** do campo F^- se $p \in \Sigma^-$ e $F^-(p) = 0$;
- b) O ponto p é um **ponto de equilíbrio virtual** do campo F^+ se $p \in \Sigma^-$ e $F^+(p) = 0$. Da mesma forma, o ponto p é um **ponto de equilíbrio virtual** do campo F^- se $p \in \Sigma^+$ e $F^-(p) = 0$;
- c) O ponto p é um **ponto de tangência** do campo F^+ se $p \in \Sigma_d$, $F_1^+(p) = 0$ e $F_2^+(p) \neq 0$. O contato da trajetória de F^+ no ponto p é **quadrático** quando p é um ponto de tangência do campo F^+ e

$$[(F_1^+)_x F^+](p) \neq 0.$$

O ponto p é um **ponto de tangência visível** (respectivamente, **ponto de tangência invisível**) do campo F^+ se p é um ponto de tangência do campo F^+ e

$$[(F_1^+)_x F^+](p) > 0 \text{ (respectivamente, } [(F_1^+)_x F^+](p) < 0).$$

De forma análoga, o ponto p é um **ponto de tangência** do campo F^- se $p \in \Sigma_d$, $F_1^-(p) = 0$ e $F_2^-(p) \neq 0$. O contato da trajetória de F^- no ponto p é **quadrático** quando p é um ponto de tangência do campo F^- e

$$[(F_1^-)_x F^-](p) \neq 0.$$

O ponto p é um **ponto de tangência visível** (respectivamente, **ponto de tangência invisível**) do campo F^- se p é um ponto de tangência do campo F^- e

$$[(F_1^-)_x F^-](p) < 0 \text{ (respectivamente, } [(F_1^-)_x F^-](p) > 0).$$

O ponto p é um **ponto de tangência dupla** se p é um ponto de tangência de ambos os campos F^+ e F^- ;

- d) O ponto p é um **ponto de equilíbrio de fronteira** do campo F^+ (respectivamente, F^-) se $p \in \Sigma_d$ e $F^+(p) = 0$ (respectivamente, $p \in \Sigma_d$ e $F^-(p) = 0$);
- e) O ponto p é um **ponto de equilíbrio deslizante** se $p \in \Sigma_d$ e $F_1^+(p) = F_1^-(p) = 0$;
- f) O ponto p é um **pseudo-equilíbrio** se $p \in \Sigma_d$ e $g(p_2) = 0$.

Definição 2.0.1. *Considere o sistema (2.1) e tome $p = (p_1, p_2) \in \Sigma_d$.*

- a) Dizemos que p é um **pseudo-nó estável** (respectivamente, **pseudo-sela**) se p é um pseudo-equilíbrio que está em uma região atratora de Σ_d e $g'(p_2) < 0$ (respectivamente, $g'(p_2) > 0$). Analogamente, dizemos que p é um **pseudo-nó instável** (respectivamente, **pseudo-sela**) se p é um pseudo-equilíbrio que está em uma região repulsora de Σ_d e $g'(p_2) > 0$ (respectivamente, $g'(p_2) < 0$). Dizemos, também, que p é uma **pseudo-sela** se p é um ponto de tangência visível de ambos os campos F^+ e F^- e $F_2^+(p)F_2^-(p) < 0$;
- b) Dizemos que p é um **pseudo-foco** se p é um ponto de tangência invisível para ambos os campos F^+ e F^- tal que existe uma vizinhança de p de tal forma que uma trajetória local por um ponto nesta vizinhança espirala ou gira em torno de p .

Observação 2.0.2. a) Seja $p = (0, p_2) \in \Sigma_d$ um ponto de tangência do campo F^+ . Como $F_2^+(p_2) = a_{22}^+p_2 + b_2^+ \neq 0$, segue

$$[(F_1^+)_x F^+](p) \neq 0 \iff a_{12}^+(a_{22}^+p_2 + b_2^+) \neq 0 \iff a_{12}^+ \neq 0.$$

Analogamente, seja $q = (0, q_2) \in \Sigma_d$ um ponto de tangência do campo F^- . Como $F_2^-(q_2) = a_{22}^-q_2 + b_2^- \neq 0$, temos

$$[(F_1^-)_x F^-](q) \neq 0 \iff a_{12}^-(a_{22}^-q_2 + b_2^-) \neq 0 \iff a_{12}^- \neq 0.$$

Portanto, o parâmetro a_{12}^+ (respectivamente, a_{12}^-) determina se o contato de uma trajetória local de F^+ no ponto p (respectivamente, F^- no ponto q) é quadrático;

- b) Se um ponto de tangência dupla p é ponto de tangência visível de um dos campos F^+ e F^- e ponto de tangência invisível para o outro campo, com $F^+(p) = cF^-(p)$, para algum $c > 0$, então dizemos que p comporta-se como ponto regular;
- c) Se um pseudo-equilíbrio p não é nem ponto de tangência nem ponto de equilíbrio de fronteira dos campos F^+ e F^- , então

$$\frac{F_2^-(p)}{F_1^-(p)} = \frac{F_2^+(p)}{F_1^+(p)}.$$

2.1 Forma normal para os sistemas lineares planares de Filippov descontínuos com a possibilidade de existência de trajetórias periódicas de costura

Uma dificuldade em estudarmos os sistemas lineares planares de Filippov descontínuos é a quantidade de parâmetros. No nosso caso temos 12 parâmetros. Apresentamos um resultado que expõe uma forma normal com 7 parâmetros.

No que segue, analisamos o sinal das componentes F_1^+ e F_1^- aplicadas em pontos da fronteira de descontinuidade associada ao sistema (2.1). Sabemos que a região de costura Σ_c é formada pelos pontos $(0, y) \in \Sigma$ tais que

$$F_1^+(0, y)F_1^-(0, y) = (a_{12}^+y + b_1^+)(a_{12}^-y + b_1^-) > 0.$$

Supomos $\Sigma_c \neq \emptyset$. Se $a_{12}^-a_{12}^+ = 0$, então Σ_c é ilimitado pois supondo, sem perda de generalidade, $a_{12}^- = 0$, $a_{12}^+ > 0$ e $b_1^- > 0$ temos

$$(a_{12}^+y + b_1^+)(a_{12}^-y + b_1^-) = a_{12}^+b_1^-y + b_1^+b_1^- > 0 \iff a_{12}^+y + b_1^+ > 0$$

e, conseqüentemente,

$$\Sigma_c = \left\{ (0, y) \in \Sigma; y > \frac{-b_1^+}{a_{12}^+} \right\}.$$

Se $a_{12}^- a_{12}^+ < 0$, então Σ_c é um conjunto aberto limitado no eixo y pois $(a_{12}^+ y + b_1^+)(a_{12}^- y + b_1^-)$ é uma parábola em função de y com concavidade para baixo. Observamos que

$$F_1^+(0, y)F_1^-(0, y) = (a_{12}^+ y + b_1^+)(a_{12}^- y + b_1^-) = 0 \iff y = \frac{-b_1^+}{a_{12}^+} \text{ ou } y = \frac{-b_1^-}{a_{12}^-}.$$

Primeiramente, supomos $a_{12}^+ > 0$ e $a_{12}^- < 0$. Se $\frac{-b_1^+}{a_{12}^+} < \frac{-b_1^-}{a_{12}^-}$, então

$$\Sigma_c = \left\{ (0, y) \in \Sigma; \frac{-b_1^+}{a_{12}^+} < y < \frac{-b_1^-}{a_{12}^-} \right\}$$

e, para todo $(0, y) \in \Sigma_c$,

$$F_1^+(0, y) = a_{12}^+ y + b_1^+ > 0 \text{ e } F_1^-(0, y) = a_{12}^- y + b_1^- > 0.$$

Se $\frac{-b_1^-}{a_{12}^-} < \frac{-b_1^+}{a_{12}^+}$, então

$$\Sigma_c = \left\{ (0, y) \in \Sigma; \frac{-b_1^-}{a_{12}^-} < y < \frac{-b_1^+}{a_{12}^+} \right\}$$

e, para todo $(0, y) \in \Sigma_c$,

$$F_1^+(0, y) = a_{12}^+ y + b_1^+ < 0 \text{ e } F_1^-(0, y) = a_{12}^- y + b_1^- < 0.$$

Supomos $a_{12}^+ < 0$ e $a_{12}^- > 0$. Se $\frac{-b_1^+}{a_{12}^+} < \frac{-b_1^-}{a_{12}^-}$, então

$$\Sigma_c = \left\{ (0, y) \in \Sigma; \frac{-b_1^+}{a_{12}^+} < y < \frac{-b_1^-}{a_{12}^-} \right\}$$

e, para todo $(0, y) \in \Sigma_c$,

$$F_1^+(0, y) = a_{12}^+ y + b_1^+ < 0 \text{ e } F_1^-(0, y) = a_{12}^- y + b_1^- < 0.$$

Se $\frac{-b_1^-}{a_{12}^-} < \frac{-b_1^+}{a_{12}^+}$, então

$$\Sigma_c = \left\{ (0, y) \in \Sigma; \frac{-b_1^-}{a_{12}^-} < y < \frac{-b_1^+}{a_{12}^+} \right\}$$

e, para todo $(0, y) \in \Sigma_c$,

$$F_1^+(0, y) = a_{12}^+ y + b_1^+ > 0 \text{ e } F_1^-(0, y) = a_{12}^- y + b_1^- > 0.$$

Quando $a_{12}^- a_{12}^+ > 0$, a região de costura é a união de dois conjuntos abertos ilimitados no eixo y e a região de deslizamento é um conjunto fechado limitado no eixo y pois $(a_{12}^+ y + b_1^+)(a_{12}^- y + b_1^-)$ é uma parábola em função de y com concavidade para cima. Inicialmente, supomos $a_{12}^+ > 0$ e $a_{12}^- > 0$. Se $\frac{-b_1^+}{a_{12}^+} < \frac{-b_1^-}{a_{12}^-}$, então

$$\Sigma_c = \left\{ (0, y) \in \Sigma; \frac{-b_1^-}{a_{12}^-} < y \text{ ou } y < \frac{-b_1^+}{a_{12}^+} \right\} \text{ e } \Sigma_d = \left\{ (0, y) \in \Sigma; \frac{-b_1^+}{a_{12}^+} < y < \frac{-b_1^-}{a_{12}^-} \right\}$$

onde

$$\frac{-b_1^-}{a_{12}^-} < y \implies F_1^+(0, y), F_1^-(0, y) > 0, \quad y < \frac{-b_1^+}{a_{12}^+} \implies F_1^+(0, y), F_1^-(0, y) < 0$$

e

$$\frac{-b_1^+}{a_{12}^+} < y < \frac{-b_1^-}{a_{12}^-} \implies F_1^+(0, y) > 0 \text{ e } F_1^-(0, y) < 0.$$

Se $\frac{-b_1^-}{a_{12}^-} < \frac{-b_1^+}{a_{12}^+}$, então

$$\Sigma_c = \left\{ (0, y) \in \Sigma; \frac{-b_1^+}{a_{12}^+} < y \text{ ou } y < \frac{-b_1^-}{a_{12}^-} \right\} \text{ e } \Sigma_d = \left\{ (0, y) \in \Sigma; \frac{-b_1^-}{a_{12}^-} < y < \frac{-b_1^+}{a_{12}^+} \right\}$$

onde

$$\frac{-b_1^+}{a_{12}^+} < y \implies F_1^+(0, y), F_1^-(0, y) > 0, \quad y < \frac{-b_1^-}{a_{12}^-} \implies F_1^+(0, y), F_1^-(0, y) < 0$$

e

$$\frac{-b_1^-}{a_{12}^-} < y < \frac{-b_1^+}{a_{12}^+} \implies F_1^+(0, y) < 0 \text{ e } F_1^-(0, y) > 0.$$

Supomos $a_{12}^+ < 0$ e $a_{12}^- < 0$. Se $\frac{-b_1^+}{a_{12}^+} < \frac{-b_1^-}{a_{12}^-}$, então

$$\Sigma_c = \left\{ (0, y) \in \Sigma; \frac{-b_1^-}{a_{12}^-} < y \text{ ou } y < \frac{-b_1^+}{a_{12}^+} \right\} \text{ e } \Sigma_d = \left\{ (0, y) \in \Sigma; \frac{-b_1^+}{a_{12}^+} < y < \frac{-b_1^-}{a_{12}^-} \right\}$$

onde

$$\frac{-b_1^-}{a_{12}^-} < y \implies F_1^+(0, y), F_1^-(0, y) < 0, \quad y < \frac{-b_1^+}{a_{12}^+} \implies F_1^+(0, y), F_1^-(0, y) > 0$$

e

$$\frac{-b_1^+}{a_{12}^+} < y < \frac{-b_1^-}{a_{12}^-} \implies F_1^+(0, y) < 0 \text{ e } F_1^-(0, y) > 0.$$

Se $\frac{-b_1^-}{a_{12}^-} < \frac{-b_1^+}{a_{12}^+}$, então

$$\Sigma_c = \left\{ (0, y) \in \Sigma; \frac{-b_1^+}{a_{12}^+} < y \text{ ou } y < \frac{-b_1^-}{a_{12}^-} \right\} \text{ e } \Sigma_d = \left\{ (0, y) \in \Sigma; \frac{-b_1^-}{a_{12}^-} < y < \frac{-b_1^+}{a_{12}^+} \right\}$$

onde

$$\frac{-b_1^+}{a_{12}^+} < y \implies F_1^+(0, y), F_1^-(0, y) < 0, \quad y < \frac{-b_1^-}{a_{12}^-} \implies F_1^+(0, y), F_1^-(0, y) > 0$$

e

$$\frac{-b_1^-}{a_{12}^-} < y < \frac{-b_1^+}{a_{12}^+} \implies F_1^+(0, y) > 0 \text{ e } F_1^-(0, y) < 0.$$

Desta forma, observamos que para $a_{12}^- a_{12}^+ \leq 0$, as componentes F_1^+ e F_1^- possuem sinais constantes quando as aplicamos em pontos de Σ_c . Logo, ficam excluídas as trajetórias periódicas de costura. Como queremos estudar tais trajetórias, no que segue assumimos $a_{12}^- a_{12}^+ > 0$ pois este caso possibilita a existência de trajetórias periódicas de costura. Além disso, Σ_d é limitado e seu interior ou é uma região atratora ou é uma região repulsora.

Com a condição $a_{12}^- a_{12}^+ > 0$, o sistema (2.1) pode ser transformado, através de um homeomorfismo que preserva orientação e tempo, em um sistema com 7 parâmetros.

Proposição 2.1.1. *Considere o sistema (2.1). Denote por T^- e T^+ e, D^- e D^+ os traços e determinantes das matrizes A^- e A^+ , respectivamente. Suponha $a_{12}^+ a_{12}^- > 0$. Então, o homeomorfismo $\bar{x} = h(x)$ dado por*

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{22}^- & -a_{12}^- \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 0 \\ b_1^- \end{pmatrix}, \text{ se } x \in \Sigma^- \cup \Sigma \quad (2.3)$$

e

$$\bar{x} = \frac{1}{a_{12}^+} \begin{pmatrix} a_{12}^- & 0 \\ a_{12}^- a_{22}^+ & -a_{12}^- a_{12}^+ \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 0 \\ b_1^- \end{pmatrix}, \text{ se } x \in \Sigma^+, \quad (2.4)$$

transforma (2.1) em um sistema da forma

$$x' = G(x) = \begin{cases} G^+(x) = \begin{pmatrix} T^+ & -1 \\ D^+ & 0 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} -b \\ a^+ \end{pmatrix}, \text{ se } x \in \Sigma^+ \\ G^-(x) = \begin{pmatrix} T^- & -1 \\ D^- & 0 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 0 \\ a^- \end{pmatrix}, \text{ se } x \in \Sigma^- \end{cases}, \quad (2.5)$$

onde $G^+ = (G_1^+, G_2^+)$, $G^- = (G_1^-, G_2^-)$,

$$a^- = a_{12}^- b_2^- - a_{22}^- b_1^-, \quad a^+ = \frac{a_{12}^-}{a_{12}^+} (a_{12}^+ b_2^+ - a_{22}^+ b_1^+) \text{ e } b = \frac{a_{12}^-}{a_{12}^+} b_1^+ - b_1^-,$$

e mantém invariante a fronteira de descontinuidade Σ e os conjuntos Σ^- e Σ^+ . Além disso, as regiões de costura e deslize, os pontos de tangência e os pontos de equilíbrio de fronteira associados ao sistema (2.1) são transformados por h em regiões, conjuntos e pontos do mesmo tipo para o sistema (2.5).

Demonstração

Notamos que a aplicação h é um homeomorfismo que preserva orientação e tempo. Consideramos a mudança de variáveis h aplicada em Σ^- no sistema (2.1). Por hipótese temos $a_{12}^+ a_{12}^- > 0$. Logo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{22}^- & -a_{12}^- \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a_{22}^-}{a_{12}^-} & -\frac{1}{a_{12}^-} \end{pmatrix}$$

e então,

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{22}^- & -a_{12}^- \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 0 \\ b_1^- \end{pmatrix} \implies x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a_{22}^-}{a_{12}^-} & -\frac{1}{a_{12}^-} \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{b_1^-}{a_{12}^-} \end{pmatrix}.$$

Desta forma, utilizamos o sistema (2.1) e obtemos

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a_{22}^-}{a_{12}^-} & -\frac{1}{a_{12}^-} \end{pmatrix} \bar{x}' &= \begin{pmatrix} a_{11}^- & a_{12}^- \\ a_{21}^- & a_{22}^- \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a_{22}^-}{a_{12}^-} & -\frac{1}{a_{12}^-} \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{b_1^-}{a_{12}^-} \end{pmatrix} \right\} + \begin{pmatrix} b_1^- \\ b_2^- \end{pmatrix} \implies \\
\implies \bar{x}' &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{22}^- & -a_{12}^- \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} a_{11}^- + a_{22}^- & -1 \\ a_{21}^- + \frac{(a_{22}^-)^2}{a_{12}^-} & -\frac{a_{22}^-}{a_{12}^-} \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} -b_1^- \\ -\frac{b_1^- a_{22}^-}{a_{12}^-} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1^- \\ b_2^- \end{pmatrix} \right\} \implies \\
\implies \bar{x}' &= \begin{pmatrix} a_{11}^- + a_{22}^- & -1 \\ a_{11}^- a_{22}^- - a_{12}^- a_{21}^- & 0 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} -b_1^- \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1^- \\ b_1^- a_{22}^- - a_{12}^- b_2^- \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Denotamos

$$a^- = a_{12}^- b_2^- - a_{22}^- b_1^-.$$

Logo, obtemos o sistema

$$\bar{x}' = G^-(\bar{x}) = \begin{pmatrix} T^- & -1 \\ D^- & 0 \end{pmatrix} \bar{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ a^- \end{pmatrix}, \quad \bar{x} \in \Sigma^-.$$

Consideramos a mudança de variáveis h aplicada em Σ^+ no sistema (2.1). Como $a_{12}^+ a_{12}^- > 0$ temos

$$\begin{pmatrix} \frac{a_{12}^-}{a_{12}^+} & 0 \\ \frac{a_{12}^- a_{22}^+}{a_{12}^+} & -a_{12}^- \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a_{12}^+}{a_{12}^-} & 0 \\ \frac{a_{22}^+}{a_{12}^-} & -\frac{1}{a_{12}^-} \end{pmatrix}.$$

Desta forma,

$$\bar{x} = \frac{1}{a_{12}^+} \begin{pmatrix} a_{12}^- & 0 \\ a_{12}^- a_{22}^+ & -a_{12}^- a_{12}^+ \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 0 \\ b_1^- \end{pmatrix} \implies x = \begin{pmatrix} \frac{a_{12}^+}{a_{12}^-} & 0 \\ \frac{a_{22}^+}{a_{12}^-} & -\frac{1}{a_{12}^-} \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{b_1^-}{a_{12}^-} \end{pmatrix}.$$

Utilizamos o sistema (2.1) e obtemos

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{a_{12}^+}{a_{12}^-} & 0 \\ \frac{a_{22}^+}{a_{12}^-} & -\frac{1}{a_{12}^-} \end{pmatrix} \bar{x}' &= \begin{pmatrix} a_{11}^+ & a_{12}^+ \\ a_{21}^+ & a_{22}^+ \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{a_{12}^+}{a_{12}^-} & 0 \\ \frac{a_{22}^+}{a_{12}^-} & -\frac{1}{a_{12}^-} \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{b_1^-}{a_{12}^-} \end{pmatrix} \right\} + \begin{pmatrix} b_1^+ \\ b_2^+ \end{pmatrix} \implies \\ \implies \bar{x}' &= \begin{pmatrix} \frac{a_{12}^-}{a_{12}^+} & 0 \\ \frac{a_{12}^- a_{22}^+}{a_{12}^+} & -a_{12}^- \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{a_{11}^+ a_{12}^+}{a_{12}^-} + \frac{a_{12}^+ a_{22}^+}{a_{12}^-} & -\frac{a_{12}^+}{a_{12}^-} \\ \frac{a_{21}^+ a_{12}^+}{a_{12}^-} + \frac{(a_{22}^+)^2}{a_{12}^-} & -\frac{a_{22}^+}{a_{12}^-} \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} -\frac{a_{12}^+ b_1^-}{a_{12}^-} \\ -\frac{b_1^- a_{22}^+}{a_{12}^-} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1^+ \\ b_2^+ \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\bar{x}' = \begin{pmatrix} a_{11}^+ + a_{22}^+ & -1 \\ a_{11}^+ a_{22}^+ - a_{12}^+ a_{21}^+ & 0 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} -b_1^- \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{a_{12}^- b_1^+}{a_{12}^+} \\ \frac{a_{12}^- a_{22}^+ b_1^+}{a_{12}^+} - a_{12}^- b_2^+ \end{pmatrix}.$$

Denotamos

$$b = \frac{a_{12}^-}{a_{12}^+} b_1^+ - b_1^- \text{ e } a^+ = \frac{a_{12}^-}{a_{12}^+} (a_{12}^+ b_2^+ - a_{22}^+ b_1^+).$$

Desta forma, obtemos o sistema

$$\bar{x}' = G^+(\bar{x}) = \begin{pmatrix} T^+ & -1 \\ D^+ & 0 \end{pmatrix} \bar{x} - \begin{pmatrix} -b \\ a^+ \end{pmatrix}, \quad \bar{x} \in \Sigma^+.$$

Portanto, a mudança de variáveis h transforma o sistema (2.1) em um sistema da forma

$$x' = G(x) = \begin{cases} G^+(x) = \begin{pmatrix} T^+ & -1 \\ D^+ & 0 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} -b \\ a^+ \end{pmatrix}, & \text{se } x \in \Sigma^+ \\ G^-(x) = \begin{pmatrix} T^- & -1 \\ D^- & 0 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 0 \\ a^- \end{pmatrix}, & \text{se } x \in \Sigma^- \end{cases}.$$

Como $a_{12}^+ a_{12}^- > 0$ temos

$$h(\Sigma) = \Sigma, \quad h(\Sigma^+) = \Sigma^+ \text{ e } h(\Sigma^-) = \Sigma^-$$

Observamos que

$$G_1^+(h(0, y)) = a_{12}^- y + b_1^- + b = \frac{a_{12}^-}{a_{12}^+} F_1^+(0, y), \quad G_1^-(h(0, y)) = a_{12}^- y + b_1^- = F_1^-(0, y)$$

e

$$G_1^+(h(0, y))G_1^-(h(0, y)) = \frac{a_{12}^-}{a_{12}^+} F_1^+(0, y)F_1^-(0, y).$$

Portanto, a fronteira de descontinuidade Σ e os conjuntos Σ^- e Σ^+ são invariantes por h . Além disso, as regiões de costura e deslize, os pontos de tangência e os pontos de equilíbrio de fronteira associados ao sistema (2.1) são transformados por h em regiões, conjuntos e pontos do mesmo tipo para o sistema (2.5). ■

Observação 2.1.1. É consequência da Proposição 2.1.1 que o sistema (2.1) pode ser transformado, a partir de uma mudança de variáveis contínua, em um sistema suave contínuo por partes. De fato, se $b = 0$, $a^- = a^+$ e $T^+ \neq T^-$, então a forma normal correspondente a forma (2.5) é um sistema suave contínuo por partes.

Observação 2.1.2. Consideramos o sistema (2.1) e a simetria

$$(x, y, t) \longrightarrow (x, -y, -t).$$

Notamos que esta simetria não preserva a orientação. Denotamos

$$X = x, \quad Y = -y \quad \text{e} \quad T = -t.$$

Como $\frac{dt}{dT} = -1$, tem-se

$$\frac{dX}{dT} = \frac{dX}{dt} \frac{dt}{dT} = -x' \quad \text{e} \quad \frac{dY}{dT} = \frac{dY}{dt} \frac{dt}{dT} = y'.$$

Desta maneira, obtemos o sistema

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} -T^+ & -1 \\ D^+ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b \\ a^+ \end{pmatrix}, \text{ se } (X, Y) \in \Sigma^+ \\ \begin{pmatrix} -T^- & -1 \\ D^- & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ a^- \end{pmatrix}, \text{ se } (X, Y) \in \Sigma^- \end{cases},$$

juntamente com a mudança de parâmetros

$$(D^+, D^-, T^+, T^-, a^+, a^-, b) \longrightarrow (D^+, D^-, -T^+, -T^-, a^+, a^-, -b).$$

Portanto, podemos considerar, sem perda de generalidade, $b \geq 0$ para estudarmos o sistema (2.5).

Observação 2.1.3. Observamos que a região de desliz do sistema (2.5), com $b \geq 0$, é determinada pela inequação

$$G_1^-(0, y)G_1^+(0, y) = y(y - b) \leq 0, \quad (0, y) \in \Sigma.$$

Como

$$y(y - b) \leq 0 \iff 0 \leq y \leq b,$$

segue que a região de desliz é dada pelo conjunto

$$\Sigma_d = \{(0, y) \in \Sigma; 0 \leq y \leq b\}.$$

Para $b > 0$, o campo de Filippov \mathcal{G} do sistema (2.5) é dado por

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}) = \frac{G_1^+(\mathbf{x})G_2^-(\mathbf{x}) - G_1^-(\mathbf{x})G_2^+(\mathbf{x})}{G_1^+(\mathbf{x}) - G_1^-(\mathbf{x})} = \left(0, \frac{a^- - a^+}{b}y - a^-\right), \quad \mathbf{x} = (x, y) \in \Sigma_d$$

e o sistema que determina o comportamento dos fluxos gerados pelos campos G^+ e G^- sobre Σ_d é o sistema

$$\mathbf{x}' = \mathcal{G}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x, y) \in \Sigma_d.$$

Além disso, o conjunto

$$\text{int } \Sigma_d = \{(0, y) \in \Sigma; 0 < y < b\}$$

é uma região repulsora.

Notamos, também, que a região de costura do sistema (2.5) é dada por

$$\Sigma_c = \{(0, y) \in \Sigma; y < 0\} \cup \{(0, y) \in \Sigma; b < y\}.$$

Observação 2.1.4. Em geral, o homeomorfismo h dado no Teorema 2.1.1 não induz uma equivalência topológica entre os campos de Filippov correspondentes. Devido a definição natural de uma trajetória local por um ponto da região de costura concluímos que o homeomorfismo h é uma conjugação se restrito a $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma_d$.

Teorema 2.1.1. *Considere o sistema (2.5) e suponha $b \geq 0$. Logo,*

- a) *se $a^- \neq 0$, então a origem é um ponto de tangência do campo G^- . Se $a^- < 0$ (respectivamente, $a^- > 0$), então a origem é um ponto de tangência visível (respectivamente, ponto de tangência invisível) do campo G^- . Se $a^- = 0$, então a origem é um ponto de equilíbrio de fronteira do campo G^- ;*
- b) *se $a^+ \neq 0$, então o ponto $(0, b)$ é um ponto de tangência do campo G^+ . Se $a^+ > 0$ (respectivamente, $a^+ < 0$), então o ponto $(0, b)$ é um ponto de tangência visível (respectivamente, ponto de tangência invisível) do campo G^+ . Se $a^+ = 0$, então o ponto $(0, b)$ é um ponto de equilíbrio de fronteira do campo G^+ ;*
- c) *assuma $b = 0$. Se $a^+a^- \neq 0$, então a origem é um ponto de tangência dupla. Se $a^+a^- > 0$, então a origem se comporta como um ponto regular. Se $a^+a^- < 0$, então a origem é um pseudo-equilíbrio;*
- d) *admita $b > 0$. Em relação aos possíveis pseudo-equilíbrios temos:*
 - d1) *se $a^- = a^+ = 0$, então todos os pontos de Σ_d são pseudo-equilíbrios;*
 - d2) *se $a^-a^+ < 0$, então o ponto*

$$p = (0, p_2) = \left(0, \frac{a^-b}{a^- - a^+} \right)$$

é o único pseudo-equilíbrio, sendo pseudo-sela se $a^- < 0$ e pseudo-nó instável se $a^- > 0$;

d3) se $a^+a^- \geq 0$, com $a^+ + a^- \neq 0$, então não existem pseudo-equilíbrios no interior de Σ_d .

Demonstração

a) Supomos $a^- \neq 0$. Então,

$$G_1^-(0, 0) = T^-0 - 0 = 0 \text{ e } G_2^-(0, 0) = -a^- \neq 0.$$

Portanto, a origem é um ponto de tangência do campo G^- .

Se $a^- < 0$ (respectivamente, $a^- > 0$), então a origem é um ponto de tangência do campo G^- e

$$\begin{aligned} [(G_1^-)_x G^-](x, y)|_{(0,0)} &= (T^-x - y)_x(T^-x - y, D^-x - a^-)|_{(0,0)} = \\ &= \langle (T^-, -1), (T^-x - y, D^-x - a^-) \rangle|_{(0,0)} = a^- < 0 \end{aligned}$$

(respectivamente, $[(G_1^-)_x G^-](x, y)|_{(0,0)} > 0$). Portanto, a origem é um ponto de tangência visível (respectivamente, ponto de tangência invisível) do campo G^- .

Admitimos $a^- = 0$. Logo, $G^-(0) = 0$ e a origem é um ponto de equilíbrio de fronteira do campo G^- .

b) Assumimos $a^+ \neq 0$. Logo,

$$G_1^+(0, b) = T^+0 - b + b = 0 \text{ e } G_2^+(0, b) = -a^+ \neq 0,$$

e o ponto $(0, b)$ é um ponto de tangência do campo G^+ .

Se $a^+ > 0$ (respectivamente, $a^+ < 0$), então o ponto $(0, b)$ é um ponto de tangência do campo G^+ e

$$\begin{aligned} [(G_1^+)_x G^+](x, y)|_{(0,b)} &= (T^+x - y + b)_x(T^+x - y + b, D^+x - a^+)|_{(0,b)} = \\ &= \langle (T^+, -1), (T^+x - y + b, D^+x - a^+) \rangle|_{(0,b)} = a^+ > 0 \end{aligned}$$

(respectivamente, $[(G_1^+)_x G^+](x, y)|_{(0, b)} < 0$). Portanto, o ponto $(0, b)$ é um ponto de tangência visível (respectivamente, ponto de tangência invisível) do campo G^+ .

Supomos $a^+ = 0$. Logo, $G^+(0, b) = 0$ e o ponto $(0, b)$ é um ponto de equilíbrio de fronteira do campo G^+ .

c) Admitimos $a^+ a^- \neq 0$. Desta forma, pelos itens **a)** e **b)** concluímos que a origem é um ponto de tangência de ambos os campos G^+ e G^- . Portanto, a origem é um ponto de tangência dupla.

Consideramos o caso $a^+ a^- > 0$. Se $a^- > 0$ e $a^+ > 0$ segue, dos itens **a)** e **b)**, que a origem é um ponto de tangência invisível do campo G^- e um ponto de tangência visível do campo G^+ . Notamos que $G^+(0, 0) = cG^-(0, 0)$, com $c = \frac{a^+}{a^-} > 0$. Portanto, pelo item **b)** da Observação 2.0.2, a origem se comporta como um ponto regular.

Se $a^- < 0$ e $a^+ < 0$ temos, pelos itens **a)** e **b)**, que a origem é um ponto de tangência visível do campo G^- e um ponto de tangência invisível do campo G^+ . Observamos que $G^+(0, 0) = cG^-(0, 0)$, com $c = \frac{a^+}{a^-} > 0$. Portanto, pelo item **b)** da Observação 2.0.2, a origem se comporta como um ponto regular.

Assumimos $a^+ a^- < 0$. Se $a^+ < 0 < a^-$, então pelos itens **a)** e **b)** segue que a origem é um ponto de tangência invisível de ambos os campos G^+ e G^- . Se $a^- < 0 < a^+$, então pelos itens **a)** e **b)** obtemos que a origem é um ponto de tangência visível de ambos os campos G^+ e G^- . Portanto, da Observação 1.1.1 segue que a origem é um pseudo-equilíbrio.

d) **d1)** Se $a^- = a^+ = 0$, então dado $p = (0, p_2) \in \Sigma_d$ temos

$$\mathcal{G}(p) = \mathcal{G}(0, p_2) = \left(0, \frac{0-0}{b} p_2 - 0 \right) = (0, 0)$$

e todos os pontos de Σ_d são pseudo-equilíbrios;

d2) Assumimos $a^- a^+ < 0$. Primeiramente, consideramos o caso $a^- < 0$. Então,

$$a^+ > 0, \quad a^- - a^+ < 0, \quad a^- b < 0 \quad \text{e} \quad \frac{a^- b}{a^- - a^+} > 0.$$

No que segue, mostramos que vale a desigualdade $\frac{a^- b}{a^- - a^+} < b$. Se $\frac{a^- b}{a^- - a^+} \geq b$, então

$$a^- b \leq b(a^- - a^+) \implies -ba^+ \geq 0$$

o que é um absurdo pois $b > 0$ e $a^+ > 0$. Logo,

$$0 < \frac{a^-b}{a^- - a^+} < b,$$

isto é, o ponto $p = (0, p_2) = \left(0, \frac{a^-b}{a^- - a^+}\right) \in \Sigma_d$. Notamos que, para $x \in \Sigma_d$,

$$\mathcal{G}(x) = (0, 0) \iff x = p.$$

Logo, p é o único pseudo-equilíbrio. Pela Observação 2.1.3, sabemos que o interior de Σ_d é uma região repulsora. Como $p \in \text{int } \Sigma_d$ e

$$g'(p_2) = \frac{a^- - a^+}{b} < 0$$

segue, do item **a)** da Definição 2.0.1, que p é uma pseudo-sela.

Supomos $a^- > 0$. De forma análoga à anterior, segue que o ponto

$$p = (0, p_2) = \left(0, \frac{a^-b}{a^- - a^+}\right) \in \text{int } \Sigma_d$$

é o único pseudo-equilíbrio. Como o interior de Σ_d é uma região repulsora e $g'(p_2) > 0$, concluímos, pelo item **a)** da Definição 2.0.1, que p é um pseudo-nó instável.

Portanto, o ponto

$$p = (0, p_2) = \left(0, \frac{a^-b}{a^- - a^+}\right)$$

é o único pseudo-equilíbrio, sendo pseudo-sela se $a^- < 0$ e pseudo-nó instável se $a^- > 0$.

d3) Assumimos $a^+a^- \geq 0$ com $a^+ + a^- \neq 0$. Inicialmente, consideramos o caso $a^+a^- = 0$. Se $a^+ = 0$, então $a^- \neq 0$ e o ponto $(0, b)$ é o único pseudo-equilíbrio. Como o ponto $(0, b) \notin \text{int } \Sigma_d$, concluímos que não existem pseudo-equilíbrios no interior de Σ_d . Se $a^- = 0$, então $a^+ \neq 0$ e a origem é o único pseudo-equilíbrio. Como a origem não pertence ao interior de Σ_d , segue que não existem pseudo-equilíbrios no interior de Σ_d .

Supomos $a^+ > 0$ e $a^- > 0$. Da Observação 2.1.3 segue que o possível pseudo-equilíbrio é o ponto

$$p = \left(0, \frac{a^-b}{a^- - a^+}\right).$$

Se $a^- < a^+$, então $p \notin \Sigma_d$, pois

$$\frac{a^-b}{a^- - a^+} < 0.$$

Logo, não existem pseudo-equilíbrios no interior de Σ_d . Se $a^+ < a^-$, então

$$\frac{a^-b}{a^- - a^+} \geq b$$

pois, caso contrário, teríamos $-ba^+ > 0$ o que é um absurdo já que $b > 0$ e $a^+ > 0$. Desta forma, $p \notin \Sigma_d$ e, conseqüentemente, não existem pseudo-equilíbrios no interior de Σ_d .

Supomos $a^+ < 0$ e $a^- < 0$. Se $a^- < a^+$, então

$$\frac{a^-b}{a^- - a^+} > b$$

pois, caso contrário, teríamos $-ba^+ \leq 0$ o que é um absurdo pois $b > 0$ e $-a^+ > 0$. Logo, $p \notin \Sigma_d$ e então não existem pseudo-equilíbrios no interior de Σ_d . Se $a^+ < a^-$, então

$$\frac{a^-b}{a^- - a^+} < 0 \text{ e } p \notin \Sigma_d.$$

Logo, não existem pseudo-equilíbrios no interior de Σ_d . ■

Teorema 2.1.2. *Consideramos o sistema (2.5). Então,*

- a) *o campo G tem um único ponto de equilíbrio em Σ^- se $a^-D^- < 0$ e o campo G não possui pontos de equilíbrio em Σ^- se $a^-D^- > 0$. Da mesma forma, o campo G tem um ponto de equilíbrio em Σ^+ se $a^+D^+ > 0$ e não possui pontos de equilíbrio em Σ^+ se $a^+D^+ < 0$;*
- b) *o campo G não tem pontos de equilíbrio em Σ^- se $a^- \neq 0$ e $D^- = 0$. Se $a^- = 0$ e $D^- = 0$, então os pontos da forma $x = (x, T^-x)$, com $x < 0$, são pontos de equilíbrio de G em Σ^- . Da mesma forma, o campo G não tem pontos de equilíbrio em Σ^+ se $a^+ \neq 0$ e $D^+ = 0$. Se $a^+ = 0$ e $D^+ = 0$, então os pontos da forma $x = (x, T^+x + b)$, com $x > 0$, são pontos de equilíbrio de G em Σ^+ .*

Demonstração

a) Os possíveis pontos de equilíbrio $x = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ do campo G em Σ^- satisfazem

$$y = T^-x \text{ e } D^-x = a^-.$$

Se $a^-D^- < 0$, então o ponto $p = (p_1, p_2)$ tal que

$$p_1 = \frac{a^-}{D^-} \text{ e } p_2 = T^-p_1$$

é o único ponto de equilíbrio do campo G em Σ^- . Portanto, o campo G possui um ponto de equilíbrio em Σ^- .

Assumimos $a^-D^- > 0$. Supomos, por absurdo, que existe $p = (p_1, p_2) \in \Sigma^-$ tal que $G(p) = 0$. Logo,

$$p_1 = \frac{a^-}{D^-} > 0,$$

o que é um absurdo. Portanto, o campo G não tem pontos de equilíbrio em Σ^- .

Da mesma forma, os possíveis pontos de equilíbrio $x = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ do campo G em Σ^+ satisfazem

$$y = T^+x + b \text{ e } D^+x = a^+.$$

Se $a^+D^+ > 0$, então o ponto $p = (p_1, p_2)$ tal que

$$p_1 = \frac{a^+}{D^+} \text{ e } p_2 = T^+p_1 + b$$

é o único ponto de equilíbrio do campo G em Σ^+ e o campo G possui um ponto de equilíbrio em Σ^+ .

Admitimos $a^+D^+ < 0$. Supomos, por absurdo, que existe $p = (p_1, p_2) \in \Sigma^+$ tal que $G(p) = 0$. Desta forma,

$$p_1 = \frac{a^+}{D^+} < 0,$$

o que é um absurdo. Portanto, o campo G possui um ponto de equilíbrio em Σ^+ .

b) Consideramos $a^- \neq 0$ e $D^- = 0$. Supomos, por absurdo, que existe $p = (p_1, p_2) \in \Sigma^-$ tal que $G(p) = 0$. Logo,

$$T^-p_1 - p_2 = 0 \text{ e } a^- = 0.$$

Absurdo, pois $a^- \neq 0$. Portanto, o campo G não tem pontos de equilíbrio em Σ^- .

Se $a^- = 0$ e $D^- = 0$, então os pontos da forma $x = (x, T^-x)$, com $x < 0$, satisfazem

$G(x) = G^-(x) = 0$ e os pontos da forma $x = (x, T^-x)$, com $x < 0$, são pontos de equilíbrio de G em Σ^- .

Assumimos $D^+ = 0$ e $a^+ \neq 0$. Supomos, por absurdo, que existe $p = (p_1, p_2) \in \Sigma^+$ tal que $G(p) = 0$. Então,

$$T^+p_1 - p_2 + b = 0 \text{ e } a^+ = 0.$$

Absurdo, pois $a^+ \neq 0$. Portanto, o campo G não tem pontos de equilíbrio em Σ^+ .

Se $a^+ = 0$ e $D^+ = 0$, então os pontos da forma $x = (x, T^+x + b)$, com $x > 0$ satisfazem $G(x) = G^+(x) = 0$. Portanto, os pontos da forma $x = (x, T^+x + b)$, com $x > 0$, são pontos de equilíbrio de G em Σ^+ .



Capítulo 3

Sistemas lineares planares de Filippov descontínuos do tipo foco-foco

No estudo dos sistemas lineares planares de Filippov descontínuos é de grande importância determinarmos condições para a existência e não existência de ciclos limite de costura e trajetórias periódicas deslizantes. Estudamos neste capítulo os sistemas do tipo (2.5) com somente um ponto de equilíbrio real tais que a dinâmica de ambos os campos G^+ e G^- é do tipo foco. No apêndice faremos um breve comentário quando os pontos de equilíbrio são dois focos virtuais. Primeiramente, apresentamos um resultado que nos exhibe uma forma normal com apenas 5 parâmetros para esta classe de sistemas. Em seguida, definimos a aplicação de Poincaré e a usamos como principal ferramenta para mostrarmos alguns resultados que expõem condições para a existência e a não existência de ciclos limite de costura e trajetórias periódicas deslizantes, dando ênfase no estudo dos ciclos limite de costura. Por fim, mostramos que a forma normal citada acima tem, pelo menos, três ciclos limite de costura quando os parâmetros percorrem um certo conjunto aberto no espaço dos parâmetros.

Definição 3.0.1. *Considere o sistema (2.1). Dizemos que a dinâmica dos campos F^+ e F^- é do tipo **foco** se*

$$A^+ \sim \begin{pmatrix} \alpha^+ & \omega^+ \\ -\omega^+ & \alpha^+ \end{pmatrix} \text{ e } A^- \sim \begin{pmatrix} \alpha^- & \omega^- \\ -\omega^- & \alpha^- \end{pmatrix},$$

com $\alpha^\pm \in \mathbb{R}$ e $\omega^\pm > 0$. Dizemos que o sistema (2.1) é um **sistema linear planar de Filippov descontínuo do tipo foco-foco** se a dinâmica dos campos F^+ e F^- é do tipo foco.

Observação 3.0.1. Diante da forma normal dada na Proposição 2.1.1, estudar um sistema linear planar de Filippov descontínuo do tipo foco-foco é equivalente a estudar um sistema da forma (2.5) com $T^\pm = 2\alpha^\pm$ e $D^\pm = (\alpha^\pm)^2 + (\omega^\pm)^2$, onde $\alpha^\pm \in \mathbb{R}$ e $\omega^\pm > 0$.

No que segue, apresentamos uma forma normal com apenas 5 parâmetros para a classe dos sistemas lineares planares de Filippov descontínuos do tipo foco-foco.

Teorema 3.0.1. *Considere o sistema (2.5). Suponha $T^\pm = 2\alpha^\pm$ e $D^\pm = (\alpha^\pm)^2 + (\omega^\pm)^2$, com $\alpha^\pm \in \mathbb{R}$ e $\omega^\pm > 0$. Definimos*

$$\gamma_R = \frac{\alpha^+}{\omega^+}, \quad \gamma_L = \frac{\alpha^-}{\omega^-}, \quad a_R = \frac{a^+}{\omega^+} \quad e \quad a_L = \frac{a^-}{\omega^-}.$$

Então, a mudança de variáveis

$$(x, y, t) \longrightarrow (x\omega(x), y, t\omega(x)) \quad \text{onde } \omega(x) = \begin{cases} \omega^-, & \text{se } x \leq 0 \\ \omega^+, & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

transforma o sistema (2.5) no sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{cases} H^+(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2\gamma_R & -1 \\ 1 + \gamma_R^2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} - \begin{pmatrix} -b \\ a_R \end{pmatrix}, & \text{se } \mathbf{x} \in \Sigma^+ \\ H^-(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2\gamma_L & -1 \\ 1 + \gamma_L^2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ a_L \end{pmatrix}, & \text{se } \mathbf{x} \in \Sigma^- \end{cases}. \quad (3.2)$$

Além disso, a fronteira de descontinuidade Σ , os conjuntos Σ^- e Σ^+ , as regiões de costura e deslize, os pontos de tangência e os pontos de equilíbrio de fronteira associados ao sistema (2.5) são transformados pela mudança de variáveis (3.1) em regiões e pontos do mesmo tipo para o sistema (3.2).

Demonstração

A fronteira de descontinuidade, os conjuntos Σ^- e Σ^+ , as regiões de costura e deslize, os pontos de tangência e os pontos de equilíbrio de fronteira associados ao sistema (2.5) são invariantes pela mudança de variáveis (3.1) pois ω^+ e ω^- são um números positivos.

Consideramos a mudança de variáveis

$$(x, y, t) \longrightarrow (x\omega^-, y, t\omega^-)$$

aplicada em Σ^- no sistema (2.5). Denotamos $X = x\omega^-$, $Y = y$ e $v = t\omega^-$. Logo,

$$\frac{dX}{dv} = \frac{dX}{dt} \frac{dt}{dv} = T^- x - y = \frac{T^-}{\omega^-} X - Y = 2\gamma_L X - Y$$

e

$$\frac{dY}{dv} = \frac{dY}{dt} \frac{dt}{dv} = \frac{1}{\omega^-} \frac{dy}{dt} = \frac{(\alpha^-)^2 + (\omega^-)^2}{(\omega^-)^2} X - \frac{a^-}{\omega^-} = (1 + \gamma_L^2) X - a_L.$$

Desta forma, obtemos o sistema

$$\left(\frac{dX}{dv}, \frac{dY}{dv} \right) = H^-(X, Y) = \begin{pmatrix} 2\gamma_L & -1 \\ 1 + \gamma_L^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ a_L \end{pmatrix}, \quad (X, Y) \in \Sigma^-.$$

Consideramos a mudança de variáveis

$$(x, y, t) \longrightarrow (x\omega^+, y, t\omega^+).$$

aplicada em Σ^+ no sistema (2.5). Denotamos $X = x\omega^+$, $Y = y$ e $\varsigma = t\omega^+$. Então,

$$\frac{dX}{d\varsigma} = \frac{dX}{dt} \frac{dt}{d\varsigma} = T^+ x - y + b = \frac{T^+}{\omega^+} X - Y + b = 2\gamma_R X - Y + b$$

e

$$\frac{dY}{d\varsigma} = \frac{dY}{dt} \frac{dt}{d\varsigma} = \frac{1}{\omega^+} \frac{dy}{dt} = \frac{(\alpha^+)^2 + (\omega^+)^2}{(\omega^+)^2} X - \frac{a^+}{\omega^+} = (1 + \gamma_R^2) X - a_R.$$

Logo, obtemos o sistema

$$\left(\frac{dX}{d\varsigma}, \frac{dY}{d\varsigma} \right) = H^+(X, Y) = \begin{pmatrix} 2\gamma_R & -1 \\ 1 + \gamma_R^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -b \\ a_R \end{pmatrix}, \quad (X, Y) \in \Sigma^+.$$

Portanto, a mudança de variáveis (3.1) transforma o sistema (2.5) em um sistema da forma

$$x' = \begin{cases} H^+(x) = \begin{pmatrix} 2\gamma_R & -1 \\ 1 + \gamma_R^2 & 0 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} -b \\ a_R \end{pmatrix}, \text{ se } x \in \Sigma^+ \\ H^-(x) = \begin{pmatrix} 2\gamma_L & -1 \\ 1 + \gamma_L^2 & 0 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 0 \\ a_L \end{pmatrix}, \text{ se } x \in \Sigma^- \end{cases}.$$

■

Observação 3.0.2. A mudança de variáveis (3.1) preserva orientação, porém não preserva o tempo.

Observação 3.0.3. Consideramos o sistema (3.2) e assumimos $b \geq 0$. Claramente a região de deslize Σ_d associada ao sistema (3.2) é dada por

$$\Sigma_d = \{(0, y) \in \Sigma; 0 \leq y \leq b\}.$$

Para $b > 0$, o campo de Filippov \mathcal{H} do sistema (3.2) é dado por

$$\mathcal{H}(x) = \left(0, \frac{a_L - a_R}{b}y - a_L\right), \quad x = (x, y) \in \Sigma_d$$

e o sistema que determina o comportamento dos fluxos gerados pelos campos H^+ e H^- sobre Σ_d é o sistema

$$x' = \mathcal{H}(x), \quad x = (x, y) \in \Sigma_d.$$

Além disso, notamos que o conjunto

$$\text{int } \Sigma_d = \{(0, y) \in \Sigma; 0 < y < b\}$$

é uma região repulsora, com

$$\frac{a_L - a_R}{b}y - a_L > 0, \text{ para todo } 0 < y < b.$$

Denotamos

$$x_L = \frac{a_L}{1 + \gamma_L^2} \text{ e } x_R = \frac{a_R}{1 + \gamma_R^2}.$$

Observamos que os sistemas (2.5) e (3.2) possuem a mesma forma e estrutura e, consequentemente, podemos usar os Teoremas 2.1.1 e 2.1.2 para estudarmos o sistema (3.2). Pelo item **a)** do Teorema 2.1.1 segue que a origem é um ponto de tangência visível do campo H^- se $x_L < 0$ e um ponto de tangência invisível do campo H^- se $x_L > 0$. Analogamente, pelo item **b)** do Teorema 2.1.1 segue que $(0, b)$ é um ponto de tangência visível do campo H^+ se $x_R > 0$ e um ponto de tangência invisível do campo H^+ se $x_R < 0$. Pelo subitem **d2** do item **d)** do Teorema 2.1.1 segue que, para $b > 0$ e $x_L x_R < 0$, o sistema (3.2) tem um único pseudo-equilíbrio e ele é dado por

$$(0, \bar{y}_p) = \left(0, \frac{a_L b}{a_L - a_R} \right).$$

Supondo $x_L x_R \neq 0$ e $b = 0$ segue, do item **c)** do Teorema 2.1.1, que a origem é um ponto de tangência dupla. Do subitem **d3** do item **d)** do Teorema 2.1.1 segue que se $x_L < 0$, $x_R < 0$ e $b > 0$, então não existem pseudo-equilíbrios no interior de Σ_d .

Observação 3.0.4. A Tabela 3.1 apresenta algumas simetrias para a forma normal (3.2).

Π_1	Π_2	Π_3
$x \longrightarrow x$	$x \longrightarrow -x$	$x \longrightarrow -x$
$y \longrightarrow -y$	$y \longrightarrow y + b$	$y \longrightarrow -y - b$
$t \longrightarrow -t$	$t \longrightarrow -t$	$t \longrightarrow t$
$\gamma_L \longrightarrow -\gamma_L$	$\gamma_L \longrightarrow -\gamma_R$	$\gamma_L \longrightarrow \gamma_R$
$\gamma_R \longrightarrow -\gamma_R$	$\gamma_R \longrightarrow -\gamma_L$	$\gamma_R \longrightarrow \gamma_L$
$x_L \longrightarrow x_L$	$x_L \longrightarrow -x_R$	$x_L \longrightarrow -x_R$
$b \longrightarrow -b$	$b \longrightarrow b$	$b \longrightarrow -b$
$x_R \longrightarrow x_R$	$x_R \longrightarrow -x_L$	$x_R \longrightarrow -x_L$

Tabela 3.1: Simetrias para a forma canônica (3.2).

Consideramos a mudança de variáveis $(x, y, t) \longrightarrow (x, -y, -t)$. Denotamos

$$X = x, Y = -y \text{ e } T = -t.$$

Como $\frac{dt}{dT} = -1$, temos

$$\frac{dX}{dT} = \frac{dX}{dt} \frac{dt}{dT} = -x' \text{ e } \frac{dY}{dT} = \frac{dY}{dt} \frac{dt}{dT} = y'.$$

Desta maneira, obtemos o sistema

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} -2\gamma_R & -1 \\ 1 + \gamma_R^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b \\ a_R \end{pmatrix}, \text{ se } (X, Y) \in \Sigma^+ \\ \begin{pmatrix} -2\gamma_L & -1 \\ 1 + \gamma_L^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ a_L \end{pmatrix}, \text{ se } (X, Y) \in \Sigma^- \end{cases}.$$

Como

$$a_L \longrightarrow a_L \text{ e } a_R \longrightarrow a_R$$

segue

$$x_L \longrightarrow x_L \text{ e } x_R \longrightarrow x_R.$$

Tomamos a mudança de variáveis $(x, y, t) \longrightarrow (-x, y + b, -t)$. Denotamos

$$X = -x, Y = y + b \text{ e } T = -t.$$

Logo,

$$\frac{dX}{dT} = \frac{dX}{dt} \frac{dt}{dT} = x' \text{ e } \frac{dY}{dT} = \frac{dY}{dt} \frac{dt}{dT} = -y'.$$

Para $x = (x, y) \in \Sigma^-$ temos

$$X' = 2\gamma_L x - y = -2\gamma_L(-x) - y - b + b = -2\gamma_L X - Y + b$$

e

$$Y' = (1 + \gamma_L^2)X + a_L.$$

Para $x = (x, y) \in \Sigma^+$ temos

$$X' = 2\gamma_R x - y + b = -2\gamma_R(-x) - y + b - b + b = -2\gamma_R X - Y + 2b$$

e

$$Y' = (1 + \gamma_R^2)X + a_R.$$

Notamos que a mudança de variáveis considerada mantém invariante o conjunto Σ e leva os

conjuntos Σ^+ e Σ^- nos conjuntos Σ^- e Σ^+ , respectivamente. Desta forma, obtemos o sistema

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} -2\gamma_L & -1 \\ 1 + \gamma_L^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -b \\ -a_L \end{pmatrix}, \text{ se } (X, Y) \in \Sigma^+ \\ \left[\begin{pmatrix} -2\gamma_R & -1 \\ 1 + \gamma_R^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -a_R \end{pmatrix} \right] - \begin{pmatrix} -2b \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ se } (X, Y) \in \Sigma^- \end{cases}.$$

Como

$$a_L \longrightarrow -a_R, \quad a_R \longrightarrow -a_L \text{ e } \gamma_L \longrightarrow -\gamma_R, \quad \gamma_R \longrightarrow -\gamma_L$$

segue que

$$x_L \longrightarrow -x_R \text{ e } x_R \longrightarrow -x_L.$$

Consideramos a mudança de variáveis $(x, y, t) \longrightarrow (-x, -y - b, t)$. Denotamos

$$X = -x, \quad Y = -y - b \text{ e } T = t.$$

Como $\frac{dt}{dT} = 1$ segue

$$\frac{dX}{dT} = \frac{dX}{dt} \frac{dt}{dT} = -x' \text{ e } \frac{dY}{dT} = \frac{dY}{dt} \frac{dt}{dT} = -y'.$$

Para $x = (x, y) \in \Sigma^-$ temos

$$X' = 2\gamma_L(-x) + y = 2\gamma_L(-x) + y - b + b = 2\gamma_L X - Y - b$$

e

$$Y' = (1 + \gamma_L^2)X + a_L.$$

Para $x = (x, y) \in \Sigma^+$ temos

$$X' = -2\gamma_R x + y - b = 2\gamma_R(-x) + y - b + b - b = 2\gamma_R X - Y - 2b$$

e

$$Y' = (1 + \gamma_R^2)X + a_R.$$

Observamos que a mudança de variáveis considerada mantém invariante o conjunto Σ e leva os

conjuntos Σ^+ e Σ^- nos conjuntos Σ^- e Σ^+ , respectivamente. Logo, obtemos o sistema

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 2\gamma_L & -1 \\ 1 + \gamma_L^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b \\ -a_L \end{pmatrix}, \text{ se } (X, Y) \in \Sigma^+ \\ \left[\begin{pmatrix} 2\gamma_R & -1 \\ 1 + \gamma_R^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -a_R \end{pmatrix} \right] - \begin{pmatrix} 2b \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ se } (X, Y) \in \Sigma^- \end{cases}.$$

Como

$$a_L \longrightarrow -a_R, \quad a_R \longrightarrow -a_L \text{ e } \gamma_L \longrightarrow \gamma_R, \quad \gamma_R \longrightarrow \gamma_L$$

temos

$$x_L \longrightarrow -x_R \text{ e } x_R \longrightarrow -x_L.$$

Diante da simetria \prod_1 podemos assumir, sem perda de generalidade, $b \geq 0$ para estudarmos o sistema (3.2).

3.1 Análise da aplicação de Poincaré

No que segue, concentramos a nossa atenção em um sistema da forma (3.2), com $b \geq 0$, tal que o ponto de equilíbrio de um dos campos H^+ ou H^- é um ponto de equilíbrio real, e o ponto de equilíbrio do outro campo é um ponto de equilíbrio virtual. Para encontrarmos condições para a existência de ciclos limite de costura e trajetórias periódicas deslizantes, estudamos a aplicação de Poincaré. A aplicação de Poincaré P , para este caso, é a composição de outras duas aplicações, uma relativa ao fluxo dado em Σ^- e outra relativa ao fluxo dado em Σ^+ . A seguir, definimos a aplicação de Poincaré P e a analisamos com a finalidade de estudarmos as trajetórias periódicas deslizantes e as trajetórias periódicas de costura do sistema (3.2), com $b \geq 0$.

Consideramos o sistema (3.2), com $b \geq 0$. Supomos $x_R x_L > 0$. Pelo item **a)** do Teorema 2.1.2, supor $x_R x_L > 0$ é equivalente a dizer que o ponto de equilíbrio de um dos campos H^+ ou H^- é um ponto de equilíbrio real, e o ponto de equilíbrio do outro campo é um ponto de equilíbrio virtual. Sem perda de generalidade, podemos assumir $x_L < 0$ e $x_R < 0$ pois, caso contrário, basta aplicarmos a simetria \prod_3 dada na Tabela 3.1. Supondo $x_L < 0$ e $x_R < 0$ temos, pelo item **a)** do Teorema 2.1.2, que o ponto de equilíbrio do campo H^+ é um ponto de

equilíbrio virtual e o ponto de equilíbrio do campo H^- é um ponto de equilíbrio real. Além disso, pelo item **a)** do Teorema 2.1.1 segue que a origem é um ponto de tangência visível do campo H^- e pelo item **b)** do Teorema 2.1.1 segue que $(0, b)$ é um ponto de tangência invisível do campo H^+ . Notamos que o ponto de equilíbrio do campo H^+ é dado por

$$e_R = (x_R, 2\gamma_R x_R + b)$$

e o ponto de equilíbrio do campo H^- é dado por

$$e_L = (x_L, 2\gamma_L x_L).$$

No que segue, construímos a aplicação de Poincaré a esquerda P_L (aplicação relativa ao fluxo dado em Σ^-) e a aplicação de Poincaré a direita P_R (aplicação relativa ao fluxo dado em Σ^+), com a finalidade de definirmos a aplicação de Poincaré P relativa a um sistema da forma (3.2), com $b \geq 0$.

Consideramos o sistema

$$x' = \begin{pmatrix} 2\gamma & -1 \\ 1 + \gamma^2 & 0 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} -\sigma \\ (1 + \gamma^2)\bar{x} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

definido em todo o espaço \mathbb{R}^2 com parâmetros γ , σ e \bar{x} , e condição inicial $x(0) = (x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$. Observamos que o ponto de equilíbrio do sistema (3.3) é dado por $(\bar{x}, 2\gamma\bar{x} + \sigma)$. Denotamos $\bar{y} = 2\gamma\bar{x} + \sigma$. Consideramos a translação $(x, y) \rightarrow (x - \bar{x}, y - \bar{y})$ aplicada ao sistema (3.3). Desta forma, deslocamos o ponto de equilíbrio (\bar{x}, \bar{y}) para a origem e analisamos o sistema

$$y' = \begin{pmatrix} 2\gamma & -1 \\ 1 + \gamma^2 & 0 \end{pmatrix} y, \quad (3.4)$$

com condição inicial $y(0) = (x(0) - \bar{x}, y(0) - \bar{y}) = (x_0 - \bar{x}, y_0 - \bar{y})$. Denotamos

$$P = \begin{pmatrix} 2\gamma & -1 \\ 1 + \gamma^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores de P são $\lambda_1 = \gamma + i$ e $\lambda_2 = \gamma - i$. Associamos aos autovalores λ_1 e λ_2 os

autovetores

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -\gamma \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ e } v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -\gamma \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

respectivamente. Tomamos a matriz

$$N = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\gamma & -1 \end{pmatrix},$$

cujas colunas são formadas pela parte real e imaginária dos autovetores. Consideramos a matriz

$$B = N^{-1}PN = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \gamma & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\gamma & -1 \\ 1 + \gamma^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\gamma & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -1 \\ 1 & \gamma \end{pmatrix}.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} e^{Bt} &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^\gamma & 0 \\ 0 & e^\gamma \end{pmatrix} = e^\gamma \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \implies \\ \implies e^{Pt} &= Ne^{Bt}N^{-1} = e^\gamma \begin{pmatrix} \cos t + \gamma \sin t & -\sin t \\ (1 + \gamma^2) \sin t & \cos t - \gamma \sin t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Logo, a solução $x(t) = (x(t), y(t))$ de (3.3), com condição inicial $x(0) = (x_0, y_0)$, satisfaz

$$\begin{pmatrix} x(t) - \bar{x} \\ y(t) - \bar{y} \end{pmatrix} = e^{\gamma t} \begin{pmatrix} \cos t + \gamma \sin t & -\sin t \\ (1 + \gamma^2) \sin t & \cos t - \gamma \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 - \bar{x} \\ y_0 - \bar{y} \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Tomamos a função auxiliar $\varphi_\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi_\gamma(t) = 1 - e^{\gamma t}(\cos t - \gamma \sin t).$$

Observamos que a função φ_γ satisfaz as seguintes simetrias

$$\varphi_{-\gamma}(-t) = 1 - e^{(-\gamma)(-t)}[\cos(-t) + \gamma \sin(-t)] = 1 - e^{\gamma t}(\cos t - \gamma \sin t) = \varphi_\gamma(t)$$

e

$$\varphi_{-\gamma}(t) = 1 - e^{-\gamma t}(\cos t + \gamma \sin t) = 1 - e^{-\gamma t}[\cos(-t) - \gamma \sin(-t)] = \varphi_\gamma(-t),$$

para todo $\gamma, t \in \mathbb{R}$. Temos, para todo $\gamma, t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \varphi'_\gamma(t) &= -\gamma e^{\gamma t}(\cos t - \gamma \operatorname{sen} t) - e^{\gamma t}(-\operatorname{sen} t - \gamma \cos t) = e^{\gamma t}(1 + \gamma^2) \operatorname{sen} t = 0 \iff \\ &\iff \operatorname{sen} t = 0 \iff t = k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Dado $\gamma > 0$ temos

- $\varphi_\gamma(-2\pi) = 1 - e^{-2\gamma\pi} > 0$;
- $\varphi_\gamma(-\pi) = 1 + e^{-\gamma\pi} > \varphi_\gamma(-2\pi) > 0$;
- $\varphi_\gamma(0) = 0$;
- $\varphi_\gamma(\pi) = 1 + e^{\gamma\pi} > \varphi_\gamma(-\pi) > 0$;
- $\varphi_\gamma(2\pi) = 1 - e^{\gamma\pi} < 0$;

Logo, a função φ_γ assume, no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$, seu máximo em $t = \pi$. Denotamos por \hat{t} o valor no intervalo $(\pi, 2\pi)$ tal que φ_γ se anula. O esboço do gráfico da função φ_γ , para um valor $\gamma > 0$, é dado na Figura 3.1.

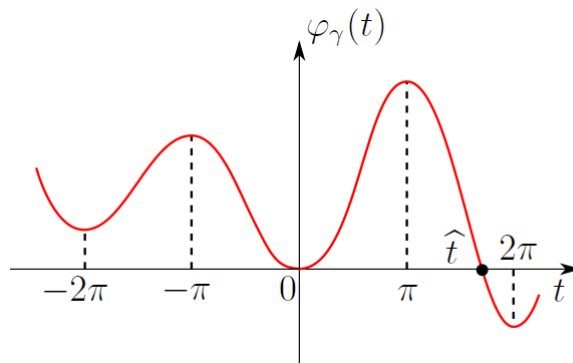


Figura 3.1: Esboço do gráfico da função φ_γ para um valor $\gamma > 0$.

Consideramos o sistema (3.3) com $\sigma = 0$, $\bar{x} = x_L < 0$ e $\gamma = \gamma_L$, isto é, consideramos o sistema $x' = H^-(x)$ onde o campo H^- é dado em (3.2). Logo, sobre a reta $x = 0$, temos

$$(x', y') = (-y, -a_L) = H^-(0, y).$$

Para $y \geq 0$ segue $x' \leq 0$ e $y' > 0$, e para $y \leq 0$ temos $x' \geq 0$ e $y' > 0$. Desta forma, o sentido do campo H^- sobre a reta $x = 0$ assegura que a trajetória de (3.3), que no tempo $t = 0$ passa por um ponto $(0, y_0)$, com $y_0 \geq 0$, segue por Σ^- e pode ou não encontrar Σ em um ponto $(0, y_1)$, com $y_1 \leq 0$, depois de um menor tempo $t_L > 0$. Veja a Figura 3.2.

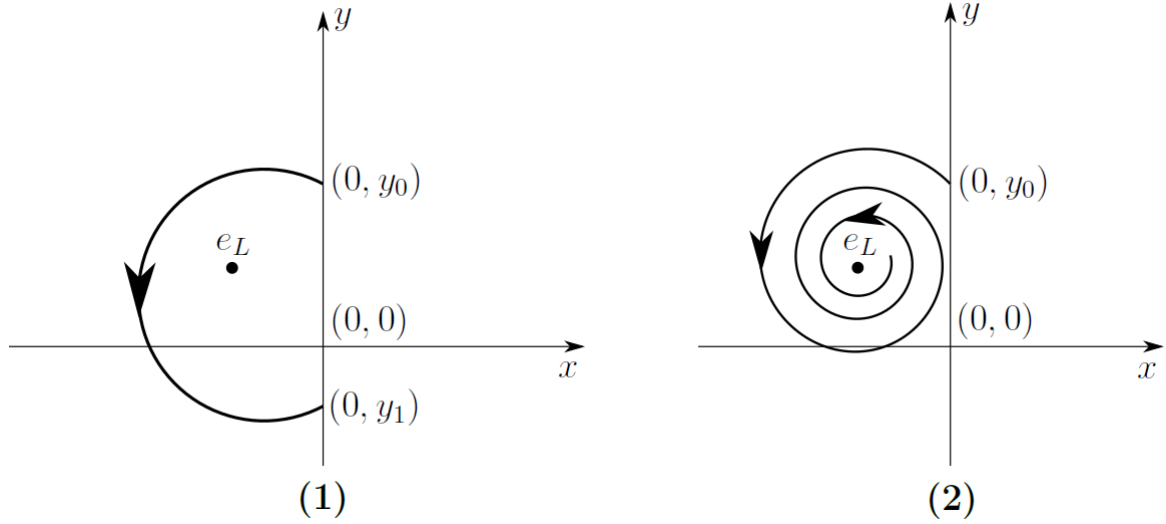


Figura 3.2: **(1)** Uma trajetória local de (3.3), com $\sigma = 0$, $\bar{x} = x_L < 0$ e $\gamma = \gamma_L$, por um ponto $(0, y_0)$, com $y_0 \geq 0$, que segue por Σ^- e encontra Σ em um ponto $(0, y_1)$, com $y_1 \leq 0$; **(2)** Uma trajetória local de (3.3), com $\sigma = 0$, $\bar{x} = x_L < 0$ e $\gamma = \gamma_L$, por um ponto $(0, y_0)$, com $y_0 \geq 0$, que segue por Σ^- e não encontra Σ novamente.

Denotamos por \mathcal{Y}_0 o conjunto dos valores $y_0 \in \mathbb{R}_+$ tais que a trajetória de (3.3) que no tempo $t = 0$ passa por $(0, y_0)$ segue por Σ^- e encontra Σ em um ponto $(0, y_1)$, com $y_1 \leq 0$, depois de um menor tempo $t_L > 0$. Definimos a aplicação de Poincaré a esquerda por $P_L : \mathcal{Y}_0 \rightarrow \mathbb{R}_-$, $P_L(y_0) = y_1$. Para determinarmos P_L consideramos $\sigma = 0$, $\bar{x} = x_L < 0$ e $\gamma = \gamma_L$ em (3.5).

Supomos $\gamma_L = 0$. Seja $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$ a solução de (3.3) com condição inicial $\mathbf{x}(0) = (0, y_0)$. Logo,

$$\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t)) = (x_L - x_L \cos t - y_0 \sin t, -x_L \sin t + y_0 \cos t),$$

com $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(2\pi)$. Notamos que

$$[x(t) - x_L]^2 + y(t)^2 = x_L^2 + y_0^2,$$

isto é, $\mathbf{x}(t)$ pertence à circunferência de centro $(x_L, 0)$ e raio $\sqrt{x_L^2 + y_0^2}$. Desta forma, se $y_0 \geq 0$, existe um menor tempo $t_L > 0$ tal que $x(t_L) = 0$ e $y(t_L) \leq 0$ e, conseqüentemente,

$$[x(t_L) - x_L]^2 + y(t_L)^2 = x_L^2 + y(t_L)^2 = x_L^2 + y_0^2.$$

Como $y(t_L) \leq 0$, temos $y(t_L) = -y_0$. Portanto, $P_L : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_-$ e, para todo $y_0 \in \mathbb{R}_+$,

$$P_L(y_0) = -y_0.$$

A seguir, exibimos uma representação paramétrica para a aplicação de Poincaré a esquerda P_L , para $\gamma_L \neq 0$. Supomos $\gamma_L \neq 0$. Denotamos por \hat{t}_L o valor pertencente ao intervalo $(\pi, 2\pi)$ tal que $\varphi_{|\gamma_L|}(\hat{t}_L) = 0$. Primeiramente, assumimos $\gamma_L > 0$. Seja $x(t) = (x(t), y(t))$ a solução de (3.3) com condição inicial $x(0) = (0, y_0)$, onde $y_0 \in \mathcal{Y}_0$. Observamos que

$$x(2\pi) = x_L(1 - e^{\gamma_L 2\pi}) > 0.$$

Logo, $0 < t_L < 2\pi$. Temos, pela equação (3.5),

$$x(t_L) - x_L = -x_L = -e^{\gamma_L t_L}(\cos t_L + \gamma_L \text{sen } t_L)x_L - e^{\gamma_L t_L}(y_0 - \bar{y}) \text{sen } t_L. \quad (3.6)$$

Se $t_L = \pi$, então segue da equação (3.6)

$$x_L(1 + e^{\gamma_L \pi}) = 0$$

o que é um absurdo pois $x_L < 0$ e $1 + e^{\gamma_L \pi} > 0$. Logo,

$$\text{ou } 0 < t_L < \pi \text{ ou } \pi < t_L \leq \hat{t}_L \text{ ou } \hat{t}_L < t_L < 2\pi,$$

e das equações (3.5) e (3.6) temos, omitindo alguns cálculos,

$$\begin{aligned} -x_L &= -e^{\gamma_L t_L}(\cos t_L + \gamma_L \text{sen } t_L)x_L - e^{\gamma_L t_L}(y_0 - \bar{y}) \text{sen } t_L \implies \\ &\implies e^{\gamma_L t_L}(y_0 - \bar{y}) \text{sen } t_L = -e^{\gamma_L t_L}(\cos t_L + \gamma_L \text{sen } t_L)x_L + x_L \implies \\ &\implies y_0 = -\frac{(\cos t_L + \gamma_L \text{sen } t_L)x_L}{\text{sen } t_L} + \frac{x_L}{e^{\gamma_L t_L} \text{sen } t_L} + \bar{y} \implies \\ &\implies y_0 = x_L \left(2\gamma_L + \frac{1}{e^{\gamma_L t_L} \text{sen } t_L} - \frac{\cos t_L + \gamma_L \text{sen } t_L}{\text{sen } t_L} \right) \implies \\ &\implies y_0 = x_L e^{-\gamma_L t_L} \left(\frac{2\gamma_L e^{\gamma_L t_L} \text{sen } t_L + 1 - e^{\gamma_L t_L}(\cos t_L + \gamma_L \text{sen } t_L)}{\text{sen } t_L} \right) \implies \\ &\implies y_0 = x_L \frac{e^{-\gamma_L t_L} \varphi_{\gamma_L}(t_L)}{\text{sen } t_L}. \end{aligned}$$

e

$$P_L(y_0) - \bar{y} = y(t_L) - \bar{y} = -\bar{x}e^{\gamma_L t_L}(1 + \gamma_L^2) \text{sen } t_L + e^{\gamma_L t_L}(\cos t_L - \gamma_L \text{sen } t_L)(y_0 - \bar{y}) \implies$$

$$\implies P_L(y_0) = -\frac{a_L}{1 + \gamma_L^2} \frac{e^{\gamma_L t_L} \varphi_{-\gamma_L}(t_L)}{\text{sen } t_L} = -x_L \frac{e^{\gamma_L t_L} \varphi_{-\gamma_L}(t_L)}{\text{sen } t_L}.$$

Se $0 < t_L < \pi$ ou $\hat{t}_L < t_L < 2\pi$, então

$$y_0 = x_L \frac{e^{-\gamma_L t_L} \varphi_{\gamma_L}(t_L)}{\text{sen } t_L} < 0,$$

o que é um absurdo pois $y_0 \geq 0$. Desta forma, $t_L \in (\pi, \hat{t}_L]$. Observamos que

$$\left\{ x_L \frac{e^{-\gamma_L t} \varphi_{\gamma_L}(t)}{\text{sen } t}; t \in (\pi, \hat{t}_L] \right\} = [0, +\infty) = \mathcal{Y}_0.$$

Assumimos $\gamma_L < 0$. Denotamos

$$\hat{y} = x_L \frac{e^{-\gamma_L \hat{t}_L} \varphi_{\gamma_L}(\hat{t}_L)}{\text{sen } \hat{t}_L} > 0.$$

Seja $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$ a solução de (3.3) com condição inicial $\mathbf{x}(0) = (0, \hat{y})$. Notamos que

$$\left\{ x_L \frac{e^{-\gamma_L t} \varphi_{\gamma_L}(t)}{\text{sen } t}; t \in (\pi, \hat{t}_L] \right\} = [\hat{y}, +\infty) \subset \mathcal{Y}_0.$$

Como

$$x(\hat{t}_L) = 0 \text{ e } y(\hat{t}_L) = 0$$

segue que toda solução de (3.3) que em $t = 0$ passa por $(0, y_0)$, com $0 \leq y_0 < \hat{y}$, não pode cruzar Σ depois de um tempo positivo. Logo, $\emptyset = \mathcal{Y}_0 \setminus [\hat{y}, +\infty) \subset [0, \hat{y})$. Desta forma,

$$\mathcal{Y}_0 = [\hat{y}, +\infty) = \left\{ x_L \frac{e^{-\gamma_L t} \varphi_{\gamma_L}(t)}{\text{sen } t}; t \in (\pi, \hat{t}_L] \right\}$$

e, conseqüentemente, $t_L \in (\pi, \hat{t}_L]$.

Diante da construção exposta anteriormente segue, para $\gamma_L \neq 0$,

$$\left\{ x_L \frac{e^{-\gamma_L t} \varphi_{\gamma_L}(t)}{\text{sen } t}; t \in (\pi, \hat{t}_L] \right\} = \mathcal{Y}_0,$$

com $\widehat{t}_L \in (\pi, 2\pi)$ e $\varphi_{|\gamma_L|}(\widehat{t}_L) = 0$.

Consideramos as funções $y_0 : (\pi, \widehat{t}_L] \longrightarrow \mathcal{Y}_0$ e $y_1 : (\pi, \widehat{t}_L] \longrightarrow \mathbb{R}_-$ dadas por

$$y_0(t) = x_L \frac{e^{-\gamma_L t} \varphi_{\gamma_L}(t)}{\text{sen } t} \text{ e } y_1(t) = P_L(y_0(t)) = -x_L \frac{e^{\gamma_L t} \varphi_{-\gamma_L}(t)}{\text{sen } t}.$$

Portanto, para $\gamma_L \neq 0$, temos uma representação paramétrica para a aplicação de Poincaré a esquerda P_L , que é dada por

$$y_0(t) = x_L \frac{e^{-\gamma_L t} \varphi_{\gamma_L}(t)}{\text{sen } t}, \quad y_1(t) = P_L(y_0(t)) = -x_L \frac{e^{\gamma_L t} \varphi_{-\gamma_L}(t)}{\text{sen } t}. \quad (3.7)$$

com $t \in (\pi, \widehat{t}_L]$, onde $\widehat{t}_L \in (\pi, 2\pi)$ e $\varphi_{|\gamma_L|}(\widehat{t}_L) = 0$.

De (3.7) temos, para $t \in (\pi, \widehat{t}_L)$,

$$\frac{dy_1}{dt}(t) = \frac{d(P_L \circ y_0)}{dt}(t) = \frac{a_L \text{cossec}^2(t) (-\gamma_L e^{\gamma_L t} \text{sen } t + e^{\gamma_L t} \cos t - 1)}{1 + \gamma_L^2}$$

e

$$\frac{dy_0}{dt}(t) = -\frac{a_L e^{-\gamma_L t} \text{cossec}^2(t) (-e^{\gamma_L t} + \gamma_L \text{sen } t + \cos t)}{1 + \gamma_L^2}.$$

Logo, dado $y_0 \in \mathcal{Y}_0$ associado a um $t_L > 0$ tal que $t_L \in (\pi, \widehat{t}_L)$, temos

$$P'_L(y_0) = -\frac{-\varphi_{\gamma_L}(t_L)}{-\varphi_{-\gamma_L}(t_L)} = -\frac{\varphi_{\gamma_L}(t_L)}{\varphi_{-\gamma_L}(t_L)} = \frac{y_0}{P_L(y_0)} e^{2\gamma_L t_L} < 0 \quad (3.8)$$

e

$$\begin{aligned} P''_L(y_0) &= \frac{2a_L^2}{1 + \gamma_L^2} \frac{\text{senh}(\gamma_L t_L) - \gamma_L \text{sen } t_L}{[P_L(y_0)]^3} e^{3\gamma_L t_L} = \\ &= 2x_L^2 (1 + \gamma_L^2) \frac{\text{senh}(\gamma_L t_L) - \gamma_L \text{sen } t_L}{P_L^3(y_0)} e^{3\gamma_L t_L}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Analogamente, consideramos o sistema (3.3) com $\sigma = b \geq 0$, $\bar{x} = x_R < 0$ e $\gamma = \gamma_R$, isto é, consideramos o sistema $x' = H^+(x)$ onde o campo H^+ é dado em (3.2). Sobre a reta $x = 0$ temos

$$(x', y') = (-y + b, -a_R) = H^+(0, y).$$

Para $y < b$ segue $x' > 0$ e $y' > 0$, e para $y > b$ temos $x' < 0$ e $y' > 0$. Logo, o sentido do campo H^+ sobre a reta $x = 0$ garante que a trajetória de (3.3), que no tempo $t = 0$ passa por um

ponto $(0, z_0)$, com $z_0 < b$, segue por Σ^+ e encontra Σ em um ponto $(0, z_1)$, com $z_1 > b$, depois de um menor tempo $t_R > 0$. Veja a Figura 3.3.

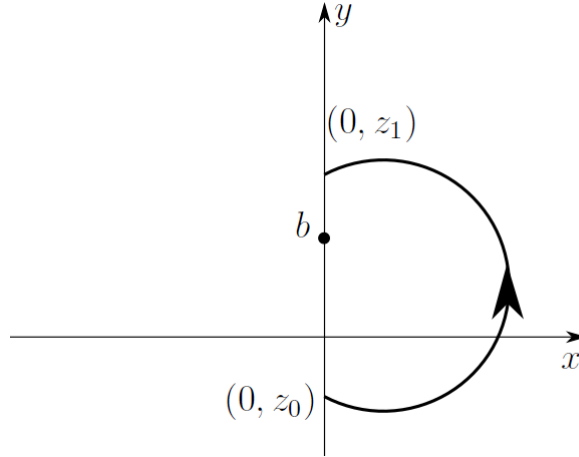


Figura 3.3: Uma trajetória local de (3.3), com $\sigma = b \geq 0$, $\bar{x} = x_R < 0$ e $\gamma = \gamma_R$, por um ponto $(0, z_0)$, com $z_0 < b$, que segue por Σ^+ e encontra Σ em um ponto $(0, z_1)$, com $y_1 > b$.

Denotamos por \mathcal{Z}_0 o conjunto dos valores $z_0 < b$ tais que a trajetória de (3.3) que no tempo $t = 0$ passa por $(0, z_0)$ segue por Σ^+ e encontra Σ em um ponto $(0, z_1)$, com $z_1 > b$, depois de um menor tempo $t_R > 0$. Definimos a aplicação de Poincaré a direita por $P_R : \mathcal{Z}_0 \cup \{b\} \rightarrow \{z_1 \in \mathbb{R}; z_1 \geq b\}$, $P_R(z_0) = z_1$ e $P_R(b) = b$. Para determinarmos P_R consideramos $\sigma = b \geq 0$, $\bar{x} = x_R < 0$ e $\gamma = \gamma_R$ em (3.5).

Supomos $\gamma_R = 0$. Seja $x(t) = (x(t), y(t))$ a solução de (3.3) com condição inicial $x(0) = (0, z_0)$. Desta forma,

$$x(t) = (x(t), y(t)) = (x_R - x_R \cos t - (z_0 - b) \sin t, b - x_R \sin t + (z_0 - b) \cos t),$$

com $x(0) = x(2\pi)$. Observamos que

$$[x(t) - x_R]^2 + [y(t) - b]^2 = (z_0 - b)^2 + x_R^2,$$

isto é, $x(t)$ pertence à circunferência de centro (x_R, b) e raio $\sqrt{(z_0 - b)^2 + x_R^2}$. Logo, se $z_0 \leq b$, existe um menor tempo $t_R > 0$ tal que $x(t_R) = 0$ e $y(t_R) = z_1 \geq b$ e, conseqüentemente,

$$[x(t_R) - x_R]^2 + [y(t_R) - b]^2 = x_R^2 + [y(t_R) - b]^2 = (z_0 - b)^2 + x_R^2.$$

Como $z_0 - b \leq 0$ e $y(t_R) - b \geq 0$, segue $y(t_R) = z_1 = -z_0 + 2b$. Portanto,

$$P_R : \{z_0 \in \mathbb{R}; z_0 \leq b\} \rightarrow \{z_1 \in \mathbb{R}; z_1 \geq b\}$$

e, para todo $z_0 \in \{z_0 \in \mathbb{R}; z_0 \leq b\}$,

$$P_R(z_0) = -z_0 + 2b.$$

A seguir, exibimos uma representação paramétrica para a aplicação de Poincaré a direita P_R , para $\gamma_R \neq 0$. Supomos $\gamma_R \neq 0$. Seja $x(t) = (x(t), y(t))$ a solução de (3.3) com condição inicial $x(0) = (0, z_0)$, onde $z_0 \in \mathcal{Z}_0$. Pela equação (3.5) temos

$$x(\pi) = x_R(1 + e^{\gamma_R \pi}) < 0.$$

Logo, $0 < t_R < \pi$ e da equação (3.5) segue

$$x(t_R) - x_R = -x_R = -e^{\gamma_R t_R}(\cos t_R + \gamma_R \operatorname{sen} t_R)x_R - e^{\gamma_R t_R}(z_0 - \bar{y}) \operatorname{sen} t_R. \quad (3.10)$$

Das equações (3.5) e (3.10) segue, omitindo alguns cálculos,

$$\begin{aligned} -x_R &= -e^{\gamma_R t_R}(\cos t_R + \gamma_R \operatorname{sen} t_R)x_R - e^{\gamma_R t_R}(z_0 - \bar{y}) \operatorname{sen} t_R \implies \\ &\implies e^{\gamma_R t_R} z_0 \operatorname{sen} t_R = x_R - e^{\gamma_R t_R} x_R \cos t_R + e^{\gamma_R t_R} x_R \gamma_R \operatorname{sen} t_R + e^{\gamma_R t_R} b \operatorname{sen} t_R \implies \\ &\implies z_0 = x_R \frac{e^{-\gamma_R t_R} \varphi_{\gamma_R}(t_R)}{\operatorname{sen} t_R} + b \end{aligned}$$

e

$$P_R(z_0) = b - x_R \frac{e^{\gamma_R t_R} \varphi_{-\gamma_R}(t_R)}{\operatorname{sen} t_R}.$$

Diante da construção anterior temos, para $\gamma_R \neq 0$,

$$\left\{ x_R \frac{e^{-\gamma_R t} \varphi_{\gamma_R}(t)}{\operatorname{sen} t} + b; t \in (0, \pi) \right\} = (-\infty, b) = \mathcal{Z}_0,$$

Consideramos as funções $z_0 : (0, \pi) \rightarrow (-\infty, b)$ e $z_1 : (0, \pi) \rightarrow \{z_1 \in \mathbb{R}; z_1 > b\}$ dadas por

$$z_0(t) = x_R \frac{e^{-\gamma_R t} \varphi_{\gamma_R}(t)}{\operatorname{sen} t} + b \text{ e } z_1(t) = P_R(z_0(t)) = b - x_R \frac{e^{\gamma_R t} \varphi_{-\gamma_R}(t)}{\operatorname{sen} t}.$$

Portanto, para $\gamma_R \neq 0$, temos uma representação paramétrica para a aplicação de Poincaré a

direita P_R , que é dada por

$$z_0(t) = x_R \frac{e^{-\gamma_R t} \varphi_{\gamma_R}(t)}{\operatorname{sen} t} + b, \quad z_1(t) = P_R(z_0(t)) = b - x_R \frac{e^{\gamma_R t} \varphi_{-\gamma_R}(t)}{\operatorname{sen} t}. \quad (3.11)$$

com $P_R(b) = b$ e $t \in (0, \pi)$.

De (3.11) temos, para $t \in (0, \pi)$,

$$\frac{dz_1}{dt}(t) = \frac{d(P_R \circ z_0)}{dt}(t) = \frac{a_R \operatorname{cosec}^2(t) (-\gamma_R e^{\gamma_R t} \operatorname{sen} t + e^{\gamma_R t} \cos t - 1)}{1 + \gamma_R^2}$$

e

$$\frac{dz_0}{dt}(t) = -\frac{a_R e^{-\gamma_R t} \operatorname{cosec}^2(t) (-e^{\gamma_R t} + \gamma_R \operatorname{sen} t + \cos t)}{1 + \gamma_R^2}.$$

Logo, dado $z_0 = z_0(t_R) \in \mathcal{Z}_0$, temos

$$P'_R(z_0) = \frac{z_0 - b}{P_R(z_0) - b} e^{2\gamma_R t_R} = -\frac{\varphi_{\gamma_R}(t_R)}{\varphi_{-\gamma_R}(t_R)} < 0. \quad (3.12)$$

e

$$P''_R(z_0) = 2x_R^2 (1 + \gamma_R^2) \frac{\operatorname{senh}(t_R \gamma_R) - \gamma_R \operatorname{sen} t_R}{[P_R(z_0) - b]^3} e^{3\gamma_R t_R}. \quad (3.13)$$

Pela construção das aplicações P_L e P_R segue $\operatorname{Im}(P_L) \subset \operatorname{Dom}(P_R)$.

Definição 3.1.1. *Considere o sistema (3.2). Suponha $x_L < 0$, $x_R < 0$ e $b \geq 0$. Definimos a aplicação de Poincaré P por*

$$P = P_R \circ P_L : \operatorname{Dom}(P_L) \longrightarrow (b, +\infty).$$

Notamos que, perante toda a análise anterior, podemos usar as aplicações P_L , P_R e P para estudarmos as trajetórias locais do sistema (3.2) com $b \geq 0$, $x_L < 0$ e $x_R < 0$.

Os teoremas a seguir nos dão informações sobre o comportamento das aplicações P_L , P_R e P .

Teorema 3.1.1. *Considere o sistema (3.2). Suponha $x_L < 0$. Logo,*

- a) *se $\gamma_L = 0$, então para todo $y_0 \geq 0$, $P_L(y_0) = -y_0$. Se $\gamma_L \neq 0$, então P_L está definida em (3.7) para todo $t \in (\pi, \widehat{t}_L]$, onde $\widehat{t}_L \in (\pi, 2\pi)$ e $\varphi_{|\gamma_L|}(\widehat{t}_L) = 0$;*

b) se $\gamma_L < 0$, então $P_L : [\hat{y}, +\infty) \rightarrow (-\infty, 0]$, P_L é sobrejetora,

$$P_L(\hat{y}) = 0 \text{ e } \lim_{y_0 \rightarrow \hat{y}^+} P'_L(y_0) = -\infty,$$

onde $\hat{y} = y_0(\hat{t}_L) > 0$ e $\hat{t}_L \in (\pi, 2\pi)$ com $\varphi_{|\gamma_L|}(\hat{t}_L) = \varphi_{-\gamma_L}(\hat{t}_L) = 0$;

c) se $\gamma_L > 0$, então $P_L : [0, +\infty) \rightarrow (-\infty, \hat{y}_1]$, P_L é sobrejetora,

$$P_L(0) = \hat{y}_1 \text{ e } \lim_{y_0 \rightarrow 0^+} P'_L(y_0) = 0$$

onde $\hat{y}_1 = y_1(\hat{t}_L) < 0$ e $\hat{t}_L \in (\pi, 2\pi)$ com $\varphi_{|\gamma_L|}(\hat{t}_L) = \varphi_{\gamma_L}(\hat{t}_L) = 0$;

d) se $\gamma_L \neq 0$, então $P'_L(y_0) < 0$ e $\text{sign } P''_L(y_0) = -\text{sign } \gamma_L$ para todo $y_0 \in \text{int Dom}(P_L)$ com

$$\lim_{y_0 \rightarrow +\infty} P'_L(y_0) = -e^{\gamma_L \pi}.$$

Além disso,

$$A_L : A_L(y) = -e^{\gamma_L \pi} y + 2(1 + e^{\gamma_L \pi}) x_L \gamma_L, \quad y \in \mathbb{R}$$

é uma assíntota oblíqua para P_L com $\text{sign}[A_L(y_0) - P_L(y_0)] = \text{sign } \gamma_L$ para todo $y_0 \in \text{Dom}(P_L)$.

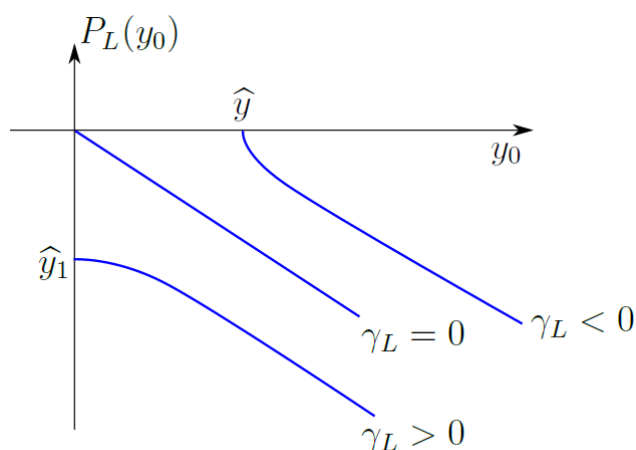


Figura 3.4: Esboço do gráfico da aplicação P_L para diferentes valores do parâmetro γ_L .

Demonstração

a) Segue diretamente da análise feita no início desta seção.

b) Supomos $\gamma_L < 0$. Seja $\widehat{t}_L \in (\pi, 2\pi)$ tal que $\varphi_{|\gamma_L|}(\widehat{t}_L) = \varphi_{-\gamma_L}(\widehat{t}_L) = 0$. Observamos que

$$\varphi_{\gamma_L}(\widehat{t}_L) = \varphi_{-\gamma_L}(-\widehat{t}_L) > 0.$$

De (3.7) temos

$$\widehat{y} := y_0(\widehat{t}_L) = x_L \frac{e^{-\gamma_L \widehat{t}_L} \varphi_{\gamma_L}(\widehat{t}_L)}{\text{sen } \widehat{t}_L} > 0 \text{ e } P_L(\widehat{y}) = 0.$$

Da análise feita no começo desta seção segue que $\mathcal{Y}_0 = [\widehat{y}, +\infty)$, para $\gamma_L < 0$. Sabemos, de (3.7), que todo $y_0 \in [\widehat{y}, +\infty)$ é da forma

$$y_0 = x_L \frac{e^{-\gamma_L t_L} \varphi_{\gamma_L}(t_L)}{\text{sen } t_L}$$

para algum $t_L \in (\pi, \widehat{t}_L]$ e então,

$$y_0 \longrightarrow +\infty \iff t_L \longrightarrow \pi^+$$

e

$$y_0 \longrightarrow \widehat{y}^+ \iff t_L \longrightarrow \widehat{t}_L^-.$$

Logo, por (3.7),

$$\lim_{y_0 \rightarrow +\infty} P_L(y_0) = \lim_{t_L \rightarrow \pi^+} -x_L \frac{e^{\gamma_L t_L} \varphi_{-\gamma_L}(t_L)}{\text{sen } t_L} = -\infty.$$

Desta forma, $P_L : [\widehat{y}, +\infty) \longrightarrow (-\infty, 0]$ e P_L é sobrejetora, com $P_L(\widehat{y}) = 0$. Pela equação (3.8) temos

$$\lim_{y_0 \rightarrow \widehat{y}^+} P'_L(y_0) = \lim_{t_L \rightarrow \widehat{t}_L^-} -\frac{\varphi_{\gamma_L}(t_L)}{\varphi_{-\gamma_L}(t_L)} = -\infty$$

pois

$$\lim_{t_L \rightarrow \widehat{t}_L^-} \varphi_{-\gamma_L}(t_L) = 0^+ \text{ e } \lim_{t_L \rightarrow \widehat{t}_L^-} \varphi_{\gamma_L}(t_L) = \varphi_{\gamma_L}(\widehat{t}_L) > 0.$$

Portanto, $P_L : [\widehat{y}, +\infty) \longrightarrow (-\infty, 0]$ e P_L é sobrejetora, com

$$P_L(\widehat{y}) = 0 \text{ e } \lim_{y_0 \rightarrow \widehat{y}^+} P'_L(y_0) = -\infty$$

onde $\widehat{y} = y_0(\widehat{t}_L) > 0$ e $\widehat{t}_L \in (\pi, 2\pi)$ é tal que $\varphi_{|\gamma_L|}(\widehat{t}_L) = \varphi_{-\gamma_L}(\widehat{t}_L) = 0$.

c) Supomos $\gamma_L > 0$. Seja $\widehat{t}_L \in (\pi, 2\pi)$ tal que $\varphi_{|\gamma_L|}(\widehat{t}_L) = \varphi_{\gamma_L}(\widehat{t}_L) = 0$. Notamos que

$$\varphi_{-\gamma_L}(\widehat{t}_L) = \varphi_{\gamma_L}(-\widehat{t}_L) > 0.$$

De (3.7) segue

$$y_0(\widehat{t}_L) = x_L \frac{e^{-\gamma_L \widehat{t}_L} \varphi_{\gamma_L}(\widehat{t}_L)}{\widehat{\text{sen}} \widehat{t}_L} = 0$$

e

$$\widehat{y}_1 := y_1(\widehat{t}_L) = P_L(0) = -x_L \frac{e^{\gamma_L \widehat{t}_L} \varphi_{-\gamma_L}(\widehat{t}_L)}{\widehat{\text{sen}} \widehat{t}_L} < 0.$$

Da análise feita no início desta seção temos $\mathcal{Y}_0 = [0, +\infty)$, para $\gamma_L > 0$. Sabemos, de (3.7), que todo $y_0 \in [0, +\infty)$ tem a forma

$$y_0 = x_L \frac{e^{-\gamma_L t_L} \varphi_{\gamma_L}(t_L)}{\text{sen } t_L}$$

para algum $t_L \in (\pi, \widehat{t}_L]$ e então,

$$y_0 \longrightarrow +\infty \iff t_L \longrightarrow \pi^+$$

e

$$y_0 \longrightarrow 0^+ \iff t_L \longrightarrow \widehat{t}_L^-.$$

Desta maneira, por (3.7),

$$\lim_{y_0 \rightarrow +\infty} P_L(y_0) = \lim_{t_L \rightarrow \pi^+} -x_L \frac{e^{\gamma_L t_L} \varphi_{-\gamma_L}(t_L)}{\text{sen } t_L} = -\infty.$$

Logo, $P_L : [0, +\infty) \longrightarrow (-\infty, \widehat{y}_1]$ e P_L é sobrejetora, com $P_L(0) = \widehat{y}_1$. De (3.8) obtemos

$$\lim_{y_0 \rightarrow 0^+} P'_L(y_0) = \lim_{t_L \rightarrow \widehat{t}_L^-} -\frac{\varphi_{\gamma_L}(t_L)}{\varphi_{-\gamma_L}(t_L)} = 0$$

pois

$$\lim_{t_L \rightarrow \widehat{t}_L^-} \varphi_{\gamma_L}(t_L) = \varphi_{\gamma_L}(\widehat{t}_L) = 0 \text{ e } \lim_{t_L \rightarrow \widehat{t}_L^-} \varphi_{-\gamma_L}(t_L) = \varphi_{-\gamma_L}(\widehat{t}_L) > 0.$$

Portanto, $P_L : [0, +\infty) \longrightarrow (-\infty, \widehat{y}_1]$ e P_L é sobrejetora, com

$$P_L(0) = \widehat{y}_1 \text{ e } \lim_{y_0 \rightarrow 0^+} P'_L(y_0) = -\infty$$

onde $\widehat{y}_1 = y_1(\widehat{t}_L) < 0$ e $\widehat{t}_L \in (\pi, 2\pi)$ é tal que $\varphi_{|\gamma_L|}(\widehat{t}_L) = \varphi_{\gamma_L}(\widehat{t}_L) = 0$.

d) Supomos $\gamma_L \neq 0$. De (3.8) segue, para todo $y_0 \in \text{int Dom}(P_L)$, $P'_L(y_0) < 0$. Sabemos, de (3.7), que todo $y_0 \in \text{int Dom}(P_L)$ é da forma

$$y_0 = x_L \frac{e^{-\gamma_L t_L} \varphi_{\gamma_L}(t_L)}{\text{sen } t_L}$$

para algum $t_L \in (\pi, \widehat{t}_L]$ e então,

$$y_0 \longrightarrow +\infty \iff t_L \longrightarrow \pi^+.$$

Logo, de (3.8), segue

$$\lim_{y_0 \rightarrow +\infty} P'_L(y_0) = \lim_{t_L \rightarrow \pi^+} -\frac{1 - e^{\gamma_L t_L} (\cos t_L - \gamma_L \text{sen } t_L)}{1 - e^{-\gamma_L t_L} (\cos t_L + \gamma_L \text{sen } t_L)} = -\frac{1 + e^{\gamma_L \pi}}{1 + e^{-\gamma_L \pi}} = -e^{\gamma_L \pi}.$$

Dado $y_0 \in \text{int Dom}(P_L)$, pela equação (3.9) temos

$$\text{sign } P''_L(y_0) = -\text{sign}[\text{senh}(t_L \gamma_L) - \gamma_L \text{sen } t_L]$$

para algum $t_L \in (\pi, \widehat{t}_L)$. Consideramos a função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(t) = \text{senh}(t \gamma_L) - \gamma_L \text{sen } t.$$

Primeiramente, assumimos $\gamma_L > 0$. Notamos que $g(\pi) > 0$. Para todo $t \in (\pi, 2\pi)$, segue

$$g'(t) = \gamma_L \cosh(t \gamma_L) - \gamma_L \cos t = \gamma_L [\cosh(t \gamma_L) - \cos t] > 0$$

pois

$$\cosh(t \gamma_L) - \cos t > \cosh(t \gamma_L) - 1 > 0, \text{ para todo } t \in (\pi, 2\pi).$$

Logo, g é crescente em $(\pi, 2\pi)$ e como $g(\pi) > 0$, segue $g(t) > 0$ para todo $t \in (\pi, \widehat{t}_L)$.

Desta maneira,

$$\text{sign}[\text{senh}(t_L \gamma_L) - \gamma_L \text{sen } t_L] = \text{sign } \gamma_L$$

e então,

$$\text{sign } P''_L(y_0) = -\text{sign } \gamma_L.$$

Supomos $\gamma_L < 0$. Logo, $g(\pi) < 0$ e para todo $t \in (\pi, 2\pi)$ segue $g'(t) < 0$, pois

$$\cosh(t\gamma_L) - \cos t > \cosh(t\gamma_L) - 1 > 0, \text{ para todo } t \in (\pi, 2\pi).$$

Desta forma, g é decrescente em $(\pi, 2\pi)$ e como $g(\pi) < 0$, segue $g(t) < 0$ para todo $t \in (\pi, \hat{t}_L)$. Logo,

$$\text{sign}[\sinh(t_L\gamma_L) - \gamma_L \text{sen } t_L] = \text{sign } \gamma_L$$

e, conseqüentemente, $\text{sign } P_L''(y_0) = -\text{sign } \gamma_L$.

Mostramos, a seguir, que o gráfico de P_L possui uma assíntota oblíqua. Denotamos

$$a = \lim_{y_0 \rightarrow +\infty} \frac{P_L(y_0)}{y_0} = \lim_{t_L \rightarrow \pi^+} \frac{-e^{2\gamma_L t_L}}{\varphi_{\gamma_L}(t_L)} \varphi_{-\gamma_L}(t_L) = \frac{-e^{2\gamma_L \pi}(1 + e^{-\gamma_L \pi})}{1 + e^{\gamma_L \pi}} = -e^{\gamma_L \pi}$$

e

$$\begin{aligned} c &= \lim_{y_0 \rightarrow +\infty} P_L(y_0) + e^{\gamma_L \pi} y_0 = \lim_{t_L \rightarrow \pi^+} -x_L \frac{e^{\gamma_L t_L} \varphi_{-\gamma_L}(t_L)}{\text{sen } t_L} + x_L \frac{e^{\gamma_L(\pi - t_L)} \varphi_{\gamma_L}(t_L)}{\text{sen } t_L} = \\ &= \lim_{t_L \rightarrow \pi^+} x_L \left[\frac{e^{\gamma_L(\pi - t_L)} \varphi_{\gamma_L}(t_L) - e^{\gamma_L t_L} \varphi_{-\gamma_L}(t_L)}{\text{sen } t_L} \right] \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \\ &= -x_L \{ (-\gamma_L)[1 + e^{\gamma_L \pi}] + [\gamma_L e^{\gamma_L \pi} - \gamma_L e^{\gamma_L \pi}] - \gamma_L e^{\gamma_L \pi} [1 + e^{-\gamma_L \pi}] \} = \\ &= 2x_L \gamma_L (1 + e^{\gamma_L \pi}). \end{aligned}$$

Como a e c são finitos, segue que a aplicação P_L possui uma assíntota oblíqua A_L cuja equação é dada por

$$A_L(y) = ay + c = -e^{\gamma_L \pi} y + 2x_L \gamma_L (1 + e^{\gamma_L \pi}), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Supomos $\gamma_L < 0$. Pelo item **b**) temos $\text{Dom}(P_L) = [\hat{y}, +\infty)$ e $P_L(\hat{y}) = 0$. Além disso, a aplicação P_L é decrescente e côncava para cima no intervalo $(\hat{y}, +\infty)$ pois $P_L'(y_0) < 0$ e $\text{sign } P_L''(y_0) = -\text{sign } \gamma_L > 0$ para todo $y_0 \in (\hat{y}, +\infty)$. Como a reta determinada por A_L é uma assíntota oblíqua para P_L e $A_L(\hat{y}) < 0$, segue que P_L tende à A_L de tal forma que, para todo $y_0 \in [\hat{y}, +\infty)$, $P_L(y_0) - A_L(y_0) > 0$. Desta forma, para todo $y_0 \in [\hat{y}, +\infty)$,

$$\text{sign}[A_L(y_0) - P_L(y_0)] = \text{sign } \gamma_L.$$

Supomos $\gamma_L > 0$. Pelo item **c**) temos $\text{Dom}(P_L) = [0, +\infty)$ e $P_L(0) = \hat{y}_1$. Observamos que P_L e P'_L são decrescentes pois $P'_L(y_0) < 0$ e $\text{sign} P''_L(y_0) = -\text{sign} \gamma_L < 0$ para todo $(0, +\infty)$, respectivamente. Como a reta determinada por A_L é uma assíntota oblíqua para P_L , segue que P_L tende à A_L de tal forma que, para todo $y_0 \in [0, +\infty)$, $P_L(y_0) - A_L(y_0) < 0$. Logo, para todo $y_0 \in [0, +\infty)$,

$$\text{sign}[A_L(y_0) - P_L(y_0)] = \text{sign} \gamma_L.$$

Portanto, para todo $y_0 \in \text{int Dom}(P_L)$, segue $P'_L(y_0) < 0$,

$$\lim_{y_0 \rightarrow +\infty} P'_L(y_0) = -e^{\gamma_L \pi}, \quad \text{sign} P''_L(y_0) = -\text{sign} \gamma_L$$

e

$$A_L : A_L(y) = -e^{\gamma_L \pi} y + 2(1 + e^{\gamma_L \pi}) x_L \gamma_L, \quad y \in \mathbb{R}$$

é uma assíntota oblíqua para P_L com $\text{sign}[A_L(y_0) - P_L(y_0)] = \text{sign} \gamma_L$ para todo $y_0 \in \text{Dom}(P_L)$. ■

Teorema 3.1.2. *Considere o sistema (3.2). Suponha $x_R < 0$. Logo,*

- a) se $\gamma_R = 0$, então para todo $z_0 \leq b$, $P_R(z_0) = -z_0 + 2b$;
- b) se $\gamma_R \neq 0$, então P_R está definida em (3.11) para todo $t \in (0, \pi)$, com $P_R(b) = b$,

$$\lim_{z_0 \rightarrow b^-} P'_R(z_0) = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{z_0 \rightarrow -\infty} P'_R(z_0) = -e^{\gamma_R \pi}.$$

Além disso, para todo $z_0 \in (-\infty, b)$, $P'_R(z_0) < 0$ e $\text{sign} P''_R(z_0) = \text{sign} \gamma_R$.

- c) a aplicação P_R^{-1} tem uma assíntota oblíqua $A_{R^{-1}}$ dada por

$$A_{R^{-1}} : A_{R^{-1}}(z) = -e^{-\gamma_R \pi} z + (1 + e^{-\gamma_R \pi})(b + 2x_R \gamma_R), \quad z \in \mathbb{R}.$$

Além disso, para todo $z_1 \in [b, +\infty)$

$$\text{sign}[P_R^{-1}(z_1) - A_{R^{-1}}(z_1)] = \text{sign} \gamma_R.$$

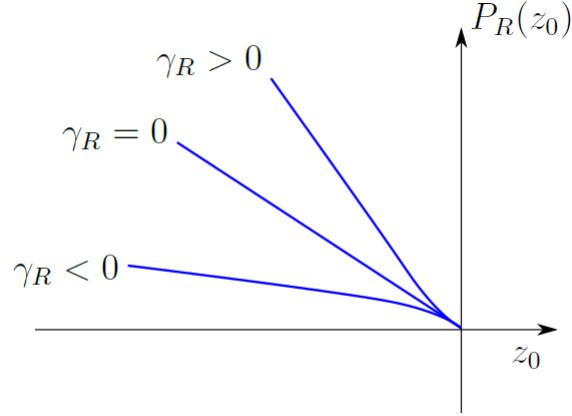


Figura 3.5: Esboço do gráfico da aplicação P_R para $b = 0$ e diferentes valores do parâmetro γ_R .

Demonstração

- a) Segue diretamente da análise feita no início desta seção.
- b) Supomos $\gamma_R \neq 0$. Da análise desenvolvida no começo desta seção, obtemos que P_R está definida em (3.11) para todo $t \in (0, \pi)$, com $P_R(b) = b$. De (3.5) segue, para $\sigma = b$, $\bar{x} = x_L$, $\gamma = \gamma_R$ e $x(0) = (0, z_0)$,

$$x(t) = e^{\gamma_R t} \{-x_R \cos t + [x_R \gamma_R - (z_0 - b)] \sin t\} + x_R$$

e

$$y(t) = e^{\gamma_R t} [(\cos t - \gamma_R \sin t) (-2x_R \gamma_R - b + z_0) - a_R \sin t] + 2x_R \gamma_R + b.$$

Desta forma, calculando a série de potências de $x(t)$ e $y(t)$ em torno de $t = 0$, obtemos

$$x(t) = -(z_0 - b)t + \frac{a_R - 2\gamma_R(z_0 - b)}{2}t^2 + \frac{2a_R\gamma_R + (1 - 3\gamma_R^2)(z_0 - b)}{6}t^3 +$$

$$+ \frac{a_R(3\gamma_R^2 - 1) + 4\gamma_R(z_0 - b)(1 - \gamma_R^2)}{24}t^4 + \dots$$

e

$$y(t) = b + (z_0 - b) - a_R t + (1 + \gamma_R^2) \left[-\frac{(z_0 - b)}{2}t^2 + \frac{a_R - 2\gamma_R(z_0 - b)}{6}t^3 + \dots \right].$$

Para cada $z_0 < b$ temos associado um tempo $t_R = t_R(z_0) > 0$. Supomos

$$t_R = t_R(z_0) = k_1(z_0 - b) + k_2(z_0 - b)^2 + k_3(z_0 - b)^3 + k_4(z_0 - b)^4 + \dots,$$

com k_1, k_2, \dots valores a determinar. Substituímos t_R em $x(t)$ e obtemos

$$x(t_R) = \left(\frac{a_R k_1^2}{2} - k_1 \right) (z_0 - b)^2 + \left(a_R k_1 k_2 + \frac{1}{3} a_R k_1^3 \gamma_R - k_2 - k_1^2 \gamma_R \right) (z_0 - b)^3 + \dots .$$

Como estamos a procura de $t_R = t_R(z_0)$ de tal forma que $x(t_R) = 0$, anulamos o termo que acompanha $(z_0 - b)^2$ e então,

$$k_1 = 0 \text{ ou } k_1 = \frac{2}{a_R}.$$

Escolhemos $k_1 = \frac{2}{a_R}$. Logo,

$$x(t_R) = \left(k_2 - \frac{4\gamma_R}{3a_R^2} \right) (z_0 - b)^3 + \left(-\frac{2\gamma_R^2}{a_R^3} + \frac{2}{3a_R^3} + \frac{a_R k_2^2}{2} + k_3 \right) (z_0 - b)^4 + \dots .$$

Anulamos o termo que acompanha $(z_0 - b)^3$ e obtemos

$$k_2 = \frac{4\gamma_R}{3a_R^2}.$$

Prosseguimos com este raciocínio e obtemos k_1, k_2, \dots tais que

$$t_R = \frac{2}{a_R} (z_0 - b) + \frac{4\gamma_R}{3a_R^2} (z_0 - b)^2 + \frac{2(5\gamma_R^2 - 3)}{9a_R^3} (z_0 - b)^3 + \frac{8(17\gamma_R^3 - 27\gamma_R)}{135a_R^4} (z_0 - b)^4 + \dots .$$

e

$$x(t_R) = 0.$$

Substituímos t_R na série de potências de $y(t)$, em torno de $t = 0$, e obtemos

$$P_R(z_0) = y(t_R) = -(z_0 - b) - \frac{4\gamma_R}{3a_R} (z_0 - b)^2 - \frac{16\gamma_R^2}{9a_R^2} (z_0 - b)^3 - \frac{4(79\gamma_R^3 - 9\gamma_R)}{135a_R^3} (z_0 - b)^4 + \dots .$$

Desta forma,

$$\lim_{z_0 \rightarrow b^-} P'_R(z_0) = -1.$$

De (3.12) segue, para todo $z_0 \in (-\infty, b)$, $P'_R(z_0) < 0$. Sabemos, de (3.11), que todo $z_0 \in (-\infty, b)$ é da forma

$$z_0 = x_R \frac{e^{-\gamma_R t_R} \varphi_{\gamma_R}(t_R)}{\text{sen } t_R} + b$$

para algum $t_R \in (0, \pi)$ e então,

$$z_0 \longrightarrow -\infty \iff t_R \rightarrow \pi^-.$$

Logo, de (3.11), segue

$$\lim_{z_0 \rightarrow -\infty} P'_R(z_0) = \lim_{t_R \rightarrow \pi^-} -\frac{\varphi_{\gamma_R}(t_R)}{\varphi_{-\gamma_R}(t_R)} = -\frac{1 + e^{\gamma_R \pi}}{1 + e^{-\gamma_R \pi}} = -e^{\gamma_R \pi}.$$

Dado $z_0 \in (b, +\infty)$ temos, pela equação (3.13),

$$\text{sign } P''_R(z_0) = \text{sign}[\text{senh}(t_R \gamma_R) - \gamma_R \text{sen } t_R]$$

para algum $t_R \in (0, \pi)$. Denotamos por h a função $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$h(t) = \text{senh}(t \gamma_R) - \gamma_R \text{sen } t.$$

Observamos que $h \in C^\infty$. Temos, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$h'(t) = \gamma_R \cosh(t \gamma_R) - \gamma_R \cos t;$$

$$h''(t) = \gamma_R^2 \text{senh}(t \gamma_R) + \gamma_R \text{sen } t;$$

$$h'''(t) = \gamma_R^3 \cosh(t \gamma_R) + \gamma_R \cos t.$$

Desta forma, $h(0) = h'(0) = h''(0) = 0$. Supomos $\gamma_R > 0$. Para todo $t \in (0, \frac{\pi}{2}]$ temos $h'''(t) > 0$. Então, a função h'' é crescente no intervalo $(0, \frac{\pi}{2}]$. Como $h''(0) = 0$ segue, para todo $t \in (0, \frac{\pi}{2}]$, $h''(t) > 0$. Logo, a função h' é crescente no intervalo $(0, \frac{\pi}{2}]$ e como $h'(0) = 0$ temos $h'(t) > 0$ para todo $t \in (0, \frac{\pi}{2}]$. Como $h(0) = 0$ temos $h(t) > 0$ para todo $t \in (0, \frac{\pi}{2}]$, pois a função h é crescente no intervalo $(0, \frac{\pi}{2}]$. Notamos que a função h é crescente no intervalo $(\frac{\pi}{2}, \pi)$. Desta forma, a função h é crescente em $(0, \pi)$ e então, para todo $t \in (0, \pi)$, $h(t) > 0$. Como $t_R \in (0, \pi)$ temos

$$\text{sign } P''_R(z_0) = \text{sign}[\text{senh}(t_R \gamma_R) - \gamma_R \text{sen } t_R] = \text{sign } h(t_R) > 0.$$

Desta forma,

$$\text{sign } P''_R(z_0) = \text{sign } \gamma_R.$$

Analogamente, supomos $\gamma_R < 0$. Para todo $t \in (0, \frac{\pi}{2}]$ temos $h'''(t) < 0$. Logo, a função h''

é decrescente no intervalo $(0, \frac{\pi}{2}]$. Como $h''(0) = 0$ segue, para todo $t \in (0, \frac{\pi}{2}]$, $h''(t) < 0$. Desta maneira, a função h' é decrescente no intervalo $(0, \frac{\pi}{2}]$ e como $h'(0) = 0$ segue $h'(t) < 0$ para todo $t \in (0, \frac{\pi}{2}]$. Como $h(0) = 0$ temos $h(t) < 0$ para todo $t \in (0, \frac{\pi}{2}]$, pois a função h é decrescente no intervalo $(0, \frac{\pi}{2}]$. Observamos que a função h é decrescente no intervalo $(\frac{\pi}{2}, \pi)$. Logo, a função h é decrescente em $(0, \pi)$ e então, $h(t) < 0$ para todo $t \in (0, \pi)$. Como $t_R \in (0, \pi)$ segue

$$\text{sign } P_R''(z_0) = \text{sign}[\text{senh}(t_R \gamma_R) - \gamma_R \text{sen } t_R] = \text{sign } h(t_R) < 0.$$

Logo,

$$\text{sign } P_R''(z_0) = \text{sign } \gamma_R.$$

Portanto, P_R está definida em (3.11) para todo $t \in (0, \pi)$, com $P_R(b) = b$,

$$\lim_{z_0 \rightarrow b^-} P_R'(z_0) = -1 \text{ e } \lim_{z_0 \rightarrow -\infty} P_R'(z_0) = -e^{\gamma_R \pi}.$$

Além disso, para todo $z_0 \in (-\infty, b)$, $P_R'(z_0) < 0$ e $\text{sign } P_R''(z_0) = \text{sign } \gamma_R$.

c) Sabemos, de (3.11), que todo $z_0 \in (-\infty, b)$ é da forma

$$z_0 = x_R \frac{e^{-\gamma_R t_R} \varphi_{\gamma_R}(t_R)}{\text{sen } t_R} + b$$

para algum $t_R \in (0, \pi)$ e, conseqüentemente,

$$z_1 = P_R(z_0) = b - x_R \frac{e^{\gamma_R t_R} \varphi_{-\gamma_R}(t_R)}{\text{sen } t_R}.$$

Então,

$$z_0 \rightarrow -\infty \iff t_R \rightarrow \pi^- \iff z_1 \rightarrow +\infty.$$

A seguir, mostramos que P_R^{-1} tem uma assíntota oblíqua. Denotando $z_0 = P_R^{-1}(z_1)$, temos

$$\begin{aligned} a &:= \lim_{z_1 \rightarrow +\infty} \frac{P_R^{-1}(z_1)}{z_1} = \lim_{z_0 \rightarrow -\infty} \frac{z_0}{P_R(z_0)} = \lim_{t_R \rightarrow \pi^-} \frac{b(1 + \gamma_R^2) \text{sen } t_R + a_R e^{-\gamma_R t_R} \varphi_{\gamma_R}(t_R)}{b(1 + \gamma_R^2) \text{sen } t_R - a_R e^{\gamma_R t_R} \varphi_{-\gamma_R}(t_R)} = \\ &= -e^{\gamma_R \pi} e^{-2\gamma_R \pi} = -e^{-\gamma_R \pi} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
c &:= \lim_{z_1 \rightarrow +\infty} P_R^{-1}(z_1) - z_1(-e^{-\gamma_R \pi}) = \lim_{z_0 \rightarrow -\infty} z_0 + e^{-\gamma_R \pi} P_R(z_0) = \\
&= \lim_{t_R \rightarrow \pi^-} \left[b + x_R \frac{e^{-\gamma_R t_R} \varphi_{\gamma_R}(t_R)}{\text{sen } t_R} + b e^{-\gamma_R \pi} - x_R \frac{e^{\gamma_R(t_R - \pi)} \varphi_{-\gamma_R}(t_R)}{\text{sen } t_R} \right] = \\
&= b(1 + e^{-\gamma_R \pi}) + x_R \lim_{t_R \rightarrow \pi^-} \left[\frac{e^{-\gamma_R t_R} \varphi_{\gamma_R}(t_R) - e^{\gamma_R(t_R - \pi)} \varphi_{-\gamma_R}(t_R)}{\text{sen } t_R} \right] \stackrel{L'Hospital}{=} \\
&= b(1 + e^{-\gamma_R \pi}) + x_R \frac{-\gamma_R e^{-\gamma_R \pi} [\varphi_{\gamma_R}(\pi)] + [\varphi'_{\gamma_R}(\pi)] e^{-\gamma_R \pi} - \gamma_R \varphi_{-\gamma_R}(\pi) - \varphi'_{-\gamma_R}(\pi)}{\cos \pi} = \\
&= b(1 + e^{-\gamma_R \pi}) + 2x_R \gamma_R e^{-\gamma_R \pi} + 2x_R \gamma_R = (b + 2x_R \gamma_R)(1 + e^{-\gamma_R \pi}).
\end{aligned}$$

Como a e c são finitos, segue que a aplicação P_R^{-1} possui uma assíntota oblíqua $A_{R^{-1}}$ cuja equação é dada por

$$A_{R^{-1}}(z) = -e^{-\gamma_R \pi} z + (1 + e^{-\gamma_R \pi})(b + 2x_R \gamma_R), \quad z \in \mathbb{R}.$$

Sabemos que $P_R(b) = b$ e, para todo $z_0 \in (-\infty, b)$, $\text{sign } P_R''(z_0) = \text{sign } \gamma_R$. Além disso, pelo item **b)** segue, para todo $z_0 \in (-\infty, b)$, $P_R'(z_0) < 0$. Supomos $\gamma_R < 0$. Logo, $P_R''(z_0) < 0$ para todo $z_0 \in (-\infty, b)$. Observamos que

$$A_{R^{-1}}(b) = b + 2x_R \gamma_R (1 + e^{-\gamma_R \pi}) > b.$$

Como $A_{R^{-1}}$ é uma assíntota oblíqua para P_R^{-1} , segue que P_R^{-1} tende à $A_{R^{-1}}$ de tal forma que, para todo $z_1 \in (-\infty, b]$,

$$P_R^{-1}(z_1) - A_{R^{-1}}(z_1) < 0.$$

Logo, para todo $z_1 \in (-\infty, b]$,

$$\text{sign}[P_R^{-1}(z_1) - A_{R^{-1}}(z_1)] = \text{sign } \gamma_R.$$

Supomos $\gamma_R > 0$. Logo, $P_R''(z_0) > 0$ para todo $z_0 \in (-\infty, b)$. Como $A_{R^{-1}}$ é uma assíntota oblíqua para P_R^{-1} e $A_{R^{-1}}(b) < b$, segue que P_R^{-1} tende à $A_{R^{-1}}$ de tal forma que, para todo

$z_1 \in (-\infty, b]$,

$$P_R^{-1}(z_1) - A_{R^{-1}}(z_1) > 0.$$

Logo, para todo $z_1 \in (-\infty, b]$, $\text{sign}[P_R^{-1}(z_1) - A_{R^{-1}}(z_1)] = \text{sign } \gamma_R$.

Portanto,

$$A_{R^{-1}} : A_{R^{-1}}(z) = -e^{-\gamma_R \pi} z + (1 + e^{-\gamma_R \pi})(b + 2x_R \gamma_R), \quad z \in \mathbb{R}$$

é uma assíntota oblíqua para P_R^{-1} tal que, para todo $z_1 \in (-\infty, b]$,

$$\text{sign}[P_R^{-1}(z_1) - A_{R^{-1}}(z_1)] = \text{sign } \gamma_R.$$

■

Teorema 3.1.3. *Considere o sistema (3.2). Suponha $x_L < 0$ e $x_R < 0$. Então,*

- a) a aplicação de Poincaré P está bem definida para todo $y_0 \geq y_P \geq 0$, com $y_P = \hat{y}$ quando $\gamma_L < 0$ e $y_P = 0$ quando $\gamma_L \geq 0$;
- b) se $\gamma_R = 0$ e $\gamma_L \neq 0$, então a aplicação de Poincaré P é dada, para todo $y_0 \in \text{Dom}(P) = \text{Dom}(P_L)$, por $P(y_0) = -P_L(y_0) + 2b$. Se $\gamma_R = \gamma_L = 0$, então a aplicação de Poincaré P é dada, para todo $y_0 \in \text{Dom}(P) = [0, +\infty)$, por $P(y_0) = y_0 + 2b$;
- c) se $\gamma_L = 0$ e $\gamma_R \neq 0$, então a aplicação de Poincaré P é dada, para todo $y_0 \in \text{Dom}(P) = [0, +\infty)$, por $P(y_0) = P_R(-y_0)$. Além disso, para todo $y_0 \in \text{int Dom}(P)$,

$$\text{sign } P''(y_0) = \text{sign } \gamma_R;$$

- d) para todo $y_0 > y_P$, onde y_P é definido no item a), vale

$$P'(y_0) = \frac{y_0}{P_L(y_0)} \frac{P_L(y_0) - b}{P(y_0) - b} e^{2(\gamma_R t_R + \gamma_L t_L)} > 0$$

com

$$\lim_{y_0 \rightarrow +\infty} P'(y_0) = e^{(\gamma_R + \gamma_L)\pi} e \lim_{y_0 \rightarrow y_P^+} P'(y_0) = \begin{cases} +\infty, & \text{se } \gamma_L < 0 \\ 1, & \text{se } \gamma_L = \gamma_R = 0 \\ 0, & \text{se } \gamma_L > 0 \end{cases} .$$

Demonstração

- a)** Sabemos, da Definição 3.1.1, que a aplicação de Poincaré P é dada por $P = P_R \circ P_L : \text{Dom}(P_L) \rightarrow (b, +\infty)$. Supomos $\gamma_L < 0$. Pelo item **b)** do Teorema 3.1.1 segue que a aplicação de Poincaré a esquerda P_L está definida para todo $y_0 \geq \hat{y}$. Supomos $\gamma_L \geq 0$. Pelos itens **a)** e **c)** do Teorema 3.1.1 segue que a aplicação de Poincaré a esquerda P_L está definida para todo $y_0 \geq 0$.

Portanto, a aplicação de Poincaré P está bem definida para todo $y_0 \geq y_P \geq 0$, com $y_P = \hat{y}$ quando $\gamma_L < 0$ e $y_P = 0$ quando $\gamma_L \geq 0$.

- b)** Supomos $\gamma_R = 0$ e $\gamma_L \neq 0$. Pelo item **a)** do Teorema 3.1.2 segue, para todo $y_0 \in \text{Dom}(P) = \text{Dom}(P_L)$,

$$P(y_0) = P_R(P_L(y_0)) = -P_L(y_0) + 2b.$$

Portanto, para todo $y_0 \in \text{Dom}(P)$, a aplicação de Poincaré P é dada por $P(y_0) = -P_L(y_0) + 2b$.

Supomos $\gamma_R = \gamma_L = 0$. Pelo item **a)** dos Teoremas 3.1.1 e 3.1.2 temos $\text{Dom}(P) = [0, +\infty)$ e, para todo $y_0 \in \text{Dom}(P)$,

$$P(y_0) = -(-y_0) + 2b = y_0 + 2b.$$

Portanto, para todo $y_0 \in \text{Dom}(P) = [0, +\infty)$, a aplicação de Poincaré P é dada por $P(y_0) = y_0 + 2b$.

- c)** Supomos $\gamma_L = 0$ e $\gamma_R \neq 0$. Pelo item **a)** do Teorema 3.1.1 temos $\text{Dom}(P) = [0, +\infty)$ e, para todo $y_0 \in \text{Dom}(P)$, $P(y_0) = P_R(-y_0)$. Além disso, para todo $y_0 \in \text{int Dom}(P)$,

$$P''(y_0) = P_R''(-y_0).$$

Logo, pelo item **b)** do Teorema 3.1.2, temos

$$\text{sign } P''(y_0) = \text{sign } P_R''(-y_0) = \text{sign } \gamma_R.$$

Portanto, para todo $y_0 \in \text{Dom}(P) = [0, +\infty)$, a aplicação de Poincaré P é dada por $P(y_0) = P_R(-y_0)$ e, para todo $y_0 \in \text{int Dom}(P)$,

$$\text{sign } P''(y_0) = \text{sign } \gamma_R.$$

d) Para todo $y_0 > y_P$, temos $P'(y_0) = P'_R(P_L(y_0))P'_L(y_0)$. Por (3.8), (3.12) e pela Regra da Cadeia segue, para todo $y_0 > y_P$,

$$P'(y_0) = \frac{P_L(y_0) - b}{P_R(P_L(y_0)) - b} e^{2\gamma_R t_R} \frac{y_0}{P_L(y_0)} e^{2\gamma_L t_L} = \frac{y_0}{P_L(y_0)} \frac{P_L(y_0) - b}{P(y_0) - b} e^{2(\gamma_R t_R + \gamma_L t_L)} > 0.$$

Sabemos, de (3.7), que dado $y_0 \in \text{int Dom}(P_L)$ temos

$$y_0 = x_L \frac{e^{-\gamma_L t_L} \varphi_{\gamma_L}(t_L)}{\text{sen } t_L} \text{ e } y_1 = P_L(y_0) = -x_L \frac{e^{\gamma_L t_L} \varphi_{-\gamma_L}(t_L)}{\text{sen } t_L}$$

para algum $t_L \in (\pi, \hat{t}_L]$ e, conseqüentemente,

$$y_0 \longrightarrow +\infty \iff t_L \longrightarrow \pi^+ \iff P_L(y_0) \longrightarrow -\infty.$$

Pelo item **d)** do Teorema 3.1.1 e pelo item **b)** do Teorema 3.1.2 concluimos

$$\lim_{y_0 \rightarrow +\infty} P'(y_0) = \lim_{y_0 \rightarrow +\infty} P'_R(P_L(y_0))P'_L(y_0) \stackrel{z_0 = P_L(y_0)}{=} \lim_{z_0 \rightarrow -\infty} P'_R(z_0) \lim_{y_0 \rightarrow +\infty} P'_L(y_0) = e^{(\gamma_R + \gamma_L)\pi}.$$

Se $\gamma_L < 0$, então pelo item **b)** do Teorema 3.1.1 temos

$$\lim_{y_0 \rightarrow \hat{y}^+} P'_L(y_0) = -\infty.$$

Pelo item **b)** dos Teoremas 3.1.1 e 3.1.2 segue

$$\lim_{y_0 \rightarrow \hat{y}^+} P'_R(P_L(y_0)) = P'_R(0) < 0.$$

Desta maneira,

$$\lim_{y_0 \rightarrow \hat{y}^+} P'(y_0) = +\infty.$$

Se $\gamma_L > 0$, então pelo item **c)** do Teorema 3.1.1 temos $P_L(0) = \hat{y}_1 < 0$ e

$$\lim_{y_0 \rightarrow 0^+} P'_L(y_0) = 0.$$

Pelo item **b)** do Teorema 3.1.2 temos $P'_R(\hat{y}_1) < 0$ e então,

$$\lim_{y_0 \rightarrow 0^+} P'(y_0) = P'_R(\hat{y}_1)0 = 0.$$

Se $\gamma_L = \gamma_R = 0$, então pelo item **b)** segue

$$\lim_{y_0 \rightarrow 0^+} P'(y_0) = 1.$$

Portanto, para todo $y_0 > y_P$, onde y_P é definido no item **a)**, segue

$$P'(y_0) = \frac{y_0}{P_L(y_0)} \frac{P_L(y_0) - b}{P(y_0) - b} e^{2(\gamma_R t_R + \gamma_L t_L)}$$

com

$$\lim_{y_0 \rightarrow +\infty} P'(y_0) = e^{(\gamma_R + \gamma_L)\pi} \text{ e } \lim_{y_0 \rightarrow y_P^+} P'(y_0) = \begin{cases} +\infty, & \text{se } \gamma_L < 0 \\ 1, & \text{se } \gamma_L = \gamma_R = 0 \\ 0, & \text{se } \gamma_L > 0 \end{cases} .$$

■

Observação 3.1.1. Se

$$\lim_{y_0 \rightarrow +\infty} P'(y_0) > 1 \quad \left(\text{respectivamente, } \lim_{y_0 \rightarrow +\infty} P'(y_0) < 1 \right),$$

então existe um \tilde{y} (respectivamente, \tilde{y}_1) suficientemente grande tal que

$$P(\tilde{y}) > \tilde{y} \quad (\text{respectivamente, } P(\tilde{y}_1) < \tilde{y}_1).$$

De fato, supomos $\lim_{y_0 \rightarrow +\infty} P'(y_0) > 1$ e denotamos

$$L = \lim_{y_0 \rightarrow +\infty} P'(y_0).$$

Dado $\epsilon = \frac{L-1}{2} > 0$, existe $A > 0$ tal que, para todo $y_0 > A$,

$$\bar{L} := \frac{1+L}{2} = L - \epsilon < P'(y_0).$$

Seja $y^* > A$. Se $P(y^*) > y^*$, então a afirmação segue. Caso contrário, tomamos $\tilde{y} > y^*$ suficientemente grande de tal forma que

$$P(y^*) - \bar{L}y^* > (1 - \bar{L})\tilde{y}.$$

Pelo Teorema do Valor Médio, temos

$$P(\tilde{y}) - P(y^*) = P'(c)(\tilde{y} - y^*), \text{ para algum } c \in (y^*, \tilde{y}).$$

Como $P'(c) > \bar{L}$ para todo $y_0 \geq y^*$, temos

$$P(\tilde{y}) - P(y^*) > \bar{L}(\tilde{y} - y^*)$$

e então,

$$P(\tilde{y}) - \tilde{y} > P(y^*) - \bar{L}y^* - (1 - \bar{L})\tilde{y} > 0.$$

Portanto, existe \tilde{y} suficientemente grande tal que $P(\tilde{y}) > \tilde{y}$.

De forma análoga, supomos $\lim_{y_0 \rightarrow +\infty} P'(y_0) < 1$. Denotamos

$$L_1 = \lim_{y_0 \rightarrow +\infty} P'(y_0) < 1.$$

Dado $\epsilon = \frac{1 - L_1}{2} > 0$, existe $A_1 > 0$ tal que, para todo $y_0 > A_1$,

$$\bar{L}_1 := L_1 + \epsilon = \frac{1 + L_1}{2} > P'(y_0).$$

Seja $y_1^* > A_1$. Se $P(y_1^*) > y_1^*$, então a afirmação segue. Caso contrário, consideramos $\tilde{y}^1 > y_1^*$ suficientemente grande tal que

$$P(y_1^*) - \bar{L}_1 y_1^* < (1 - \bar{L}_1)\tilde{y}^1.$$

Segue do Teorema do Valor Médio que, para algum $d \in (y_1^*, \tilde{y}^1)$,

$$P(\tilde{y}^1) - P(y_1^*) = P'(d)(\tilde{y}^1 - y_1^*)$$

e como $P'(d) < \bar{L}_1$ temos

$$P(\tilde{y}^1) - P(y_1^*) < \bar{L}_1(\tilde{y}^1 - y_1^*)$$

e então,

$$P(\tilde{y}^1) - \tilde{y}^1 < P(y_1^*) - \bar{L}_1 y_1^* - (1 - \bar{L}_1)\tilde{y}^1 < 0.$$

Portanto, existe \tilde{y}^1 suficientemente grande tal que $P(\tilde{y}^1) > \tilde{y}^1$.

Observamos que o valor \tilde{y} (respectivamente, \tilde{y}_1) pode ser tomado tão grande quanto quisermos.

Observação 3.1.2. Observamos que o item **d)** do Teorema 3.1.3 fornece a estabilidade do ponto infinito. Especificamente, se $\gamma_R + \gamma_L > 0$, então

$$\lim_{y_0 \rightarrow +\infty} P'(y_0) = e^{(\gamma_R + \gamma_L)\pi} > 1.$$

Pela Observação 3.1.1, existe \tilde{y} suficientemente grande de tal forma que $P(\tilde{y}) > \tilde{y}$ e, para todo $y_0 > \tilde{y}$, temos

$$P(y_0) - y_0 > P(y^*) - \bar{L}y^* - (1 - \bar{L})y_0 > P(y^*) - \bar{L}y^* - (1 - \bar{L})\tilde{y} > 0,$$

onde \tilde{y} , y^* e \bar{L} são dados na Observação 3.1.1. Desta forma, para todo $y_0 > \tilde{y}$,

$$P(y_0) > y_0.$$

Portanto, o ponto infinito é estável.

Analogamente, se $\gamma_R + \gamma_L < 0$, então

$$\lim_{y_0 \rightarrow +\infty} P'(y_0) = e^{(\gamma_R + \gamma_L)\pi} < 1.$$

Pela Observação 3.1.1, existe \tilde{y}^1 suficientemente grande tal que $P(\tilde{y}^1) < \tilde{y}^1$ e, para todo $y_0 > \tilde{y}^1$, temos

$$P(y_0) - y_0 < P(y_1^*) - \bar{L}_1 y_1^* - (1 - \bar{L}_1)y_0 < P(y_1^*) - \bar{L}_1 y_1^* - (1 - \bar{L}_1)\tilde{y}^1 < 0$$

onde \tilde{y}^1 , y_1^* e \bar{L}_1 são dados na Observação 3.1.1. Logo, para todo $y_0 > \tilde{y}^1$,

$$P(y_0) < y_0.$$

Portanto, o ponto infinito é instável.

Lema 3.1.1. *Considere o sistema (3.2). Se $x_L < 0$, $x_R < 0$, $\gamma_L < 0$, $\gamma_R > 0$ e $b = 0$, então a*

aplicação de Poincaré P tem, no máximo, um ponto fixo.

Demonstração

Supomos $x_L < 0$, $x_R < 0$, $\gamma_L < 0$, $\gamma_R > 0$ e $b = 0$. Pelo item **b)** do Teorema 3.1.2 e pelo item **a)** do Teorema 3.1.3, $P_R(0) = 0$ e existe um valor $\hat{y} > 0$ tal que a aplicação de Poincaré P está definida para todo $y_0 \geq \hat{y}$, com $P(\hat{y}) = P_R(P_L(\hat{y})) = P_R(0) = 0$. Diante da análise desenvolvida no começo desta seção e diante do Teorema 3.1.1, seja $\nu : [\hat{y}, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por

$$\nu(y_0) = \gamma_L t_L + \gamma_R t_R,$$

com $\pi < t_L \leq \hat{t}_L$ e $0 < t_R < \pi$, onde $t_L = t_L(y_0)$ e $t_R = t_R(P_L(y_0))$. Analisando as expressões (3.7) e (3.11), segue que t_L decresce e t_R cresce se y_0 cresce. Desta forma, se y_0 cresce, então a função ν cresce. Se P possuir um ponto fixo \bar{y} , então pelo item **d)** do Teorema 3.1.3 temos

$$P'(\bar{y}) = e^{2\nu(\bar{y})}.$$

Supomos que P tem mais de um ponto fixo. Denotamos por \bar{y}^1 o menor dos pontos fixos. A seguir, mostramos que $P'(\bar{y}^1) \geq 1$. Supomos, por absurdo, $P'(\bar{y}^1) < 1$. Logo, existe $\delta > 0$ tal que para todo $y_0 \in (\bar{y}^1 - \delta, \bar{y}^1 + \delta)$, com $y_0 \neq \bar{y}^1$, tem-se

$$\frac{P(y_0) - \bar{y}^1}{y_0 - \bar{y}^1} = \frac{P(y_0) - P(\bar{y}^1)}{y_0 - \bar{y}^1} < 1.$$

Tomamos $\tilde{y}_0 \in (\bar{y}^1 - \delta, \bar{y}^1)$. Desta forma, $\tilde{y}_0 - \bar{y}^1 < 0$ e $P(\tilde{y}_0) > \tilde{y}_0$. Como $P(\hat{y}) = 0$ segue, do Teorema do Valor Intermediário, que existe $\bar{y}^0 \in (\hat{y}, \tilde{y}_0)$ tal que

$$P(\bar{y}^0) = \bar{y}^0,$$

isto é, $\bar{y}^0 < \bar{y}^1$ é um ponto fixo de P . Absurdo, pois \bar{y}^1 é o menor dos pontos fixos. Logo,

$$P'(\bar{y}^1) \geq 1$$

e, conseqüentemente, $\nu(\bar{y}^1) \geq 0$. Tomamos o próximo ponto fixo $\bar{y}^2 > \bar{y}^1$. Temos $P'(\bar{y}^1) < P'(\bar{y}^2)$, pois $\nu(\bar{y}^1) < \nu(\bar{y}^2)$. Se $\nu(\bar{y}^1) > 0$, então $P'(\bar{y}^2) > 1$ e existem $\tilde{y}_1 > \bar{y}^1$ e $\tilde{y}_2 < \bar{y}^2$, com $\tilde{y}_1 < \tilde{y}_2$, tais que

$$P(\tilde{y}_1) > \tilde{y}_1 \text{ e } P(\tilde{y}_2) < \tilde{y}_2.$$

Desta forma, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $\bar{y}^3 \in (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) \subset (\bar{y}^1, \bar{y}^2)$ tal que

$P(\bar{y}^3) = \bar{y}^3$. Absurdo, pois \bar{y}^2 é o segundo ponto fixo. Então,

$$\nu(\bar{y}^1) = 0 \text{ e } 1 = P'(\bar{y}^1) < P'(\bar{y}^2) = e^{2\nu(\bar{y}^2)}.$$

Desta maneira, para todo $y_0 \in (\bar{y}^1, \bar{y}^2)$ temos

$$y_0 > P(y_0)$$

pois, caso contrário, existiria um ponto fixo entre \bar{y}^1 e \bar{y}^2 , o que seria um absurdo. Para todo $y_0 \in (\bar{y}^1, \bar{y}^2)$, temos $\nu(y_0) > \nu(\bar{y}^1) > 0$. Logo, pelo item **d**) do Teorema 3.1.3 segue, para todo $y_0 \in (\bar{y}^1, \bar{y}^2)$,

$$P'(y_0) = \frac{y_0}{P(y_0)} e^{\nu(y_0)} > 1.$$

Absurdo, pois pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in (\bar{y}^1, \bar{y}^2)$ tal que

$$P'(y_0) = \frac{P(\bar{y}^2) - P(\bar{y}^1)}{\bar{y}^2 - \bar{y}^1} = 1.$$

Portanto, a aplicação de Poincaré P admite, no máximo, um ponto fixo. ■

3.2 Estudo das trajetórias periódicas deslizantes e dos ciclos limite de costura

Diante da aplicação de Poincaré definida e analisada na Seção 3.1, no que segue apresentamos uma série de resultados relacionados às trajetórias periódicas deslizantes e aos ciclos limite de costura que podem aparecer no retrato de fase do sistema (3.2), com ênfase em condições para que o sistema (3.2) tenha ciclos limite de costura.

Consideramos o sistema (3.2). Observamos que a aplicação de Poincaré a esquerda P_L não depende do parâmetro b , diferentemente das aplicações P_R e P_R^{-1} . Fazemos a mudança de variáveis $(x, y) \rightarrow (x, y - b)$ no sistema definido em Σ^+ e obtemos

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2\gamma_R x - y + b \\ (1 + \gamma_R^2)x - a_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\gamma_R & -1 \\ 1 + \gamma_R^2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ a_R \end{pmatrix},$$

com $x = (x, y - b)$. Observamos que este sistema tem a mesma forma que o sistema definido em Σ^- . Por (3.7), para todo $z_1 \geq b$, podemos escrever

$$P_R^{-1}(z_1 - b; 0) = x_R \frac{e^{-\gamma_R t_R} \varphi_{\gamma_R}(t_R)}{\text{sen } t_R}.$$

De (3.11) temos

$$P_R^{-1}(z_1; b) = b + x_R \frac{e^{-\gamma_R t_R} \varphi_{\gamma_R}(t_R)}{\text{sen } t_R}.$$

Desta forma, para todo $z_1 \geq b$,

$$P_R^{-1}(z_1; b) = b + P_R^{-1}(z_1 - b; 0) \tag{3.14}$$

e

$$(z_1 + b, P_R^{-1}(z_1; 0) + b) = (z_1 + b, P_R^{-1}(z_1 + b; b)).$$

Da igualdade anterior, notamos que o gráfico de $P_R^{-1}(\cdot; b)$ é dado pelo gráfico de $P_R^{-1}(\cdot; 0)$ transladado para o ponto $B = (b, b)$. Veja a Figura 3.6.

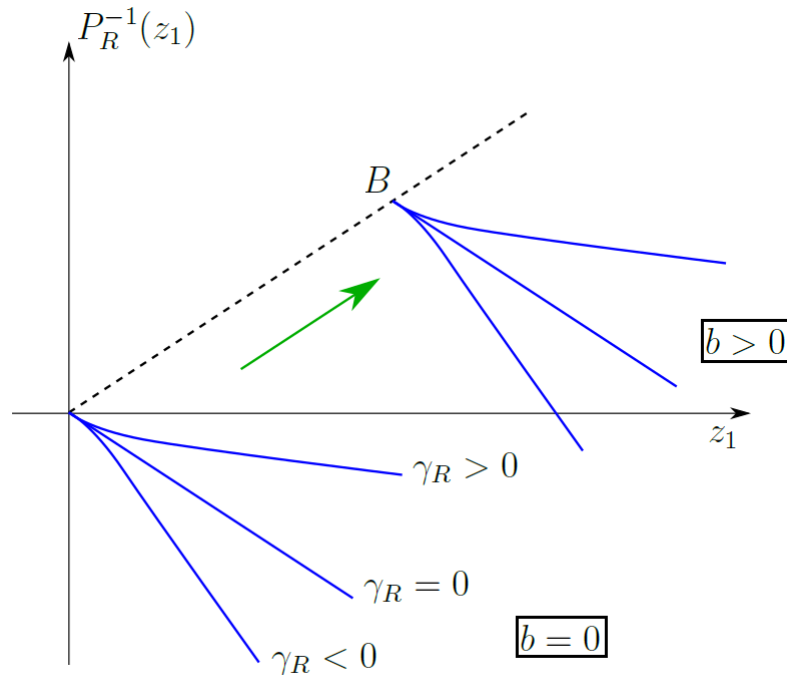


Figura 3.6: Esboço dos gráficos das aplicações $P_R^{-1}(\cdot; 0)$ e $P_R^{-1}(\cdot; b)$.

Se \bar{y} é um ponto fixo da aplicação de Poincaré P , temos $P(\bar{y}) = P_R(P_L(\bar{y}); b) = \bar{y}$ e então,

$P_L(\bar{y}) = P_R^{-1}(\bar{y}; b)$. Consideramos y_P dado no item **a)** do Teorema 3.1.3 e

$$\Psi : \{y_0 \in \mathbb{R}; y_0 \geq \max\{b, y_P\}\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

a função dada por

$$\Psi(y_0; b) = P_R^{-1}(y_0; b) - P_L(y_0) = b + P_R^{-1}(y_0 - b; 0) - P_L(y_0). \quad (3.15)$$

Observamos que a existência de trajetórias periódicas de costura é equivalente a existência de zeros da função Ψ maiores que $\max\{b, y_P\}$. Dado $y_0 > \max\{b, y_P\}$, segue

$$\Psi'(y_0; b) = (P_R^{-1})'(y_0; b) - P_L'(y_0) = \frac{1}{(P_R' \circ P_R^{-1})(y_0; b)} - P_L'(y_0) \quad (3.16)$$

e

$$\Psi''(y_0; b) = -\frac{(P_R'' \circ P_R^{-1})(y_0; b)}{[(P_R' \circ P_R^{-1})(y_0; b)]^3} - P_L''(y_0).$$

A seguir, apresentamos um lema com algumas propriedades da aplicação Ψ .

Lema 3.2.1. *Considere o sistema (3.2) com $a_L < 0$, $a_R < 0$ e $b > 0$. Seja $\bar{y} \geq \max\{b, y_P\}$ onde y_P é dado no item **a)** do Teorema 3.1.3. Então,*

- a)** $\Psi(\bar{y}; b) \neq 0$ se, e somente se, $\Psi(\bar{y}; b)(P(\bar{y}) - \bar{y}) > 0$;
- b)** $\Psi(\bar{y}; b) = 0$ se, e somente se, $P(\bar{y}) = \bar{y}$. O valor \bar{y} satisfaz $\bar{y} > \max\{b, y_P\}$, $\Psi(\bar{y}; b) = 0$ e Ψ é uma aplicação decrescente (respectivamente, crescente) em uma vizinhança de \bar{y} se, e somente se, \bar{y} está associado a um ciclo limite de costura estável (respectivamente, instável) do sistema. Se $\bar{y} > \max\{b, y_P\}$, $\Psi(\bar{y}; b) = 0$ e $\Psi'(\bar{y}; b) < 0$ (respectivamente, $\Psi'(\bar{y}; b) > 0$), então \bar{y} está associado a um ciclo limite de costura estável (respectivamente, instável) do sistema. Além disso,

$$\delta_\infty = \lim_{y_0 \rightarrow +\infty} \Psi'(y_0; b) = (e^{(\gamma_R + \gamma_L)\pi} - 1) e^{-\gamma_R};$$

- c)** para todo $y_0 \geq \max\{b, y_P\}$, a aplicação Ψ satisfaz

$$\Psi(y_0; b) > b + \Psi(y_0; 0)$$

e a derivada de Ψ com respeito ao parâmetro b satisfaz

$$\frac{\partial \Psi}{\partial b}(y_0; b) = \frac{\partial P_R^{-1}}{\partial b}(y_0; b) > 1, \text{ com } y_0 \neq \max\{b, y_P\};$$

d) se $\gamma_L \gamma_R \geq 0$ e $y_0 > \max\{b, y_P\}$, então $\text{sign } \Psi''(y_0; b) = \text{sign}(\gamma_L + \gamma_R)$. Se $\gamma_L \gamma_R \geq 0$, então a aplicação Ψ tem, no máximo, dois zeros.

Demonstração

Pelo item **b)** do Teorema 3.1.2 segue que P_R e P_R^{-1} são aplicações decrescentes e, pelo item **d)** do Teorema 3.1.3, segue que P é uma aplicação crescente.

a) Notamos que

$$\Psi(\bar{y}; b) > 0 \iff P_R^{-1}(\bar{y}; b) > P_L(\bar{y}) \iff P_R(P_L(\bar{y}); b) > \bar{y} \iff P(\bar{y}) - \bar{y} > 0.$$

e

$$\Psi(\bar{y}; b) < 0 \iff P_R^{-1}(\bar{y}; b) < P_L(\bar{y}) \iff P_R(P_L(\bar{y}); b) < \bar{y} \iff P(\bar{y}) - \bar{y} < 0.$$

Portanto, $\Psi(\bar{y}; b) \neq 0$ se, e somente se, $\Psi(\bar{y}; b)(P(\bar{y}) - \bar{y}) > 0$.

b) Temos

$$\Psi(\bar{y}; b) = 0 \iff P_R^{-1}(\bar{y}; b) - P_L(\bar{y}) = 0 \iff P_R^{-1}(\bar{y}; b) = P_L(\bar{y}) \iff P(\bar{y}) = \bar{y}.$$

Portanto, $\Psi(\bar{y}; b) = 0$ se, e somente se, $P(\bar{y}) = \bar{y}$.

Supomos $\bar{y} > \max\{b, y_P\}$ e $\Psi(\bar{y}; b) = 0$. Denotamos por Γ a trajetória periódica de costura associada a \bar{y} . Se Ψ é uma aplicação decrescente em uma vizinhança do ponto \bar{y} temos, para y_0 suficientemente próximo de \bar{y} com $y_0 > \bar{y}$, $\Psi(y_0; b) < \Psi(\bar{y}; b)$ e

$$\begin{aligned} \Psi(y_0; b) < \Psi(\bar{y}; b) &\implies P_R^{-1}(y_0; b) - P_L(y_0) < 0 \implies P(y_0) < y_0 \implies \\ &\implies |P(y_0) - \bar{y}| \stackrel{P(y_0) > \bar{y}}{=} P(y_0) - \bar{y} < y_0 - \bar{y} = |y_0 - \bar{y}| \implies \\ &\implies |P(y_0) - \bar{y}| < |y_0 - \bar{y}|. \end{aligned}$$

Para y_0 suficientemente próximo de \bar{y} , com $y_0 < \bar{y}$, temos $\Psi(y_0; b) > \Psi(\bar{y}; b)$ e

$$\begin{aligned}\Psi(y_0; b) > \Psi(\bar{y}; b) &\implies P_R^{-1}(y_0; b) - P_L(y_0) > 0 \implies P(y_0) > y_0 \implies \\ &\implies |P(y_0) - \bar{y}| \stackrel{P(y_0) < \bar{y}}{=} \bar{y} - P(y_0) < -(y_0 - \bar{y}) = |y_0 - \bar{y}| \implies \\ &\implies |P(y_0) - \bar{y}| < |y_0 - \bar{y}|.\end{aligned}$$

Logo, Γ é um ciclo limite de costura estável. Se Ψ é uma aplicação crescente em uma vizinhança do ponto \bar{y} segue, para y_0 suficientemente próximo de \bar{y} com $y_0 > \bar{y}$, $\Psi(y_0; b) > \Psi(\bar{y}; b)$ e

$$\begin{aligned}\Psi(y_0; b) > \Psi(\bar{y}; b) &\implies P_R^{-1}(y_0; b) - P_L(y_0) > 0 \implies P(y_0) > y_0 \implies \\ &\implies |P(y_0) - \bar{y}| \stackrel{P(y_0) > \bar{y}}{=} P(y_0) - \bar{y} > y_0 - \bar{y} = |y_0 - \bar{y}| \implies \\ &\implies |P(y_0) - \bar{y}| > |y_0 - \bar{y}|.\end{aligned}$$

Para y_0 suficientemente próximo de \bar{y} , com $y_0 < \bar{y}$, temos $\Psi(y_0; b) < \Psi(\bar{y}; b)$ e

$$\begin{aligned}\Psi(y_0; b) < \Psi(\bar{y}; b) &\implies P_R^{-1}(y_0; b) - P_L(y_0) < 0 \implies P(y_0) < y_0 \implies \\ &\implies |P(y_0) - \bar{y}| \stackrel{P(y_0) < \bar{y}}{=} \bar{y} - P(y_0) > -(y_0 - \bar{y}) = |y_0 - \bar{y}| \implies \\ &\implies |P(y_0) - \bar{y}| > |y_0 - \bar{y}|.\end{aligned}$$

Logo, Γ é um ciclo limite de costura instável.

Se \bar{y} está associado a um ciclo limite de costura estável (respectivamente, instável) do sistema, então de forma análoga à análise desenvolvida acima segue que $\bar{y} > \max\{b, y_P\}$, $\Psi(\bar{y}; b) = 0$ e Ψ é uma aplicação decrescente (respectivamente, crescente) em uma vizinhança de \bar{y} .

Portanto, $\bar{y} > \max\{b, y_P\}$, $\Psi(\bar{y}; b) = 0$ e Ψ é uma aplicação decrescente (respectivamente, crescente) em uma vizinhança de \bar{y} se, e somente se, \bar{y} está associado a um ciclo limite de costura estável (respectivamente, instável).

Se $\bar{y} > \max\{b, y_P\}$, $\Psi(\bar{y}; b) = 0$ e $\Psi'(\bar{y}; b) < 0$ (respectivamente, $\Psi'(\bar{y}; b) > 0$) segue, de (3.16),

$$\frac{1 - P'(\bar{y})}{P'_R(P_L(\bar{y}))} = \frac{1}{P'_R(P_L(\bar{y}))} - P'_L(\bar{y}) = \Psi'(\bar{y}; b) < 0 \left(\text{respectivamente, } \frac{1 - P'(\bar{y})}{P'_R(P_L(\bar{y}))} > 0 \right).$$

Além disso, pelo item **b)** do Teorema 3.1.2 temos $P'_R(P_L(\bar{y})) < 0$ e então, $P'(\bar{y}) < 1$ (respectivamente, $P'(\bar{y}) > 1$).

Portanto, \bar{y} está associado a um ciclo limite de costura estável (respectivamente, instável).

Pelo item **b)** do Teorema 3.1.2 e pelo item **d)** do Teorema 3.1.3, temos

$$\begin{aligned} \lim_{y_0 \rightarrow +\infty} \Psi'(y_0; b) &= \lim_{y_0 \rightarrow +\infty} \frac{1 - P'(y_0)}{P'_R(P_L(y_0))} = \frac{\lim_{y_0 \rightarrow +\infty} 1 - P'(y_0)}{\lim_{y_0 \rightarrow +\infty} P'_R(P_L(y_0))} = \frac{\lim_{y_0 \rightarrow +\infty} 1 - P'(y_0)}{\lim_{z_0 \rightarrow -\infty} P'_R(z_0)} = \\ &= \frac{1 - e^{(\gamma_R + \gamma_L)\pi}}{-e^{\gamma_R\pi}} = (e^{(\gamma_R + \gamma_L)\pi} - 1) e^{-\gamma_R\pi}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\delta_\infty := \lim_{y_0 \rightarrow +\infty} \Psi'(y_0; b) = (e^{(\gamma_R + \gamma_L)\pi} - 1) e^{-\gamma_R\pi}.$$

c) Como $y_0 - b < y_0$ para todo $y_0 \geq \max\{b, y_P\}$, obtemos $P_R^{-1}(y_0 - b; 0) > P_R^{-1}(y_0; 0)$. Desta forma, da equação (3.15) temos, para todo $y_0 \geq \max\{b, y_P\}$,

$$\Psi(y_0; b) = b + P_R^{-1}(y_0 - b; 0) - P_L(y_0) > b + P_R^{-1}(y_0; 0) - P_L(y_0) = b + \Psi(y_0; 0).$$

Portanto, para todo $y_0 \geq \max\{b, y_P\}$,

$$\Psi(y_0; b) > b + \Psi(y_0; 0).$$

Do item **b)** do Teorema 3.1.2 e da equação (3.15) segue, para todo $y_0 > \max\{b, y_P\}$,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial b}(y_0; b) = \frac{\partial P_R^{-1}}{\partial b}(y_0; b) = 1 - (P_R^{-1})'(y_0 - b; 0) = 1 - \frac{1}{P'_R(P_R^{-1}(y_0 - b; 0); 0)} > 1.$$

Portanto, para todo $y_0 \geq \max\{b, y_P\}$, com $y_0 \neq \max\{b, y_P\}$,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial b}(y_0; b) = \frac{\partial P_R^{-1}}{\partial b}(y_0; b) > 1.$$

d) Lembramos que para $\gamma_L \geq 0$ temos $y_P = 0$ e para $\gamma_L < 0$ temos $y_P = \hat{y} > 0$. Supomos $\gamma_L \gamma_R \geq 0$. Inicialmente, consideramos o caso $\gamma_L \gamma_R = 0$. Se $\gamma_L = 0$ e $\gamma_R > 0$ (respectivamente, $\gamma_R < 0$) segue, dos itens **a)** do Teorema 3.1.1 e **b)** do Teorema 3.1.2, $P'_L(y_0) = 0$ para todo $y_0 > 0$ e $\text{sign } P''_R(z_0) > 0$ (respectivamente, $\text{sign } P''_R(z_0) < 0$) para todo $z_0 < b$. De (3.16) temos, para todo $y_0 > b = \max\{b, 0\} = \max\{b, y_P\}$,

$$\text{sign } \Psi''(y_0; b) = \text{sign}[(P''_R \circ P_R^{-1})(y_0; b)]$$

e então, para todo $y_0 > b = \max\{b, 0\}$,

$$\text{sign } \Psi''(y_0; b) = \text{sign } \gamma_R = \text{sign}(\gamma_R + \gamma_L).$$

Se $\gamma_R = 0$ e $\gamma_L > 0$ (respectivamente, $\gamma_L < 0$) obtemos, dos itens **d**) do Teorema 3.1.1 e do item **a**) do Teorema 3.1.2, $\text{sign } P_L''(y_0) = -\text{sign } \gamma_L < 0$ para todo $y_0 > 0$ (respectivamente, $\text{sign } P_L''(y_0) > 0$ para todo $y_0 > \hat{y}$) e $P_R''(z_0) = 0$ para todo $z_0 < b$. De (3.16) segue $\text{sign } \Psi''(y_0; b) = -\text{sign } P_L''(y_0)$ para todo $y_0 > b = \max\{b, 0\}$ (respectivamente, para todo $y_0 > \max\{b, \hat{y}\}$) e então, para todo $y_0 > \max\{b, y_P\}$,

$$\text{sign } \Psi''(y_0; b) = \text{sign } \gamma_L = \text{sign}(\gamma_R + \gamma_L).$$

Se $\gamma_L = \gamma_R = 0$, então pelo item **a**) dos Teorema 3.1.1 e 3.1.2 temos, para todo $y_0 > 0$,

$$P_L''(y_0) = 0$$

e, para todo $z_0 < b$, $P_R''(z_0) = 0$. Logo, de (3.16) segue, para todo $y_0 > b = \max\{b, 0\} = \max\{b, y_P\}$,

$$\text{sign } \Psi''(y_0; b) = 0 = \text{sign}(\gamma_R + \gamma_L).$$

Supomos $\gamma_L \gamma_R > 0$. Se $\gamma_L < 0$ e $\gamma_R < 0$ (respectivamente, $\gamma_L > 0$ e $\gamma_R > 0$), então pelos itens **d**) do Teorema 3.1.1 e **b**) do Teorema 3.1.2 segue

$$\text{sign } P_L''(y_0) > 0 \text{ para todo } y_0 > \hat{y}$$

(respectivamente, $\text{sign } P_L''(y_0) < 0$ para todo $y_0 > 0$) e,

$$\text{sign } P_R''(z_0) = \text{sign } \gamma_R < 0 \text{ para todo } z_0 < b$$

(respectivamente, $\text{sign } P_R''(z_0) > 0$ para todo $z_0 < b$). Por (3.16) obtemos

$$\text{sign } \Psi''(y_0; b) = \text{sign}(\gamma_L + \gamma_R)$$

para todo $y_0 > \max\{b, \hat{y}\}$ (respectivamente, para todo $y_0 > b = \max\{b, 0\}$).

Portanto, para todo $y_0 > \max\{b, y_P\}$, $\text{sign } \Psi''(y_0; b) = \text{sign}(\gamma_L + \gamma_R)$.

Para verificarmos que a função Ψ possui no máximo dois zeros, consideramos dois casos.

Primeiramente, admitimos $\gamma_L\gamma_R \geq 0$ e $\gamma_L + \gamma_R = 0$. Logo, $\gamma_L = \gamma_R = 0$. Mostramos, a seguir, que a função Ψ não tem zeros, isto é, que a aplicação P não tem pontos fixos. Se \bar{y} é um ponto fixo de P temos, pelo item **b)** do Teorema 3.1.3,

$$\bar{y} = P(\bar{y}) = \bar{y} + 2b$$

e, conseqüentemente, $b = 0$. Absurdo, pois por hipótese, $b > 0$. Desta forma, P não tem ponto fixo e então, a aplicação Ψ não possui zeros.

Assumimos $\gamma_L\gamma_R \geq 0$ e $\gamma_L + \gamma_R \neq 0$. Pela análise desenvolvida anteriormente temos, para todo $y_0 > \max\{b, y_P\}$, $\text{sign } \Psi''(y_0; b) = \text{sign}(\gamma_L + \gamma_R)$. Logo, para todo $y_0 > \max\{b, y_P\}$,

$$\text{sign } \Psi''(y_0; b) > 0 \text{ ou } \text{sign } \Psi''(y_0; b) < 0.$$

Supomos que a aplicação Ψ possui três zeros e os denotamos por $\bar{y}^1 < \bar{y}^2 < \bar{y}^3$. Se, para todo $y_0 > \max\{b, y_P\}$, $\text{sign } \Psi''(y_0; b) > 0$ (respectivamente, $\text{sign } \Psi''(y_0; b) < 0$), então a aplicação Ψ' é crescente (respectivamente, decrescente) no intervalo $(\max\{b, y_P\}, +\infty)$. Pelo Teorema de Rolle segue que existem $z^1 \in (\bar{y}^1, \bar{y}^2)$ e $w^1 \in (\bar{y}^2, \bar{y}^3)$ tais que

$$\Psi'(z^1; b) = \Psi'(w^1; b) = 0.$$

No entanto, como $z^1 < w^1$, temos

$$0 = \Psi'(z^1; b) < \Psi'(w^1; b) = 0 \text{ (respectivamente, } 0 = \Psi'(z^1; b) > \Psi'(w^1; b) = 0),$$

o que é um absurdo. Desta maneira, Ψ tem no máximo dois zeros.

Portanto, a aplicação Ψ tem, no máximo, dois zeros. ■

Observação 3.2.1. Claramente a função Ψ depende dos parâmetros γ_L e γ_R . Fixamos um valor para γ_L e consideramos a notação $\Psi(y_0; b; \gamma_R)$, que introduz a dependência explícita do parâmetro γ_R . Como a aplicação Ψ é analítica real, segue que Ψ admite em um intervalo compacto $[y_0^1, y_0^2]$, com $\Psi(y_0^1; b; \gamma_R)\Psi(y_0^2; b; \gamma_R) < 0$, um número finito de zeros e existe pelo menos um zero \bar{y} tal que Ψ é estritamente monótona em uma vizinhança de \bar{y} . Desta forma, se $\Psi(y_0^1; b; \gamma_R)\Psi(y_0^2; b; \gamma_R) < 0$ e $\Psi(y_0^1; b; \gamma_R) > \Psi(y_0^2; b; \gamma_R)$ (respectivamente, $\Psi(y_0^1; b; \gamma_R) < \Psi(y_0^2; b; \gamma_R)$), então Ψ é decrescente (respectivamente, Ψ é crescente) em uma vizinhança de

\bar{y} e, conseqüentemente, pelo item **b)** do Lema 3.2.1, o sistema (3.2) tem um ciclo limite de costura estável (respectivamente, instável).

Observação 3.2.2. Consideramos o sistema (3.2) e assumimos que existe $\bar{y} > \max\{b, y_P\}$ tal que \bar{y} está associado a um ciclo limite de costura estável (respectivamente, instável) do sistema (3.2). Para certos valores $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ temos

$$\Psi(\bar{y} - \alpha; b; \gamma_R)\Psi(\bar{y} + \beta; b; \gamma_R) < 0$$

com $\Psi(\bar{y} - \alpha; b; \gamma_R) > 0$ e $\Psi(\bar{y} + \beta; b; \gamma_R) < 0$ (respectivamente, $\Psi(\bar{y} - \alpha; b; \gamma_R) < 0$ e $\Psi(\bar{y} + \beta; b; \gamma_R) > 0$). Como a aplicação Ψ é contínua com respeito aos parâmetros b e γ_R segue, para $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$ suficientemente próximos de zero,

$$\text{sign } \Psi(\bar{y} - \alpha; b + \varepsilon_1; \gamma_R + \varepsilon_2) = \text{sign } \Psi(\bar{y} - \alpha; b; \gamma_R) > 0$$

e

$$\text{sign } \Psi(\bar{y} + \beta; b + \varepsilon_1; \gamma_R + \varepsilon_2) = \text{sign } \Psi(\bar{y} + \beta; b; \gamma_R) < 0,$$

(respectivamente, $\text{sign } \Psi(\bar{y} - \alpha; b + \varepsilon_1; \gamma_R + \varepsilon_2) < 0$ e $\text{sign } \Psi(\bar{y} + \beta; b + \varepsilon_1; \gamma_R + \varepsilon_2) > 0$). Logo, existe pelo menos um valor $\varepsilon_3 \in \mathbb{R}$ tal que $\Psi(\bar{y} + \varepsilon_3; b + \varepsilon_1; \gamma_R + \varepsilon_2) = 0$ e a monotonicidade em torno dos pontos \bar{y} e $\bar{y} + \varepsilon_3$ é a mesma. Portanto, a existência de um ciclo limite de costura estável ou instável persiste depois de uma perturbação suficientemente pequena nos parâmetros b e γ_R .

Observação 3.2.3. Notamos que, de forma análoga à aplicada na Observação 3.1.1, pode-se provar que se

$$\lim_{y_0 \rightarrow +\infty} \Psi'(y_0; b) > 0 \quad \left(\text{respectivamente, } \lim_{y_0 \rightarrow +\infty} \Psi'(y_0; b) < 0 \right),$$

então existe um valor \tilde{y} (respectivamente, \tilde{y}_1) suficientemente grande tal que

$$\Psi(\tilde{y}; b) > 0 \quad (\text{respectivamente, } \Psi(\tilde{y}_1; b) < 0).$$

Notamos que o valor \tilde{y} (respectivamente, \tilde{y}_1) pode ser tomado tão grande quanto quisermos.

Lema 3.2.2. *Considere $x_R < 0$ no sistema (3.2). Então, dado $y_R > 0$ existe um único valor $0 < b_R < y_R$, que depende de γ_R , tal que $P_R^{-1}(y_R; b_R) = P_R^{-1}(y_R; \gamma_R; b_R) = 0$.*

Demonstração

Tomamos um número $y_R > 0$. Seja $\phi : [0, y_R] \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por $\phi(b) = P_R^{-1}(y_R; b) = P_R^{-1}(y_R; \gamma_R; b_R)$. Notamos que $\phi(0) < 0$ e $\phi(y_R) = y_R > 0$. Logo, pelo item **c)** do Lema 3.2.1 e pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $b_R = b_R(\gamma_R) \in (0, y_R)$ tal que $\phi(b_R) = 0$. Do item **c)** do Lema 3.2.1 segue que ϕ é crescente no intervalo $(0, y_R)$ e então temos a unicidade do valor b_R .

Portanto, dado $y_R > 0$ existe um único valor $0 < b_R < y_R$, de depende de γ_R , tal que

$$P_R^{-1}(y_R; b_R) = P_R^{-1}(y_R; \gamma_R; b_R) = 0.$$

■

3.2.1 Estudo das trajetórias periódicas deslizantes

No que segue, estudamos a existência de trajetórias periódicas deslizantes no retrato de fase do sistema (3.2) com $x_L < 0$, $x_R < 0$ e $b > 0$. Além disso, definimos o conceito de ciclo crítico de costura e apresentamos dois tipos de bifurcações que podem aparecer.

Sabemos, pela Observação 3.0.3, que o interior da região de deslize Σ_d é uma região repulsora e que não existem pseudo-equilíbrios em Σ_d . Temos, da análise desenvolvida no começo da Seção 3.1, que a origem é um ponto de tangência visível do campo H^- e o ponto $(0, b)$ é um ponto de tangência invisível do campo H^+ . Além disso, o ponto de equilíbrio e_R do campo H^+ é um ponto de equilíbrio virtual e o ponto de equilíbrio e_L do campo H^- é um ponto de equilíbrio real. Desta forma, em tempo crescente, uma trajetória local do sistema só pode entrar em Σ_d pela origem, enquanto que, em tempo reverso, trajetórias locais do sistema pela origem que possuem pontos em Σ^- e Σ_d , saem de Σ_d pela origem em direção a Σ^- . Conseqüentemente, para analisarmos a existência de trajetórias periódicas deslizantes, basta estudarmos as trajetórias locais pela origem.

Inicialmente, consideramos o caso $\gamma_L \geq 0$. Se $\gamma_L = 0$, então e_L é um centro e pelo item **a)** do Teorema 3.1.1 segue, para todo $y_0 \geq 0$, $P_L(y_0) = -y_0$. Logo, o sistema não tem trajetórias periódicas deslizantes. Se $\gamma_L > 0$, então e_L é um foco repulsor e como a origem é ponto

de tangência visível do campo H^- , concluímos que o sistema não tem trajetórias periódicas deslizantes. Veja a Figura 3.7.

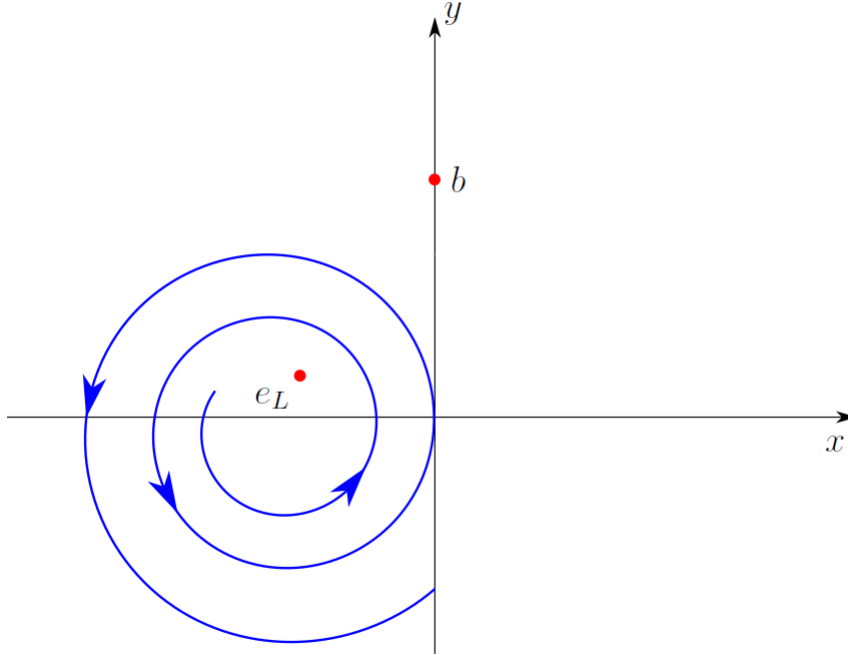


Figura 3.7: Uma trajetória local para $\gamma_L > 0$.

Consideramos o caso $\gamma_L < 0$. Desta forma, e_L é um foco atrator. Tomamos o ponto $\hat{p} = (0, y_P) = (0, \hat{y})$, onde $\hat{y} > 0$ é dado no item **b**) do Teorema 3.1.1.

Supomos $\hat{y} \leq b$. Como $P_L(\hat{y}) = 0$ segue que existe uma trajetória local por \hat{p} que segue por Σ^- em direção à origem e depois desliza ao longo de Σ_d até encontrar \hat{p} novamente. Logo, o sistema tem uma trajetória periódica deslizante Γ contida em $\Sigma^- \cup \Sigma_d$. Além disso, pela definição das aplicações P_L e P_R concluímos que Γ é uma trajetória periódica deslizante instável. Veja a Figura 3.8.

Assumimos $\hat{y} > b$. Desta maneira, \hat{p} está na região de costura. Tomamos o ponto $p^* = (0, y^*)$, com $y^* = P_R^{-1}(\hat{y}; b) < b$.

Se $y^* > 0$, então p^* está na região de deslize e existe uma trajetória local por p^* que segue por Σ^+ em direção a \hat{p} , depois segue por Σ^- em direção à origem e, por fim, desliza ao longo de Σ_d até encontrar p^* novamente. Logo, o sistema tem uma trajetória periódica deslizante Γ_1 contida em $\Sigma^- \cup \Sigma \cup \Sigma^+$. Além disso, pela definição das aplicações P_L e P_R segue que Γ_1 é uma trajetória periódica deslizante instável. Veja a Figura 3.9.

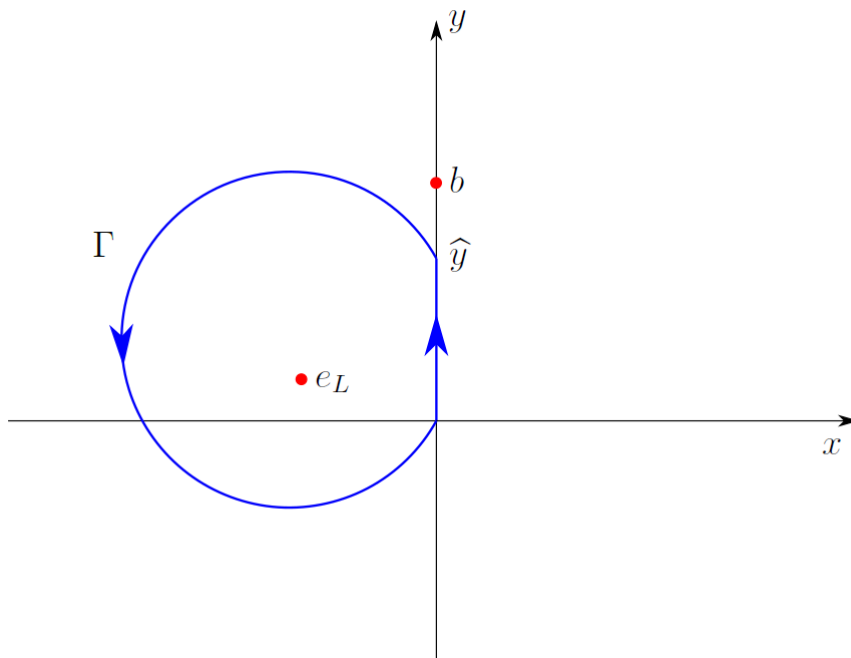


Figura 3.8: Trajetória periódica deslizando para $\hat{y} \leq b$.

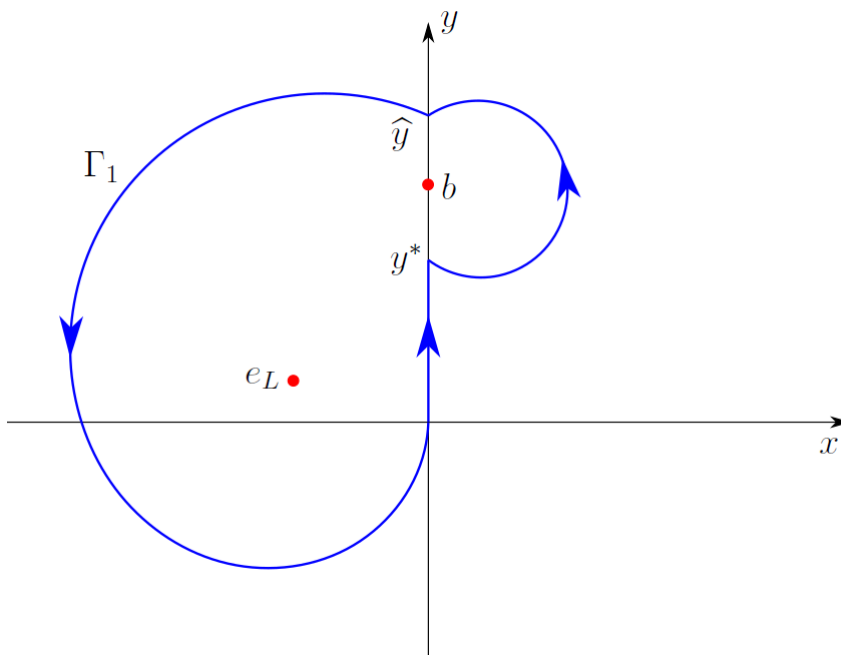


Figura 3.9: Trajetória periódica deslizando para $\hat{y} > b$ e $0 < y^* < b$.

Se $y^* = 0$, então obtemos uma trajetória periódica instável Γ_2 que tem somente a origem em comum com a região de deslize. Chamamos Γ_2 de **ciclo crítico de costura**, pois Γ_2 simboliza o limite entre as trajetórias periódicas deslizando e as trajetórias periódicas de costura do sistema. Veja a Figura 3.10.

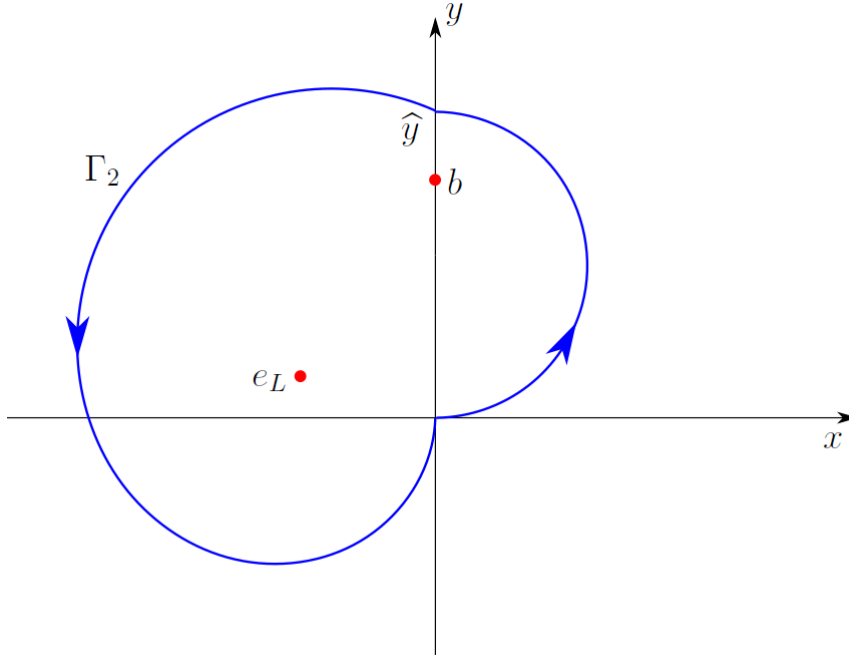


Figura 3.10: Ciclo crítico de costura instável.

Se $y^* < 0$, então toda trajetória local por p^* que possui pontos em Σ_d abandona Σ_d conforme o tempo cresce ou decresce e nunca mais retorna a Σ_d . Desta forma, o sistema não tem trajetórias periódicas deslizantes.

Diante da discussão anterior e supondo $0 < y^* < b$ para todo $b < \hat{y}$ suficientemente próximo de \hat{y} segue que, em $b = \hat{y}$, ocorre uma Bifurcação do tipo Buckling (veja a referência [7]).

A seguir, apresentamos um resultado relacionado a uma bifurcação do ciclo crítico de costura.

Teorema 3.2.1. *Considere $x_L < 0$, $x_R < 0$ e $\gamma_L < 0$ no sistema (3.2). Então, existe uma função suave $b_{CC} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \hat{y})$ definida para todo $\gamma_R \in \mathbb{R}$, com $0 < b_{CC}(\gamma_R) < \hat{y}$, tal que $b_{CC}(0) = \frac{\hat{y}}{2}$ e para $b = b_{CC}(\gamma_R)$ o sistema (3.2) possui um ciclo crítico de costura instável. Além disso, dado $\gamma_R \in \mathbb{R}$, existe $\varepsilon = \varepsilon(\gamma_R) > 0$ tal que, para $b_{CC}(\gamma_R) - \varepsilon < b < b_{CC}(\gamma_R)$, o sistema (3.2) tem um ciclo limite de costura instável, que*

Demonstração

Pelo item **b)** do Teorema 3.1.1 existe $\hat{y} > 0$, que não depende do parâmetro b , tal que $P_L(\hat{y}) = 0$. Segue, do Lema 3.2.2, que existe uma função $b_{CC} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \hat{y})$, com $b_{CC}(\gamma_R) = b_R(\gamma_R)$, tal que $P_R^{-1}(\hat{y}; \gamma_R; b_{CC}(\gamma_R)) = P_R^{-1}(\hat{y}; b_{CC}(\gamma_R)) = 0$. Pelo item **c)** do Lema 3.2.1 e pelo

Teorema da Função Implícita, concluímos que a função b_{CC} é uma função suave. Para $\gamma_R = 0$ segue, do item **a)** do Teorema 3.1.2 que, para todo $z_1 \geq b_{CC}(0)$,

$$P_R^{-1}(z_1; b_{CC}(0)) = -z_1 + 2b_{CC}(0).$$

Logo,

$$P_R^{-1}(\hat{y}; b_{CC}(0)) = -\hat{y} + 2b_{CC}(0) = 0 \text{ e } b_{CC}(0) = \frac{\hat{y}}{2}.$$

De (3.15) temos, para todo $\gamma_R \in \mathbb{R}$,

$$\Psi(\hat{y}; b_{CC}(\gamma_R)) = P_R^{-1}(\hat{y}; b_{CC}(\gamma_R)) - P_L(\hat{y}) = P_R^{-1}(\hat{y}; b_{CC}(\gamma_R)) = 0.$$

Desta forma, o sistema tem um ciclo crítico de costura. Claramente, algumas trajetórias locais no interior deste ciclo crítico de costura evoluem em direção ao ponto de equilíbrio e_L . Pelo item **d)** do Teorema 3.1.3 temos

$$\lim_{y_0 \rightarrow \hat{y}^+} P'(y_0) = +\infty.$$

Logo, para y_0 suficientemente próximo de \hat{y} , com $y_0 > \hat{y}$, temos $P(y_0) > y_0$. Desta forma, este ciclo crítico de costura é instável.

Portanto, existe uma função suave $b_{CC} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \hat{y})$ definida para todo $\gamma_R \in \mathbb{R}$, com $0 < b_{CC}(\gamma_R) < \hat{y}$, tal que $b_{CC}(0) = \frac{\hat{y}}{2}$ e para $b = b_{CC}(\gamma_R)$ o sistema (3.2) tem o ciclo crítico de costura instável.

Dado $\gamma_R \in \mathbb{R}$, denotamos $K = \min\{-1, -e^{-\gamma_R \pi}\}$. Para todo $b > 0$ obtemos do item **b)** do Teorema 3.1.2 que, para todo $z_1 > b$,

$$K \leq (P_R^{-1})'(z_1; b) < 0. \quad (3.17)$$

Dado $z_1 > \hat{y}$ temos, pelo Teorema do Valor Médio, que existe $\xi = \xi(z_1) \in (\hat{y}, z_1)$ tal que

$$\begin{aligned} P_R^{-1}(z_1; b_{CC}(\gamma_R)) &= P_R^{-1}(z_1; b_{CC}(\gamma_R)) - P_R^{-1}(\hat{y}; b_{CC}(\gamma_R)) = (P_R^{-1})'(\xi; b_{CC}(\gamma_R))(z_1 - \hat{y}) \geq \\ &\geq K(z_1 - \hat{y}). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Do item **b)** do Teorema 3.1.1 temos $\lim_{y_0 \rightarrow \hat{y}^+} P'_L(y_0) = -\infty$ e, por conseguinte, pela Regra de L'Hospital temos

$$\lim_{y_0 \rightarrow \hat{y}^+} \frac{P_L(y_0) - P_L(\hat{y})}{y_0 - \hat{y}} = -\infty.$$

Desta forma, dado $M > -K > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que, para todo $\hat{y} < y_0 \leq \hat{y} + \delta_1$, $P'_L(y_0) < -M$. Além disso, existe $\delta_2 > 0$ tal que, para todo $\hat{y} < y_0 \leq \hat{y} + \delta_2$,

$$\frac{P_L(y_0) - P_L(\hat{y})}{y_0 - \hat{y}} = \frac{P_L(y_0)}{y_0 - \hat{y}} < -M.$$

Tomamos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Logo, para todo $\hat{y} < y_0 \leq \hat{y} + \delta$, temos

$$P'_L(y_0) < -M \text{ e } -P_L(y_0) > M(y_0 - \hat{y}). \quad (3.19)$$

De (3.18) e (3.19) segue

$$\Psi(\hat{y} + \delta; b_{CC}(\gamma_R)) = P_R^{-1}(\hat{y} + \delta; b_{CC}(\gamma_R)) - P_L(\hat{y} + \delta) > (K + M)\delta > 0 \quad (3.20)$$

e, para todo $0 < \tilde{\delta} < \delta$,

$$\Psi(\hat{y} + \tilde{\delta}; b_{CC}(\gamma_R)) > 0. \quad (3.21)$$

Por continuidade, existe $0 < \varepsilon = \varepsilon(\gamma_R) < b_{CC}(\gamma_R)$ tal que, para todo $b > 0$, com $b_{CC}(\gamma_R) - \varepsilon < b < b_{CC}(\gamma_R)$, temos $\Psi(\hat{y} + \delta; b) > 0$. Pelo item c) do Lema 3.2.1 segue que $P_R^{-1}(\hat{y}; \cdot)$ é crescente em relação a variável b no intervalo $(0, \hat{y})$. Desta maneira, para todo $b_{CC}(\gamma_R) - \varepsilon < b < b_{CC}(\gamma_R)$,

$$\Psi(\hat{y}; b) = P_R^{-1}(\hat{y}; b) < P_R^{-1}(\hat{y}; b_{CC}(\gamma_R)) = 0.$$

Segue, do Teorema do Valor Intermediário, que existe pelo menos um valor $\bar{y} > 0$, com $\hat{y} < \bar{y} < \hat{y} + \delta$, tal que $\Psi(\bar{y}; b) = 0$. De (3.17) e (3.19) obtemos

$$P'(\bar{y}) = P'_R(P_L(\bar{y}))P'_L(\bar{y}) > -P'_R(P_L(\bar{y}))M > -\frac{M}{K} > 1.$$

Portanto, para todo $\gamma_R \in \mathbb{R}$ existe $\varepsilon = \varepsilon(\gamma_R) > 0$ tal que, para $b_{CC}(\gamma_R) - \varepsilon < b < b_{CC}(\gamma_R)$, o sistema (3.2) possui um ciclo limite de costura instável. Geometricamente, veja a Figura 3.11.

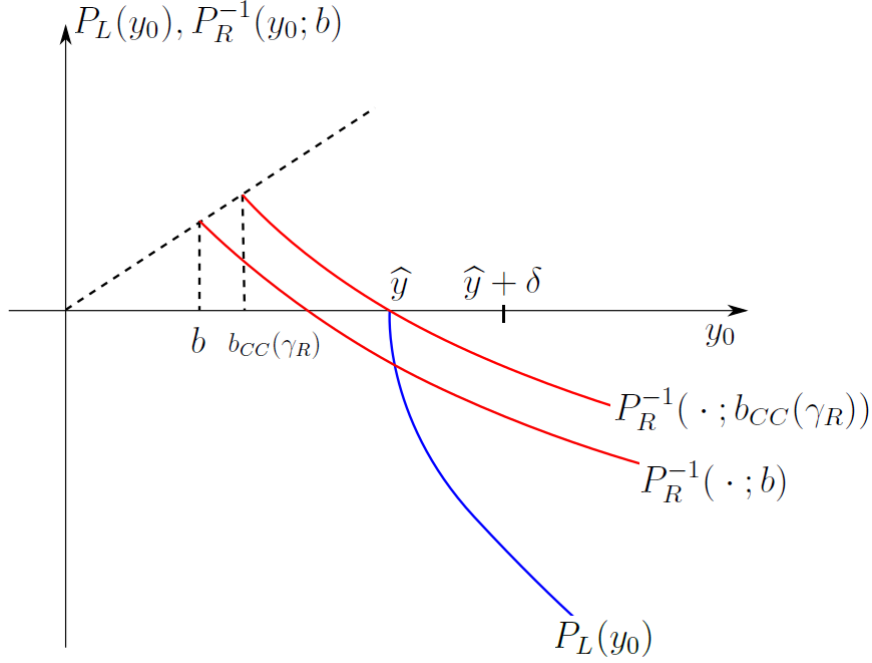


Figura 3.11: Esboço do gráfico da aplicação P_L para $\gamma_L < 0$ e esboço do gráfico das aplicações $P_R^{-1}(\cdot; b_{CC}(\gamma_R))$ e $P_R^{-1}(\cdot; b)$, com $b_{CC}(\gamma_R) - \varepsilon < b < b_{CC}(\gamma_R)$.

■

Observação 3.2.4. Sabemos, do item **b)** do Teorema 3.1.2, que a aplicação $P_R^{-1}(\cdot; b)$ é decrescente. Em relação ao Teorema 3.2.1 notamos que, para $b_{CC}(\gamma_R) < b \ll \hat{y}$,

$$\begin{aligned} 0 &= \Psi(\hat{y}; b_{CC}(\gamma_R)) = b_{CC}(\gamma_R) + P_R^{-1}(\hat{y} - b_{CC}(\gamma_R); 0) < b + P_R^{-1}(\hat{y} - b; 0) = \\ &= P_R^{-1}(\hat{y}; b) = \Psi(\hat{y}; b) < b \end{aligned}$$

e então, $0 < P_R^{-1}(\hat{y}; b) < b$. Logo, para $b_{CC}(\gamma_R) < b \ll \hat{y}$, o sistema (3.2) tem uma trajetória periódica deslizante, como na Figura 3.9. Sabemos, do Teorema 3.2.1, que para $b = b_{CC}(\gamma_R)$ o sistema (3.2) tem um ciclo crítico de costura instável (veja a Figura 3.10) e existe $\varepsilon > 0$ tal que, para $b_{CC}(\gamma_R) - \varepsilon < b < b_{CC}(\gamma_R)$, o sistema (3.2) tem um ciclo limite de costura instável. Logo, em $b_{CC}(\gamma_R)$, ocorre uma Bifurcação do tipo CC, também chamada de Bifurcação do tipo Crossing-Sliding (veja a referência [7]).

3.2.2 Estudo dos ciclos limite de costura

Apresentamos, a seguir, uma série de resultados sobre a existência e não existência de ciclos limite de costura. Mostramos que, sobre certas hipóteses, o sistema (3.2) tem, pelo menos, 3 ciclos limite de costura.

Seja Γ um ciclo limite de costura do sistema (3.2), onde $y_L < 0$ e $y_U > 0$ são os pontos que Γ intercepta Σ . Chamamos, removendo os pontos de passagem y_L e y_U , por arco aberto a esquerda o conjunto $\Gamma^- = \Gamma \cap \Sigma^-$ e por arco aberto a direita o conjunto $\Gamma^+ = \Gamma \cap \Sigma^+$. Consideramos os segmentos orientados

$$L^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = 0, y = (1 - \mu)y_L + \mu y_U, 0 \leq \mu \leq 1\}$$

e

$$L^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = 0, y = \mu y_L + (1 - \mu)y_U, 0 \leq \mu \leq 1\}.$$

Geometricamente, veja a Figura 3.12.

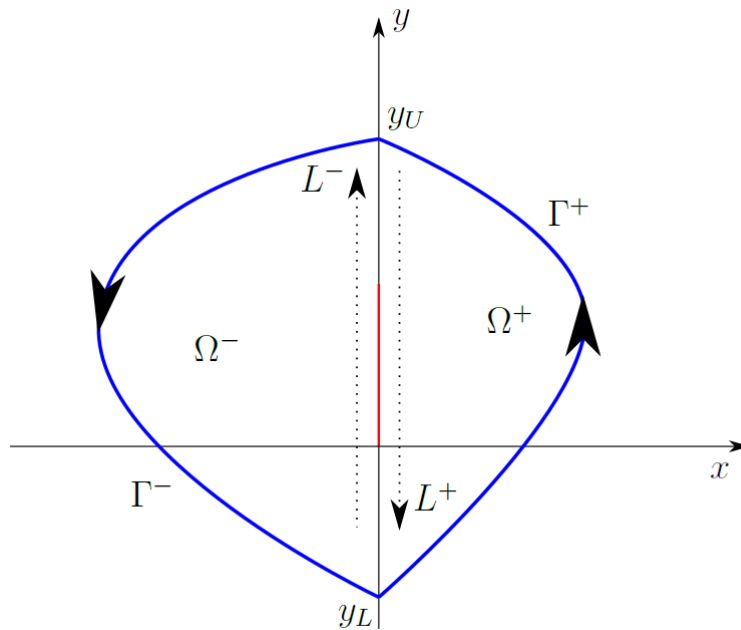


Figura 3.12: Ciclo limite de costura com região de desliz.

Como $\Gamma^- \cup L^-$ e $\Gamma^+ \cup L^+$ são curvas de Jordan, os conjuntos $\Omega^- = \text{int}\{\Gamma^- \cup L^-\}$ e $\Omega^+ = \text{int}\{\Gamma^+ \cup L^+\}$ e os valores $\sigma^- = \text{área } \Omega^-$ e $\sigma^+ = \text{área } \Omega^+$ estão bem definidos. O teorema a seguir apresenta uma condição necessária para a existência de ciclos limite de costura.

Teorema 3.2.2. *Considere o sistema (3.2). Seja Γ um ciclo limite de costura do sistema pelos*

pontos $(0, y_L)$ e $(0, y_U)$, com $y_U = y_L + h > 0$ e $h > 0$, como na Figura 3.12. Então,

$$2\gamma_L\sigma^- + 2\gamma_R\sigma^+ + bh = 0. \quad (3.22)$$

Demonstração

Denotamos $T_L = 2\gamma_L$, $T_R = 2\gamma_R$, $D_L = 1 + \gamma_L^2$ e $D_R = 1 + \gamma_R^2$. Consideramos o campo vetorial

$$G^\perp(\mathbf{x}) = \begin{cases} (-D_Lx + a_L, T_Lx - y), & \mathbf{x} = (x, y) \in \Sigma^- \\ (-D_Rx + a_R, T_Rx - y + b), & \mathbf{x} = (x, y) \in \Sigma^+ \end{cases}.$$

Observamos que

$$\begin{aligned} \langle (-D_Lx + a_L, T_Lx - y), (T_Lx - y, D_Lx - a_L) \rangle &= -T_L D_L x^2 + D_L xy + a_L T_L x - \\ - a_L y + T_L D_L x^2 - a_L T_L x - D_L xy + a_L y &= 0. \end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$\langle (-D_Rx + a_R, T_Rx - y + b), (T_Rx - y + b, D_Rx - a_R) \rangle = 0.$$

Logo, o campo G^\perp é ortogonal ao campo associado ao sistema (3.2). Pelo Teorema de Green, temos

$$\oint_{\Gamma^- \cup L^-} G^\perp dr = \int \int_{\Omega^-} T_L d\sigma = T_L \sigma^-$$

e

$$\oint_{\Gamma^+ \cup L^+} G^\perp dr = \int \int_{\Omega^+} T_R d\sigma = T_R \sigma^+.$$

Notamos que

$$\oint_{\Gamma^- \cup L^-} G^\perp dr = \int_{L^-} G^\perp dr = \int_{y_L}^{y_L+h} (-y) dy$$

e

$$\oint_{\Gamma^+ \cup L^+} G^\perp dr = \int_{L^+} G^\perp dr = - \int_{y_L}^{y_L+h} (-y + b) dy.$$

Desta forma,

$$T_L \sigma^- + T_L \sigma^+ = - \int_{y_L}^{y_L+h} b dy = -bh$$

e então,

$$T_L \sigma^- + T_R \sigma^+ + bh = 0.$$

Portanto,

$$2\gamma_L\sigma^- + 2\gamma_R\sigma^+ + bh = 0.$$

■

Observação 3.2.5. Se

$$\gamma_R \geq 0, \gamma_L \geq 0 \text{ e } b > 0$$

ou

$$\gamma_R\gamma_L \geq 0, \gamma_R + \gamma_L \neq 0 \text{ e } b = 0$$

no sistema (3.2), então a equação (3.22) não é satisfeita e, portanto, o sistema (3.2) não tem ciclos limite de costura.

Teorema 3.2.3. *Considere o sistema (3.2). Suponha $x_L < 0$, $x_R < 0$ e $b = 0$. Logo,*

- a) *se $\gamma_R\gamma_L \geq 0$ e $\gamma_R + \gamma_L \neq 0$, então o sistema não tem trajetórias periódicas de costura;*
- b) *se $\gamma_R = \gamma_L = 0$, então existe um comportamento de centro global não linear em torno da origem;*
- c) *se $\gamma_R\gamma_L < 0$ e $\gamma_L(\gamma_R + \gamma_L) \geq 0$, então o sistema não tem trajetórias periódicas de costura;*
- d) *se $\gamma_R\gamma_L < 0$ e $\gamma_L(\gamma_R + \gamma_L) < 0$, então o sistema tem uma única trajetória periódica de costura. Além disso, esta trajetória local é um ciclo limite de costura estável se $\gamma_L > 0$ e um ciclo limite de costura instável se $\gamma_L < 0$.*

Demonstração

- a) Supomos $\gamma_R\gamma_L \geq 0$ e $\gamma_R + \gamma_L \neq 0$. Pela Observação 3.2.5 segue que a equação (3.22) não é satisfeita.

Portanto, pelo Teorema 3.2.2, o sistema não tem trajetórias periódicas de costura.

- b) Assumimos $\gamma_R = \gamma_L = 0$. Pelo item **b)** do Teorema 3.1.3 temos, para todo $y_0 \in \text{Dom}(P) = [0, +\infty)$, $P(y_0) = y_0$. Sabemos que, para $\gamma_R = \gamma_L = 0$, os pontos de equilíbrio $(x_L, 0)$ e $(x_R, 0)$ dos campos H^- e H^+ são centros, respectivamente.

Portanto, o comportamento em torno da origem é de um centro global não linear.

c) Admitimos $\gamma_R\gamma_L < 0$ e $\gamma_L(\gamma_R + \gamma_L) \geq 0$. Sem perda de generalidade, assumimos $\gamma_L < 0$ e $\gamma_R > 0$ pois, caso contrário, basta aplicarmos a simetria \prod_1 dada na Tabela 3.1. Desta maneira, $\gamma_L < 0$ e $\gamma_L + \gamma_R \leq 0$. Pelo item **a)** do Teorema 3.1.3 temos $\text{Dom}(P) = [\hat{y}, +\infty)$. Supomos, por absurdo, que o sistema tem uma trajetória periódica de costura, isto é, que P tem um ponto fixo $\bar{y} > \hat{y}$. Pela demonstração do Lema 3.1.1 segue $\nu(\bar{y}) \geq 0$. Como $0 < \gamma_R \leq -\gamma_L$ e $0 < t_R(P_R(\bar{y})) < \pi < t_L(\bar{y})$ obtemos

$$\nu(\bar{y}) = \gamma_L t_L + \gamma_R t_R \leq \gamma_L(t_L - t_R) < 0,$$

o que é um absurdo.

Portanto, o sistema não possui trajetórias periódicas de costura

d) Supomos $\gamma_R\gamma_L < 0$ e $\gamma_L(\gamma_R + \gamma_L) < 0$. Pela continuidade da aplicação P e pelo item **d)** do Teorema 3.1.3 sabemos que P é uma aplicação crescente.

Primeiramente, admitimos $\gamma_L < 0$ e $\gamma_R > 0$. Logo, $\gamma_R + \gamma_L > 0$. Pelo item **b)** dos Teoremas 3.1.1 e 3.1.2, e pelo item **a)** do Teorema 3.1.3, existe um valor $\hat{y} > 0$ tal que $P(\hat{y}) = 0$. Pelo item **d)** do Teorema 3.1.3 temos

$$\lim_{y_0 \rightarrow +\infty} P'(y_0) = e^{(\gamma_R + \gamma_L)\pi} > 1.$$

Como $P(\hat{y}) = 0$ segue, da Observação 3.1.1 e do Teorema do Valor Intermediário, que existe $\bar{y} > \hat{y}$ tal que

$$P(\bar{y}) = \bar{y}$$

e, para y_0 suficientemente próximo de \bar{y} , a aplicação P satisfaz

$$|P(y_0) - \bar{y}| > |y_0 - \bar{y}|.$$

Logo, o sistema tem uma trajetória periódica de costura e esta trajetória local é um ciclo limite de costura instável. Portanto, pelo Lema 3.1.1, o sistema possui uma única trajetória periódica de costura e, além disso, esta trajetória local é um ciclo limite de costura instável.

Supomos $\gamma_L > 0$ e $\gamma_R < 0$. Desta forma, $\gamma_R + \gamma_L < 0$. Do item **c)** do Teorema 3.1.1, do item **b)** do Teorema 3.1.2 e do item **a)** do Teorema 3.1.3 segue $P_L(0) < 0$ e

$$P(0) = P_R(P_L(0)) > 0.$$

Pelo item **d)** do Teorema 3.1.3 temos

$$\lim_{y_0 \rightarrow +\infty} P'(y_0) = e^{(\gamma_R + \gamma_L)\pi} < 1.$$

Obtemos, da Observação 3.1.1 e do Teorema do Valor Intermediário, que existe $\bar{y} > 0$ tal que

$$P(\bar{y}) = \bar{y}$$

e, para y_0 suficientemente próximo de \bar{y} , a aplicação P satisfaz

$$|P(y_0) - \bar{y}| < |y_0 - \bar{y}|.$$

Desta forma, o sistema tem uma trajetória periódica de costura e esta trajetória local é um ciclo limite de costura estável. Portanto, aplicando a simetria \prod_1 dada na Tabela 3.1 segue, pelo Lema 3.1.1, que o sistema tem uma única trajetória periódica de costura e, além disso, esta trajetória local é um ciclo limite de costura estável. ■

Teorema 3.2.4. *Seja $\gamma_L \gamma_R \geq 0$, $x_L < 0$, $x_R < 0$ e $b > 0$ no sistema (3.2). Então, levando em consideração o Teorema 3.2.1,*

- a)** *se $\gamma_L \geq 0$ e $\gamma_R \geq 0$, então o sistema não possui trajetórias periódicas de costura;*
- b)** *se $\gamma_L = 0$ e $\gamma_R < 0$, então o sistema tem uma única trajetória periódica de costura e esta trajetória local é um ciclo limite de costura estável;*
- c)** *se $\gamma_L < 0$ e $\gamma_R \leq 0$, então existe um valor $b_{SN}(\gamma_R)$, com $0 < b_{SN}(\gamma_R) < b_{CC}(\gamma_R)$, tal que para $0 < b < b_{SN}(\gamma_R)$ o sistema não tem trajetórias periódicas de costura e, para $b_{SN}(\gamma_R) < b < b_{CC}(\gamma_R)$, o sistema tem exatamente duas trajetórias periódicas de costura e tais trajetórias locais são ciclos limite de costura com estabilidades opostas. Para $b = b_{SN}(\gamma_R)$, o sistema possui uma única trajetória periódica de costura e, além disso, esta trajetória local é um ciclo limite de costura semi-estável. Para $b \geq b_{CC}(\gamma_R)$, o sistema tem uma única trajetória periódica de costura e esta trajetória local é um ciclo limite de costura estável.*

Demonstração

- a) Supomos $\gamma_L \geq 0$ e $\gamma_R \geq 0$. Segue, do Teorema 3.2.2 e da Observação 2.1.3, que o sistema não tem trajetórias periódicas de costura.

Portanto, o sistema não possui trajetórias periódicas de costura.

- b) Admitimos $\gamma_L = 0$ e $\gamma_R < 0$. Pelos itens **c)** e **d)** do Teorema 3.1.3 segue $P''(y_0) < 0$ para todo $y_0 > 0$, $P(0) = P_R(0) > b$ e

$$\lim_{y_0 \rightarrow +\infty} P'(y_0) < 1.$$

Da Observação 3.1.1 temos que existe $\tilde{y}_1 > 0$ tal que $P(\tilde{y}_1) < \tilde{y}_1$. Então, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe um valor $\bar{y} \in (0, \tilde{y}_1)$ tal que $P(\bar{y}) = \bar{y}$. Mostramos, a seguir, a desigualdade $P'(\bar{y}) < 1$. Supomos, por absurdo, $P'(\bar{y}) \geq 1$. Seja $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(y_0) = P(y_0) - y_0.$$

Logo,

$$f(\bar{y}) = 0, \quad f'(\bar{y}) \geq 0, \quad \text{e} \quad f''(\bar{y}) < 0.$$

Desta forma, para todo $0 < y_0 < \bar{y}$ suficientemente próximo de \bar{y} , temos $f(y_0) < 0$. Como $f(0) = P(0) > 0$, existe $0 < \bar{y}_2 < \bar{y}$ tal que $f(\bar{y}_2) = 0$ e, conseqüentemente, pelo Teorema de Rolle, existe $\bar{y}_1 < \bar{y}_2 < \bar{y}$ tal que

$$f'(\bar{y}_1) = 0.$$

Como $f''(y_0) = P''(y_0) < 0$ para todo $y_0 > 0$, segue que f' é uma aplicação decrescente no intervalo $(0, +\infty)$. Logo,

$$0 = f'(\bar{y}_1) > f'(\bar{y}) \geq 0$$

o que é um absurdo. Desta maneira, $P'(\bar{y}) < 1$.

Da análise anterior concluímos que se existe $y_0 > 0$ tal que $P(y_0) = y_0$, então $P'(y_0) < 1$. Logo, \bar{y} é o único valor tal que $P(\bar{y}) = \bar{y}$. Além disso, $P'(\bar{y}) < 1$.

Portanto, o sistema tem uma única trajetória periódica de costura e, além disso, esta trajetória local é um ciclo limite de costura estável.

- c) Assumimos $\gamma_L < 0$ e $\gamma_R \leq 0$. Como $\gamma_L \gamma_R \geq 0$ e $\gamma_L + \gamma_R < 0$, segue do item **d)** do Lema 3.2.1 que, para todo $y_0 > \max\{b, \hat{y}\}$, $\Psi''(y_0; b) < 0$ e o sistema tem, no máximo, duas trajetórias periódicas de costura. Além disso, do item **b)** do Lema 3.2.1 temos $\delta_\infty < 0$.

Pela demonstração do Teorema 3.2.1 e por (3.20), existe $\delta > 0$ tal que

$$\Psi(\widehat{y} + \delta; b_{CC}(\gamma_R)) > 0.$$

Sabemos, do item **b)** do Teorema 3.1.2, que $P_R^{-1}(\cdot; 0)$ é uma aplicação decrescente no intervalo $(0, +\infty)$. Da equação (3.14) temos, para $b_{CC}(\gamma_R) \leq b < \widehat{y} + \delta$,

$$\Psi(\widehat{y} + \delta; b) \geq \Psi(\widehat{y} + \delta; b_{CC}(\gamma_R)) > 0.$$

Para $b \geq \widehat{y} + \delta$ segue $\Psi(b; b) > b > 0$.

Seja $b \geq b_{CC}(\gamma_R)$. Da análise anterior segue que existe $\bar{y}_1 \geq \max\{b, \widehat{y}\}$ tal que $\Psi(\bar{y}_1; b) > 0$. Como $\delta_\infty < 0$ obtemos, da Observação 3.2.3, que existe $\bar{y}_2 > \bar{y}_1$ de tal forma que $\Psi(\bar{y}_2; b) < 0$. Pelo Teorema do Valor Intermediário e como a função Ψ tem concavidade para baixo segue que existe um único $\bar{y}_1 < \bar{y} < \bar{y}_2$ tal que $\Psi(\bar{y}; b) = 0$. Além disso, Ψ é decrescente em uma vizinhança de \bar{y} . Desta forma, do item **b)** do Lema 3.2.1 obtemos que \bar{y} está associado a um ciclo limite de costura estável do sistema.

Portanto, para $b \geq b_{CC}(\gamma_R)$, o sistema possui uma única trajetória periódica de costura e esta trajetória local é um ciclo limite de costura estável.

Do item **a)** do Teorema 3.2.3 segue, para todo $y_0 > \widehat{y} = \max\{0, \widehat{y}\}$, $\Psi(y_0; 0) \neq 0$. Pela continuidade de Ψ em relação ao parâmetro b temos, para $0 < b \ll 1$,

$$\Psi(y_0; b) \neq 0 \text{ para todo } y_0 > \widehat{y}.$$

Desta forma, não existem trajetórias periódicas de costura para $b > 0$ suficientemente pequeno. Sabemos que, para $b = b_{CC}(\gamma_R)$, o sistema tem uma única trajetória periódica de costura e tal trajetória local é um ciclo limite de costura estável. Pela Observação 3.2.2 concluímos que existe $\varepsilon_1 > 0$ suficientemente pequeno tal que, para $b_{CC}(\gamma_R) - \varepsilon_1 < b < b_{CC}(\gamma_R)$, o sistema possui um ciclo limite de costura estável. Do Teorema 3.2.1 segue que existe $\varepsilon_2 > 0$ suficientemente pequeno de tal forma que, para $b_{CC}(\gamma_R) - \varepsilon_2 < b < b_{CC}(\gamma_R)$, o sistema possui um ciclo limite de costura instável. Tomamos $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Como o sistema tem no máximo duas trajetórias periódicas de costura concluímos que, para $b_{CC}(\gamma_R) - \varepsilon < b < b_{CC}(\gamma_R)$, o sistema tem exatamente duas trajetórias periódicas de costura e tais trajetórias locais são ciclos limite de costura com estabilidades opostas.

Portanto, pela Teoria de Bifurcações, existe um valor $0 < b_{SN}(\gamma_R) < b_{CC}(\gamma_R)$ tal que, para $0 < b < b_{SN}(\gamma_R)$, o sistema não possui trajetórias periódicas de costura; para $b = b_{SN}(\gamma_R)$ o sistema possui uma única trajetória periódica de costura e esta trajetória

local é um ciclo limite de costura semi-estável e, para $b_{SN}(\gamma_R) < b < b_{CC}(\gamma_R)$, o sistema tem exatamente duas trajetórias periódicas de costura e estas trajetórias locais são ciclos limite de costura com estabilidades opostas

■

Teorema 3.2.5. *Considere o sistema (3.2) com $x_L < 0$, $x_R < 0$, $\gamma_L > 0$, $\gamma_R < 0$ e $b > 0$. Então,*

- a) *se $\gamma_L + \gamma_R \geq 0$, então o sistema não possui trajetórias periódicas de costura;*
- b) *se $\gamma_L + \gamma_R < 0$, então o sistema possui uma única trajetória periódica de costura e, além disso, esta trajetória local é um ciclo limite de costura estável.*

Demonstração

- a) Assumimos $\gamma_L + \gamma_R \geq 0$. Então, $\gamma_L \gamma_R < 0$ e $\gamma_L(\gamma_L + \gamma_R) \geq 0$ e, pelo item **c)** do Teorema 3.2.3 temos, para todo $y_0 \geq 0$, $\Psi(y_0; 0) \neq 0$. Do item **c)** do Teorema 3.1.1 segue

$$\Psi(0; 0) = P_R^{-1}(0; 0) - P_L(0) = -P_L(0) > 0.$$

Logo, para todo $y_0 \geq 0$, $\Psi(y_0; 0) > 0$. Desta forma, do item **c)** do Lema 3.2.1 obtemos, para todo $y_0 \geq b$,

$$\Psi(y_0; b) > b + \Psi(y_0; 0) > 0.$$

Portanto, o sistema não tem trajetórias periódicas de costura.

- b) Supomos $\gamma_L + \gamma_R < 0$. Sabemos, do item **a)** do Teorema 3.1.3, que a aplicação de Poincaré P está definida para todo $y_0 \geq 0$. Pelo item **d)** do Teorema 3.1.3 temos

$$\lim_{y_0 \rightarrow +\infty} P'(y_0) < 1.$$

Da Observação 3.1.1 segue que existe $\tilde{y}_1 > 0$ tal que $P(\tilde{y}_1) < \tilde{y}_1$. Como $P(0) > b > 0$ obtemos, do Teorema do Valor Intermediário, que existe um valor $\bar{y} \in (0, \tilde{y}_1)$ tal que $P(\bar{y}) = \bar{y}$. Pela continuidade da aplicação P e pelo item **d)** do Teorema 3.1.3, obtemos que P é uma aplicação crescente e, conseqüentemente, $\bar{y} = P(\bar{y}) > P(0) > b$. Supomos, por absurdo, que P possui pelo menos dois pontos fixos \bar{y}_1 e \bar{y}_2 , com $b < \bar{y}_1 < \bar{y}_2$, onde \bar{y}_1 é o primeiro deles e \bar{y}_2 o seguinte. Notamos que $P'(\bar{y}_1) \leq 1$ pois, caso contrário, P

possuiria um ponto fixo menor que \bar{y}_1 , o que seria um absurdo já que \bar{y}_1 é o menor dos pontos fixos de P . Do item **d)** do Teorema 3.1.3 segue, para $i = 1, 2$,

$$P'(\bar{y}_i) = \frac{\bar{y}_i}{P_L(\bar{y}_i)} \frac{P_L(\bar{y}_i) - b}{\bar{y}_i - b} e^{2\nu(\bar{y}_i)}$$

onde $\nu(\bar{y}_i) = \gamma_L t_L(\bar{y}_i) + \gamma_R t_R(\bar{y}_i)$. Do item **d)** do Teorema 3.1.1 sabemos que P_L é uma aplicação decrescente no intervalo $(0, +\infty)$. Logo,

$$\frac{\bar{y}_1}{\bar{y}_1 - b} > \frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_2 - b} > 0 \text{ e } \frac{P_L(\bar{y}_1) - b}{P_L(\bar{y}_1)} > \frac{P_L(\bar{y}_2) - b}{P_L(\bar{y}_2)} > 0.$$

Da demonstração do Lema 3.1.1 temos $\nu(\bar{y}_1) > \nu(\bar{y}_2)$. Desta maneira,

$$P'(\bar{y}_2) < P'(\bar{y}_1) \leq 1.$$

Constatamos que o caso $P'(\bar{y}_1) < 1$ e $P'(\bar{y}_2) < 1$ não ocorre pois, se ocorresse, P possuiria um ponto fixo entre \bar{y}_1 e \bar{y}_2 , o que seria um absurdo já que \bar{y}_2 é o segundo ponto fixo. Logo,

$$P'(\bar{y}_1) = 1 \text{ e } P'(\bar{y}_2) < 1,$$

e como \bar{y}_2 é o segundo ponto fixo obtemos, para todo $y_0 \in (\bar{y}_1, \bar{y}_2)$, $P(y_0) > y_0$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $\bar{y}_3 \in (\bar{y}_1, \bar{y}_2)$ tal que $P'(\bar{y}_3) = 1$. Com os mesmos argumentos usados anteriormente para \bar{y}_1 e \bar{y}_2 , segue

$$\frac{\bar{y}_1}{\bar{y}_1 - b} > \frac{\bar{y}_3}{P(\bar{y}_3) - b} > 0, \frac{P_L(\bar{y}_1) - b}{P_L(\bar{y}_1)} > \frac{P_L(\bar{y}_3) - b}{P_L(\bar{y}_3)} > 0 \text{ e } \nu(\bar{y}_1) > \nu(\bar{y}_3).$$

Desta forma,

$$1 = P'(\bar{y}_3) < P'(\bar{y}_1) = 1$$

o que é um absurdo. Então, \bar{y} é o único ponto fixo de P . Consideramos a aplicação $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(y_0) = P(y_0) - y_0$. Notamos que

$$f(0) > 0 \text{ e } f(\tilde{y}_1) < 0.$$

Como \bar{y} é o único zero de f , segue que f é decrescente em uma vizinhança de \bar{y} . Logo, para y_0 suficientemente próximo de \bar{y} com $y_0 > \bar{y}$,

$$|P(y_0) - \bar{y}| \stackrel{P(y_0) > \bar{y}}{=} P(y_0) - \bar{y} \stackrel{f(\bar{y}) > f(y_0)}{<} y_0 - \bar{y} = |y_0 - \bar{y}|$$

e, para y_0 suficientemente próximo de \bar{y} com $y_0 < \bar{y}$,

$$|P(y_0) - \bar{y}| \stackrel{P(y_0) < \bar{y}}{=} \bar{y} - P(y_0) \stackrel{f(\bar{y}) < f(y_0)}{<} -(y_0 - \bar{y}) = |y_0 - \bar{y}|.$$

Portanto, o sistema possui uma única trajetória periódica de costura e esta trajetória local é um ciclo limite de costura estável. ■

Observação 3.2.6. Dos itens **d)** do Teorema 3.1.1 e **c)** do Teorema 3.1.2 temos que as aplicações P_L e P_R^{-1} possuem assíntotas dadas, respectivamente, por

$$A_L : A_L(y) = -e^{\gamma_L \pi} y + 2(1 + e^{\gamma_L \pi}) x_L \gamma_L, \quad y \in \mathbb{R}$$

e

$$A_{R^{-1}} : A_{R^{-1}}(z) = -e^{-\gamma_R \pi} z + (1 + e^{-\gamma_R \pi})(b + 2x_R \gamma_R), \quad z \in \mathbb{R}.$$

Desta forma,

$$A_L(y) = y \iff y = 2x_L \gamma_L \quad \text{e} \quad A_{R^{-1}}(z) = z \iff z = b + 2x_R \gamma_R,$$

isto é, as assíntotas A_L e $A_{R^{-1}}$ interseccionam o gráfico da função identidade nos pontos $(2x_L \gamma_L, 2x_L \gamma_L)$ e $(b + 2x_R \gamma_R, b + 2x_R \gamma_R)$, respectivamente.

Consideramos o sistema (3.2) e fixamos um valor para o parâmetro γ_L . Notamos que a Observação 3.1.2, juntamente com a Teoria de Bifurcações, nos mostra que ocorre uma Bifurcação do tipo Hopf no Infinito no plano (γ_R, b) quando $\gamma_R + \gamma_L = 0$. O item **e)** do Teorema 3.2.6 (teorema a seguir) nos informa que o caráter supercrítico ou subcrítico da Bifurcação do tipo Hopf no Infinito citada acima é determinado pelo sinal do valor $b - b_\infty$, com $b_\infty = 2(x_L + x_R)\gamma_L$.

Teorema 3.2.6. *Seja $x_L < 0$, $x_R < 0$, $\gamma_L < 0$, $\gamma_R > 0$ e $b > 0$ no sistema (3.2). Denotamos $b_\infty = 2(x_L + x_R)\gamma_L$. Então,*

- a)** *se $\gamma_L + \gamma_R < 0$ e $b \geq b_{CC}(\gamma_R)$, então o sistema possui pelo menos um ciclo limite de costura estável;*

- b)** se $\gamma_L + \gamma_R \leq 0$, então $b_{CC}(\gamma_R) \geq 2x_L\gamma_L$. Se $\gamma_L + \gamma_R \leq 0$ e $b < 2x_L\gamma_L$, então o sistema não tem trajetórias periódicas de costura;
- c)** se $\gamma_L + \gamma_R > 0$ e $b < b_{CC}(\gamma_R)$, então o sistema possui pelo menos um ciclo limite de costura instável;
- d)** se $\gamma_L + \gamma_R \geq 0$, então existe um valor $N \geq b_{CC}(\gamma_R) > 0$ tal que, para todo $b > N$, o sistema não possui trajetórias periódicas de costura;
- e)** se $b < b_\infty$, então existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que, para $-\gamma_L < \gamma_R < -\gamma_L + \varepsilon_1$, o sistema possui pelo menos um ciclo limite de costura instável. Se $b > b_\infty$, então existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que, para $-\gamma_L - \varepsilon_2 < \gamma_R < -\gamma_L$, o sistema possui pelo menos um ciclo limite de costura estável.

Demonstração

- a)** Supomos $\gamma_L + \gamma_R < 0$ e $b \geq b_{CC}(\gamma_R)$. Do item **b)** do Lema 3.2.1 temos $\delta_\infty < 0$. Pela Observação 3.2.3, existe \tilde{y} tão grande quanto quisermos de tal forma que $\Psi(\tilde{y}; b) < 0$.

Se $b = b_{CC}(\gamma_R)$, então de acordo com a demonstração do Teorema 3.2.1 e com a equação (3.21) temos $\Psi(\hat{y} + \tilde{\delta}; b_{CC}(\gamma_R)) > 0$, onde $\tilde{\delta} > 0$ é um valor suficientemente pequeno de tal forma que $\hat{y} + \tilde{\delta} < \tilde{y}$. Pelo Teorema do Valor Intermediário e pela Observação 3.2.1 segue que existe $\bar{y} \in (\hat{y} + \tilde{\delta}, \tilde{y})$ tal que $\Psi(\bar{y}; b_{CC}(\gamma_R)) = 0$ e \bar{y} está associado a um ciclo limite de costura estável do sistema. Notamos que para $b = b_{CC}(\gamma_R)$ segue, do Teorema 3.2.1, que o sistema possui um ciclo crítico de costura instável.

Supomos $b > b_{CC}(\gamma_R)$. Segue do item **b)** do Teorema 3.1.2 e da demonstração do item **c)** do Teorema 3.1.2

$$\lim_{z_1 \rightarrow +\infty} (P_R^{-1})'(z_1) = \lim_{z_1 \rightarrow +\infty} \frac{1}{P'_R(P_R^{-1}(z_1))} \stackrel{z_0 = P_R^{-1}(z_1)}{=} \lim_{z_0 \rightarrow -\infty} \frac{1}{P'_R(z_0)} = \frac{1}{-e^{\gamma_R \pi}} < 0.$$

Com um raciocínio análogo ao usado na Observação 3.1.1, existe $\tilde{z}_1 > b$ tal que $P_R^{-1}(\tilde{z}_1) < 0$. Lembramos que do item **c)** do Lema 3.2.1 segue que $P_R^{-1}(\hat{y}; \cdot)$ é crescente em relação a variável b no intervalo $(0, \hat{y})$. Se $b_{CC}(\gamma_R) < b \leq \hat{y}$, então

$$P_R^{-1}(\hat{y}; b) > P_R^{-1}(\hat{y}; b_{CC}(\gamma_R)) = 0.$$

Se $b > \hat{y}$, então

$$P_R^{-1}(b; b) = b > \hat{y} > 0.$$

Desta forma, para $b > b_{CC}(\gamma_R)$, sempre existe $\tilde{y}_0 \geq \hat{y}$ tal que

$$P_R^{-1}(\tilde{y}_0; b) > 0.$$

Logo, pelo Teorema do Valor Intermediário, que existe $\bar{y}_0 > \hat{y}$ tal que $P_R^{-1}(\bar{y}_0; b) = 0$ e $\Psi(\bar{y}_0; b) = -P_L(\bar{y}_0) > 0$. Logo, pelo Teorema do Valor Intermediário e pela Observação 3.2.1 segue que existe $\bar{y} \in (\bar{y}_0, \tilde{y})$ de tal forma que $\Psi(\bar{y}; b) = 0$ e \bar{y} está associado a um ciclo limite de costura estável do sistema.

Portanto, o sistema possui pelo menos um ciclo limite de costura estável.

b) Admitimos $\gamma_L + \gamma_R \leq 0$ e $b < 2x_L\gamma_L$. Do item **d)** do Teorema 3.1.1 segue, para todo $y \in \mathbb{R}$,

$$(A_L)'(y) = -e^{\gamma_L\pi}.$$

Além disso, para todo $y_0 \geq \hat{y}$, temos $A_L(y_0) < P_L(y_0)$. Pelo item **b)** do Teorema 3.1.2 sabemos que $(P_R^{-1})'$ é crescente e como $\gamma_L + \gamma_R \leq 0$ temos, para todo $z_1 > b$,

$$-1 < (P_R^{-1})'(z_1; b) < -e^{-\gamma_R\pi} \leq -e^{\gamma_L\pi}.$$

Como $P_R^{-1}(b; b) = b < 2x_L\gamma_L$ segue, da Observação 3.2.6,

$$P_R^{-1}(y_0; b) < A_L(y_0) \text{ para todo } y_0 \geq b$$

pois, caso contrário, existiria $\tilde{y} > b$ tal que $P_R^{-1}(\tilde{y}; b) = A_L(\tilde{y})$ e $(P_R^{-1})'(\tilde{y}; b) \geq (A_L)'(\tilde{y}) = -e^{\gamma_L\pi}$, o que seria um absurdo. Logo, para todo $y_0 \geq \max\{b, \hat{y}\}$, temos

$$P_R^{-1}(y_0; b) < A_L(y_0) < P_L(y_0).$$

Desta forma, $b_{CC}(\gamma_R) \geq 2x_L\gamma_L$ pois, se não, teríamos

$$0 = P_R^{-1}(\hat{y}; b_{CC}(\gamma_R)) < P_L(\hat{y}) = 0$$

o que seria um absurdo. Portanto, $b_{CC}(\gamma_R) \geq 2x_L\gamma_L$.

Conforme exposto anteriormente, se $\gamma_L + \gamma_R \geq 0$ e $b < 2x_L\gamma_L$ temos, para todo $y_0 \geq \max\{b, \hat{y}\}$,

$$P_R^{-1}(y_0; b) < P_L(y_0)$$

e, conseqüentemente, para todo $y_0 \geq \max\{b, \hat{y}\}$, $P(y_0) \neq y_0$.

Portanto, o sistema não possui trajetórias periódicas de costura.

- c) Supomos $\gamma_L + \gamma_R > 0$ e $b < b_{CC}(\gamma_R)$. Sabemos, do item **b)** do Teorema 3.1.2, que $P_R^{-1}(\cdot; 0)$ é uma aplicação decrescente no intervalo $(0, +\infty)$. Pela equação (3.14) e pela demonstração do Teorema 3.2.1 temos

$$\Psi(\hat{y}; b) = b + P_R^{-1}(\hat{y} - b; 0) < b_{CC}(\gamma_R) + P_R^{-1}(\hat{y} - b_{CC}(\gamma_R); 0) = \Psi(\hat{y}; b_{CC}(\gamma_R)) = 0.$$

Do item **b)** do Lema 3.2.1 segue $\delta_\infty > 0$. Desta maneira, pela Observação 3.2.3, existe $\tilde{y}_1 > \hat{y}$ suficientemente grande tal que $\Psi(\tilde{y}_1; b) > 0$. Desta forma, o Teorema do Valor Intermediário e a Observação 3.2.1 garantem que existe $\bar{y} \in (\hat{y}, \tilde{y}_1)$ tal que $\Psi(\bar{y}; b) = 0$ e \bar{y} está associado a um ciclo limite de costura instável do sistema.

Portanto, o sistema possui pelo menos um ciclo limite de costura instável.

- d) Supomos $\gamma_L + \gamma_R \geq 0$. Pelo item **d)** do Teorema 3.1.1 segue, para todo $y_0 > \hat{y}$, $P'_L(y_0) < -e^{\gamma_L \pi}$. Dado $y_0 > \hat{y}$ temos, pelo Teorema do Valor Médio, que existe $\xi = \xi(y_0) \in (\hat{y}, y_0)$ tal que

$$P_L(y_0) = P_L(y_0) - P_L(\hat{y}) = P'_L(\xi)(y_0 - \hat{y}) < -e^{\gamma_L \pi}(y_0 - \hat{y}).$$

Consideramos a semirreta $r : L(y_0) = -e^{\gamma_L \pi}(y_0 - \hat{y})$ definida para todo $y_0 > \hat{y}$. Observamos que a semirreta r é paralela à assíntota A_L da aplicação P_L , dada no item **d)** do Teorema 3.1.1. Além disso, para todo $y_0 > \hat{y}$,

$$P_L(y_0) < L(y_0).$$

Como $\gamma_L + \gamma_R \geq 0$ temos $-e^{\gamma_L \pi} \leq -e^{-\gamma_R \pi}$. Denotamos

$$N = \frac{\hat{y}}{1 + e^{-\gamma_R \pi}} - 2x_R \gamma_R > 0$$

e tomamos $b > N$. Pelo item **c)** do Teorema 3.1.2 segue que a assíntota A_{R-1} de P_R^{-1} intersecciona o eixo das ordenadas no ponto

$$y_{ASR} = (1 + e^{-\gamma_R \pi})(b + 2x_R \gamma_R).$$

Além disso,

$$b > N \implies b > \frac{\hat{y} - 2x_R \gamma_R (1 + e^{-\gamma_R \pi})}{1 + e^{-\gamma_R \pi}} \implies \hat{y} < (1 + e^{-\gamma_R \pi})(b + 2x_R \gamma_R) = y_{ASR}$$

e do item **c**) do Teorema 3.1.2 temos, para todo $y_0 > \widehat{y}$,

$$L(y_0) = -e^{\gamma_L \pi} y_0 + e^{\gamma_L \pi} \widehat{y} \stackrel{\gamma_L < 0}{<} -e^{\gamma_L \pi} y_0 + \widehat{y} < -e^{-\gamma_R \pi} y_0 + y_{ASR} = A_{R^{-1}}(y_0). \quad (3.23)$$

Sabemos, do item **c**) do Teorema 3.1.2, que para $b > 0$ qualquer e para todo $z_1 \geq b$,

$$\text{sign}[P_R^{-1}(z_1; b) - A_{R^{-1}}(z_1)] > 0.$$

Notamos que

$$0 = P_R^{-1}(\widehat{y}; b_{CC}(\gamma_R)) > A_{R^{-1}}(\widehat{y}) = -e^{-\gamma_R \pi} \widehat{y} + (1 + e^{-\gamma_R \pi})(b_{CC}(\gamma_R) + 2x_R \gamma_R)$$

e então,

$$(1 + e^{-\gamma_R \pi})(b_{CC}(\gamma_R) + 2x_R \gamma_R) < e^{-\gamma_R \pi} \widehat{y} \stackrel{\gamma_R > 0}{<} \widehat{y}.$$

Logo $N \geq b_{CC}(\gamma_R)$ pois, caso contrário, teríamos $\widehat{y} < (1 + e^{-\gamma_R \pi})(b_{CC}(\gamma_R) + 2x_R \gamma_R)$, o que seria um absurdo.

Da inequação (3.23) obtemos, para todo $y_0 > \max\{b, \widehat{y}\}$,

$$P_L(y_0) < L(y_0) < A_{R^{-1}}(y_0) < P_R^{-1}(y_0; b).$$

Então, para todo $y_0 > \max\{b, \widehat{y}\}$, $\Psi(y_0; b) > 0$. Desta forma, o sistema não tem trajetórias periódicas de costura.

Portanto, existe $N \geq b_{CC}(\gamma_R) > 0$ tal que, para todo $b > N$, o sistema não possui trajetórias periódicas de costura.

- e) Supomos $b < b_\infty$. Logo, $b + 2x_R(-\gamma_L) < 2x_L \gamma_L$. Do item **d**) do Teorema 3.1.1 e do item **c**) do Teorema 3.1.2 segue, assumindo o valor $-\gamma_L$ em γ_R na expressão de $A_{R^{-1}}$, que as assíntotas A_L e $A_{R^{-1}}$ são paralelas e

$$A_{R^{-1}}(0) = [b + 2x_R(-\gamma_L)](1 + e^{-(\gamma_L)\pi}) < 2x_L \gamma_L (1 + e^{\gamma_L \pi}) = A_L(0).$$

Desta maneira, para todo $y \in \mathbb{R}$, $A_{R^{-1}}(y) < A_L(y)$. Do item **d**) do Teorema 3.1.1 temos, para todo $y_0 \geq \widehat{y}$,

$$\text{sign}[A_L(y_0) - P_L(y_0)] < 0.$$

Pela definição de assíntota oblíqua e assumindo o valor $-\gamma_L$ em γ_R na expressão de P_R^{-1} ,

existe $\tilde{y}_0 > \max\{b, \hat{y}\}$ suficientemente grande tal que

$$P_R^{-1}(\tilde{y}_0; b) - A_{R^{-1}}(\tilde{y}_0) < \{2x_L\gamma_L - [b + 2x_R(-\gamma_L)]\}(1 + e^{-(\gamma_L)\pi}) = A_L(0) - A_{R^{-1}}(0).$$

Como as assíntotas A_L e A_R^{-1} são paralelas, segue

$$P_R^{-1}(\tilde{y}_0; b) - A_{R^{-1}}(\tilde{y}_0) < A_L(0) - A_{R^{-1}}(0) = A_L(\tilde{y}_0) - A_{R^{-1}}(\tilde{y}_0) < P_L(\tilde{y}_0) - A_{R^{-1}}(\tilde{y}_0).$$

Desta forma, $\Psi(\tilde{y}_0; b; -\gamma_L) = P_R^{-1}(\tilde{y}_0; b) - P_L(\tilde{y}_0) < 0$. Como a aplicação Ψ é contínua com respeito ao parâmetro γ_R , existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que, para $-\gamma_L < \gamma_R < -\gamma_L + \varepsilon_1$,

$$\Psi(\tilde{y}_0; b; \gamma_R) < 0.$$

Do item **b)** do Lema 3.2.1 segue, para $-\gamma_L < \gamma_R < -\gamma_L + \varepsilon_1$, $\delta_\infty > 0$. Pela Observação 3.2.3, existe $\tilde{y}_1 > \tilde{y}_0$ tal que $\Psi(\tilde{y}_1; b; \gamma_R) > 0$. Desta forma, pelo Teorema do Valor Intermediário e pela Observação 3.2.1 existe $\bar{y} \in (\tilde{y}_0, \tilde{y}_1)$ tal que $\Psi(\bar{y}; b; \gamma_R) = 0$ e \bar{y} está associado a um ciclo limite de costura instável do sistema.

Portanto, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que, para $-\gamma_L < \gamma_R < -\gamma_L + \varepsilon_1$, o sistema tem pelo menos um ciclo limite de costura instável.

Admitimos $b > b_\infty$. Então, $b + 2x_R(-\gamma_L) > 2x_L\gamma_L$. De maneira análoga a análise desenvolvida para $b < b_\infty$, existe $\tilde{y}_2 > \hat{y}$ suficientemente grande tal que $\Psi(\tilde{y}_2; b; -\gamma_L) > 0$. Pela continuidade da aplicação Ψ com respeito ao parâmetro γ_R , existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que, para $-\gamma_L - \varepsilon_2 < \gamma_R < -\gamma_L$,

$$\Psi(\tilde{y}_2; b; \gamma_R) > 0.$$

Do item **b)** do Lema 3.2.1 segue, para $-\gamma_L - \varepsilon_2 < \gamma_R < -\gamma_L$,

$$\delta_\infty < 0.$$

Pela Observação 3.2.3 existe $\tilde{y}_3 > \tilde{y}_2$ tal que $\Psi(\tilde{y}_3; b; \gamma_R) < 0$. Logo, pelo Teorema do Valor Intermediário e pela Observação 3.2.1 existe $\bar{y} \in (\tilde{y}_2, \tilde{y}_3)$ tal que $\Psi(\bar{y}; b; \gamma_R) = 0$ e \bar{y} está associado a um ciclo limite de costura estável do sistema.

Portanto, existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que, para $-\gamma_L - \varepsilon_2 < \gamma_R < -\gamma_L$, o sistema tem pelo menos um ciclo limite de costura estável.

■

O teorema a seguir nos apresenta algumas situações interessantes quando, sobre certas hipóteses, o parâmetro b do sistema (3.2) varia em determinadas vizinhanças do valor $b_{CC}(\gamma_R)$ dado no Teorema 3.2.1.

Teorema 3.2.7. *Seja $x_L < 0$, $x_R < 0$, $\gamma_L < 0$, $\gamma_R > 0$ e $b > 0$ no sistema (3.2). Então,*

- a) *se $\gamma_L + \gamma_R < 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para $b_{CC}(\gamma_R) - \varepsilon < b < b_{CC}(\gamma_R)$, o sistema tem pelo menos dois ciclos limite de costura com estabilidades opostas;*
- b) *se $\hat{y} < b_\infty$ e $\gamma_R + \gamma_L = 0$, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para $b_{CC}(\gamma_R) \leq b < b_{CC}(\gamma_R) + \varepsilon_0$, o sistema tem pelos menos um ciclo limite de costura estável. Além disso, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que, para $b_{CC}(\gamma_R) - \varepsilon_1 < b < b_{CC}(\gamma_R)$, o sistema tem pelo menos dois ciclos limite de costura com estabilidades opostas;*
- c) *se $\hat{y} < b_\infty$, existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que, para $-\gamma_L < \gamma_R < -\gamma_L + \varepsilon_2$ e $b = b_{CC}(\gamma_R)$, o sistema possui pelo menos dois ciclos limite costura com estabilidades opostas. Se $\hat{y} < b_\infty$ e $-\gamma_L < \gamma_R < -\gamma_L + \varepsilon_2$, existe $\varepsilon_3(\gamma_R) > 0$ tal que, para $b_{CC}(\gamma_R) - \varepsilon_3(\gamma_R) < b < b_{CC}(\gamma_R)$, o sistema tem pelo menos três ciclos limite de costura, sendo o ciclo intermediário estável e os outros dois instáveis.*

Demonstração

- a) Supomos $\gamma_L + \gamma_R < 0$. Adotamos o valor $b_{CC}(\gamma_R)$ na variável b do sistema (3.2) e então, pela demonstração do item **a)** do Teorema 3.2.6, o sistema possui um ciclo limite de costura estável associado a um valor \bar{y} , além da existência do ciclo crítico de costura. Logo, pela Observação 3.2.2, existe $\bar{\varepsilon}_0 > 0$ tal que, para $b_{CC}(\gamma_R) - \bar{\varepsilon}_0 < b < b_{CC}(\gamma_R)$, o sistema tem um ciclo limite de costura estável. Pelo Teorema 3.2.1, existe $\bar{\varepsilon}_1 > 0$ tal que, para $b_{CC}(\gamma_R) - \bar{\varepsilon}_1 < b < b_{CC}(\gamma_R)$, o sistema tem um ciclo limite de costura instável. Tomamos $\varepsilon = \min\{\bar{\varepsilon}_0, \bar{\varepsilon}_1\}$ e então, para $b_{CC}(\gamma_R) - \varepsilon < b < b_{CC}(\gamma_R)$, o sistema tem um ciclo limite de costura estável e um ciclo limite de costura instável.

Portanto, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para $b_{CC}(\gamma_R) - \varepsilon < b < b_{CC}(\gamma_R)$, o sistema possui pelo menos dois ciclos limite de costura com estabilidades opostas.

- b) Assumimos $\gamma_R + \gamma_L = 0$ e $\hat{y} < b_\infty$. Logo, $b_{CC}(\gamma_R) + 2x_R\gamma_R < \hat{y} + 2x_R\gamma_R < 2x_L\gamma_L$. Adotamos o valor $b_{CC}(\gamma_R)$ na variável b do sistema (3.2). Pela demonstração do Teorema 3.2.1 e por (3.20), existe $\delta > 0$ tal que $\Psi(\hat{y} + \delta; b_{CC}(\gamma_R)) > 0$. Pelo item **d)** do Teorema

3.1.1 e pelo item **c)** do Teorema 3.1.2, segue que as assíntotas A_L e $A_{R^{-1}}$ são paralelas e, para todo $y \in \mathbb{R}$, $A_{R^{-1}}(y) < A_L(y)$. Do item **d)** do Teorema 3.1.1 temos, para todo $y_0 \geq \hat{y}$,

$$\text{sign}[A_L(y_0) - P_L(y_0)] < 0.$$

Desta maneira, pela definição de assíntota oblíqua, existe $\tilde{y}_0 > \hat{y} + \delta$ tal que

$$P_R^{-1}(\tilde{y}_0; b_{CC}(\gamma_R)) - A_{R^{-1}}(\tilde{y}_0) < A_L(0) - A_{R^{-1}}(0) = A_L(\tilde{y}_0) - A_{R^{-1}}(\tilde{y}_0) < P_L(\tilde{y}_0) - A_{R^{-1}}(\tilde{y}_0).$$

Então,

$$P_R^{-1}(\tilde{y}_0; b_{CC}(\gamma_R)) < P_L(\tilde{y}_0)$$

e, conseqüentemente, $\Psi(\tilde{y}_0; b_{CC}(\gamma_R)) < 0$. Logo, pelo Teorema do Valor Intermediário e pela Observação 3.2.1, segue que existe $\bar{y} \in (\hat{y} + \delta, \tilde{y}_0)$ tal que $\Psi(\bar{y}; b_{CC}(\gamma_R)) = 0$ e \bar{y} está associado a um ciclo limite de costura estável do sistema. Ressaltamos que para $b = b_{CC}(\gamma_R)$ segue, do Teorema 3.2.1, que o sistema também possui um ciclo crítico de costura instável. Da Observação 3.2.2 segue que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para $|b - b_{CC}(\gamma_R)| < \varepsilon_0$, o sistema tem um ciclo limite de costura estável.

Pelo Teorema 3.2.1, existe $\tilde{\varepsilon}_0 > 0$ tal que, para $b_{CC}(\gamma_R) - \tilde{\varepsilon}_0 < b < b_{CC}(\gamma_R)$, o sistema tem um ciclo limite de costura instável. Tomamos $\varepsilon_1 = \min\{\varepsilon_0, \tilde{\varepsilon}_0\}$. Então, para $b_{CC}(\gamma_R) - \varepsilon_1 < b < b_{CC}(\gamma_R)$, o sistema tem dois ciclos limite de costura, sendo um estável e o outro instável.

Portanto, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para $b_{CC}(\gamma_R) \leq b < b_{CC}(\gamma_R) + \varepsilon_0$ o sistema possui pelo menos um ciclo limite de costura estável e existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que para $b_{CC}(\gamma_R) - \varepsilon_1 < b < b_{CC}(\gamma_R)$ o sistema possui pelo menos dois ciclos limite de costura com estabilidades opostas. Veja a Figura 3.13.

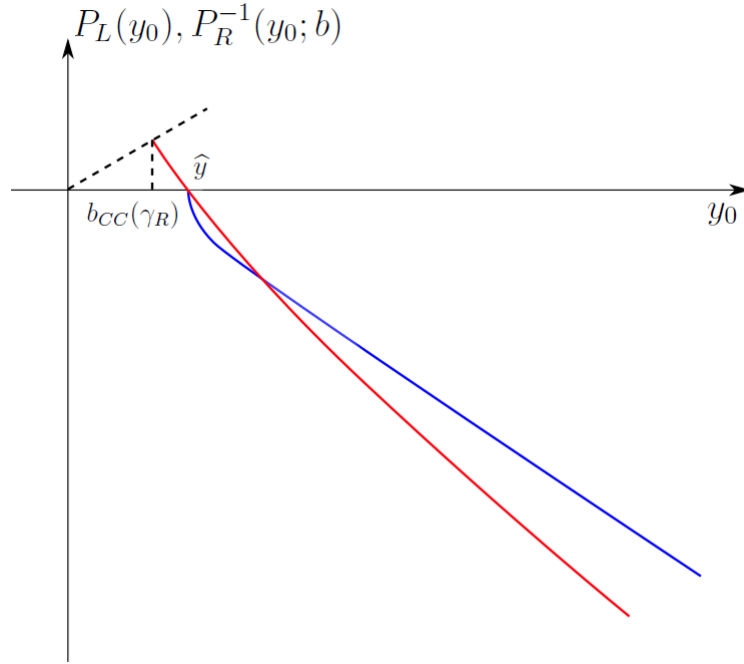


Figura 3.13: Esboço dos gráficos das aplicações P_L (gráfico em azul) e P_R^{-1} (gráfico em vermelho) para $\hat{y} < b_\infty$, $0 < -\gamma_L = \gamma_R$ e $b = b_{CC}(\gamma_R)$, mostrando a existência do ciclo crítico de costura e de 1 ciclo limite de costura.

- c) Supomos $\hat{y} < b_\infty$. Adotamos os valores $-\gamma_L$ e $b_{CC}(-\gamma_L)$ nas variáveis γ_R e b do sistema (3.2), respectivamente. Logo, pelo item anterior, o sistema tem um ciclo limite de costura estável. Pela Observação 3.2.2, existem constantes $\tilde{\varepsilon}_1 > 0$ e $M_0 > 0$ tais que, para $-\gamma_L < \gamma_R < -\gamma_L + \tilde{\varepsilon}_1$ e $|b - b_{CC}(-\gamma_L)| < M_0$, o sistema tem um ciclo limite de costura estável. Pelo Teorema 3.2.1, a aplicação b_{CC} é contínua e, conseqüentemente, existe $\tilde{\varepsilon}_2 > 0$ tal que, para $-\gamma_L < \gamma_R < -\gamma_L + \tilde{\varepsilon}_2$, temos $|b_{CC}(\gamma_R) - b_{CC}(-\gamma_L)| < M_0$. Tomamos $\varepsilon_2 = \min\{\tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_2\}$. Então, para $-\gamma_L < \gamma_R < -\gamma_L + \varepsilon_2$ e $b = b_{CC}(\gamma_R)$, o sistema tem um ciclo limite de costura estável, isto é, existe $\bar{y}_1 > \hat{y}$ tal que $\Psi(\bar{y}_1; b_{CC}(\gamma_R); \gamma_R) = 0$ e Ψ é decrescente em uma vizinhança de \bar{y}_1 . Além disso, do item **d)** do Teorema 3.1.3 e da Observação 3.1.1, obtemos que existe $\bar{y}_2 > \bar{y}_1$ tal que $\Psi(\bar{y}_2; b_{CC}(\gamma_R); \gamma_R) = 0$ e Ψ é crescente em uma vizinhança de \bar{y}_2 , isto é, o sistema tem um ciclo limite de costura instável. Notamos que, para $b = b_{CC}(\gamma_R)$, o sistema também tem o ciclo crítico de costura. Portanto, existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que, para $-\gamma_L < \gamma_R < -\gamma_L + \varepsilon_2$ e $b = b_{CC}(\gamma_R)$, o sistema possui pelo menos dois ciclos limite de costura com estabilidades opostas. Veja a Figura 3.14.

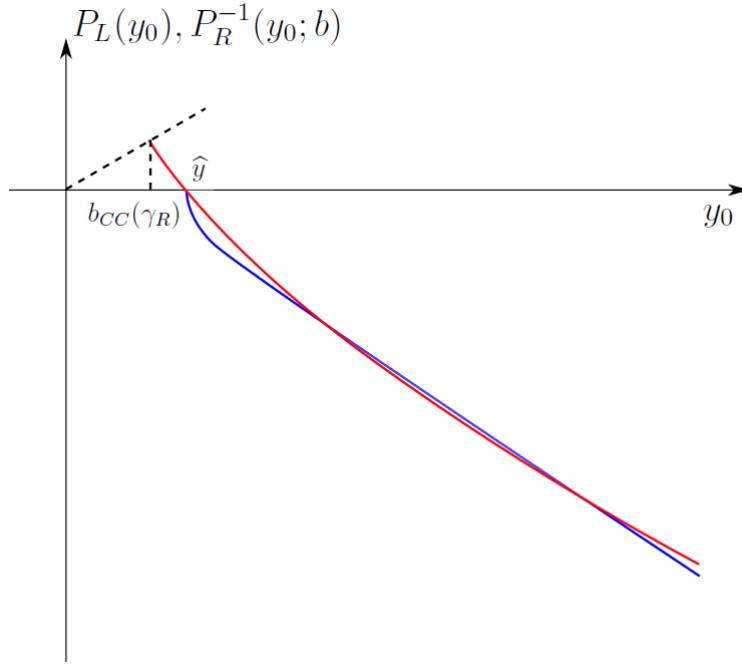


Figura 3.14: Esboço dos gráficos das aplicações P_L (gráfico em azul) e P_R^{-1} (gráfico em vermelho) para $\hat{y} < b_\infty$, $0 < -\gamma_L < \gamma_R < -\gamma_L + \varepsilon_2$ e $b = b_{CC}(\gamma_R)$, mostrando a existência do ciclo crítico de costura e de 2 ciclos limite de costura.

Se $\hat{y} < b_\infty$ e $-\gamma_L < \gamma_R < -\gamma_L + \varepsilon_2$ segue, da análise anterior e da Observação 3.2.2, que os ciclos limite de costura obtidos anteriormente para $b = b_{CC}(\gamma_R)$ persistem (respeitando a mesma ordem anterior) diante de uma perturbação no parâmetro b . Logo, existe $\varepsilon_1(\gamma_R) > 0$ suficientemente pequeno de tal forma que, para $b_{CC}(\gamma_R) - \varepsilon_1(\gamma_R) < b < b_{CC}(\gamma_R)$, o sistema tem dois ciclos limite de costura com estabilidades opostas, sendo o ciclo limite de costura de menor amplitude estável. Além disso, pela demonstração do Teorema 3.2.1, existe $\varepsilon(\gamma_R) > 0$ tal que, para $b_{CC}(\gamma_R) - \varepsilon(\gamma_R) < b < b_{CC}(\gamma_R)$, o sistema tem um ciclo limite de costura instável associado a um valor $\bar{y}_3 > \hat{y}$ suficientemente próximo a \hat{y} . Tomamos $\varepsilon_3(\gamma_R) = \min\{\varepsilon(\gamma_R), \varepsilon_1(\gamma_R)\}$. Logo, para $b_{CC}(\gamma_R) - \varepsilon_3(\gamma_R) < b < b_{CC}(\gamma_R)$, o sistema tem pelo menos três ciclos limite de costura, sendo o primeiro ciclo instável, o segundo estável e o terceiro instável.

Portanto, existe $\varepsilon_3(\gamma_R) > 0$ suficientemente pequeno de tal forma que, para $b_{CC}(\gamma_R) - \varepsilon_3(\gamma_R) < b < b_{CC}(\gamma_R)$, o sistema tem pelo menos três ciclos limite de costura, sendo o ciclo intermediário estável e os outros dois instáveis. Veja a Figura 3.15. ■

Diante de toda a análise desenvolvida nesta seção, obtemos do Teorema 3.2.7 um argumento analítico que mostra a existência de, pelo menos, três ciclos limite de costura em um sistema

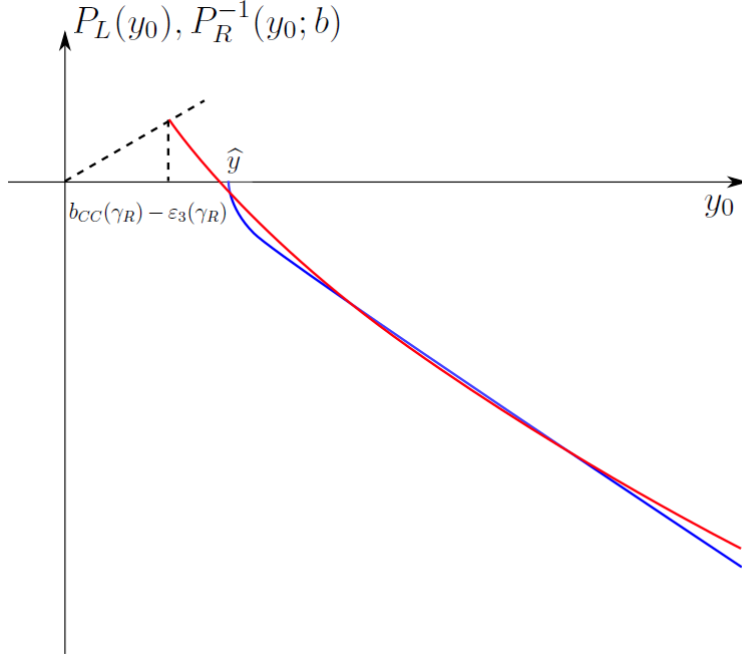


Figura 3.15: Esboço dos gráficos das aplicações P_L (gráfico em azul) e P_R^{-1} (gráfico em vermelho) para $\hat{y} < b_\infty$, $0 < -\gamma_L < \gamma_R < -\gamma_L + \varepsilon_2$ e $b_{CC}(\gamma_R) - \varepsilon_3(\gamma_R) < b < b_{CC}(\gamma_R)$, mostrando a existência de 3 ciclos limite de costura.

linear planar de Filippov descontínuo. Este fato apareceu primeiramente em um exemplo específico descrito na referência [6] e, em seguida, verificado com dados computacionais, como descrito na referência [8].

No que segue, apresentamos um caso particular desenvolvido na referência [5], sem especificar os procedimentos usados. Consideramos o sistema (3.2). Tomamos $x_L = -1$ e impomos, diante do estudo desenvolvido na Seção 3.1, que uma trajetória local partindo do ponto $(0, \hat{y})$ e seguindo para Σ^- demora $t_L = \frac{3\pi}{2}$ para encontrar a origem. Desta forma, obtemos $\gamma_L \approx -0,27441$ e $\hat{y} \approx 3,91858$. Fixamos $x_R = -7$ e, conseqüentemente, estamos nas condições do item **b)** do Teorema 3.2.7, uma vez que

$$b_\infty = 2(x_L + x_R)\gamma_L \approx 4,39057 > \hat{y}.$$

Na Figura 3.16 temos uma representação parcial do diagrama de bifurcação no plano (γ_R, b) , onde as curvas b_{SN} e b_{SNI} (em azul) são curvas onde ocorre, pela Teoria de Bifurcações, uma Bifurcação do tipo Sela-Nó para ciclos limite de costura. A curva b_{SN} , para $\gamma_R \leq 0$, é dada no item **c)** do Teorema 3.2.4, juntamente com o item **c)** do Lema 3.2.1 e o Teorema da Função Implícita. A curva b_{CC} é dada no Teorema 3.2.1.

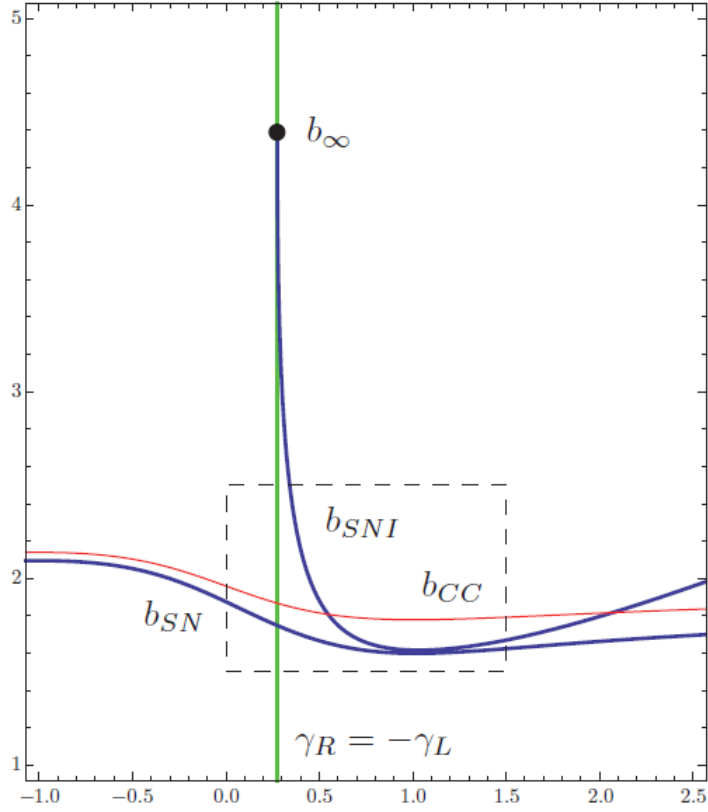


Figura 3.16: Representação parcial do diagrama de bifurcação no plano (γ_R, b) para $x_L = -1$, $x_R = -7$ e $\gamma_L \approx -0,27441$.

Quando $b = 0$ obtemos, dos itens **a)**, **c)** e **d)** do Teorema 3.2.3, que para $\gamma_R + \gamma_L \leq 0$ o sistema não tem trajetórias periódicas de costura e para $\gamma_R + \gamma_L > 0$ o sistema possui uma única trajetória periódica de costura e tal trajetória local é um ciclo limite de costura instável.

Assumimos $b > 0$ e $\gamma_R \leq 0$. Do item **c)** do Teorema 3.2.4 segue que, para $b \geq b_{CC}(\gamma_R)$, o sistema tem uma única trajetória periódica de costura e tal trajetória local é um ciclo limite de costura estável; para $b_{SN}(\gamma_R) < b < b_{CC}(\gamma_R)$ o sistema possui exatamente duas trajetórias periódicas de costura e tais trajetórias locais são ciclos limite de costura com estabilidades opostas; para $b = b_{SN}(\gamma_R)$ o sistema tem uma única trajetória periódica de costura e tal trajetória local é um ciclo limite de costura semi-estável e para $0 < b < b_{SN}(\gamma_R)$ o sistema não tem trajetórias periódicas de costura. Ressaltamos que para $b = b_{CC}(\gamma_R)$ segue, do Teorema 3.2.1, que o sistema possui um ciclo crítico de costura instável.

Admitimos $b > 0$ e $0 < \gamma_R < -\gamma_L$ no sistema. Diante da Figura 3.17 segue que, para $b \geq b_{CC}(\gamma_R)$, o sistema possui uma única trajetória periódica de costura e tal trajetória local é um ciclo limite de costura estável; para $b_{SN}(\gamma_R) < b < b_{CC}(\gamma_R)$ o sistema possui somente duas trajetórias periódicas de costura e tais trajetórias locais são ciclos limite de costura com estabilidades opostas (o ciclo de menor amplitude é instável) e, para $0 < b < b_{SN}(\gamma_R)$, o sistema

não tem trajetórias periódicas de costura.

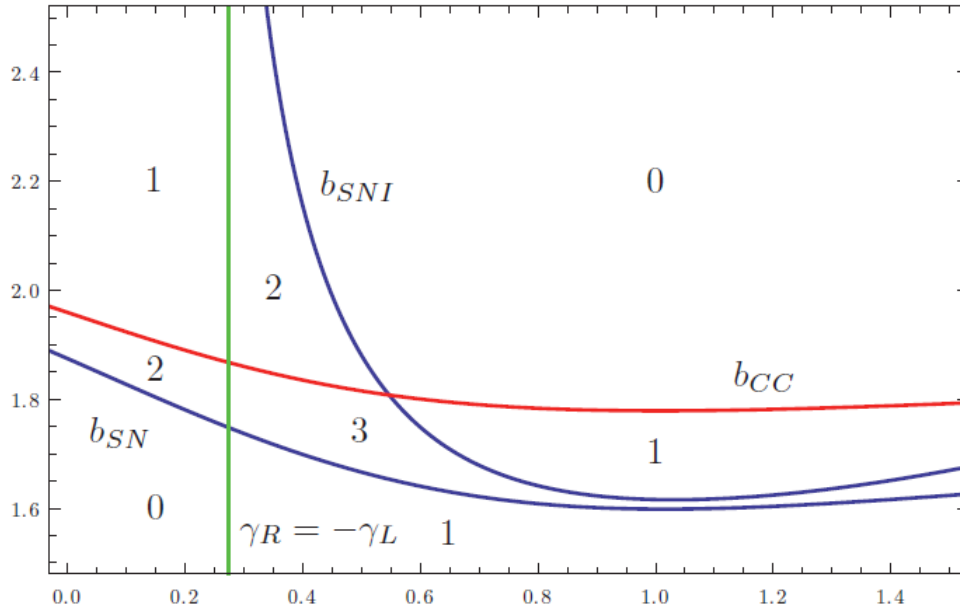


Figura 3.17: Retângulo tracejado ampliado da Figura 3.16. Os números indicam a quantidade de trajetórias periódicas de costura do sistema em cada região.

Supomos $b > 0$ e $0 < -\gamma_L < \gamma_R$ no sistema. Diante das Figuras 3.16 e 3.17 observamos que a curva b_{SN} persiste para $\gamma_R > -\gamma_L$. Além disso, surge uma curva b_{SNI} onde ocorre, também, uma Bifurcação do tipo Sela-Nó para ciclos limite de costura. As regiões com o número um indicam que o sistema tem uma única trajetória periódica de costura quando (γ_R, b) percorre estas regiões e tal trajetória local é um ciclo limite de costura instável; a região com o número dois mostra que o sistema tem somente duas trajetórias periódicas de costura quando (γ_R, b) percorre esta região e tais trajetórias locais são ciclos limite de costura com estabilidades opostas (o ciclo de menor amplitude é estável), e a região com o número três aponta que o sistema tem exatamente três trajetórias periódicas de costura quando (γ_R, b) percorre esta região, sendo a trajetória local intermediária um ciclo limite de costura estável e as outras ciclos limite de costura instáveis.

Assumimos $b \geq 0$ e $\gamma_R = -\gamma_L$. Para $0 \leq b < b_{SN}(\gamma_R)$ o sistema não tem trajetórias periódicas de costura; para $b_{SN}(\gamma_R) \leq b < b_{CC}(\gamma_R)$ o sistema tem exatamente duas trajetórias periódicas de costura e tais trajetórias locais são ciclos limite de costura com estabilidades opostas (o ciclo de menor amplitude é instável) e, para $b > b_{CC}(\gamma_R)$, o sistema tem uma única trajetória periódica de costura e esta trajetória local é um ciclo limite de costura estável

Notamos que o número de ciclos limite de costura que o sistema possui para cada caso citado acima, não está em desacordo com os resultados apresentamos neste trabalho.

Observamos que ocorre uma Bifurcação do tipo Hopf no Infinito no plano (γ_R, b) quando

$\gamma_R + \gamma_L = 0$. Do item e) do Teorema 3.2.6 segue que, para $b < b_\infty$, ocorre uma Bifurcação do tipo Hopf no Infinito subcrítica, que é caracterizada pelo surgimento de um ciclo limite de costura instável para γ_R suficientemente próximo de $-\gamma_L$ com $\gamma_R > -\gamma_L$ e, para $b > b_\infty$, ocorre uma Bifurcação do tipo Hopf no Infinito supercrítica, que é caracterizada pelo surgimento de um ciclo limite de costura estável para γ_R suficientemente próximo de $-\gamma_L$ com $\gamma_R < -\gamma_L$.

3.3 Conclusões

Concluimos, com este trabalho, que o estudo de todas as dinâmicas possíveis em sistemas lineares planares de Filippov descontínuos não é uma tarefa trivial, devido a existência de um grande número de parâmetros envolvidos. Alguns avanços são feitos devido a existência de formas normais que reduzem o número de parâmetros, no entanto o estudo ainda é um desafio. Restringimos o nosso estudo aos sistemas lineares planares de Filippov descontínuos do tipo foco-foco e, sobre certas condições, provamos que existem sistemas nessa família que possuem três ciclos limite de costura. Contudo, é um problema constante determinar se o número máximo de ciclos limite de costura que um sistema linear planar de Filippov descontínuo pode possuir é três.

Capítulo 4

Apêndice

Esta dissertação é continuação de um trabalho de iniciação científica desenvolvido por mim baseado na referência [4], onde é imposto sobre o sistema (3.2) a condição $a_R \leq 0 \leq a_L$. Pelo item **a)** do Teorema 2.1.2 segue que a condição $a_R \leq 0 \leq a_L$ é equivalente a dizer que o ponto de equilíbrio de cada campo H^+ e H^- é um ponto de equilíbrio virtual. Além disso, pelos itens **a)** e **b)** do Teorema 2.1.1 segue que a origem e o ponto $(0, b)$ são pontos de tangência invisíveis dos campos H^- e H^+ , respectivamente.

As aplicações P_L , P_R , P e Ψ são analisadas de forma semelhante ao que desenvolvemos nas Seções 3.1 e 3.2, porém elas possuem algumas propriedades diferentes das que possuímos. É apresentado em [4] uma série de resultados que mostram que o sistema (3.2) tem pelo menos dois ciclos limite de costura e, em seguida, dois diagramas globais de bifurcação no plano (γ_R, b) são expostos, mostrando a existência de uma curva b_{SN} onde ocorre uma Bifurcação do tipo Sela-Nó para ciclos limite de costura, a existência de uma Bifurcação do tipo Pseudo-Hopf sobre a reta $b = 0$ (veja a referência [7]) e a existência de uma Bifurcação do tipo Hopf no Infinito quando $\gamma_R + \gamma_L = 0$. Além disso, a Bifurcação do tipo Hopf no Infinito é subcrítica se $b < b_\infty$ e supercrítica se $b > b_\infty$. Notamos que o caráter supercrítico ou subcrítico da Bifurcação do tipo Hopf no Infinito que ocorre quando $\gamma_R + \gamma_L = 0$, tanto neste trabalho quanto no desenvolvido em [4], é determinado pelo valor b_∞ (veja o item **e)** do Teorema 3.2.6). No que segue, apresentamos os diagramas de bifurcação citados acima.

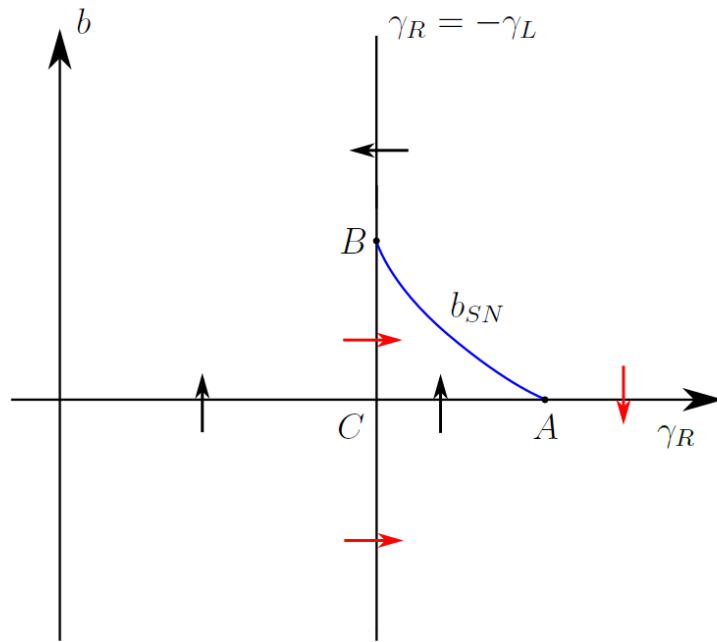


Figura 4.1: Diagrama de bifurcação no plano (γ_R, b) para $\gamma_L < 0$ e $-a_L < a_R < 0 < a_L$, onde $A = \left(\frac{a_R \gamma_L}{a_L}, 0\right)$, $B = (-\gamma_L, b_\infty)$ e $C = (-\gamma_L, 0)$. A direção das setas simbolizam o nascimento de ciclos limite de costura estáveis (setas pretas) e de ciclos limite de costura instáveis (setas vermelhas).

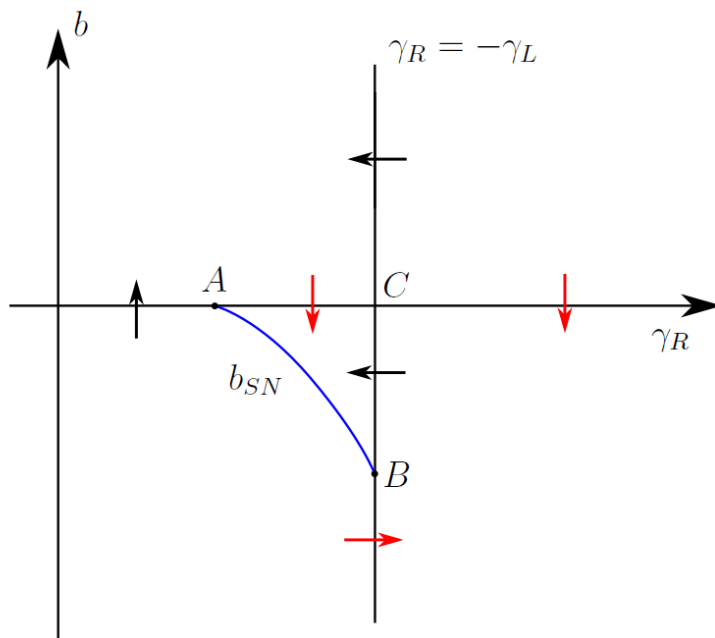


Figura 4.2: Diagrama de bifurcação no plano (γ_R, b) para $\gamma_L < 0$ e $a_R < 0 < a_L < -a_R$, onde $A = \left(\frac{a_R \gamma_L}{a_L}, 0\right)$, $B = (-\gamma_L, b_\infty)$ e $C = (-\gamma_L, 0)$. A direção das setas simbolizam o nascimento de ciclos limite de costura estáveis (setas pretas) e de ciclos limite de costura instáveis (setas vermelhas).

Referências Bibliográficas

- [1] ANDRONOV, A.; VITT, A.; KHAIKIN, S. E. *Theory of Oscillations*, Pergamon Press, Oxford, Chapter 8, 443–582, 1965.
- [2] DI BERNARDO, M.; BUDDI, C.J.; CHAMPNEYS, A.R.; KOWALCZYK, P. *Piecewise-smooth Dynamical Systems: Theory and Applications*, Springer, 2008.
- [3] FILIPPOV, A. F. *Differential equation with discontinuous right-hand sides*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1988.
- [4] FREIRE, E.; PONCE, E.; TORRES, F. *Canonical discontinuous planar piecewise linear systems*, SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 11(1), 181-211, 2012.
- [5] FREIRE, E.; PONCE, E.; TORRES, F. *The discontinuous matching of two planar linear foci can have three nested crossing limit cycles*, Publ. Mat. 58, suppl., 221-253, 2014.
- [6] HUAN, S.-M.; YANG, X.-S. *On the number of limit cycles in general planar piecewise linear systems*, Discrete Contin. Dyn. Syst. 32(6), 2147-2164, 2012.
- [7] KUZNETSOV, YU. A.; RINALDI, S.; GRAGNANI, A. *One-parameter bifurcations in planar Filippov systems*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. 13(8), 2157-2188, 2003.
- [8] LLIBRE, J.; PONCE, E. *Three nested limit cycles in discontinuous piecewise linear differential systems with two zones*, Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. B Appl. Algorithms 19(3), 325-335, 2012.
- [9] SOTOMAYOR, J. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Edition LTC, 1979.