

HELEN GOMES DA SILVA

A LÓGICA DA VERDADE PRAGMÁTICA EM UM
SISTEMA DE TABLEAUX

Dissertação de Mestrado apresentada
ao Programa de Pós-Graduação em
Filosofia, da Faculdade de Filosofia
e Ciências, da Universidade Estadual
Paulista, Câmpus de Marília, na Área
de Concentração em Filosofia da Mente,
Epistemologia e Lógica

Orientador:

Prof. Dr. Hércules de Araujo Feitosa

Coorientador:

Prof. Dr. Luiz Henrique da Cruz Silvestrini

Marília - SP

2018

Silva, Helen Gomes da.
S586l A lógica da verdade pragmática em um sistema de tableaux / Helen Gomes da Silva. – Marília, 2018.
74 f. ; 30 cm.

Orientador: Hércules de Araujo Feitosa.
Co-orientador: Luiz Henrique da Cruz Silvestrini
Dissertação (Mestrado em Filosofia) – Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de Filosofia e Ciências, 2018.

Bibliografia: f. 71-74

1. Verdade. 2. Lógica matemática não-clássica. 3. ciência - Filosofia. I. Título.

CDD 112

Ficha catalográfica elaborada por
André Sávio Craveiro Bueno
CRB 8/8211
Unesp – Faculdade de Filosofia e Ciências

HELEN GOMES DA SILVA

A LÓGICA DA VERDADE PRAGMÁTICA EM UM SISTEMA DE TABLEAUX

Dissertação de Mestrado apresentada
ao Programa de Pós-Graduação em
Filosofia, da Faculdade de Filosofia
e Ciências, da Universidade Estadual
Paulista, Câmpus de Marília, na Área
de Concentração em Filosofia da Mente,
Epistemologia e Lógica

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação defendida e aprovada pela Banca Examinadora em 23/02/2018.

BANCA

Prof. Dr. Hércules de Araujo Feitosa (Orientador)-UNESP/Bauru

Prof. Dr. Marcelo Reicher Soares - UNESP/Bauru

Prof^a Dr^a Ana Cláudia de Jesus Golzio - UNICAMP/Campinas

Marília - SP

2018

Agradecimentos

Agradeço, a todos que contribuíram para realização deste trabalho. Especialmente, expresso minha gratidão:

À Deus por todo cuidado e sustento no tempo do desenvolvimento desta Dissertação. Sem Ele nada seria possível;

Ao professor Hércules por toda orientação, paciência, incentivo nesses anos de trabalho. Agradeço a ele pelos valiosos ensinamentos, os quais vou levar para a vida;

Aos professores Luiz Henrique, Marcelo e Ana Cláudia pelos preciosos apontamentos;

Aos membros do grupo de pesquisa SALCI, por todo apoio e sugestões de melhorias deste trabalho e pela amizade de cada um;

Às amigas de Marília, em especial, Luana, Sílvia, Juciane e Priscila. Vocês tornaram esse período do mestrado muito especial;

Aos professores do Departamento de Filosofia da UNESP de Marília, pelos ensinamentos e contribuições para minha formação filosófica;

Aos professores e funcionários do Departamento de Matemática da UNESP de Bauru, pelos grandes aprendizados e auxílio nos períodos da graduação e pós-graduação;

Aos queridos amigos de Bauru, em especial, Flávia, Amanda, Marina, Maria Laura, Laís e Matheus, por me acompanharem nesses anos e me presentear com vossas companhias;

Aos meus pais, Maria e Odracir, por todo amor, confiança e apoio. Vocês são incríveis;

À CAPES pela bolsa concedida.

*Pensava que nós seguíamos caminhos já feitos,
mas parece que não os há. O nosso ir faz o caminho.*

C. S. Lewis

RESUMO

O professor Newton C. A. da Costa, notável lógico brasileiro, e colaboradores introduziram a noção de quase-verdade no contexto das ciências empíricas, onde há incompletude do conhecimento. Tal abordagem é considerada uma generalização para contextos parciais da proposta de formalização da verdade introduzida por Alfred Tarski. Inspirado nessa noção de quase-verdade, Silvestrini (2011) introduziu uma definição de quase-verdade através da satisfação pragmática e, no mesmo trabalho apresentou, num sistema axiomático, uma lógica paraconsistente e trivalente, subjacente a essa noção, a qual denominou por Lógica da Verdade Pragmática (LPT- *Logic of Pragmatic Truth*). Posteriormente, Feitosa e Silvestrini (2016) apresentaram algumas alterações no conjunto de axiomas de LPT e deram uma demonstração de adequação segundo a semântica matricial da lógica da verdade pragmática. Hoje, sistemas dedutivos alternativos ao axiomático têm sido de grande interesse para a área da teoria da prova e computabilidade, pois esses, em sua maioria, são métodos mais intuitivos. Alguns são caracterizados como algorítmicos, o que possibilita uma fácil implementação do método em computadores. Dentre esses sistemas de provas, destacamos o método dedutivo dos tableaux analíticos, que foi introduzido de uma forma bastante elegante por Smullyan (1968). Neste trabalho, introduzimos um sistema de tableaux analíticos para a Lógica da Verdade Pragmática e verificamos que todos os resultados dedutivos do sistema axiomático da LPT coincidem com os resultados de consequência analítica do sistema de tableaux que aqui introduzimos.

Palavras-chave: Quase-verdade; Verdade Pragmática; Lógica Paraconsistente; Lógica Trivalente; Tableaux Analíticos.

ABSTRACT

Professor Newton C. A. da Costa, notable Brazilian logician, and collaborators introduced the notion of quasi-truth in the context of the empirical sciences, where there is incompleteness of knowledge. Such an approach is considered a generalization of Tarski's proposal for partial contexts. Inspired by this notion of quasi-truth, Silvestrini (2011) introduced a definition of quasi-truth through pragmatic satisfaction and, in the same work, presented, in an axiomatic system, a paraconsistent and trivalent logic, underlying this notion, which he called 'Logic of Pragmatic Truth (LPT)'. Later, Feitosa and Silvestrini (2016) presented some changes in the set of axioms of LPT and gave a proof of adequacy according to the trivalent matrix semantics of LPT. Nowadays, alternative axiomatic deductive systems have been of great interest to proof theory and computability, because these are in general intuitive methods. Some of them are characterized as algorithmic, which allows an easy implementation in computers. Among these systems of proof, we highlight the deductive method of analytic tableaux, which was introduced in an elegant way by Smullyan (1968). In this work, we introduce an analytic tableau system for the Logic of Pragmatic Truth and we verify that the results we can develop in the axiomatic system of the LPT coincide with the deductions in this analytic system of tableaux.

Key-words: Quasi-truth, Pragmatic Truth, Paraconsistent Logic, Trivalent Logic, Analytical Tableaux.

Conteúdo

Introdução	7
1 Teorias da verdade	10
1.1 A concepção correspondencial da verdade	10
1.2 A concepção coerencial da verdade	11
1.3 A concepção pragmática da verdade	12
1.4 A concepção de verdade segundo Tarski	14
1.4.1 A formalização matemática da verdade	17
2 Sobre a quase-verdade	22
2.1 A quase-verdade de Newton da Costa	22
2.2 Quase-verdade via quase-satisfação	26
2.3 A verdade pragmática via satisfação pragmática	27
3 A lógica da verdade pragmática	30
3.1 Semântica de LPT	30
3.2 Sistema dedutivo de LPT	35
4 O método dos tableaux analíticos	37
4.1 A história dos tableaux	38
4.2 LPC em um sistema de tableaux	40
4.3 Tableaux analíticos para a LQC	46
4.4 O sistema de tableaux e a implementação em computadores	51
5 Um sistema de tableaux para a LPT	53
5.1 Tableaux para a lógica da verdade pragmática	53
5.2 Da dedução axiomática para a dedução em tableaux	57
5.3 Da dedução em tableaux para a consequência semântica de LPT	65
Considerações finais	69

Introdução

A reflexão sobre o conceito de verdade sempre foi de grande interesse entre os filósofos. Contudo, há uma grande dificuldade em definir o que é verdade, ou estabelecer algum critério correto para determinar se uma sentença é verdadeira ou falsa.

Segundo Lynch (2001), o problema da verdade está também associado à ambiguidade do termo, pois mesmo considerando a verdade apenas como propriedade de algo, ainda assim poderíamos utilizar a palavra para caracterizar vários elementos distintos, como: sentença verdadeira, amizade verdadeira, obra de arte verdadeira, dentre outras possibilidades. Portanto, mesmo com muitos estudos e teorias sobre a verdade, dificilmente haverá uma definição geral que contemple o anseio de todos.

Mesmo a verdade sendo um conceito de difícil caracterização e explicitação, é de extrema importância desenvolver concepções sobre ela, uma vez que o conceito de verdade não está associado apenas a crenças pessoais, mas, de certo modo, está inserido na verificação de teorias científicas ou formais, como aponta Kirkham (1992, p. 49), “as vezes, o conceito de justificação pressupõe o conceito de verdade”.

Além disso, como apontam Bueno e de Souza (1996, p. 187), o conceito de verdade é utilizado para sustentar as crenças que informam nossas ações, para a validação do raciocínio ou para introduzir um objetivo da ciência. Com isso, cada diferente abordagem da verdade gerará resultados diversos, pois estes dependem de interpretações específicas que adotamos para o termo.

Diante disso, muitos estudiosos, ao desenvolverem teorias sobre a verdade, delimitam alguns pontos essenciais para a elaboração das suas concepções. Como, por exemplo, quem são os indivíduos que receberão a propriedade de ser verdadeiro, qual o critério para determinar se algo é verdadeiro ou não, ou apresentam caminhos para alguma resposta do problema inicial que motivou desenvolvimentos sobre a verdade.

As teorias da verdade são discutidas em ambiente filosófico, e buscam caracterizar o que são crenças ou sentenças verdadeiras. As principais delas são a teoria da verdade como correspondência, a concepção de verdade como correlação e a abordagem pragmática da verdade.

Entretanto, existem concepções que diferem de tais abordagens, como a de Tarski,

que propõe uma definição de verdade para as ciências formais, e também a quase-verdade de Newton da Costa e colaboradores, introduzida no contexto das ciências empíricas, mas com uma formalização matemática para ambientes parciais.

A partir da teoria da quase-verdade de da Costa e colaboradores, outros autores desenvolveram teorias inspiradas nesta concepção, como Bueno e de Souza (1996), que introduziram o conceito de quase-verdade via noção de quase-satisfação. Além destes autores, em 2011, Silvestrini apresentou uma nova abordagem para a quase-verdade, através do conceito de satisfação pragmática.

Esta abordagem recebe um olhar especial neste trabalho, uma vez que destacamos a lógica paraconsistente subjacente a esta empreitada.

Nesta Dissertação, mergulhamos no contexto da quase-verdade, com vistas a uma compreensão profunda do tema, resgate dos textos históricos e elaboração da nossa apresentação do assunto.

Como resultado original, apresentamos a lógica da verdade pragmática (*Logic of Pragmatic Truth* - LPT), introduzida por Silvestrini (2011), num sistema dedutivo alternativo ao axiomático, em que a LPT foi originalmente apresentada.

Assim, apresentamos a LPT num sistema dedutivo de tableaux analíticos, que mostra ser dedutivamente equivalente ao sistema axiomático original.

No Capítulo 1, discorremos de forma breve sobre as principais teorias da verdade: a teoria correspondencial da verdade, a concepção coerencial da verdade e a teoria pragmática da verdade. Apontamos os precursores destas teorias, suas respectivas motivações ao abordarem a verdade e explicitamos os principais pontos destas três abordagens.

Ainda neste capítulo inicial, apresentamos a concepção semântica da verdade proposta por Alfred Tarski (1944). Ao desenvolver esta teoria, Tarski tem como objetivo introduzir uma definição de verdade para as ciências formais, e para formalizar sua definição, apresenta a verdade sempre numa interação entre uma linguagem formal, em que sentenças são os portadores de verdade da sua concepção, e uma determinada estrutura matemática, na qual a verdade surge do conceito de satisfação da sentença na estrutura correspondente.

No Capítulo 2, expomos a teoria da verdade de Newton da Costa e colaboradores, os quais introduziram e formalizaram a noção de quase-verdade. Esta teoria é uma generalização da concepção de Tarski para ambientes parciais. Além disso, abordamos duas noções de quase-verdade motivadas pelos trabalhos de da Costa: a definição formalizada através do conceito de quase-satisfação, introduzida por Bueno e de Souza (1996), e a formalização da quase-verdade via satisfação pragmática, proposta por Silvestrini (2011).

No Capítulo 3, apresentamos a lógica da verdade pragmática (LPT), que é uma lógica paraconsistente e trivalente, introduzida por Silvestrini (2011). Neste trabalho

abordamos a LPT de acordo com Feitosa e Silvestrini (2016), que tem algumas modificações no conjunto original de axiomas e as demonstrações de correção e completude para LPT são obtidas diretamente na semântica trivalente de LPT, sem o uso das bivalorações. Assim, especificamos a linguagem desta lógica, detalhamos as interpretações dos operadores básicos e derivados segundo a semântica de matrizes trivalentes da LPT, apresentamos seu sistema de axiomas e a única regra de inferência da LPT, a *Modus Ponens*.

Após considerarmos as principais teorias da verdade, algumas abordagens da quase-verdade e explicitarmos a lógica da verdade pragmática, no Capítulo 4, apresentamos um sistema dedutivo em tableaux analíticos para a lógica clássica. Inicialmente, abordamos a origem do método, considerando os desenvolvimentos dos principais autores que contribuíram para a história dos tableaux e apontamos algumas das suas principais características. Então, apresentamos formalmente um sistema de tableaux para a lógica proposicional clássica e, a seguir, esboçamos o método de tableaux analíticos para a lógica quantificacional clássica.

No Capítulo 5, introduzimos o nosso sistema de tableaux analíticos para a lógica da verdade pragmática (LPT), o qual denotamos por TPT. Assim, apresentamos as regras de expansão dos tableaux para a LPT, que são distintas das regras do caso clássico, pois podem gerar até três ramos distintos. Além disso, definimos as cláusulas de fechamento dos ramos de TPT. Na última seção do Capítulo 5, demonstramos que todas as deduções axiomáticas possíveis em LPT têm uma correspondente via tableaux em TPT. Para a complementação e certificação de nosso sistema dedutivo, mostramos também que toda dedução em TPT tem uma contraparte em LPT. Portanto, os dois sistemas são dedutivamente equivalentes.

Capítulo 1

Teorias da verdade

Neste capítulo abordamos algumas das principais teorias da verdade. Inicialmente, trataremos da verdade como correspondência e, nessa perspectiva, a verdade se dá na correspondência entre proposições e a realidade. Também, esboçamos sobre a teoria coerencial da verdade, a qual interpreta a verdade como associações de coerências presentes numa coleção de crenças. Além destas, trataremos da concepção pragmatista da verdade, teoria esta que associa a verdade aos efeitos práticos no mundo e têm algumas semelhanças com a teoria coerencial e alguns aspectos da teoria correspondencial da verdade. Na última seção, apresentamos a abordagem da verdade segundo Tarski (1944).

1.1 A concepção correspondencial da verdade

Na abordagem da verdade como correspondência, uma proposição é verdadeira se corresponde a um fato no mundo.

Esta teoria está relacionada com a concepção do realismo, em que, de acordo com Miller (2014), considera-se que os objetos existem com certas propriedades que estão dissociadas da crença do indivíduo. Assim, nesta perspectiva, a verdade é uma propriedade extrínseca das crenças e não depende do que acreditamos, pois está associada apenas com a realidade.

Segundo Hifume (2003), há três questões que precisam ser respondidas quando nos referimos à teoria da verdade como correspondência. Primeiro, precisamos saber a qual indivíduo estamos atribuindo a característica de ser verdadeiro, que é o portador-de-verdade. Uma segunda questão é: a que tipo de relação de verdade essa correspondência se refere, e um último aspecto, qual é a realidade a que o portador-de-verdade está associado (verofator).

Logo, a propriedade de ser verdadeiro será atribuída às proposições. No que se refere a segunda questão, há dois tipos de relações de verdade: a correspondência como

congruência e a correspondência como correlação. Além disso, os portadores-de-verdade podem corresponder a dois indivíduos do mundo, a saber, os objetos ou os fatos.

A teoria da correspondência como congruência teve como precursor Russell (1956). Tal abordagem foi desenvolvida no período do atomismo lógico, em que, segundo Klement (2013), “todas as verdades são, em última instância, dependentes de partes de fatos atômicos”, que são elementos simples e expressam uma qualidade ou característica.

Diante disso, para Russell, a verdade de uma proposição atômica dependeria de um fato atômico correspondente e as demais proposições seriam alguma junção de proposições atômicas via os conectivos lógicos, o que produziria as proposições compostas ou moleculares. Por exemplo, a proposição molecular $p \wedge q$ é verdadeira se, e somente se, a proposição atômica p é verdadeira e a proposição atômica q é verdadeira.

A teoria da correspondência por correlação foi defendida por Austin (1950). Neste contexto, uma proposição está correlacionada com um fato possível. No caso do fato ocorrer, segue que a proposição é verdadeira. Como aponta Hifume (2003, p. 39), para Austin a verdade é uma relação entre quatro elementos: um enunciado, a sentença, um fato possível e uma espécie de estado de coisas. Com isso, diferente do que ocorre na relação de verdade como congruência, a correspondência por correlação é definida por meio das convenções linguísticas, as quais apontam se o estado de coisas que está sendo tratado é adequado para tornar o enunciado verdadeiro.

De acordo com Haack (2002, p. 135), a correspondência é definida através de dois tipos de correlações: (I) as convenções descritivas, que correlaciona palavras com tipos de situações, e as (II) convenções demonstrativas, em que as palavras são correlacionadas com situações específicas.

Considere-se o seguinte exemplo, seja P o seguinte enunciado: “Estou escrevendo a Dissertação”, proferido por um indivíduo S no instante t . Vemos aqui que as convenções descritivas correlacionam as palavras do enunciado com as situações em que o indivíduo está escrevendo a Dissertação.

As convenções demonstrativas correlacionam as palavras com uma situação específica de S em t . Deste modo, o enunciado será verdadeiro se a situação em particular correlacionada com as palavras por meio de (II) é do tipo correlacionado com as palavras por (I).

1.2 A concepção coerencial da verdade

Na teoria coerencial, uma proposição é verdadeira se é coerente, ou consistente, com as demais proposições de um conjunto específico de proposições, ou crenças; e é falsa caso isso não ocorra.

Segundo Bradley (1914), a concepção coerencial da verdade é um apoio mútuo entre as proposições. Além disso, a origem de tal concepção pode ser atribuída a Locke (1709) *apud* Hifume (2003, p. 41): “Parece-me, pois, que a verdade, na importância da própria palavra, nada mais significa que a união ou separação de sinais, e de que modo as coisas significadas por elas concordam ou discordam entre si”.

Segundo Lynch (2001), quando nos referimos que algo deve ser coerente com um conjunto de crenças, não se trata de um conjunto arbitrário, mas sim de um conjunto específico. É importante ressaltar este ponto da teoria, pois uma das críticas feitas sobre esta concepção é que uma crença pode ser coerente a qualquer conjunto de crenças, mas isso poderia gerar uma contradição, pois, na maioria das vezes, as crenças das pessoas são inconsistentes.

Segundo Young (2013), a concepção mais aceitável da verdade como coerência consiste em considerar a relação de coerência como um tipo de implicação lógica. Com isso, uma proposição é coerente a um conjunto de proposições, se, e somente se, a mesma proposição é implicada por elementos do conjunto. Além disso, a teoria coerencial da verdade é considerada por muitos autores como um teste da verdade, segundo Blanshard (1939), uma teoria coerente de justificação conduz a uma versão coerente da teoria da verdade.

Diferentemente do que ocorre na teoria correspondencial, nesta abordagem, a verdade é determinada considerando-se apenas os portadores-de-verdade, isto é, aqueles entes que recebem a propriedade de ser verdadeiro, e não está relacionada com o mesmo conceito de realidade abordada na versão correspondencial. Pois a teoria da verdade como coerência está vinculada ao idealismo, concepção filosófica que, segundo Young (2013), considera a realidade como um conjunto de crenças e, desse modo, a verdade de uma crença se dá na coerência dela frente as demais crenças.

1.3 A concepção pragmática da verdade

A teoria pragmática da verdade está relacionada tanto com a teoria coerencial como com a correspondencial, pois nesta versão, a verdade é correspondente aos efeitos práticos no mundo, porém, também propõe preservar a coerência entre as ideias.

Os principais pragmatistas que contribuíram para o desenvolvimento desta concepção foram William James e Charles Sanders Peirce.

Para Peirce, a verdade é o fim de toda investigação. Segundo Haack (2002), tal ideia está associada a sua teoria de investigação, a qual considera a crença como uma disposição para a ação, e que o surgimento de dúvidas causaria uma interrupção nesta disposição, o que atrapalharia a investigação. Diante disso, Peirce propõe substituir toda

dúvida surgida na investigação por uma crença já considerada verdadeira. Além disso, para ele a investigação seria o processo de definir crenças consistentes e tal processo se daria através de três tipos de raciocínio: dedução, indução e abdução.

A indução explica o processo experimental, o qual considera a probabilidade de concordância da teoria com os fatos. Neste tipo de raciocínio, parte-se de um caso particular para a generalização. Por exemplo: “A vacina foi eficiente para 90% dos seres humanos que participaram do teste. Logo, a vacina será eficiente para todos os seres humanos”.

Já no raciocínio dedutivo, as informações contidas na conclusão, de certo modo, estão presentes nas premissas. Segundo os comentadores da dedução, neste caso, parte-se do geral para o particular. A Matemática segue esse tipo de raciocínio. Por exemplo: se “Todos os homens são mortais” e “João é homem”, segue-se que “João é mortal”.

Contudo, para Peirce, nenhum desses dois raciocínios poderia dar origem a uma ideia. Para ele, o raciocínio gerador das ideias da ciência é a abdução.

Na abdução, analisamos minuciosamente os fatos e a partir desta análise, podemos desenvolver uma explicação não dada por dedução, nem tampouco por indução, mas que coloca o conhecimento num outro patamar. Um exemplo de argumento abduutivo é o seguinte: “Todas as bolas desta caixa são pretas”. “Estas bolas são pretas”. Logo, “estas bolas são desta caixa”.

Outro importante pragmatista que desenvolveu elementos da teoria sobre a verdade foi James (1907). Ele considerava a verdade como um acordo de certas propriedades das nossas ideias e a realidade.

Entretanto, apesar de ter alguns aspectos da teoria da verdade como correspondência, James aponta a dificuldade de sempre estabelecer uma correspondência entre as ideias e a realidade. Por exemplo, se fecharmos os olhos e imaginarmos um relógio, obteremos uma imagem do relógio real. Mas se considerarmos a elasticidade da mola do relógio, não há um correspondente na realidade. Com isso, é difícil de ver exatamente até que ponto suas ideias podem corresponder com algo no mundo.

James também acreditava que as crenças verdadeiras são aquelas que são confirmadas ou verificadas pela experiência. Para ele, ao acrescentarmos novas experiências ao conjunto de ideias, elas não invalidam as já existentes, mas pelo contrário, confirmam ainda mais a veracidade delas.

De uma forma geral, a proposta pragmatista tem interesse em saber como a verdade é realizada, que diferença faz a concepção de verdade na vida real das pessoas. Ideias verdadeiras são aquelas que podemos assimilar, validar, corroborar e verificar. E são ideias falsas quando isso não ocorre. Em suma, a concepção pragmática propõe que a verdade gere consequências práticas.

1.4 A concepção de verdade segundo Tarski

Nesta seção abordamos a concepção semântica da verdade de Tarski (1944), que apresenta uma definição formal e matematizada de verdade.

Tarski é a favor do fisicalismo, o qual propõe que a linguagem da física é uma “linguagem universal”, e com isso, pode expressar toda a ciência empírica em seus termos.

Logo, toda e qualquer sentença de caráter científico pode ser traduzida numa sentença equivalente da linguagem física. Alguns autores apontam que Tarski segue um fisicalismo moderado, pois ele utiliza tanto elementos físicos como matemáticos. Com relação a esta sua concepção teórica, ele utilizou apenas elementos matemáticos.

Ao desenvolver sua teoria, Tarski gostaria de uma definição de verdade que fosse aplicada nas ciências formais e, para isso, introduziu condições de adequação antes de apresentar sua definição de verdade.

A primeira condição proposta por Tarski é que a definição de verdade deve ser materialmente adequada, isto é, não tem como objetivo captar o significado de um termo, mas é uma proposta para apreender o sentido real da palavra.

Isto porque sua definição segue a concepção clássica de verdade, da forma com que Aristóteles enunciou em seu livro *Metafísica*: “Dizer do que é que ele não é, ou do que não é que ele é, é falso, enquanto dizer do que é que ele é, ou do que não é que ele não é, é verdadeiro”.

Para Tarski, qualquer definição plausível de verdade deve gerar todas as instâncias do seguinte esquema (T):

$$“Q \text{ é verdadeira se, e somente se, } p”$$

em que p pode ser qualquer sentença da linguagem à qual a palavra verdadeira se refere, e Q é o nome desta sentença.

Desta forma, se consideramos o esquema (T), observamos que ele estabelece a sua extensão, ou seja, ele determina quais objetos se aplicam a uma expressão ou sentença do termo verdadeiro.

Um caso particular do esquema (T) seria:

“A neve é branca” é verdadeira se, e somente se, a neve é branca.

Neste exemplo, a primeira expressão é o nome ao qual a segunda expressão se refere.

Tarski (1944) salienta que esta condição de adequação material não é uma definição, mas pode apenas ser considerada como um critério para que uma definição de verdade seja aceitável.

A adequação material tem como objetivo evitar ambiguidade do termo ‘verdadeiro’ e eliminar algumas teorias da verdade, aquelas que têm proposições que não são nem verdadeiras e nem falsas, uma vez que Tarski não admite teorias de verdade não-bivalentes em sua concepção.

Além de colocar a adequação material como uma condição para a sua definição de verdade, Tarski quer que a sua abordagem seja formalmente correta. Assim, ele propõe que uma definição de verdade seja sempre relativa a uma certa linguagem, e utiliza o conceito semântico de satisfatibilidade.

Para a correção formal, Tarski estabelece sobre qual linguagem a verdade será definida. Então, ele apresenta as noções e regras que estarão envolvidas na definição.

Como Tarski aborda a definição de verdade com conceitos semânticos, dada a vasta literatura sobre o paradoxos semânticos, para evitá-los introduziu sua concepção através da linguagem-objeto e da metalinguagem, que serão conceitos fundamentais para a formalização de sua teoria.

A linguagem objeto é a linguagem da qual falamos sobre e, nesta abordagem, na qual aplicamos a definição de verdade das sentenças desta linguagem. Já a metalinguagem é linguagem com a qual falamos, ou seja, a metalinguagem fornece uma interpretação ou representação para os termos da linguagem-objeto. Esta abordagem inicial, posteriormente vai ser refinada para a teoria dos modelos, que associará sentenças ou fórmulas de uma linguagem formal com modelos dados por estruturas matemáticas.

Diante disso, sua concepção de verdade será relativa a uma linguagem-objeto e representada numa metalinguagem. De acordo com Tarski (1944) a definição em si e todas suas equivalências devem ser “formuladas” na metalinguagem, ou seja, p em (T) representa uma sentença arbitrária da linguagem-objeto em questão. Ainda considerando o esquema (T) de Tarski, o símbolo Q denota o nome da sentença que p representa. Logo, a metalinguagem deve ser rica o bastante para fornecer possibilidades de construir um nome para cada sentença da linguagem-objeto.

Segundo Hifume (2003, p. 63), tanto a linguagem-objeto, como a metalinguagem devem ser formalmente especificáveis, pois faz-se necessário identificar a quais objetos da linguagem a definição de verdade da metalinguagem se refere.

Como já foi dito no início desta seção, a proposta de Tarski aborda a verdade para as linguagens formais e não se aplica a linguagens coloquiais, pois ele considera difícil conciliar tais linguagens com as leis lógicas e não gerar inconsistências.

Ao desenvolver esses conceitos, Tarski observou que a noção semântica de satisfação seria pertinente para formalizar a sua definição de verdade, levando em consideração todas as suas condições.

Assim, segundo Tarski (1944), a satisfação é uma relação entre objetos arbitrários

e funções sentenciais, sendo que as funções sentencias são compostas por sentenças abertas, do tipo, “ x é advogado”, “ x é uma cidade maior que y ”. Contudo, há um problema com esta definição, pois as sentenças abertas não são nem verdadeiras e nem falsas. Por exemplo, considere-se a seguinte sentença aberta: “ x é um número par”. Não podemos atribuir um valor de verdade para esta sentença, pois não sabemos a que se refere a variável x .

Entretanto, segundo Tarski, é possível definir uma função sentencial que não contém variáveis livres. Para isso, ele introduz a noção de satisfação, apresentada da seguinte forma: objetos satisfazem certa função sentencial, se a função passa a ser uma sentença verdadeira quando substituimos as variáveis livres por nomes dos objetos dados. Isto resolveria a questão das variáveis livres nas sentenças abertas, contudo, surge outro problema. Uma vez que a proposta de Tarski é apresentar a verdade via a noção de satisfação, ele não poderia utilizar o próprio termo “sentença verdadeira” na definição de satisfação, pois isto geraria uma definição circular.

Diante disso, Tarski apresenta a definição de satisfação através do método recursivo.

Na recursão, a definição de um conceito mais complexo é construído a partir da definição de conceitos mais simples. Assim, primeiro indicamos quais objetos satisfazem as funções sentenciais mais simples, e utilizando a definição para os casos mais simples, definimos como os objetos satisfazem as funções sentenciais complexas.

Para formalizar este conceito, ele relaciona as sentenças abertas com sequências infinitas, de modo que $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é satisfeita pela sequência $\langle O_1, O_2, \dots, O_n, \dots \rangle$ se, e somente se, ela é satisfeita pelos n primeiros termos da sequência.

Considere-se a seguinte sentença, “ x é branco”. Esta sentença é satisfatível, ou satisfeita, por uma sequência infinita, se, e somente se, o primeiro elemento da sequência é branco.

Por meio desta definição, é possível apresentar a noção de satisfatibilidade para os conectivos lógicos. Assim, as sentenças abertas simples não são verdadeiras ou falsas, mas sim são satisfeitas, ou não, por n -uplas ordenadas de objetos. A partir daí, a negação de uma sentença aberta simples S_1 é satisfeita pelas sequências que não satisfazem S_1 . No caso da conjunção, as sentenças abertas simples em que $S_1 \wedge S_2$ são satisfeitas pelas sequências que satisfazem a S_1 e a S_2 , simultaneamente.

A partir destas noções, a verdade via satisfatibilidade de Tarski é dada da seguinte forma: “uma sentença é verdadeira quando é satisfeita por todas as sequências e falsa no caso de não ser satisfeita por alguma sequência”.

1.4.1 A formalização matemática da verdade

A partir de sua abordagem sobre a verdade e a satisfação, Tarski apresentou uma formalização matemática para sua teoria, associando aos elementos puramente sintáticos da linguagem, elementos de uma estrutura matemática, a qual, como veremos posteriormente, produzirá a noção de satisfação de uma fórmula.

Estes desenvolvimentos foram a base para o surgimento da teoria de modelos, que possibilita uma interpretação das fórmulas da lógica de primeira ordem e outras lógicas formais. Assim, para interpretarmos uma fórmula dada, é necessário darmos a ela algum tipo de significado. Deste modo, após termos uma interpretação para a fórmula dada, podemos concluir se essa fórmula, é verdadeira ou falsa.

Decorre desta abordagem de Tarski, que o valor de verdade de uma fórmula será obtido sempre com relação a alguma estrutura matemática que a interpreta. Sendo assim, a função das estruturas matemáticas é especificar os valores semânticos e, a partir disso, determinar se uma fórmula é verdadeira ou falsa na estrutura analisada.

A seguir, apresentaremos a formalização de uma linguagem de primeira ordem, de acordo com Feitosa e Paulovich (2005). Posteriormente, apresentamos uma estrutura de primeira ordem, na qual temos uma função interpretação que associa elementos não lógicos de determinada linguagem \mathcal{L} com elementos de uma estrutura matemática \mathcal{A} .

Definição 1.1 *O alfabeto de uma linguagem de primeira ordem \mathcal{L} é composto pelos seguintes símbolos:*

- (i) *um conjunto enumerável de variáveis: $\{v_1, v_2, \dots, v_n, \dots\}$*
- (ii) *operadores lógicos: \neg e \rightarrow*
- (iii) *quantificador universal: \forall*
- (iv) *símbolos auxiliares: $)$ e $($*
- (v) *relação de igualdade: $=$.*

Para os símbolos abaixo, temos $I, J, K \subseteq \mathbb{N}^$, de modo que:*

- (vi) *símbolos relacionais $\{R_i\}_{i \in I}$, com uma função $T_0 : I \rightarrow \mathbb{N}^*$, que para cada $i \in I$, dá a aridade $T_0(i)$ de R_i como um número natural maior que 0*
- (vii) *símbolos funcionais $\{f_j\}_{j \in J}$, com uma função $T_1 : J \rightarrow \mathbb{N}^*$, que para cada $j \in J$, dá a aridade $T_1(j)$ de f_j como um natural maior que 0*

(viii) constantes individuais $\{a_k\}_{k \in K}$.

Denotamos o conjunto de variáveis por $Var(\mathcal{L})$.

Além disso, observamos que os itens de (i) a (v) são símbolos lógicos, enquanto de (vi) e (vii) são símbolos não lógicos.

Definição 1.2 *Os termos de uma linguagem \mathcal{L} são definidos da seguinte maneira:*

- (a) todas variáveis e constantes individuais são termos;
- (b) quando f_j é um símbolo funcional de aridade $T_1(j) = n$ e t_1, \dots, t_n são termos, tem-se que $f_j(t_1, \dots, t_n)$ também é um termo;
- (c) os termos gerados apenas pelas regras (a) e (b).

A seguir, indicaremos o conjunto de termos de \mathcal{L} por $Ter(\mathcal{L})$.

Definição 1.3 *As fórmulas atômicas são definidas da seguinte forma:*

- (a) se t_1 e t_2 são termos, então $t_1 = t_2$ é uma fórmula atômica;
- (b) se R_i é um símbolo relacional com aridade $T_0(j) = n$ e t_1, \dots, t_n são termos, então $R_i(t_1, \dots, t_n)$ é uma fórmula atômica;
- (c) as fórmulas atômicas são geradas apenas pelas regras (a) e (b).

Definição 1.4 *As fórmulas de \mathcal{L} são definidas por:*

- (a) toda fórmula atômica é uma fórmula de \mathcal{L} ;
- (b) quando σ e φ são fórmulas, temos que $(\neg\sigma)$ e $(\sigma \rightarrow \varphi)$ são fórmulas;
- (c) se σ é uma fórmula e x é uma variável, então $(\forall x \sigma)$ é uma fórmula;
- (d) as fórmulas de \mathcal{L} são geradas exclusivamente pelos itens (a), (b) e (c).

A seguir, denotaremos as fórmulas de \mathcal{L} por $For(\mathcal{L})$.

Na metalinguagem sobre a linguagem \mathcal{L} , indicamos as variáveis por x, y e z , os termos por t e u e as fórmulas pelas letras σ, φ, ψ e ρ .

Além disso, os operadores \wedge, \vee e \leftrightarrow são obtidos através dos operadores lógicos do alfabeto \mathcal{L} . E temos ainda que o quantificador existencial \exists é definido a partir do quantificador universal \forall .

Estes conceitos são considerados essencialmente sintáticos. A eles vamos atribuir conceitos de uma estrutura matemática, que consideramos como os respectivos entes semânticos.

Definição 1.5 *Seja \mathcal{L} uma linguagem de primeira ordem. Uma **estrutura de primeira ordem** \mathcal{A} para \mathcal{L} é definida por um par ordenado $\langle A, \iota \rangle$, em que A é um conjunto não-vazio, o universo ou domínio de \mathcal{L} , e ι é uma função de interpretação definida sobre o conjunto de símbolos não lógicos de \mathcal{L} , de modo que :*

- (a) *para cada $k \in K$, se c_k é um símbolo de constante, então $\iota(c_k) = c_k^{\mathcal{A}} \in A$;*
- (b) *para cada $i \in I$, se R_i é um símbolo de relação com aridade $T_0(i) = n$, então $\iota(R_i) = R_i^{\mathcal{A}} \subseteq A^n$ é uma relação de aridade n sobre A .*
- (c) *para cada $j \in J$, se f_j é um símbolo de função com aridade $T_1(j) = m$, então $\iota(f_j) = f_j^{\mathcal{A}} : A^m \rightarrow A$ é uma função de aridade m definida sobre A .*

Diante disso, temos que a função interpretação ι leva elementos simplesmente sintáticos ou formais em elementos de uma estrutura matemática.

Agora, introduzimos a definição de valoração para a linguagem \mathcal{L} e em seguida apresentamos a definição de interpretação de uma fórmula nessa mesma linguagem, ou seja, a definição de satisfação de uma fórmula.

Definição 1.6 *Uma **valoração** para a linguagem \mathcal{L} na estrutura \mathcal{A} é uma função $v : \text{Var}(\mathcal{L}) \rightarrow A$, ou seja, v associa a cada variável de \mathcal{L} um elemento do domínio A .*

Definição 1.7 *Uma **interpretação** para \mathcal{L} é um par $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, v)$, em que \mathcal{A} é uma estrutura de primeira ordem e v é uma valoração na estrutura \mathcal{A} para a linguagem \mathcal{L} .*

Neste caso, toda interpretação dos elementos formais da linguagem \mathcal{L} devem ocorrer sobre A^n .

Definição 1.8 *Se $t \in \text{Ter}(\mathcal{L})$, então o **valor** de t , indicado por $v(t)$ é dado por:*

- (i) *se $t = x$, então $v(t) = v(x)$;*
- (ii) *se $t = c$, então $v(t) = c^{\mathcal{A}}$;*
- (iii) *se $t = f(t_1, t_2, \dots, t_n)$, então $v(t) = f^{\mathcal{A}}(v(t_1), v(t_2), \dots, v(t_n))$.*

Se $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, v)$ é uma interpretação, $x \in \text{Var}(\mathcal{L})$ e $a \in A$, então $v[x/a]$ é uma valoração sobre \mathcal{A} que atribui à variável x o valor a e concorda com v para as demais variáveis. Logo:

$$v[x/a](y) = \begin{cases} v(y) & \text{se } y \neq x \\ a & \text{se } y = x. \end{cases}$$

Se $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, v)$, então denotamos por $\mathcal{A}[x/a] = (\mathcal{A}, v[x/a])$.

A definição de satisfação é dada por indução na complexidade da fórmula φ , e desta definição se segue a definição de verdade para as fórmulas atômicas, moleculares e gerais, segundo a estrutura \mathcal{A} e a valoração v que as interpreta.

Indicamos que a interpretação $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, v)$ satisfaz a fórmula φ por $\mathfrak{A} \models \varphi$.

Definição 1.9 Se $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, v)$, então:

- (i) $\mathfrak{A} \models t = u$ se $v(t) = v(u)$;
- (ii) $\mathfrak{A} \models R(t_1, \dots, t_n)$ se a relação $R^{\mathcal{A}}(v(t_1), \dots, v(t_n))$ vale em \mathcal{A}
- (iii) $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$ se $\mathfrak{A} \not\models \varphi$;
- (iv) $\mathfrak{A} \models \varphi \wedge \psi$ se $\mathfrak{A} \models \varphi$ e $\mathfrak{A} \models \psi$;
- (v) $\mathfrak{A} \models \varphi \vee \psi$ se $\mathfrak{A} \models \varphi$ ou $\mathfrak{A} \models \psi$;
- (vi) $\mathfrak{A} \models \varphi \rightarrow \psi$ se $\mathfrak{A} \not\models \varphi$ ou $\mathfrak{A} \models \psi$;
- (vii) $\mathfrak{A} \models (\forall x)\psi$ se para todo $a \in A$, $\mathfrak{A}[x/a] \models \psi$;
- (viii) $\mathfrak{A} \models (\exists x)\psi$ se para algum $a \in A$, $\mathfrak{A}[x/a] \models \psi$.

Definição 1.10 Se $\Delta \subseteq \text{For}(\mathcal{L})$, então uma interpretação \mathfrak{A} é um **modelo** para Δ , se $\mathfrak{A} \models \delta$, para toda fórmula $\delta \in \Delta$.

Denotamos que \mathfrak{A} é um modelo para Δ por $\mathfrak{A} \models \Delta$.

Definição 1.11 Se $\Gamma \cup \{\psi\} \subseteq \text{For}(\mathcal{L})$, então a fórmula ψ é consequência de Γ se toda interpretação \mathfrak{A} que é um modelo de Γ , também é modelo de ψ .

Denotamos que ψ é consequência de Γ por $\Gamma \models \psi$.

Assim, se $\Gamma \models \psi$, então para toda interpretação \mathfrak{A} , se $\mathfrak{A} \models \Gamma$, então $\mathfrak{A} \models \psi$.

Logo, a interpretação \mathfrak{A} é um modelo para uma sentença ψ ou satisfaz a sentença ψ , o que depende da estrutura \mathfrak{A} e da valoração v .

Definição 1.12 Uma sentença φ é *satisfatível* se existem uma estrutura \mathcal{A} e uma valoração v tal que $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, v) \models \varphi$.

Se a interpretação $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, v)$ satisfaz sentença φ , então também dizemos que φ é satisfeita por \mathcal{A} segundo v . Agora, se a validade de φ em \mathfrak{A} independe da valoração v , então podemos dizer que φ é válida ou verdadeira em \mathcal{A} .

Contudo, uma sentença verdadeira segundo Tarski independe da estrutura \mathcal{A} e da valoração v .

Definição 1.13 Uma sentença φ é *verdadeira* se para toda interpretação \mathfrak{A} , tem-se que $\mathfrak{A} \models \varphi$.

Denotamos que φ é verdadeira apenas por $\models \varphi$.

Assim, a sentença é verdadeira quando, e somente quando, ela é válida em toda estrutura de primeira ordem.

O conceito de verdade de Tarski depende da definição da linguagem formal e da estrutura matemática associada. Não precisa ser limitada para lógicas de primeira ordem. Pode naturalmente se estender para outras lógicas.

A proposta de formalização da quase-verdade generaliza o tratamento desta seção para as estruturas parciais, como veremos na sequência.

Capítulo 2

Sobre a quase-verdade

Neste capítulo abordamos a verdade segundo Newton da Costa e colaboradores. De fato, os precursores dessa tradição introduziram a teoria da quase-verdade, que também é conhecida como verdade pragmática ou verdade parcial.

Além disso, tratamos de outras abordagens da quase-verdade, como a perspectiva de Bueno e de Souza (1996), em que a quase-verdade é tratada via quase-satisfação; e a abordagem de Silvestrini (2011), que formalizou uma definição de verdade pragmática através da definição de satisfação pragmática e introduziu uma lógica paraconsistente e trivalente subjacente a essa abordagem de verdade pragmática.

2.1 A quase-verdade de Newton da Costa

Newton da Costa foi importante precursor na introdução da noção da quase-verdade. Ao desenvolver a concepção de quase-verdade, da Costa e colaboradores consideraram a abordagem semântica da verdade de Tarski e reconheceram sua importância para o entendimento da verdade a partir de uma correspondência entre elementos de uma linguagem formal e uma estrutura matemática, em que a verdade das sentenças deve ser dada.

De acordo com da Costa e French (2003, p. 17):

“One of the main points of Tarski’s formalization of the concept of correspondence truth is that in order to talk rigorously of truth we require a language \mathcal{L} and an interpretation \mathcal{I} of \mathcal{L} in a structure \mathcal{A} . A sentence of \mathcal{L} then is true or false only with reference to \mathcal{I} . In other words, truth and falsity are properties of sentences of a particular language \mathcal{L} , in accordance with an interpretation \mathcal{I} of \mathcal{L} in some structure \mathcal{A} ”.

De fato, há enorme contribuição via concepção da verdade de Tarski, pois de-

vido sua formalização que associa uma linguagem com uma determinada estrutura, fez-se possível o desenvolvimento da teoria de modelos.

Contudo, os autores questionam a aplicação de tal teoria nas ciências empíricas, pois as teorias físicas, por exemplo, buscam modelos não convencionais para caracterizar seus fenômenos, uma vez que os eventos que ocorrem em tais ciências nem sempre seguem a concepção clássica.

De acordo com da Costa (1999, p. 124):

“Mesmo quando a verdade (ou, em geral, a semântica) se faz na teoria de conjuntos clássica de tendência clássica, vários caminhos se abrem. Com efeito, como há diversas dessas teorias, não equivalentes entre si, constata-se que as propriedades da verdade vão depender, em parte, da teoria utilizada”.

Assim, para Newton da Costa, quando falamos sobre a verdade ou a falsidade de uma sentença, ela já possui uma interpretação pré estabelecida e, com isso, temos que teorias que são verdadeiras em certo contexto podem não o ser num contexto mais geral.

Desse modo, ao comparar duas teorias que são localmente verdadeiras, pode ocorrer algum conflito ou contradição entre elas ao serem analisadas num contexto global.

Se tomarmos, como exemplo, a mecânica quântica e a mecânica clássica, ambas as teorias explicam os mesmos fenômenos, porém ao compararmos uma com a outra há conceitos conflitantes. A partir deste problema, surge a motivação de da Costa para introduzir uma concepção de verdade que considere essa situação, tendo em conta que a abordagem clássica não seria a ideal.

Ao desenvolver a teoria da verdade, da Costa e colaboradores buscaram relacioná-la com a teoria pragmatista de James e Peirce.

Segundo da Costa e French (2003, p. 16-17), uma das intenções do pragmatismo seria lidar com situações em que a relação entre a representação e o indivíduo representado fosse vaga ou parcial. Além disso, da Costa aponta que nossas crenças, científicas ou não, referem-se a representações não determinadas, nem completas e, de certo modo, parciais, o que caracteriza o nosso conhecimento incompleto do mundo.

Ainda sobre os aspectos pragmáticos, segundo da Costa, a verdade *salva as aparências* em certos contextos. Em determinados ambientes, tudo se passa como se a sentença considerada fosse verdadeira segundo a teoria de Tarski. Com isso, da Costa apresenta o conceito de verdade como segue (1999, p. 132-133):

“...a sentença S é pragmaticamente verdadeira, ou quase-verdadeira, em um domínio de saber D , se, dentro de certos limites, S salva as aparências em D ou, em D tudo se passa como se ela fosse verdadeira segundo a teoria da correspondência”.

Ademais, nessa abordagem, a verdade é considerada como o fim de toda investigação, conceito último, do mesmo modo que ocorre na concepção pragmática.

Apesar de ter influências pragmatistas, a concepção da verdade de da Costa está inserida no contexto das ciências empíricas, em que as teorias não reproduzem fielmente a realidade, mas tentam se aproximar do real para obter boas soluções para determinados problemas.

Ainda neste ambiente é comum encontrarmos teorias conflitantes entre si, que através da quase-verdade poderiam ser tratadas de modo a contornar essa situação desagradável. Para que tal concepção fosse aplicada nas teorias, seria necessário formalizar esse conceito.

Para formalizar sua noção de quase-verdade, os precursores desenvolveram uma teoria análoga à concepção de verdade de Tarski (1944), em que uma sentença é verdadeira ou falsa apenas relativa a uma certa estrutura/modelo.

Contudo, na abordagem de Tarski as estruturas são totais o que não permite a inserção de algum componente de indeterminação. Como veremos adiante, a abordagem de da Costa para a quase-verdade é uma generalização da teoria da verdade de Tarski, com a ampliação trazida pelas estruturas parciais.

Diante do exposto, para a elaboração de uma teoria que melhor caracterizasse os aspectos das ciências empíricas, dentre eles, a incompletude do conhecimento, ou até mesmo as possíveis contradições entre teorias, Newton da Costa e colaboradores propuseram a teoria da quase-verdade, e ao formalizar matematicamente este conceito, estenderam a noção de estrutura para estrutura parcial.

Definição 2.1 *Seja D um conjunto não-vazio. Uma **relação parcial** R de aridade n sobre D é uma tripla $\langle R_+, R_-, R_u \rangle$, tal que R_+ , R_- e R_u representam conjuntos disjuntos entre si e $R_+ \cup R_- \cup R_u = D^n$, de modo que:*

- (i) R_+ é o conjunto de n -uplas que sabemos que pertencem a R ;
- (ii) R_- é o conjunto de n -uplas que sabemos que não pertencem a R ;
- (iii) R_u é o conjunto de n -uplas que não sabemos se pertencem ou não a R .

Nessa definição, o componente R_+ representa o que sabemos que vale, o conjunto R_- caracteriza o que sabemos que não vale e o R_u representa a incompletude do nosso conhecimento.

Além disso, quando o componente $R_u = \emptyset$, então temos uma relação usual que pode ser associada a R_+ .

Ainda de acordo com a formalização da quase-verdade, temos a seguinte definição de estrutura parcial.

Definição 2.2 *Uma **estrutura parcial** é um par ordenado $\langle D, R_i \rangle$ para $i \in I$ em que:*

- (i) D é um conjunto não vazio;
- (ii) $\{R_i\}_{i \in I}$ é uma família de relações parciais sobre D .

Definição 2.3 Uma *estrutura pragmática simples* (eps) para uma linguagem de primeira ordem \mathcal{L} é uma estrutura $\mathcal{A} = \langle D, R_k, \mathcal{P} \rangle$, de modo que:

- (i) D é um conjunto não vazio, o universo de \mathcal{A} ;
- (ii) R_k é uma relação parcial em D , para todo $k \in \mathbb{N}$;
- (iii) \mathcal{P} é um conjunto de sentenças de \mathcal{L} .

Uma estrutura pragmática simples nada mais é do que uma estrutura parcial com o acréscimo do conjunto \mathcal{P} , o conjunto das sentenças verdadeiras de acordo com a teoria clássica da verdade de Tarski.

A seguir, apresentamos a definição que expande a estrutura pragmática simples para uma estrutura total ou clássica.

Definição 2.4 Seja \mathcal{L} uma linguagem de primeira ordem, $\mathcal{A} = \langle D, R_k, \mathcal{P} \rangle$ uma estrutura pragmática simples e \mathcal{S} uma estrutura total, na qual \mathcal{L} pode ser interpretada. Então a estrutura \mathcal{S} é **\mathcal{A} -normal** se satisfaz as seguintes condições:

- (i) o universo de \mathcal{S} é D ;
- (ii) as relações totais de \mathcal{S} estendem as correspondentes relações parciais de \mathcal{A} ;
- (iii) toda constante de \mathcal{L} é interpretada em \mathcal{A} e em \mathcal{S} pelo mesmo elemento;
- (iv) se uma sentença α pertence a \mathcal{P} , então \mathcal{S} satisfaz α , ou seja, toda sentença de \mathcal{P} é válida em \mathcal{S} .

Diante destas noções, da Costa e colaboradores introduzem a definição de uma sentença quase-verdadeira.

Definição 2.5 Sejam \mathcal{L} uma linguagem, \mathcal{A} uma estrutura pragmática simples em que \mathcal{L} é interpretada e \mathcal{S} uma estrutura \mathcal{A} -normal. Uma sentença α de \mathcal{L} é **quase-verdadeira** na eps \mathcal{A} relativa à estrutura \mathcal{S} se α é verdadeira em \mathcal{S} , segundo a concepção de verdade de Tarski. Caso contrário, a sentença α é quase-falsa.

Assim, se uma sentença α é quase-verdadeira na estrutura \mathcal{A} , então todas as consequências lógicas de α devem ser compatíveis com qualquer sentença primária verdadeira. Desse modo, α é quase-verdadeira relativa a uma estrutura específica que a interpreta. Essa estrutura pragmática simples é a principal diferença com a abordagem de Tarski que utiliza apenas estruturas totais.

Após a abordagem de Newton da Costa e colaboradores para a quase-verdade, surgiram algumas contribuições adicionais para a quase-verdade. Dentre elas, temos a concepção de Bueno e de Souza (1996) e a abordagem de verdade pragmática de Silvestrini (2011), que serão tratadas nas próximas seções.

2.2 Quase-verdade via quase-satisfação

Bueno e de Souza (1996) consideraram que uma opção para lidar com todas questões relacionadas à verdade, seria apresentar esta noção via a quase-satisfação. Para os autores, tal definição, para ser considerada apropriada, deveria ser suficientemente forte no que se refere aos aspectos filosóficos, lógicos e metodológicos.

Quando consideramos a perspectiva realista-empirista, há uma dificuldade em estabelecer em que sentido tal definição deveria ser forte. Na concepção mais realista, a quase-verdade é entendida como algo provisório e que futuramente será substituído pela verdade no decorrer do desenvolvimento da ciência. Já no empirismo, devemos buscar a quase-verdade das teorias, uma vez que não há meios de estabelecer a verdade.

Diante disso, os autores propõem uma concepção de quase-satisfação de acordo com o empirismo construtivista. Segundo Bueno e de Souza (1996, p. 187), nesta perspectiva, a ciência é compreendida como uma atividade que não tem o objetivo de desenvolver teorias científicas verdadeiras, mas o de elaborar teorias empiricamente adequadas. Ao justificar a utilização dessa abordagem, os autores apontam que a adequação empírica é mais fraca que a verdade, o que possibilita a formalização dessa noção em termos da quase-verdade.

No que se refere à formulação matemática da quase-verdade, Bueno e de Souza buscam introduzir uma definição em que não seja necessário passar pelas estruturas parciais normais. Para tal desenvolvimento, os autores introduzem a definição de quase-satisfação de forma análoga à definição de satisfação introduzida por Tarski. O diferencial da nova proposta reside no fato de que para cada fórmula atômica está associada uma relação parcial.

Contudo, ao formalizarem a sua definição de quase-satisfação, Bueno e de Souza (1996) não consideraram o componente de indeterminação para as fórmulas negadas.

Segundo Silvestrini (2016), mesmo tendo inspirações na proposta de da Costa, com a ausência do R_u na abordagem dos autores, há uma diferença significativa com relação à formalização de quase-verdade de da Costa e colaboradores, pois uma das motivações desta concepção era considerar o componente de indeterminação ou incompletude informacional.

Além disso, na abordagem de Bueno e de Souza (1996), a quase-verdade foi compreendida também como grau de verdade, com melhores condições para se analisar o desenvolvimento das teorias científicas.

Assim, como apontam Bueno e de Souza (1996, p. 195), uma característica do desenvolvimento científico é o crescimento do grau de verdade de suas teorias e isso estaria coerente com a concepção empirista adotada.

Ademais, Bueno e de Souza verificaram que a lógica subjacente a sua teoria seria uma lógica clássica, entretanto a concepção clássica parece não captar a ideia de quase-verdade, uma vez que temos como valores de verdade apenas 0 para proposições falsas, e 1 para proposições verdadeiras, sem outra possibilidade.

Diante disso, apresentamos a formalização da noção de quase-satisfação e de quase-verdade, proposta por Bueno e de Souza (1996).

Se $\rho(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é uma fórmula, $\mathcal{A} = \langle D, (\cdot)_{\mathcal{A}} \rangle$ é uma estrutura parcial, e \vec{a} é uma sequência finita de elementos em D , então denotamos que a estrutura \mathcal{A} *satisfaz pragmaticamente* a fórmula $\rho(x_1, x_2, \dots, x_n)$ segundo a sequência \vec{a} por: $\mathcal{A} \Vdash \rho[\vec{a}]$.

Definição 2.6 *Sejam $\rho(x_1, x_2, \dots, x_n)$ uma fórmula, $\mathcal{A} = \langle D, (\cdot)_{\mathcal{A}} \rangle$ uma estrutura parcial, e \vec{a} uma sequência de elementos em D . Então definimos recursivamente a **satisfação** $\mathcal{A} \Vdash \rho[\vec{a}]$ por:*

(i) *se ρ é uma fórmula atômica $R(t_1, t_2, \dots, t_k)$, em que R é uma relação de aridade k e t_1, \dots, t_k são termos, então:*

$$\mathcal{A} \Vdash R(t_1, \dots, t_k) \Leftrightarrow (t_1^{\mathcal{A}}[\vec{a}], \dots, t_k^{\mathcal{A}}[\vec{a}]) \in R_+^{\mathcal{A}} \cup R_u^{\mathcal{A}};$$

(ii) *se ρ é uma negação $\neg\mu$, então $\mathcal{A} \Vdash \neg\mu[\vec{a}] \Leftrightarrow \mathcal{A} \not\Vdash \mu[\vec{a}]$.*

Se \mathcal{A} satisfaz pragmaticamente a fórmula $\rho(x_1, x_2, \dots, x_n)$ numa sequência \vec{a} , também dizemos que $\rho(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é **quase-satisfeita** em \mathcal{A} .

Definição 2.7 *Uma fórmula ρ é **quase-verdadeira** em uma estrutura parcial \mathcal{A} , se ρ é quase-satisfeita em \mathcal{A} por todas as sequências do domínio D de \mathcal{A} .*

A seguir, apresentamos a abordagem de verdade pragmática de Silvestrini (2011), em que a lógica subjacente é conveniente para captar a intuição de quase-verdade, pois é paraconsistente e trivalente.

2.3 A verdade pragmática via satisfação pragmática

De maneira a manter a proposta original de da Costa e colaboradores, Silvestrini (2011) introduziu uma outra abordagem para a verdade pragmática, por meio da noção de satisfação pragmática.

No seu desenvolvimento, Silvestrini estendeu, via recursão, a noção de predicados como ternas, utilizada nos desenvolvimentos de da Costa, agora como triplas ordenadas de conjuntos, para toda fórmula complexa da linguagem.

Além disso, o autor introduziu uma lógica paraconsistente de primeira ordem subjacente a essa noção de verdade pragmática, denotada por LPT1.

Inspirado na concepção de Bueno e de Souza (1996), Silvestrini propôs uma definição de verdade pragmática que evita a construção das estruturas normais e, com isso, consegue formalizar sua definição usando apenas modelos parciais.

Iniciou com a formalização da noção de satisfação pragmática, desenvolvida de modo semelhante à noção de satisfação de Tarski, mas agora referente a uma estrutura parcial.

Contudo, na sua formalização, Silvestrini (2011) preservou a proposta original, pois o componente de indeterminação se faz presente também nas fórmulas negadas, o que não ocorre na abordagem de Bueno e de Souza.

Outra contribuição de Silvestrini está em expandir a noção de predicados como ternas, isto é, triplas ordenadas de conjuntos para a interpretação de fórmulas complexas.

A partir disso, foi possível dar uma interpretação parcial das fórmulas complexas, enquanto que na abordagem original apenas as fórmulas atômicas eram interpretadas em termos parciais. As fórmulas compostas ou complexas eram interpretadas de modo clássico.

Apresentamos, de acordo com Silvestrini (2011), a definição de satisfação pragmática e de verdade pragmática.

Iniciamos com as mesmas considerações da seção anterior.

Se $\rho(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é uma fórmula, $\mathcal{A} = \langle D, (\cdot)_{\mathcal{A}} \rangle$ é uma estrutura parcial, e \vec{a} é uma sequência finita de elementos em D , então denotamos que a estrutura \mathcal{A} *satisfaz pragmaticamente* a fórmula $\rho(x_1, x_2, \dots, x_n)$ segundo a sequência \vec{a} por: $\mathcal{A} \Vdash \rho[\vec{a}]$.

Definição 2.8 *Sejam $\rho(x_1, x_2, \dots, x_n)$ uma fórmula, $\mathcal{A} = \langle D, (\cdot)_{\mathcal{A}} \rangle$ uma estrutura parcial, e \vec{a} uma sequência de elementos em D . Então definimos recursivamente a **satisfação** $\mathcal{A} \Vdash \rho[\vec{a}]$ por:*

(i) *se $R(t_1, \dots, t_k)$ é uma fórmula atômica, em que R é uma relação de aridade k , então:*

$$\mathcal{A} \Vdash R(t_1, \dots, t_k) \Leftrightarrow (t_1^{\mathcal{A}}[\vec{a}], \dots, t_k^{\mathcal{A}}[\vec{a}]) \in R_+^{\mathcal{A}} \cup R_u^{\mathcal{A}}$$

$$\mathcal{A} \Vdash \neg R(t_1, \dots, t_k) \Leftrightarrow (t_1^{\mathcal{A}}[\vec{a}], \dots, t_k^{\mathcal{A}}[\vec{a}]) \in R_-^{\mathcal{A}} \cup R_u^{\mathcal{A}}$$

(ii) *se $\mathcal{A} \not\Vdash (\rho)[\vec{a}]$, então $\mathcal{A} \Vdash \neg\rho[\vec{a}]$*

(iii) $\mathcal{A} \Vdash (\rho \wedge \mu)[\vec{a}] \Leftrightarrow \mathcal{A} \Vdash \rho[\vec{a}]$ e $\mathcal{A} \Vdash \mu[\vec{a}]$

(iv) $\mathcal{A} \Vdash (\rho \vee \mu)[\vec{a}] \Leftrightarrow \mathcal{A} \Vdash \rho[\vec{a}]$ ou $\mathcal{A} \Vdash \mu[\vec{a}]$

(v) $\mathcal{A} \Vdash (\rho \rightarrow \mu)[\vec{a}] \Leftrightarrow \mathcal{A} \not\Vdash \rho[\vec{a}]$ ou $\mathcal{A} \Vdash \mu[\vec{a}]$

(vi) $\mathcal{A} \Vdash \forall x \rho[x, \vec{a}] \Leftrightarrow \mathcal{A} \Vdash \rho[b, \vec{a}]$, para todo $b \in D$.

Definição 2.9 *Uma fórmula $\rho(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é **quase-verdadeira** numa estrutura parcial \mathcal{A} quando para toda sequência \vec{a} , tem-se que $\mathcal{A} \Vdash \rho[\vec{a}]$.*

A notação utilizada para representar que ρ é quase-verdadeira em \mathcal{A} é $\mathcal{A} \Vdash \rho$ e, nesse caso, dizemos que \mathcal{A} *satisfaz pragmaticamente* a fórmula ρ , ou que a fórmula ρ é satisfeita pragmaticamente pelo modelo parcial \mathcal{A} .

Diante dessa definição de verdade pragmática segundo Silvestrini(2011), apresentamos no próximo capítulo a lógica da verdade pragmática, a qual foi configurada como uma via de formalização da definição de verdade apresentada acima.

Capítulo 3

A lógica da verdade pragmática

Neste capítulo, apresentamos, de acordo com Feitosa e Silvestrini (2016), o fragmento proposicional da lógica da verdade pragmática (LPT), a qual foi introduzida num sistema axiomático e interpretada numa semântica de matrizes trivalentes. Explicitamos a linguagem, interpretação dos operadores, bem como os esquemas de axiomas e a única regra de inferência, a *Modus Ponens*. Ademais, consideramos o resultado de correção e completude entre o sistema axiomático da LPT e as matrizes trivalentes.

Ao introduzir sua nova abordagem para a quase-verdade, Silvestrini (2011) formalizou uma lógica de primeira ordem da verdade pragmática, subjacente a esta noção, denotada por LPT1. Entretanto, neste trabalho abordamos apenas o fragmento proposicional da LPT1, a lógica da verdade pragmática (*logic of pragmatic truth - LPT*).

Ao formalizar o conceito de verdade pragmática, Silvestrini (2011) observou que a lógica proposicional subjacente seria uma lógica paraconsistente. Esta característica da LPT é uma vantagem, pois ao analisarmos a noção de quase-verdade, estamos num ambiente com possíveis contradições, contexto em que a lógica clássica não seria a abordagem ideal.

Outro fator importante consiste no fato de que a LPT é uma lógica trivalente, ou seja, admite a seguinte semântica trivalente associada com a relação parcial $\langle R_+, R_-, R_u \rangle$: valor 1 para sentenças verdadeiras, valor 0 para sentenças falsas, e valor $\frac{1}{2}$ para as sentenças indeterminadas.

3.1 Semântica de LPT

A linguagem proposicional de LPT é constituída por: $L = \{\neg, \wedge, \rightarrow\}$, em que os operadores \neg , \wedge , \rightarrow representam, respectivamente, as noções de negação paraconsistente, conjunção e condicional.

Assim, seguem as interpretações em matrizes desses operadores básicos da LPT:

\rightarrow	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1	1
$\frac{1}{2}$	0	1	1
1	0	1	1

\wedge	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	1

	\neg
0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0

Além desses operadores, temos os seguintes operadores derivados e constantes de LPT:

Disjunção: $\varphi \vee \psi =_{def} \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

Top: $\top =_{def} \varphi \rightarrow \varphi$

Botton: $\perp =_{def} \neg\top$

Negação clássica: $\sim \varphi =_{def} \varphi \rightarrow \perp$

Consistência: $\circ\varphi =_{def} \sim(\varphi \wedge \neg\varphi)$

Bicondicional: $\varphi \leftrightarrow \psi =_{def} (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$.

A disjunção é obtida a partir da conjunção ao aplicarmos a regra *De Morgan*. O operador ‘top’ caracteriza a tautologia e o ‘botton’ a contradição. Já o operador de consistência destaca os aspectos clássicos da lógica. E o bicondicional é definido a partir do condicional.

As suas interpretações são dadas pelas seguintes tabelas:

\vee	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
1	1	1	1

	\sim
0	1
$\frac{1}{2}$	0
1	0

	\circ
0	1
$\frac{1}{2}$	0
1	1

\leftrightarrow	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	0	0
$\frac{1}{2}$	0	1	1
1	0	1	1

	\top
0	1
$\frac{1}{2}$	1
1	1

	\perp
0	0
$\frac{1}{2}$	0
1	0

Além disso, segue da definição da disjunção \vee e das tabelas de \wedge e \vee , que valem na LPT as leis de De Morgan $\neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$ e $\neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$.

A semântica matricial de LPT é definida da seguinte forma:

$$\mathcal{M}_{LPT} = (\{0, \frac{1}{2}, 1\}, \neg, \wedge, \rightarrow, \{\frac{1}{2}, 1\}),$$

de modo que o conjunto de valores designados, valores que assumimos como verdadeiros, é dado pelo conjunto $D = \{\frac{1}{2}, 1\}$ e com a sua respectiva relação de consequência semântica.

Apresentamos, segundo Feitosa e Silvestrini (2016), a definição de valoração para a LPT e de consequência semântica.

Definição 3.1 *Seja $Var(LPT) = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$ o conjunto das variáveis proposicionais de LPT. Uma **valoração** para LPT é qualquer função:*

$$v : Var(LPT) \rightarrow \{0, \frac{1}{2}, 1\},$$

a qual é estendida de modo único para o conjunto $For(LPT)$ de acordo com os operadores apresentados acima.

Se $\Gamma \subseteq For(LPT)$, então $v(\Gamma) = \{v(\gamma) : \gamma \in \Gamma\}$. Diante disso, introduzimos a implicação lógica ou consequência semântica de LPT.

Definição 3.2 *Para $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq For(LPT)$, o conjunto Γ **implica** φ quando para toda LPT-valoração v , se $v(\Gamma) \subseteq D$, então $v(\varphi) \in D$, ou seja:*

$$\Gamma \vDash \varphi \iff v(\Gamma) \subseteq D \Rightarrow v(\varphi) \in D.$$

Como consequência da Definição 3.1, temos que toda fórmula de LPT válida segundo uma valoração $v : Var(LPT) \rightarrow \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ é também válida segundo a restrição booleana de v , isto é, segundo $v : Var(LPT) \rightarrow \{0, 1\}$, com os significados booleanos dos operadores \neg , \wedge e \rightarrow , em que é apagado o valor $\frac{1}{2}$. Deste modo, toda fórmula LPT-válida é uma tautologia.

Assim, podemos construir tabelas de verdade de fórmulas de LPT, que por ser uma lógica trivalente, tem como número de linhas algum múltiplo de 3, a saber, 3^n . Vejamos alguns exemplos:

(a) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$:

φ	\rightarrow	$(\psi$	\rightarrow	$\varphi)$
0	1	0	1	0
0	1	$\frac{1}{2}$	0	0
0	1	1	0	0
$\frac{1}{2}$	1	0	1	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	1	1	1	$\frac{1}{2}$
1	1	0	1	1
1	1	$\frac{1}{2}$	1	1
1	1	1	1	1

(b) $\varphi \vee (\varphi \rightarrow \psi)$:

φ	\vee	$(\varphi$	\rightarrow	$\psi)$
0	1	0	1	0
0	1	0	1	$\frac{1}{2}$
0	1	0	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	$\frac{1}{2}$
1	1	1	1	1

(c) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi))$

φ	\rightarrow	$(\psi$	\rightarrow	$(\varphi$	\wedge	$\psi)$
0	1	0	1	0	0	0
0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$
0	1	1	0	0	0	1
$\frac{1}{2}$	1	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	1	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
1	1	0	1	1	0	0
1	1	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	1	1	1	1	1	1

(d) $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi$

$(\varphi$	\wedge	$\psi)$	\rightarrow	ψ
0	0	0	1	0
0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
0	0	1	1	1
$\frac{1}{2}$	0	0	1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	1
1	0	0	1	0
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
1	1	1	1	1

(e) $\circ\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \psi))$

\circ	φ	\rightarrow	$(\varphi$	\rightarrow	$(\neg$	φ	\rightarrow	$\psi))$
1	0	1	0	1	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1	0	1	$\frac{1}{2}$
1	0	1	0	1	1	0	1	1
0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1
1	1	1	1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	0	1	1	$\frac{1}{2}$
1	1	1	1	1	0	1	1	1

(f) Cada fórmula σ do tipo $\varphi \wedge \neg\varphi \wedge \circ\varphi$ é contraditória:

φ	$\neg\varphi$	$\circ\varphi$	σ
0	1	1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
1	0	1	0

Entretanto, algumas fórmulas tautológicas bem conhecidas não são LPT-válidas. Vejamos algumas delas:

(g) $(\varphi \wedge \neg\varphi) \rightarrow \psi$.

Tomemos uma valoração v tal que $v(\varphi) = \frac{1}{2}$ e $v(\psi) = 0$. Daí, $v((\varphi \wedge \neg\varphi) \rightarrow \psi) = (\frac{1}{2} \wedge \frac{1}{2}) \rightarrow 0 = \frac{1}{2} \rightarrow 0 = 0$.

(h) $\neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$.

Tomemos, mais uma vez, uma valoração v tal que $v(\varphi) = \frac{1}{2}$ e $v(\psi) = 0$. Daí, $v(\neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)) = (\frac{1}{2} \rightarrow (\frac{1}{2} \rightarrow 0)) = \frac{1}{2} \rightarrow 0 = 0$.

(i) $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$.

Tomemos uma valoração v tal que $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = \frac{1}{2}$. Daí, $v((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)) = (1 \rightarrow \frac{1}{2}) \rightarrow (\frac{1}{2} \rightarrow 0) = 1 \rightarrow 0 = 0$.

Proposição 3.3 *Se $v : For(LPT) \rightarrow \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ é uma LPT-valoração, então:*

(i) $v(\varphi) \in D \Leftrightarrow v(\varphi) = \frac{1}{2}$ ou $v(\varphi) = 1$;

(ii) $v(\neg\varphi) \in D \Leftrightarrow v(\varphi) = \frac{1}{2}$ ou $v(\varphi) = 0$;

(iii) $v(\circ\varphi) \in D \Leftrightarrow v(\varphi) = 0$ ou $v(\varphi) = 1$.

Demonstração: *Segue diretamente das tabelas dos operadores de LPT.* ■

3.2 Sistema dedutivo de LPT

O sistema dedutivo de LPT foi introduzido axiomáticamente.

O sistema axiomático da lógica LPT, segue de acordo com Feitosa e Silvestrini (2016):

Esquemas de Axiomas:

$$(A1) \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$(A2) (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \sigma))$$

$$(A3) (\sigma \rightarrow \varphi) \rightarrow ((\sigma \rightarrow \psi) \rightarrow (\sigma \rightarrow (\varphi \wedge \psi)))$$

$$(A4) (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$$

$$(A5) (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi$$

$$(A6) \varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$$

$$(A7) \psi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$$

$$(A8) (\varphi \rightarrow \sigma) \rightarrow ((\psi \rightarrow \sigma) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \rightarrow \sigma))$$

$$(A9) \varphi \vee (\varphi \rightarrow \psi)$$

$$(A10) \varphi \vee \neg\varphi$$

$$(A11) \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$$

$$(A12) \circ\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \psi))$$

$$(A13) \neg \circ\varphi \rightarrow (\varphi \wedge \neg\varphi)$$

$$(A14) \circ(\varphi \rightarrow \psi)$$

$$(A15) (\circ\varphi \wedge \circ\psi) \rightarrow \circ(\varphi \wedge \psi)$$

$$(A16) \circ\varphi \rightarrow \circ\neg\varphi.$$

Regra de Dedução:

$$(MP) \varphi, \varphi \rightarrow \psi \vdash \psi.$$

Segundo os autores, os axiomas (A1), (A2) e a regra *Modus Ponens* asseguram a validade do teorema da dedução para a lógica LPT. Já os axiomas (A3), (A4), e (A5) caracterizam o operador da conjunção (\wedge) como um ínfimo; e os axiomas (A6), (A7) e (A8) fazem o operador da disjunção (\vee) um supremo. Além disso, o axioma (A13) representa o caso em que podemos admitir uma contradição em LPT, sendo este um aspecto importante da paraconsistência da lógica em questão.

Feitosa e Silvestrini (2016) demonstram que o sistema dedutivo acima, da lógica

LPT, é correto e completo segundo a semântica matricial \mathcal{M}_{LPT} .

Portanto, temos o seguinte teorema.

Teorema 3.4 $\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vDash \varphi$.

Utilizaremos este resultado no Capítulo 5, para a prova da equivalência entre o método hilbertiano da LPT e o nosso sistema de tableaux, denotado por TPT.

No próximo capítulo abordamos detalhadamente o método de tableaux analíticos e no Capítulo 5 introduzimos um sistema de tableaux para a lógica da verdade pragmática (LPT).

Capítulo 4

O método dos tableaux analíticos

Neste capítulo pretendemos apresentar um método dedutivo alternativo ao axiomático, a saber, o sistema de tableaux.

Tais desenvolvimentos são fundamentais, uma vez que introduziremos, no próximo capítulo, a lógica da verdade pragmática num sistema de tableaux.

Escolhemos este método como alternativo ao axiomático, pois é um sistema de prova na maioria das vezes mais rápido que o axiomático, além de ser um método que pode ser implementado facilmente em ambiente computacional, o que não ocorre no ambiente axiomático.

Outra vantagem dos tableaux com relação ao método axiomático está no fato de que quando concluimos que uma fórmula é não válida, o método nos fornece de pronto um contra-exemplo.

Inicialmente, abordamos a origem do método, os principais autores que influenciaram o desenvolvimento desse sistema de prova e, também, explicitamos algumas de suas características.

Na segunda seção, apresentamos, segundo Smullyan (1968), os tableaux analíticos para a lógica proposicional clássica (LPC).

Deste modo, introduzimos as regras de expansão dos tableaux, cláusulas de fechamento e, em seguida, fornecemos alguns exemplos para uma melhor visualização de como o método funciona.

Na terceira seção, abordamos o método dos tableaux para a lógica quantificacional clássica (LQC), salientando alguns aspectos específicos da LQC.

De acordo com Smullyan (1968), apresentamos as regras de expansão, bem como as cláusulas de fechamento. Além disso, apresentamos alguns exemplos de tableaux para a LQC.

Na última seção deste capítulo, especificamos alguns aspectos computacionais dos sistemas de tableaux analíticos, baseados nos trabalhos de Silva, Finger e Mello (2006)

e D’Agostino (1999). Tais autores, apresentam os principais pontos da relação entre o método de tableaux analíticos e a implementação deste sistema em computadores.

4.1 A história dos tableaux

Apesar de não ser conhecido por seus trabalhos na área de lógica, podemos apontar que o precursor do método dos tableaux foi Lewis Carroll, conhecido mundialmente por ser autor do famoso livro “Alice no país das maravilhas”.

Carroll, antes de Gentzen, introduziu um método de decisão para um encadeamento de silogismos e tal sistema é denominado por ele de árvore, uma vez que associa o método com as árvores genealógicas, as quais crescem para baixo. Além disso, outra semelhança está no fato de que este sistema também é um método de refutação.

A partir dos estudos de Gentzen (1935), foram introduzidos os sistemas de provas, que são caracterizados por demonstrar a validade de um argumento de forma mais rápida e finita. Tais sistemas de Gentzen assumem o princípio da subfórmula, isto é, se uma fórmula inicial φ tem uma demonstração, então existe uma demonstração de φ que contém apenas subfórmulas de φ .

Dois sistemas essenciais introduzidos por Gentzen são os sistemas de *Dedução Natural* e os *Cálculos de sequentes*.

Da mesma forma que nos trabalhos de Gentzen, no sistema de tableaux, a demonstração da validade de uma fórmula deve ser sempre finita e, usualmente, mais rápida que os demais métodos dedutivos.

Inspirados nos desenvolvimentos de Gentzen, Beth (1959) introduziu o método de *tableaux semânticos*. Ele tinha como motivação principal a busca de contra-exemplos e considerava os tableaux como um sistema adequado para tal. Além disso, Beth apresentou seus tableaux dividindo as fórmulas em duas categorias: válidas e inválidas.

Outro expoente na história dos tableaux foi Hintikka (1955), que ao introduzir seu sistema de tableaux também teve inspirações semânticas. Para Hintikka, a prova é uma tentativa de construção de um modelo, no qual assumimos $\neg\varphi$ como verdadeira. Se a suposição falhar, então φ é válida.

Ademais, para ele toda prova por tableau parece seguir um caminho negativo, ou seja, são provas obtidas pela impossibilidade de se encontrar contra-exemplos.

Com motivações nos trabalhos de Beth, Lis (1960) introduziu um outro sistema de tableaux semânticos. Contudo, seus trabalhos só foram descobertos e reconhecidos em 1968.

Análoga à abordagem de Beth, Lis dividiu as fórmulas em duas categorias, entretanto utilizou símbolos para caracterizá-las, a saber, a notação $+$ para as fórmulas válidas

e — para as fórmulas não válidas. Lis também apresentou um sistema de dedução natural, conhecido hoje como *tableaux* não assinalados.

Raymond Smullyan (1968) abordou o método dos tableaux analíticos de uma forma elegante, e a partir do seu trabalho este sistema dedutivo se destacou entre os demais.

De acordo com Golzio (2011, p. 55), Smullyan apresentou uma versão mais simplificada de tableau, uma vez que tanto os tableaux de Beth, como os de Hintikka não eram sistemas fáceis de manipular.

A principal característica dos tableaux analíticos está no fato de que este sistema de prova assume o princípio da subfórmula, da mesma forma que nos sistemas de Gentzen.

Além disso, ele apresenta o tableau com fórmulas sinalizadas, mas diferentemente dos tableaux de Lis, as fórmulas são assinaladas com T (*true*) e F (*false*).

Como o próprio Smullyan salienta, este sistema preserva certas características dos tableaux semânticos de Beth, por exemplo, também utiliza a estrutura de árvore; e alguns aspectos do tableaux de Hintikka, que relaciona os pontos presentes na árvore com fórmulas.

Tal sistema também é um método de refutação, visto que para provar que uma fórmula φ é válida, primeiramente assumimos que ela é não válida. A partir disso, expandimos o tableau da fórmula $\neg\varphi$. Se encontrarmos uma contradição em todas as possibilidades de análise da fórmula, então concluímos que φ é válida. Caso contrário, ela não é válida.

Ademais, os sistemas de tableaux são caracterizados por serem algorítmicos. Eles podem ser executados por um computador e após a aplicação de um número finito de passos chegamos a uma conclusão.

Segundo Silva, Finger e Melo (2006, p. 48), o método dos tableaux é um procedimento de decisão para as fórmulas válidas, do mesmo modo que as tabelas de verdade são para a lógica proposicional clássica. Porém, nas tabelas de verdade há uma desvantagem, uma vez que as linhas são definidas exponencialmente, de acordo com o número de proposições atômicas da fórmula testada. Além disso, diferentemente do método axiomático, nos tableaux encontramos diretamente um contra-exemplo quando não temos a validade da fórmula.

De acordo com Silvestrini (2005), o tableau é desenvolvido por meio das regras de expansão ou regras para construção do tableau. Estas regras permitem analisar uma fórmula em uma certa linguagem \mathcal{L} e ao aplicar tais regras, geramos novas fórmulas no tableau. Estas regras nos possibilitam avançar de uma sucessão de fórmulas para outra sucessão de fórmulas.

Outro conceito importante para o tableau é o de ramo, que Smullyan introduziu

como uma possibilidade de análise de uma fórmula, e utiliza tal termo para definir o tableau como uma *árvore ordenada diádica*.

Atualmente, o método de *tableaux* analíticos tem sido uma possibilidade para implementação de algum provador de teoremas automáticos para a lógica proposicional clássica, pois este sistema é caracterizado como um algoritmo.

Silva, Finger e Melo (2006) apresentaram algumas formas de se implementar o método e, para eles, há dois pontos fundamentais que precisam ser analisados: as *estratégias computacionais* e as *estruturas de dados*. As estratégias computacionais são responsáveis por implementar uma condição determinística de escolha em cada etapa não-determinística do programa. Já as estruturas de dados são as informações que vamos acrescentar no programa, para o computador gerar a prova por tableau.

Agora, apresentamos o método dos tableaux analíticos para a lógica proposicional clássica, de acordo com Smullyan (1968). Assim, abordamos várias definições que serão usadas para a formalização do tableau como uma árvore ordenada diádica. Em seguida, apresentamos as regras de expansão para a LPC e alguns exemplos de tableaux.

4.2 LPC em um sistema de tableaux

O método de tableaux analíticos para a lógica proposicional clássica abordado nesta seção está baseado em Smullyan (1968).

Apresentamos algumas definições importantes, que serão necessárias para a definição do método de tableaux, por exemplo, a definição de árvore ordenada. Além disso, abordamos as regras de expansão para a LPC e em seguida desenvolvemos alguns exemplos de tableaux analíticos para a LPC.

Antes de introduzirmos a definição de tableau analítico, apresentamos algumas definições relevantes para o entendimento do método.

Definição 4.1 *Uma árvore não ordenada \mathcal{T} é uma coleção que contém os seguintes itens:*

- (i) *um conjunto S de indivíduos denominados pontos;*
- (ii) *uma função \mathcal{H} que relaciona à cada ponto α de S um número inteiro positivo $\mathcal{H}(\alpha)$, chamado nível de α .*
- (iii) *uma relação R definida em S , de modo que $\alpha R \beta$ significa que α é o antecessor de β , ou ainda, que β é sucessor de α .*

A relação R deve satisfazer as condições abaixo:

- (iv) *existe um único ponto α_1 de nível 1. Este ponto é denominado a origem da árvore \mathcal{T} .*

- (v) qualquer ponto de S tem um único antecessor, exceto a origem.
- (vi) para quaisquer pontos α e β , se β é o sucessor de α , então $\mathcal{H}(\beta) = \mathcal{H}(\alpha) + 1$.

Definição 4.2 Se α não tem sucessores, então é denominado **ponto final**.

Definição 4.3 Se α tem um único sucessor, então é denominado **ponto simples**.

Definição 4.4 Se α tem mais que um sucessor, então é denominado **ponto de junção**.

Definição 4.5 Uma árvore \mathcal{T} é **ordenada** quando há uma função ϕ que associa a cada ponto de junção β uma sequência $\phi(\beta)$ de todos os sucessores de β , mas sem repetições.

Definição 4.6 Uma árvore ordenada é dita **diádica** quando cada ponto tem no máximo dois sucessores.

Definição 4.7 Uma árvore é **finitamente gerada** quando cada ponto possui um número finito de sucessores. Uma árvore \mathcal{T} é finita se \mathcal{T} tem um número finito de pontos.

Para que o tableau seja desenvolvido são necessárias as regras de expansão, uma vez que são elas que nos permitem a construção do método.

Assim, iniciamos a construção do tableau com a negação da fórmula inicial φ , ou seja, temos como ponto inicial a fórmula $F\varphi$. A partir dela, podemos encontrar dois tipos de fórmulas, que chamaremos de fórmulas do tipo A e do tipo B, de maneira que cada uma delas caracteriza um conjunto de regras.

A seguir, apresentamos estes tipos de fórmulas e suas características.

Fórmulas do tipo A: as consequências de uma fórmula do tipo A são consequências diretas, isto é, não geram ramificações e, deste modo, permanecem no mesmo ramo. As regras que possuem fórmulas desse tipo são também denominadas regras do tipo *conjuntivo*.

Fórmulas do tipo B: no caso das fórmulas do tipo B, as consequências não são diretas, no sentido de que elas geram dois ramos distintos, cada um deles sendo uma possibilidade de análise da fórmula inicial. As regras que contém fórmulas do tipo B são chamadas de regras do tipo *disjuntivo*.

De modo análogo ao apresentado por Smullyan (1968), seguem abaixo as regras que permitem expandir um tableau para a lógica proposicional clássica, também chamadas de regras de expansão. Usamos tableaux com fórmulas marcadas, com T para indicar a verdade (de true) e F para indicar a falsidade.

Regras do tipo A

$$\begin{array}{c} \text{T} \quad \neg\alpha \\ \hline \text{F} \quad \alpha \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{F} \quad \neg\alpha \\ \hline \text{T} \quad \alpha \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{T} \quad \alpha \wedge \beta \\ \hline \text{T} \quad \alpha \\ \text{T} \quad \beta \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{F} \quad \alpha \vee \beta \\ \hline \text{F} \quad \alpha \\ \text{F} \quad \beta \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{F} \quad \alpha \rightarrow \beta \\ \hline \text{T} \quad \alpha \\ \text{F} \quad \beta \end{array}$$

Regras do tipo B

$$\begin{array}{c} \text{F} \quad \alpha \wedge \beta \\ \hline \text{F} \quad \alpha \mid \text{F} \quad \beta \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{T} \quad \alpha \vee \beta \\ \hline \text{T} \quad \alpha \mid \text{T} \quad \beta \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{T} \quad \alpha \rightarrow \beta \\ \hline \text{F} \quad \alpha \mid \text{T} \quad \beta \end{array}$$

Após a aplicação de todas as regras de expansão possíveis no tableau, temos as seguintes situações:

- (i) ou encontramos uma contradição $\varphi \wedge \neg\varphi$ em cada possibilidade de análise da fórmula, isto é, em cada ramo, e diante disso concluímos que a fórmula inicial é válida.
- (ii) outra situação é não encontrarmos nenhuma contradição após a aplicação de todas as regras de expansão possíveis em algum ramo. Neste caso, temos um contra exemplo e podemos concluir que a fórmula φ é não válida.

Apresentamos, agora, algumas definições para formalizar as noções acima.

Definição 4.8 Um *ramo* é um conjunto finito ou enumerável de pontos a partir da origem, de maneira que cada ponto do ramo é antecessor do próximo.

Observe que último ponto de cada ramo é um ponto final.

Definição 4.9 Se o ramo tem um número finito de pontos, então é chamado *ramo finito*, caso contrário, ele é um *ramo infinito*.

Definição 4.10 Um ramo é *fechado* quando ocorrem nele fórmulas $T\varphi$ e $F\varphi$.

Para indicarmos que um ramo é fechado usaremos o símbolo ‘×’.

Definição 4.11 Um ramo é *aberto* se não é fechado.

Assim, num ramo aberto qualquer, após a aplicação de todas as possíveis regras de expansão não há uma contradição dada por $T\varphi$ e $F\varphi$.

Definição 4.12 Um *tableau analítico* \mathcal{T} para a fórmula φ é uma árvore ordenada diádica, em que os seus pontos são fórmulas e sua construção ocorre da maneira seguinte. Iniciamos ao colocar $F\varphi$ na origem. A seguir, considerando-se que \mathcal{T} é um tableau construído para φ e que ψ é um dos seus pontos finais, então podemos expandir \mathcal{T} de acordo com as duas operações abaixo:

- se a fórmula ψ é do tipo *A*, então o tableau é expandido em um único ramo pelas consequências diretas de ψ ;
- se a fórmula ψ é do tipo *B*, então o tableau é expandido com dois ramos a partir de ψ , o que gera uma bifurcação dada pelas consequências diretas de ψ . Teremos então o sucessor esquerdo de ψ e o sucessor direito de ψ .

Definição 4.13 Um tableau é **fechado** quando todos os seus ramos são fechados e é aberto se algum ramo é aberto.

Definição 4.14 Um conjunto Γ de fórmulas é **fechado** se há um tableau fechado para a conjunção das fórmulas de Γ .

Esta definição só fica precisa se Γ é um conjunto finito de fórmulas.

Definição 4.15 Uma fórmula φ é **consequência analítica** de um conjunto de fórmulas Γ , o que denotamos por $\Gamma \Vdash \varphi$, se o conjunto $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é fechado.

Desta maneira, no método dos tableaux, para avaliarmos a consequência analítica $\Gamma \Vdash \varphi$, precisamos construir o tableau de $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. Se ele for fechado, então vale a consequência e se ele não for fechado, então não há a consequência.

Definição 4.16 Uma fórmula φ é **demonstrável** pelo tableau \mathcal{T} , o que é denotado por $\Vdash \varphi$, se podemos construir um tableau fechado de $\neg\varphi$.

Definição 4.17 Um ramo de \mathcal{T} é **completo** se não existem mais possibilidades de aplicação de regras de expansão no ramo ou se o ramo é fechado.

Definição 4.18 Um tableau é **completo** quando todos os seus ramos são saturados.

Os ramos e tableaux completos, por vezes, são também ditos saturados.

A seguir, apresentamos alguns exemplos de dedução de fórmulas pelo método dos tableaux analíticos para a LPC.

Como estamos considerando os tableaux analíticos de Smullyan, as fórmulas são sinalizadas, isto é, atribuímos T (*true*) para fórmulas verdadeiras e F(*false*) para

fórmulas falsas.

Exemplos:

(a) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

- 0. F $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
- 1. T φ
- 2. F $\psi \rightarrow \varphi$
- 3. T ψ
- 4. F φ
- 5. ×

Neste exemplo, iniciamos o tableau negando a fórmula inicial. Em seguida, aplicamos a regra de expansão da condicional falsa e ao analisarmos as consequências utilizamos novamente a mesma regra em (2). Desta forma, fechamos o único ramo deste tableau, pois temos T φ em (1) e F φ em (4). Consequentemente, temos um tableau fechado e, portanto, a fórmula $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$ é válida.

(b) $((\varphi \rightarrow \psi) \wedge \neg\psi) \rightarrow \neg\varphi$

- 0. F $((\varphi \rightarrow \psi) \wedge \neg\psi) \rightarrow \neg\varphi$
- 1. T $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge \neg\psi$
- 2. F $\neg\varphi$
- 3. T $\varphi \rightarrow \psi$
- 4. T $\neg\psi$
- 5. F ψ
- 6. T φ
- / \
- 7. F φ T ψ
- 8. × ×

Após iniciarmos o tableau considerando a fórmula inicial falsa, aplicamos a regra da condicional falsa e obtemos duas consequências diretas (1) e (2). Em seguida, aplicamos a regra da conjunção verdadeira em (1) e da negação falsa em (2). Ao aplicarmos a regra da condicional verdadeira em (3), obtemos duas ramificações distintas em (7). Assim, temos que o primeiro ramo é fechado, pois temos T φ em (6) e F φ em (7). Segue também que o segundo ramo é fechado, uma vez que em (5) temos F ψ e em (7) T ψ . Portanto, o tableau é fechado, e podemos concluir que a fórmula $((\varphi \rightarrow \psi) \wedge \neg\psi) \rightarrow \neg\varphi$ é uma tautologia na lógica proposicional clássica, conhecida também como *Modus Tollens*.

(c) $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \lambda$

0. $F ((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \lambda)$
1. $T \varphi \wedge \psi$
2. $F \lambda$
3. $T \varphi$
4. $T \psi$
- 5.

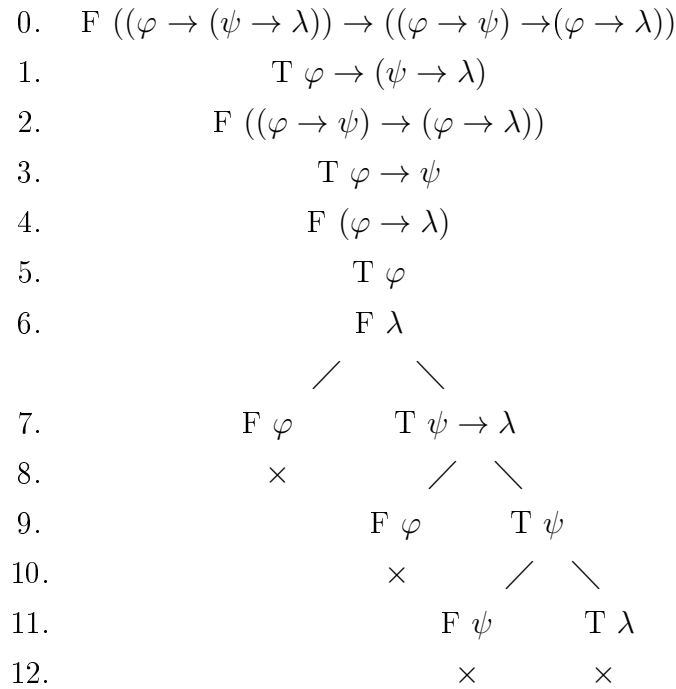
No tableau acima, aplicamos a regra da condicional falsa na origem. A partir disso, seguem duas consequências diretas em (1) e (2). Agora, utilizamos a regra da conjunção verdadeira em (1), obtemos as consequências (3) e (4) no mesmo ramo. Contudo, o único ramo deste tableau é completo e não encontramos contradição. Logo, a fórmula inicial $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \lambda$ é não válida.

(d) $(\varphi \vee (\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow \psi$

0. $F ((\varphi \vee (\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow \psi)$
1. $T \varphi \vee (\varphi \rightarrow \psi)$
2. $F \psi$
3. $T \varphi \quad T \varphi \rightarrow \psi$
4. $F \varphi \quad T \psi$
5. \times
- 6.

Iniciamos este tableau, considerando falsa a fórmula que pretendemos provar. Aplicamos a regra do condicional falso em (0) e temos duas consequências diretas em (1) e em (2). Utilizamos também a regra da disjunção verdadeira em (1), a qual gera as duas possibilidades de análise em (3). Ao aplicarmos a regra da implicação verdadeira em (3), obtemos apenas fórmulas atômicas e não há mais regras de expansão possíveis para serem aplicadas neste tableau. Considerando o fato que dois ramos ficaram abertos, temos um tableau aberto. Assim, a fórmula inicial não é válida, ou seja, não é uma tautologia na lógica proposicional clássica.

(e) $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \lambda)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \lambda))$



Neste exemplo, começamos o tabelau assumindo a fórmula inicial falsa. Em seguida, aplicamos a regra da implicação falsa em (0), gerando os resultados (1) e (2). Posteriormente, utilizamos a mesma regra da implicação falsa em (2) e em (4), gerando as suas respectivas consequências. Ao analisarmos as demais fórmulas, aplicamos a regra da implicação verdadeira em (1) e obtemos duas consequências em ramos distintos em (7). Usamos ainda a regra da implicação verdadeira em (3) e em (7). Feito isto, encontramos uma contradição em todos esses ramos desse tableau, e, conseqüentemente, são ramos fechados. Diante disso, podemos afirmar que o tableau é fechado e a fórmula inicial é válida.

4.3 Tableaux analíticos para a LQC

Nesta seção, apresentamos o método dos tableaux analíticos para a lógica quantificacional clássica, de acordo com Smullyan (1968).

O sistema de tableaux para a LQC é análogo ao da LPC, contudo, neste ambiente, temos o acréscimo das regras específicas para os quantificadores universal \forall (*para todo*) e existencial \exists (*existe algum*).

Existem muitas fórmulas válidas além das tautológicas. Assim, apresentamos as regras de expansão adicionais, algumas considerações sobre a quantificação e em seguida mostramos alguns exemplos.

A forma de iniciar o tableau para o ambiente de primeira ordem (LQC) é a mesma da LPC, isto é, se queremos analisar a validade de φ , consideramos como ponto inicial do tableau a fórmula $F \varphi$.

A partir daí, podemos aplicar regras do tipo conjuntivo ou disjuntivo, quando não houver quantificação, lembrando que estas duas categorias são da lógica proposicional clássica e continuam fazendo parte do conjunto de regras de expansão do tableau para a LQC.

Entretanto, temos ainda outros dois tipos de regras específicas para os quantificadores ‘ \forall ’ e ‘ \exists ’, as quais seguem abaixo:

Regras para fórmulas quantificadas:

(I) Universais:

$$\frac{T \forall x \varphi}{T \varphi[x/a]} \quad \frac{F \exists x \varphi}{F \varphi[x/a]}, \text{ em que 'a' é uma constante qualquer no ramo.}$$

Na primeira regra, temos $T \forall x \varphi$ como hipótese e concluimos $T \varphi[x/a]$ ao substituir todas as ocorrências livres de x em φ pela constante a .

Já na segunda regra, temos como premissa $F \exists x \varphi$ e de modo análogo à regra anterior, ao substituir todas as ocorrências livres de x em φ pela constante a obtemos $F \varphi[x/a]$.

Ressaltamos que tais regras podem ser utilizadas mais de uma vez no mesmo tableau, pois essas fórmulas não se reduzem a uma única constante. Ao afirmarmos $\forall x \varphi$ estamos dizendo que todos os elementos do universo de discurso satisfazem a propriedade φ e, por isso, podemos utilizar uma constante qualquer no ramo. Contudo, podemos aplicar novamente estas regras para outras constantes no tableau.

(II) Existenciais:

$$\frac{T \exists x \varphi}{T \varphi[x/a]} \quad \frac{F \forall x \varphi}{F \varphi[x/a]}, \text{ em que 'a' é uma constante nova no ramo.}$$

A primeira regra, do tipo existencial, tem como premissa $T \exists x \varphi$ e como conclusão $T \varphi[x/a]$, quando são substituídas todas as ocorrências livres de x em φ pela constante a . Contudo, neste caso, ‘ a ’ deve ser nova no ramo, uma vez que ao indicarmos que existe uma constante que satisfaz φ , não podemos concluir, precisamente, que ela seja uma das constantes que estão no ramo.

Do mesmo modo, na segunda regra partimos de $F \forall x \varphi$ e ao substituir todas as ocorrências livres de x em φ por um certo ‘ a ’ obtemos $F \varphi[x/a]$, em que a é uma contante que pode ainda não ter ocorrido no ramo.

Diferentemente do que ocorre nas regras universais, as existenciais podem ser utilizadas apenas uma vez no mesmo tableau.

A seguir, apresentamos alguns exemplos de tableaux analíticos para a lógica quantificacional clássica.

Exemplos:

(a) $\forall x \varphi(x) \rightarrow (\varphi(a) \wedge \varphi(b))$

0.	F	[$\forall x \varphi(x) \rightarrow (\varphi(a) \wedge \varphi(b))$]	
1.		T [$\forall x \varphi(x)$]	
2.		F [$\varphi(a) \wedge \varphi(b)$]	
		/	\
3.	F	[$\varphi(a)$]	F [$\varphi(b)$]
4.	T	[$\varphi(a)$]	T [$\varphi(a)$]
5.	×		T [$\varphi(b)$]
6.			×

Neste exemplo, iniciamos o tableau supondo a fórmula inicial falsa. Ao aplicarmos a regra do condicional falso em (0) obtemos como consequências (1) e (2). Agora, utilizando a regra da conjunção falsa em (2) temos uma bifurcação em (3) e ao aplicarmos a regra universal verdadeira para a constante a , temos que o primeiro ramo fecha, pois temos F [$\varphi(a)$] em (3) e T [$\varphi(a)$] em (4). Ao aplicarmos novamente a regra universal verdadeira para a constante b fechamos o segundo ramo.

Com isso, concluímos que o tableau é fechado e a fórmula $\forall x \varphi(x) \rightarrow (\varphi(a) \wedge \varphi(b))$ é válida.

(b) $\exists x \neg \varphi(x) \rightarrow \neg \forall x \varphi(x)$

0.	F	[$\exists x \neg \varphi(x) \rightarrow \neg \forall x \varphi(x)$]
1.		T [$\exists x \neg \varphi(x)$]
2.		F [$\neg \forall x \varphi(x)$]
3.		T [$\neg \varphi(a)$]
4.		T [$\forall x \varphi(x)$]
5.		F [$\varphi(a)$]
6.		T [$\varphi(a)$]
7.		×

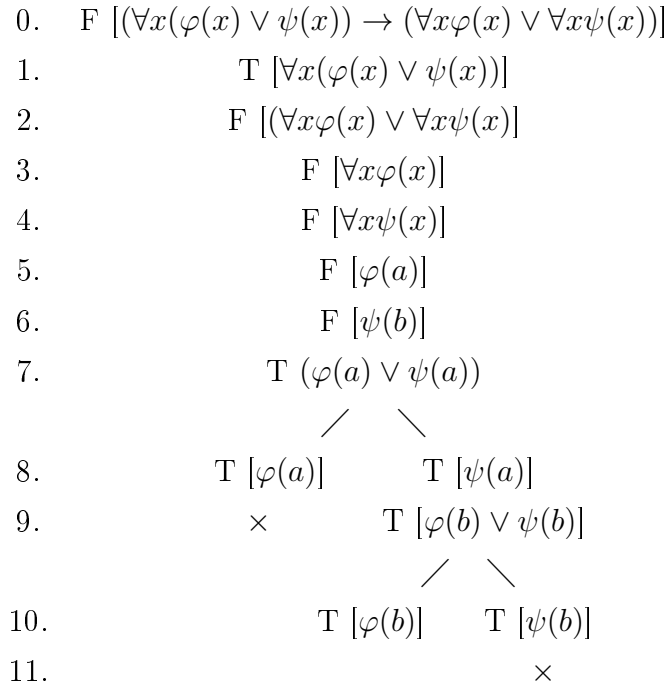
Ao iniciarmos o tableau, assumimos como falsa a fórmula inicial. A partir disto, aplicamos a regra do condicional falso em (0) e obtemos as consequências (1) e (2). Utilizamos a regra do existencial verdadeiro em (1) e obtemos $T [\neg\varphi(a)]$, em que a é uma constante nova no ramo. Ao aplicarmos a regra de negação falsa em (2) e a regra de negação verdadeira em (3), obtemos, respectivamente, (4) e (5). Usamos a regra universal verdadeira em (4), temos que o único ramo deste tableau fecha. Portanto, podemos concluir que o tableau é fechado e a fórmula $\exists x\neg\varphi(x) \rightarrow \neg\forall x\varphi(x)$ é válida.

(c) $\exists x\varphi(x) \vee \neg\exists x\varphi(x)$

0. F $[\exists x\varphi(x) \vee \neg\exists x\varphi(x)]$
1. F $[\exists x\varphi(x)]$
2. F $[\neg\exists x\varphi(x)]$
3. T $[\exists x\varphi(x)]$
4. T $[\varphi(a)]$
5. F $[\varphi(a)]$
6. \times

Neste exemplo, temos como ponto inicial a negação da fórmula dada. Ao aplicarmos a regra da disjunção falsa, temos (1) e (2) como consequências. Usamos a regra da negação falsa em (2), e obtemos (3). Diante disso, usamos a regra existencial verdadeira em (3) e obtemos (4), em que a constante a é nova no ramo. Em seguida aplicamos a regra do existencial falso em (1). Assim, fechamos o único ramo deste tableau e conseqüentemente temos um tableau fechado, isto é, a fórmula $\exists x\varphi(x) \vee \neg\exists x\varphi(x)$ é válida.

(d) $\forall x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \rightarrow (\forall x\varphi(x) \vee \forall x\psi(x))$



Neste exemplo, começamos o tableau negando a fórmula inicial. Em seguida, aplicamos a regra do condicional falso em (0) e obtemos (1) e (2). Utilizamos a regra da disjunção falsa em (2) e temos como consequência (3) e (4). Ao analisar o que temos, usamos a regra do universal falso em (3) e em (4) gerando, assim, as fórmulas (5) e (6), em que a e b são constantes novas no ramo. Feito isto, aplicamos a regra do universal verdadeiro em (1), o que resulta em (7). A partir daí, usamos a regra da disjunção verdadeira em (7) e bifurcamos o tableau em dois ramos distintos (8). Com isso, temos o primeiro ramo fechado, pois segue $F [\varphi(a)]$ em (5) e $T [\varphi(a)]$ em (8).

Agora, aplicamos novamente a regra do universal verdadeiro em (1), mas agora para a constante b , e obtemos (9). Utilizamos a disjunção verdadeira em (9), segue mais dois ramos distintos em (10), entretanto um dos ramos não pode ser fechado. Assim, podemos afirmar que o tableau é aberto e conseqüentemente, a fórmula $\forall x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \rightarrow (\forall x\varphi(x) \vee \forall x\psi(x))$ é não válida.

Observação: A lógica quantificacional clássica, diferentemente da LPC, não é decidível, ou seja, não existe nenhum método algoritmo capaz de decidir sempre se uma fórmula é válida ou não válida.

Assim sendo, temos fórmulas tais que o seu respectivo tableau na LQC pode pedir infinitas aplicações do tipo existencial sem que apareça uma contradição no ramo, o que impossibilita o fechamento do ramo.

Neste capítulo, apresentamos os tableaux analíticos clássicos para a LPC e também para a LQC. Entretanto, o sistema clássico não dá conta da LPT, pois essa lógica têm aspectos não clássicos.

Na próxima seção, abordamos alguns aspectos computacionais do sistema de tableaux analíticos.

4.4 O sistema de tableaux e a implementação em computadores

O método dos tableaux, quando comparado a outros métodos de dedução, possui características computacionais não compartilhadas pelos demais sistemas de prova. Os provadores mais usados são baseados em tableaux analíticos.

Nesta seção apresentamos algumas considerações sobre os tableaux enquanto provadores de teorema baseados em (SILVA; FINGER; MELLO, 2006) e (D'AGOSTINO, 1999).

O primeiro provador de teorema inspirado no método dos tableaux foi desenvolvido em 1960 por Prawitz, Voghera. Mesmo sendo desenvolvido há algumas décadas, o cálculo do primeiro tableau implementado era muito semelhante aos provadores de hoje.

Depois disso, houveram mais alguns desenvolvimentos sobre a implementação dos sistemas de tableaux em computadores. Contudo, foi a partir de 1990 que o interesse na dedução via tableaux passou a crescer e surgiram vários avanços.

Uma das propriedades mais importantes de um algoritmo está no fato dele ser determinístico ou não-determinístico.

Quando temos um algoritmo determinístico, ao término de cada etapa da execução, o próximo comando a ser executado deve estar completamente definido. O mesmo não ocorre com um algoritmo não-determinístico, uma vez que, neste caso, as escolhas são feitas em certos pontos do algoritmo.

Um tableau analítico, ao ser implementado no computador, pode ser caracterizado como algoritmo não-determinístico, pois na próxima escolha podemos ter mais de uma possibilidade e, com isso, não estar definido, exatamente, o próximo comando.

Entretanto, os nossos computadores são equipamentos determinísticos e para conseguirmos implementar um algoritmo não-determinístico, como é o caso de alguns tableaux, é necessário inserirmos no algoritmo uma estratégia computacional ou uma estratégia de seleção. É preciso fazermos tais procedimentos para que o computador consiga uma execução determinística em cada passo não-determinístico do programa.

Diante disso, Silva, Finger e Melo (2006) investigaram algumas formas de se implementar estes métodos de tableaux analíticos em computadores. Para eles, há dois pontos fundamentais que precisam ser analisados: as *estratégias computacionais* e as *estruturas de dados*.

As estratégias computacionais são responsáveis pela implementação de uma condição determinística de escolha em cada etapa não-determinística do programa. Já as estruturas de dados, são informações que vamos acrescentar no programa, para o computador obter a prova por tableau. Contudo, nesta seção não detalharemos as estruturas de dados.

Dentre as estratégias computacionais, há uma que indica em qual ramo devemos expandir o tableau. Neste caso, o objetivo é encontrar um ramo que seja aberto e não saturado. Se não encontramos algum ramo desse tipo, concluímos que o tableau é saturado.

Ainda nesta estratégia de buscar qual ramo devemos expandir, temos outras duas categorias, a busca em profundidade e a busca em largura.

Na busca em profundidade, normalmente expandimos um ramo até a saturação. Já na busca em largura, aplicamos em sequência a expansão em cada ramo aberto, fazendo com que todos os ramos abertos tenham o mesmo número de regras aplicadas.

Há também as estratégias computacionais de seleção, que indicam qual regra devemos aplicar em determinado ramo aberto, diante das possibilidades que temos. Para fazer essa escolha, podemos seguir diversos caminhos e até mesmo aplicarmos uma composição de estratégias para realizar essa escolha.

Uma das estratégias de seleção mais utilizadas é aplicar primeiro todas as regras possíveis do tipo conjuntivo (tipo A). Como as regras desta categoria não geram novos ramos, podemos rapidamente obter um ramo fechado, sem nenhuma bifurcação. Com isso, é possível encontrarmos um tableau fechado sem precisarmos das fórmulas do tipo B, o que facilita o caminho a prova.

Em suma, todas estas estratégias computacionais têm como objetivo acrescentar uma etapa determinística em um programa não determinístico enquanto tableau, pois assim será possível a sua implementação em computadores.

Esta é uma das principais vantagens do método dos tableaux com relação aos demais sistemas de provas.

No próximo capítulo, introduzimos um sistema de tableaux para a lógica da verdade pragmática LPT, apresentando também a adequação deste sistema, isto é, a sua correção e completude relativas a semântica matricial trivalente de LPT.

Capítulo 5

Um sistema de tableaux para a LPT

Neste capítulo, introduzimos o método dos tableaux analíticos para a lógica proposicional da verdade pragmática (LPT), originalmente abordada por Silvestrini (2011) em um sistema axiomático.

Desta maneira, apresentamos, de modo original, as regras de expansão para a LPT, as quais foram obtidas a partir da análise das matrizes trivalentes da LPT. Também abordamos os três tipos de categorias em que elas se enquadram e mostramos serem dedutivamente equivalentes com a versão axiomática de LPT.

5.1 Tableaux para a lógica da verdade pragmática

O método dos tableaux introduzido por Smullyan (1968) foi desenvolvido para a lógica proposicional clássica e para a lógica de primeira ordem clássica. Contudo a lógica da verdade pragmática é paraconsistente e trivalente. Diante disso, as regras de expansão apresentadas por Smullyan não abrangem os aspectos não-clássicos da LPT. Logo, faz-se necessário regras de expansão específicas para o desenvolvimento dos tableaux para a lógica da verdade pragmática. Assim, apresentamos um sistema de tableaux analíticos para a lógica da verdade pragmática, o qual denotamos por TPT.

As regras de expansão utilizadas no sistema TPT são motivadas pelas regras da lógica clássica, para as fórmulas de comportamento clássico, acrescidas de aspectos específicos para as fórmulas da lógica da verdade pragmática.

As regras de expansão para TPT são classificadas em três tipos de acordo com as suas ramificações, o que difere do tableau clássico, em que as fórmulas podem gerar no máximo dois ramos diferentes. Deste modo, apresentamos os três tipos de fórmulas de TPT:

Fórmulas do tipo α : são fórmulas em que suas consequências são diretas e não temos

ramificações. As consequências permanecem no mesmo ramo.

Fórmulas do tipo β : neste caso, as consequências bifurcam em dois ramos, gerando dois ramos distintos.

Fórmulas do tipo γ : são fórmulas com consequências indiretas e ramificações de três ramos distintos.

Assim, cada uma das regras de expansão de TPT está em uma destas três categorias apresentadas, ou seja, temos as seguintes possibilidades de expansão do tableau: ou não há ramificações, ou ocorre uma ramificação de dois ramos distintos, ou ramificam em três ramos diferentes.

Aqui, há uma diferença com o tableau clássico, pois no ambiente clássico, temos como consequências da fórmula inicial, no máximo dois ramos distintos, lembrando que tanto a lógica proposicional clássica, como a de primeira ordem são lógicas com apenas duas valorações possíveis, a saber, 0 para falso e 1 para verdadeiro. Já nos tableaux para a lógica da verdade pragmática, temos fórmulas que geram até três consequências distintas, devido ao fato da LPT ser uma lógica trivalente.

A seguir, apresentamos um esquema de como os três tipos de fórmulas se comportam no tableau.

Regras do tipo α

$$\frac{\alpha}{\alpha_1 \mid \alpha_2}$$

Regras do tipo β

$$\frac{\beta}{\beta_1 \mid \beta_2}$$

Regras do tipo γ

$$\frac{\gamma}{\gamma_1 \mid \gamma_2 \mid \gamma_3}$$

Definição 5.1 Dizemos que um ramo no sistema TPT é **fechado** quando ocorrer uma das seguintes situações abaixo:

- Uma mesma fórmula ocorrer com valores distintos no ramo
- Quando tivermos no ramo $\frac{1}{2}$ ($\circ\varphi$)
- No caso de ocorrer $\frac{1}{2}$ ($\varphi \rightarrow \psi$).

Diante disso, introduzimos as regras de expansão para a lógica da verdade pragmática, as quais estão classificadas de acordo com seus respectivos operadores.

Negação

$$[0 \neg] \frac{0 \quad \neg\varphi}{1 \quad \varphi} \qquad [\frac{1}{2} \neg] \frac{\frac{1}{2} \quad \neg\varphi}{\frac{1}{2} \quad \varphi} \qquad [1 \neg] \frac{1 \quad \neg\varphi}{0 \quad \varphi}$$

Consistência

$$[0 \circ] \frac{0 \quad \circ\varphi}{\frac{1}{2} \quad \varphi} \qquad [1 \circ] \frac{1 \quad \circ\varphi}{0 \quad \varphi \mid 1\varphi}$$

Conjunção

$$[0 \wedge] \frac{0 \quad \varphi \wedge \psi}{0 \quad \varphi \mid 0\psi} \qquad [\frac{1}{2} \wedge] \frac{\frac{1}{2} \quad \varphi \wedge \psi}{\frac{1}{2}\varphi \mid \frac{1}{2}\varphi \mid 1\varphi \mid 1\psi \mid \frac{1}{2}\psi \mid \frac{1}{2}\psi} \qquad [1 \wedge] \frac{1 \quad \varphi \wedge \psi}{1 \quad \varphi \mid 1 \quad \psi}$$

Disjunção

$$[0 \vee] \frac{0 \quad \varphi \vee \psi}{0 \quad \varphi \mid 0 \quad \psi} \qquad [\frac{1}{2} \vee] \frac{\frac{1}{2} \quad \varphi \vee \psi}{0\varphi \mid \frac{1}{2}\varphi \mid \frac{1}{2}\varphi \mid \frac{1}{2}\psi \mid \frac{1}{2}\psi \mid 0\psi} \qquad [1 \vee] \frac{1 \quad \varphi \vee \psi}{1 \quad \varphi \mid 1 \quad \psi}$$

Condicional

$$[0 \rightarrow] \frac{0 \quad \varphi \rightarrow \psi}{0 \quad \psi \mid \frac{1}{2} \quad \varphi \mid 1 \quad \varphi} \qquad [1 \rightarrow] \frac{1 \quad \varphi \rightarrow \psi}{0 \quad \varphi \mid \frac{1}{2} \quad \psi \mid 1 \quad \psi}$$

As regras de expansão apresentadas foram obtidas por meio da análise das matrizes trivalentes da LPT, introduzidas por Silvestrini (2011).

Assim, verificamos que podemos gerar até três ramificações, mas, de um modo geral, seguimos a intuição dos resultados clássicos.

Na LPT temos como valores distinguidos $\frac{1}{2}$ e 1. Assim, se considerarmos o caso da regra da negação do condicional ($0 \rightarrow$) temos como consequências dois ramos distintos, sendo que no primeiro o antecedente possui valoração $\frac{1}{2}$ e o conseqüente assume 0, e no segundo ramo segue o caso clássico da negação do condicional, o qual atribui 1 para o antecedente e 0 para o conseqüente.

Como não temos a valoração $\frac{1}{2}$ para o operador de consistência e nem para o condicional nas matrizes trivalentes da LPT definidas por Silvestrini (2011), então não temos regras de expansão para as mesmas, uma vez que quando ocorrer esta situação no tableau, fechamos imediatamente o ramo. Por isso definimos tal situação como cláusula de fechamento.

Ao considerarmos o seguinte teorema da LPT $\neg(\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta$, vamos fazer uma prova via o nosso sistema dedutivo de tableaux (TPT).

0.	$0(\neg(\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta)$		raiz
1.	0β		$[0 \rightarrow]$ em 0
	$\begin{array}{c} / \quad \backslash \\ \end{array}$		
2.	$1(\neg(\alpha \rightarrow \alpha))$	$\frac{1}{2}(\neg(\alpha \rightarrow \alpha))$	$[0 \rightarrow]$ em 0
3.	$0(\alpha \rightarrow \alpha)$	$\frac{1}{2}(\alpha \rightarrow \alpha)$	$[1 \neg]$ em 2 e $[\frac{1}{2}\neg]$ em 2
	0α	\times	$[0 \rightarrow]$ em em 3
4.	$\begin{array}{c} / \quad \backslash \\ \end{array}$		
5.	1α	$\frac{1}{2}\alpha$	$[0 \rightarrow]$ em 3
6.	\times	\times	

Assim, geramos um tableau fechado no nosso sistema TPT para o teorema da LPT, ou seja, provamos que a fórmula também é válida no sistema TPT.

A seguir, apresentamos algumas fórmulas não válidas no nosso sistema TPT.

Se considerarmos o princípio de explosão $(\varphi \wedge \neg\varphi) \rightarrow \psi$, concluímos que essa fórmula não é válida no nosso sistema TPT, pois:

0.	$0(\varphi \wedge \neg\varphi) \rightarrow \psi$		raiz		
1.	0ψ		$[0 \rightarrow]$ em 0		
	$\begin{array}{c} / \quad \backslash \\ \end{array}$				
2.	$1(\varphi \wedge \neg\varphi)$	$\frac{1}{2}(\varphi \wedge \neg\varphi)$	$[0 \rightarrow]$ em 0		
3.	1φ	$\begin{array}{c} / \quad \quad \backslash \\ \end{array}$	$[1\wedge]$ em 2		
4.	$1 \neg\varphi$	$\frac{1}{2}\varphi$	$\frac{1}{2}\varphi$	1φ	$[1 \wedge]$ e $[\frac{1}{2}\wedge]$ em 2
5.	0φ	$1\neg\varphi$	$\frac{1}{2}\neg\varphi$	$\frac{1}{2}\neg\varphi$	$[1\neg]$ em 4 e $[\frac{1}{2}\wedge]$ em 2
6.	\times	0φ	$\frac{1}{2}\varphi$	$\frac{1}{2}\varphi$	$[1\neg]$ e $[\frac{1}{2}\neg]$ em 5
7.	\times	\times	\times		

Observamos que um ramo deste tableau ficou aberto e completo, isto é, não pode mais ser expandido. Logo o tableau não fecha e concluímos que o princípio de explosão não se segue no nosso sistema TPT.

5.2 Da dedução axiomática para a dedução em tableaux

Neste item apresentamos, inicialmente, como será feita a adequação, isto é, como provaremos a equivalência entre o sistema axiomático da LPT e nosso sistema de tableaux TPT. Deste modo, apresentamos a prova da dedução axiomática para a consequência analítica, e a demonstração de que todos os resultados obtidos em TPT também são demonstrados na semântica das matrizes trivalentes da LPT.

Assim, para provarmos que todas as deduções obtidas em LPT também são deduzidas no nosso sistema TPT e vice-versa, temos que provar o seguinte:

$$\Gamma \Vdash \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \Gamma \models \varphi.$$

Como a segunda equivalência $\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \Gamma \models \varphi$ está em Feitosa e Silvestrini (2016), então seguiremos o seguinte caminho:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma \vdash \varphi & \Leftrightarrow & \Gamma \models \varphi \\ \Downarrow & & \Uparrow \\ & & \Gamma \Vdash \varphi \end{array}$$

Teorema 5.2 *Se $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \Vdash \varphi$*

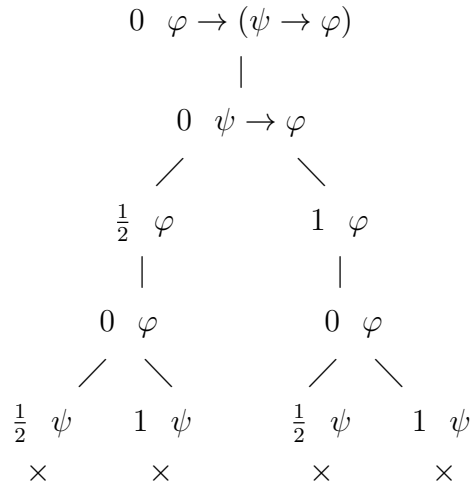
Demonstração: *Demonstração por indução no comprimento de dedução $\Gamma \vdash \varphi$.*

Se $n = 1$, então temos os seguintes casos: $\varphi \in \Gamma$ ou φ é um axioma.

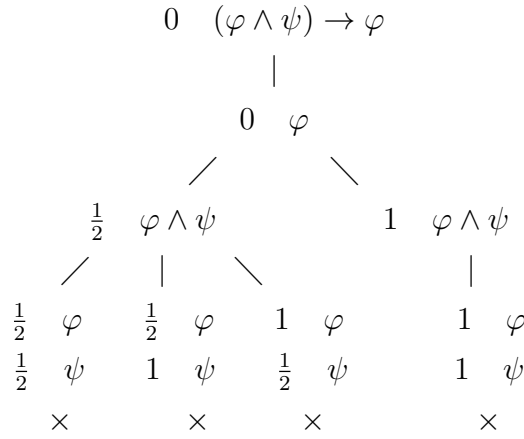
Se $\varphi \in \Gamma$, temos $\Gamma \Vdash \varphi$, pois φ ocorre com valores distintos no tableau e por isso o tableau fecha.

Se φ é um axioma, então $\Vdash \varphi$ e, portanto, $\Gamma \Vdash \varphi$. Diante disso, provamos agora que cada axioma da LPT gera um tableau fechado em TPT.

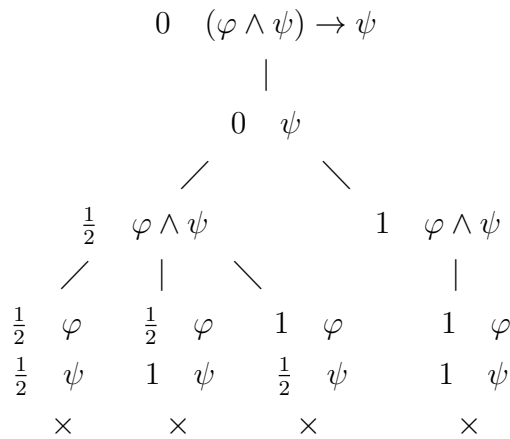
$$(A1) \quad \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$



(A4) $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$

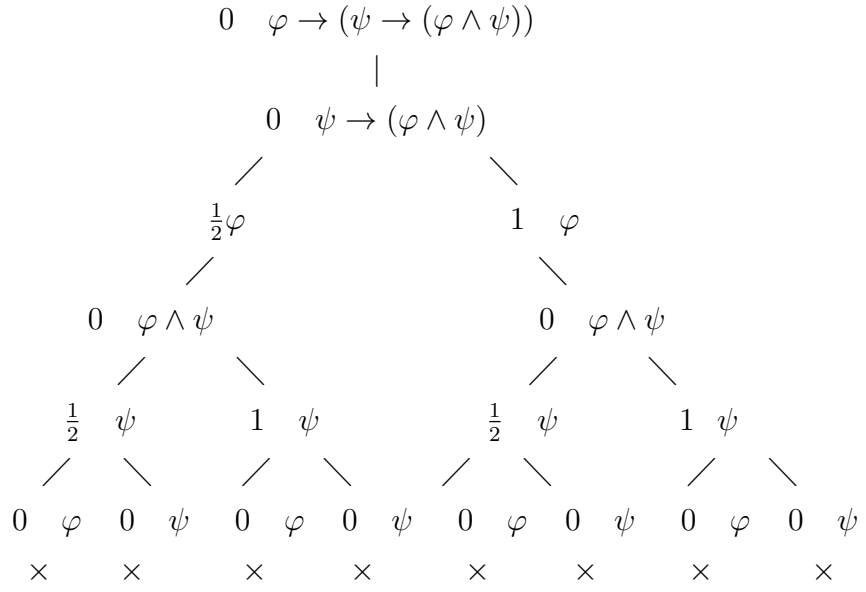


(A5) $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi$

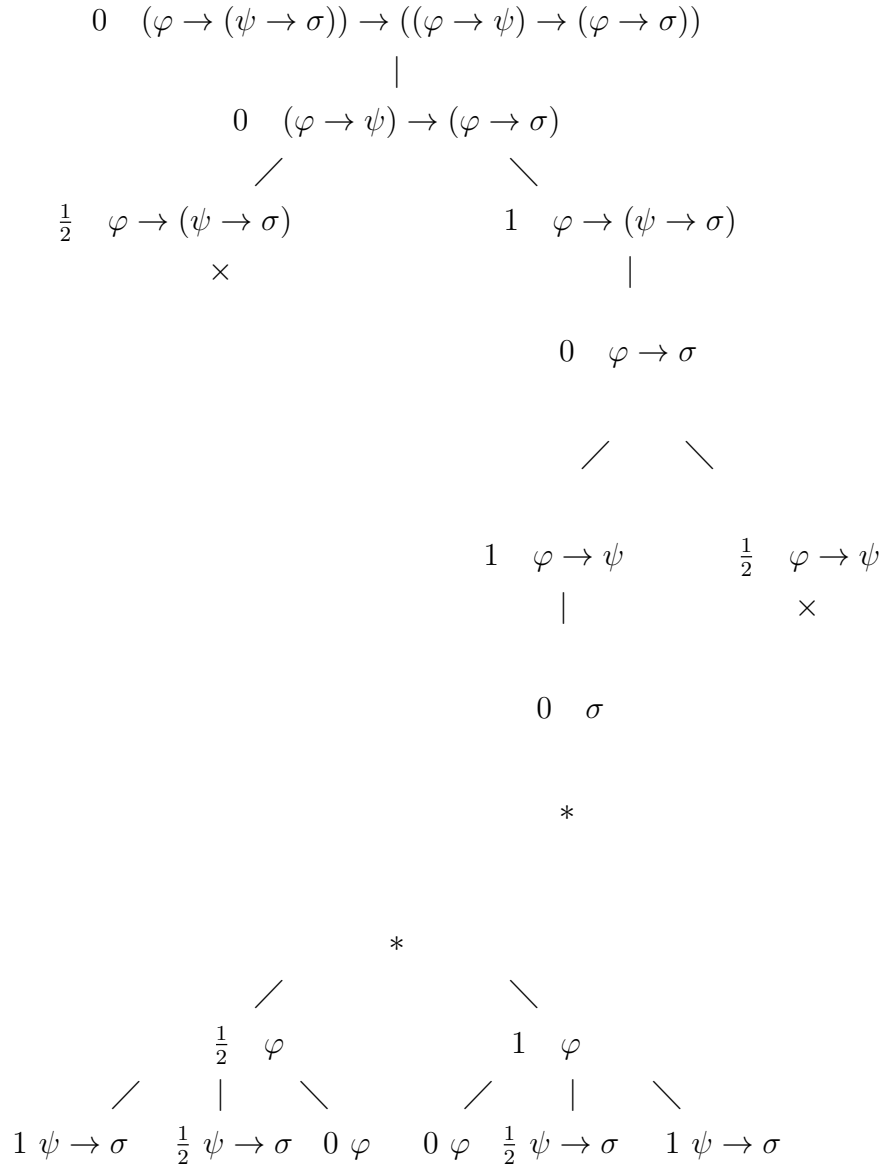


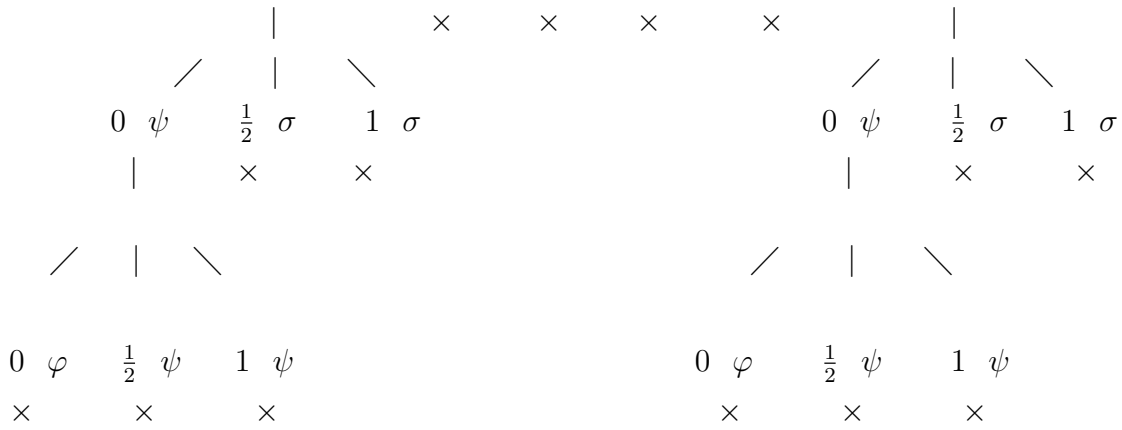
(A3) $(\sigma \rightarrow \varphi) \rightarrow ((\sigma \rightarrow \psi) \rightarrow \sigma \rightarrow (\varphi \wedge \psi))$

Em Feitosa e Silvestrini (2016) está demonstrado que o axioma (A3) é equivalente a seguinte fórmula $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi))$. Por questão de economia no tamanho, faremos o tableau para esta fórmula. Certamente, verificamos também a validade de (A3).

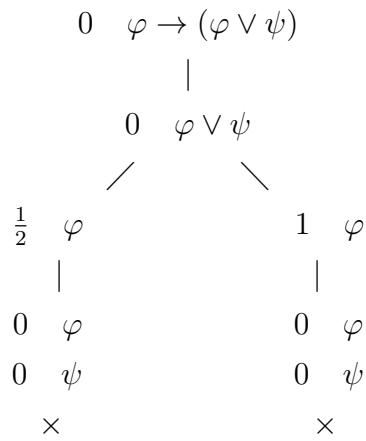


(A2) $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \sigma))$

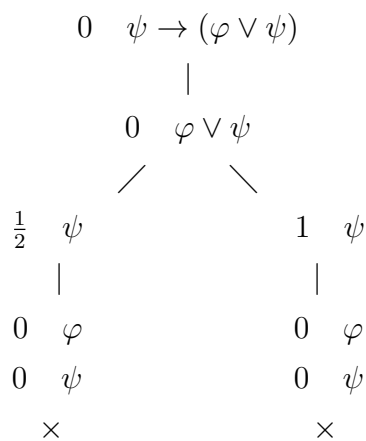




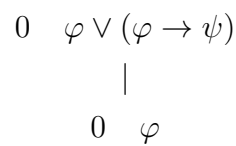
(A6) $\varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$

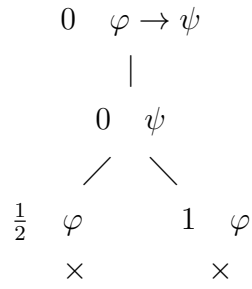


(A7) $\psi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$

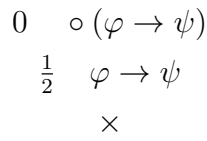


(A9) $\varphi \vee (\varphi \rightarrow \psi)$

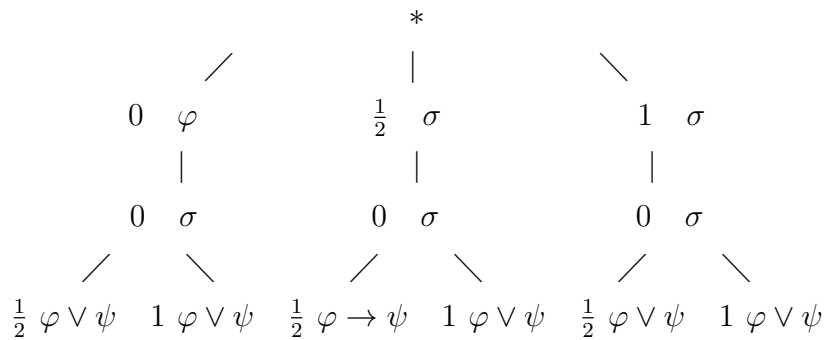
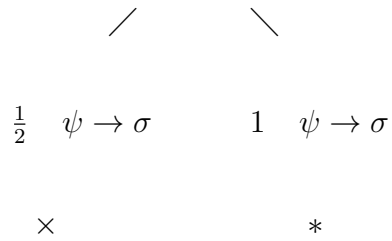
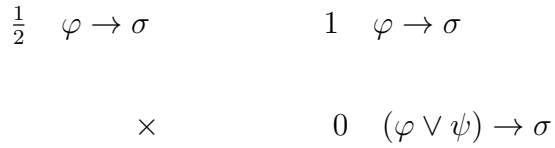
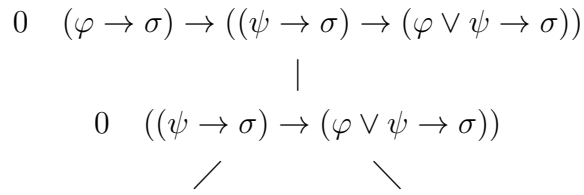


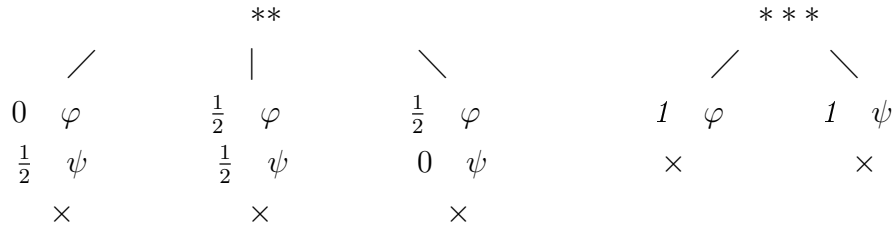
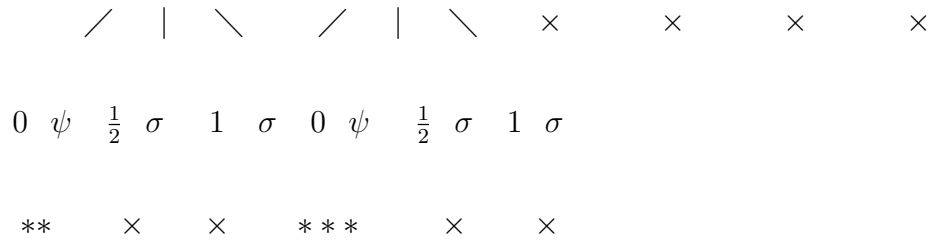


(A14) $\circ(\varphi \rightarrow \psi)$

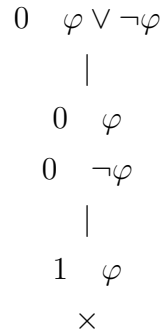


(A8) $(\varphi \rightarrow \sigma) \rightarrow ((\psi \rightarrow \sigma) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \rightarrow \sigma))$

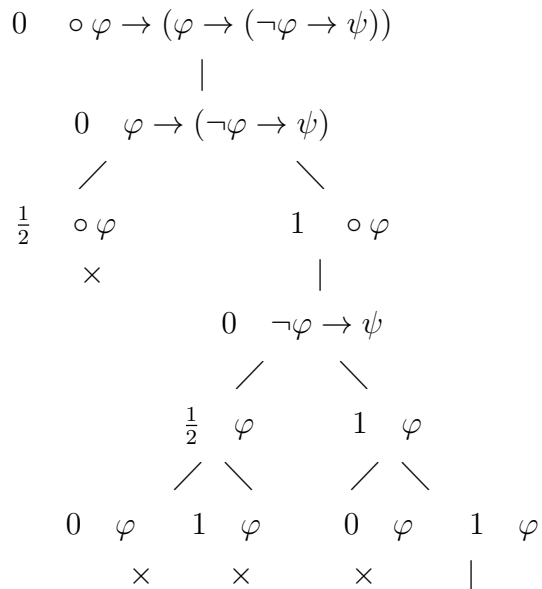


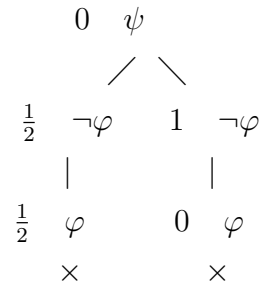


(A10) $\varphi \vee \neg\varphi$

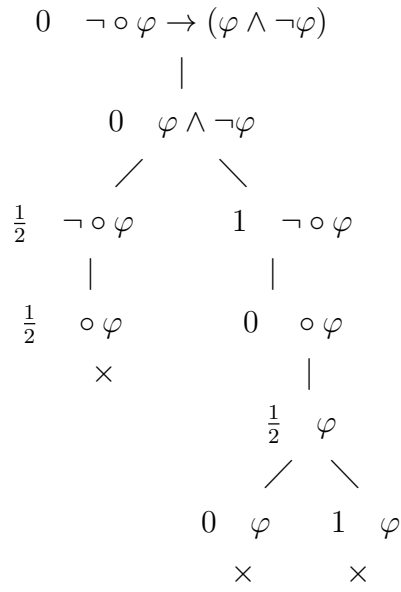


(A12) $\circ\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \psi))$

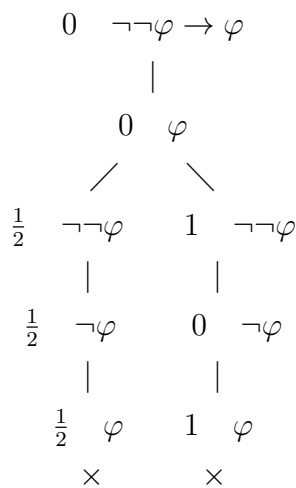




(A13) $\neg \circ \varphi \rightarrow (\varphi \wedge \neg \varphi)$

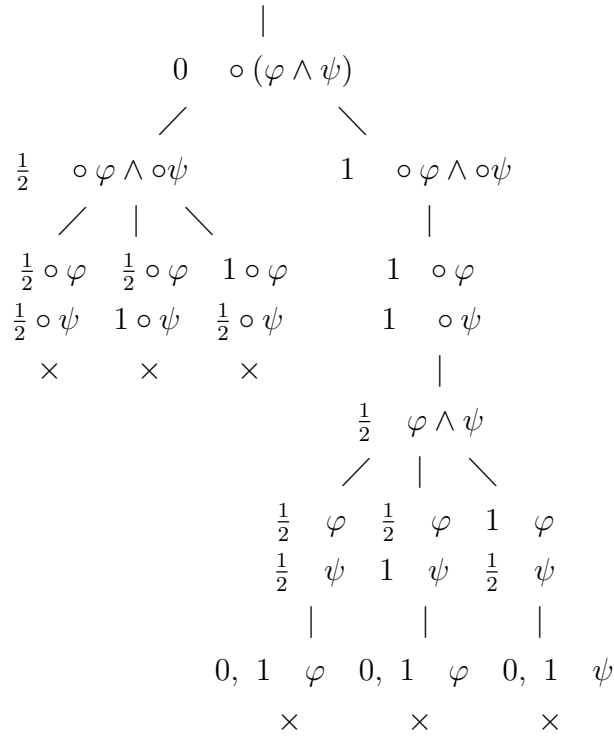


(A11) $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$



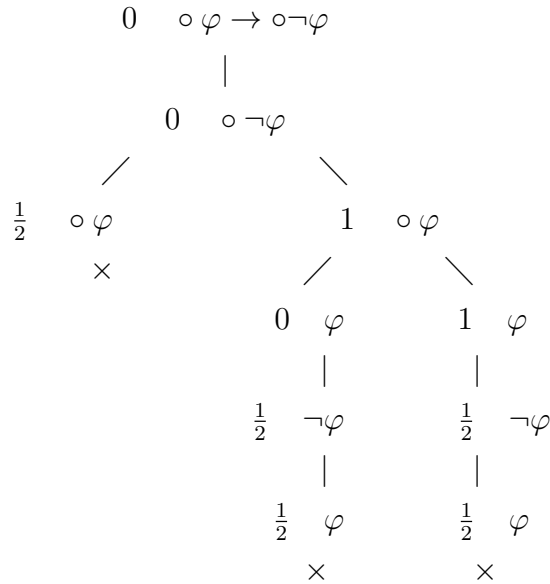
(A15) $(\circ\varphi \wedge \circ\psi) \rightarrow \circ(\varphi \wedge \psi)$

$$0 \quad (\circ\varphi \wedge \circ\psi) \rightarrow \circ(\varphi \wedge \psi)$$



Neste último passo, a notação $0, 1 \quad \varphi$ indica que vale $0 \quad \varphi$ ou $1 \quad \varphi$.

(A16) $\circ\varphi \rightarrow \circ\neg\varphi$



Se $n > 1$, então no último passo da dedução aplicamos a regra MP. Assim, temos $\Gamma \vdash \sigma \rightarrow \varphi$ e $\Gamma \vdash \sigma$ donde concluímos que $\Gamma \vdash \varphi$.

Por hipótese de indução, temos que $\Gamma \Vdash \sigma \rightarrow \varphi$ e $\Gamma \Vdash \sigma$. Daí, segue que para toda valoração v , se $v(\Gamma) \subseteq \{\frac{1}{2}, 1\}$ então $v(\sigma \rightarrow \varphi) \neq 0$ e $v(\sigma) \neq 0$.

Deste modo, consideraremos o tableau $\Gamma \cup \{\sigma\} \cup \{\sigma \rightarrow \varphi\} \Vdash \varphi$. Temos quatro

condições possíveis para as premissas válidas σ e $\sigma \rightarrow \varphi$:

Γ	Γ
$\frac{1}{2} \sigma$	$\frac{1}{2} \sigma$
$\frac{1}{2} \sigma \rightarrow \varphi$	$1 \sigma \rightarrow \varphi$
0φ	0φ
\times	$\begin{array}{ccc} / & & \backslash \\ 0 \sigma & \frac{1}{2} \varphi & 1 \varphi \\ \times & \times & \times \end{array}$

Γ	Γ
1σ	1σ
$\frac{1}{2} \sigma \rightarrow \varphi$	$1 \sigma \rightarrow \varphi$
0φ	0φ
\times	$\begin{array}{ccc} / & & \backslash \\ 0 \sigma & \frac{1}{2} \varphi & 1 \varphi \\ \times & \times & \times \end{array}$

Portanto, $\Gamma \Vdash \varphi$. ■

Na próxima seção completamos a demonstração de equivalência entre o sistema o nosso sistema de tableaux TPT e o sistema axiomático da LPT.

5.3 Da dedução em tableaux para a consequência semântica de LPT

Na seção anterior provamos que a dedução axiomática de LPT implica na dedução em tableaux de TPT. Para concluirmos a demonstração de equivalência entre o nosso sistema de tableaux TPT e a lógica da verdade pragmática LPT, falta provarmos: $\Gamma \Vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \vDash \varphi$. Contudo, antes de provarmos este resultado, introduzimos alguns resultados e algumas definições.

Definição 5.3 Um conjunto Θ de fórmulas sinalizadas é **saturado para baixo** se satisfaz as seguintes condições:

- (a) nenhuma fórmula ocorre em Θ com dois valores distintos;
- (b) se em Θ ocorre alguma fórmula do tipo α , então as subfórmulas $\alpha_1 \in \Theta$ e $\alpha_2 \in \Theta$;

(c) se em Θ ocorre alguma fórmula do tipo β , então a subfórmula $\beta_1 \in \Theta$ ou a subfórmula $\beta_2 \in \Theta$;

(d) se em Θ ocorre alguma fórmula do tipo γ , então a subfórmula $\gamma_1 \in \Theta$ ou a subfórmula $\gamma_2 \in \Theta$ ou a subfórmula $\gamma_3 \in \Theta$.

Lema 5.4 *Todo ramo completo e aberto de um tableau é um conjunto saturado para baixo.*

Demonstração: Como o ramo é aberto, então nenhuma fórmula aparece no ramo com duas valorações distintas, o que satisfaz a condição (a) da definição de conjunto saturado para baixo.

Além disso, como o ramo é completo, segue que todas as possíveis regras do tableau já foram utilizadas e o tableau não pode mais ser expandido.

Logo, se existe uma fórmula do tipo α no ramo, então α_1 e α_2 também estão no ramo, o que atende a condição (b).

Pelo mesmo motivo, se há uma fórmula do tipo β no ramo, então ou β_1 ou β_2 está no ramo, o que cumpre a condição (c).

De modo análogo, também pelo completamento, se ocorre no ramo uma fórmula do tipo γ , segue que ou γ_1 ou γ_2 ou γ_3 está no ramo, o que contempla a última condição (d). ■

Agora, estenderemos a noção de valoração para as fórmulas sinalizadas.

Definição 5.5 *Se v é uma valoração e $k \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$, então a fórmula sinalizada $k \varphi$ é **distinguida** segundo a valoração v , o que é denotado por $k \varphi \in D$, se $v(\varphi) = k$.*

Assim, $k \varphi \in D \Leftrightarrow v(\varphi) = k$.

Definição 5.6 *Uma valoração v **satisfaz** um conjunto Θ de fórmulas sinalizadas se para toda fórmula sinalizada $k \psi$ que ocorre em Θ , tem-se $k \psi \in D$.*

Definição 5.7 *Um conjunto Θ de fórmulas sinalizadas é **satisfável** se existe uma valoração v tal que $v(\Theta) \subseteq D$, ou seja, para toda $\psi \in \Theta$, $k \psi \in D$.*

Lema 5.8 *Se Θ é um conjunto satisfável de fórmulas sinalizadas, então:*

(i) se uma fórmula do tipo α está em Θ , então $\Theta \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$ é satisfável;

(ii) se uma fórmula do tipo β está em Θ , então $\Theta \cup \{\beta_1\}$ é satisfável ou $\Theta \cup \{\beta_2\}$ é satisfável;

(iii) se uma fórmula do tipo γ está em Θ , então ou $\Theta \cup \{\gamma_1\}$ é satisfável, ou $\Theta \cup \{\gamma_2\}$ é satisfável, ou $\Theta \cup \{\gamma_3\}$ é satisfável.

Demonstração: (i) Tomemos a fórmula de consistência do tipo α , isto é, $0 \circ \varphi$. Como o

conjunto Θ é satisfatível, então existe uma valoração v tal que $v(\Theta) \subseteq D$. Daí, $v(\circ\varphi) = 0$ e, então $v(\varphi) = \frac{1}{2}$ e, portanto, $v(\Theta \cup \{\frac{1}{2} \varphi\}) \subseteq D$.

Agora a conjunção do tipo α , isto é, $1\varphi \wedge \psi$. Como o conjunto Θ é satisfatível, então existe uma valoração v tal que $v(\Theta) \subseteq D$. Daí, $v(\varphi \wedge \psi) = 1$ e, então, $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 1$. Portanto, $v(\Theta \cup \{1 \varphi, 1 \psi\}) \subseteq D$.

Para a disjunção do tipo α temos que $0 \varphi \vee \psi$. Como o conjunto Θ é satisfatível, então existe uma valoração v tal que $v(\Theta) \subseteq D$. Daí, $v(\varphi \vee \psi) = 0$ e, então, $v(\varphi) = 0$ e $v(\psi) = 0$ e, portanto, $0 \varphi, 0 \psi \in D$. Assim, $v(\Theta \cup \{0 \varphi, 0 \psi\}) \subseteq D$.

Todas as regras de negação são do tipo α .

Se temos $0 \neg\varphi$, desde que o conjunto Θ é satisfatível, então existe uma valoração v tal que $v(\Theta) \subseteq D$. Daí, $v(\neg\varphi) = 0$ e, então, $v(\varphi) = 1$ e, portanto, $v(\Theta \cup \{1 \varphi\}) \subseteq D$.

Quando temos $\frac{1}{2} \neg\varphi$, como Θ é satisfatível, então existe uma valoração v tal que $v(\Theta) \subseteq D$. Daí, $v(\neg\varphi) = \frac{1}{2}$ e, então $v(\varphi) = \frac{1}{2}$ e, portanto, $v(\Theta \cup \{\frac{1}{2} \varphi\}) \subseteq D$.

Finalmente, se temos $1 \neg\varphi$. Como o conjunto Θ é satisfatível, então existe uma valoração v tal que $v(\Theta) \subseteq D$. Daí, $v(\neg\varphi) = 1$ donde segue que $v(\varphi) = 0$ e, portanto, $v(\Theta \cup \{0 \varphi\}) \subseteq D$.

(ii) Para a fórmula de consistência do tipo β , temos $1 \circ\varphi$. Como Θ é satisfatível, então existe v tal que $v(\Theta) \subseteq D$ e, então, $v(\circ\varphi) = 1$. Consequentemente, $v(\varphi) = 0$ ou $v(\varphi) = 1$. Se $v(\varphi) = 0$, então $v(\Theta \cup \{0 \varphi\}) \subseteq D$. Contudo, se $v(\varphi) = 1$, então $v(\Theta \cup \{1 \varphi\}) \subseteq D$. De qualquer modo há um ramo tal que $v(\Theta \cup \{k \varphi\}) \subseteq D$.

Para a conjunção do tipo β , temos $0 \varphi \wedge \psi$. Como Θ é satisfatível, então existe v tal que $v(\Theta) \subseteq D$. Daí, $v(\varphi \wedge \psi) = 0$ e, consequentemente, $v(\varphi) = 0$ ou $v(\psi) = 0$. Se $v(\varphi) = 0$, então $v(\Theta \cup \{0 \varphi\}) \subseteq D$; e se $v(\psi) = 0$, então $v(\Theta \cup \{0 \psi\}) \subseteq D$.

Se temos uma disjunção do tipo β , isto é, $1 \varphi \vee \psi$, desde que Θ é satisfatível, então existe v tal que $v(\Theta) \subseteq D$. Daí, $v(\varphi \vee \psi) = 1$ e, consequentemente, $v(\varphi) = 1$ ou $v(\psi) = 1$. Se $v(\varphi) = 1$, então $v(\Theta \cup \{1 \varphi\}) \subseteq D$; e se $v(\psi) = 1$, então $v(\Theta \cup \{1 \psi\}) \subseteq D$.

Para $0 \varphi \rightarrow \psi$, como Θ é satisfatível, então existe v tal que $v(\Theta) \subseteq D$. Daí, $v(\varphi \rightarrow \psi) = 0$ e, consequentemente, $v(\psi) = 0$ e $v(\varphi) \in D$. Para $v(\psi) = 0$, segue que $v(\Theta \cup \{0 \psi\}) \subseteq D$. Agora, para qualquer $k \in D$, se $v(\varphi) = k$, então $v(\Theta \cup \{k \varphi\}) \subseteq D$. Logo, um dos ramos é tal que $v(\Theta \cup \{0 \psi, k \varphi\}) \subseteq D$.

(iii) Para a conjunção do tipo γ temos $\frac{1}{2} \varphi \wedge \psi$. Como Θ é satisfatível, então existe v tal que $v(\Theta) \subseteq D$. Daí, $v(\varphi \wedge \psi) = \frac{1}{2}$ e, consequentemente, $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = \frac{1}{2}$; ou $v(\varphi) = \frac{1}{2}$ e $v(\psi) = 1$; ou $v(\varphi) = \frac{1}{2}$ e $v(\psi) = \frac{1}{2}$. Como tem que valer um destes três casos, para $k_1, k_2 \in D$, segue que $v(\Theta \cup \{k_1 \varphi, k_2 \psi\}) \subseteq D$.

Para a disjunção do tipo γ temos $\frac{1}{2} \varphi \vee \psi$. Como Θ é satisfatível, então existe

v tal que $v(\Theta) \subseteq D$. Daí, $v(\varphi \vee \psi) = \frac{1}{2}$ e, conseqüentemente, $v(\varphi) = 0$ e $v(\psi) = \frac{1}{2}$; ou $v(\varphi) = \frac{1}{2}$ e $v(\psi) = 0$; ou $v(\varphi) = \frac{1}{2}$ e $v(\psi) = \frac{1}{2}$. Como tem que valer um destes três casos, para $k_1, k_2 \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$, segue que $v(\Theta \cup \{k_1 \varphi, k_2 \psi\}) \subseteq D$.

Para a condicional do tipo γ temos $1 \varphi \rightarrow \psi$. Como Θ é satisfatível, então existe v tal que $v(\Theta) \subseteq D$. Daí, $v(\varphi \rightarrow \psi) = 1$ e, conseqüentemente, $v(\varphi) = 0$ ou $v(\psi) = \frac{1}{2}$ ou $v(\psi) = 1$. Seja $k \in \{\frac{1}{2}, 1\}$. Se $v(\varphi) = 0$, então $v(\Theta \cup \{0 \varphi\}) \subseteq D$ e se $v(\psi) = k$, então $v(\Theta \cup \{k \psi\}) \subseteq D$.

Em todos os casos, algum ramo do tableau é satisfatível. ■

Diante destas definições e do Lema acima podemos provar o seguinte teorema.

Teorema 5.9 $\Gamma \Vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \models \varphi$

Demonstração: Faremos a demonstração pela contra-positiva.

Se $\Gamma \not\models \varphi$, então existe uma valoração v , tal que $v(\Gamma) \subseteq D$ e $v(\varphi) = 0$.

Seja Θ_0 o conjunto de fórmulas sinalizadas que ocorrem no tableau inicial de Γ , de modo que $v(\Theta_0) \subseteq D$. Mostramos que a cada passo de expansão do tableau, sempre vai existir um ramo Θ_0 tal que $v(\Theta_0) \subseteq D$.

Suponha que $v(\Theta_{i-1}) \subseteq D$. Se o ramo Θ_{i-1} for expandido por uma fórmula do tipo α , pelo lema anterior (i), temos que $v(\Theta_i) \subseteq D$.

No caso do ramo Θ_{i-1} ser expandido por uma fórmula do tipo β , segue pelo lema anterior (ii), que $v(\Theta_i) \subseteq D$.

Se o ramo Θ_{i-1} for expandido por uma fórmula do tipo γ , pelo mesmo lema item (iii) segue que $v(\Theta_i) \subseteq D$.

Assim, em todos os casos, temos um ramo Θ_i tal que $v(\Theta_i) \subseteq D$. Logo, sempre haverá um ramo satisfatível em Θ , o qual é um conjunto saturado para baixo.

Portanto, $\Gamma \not\models \varphi$ ■

Considerações finais

Neste trabalho, abordamos algumas teorias da verdade, com o intuito de fornecer uma maior compreensão sobre o tema.

Em especial, tratamos da concepção semântica da verdade de Alfred Tarski, que introduziu uma definição formal da verdade, sempre relativa a uma estrutura matemática. Foi a definição de verdade de Tarski que possibilitou o desenvolvimento da teoria de modelos, pois esta associa a linguagem formal com uma interpretação num modelo matemático.

Apresentamos também a abordagem de da Costa e colaboradores, que introduziram uma teoria da verdade para contextos parciais, com o objetivo de explicar o procedimento de construção do conhecimento nas ciências empíricas.

Também abordamos outras duas teorias inspiradas na noção de verdade pragmática de Newton da Costa, a de Bueno e de Souza (1996), com influências do empirismo, e a verdade pragmática proposta por Silvestrini (2011), através da satisfação pragmática.

Silvestrini também introduziu uma lógica paraconsistente trivalente, subjacente a sua nova abordagem da quase-verdade.

Assumimos, neste trabalho, a concepção de quase-verdade proposta por Silvestrini (2011), e no Capítulo 3, apresentamos a sua lógica subjacente àquela noção de quase-verdade. Tal lógica foi denominada lógica da verdade pragmática e indicada por LPT, uma lógica paraconsistente, modal e trivalente.

LPT é paraconsistente por não admitir, em geral, o princípio da explosão e, com isso, no caso de contradições na LPT, não temos a trivialização dedutiva nesta lógica.

Outro aspecto relevante da LPT reside no fato de ser uma lógica trivalente.

Assim, LPT tem uma semântica de matrizes trivalentes, a qual está associada com a relação parcial, em que atribuímos valor 1 para sentenças verdadeiras, 0 para sentenças falsas e o valor $\frac{1}{2}$ para sentenças indeterminadas.

Como buscamos apresentar a LPT em um sistema de tableaux analíticos, no Capítulo 4, apresentamos o sistema de tableaux clássico para a LPC e para a lógica quantificacional clássica.

Este método dedutivo tem algumas vantagens, pois é um sistema de prova muito

intuitivo e, usualmente, mais rápido do que o método hibertiano ou axiomático.

Além disso, há vantagens computacionais neste método, como a possibilidade da sua implementação em computadores, já que ele pode ser caracterizado como um procedimento algorítmico.

Outro benefício do método dos tableaux é a obtenção imediata de contra-exemplo, no caso em que não temos a validade da fórmula testada.

Ao considerarmos o método dos tableaux e as suas vantagens, quando comparado com a abordagem axiomática, introduzimos os tableaux para a lógica da verdade pragmática, que denotamos por TPT.

Para isso, definimos três categorias de fórmulas da LPT, de modo que as fórmulas podem gerar até três ramos de consequências distintos, e com isso temos as seguintes possibilidades para os ramos: ou não ramifica, ou o ramo bifurca, ou o ramo trifurca.

Após uma análise das matrizes trivalentes definidas por Silvestrini, apresentamos as regras de expansão do nosso sistema TPT e definimos as suas cláusulas de fechamento.

Além disso, verificamos a adequação de TPT, isto é, provamos que todas as deduções que são obtidas em TPT também o são em LPT, e vice-versa.

Ademais, vislumbramos algumas possibilidades de trabalhos futuros relacionados com este:

- como apresentar a lógica de primeira ordem da verdade pragmática (LPT1) segundo os tableaux analíticos.

- descrever a lógica da verdade pragmática (LPT) em outros sistemas dedutivos, como o cálculo de seqüentes e dedução natural.

- desenvolver outras formalizações de verdade, que considerem modelos parciais e a noção de quase-verdade.

- introduzir a lógica da verdade pragmática de primeira ordem (LPT1) em um sistema de dedução natural.

Estas são algumas possibilidades que poderão ser abordadas nas próximas investigações.

Bibliografia

ARISTÓTELES. **Metafísica**. Tradução de Leonel Vallandro. Porto Alegre: Globo, 1969.

AUSTIN, J. L. [1950]. Truth. **Proceedings of the Aristotelian Society**, v. 24, p. 111-128. In: LYNCH, p. 24-40, 2001.

BETH, E. W. **The foundations of mathematics**. Amsterdam: North Holland, 1959.

BLANSHARD, B. **The nature of thought**. v. 2. London: George Allen & Unwin LTD, 1939.

BRADLEY, F. **Essays on Truth and Reality**. Oxford: Clarendon Press, 1914.

BUENO, O.; da COSTA, N. C. A. Quasi-truth, paraconsistency, and the foundations of science. **Syntese**, v. 154, p. 383-399, 2007.

BUENO, O.; de SOUZA, E. G. The concept of quasi-truth, **Logique & Analyse**, v. 153-154, p. 183-199, 1996.

CONIGLIO, M. E.; SILVESTRINI, L. H. C. An alternative approach for quasi-truth. **Logic Journal of IGPL**, v. 22, p. 387-410, 2014.

da COSTA, N. C. A. **O conhecimento científico**. 2a. ed. São Paulo: Discurso Editorial, 1999.

da COSTA, N. C. A.; BÉZIAU, J. Y.; BUENO, O. **Elementos de teoria paraconsistente de conjuntos**. Coleção CLE, v. 23. Campinas: Unicamp - CLE, 1998.

da COSTA, N. C. A.; BUENO, O. Quasi-truth, supervaluations and free logic. **History and Philosophy of Logic**, v. 20, p. 215-226, 1999.

da COSTA, N. C. A.; FRENCH, S. **Science and partial truth**. New York: Oxford University Press, 2003.

- D'AGOSTINO, M. Tableau methods for classical propositional logic. In D'AGOSTINO, M.; GABBAY, D. M.; HAHNLE, R.; POSEGGA, J. (Eds.) **Handbook of Tableau Methods**, chapter 1, p. 45-123. Kluwer Academic Press, 1999.
- EBBINGHAUS, H. D.; FLUM, J.; THOMAS, W. **Mathematical logic**. New York: Springer-Verlag, 1984.
- ENDERTON, H. B. **A mathematical introduction to logic**. San Diego: Academic Press, 1972.
- EPSTEIN, R. L. **The semantic foundations of logic**. Volume 1: propositional logics. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1990.
- FEITOSA, H. A.; PAULOVICH, L. **Um prelúdio à lógica**. São Paulo: Editora Unesp, 2005.
- FEITOSA, H. A.; SILVESTRINI, L. H. C. On the logic of pragmatic truth. In: ARENHART, J. R. B; CONTE, J.; MORTARI, C. A. (Org.). **Temas em filosofia contemporânea II**. Florianópolis: NEL/UFSC, p. 123-136, 2016.
- FITTING, M. Introduction. In D'AGOSTINO, M.; GABBAY, D. M.; HAHNLE, R.; POSEGGA, J. (Eds.) **Handbook of Tableau Methods**, p. 1-43. Kluwer Academic Press, 1999.
- GENTZEN, G. Untersuchungen über das logische Schließen. **Mathematische Zeitschrift**, v. 39, 1935.
- GOLZIO, A. C. J. **Elementos algébricos para a noção de 'poucos' e sua formalização em sistemas dedutivos**. Dissertação de Mestrado, FFC - Universidade Estadual Paulista. Marília, 2011.
- HAACK, S. **Filosofia das lógicas**. Tradução de Cezar Augusto Mortari e Luiz Henrique de Araújo Dutra. São Paulo: Editora Unesp, 2002.
- HAACK, S. **Philosophy of logics**. Cambridge University Press, 1978.
- HAZEN, A. P.; PELLETIER, F. J. Gentzen and Jaśkowski Natural Deduction: Fundamentally Similar but Importantly Different. **Studia Logica**, v. 102, p. 1-40, 2014.
- HIFUME, C. **Uma teoria da verdade pragmática: a quase-verdade de Newton C. A. da Costa**. Dissertação de mestrado, IFCH - Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2003.

- HINTIKKA, J. Form and content in quantification theory. **Acta Philosophica Fennica**, v. 8, 1955.
- JAMES, W. **Pragmatism: a new name for some old ways of thinking**. New York: Longmans, Green and Company, 1907.
- KIRKHAM, R. L. **Theories of truth: a critical introduction**. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press, 1992.
- KLEMENT, K. Russell's Logical Atomism. **The Stanford Encyclopedia of Philosophy** (Winter 2013 Edition).
- KRAUSE, D. Newton da Costa e a filosofia da quase-verdade. **Principia**, v. 13, n. 2, p. 105-128, 2009.
- LIS, Z. Wynikanie semantyczne a wynikanie formalne. **Studia Logica**, v. 10. 1960.
- LYNCH, M.P. (ed.) **The nature of truth: classic and contemporary perspectives**. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press, 2001.
- MALINOWSKI, G. **Many-valued logics**. Oxford: Clarendon Press, 1993.
- MENDELSON, E. **Introduction to mathematical logic**. Princeton: D. Van Nostrand, 1964.
- MIKENBERG, J.; da COSTA, N. C. A.; CHUAQUI, R. Pragmatic truth and approximation to truth. **The Journal of Symbolic Logic**, v. 51, n. 1, p. 201-221, 1986.
- MILLER, A. Realism. In: ZALTA, E. (Ed.) **The Stanford Encyclopedia of Philosophy** (Winter 2014 Edition).
- PEIRCE, C. S. **Collected Papers of Charles Sanders Peirce**. Cambridge: Harvard University Press, v. 2-4, 1934.
- PELLETIER, F. J. **A Brief History of Natural Deduction**. History and Philosophy of Logic, v. 20, p. 1-31, 1999.
- PRAWITZ, D. **Natural Deduction: A Proof-theoretical Study**. Stockholm: Almqvist e Wicksell, 1965.
- RUSSELL, B. The Philosophy of Logical Atomism. In: MARSCH, R. C. (Ed.) **Logic and Knowledge: Essays 1901-1950**, p. 177-281. London: George Allen and Unwin, 1956.
- RASIOWA, H. **An algebraic approach to non-classical logics**. Amsterdam:

North-Holland, 1974.

SAUTTER, F. T. Lewis Carrol e a pré-história das árvores de refutação. In: FEITOSA, H. A.; SAUTTER, F. T. (Orgs.). **Coleção CLE**. Campinas: UNICAMP, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, v. 39, p. 91-103, 2004.

SILVA, F. S. C.; FINGER, M.; MELO, A. C. V. **Lógica para computação**. São Paulo: Thomson Learning, 2006.

SILVESTRINI, L. H. C. Satisfatibilidade lógica e a quase-verdade de Newton da Costa. **Kínesis**, v. 8, n. 17, p. 152-170, 2016.

SILVESTRINI, L. H. C. **Uma nova abordagem para a noção de quase-verdade**. Tese de Doutorado, IFCH. Campinas: UNICAMP, 2011.

SILVESTRINI, L. H. C. **Tableaux e indução na lógica do plausível**. Dissertação de Mestrado, FFC - Universidade Estadual Paulista. Marília, 2005.

SMULLYAN, R. M. **First-order logic**. New York: Springer-Verlag / Dover Publication, 1968.

SMULLYAN, R. M. **Lógica de primeira ordem**. Tradução de Andréa M. A. de Campos Loparic, René Pierre Mazak e Luciano Vicente. São Paulo: Editora Unesp, 2002/2009.

TARSKI, A. The Semantic Conception of Truth: Foundations of Semantics. **Philosophy and Phenomenological Research**, v. 4, p. 341-376, 1944.

TARSKI, A. **A concepção semântica da verdade**. Tradução de Celso Reni Braidá *et al.* MORTARI, C. A.; DUTRA, L. H. de A. (Orgs). São Paulo: Editora Unesp, 2007.

YOUNG, J. O. The coherence theory of truth. **The Stanford Encyclopedia of Philosophy**, 2013. Disponível em :<https://plato.stanford.edu/entries/truth-coherence/>.