

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

CÂMPUS DE GUARATINGUETÁ

SÉRGIO MITTMANN DOS SANTOS

CORDAS CÓSMICAS GIRANTES NA GRAVITAÇÃO DE BRANS-DICKE

Guaratinguetá

2018

SÉRGIO MITTMANN DOS SANTOS

CORDAS CÓSMICAS GIRANTES NA GRAVITAÇÃO DE BRANS-DICKE

Tese apresentada ao Conselho de Pós-Graduação do Curso de FÍSICA da Faculdade de Engenharia do Câmpus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em FÍSICA .

Orientador: Prof. Dr. Julio Marny Hoff da Silva

Guaratinguetá

2018

Santos, Sérgio Mittmann dos
S251c Cordas cósmicas girantes na gravitação de Brans-Dicke / Sérgio
Mittmann dos Santos - Guaratinguetá, 2018.

132 f. : il.

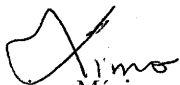
Bibliografia: f. 113-117

Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de
Engenharia de Guaratinguetá, 2018.

Orientador: Prof. Dr. Julio Marny Hoff da Silva

1. Gravitação. 2. Galáxias. 3. Estrelas. I. Título.

CDU 531.5(043)



Luciana Máximo
Bibliotecária-CRB-8/3595

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CÂMPUS DE GUARATINGUETÁ

SÉRGIO MITTMANN DOS SANTOS

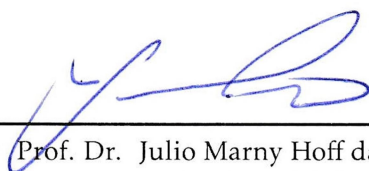
ESTE TRABALHO DE DOUTORADO FOI JULGADO ADEQUADO COMO PARTE DO
REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE "DOUTOR EM FÍSICA "

APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DO CURSO DE
PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA



Prof. Dr. KONSTANTIN GEORGIEV KOSTOV
Coordenador

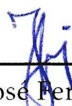
BANCA EXAMINADORA:



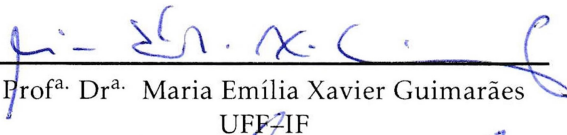
Prof. Dr. Julio Marny Hoff da Silva
Orientador/UNESP-FEG



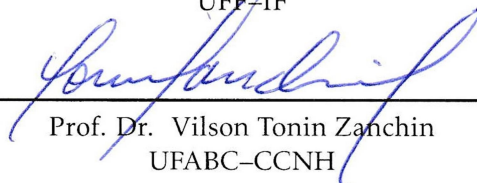
Prof. Dr. Álvaro de Souza Dutra
UNESP-FEG



Prof. Dr. José Fernando de Jesus
UNESP-Itapeva



Prof.ª Dr.ª Maria Emília Xavier Guimarães
UFF-IF



Prof. Dr. Vilson Tonin Zanchin
UFABC-CCNH

Fevereiro , 2018

DADOS CURRICULARES

SÉRGIO MITTMANN DOS SANTOS

- NASCIMENTO** 25/05/1966, São Leopoldo – RS
- FILIAÇÃO** Irene Mittmann dos Santos
Ataides Bobsin dos Santos
- 1996-2000** Licenciatura em Física
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas
Universidade do Vale do Rio dos Sinos
– UNISINOS
São Leopoldo – RS
- 2001-2003** Mestrado em Computação Aplicada
Programa de Pós-Graduação em Computação Aplicada
Universidade do Vale do Rio dos Sinos
– UNISINOS
São Leopoldo – RS
- 2014-2018** Pós-Graduação em Física, nível Doutorado
Faculdade de Engenharia do Câmpus de Guaratinguetá
Universidade Estadual Paulista – UNESP
Guaratinguetá – SP

Aos meus pais,
Irene Mittmann dos Santos e Ataiades Bobsin dos Santos,
que desde sempre souberam sobre a importância da educação, e não pouparam esforços em
prol da minha formação.

AGRADECIMENTOS

À minha esposa, Zelãene Beatriz dos Santos, por todo o seu amor, e pelo apoio sempre incondicional, desde as pontes aéreas semanais POA-GRU até os afastamentos periódicos quase mensais.

Ao Prof. Julio Marny Hoff da Silva pela amizade e orientação atenciosa e precisa, inclusive antes do período no Programa de Pós-Graduação.

Àqueles que sabiamente ministraram as disciplinas que cursei na pós-graduação: Prof. Antonio S. de Castro, Prof. Konstantin G. Kostov, Prof. Marcelo B. Hott, Prof. Denis Dalmazi, Prof. Ernesto Vieira Neto e Prof. Saulo H. Pereira.

Ao Prof. José L. Cindra pela colaboração no trabalho de 2015 e 2016.

À Clecy pelas inúmeras alegres recepções no Aeroporto Salgado Filho.

À Karen pelos confortantes *tudo bem, Mitt?* nos momentos de trabalho contínuo.

Aos colegas da pós-graduação pela ajuda e companheirismo, especialmente aos amigos Alessandro, Carlos & Rodolfo, e André.

Às Diretorias do Câmpus Porto Alegre do IFRS, principalmente a Diretoria de Gestão de Pessoas, pelos seus prestativos auxílios.

Ao Prof. Bardo E. J. Bodmann por ter me motivado e ensinado a dar os primeiros passos no trabalho com a pesquisa científica.

Aos gaúchos Daniel *Macedu\$\$\$*, Cláudio *Heavy*, Sandra *Jaguaririca* e Jezer pelas visitas em Guara City.

À Fofa, à Cristal e à Nina pelas indescritíveis explosões de felicidade sempre que me reviam, mesmo após ter ficado semanas distante.

A todos que me ajudaram/torceram por mim.

Este trabalho contou com o apoio financeiro parcial da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES.

You realize that a man can take a train and never reach his destination, that a man has no destination at the end of the road, but that he merely has a starting point on the road – which is

Home.

Jack Kerouac

RESUMO

A partir da teoria da gravitação de Brans-Dicke, são obtidas soluções exatas para as cordas cósmicas girantes. As soluções são para cordas retas, que preservam a simetria de Lorentz ao longo do eixo longitudinal de simetria, e para as não retas, com simetria aproximadamente cilíndrica e que violam a simetria de Lorentz. Essas soluções permitem verificar se os espaços-tempos das cordas são regulares ou apresentam singularidades. Além disso, a possibilidade de que as cordas sejam fontes de curvas tipo-tempo fechadas também é analisada. Exclusivamente para as cordas retas, é verificado se essas se mantiveram estáveis após as suas eventuais formações, e se uma escolha adequada para as constantes de integração das soluções impede a existência das curvas tipo-tempo fechadas. Desde a década de 1930, as observações mostram que as velocidades tangenciais das estrelas das galáxias têm um comportamento que contraria o que é previsto quando se considera somente a presença de matéria visível: à medida que as distâncias até os centros das galáxias aumentam, as velocidades também aumentam, até que começam a tender para valores aproximadamente constantes. A razão para esse fenômeno ainda está sob debate. Por enquanto, é justificado pela presença de matéria escura nos halos das galáxias, mas a própria matéria escura ainda não é bem entendida. Em 1980, para 21 galáxias do tipo Sc, as observações mostraram que esse crescimento das velocidades até atingirem os valores constantes ocorre quando as distâncias crescem por 2 a 3 ordens de grandeza. Com as soluções da teoria de Brans-Dicke para as cordas não retas, é proposto um espaço-tempo com a mesma simetria aproximadamente cilíndrica, que descreve adequadamente esse comportamento nas velocidades das estrelas daquelas 21 galáxias.

PALAVRAS-CHAVES Cordas cósmicas girantes. Gravitação de Brans-Dicke. Curvas de rotação de galáxias.

ABSTRACT

From the Brans-Dicke theory of gravitation, exact solutions are obtained for the spinning cosmic strings. The solutions are for straight strings, which preserve the Lorentz symmetry along the longitudinal axis of symmetry, and for the non-straight strings, with nearly cylindrical symmetry and which violate the Lorentz symmetry. These solutions allow us to verify if the spacetimes of the strings are regular or have singularities. In addition, the possibility that the strings are sources of closed timelike curves is also analyzed. Only for the straight strings, it is verified if these have remained stable after their eventual formations, and if a suitable choice for the integration constants of the solutions prevents the existence of the closed timelike curves. Since the 1930s, observations have shown that the tangential velocities of galaxies' stars have a behavior that goes against what is predicted when considering only the presence of visible matter: as distances to the centers of galaxies increase, velocities also increase until they begin to tend to approximately constant values. The reason for this phenomenon is still under discussion. For now, it is justified by the presence of dark matter in the halos of galaxies, but the dark matter itself is still not well understood. In 1980, for 21 Sc-type galaxies, observations showed that such velocities growth until reaching constant values occurs when distances grow by 2 to 3 orders of magnitude. With the solutions of the Brans-Dicke theory for the non-straight strings, a spacetime with the same nearly cylindrical symmetry is proposed, which adequately describes this behavior in the velocities of the stars of those 21 galaxies.

KEYWORDS Spinning cosmic strings. Brans-Dicke gravitation. Rotational curves of galaxies.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	Uma breve história térmica do Universo, onde se pode ver a transição da grande unificação, quando teria ocorrido a formação dos defeitos topológicos (VILENKIN; SHELLARD, 1994).	24
Figura 2	Formação de um defeito topológico, com a quebra de simetria em mínimos diferentes do potencial $V(\phi)$; os mesmos estão separados por uma distância ζ e por um defeito bidimensional bastante fino, mas com grande densidade de energia, onde $\langle\phi\rangle = 0$ (HORVATH et al., 2011).	25
Figura 3	Duas fases da formação dos defeitos topológicos: à esquerda, a fase onde há a quebra de simetria, quando a distância entre os espaços é maior que ζ e os mesmos não estão correlacionados; à direita, ocorre a formação dos defeitos, quando os espaços são regiões com baixa energia e, entre eles, $\langle\phi\rangle = 0$ (SRIVASTAVA, 1999).	25
Figura 4	Classificação dos defeitos topológicos, de acordo com a dimensão e com os grupos de homotopia $\pi_n(\mathcal{M})$ (VILENKIN; SHELLARD, 1994).	26
Figura 5	Valores atuais para $\log(1 - \gamma)$ (eixo vertical) em função da curvatura κ (eixo horizontal). A curva superior corresponde a $\Omega_{mat} = 0.01$, a intermediária representa o resultado para $\Omega_{mat} = 0.1$, e a inferior para $\Omega_{mat} = 1$ (DAMOURE; NORDTVEDT, 1993b).	44
Figura 6	O potencial tipo chapéu mexicano possui um círculo com um raio limitado pelos vácuos verdadeiros, quando $V = 0$, que prende, em uma região energeticamente favorável, soluções do chamado falso vácuo (onde $\langle\phi\rangle = 0$), o que favorece a formação de uma corda cósmica (DAVIS; KIBBLE, 2005).	46
Figura 7	A imagem ilustra a geometria para $\theta_M < \frac{\pi}{2}$, originada em torno da corda, a partir do que estabelecem as soluções interna e externa (GOTT III, 1985).	47
Figura 8	Nas figuras da esquerda e central, pode se observar o aspecto da estrutura cônica do espaço-tempo em torno da corda cósmica (SRIVASTAVA, 1999); na figura à direita, a duplicação da imagem de uma galáxia, por exemplo, é observada quando uma corda cósmica está presente, onde o ângulo entre as imagens é $\delta\alpha = \Delta\theta \frac{L}{D+L}$ (HORVATH et al., 2011).	49

Figura 9	O CSL-1 consiste em duas galáxias separadas por aproximadamente 1", com os mesmos redshifts $z = 0.46$ e espectro (VERDULT, 2009).	50
Figura 10	Posições de outros candidatos (representados pelos pontos na figura) a lentes gravitacionais associadas com a presença de cordas cósmicas na região em torno do CSL-1 (VERDULT, 2009).	50
Figura 11	Resultado de uma simulação de formação de cordas cósmicas (VILENKIN; SHELLARD, 1994).	51
Figura 12	Diagrama de espaço-tempo indicando a linha de mundo de uma partícula estacionária como uma linha reta (MCMAHON, 2006).	53
Figura 13	Diagrama de espaço-tempo com duas dimensões espaciais (MCMAHON, 2006).	53
Figura 14	Representação espaço-temporal de uma trajetória tipo-tempo. O deslocamento do corpo pode ser positivo ou negativo, mas o tempo evolui sempre de tal forma que $\Delta t > 0$ (NOVELLO, 2005).	54
Figura 15	Representação espaço-temporal de uma trajetória tipo-tempo fechada Γ . Agora, diferente do observado na Figura 14, é possível a ocorrência de $\Delta t < 0$ (NOVELLO, 2005).	55
Figura 16	Uma possível viagem ao passado, quando o viajante sai de Q e chega a P , sendo que $T_P < T_Q$. Pode ser visto que os cones de luz vão tombando no sentido anti-horário (DAHMEN, 2006).	58
Figura 17	A estrutura helicoidal do tempo para uma corda cósmica girante é mostrada nesta representação. Tal estrutura tem um passo de hélice proporcional ao momento angular e é resultante da combinação entre as coordenadas t e φ na métrica (3.35), onde t é representada ao longo do eixo vertical (DESER; JACKIW, 1992).	60
Figura 18	O fluxo do monopolo com carga g é ilustrado pela região hachurada, que está limitada por r e θ fixos (RYDER, 1996).	63
Figura 19	Corda de Dirac formada a partir do monopolo com intensidade g (FRENKEL, 1996).	63
Figura 20	Comportamento qualitativo da coordenada radial. As constantes são escolhidas de tal forma que $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{4}$ e $a_3 = 0$. Para esses valores, o raio r^* é igual a 1 (também mostrado na figura).	75

Figura 21 Representação da geometria do modelo de caneta esferográfica, utilizado para analisar as regiões interna e externa de uma corda cósmica girante (JENSEN; SOLENG, 1992).	77
Figura 22 Comportamento de $g_{\varphi\varphi}$, indicada no gráfico como $g_{\phi\phi}$, em unidades de $\frac{1}{\lambda}$ em função da razão entre a coordenada r e o raio da corda r_s , quando $\alpha = 1$ e $\sqrt{\lambda} r_s = \frac{3}{2}$. É observado que há uma região, entre $0.8 < \frac{r}{r_s} < 1.2$, onde ocorrem CTCs, porque $g_{\varphi\varphi} < 0$ (JENSEN; SOLENG, 1992).	80
Figura 23 Comportamento de $g_{\varphi\varphi}$ para distintos valores de a_{C_3} e C_1 , com $C_4 = 0.1$, $C_5 = 1$, $C_a = 0.08$, $r_{min} = 1$ e $M = M_-$. Quando $g_{\varphi\varphi} > 4$, a escala adotada para o eixo vertical é diferente daquela quando $g_{\varphi\varphi} \leq 4$	85
Figura 24 Esquema de Hubble utilizado para a classificação das galáxias (OLIVEIRA F ^O .; SARAIVA, 2004). O tipo das aqui estudadas é Sc, e a Via Láctea é do tipo SBb.	90
Figura 25 Quando $r_{min} = 1$ m, $k_1 = 0.5$, $a_{C_3} = 0.5$, $C_4 = 0.1$ e $C_5 = -10$, diferentes combinações das funções Ω e M na equação (5.17) promovem distintas funções da velocidade tangencial. É interessante notar que todas as funções tendem a ter uma mesma velocidade constante $v_{\varphi_{cst}}$. Um comportamento similar pode ser visto para quando $\Omega = \Omega_+$ e $M = M_+$ ou $\Omega = \Omega_-$ e $M = M_-$ em relação às velocidades das estrelas nas galáxias do trabalho (RUBIN et al., 1980), que tendem a um valor constante no intervalo aproximado de 3 ordens de grandeza.	93
Figura 26 Velocidades das estrelas das galáxias NGC 701, NGC 1087, NGC 3672 e NGC 801 (RUBIN et al., 1980) comparadas com o melhor ajuste da função (5.17). Quando $\Omega = \Omega_+$, as curvas mostram os ajustes para quando as constantes C_4 e C_5 são reais e há CTC no intervalo representado no gráfico, porque $g_{\varphi\varphi} < 0$; quando $\Omega = \Omega_-$, C_4 e C_5 são imaginárias, $g_{\varphi\varphi} > 0$, e não há CTC, e a métrica é euclídeana, porque $g_{tt} > 0$. Os valores das constantes e dos coeficientes de determinação para cada galáxia estão na tabela 3, e os valores das velocidades medidas e calculadas, os erros padrões e os CIs estão nas tabelas 22-25 do apêndice B.	99

Figura 27 A figura mostra as curvas melhor ajustadas para a galáxia NGC 801 quando r , inicialmente definido com a ordem de grandeza esperada em metros, diminui ou aumenta 9 ordens de grandeza, isto é, $r \rightarrow 10^{\pm 3n}r$, onde $n = \{1, 2, 3\}$. O ajuste continua sendo bem sucedido, desde que r_{min} também seja transformado com a mesma ordem de grandeza utilizada para a mudança de r , ou seja, para $10^{\pm 3n}r_{min}$. A curva mais à esquerda tem $\log r_{min} = 7.5$, e a curva mais à direita é para $\log r_{min} = 25.5$. As demais constantes são aquelas para quando $\Omega = \Omega_+$ 103

Figura 28 Velocidades das estrelas da galáxia NGC 1087 (RUBIN et al., 1980) comparadas com os melhores ajustes da função (5.17) no referencial de Jordan-Fierz. Os valores das constantes e os coeficientes de determinação estão na tabela 4. Para $\omega \geq 10^2$, o ajuste da função (5.17) resulta em curvas quase idênticas. 106

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Das mais de 10 bilhões de combinações possíveis entre as constantes e a coordenada radial, 278533 delas são quando não ocorrem CTCs na teoria de BD, onde $g_{\varphi\varphi}(C_1 \neq 0) > 0$, mas ocorrem na RG, quando $g_{\varphi\varphi}(C_1 = 0) < 0$. Em apenas 4 soluções, o inverso, $g_{\varphi\varphi}(C_1 \neq 0) < 0$ quando $g_{\varphi\varphi}(C_1 = 0) > 0$, ocorre.	86
Tabela 2 – Valores de C_5 calculados de acordo com a equação (5.32) (para que $v_\varphi \leq v_{\varphi_{cst}}$) e os intervalos da constante para que não ocorram CTCs (quando $g_{\varphi\varphi} > 0$).	97
Tabela 3 – Valores das componentes g_{tt} e $g_{\varphi\varphi}$, das constantes e dos coeficientes de determinação para os ajustes da função (5.17) feitos para as galáxias NGC 701, NGC 1087, NGC 3672 e NGC 801, mostrados na Figura 26. R_{far} é a distância radial da velocidade medida mais afastada do centro da galáxia. Quando a constante C_5 é real, é definida pela equação (5.32).	98
Tabela 4 – Valores das constantes e dos coeficientes de determinação para os ajustes da função (5.17) no referencial de Jordan-Fierz para a galáxia NGC 1087, mostrados na Figura 28. A constante C_1 foi definida pelo sistema das equações (4.89), (5.48) e (5.54), e C_5 foi definida pela equação (5.32).	107
Tabela 5 – Valores das constantes do ajuste da função (5.17) para a galáxia NGC 4605, com o respectivo coeficiente de determinação. Ao lado, o gráfico que compara as velocidades medidas com as calculadas.	119
Tabela 6 – Valores das constantes do ajuste da função (5.17) para a galáxia NGC 1035, com o respectivo coeficiente de determinação. Ao lado, o gráfico que compara as velocidades medidas com as calculadas.	119
Tabela 7 – Valores das constantes do ajuste da função (5.17) para a galáxia NGC 4062, com o respectivo coeficiente de determinação. Ao lado, o gráfico que compara as velocidades medidas com as calculadas.	120
Tabela 8 – Valores das constantes do ajuste da função (5.17) para a galáxia NGC 2742, com o respectivo coeficiente de determinação. Ao lado, o gráfico que compara as velocidades medidas com as calculadas.	120

Tabela 9 – Valores das constantes do ajuste da função (5.17) para a galáxia NGC 2608, com o respectivo coeficiente de determinação. Ao lado, o gráfico que compara as velocidades medidas com as calculadas.	121
Tabela 10 – Valores das constantes do ajuste da função (5.17) para a galáxia NGC 3495, com o respectivo coeficiente de determinação. Ao lado, o gráfico que compara as velocidades medidas com as calculadas.	121
Tabela 11 – Valores das constantes do ajuste da função (5.17) para a galáxia UGC 3691, com o respectivo coeficiente de determinação. Ao lado, o gráfico que compara as velocidades medidas com as calculadas.	122
Tabela 12 – Valores das constantes do ajuste da função (5.17) para a galáxia NGC 4682, com o respectivo coeficiente de determinação. Ao lado, o gráfico que compara as velocidades medidas com as calculadas.	122
Tabela 13 – Valores das constantes do ajuste da função (5.17) para a galáxia NGC 1421, com o respectivo coeficiente de determinação. Ao lado, o gráfico que compara as velocidades medidas com as calculadas.	123
Tabela 14 – Valores das constantes do ajuste da função (5.17) para a galáxia NGC 2715, com o respectivo coeficiente de determinação. Ao lado, o gráfico que compara as velocidades medidas com as calculadas.	123
Tabela 15 – Valores das constantes do ajuste da função (5.17) para a galáxia NGC 4321, com o respectivo coeficiente de determinação. Ao lado, o gráfico que compara as velocidades medidas com as calculadas.	124
Tabela 16 – Valores das constantes do ajuste da função (5.17) para a galáxia IC 467, com o respectivo coeficiente de determinação. Ao lado, o gráfico que compara as velocidades medidas com as calculadas.	124
Tabela 17 – Valores das constantes do ajuste da função (5.17) para a galáxia NGC 7541, com o respectivo coeficiente de determinação. Ao lado, o gráfico que compara as velocidades medidas com as calculadas.	125
Tabela 18 – Valores das constantes do ajuste da função (5.17) para a galáxia NGC 7664, com o respectivo coeficiente de determinação. Ao lado, o gráfico que compara as velocidades medidas com as calculadas.	125
Tabela 19 – Valores das constantes do ajuste da função (5.17) para a galáxia NGC 2998, com o respectivo coeficiente de determinação. Ao lado, o gráfico que compara as velocidades medidas com as calculadas.	126

Tabela 20 – Valores das constantes do ajuste da função (5.17) para a galáxia NGC 753, com o respectivo coeficiente de determinação. Ao lado, o gráfico que compara as velocidades medidas com as calculadas.	126
Tabela 21 – Valores das constantes do ajuste da função (5.17) para a galáxia UGC 2885, com o respectivo coeficiente de determinação. Ao lado, o gráfico que compara as velocidades medidas com as calculadas.	127
Tabela 22 – Velocidades medidas (RUBIN et al., 1980) e calculadas, erros padrões e intervalos de confiança para a galáxia NGC 701.	129
Tabela 23 – Velocidades medidas (RUBIN et al., 1980) e calculadas, erros padrões e intervalos de confiança para a galáxia NGC 1087.	130
Tabela 24 – Velocidades medidas (RUBIN et al., 1980) e calculadas, erros padrões e intervalos de confiança para a galáxia NGC 3672.	131
Tabela 25 – Velocidades medidas (RUBIN et al., 1980) e calculadas, erros padrões e intervalos de confiança para a galáxia NGC 801.	132

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	23
2	TEORIA DE GRAVITAÇÃO DE BRANS-DICKE	31
2.1	A transformação conforme e os referenciais de Jordan-Fierz e de Einstein . .	37
2.2	A relatividade geral como um atrator natural da gravitação de Brans-Dicke	41
3	CORDAS CÓSMICAS	45
3.1	A estrutura cônica do espaço-tempo em torno de uma corda cósmica . . .	45
3.2	Os universos de Gödel e as cordas cósmicas girantes	51
3.3	A aplicação da condição de quantização de Dirac para o espaço-tempo das cordas cósmicas girantes	60
4	CORDAS CÓSMICAS GIRANTES NA TEORIA DE BRANS-DICKE	67
4.1	Solução para uma corda cósmica girante reta na teoria de Brans-Dicke . .	68
4.2	Propriedades físicas	73
4.3	Estrutura interna	77
4.4	Soluções para uma corda cósmica girante aproximadamente cilindricamente simétrica na gravidade de Brans-Dicke	80
4.5	Propriedades do espaço-tempo gerado fora da corda	84
5	CURVAS DE ROTAÇÃO DE GALÁXIAS	89
5.1	O espaço-tempo gerador das curvas de rotação de galáxias	90
5.2	O ajuste do modelo para as 21 galáxias	93
5.3	Os intervalos de confiança do modelo	98
5.4	As ordens de grandeza das constantes e da coordenada radial	102
5.5	O espaço-tempo com simetria exatamente cilíndrica como alternativa à geração das curvas de rotação	102
5.6	A razão $\frac{\beta}{\alpha}$	103
5.7	O modelo no referencial de Jordan-Fierz	105
6	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS	109

REFERÊNCIAS	113
APÊNDICE A – VALORES DAS CONSTANTES DOS AJUSTES DA FUNÇÃO (5.17), COM OS RESPECTIVOS COEFICIENTES DE DETERMINAÇÃO, E OS GRÁFICOS QUE COMPARAM AS VELOCIDADES MEDIDAS COM AS CALCULADAS, PARA AS GALÁXIAS NÃO MOSTRADAS NA TABELA 3 E NA Figura 26	119
APÊNDICE B – VELOCIDADES MEDIDAS E CALCULADAS, ERROS PADRÕES E INTERVALOS DE CONFIANÇA PARA AS GALÁXIAS NGC 701, NGC 1087, NGC 3672 E NGC 801 . . .	129

1 INTRODUÇÃO

A métrica de Friedmann-Robertson-Walker

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (1.1)$$

descreve o Universo como sendo espacialmente homogêneo, isotrópico e cuja expansão é caracterizada pelo termo $a(t)$, o que parece concordar com as observações atuais. Isso leva à ideia de que o Universo primordial possuía regiões com altas temperaturas e, consequentemente, altas energias, associadas com um alto grau de simetria. À medida que o Universo se expandia, também esfriava, quando, em determinadas temperaturas, podem ter ocorrido transições de fase junto com quebras espontâneas de simetria. Essa dinâmica foi o que alicerçou a proposta conhecida como *mecanismo de Kibble*, que, basicamente, afirma que quando a energia do Universo baixou, ocorreu uma transição de fase cosmológica, durante a transição da *grande unificação* (veja a Figura 1), que associada com uma quebra espontânea de simetria, levou à formação de diversos espaços, cada qual com um valor específico de vácuo (KIBBLE, 1976). Uma vez que esses espaços eram incomunicáveis, não havia violação da causalidade. Com a evolução da expansão do Universo, os espaços acabaram entrando em contato e na junção desses surgiram os chamados *defeitos topológicos*. As paredes desses espaços podem ser modeladas pela densidade lagrangeana (VILENKIN; SHELLARD, 1994)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - V(\phi), \quad (1.2)$$

onde o potencial é

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - \eta^2)^2. \quad (1.3)$$

Há uma invariância em (1.2), quando se substitui ϕ por $-\phi$, e, ao ser determinado o estado de vácuo pela expressão

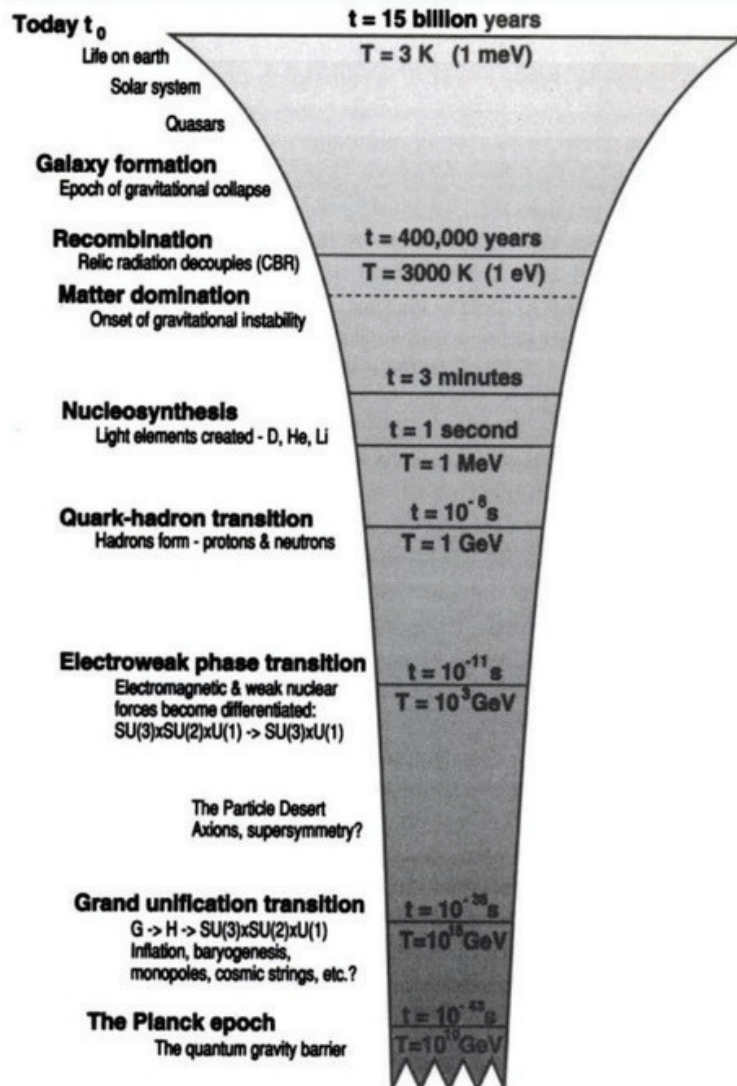
$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = \lambda \phi (\phi^2 - \eta^2) = 0, \quad (1.4)$$

verifica-se que os mínimos do potencial V são definidos a partir de $\phi = \pm \eta$, como pode ser visto na Figura 2. Nessa figura, é mostrada ainda a distância (HORVATH et al., 2011)

$$\zeta < ca(t) \int_0^t \frac{dt}{a(t)} \quad (1.5)$$

entre dois mínimos, que corresponde à distância entre duas regiões do Universo onde a quebra de simetria se realizou em mínimos diferentes, sendo que esses estão separados por um defeito bidimensional bastante fino, mas com grande densidade de energia, quando $\langle \phi \rangle = 0$, também chamado de *falso vácuo*. Na Figura 3, podem ser vistas duas fases da

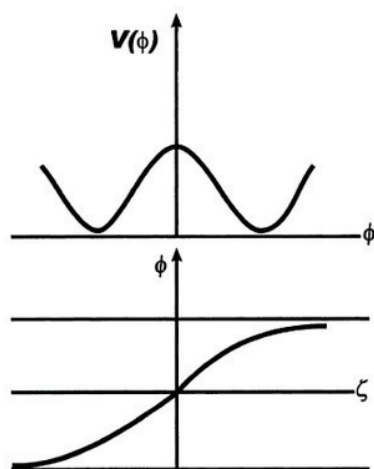
Figura 1 – Uma breve história térmica do Universo, onde se pode ver a transição da grande unificação, quando teria ocorrido a formação dos defeitos topológicos (VILENKIN; SHELLARD, 1994).



Fonte: (VILENKIN; SHELLARD, 1994).

formação de defeitos topológicos. A primeira, na Figura 3a, formada por bolhas, mostra a fase onde há a quebra de simetria, equivalente à fase nemática nos cristais líquidos, quando as moléculas têm aproximadamente uma mesma orientação ao longo de um eixo. Nessa fase, a distância entre os espaços é maior que ζ e, portanto, eles não estão correlacionados. Na segunda fase mostrada, Figura 3b, os espaços já são regiões com baixa energia e tendem a

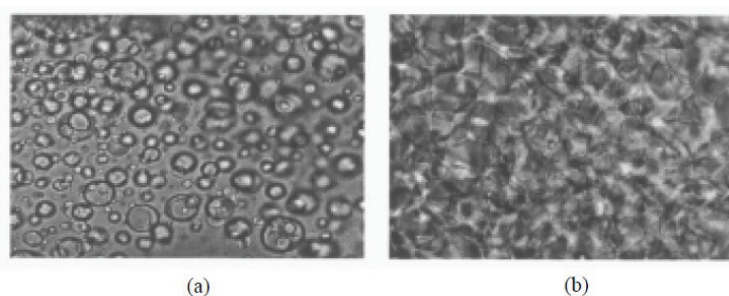
Figura 2 – Formação de um defeito topológico, com a quebra de simetria em mínimos diferentes do potencial $V(\phi)$; os mesmos estão separados por uma distância ζ e por um defeito bidimensional bastante fino, mas com grande densidade de energia, onde $\langle \phi \rangle = 0$ (HORVATH et al., 2011).



Fonte: (HORVATH et al., 2011).

crescer e a coalescer. Na interface entre eles, onde $\langle \phi \rangle = 0$, se formam os defeitos.

Figura 3 – Duas fases da formação dos defeitos topológicos: à esquerda, a fase onde há a quebra de simetria, quando a distância entre os espaços é maior que ζ e os mesmos não estão correlacionados; à direita, ocorre a formação dos defeitos, quando os espaços são regiões com baixa energia e, entre eles, $\langle \phi \rangle = 0$ (SRIVASTAVA, 1999).



Fonte: (SRIVASTAVA, 1999).

Os defeitos topológicos podem ser classificados em três tipos principais: *pontual*, *linear* e *superfície*. Há um quarto tipo ainda, denominado *textura*. De acordo com a dimensão, os tipos pontual, linear e superfície possuem, respectivamente, as dimensões zero, um e dois. Os *monopolos* são defeitos do tipo pontual, as *cordas cósmicas* são do tipo linear e as *paredes de domínio* são do tipo superfície. Os defeitos podem também ser classificados de acordo com o grupo de homotopia $\pi_n(\mathcal{M})$, onde $n = 0$ para as paredes de domínio, $n = 1$ para as

cordas cósmicas, $n = 2$ para os monopolos e $n = 3$ para as texturas (VILENKIN; SHELLARD, 1994). A Figura 4 traz um resumo dessas classificações. Há indicações de que a existência dos monopolos e das paredes de domínio é inaceitável, porque sua formação entra em conflito com as observações cosmológicas mais fundamentais, pois, não existindo um mecanismo de decaimento de energia para esses tipos de defeitos, os mesmos dominariam a energia do Universo durante a evolução cosmológica, o que teria conduzido a um Big Crunch (HORVATH et al., 2011; SILVA, 2009).

Figura 4 – Classificação dos defeitos topológicos, de acordo com a dimensão e com os grupos de homotopia $\pi_n(\mathcal{M})$ (VILENKIN; SHELLARD, 1994).

Topological defect	Dimension	Classification
Domain walls	2	$\pi_0(\mathcal{M})$
Strings	1	$\pi_1(\mathcal{M})$
Monopoles	0	$\pi_2(\mathcal{M})$
Textures	—	$\pi_3(\mathcal{M})$

Fonte: (VILENKIN; SHELLARD, 1994).

Como os defeitos topológicos teriam surgido logo após o Big Bang, uma teoria que traga alguma descrição mais apropriada para essa época é a adequada. Nesse sentido, a *teoria de gravitação de Brans-Dicke* (BD) descreve os fenômenos gravitacionais com a ajuda de um campo escalar em adição ao campo tensorial usual da *relatividade geral* (RG) (BRANS; DICKE, 1961). Nessa teoria, a grandeza adimensional ω , chamada de parâmetro de acoplamento de BD, determina o desvio dos resultados obtidos daqueles na RG. Quanto menor for o valor de ω , maior é a diferença entre os resultados correspondentes. Por exemplo, para o Sistema Solar, onde a RG é extremamente bem sucedida, $|\omega| > 40000$ (CLIFFORD, 2006; BERTOTTI et al., 2003). Assim, poderia se pensar em descartar uma teoria do tipo escalar-tensorial. No entanto, durante a investigação da evolução cosmológica do Universo com uma teoria escalar-tensorial, concluiu-se que a RG é um atrator dessa mesma teoria, porque a dinâmica do campo escalar teria sido gradualmente suprimida (DAMOUR; NORDTVEDT, 1993a; DAMOUR; NORDTVEDT, 1993b; DAMOUR; POLYAKOV, 1994; CONTALDI et al., 1999). Portanto, uma teoria de gravitação escalar-tensorial, tal como a de BD, parece ser a mais apropriada para descrever fontes que se originaram no Universo primordial, quando a intensidade do campo escalar e sua variação ainda eram importantes. A teoria pode ser escrita sob duas formas, uma no chamado *referencial de Jordan-Fierz* e outra no *referencial de*

Einstein, sendo essa última o resultado da *transformação conforme* sobre a primeira. Há um grande debate sobre qual desses referenciais é o que descreve corretamente os fenômenos previstos pela teoria, não havendo ainda um consenso. Uma discussão sobre os fundamentos da gravitação de BD e os demais tópicos associados a ela e mencionados aqui é realizada no Capítulo 2, porque a teoria é utilizada nos Capítulos 4 e 5, para o maior entendimento das *cordas cósmicas girantes*, um tipo de corda cósmica com uma velocidade angular no seu eixo de simetria longitudinal, e de fontes com a mesma simetria dessas cordas.

Antes da aplicação da teoria de BD, no Capítulo 3, serão vistos alguns resultados, já obtidos há algum tempo, que caracterizam melhor as cordas cósmicas, mas a partir da RG. Inicialmente, é mostrada a expressão que define a estrutura cônica do espaço-tempo de uma corda, a qual é útil nas observações que buscam a sua detecção. Depois, é realizada uma ampla exposição em torno dos *universos de Gödel* (GÖDEL, 1949), propostos em 1949, o que provocou uma mudança importante nas ideias sobre a questão do tempo, porque sugerem a possibilidade da existência das *curvas tipo-tempo fechadas* (em inglês, *closed timelike curves* (CTCs)), que violam a causalidade, e poderiam funcionar como máquinas do tempo (NOVELLO, 2005). Esse tópico é enfatizado, porque o trabalho proposto aqui é em torno dos espaços-tempos gerados por fontes como as cordas cósmicas girantes, onde são previstas regiões com CTCs, como nas soluções de Gödel. No mesmo capítulo ainda, os monopolos são abordados a partir da proposta de Dirac (DIRAC, 1931), pois a sua condição de quantização é aplicada no espaço-tempo de uma corda cósmica girante, para a verificação da sua estabilidade e consequente possibilidade de existência atual. O resultado mostra que esse tipo de corda não deve ter sobrevivido logo após a sua formação.

No Capítulo 4, as cordas cósmicas girantes são estudadas pela gravitação de BD, uma vez que seria a teoria mais correta para descrever o que ocorreu na época da formação dessas cordas. As equações de movimento da ação de BD escritas, no Capítulo 2, no referencial de Jordan-Fierz são redefinidas para o referencial de Einstein, haja visto que o tratamento matemático nesse último referencial encontra alguma simplificação. Depois de encontradas as soluções no referencial de Einstein, é também posteriormente realizada a análise dessas no referencial de Jordan-Fierz, com o uso de uma transformação conforme inversa. São obtidas as soluções das equações de movimento da gravitação de BD para quando a corda é reta, e, portanto, não viola a simetria de Lorentz ao longo do eixo de simetria longitudinal z . Também são encontradas as soluções para quando a corda é aproximadamente reta. Nesse caso, a simetria cilíndrica, adotada para a corda reta, é mantida, mas o módulo da razão entre os coeficientes de dt^2 e dz^2 do elemento de linha, que era igual à unidade, agora é

aproximadamente essa unidade. Dessa forma, a invariância de Lorentz é quebrada, o que alguns trabalhos apontam como necessária para uma teoria de grande unificação da época do Universo primordial, justamente quando é considerado que houve a formação das cordas cósmicas (KOSTELECKÝ; SAMUEL, 1989; KOSTELECKÝ; POTTING, 1991; KOSTELECKÝ; POTTING, 1995; KOSTELECKÝ; POTTING, 1996). As propriedades físicas dos espaços-tempos resultantes são verificadas, quando se constata, inicialmente, que os mesmos são regulares na região externa às cordas, através do cálculo dos *escalares de Kretschmann*. Como previsto pela RG, também na gravitação de BD as cordas cósmicas girantes são fontes de regiões onde pode haver CTCs. É apresentada uma discussão onde se levanta a hipótese, baseada em estudo preliminar, de que pode haver uma tendência maior para a existência de CTCs na RG do que na gravitação de BD. Exclusivamente para as cordas retas, assim como na RG, as mesmas igualmente parecem ser instáveis e, por isso, logo após as suas formações, não sobreviveram. Embora o objetivo do trabalho tenha sido a análise somente das soluções externas à corda, no vácuo, quando o tensor energia-momento é nulo, alguns resultados na RG, que consideram também a estrutura interna, onde o tensor energia-momento leva em consideração a matéria da corda, são mostrados como preparação para uma futura pesquisa.

No Capítulo 5, é vista uma aplicação para as soluções obtidas com a corda que viola a simetria de Lorentz, já que aquela que não viola seria instável. Na verdade, as soluções são utilizadas para identificar os efeitos de um espaço-tempo gerado não por uma corda cósmica girante, mas por um espaço-tempo com a mesma simetria. Assim, a definição da constante r_{min} como sendo equivalente ao raio da corda $r_s \sim 10^{-31}$ m no Capítulo 4 não é mais válida, porque pode ter ordens de grandeza muito superiores. As soluções são empregadas como uma alternativa para explicar o fenômeno das *curvas de rotação* nas galáxias, quando as velocidades tangenciais das suas estrelas assumem valores acima daqueles previstos, se apenas considerada a matéria visível (ZWICKY, 1933; ZWICKY, 1937; RUBIN et al., 1980; PERSIC; SALUCCI, 1995; SALUCCI; PERSIC, 1997). Usualmente, é postulado que a *matéria escura*, que estaria presente no halo das galáxias, é que seria a responsável por esse mecanismo. Entretanto, a matéria escura, assim como a *energia escura*, são temas de amplo debate. Além das estrelas possuírem velocidades maiores do que as esperadas, à medida que aumenta a distância em relação ao centro de uma determinada galáxia, as estrelas dessa galáxia tendem para uma mesma velocidade constante. Há trabalhos que preveem o valor constante da velocidade a uma grande distância, quando considerada uma teoria tensorial-escalar, mas não como evolui o crescimento dessa velocidade (GUZMÁN et al., 2002; LEE; LEE, 2004), o que é obtido com a aplicação das soluções do Capítulo 4. O modelo é ajustado para um

conjunto de 21 galáxias do tipo Sc, as quais são o objeto do trabalho de pesquisa relatado na referência (RUBIN et al., 1980), e consegue reproduzir a ordem de grandeza adequada do comportamento de crescimento das velocidades tangenciais das estrelas até atingirem um valor constante. A exigência para a reprodução desse comportamento é que ou existem CTCs no espaço-tempo que gera as curvas de rotação das galáxias, ou a métrica desse espaço-tempo deve ser euclideana, assinatura necessária também nas teorias de gravidade quântica para a descrição dos fenômenos da época da grande unificação (quando surgiram as cordas cósmicas) (HAWKING, 1979; HARTLE; HAWKING, 1983). É constatado que a solução correta para o espaço-tempo somente é possível quando a gravitação empregada é a de BD, e não a RG. Além disso, embora sejam 21 galáxias distintas, com raios variando de 3.3 a 82.3 kpc, os espaços-tempos desse conjunto de galáxias carregam características semelhantes, com as constantes para os ajustes tendo ordens de grandezas iguais ou quase iguais.

No Capítulo 6, as descobertas apresentadas aqui são resumidas, e o trabalho é concluído com uma discussão sobre o que poderá ainda ser desenvolvido a partir dos resultados já alcançados.

2 TEORIA DE GRAVITAÇÃO DE BRANS-DICKE

Após explicar adequadamente a deflexão de um feixe de luz provocada por um campo gravitacional (observada em 1919, na Ilha do Príncipe, no arquipélago de São Tomé e Príncipe, e em Sobral, no Ceará) e a precessão do periélio de Mercúrio, a *relatividade geral* (RG) passou por inúmeros outros testes, que contribuíram ainda mais para enfatizar o seu sucesso. Entretanto, para aqueles experimentos que não são plenamente descritos pela RG, surgiram diversas teorias alternativas. Entre essas, existem as chamadas *teorias escalares-tensoriais de gravitação*, propostas a partir dos trabalhos de Brans e Dicke na década de 1960 (BRANS; DICKE, 1961; DICKE, 1962). Nessas teorias, um campo escalar ϕ assume o papel desempenhado pela constante gravitacional G da RG. Tal campo possui uma dinâmica que afeta a estrutura do espaço-tempo, de tal forma que os efeitos gravitacionais não são descritos apenas em função da geometria do espaço-tempo, como faz a métrica $g_{\mu\nu}$ na RG, mas também por $\phi \sim \frac{1}{G}$.

O trabalho de Brans e Dicke, uma nova interpretação do que havia sido desenvolvido por Jordan (JORDAN, 1955; JORDAN, 1959), foi inicialmente motivado pelo que propunha o *princípio de Mach*, o qual considera que, para que se saiba se um sistema de referência é inercial ou não, é preciso considerar a contribuição da massa total do Universo (BRANS; DICKE, 1961). Dessa forma, a inércia seria um fenômeno explicado pela aceleração decorrente da distribuição de toda essa massa. Assim, as massas inerciais das diversas partículas fundamentais, por exemplo, não seriam constantes fundamentais, mas uma consequência da interação dessas partículas com algum campo escalar cósmico ϕ , responsável pela transmissão de forças de longo alcance, assim como o campo gravitacional $g_{\mu\nu}$ da RG (WEINBERG, 1972). A aceleração dessas partículas pode ser determinada pela aceleração gravitacional

$$a_g = \frac{Gm}{r^2}, \quad (2.1)$$

o que leva à suposição de que a constante gravitacional G estaria associada ao campo escalar ϕ acoplado à densidade de massa do Universo.

A equação que determina um campo escalar pode ser escrita sob a forma de uma equação diferencial de Poisson:

$$\square\phi = 4\pi\lambda T^\mu{}_\mu, \quad (2.2)$$

onde $\square = \nabla^\rho\nabla_\rho$ é o operador invariante de d'Alembert, λ é uma constante de acoplamento e

$T^{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento da matéria do Universo, sendo excluídas as contribuições gravitacional e do campo escalar ϕ (DAS, 2011). Considerando um potencial central de um gás distribuído uniformemente em uma esfera, com a densidade da massa cósmica $\rho \sim 10^{-29}$ g/cm³ e raio igual ao raio aparente do Universo $R \sim 10^{28}$ cm (WEINBERG, 1972), o valor esperado para o campo ϕ é

$$\langle\phi\rangle \sim \lambda\rho R^2 \sim \lambda \cdot 10^{27} \text{ g/cm}. \quad (2.3)$$

Esse valor é muito próximo da constante $\frac{1}{G} = 1.35 \cdot 10^{28}$ g/cm, o que permite supor que $\langle\phi\rangle \approx \frac{1}{G}$ e aponta λ como adimensional, da ordem da unidade.

De outra forma, Brans e Dicke também calcularam a aceleração gravitacional a que estaria sujeita uma partícula caindo na direção do Sol, usando argumentos dimensionais:

$$a_g \sim \frac{mRc^2}{Mr^2}, \quad (2.4)$$

onde m e M são, respectivamente, as massas do Sol e do Universo, e r é a distância da partícula até a estrela. Combinando as equações (2.1) e (2.4), temos o resultado adimensional

$$\frac{GM}{Rc^2} = \lambda \approx 3.3 \sim 10^0. \quad (2.5)$$

Assim, a pequena intensidade da constante G seria algo natural, porque pode ser escrita em termos de outras constantes fundamentais:

$$G \sim \frac{c^2 R}{M}. \quad (2.6)$$

Essas considerações conduziram Brans e Dicke a sugerirem que as corretas equações de campo para a gravitação são obtidas pela substituição de G por $\frac{1}{\phi}$ e pela inclusão do tensor energia-momento para o campo ϕ , $T_\phi^{\mu\nu}$, na fonte do campo gravitacional:

$$G^{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\phi} \left(T^{\mu\nu} + T_\phi^{\mu\nu} \right), \quad (2.7)$$

onde $G^{\mu\nu}$ é o *tensor de Einstein*

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R, \quad (2.8)$$

com $R^{\mu\nu}$ e R sendo, respectivamente, o tensor e o escalar de Ricci. Por causa do sucesso do *princípio da equivalência*, que conduziu à equivalência entre as massas gravitacional e inercial,

e da dilatação do tempo devida à gravitação, Brans e Dicke definiram que a equação que descreve a troca de energia entre a matéria e a gravitação é a mesma da RG:

$$\begin{aligned}\nabla_{\mu} T^{\mu}_{\nu} &= \partial_{\mu} T^{\mu}_{\nu} + \Gamma_{\mu\rho}^{\mu} T^{\rho}_{\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} T^{\mu}_{\rho} \\ &= 0,\end{aligned}\quad (2.9)$$

onde $\nabla_{\mu} T^{\mu}_{\nu}$ é a derivada covariante do tensor energia-momento e o símbolo de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ é

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa} (\partial_{\mu} g_{\kappa\nu} + \partial_{\nu} g_{\kappa\mu} - \partial_{\kappa} g_{\mu\nu}). \quad (2.10)$$

A equação (2.7) pode ser multiplicada por $g_{\nu\rho}$ e pelo campo ϕ . Como consequência, a derivada covariante de tal expressão pode ser escrita como

$$\left(R^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\nu}^{\mu} R\right) \nabla_{\mu} \phi = R^{\mu}_{\nu} \nabla_{\mu} \phi - \frac{1}{2} \delta_{\nu}^{\mu} R \nabla_{\mu} \phi \quad (2.11)$$

$$= 8\pi \nabla_{\mu} T_{\phi}^{\mu}_{\nu}, \quad (2.12)$$

desde que, pela aplicação das *identidades de Bianchi*,

$$\nabla_{\eta} R_{\lambda\mu\nu\kappa} + \nabla_{\kappa} R_{\lambda\mu\eta\nu} + \nabla_{\nu} R_{\lambda\mu\kappa\eta} = 0, \quad (2.13)$$

na sua forma contraída,

$$\nabla_{\mu} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R\right) = 0. \quad (2.14)$$

O tensor $T_{\phi}^{\mu}_{\nu}$, considerando que o mesmo seja simétrico, pode ser descrito com uma forma geral pela equação abaixo:

$$T_{\phi}^{\mu}_{\nu} = A \nabla^{\mu} \phi \nabla_{\nu} \phi + B \delta_{\nu}^{\mu} \nabla_{\rho} \phi \nabla^{\rho} \phi + C \nabla_{\nu} \nabla^{\mu} \phi + \delta_{\nu}^{\mu} D \square \phi, \quad (2.15)$$

onde A, B, C e D são funções de ϕ . A derivada covariante desse tensor é

$$\begin{aligned}\nabla_{\mu} T_{\phi}^{\mu}_{\nu} &= (A' + B') \nabla^{\mu} \phi \nabla_{\nu} \phi \nabla_{\mu} \phi + (A + D') \nabla_{\nu} \phi \square \phi \\ &\quad + (A + 2B + C') \nabla_{\nu} \nabla^{\mu} \phi \nabla_{\mu} \phi + D \nabla_{\nu} (\square \phi) + C \square (\nabla_{\nu} \phi),\end{aligned}\quad (2.16)$$

onde as derivadas dos coeficientes são em relação ao campo ϕ . Com o uso da expressão

$$\nabla_{\kappa} \nabla_{\nu} V^{\lambda} - \nabla_{\nu} \nabla_{\kappa} V^{\lambda} = R^{\lambda}_{\sigma\kappa\nu} V^{\sigma}, \quad (2.17)$$

que, após multiplicada por δ_λ^κ , é igual a

$$\nabla_\kappa \nabla_\nu V^\kappa - \nabla_\nu \nabla_\kappa V^\kappa = R_{\sigma\nu} V^\sigma, \quad (2.18)$$

o primeiro termo do lado direito da equação (2.11) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} R^\sigma{}_\nu \nabla_\sigma \phi &= \nabla_\kappa \nabla_\nu \nabla^\kappa \phi - \nabla_\nu \nabla_\kappa \nabla^\kappa \phi \\ &= \nabla_\kappa \nabla^\kappa \nabla_\nu \phi - \nabla_\nu \nabla_\kappa \nabla^\kappa \phi \\ &= \square(\nabla_\nu \phi) - \nabla_\nu(\square\phi). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Agora, tomando o traço da equação (2.7) e usando a equação (2.2), temos

$$R = -\frac{8\pi}{\phi} \left[\frac{1}{4\pi\lambda} \square\phi + (A + 4B) \nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi + (C + 4D) \square\phi \right]. \quad (2.20)$$

Dessa forma, o lado esquerdo da equação (2.11) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \left(R^\mu{}_\nu - \frac{1}{2} \delta_\nu^\mu R \right) \nabla_\mu \phi &= \square(\nabla_\nu \phi) - \nabla_\nu(\square\phi) \\ &\quad + \frac{4\pi}{\phi} \nabla_\nu \phi \left[\left(\frac{1}{4\pi\lambda} + C + 4D \right) \square\phi \right. \\ &\quad \left. + (A + 4B) \nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi \right]. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Pela comparação dos coeficientes de $\nabla_\nu(\square\phi)$, $\square(\nabla_\nu \phi)$, $\nabla_\nu \phi \square\phi$, $\nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi$ e $\nabla_\nu \nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi$ nas equações (2.16) e (2.21), a equação (2.12) exige que

$$1 = 8\pi C, \quad (2.22)$$

$$-1 = 8\pi D, \quad (2.23)$$

$$\frac{4\pi}{\phi} \left(\frac{1}{4\pi\lambda} + C + 4D \right) = 8\pi(A + D'), \quad (2.24)$$

$$\frac{4\pi}{\phi} (A + 4B) = 8\pi(A' + B'), \quad (2.25)$$

$$0 = 8\pi(A + 2B + C'), \quad (2.26)$$

o que leva às soluções para os coeficientes:

$$A(\phi) = \frac{\omega}{8\pi\phi}, \quad (2.27)$$

$$B(\phi) = -\frac{\omega}{16\pi\phi}, \quad (2.28)$$

$$C(\phi) = \frac{1}{8\pi}, \quad (2.29)$$

$$D(\phi) = -\frac{1}{8\pi}, \quad (2.30)$$

onde ω é uma constante adimensional adequadamente escrita como

$$\omega = \frac{1}{\lambda} - \frac{3}{2}. \quad (2.31)$$

Dessa forma, a constante λ (também adimensional) fica

$$\lambda = \frac{2}{3 + 2\omega}. \quad (2.32)$$

Agora, as equações de campo (2.2) e (2.7) da *gravitação de Brans-Dicke* (BD) podem ser escritas como

$$G_{\mu\nu} = \frac{\omega}{\phi^2} \left(\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\rho \phi \nabla^\rho \phi \right) + \frac{1}{\phi} \left(\nabla_\nu \nabla_\mu \phi - g_{\mu\nu} \square \phi \right) + \frac{8\pi}{\phi} T_{\mu\nu}, \quad (2.33)$$

$$\square \phi = \frac{8\pi}{3 + 2\omega} T^\mu{}_\mu. \quad (2.34)$$

Para uma função escalar, como o campo ϕ ,

$$\nabla_\mu \phi = \partial_\mu \phi, \quad (2.35)$$

$$\square \phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} \partial^\mu \phi). \quad (2.36)$$

Dessa forma, e considerando ainda que $T^\mu{}_\mu = T$, as equações (2.33) e (2.34) ficam dadas por (DAS, 2011)

$$G_{\mu\nu} = \frac{\omega}{\phi^2} \left(\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \partial_\rho \phi \partial_\sigma \phi \right) + \frac{1}{\phi} \left(\partial_\mu \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \square \phi \right) + \frac{8\pi}{\phi} T_{\mu\nu}, \quad (2.37)$$

$$\square \phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} \partial^\mu \phi) = \frac{8\pi}{3 + 2\omega} T. \quad (2.38)$$

A hipótese inicial era a de que λ seria da ordem da unidade. Assim, pela equação (2.31), ω

também tem aproximadamente essa ordem de grandeza. Se ω for muito maior que a unidade, pela equação (2.38),

$$\square\phi = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\phi &= \langle\phi\rangle + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right) \\ &= \frac{1}{G} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right).\end{aligned}\tag{2.39}$$

Usando esse resultado constante para o campo escalar na equação (2.37),

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right),\tag{2.40}$$

o que, no limite $\omega \rightarrow \infty$, leva à *equação de Einstein* da RG:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}.\tag{2.41}$$

Assim, a gravitação de BD converge para a RG, quando $\omega \rightarrow \infty$. Dessa forma, ω pode ser considerado o parâmetro adimensional que indica o quanto a gravitação de BD difere da RG: quanto mais próximo da unidade ele for, maior é a diferença entre a descrição dos fenômenos dada pela RG e pela teoria de BD.

A partir da *ação de Einstein-Hilbert*,

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R + S_{mat},\tag{2.42}$$

onde S_{mat} é a ação associada com o tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$, é possível obter as equações de Einstein (2.41) pelo *princípio da mínima ação*, quando a variação é em função da métrica, isto é se exige que

$$\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = 0.$$

De forma semelhante, para a obtenção das equações (2.37) e (2.38), são calculadas as variações da ação em função, respectivamente, da métrica e do campo escalar, ou seja, é exigido que

$$\frac{\delta S_{BD}}{\delta g_{\mu\nu}} = 0, \quad \frac{\delta S_{BD}}{\delta \phi} = 0,\tag{2.43}$$

onde S_{BD} é a ação de BD

$$S_{BD} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left(\phi R - \frac{\omega}{\phi} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi \right) + S_{mat}. \quad (2.44)$$

2.1 A TRANSFORMAÇÃO CONFORME E OS REFERENCIAIS DE JORDAN-FIERZ E DE EINSTEIN

A chamada *transformação conforme* é uma alteração local da escala. Uma vez que as distâncias são medidas pela métrica, tais transformações se implementam pela multiplicação dessa métrica por uma função $\Omega = \Omega(x_\mu)$, onde x_μ são as coordenadas do espaço-tempo. Essa transformação pode ser escrita como (CARROLL, 2004)

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}, \quad (2.45)$$

o que vale também para

$$\tilde{d}s^2 = \Omega^2 ds^2. \quad (2.46)$$

A transformação inversa é trivial, tal que

$$g_{\mu\nu} = \frac{1}{\Omega^2} \tilde{g}_{\mu\nu}, \quad (2.47)$$

$$ds^2 = \frac{1}{\Omega^2} \tilde{d}s^2. \quad (2.48)$$

Assim, duas métricas estão relacionadas de maneira conforme, se satisfazem a equação (2.45). O *tensor de Weyl* (MCMAHON, 2006)

$$C_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\rho\sigma\mu\nu} + \frac{1}{2} (g_{\rho\nu} R_{\mu\sigma} + g_{\sigma\mu} R_{\nu\rho} - g_{\rho\mu} R_{\nu\sigma} - g_{\sigma\nu} R_{\mu\rho}) + \frac{1}{6} (g_{\rho\mu} g_{\nu\sigma} - g_{\rho\nu} g_{\mu\sigma}) R \quad (2.49)$$

(onde $R_{\rho\sigma\mu\nu}$, $R_{\mu\sigma}$ e R são, respectivamente, os tensores de Riemann e de Ricci, e o escalar de Ricci) é o mesmo para as métricas $\tilde{g}_{\mu\nu}$ e $g_{\mu\nu}$, isto é,

$$\tilde{C}_{\rho\sigma\mu\nu} = C_{\rho\sigma\mu\nu}. \quad (2.50)$$

Por isso, o tensor de Weyl é também chamado de *tensor conforme*, porque se diz que é o tensor para o qual as métricas $\tilde{g}_{\mu\nu}$ e $g_{\mu\nu}$ estão em conformidade. A transformação conforme, por sua vez, é também denominada como *transformação de Weyl*.

Na transformação conforme, não são alteradas as coordenadas, mas a geometria: as

geodésicas tipo-tempo da métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$, por exemplo, em geral, diferem das geodésicas tipo-tempo da métrica $g_{\mu\nu}$. Variáveis dinâmicas, escritas como uma função de $g_{\mu\nu}$, podem ser redefinidas como uma função $\tilde{g}_{\mu\nu}$, quando se diz que essas quantidades estão expressas no *referencial conforme*. As relações entre essas quantidades determinadas com as métricas $g_{\mu\nu}$ e a conforme $\tilde{g}_{\mu\nu}$ estão relacionadas com a nova forma adquirida pelo símbolo de Christoffel (2.10), quando, mediante a transformação conforme, toma a forma (CARROLL, 2004)

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\rho} = \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} + N^{\rho}_{\mu\nu}, \quad (2.51)$$

onde $N^{\rho}_{\mu\nu}$ é um tensor, dado por

$$N^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{\Omega} \left(\delta_{\mu}^{\rho} \nabla_{\nu} \Omega + \delta_{\nu}^{\rho} \nabla_{\mu} \Omega - g_{\mu\nu} g^{\rho\lambda} \nabla_{\lambda} \Omega \right). \quad (2.52)$$

Agora, com a equação (2.51) é possível verificar como o tensor de Riemann, que pode ser escrito como

$$R^{\lambda}_{\mu\nu\kappa} = \partial_{\kappa} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \partial_{\nu} \Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\nu}^{\eta} \Gamma_{\kappa\eta}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta} \Gamma_{\nu\eta}^{\lambda}, \quad (2.53)$$

se comporta após a transformação conforme:

$$\tilde{R}^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} + \nabla_{\mu} N^{\rho}_{\nu\sigma} - \nabla_{\nu} N^{\rho}_{\mu\sigma} + N^{\rho}_{\mu\lambda} N^{\lambda}_{\nu\sigma} - N^{\rho}_{\nu\lambda} N^{\lambda}_{\mu\sigma}. \quad (2.54)$$

Substituindo $N^{\rho}_{\nu\sigma}$ pela equação (2.52) na equação acima e contraindo o primeiro e o terceiro índices, é obtido o tensor de Ricci pela transformação conforme:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{\sigma\nu} &= R_{\sigma\nu} - \left[(n-2) \delta_{\sigma}^{\alpha} \delta_{\nu}^{\beta} + g_{\sigma\nu} g^{\alpha\beta} \right] \frac{1}{\Omega} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} \Omega \\ &\quad + \left[2(n-2) \delta_{\sigma}^{\alpha} \delta_{\nu}^{\beta} - (n-3) g_{\sigma\nu} g^{\alpha\beta} \right] \frac{1}{\Omega^2} \nabla_{\alpha} \Omega \nabla_{\beta} \Omega, \end{aligned} \quad (2.55)$$

onde n é o número de dimensões do espaço-tempo em questão. Elevando um índice, com

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \frac{1}{\Omega^2} g^{\mu\nu}, \quad (2.56)$$

e contraindo novamente os índices, temos o escalar de curvatura:

$$\tilde{R} = \frac{1}{\Omega^2} R - 2(n-1) g^{\alpha\beta} \frac{1}{\Omega^3} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} \Omega - (n-1)(n-4) g^{\alpha\beta} \frac{1}{\Omega^4} \nabla_{\alpha} \Omega \nabla_{\beta} \Omega. \quad (2.57)$$

Outra quantidade importante é a derivada covariante do campo escalar ϕ , que tem forma

igual nos dois referenciais, original e conforme, porque ambas são iguais à derivada parcial, ou seja,

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_\mu \phi &= \nabla_\mu \phi \\ &= \partial_\mu \phi,\end{aligned}\tag{2.58}$$

diferente da derivada segunda, que envolve o símbolo de Christoffel, e, por isso, tem uma transformação não trivial:

$$\tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\nu \phi = \nabla_\mu \nabla_\nu \phi - \left(\delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta + \delta_\mu^\beta \delta_\nu^\alpha - g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \right) \frac{1}{\Omega} \nabla_\alpha \Omega \nabla_\beta \phi.\tag{2.59}$$

Contraindo (2.59) com $\tilde{g}^{\mu\nu}$, é possível obter o operador de d'Alembert:

$$\tilde{\square} \phi = \frac{1}{\Omega^2} \square \phi + (n-2) g^{\alpha\beta} \frac{1}{\Omega^3} \nabla_\alpha \Omega \nabla_\beta \phi.\tag{2.60}$$

Uma das principais aplicações das transformações conformes é a mudança das variáveis das teorias escalares-tensoriais, como a gravitação de BD. Nesse sentido, logo após a publicação da teoria de BD, Dicke apresentou um trabalho que explorava justamente essa aplicação (DICKE, 1962). Ele chamou a transformação como de unidades, e visava resolver a questão de que havia sido apresentada apenas uma solução particular para a definição das unidades de massa, comprimento e tempo na teoria de 1961. A discussão inicial foi em torno da invariância das leis da Física sob as transformações de unidades, levando a uma representação considerada por Dicke como equivalente àquela que originou a teoria de BD, que nada mais era do que o resultado de uma transformação conforme sobre a ação (2.44), semelhante à realizada por Fierz (FIERZ, 1956) na sua análise da teoria de Jordan (JORDAN, 1955). Por isso, essa ação é dita estar no chamado *referencial de Jordan-Fierz*.

Assim, considerando por exemplo, que a transformação conforme seja (FARAONI et al., 1999)

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}, \quad \Omega = \sqrt{G\phi},\tag{2.61}$$

e com a redefinição do campo escalar sendo dada na forma diferencial por

$$d\tilde{\phi} = \sqrt{\frac{2\omega + 3}{16\pi G}} \frac{d\phi}{\phi},\tag{2.62}$$

onde $\omega > -\frac{3}{2}$, a ação (2.44) pode ser reescrita como

$$S_{BD_E} = \int d^4x \left[\sqrt{-\tilde{g}} \left(\frac{\tilde{R}}{16\pi G} - \frac{1}{2} \tilde{\nabla}^\mu \tilde{\phi} \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\phi} \right) + \exp \left(-8 \sqrt{\frac{\pi G}{2\omega + 3}} \tilde{\phi} \right) \mathcal{L}_{mat}(\tilde{g}) \right]. \quad (2.63)$$

A ação (2.63) está escrita no referencial denominado como *referencial de Einstein*, porque a parte gravitacional agora contém apenas a gravitação de Einstein, mesmo que o campo escalar continue atuando como uma fonte gravitacional. Ou seja, no referencial de Jordan-Fierz, o campo gravitacional é descrito pela métrica $g_{\mu\nu}$ e pelo campo ϕ , e, no referencial de Einstein, esse campo é descrito apenas pela métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$, embora o mesmo ainda esteja presente (redefinido como $\tilde{\phi}$ pela equação (2.62)), como uma forma de recuperar a informação do primeiro referencial.¹ O uso dessa última ação ao invés da originada na formulação da teoria de BD traz alguma facilidade na manipulação matemática das equações de movimento, porque o grau de liberdade escalar está desacoplado do grau de liberdade tensorial da métrica (FARAONI et al., 1999). Dicke declarou ainda que essas duas ações seriam equivalentes, embora tenha manifestado também que alguns fenômenos não são descritos da mesma forma nos dois referenciais. Por exemplo, ele citou que (a) partículas em queda livre não se movem através de geodésicas na nova geometria, mas os raios de luz percorrem geodésicas nulas, e, por isso, os cones de luz são invariantes, e que (b) as medidas das hastes e dos relógios sob a transformação conforme não são invariantes (DICKE, 1962; CARROLL, 2004).

Com o desenvolvimento dos trabalhos a partir da gravitação de BD, muito se tem discutido sobre a equivalência ou não entre o formalismo apresentado nos dois referenciais. Há uma ampla discussão em torno desse tema, que busca argumentar qual seria o referencial correto para a descrição dos fenômenos estudados. Nesse contexto, o referencial de Jordan-Fierz é, por vezes, também chamado de *referencial físico*, e o de Einstein é chamado de *referencial não físico*. As denominações estão relacionadas ao fato de que, no referencial de Jordan-Fierz, o tensor energia-momento é conservado, o que não ocorre no referencial de Einstein. Alguns pesquisadores acreditam que os dois referenciais sejam equivalentes, como Dicke manifestou, mas o próprio significado do que seria essa equivalência não é algo com a qual todos concordem (QUIROS et al., 2013). Para aqueles que acreditam que o referencial de Jordan-Fierz seja o mais adequado, fazem uso do referencial de Einstein, porque a análise das equações de movimento nesse referencial é menos complexa, e retornam ao referencial de Jordan-Fierz para a comparação com os dados experimentais (CORDA, 2011).

¹ As quantidades com til ($\tilde{}$) são aquelas descritas no referencial de Einstein, e as sem til são as descritas no referencial de Jordan-Fierz.

A validade da ação no referencial de Jordan-Fierz é questionada quando se leva em conta a análise do sinal da energia cinética do campo escalar. No referencial de Einstein, essa energia tem o sinal adequado, porque é necessário que $\omega > -\frac{3}{2}$, como visto nas equações (2.62) e (2.63). Essa definição não é encontrada na ação (2.44). Isso leva a alguns problemas, como em teoria de cordas, onde o campo escalar recebe o nome de *dilaton*, e cuja ação que o envolve requer $\omega = -1$ (QUIROS et al., 2013).

Outro aspecto discutido é sobre o fato de que singularidades encontradas em um referencial poderiam não ser vistas no outro. Por exemplo, supondo que seja verificado o comportamento do escalar de curvatura em ambos os referenciais, quando considerado apenas o primeiro termo da equação (2.57), podemos escrever

$$\tilde{R} = \frac{1}{\Omega^2} R. \quad (2.64)$$

Se não houver uma singularidade no espaço-tempo determinado no referencial de Jordan-Fierz, porque R não diverge, o mesmo pode não ocorrer no referencial de Einstein, desde que $\Omega^2 \rightarrow 0$, o que leva a $\tilde{R} \rightarrow \infty$ (QUIROS et al., 2013).

Enfim, a discussão sobre o uso dos dois referenciais é algo que ainda gera muita controvérsia. A postura adotada aqui será a de trabalhar no referencial de Einstein, visando obter alguma simplificação no tratamento matemático das equações que descrevem os fenômenos, e fazer uma posterior análise dos resultados também no referencial de Jordan-Fierz, com o uso do inverso de uma transformação, como o que determina a equação (2.48).

2.2 A RELATIVIDADE GERAL COMO UM ATRATOR NATURAL DA GRAVITAÇÃO DE BRANS-DICKE

Como visto no início deste capítulo, a RG aponta que os fótons são defletidos pela curvatura do espaço-tempo gerada por alguma massa. Além disso, essa curvatura provoca um atraso no movimento dos fótons. A deflexão e o atraso são proporcionais a $\gamma + 1$, onde $\gamma = 1$ na RG, e $\gamma = 0$ na gravitação de Newton. Assim, o parâmetro pós-newtoniano $\gamma - 1$ mede o quanto a gravidade não é uma consequência apenas de efeitos geométricos, como prevê a RG, mas também de outros campos. Em 2002, a sonda Cassini, na sua viagem até Saturno, passou próxima do Sol. Nessa ocasião, foi realizado um experimento que explorou o efeito Doppler decorrente da variação da frequência dos fótons das ondas de rádio emitidas para a sonda e pela sonda (CLIFFORD, 2006). Essa variação ocorreu por causa da influência da massa do Sol, como prevê a RG, resultando em $\gamma - 1 = (2.1 \pm 2.3) \cdot 10^{-5}$ (BERTOTTI et al.,

2003). O resultado não encoraja a supor que exista algum desvio do que é previsto pela RG.

Considerando que

$$g_{\mu\nu} = \tilde{\Omega}^2 \tilde{g}_{\mu\nu}, \quad (2.65)$$

onde $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}(\phi)$, com $\phi = \phi(x_\mu)$, e $g_{\mu\nu}$ e $\tilde{g}_{\mu\nu}$ são, respectivamente, as métricas nos referenciais de Jordan-Fierz e de Einstein², e que o gradiente do logaritmo natural da função $\tilde{\Omega}$ corresponde a

$$\alpha = \frac{\partial \ln \tilde{\Omega}}{\partial \phi}, \quad (2.66)$$

o parâmetro γ pode ser determinado pela equação (DAMOUR; NORDTVEDT, 1993b)

$$\gamma - 1 = - \frac{2\alpha(\phi_0)^2}{1 + \alpha(\phi_0)^2}, \quad (2.67)$$

sendo que ϕ_0 é utilizado para indicar que a intensidade de α é aquela associada com o atual valor do campo ϕ no sistema estudado (aqui, corresponde ao Sistema Solar), determinado de maneira assintótica, ou seja, com $r \rightarrow \infty$, onde r é a distância até a fonte, e com as adequadas condições de contorno cosmológicas. Na teoria de BD, a transformação $\tilde{\Omega}$ é (BRANS; DICKE, 1961)

$$\tilde{\Omega} = \exp\left(\frac{\phi}{\sqrt{2\omega + 3}}\right). \quad (2.68)$$

Desse modo, com a equação (2.67), o resultado obtido com a Cassini, $\gamma - 1 = 2.1 \cdot 10^{-5}$, leva a $|\omega| = 47621$ (BERTOTTI et al., 2003; CLIFFORD, 2006), o que está distante do que propunha a ideia original da teoria, que era ω da ordem da unidade.

Dado o sucesso da aplicação da RG no Sistema Solar, tal resultado colocou a teoria de BD numa posição delicada. Entretanto, novo alento tem sido dado à teoria, advindo dos últimos avanços ocorridos em duas extremidades da pesquisa teórica. Por um lado, avanços na estrutura formal de teorias de unificação das interações fundamentais, como as teorias de supercordas e de supergravidade, apontam para a necessidade de um campo escalar (com spin 0) mediando, juntamente com o gráviton, a interação gravitacional. Mais precisamente, o espectro de teorias de supercordas prevê a existência de tal campo escalar, chamado dilaton, o mesmo mencionado antes na seção 2.1 (GREEN et al., 1987). Por outro lado, uma análise da dinâmica do campo escalar de BD em um contexto cosmológico apresenta um resultado taxativo: a RG é um atrator natural de uma gravitação escalar-tensorial (como a de BD) evoluída cosmológicamente, isto é, com a evolução do Universo, a dinâmica do campo escalar

² Sendo iguais as métricas $g_{\mu\nu}$ e $\tilde{g}_{\mu\nu}$ nas equações (2.45) e (2.65), a relação entre as transformações é $\tilde{\Omega} = \frac{1}{\Omega}$.

ϕ foi paulatinamente supressa (DAMOUR; NORDTVEDT, 1993a; DAMOUR; NORDTVEDT, 1993b; DAMOUR; POLYAKOV, 1994; CONTALDI et al., 1999).

Nos trabalhos (DAMOUR; NORDTVEDT, 1993a; DAMOUR; NORDTVEDT, 1993b), foi determinado como pode ter ocorrida essa transição. Foi considerado que a intensidade da função α na era da radiação tenha sido da ordem da unidade, isto é, $\alpha_{rad} \sim 1$, que leva a $|\omega| \sim 10^0$. Além disso, foram considerados três valores distintos para a densidade de matéria atual Ω_{mat} : 0.01, 0.1 e 1. Os resultados para $1-\gamma$ foram determinados também para diferentes curvaturas κ do logaritmo natural da função $\tilde{\Omega}$, as quais são calculadas pela equação (2.69):³

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\partial \alpha}{\partial \phi} \\ &= \frac{\partial^2 \ln \tilde{\Omega}}{\partial \phi^2}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

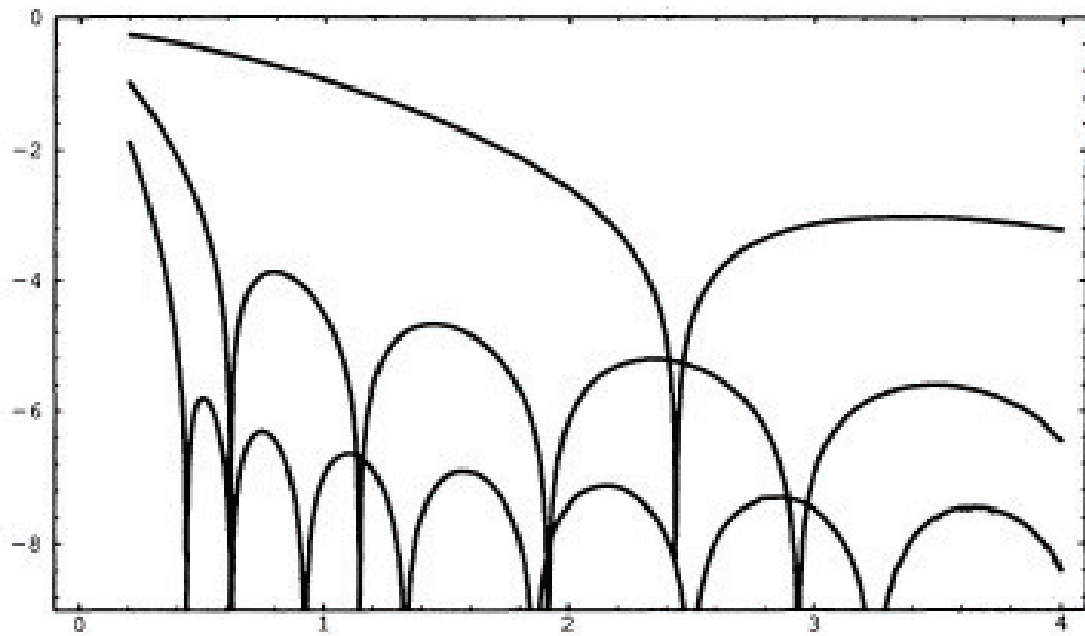
Na teoria da referência (BRANS; DICKE, 1961), $\kappa = 0$, porque α é constante. Na Figura 5, podem ser vistos os resultados atuais esperados para $1-\gamma$ em função da curvatura κ . No eixo vertical, estão os valores de $\log(1-\gamma)$, e, no eixo horizontal, constam os valores de κ . A curva superior corresponde aos resultados para $\Omega_{mat} = 0.01$, a intermediária para $\Omega_{mat} = 0.1$, e a inferior para $\Omega_{mat} = 1$ (DAMOUR; NORDTVEDT, 1993b). É provável que os resultados para $\Omega_{mat} = 0.1$ sejam os mais relevantes, uma vez que os experimentos atuais estimam $\Omega_{mat} \approx 0.3$ (VEROPALUMBO et al., 2016). Em resumo, quando

$$\begin{aligned} \kappa &< \frac{3}{8}, & 1-\gamma &\gtrsim 4 \cdot 10^{-5}; \\ \kappa &= \frac{3}{8}, & 1-\gamma &\sim 4 \cdot 10^{-5}; \\ \kappa &> \frac{3}{8}, & 1-\gamma &\sim 3 \cdot 10^{-7}, \end{aligned}$$

sendo esse último valor o limite inferior encontrado para $1-\gamma$. Com esses resultados, a medida realizada através da sonda Cassini no Sistema Solar mencionada antes, com $\gamma - 1 \sim 10^{-5}$ e $|\omega| > 40000$, é, de fato, esperada. Portanto, pode ser dito que fenômenos ocorridos logo após o Big Bang devem ser melhor descritos pela gravitação de BD, porque parece ser a teoria mais adequada para a época do Universo primordial, ainda na era da radiação, quando a variação do campo escalar foi mais importante, diferente do que ocorre agora, quando essa variação é aproximadamente nula, e a RG reproduz apropriadamente os fenômenos observados.

³ A curvatura κ não deve ser confundida com a curvatura do espaço-tempo, calculada a partir do tensor de Riemann, ou com a curvatura espacial da métrica de Friedmann-Robertson-Walker (1.1), representada por k .

Figura 5 – Valores atuais para $\log(1 - \gamma)$ (eixo vertical) em função da curvatura κ (eixo horizontal). A curva superior corresponde a $\Omega_{mat} = 0.01$, a intermediária representa o resultado para $\Omega_{mat} = 0.1$, e a inferior para $\Omega_{mat} = 1$ (DAMOUR; NORDTVEDT, 1993b).



Fonte: (DAMOUR; NORDTVEDT, 1993b).

3 CORDAS CÓSMICAS

Como já mencionado no Capítulo 1, as cordas cósmicas são defeitos topológicos do tipo linear. Elas teriam ligado diferentes regiões criadas nanossegundos depois do Big Bang, expandindo-se juntamente com o Universo, e alcançado o seu comprimento conhecido, sob a forma aproximada de uma linha, com um raio da ordem de 10^{-31} m (GREGORY, 1988; GOTT III, 1985; HISCOCK, 1985), ou ainda formando anéis milhares de vezes mais massivos do que as galáxias. Teriam também uma densidade linear de massa $\mu \sim 10^{19}$ kg/cm, nos cenários das teorias de grande unificação (GREGORY, 1988). Inicialmente, foram pensadas como fontes de anisotropias do Universo primordial, que teriam contribuído para a formação das galáxias, mas não tiveram a sua existência confirmada pelos dados coletados pela *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe* (WMAP) (VERDULT, 2009). Levanta-se também a hipótese de que deve haver uma região no espaço onde a tensão de uma corda fundamental, elemento da teoria de supercordas, tenha diminuído de tal maneira, que ela passou a se comportar como uma corda cósmica (GREEN et al., 1987).

A Figura 6 mostra o comportamento do potencial tipo *chapéu mexicano*, que favoreceria a formação de uma corda cósmica. Em $V = 0$, a região de menor energia, há a formação de um círculo degenerado, com raio definido por (VILENKIN; SHELLARD, 1994)

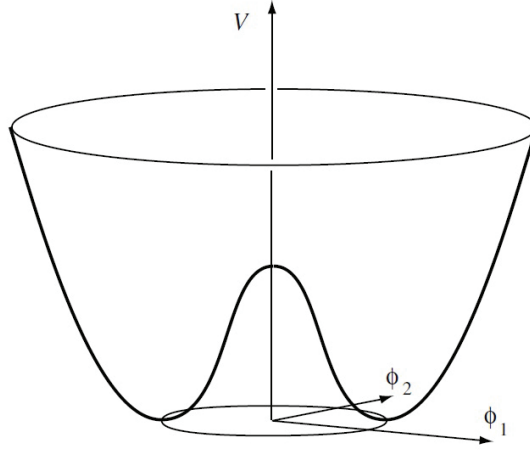
$$\begin{aligned} |\phi|^2 &= \eta^2 \\ &= \phi_1^2 + \phi_2^2, \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde $\phi_1 = \text{Re}(\phi)$, $\phi_2 = \text{Im}(\phi)$ e $\phi \approx \eta e^{i\theta}$. Com o crescimento dessa região energeticamente favorável, a região de falso vácuo (onde $\langle \phi \rangle = 0$) fica presa entre pelo menos três vácuos verdadeiros (quando $V = 0$), e está formado o defeito unidimensional.

3.1 A ESTRUTURA CÔNICA DO ESPAÇO-TEMPO EM TORNO DE UMA CORDA CÓSMICA

Vilenkin determinou o comportamento do campo gravitacional de uma corda cósmica no vácuo, e descobriu que o espaço-tempo em torno da corda possui um forma cônica (VILENKIN, 1981). Como consequência, são produzidas imagens duplas bem características de objetos posicionados atrás da corda, o que será visto com algum detalhe mais adiante. Se o objeto é muito massivo, como os quasares, isso é mais relevante ainda. Mais tarde, foi determinada uma métrica que define a geometria não apenas fora da corda, como fez

Figura 6 – O potencial tipo chapéu mexicano possui um círculo com um raio limitado pelos vácuos verdadeiros, quando $V = 0$, que prende, em uma região energeticamente favorável, soluções do chamado falso vácuo (onde $\langle \phi \rangle = 0$), o que favorece a formação de uma corda cósmica (DAVIS; KIBBLE, 2005).



Fonte: (DAVIS; KIBBLE, 2005).

Vilenkin, mas também internamente, considerando a estrutura interna da corda (GOTT III, 1985; HISCOCK, 1985; LINET, 1985; GARFINKLE, 1985), o que será tratado a seguir.

Para a solução externa das equações de Einstein, escritas sob a forma

$$R_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{2} \delta_{\nu}^{\mu} R = 8\pi T_{\nu}^{\mu}, \quad (3.2)$$

foi considerado nulo o tensor energia-momento, isto é, $T_{\nu}^{\mu} = 0$, e, para a solução interna, $T_t^t = -\rho$, $T_z^z = P_z$, onde ρ e P_z são, respectivamente, a densidade de massa e a pressão na orientação z . As demais componentes do tensor são nulas.

A métrica para a solução interna é

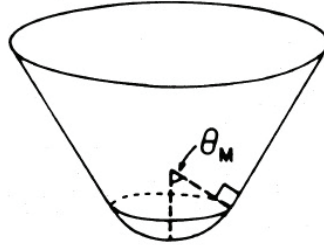
$$ds^2 = -dt^2 + r_0^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + dz^2, \quad (3.3)$$

com simetria esférico-cilíndrica, e onde $0 \leq \theta \leq \theta_M$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, e r_0 é constante. Assim, as únicas componentes do tensor energia-momento não nulas são $T_t^t = T_z^z = -\frac{1}{8\pi r_0^2}$, onde se conclui que a densidade ρ é constante e que $P_z = -\rho$. A geometria de uma seção com t e z constantes dessa solução tem a forma de uma tampa esférica com raio r_0 e circunferência $2\pi r_b$, onde

$$r_b = r_0 \sin \theta_M, \quad (3.4)$$

o que pode ser visto na parte inferior da Figura 7.

Figura 7 – A imagem ilustra a geometria para $\theta_M < \frac{\pi}{2}$, originada em torno da corda, a partir do que estabelecem as soluções interna e externa (GOTT III, 1985).



Fonte: (GOTT III, 1985).

A solução externa é obtida a partir da métrica com simetria cilíndrica

$$ds^2 = -dt^2 + B_0 dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2, \quad (3.5)$$

onde

$$B_0 = \frac{1}{\cos^2 \theta_M}, \quad (3.6)$$

$0 \leq \varphi < 2\pi$ e $r > r_b$, desde que $\theta_M < \frac{\pi}{2}$.

Com as condições de junção (3.4) e (3.6), e utilizando $\rho = \frac{1}{8\pi r_0^2}$, a massa por unidade de comprimento μ da corda pode ser calculada como

$$\begin{aligned} \mu &= \rho r_0^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\theta_M} \sin \theta d\theta \\ &= \frac{1}{4} (1 - \cos \theta_M). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Assim, o *déficit angular* $\Delta\theta$, para $\mu < \frac{1}{4}$, é

$$\Delta\theta = 8\pi\mu. \quad (3.8)$$

Essa forma para o espaço-tempo, com o destaque para o déficit angular, pode ser vista na representação das imagens da esquerda e central da Figura 8.

Para escrever uma única métrica que incorpore as soluções interna e externa, é preciso que as métricas (3.3) e (3.5) sejam escritas de tal maneira que $g_{rr} = 1$ (ISRAEL, 1966). Então,

inicialmente, a métrica (3.3) é escrita com uma transformação de coordenada $r = r_0\theta$:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r_0^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{r}{r_0}\right) d\varphi^2 + dz^2. \quad (3.9)$$

Além disso, é necessário também que as derivadas das métricas das duas soluções (interna e externa) em relação à coordenada r sejam iguais, isto é,

$$\left. \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial r} \right|_{int} = \left. \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial r} \right|_{ext}. \quad (3.10)$$

A única dessas derivadas não nula é

$$\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r} = 2r_0 \operatorname{sen} \theta_M \cos \theta_M. \quad (3.11)$$

Considerando ainda que, na interface entre as regiões interna e externa à corda, $r = r_0\theta_M$ e que, pela equação (3.7),

$$\begin{aligned} 1 - 4\mu &= \cos \theta_M \\ &= \frac{1}{\sqrt{B_0}}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

a métrica (3.5) pode ser escrita como

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + (1 - 4\mu)^2 r^2 d\varphi^2 + dz^2. \quad (3.13)$$

A métrica (3.13) incorpora as informações da estrutura interna e do espaço-tempo fora da corda. É uma solução para $0 \leq \mu < \frac{1}{4}$ e representa um espaço cônico com um déficit angular igual ao previsto na equação (3.8). Na interface, a circunferência da corda é $2\pi r_0 \operatorname{sen} \theta_M$ e $r = \frac{r_0}{1-4\mu} \operatorname{sen} \theta_M$, e todas as componentes $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial r}$ são nulas, exceto

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r} &= 2(1 - 4\mu)^2 r \\ &= 2r_0(1 - 4\mu) \operatorname{sen} \theta_M \\ &= 2r_0 \cos \theta_M \operatorname{sen} \theta_M, \end{aligned} \quad (3.14)$$

de tal forma que são combinados os valores em ambos os lados da corda, e as condições de junção são satisfeitas.

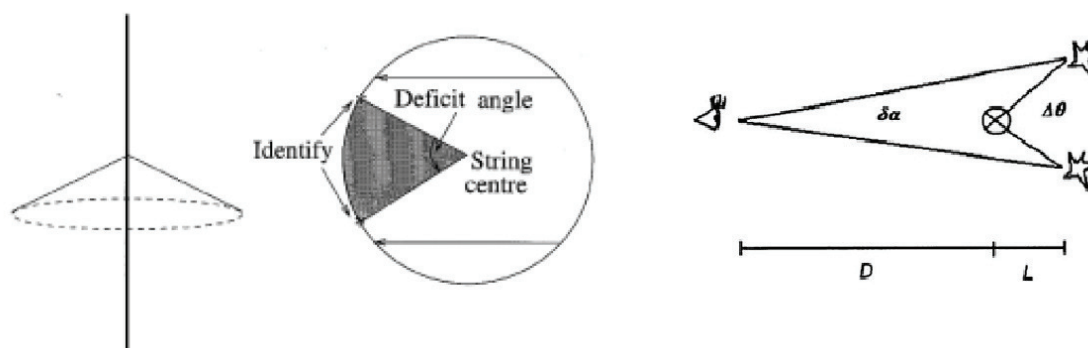
Ainda não foi confirmada a existência de uma corda cósmica. Sua busca observacional é

realizada sabendo-se justamente que, em torno da mesma, o espaço-tempo tem uma estrutura cônica (veja a Figura 8). A observação de uma imagem duplicada de, por exemplo, uma galáxia é uma assinatura típica, onde o ângulo $\delta\alpha$ entre as duas imagens é dado por

$$\delta\alpha = \Delta\theta \frac{L}{D+L}, \quad (3.15)$$

sendo D a distância entre o observador e a corda, L a distância entre a corda e a galáxia, e $\Delta\theta$ o déficit angular, que corresponde também ao ângulo formado entre a corda e as imagens duplicadas da galáxia, como se vê na Figura 8. Ou seja, a corda cósmica atua como uma lente gravitacional. Imagens duplas de galáxias e quasares têm sido observadas, e as mesmas atendem os valores para $\delta\alpha$ esperados para cordas cósmicas, mas não há ainda um resultado conclusivo. Um exemplo dessas imagens é o *Capodimonte-Sternberg Lens Candidate no. 1* (CSL-1), observado em 2003, que consiste em duas galáxias separadas por aproximadamente $1''$, com os mesmos redshifts $z = 0.46$ e espectro, ilustrado na Figura 9. Em 2004, outro candidato surgiu, o denominado *Sistema Q0957+561*, e consiste em duas imagens do mesmo quasar, separadas por aproximadamente $6''$. Em 2005, ainda outros candidatos surgiram. Foram observados na região em torno do CSL-1, como mostra a Figura 10. Como dito antes, as observações ainda não podem ser confirmadas como a indicação de que identificam cordas cósmicas (VERDULT, 2009).

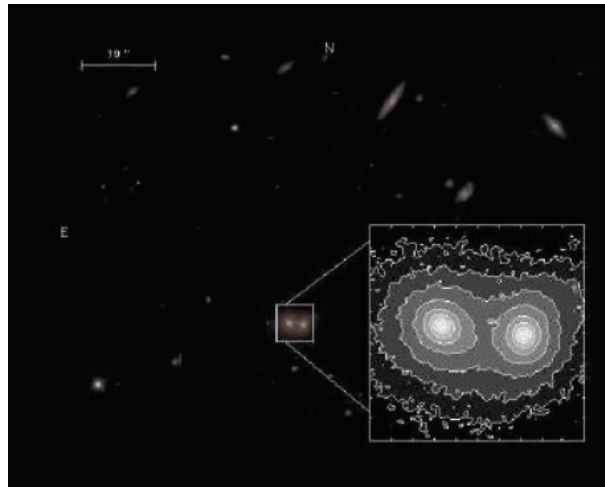
Figura 8 – Nas figuras da esquerda e central, pode se observar o aspecto da estrutura cônica do espaço-tempo em torno da corda cósmica (SRIVASTAVA, 1999); na figura à direita, a duplicação da imagem de uma galáxia, por exemplo, é observada quando uma corda cósmica está presente, onde o ângulo entre as imagens é $\delta\alpha = \Delta\theta \frac{L}{D+L}$ (HORVATH et al., 2011).



Fonte: (SRIVASTAVA, 1999; HORVATH et al., 2011).

Embora ainda não observadas, diversas simulações têm sido realizadas, com o propósito

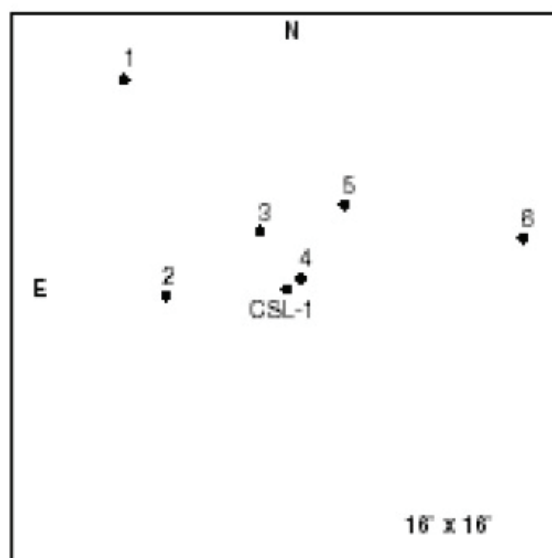
Figura 9 – O CSL-1 consiste em duas galáxias separadas por aproximadamente $1''$, com os mesmos redshifts $z = 0.46$ e espectro (VERDULT, 2009).



Fonte: (VERDULT, 2009).

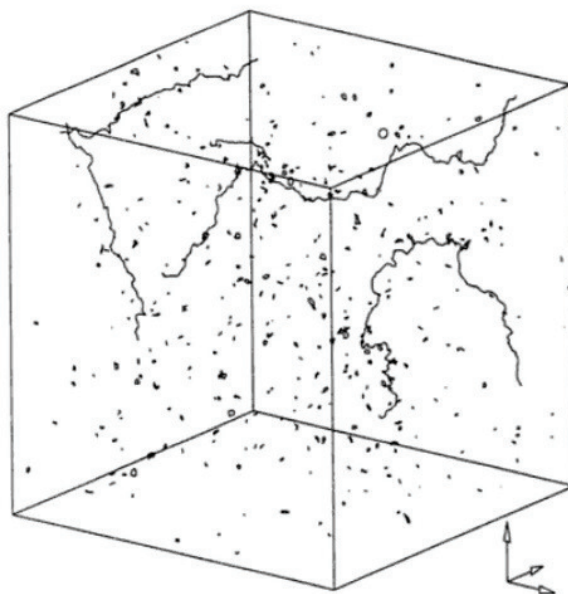
de descobrir como poderia ter sido a dinâmica da formação das cordas cósmicas. A Figura 11 mostra o resultado de uma dessas simulações, com uma possível forma que possam ter adquirido algumas cordas formadas (VILENKIN; SHELLARD, 1994).

Figura 10 – Posições de outros candidatos (representados pelos pontos na figura) a lentes gravitacionais associadas com a presença de cordas cósmicas na região em torno do CSL-1 (VERDULT, 2009).



Fonte: (VERDULT, 2009).

Figura 11 – Resultado de uma simulação de formação de cordas cósmicas (VILENKIN; SHELLARD, 1994).



Fonte: (VILENKIN; SHELLARD, 1994).

3.2 OS UNIVERSOS DE GÖDEL E AS CORDAS CÓSMICAS GIRANTES

Convidado para escrever uma contribuição a um livro acerca da relevância filosófica de Einstein e sua teoria da RG, Gödel admitiu que não poderia recusar, uma vez que o tópico escolhido por ele, a concepção do tempo, há muito o interessava (DAHMEN, 2006). O envolvimento de Gödel com esse trabalho o levou a publicar também o artigo (GÖDEL, 1949), cujos resultados matemáticos são a base do que são os chamados *universos de Gödel*. Pessoalmente, Gödel apresentou esses resultados no dia 31 de agosto de 1950, perante o Congresso Internacional de Matemática, ocorrido em Cambridge, Massachusetts, o que provocou, a partir de então, uma modificação significativa nas ideias sobre a questão do tempo (NOVELLO, 2005).

O trabalho de Gödel consistiu na descoberta de uma nova geometria para caracterizar a estrutura métrica do Universo. Embora essa geometria tivesse legitimado a sua constituição por ter sido obtida como uma solução exata das equações de Einstein da gravitação, ela possuía uma propriedade que a destacava dentre todas as demais soluções, não só aquelas conhecidas à época, mas até os dias de hoje (NOVELLO, 2005). Com essa geometria, um possível retorno ao passado seria permitido, o que tornou Gödel o principal personagem da formulação moderna das viagens no tempo. Embora outra forma de geometria, contendo

igualmente trajetórias para o passado, fosse conhecida anteriormente a essa proposta por Gödel, a questão temporal envolvendo a análise do retorno ao passado só adquiriu alguma relevância depois da descoberta de Gödel (NOVELLO, 2005), provocando uma profunda alteração no conceito científico da direção dos processos temporais, sem igual na história. Gödel estimulou, assim, um desenvolvimento na área já abordada pela filosofia e pela literatura, mas que a ciência até então não despertara atenção.

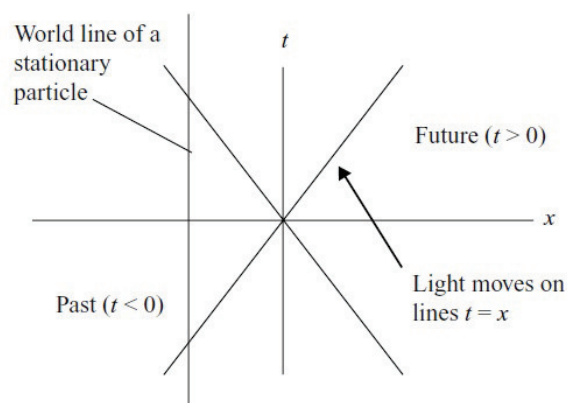
A geometria de Gödel nem um pouco é trivial. Fundamentada na teoria da RG, pelas suas características tão novas, colocou em discussão a validade da teoria de Einstein, sendo, por enquanto, descartada como uma possível ferramenta para a descrição do Universo. Por isso mesmo, continua tendo um grande destaque entre as geometrias definidas pelas teorias de gravitação.

Para o entendimento da proposta de Gödel, é útil antes verificar como pode ser representado um evento que acontece no espaço-tempo a partir de diagramas que mostram o comportamento da propagação de fótons. Não sendo possível visualizar quatro dimensões, um diagrama espaço-temporal pode ser construído com a dimensão temporal e apenas uma dimensão espacial, como pode ser observado na Figura 12. Nessa, o eixo vertical representa o tempo, e o eixo horizontal mostra a coordenada espacial. Aqui, é conveniente considerar $c = 1$, onde c é a velocidade da luz no vácuo. Nesse caso, como já indica a figura, os fótons se propagam ao longo das linhas indicadas, que formam 45° com o eixo horizontal, isto é, $t^2 = x^2$. Os eventos que ocorrem no futuro da origem do diagrama estão localizados na região onde $t > 0$; eventos no passado se localizam onde $t < 0$. O movimento de uma partícula nesse diagrama pode ser indicado por uma linha, que recebe a denominação de *linha de mundo*. A Figura 12 exemplifica a linha de mundo de uma partícula estacionária.

A *relatividade especial* mostra que uma partícula não pode se mover com velocidade maior do que c . Nos diagramas de espaço-tempo, isso significa que a curva que representa o movimento da partícula pode ocorrer somente nas regiões em torno do eixo t limitadas pelas linhas que indicam a propagação dos fótons. A Figura 13 é uma representação do espaço-tempo, parecida com a da Figura 12, mas agora com duas dimensões espaciais. Nesse caso, a partícula somente pode se mover nas regiões dentro do cone, chamado *cone de luz*; essas regiões são denominadas *tipo-tempo* (em inglês, *timelike*), onde eventos causalmente relacionados podem ser representados. As regiões fora do cone de luz, que não estão causalmente relacionadas com o evento que ocorre no centro do diagrama, são denominadas *tipo-espaço* (em inglês, *spacelike*).

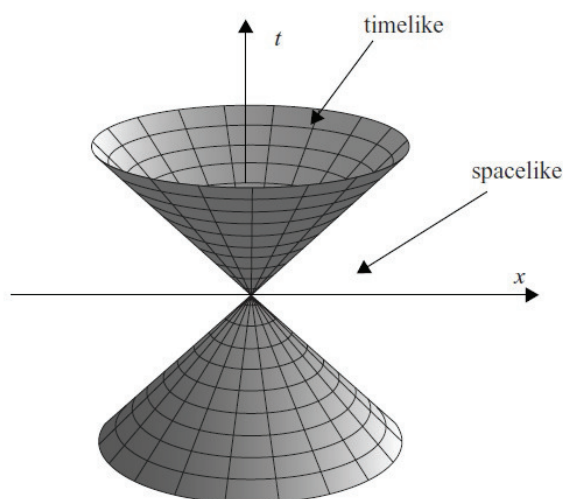
Um dos itens que tornam a geometria de Gödel inovadora é o fato de que o fluido cósmico

Figura 12 – Diagrama de espaço-tempo indicando a linha de mundo de uma partícula estacionária como uma linha reta (MCMAHON, 2006).



Fonte: (MCMAHON, 2006).

Figura 13 – Diagrama de espaço-tempo com duas dimensões espaciais (MCMAHON, 2006).

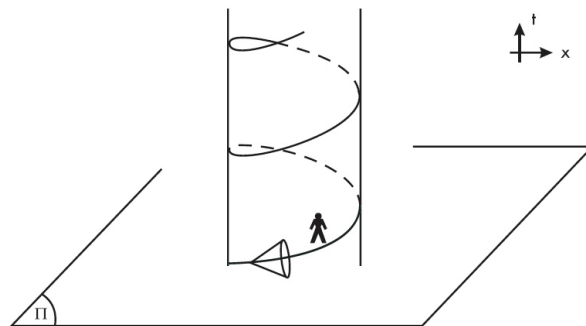


Fonte: (MCMAHON, 2006).

que a provoca possui uma rotação intrínseca, constituída de uma vorticidade associada com a matéria que a gerou. Ou seja, no universo de Gödel, todos os pontos da matéria que o constitui giram em torno de um eixo. Gödel deixa clara a importância dessa característica logo na introdução do seu artigo, quando menciona que todas as soluções cosmológicas conhecidas até então, para as quais a densidade de matéria não seria nula, possuíam a propriedade de conter uma coordenada temporal absoluta, pois existiria um conjunto de espaços tridimensionais, com funções de um só parâmetro, sendo ortogonais em todo lugar às linhas de mundo da matéria. Continua dizendo ainda que a não existência de tal sistema

de espaços tridimensionais implicaria a necessidade de uma rotação da matéria relativa a um referencial inercial, com um termo cosmológico Λ não nulo, o qual será melhor definido adiante. Essa rotação permite que, na geometria proposta, seja possível a existência de curvas do tipo-tempo diferentes do que foi visto até agora (como na Figura 12), porque elas podem ser fechadas. Sendo uma curva do tipo-tempo, onde a velocidade não é maior que c , um possível caminho de um observador, quando ela é fechada, poderia ser na direção do seu passado. Isso significa que, diferente da representação da rotação como a da Figura 14, onde um corpo viaja localmente no interior do cone de luz, sempre para o futuro, não violando a causalidade, a geometria de Gödel, entretanto, permite que o corpo possa retornar ao seu passado, porque agora a curva é de um tipo especial, é uma *curva tipo-tempo fechada* (CTC), como ilustra a Figura 15. O que é interessante aqui é que, mesmo não sendo ultrapassada a velocidade da luz, porque localmente o corpo viaja dentro do cone de luz, é possível o retorno ao passado (na Figura 12 e na Figura 13, onde $\Delta t < 0$), isto é, na Figura 15, se o corpo partiu do ponto Q , ele passa pelo ponto P , podendo retornar ao ponto Q (ou, depois, ainda ao ponto P) indefinidamente, caracterizando então uma contínua visita ao passado. Esse retorno é possível porque a força gravitacional, de acordo com o modelo de Gödel, é a responsável por encurvar os cones de luz, podendo inclusive movê-los para onde $\Delta t < 0$. Assim, um aspecto a destacar é que, nesse modelo de universo, fica descartada a possibilidade de construção de um tempo global (NOVELLO, 2005).

Figura 14 – Representação espaço-temporal de uma trajetória tipo-tempo. O deslocamento do corpo pode ser positivo ou negativo, mas o tempo evolui sempre de tal forma que $\Delta t > 0$ (NOVELLO, 2005).

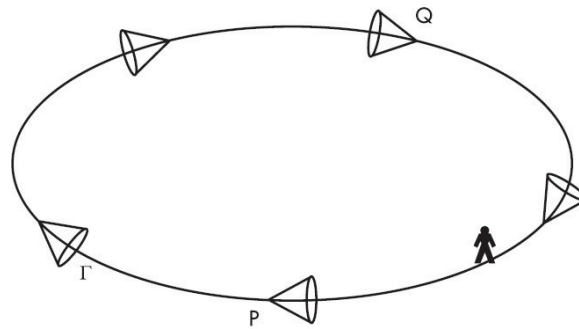


Fonte: (NOVELLO, 2005).

O espaço de Gödel é definido sobre a variedade $M = \mathbb{R}^{1+3}$, com o elemento de linha (GÖDEL, 1949)

$$ds^2 = a^2 \left[(dt + e^x dy)^2 - dx^2 - \frac{1}{2} e^{2x} dy^2 - dz^2 \right], \quad (3.16)$$

Figura 15 – Representação espaço-temporal de uma trajetória tipo-tempo fechada Γ . Agora, diferente do observado na Figura 14, é possível a ocorrência de $\Delta t < 0$ (NOVELLO, 2005).



Fonte: (NOVELLO, 2005).

onde a é um número positivo. Pode ser observado que a métrica (3.16) possui elementos fora da diagonal, o que já antecipa que a geometria que ela representa pode ter implicações não triviais (DAHMEN, 2006), relacionadas com o que já foi discutido antes. A parte trivial, que aqui pode ser sinônimo de plana, corresponde ao termo com a coordenada z . Por isso é comum que a discussão em torno do universo de Gödel seja a partir da parte não trivial da métrica, sendo definida sobre a variedade \mathbb{R}^{1+2} , ou seja, sobre um subespaço tridimensional de variáveis t , x e y .

A métrica (3.16) satisfaz ainda as equações de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G\rho u_{\mu}u_{\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (3.17)$$

onde se vê a constante cosmológica indicada por Λ , e ρ é a densidade média de matéria. Com essa métrica, temos

$$R_{tt} = 1, \quad (3.18)$$

$$R_{yy} = e^{2x}, \quad (3.19)$$

$$R_{ty} = R_{yt} = e^x. \quad (3.20)$$

Os demais termos do tensor de Ricci são nulos; assim, o escalar de curvatura é

$$R = \frac{1}{a^2}. \quad (3.21)$$

O vetor unitário na direção x tem as componentes contravariantes $(\frac{1}{a}, 0, 0, 0)$ e as componentes covariantes $(a, 0, a e^x, 0)$, de tal forma que

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{a^2} u_\mu u_\nu. \quad (3.22)$$

Sendo o escalar (3.21) constante, as equações (3.17) são satisfeitas para uma dada densidade média de matéria ρ quando

$$\frac{1}{a^2} = 8\pi G\rho, \quad (3.23)$$

$$\Lambda = -\frac{R}{2} = -\frac{1}{2a^2} = -4\pi G\rho. \quad (3.24)$$

O sinal da constante cosmológica Λ é negativo, o oposto da solução estática de Einstein, o que corresponde a uma pressão positiva, indicando que o universo de Gödel não tem expansão. Além disso, esse universo tem uma rotação, com uma velocidade angular constante (GÖDEL, 1949)

$$\omega = 2\sqrt{\pi G\rho},$$

sendo, por isso, também conhecido como *universo rotatório*.

Gödel, em seu artigo (GÖDEL, 1949), com o objetivo de mostrar a invariância rotacional da sua nova solução para as equações de Einstein, introduziu as agora chamadas *coordenadas padrão de Gödel*. Assim, é definida uma transformação que se dá pela introdução de coordenadas cilíndricas T , R e Φ nos subespaços onde $z = \text{constante} \sim Z$, como pode ser visto nas equações (3.25)-(3.28):

$$e^x = \cosh(2R) + \cos\Phi \sinh(2R), \quad (3.25)$$

$$y e^x = \sqrt{2} \sin\Phi \sinh(2R), \quad (3.26)$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\Phi}{2} - \frac{t-2T}{2\sqrt{2}}\right) = e^{-2R} \operatorname{tg}\frac{\Phi}{2}, \quad (3.27)$$

$$z = 2Z, \quad (3.28)$$

onde $\left|\frac{t-2T}{2\sqrt{2}}\right| < \frac{\pi}{2}$. Assim, a equação (3.16) se torna

$$ds^2 = 4a^2 \left[dT^2 - dR^2 - dZ^2 + (\sinh^4 R - \sinh^2 R) d\Phi^2 + 2\sqrt{2} \sinh^2 R d\Phi dT \right], \quad (3.29)$$

onde o termo $-dZ^2$ pode ser desprezado, por se tratar da considerada anteriormente parte trivial da métrica. A equação (3.29) mostra uma simetria rotacional, porque $g_{\mu\nu}$ não depende

de Φ .

Uma das principais propriedades por trás da solução de Gödel é a de que, além de encontrar linhas de mundo da matéria que são curvas abertas com comprimentos infinitos, que nunca se aproximam de um de seus pontos precedentes novamente, existem também CTCs. Nessas curvas, se P e Q são pontos quaisquer na linha de mundo da matéria, tal que P precede Q , então, existe uma trajetória tipo-tempo (ou seja, que pode ser percorrida com uma velocidade menor que c) conectando P a Q , na qual é permitido também se partir de Q para atingir P , sendo, assim, possível viajar para o passado, e influenciá-lo. Essa propriedade é contemplada com alguma facilidade, quando exploramos a equação (3.29). Se definirmos um círculo com um raio denominado *raio crítico* r_{crt} , onde $T = Z = 0$ e

$$R > r_{crt} = \ln(1 + \sqrt{2}), \quad (3.30)$$

devido ao fato de que $\sinh r_{crt} = 1$ e, portanto,

$$\sinh^4 r_{crt} - \sinh^2 r_{crt} > 0,$$

qualquer região desse círculo será tipo-tempo, uma vez que, na equação (3.29), $ds^2 > 0$. Agora, se são definidos

$$R = r_{crt}, \quad (3.31)$$

$$Z = 0, \quad (3.32)$$

$$T = -\alpha \Phi, \quad (3.33)$$

$$0 \leq \Phi \leq 2\pi, \quad (3.34)$$

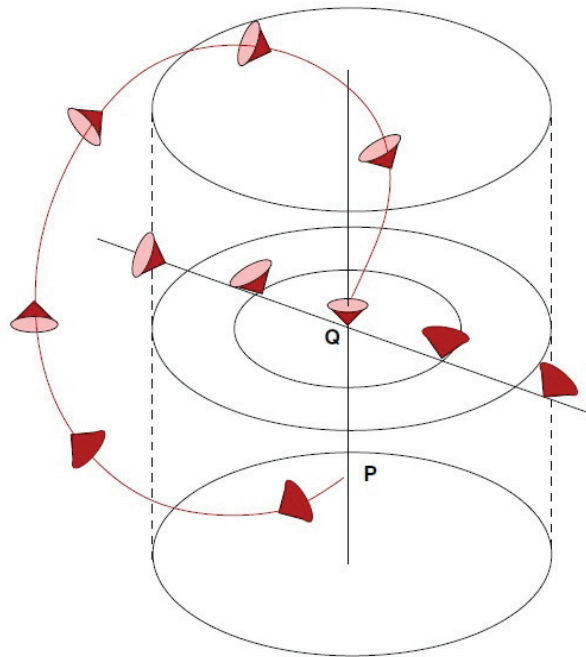
para $\alpha > 0$ suficientemente pequeno, também qualquer região será tipo-tempo. Ainda, se for tomado um ponto inicial Q da linha de mundo de um corpo que se move pela geometria proposta, definida pelo raio r_{crt} , onde $\Phi = 0$, e um ponto final P , onde $\Phi = 2\pi$, então, P precede temporalmente Q , porque, desde que $\alpha > 0$, de acordo com a definição (3.31)-(3.34),

$$T_{final} = T_P < T_{inicial} = T_Q,$$

ou seja, o corpo voltou ao passado. Esse procedimento pode ser seguido indefinidamente, como já mencionado sobre a possibilidade da existência de $\Delta t < 0$ na Figura 15, porque nada impede que, de P , o corpo siga para Q , e volte para P novamente. Através da Figura 16, pode

ser visualizada uma possível viagem pelo universo de Gödel, baseada nos resultados obtidos até então. A partir de Q e retornando a P , um viajante acelerado descreve uma espiral para cima, até ultrapassar r_{crt} , que, na figura, corresponde ao maior raio. Feito isso, ele passa a se mover para baixo, até passar além do ponto P , quando muda novamente de direção, e descreve uma espiral para cima, até atingir P . A trajetória nada mais representa do que uma curva fechada tipo-tempo, porque, de P , o viajante pode ir para Q , voltar para P , ir novamente para Q , e assim indefinidamente. A viagem ocorre sempre na direção de tempo crescente na linha de mundo do viajante, e tem uma característica, mostrada na Figura 16, que é a de que, à medida que o viajante se afasta do eixo $R = 0$, os cones de luz vão tombando no sentido anti-horário.

Figura 16 – Uma possível viagem ao passado, quando o viajante sai de Q e chega a P , sendo que $T_P < T_Q$. Pode ser visto que os cones de luz vão tombando no sentido anti-horário (DAHMEN, 2006).



Fonte: (DAHMEN, 2006).

No contexto das cordas cósmicas, uma determinada classe tem sido objeto de muitos trabalhos, a chamada *corda cósmica girante*. Essa é definida como possuindo uma velocidade angular ω em torno do seu eixo longitudinal de simetria. Quando ω não é constante, isto é, quando a rotação da corda não é rígida, as modelagens apontam soluções patológicas para as funções que descrevem a corda. A maior motivação para o estudo desse tipo de corda cósmica, porém, está no fato de que pode ser fonte de uma classe cilíndricamente simétrica

dos universos de Gödel, porque geraria um espaço-tempo em torno da corda onde seriam permitidas as CTCs, e haveria violação da causalidade. A seguir, veremos um trabalho que aponta nessa direção.

No trabalho (JENSEN, 1992), foi utilizado o elemento de linha

$$ds^2 = -(e^\alpha dt + M d\varphi)^2 + r^2 e^{-2\alpha} d\varphi^2 + e^{2\beta-2\alpha} (dr^2 + dz^2), \quad (3.35)$$

cuja simetria é cilíndrica, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, e as funções α , β e M dependem apenas da coordenada r . A corda está localizada em $r = 0$ e a métrica (3.35) é utilizada somente para a descrição do espaço-tempo em volta da corda, ou seja, quando $r > 0$, onde não há matéria, e o tensor energia-momento $T_{\mu\nu} = 0$. A função M está relacionada com o momento angular da corda, e as funções α e β contribuem para a descrição do espaço-tempo em torno da corda. O estudo foi voltado ainda para quando a corda é reta. Isso exige que a métrica seja invariante sob a transformação de Lorentz ao longo do eixo z , o que leva ao fato de que devam ser iguais os módulos dos coeficientes que multiplicam os elementos dt^2 e dz^2 , para que não ocorram *boosts*. Assim, a condição para que a corda seja reta exige que

$$\beta(r) = 2\alpha(r). \quad (3.36)$$

O primeiro termo da métrica (3.35), com uma combinação das coordenadas t e φ , implica o surgimento de uma estrutura helicoidal para o tempo, visualizada na Figura 17, cujo passo de hélice é proporcional ao momento angular da corda (DESER; JACKIW, 1992). Uma das consequências dessa estrutura é a possibilidade de que ocorram CTCs, o que é constatado quando as equações de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (2.41)$$

são resolvidas com a métrica (3.35). Aqui, foi considerado que não há matéria na região fora da corda, o que permite reescrever a equação (2.41) como

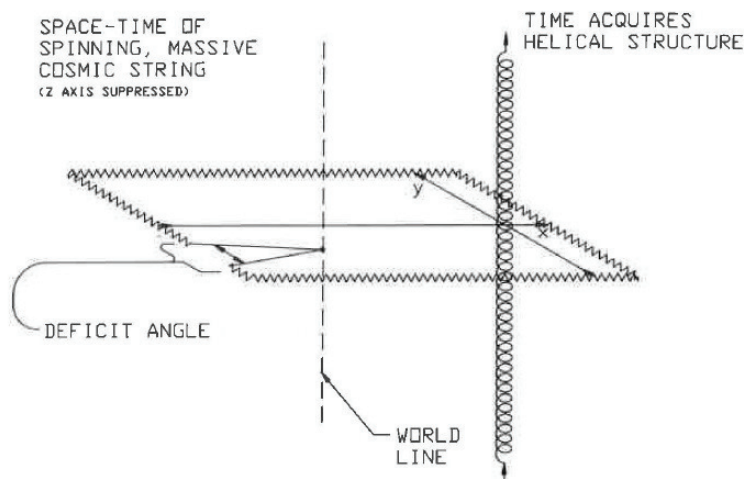
$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0. \quad (3.37)$$

Dessa forma, ocorrerão CTCs nas regiões onde (JENSEN, 1992)

$$r < M e^{2\alpha}, \quad (3.38)$$

porque, satisfeita essa condição, o termo $g_{\varphi\varphi}$ da métrica sempre será negativo, o que leva a se poder cogitar que uma corda cósmica girante possa ser uma alternativa como uma máquina do tempo. Diferente do que ocorre com os universos de Gödel, quando as CTCs ocorrem a partir de um determinado valor da coordenada radial, o raio crítico r_{crt} (veja a equação (3.30)), para as cordas girantes retas, as CTCs estão até uma determinada região em torno da corda, limitada pela expressão (3.38).

Figura 17 – A estrutura helicoidal do tempo para uma corda cósmica girante é mostrada nesta representação. Tal estrutura tem um passo de hélice proporcional ao momento angular e é resultante da combinação entre as coordenadas t e φ na métrica (3.35), onde t é representada ao longo do eixo vertical (DESER; JACKIW, 1992).



Fonte: (DESER; JACKIW, 1992).

3.3 A APLICAÇÃO DA CONDIÇÃO DE QUANTIZAÇÃO DE DIRAC PARA O ESPAÇO-TEMPO DAS CORDAS CÓSMICAS GIRANTES

É possível determinar a quantização da energia de uma partícula sujeita ao campo das cordas cósmicas girantes, com alguns argumentos semelhantes àqueles utilizados por Dirac na formulação da sua condição de quantização. Para isso, inicialmente, será mostrado como Dirac obteve essa condição a partir da proposta para a existência dos monopolos magnéticos.

Em 1600, Gilbert, não conseguindo separar os polos de uma barra imantada, concluiu que monopolos magnéticos não existiam (FRENKEL, 1996). No século 19, Ampère e Maxwell consideraram que a única fonte do magnetismo seria a corrente elétrica, o que pode ser visto

nas quatro equações de Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho, \quad (3.39)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}, \quad (3.40)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (3.41)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0. \quad (3.42)$$

Em 1931, Dirac explorou o fato de que poderia haver uma simetria nas equações (3.39)-(3.42), o que levaria as equações (3.41) e (3.42) a serem reescritas como (DIRAC, 1931)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 4\pi\rho_{mag}, \quad (3.43)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c} \vec{J}_{mag}. \quad (3.44)$$

Tal modificação nas equações de Maxwell pode ser alcançada quando considerado um monopolo magnético de intensidade g na origem. O campo magnético será radial e dado por

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{g}{r^3} \vec{r} \\ &= -g \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Considerando que $\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi\delta^3(r)$, a equação (3.43) é escrita como

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 4\pi g \delta^3(r), \quad (3.46)$$

o que corresponde a uma carga magnética pontual. Como o campo \vec{B} é radial, o fluxo total através de uma esfera em torno da origem é

$$\begin{aligned} \Phi &= 4\pi r^2 B \\ &= 4\pi g. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Uma partícula livre com carga e , como um elétron, no campo desse monopolo tem a função de onda com a fase α

$$\begin{aligned} \psi &= |\psi| \exp(i\alpha) \\ &= |\psi| \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\vec{p} \cdot \vec{r} - Et) \right]. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Na presença de um campo eletromagnético, a fase é alterada para

$$\alpha \rightarrow \alpha - \frac{e}{\hbar c} \vec{A} \cdot \vec{r}, \quad (3.49)$$

onde \vec{A} é o potencial vetorial associado com o campo \vec{B} do monopolo. Assim, $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - \left(\frac{e}{c}\right)\vec{A}$ e a função de onda é

$$\psi \rightarrow \psi \exp\left(-\frac{ie}{\hbar c} \vec{A} \cdot \vec{r}\right). \quad (3.50)$$

A variação total da fase α , quando um elétron percorre um caminho fechado com raio r e θ fixos, com φ variando de 0 a 2π , é

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= \frac{e}{\hbar c} \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} \\ &= \frac{e}{\hbar c} \int (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} \\ &= \frac{e}{\hbar c} \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \\ &= \frac{e}{\hbar c} \Phi(r, \theta), \end{aligned} \quad (3.51)$$

onde $\Phi(r, \theta)$ é o fluxo através do contorno definido por r e θ fixos, o que pode ser visto na região hachurada da esfera da Figura 18. Quando $\theta \rightarrow 0$,

$$\Phi(r, 0) = 0, \quad (3.52)$$

porque ocorreu a convergência para um único ponto. À medida que θ cresce, o fluxo também cresce, de tal forma que, quando $\theta \rightarrow \pi$,

$$\Phi(r, \pi) = 4\pi g. \quad (3.53)$$

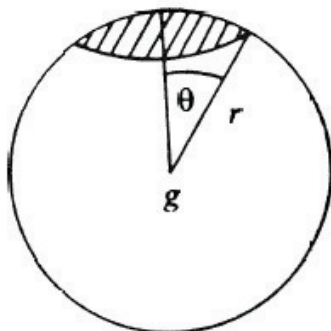
O resultado (3.53) foi obtido a partir do contorno de toda a superfície da esfera, mas outra possibilidade é considerar que o contorno converge para um ponto, como quando $\theta \rightarrow \pi$, o que leva a

$$\Phi(r, \pi) = 0. \quad (3.54)$$

A contradição nos resultados (3.53) e (3.54) leva à exigência de que, para que $\Phi(r, \pi)$ seja singular, o potencial vetorial \vec{A} deve ser singular em $\theta = \pi$. A singularidade em $\theta = \pi$ valerá para todas as esferas com todos os raios possíveis, com \vec{A} singular ao longo de todo o eixo z negativo. Assim, considerando que o monopolo seja circundado por superfície esféricas

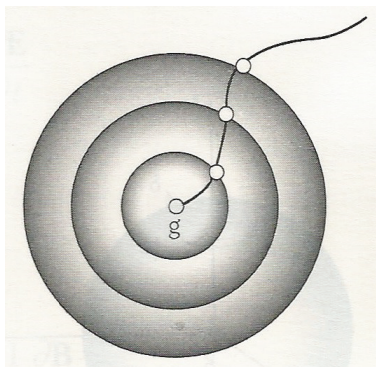
concêntricas de raio cada vez maior, os pontos singulares dessas superfícies formam uma linha que se estende do monopolo ao infinito, como pode ser visto na Figura 19. Essa linha, que não precisa ser reta, mas contínua, é chamada de *corda de Dirac* (RYDER, 1996).

Figura 18 – O fluxo do monopolo com carga g é ilustrado pela região hachurada, que está limitada por r e θ fixos (RYDER, 1996).



Fonte: (RYDER, 1996).

Figura 19 – Corda de Dirac formada a partir do monopolo com intensidade g (FRENKEL, 1996).



Fonte: (FRENKEL, 1996).

A singularidade de \vec{A} impõe que a função de onda desapareça ao longo do eixo z negativo. Isso não necessariamente quer dizer que, quando $\theta \rightarrow \pi$, $\Delta\alpha = 0$, mas que a função de onda seja unívoca, ou seja, bem definida. Considerando, por exemplo, $\Delta\alpha = 2\pi n$, onde n é um inteiro, e combinando as equações (3.51) e (3.53), temos

$$\begin{aligned} 2\pi n &= \frac{e}{\hbar c} 4\pi g, \\ eg &= \frac{1}{2} n\hbar c. \end{aligned} \quad (3.55)$$

O resultado (3.55) é a chamada *condição de quantização de Dirac*. Assim, a conclusão mais fascinante aqui é a de que, existindo carga magnética no Universo, todas as cargas elétricas serão quantizadas pela expressão

$$e = n \frac{\hbar c}{2g}. \quad (3.56)$$

Além da quantização da carga elétrica obtida aqui para os monopolos magnéticos, esses e as cordas cósmicas têm as suas existências relacionadas com a quantização de outras grandezas físicas, como o momento angular, a massa e a energia (WILCZEK, 1982; ZEE, 1985; MAZUR, 1986). No caso das cordas cósmicas girantes, pode ser determinada a quantização da energia de uma partícula sujeita ao campo dessas cordas. Para isso, se parte da solução de Kerr em três dimensões, que descreve o campo gravitacional de uma partícula massiva e girante com a métrica (DESER et al., 1984)

$$ds^2 = -(dt - Ad\varphi)^2 + dr^2 + r^2\alpha^2 d\varphi^2, \quad (3.57)$$

com

$$A = -4Gj, \quad (3.58)$$

$$\alpha = 1 - 4Gm, \quad (3.59)$$

onde j é o momento angular e m é a massa da partícula. Em quatro dimensões, essa solução é equivalente à descrição de uma corda girante reta, agora, com massa μ e momento angular J por unidade de comprimento e constantes (MAZUR, 1986). Assim, para tal descrição, a métrica (3.57) é alterada para

$$ds^2 = -(dt + 4GJ d\varphi)^2 + r^2\alpha^2 d\varphi^2 + dr^2 + dz^2, \quad (3.60)$$

onde

$$\alpha = 1 - 4G\mu. \quad (3.61)$$

O parâmetro α pode ser obtido experimentalmente pelo efeito Aharonov-Bohm (AHARONOV; BOHM, 1959), onde seria possível medir $G\mu$ (MAZUR, 1986), enquanto que J poderia ser observado através do efeito Sagnac (ASHTEKAR; MAGNON, 1975).

A métrica (3.60) é localmente plana, com a coordenada temporal t tendo um período igual a $8\pi GJ$, porque, à medida que φ avança 2π , t avança $8\pi GJ$ (MAZUR, 1986). Isso não

ocorre quando

$$r < r_0 = \frac{4GJ}{\alpha c^3}. \quad (3.62)$$

Assim como a métrica de Gödel, que identificou a ocorrência de CTCs na região onde

$$r > r_{crt} = \ln(1 + \sqrt{2}), \quad (3.30)$$

agora, onde $r < r_0$, também ocorrem CTCs, porque $g_{\varphi\varphi} < 0$, o que leva à violação da causalidade. A definição dessa região está diretamente relacionada com a intensidade de J , como se observa na equação (3.62).

Redefinindo a coordenada φ como

$$\varphi \rightarrow \tilde{\varphi} = \alpha\varphi \quad (3.63)$$

e aplicando a transformação

$$T = t + \frac{2GJ}{\alpha} \tilde{\varphi}, \quad (3.64)$$

$$X = r \cos \tilde{\varphi}, \quad (3.65)$$

$$Y = r \sin \tilde{\varphi}, \quad (3.66)$$

$$Z = z \quad (3.67)$$

na métrica (3.60), a mesma assume a forma de uma *métrica de Minkowski*, isto é,

$$ds^2 = -dT^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2. \quad (3.68)$$

Quando uma partícula com massa m está sujeita ao campo gravitacional da corda, a equação de Klein-Gordon

$$\left(-\nabla_\nu \nabla^\nu + m^2\right)\chi = 0, \quad (3.69)$$

onde χ é o campo da partícula, tem solução sob a forma (MAZUR, 1986)

$$\begin{aligned} \chi &= \exp\left(-\frac{iET}{\hbar}\right) \exp(ikZ) \psi(r, \varphi) \\ &= \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right) \exp(ikZ) \exp\left(-i\frac{4GJE}{\hbar}\varphi\right) \psi(r, \varphi). \end{aligned} \quad (3.70)$$

A função $\psi(r, \varphi)$ deve ser determinada em função do potencial ao qual está submetida a partícula. Mesmo não havendo uma forma explícita dessa função, é necessário que a mesma

seja uma função unívoca de φ , assim como realizado na construção do monopolo de Dirac. Quando a partícula completa uma volta em torno da corda, φ avança 2π e T avança $8\pi GJ$, o que faz a função de onda χ adquirir a fase $\exp\left(-\frac{8\pi i GJ E}{\hbar}\right)$. Isso leva à possibilidade de que uma condição de quantização para a energia E da partícula seja determinada por

$$E = n \frac{\hbar c^4}{4GJ}, \quad (3.71)$$

isto é, a energia é quantizada em unidades de $\frac{\hbar c^4}{4GJ}$. Interessante é observar que isso leva à consideração de que t acaba sendo uma variável tipo-ângulo, com período $8\pi GJ$.

A partir da equação (3.71), uma estimativa de J (o momento angular por unidade de comprimento da corda) pode ser calculada. Considerando que uma energia mínima E_{\min} poderia ser definida como o equivalente à massa associada com a energia de um fóton da ordem de 10^{12} eV (MAZUR, 1986),

$$J = \frac{\hbar c^4}{4GE_{\min}} \approx 3 \cdot 10^{33} \text{ erg} \cdot \text{s/cm}, \quad (3.72)$$

e temos que o período da corda deva ser da ordem de $6 \cdot 10^{-3}$ s. Com um período tão pequeno, não se esperam cordas cósmicas girantes realísticas ou estáveis, quando as mesmas são retas.

Até aqui, foram apresentados os resultados que definiram o espaço-tempo gerado por uma corda cósmica a partir da aplicação da teoria da RG. Uma vez que a formação dessas cordas aconteceu logo após o Big Bang, de acordo com o que foi visto no Capítulo 2, uma teoria de gravitação como a de BD parece ser a mais apropriada para a descrição dos fenômenos que tenham ocorrido no Universo primordial. Sendo assim, a partir do Capítulo 4, será verificado qual o comportamento do espaço-tempo de uma corda cósmica girante, ou de uma região definida por uma métrica com as mesmas características, sob a ótica da teoria de BD.

4 CORDAS CÓSMICAS GIRANTES NA TEORIA DE BRANS-DICKE

Como visto no Capítulo 2, a gravitação de BD é uma teoria escalar-tensorial, na qual os fenômenos gravitacionais são descritos por um campo tensorial e outro escalar (BRANS; DICKE, 1961). As suas equações dinâmicas têm um parâmetro adimensional, ω , que compara o quanto pode estar próxima a gravitação de BD da RG. Assim, quanto mais próximo da unidade é esse parâmetro, maior é a diferença entre as descrições dadas pelas duas teorias. Por outro lado, as cordas cósmicas foram abordadas no Capítulo 3, e são entendidas como defeitos topológicos unidimensionais, surgidos de uma quebra espontânea de simetria ocorrida em alguma transição de fase no Universo primordial, podendo, portanto, ser fonte de informação sobre as teorias mais fundamentais. Foi enfatizado ainda que as cordas cósmicas girantes são um tipo particular desses defeitos, que têm uma velocidade angular em torno do eixo longitudinal de simetria, e cuja dinâmica está associada com as soluções de Gödel (GÖDEL, 1949; NOVELLO et al., 1983). Cordas cósmicas girantes foram muito estudadas na RG, e suas soluções confirmam a possibilidade de ocorrerem CTCs em ao menos parte do espaço-tempo resultante em torno do defeito, como foi mostrado na descrição do trabalho (JENSEN, 1992). Como a formação das cordas cósmicas girantes teria ocorrido logo após o Big Bang, uma proposta com a gravitação de BD, encorajada pelos resultados das referências (DAMOUR; NORDTVEDT, 1993a; DAMOUR; NORDTVEDT, 1993b), também discutidos antes, pode trazer informação adicional ainda não obtida com a RG, uma vez que no Universo primordial a intensidade do campo escalar previsto por Brans e Dicke e a sua variação ainda eram importantes. Na verdade, as cordas cósmicas girantes já foram investigadas no contexto da gravidade de BD, mas as soluções obtidas foram excessivamente particulares, porque a análise efetuada aproveita uma forma muito particular para o campo escalar (ANCHORDOQUI et al., 1999).

O objetivo aqui é aprofundar a discussão sobre o espaço-tempo gerado por uma corda cósmica girante na gravidade de BD, com ênfase na região fora da corda, para a obtenção de uma solução completa para o sistema composto pela métrica com o campo escalar, acompanhada por uma análise do panorama físico dessa solução. Os cálculos serão executados inicialmente no referencial de Einstein, mas é mostrado que o comportamento qualitativo também pode ser aplicado ao referencial de Jordan-Fierz.

4.1 SOLUÇÃO PARA UMA CORDA CÓSMICA GIRANTE RETA NA TEORIA DE BRANS-DICKE

Conforme visto no Capítulo 2, a ação gravitacional na teoria de BD no referencial de Jordan-Fierz é dada por

$$S_{BD} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{g} \left(\phi R - \frac{\omega}{\phi} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi \right) + S_{mat}. \quad (2.44)$$

Nesse referencial, as equações de movimento são

$$G_{\mu\nu} = \frac{\omega}{\phi^2} \left(\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \partial_\rho \phi \partial_\sigma \phi \right) + \frac{1}{\phi} \left(\partial_\mu \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \square \phi \right) + \frac{8\pi}{\phi} T_{\mu\nu}, \quad (2.37)$$

$$\square \phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left(\sqrt{-g} \partial^\mu \phi \right) = \frac{8\pi}{2\omega + 3} T. \quad (2.38)$$

O meio mais conveniente para trabalhar com as equações de BD é através do referencial de Einstein. Nesse referencial, $g_{\mu\nu}$ e ϕ das equações (2.37) e (2.38) são redefinidas pelas novas variáveis dinâmicas $\tilde{g}_{\mu\nu}$ e $\tilde{\phi}$, como em (BOISSEAU; LINET, 1998):

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = e^{-2\kappa\tilde{\phi}} g_{\mu\nu}, \quad (4.1)$$

$$\tilde{\phi} = -\frac{\ln(G\phi)}{2\kappa}, \quad (4.2)$$

onde

$$\kappa^2 = \frac{1}{2\omega + 3} \quad (4.3)$$

e G é a constante gravitacional de Newton. Assim, no referencial de Einstein, as equações (2.37) e (2.38) são escritas como

$$G_{\mu\nu} = 2\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \partial_\rho \phi \partial_\sigma \phi + \frac{8\pi}{\phi} T_{\mu\nu}, \quad (4.4)$$

$$\square \phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left(\sqrt{-g} \partial^\mu \phi \right) = \frac{8\pi}{2\omega + 3} T, \quad (4.5)$$

onde o til (\sim), que identifica o referencial como sendo o de Einstein, foi suprimido das variáveis redefinidas, do tensor de Einstein e do operador de d'Alembert. Como podemos ver, as equações de campo da teoria de BD no referencial de Einstein leva a uma espécie de desacoplamento dos campos escalar e tensorial no vácuo. Para o sistema que estamos prestes a considerar, uma vez que o comportamento qualitativo é basicamente o mesmo em ambos os referenciais, devemos executar e interpretar os resultados no referencial melhor manipulável

de Einstein e, ocasionalmente, fazer referência ao referencial de Jordan-Fierz.

A corda cósmica girante a ser abordada é considerada como uma fonte com um raio muito pequeno $R \rightarrow 0$, juntamente com um comprimento muito grande $L \rightarrow \infty$. O elemento de linha cilíndricamente simétrico mais geral fora desse defeito é o mesmo utilizado na referência (JENSEN, 1992):

$$ds^2 = -(e^\alpha dt + M d\varphi)^2 + r^2 e^{-2\alpha} d\varphi^2 + e^{2(\beta-\alpha)} (dr^2 + dz^2), \quad (3.35)$$

onde a coordenada angular varia no intervalo $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. A corda é então colocada ao longo do eixo z em $r = 0$, e temos aqui também α , β e M como funções da distância radial r , estritamente positiva.

O *formalismo de Cartan* (SOLENG, 1990; PLEBAŃSKI; KRASIŃSKI, 2006) é adotado na chamada *teoria de gravitação de Einstein-Cartan*, sendo essa uma modificação da teoria da RG, que permite atribuir uma torção ao espaço-tempo, além da curvatura (TRAUTMAN, 2006). Essa torção pode estar associada com a densidade do *momento angular intrínseco* ou *spin* da matéria, assim como uma energia intrínseca está associada com a massa em repouso (SOLENG, 1990). A modificação na RG foi apresentada em 1922 por Cartan, ou seja, antes mesmo da descoberta do spin, ocorrida poucos anos depois (TRAUTMAN, 2006). Devemos apresentar entretanto as equações de campo usando o formalismo de Cartan não porque estará presente no trabalho algum fenômeno relacionado com a torção. Na verdade, o formalismo também é utilizado porque permite que se dê alguma agilidade na resolução das equações (PLEBAŃSKI; KRASIŃSKI, 2006). Ao invés de ser utilizada a métrica (3.35), que incorpora alguma complexidade, a análise do espaço-tempo é realizada com a métrica de Minkowski. A informação que caracteriza a métrica (3.35) é atribuída a uma base de tetradas. Embora as quantidades encontradas com métricas distintas não sejam iguais, com exceção das quantidades escalares (como o escalar de Ricci, por exemplo), elas originam resultados equivalentes, que carregam as mesmas características qualitativas. Então, no formalismo de Cartan, o elemento de linha (3.35) pode ser escrito como

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{ij} \theta^i \theta^j, \quad (4.6)$$

onde η_{ij} é a métrica de Minkowski, com assinatura $(-, +, +, +)$, e θ^i é a base de tetradas

$$\theta^i = \theta^i_\mu dx^\mu, \quad (4.7)$$

com

$$\theta^t = e^\alpha dt + M d\varphi, \quad \theta^r = e^{\beta-\alpha} dr, \quad \theta^\varphi = r e^{-\alpha} d\varphi, \quad \theta^z = e^{\beta-\alpha} dz, \quad (4.8)$$

$$\theta^t_t = e^\alpha, \quad \theta^t_\varphi = M, \quad \theta^r_r = e^{\beta-\alpha}, \quad \theta^\varphi_\varphi = r e^{-\alpha}, \quad \theta^z_z = e^{\beta-\alpha} \quad (4.9)$$

e

$$dx^\mu = \theta_i^\mu \theta^i, \quad (4.10)$$

onde

$$\theta_i^\mu = \eta_{ij} g^{\mu\nu} \theta^j_\nu. \quad (4.11)$$

Quando não há torção, a primeira equação de estrutura de Cartan é¹

$$d\theta^i = -\omega^i_j \wedge \theta^j. \quad (4.12)$$

Por meio da condição de metricidade (DAS, 2011),

$$\nabla_\sigma g_{\mu\nu} = 0, \quad \partial_k \eta_{ij} = 0, \quad (4.13)$$

ω_{ij} é antissimétrico, $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$, e as componentes não nulas das formas de conexão ω^i_j são (SOLENG, 1990)

$$\omega^t_r = \omega^r_t = \alpha' e^{\alpha-\beta} \theta^t - \Omega \theta^\varphi, \quad (4.14)$$

$$\omega^t_\varphi = \omega^\varphi_t = \Omega \theta^r, \quad (4.15)$$

$$\omega^r_\varphi = -\omega^\varphi_r = -\Omega \theta^t + \left(\alpha' - \frac{1}{r}\right) e^{\alpha-\beta} \theta^\varphi, \quad (4.16)$$

$$\omega^r_z = -\omega^z_r = (\alpha' - \beta') e^{\alpha-\beta} \theta^z. \quad (4.17)$$

Nesse conjunto de equações, as derivadas são em relação a r , e Ω é caracterizado por

$$\Omega = \frac{M\alpha' - M'}{2r} e^{2\alpha-\beta}. \quad (4.18)$$

¹ Quando há torção, a primeira equação de estrutura de Cartan é escrita como $d\theta^i = -\omega^i_j \wedge \theta^j + T^i$, onde T^i é o campo de torção (SOLENG, 1990).

As formas de curvatura Ω^i_j são determinadas pela segunda equação de estrutura de Cartan

$$\Omega^i_j = d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j, \quad (4.19)$$

a qual está relacionada com o tensor de Riemann \mathcal{R}^i_{jkl} por

$$\Omega^i_j = \frac{1}{2} \mathcal{R}^i_{jkl} \theta^k \wedge \theta^l. \quad (4.20)$$

Quando $i = k$, a contração \mathcal{R}^i_{jil} leva ao tensor de Ricci \mathcal{R}_{jl} . Assim, nesse contexto, o tensor de Einstein \mathcal{G}_{ij} pode ser escrito como

$$\mathcal{G}_{ij} = \mathcal{R}_{ij} - \frac{1}{2} \eta_{ij} R, \quad (4.21)$$

onde R é o escalar de Ricci $R = \eta^{ij} \mathcal{R}_{ij}$. A relação entre (4.4) e (4.21) é dada por (PLEBAŃSKI; KRASIŃSKI, 2006)

$$\mathcal{G}_{ij} = \theta_i^\mu \theta_j^\nu G_{\mu\nu}. \quad (4.22)$$

Assim, na região fora da corda, as equações dinâmicas (4.4) e (4.5) no vácuo (isto é, com o tensor energia-momento $T_{\mu\nu} = 0$) podem ser reformuladas na seguinte forma

$$\mathcal{G}^t_t : -3\Omega^2 - \left(2\alpha'' - \beta'' + \frac{2\alpha'}{r} - \alpha'^2 \right) e^{2(\alpha-\beta)} = -e^{2(\alpha-\beta)} \phi'^2, \quad (4.23)$$

$$\mathcal{G}^r_r : \Omega^2 + \left(\frac{\beta'}{r} - \alpha'^2 \right) e^{2(\alpha-\beta)} = e^{2(\alpha-\beta)} \phi'^2, \quad (4.24)$$

$$\mathcal{G}^z_z : -\Omega^2 + \left(\alpha'^2 - \frac{\beta'}{r} \right) e^{2(\alpha-\beta)} = -e^{2(\alpha-\beta)} \phi'^2, \quad (4.25)$$

$$\mathcal{G}^\varphi_\varphi : \Omega^2 + (\beta'' + \alpha'^2) e^{2(\alpha-\beta)} = -e^{2(\alpha-\beta)} \phi'^2, \quad (4.26)$$

$$\mathcal{G}^t_\varphi : [\Omega' + 2\alpha'\Omega + \Omega(\beta' - \alpha')] e^{\alpha-\beta} = 0, \quad (4.27)$$

$$\square\phi : \frac{\phi'}{2} \frac{d}{dr} \left\{ \ln \left[e^{4(\beta-\alpha)} r^2 \left(e^{2(\alpha-\beta)} \phi' \right)^2 \right] \right\} e^{2(\alpha-\beta)} = 0, \quad (4.28)$$

onde o campo escalar ϕ é também uma função de r apenas (isto é, $\phi = \phi(r)$).

Se o campo escalar não for dinâmico, existe uma solução particular dada por $\Omega = 0$ e $\alpha' = 0$ ($M' = 0$). Nesse caso, é possível associar M a $(-)_j$ e $e^{-\alpha} \sim 1 - \frac{\mu}{2\pi}$, onde m e j são a massa e o spin de um ponto massivo girante (DESER; JACKIW, 1992). A métrica (3.35) representa, então, para $dz = 0$, o espaço-tempo externo a essa partícula na gravidade com dimensão igual a $2 + 1$, ou, considerando-a como uma seção do elemento de linha (3.35) completo, $\mu \equiv m$ e

$J \equiv j$ podem ser interpretadas como as densidades de uma corda cósmica girante na RG usual, em uma abordagem semelhante àquela do trabalho (MAZUR, 1986), descrita no Capítulo 3. Na teoria de BD, no entanto, esse tratamento não proporciona mais uma solução do sistema de equações.

De agora em diante, implementaremos a invariância de Lorentz ao longo do eixo z , que é realizada ao se considerar

$$\beta(r) = 2\alpha(r) \quad (4.36)$$

no elemento de linha (3.35), como realizado na referência (JENSEN, 1992), posto que a corda aqui também é reta. Com essa restrição, é bastante simples ver que, a partir da soma das equações (4.23) e (4.24), $\Omega = 0$, levando imediatamente a

$$M = a_1 e^\alpha, \quad (4.29)$$

onde a_1 é uma constante de integração. As equações (4.24) e (4.26) podem ser reescritas como

$$\frac{2\alpha'}{r} - \alpha'^2 = \phi'^2, \quad (4.30)$$

$$2\alpha'' + \alpha'^2 = -\phi'^2, \quad (4.31)$$

das quais chegamos a

$$\alpha'' + \frac{\alpha'}{r} = 0, \quad (4.32)$$

cuja solução é dada por

$$\alpha(r) = a_2 \ln r + a_3, \quad (4.33)$$

onde a_2 e a_3 são constantes. Agora, substituindo a solução (4.33) na equação (4.30), por exemplo, temos

$$\phi(r) = \phi_0 + \sqrt{a_2(2 - a_2)} \ln r, \quad (4.34)$$

onde ϕ_0 é uma constante, e descartamos a alternativa negativa da solução. Além disso, da equação (4.29), a função M tem a solução

$$M(r) = a_1 e^{a_3} r^{a_2}. \quad (4.35)$$

Para termos um campo escalar real, o parâmetro a_2 deve pertencer ao intervalo $0 < a_2 < 2$. Observe que, à primeira vista, o limite para a RG pode ser recuperado quando $a_2 = 0$ ou $a_2 = 2$, uma vez que o campo escalar é constante para esses valores de a_2 . Análises adicionais

apontam para o fato de que o limite para a RG é melhor abordado no primeiro caso. Veja também que, pelas equações (4.1) e (4.2), o campo escalar está bem definido para cada intervalo da coordenada radial não nula.² As expressões obtidas para $\alpha(r)$, $M(r)$ e $\phi(r)$ são soluções do sistema de equações (4.23)-(4.28), desde que $\beta = 2\alpha$. Assim, a métrica do espaço-tempo pode ser escrita como

$$ds^2 = -e^{2a_3} r^{2a_2} (dt + a_1 d\varphi)^2 + e^{-2a_3} r^{2-2a_2} d\varphi^2 + e^{2a_3} r^{2a_2} (dr^2 + dz^2). \quad (4.36)$$

Do elemento de linha (4.36), bem como da forma geral do campo escalar (4.34), a análise dos *escalares de Kretschmann* mostra que o espaço-tempo é bem comportado em geral. De fato, no referencial de Einstein, temos

$$R^2 = R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} = 4a_2^2 (a_2 - 2)^2 e^{-4a_3} r^{-4(1+a_2)}, \quad (4.37)$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu\nu} = 4a_2^2 (8 - 12a_2 + 7a_2^2) e^{-4a_3} r^{-4(1+a_2)}, \quad (4.38)$$

$$C_{\alpha\beta\mu\nu} C^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{16}{3} a_2^2 (1 - 2a_2)^2 e^{-4a_3} r^{-4(1+a_2)}, \quad (4.39)$$

onde $C_{\alpha\beta\mu\nu}$ representa o tensor de Weyl. Tendo em vista as equações (4.37)-(4.39), o único ponto onde o espaço-tempo não seria regular é $r = 0$, que é excluído da análise, porque estamos investigando fora da corda. As conclusões gerais aqui obtidas também se aplicam aos escalares de Kretschmann, quando também calculados para o referencial de Jordan-Fierz.

4.2 PROPRIEDADES FÍSICAS

A partir do elemento de linha (4.36), vemos que CTCs podem ocorrer, desde que o coeficiente $g_{\varphi\varphi}$ seja negativo. Para tal, é necessário que a desigualdade

$$e^{-2\alpha} r^2 - M^2 < 0 \quad (4.40)$$

seja assegurada. Isso leva imediatamente a

$$r^{1-2a_2} < e^{2a_3} a_1. \quad (4.41)$$

² Além disso, se tivéssemos escolhido a solução negativa da equação (4.34), o campo escalar seria divergente quando $r \rightarrow \infty$ em ambos os referenciais, Einstein e Jordan-Fierz. Nesse contexto, um valor positivo para κ , juntamente com a análise no referencial de Jordan-Fierz, parece ser mais tecnicamente adequado. No entanto, alguns cuidados devem ser tomados, porque, afinal, um tal comportamento assintótico do campo escalar talvez não deva ser tomado de forma tão séria, pois, na prática, a grandes distâncias, outras fontes (diferentes) devem entrar na investigação e podem ser mais relevantes.

Portanto, vemos que, para $a_2 = \frac{1}{2}$, é possível definir um amplo intervalo para os parâmetros a_1 e a_3 , de modo que as CTCs não sejam permitidas. Esse é um fato notável, que não tem equivalência na RG. Por outro lado, assumindo $a_1 > 0$ e $a_2 \neq \frac{1}{2}$, a região que permite a existência de CTC é dada por

$$r < r^* = \exp\left(\frac{2a_3 + \ln a_1}{1 - 2a_2}\right). \quad (4.42)$$

O mesmo aspecto qualitativo é preservado no referencial de Jordan-Fierz. A equação (4.42) delimita a região cilíndrica na qual, em princípio, as CTCs são possíveis. Os raios de tal região dependem de $0 < a_2 < \frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{2} < a_2 < 2$, mas qualitativamente ambas as situações são similares. Esse fato se assemelha ao estudo das cordas girantes na RG usual (JENSEN, 1992). A seguir, estudaremos um comportamento particular do movimento geodésico, mostrando que, em um movimento puramente radial, uma partícula teste se afastaria da região permitida para a ocorrência de CTCs.

As equações geodésicas derivadas de (4.36) são dadas por

$$r\ddot{t} + 2a_1(2a_1 - 1)\dot{r}\dot{\varphi} + 2a_2\dot{r}\dot{t} = 0, \quad (4.43)$$

$$r\ddot{r} + a_2(\dot{r}^2 + \dot{t}^2) + 2a_1a_2\dot{t}\dot{\varphi} + \left[a_1^2a_2 + (a_2 - 1)e^{-4a_3}r^{2(1-2a_2)}\right]\dot{\varphi}^2 - a_2\dot{z}^2 = 0, \quad (4.44)$$

$$r\ddot{z} + 2a_2\dot{r}\dot{z} = 0, \quad (4.45)$$

$$r\ddot{\varphi} + 2(1 - a_2)\dot{r}\dot{\varphi} = 0, \quad (4.46)$$

onde o ponto ($\dot{}$) representa a derivada em relação a s , o parâmetro geodésico. A complexidade das equações (4.43)-(4.46) é evidente, e seu conteúdo físico é de difícil interpretação. Há um caso particular, no entanto, que sugere como deve ser o comportamento radial do movimento da partícula teste. Por isso, particularizando o movimento para um plano com z e φ constantes, isto é, desconsiderando os movimentos angular e no eixo z , o conjunto das equações (4.43)-(4.46) se reduz a

$$r\ddot{t} + 2a_2\dot{r}\dot{t} = 0, \quad (4.47)$$

$$r\ddot{r} + a_2\dot{r}^2 + a_2\dot{t}^2 = 0. \quad (4.48)$$

Dado $\dot{t} \neq 0$, a equação (4.47) pode ser escrita na forma simples

$$\frac{d\left[\ln\left(|\dot{t}|r^{2a_2}\right)\right]}{ds} = 0,$$

cuja solução é dada por

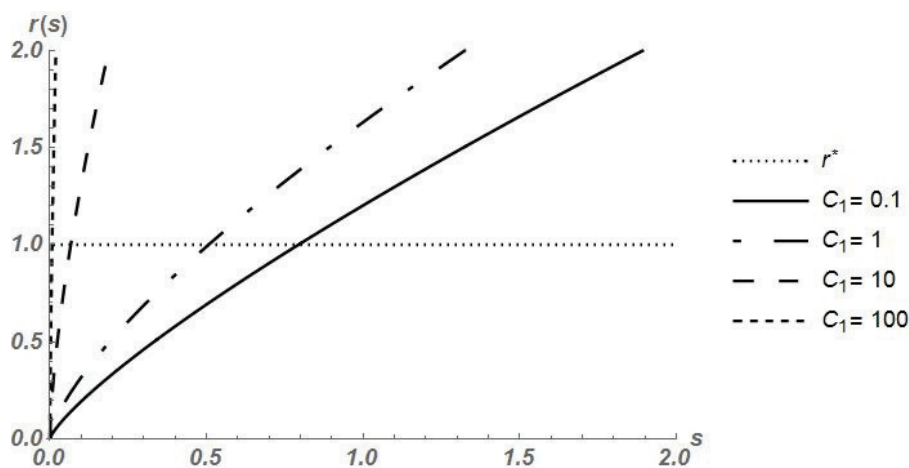
$$\dot{t} = \frac{C_1}{r^{2a_2}}, \quad (4.49)$$

sendo C_1 uma constante positiva. Portanto, substituindo \dot{t} na equação (4.48), temos

$$r\ddot{r} + a_2\dot{r}^2 + \frac{a_2C_1^2}{r^{4a_2}} = 0. \quad (4.50)$$

O movimento radial da partícula teste é, então, descrito pela equação (4.50). A solução da equação (4.50) é dada em termos de uma função hipergeométrica confluyente (inversa). A partir da Figura 20, é possível extrair o seu conteúdo físico. Como podemos ver, a partícula teste se afasta da região onde as CTCs são permitidas.

Figura 20 – Comportamento qualitativo da coordenada radial. As constantes são escolhidas de tal forma que $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{4}$ e $a_3 = 0$. Para esses valores, o raio r^* é igual a 1 (também mostrado na figura).



Fonte: autoria própria.

A análise tratada considera apenas o movimento radial. Outro movimento complementar também é informativo. Considere, por exemplo, um comportamento não inercial ao longo de raios fixos não nulos, e denominados por $r = \tilde{r}$. A transformação de coordenadas bastante simples

$$T = e^{a_3 \tilde{r}^{a_2} t} + a_1 e^{a_3 \tilde{r}^{a_2} \varphi}, \quad (4.51)$$

$$Z = e^{a_3 \tilde{r}^{a_2} z}, \quad (4.52)$$

$$\Phi = e^{-a_3 \tilde{r}^{1-a_2} \varphi}, \quad (4.53)$$

torna a métrica (4.36) em uma métrica do tipo Minkowski com dimensão 2 + 1:

$$ds^2 = -dT^2 + dZ^2 + d\Phi^2. \quad (4.54)$$

Agora, suponha que uma partícula relativística com massa m esteja sujeita ao campo gravitacional da corda, mas respeitando a restrição $r = \tilde{r}$. A equação de Klein-Gordon para essa partícula,

$$(-\nabla_\nu \nabla^\nu + m^2)\chi = 0, \quad (3.69)$$

deve apresentar soluções na forma (MAZUR, 1986)

$$\begin{aligned} \chi &= \exp\left(-\frac{iET}{\hbar}\right) \exp(ikZ) \psi_{\tilde{r}}(\varphi) \\ &= \exp\left(-\frac{iE e^{a_3} \tilde{r}^{a_2} t}{\hbar}\right) \exp\left(-\frac{iE a_1 e^{a_3} \tilde{r}^{a_2} \varphi}{\hbar}\right) \exp(ikZ) \psi_{\tilde{r}}(\varphi), \end{aligned} \quad (4.55)$$

onde $\psi_{\tilde{r}}(\varphi)$ é uma função determinada pela restrição levada em conta no potencial. Mesmo sem sua forma funcional explícita, todavia, $\psi_{\tilde{r}}(\varphi)$ deve ser uma função de valor único para φ . Para uma volta completa em torno da corda, a coordenada angular aumenta 2π , e T dá origem a uma fase definida por $\exp\left(-\frac{2\pi i E a_1 e^{a_3} \tilde{r}^{a_2}}{\hbar}\right)$. Ao adotar ainda a interpretação de que isso leva a uma condição de quantização da energia, a energia da partícula pode ser expressa como (MAZUR, 1987)

$$\begin{aligned} E &= \frac{n\hbar}{a_1 e^{a_3} \tilde{r}^{a_2}} \\ &= \frac{n\hbar}{M_{\tilde{r}}}. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Portanto é evidente ver que, para \tilde{r} muito longe da corda, teremos um valor muito alto para $M_{\tilde{r}}$. Essa análise qualitativa é particularmente relevante, desde que $\frac{M_{\tilde{r}}}{c^4}$ está relacionado à periodicidade do tempo ($\frac{M_{\tilde{r}}}{c^4}$ pode ser expresso em segundos). Isso indica que a corda é possivelmente instável, como o resultado obtido na RG. Ou seja, após a sua formação, deve ter desaparecido devido a instabilidades. Mais uma vez, os aspectos gerais também são válidos no referencial de Jordan-Fierz. Observe também que, a partir de (4.56), pode ser defendido que o limite certo para a RG é dado por $a_2 = 0$, quando a energia não depende da coordenada radial, uma vez que a quantização de energia padrão é recuperada nesse caso (MAZUR, 1986).

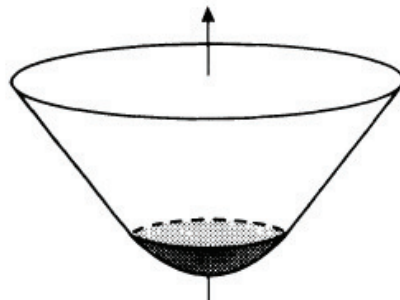
4.3 ESTRUTURA INTERNA

A análise completa do espaço-tempo gerado por uma corda cósmica girante reta, pela teoria de BD, levando em consideração a solução interna, ainda está sob investigação. Nossa primeira abordagem tem utilizado um procedimento semelhante ao descrito na referência (JENSEN; SOLENG, 1992), quando foi adotado o *modelo de caneta esferográfica (ballpoint pen model, em inglês)*, cuja geometria é mostrada na Figura 21. Nesse trabalho, as regiões interna e externa de uma corda girante reta foram exploradas com a utilização do elemento de linha

$$ds^2 = -(Fdt + Md\varphi)^2 + A^2d\varphi^2 + dz^2 + dr^2, \quad (4.57)$$

aplicado na RG. As funções da métrica, que aqui são F , M e A , também dependem, como nos casos anteriores, apenas da coordenada r .

Figura 21 – Representação da geometria do modelo de caneta esferográfica, utilizado para analisar as regiões interna e externa de uma corda cósmica girante (JENSEN; SOLENG, 1992).



Fonte: (JENSEN; SOLENG, 1992).

Na região externa,

$$M = m, \quad m = 4GJ, \quad (4.58)$$

$$A = B(r + r_0), \quad (4.59)$$

onde J também é o momento angular por comprimento, B é uma constante relacionada com o déficit angular da estrutura cônica, e vale

$$B = 1 - 4G\mu, \quad (4.60)$$

com μ sendo a massa por comprimento, e r_0 é uma constante que define a origem da coorde-

nada radial externa à corda. Assim, a métrica (4.57) é caracterizada da mesma forma como nos trabalhos (GOTT III, 1985; MAZUR, 1986), comentados no Capítulo 3.

Na região interna, considerando $F = 1$, as equações de campo de Einstein

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (2.41)$$

de acordo com o formalismo de Cartan, adotado antes, tomam a forma

$$8\pi G\rho = 3\Omega^2 - \frac{A''}{A}, \quad (4.61)$$

$$8\pi GP_\varphi = \Omega^2, \quad (4.62)$$

$$8\pi GP_z = -\Omega^2 + \frac{A''}{A}, \quad (4.63)$$

$$8\pi GP_r = \Omega^2, \quad (4.64)$$

$$8\pi Gq_\varphi = \Omega', \quad (4.65)$$

onde

$$\Omega = \frac{M'}{2A}, \quad (4.66)$$

e ρ , P e q são, respectivamente, a densidade de energia, a pressão e o fluxo, e as derivadas são também em relação apenas à coordenada r . Foi considerado que a equação de estado da corda implicava as definições das chamadas *densidade combinada* $\tilde{\rho}$ e *pressão combinada* \tilde{P} :

$$\tilde{\rho} = -\tilde{P}_z, \quad (4.67)$$

$$\tilde{P}_\varphi = \tilde{P}_r = 0, \quad (4.68)$$

onde (PETTI, 1986)

$$\tilde{\rho} = \rho - \Omega^2, \quad (4.69)$$

$$\tilde{P} = P - \Omega^2. \quad (4.70)$$

Como uma alternativa à solução do sistema (4.61)-(4.65), foi considerado inicialmente que a densidade de energia assumisse a forma

$$8\pi G\rho = \lambda + 3\Omega^2, \quad (4.71)$$

onde λ é uma constante positiva, o que satisfaz a *condição de energia fraca* nas equações de

campo de Einstein. Além disso, considerando que a métrica do sistema (4.61)-(4.65) é a de Minkowski, a solução para a função A é

$$A = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda} r). \quad (4.72)$$

Optando pela escolha de que q_ϕ seja constante, com a *condição de energia dominante*

$$-T^t_t - |T^t_\phi| \geq 0 \quad (4.73)$$

sendo satisfeita, o fluxo de energia é restrito por

$$|8\pi G q_\phi| = |\Omega'| \leq \lambda. \quad (4.74)$$

Assim,

$$\Omega' = -\alpha \lambda, \quad (4.75)$$

onde $\alpha \leq 1$.

Para combinar a solução (4.75) com uma solução externa de vácuo (quando $T^\mu_\nu = 0$), é necessário que a pressão desapareça no raio de junção. Consequentemente, é preciso que Ω para o raio da corda r_s seja nulo, isto é, $\Omega(r_s) = 0$. Com isso, pode ser escrito que

$$\Omega = \alpha \lambda (r_s - r). \quad (4.76)$$

Finalmente, com a equação (4.66) e a condição $\Omega(0) = 0$,

$$M = 2\alpha \left[(r - r_s) \cos(\sqrt{\lambda} r) - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda} r) + r_s \right]. \quad (4.77)$$

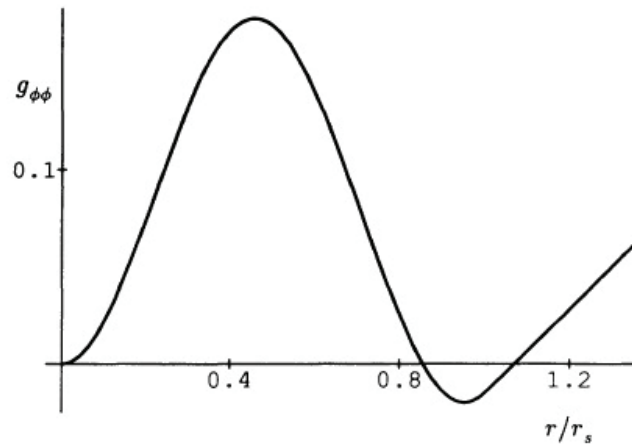
Considerando que a ocorrência de CTCs está condicionada pela relação

$$g_{\phi\phi} = A^2 - M^2 < 0, \quad (4.78)$$

levando em conta que as condições de energia fraca e dominante sejam satisfeitas, a Figura 22 mostra o comportamento de $g_{\phi\phi}$, indicada como $g_{\phi\phi}$ no eixo vertical, em unidades de $\frac{1}{\lambda}$ em função da razão entre a coordenada r e o raio da corda r_s , quando $\alpha = 1$ e $\sqrt{\lambda} r_s = \frac{3}{2}$. Diferente dos resultados anteriores, quando não foi considerada a estrutura interna da corda, mas somente o espaço-tempo externo, que apontaram a ocorrência de CTCs até um certo valor

de r , na RG e na gravitação de BD para as cordas retas, ou a partir de um determinado raio crítico r_{crt} , para os universos de Gödel, aqui o que se vê é que a existência de tais curvas ocorrem em uma região a partir de um valor da coordenada de r até outro finito. Na figura, essa região está onde $g_{\phi\phi} < 0$, entre $0.8 < \frac{r}{r_s} < 1.2$. Verificar se esse comportamento também ocorre quando a teoria de gravitação é a de BD é um dos objetivos da pesquisa ainda em desenvolvimento.

Figura 22 – Comportamento de $g_{\phi\phi}$, indicada no gráfico como $g_{\phi\phi}$, em unidades de $\frac{1}{\lambda}$ em função da razão entre a coordenada r e o raio da corda r_s , quando $\alpha = 1$ e $\sqrt{\lambda} r_s = \frac{3}{2}$. É observado que há uma região, entre $0.8 < \frac{r}{r_s} < 1.2$, onde ocorrem CTCs, porque $g_{\phi\phi} < 0$ (JENSEN; SOLENG, 1992).



Fonte: (JENSEN; SOLENG, 1992).

4.4 SOLUÇÕES PARA UMA CORDA CÓSMICA GIRANTE APROXIMADAMENTE CILINDRICAMENTE SIMÉTRICA NA GRAVIDADE DE BRANS-DICKE

O trabalho (MAZUR, 1986) e a seção 4.2 analisaram a quantização da energia de uma partícula com um movimento não inercial em torno de uma corda cósmica girante reta, e concluíram que a corda seria instável, porque teria uma velocidade angular muito maior do que seria fisicamente aceitável. Assim, se houve a formação desse tipo de corda no Universo primordial, não deve ter sobrevivido. Dessa forma, o objetivo agora é apresentar a solução completa para o espaço-tempo de uma corda aproximadamente cilindricamente simétrica na gravidade de BD. Serão mostradas as soluções para as equações de movimento da ação (2.44), quando a invariância de Lorentz ao longo do eixo longitudinal de simetria z é ligeiramente violada, uma vez que uma corda reta pode ser instável. Sobre a violação de Lorentz, é

importante lembrar que muitos trabalhos têm apontado que a busca de uma teoria de grande unificação leva a uma ruptura espontânea da simetria de Lorentz na época do Universo primordial (KOSTELECKÝ; SAMUEL, 1989; KOSTELECKÝ; POTTING, 1991; KOSTELECKÝ; POTTING, 1995; KOSTELECKÝ; POTTING, 1996), quando consideramos que a formação da corda ocorreu e, portanto, também a gravidade de BD era dominante sobre a RG. Além disso, para não perder a simetria quase cilíndrica adotada, o módulo da razão entre os coeficientes de dt^2 e dz^2 do elemento de linha é aproximadamente igual à unidade, isto é,

$$\left| \frac{g_{zz}}{g_{tt}} \right| \approx 1. \quad (4.79)$$

O elemento de linha adotado será o mesmo cilíndricamente simétrico mais geral, definido para as cordas retas (quando $\beta = 2\alpha$) (JENSEN, 1992):

$$ds^2 = -(e^\alpha dt + M d\varphi)^2 + r^2 e^{-2\alpha} d\varphi^2 + e^{2(\beta-\alpha)} (dr^2 + dz^2), \quad (3.35)$$

com as definições das coordenadas e das funções iguais às dessas cordas retas. Para não desistir completamente da simetria cilíndrica, adotamos $\frac{\beta}{\alpha} \approx 2$. É nesse sentido que queremos dizer que a simetria é aproximadamente cilíndrica. Observe que uma eventual corda para esse espaço-tempo não seria reta, e ligeiramente quebraria a invariância de Lorentz. Assim, as equações de campo são as mesmas do sistema (4.23)-(4.28),

$$\mathcal{G}_t^t : -3\Omega^2 - \left(2\alpha'' - \beta'' + \frac{2\alpha'}{r} - \alpha'^2 \right) e^{2(\alpha-\beta)} = -e^{2(\alpha-\beta)} \phi'^2, \quad (4.23)$$

$$\mathcal{G}_r^r : \Omega^2 + \left(\frac{\beta'}{r} - \alpha'^2 \right) e^{2(\alpha-\beta)} = e^{2(\alpha-\beta)} \phi'^2, \quad (4.24)$$

$$\mathcal{G}_z^z : -\Omega^2 + \left(\alpha'^2 - \frac{\beta'}{r} \right) e^{2(\alpha-\beta)} = -e^{2(\alpha-\beta)} \phi'^2, \quad (4.25)$$

$$\mathcal{G}_\varphi^\varphi : \Omega^2 + (\beta'' + \alpha'^2) e^{2(\alpha-\beta)} = -e^{2(\alpha-\beta)} \phi'^2, \quad (4.26)$$

$$\mathcal{G}_\varphi^t : [\Omega' + 2\alpha'\Omega + \Omega(\beta' - \alpha')] e^{\alpha-\beta} = 0, \quad (4.27)$$

$$\square\phi : \frac{\phi'}{2} \frac{d}{dr} \left\{ \ln \left[e^{4(\beta-\alpha)} r^2 (e^{2(\alpha-\beta)} \phi')^2 \right] \right\} e^{2(\alpha-\beta)} = 0, \quad (4.28)$$

mas, agora, $\beta \neq 2\alpha$.

As equações (4.24) e (4.25) são iguais, e a equação (4.28) tem a seguinte solução para o campo escalar:

$$\phi(r) = C_2 + C_1 \ln r, \quad (4.80)$$

onde C_1 e C_2 são constantes. Somando as equações (4.23) e (4.24), e usando a definição de Ω (4.18),

$$\Omega = \frac{M\alpha' - M'}{2r} e^{2\alpha - \beta}, \quad (4.18)$$

temos

$$e^{2\alpha} (M' - M\alpha')^2 = -2r(2\alpha' - \beta' + 2r\alpha'' - r\beta''). \quad (4.81)$$

Subtraindo a equação (4.23) da equação (4.26), e substituindo o termo $e^{2\alpha} (M' - M\alpha')^2$ pelo lado direito da equação (4.81), temos

$$\alpha' - \beta' + r\alpha'' - r\beta'' = 0. \quad (4.82)$$

Se $\alpha - \beta = \gamma$, a equação (4.82) pode ser reescrita como

$$\gamma' + r\gamma'' = 0, \quad (4.83)$$

a qual tem a solução

$$\gamma = C_b + C_a \ln r, \quad (4.84)$$

onde C_a e C_b são constantes. Assim,

$$\beta(r) = \alpha(r) - (C_b + C_a \ln r). \quad (4.85)$$

A equação (4.26) pode ser reescrita como

$$\frac{1}{4} \left[\frac{e^{2\alpha} (M' - M\alpha')^2}{r^2} + 4(\alpha'^2 + \beta'') \right] = -\phi'^2. \quad (4.86)$$

Substituindo o termo $e^{2\alpha} (M' - M\alpha')^2$ da equação (4.86) pelo lado direito da equação (4.81), temos

$$\phi'^2 = \frac{2\alpha' - 2r\alpha'^2 - \beta' + 2r\alpha'' - 3r\beta''}{2r}. \quad (4.87)$$

Quando usamos as equações (4.80) e (4.85) na equação (4.87), a solução para α é

$$\alpha = C_4 + \frac{1}{2} \left[\ln r - k_1 \ln r + \ln(C_3 + r^{2k_1}) \right], \quad (4.88)$$

onde C_3 , C_4 e k_1 são constantes, com

$$k_1 = \sqrt{1 - 4C_1^2 - 4C_a} \geq 0. \quad (4.89)$$

Agora, quando usamos as soluções (4.80), (4.85) e (4.88) na equação (4.81), as soluções para M são

$$M(r)_{\pm} = C_5 \sqrt{r^{1-k_1} (C_3 + r^{2k_1})} \pm \sqrt{-\frac{r^{1+3k_1}}{C_3 e^{2C_4} (C_3 + r^{2k_1})}}, \quad (4.90)$$

onde C_5 é uma constante. Resumindo, as soluções exatas para o sistema (4.23)-(4.28) são

$$\phi(r) = C_2 + C_1 \ln r, \quad (4.80)$$

$$\beta(r) = \alpha(r) - (C_b + C_a \ln r), \quad (4.85)$$

$$\alpha(r) = C_4 + \frac{1}{2} \left[\ln r - k_1 \ln r + \ln(C_3 + r^{2k_1}) \right], \quad (4.88)$$

$$M(r)_{\pm} = C_5 \sqrt{r^{1-k_1} (C_3 + r^{2k_1})} \pm \sqrt{-\frac{r^{1+3k_1}}{C_3 e^{2C_4} (C_3 + r^{2k_1})}}, \quad (4.90)$$

onde $r > 0$, $\frac{\beta(r)}{\alpha(r)} = C_{\alpha\beta} \approx 2$ (essa é a condição de simetria aproximadamente cilíndrica) e, para que as soluções sejam reais, é necessário que

$$C_3 < 0, \quad (4.91)$$

$$|C_3| < r^{2k_1}. \quad (4.92)$$

De acordo com as equações (4.91) e (4.92), C_3 pode ser escrita como

$$C_3 = -a_{C_3} r_{min}^{2k_1}, \quad (4.93)$$

onde $0 < a_{C_3} < 1$ e $r_{min} = \min r$, um valor para a coordenada radial abaixo do qual o sistema não pode ser associado ao vácuo. Ou seja, pode ser considerado $r_{min} \equiv r_0 \approx r_s$, onde r_0 é a coordenada radial externa à corda e aproximadamente igual ao raio da corda r_s , grandezas úteis para a investigação da estrutura interna, e comentadas na seção 4.3.

Uma última observação sobre a recuperação da RG a partir desse formalismo escalar-tensorial: como estamos trabalhando com equações dinâmicas no vácuo, não podemos implementar a condição $\omega \rightarrow \infty$ de tal maneira que possamos observar o limite que leva à RG. No entanto, é possível suprimir de forma equivalente a dinâmica do campo escalar tomando

$C_1 = 0$. Daqui em diante, devemos entrar em contato com a RG por meio dessa condição necessária ($C_1 = 0$).

4.5 PROPRIEDADES DO ESPAÇO-TEMPO GERADO FORA DA CORDA

Do elemento de linha (3.35), com as soluções (4.85), (4.88) e (4.90), os escalares de Kretschmann R^2 , $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$, $R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu}$ e $C_{\alpha\beta\mu\nu}C^{\alpha\beta\mu\nu}$, no referencial de Einstein, são funções de α , β , M e suas primeira e segunda derivadas em relação a r . No referencial de Jordan-Fierz, de acordo com a equação (4.1), o elemento de linha é reescrito com a métrica

$$g_{\mu\nu} = e^{2\kappa\tilde{\phi}} \tilde{g}_{\mu\nu}, \quad (4.94)$$

onde $g_{\mu\nu}$ e $\tilde{g}_{\mu\nu}$ são as métricas, respectivamente, nos referenciais de Jordan-Fierz e Einstein, e $\tilde{\phi}$ é o campo escalar no referencial de Einstein, dado pela solução (4.80). Dessa forma, com as mesmas soluções (4.85), (4.88) e (4.90), junto com a solução (4.80), os escalares de Kretschmann são funções de α , β , M , ϕ e suas primeira e segunda derivadas em relação a r , e do parâmetro ω . Nos dois referenciais, os resultados mostram que o espaço-tempo é bem comportado para $r > 0$.

Quando o coeficiente φ do elemento de linha (3.35) é negativo, aparecem CTCs. Para isso, é necessário que ocorra a desigualdade

$$g_{\varphi\varphi} < 0. \quad (4.95)$$

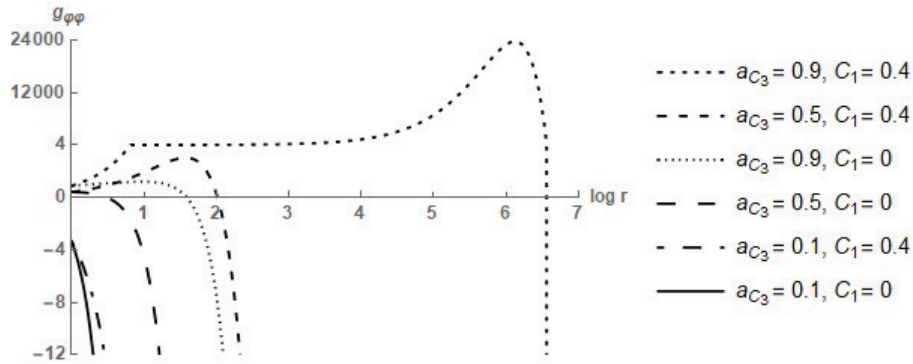
Então, considerando que

$$g_{\varphi\varphi} = e^{-2\alpha} r^2 - M^2, \quad (4.96)$$

e com a escolha de determinadas constantes para as soluções (4.88) e (4.90), é possível determinar os intervalos para a coordenada r onde as CTCs aparecem. Para um exemplo específico, e considerando parâmetros adimensionais, quando $C_4 = 0.1$, $C_5 = 1$, $C_a = 0.08$, $r_{min} = 1$ e a função M é tomada com o sinal negativo no segundo termo da equação (4.90), isto é, $M = M_-$, a Figura 23 mostra o comportamento de $g_{\varphi\varphi}$ para distintos valores de a_{C_3} e C_1 . Como já observado, se $C_1 = 0$, o campo escalar ϕ é constante e a teoria abordada é a RG.

Assim, podemos observar na Figura 23 que, para um mesmo a_{C_3} , a região onde não há CTC (quando $g_{\varphi\varphi} > 0$) é maior quando estamos no contexto da teoria de BD. Esse raciocínio não se aplica a $a_{C_3} = 0.1$ porque, nesse caso, há CTC em ambas as teorias para qualquer valor

Figura 23 – Comportamento de $g_{\varphi\varphi}$ para distintos valores de a_{C_3} e C_1 , com $C_4 = 0.1$, $C_5 = 1$, $C_a = 0.08$, $r_{min} = 1$ e $M = M_-$. Quando $g_{\varphi\varphi} > 4$, a escala adotada para o eixo vertical é diferente daquela quando $g_{\varphi\varphi} \leq 4$.



Fonte: autoria própria.

da coordenada r . Para $a_{C_3} = 0.9$, não há CTC até a região entre $r = 10^6$ e $r = 10^7$, para a gravitação de BD, e entre $r = 10^1$ e $r = 10^2$, para a gravitação da RG. Quando $a_{C_3} = 0.5$, em BD, aquela região está entre $r = 10^2$ e $r = 10^3$, enquanto que, na RG, essa região está entre $r = 10^0$ e $r = 10^1$.

Porque a função (4.96) traz alguma complexidade, não é possível afirmar se haverá sempre uma maior possibilidade de que não ocorram CTCs na gravitação de BD, quando os mesmos parâmetros das funções (4.80), (4.85), (4.88) e (4.90) são aplicados, como apontam os resultados anteriores. Numa maior exploração sobre essa questão, foram determinados os resultados para $g_{\varphi\varphi}$ na teoria de BD e na RG, considerando, respectivamente, para as duas teorias, $C_1 \neq 0$ e $C_1 = 0$, o que está de acordo com o que foi mencionado há pouco. Foi considerado um amplo espectro para as constantes, de forma a obter alguma informação mais apurada, como mostram as equações (4.97)-(4.101):

$$\left. \begin{array}{l} C_4 \\ C_5 \\ C_a \end{array} \right\} = \{0, \pm 10^{-3+0.1n}\}, \quad (4.97)$$

$$C_1 = 10^{-3+0.1n}, \quad (4.98)$$

onde $n = 0, 1, \dots, 60$. A equação (4.98) é definida para a aplicação exclusivamente na teoria de BD, já que $C_1 = 0$ é a condição para o uso na RG. Também não são considerados valores negativos para essa constante, como para C_4 , C_5 e C_a (equação (4.97)), porque é usado

unicamente o quadrado dela na definição de k_1 (veja a equação (4.89)). Além disso,

$$a_{C_3} = 0.1n, \quad n = 1, 2, \dots, 9, \quad (4.99)$$

$$r_{min} = 1, \quad (4.100)$$

$$r = 10^n, \quad n = 0, 1, \dots, 9. \quad (4.101)$$

Das mais de 10 bilhões de combinações possíveis, quase 8 bilhões geram soluções reais para a função (4.96), sendo a metade delas para quando $M = M_+$ e a outra metade para $M = M_-$.³ A análise final consistiu em determinar o número de ocorrências para quando não ocorre CTC na teoria de BD, mas ocorre na RG, isto é, $g_{\varphi\varphi_{BD}} > 0$ e, com as mesmas constantes, $g_{\varphi\varphi_{RG}} < 0$, assim como o seu oposto, $g_{\varphi\varphi_{BD}} < 0$, mas $g_{\varphi\varphi_{RG}} > 0$. Os resultados, resumidos na tabela 1, mostraram que ocorrem 278533 soluções onde não há CTC na gravitação de BD, mas há na RG, contra apenas 4 soluções onde ocorre o inverso, para quando $M = M_+$. Quando $M = M_-$, o resultado é idêntico. O resultado talvez possa ser atribuído ao fato de que, enquanto apenas um valor para C_1 é definido para a RG ($C_1 = 0$), na teoria de BD, há uma gama mais ampla, permitindo mais possibilidades onde não ocorram CTCs. De qualquer forma, uma conclusão não definitiva extraída do trabalho é a de que parece haver maior possibilidade de que não ocorram CTCs na gravidade de BD do que na RG. Uma pesquisa futura, com um espectro maior para as constantes e a coordenada radial, talvez possa auxiliar na confirmação ou não dessa tendência.

Tabela 1 – Das mais de 10 bilhões de combinações possíveis entre as constantes e a coordenada radial, 278533 delas são quando não ocorrem CTCs na teoria de BD, onde $g_{\varphi\varphi}(C_1 \neq 0) > 0$, mas ocorrem na RG, quando $g_{\varphi\varphi}(C_1 = 0) < 0$. Em apenas 4 soluções, o inverso, $g_{\varphi\varphi}(C_1 \neq 0) < 0$ quando $g_{\varphi\varphi}(C_1 = 0) > 0$, ocorre.

M	$g_{\varphi\varphi}(C_1 \neq 0) > 0$ e $g_{\varphi\varphi}(C_1 = 0) < 0$	$g_{\varphi\varphi}(C_1 \neq 0) < 0$ e $g_{\varphi\varphi}(C_1 = 0) > 0$
	M_+ ou M_-	278533

Fonte: autoria própria.

Sobre os resultados anteriores ainda, resumidos na Figura 23, o fato de que a região onde há CTCs, definida a partir uma certa distância do eixo z (e não até uma certa distância, como com as cordas cósmicas girantes retas), assemelha-se ao que está previsto na solução de Gödel,

³ São exatamente 10216159830 combinações possíveis, sendo que 7662047118 dessas são soluções reais para a função (4.96).

quando as CTCs aparecem quando a distância da fonte é a partir do raio crítico (GÖDEL, 1949), discutido no Capítulo 3.

5 CURVAS DE ROTAÇÃO DE GALÁXIAS

Atualmente, sabemos que apenas menos de 5% daquilo que compõe o Universo é bem compreendido, consistindo de matéria bariônica e radiação. Matéria e energia escuras, que dominam o nosso Universo, ainda não tiveram as suas origem e evolução satisfatoriamente explicadas. A matéria escura, supostamente presente na região do halo das galáxias, parece ser o mecanismo que causa o comportamento incomum da velocidade tangencial das estrelas, que é superior ao previsto pela interação com a matéria visível (ZWICKY, 1933; ZWICKY, 1937; RUBIN et al., 1980; PERSIC; SALUCCI, 1995; SALUCCI; PERSIC, 1997). Além dessa velocidade maior do que a esperada, à medida que a distância das estrelas a partir do centro da galáxia cresce, suas velocidades tendem a um valor constante (RUBIN et al., 1980). Uma explicação alternativa a esse comportamento é considerar uma teoria escalar-tensorial que possa resolver o paradigma das chamadas *curvas de rotação*. Os resultados das referências (GUZMÁN et al., 2002; LEE; LEE, 2004; COSTA et al., 2006) reproduzem o comportamento da velocidade à grande distância, com a ordem de grandeza esperada. No entanto, eles não fornecem informações sobre como a intensidade dessa velocidade evolui.

As estrelas das 21 galáxias estudadas na referência (RUBIN et al., 1980) estão distribuídas ao longo de uma região aproximadamente plana. Essas galáxias são do tipo Sc, que apresentam uma estrutura espiral, como a nossa própria Via Láctea. Entretanto, diferente da nossa galáxia, com uma estrutura em forma de barra atravessando o núcleo, as galáxias da referência (RUBIN et al., 1980) se caracterizam, de acordo com o *esquema de Hubble*, por possuírem um núcleo menor, com braços grandes e mais abertos (OLIVEIRA F^O.; SARAIVA, 2004). A Figura 24 mostra a classificação das galáxias de acordo com o esquema de Hubble, onde se observa a forma geral das galáxias estudadas. De acordo com essa classificação ainda, a nossa galáxia é do tipo SBb, porque possui braços medianamente separados. Por causa da forma como estão dispostas as estrelas, é possível supor que um espaço-tempo cilindricamente simétrico poderia descrever as curvas de rotação. Fontes com simetria cilíndrica são amplamente estudadas em diversas áreas. Como exemplo, podem ser citadas as cordas cósmicas girantes, abordadas nos Capítulos 3 e 4. Vimos, tanto na RG como na gravidade de BD, que essas cordas, quando não violam a simetria de Lorentz, são instáveis. Dessa forma,

serão utilizadas as soluções obtidas para as cordas cósmicas girantes não retas (quando $\beta \neq \alpha$),

$$\phi(r) = C_2 + C_1 \ln r, \quad (4.80)$$

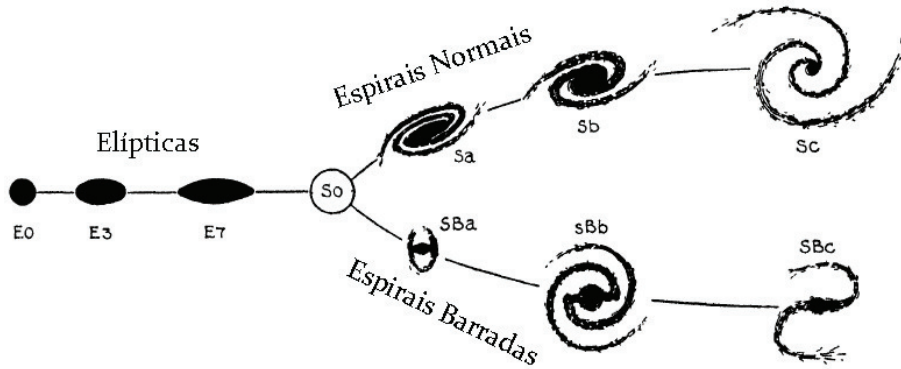
$$\beta(r) = \alpha(r) - (C_b + C_a \ln r), \quad (4.85)$$

$$\alpha(r) = C_4 + \frac{1}{2} \left[\ln r - k_1 \ln r + \ln(C_3 + r^{2k_1}) \right], \quad (4.88)$$

$$M(r)_{\pm} = C_5 \sqrt{r^{1-k_1} (C_3 + r^{2k_1})} \pm \sqrt{-\frac{r^{1+3k_1}}{C_3 e^{2C_4} (C_3 + r^{2k_1})}}, \quad (4.90)$$

na busca de um espaço-tempo aproximadamente cilindricamente simétrico na gravidade de BD, para ser usado como uma alternativa à matéria escura, na descrição das curvas de rotação das galáxias da referência (RUBIN et al., 1980). Uma vez que estamos interessados na solução de vácuo, menos importância é dedicada à origem desse espaço-tempo. No entanto, pode-se ter em mente uma corda cósmica girante não reta com um raio muito grande, de tal forma que não seja mais válida a relação $r_{min} \equiv r_0 \approx r_s \sim 10^{-31}$ m.

Figura 24 – Esquema de Hubble utilizado para a classificação das galáxias (OLIVEIRA F^O.; SARAIVA, 2004). O tipo das aqui estudadas é Sc, e a Via Láctea é do tipo SBb.



Fonte: (OLIVEIRA F^O.; SARAIVA, 2004).

5.1 O ESPAÇO-TEMPO GERADOR DAS CURVAS DE ROTAÇÃO DE GALÁXIAS

A densidade lagrangeana de uma partícula no espaço-tempo proposto, onde a simetria de Lorentz é quebrada, pode ser descrita pela métrica (3.35),

$$ds^2 = -(e^\alpha dt + M d\varphi)^2 + r^2 e^{-2\alpha} d\varphi^2 + e^{2(\beta-\alpha)} (dr^2 + dz^2), \quad (3.35)$$

de tal forma que seja igual a (MATOS et al., 2002; JENSEN, 1992)

$$2\mathcal{L} = -e^{2\alpha} \dot{t}^2 - M^2 \dot{\varphi}^2 - 2e^\alpha M \dot{\varphi} + r^2 e^{-2\alpha} \dot{\varphi}^2 + e^{2(\beta-\alpha)} \dot{r}^2 + e^{2(\beta-\alpha)} \dot{z}^2, \quad (5.1)$$

onde o ponto ($\dot{}$) denota a derivada em relação ao *tempo próprio* τ . Os momentos canônicos associados com essa densidade lagrangeana, $p_{x^\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu}$, são

$$p_t = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = -E, \quad (5.2)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = L, \quad (5.3)$$

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}, \quad (5.4)$$

$$p_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}}, \quad (5.5)$$

onde E e L são quantidades conservadas (MATOS et al., 2002). Pelas equações (5.2) e (5.3), temos

$$\dot{t} = -\frac{e^{-2\alpha} [L e^{3\alpha} M + E (e^{2\alpha} M^2 - r^2)]}{r^2}, \quad (5.6)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{e^\alpha (L e^\alpha + EM)}{r^2}. \quad (5.7)$$

A densidade hamiltoniana dessa partícula é

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= p_\mu \dot{x}^\mu - \mathcal{L} \\ &= p_t \dot{t} + p_\varphi \dot{\varphi} + p_r \dot{r} + p_z \dot{z} - \mathcal{L}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Consideremos as estrelas das galáxias como partículas teste movendo-se em um movimento circular no plano equatorial ao redor do centro de uma galáxia. Assim, $\dot{r} = 0$ e $\dot{z} = 0$. Além disso, vamos considerar ainda que a densidade hamiltoniana seja normalizada para ser igual a $-\frac{1}{2}$ por simplicidade (MATOS et al., 2002).¹ Consequentemente, o sistema composto pelas equações

$$\mathcal{H} + \frac{1}{2} = 0, \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\mathcal{H} + \frac{1}{2} \right) = 0 \quad (5.10)$$

¹ Observe que qualquer normalização não nula pode ser escolhida.

permite obter soluções para a energia E e o momento L :

$$E = E(r, \alpha, M, \alpha', M'), \quad (5.11)$$

$$L = L(r, \alpha, M, \alpha', M'). \quad (5.12)$$

As soluções (5.11) e (5.12) aplicadas nas equações (5.6) e (5.7) fornecem a velocidade angular

$$\begin{aligned} \Omega_{\pm} &= \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\frac{d\varphi}{d\tau}}{\frac{dt}{d\tau}} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{t}} \\ &= - \frac{2e^{2\alpha} \alpha'}{e^{\alpha} (M' + M\alpha') \pm \sqrt{e^{2\alpha} (M' - M\alpha')^2 - 4r\alpha'(-1 + r\alpha')}}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Com a métrica (3.35) e considerando a prescrição estabelecida por Chandrasekhar $d\tau^2 = -ds^2$ (CHANDRASEKHAR, 1983), temos

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= \frac{e^{2\alpha} r^2}{r^2 - e^{2\alpha} M^2} dt^2 \left\{ 1 - \frac{e^{2\beta-4\alpha} (r^2 - e^{2\alpha} M^2)}{r^2} \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^{-4\alpha}}{r^2} (e^{2\alpha} M^2 - r^2)^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} - \frac{e^{3\alpha} M}{r^2 - e^{2\alpha} M^2} \right)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Considerando $u^0 = \frac{dt}{d\tau}$, a equação (5.14) pode ser reescrita como

$$1 = \frac{e^{2\alpha} r^2}{r^2 - e^{2\alpha} M^2} (u^0)^2 (1 - v^2), \quad (5.15)$$

onde

$$v^2 = v_r^2 + v_z^2 + v_{\varphi}^2. \quad (5.16)$$

Portanto, a razão entre a velocidade tangencial v_{φ} e a velocidade da luz c pode ser escrita como

$$\left(\frac{v_{\varphi}}{c} \right)_{\Omega_{\pm} M_{\pm}} = \sqrt{\frac{e^{-4\alpha}}{r^2} (e^{2\alpha} M_{\pm}^2 - r^2)^2 \left(\Omega_{\pm} - \frac{e^{3\alpha} M_{\pm}}{r^2 - e^{2\alpha} M_{\pm}^2} \right)^2}. \quad (5.17)$$

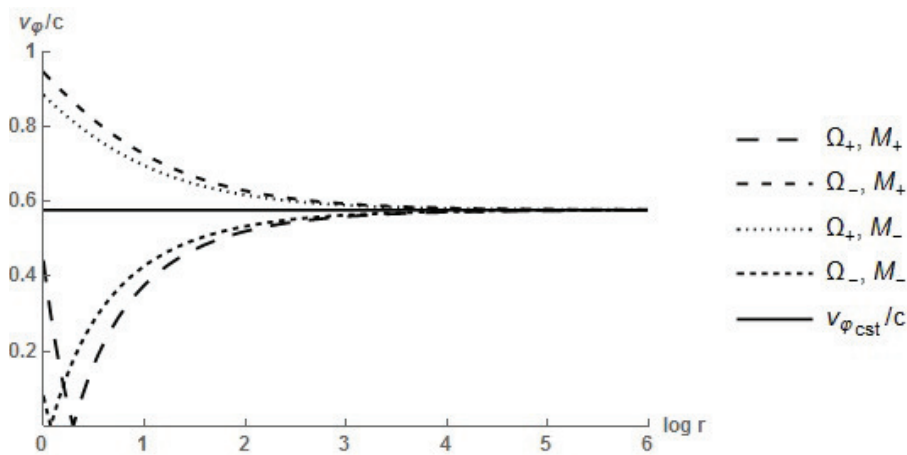
A Figura 25 mostra a razão $\frac{v_{\varphi}}{c}$ para diferentes combinações entre as funções Ω e M , como previsto pela equação (5.17), quando $r_{min} = 1$ m, $k_1 = 0.5$, $a_{C_3} = 0.5$, $C_4 = 0.1$ e $C_5 = -10$. É importante notar que, quando r aumenta, as velocidades tendem a um único valor constante

$$\frac{v_{\varphi_{cst}}}{c} = \sqrt{\frac{1 - k_1}{1 + k_1}}, \quad (5.18)$$

que é determinado quando calculamos o limite da razão $\frac{v_\varphi}{c}$ para r grande. Esse limite está representado na Figura 25 por uma linha sólida.

O comportamento das velocidades tangenciais para os casos em que $\Omega = \Omega_+$ e $M = M_+$ ou $\Omega = \Omega_-$ e $M = M_-$ é semelhante ao observado em relação às velocidades das estrelas mais distantes dos centros das 21 galáxias do tipo Sc, estudadas na referência (RUBIN et al., 1980). Nessa referência, o crescimento da velocidade é observado quando as distâncias das estrelas até os centros das galáxias crescem por aproximadamente 2 a 3 ordens de grandeza, de 0.5 kpc a 82.3 kpc, até que essa velocidade comece a tender para um valor constante. Isso é similar ao observado na Figura 25, quando o crescimento e consequente tendência para uma velocidade constante ocorre no intervalo de cerca de 10^0 - 10^3 m. Essa semelhança de comportamentos foi a principal motivação para determinar se haveria uma função (5.17) que se ajustaria ao que foi observado para as galáxias do tipo Sc mencionadas.

Figura 25 – Quando $r_{min} = 1$ m, $k_1 = 0.5$, $a_{C_3} = 0.5$, $C_4 = 0.1$ e $C_5 = -10$, diferentes combinações das funções Ω e M na equação (5.17) promovem distintas funções da velocidade tangencial. É interessante notar que todas as funções tendem a ter uma mesma velocidade constante $v_{\varphi_{cst}}$. Um comportamento similar pode ser visto para quando $\Omega = \Omega_+$ e $M = M_+$ ou $\Omega = \Omega_-$ e $M = M_-$ em relação às velocidades das estrelas nas galáxias do trabalho (RUBIN et al., 1980), que tendem a um valor constante no intervalo aproximado de 3 ordens de grandeza.



Fonte: autoria própria.

5.2 O AJUSTE DO MODELO PARA AS 21 GALÁXIAS

Para o necessário ajuste, consideramos $C_4 = 1$ e a escolha para os intervalos das constantes a_{C_3} , r_{min} e a velocidade constante $v_{\varphi_{cst}}$ da equação (5.18) foi realizada entre aqueles definidos

pelas equações (5.19)-(5.21):

$$a_{C_3} = 0.001n, \quad n = 1, 2, \dots, 999, \quad (5.19)$$

$$r_{min} = 10^{13.0 + 0.1n} \text{ m}, \quad n = 0, 1, \dots, 70, \quad (5.20)$$

$$v_{\varphi_{cst}} = \min v_{\varphi_{msr}} + n \text{ km/s}, \quad n = 0, 1, \dots, \max v_{\varphi_{msr}} - \min v_{\varphi_{msr}}, \quad (5.21)$$

onde $v_{\varphi_{msr}}$ são as velocidades medidas da galáxia sob estudo (RUBIN et al., 1980).

Para modelos de regressão linear, a descrição de um fenômeno pode ser realizada por uma função $\tilde{v}_{\varphi}(r)$ linear nos p parâmetros a_i , de tal forma que (ZEVIANI et al., 2013)

$$\tilde{v}_{\varphi}(r) = \sum_{i=1}^p a_i f_i(r), \quad (5.22)$$

onde

$$f_i = \frac{\partial \tilde{v}_{\varphi}}{\partial a_i}, \quad (5.23)$$

com

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial a_i} &= \frac{\partial^2 \tilde{v}_{\varphi}}{\partial a_i^2} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (5.24)$$

A função v_{φ} (5.17) não é linear nos parâmetros, porque

$$\frac{\partial^2 v_{\varphi}}{\partial a_i^2} \neq 0, \quad (5.25)$$

onde alguns dos parâmetros a_i são justamente as constantes a_{C_3} , r_{min} e $v_{\varphi_{cst}}$. Embora o *coeficiente de determinação* R^2 não seja o mais adequado para testar um modelo de regressão não linear, ele é adotado aqui para a definição dos valores dessas 3 constantes. Os valores escolhidos são aqueles que resultam no maior coeficiente de determinação com a *soma total dos quadrados não corrigida*, definido pela equação (5.26) (KVÅLSETH, 1985):

$$R^2 = 1 - \frac{S}{\sum_{i=1}^N v_{\varphi_{msr_i}}^2}, \quad (5.26)$$

onde

$$S = \sum_{i=1}^N (v_{\varphi_{msr_i}} - v_{\varphi_i})^2, \quad (5.27)$$

N é o número de medidas tomadas e v_φ são as velocidades calculadas pela equação (5.17), quando $\Omega = \Omega_+$ e $M = M_+$.²

Quanto à constante C_5 , ela está relacionada com a_{C_3} , r_{min} e $v_{\varphi_{cst}}$, e, inicialmente, foi definida de tal maneira que não ocorra CTC no intervalo de 0.5-82.3 kpc. Para que isso aconteça, a função $M = M_+$, equação (4.90), foi reescrita como

$$M(r)_+ = C_5 M_1(r) + M_2(r), \quad (5.28)$$

onde

$$M_1(r) = \sqrt{r^{1-k_1} (C_3 + r^{2k_1})}, \quad (5.29)$$

$$M_2(r) = \sqrt{-\frac{r^{1+3k_1}}{C_3 e^{2C_4} (C_3 + r^{2k_1})}}. \quad (5.30)$$

Assim,

$$C_5 g_{\varphi\varphi} > 0 = -\frac{M_2(r = a_{C_5} r_{min})}{M_1(r = a_{C_5} r_{min})}, \quad a_{C_5} = 10^6. \quad (5.31)$$

Quando o melhor ajuste da função (5.17) é procurado para as 21 galáxias da referência (RUBIN et al., 1980), se a constante C_5 é calculada de acordo com a equação (5.31), o primeiro termo do lado direito da equação

$$g_{\varphi\varphi} = e^{-2\alpha} r^2 - M^2 \quad (4.96)$$

é sempre maior do que o módulo do segundo termo, e, portanto, não haverá CTC, porque $g_{\varphi\varphi} > 0$. No entanto, a definição de C_5 leva a $v_\varphi \geq v_{\varphi_{cst}}$ nesse caso, o que é contrário às observações, já que esperamos $v_\varphi \leq v_{\varphi_{cst}}$. Para que esse problema seja resolvido, simplesmente multiplicamos C_5 por -1 , isto é, usamos a mesma constante C_5 determinada antes, mas com um sinal positivo. A velocidade tangencial terá valores adequados, mas, desta vez, as CTCs não podem ser excluídas, já que $g_{\varphi\varphi} < 0$. Isso ocorre porque os valores de C_5 para $v_\varphi \leq v_{\varphi_{cst}}$ estão fora do intervalo de C_5 onde CTC não ocorre. Por exemplo, a função (5.17) tem o seu melhor ajuste para as medidas da galáxia NGC 1087 quando $\Omega = \Omega_+$, $M = M_+$,

² Quando o coeficiente de determinação é calculado com a soma total dos quadrados corrigida,

$$R^2 = 1 - \frac{S}{\sum_{i=1}^N (v_{\varphi_{msr_i}} - \bar{v}_{\varphi_{msr}})^2},$$

onde $\bar{v}_{\varphi_{msr}}$ é a média (aritmética) das velocidades medidas $v_{\varphi_{msr}}$ (KVÅLSETH, 1985).

$C_4 = 1$, $a_{C_3} = 0.723$, $r_{min} = 10^{16.0}$ m, $v_{\varphi_{cst}} = 130$ km/s e

$$\begin{aligned} C_{5v_{\varphi} \leq v_{\varphi_{cst}}} &= + \frac{M_2(r = a_{C_5} r_{min})}{M_1(r = a_{C_5} r_{min})} \\ &= 4.3266 \cdot 10^{-17}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Com esse ajuste, ocorre CTC, porque, a fim de termos $g_{\varphi\varphi} > 0$, é necessário que

$$-4.3267 \cdot 10^{-17} < C_{5g_{\varphi\varphi} > 0} < -4.3265 \cdot 10^{-17}, \quad (5.33)$$

mas esse valor conduz a $v_{\varphi} \geq v_{\varphi_{cst}}$. O intervalo (5.33) foi obtido pela equação (4.96) considerando $r = R_{far}$, onde R_{far} é a distância radial da velocidade medida mais afastada do centro da galáxia. Com esse valor para r , o intervalo é o mais restritivo, quando comparado com aqueles para os raios menores, o que torna válida a condição $g_{\varphi\varphi} > 0$ para não ocorrer CTC, para qualquer $r \leq R_{far}$ da galáxia sob análise. A tabela 2 mostra os valores de C_5 calculados pela equação (5.32) e os intervalos dessa mesma constante para que não ocorram CTCs, para todas as 21 galáxias.

Para resumir, as equações (5.31) e (5.32) nos permitem escrever a seguinte relação

$$C_{5g_{\varphi\varphi} > 0} = - C_{5v_{\varphi} \leq v_{\varphi_{cst}}}. \quad (5.34)$$

Se obedecermos a equação (5.34), quando

$$\left| C_{5g_{\varphi\varphi} > 0} \right| = \left| C_{5v_{\varphi} \leq v_{\varphi_{cst}}} \right|,$$

se $C_5 < 0$, não há CTC, mas $v_{\varphi} \geq v_{\varphi_{cst}}$; por outro lado, se $C_5 > 0$, $v_{\varphi} \leq v_{\varphi_{cst}}$, mas há CTC.

Existe uma alternativa à função (5.17) para que as velocidades sejam ajustadas de acordo com as observações e que também não permite a existência de CTCs. Mas isso implica a necessidade de que ambos e^{-C_4} e C_5 assumam valores imaginários puros, o que fará com que a solução (4.90) seja um número imaginário puro e as soluções (4.85) e (4.88) se tornem complexas, mas a componente $g_{\varphi\varphi}$ (4.96) e a velocidade tangencial (5.17) permanecem reais, bem como a métrica (3.35). Então, se consideramos agora $\Omega = \Omega_-$, ao invés de $\Omega = \Omega_+$, e, por exemplo, $C_4 = \frac{\pi}{2}i$ e $C_5 = i$, $g_{\varphi\varphi}$ será positiva, e a velocidade tangencial assumirá valores com a ordem de grandeza esperada.

Tabela 2 – Valores de C_5 calculados de acordo com a equação (5.32) (para que $v_\varphi \leq v_{\varphi_{cst}}$) e os intervalos da constante para que não ocorram CTCs (quando $g_{\varphi\varphi} > 0$).

Galáxia	$C_5 v_\varphi \leq v_{\varphi_{cst}} = \frac{M_2}{M_1} (\cdot 10^{17})$	$C_5(r)_{g_{\varphi\varphi} > 0} (\cdot 10^{17})$	$r = R_{far}$ (kpc)
NGC 4605	5.5474	$-5.5478 < \dots < -5.5471$	3.3
NGC 1035	3.6564	$-3.6566 < \dots < -3.6563$	7.0
NGC 4062	3.4456	$-3.4457 < \dots < -3.4454$	9.0
NGC 2742	3.0740	$-3.0741 < \dots < -3.0739$	10.6
NGC 701	3.4952	$-3.4954 < \dots < -3.4951$	7.7
NGC 2608	$1.1633 \cdot 10^5$	$-1.1633 \cdot 10^5 < \dots < -1.1633 \cdot 10^5$	11.7
NGC 3495	2.5118	$-2.5119 < \dots < -2.5117$	12.7
NGC 1087	4.3266	$-4.3267 < \dots < -4.3265$	11.0
UGC 3691	3.2836	$-3.2837 < \dots < -3.2835$	14.0
NGC 4682	2.9106	$-2.9107 < \dots < -2.9105$	14.8
NGC 3672	2.0221	$-2.0222 < \dots < -2.0220$	17.8
NGC 1421	3.2982	$-3.2983 < \dots < -3.2982$	20.0
NGC 2715	3.3833	$-3.3833 < \dots < -3.3832$	18.4
NGC 4321	3.8213	$-3.8213 < \dots < -3.8212$	14.6
IC 467	2.8249	$-2.8250 < \dots < -2.8249$	20.9
NGC 7541	5.7039	$-5.7040 < \dots < -5.7039$	23.0
NGC 7664	2.3803	$-2.3803 < \dots < -2.3802$	28.0
NGC 2998	2.2459	$-2.2459 < \dots < -2.2459$	34.0
NGC 753	3.9004	$-3.9005 < \dots < -3.9004$	24.7
NGC 801	1.5519	$-1.5519 < \dots < -1.5518$	47.4
UGC 2885	6.1841	$-6.1842 < \dots < -6.1841$	82.3

Fonte: autoria própria.

Quanto à métrica (3.35), quando $C_4 = \frac{\pi}{2} i$, a componente g_{tt} é

$$g_{tt} = r^{1-k_1} (C_3 + r^{2k_1}). \quad (5.35)$$

Para o ajuste da função (5.17), as condições (4.91) e (4.92),

$$C_3 < 0, \quad (4.91)$$

$$|C_3| < r^{2k_1}, \quad (4.92)$$

foram mantidas, para que a métrica seja real. Assim, $C_3 + r^{2k_1} > 0$, o que leva a $g_{tt} > 0$. Sendo ainda $g_{\varphi\varphi} > 0$ e as outras componentes espaciais g_{rr} e g_{zz} também positivas, a métrica (3.35) se torna uma *métrica euclideana*, isto é, com assinatura (+, +, +, +), utilizada, por exemplo, nas teorias de gravidade quântica para a descrição dos fenômenos da época da grande unificação (HAWKING, 1979; HARTLE; HAWKING, 1983).

A Figura 26 mostra o comportamento da função (5.17) ajustada para as galáxias NGC 701, NGC 1087, NGC 3672 e NGC 801, quando $C_5 > 0$, isto é, para que v_φ assumam valores adequados com as observações, mas $g_{\varphi\varphi} < 0$, e quando $C_5 = i$, para que não ocorram CTCs, o que torna a métrica euclideana. As curvas para os dois valores de C_5 são idênticas, não podendo ser distinguidas nos gráficos. Os valores para as constantes dos ajustes e os seus respectivos coeficientes de determinação estão na tabela 3. Deixamos as informações sobre os ajustes daquelas galáxias não mostradas na tabela 3 e na Figura 26, a relação das constantes definidas e os seus respectivos coeficientes de determinação, assim como os gráficos com a comparação das velocidades medidas com as calculadas, nas tabelas 5-21 do apêndice A.

Tabela 3 – Valores das componentes g_{tt} e $g_{\varphi\varphi}$, das constantes e dos coeficientes de determinação para os ajustes da função (5.17) feitos para as galáxias NGC 701, NGC 1087, NGC 3672 e NGC 801, mostrados na Figura 26. R_{far} é a distância radial da velocidade medida mais afastada do centro da galáxia. Quando a constante C_5 é real, é definida pela equação (5.32).

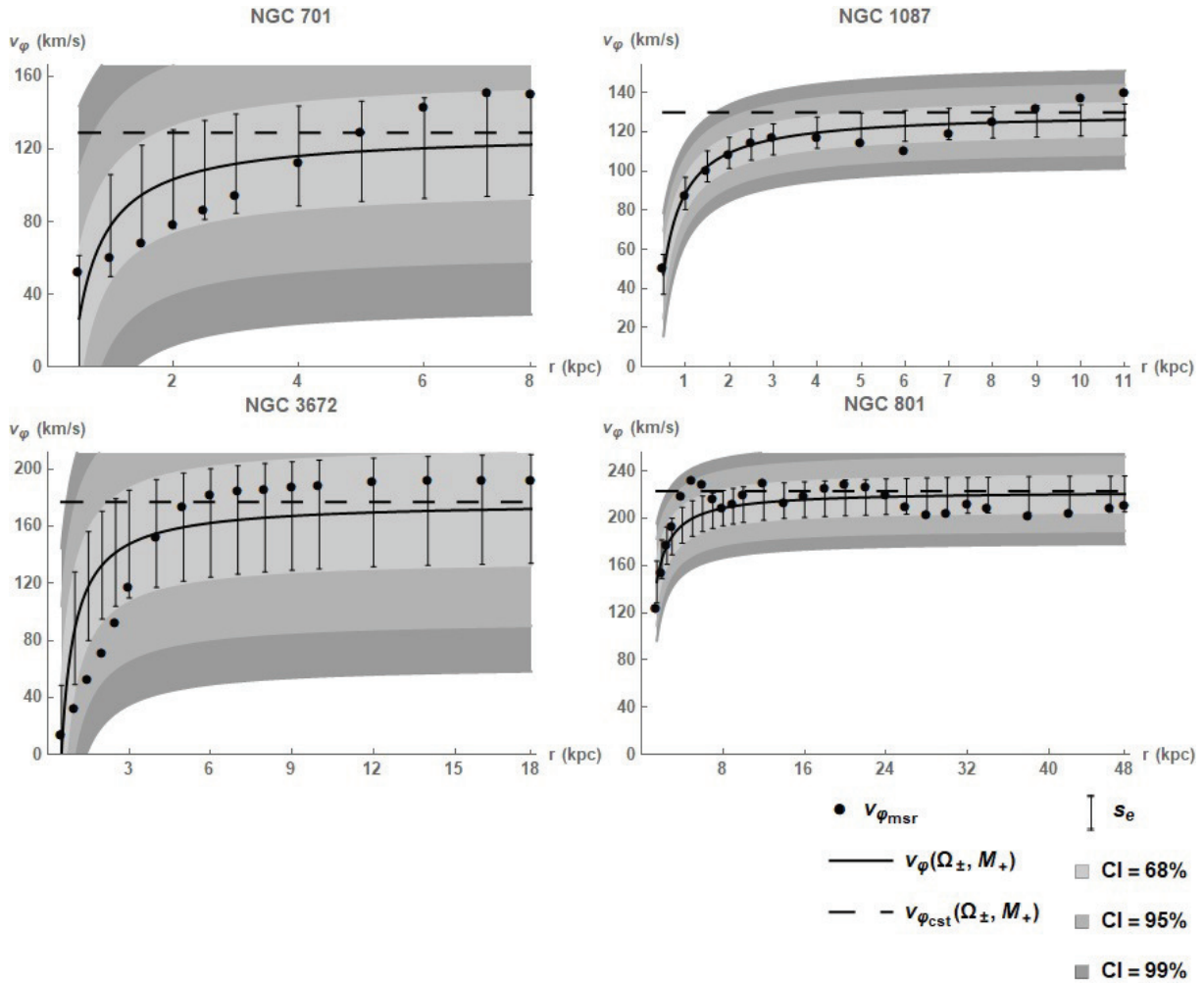
	NGC 701		NGC 1087		NGC 3672		NGC 801	
R_{far} (kpc)	7.7		11.0		17.8		47.4	
Ω	Ω_+	Ω_-	Ω_+	Ω_-	Ω_+	Ω_-	Ω_+	Ω_-
M	M_+							
$v_{\varphi_{cst}}$ (km/s)	129		130		177		223	
$\log r_{min}$	16.1	15.8	16.0	15.8	16.5	16.1	16.5	16.3
a_{C_3}	0.699	0.696	0.723	0.454	0.331	0.522	0.562	0.353
C_4	1	$\frac{\pi}{2} i$	1	$\frac{\pi}{2} i$	1	$\frac{\pi}{2} i$	1	$\frac{\pi}{2} i$
C_5	$\frac{M_2}{M_1}$	i	$\frac{M_2}{M_1}$	i	$\frac{M_2}{M_1}$	i	$\frac{M_2}{M_1}$	i
R^2	0.958		0.996		0.953		0.996	
$g_{\varphi\varphi}$	< 0	> 0	< 0	> 0	< 0	> 0	< 0	> 0
g_{tt}	< 0	> 0	< 0	> 0	< 0	> 0	< 0	> 0

Fonte: autoria própria.

5.3 OS INTERVALOS DE CONFIANÇA DO MODELO

Para as quatro galáxias mostradas na Figura 26 foram também calculados os *intervalos de confiança* (em inglês, *confidence intervals* (CIs)) do modelo. A escolha por essas quatro se deve ao fato de que duas delas, NGC 701 e NGC 3672, possuem os menores coeficientes de determinação, e as outras duas, NGC 1087 e NGC 801, são as com os maiores coeficientes (veja a tabela 3). Ou seja, pelo critério adotado para a definição das constantes a_{C_3} , r_{min} e $v_{\varphi_{cst}}$, são as duas galáxias com os melhores ajustes, e as duas com os piores.

Figura 26 – Velocidades das estrelas das galáxias NGC 701, NGC 1087, NGC 3672 e NGC 801 (RUBIN et al., 1980) comparadas com o melhor ajuste da função (5.17). Quando $\Omega = \Omega_+$, as curvas mostram os ajustes para quando as constantes C_4 e C_5 são reais e há CTC no intervalo representado no gráfico, porque $g_{\varphi\varphi} < 0$; quando $\Omega = \Omega_-$, C_4 e C_5 são imaginárias, $g_{\varphi\varphi} > 0$, e não há CTC, e a métrica é euclidiana, porque $g_{tt} > 0$. Os valores das constantes e dos coeficientes de determinação para cada galáxia estão na tabela 3, e os valores das velocidades medidas e calculadas, os erros padrões e os CIs estão nas tabelas 22-25 do apêndice B.



Fonte: autoria própria.

A estimativa do erro padrão s_e de um modelo linear, como o da equação (5.22), é calculada pela expressão (WOLFRAM RESEARCH, 2014; RUCKSTUHL, 2010)

$$s_e(r) = \sqrt{s^2 + V_\varphi(r)^T \cdot C \cdot V_\varphi(r)}. \quad (5.36)$$

A variância do erro s^2 da equação (5.36) é igual a

$$s^2 = \frac{\tilde{S}}{N-p}, \quad (5.37)$$

onde

$$\tilde{S} = \sum_{i=1}^N (v_{\varphi msr_i} - \tilde{v}_{\varphi_i})^2, \quad (5.38)$$

e a matriz V_{φ} das funções f_i de \tilde{v}_{φ} corresponde a

$$V_{\varphi}(r) = \begin{bmatrix} f_1(r) \\ f_2(r) \\ \vdots \\ f_p(r) \end{bmatrix}, \quad (5.39)$$

e $V_{\varphi}(r)^T$ é a sua transversa. Ainda na equação (5.36), C é a matriz de covariância

$$C = 2s^2 H^{-1}, \quad (5.40)$$

com H^{-1} sendo a inversa da matriz hessiana H , escrita sob a forma

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial a_1^2} & \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial a_1 \partial a_2} & \cdots & \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial a_1 \partial a_p} \\ \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial a_2 \partial a_1} & \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial a_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial a_2 \partial a_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial a_p \partial a_1} & \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial a_p \partial a_2} & \cdots & \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial a_p^2} \end{bmatrix}. \quad (5.41)$$

Como já visto antes, a função v_{φ} (5.17) não é linear nos parâmetros. Três desses parâmetros são as constantes a_{C_3} , r_{min} e $v_{\varphi_{cst}}$, definidas pelas equações (5.19)-(5.21). Quando $g_{\varphi\varphi} < 0$, outros dois parâmetros são as constantes C_4 e a_{C_5} , definidas previamente com os valores iguais a, respectivamente, 1 e 10^6 . Se $g_{\varphi\varphi} > 0$, C_4 assume o valor $\frac{\pi}{2}i$, e a_{C_5} é eliminada, porque C_5 não é mais calculada pela equação (5.32), tornando-se um parâmetro independente e igual a i . Ainda podem ser atribuídos mais dois parâmetros ao modelo, os quais estão associados à escolha dos sinais (positivo ou negativo) nas funções M e Ω . Esses últimos parâmetros poderiam ser definidos como $a_M = \pm 1$ e $a_{\Omega} = \pm 1$, e inseridos adequadamente nas equações (4.90) e (5.13), através da substituição de \pm por $+a_M$ e $+a_{\Omega}$. Apesar de identificarmos sete parâmetros independentes no modelo, os erros padrões serão calculados levando em

consideração apenas aqueles parâmetros definidos pelo teste do coeficiente de determinação descrito na seção 5.2, ou seja, a_{C_3} , r_{min} e $v_{\varphi_{cst}}$.³ Assim, $p = 3$, e os erros padrões podem também ser calculados pela equação (5.36), onde

$$s^2 = \frac{S}{N - p}, \quad (5.42)$$

a matriz V_{φ} é escrita como (WOLFRAM RESEARCH, 2014)

$$V_{\varphi}(r) = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial a_{C_3}} \\ \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial r_{min}} \\ \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial v_{\varphi_{cst}}} \end{bmatrix}, \quad (5.43)$$

e a matriz hessiana tem a forma

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 S}{\partial a_{C_3}^2} & \frac{\partial^2 S}{\partial a_{C_3} \partial r_{min}} & \frac{\partial^2 S}{\partial a_{C_3} \partial v_{\varphi_{cst}}} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial r_{min} \partial a_{C_3}} & \frac{\partial^2 S}{\partial r_{min}^2} & \frac{\partial^2 S}{\partial r_{min} \partial v_{\varphi_{cst}}} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial v_{\varphi_{cst}} \partial a_{C_3}} & \frac{\partial^2 S}{\partial v_{\varphi_{cst}} \partial r_{min}} & \frac{\partial^2 S}{\partial v_{\varphi_{cst}}^2} \end{bmatrix}. \quad (5.44)$$

Finalmente, os CIs das velocidades são obtidos de acordo com a equação (5.45):

$$v_{\varphi}(r)_{CI} = v_{\varphi}(r) \pm t\left(N - p, 1 - \frac{1 - CI}{2}\right) s_e(r), \quad (5.45)$$

onde t é o quantil $1 - \frac{1 - CI}{2}$ da *distribuição t de Student* com $N - p$ graus de liberdade.

CIs iguais a 68%, 95% e 99% para o modelo aplicado nas quatro galáxias estão representados também na Figura 26. Os valores das velocidades $v_{\varphi_{msr}}$ e v_{φ} , os erros padrões s_e , e os CIs mostrados na mesma figura estão nas tabelas 22-25 do apêndice B. Pode ser confirmado que as galáxias com os maiores coeficientes de determinação são as que possuem os menores erros padrões, o que garante uma melhor acurácia das velocidades calculadas. Além disso, a maioria das velocidades medidas está dentro de um $CI = 68\%$, o que mostra uma baixa dispersão dessas velocidades em relação ao modelo, e garante uma boa previsibilidade do mesmo.

³ Poderia ser cogitado se não haveria a necessidade de que fossem considerados todos os sete parâmetros da função v_{φ} . Porque $s^2 \propto p$ (veja a equação (5.42)), um menor número de parâmetros na função v_{φ} leva a um erro padrão menor. Os resultados apontam que essa opção por um menor número de parâmetros na função v_{φ} não prejudica a análise de forma importante, porque, mesmo sendo $p = 3$, a maior parte das velocidades calculadas se encontra no CI igual a 68% (aproximadamente σ).

5.4 AS ORDENS DE GRANDEZA DAS CONSTANTES E DA COORDENADA RADIAL

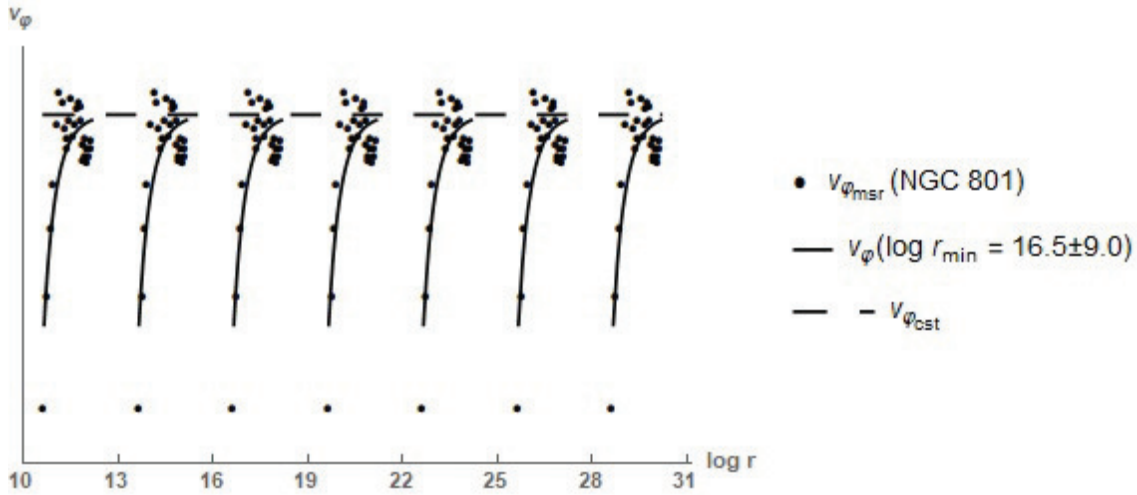
Para os ajustes de todas as galáxias, foram encontrados valores distintos para as constantes independentes $v_{\varphi_{cst}}$, r_{min} e a_{C_3} , já que as demais não alteram, porque são definidas previamente, com valores fixos para cada uma delas, sendo os mesmos iguais para as 21 galáxias. O valor de $v_{\varphi_{cst}}$ está relacionado com as características de cada galáxia, sendo, em geral, encontradas velocidades maiores para galáxias maiores. Embora os valores de r_{min} e a_{C_3} sejam diferentes para cada galáxia, elas mantêm (ou quase) a mesma ordem de grandeza, porque $r_{min}(C_4 = 1) \sim 10^{16}-10^{17}$ m ou (um resultado melhor ainda) $r_{min}(C_4 = \frac{\pi}{2} i) \sim 10^{16}$ m, e $a_{C_3} \sim 10^{-1}-10^0$. A exceção ocorre para a galáxia NGC 2608, quando $r_{min} \sim 10^{13}$ m e $a_{C_3} \sim 10^{-3}$, por causa da disposição diferenciada das estrelas nessa galáxia em relação às demais (veja o gráfico na tabela 9 do apêndice A). Então, pela definição da função das velocidades (5.17), as fontes que geram o espaço-tempo para cada galáxia parecem não possuir características tão diferentes entre si.

Apesar da métrica (3.35) estar em unidades naturais, a equação (5.17) assegura que v_{φ} seja obtida em quantidades de c . Sobre a ordem de grandeza da coordenada r , os valores para r_{min} que constam na tabela 3 estão em metros, e foram escolhidos para garantir o melhor ajuste para a função (5.17), levando em consideração que a distância das estrelas até o centro de cada galáxia esteja também em metros. É interessante observar que r é invariante sob uma mudança de escala, desde que (apenas) a constante r_{min} cresça da mesma forma. A Figura 27 ilustra essa situação: a curva ajustada para a galáxia NGC 801 (quando $\Omega = \Omega_+$) é mostrada quando a coordenada é alterada até 9 ordens de grandeza menores ou maiores do que foi previamente definido, e não há mudança no ajuste inicialmente obtido, mostrado na Figura 26. Assim, quando r é alterado para $10^{\pm 3n}r$, onde $n = \{1, 2, 3\}$, nada muda em relação ao ajuste obtido, desde que r_{min} também altere da mesma forma, ou seja, com $\log r_{min} = 16.5 \pm 3n$.

5.5 O ESPAÇO-TEMPO COM SIMETRIA EXATAMENTE CILÍNDRICA COMO ALTERNATIVA À GERAÇÃO DAS CURVAS DE ROTAÇÃO

Poderia se pensar em adotar a simetria cilíndrica para o espaço-tempo, e não aproximadamente cilíndrica, como realizado, apesar das justificativas iniciais apresentadas de que defeitos modelados dessa forma, como as cordas cósmicas girantes retas, por exemplo, são instáveis. A simetria cilíndrica tem soluções como aquelas vistas no Capítulo 4, onde $\frac{\beta}{\alpha} = 2$.

Figura 27 – A figura mostra as curvas melhor ajustadas para a galáxia NGC 801 quando r , inicialmente definido com a ordem de grandeza esperada em metros, diminui ou aumenta 9 ordens de grandeza, isto é, $r \rightarrow 10^{\pm 3n}r$, onde $n = \{1, 2, 3\}$. O ajuste continua sendo bem sucedido, desde que r_{min} também seja transformado com a mesma ordem de grandeza utilizada para a mudança de r , ou seja, para $10^{\pm 3n}r_{min}$. A curva mais à esquerda tem $\log r_{min} = 7.5$, e a curva mais à direita é para $\log r_{min} = 25.5$. As demais constantes são aquelas para quando $\Omega = \Omega_+$.



Fonte: autoria própria.

A análise da aplicação dessas soluções na densidade lagrangeana (5.1) mostrou que

$$\left(\frac{v_\varphi}{c}\right)_\pm = \left| \frac{a_2 r \pm a_1 e^{2a_3} r^{2a_2} \sqrt{a_2(1-a_2)}}{r \sqrt{a_2(1-a_2)} \pm a_1 a_2 e^{2a_3} r^{2a_2}} \right|, \quad (5.46)$$

o que não tende a um valor constante, como esperado para a descrição das curvas de rotação. Há uma alternativa onde a equação é constante, que é quando $a_2 = \frac{1}{2}$, o valor da constante para que não ocorram CTCs, de acordo com a condição

$$r^{1-2a_2} < e^{2a_3} a_1, \quad (4.41)$$

mas isso leva a $v_{\varphi_{cst}} = c$, porque o numerador da equação (5.46) é igual ao seu denominador para qualquer r (inclusive r pequeno, o que também não estaria de acordo com as observações).

5.6 A RAZÃO $\frac{\beta}{\alpha}$

Ao fazer uso de uma simetria aproximadamente cilíndrica, é necessário que a razão entre as funções (4.85) e (4.88) seja $\frac{\beta}{\alpha} = C_{\alpha\beta} \approx 2$. Uma vez que estamos interessados no

comportamento de v_φ para o intervalo $r = 0.5-82.3$ kpc, é importante calcular o limite para r grande da razão $\frac{\beta}{\alpha}$. Esse limite é constante, e pode ser escrito como

$$C_{\alpha\beta_{cst}} = 1 - \frac{2C_a}{1+k_1}, \quad (5.47)$$

levando a

$$C_a = -\frac{1}{2}(C_{\alpha\beta_{cst}} - 1)(1+k_1). \quad (5.48)$$

De acordo com a equação (5.48), quando $C_{\alpha\beta_{cst}} = 2.002$ (ou seja, 1% maior do que 2) e, por exemplo, $v_{\varphi_{cst}} = 200$ km/s (esse valor tem a ordem de grandeza adequada, porque, para todas as 21 galáxias estudadas, $96 \text{ km/s} \leq v_{\varphi_{cst}} \leq 266 \text{ km/s}$), com $c = 3 \cdot 10^5$ km/s e

$$\frac{v_{\varphi_{cst}}}{c} = \sqrt{\frac{1-k_1}{1+k_1}}, \quad (5.18)$$

a constante C_a é igual a -1.002 . Assim, considerando

$$k_1 = \sqrt{1 - 4C_1^2 - 4C_a} \geq 0, \quad (4.89)$$

temos $C_1 = \pm 1.001 \neq 0$, isto é, o campo escalar ϕ não é constante (veja a equação (4.80)), o que indica que o comportamento das velocidades tangenciais das estrelas vistas até agora não pode ser descrito pela RG, e o uso da gravitação de BD é realmente necessário.

Se a opção de modelagem for na gravidade da RG, ou seja, com $C_1 = 0$, pelas equações (4.89) e (5.48), considerando novamente $C_{\alpha\beta_{cst}} = 2.002$, temos

$$C_a = \frac{1-k_1^2}{4}, \quad (5.49)$$

$$C_a = -\frac{1}{2}(2.002-1)(1+k_1). \quad (5.50)$$

Pela equação (4.89), $k_1 \geq 0$. Portanto, a única solução válida para o sistema com as equações (5.49) e (5.50) é $k_1 = 3.004$. Esse último resultado leva a $v_{\varphi_{cst}} = 0.707ci$, o que não é possível, porque $v_{\varphi_{cst}}$ deve ser real.

Portanto, a modelagem proposta em coordenadas cilíndricas requer que a gravitação adotada seja a de BD, porque a RG, quando aplicadas as equações (5.48) e (5.49), com $v_{\varphi_{cst}} = 200$ km/s, leva a $C_{\beta\alpha} = 0.999 \ll 2$, o que não é adequado, porque $C_{\beta\alpha} \approx 2$.

5.7 O MODELO NO REFERENCIAL DE JORDAN-FIERZ

Com a métrica no referencial de Jordan-Fierz,

$$g_{\mu\nu} = e^{2\kappa\tilde{\phi}} \tilde{g}_{\mu\nu}, \quad (4.94)$$

com

$$\kappa^2 = \frac{1}{2\omega + 3}, \quad (4.3)$$

$$\tilde{\phi} = C_2 + C_1 \ln r, \quad (4.80)$$

também é possível determinar a velocidade angular:⁴

$$\Omega_{\pm} = \pm \frac{e^{5\alpha} \Xi (2\Lambda\alpha' + \Lambda')}{\sqrt{e^{8\alpha} \Lambda^2 \Xi^4 - e^{6\alpha} r \Xi^2 (2\Lambda\alpha' + \Lambda') [2\Lambda(r\alpha' - 1) - r\Lambda'] \mp e^{4\alpha} \Xi (M\alpha' - \Lambda\Xi)}}, \quad (5.51)$$

onde

$$\Lambda = e^{2\kappa\tilde{\phi}}, \quad (5.52)$$

$$\Xi = M\alpha' - M', \quad (5.53)$$

e as derivadas são em relação a r . Quando inserimos a velocidade (5.51) na equação (5.17), temos a razão $\frac{v_{\varphi}}{c}$ no referencial de Jordan-Fierz, onde o parâmetro ω agora aparece explicitamente. Nesse caso, o limite dessa razão para r grande tende ao valor constante

$$\frac{v_{\varphi_{cst}}}{c} = \sqrt{\frac{(1 - k_1^2)(3 + 2\omega) + 4C_1(C_1 + \sqrt{3 + 2\omega})}{(1 + k_1)^2(3 + 2\omega) + 4C_1[C_1 + (1 + k_1)\sqrt{3 + 2\omega}]}}. \quad (5.54)$$

Quando $\omega \rightarrow \infty$, o limite dessa razão é

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{v_{\varphi_{cst}}}{c} = \sqrt{\frac{1 - k_1}{1 + k_1}}. \quad (5.55)$$

Esse último resultado é idêntico àquele encontrado para a razão $\frac{v_{\varphi_{cst}}}{c}$ no referencial de Einstein (veja a equação (5.18)). Isso acontece porque, quando $\omega \rightarrow \infty$, $g_{\mu\nu} = \tilde{g}_{\mu\nu}$. Assim, para um ω grande, os comportamentos da velocidade v_{φ} são os mesmos nos referenciais de Einstein e de Jordan-Fierz. Por exemplo, a Figura 28 mostra o comportamento da velocidade ajustada

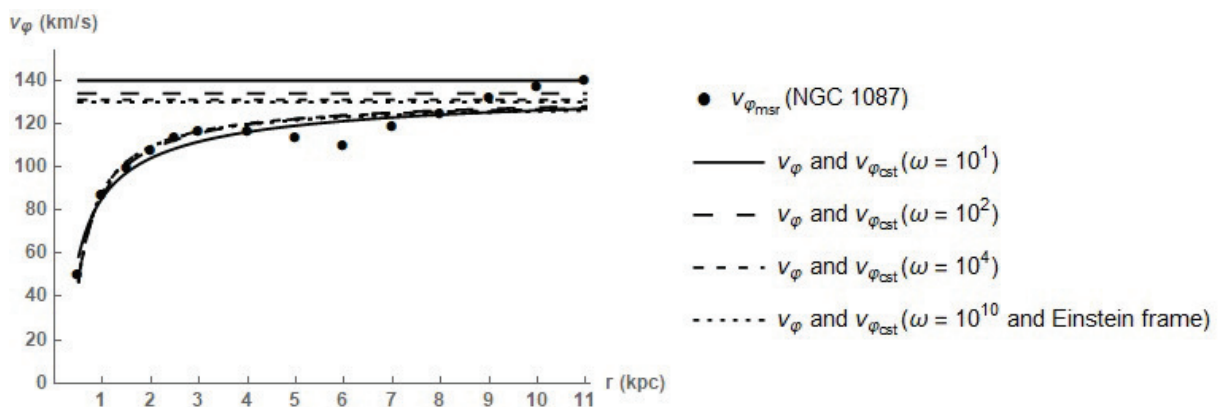
⁴ Ao longo dos cálculos a seguir, consideramos κ e ω como parâmetros positivos.

v_φ para a galáxia NGC 1087, com diferentes valores de ω , onde consideramos $C_2 = C_4 = 1$; $C_{\alpha\beta_{cst}} = 2.002$; a_{C3} , r_{min} e $v_{\varphi_{cst}}$ definidas pelas equações (5.19)-(5.21); C_5 definido pela equação (5.32); C_1 determinado pelo sistema formado pelas equações (4.89), (5.48) e (5.54), dependendo, então, das constantes ω , $v_{\varphi_{cst}}$ e $C_{\alpha\beta_{cst}}$.

Quando ω cresce, o comportamento da velocidade v_φ é semelhante àquele encontrado no referencial de Einstein (também mostrado na Figura 26). Por exemplo, quando $\omega = 10^{10}$, as constantes a_{C3} , r_{min} e $v_{\varphi_{cst}}$ coincidem em ambos os referenciais (veja as tabelas 3 e 4). Também é interessante notar que, para $\omega = 10^2$ ou $\omega = 10^4$, o coeficiente de determinação no referencial de Jordan-Fierz é um pouco maior do que aquele encontrado quando $\omega = 10^{10}$ ou no referencial de Einstein.

Finalmente, ao se usar o referencial de Jordan-Fierz junto com um ω grande, a gravitação de BD deve fornecer (ou quase) os mesmos resultados da RG. No entanto, os bons resultados obtidos aqui com um pequeno $\omega \sim 10^2$ atestam que essa gravitação é a opção correta, reforçando o que já foi discutido na primeira parte desta seção. Além disso, devido à diferença entre as curvas ajustadas nos diferentes referenciais, medidas precisas das velocidades das estrelas podem indicar qual dos dois referenciais seria o mais apropriado para a descrição quantitativa das curvas de rotação das galáxias.

Figura 28 – Velocidades das estrelas da galáxia NGC 1087 (RUBIN et al., 1980) comparadas com os melhores ajustes da função (5.17) no referencial de Jordan-Fierz. Os valores das constantes e os coeficientes de determinação estão na tabela 4. Para $\omega \geq 10^2$, o ajuste da função (5.17) resulta em curvas quase idênticas.



Fonte: autoria própria.

Tabela 4 – Valores das constantes e dos coeficientes de determinação para os ajustes da função (5.17) no referencial de Jordan-Fierz para a galáxia NGC 1087, mostrados na Figura 28. A constante C_1 foi definida pelo sistema das equações (4.89), (5.48) e (5.54), e C_5 foi definida pela equação (5.32).

NGC 1087				
$\log \omega$	1	2	4	10
Ω	Ω_+			
M	M_+			
$v_{\varphi_{cst}}$ (km/s)	140	134	131	130
$\log r_{min}$	13.8	15.7	16.1	16.0
a_{C_3}	0.697	0.324	0.387	0.723
C_1	$f(\omega, v_{\varphi_{cst}}, C_{\alpha\beta_{cst}})$			
C_2	1			
C_4				
C_5	$\frac{M_2}{M_1}$			
$C_{\alpha\beta_{cst}}$	2.002			
R^2	0.996	0.997		0.996
$g_{\varphi\varphi}$	< 0			

Fonte: autoria própria.

6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Uma análise completa do espaço-tempo externo gerado por cordas cósmicas girantes, tanto aquelas que preservam a simetria de Lorentz quanto aquelas que a violam, foi realizada no contexto da mais simples teoria escalar-tensorial, a teoria de BD. A solução obtida não se baseia em uma forma particular do campo escalar, e é caracterizada por meio dos escalares de Kretschmann, os quais apontam que não há singularidades fora da corda. Nesse sentido, uma análise futura, considerando também a estrutura interna da corda é importante, para que se confirme se o espaço-tempo continua sendo regular. As cordas girantes são ainda fontes de CTCs na gravidade de BD, de forma semelhante às soluções obtidas na RG, quando são retas, porque a região onde a causalidade é violada é limitada por uma coordenada radial a partir da localização da corda (onde $r = 0$). É importante também destacar, ainda para as cordas retas, a possibilidade peculiar de que nenhuma CTC incida, se o valor da constante a_2 for igual a $\frac{1}{2}$. Por outro lado, quando as cordas não são retas, a região com CTCs originada tem característica parecida com o obtido para os universos de Gödel, quando existem a partir de um determinado valor de r (o que Gödel chamou de raio crítico). Nesse último caso, foi verificado também que parece ser mais provável que as CTCs surjam mais na descrição gravitacional dada pela RG do que naquela da teoria de BD. Isso não é conclusivo, porque foi utilizada uma quantidade limitada de configurações possíveis nas duas teorias, quando realizada a comparação. Portanto, a implementação de uma análise com um espectro maior dos parâmetros que definem as teorias é um primeiro passo proposto, para a busca de uma resposta sobre essa questão.

Exclusivamente para as cordas retas, que não violam as simetrias de Lorentz, foi mostrado que o movimento geodésico estritamente radial é tal que uma partícula teste se afasta da região permitida para a ocorrência das CTCs. E, assim como na RG, também se concluiu pela gravitação de BD que a existência de tais fontes parece improvável, porque a quantização da energia de uma partícula sujeita ao campo gravitacional das mesmas, e com movimento não inercial, leva à necessidade de um momento angular extremamente elevado.

As soluções para o espaço-tempo de uma corda não reta na gravitação de BD se mostraram adequadas para gerar as curvas de rotação de 21 galáxias do tipo Sc, pois reproduzem o comportamento do crescimento da velocidade tangencial na ordem de grandeza compatível com os dados experimentais (RUBIN et al., 1980). Inclusive foi constatado que o modelo somente é correto com a teoria de BD, sendo inviável se utilizada a RG, porque levaria a

velocidades tangenciais inadequadas. Uma das possibilidades do modelo é a de que seja necessário admitir a existência de CTCs em um certo intervalo, onde a causalidade seria violada. Observa-se, no entanto, que está muito longe de haver um consenso em relação a esse tipo de fenômeno. Por um lado, a *conjectura de proteção cronológica* diz que as leis da física proíbem o surgimento de CTCs (HAWKING, 1992). Por outro lado, trabalhos interessantes apontam que essas mesmas leis permitem as CTCs, e podem aparecer naturalmente (NOVELLO; SILVA, 1994; MORRIS et al., 1988; NOVELLO et al., 1992; NOVELLO et al., 1993). A outra possibilidade de modelagem prevê que as CTCs sejam descartadas, mas a métrica precisa ser euclideana. As teorias de gravidade quântica, que procuram descrever os fenômenos da época da teoria da grande unificação, têm de fato feito uso de tal artifício (HAWKING, 1979; HARTLE; HAWKING, 1983). Assim, pode-se dizer que a teoria de BD, como uma teoria efetiva da gravidade, estaria descrevendo adequadamente os dados observacionais, previstos de acordo com uma ainda em desenvolvimento teoria de gravidade quântica. O interessante aqui a se destacar ainda é que essa última alternativa para o modelo completa uma lista de três ingredientes típicos da época do Universo primordial, quando surgiram as cordas cósmicas: gravitação de BD, soluções de um espaço-tempo que viola a simetria de Lorentz e métrica euclideana.

Voltando à aplicação no problema das curvas de rotação, sendo 21 galáxias, embora todas do tipo Sc, elas possuem raios muito distintos, variando de 3.3 a 82.3 kpc. Mesmo assim, foi verificado que os parâmetros que ajustam os espaços-tempos para essas galáxias não sofrem variações expressivas nas suas ordens de grandeza, quando é feita a comparação entre os 21 valores obtidos para cada um deles. Uma investigação mais rigorosa sobre isso pode trazer alguma informação complementar, como, por exemplo, se diferentes grandezas estão associadas a diferentes épocas de formação.

O estudo inicial do modelo foi realizado com as equações de movimento resolvidas no referencial de Einstein. Para uma das galáxias, na posterior análise no referencial de Jordan-Fierz, quando o parâmetro ω aparece explicitamente, constatou-se que o comportamento da velocidade tangencial das estrelas se mantém muito próximo daquele observado no referencial de Einstein, o que atesta que os resultados nos dois referenciais são qualitativamente iguais. Inclusive, para ω grande, o comportamento é idêntico, como previsto na teoria de BD. Quando $\omega \sim 10^2$, um melhor resultado para a modelagem das velocidades foi obtido, se comparado com aquele no referencial de Einstein, onde ω está ausente. Embora longe da unidade, como previu a teoria escalar-tensorial, esse resultado é pelo menos 2 ordens de grandeza menor do que o valor de ω verificado para o Sistema Solar. Isso leva também à perspectiva de que

medidas mais precisas das velocidades possam apontar qual dos dois referenciais pode trazer a descrição mais adequada, contribuindo na direção de algum consenso sobre essa questão. Um trabalho que inclua as demais 20 galáxias, além de outras ausentes da referência (RUBIN et al., 1980), pode vir a confirmar as conclusões prévias aqui vistas em função apenas do realizado por enquanto com a galáxia NGC 1087.

REFERÊNCIAS

- AHARONOV, Y.; BOHM, D. Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory. **Phys. Rev.**, v. 115, p. 485, 1959.
- ANCHORDOQUI, L. A. et al. Cylindrically symmetric spinning Brans–Dicke space–times with closed timelike curves. **Mod. Phys. Lett. A**, v. 14, p. 1105, 1999.
- ASHTEKAR, A.; MAGNON, A. The Sagnac Effect in General Relativity. **J. Math. Phys.**, v. 16, p. 341, 1975.
- BERTOTTI, B.; IESS, L.; TORTORA, P. A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft. **Nature**, v. 425, p. 374, 2003.
- BOISSEAU, B.; LINET, B. Exact metric for the exterior of a global string in the Brans-Dicke theory. **Gen. Rel. Grav.**, v. 30, p. 963, 1998.
- BRANS, C.; DICKE, R. H. Mach's principle and a relativistic theory of gravitation. **Phys. Rev.**, v. 124, p. 925, 1961.
- CARROLL, S. Spacetime and geometry: an introduction to general relativity. San Francisco: Addison Wesley, 2004.
- CHANDRASEKHAR, S. The Mathematical Theory of Black Holes. Oxford: Oxford University Press, 1983.
- CLIFFORD, M. W. The Confrontation between General Relativity and Experiment. **Living Rev. Relativity**, v. 9, p. 3, 2006.
- CONTALDI, C.; HINDMARSH, M. B.; MAGUEIJO, J. CMB and density fluctuations from strings plus inflation. **Phys. Rev. Lett.**, v. 82, p. 2034, 1999.
- CORDA, C. Gravitational wave astronomy: the definitive test for the "Einstein frame versus Jordan frame" controversy. **Astropart. Phys.**, v. 34, p. 412, 2011.
- COSTA, M. L.; OLIVEIRA, A. L. N. de; GUIMARÃES, M. E. X. Contributions from dilatonic strings to the flat behaviour of the rotational curves in galaxies. **Int. J. Mod. Phys. D**, v. 15, p. 387, 2006.
- DAHMEN, S. R. Gödel e Einstein: E quando o tempo não resiste à amizade? **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 28, p. 531, 2006.
- DAMOUR, T.; NORDTVEDT, K. General relativity as a cosmological attractor of tensor scalar theories. **Phys. Rev. Lett.**, v. 70, p. 2217, 1993.
- DAMOUR, T.; NORDTVEDT, K. Tensor-scalar cosmological models and their relaxation toward general relativity. **Phys. Rev. D**, v. 48, p. 3436, 1993.
- DAMOUR, T.; POLYAKOV, A. M. The string dilaton and a least coupling principle. **Nucl. Phys. B**, v. 423, p. 532, 1994.
- DAS, A. Lectures on gravitation. Singapore: World Scientific, 2011.
- DAVIS, A.-C.; KIBBLE, T. W. B. Fundamental cosmic strings. **Contemp. Phys.**, v. 46, p. 313, 2005.

- DESER, S.; JACKIW, R. Time travel? **Comments Nucl. Part. Phys.**, v. 20, p. 337, 1992.
- DESER, S.; JACKIW, R.; HOOFT, G. 't. Three-Dimensional Einstein Gravity: Dynamics of Flat Space. **Ann. Phys.**, v. 152, p. 220, 1984.
- DICKE, R. H. Mach's Principle and Invariance under Transformation of Units. **Phys. Rev.**, v. 125, p. 2163, 1962.
- DIRAC, P. A. M. Quantised Singularities in the Electromagnetic Field. **Proc. Roy. Soc. London Ser. A**, v. 133, p. 60, 1931.
- FARAONI, V.; GUNZIG, E.; NARDONE, P. Conformal transformations in classical gravitational theories and in cosmology. **Fundam. Cosmic Phys.**, v. 20, p. 121, 1999.
- FIERZ, M. On the physical interpretation of P. Jordan's extended theory of gravitation. **Helv. Phys. Acta**, v. 29, p. 128, 1956.
- FRENKEL, J. *Princípios de Eletrodinâmica Clássica*. São Paulo: EdUSP, 1996.
- GARFINKLE, D. General relativistic strings. **Phys. Rev. D**, v. 32, p. 1323, 1985.
- GOTT III, J. R. Gravitational lensing effects of vacuum strings: exact solutions. **The Astrophysical Journal**, v. 288, p. 422, 1985.
- GREEN, M. B.; SCHWARZ, J. H.; WITTEN, E. *Superstring Theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 1987.
- GREGORY, R. Global string singularities. **Phys. Lett. B**, v. 215, p. 663, 1988.
- GUZMÁN, F. S. et al. Scalar field dark matter, em *Exact Solutions and Scalar Fields in Gravity – Recent Developments*, Editado por A. Macias, J. L. Cervantes-Cota e C. Lämmerzahl. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002.
- GÖDEL, K. An Example of a New Type of Cosmological Solutions of Einstein's Field Equations of Gravitation. **Rev. Mod. Phys.**, v. 21, p. 447, 1949.
- HARTLE, J. B.; HAWKING, S. W. Wave Function of the Universe. **Phys. Rev. D**, v. 28, p. 2960, 1983.
- HAWKING, S. W. The path integral approach to quantum gravity, em *General Relativity, an Einstein Centenary Survey*, Editado por S. W. Hawking e W. Israel. Cambridge: Cambridge University Press, 1979.
- HAWKING, S. W. The chronology protection conjecture. **Phys. Rev. D**, v. 46, p. 603, 1992.
- HISCOCK, W. A. Exact gravitational field of a string. **Phys. Rev. D**, v. 31, p. 3288, 1985.
- HORVATH, J. E. et al. *Cosmologia física: do micro ao macro cosmos e vice-versa*, 2^a ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.
- ISRAEL, W. Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity. **Il Nuovo Cimento B**, v. 44, p. 1, 1966.
- JENSEN, B. Notes on spinning strings. **Class. Quantum Grav.**, v. 9, p. L7, 1992.
- JENSEN, B.; SOLENG, H. General-relativistic model of a spinning cosmic string. **Phys. Rev. D**, v. 45, p. 3528, 1992.

- JORDAN, P. *Schwerkraft und weltall*. Braunschweig: Friedrick Vieweg und Sohn, 1955.
- JORDAN, P. Zum gegenwärtigen Stand der Diracschen kosmologischen Hypothesen. **Zeitschrift für Physik**, v. 157, p. 112, 1959.
- KIBBLE, T. W. B. Topology of cosmic domains and strings. **J. Phys. A**, v. 9, p. 1387, 1976.
- KOSTELECKÝ, V. A.; POTTING, R. CPT and strings. **Nucl. Phys. B**, v. 359, p. 545, 1991.
- KOSTELECKÝ, V. A.; POTTING, R. CPT, strings, and meson factories. **Phys. Rev. D**, v. 51, p. 3923, 1995.
- KOSTELECKÝ, V. A.; POTTING, R. Expectation values, Lorentz invariance, and CPT in the open bosonic string. **Phys. Lett. B**, v. 381, p. 89, 1996.
- KOSTELECKÝ, V. A.; SAMUEL, S. Spontaneous Breaking of Lorentz Symmetry in String Theory. **Phys. Rev. D**, v. 39, p. 683, 1989.
- KVÁLSETH, T. . Cautionary note about R^2 . **The American Statistician**, v. 39, p. 279, 1985.
- LEE, T. H.; LEE, B. J. Scalar-tensor gravity coupled to a global monopole and flat rotation curves. **Phys. Rev. D**, v. 69, p. 127502, 2004.
- LINET, B. The static metrics with cylindrical symmetry describing a model of cosmic strings. **Gen. Rel. Grav.**, v. 17, p. 1109, 1985.
- MATOS, T. et al. Geometric conditions on the type of matter determining the flat behavior of the rotational curves in galaxies. **Gen. Rel. Grav.**, v. 34, p. 283, 2002.
- MAZUR, P. O. Spinning Cosmic Strings and Quantization of Energy. **Phys. Rev. Lett.**, v. 57, p. 929, 1986.
- MAZUR, P. O. Reply to Comment on "Spinning Cosmic Strings and Quantization of Energy". **Phys. Rev. Lett.**, v. 59, p. 2380, 1987.
- MCMAHON, D. *Relativity Demystified*. New York: McGraw-Hill, 2006.
- MORRIS, M. S.; THORNE, K. S.; YURTSEVER, U. Wormholes, Time Machines, and the Weak Energy Condition. **Phys. Rev. Lett.**, v. 61, p. 1446, 1988.
- NOVELLO, M. *Máquina do tempo: um olhar científico*, 2^a. ed. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 2005.
- NOVELLO, M.; SILVA, M. C. M. da. Cosmic spinning string and causal protecting capsules. **Phys. Rev. D**, v. 49, p. 825, 1994.
- NOVELLO, M.; SOARES, I. D.; TIOMNO, J. Geodesic motion and confinement in Gödel's universe. **Phys. Rev. D**, v. 27, p. 779, 1983.
- NOVELLO, M.; SVAITER, N. F.; GUIMARÃES, M. E. X. Backwards time travel induced by combined magnetic and gravitational fields. **Mod. Phys. Lett. A**, v. 7, p. 381, 1992.
- NOVELLO, M.; SVAITER, N. F.; GUIMARÃES, M. E. X. Synchronized frames for Gödel's universe. **Gen. Rel. Grav.**, v. 25, p. 137, 1993.
- OLIVEIRA F^O, K. S.; SARAIVA, M. F. O. *Astronomia e astrofísica*, 2^a. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2004.

- PERSIC, M.; SALUCCI, P. Rotation curves of 967 spiral galaxies. **Ap. J. Suppl. Ser.**, v. 99, p. 501, 1995.
- PETTI, R. J. On the local geometry of rotating matter. **Gen. Relativ. Gravit.**, v. 18, p. 441, 1986.
- PLEBAŃSKI, J.; KRASIŃSKI, A. An Introduction to General Relativity and Cosmology. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.
- QUIROS, I. et al. The conformal transformation's controversy: what are we missing? **Gen. Rel. Grav.**, v. 45, p. 489, 2013.
- RUBIN, V. C.; FORD JR., W. K.; THONNARD, N. Rotational properties of 21 Sc galaxies with a large range of luminosities and radii, from NGC 4605 ($R = 4$ kpc) to UGC 2885 ($R = 122$ kpc). **The Astrophysical Journal**, v. 238, p. 471, 1980.
- RUCKSTUHL, A. Introduction to Nonlinear Regression. 2010. Disponível em: <stat.ethz.ch/~stahel/courses/cheming/nlreg10E.pdf>. Acesso em: 23 nov. 2017.
- RYDER, L. H. Quantum Field Theory, 2^a ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
- SALUCCI, P.; PERSIC, M. Dark Matter Halos around Galaxies, em Dark and Visible Matter in Galaxies: Proceedings of the Sesto DM1996 Conference, Editado por M. Persic e P. Salucci. San Francisco: Astronomical Society of the Pacific, 1997.
- SILVA, J. M. H. da. Compactificação alternativa de dimensões extras em gravitação de Brans-Dicke (Tese de Doutorado). UNESP, IFT, 2009. Disponível em: <hdl.handle.net/11449/138384>. Acesso em: 23 mar. 2018.
- SOLENG, H. H. Spin-polarised cylinder in Einstein-Cartan theory. **Class. Quantum Grav.**, v. 7, p. 999, 1990.
- SRIVASTAVA, A. M. Topological defects in cosmology. **Pramana – J. Phys.**, v. 53, p. 1069, 1999.
- TRAUTMAN, A. Einstein-Cartan Theory, em Encyclopedia of Mathematical Physics 2, Editado por J.-P. Francoise, G. L. Naber e S. T. Tsou. Oxford: Elsevier, 2006.
- VERDULT, M. Topological defects in cosmology: cosmic strings. 2009. Disponível em: <www.staff.science.uu.nl/~proko101/maartenverdult_cs2.pdf>. Acesso em: 23 nov. 2017.
- VEROPALUMBO, A. et al. Measuring the distance–redshift relation with the baryon acoustic oscillations of galaxy clusters. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 458, p. 1909, 2016.
- VILENKIN, A. Gravitational field of vacuum domain walls and strings. **Phys. Rev. D**, v. 23, p. 852, 1981.
- VILENKIN, A.; SHELLARD, E. P. S. Cosmic strings and other topological defects. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.
- WEINBERG, S. Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity. New York: John Wiley & Sons, 1972.
- WILCZEK, F. Magnetic Flux, Angular Momentum and Statistics. **Phys. Rev. Lett.**, v. 48, p. 1144, 1982.

WOLFRAM RESEARCH. Statistical Model Analysis, em Mathematica Version 10. Champaign: Wolfram Research, 2014. Disponível em: <reference.wolfram.com/language/tutorial/StatisticalModelAnalysis.html>. Acesso em: 23 nov. 2017.

ZEE, A. Gravitomagnetic Pole and Mass Quantization. **Phys. Rev. Lett.**, v. 55, p. 2379, 1985.

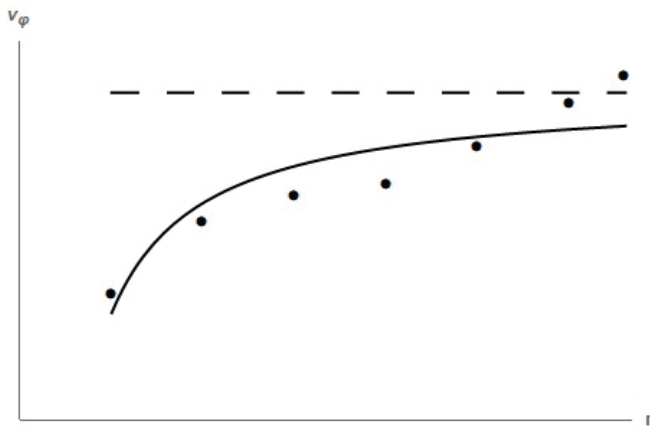
ZEVIANI, W. M.; RIBEIRO JR., P. J.; BONAT, W. H. Curso de modelos de regressão não linear, em 58^a. RBras e 15^o. SEAGRO. Campina Grande, 2013. Disponível em: <www.leg.ufpr.br/mrnl2013>. Acesso em: 23 nov. 2017.

ZWICKY, F. Die rotverschiebung von extragalaktischen nebeln. **Helvetica Physica Acta**, v. 6, p. 110, 1933.

ZWICKY, F. On the Masses of Nebulae and of Clusters of Nebulae. **The Astrophysical Journal**, v. 86, p. 217, 1937.

APÊNDICE A – VALORES DAS CONSTANTES DOS AJUSTES DA FUNÇÃO (5.17), COM OS RESPECTIVOS COEFICIENTES DE DETERMINAÇÃO, E OS GRÁFICOS QUE COMPARAM AS VELOCIDADES MEDIDAS COM AS CALCULADAS, PARA AS GALÁXIAS NÃO MOSTRADAS NA TABELA 3 E NA Figura 26

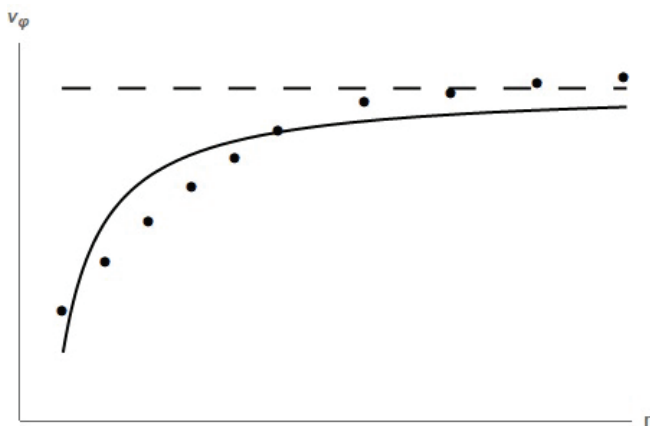
Tabela 5 – Valores das constantes do ajuste da função (5.17) para a galáxia NGC 4605, com o respectivo coeficiente de determinação. Ao lado, o gráfico que compara as velocidades medidas com as calculadas.



R_{far} (kpc)	3.3	
Ω	Ω_+	Ω_-
M	M_+	
$v_{\phi_{cst}}$ (km/s)	96	
$\log r_{min}$	15.9	15.6
a_{C_3}	0.697	0.694
C_4	1	$\frac{\pi}{2} i$
C_5	$\frac{M_2}{M_1}$	i
R^2	0.986	
$g_{\phi\phi}$	< 0	> 0
g_{tt}		

Fonte: autoria própria.

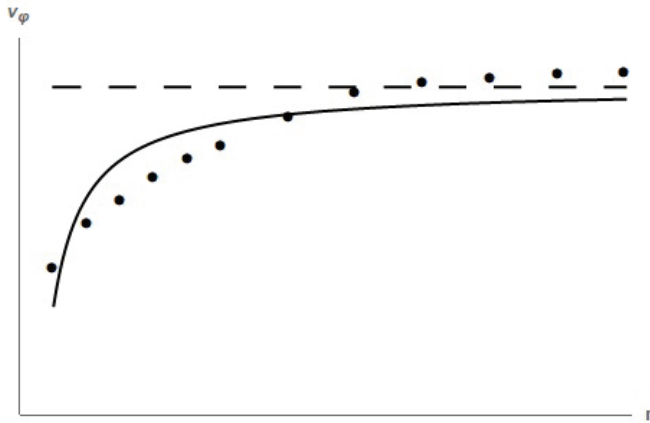
Tabela 6 – Valores das constantes do ajuste da função (5.17) para a galáxia NGC 1035, com o respectivo coeficiente de determinação. Ao lado, o gráfico que compara as velocidades medidas com as calculadas.



R_{far} (kpc)	7.0	
Ω	Ω_+	Ω_-
M	M_+	
$v_{\phi_{cst}}$ (km/s)	124	
$\log r_{min}$	16.2	15.9
a_{C_3}	0.403	0.401
C_4	1	$\frac{\pi}{2} i$
C_5	$\frac{M_2}{M_1}$	i
R^2	0.987	
$g_{\phi\phi}$	< 0	> 0
g_{tt}		

Fonte: autoria própria.

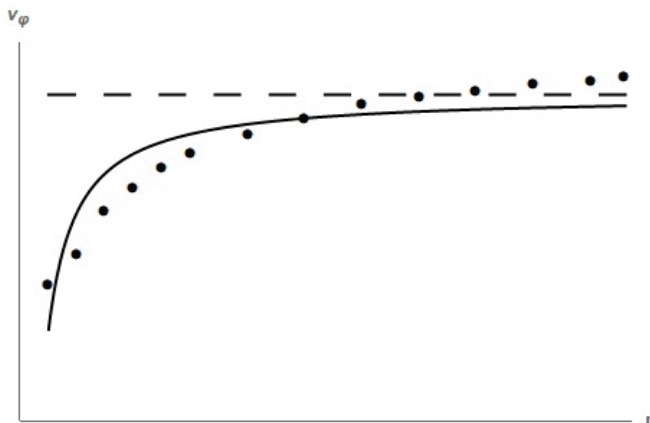
Tabela 7 – Valores das constantes do ajuste da função (5.17) para a galáxia NGC 4062, com o respectivo coeficiente de determinação. Ao lado, o gráfico que compara as velocidades medidas com as calculadas.



R_{far} (kpc)	9.0	
Ω	Ω_+	Ω_-
M	M_+	
$v_{\phi_{cst}}$ (km/s)	156	
$\log r_{min}$	16.5	15.8
a_{C_3}	0.114	0.716
C_4	1	$\frac{\pi}{2} i$
C_5	$\frac{M_2}{M_1}$	i
R^2	0.990	
$g_{\phi\phi}$	< 0	> 0
g_{tt}		

Fonte: autoria própria.

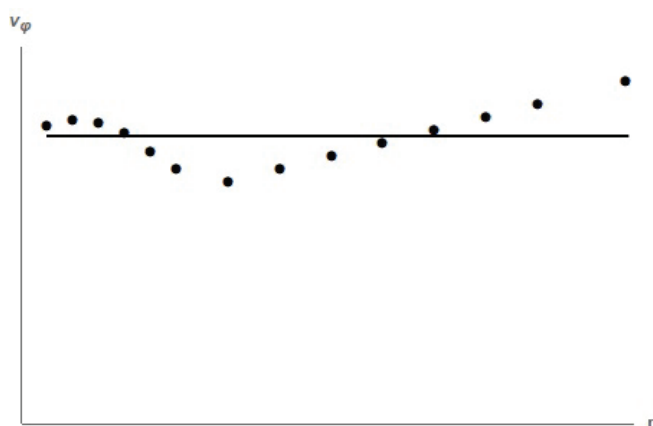
Tabela 8 – Valores das constantes do ajuste da função (5.17) para a galáxia NGC 2742, com o respectivo coeficiente de determinação. Ao lado, o gráfico que compara as velocidades medidas com as calculadas.



R_{far} (kpc)	10.6	
Ω	Ω_+	Ω_-
M	M_+	
$v_{\phi_{cst}}$ (km/s)	162	
$\log r_{min}$	16.4	16.0
a_{C_3}	0.227	0.358
C_4	1	$\frac{\pi}{2} i$
C_5	$\frac{M_2}{M_1}$	i
R^2	0.991	
$g_{\phi\phi}$	< 0	> 0
g_{tt}		

Fonte: autoria própria.

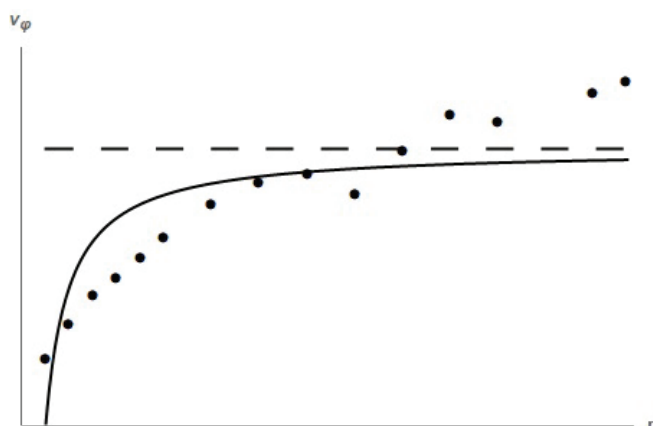
Tabela 9 – Valores das constantes do ajuste da função (5.17) para a galáxia NGC 2608, com o respectivo coeficiente de determinação. Ao lado, o gráfico que compara as velocidades medidas com as calculadas.



R_{far} (kpc)	11.7	
Ω	Ω_+	Ω_-
M	M_+	
$v_{\phi_{cst}}$ (km/s)	111	
$\log r_{min}$	13.0	13.0
a_{C_3}	0.001	0.001
C_4	1	$\frac{\pi}{2}i$
C_5	$\frac{M_2}{M_1}$	i
R^2	0.991	
$g_{\phi\phi}$	< 0	> 0
g_{tt}		

Fonte: autoria própria.

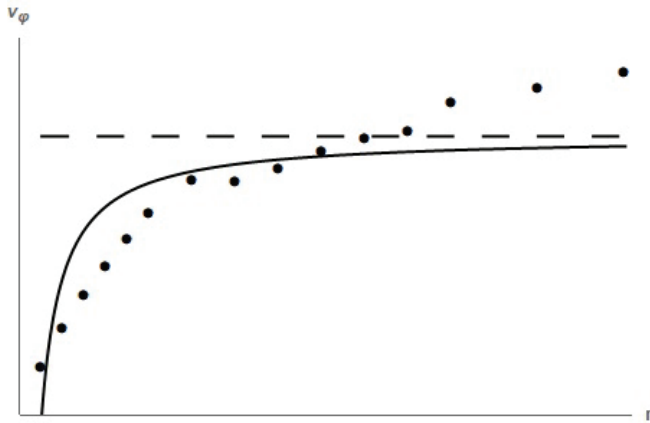
Tabela 10 – Valores das constantes do ajuste da função (5.17) para a galáxia NGC 3495, com o respectivo coeficiente de determinação. Ao lado, o gráfico que compara as velocidades medidas com as calculadas.



R_{far} (kpc)	12.7	
Ω	Ω_+	Ω_-
M	M_+	
$v_{\phi_{cst}}$ (km/s)	144	
$\log r_{min}$	16.2	16.4
a_{C_3}	0.854	0.085
C_4	1	$\frac{\pi}{2}i$
C_5	$\frac{M_2}{M_1}$	i
R^2	0.960	
$g_{\phi\phi}$	< 0	> 0
g_{tt}		

Fonte: autoria própria.

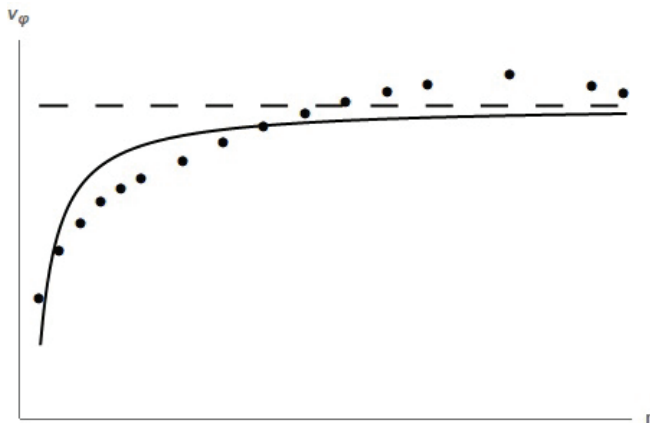
Tabela 11 – Valores das constantes do ajuste da função (5.17) para a galáxia UGC 3691, com o respectivo coeficiente de determinação. Ao lado, o gráfico que compara as velocidades medidas com as calculadas.



R_{far} (kpc)	14.0	
Ω	Ω_+	Ω_-
M	M_+	
$v_{\phi_{cst}}$ (km/s)	109	
$\log r_{min}$	16.1	16.1
a_{C_3}	0.792	0.198
C_4	1	$\frac{\pi}{2} i$
C_5	$\frac{M_2}{M_1}$	i
R^2	0.966	
$g_{\phi\phi}$	< 0	> 0
g_{tt}		

Fonte: autoria própria.

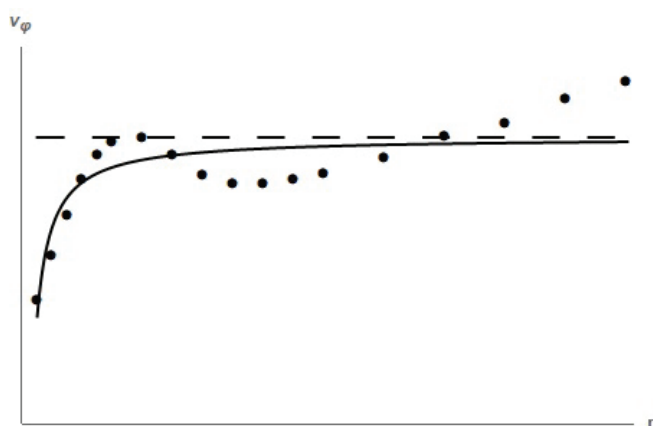
Tabela 12 – Valores das constantes do ajuste da função (5.17) para a galáxia NGC 4682, com o respectivo coeficiente de determinação. Ao lado, o gráfico que compara as velocidades medidas com as calculadas.



R_{far} (kpc)	14.8	
Ω	Ω_+	Ω_-
M	M_+	
$v_{\phi_{cst}}$ (km/s)	162	
$\log r_{min}$	16.2	15.9
a_{C_3}	0.636	0.633
C_4	1	$\frac{\pi}{2} i$
C_5	$\frac{M_2}{M_1}$	i
R^2	0.989	
$g_{\phi\phi}$	< 0	> 0
g_{tt}		

Fonte: autoria própria.

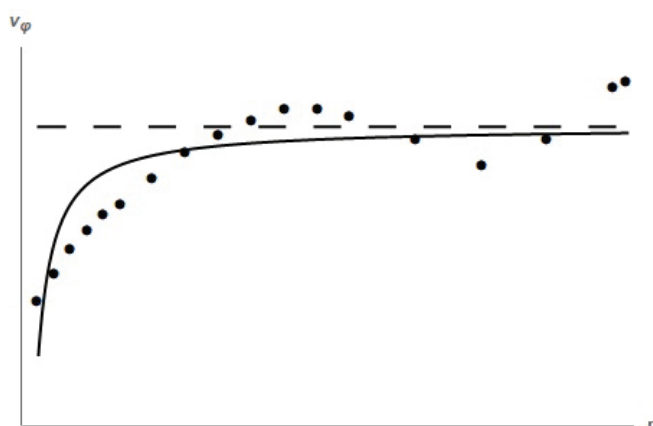
Tabela 13 – Valores das constantes do ajuste da função (5.17) para a galáxia NGC 1421, com o respectivo coeficiente de determinação. Ao lado, o gráfico que compara as velocidades medidas com as calculadas.



R_{far} (kpc)	20.0	
Ω	Ω_+	Ω_-
M	M_+	
$v_{\phi_{cst}}$ (km/s)	174	
$\log r_{min}$	16.1	15.8
a_{C_3}	0.785	0.782
C_4	1	$\frac{\pi}{2}i$
C_5	$\frac{M_2}{M_1}$	i
R^2	0.989	
$g_{\phi\phi}$	< 0	> 0
g_{tt}		

Fonte: autoria própria.

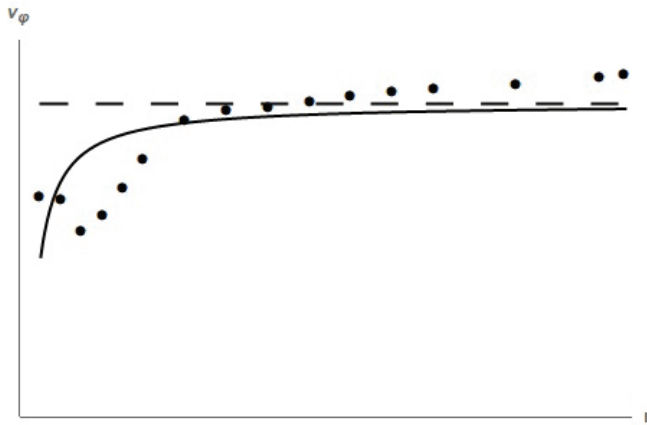
Tabela 14 – Valores das constantes do ajuste da função (5.17) para a galáxia NGC 2715, com o respectivo coeficiente de determinação. Ao lado, o gráfico que compara as velocidades medidas com as calculadas.



R_{far} (kpc)	18.4	
Ω	Ω_+	Ω_-
M	M_+	
$v_{\phi_{cst}}$ (km/s)	139	
$\log r_{min}$	16.3	15.8
a_{C_3}	0.297	0.743
C_4	1	$\frac{\pi}{2}i$
C_5	$\frac{M_2}{M_1}$	i
R^2	0.984	
$g_{\phi\phi}$	< 0	> 0
g_{tt}		

Fonte: autoria própria.

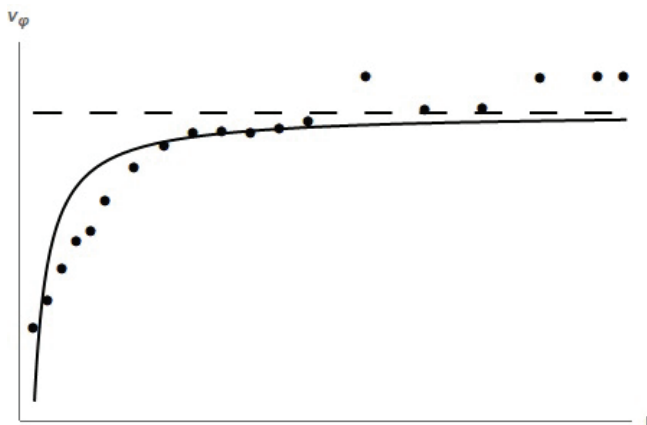
Tabela 15 – Valores das constantes do ajuste da função (5.17) para a galáxia NGC 4321, com o respectivo coeficiente de determinação. Ao lado, o gráfico que compara as velocidades medidas com as calculadas.



R_{far} (kpc)	14.6	
Ω	Ω_+	Ω_-
M	M_+	
$v_{\phi_{cst}}$ (km/s)	192	
$\log r_{min}$	16.2	15.8
a_{C_3}	0.369	0.582
C_4	1	$\frac{\pi}{2} i$
C_5	$\frac{M_2}{M_1}$	i
R^2	0.982	
$g_{\phi\phi}$	< 0	> 0
g_{tt}		

Fonte: autoria própria.

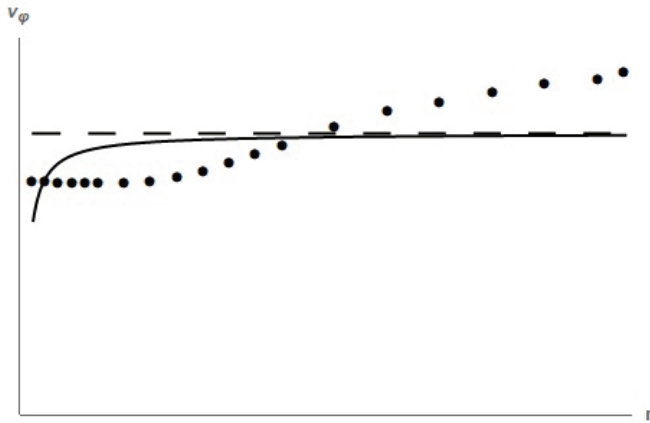
Tabela 16 – Valores das constantes do ajuste da função (5.17) para a galáxia IC 467, com o respectivo coeficiente de determinação. Ao lado, o gráfico que compara as velocidades medidas com as calculadas.



R_{far} (kpc)	20.9	
Ω	Ω_+	Ω_-
M	M_+	
$v_{\phi_{cst}}$ (km/s)	136	
$\log r_{min}$	16.3	16.0
a_{C_3}	0.426	0.424
C_4	1	$\frac{\pi}{2} i$
C_5	$\frac{M_2}{M_1}$	i
R^2	0.980	
$g_{\phi\phi}$	< 0	> 0
g_{tt}		

Fonte: autoria própria.

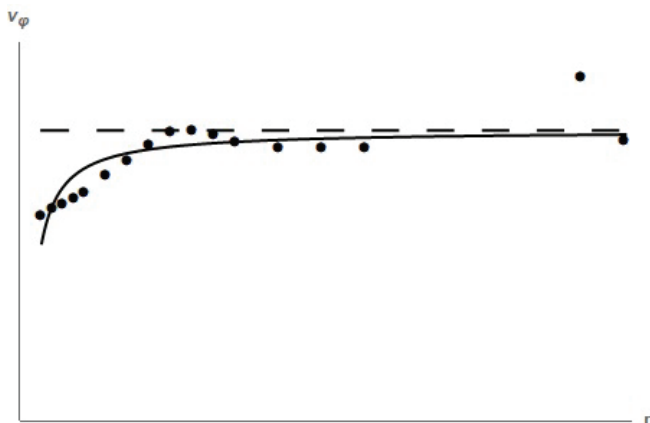
Tabela 17 – Valores das constantes do ajuste da função (5.17) para a galáxia NGC 7541, com o respectivo coeficiente de determinação. Ao lado, o gráfico que compara as velocidades medidas com as calculadas.



R_{far} (kpc)	23.0	
Ω	Ω_+	Ω_-
M	M_+	
$v_{\phi_{cst}}$ (km/s)	203	
$\log r_{min}$	16.0	16.0
a_{C_3}	0.416	0.104
C_4	1	$\frac{\pi}{2} i$
C_5	$\frac{M_2}{M_1}$	i
R^2	0.983	
$g_{\phi\phi}$	< 0	> 0
g_{tt}		

Fonte: autoria própria.

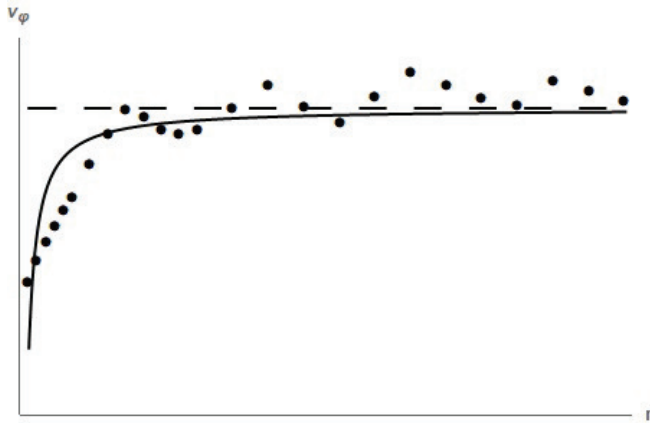
Tabela 18 – Valores das constantes do ajuste da função (5.17) para a galáxia NGC 7664, com o respectivo coeficiente de determinação. Ao lado, o gráfico que compara as velocidades medidas com as calculadas.



R_{far} (kpc)	28.0	
Ω	Ω_+	Ω_-
M	M_+	
$v_{\phi_{cst}}$ (km/s)	194	
$\log r_{min}$	16.2	16.3
a_{C_3}	0.951	0.150
C_4	1	$\frac{\pi}{2} i$
C_5	$\frac{M_2}{M_1}$	i
R^2	0.994	
$g_{\phi\phi}$	< 0	> 0
g_{tt}		

Fonte: autoria própria.

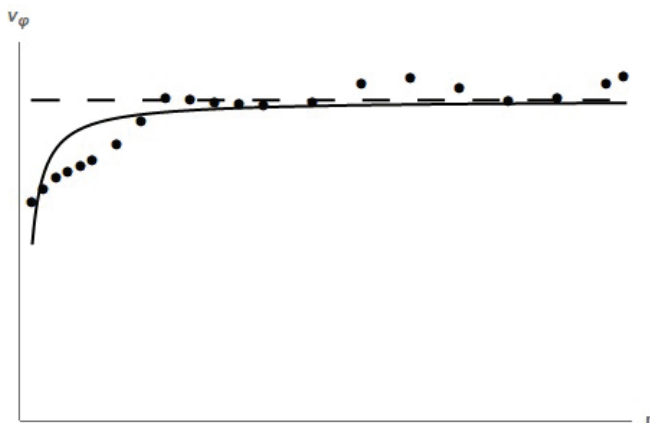
Tabela 19 – Valores das constantes do ajuste da função (5.17) para a galáxia NGC 2998, com o respectivo coeficiente de determinação. Ao lado, o gráfico que compara as velocidades medidas com as calculadas.



R_{far} (kpc)	34.0	
Ω	Ω_+	Ω_-
M	M_+	
$v_{\phi_{cst}}$ (km/s)	204	
$\log r_{min}$	16.3	16.2
a_{C_3}	0.674	0.267
C_4	1	$\frac{\pi}{2} i$
C_5	$\frac{M_2}{M_1}$	i
R^2	0.988	
$g_{\phi\phi}$	< 0	> 0
g_{tt}		

Fonte: autoria própria.

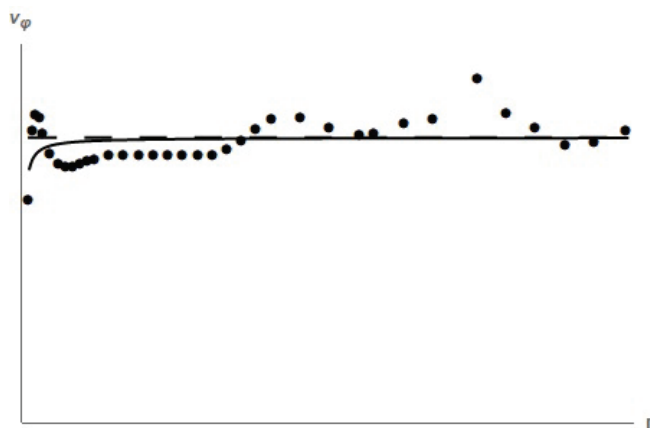
Tabela 20 – Valores das constantes do ajuste da função (5.17) para a galáxia NGC 753, com o respectivo coeficiente de determinação. Ao lado, o gráfico que compara as velocidades medidas com as calculadas.



R_{far} (kpc)	24.7	
Ω	Ω_+	Ω_-
M	M_+	
$v_{\phi_{cst}}$ (km/s)	206	
$\log r_{min}$	16.4	15.7
a_{C_3}	0.141	0.885
C_4	1	$\frac{\pi}{2} i$
C_5	$\frac{M_2}{M_1}$	i
R^2	0.994	
$g_{\phi\phi}$	< 0	> 0
g_{tt}		

Fonte: autoria própria.

Tabela 21 – Valores das constantes do ajuste da função (5.17) para a galáxia UGC 2885, com o respectivo coeficiente de determinação. Ao lado, o gráfico que compara as velocidades medidas com as calculadas.



R_{far} (kpc)	82.3	
Ω	Ω_+	Ω_-
M	M_+	
$v_{\phi_{cst}}$ (km/s)	266	
$\log r_{min}$	15.8	15.6
a_{C_3}	0.889	0.558
C_4	1	$\frac{\pi}{2} i$
C_5	$\frac{M_2}{M_1}$	i
R^2	0.995	
$g_{\phi\phi}$	< 0	> 0
g_{tt}		

Fonte: autoria própria.

APÊNDICE B – VELOCIDADES MEDIDAS E CALCULADAS, ERROS PADRÕES E INTERVALOS DE CONFIANÇA PARA AS GALÁXIAS NGC 701, NGC 1087, NGC 3672 E NGC 801

Tabela 22 – Velocidades medidas (RUBIN et al., 1980) e calculadas, erros padrões e intervalos de confiança para a galáxia NGC 701.

NGC 701						
r (kpc)	$v_{\varphi_{msr}}$ (km/s)	v_{φ} (km/s)	s_e (km/s)	Intervalos de confiança (km/s)		
				68%	95%	99%
0.5	52	27	35	[-10,64]	[-54,107]	[-90,144]
1	60	78	28	[48,108]	[13,143]	[-16,172]
1.5	68	95	27	[66,124]	[32,158]	[3,186]
2	78	103	27	[75,132]	[41,166]	[12,195]
2.5	86	109	27	[80,137]	[46,171]	[17,200]
3	94	112	27	[83,141]	[49,175]	[20,204]
4	112	116	27	[87,145]	[53,180]	[24,208]
5	129	119	28	[90,148]	[55,182]	[26,211]
6	143	120	28	[91,150]	[57,184]	[28,213]
7	151	122	28	[92,151]	[58,186]	[29,215]
7.7	150	122	28	[93,152]	[58,186]	[29,216]

Fonte: autoria própria.

Tabela 23 – Velocidades medidas (RUBIN et al., 1980) e calculadas, erros padrões e intervalos de confiança para a galáxia NGC 1087.

NGC 1087						
r (kpc)	$v_{\varphi_{msr}}$ (km/s)	v_{φ} (km/s)	s_e (km/s)	Intervalos de confiança (km/s)		
				68%	95%	99%
0.5	50	47	10	[37, 58]	[25, 70]	[16, 79]
1	87	89	8	[80, 97]	[71, 107]	[63, 114]
1.5	100	102	8	[94, 111]	[85, 120]	[78, 127]
2	108	109	8	[101, 118]	[92, 127]	[85, 134]
2.5	114	113	8	[105, 122]	[96, 131]	[89, 138]
3	117	116	8	[108, 124]	[99, 134]	[92, 141]
4	117	120	8	[111, 128]	[102, 137]	[95, 144]
5	114	122	8	[113, 130]	[104, 139]	[97, 146]
6	110	123	8	[115, 131]	[106, 141]	[98, 148]
7	119	124	8	[116, 132]	[107, 142]	[99, 149]
8	125	125	8	[117, 133]	[107, 142]	[100, 150]
9	132	125	8	[117, 134]	[108, 143]	[101, 150]
10	137	126	8	[118, 134]	[108, 143]	[101, 151]
11	140	126	8	[118, 135]	[109, 144]	[101, 151]

Fonte: autoria própria.

Tabela 24 – Velocidades medidas (RUBIN et al., 1980) e calculadas, erros padrões e intervalos de confiança para a galáxia NGC 3672.

NGC 3672

r (kpc)	$v_{\varphi_{msr}}$ (km/s)	v_{φ} (km/s)	s_e (km/s)	Intervalos de confiança (km/s)		
				68%	95%	99%
0.5	14	0.02	48	[-50, 50]	[-104, 104]	[-144, 144]
1	32	89	40	[48, 129]	[4, 173]	[-29, 206]
1.5	52	118	38	[79, 157]	[36, 200]	[5, 231]
2	71	133	38	[94, 172]	[52, 214]	[20, 245]
2.5	92	142	38	[103, 180]	[61, 222]	[29, 254]
3	117	148	38	[109, 186]	[67, 228]	[35, 260]
4	152	155	38	[116, 194]	[74, 236]	[42, 267]
5	173	159	38	[120, 198]	[78, 240]	[47, 272]
6	182	162	38	[123, 201]	[81, 244]	[49, 275]
7	184	164	38	[125, 203]	[83, 246]	[51, 277]
8	185	166	38	[127, 205]	[84, 247]	[53, 279]
9	187	167	38	[128, 206]	[86, 249]	[54, 280]
10	188	168	38	[129, 207]	[87, 250]	[55, 281]
12	191	170	38	[130, 209]	[88, 251]	[56, 283]
14	192	171	38	[131, 210]	[89, 252]	[57, 284]
16	192	171	38	[132, 211]	[90, 253]	[58, 285]
17.8	192	172	38	[133, 211]	[90, 254]	[58, 286]

Fonte: autoria própria.

Tabela 25 – Velocidades medidas (RUBIN et al., 1980) e calculadas, erros padrões e intervalos de confiança para a galáxia NGC 801.

NGC 801						
r (kpc)	$v_{\varphi_{msr}}$ (km/s)	v_{φ} (km/s)	s_e (km/s)	Intervalos de confiança (km/s)		
				68%	95%	99%
1.5	123	146	18	[128,164]	[110,183]	[97,196]
2	154	165	16	[149,182]	[132,199]	[120,211]
2.5	177	177	16	[161,193]	[144,209]	[133,221]
3	193	185	15	[169,200]	[153,216]	[141,228]
4	218	194	15	[179,210]	[163,225]	[152,237]
5	232	200	15	[185,215]	[169,231]	[158,242]
6	228	204	15	[189,219]	[173,235]	[162,246]
7	216	207	15	[191,222]	[176,238]	[165,249]
8	208	209	15	[193,224]	[178,240]	[167,251]
9	212	210	15	[195,225]	[179,241]	[168,252]
10	220	211	15	[196,227]	[180,243]	[169,254]
12	230	213	15	[198,229]	[182,244]	[171,255]
14	213	215	15	[199,230]	[184,246]	[173,257]
16	218	216	15	[200,231]	[185,247]	[174,258]
18	225	217	15	[201,232]	[185,248]	[174,259]
20	228	217	15	[202,233]	[186,248]	[175,259]
22	226	218	15	[202,233]	[187,249]	[176,260]
24	220	218	15	[203,234]	[187,249]	[176,260]
26	209	219	15	[203,234]	[187,250]	[176,261]
28	203	219	15	[204,234]	[188,250]	[177,261]
30	204	219	15	[204,235]	[188,250]	[177,261]
32	212	219	15	[204,235]	[188,251]	[177,262]
34	208	220	15	[204,235]	[188,251]	[177,262]
38	202	220	15	[205,235]	[189,251]	[178,262]
42	204	220	15	[205,236]	[189,252]	[178,263]
46	208	220	15	[205,236]	[189,252]	[178,263]
47.4	211	221	15	[205,236]	[189,252]	[178,263]

Fonte: autoria própria.