

## RESSALVA

Atendendo solicitação da autora, o texto completo desta dissertação será disponibilizado somente a partir de 02/02/2019.

**unesp** 

---

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

# PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO EM FÍSICA APLICADA

---

**ANA LAURA BOSCOLO**

***O PÊNDULO DUPLO CAÓTICO: RESULTADOS EXPERIMENTAIS  
E SIMULAÇÕES NUMÉRICAS***

---

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

**RIO CLARO**

São Paulo  
2018

Universidade Estadual Paulista

“Júlio de Mesquita Filho”

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Campus de Rio Claro

**Ana Laura Boscolo**

*O pêndulo duplo caótico: Resultados experimentais  
e simulações numéricas*

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, campus Rio Claro, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Antonio Barreiro

Rio Claro - SP

2018

517.39 Boscolo, Ana Laura  
B742p O pêndulo duplo caótico : resultados experimentais e  
simulações numéricas / Ana Laura Boscolo. - Rio Claro, 2018  
64 f. : il., figs., gráfs., tabs., fots.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista,  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Orientador: Luiz Antonio Barreiro

1. Sistemas dinâmicos diferenciais. 2. Pêndulo duplo. 3.  
Caos. 4. Dinâmica não-linear. I. Título.

**Ana Laura Boscolo**

O pêndulo duplo: Resultados experimentais e  
simulações numéricas

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, câmpus Rio Claro, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Luiz Antonio Barreiro (DF - UNESP - RC)

Prof. Dr. Edson Denis Leonel (DF - UNESP - RC)

Prof. Dr. Emanuel Fernandes de Lima (IFSC-UFSCAR-SC)

Conceito: Aprovada

Rio Claro, SP 02 de fevereiro de 2018.

Dedico este trabalho aos meus pais e a todos que me apoiaram em minha trajetória acadêmica.

# Agradecimentos

Agradeço a minha família e irmãs por todos estes anos me apoiarem e por me acompanharem até aqui. Obrigada meus pais por me incentivarem e investirem em mim para que eu possa estar escrevendo esta dissertação hoje, serei eternamente grata por tudo que fizeram e ainda fazem por mim, dedico especialmente esta dissertação a vocês.

Ao meu orientador Prof. Dr. Luiz Antonio Barreiro por toda paciência, apoio e conhecimentos fornecidos ao longo de todo este trabalho. Foi um grande aprendizado e muito gratificante participar deste trabalho e uma grande experiência e conquista do nosso grupo de pesquisa, fico muito feliz em ter feito parte desta equipe. Agradeço ao meu colega de grupo de pesquisa Rodrigo por toda a ajuda e paciência que contribuíram muito para o trabalho de ambos.

Ao Prof. Dr. Edson Denis Leonel, Prof. Dr. Emanuel Fernandes de Lima e ao Prof. Dr. André Livorati pelas contribuições dadas para a melhora do trabalho.

Ao meu namorado Danilo, pela paciência, carinho e apoio durante meu trabalho e durante toda minha graduação e mestrado.

Aos meus amigos de mestrado, graduação e de tantos anos de vida, em especial Guilherme Caes, Elaine Scarpa, Carol Rizzo, Carol Luíz, Rejane Carvalho, Mariana Picoli, Júlia Tagliaferro, Isadora Schutzer, Fabiana Rando, Cássio Seron, por todo o apoio que me deram e pela paciência.

A Capes pelo financiamento de minha pesquisa durante esses anos.

E agradeço a Deus pois sem ele nada disso seria possível.

# Resumo

Esta dissertação teve por objetivo abordar os principais assuntos referentes a dinâmica não-linear de um pêndulo duplo, como estudo das trajetórias no espaço de fase obtidas para condições iniciais periódicas (modos normais do pêndulo duplo) e para condições iniciais que impliquem em trajetórias caóticas, estudo dos expoentes de Lyapunov e seções de Poincaré do sistema. Para esta análise utilizou-se de simulações numéricas realizadas no software *Mathematica* bem como estudo a partir de um pêndulo duplo experimental filmado a partir de imagens estroboscópicas digitais, as quais foram devidamente tratadas no software *Tracker* e posteriormente analisadas no software *Mathematica*. Efetuou-se o estudo da ação de uma força externa aplicada por um motor no pêndulo duplo experimental a partir da qual foi possível obter-se uma aproximação do experimento real sujeito a forças dissipativas com a dinâmica efetuada por um pêndulo duplo ideal, sendo este um dos fatores que justifica-se a utilização das equações que regem o pêndulo duplo ideal para o problema que estava sendo estudado (pêndulo real), devido a energia ser mantida consideravelmente constante durante os testes realizados.

**Palavras Chave:** Pêndulo duplo, Caos, Dinâmica Não-Linear.



# Abstract

This study aims to address the main issues regarding the nonlinear dynamics of the dissipative and forced double pendulum as well as the dissipative pendulum with ideal pendulum approximation at short time intervals (0 to 10s of filming). We investigate some properties of the phase space under different initial conditions, of the Lyapunov exponents indicating Chaos of the system and of the Poincaré sections allowing us to obtain detailed information about the complex dynamics that occurs in the quadrimensional phase space of the double pendulum. We observed that for short time the dynamics of the double pendulum can be approximated by the ideal pendulum since the loss of energy was minimal moreover the introduction of an external force in the system compensated for the loss of energy by the action of the dissipative forces making it possible to a more complete analyzes of the dynamics as the study of the section of Poincaré in the system could be performed. It was noticed that the theoretical results widely studied are similar to the experimental results therefore emphasizing the importance of this methodology in the study of chaotic systems.

**Key Words:** Double Pendulum, Chaos, Nonlinear Dynamics.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>As equações de movimento para o pêndulo duplo ideal</b>	<b>3</b>
2.1	As equações de movimento para o pêndulo duplo ideal calculadas pelo formalismo Newtoniano . . . . .	3
2.2	As equações de movimento para o pêndulo duplo ideal calculadas pelo formalismo Lagrangeano . . . . .	5
2.3	As equações de movimento para o pêndulo duplo ideal calculadas pelo formalismo Hamiltoniano . . . . .	8
<b>3</b>	<b>As equações de movimento para o pêndulo duplo dissipativo e forçado</b>	<b>11</b>
3.1	Equações de movimento para a $m_1$ na direção angular e radial . . . . .	13
3.2	Equações de movimento para a $m_2$ na direção angular e radial . . . . .	14
<b>4</b>	<b>O pêndulo duplo caótico: Uma revisão sobre os principais conceitos</b>	<b>16</b>
4.1	Os espaços de fases . . . . .	16
4.1.1	Os modos normais . . . . .	18
4.1.2	Pontos de Equilíbrio: Obtenção e Classificação . . . . .	19
4.2	Atratores . . . . .	21
4.3	A seção de Poincaré . . . . .	22
4.4	Os expoentes de Lyapunov . . . . .	23
<b>5</b>	<b>A construção do pêndulo duplo e o software de aquisição de dados experimentais Tracker</b>	<b>25</b>
5.1	Pêndulo duplo com motor acoplado ao eixo de suspensão . . . . .	26
5.2	<i>Tracker</i> - O software de tratamento de dados . . . . .	28
<b>6</b>	<b>Resultados simulados e experimentais</b>	<b>30</b>
6.1	A conservação da energia para pêndulo duplo livre de forças externas a tempos curtos e justificativa para introdução do motor no sistema . . . . .	30
6.2	Os modos normais em fase e fora de fase do Pêndulo Duplo . . . . .	32
6.2.1	Modos normais obtidos por simulação computacional e experimentalmente para o pêndulo duplo livre de forças externas . . . . .	32

6.2.2	Análise dos resultados experimentais e simulados obtidos para o modo normal em fase e fora de fase	36
6.2.3	Órbita periódica obtida com o uso do motor	36
6.3	Uma novo modo gerado pela introdução do motor no sistema	39
6.3.1	Conjunto de dados experimentais com evidência de ciclo limite	39
6.4	Espaços de fase para o pêndulo duplo	40
6.4.1	Espaços de fase para o pêndulo duplo livre de forças externas	40
6.4.2	Espaços de fase para o pêndulo duplo dissipativo e forçado	41
6.5	Seções de Poincaré	43
6.5.1	Pêndulo Duplo com massas e comprimentos diferentes	43
6.5.2	Seções de Poincaré Pêndulo Duplo com massas e comprimentos iguais	49
6.5.3	Comparativo entre Pêndulo Duplo Ideal com massas diferentes e comprimentos iguais e Pêndulo Duplo com massas iguais e comprimentos diferentes	52
6.6	Expoentes de Lyapunov	54
6.6.1	Conjunto de dados experimentais sob a configuração modos normais fora de fase	54
6.6.2	Conjunto de dados experimentais sob configuração braços do motor $90^{\circ}$ graus	55
<b>7</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>56</b>

# Lista de Figuras

2.1 a) Diagrama de forças referente a $m_1$ para o pêndulo duplo ideal. b) Diagrama de forças referente a $m_2$ para o pêndulo duplo ideal. . . . .	3
2.2 Figura representando o pêndulo duplo. . . . .	7
3.1 a) Diagrama de forças do pêndulo duplo referente a $m_1$ . b) Diagrama de forças do pêndulo duplo referente a $m_2$ . . . . .	11
3.2 Gráfico da função <i>Theta de Heaviside</i> . . . . .	12
3.3 Gráfico da função Sigmóide. . . . .	13
4.1 Figura representando a configuração de modo normal em fase do pêndulo duplo. . . . .	18
4.2 Figura representando a configuração de modo normal fora de fase do pêndulo duplo. . . . .	19
4.3 Representação do estado de equilíbrio correspondente ao ponto P1. . . . .	20
4.4 Desenho esquemático de corte no espaço de fases representando a seção de Poincaré formada pelas sucessivas marcações das órbitas no plano transversal. . . . .	22
4.5 Gráfico ilustrando o crescimento exponencial das distâncias conforme a evolução temporal. . . . .	23
5.1 Materiais utilizados na construção do pêndulo duplo. . . . .	25
5.2 Fotografia do pêndulo duplo experimental. . . . .	26
5.3 Ilustração do pêndulo duplo com a placa com os sensores ópticos. . . . .	27
5.4 Representação esquemática do funcionamento do sensor óptico . . . . .	28
5.5 Representação do software <i>Tracker</i> com utilização de ferramentas “eixo” (rosa) e “bastão de calibração” (azul). . . . .	28
6.1 Gráfico da variação da energia mecânica em função do tempo para o pêndulo duplo experimental sem a ação do motor. . . . .	31
6.2 Gráfico da energia mecânica em função do tempo para o pêndulo duplo experimental com a ação do motor. . . . .	31
6.3 Ilustração dos a) Modo normal em fase. b) Modo normal fora de fase. . . . .	32

6.4	Esboço dos a e c) Espaço de configurações e de fase referente a $m_1$ para o modo normal em fase. b e d) Espaço de configurações e fase referente a $m_2$ para o modo normal em fase.	33
6.5	Esboço dos a e c) Espaço de configurações e fase referente a $m_1$ para o modo normal em fase. b e d) Espaço de configurações e fase referente a $m_2$ para o modo normal em fase.	34
6.6	Esboço dos a e c) Espaço de configurações e fases referente a $m_1$ para o modo fora de fase. b e d) Espaço de configurações e fases referente a $m_2$ para o modo normal fora de fase.	35
6.7	Esboço dos a) Espaço de configurações e fases referente a $m_1$ para modo normal em fase. b) Espaço de configurações e fases referente a $m_2$ para modo normal em fase.	35
6.8	Gráfico da a) Evolução temporal dos ângulos teórica. b) Evolução temporal dos ângulos experimental.	36
6.9	Ilustração do normal fora de fase obtido com o motor.	36
6.10	Gráfico do a) Espaço de fases referente a $m_1$ para o modo fora de fase do pêndulo duplo com a ação do motor. b) Espaço de fases referente a $m_2$ para o modo fora de fase do pêndulo duplo com a ação do motor.	37
6.11	Ilustração do modo periódico para o pêndulo duplo obtido com a ação do motor (modo 1).	37
6.12	a) Espaço de fases referente a $m_1$ para novo modo (modo 1) do pêndulo duplo obtido com a ação do motor. b) Espaço de fases referente a $m_2$ para novo modo (modo 1) do pêndulo duplo obtido com a ação do motor.	38
6.13	Ilustração do modo periódico para o pêndulo duplo obtido com a ação do motor (modo 2).	38
6.14	a) Espaço de fases referente a $m_1$ para novo modo (modo 2) do pêndulo duplo obtido com a ação do motor. b) Espaço de fases referente a $m_2$ para novo modo (modo 2) do pêndulo duplo obtido com a ação do motor.	38
6.15	Ilustração do modo periódico obtido para o pêndulo duplo com a ação do motor.	39
6.16	Esboço do a) Espaço de fases projeção ciclo limite para $m_1$ . b) Espaço de fases projeção ciclo limite para $m_2$ .	40
6.17	Ilustração da condição inicial de lançamento com os braços formando ângulo de $90^\circ$ .	40
6.18	Esboço dos a) Espaço de fases para $m_1$ teórico. b) Espaço de fases para $m_1$ experimental.	41
6.19	Esboço dos a) Espaço de fases teórico para $m_2$ . b) Espaço de fases experimental para $m_2$ .	42

6.20 Esboço dos a) Espaço de fases teórico referente a $m_1$ para o sistema sob a ação do motor. b) Espaço de fases experimental referente a $m_1$ para o sistema sob a ação do motor.	42
6.21 Esboços do a) Espaço de fases teórico referente a $m_2$ para o sistema sob a ação do motor. b) Espaço de fases experimental referente a $m_2$ para o sistema sob a ação do motor.	42
6.22 Esboço de a) Seção de Poincaré para $E = 1.0$ J. b) Seção de Poincaré para $E = 5.0$ J.	44
6.23 Esboço de c) Seção de Poincaré para $E = 11.0$ J. d) Seção de Poincaré para $E = 15.0$ J.	44
6.24 Esboço de e) Seção de Poincaré para $E = 17.0$ J. f) Seção de Poincaré para $E = 21.0$ J.	45
6.25 Esboço de a) Seção de Poincaré para $E = 1.0$ J. b) Seção de Poincaré para $E = 5.0$ J.	45
6.26 Esboço de a) Seção de Poincaré para $E = 10.0$ J. b) Seção de Poincaré para $E = 15.0$ J.	46
6.27 Esboço de Seção de Poincaré para $E = 20.0$ J.	46
6.28 Gráfico de Energia (J) x Tempo (s) para o pêndulo duplo dissipativo.	46
6.29 Esboço de a) Seção de Poincaré para $E = 5$ J. b) Seção de Poincaré para $E = 20$ J.	47
6.30 Gráfico de Energia (J) x Tempo (s) para o pêndulo duplo dissipativo e forçado, com o motor regulado para fornecer mais energia do que a que é perdida pela dissipação, fazendo com que a energia total cresça com o tempo.	47
6.31 Esboço de a) Seção de Poincaré para $E = 1.0$ J. b) Seção de Poincaré para $E = 2.0$ J.	48
6.32 Esboço de c) Seção de Poincaré para $E = 4.0$ J. d) Seção de Poincaré para $E = 8.0$ J.	48
6.33 Esboço de a) Seção de Poincaré Experimental do Pêndulo Duplo com energia $1.8$ J ( $\theta_1$ e $p\theta_1$ ) b) Seção de Poincaré Experimental do Pêndulo Duplo com energia $1.8$ J ( $\theta_1$ e $p\theta_2$ ).	49
6.34 Esboço de a) Seção de Poincaré para $E = 4.0$ J. b) Seção de Poincaré para $E = 8.0$ J.	50
6.35 Esboço de c) Seção de Poincaré para $E = 15.0$ J. d) Seção de Poincaré para $E = 17.0$ J.	50
6.36 Esboço de e) Seção de Poincaré para $E = 21.0$ J. f) Seção de Poincaré para $E = 24.0$ J.	51
6.37 Esboço de a) Seção de Poincaré para $E = 4.0$ J. b) Seção de Poincaré para $E = 8.0$ J.	51
6.38 Esboço de Seção de Poincaré para $E = 8.0$ J.	52

6.39 Esboço de a) Seção de Poincaré para $E = 10.0$ J. b) Seção de Poincaré para $E = 10.0$ J. . . . .	53
6.40 Esboço de c) Seção de Poincaré para $E = 15.0$ J. d) Seção de Poincaré para $E = 15.0$ J. . . . .	53
6.41 Esboço de e) Seção de Poincaré para $E = 20.0$ J. f) Seção de Poincaré para $E = 23.0$ J. . . . .	54
6.42 a) Evolução temporal referente a massa $m_1$ . b) Evolução temporal referente a massa $m_2$ . . . . .	54
6.43 a) Evolução temporal referente a massa $m_1$ . b) Evolução temporal referente a massa $m_2$ . . . . .	55

# Capítulo 1

## Introdução

O estudo qualitativo das equações não-lineares, calcado no estudo de conceitos e teorias e também de métodos numéricos, possibilitou identificar características importantes de suas soluções sem resolvê-las, obtendo assim informações sobre sua potencialidade [1]. O estudo de sistemas não-lineares possui grande importância em diferentes setores da ciência e as suas aplicações abrangem diversas áreas como, por exemplo, Engenharia, Medicina, Ecologia, Biologia e Economia e Ciências Mecânicas [2]. Drazin [3], também menciona que sistemas não-lineares podem ser utilizados para descrever diversos fenômenos, como por exemplo, as reações químicas, a regularidade das batidas do coração, transições de fase, circuitos eletrônicos, entre outras coisas.

Sistemas não-lineares possuem sensibilidade às condições iniciais, o que implica que a evolução do sistema pode ser alterada por pequenas perturbações. A estrutura de uma resposta caótica é muito rica e está associada a uma infinidade de órbitas periódicas instáveis, devido a isto, a descrição ou análise de fenômenos naturais através de modelos ou técnicas não-lineares tem sido mais efetiva que os modelos ou técnicas lineares, porém, os problemas não-lineares possuem uma dificuldade inerente, motivo pelo qual diversas áreas do conhecimento optaram por estudar modelos lineares e mais comportados ao longo da história [4].

Segundo Strogatz [5], Newton, em 1600, utilizando-se de suas descobertas em relação as equações diferenciais, leis de movimento, estudou o problema de dois corpos, e muitos matemáticos e físicos tentaram utilizar dos mesmos princípios utilizados por ele para resolver o problema de três corpos (Terra, Sol e Lua). Porém percebeu-se que este problema era muito mais complexo de ser resolvido. Foi então que Poincaré no final de 1800 introduziu um novo ponto de vista baseado no estudo qualitativo do problema, desenvolvendo uma aproximação geométrica para analisar estas questões e sendo o primeiro a vislumbrar a possibilidade de Caos. Segundo Savi [4], em 1963 pôde-se observar uma das características mais marcantes desses sistemas, quando Lorenz, ao estudar o modelo de Rayleigh-Bernard para convecção de fluídos, observou que uma pequena variação nas condições iniciais poderia acarretar grandes diferenças na evolução do sistema e este



fenômeno ficou conhecido como “Efeito Borboleta”.

Um exemplo de estudo de sistemas não-lineares e que será objeto de investigação desta dissertação é o pêndulo duplo. Este sistema comumente estudado na Mecânica Analítica, em problemas de Mecânica Lagrangeana e Hamiltoniana, encontra-se aqui observado pelo viés da dinâmica não-linear, utilizando-se como base o formalismo da Mecânica Analítica. A importância do estudo da dinâmica não-linear do pêndulo duplo foi mencionada por Tan e Levien [6] em relação a dependência sensível das condições iniciais. Savi, de Paula e Pereira-Pinto [2], mencionam que o pêndulo não-linear é um objeto de estudo o qual atrai muita atenção dos pesquisadores, devido a capacidade de se estudar este sistema de diferentes formas.

Esta dissertação tem por objetivo abordar os principais aspectos da dinâmica não-linear do pêndulo duplo caótico, tanto do ponto de vista teórico como do ponto de vista experimental, traçando um paralelo entre os dois enfoques. Do lado teórico, faremos uso do software *Mathematica* para simulação computacional da dinâmica do sistema a partir das equações de movimento obtidas dos cálculos da Mecânica Newtoniana, Lagrangeana e Hamiltoniana. Do lado experimental, faremos um estudo da dinâmica não-linear do pêndulo duplo que foi construído no LEMAF (Laboratório de Estudo de Movimento por Análise Fotográfica) da UNESP de Rio Claro, por intermédio da análise de imagens estroboscópicas digitais obtidas com o auxílio de uma câmera filmadora a 240 frames por segundo (*fps*).

Esta dissertação está constituída da seguinte maneira, no capítulo 2 encontram-se as equações do pêndulo duplo ideal à partir da Mecânica Newtoniana, Lagrangeana e Hamiltoniana. No capítulo 3, encontram-se as equações para o pêndulo duplo forçado e dissipativo obtidas pela Mecânica Newtoniana.

No capítulo 4, aborda-se a teoria dos principais conceitos acerca de dinâmica não-linear aplicados ao estudo do pêndulo duplo os quais serão utilizados nesta dissertação, como espaço de fases, expoentes de Lyapunov e seções de Poincaré.

No capítulo 5, apresenta-se uma breve discussão acerca do aparato experimental utilizada no trabalho, apresentando-se o processo de construção do pêndulo duplo e também do funcionamento do software *Tracker* utilizado no tratamento das imagens estroboscópicas digitais obtidas nos testes experimentais.

No capítulo 6, encontram-se as simulações computacionais e os resultados experimentais para espaços de fase, ciclos limite, seções de Poincaré e expoentes de Lyapunov.

No capítulo 7, a conclusão e perspectivas futuras deste trabalho.

---

## Capítulo 7

# Conclusões e Perspectivas

Este trabalho teve por objetivo estudar os principais aspectos referentes a dinâmica não-linear do pêndulo duplo sob o viés experimental e de simulação computacional, estabelecendo um comparativo entre ambas as dinâmicas de modo que todas as configurações possíveis do sistema real fossem estudadas. Estudou-se o caso ideal onde não há ação de forças dissipativas ou externas do ponto de vista teórico utilizando-se da mecânica Lagrangeana e Hamiltoniana e também a aproximação do caso experimental (sem a ação de forças externas) para o ideal em intervalos de tempo curtos. Percebeu-se que a aproximação do caso experimental para o pêndulo duplo ideal teórico era válida, pois em intervalos de tempo de no máximo dez segundos a perda de energia sofrida pelo sistema não era tão expressiva num gráfico de evolução temporal, comportando-se assim como um pêndulo ideal. Os espaços de fase experimentais apresentados em projeções bidimensionais para a massa superior e inferior do sistema mostram a semelhança entre os resultados, indicando que o modelo teórico comporta-se bem próximo ao real.

Ao introduzir-se o motor acoplado ao sistema a perda de energia sofrida foi compensada por torques devidamente configurados de modo que a energia manteve-se constante durante todo o tempo de análise. Percebeu-se que este se comportou de forma satisfatória, proporcionando inclusive a obtenção de órbitas periódicas e de ciclos-limite devido a disposição dos sensores na plataforma de estudo. Efetuou-se o estudo dos espaços de fase e percebeu-se novamente semelhança entre os resultados teóricos e experimentais.

Efetuuou-se o estudo dos expoentes de Lyapunov e pôde-se ter mais uma evidência da dinâmica que ocorria no sistema analisando-se os sinais dos expoentes obtidos. As seções de Poincaré apresentaram uma visualização mais completa da dinâmica que ocorre no espaço quadrimensional do pêndulo duplo, possibilitando ver como as órbitas se comportam sem a presença de forças externas e a perturbação que estas provocam no sistema dissipativo, forçado e forçado dissipativo para massas iguais, diferentes, e alternando massas e comprimentos variáveis. Como uma análise experimental da seção de Poincaré foram efetuados testes para o pêndulo dissipativo forçado e conseguiu-se obter alguns pontos da seção que são bem similares a estruturas que aparecem nos resultados teóricos.

O estudo do pêndulo duplo é muito rico de análises e permite que muitos aspectos sejam abordados e muitas variações sejam feitas no sistema para novas análises serem possíveis. Como continuação deste trabalho, pretende-se explorar mais as seções de Poincaré experimentais de forma a obter-se mais informações reais acerca da dinâmica que ocorre no pêndulo duplo para diversas energias.

---

## Referências Bibliográficas

- [1] FERRARA, N.; DO PRADO, C. C. **Caos uma introdução**. EDITORA EDGARD BLUCHER: 1994.
- [2] DE PAULA, A. S.; SAVI, M. A.; PEREIRA-PINTO, F.H.I. Chaos and transient chaos in a experimental nonlinear pendulum. **Journal of Sound and Vibration**, v. 294, p. 585-595, 2006.
- [3] DRAZIN, P. G. **Nonlinear systems**. CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS: 1992.
- [4] SAVI, Marcelo. **Dinâmica Não-Linear e Caos**. 1. ed. Rio de Janeiro: e-papers, 2006.
- [5] STROGATZ, S.A. **Nonlinear dynamics and chaos (with applications to physics, biology, chemistry, and engineering)**. PERSEUS BOOKS, 1994.
- [6] LEVIEN, R.B.; TAN, S.M. Double Pendulum: An experiment in chaos. **American Journal of Physics** 61, 1038 (1993); doi: 10.1119/1.17335.
- [7] SYMON, K. R. **Mecânica**. EDITORA CAMPUS: 1996.
- [8] MONTEIRO, L. H. A.. **Sistemas Dinâmicos**. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2006.
- [9] PERCIVAL, I.C.. Chaos in hamiltonian systems. **PROC. R. SOC. LOND. A.** , v. 413, p. 131-143, 1987.
- [10] DEVANEY, R. L. **A first course in chaotic dynamical systems: theory and experiment**. PERSEUS BOOKS PUBLISHING, 1992.
- [11] MONERAT, G.A. et. al.. Explorando sistemas hamiltonianos: Estudo analítico . **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 28, n. 2, p. 177 - 189, (2006).
- [12] NUSSENZVEIG, M. **Curso de física básica - fluidos, oscilações e calor**. EDITORA EDGARD BLUCHER LTDA, 1983, p.49.