



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"  
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS  
RIO CLARO



---

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA - MESTRADO EM FÍSICA  
APLICADA

---

JOELSON DAYVISON VELOSO HERMES

INVESTIGAÇÃO DE ESCALA PARA A BIFURCAÇÃO TANGENTE NO  
MAPA LOGÍSTICO



Rio Claro - SP  
2018

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA JÚLIO DE MESQUITA  
FILHO

**Joelson Dayvison Veloso Hermes**

**INVESTIGAÇÃO DE ESCALA PARA A BIFURCAÇÃO TANGENTE NO  
MAPA LOGÍSTICO**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, campus Rio Claro, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Edson Denis Leonel

Rio Claro - SP  
2018

517.39 Hermes, Joelson Dayvison Veloso  
H553i        Investigação de escala para a bifurcação tangente no  
mapa logístico / Joelson Dayvison Veloso Hermes. - Rio  
Claro, 2018  
33 f. : il., figs., gráfs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista,  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Orientador: Edson Denis Leonel

1. Sistemas dinâmicos diferenciais. 2. Dinâmica não  
linear. 3. Leis de escala. 4. Caos. 5. Sistemas dinâmicos. 6.  
Mapa logístico. I. Título.

**Joelson Dayvison Veloso Hermes**

**INVESTIGAÇÃO DE ESCALA PARA A BIFURCAÇÃO TANGENTE NO  
MAPA LOGÍSTICO**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, campus Rio Claro, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Edson Denis Leonel  
Prof. Dr. Denis Gouvea Ladeira  
Prof. Dr. Juliano Antônio de Oliveira

Resultado: Aprovado

Rio Claro - SP, 20 de Fevereiro de 2018

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por me permitir chegar até aqui.

A minha esposa Carina, a meus filhos Júlia Maria e João Lucas, pelo incentivo e compreensão nos momentos de ausência.

Aos meus pais José e Derly, pois sempre me apoiaram.

Ao meu irmão Kennedy que sempre esteve ao meu lado.

Ao meu orientador o professor Edson Denis Leonel, pela enorme ajuda e também por acreditar e confiar em mim.

Ao IFSULDEMINAS - Campus Inconfidentes pelo apoio financeiro e flexibilização do horário de trabalho.

Aos amigos do grupo de pesquisa em sistemas complexos e dinâmica não linear da UNESP - Rio Claro, por todas as contribuições.

Agradeço a todos que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho e peço desculpas àqueles que não foram citados neste momento por mera limitação da minha memória. Estarão para sempre guardados no meu coração.

# Resumo

Neste projeto aplicamos o formalismo de escala com o objetivo de explorar a evolução em direção ao equilíbrio perto de uma bifurcação tangente no mapa logístico. No ponto de bifurcação a órbita segue o caminho descrito por uma função homogênea com expoentes críticos bem definidos. Perto da bifurcação, a convergência para o equilíbrio é exponencial, cujo tempo de relaxação é marcado por uma lei de potência. Para obtermos os expoentes utilizamos dois procedimentos distintos: (1) o primeiro, fenomenológico, envolvendo hipóteses de escala, com o qual determinamos uma lei de escala entre os 3 expoentes críticos; (2) o segundo transforma uma equação de diferenças em uma equação diferencial, sendo resolvida com condições iniciais convenientes. Os resultados analíticos confirmam bem os resultados encontrados numericamente.

**Palavras Chave:** Leis de escala, Caos , Sistemas dinâmicos, Mapa Logístico.

# Abstract

In this project we apply the scaling formalism to understand and describe the evolution towards the equilibrium at and near a tangent bifurcation into logistic map. At the bifurcation the convergence to the steady state is described by a homogeneous function with well defined critical exponents. Near the bifurcation, the evolution to the equilibrium is described by an exponential function whose relaxation time is described by a power law. We use two different approaches to obtain the critical exponents: (1) a phenomenological investigation based on three scaling hypotheses leading to a scaling law relating three critical exponents and; (2) a procedure transforming the difference equation into a differential equation which is solved under appropriate conditions. The numerical results give support for the theoretical approach.

**Key Words:** Scaling law, Chaos, Dynamical Systems, Logistic map.

# Lista de Figuras

1.1	Estabilidade assintótica: (a) $0 < C < 1$ ; (b) $-1 < C < 0$ . . . . .	13
1.2	Diagrama de bifurcação determinado analiticamente para os primeiros pontos fixos. . . . .	17
1.3	Estabilidade assintótica: Diagrama de órbita do mapa logístico com condição inicial $x_0 = 0,5$ . . . . .	18
1.4	(a) Diagrama de bifurcação encontrado numericamente. (b) Diagrama de bifurcação numérico juntamente com o analítico. . . . .	19
1.5	(a) Diagrama de bifurcação do mapa logístico (b) Expoente de Lyapunov. . . . .	20
2.1	(a) Diagrama de órbita do mapa logístico. (b) Detalhe da região onde ocorre a bifurcação tangente. . . . .	21
2.2	Órbita do mapa logístico para: (a) $R < R_c$ ; (b) $R > R_c$ . . . . .	22
2.3	(a) Gráfico da $F^3(x)$ (b) Desenho esquemático da trajetória antes da bifurcação. . . . .	23
2.4	Comportamento de $l$ vs $\mu$ antes da bifurcação. . . . .	25
3.1	Convergência para o ponto fixo para diferentes condições iniciais. . . . .	26
3.2	Número de <i>crossover</i> $m_x$ em função da condição inicial $y_0$ . . . . .	27
3.3	Sobreposição de todas as curvas depois da reescala dos eixos. . . . .	29
3.4	Gráfico do tempo de relaxação para o ponto fixo em função de $\mu$ . . . . .	31



# SUMÁRIO

<b>Introdução</b>	<b>9</b>
<b>1 Propriedades Dinâmicas em Mapas Unidimensionais</b>	<b>11</b>
1.1 Ponto Fixo e Estabilidade . . . . .	11
1.2 Expoentes de Lyapunov . . . . .	13
1.3 Propriedades Dinâmicas do Mapa Logístico . . . . .	15
<b>2 Intermitência no Mapa Logístico</b>	<b>21</b>
2.1 Bifurcação Tangente e a Intermitência . . . . .	21
2.2 Formulação Analítica . . . . .	23
2.3 Abordagem Numérica . . . . .	25
<b>3 Expoentes críticos para a bifurcação tangente</b>	<b>26</b>
3.1 Na bifurcação ( $\mu = 0$ ) . . . . .	26
3.2 Após a bifurcação ( $\mu < 0$ ) . . . . .	30
<b>Considerações Finais</b>	<b>32</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>33</b>

# Introdução

O estudo qualitativo dos sistemas dinâmicos não-lineares sofreu uma modificação radical entre as décadas de 1960 e 1970. Isso ocorreu devido ao desenvolvimento de novas técnicas e principalmente ao uso dos computadores como um ambiente de pesquisa científica e não mais como simples máquinas de calcular. Entende-se como sistemas dinâmicos todo sistema que evolui no tempo, podendo essa evolução ser determinada por uma regra matemática. Tal modificação foi tão radical que pode-se considerar ter havido uma “revolução” no estudo de sistemas dinâmicos; com isso, uma enorme quantidade de pesquisadores aderiram a essa “nova ciência”[1].

No entanto, as primeiras características do comportamento caótico, ou seja, comportamento irregular, ou aperiódico e com dependência sensível às condições iniciais, começaram a ser percebidas no final do século XIX, quando Poincaré começou a estudar a estabilidade do Universo, usando, para isso, um modelo que avalia a atração gravitacional em três corpos. O estudo do problema de três corpos lançou a ideia de que o acaso deveria se contrapor ao determinismo estrito de Laplace. Assim, surgiram as primeiras contestações a respeito da capacidade de previsão da Ciência [2].

Mesmo com a clara visão de Poincaré sobre a sensibilidade de um sistema em relação às condições iniciais - uma das características mais marcantes de caos, foi só em 1963, quando Lorenz desenvolvia estudos sobre problemas atmosféricos, que se retomou a ideia de acaso na análise de sistemas dinâmicos. Contando com o auxílio de um computador primitivo, Lorenz tratava o modelo para convecções de fluidos e observou que uma pequena variação nas condições iniciais poderia acarretar em grandes diferenças na evolução do sistema. Mais tarde esse fenômeno ficou conhecido como efeito borboleta, como uma alusão ao bater de asas de uma borboleta, que poderia, em algum lugar, provocar um tornado do outro lado do planeta. Nestas condições, tem-se um sistema totalmente determinístico cujos resultados podem ser imprevisíveis pela impossibilidade de se ter uma plena compreensão das condições iniciais [3]. Neste ponto, cabe estabelecer a distinção entre fenômenos aleatórios e caóticos. Os fenômenos aleatórios dizem respeito a sistemas não-determinísticos. Ou seja, o sistema apresenta uma resposta aleatória como uma consequência de uma entrada aleatória. Por outro lado, os fenômenos caóticos são determinísticos. Assim, para uma entrada totalmente conhecida surge uma resposta aparentemente aleatória [1].

O estudo de caos trouxe a assustadora compreensão de que equações matemáticas simples podiam servir de modelo para sistemas tão violentos. Iniciava-se aí o moderno estudo do caos, cujas ideias básicas haviam sido lançadas por Poincaré [4].

Apesar de ser tratado por muitos como “Teoria do Caos”, o que se estipulou chamar de caos é uma coleção de resultados abstratos e métodos computacionais, a maior parte tendo uma abordagem geométrica, que são aplicáveis ao estudo de equações diferenciais não lineares e mapeamentos [5].

No estudo de sistemas dinâmicos, muitas vezes fazemos uso de mapeamentos discretos para caracterizar a evolução do sistema, em que o tempo é uma variável discreta, ou seja, só assume valores inteiros. Um mapeamento discreto é uma regra de evolução determinística discreta para um dado sistema [6]. Um bom exemplo de mapeamento unidimensional é o bem conhecido mapa logístico, descrito em 1976 pelo biólogo Robert May com uma aplicação direta em Biologia [7]. Além disso, previsões derivadas do mapa logístico foram verificadas em experimentos em fluidos com fraca turbulência, oscilações de reações químicas, circuitos elétricos não-lineares e uma variedade de outros sistemas [8, 9, 10].

O mapeamento em questão apresenta uma série de comportamentos dinâmicos relevantes, dentre os quais incluem-se regularidade, rotas para o caos, assim como diversos tipos de bifurcações, certamente um dos conceitos centrais em sistemas dinâmicos, relacionado à perda de estabilidade estrutural. Intuitivamente, bifurcação é uma mudança qualitativa nas características de um sistema causada por uma variação em seus parâmetros, e com isso novos pontos estacionários podem aparecer e outros anteriormente estáveis, tornam-se instáveis e vice-versa [11]. Nosso principal objetivo nesse trabalho é a aplicação de um formalismo de escala para explorar a evolução em direção ao equilíbrio nas vizinhanças de uma bifurcação tangente assim como na bifurcação.

Nesse sentido o trabalho foi estruturado da seguinte forma: No primeiro Capítulo vamos estudar os mapeamentos unidimensionais, nos quais abordaremos algumas propriedades dinâmicas, tais como ponto fixo, estabilidade e expoentes de Lyapunov. Ao final do Capítulo analisaremos as propriedades dinâmicas para o mapa logístico.

No segundo Capítulo estudaremos o fenômeno de intermitência para o mapa logístico e sua relação com a bifurcação tangente. Para tal, faremos uma abordagem analítica e outra numérica. Na sequência, uma comparação é feita entre os resultados encontrados por meio das duas abordagens.

Já no terceiro Capítulo é usado um formalismo de escala para determinarmos os expoentes críticos para a bifurcação tangente e analisar a convergência para o ponto fixo em dois casos distintos: primeiramente, quando estamos na bifurcação e depois, quando consideramos que a bifurcação já ocorreu. Ao final desse capítulo, uma abordagem analítica é feita, comprovando os resultados encontrados numericamente.

No último Capítulo fazemos as considerações finais e apresentamos as contribuições dessa pesquisa.

# Capítulo 1

## Propriedades Dinâmicas em Mapas Unidimensionais

Nesse Capítulo descreveremos algumas propriedades de mapas unidimensionais, tais como ponto fixo, estabilidade e expoentes de Lyapunov. Feito isso, faremos um estudo dessas propriedades para o mapa logístico.

### 1.1 Ponto Fixo e Estabilidade

Considere um mapa unidimensional

$$x_{n+1} = F(x_n), \quad (1.1)$$

onde  $F(x_n)$  é uma função não-linear de sua variável.

Dizemos que  $x^*$  é um ponto fixo da equação (1.1) se

$$x^* = F(x^*). \quad (1.2)$$

Para fazermos o estudo da estabilidade de  $x^*$ , devemos verificar o que ocorre com suas sucessivas iterações a partir de  $x_n$  próximo de  $x^*$ .

O ponto fixo  $x^*$  pode ser classificado como estável, assintoticamente estável ou instável, dependendo do comportamento da sequência de iterações próximo de  $x^*$ . Se essa sequência se aproxima de  $x^*$ , o ponto fixo é dito assintoticamente estável e se ela se afasta de  $x^*$ , o ponto fixo é dito ser instável. Porém, se essa sequência não se aproxima nem se afasta, temos um ponto fixo estável [11].

Para se analisar a estabilidade de  $x^*$ , consideremos um ponto  $x_n$  próximo de  $x^*$ , ou seja,

$$x_n = x^* + \varepsilon_n, \quad (1.3)$$

onde  $\varepsilon_n$  é pequeno. Devemos saber se

$$x_{n+1} = F(x_n) = F(x^* + \varepsilon_n) = x^* + \varepsilon_{n+1}, \quad (1.4)$$

afasta-se ou aproxima-se de  $x^*$ , para isso devemos verificar se  $\varepsilon_{n+1}$  é maior ou menor (em módulo) que  $\varepsilon_n$ . Logo, devemos fazer uma expansão da equação (1.4) em série de Taylor em torno de  $x^*$ . Assim temos

$$x^* + \varepsilon_{n+1} = F(x^* + \varepsilon_n) = F(x^*) + \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x=x^*} \varepsilon_n + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2F}{dx^2} \right|_{x=x^*} \varepsilon_n^2 + \dots \quad (1.5)$$

Considerando essa expansão até o termo de primeira ordem, uma vez que estamos fazendo uma análise linear da estabilidade, e lembrando que  $F(x^*) = x^*$ , obtemos

$$\begin{aligned} x^* + \varepsilon_{n+1} &= x^* + \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x=x^*} \varepsilon_n, \\ \varepsilon_{n+1} &= \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x=x^*} \varepsilon_n, \end{aligned} \quad (1.6)$$

fazendo  $\left. \frac{dF}{dx} \right|_{x=x^*} = C$  temos

$$\varepsilon_{n+1} = C\varepsilon_n, \quad (1.7)$$

logo,  $|\varepsilon_{n+1}| < |\varepsilon_n|$  se  $|C| < 1$  ou ainda  $-1 < C < 1$ .

Assim chegamos às seguintes conclusões [11]:

**a)  $|C| < 1$  - Estabilidade assintótica**

- i)* Se  $0 < C < 1$ , a distância entre as iterações sucessivas e o ponto fixo  $x^*$  diminui monotonicamente, como ilustrado na Figura (1.1-a).
- ii)* Se  $-1 < C < 0$ , essa distância também diminui, mas de uma maneira oscilante, já que os sinais de  $\varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}, \varepsilon_{n+2} \dots$  são alternados, Figura (1.1-b). Esse processo de aproximação ao ponto fixo chama-se de convergência alternada ou simplesmente “*flip*”.

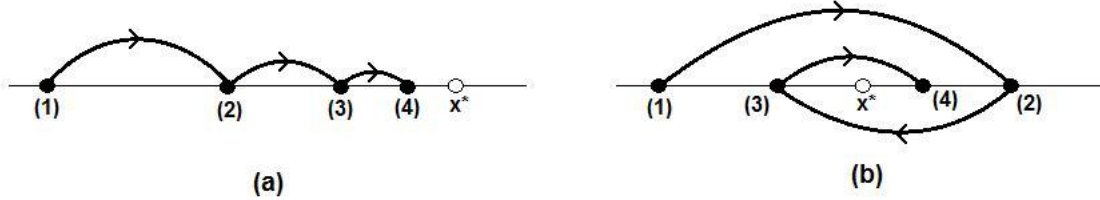
**b)  $|C| > 1$  - Ponto fixo do tipo instável**

- i)*  $C > 1$ , o afastamento dá-se monotonicamente.
- ii)*  $C < -1$ , o afastamento dá-se de forma alternada.

**c)  $C = 1$  - Comportamento neutro.**

Se o mapa é linear,  $x^*$  é um centro; porém, se o mapa não é linear, deve-se considerar termos de ordem superior na expansão de Taylor para se concluir a respeito da estabilidade de  $x^*$ .

- d)  $C = -1$  - Diz-se que o sistema está num estado “flip” incipiente e, novamente, deve-se analisar termos de ordem superior.



**Figura 1.1:** Estabilidade assintótica: (a)  $0 < C < 1$ ; (b)  $-1 < C < 0$ .

Em mapas, além dos pontos fixos, podemos observar a sequência cronológica de estados, definida como órbita. Para o caso de órbitas periódicas de período  $k$ , temos que

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= F(x_n), \\
 x_{n+2} &= F(F(x_n)) = F^2(x_n), \\
 &\vdots \\
 x_{n+k} &= F^k(x_n) = x_n,
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

em que a notação  $F^N(x_n)$  significa tomar a  $N$ -ésima aplicação sucessiva do mapa, ou seja  $F^N(x_n) = F(F(F\dots(x_n)\dots))$ ,  $N$  vezes. Por exemplo, em uma órbita de período 2, teríamos

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= F(x_n), \\
 x_{n+2} &= F^2(x_n) = T(x_n) = x_n,
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

ou seja,  $x_n$  é um ponto fixo de  $T(x) = F(F(x))$  e a estabilidade da órbita poderia ser estudada a partir da expansão de  $T(x)$ , como já foi feito para  $F(x)$  anteriormente [11]. Tal resultado será utilizado ao longo deste trabalho.

## 1.2 Expoentes de Lyapunov

Para medir a taxa de divergência das trajetórias e, portanto, quantificar a dependência sensível às condições iniciais, utilizam-se os expoentes característicos de Lyapunov ou números de Lyapunov. Tais números são utilizados como indicadores de caos e são obtidos a partir da distância das trajetórias de duas condições iniciais distintas. Segundo [11] a definição dos expoentes de Lyapunov para mapas, é dada da seguinte forma.

Seja o mapa unidimensional

$$x_{n+1} = F(x_n), \quad (1.10)$$

consideremos dois pontos iniciais  $x_0$  e  $y_0$  e a distância inicial entre eles

$$D = |y_0 - x_0|. \quad (1.11)$$

Admitamos que depois de uma iteração a nova distância seja

$$D' = |y_1 - x_1|, \quad (1.12)$$

tal que

$$D' = e^L D, \quad (1.13)$$

onde  $L$  mede a taxa exponencial de expansão da distância  $d$  até a distância  $d'$  como resultado de uma única iteração.

Mas como  $y_1 = F(y_0)$  e  $x_1 = F(x_0)$ , a equação (1.12) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} D' &= |F(y_0) - F(x_0)| \\ D' &= |F(x_0 + D) - F(x_0)|, \end{aligned} \quad (1.14)$$

em que a última passagem utilizou a equação (1.11). Utilizando (1.13) e (1.14), resulta em  $|F(y_0) - F(x_0)| = |D|e^L$ . Iterando o mapa  $N$  vezes tem-se  $L = \frac{1}{N} \ln \left| \frac{F^N(x_0 + D) - F^N(x_0)}{D} \right|$ .

Uma vez que  $L$  depende de  $N$  e  $D$ , consideremos então uma distância inicial infinitesimal ( $D \rightarrow 0$ ) depois de um número infinito de iterações ( $N \rightarrow \infty$ ). Isso nos leva a

$$\begin{aligned} \lambda(x_0) \equiv L(x_0) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{D \rightarrow 0} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{F^N(x_0 + D) - F^N(x_0)}{D} \right|, \\ \lambda(x_0) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{dF^N(x_0)}{dx_0} \right|, \end{aligned} \quad (1.15)$$

que é, por definição, o expoente característico de Lyapunov do mapa e constitui uma medida da divergência exponencial ( $\lambda > 0$ ) ou da contração ( $\lambda < 0$ ). Podemos ainda reescrever a definição fornecida pela equação (1.15). Pela regra da cadeia, temos:

$$\frac{d}{dx_0} F^N(x_0) = \frac{d}{dx_0} F(x_{N-1}) \frac{d}{dx_0} F(x_{N-2}) \dots \frac{d}{dx_0} F(x_0), \quad (1.16)$$

onde  $x_i = F^i(x_0)$ .

Substituindo (1.16) em (1.15), temos

$$\begin{aligned}\lambda(x_0) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \prod_{i=0}^{N-1} \frac{d}{dx_0} F(x_i) \right| \\ \lambda(x_0) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln |F'(x_i)|.\end{aligned}\tag{1.17}$$

O resultado da equação (1.17) representa a definição do expoente de Lyapunov para mapas unidimensionais, o que será suficiente para o presente trabalho; no entanto, é possível fazer uma generalização para outras dimensões, caso seja necessário.

### 1.3 Propriedades Dinâmicas do Mapa Logístico

O mapa logístico é um modelo matemático que foi descrito em 1976 pelo pesquisador Robert May, com o objetivo de modelar o crescimento populacional anual de espécies de insetos. A ideia básica consiste em imaginar que, a cada primavera, os insetos botam ovos. Então, os insetos nascem, alimentam-se, crescem, amadurecem, colocam ovos e morrem. Assumindo condições idênticas para cada ano que passa, pode-se assumir um modelo linear, no qual a espécie teria um crescimento ilimitado. A não-linearidade introduzida no estudo de May prevê que, a medida em que a população tornar-se muito grande, os insetos irão exaurir seus alimentos, o que provocaria a morte de alguns deles antes de atingir a maturidade necessária para colocar ovos. Desta forma, o número de ovos seria reduzido, acarretando um crescimento menor da espécie [12].

O modelo proposto por May foi historicamente importante para mostrar que sistemas extremamente poderiam ter comportamento extremamente complexo. Este mapeamento é uma equação determinística, ou seja, sua situação futura será determinada pelas condições presentes [7]. Tal mapa é escrito da seguinte forma

$$x_{n+1} = F(x_n) = Rx_n(1 - x_n),\tag{1.18}$$

onde  $x_n$  é o número de indivíduos da população na  $n$ -ésima geração e  $R \in [0, 4]$  é o parâmetro de controle.

Assim a variável dinâmica  $x$  fica limitada a assumir valores em  $[0, 1]$ , de modo que a aplicação  $F(x_n)$  é fechada, já que  $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ . O que chamou a atenção de May foi o fato de que o comportamento deste mapa varia radicalmente para diferentes valores de  $R$ . O comportamento desse sistema passa de periódico a caótico devido a pequenas variações de  $R$ .



Como vimos na seção 1.1, os pontos fixos são encontrados resolvendo-se a equação

$$F(x^*) = x^*. \quad (1.19)$$

Dessa forma, para o mapa logístico, equação (1.18), encontramos os pontos fixos

$$x_1^* = 0, \quad (1.20)$$

e

$$x_2^* = 1 - \frac{1}{R}. \quad (1.21)$$

Na seção (1.1), vimos ainda que a estabilidade para esses pontos fixos ocorre quando  $|F'(x^*)| < 1$ . Mas para o mapa logístico temos

$$F'(x^*) = R(1 - 2x^*). \quad (1.22)$$

Assim de (1.20) e (1.22), concluímos que o ponto fixo  $x_1^* = 0$  é assintoticamente estável para  $0 < R < 1$ , e de (1.21) e (1.22) chegamos que o ponto fixo  $x_2^* = 1 - \frac{1}{R}$  é assintoticamente estável para  $1 < R < 3$ . Tal comportamento é representado na Figura (1.2). Para determinarmos os pontos fixos  $x_3^*$  e  $x_4^*$ , devemos obter a função  $F^2(x_n)$  e repetir o mesmo procedimento utilizado anteriormente, equação (1.19). Com isso, temos

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= R[Rx_n(1 - x_n)] - R[Rx_n(1 - x_n)]^2 \\ &= R^2x_n(1 - x_n) - R[R^2x_n^2(1 - x_n)^2] \\ &= R^2x_n - R^2x_n^2 - R^3x_n^2(1 - 2x_n + x_n^2) \\ x_{n+2} &= R^2x_n - R^2x_n^2 - R^3x_n^2 + 2R^3x_n^3 + R^3x_n^4. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Para o ponto fixo temos:

$$x_{n+2} = x_{n+1} = x_n = x, \quad (1.24)$$

logo, a equação (1.23) pode ser reescrita como:

$$x[R^3x^3 - 2R^3x^2 + (R^3 + R^2)x - R^2 + 1] = 0. \quad (1.25)$$

Como os pontos fixos  $x_1^*$  e  $x_2^*$  são raízes da equação (1.25), ela pode ser reduzida à equação do segundo grau

$$R^2x^2 - (R^2 + R)x + R + 1 = 0. \quad (1.26)$$

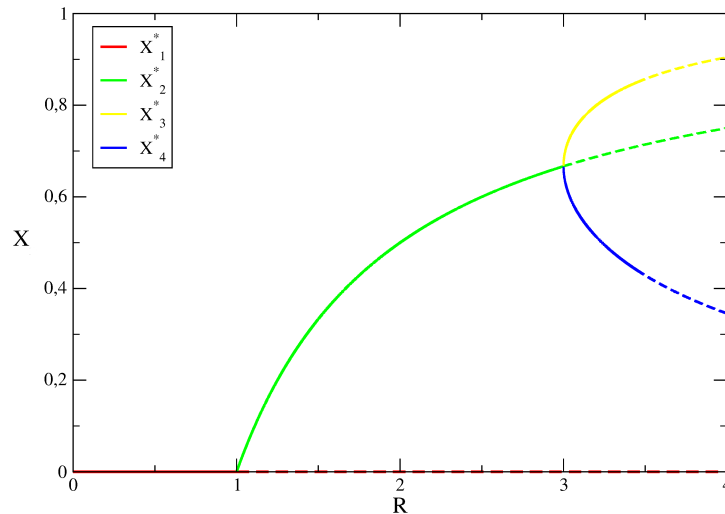
Resolvendo a equação (1.26), encontramos os novos pontos fixos. Temos então que os novos pontos fixos são:

$$x_3^* = \frac{R + 1 + \sqrt{(R^2 - 2R - 3)}}{2R}, \quad (1.27)$$

e

$$x_4^* = \frac{R + 1 - \sqrt{(R^2 - 2R - 3)}}{2R}. \quad (1.28)$$

Analisando agora a estabilidade para estes pontos fixos, notamos que ambos são assintoticamente estáveis para  $3 < R < 1 + \sqrt{6}$ . Tal comportamento é mostrado na Figura (1.2), na qual as linhas cheias indicam que o ponto fixo é assintoticamente estável e as linhas tracejadas representam o intervalo em que o ponto fixo é instável.



**Figura 1.2:** Diagrama de bifurcação determinado analiticamente para os primeiros pontos fixos.

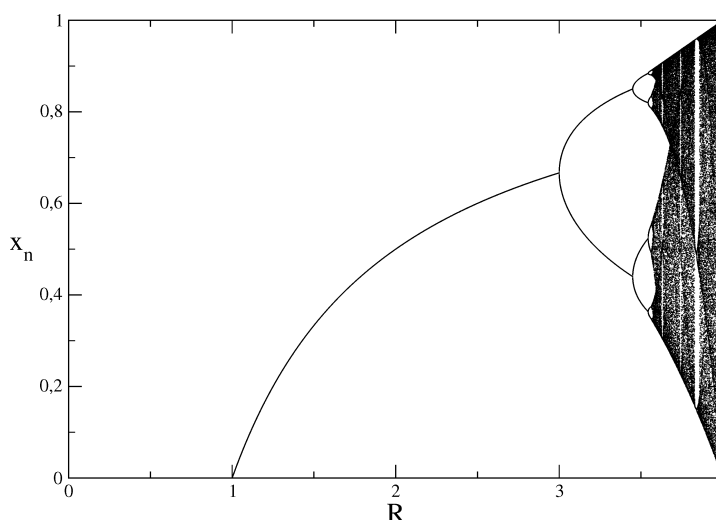
Enquanto o comportamento do mapa logístico é periódico, é fácil prever as condições futuras, pois obedecem a uma certa regularidade que, a longo prazo, se estabiliza-se e define um atrator. Entende-se como atrator o conjunto invariante para o qual órbitas próximas convergem depois de um tempo suficientemente longo. Todavia, quando acontece o regime caótico, quaisquer variações nas condições presentes, ou seja, nas condições iniciais, provocam grandes variações nas condições futuras. Como na prática é muito difícil definir com exatidão as condições iniciais, esse comportamento acaba comprometendo a previsibilidade do sistema, que, apesar de determinístico, torna-se imprevisível, uma vez que o atrator perde qualquer regularidade. Quando isso ocorre, ele passa a ser denominado atrator estranho [11].

Para a obtenção dos pontos fixos pertencentes a ciclos de ordem  $n$ , utilizamos uma

equação da forma

$$F^n(x^*) = x^*. \quad (1.29)$$

Porém, encontrar os pontos fixos posteriores analiticamente, como foi feito até aqui, é muito trabalhoso; assim, a melhor maneira de observar a transição para o comportamento caótico é traçando o conjunto de atratores do mapa logístico para valores diferentes de  $R$ , como pode ser observado na Figura 1.3. Esta transição para o caos é conhecida como rota de duplicação de período. As duplicações ocorrem nos pontos de bifurcação, uma vez que bifurcação é um ponto onde há perda de estabilidade do atrator [13].

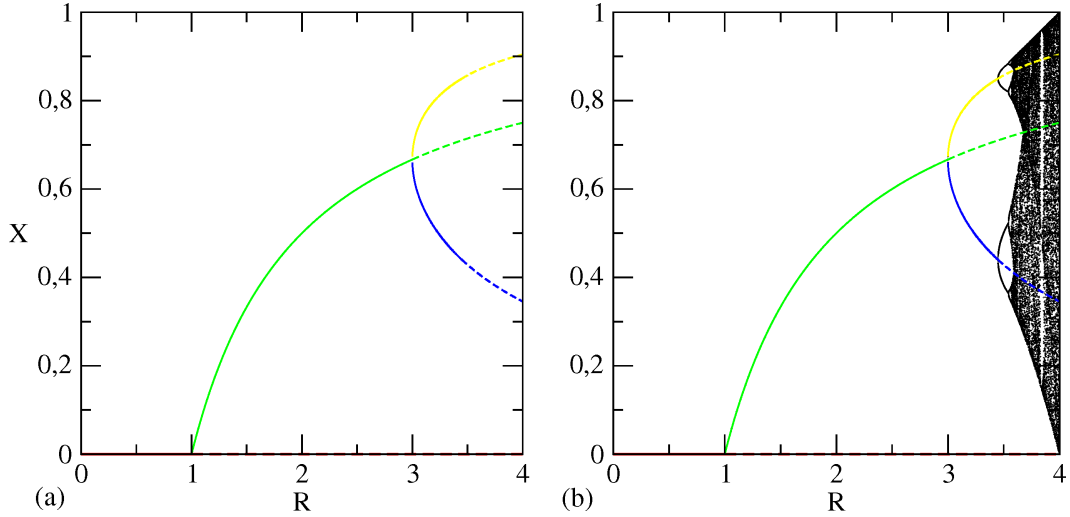


**Figura 1.3:** Estabilidade assintótica: Diagrama de órbita do mapa logístico com condição inicial  $x_0 = 0,5$ .

A Figura (1.4) mostra o diagrama de bifurcação analítico juntamente com o diagrama encontrado numericamente. Na Figura (1.4-b), é possível notar que os resultados numéricos confirmam os resultados analíticos, uma vez que as curvas encontradas para os pontos fixos  $x_1^*$ ,  $x_2^*$ ,  $x_3^*$  e  $x_4^*$  sobrepõem-se perfeitamente às curvas determinadas numericamente.

A fim de analisarmos o comportamento caótico do mapa, traçamos o gráfico do expoente de Lyapunov, como pode ser observado na Figura (1.5). A Figura (1.5-a) apresenta o diagrama de órbita, enquanto a Figura (1.5-b) mostra o expoente de Lyapunov para o mapa logístico. Observa-se que: (1) nos pontos de bifurcação o expoente de Lyapunov é nulo; (2) é negativo nas regiões periódicas, incluindo as janelas de periodicidade; (3) positivo nas regiões caóticas. É possível perceber que, em meio às regiões caóticas, surgem janelas de periodicidade durante todo o processo.

Observando a Figura (1.5), percebemos que em  $R = 1$  ocorre uma bifurcação transcritical. Tal bifurcação é caracterizada pelo seguinte comportamento: antes do ponto de bifurcação temos dois pontos fixos, um estável e outro instável; após o ponto de bifurca-



**Figura 1.4:** (a) Diagrama de bifurcação encontrado numericamente. (b) Diagrama de bifurcação numérico juntamente com o analítico.

ção estes pontos fixos continuam existindo, mas a estabilidade deles é trocada, ou seja, o ponto fixo estável torna-se instável e vice-versa. Já para  $R = 3$  temos um bifurcação de duplicação de período, também chamada de “flip”, este tipo de bifurcação ocorre quando uma órbita de período  $n$  estável torna-se instável no ponto de bifurcação, de tal forma que surge uma nova órbita estável de período  $2n$  a partir do ponto de bifurcação. Outra bifurcação presente no mapa logístico é a bifurcação tangente, também conhecida como bifurcação sela-nó; tal bifurcação está relacionada ao aparecimento de janelas periódicas e ocorre quando, antes do ponto de bifurcação, não há ponto fixo (ou órbita periódica) e depois do ponto de bifurcação surge um par de pontos fixos (ou órbitas periódicas), um estável e outro instável [14].

Uma vez traçado o diagrama de bifurcação, o próximo passo é analisar o decaimento para o ponto fixo em diferentes tipos de bifurcações. O decaimento para o ponto fixo é descrito pela utilização de uma função homogênea com 3 expoentes críticos, relacionados entre si por uma lei de escala do tipo [13]

$$z = \frac{\alpha}{\beta}. \quad (1.30)$$

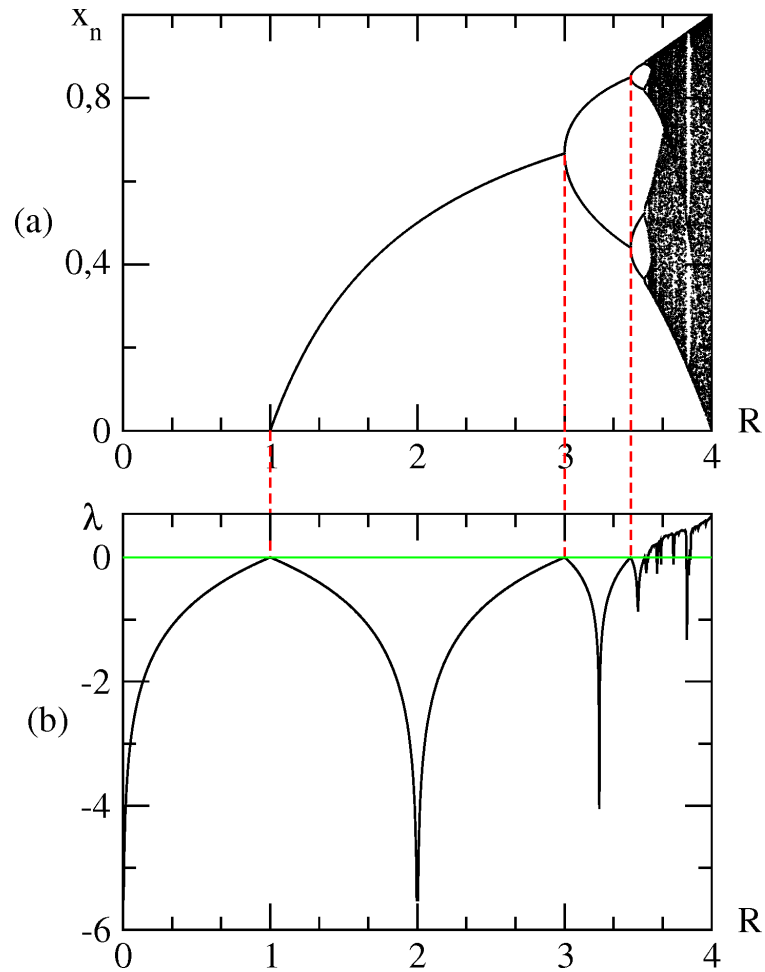
Nas vizinhanças da bifurcação, a convergência para o ponto fixo é dada por um decaimento exponencial e o tempo de relaxação é descrito pela lei

$$\tau \propto \mu^\delta, \quad (1.31)$$

onde  $\delta$  é o expoente de relaxação [13, 15].

Os estudos de [13, 15] apontam que, para a bifurcação de duplicação de período, temos

$$\alpha = 1, \beta = -\frac{1}{2}, z = -2 \text{ e } \delta = -1,$$



**Figura 1.5:** (a) Diagrama de bifurcação do mapa logístico (b) Expoente de Lyapunov.

já para a bifurcação transcritical temos

$$\alpha = 1, \beta = -1, z = -1 \text{ e } \delta = -1.$$

Diante desses resultados, surge a ideia de verificarmos a possibilidade de determinar tais expoentes para outro tipo de bifurcação, também presente no mapa logístico: a bifurcação tangente. Nos próximos capítulos vamos analisar esse comportamento na bifurcação tangente e em sua vizinhança.

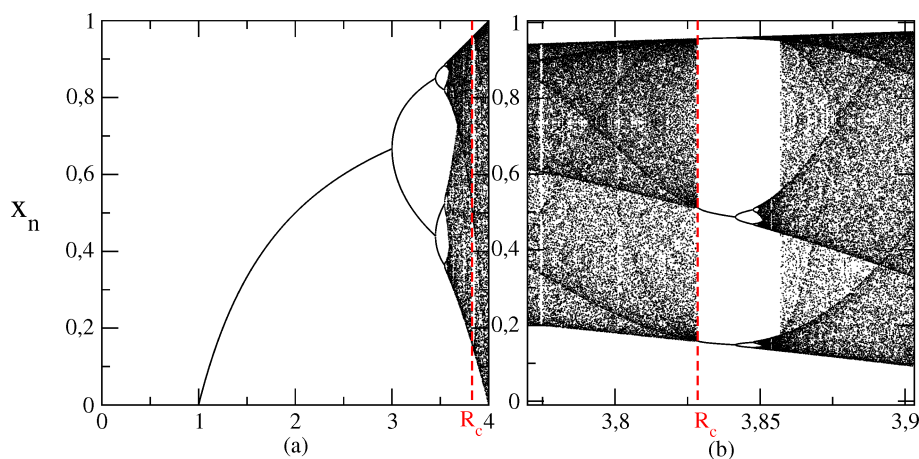
## Capítulo 2

# Intermitência no Mapa Logístico

Nesse Capítulo analisaremos a bifurcação tangente presente no mapa logístico, assim como o fenômeno de intermitência a ela relacionado. Faremos ainda uma abordagem analítica e outra numérica para este fenômeno.

### 2.1 Bifurcação Tangente e a Intermitência

O aparecimento de caos em sistemas dinâmicos está sempre ligado à ocorrência de bifurcações de algum tipo. No mapa logístico está presente, dentre outros tipos de bifurcação, a bifurcação sela-nó, também conhecida como bifurcação tangente. Ao observarmos a Figura (2.1), aparece o diagrama de bifurcação do mapa logístico juntamente com um detalhe de uma região do mapa, apresentando uma janela de periodicidade, percebe-se

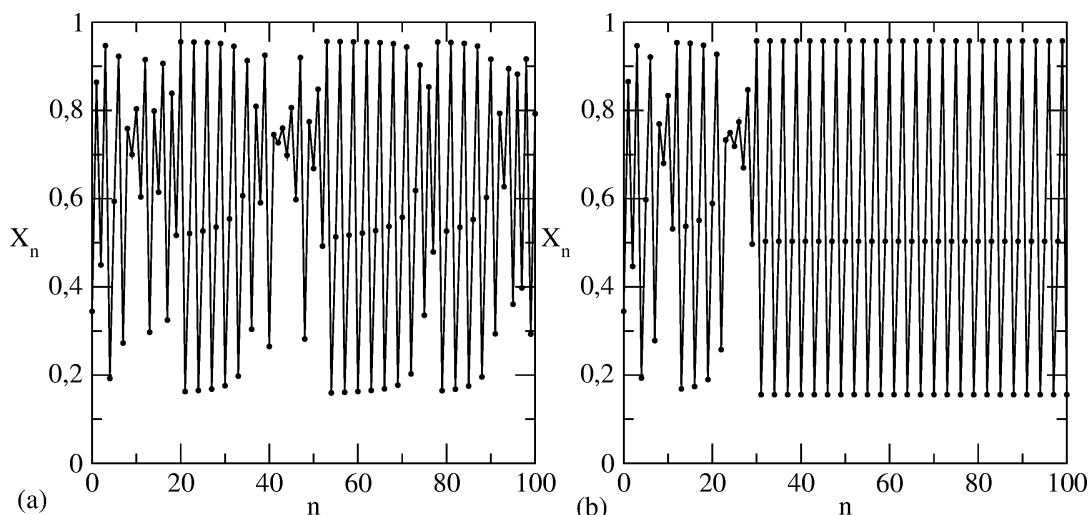


**Figura 2.1:** (a) Diagrama de órbita do mapa logístico. (b) Detalhe da região onde ocorre a bifurcação tangente.

que uma dinâmica bastante caótica “colapsa” em um movimento de período 3 a partir de um valor crítico  $R_c = 1 + \sqrt{8}$  [16, 8]. Tal comportamento é característico de uma

bifurcação tangente.

Com o objetivo de estudar o comportamento do mapa nessa região, próximo da bifurcação tangente, vamos acompanhar a órbita do mapa para  $R < R_c$ , ou seja, antes da bifurcação e para  $R > R_c$ , quando a bifurcação já ocorreu, conforme mostrado na Figura (2.2-a). Para  $R < R_c$ , percebe-se a existência de um sinal; como sinal, estamos nos referindo à evolução dinâmica da variável  $x_n$ , que pode ser regular (periódico ou quase-periódico) durante um certo intervalo de tempo e que evolui para produzir um “estouro” (“burst”) geralmente caótico durante um breve instante; o sistema retoma depois seu comportamento regular e o processo recomeça com o aparecimento de outros “estouros” de oscilações aperiódicas. Tal comportamento é característico das intermitências. O comportamento caótico é então dado pelos “estouros”, sobretudo pela distribuição aleatória do comportamento dos períodos regulares [11]. Já para  $R > R_c$ , tendo que a bifurcação já ocorreu, a órbita passa por um transiente e depois segue um movimento de período 3, como foi visto no detalhe da Figura (2.2-b).

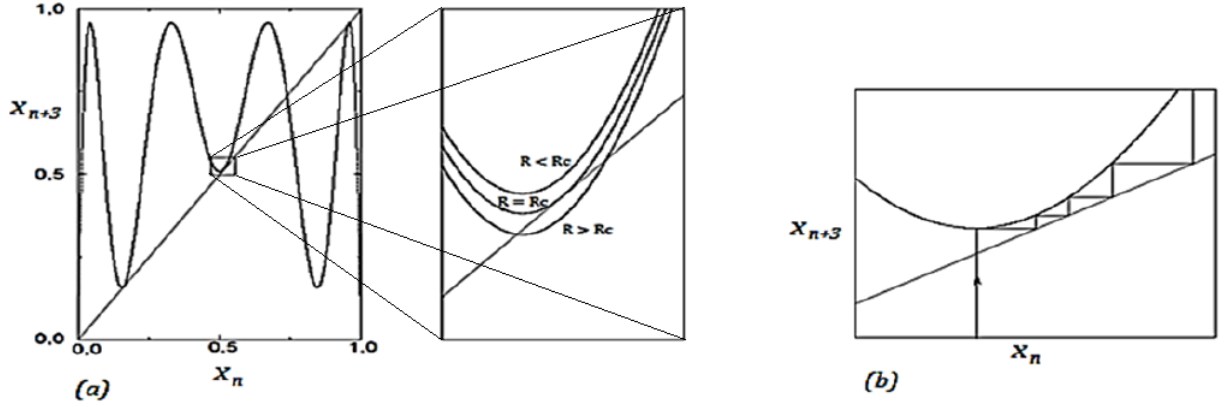


**Figura 2.2:** Órbita do mapa logístico para: (a)  $R < R_c$ ; (b)  $R > R_c$ .

Na seção 1.1, vimos que um ciclo de período  $K$  significa que, depois de  $K$  iterações, retorna-se ao ponto de partida; logo, para identificar o ciclo de período  $K = 3$ , deve-se, portanto, considerar a função  $F^{(3)}(x)$ . Com o intuito de analisar melhor o fenômeno de intermitência, a Figura (2.3) mostra o comportamento da  $F^{(3)}(x)$  juntamente com a função identidade.

No detalhe da Figura (2.3-a) são apresentadas 3 situações distintas, (1)  $R < R_c$ , onde a bifurcação ainda não ocorreu e o gráfico da  $F^{(3)}$  não “toca” a identidade; (2)  $R = R_c$ , onde o gráfico da  $F^{(3)}$  tangencia a identidade e a bifurcação ocorre (daí o nome bifurcação tangente); (3)  $R > R_c$ , aqui a bifurcação já ocorreu e o gráfico de  $F^{(3)}$  corta a identidade.

Interessa-nos o caso em que  $R < R_c$ , para o qual ocorre a intermitência, como representado na Figura (2.3-b). Nota-se que a curva da função está ligeiramente acima da



**Figura 2.3:** (a) Gráfico da  $F^3(x)$  (b) Desenho esquemático da trajetória antes da bifurcação. Figura adaptada da Ref [14].

identidade, formando uma espécie de “corredor”, e a trajetória demora um tempo razoável para sair desse “corredor”.

A seguir, utilizaremos a abordagem proposta por Hirsh [16] para determinar esse intervalo de tempo (número de passos) que o processo leva desde a sua entrada até a sua saída.

## 2.2 Formulação Analítica

Para o tratamento analítico deveríamos analisar a função  $F^{(3)}(x)$ . Porém, essa é uma função do 8º grau, o que torna a análise um tanto quanto complexa e laboriosa. Sendo assim, reescrevemos essa função da seguinte forma

$$x_{n+1} = F(x_n), \quad (2.1)$$

de modo que

$$x_{n+3} = F^{(3)}(x_n), \quad (2.2)$$

fazendo  $n + 3 = m + 1$ , temos

$$x_{m+1} = F^{(3)}(x_m). \quad (2.3)$$

Consideremos a função  $F^{(3)}(x_m)$  como sendo uma função de duas variáveis, ou seja,  $F^{(3)}(x, R) = G(x, R)$ , com isso faremos uma expansão em Taylor da função  $G(x, R)$ , em torno de  $x^*$  e  $R_c$ . Dessa forma, encontramos



$$\begin{aligned}
G(x, R) = & \frac{G(x^*, R_c)}{0!} + \frac{(x - x^*)}{1!} \frac{\partial G}{\partial x} \Big|_{x^*, R_c} + \frac{(R - R_c)}{1!} \frac{\partial G}{\partial R} \Big|_{x^*, R_c} + \\
& \frac{(x - x^*)^2}{2!} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \Big|_{x^*, R_c} + \frac{(R - R_c)^2}{2!} \frac{\partial^2 G}{\partial R^2} \Big|_{x^*, R_c} + \\
& \frac{(x - x^*)(R - R_c)}{2!} \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial R} \Big|_{x^*, R_c} + \dots
\end{aligned}$$

temos que  $\frac{\partial G}{\partial x} \Big|_{x^*, R_c} = 1$  e chamando  $-\frac{\partial G}{\partial R} \Big|_{x^*, R_c} = a'$  e  $\frac{1}{2!} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \Big|_{x^*, R_c} = b'$  e desconsiderando os termos de ordem superior, chegamos a

$$G(x, R) = G(x^*, R_c) + (x - x^*) + (R_c - R)a' + (x - x^*)^2 b'. \quad (2.4)$$

Entretanto,  $G(x^*, R_c) = x^*$  e fazendo  $(R_c - R) = \mu$  e além disso lembrando que  $G(x, R) = x_{m+1}$  a equação (2.4) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
x_{m+1} &= x^* + (x_m - x^*) + a'\mu + (x_m - x^*)^2 b', \\
x_{m+1} - x^* &= (x_m - x^*) + a'\mu + (x_m - x^*)^2 b'.
\end{aligned} \quad (2.5)$$

Fazendo  $\frac{x_{m+1} - x^*}{a'} = y_{m+1}$  e  $a = \frac{b'}{a'}$  temos

$$y_{m+1} = y_m + \mu + ay_m^2. \quad (2.6)$$

A equação (2.6) pode ser escrita como uma equação de diferenças e em seguida aproximada por uma equação diferencial da seguinte forma

$$\frac{y_{m+1} - y_m}{(m+1) - m} = \mu + ay_m^2, \quad (2.7)$$

$$\frac{dy}{dm} \approx \mu + ay_m^2. \quad (2.8)$$

Resolvendo a equação diferencial (2.8) chegamos ao seguinte resultado

$$\int_0^l dm = \int_{y_{in}}^{y_{out}} \frac{dy}{\mu + ay^2}, \quad (2.9)$$

$$l(y_{in}) = \frac{1}{\sqrt{a\mu}} \left[ \arctan \left( \frac{y_{out}}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} \right) - \arctan \left( \frac{y_{in}}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} \right) \right]. \quad (2.10)$$

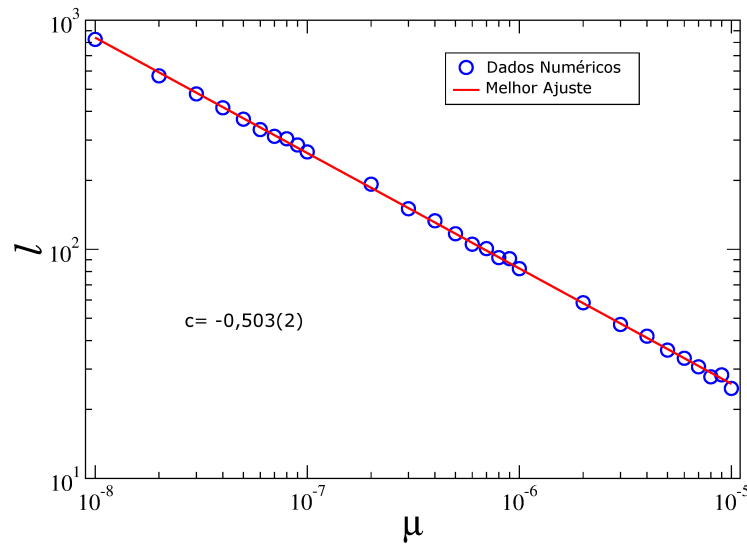
O resultado encontrado na equação (2.10) representa o intervalo de tempo  $l$ , ou seja,

o número de passos que o processo leva desde a sua entrada ( $y_{in}$ ) até a sua saída ( $y_{out}$ ). É possível notar também que para  $y_{in} < 0$  (antes da entrada)  $l$  diverge como  $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$  no limite de  $\mu$  pequeno. Assim, temos que

$$l \propto \mu^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.11)$$

## 2.3 Abordagem Numérica

Com o objetivo de confirmarmos o resultado encontrado analiticamente, fizemos uma abordagem numérica do processo em questão. A Figura (2.4) mostra a distância  $\mu$  da bifurcação em função do número de passos  $l$ . O comportamento do gráfico nos permite supor que  $l \propto \mu^c$  e com o auxílio do ajuste em lei de potência encontramos que  $c = -0,503(2)$ , valor esse que é muito próximo do valor encontrado analiticamente.



**Figura 2.4:** Comportamento de  $l$  vs  $\mu$  antes da bifurcação.

No próximo capítulo, faremos um estudo dos expoentes críticos na bifurcação.

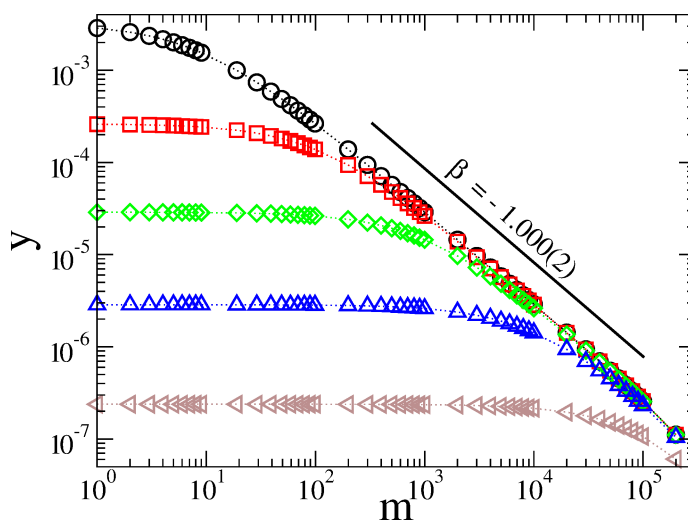
## Capítulo 3

# Expoentes críticos para a bifurcação tangente

A convergência para o ponto fixo é descrita pela variável  $y$ , a qual representa a distância para o ponto fixo. Essa convergência ainda deve depender do número de iterações  $m$ , da condição inicial  $y_0$  e do parâmetro  $\mu = R_c - R$ . No caso em que  $\mu = 0$  implica que estamos na bifurcação, e para  $\mu < 0$  temos que a bifurcação já ocorreu. Nesse capítulo estudaremos os dois casos separadamente.

### 3.1 Na bifurcação ( $\mu = 0$ )

A convergência para o ponto fixo na bifurcação é mostrada na Figura (3.1) para condições iniciais  $y_0$  diferentes.



**Figura 3.1:** Convergência para o ponto fixo para diferentes condições iniciais.

Notamos pela Figura (3.1) que, dependendo da condição inicial  $y_0$ , a órbita permanece confinada a um platô constante e, após atingir um número de iterações  $m_x$ , número de *crossover*, a órbita sofre uma transição de um regime constante para um decaimento caracterizado por uma lei de potência. A partir do comportamento observado na Figura (3.1), podemos supôr as seguintes hipóteses de escala:

1. Para  $m$  suficientemente pequeno, ou seja,  $m \ll m_x$ , o comportamento de  $y$  versus  $m$  é dado por:

$$y(m) \propto y_0^\alpha, \text{ para } m \ll m_x, \quad (3.1)$$

e como  $y \propto y_0$ , concluímos que o expoente crítico  $\alpha = 1$ .

2. Para  $m$  suficientemente grande, isto é,  $m \gg m_x$ , a variável dinâmica é descrita como:

$$y(m) \propto m^\beta, \text{ para } m \gg m_x, \quad (3.2)$$

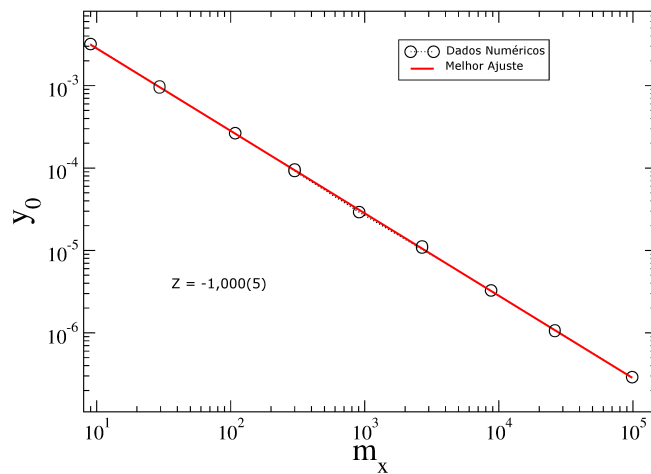
onde  $\beta$  é o expoente de decaimento.

3. Finalmente, o número de iterações  $m_x$  é dado por

$$m_x \propto y_0^z, \quad (3.3)$$

onde  $z$  é um expoente de transição.

Os expoentes  $\beta$  e  $z$  podem ser determinados considerando os gráficos das Figuras (3.1) e (3.2). Na Figura (3.1), após o platô constante, uma lei de potência fornece  $\beta = -1,000(2)$ . A Figura (3.2) fornece o comportamento de  $m_x$  versus  $y_0$ . Isso posto, podemos obter o expoente  $z = -1,000(5)$ .



**Figura 3.2:** Número de *crossover*  $m_x$  em função da condição inicial  $y_0$ .

As três hipóteses de escala, aliadas ao comportamento apresentado na Figura (3.1), permitem descrever o comportamento de  $y$  como uma função homogênea generalizada de variáveis  $m$  e  $y_0$ , quando  $\mu = 0$ , do tipo

$$y(y_0, m) = ly(l^a y_0, l^b m), \quad (3.4)$$

onde  $l$  é um fator de escala,  $a$  e  $b$  são expoentes característicos. Como  $l$  é um fator de escala, escolhemos  $l^a y_0 = 1$ , levando a  $l = y_0^{-1/a}$ . Substituindo esta expressão na equação(3.4), temos

$$y(y_0, m) = y_0^{-1/a} y(1, y_0^{-b/a} m), \quad (3.5)$$

assumindo que o termo  $y(1, y_0^{-b/a} m)$  é constante para  $m \ll m_x$  e comparando a equação (3.5) com a primeira hipótese de escala, concluímos que  $\alpha = -1/a$ . Em seguida, escolhemos  $l^b m = 1$ , o que nos leva a  $l = m^{-1/b}$  e, quando substituimos na equação (3.4) dá

$$y(y_0, m) = m^{-1/b} y(m^{-a/b} y_0, 1), \quad (3.6)$$

novamente vamos supôr que o termo  $y(m^{-a/b} y_0, 1)$  é constante para  $m \gg m_x$ , comparando com a segunda hipótese de escala chegamos a  $\beta = -1/b$ . Agora, comparando as duas expressões obtidas para o fator de escala, temos

$$y_0^{-1/a} = m^{-1/b} \Rightarrow y_0^\alpha = m^\beta, \quad (3.7)$$

mas, para esse caso  $m = m_x$ ; logo temos

$$m_x = y_0^{\alpha/\beta}. \quad (3.8)$$

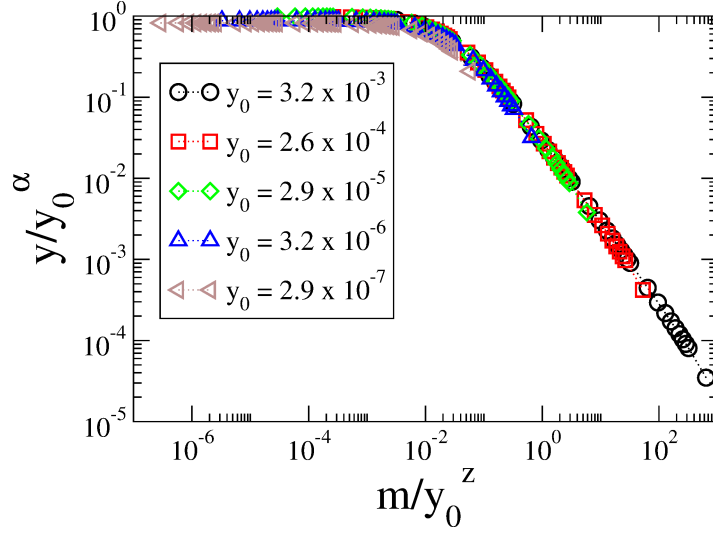
Finalmente comparando com a terceira hipótese de escala, permite-nos obter a relação entre os três expoentes críticos,  $\alpha, \beta$  e  $z$ , convergindo para a seguinte lei de escala

$$z = \frac{\alpha}{\beta}. \quad (3.9)$$

Assim, conhecendo quaisquer dois expoentes, o terceiro fica determinado por essa lei. Uma vez conhecidos os expoentes, podemos utilizá-los para redimensionar as variáveis  $y$  e  $m$  de tal forma que

$$y \rightarrow \frac{y}{y_0^\alpha} \text{ e } m \rightarrow \frac{m}{y_0^z}, \quad (3.10)$$

fazendo com que todas as curvas de  $y$  versus  $m$  sobreponham-se em uma única curva, como mostrado na Figura (3.3), validando tanto as hipóteses como os resultados encontrados.



**Figura 3.3:** Sobreposição de todas as curvas depois da reescala dos eixos.

Até aqui fizemos apenas um tratamento numérico. A partir de agora vamos fazer uma abordagem diferente, isto é, vamos estudar analiticamente o comportamento do decaimento para o ponto de bifurcação.

Para determinarmos os expoentes críticos analiticamente, vamos considerar novamente a função  $F^{(3)} = G(x)$ . Fazendo uma expansão em série de Taylor da  $G(x)$  em torno do ponto fixo  $x^*$  até o termo de segunda ordem e tomando  $R = R_c = 1 + \sqrt{8}$ , temos que

$$x_{m+1} - x^* = (x_m - x^*) - a(x_m - x^*)^2, \quad (3.11)$$

com  $a = -\frac{1}{2} \frac{d^2 G}{dx^2} \Big|_{x=x^*}$ . Chamando novamente  $x_{m+1} - x^* = y_{m+1}$  a equação (3.11) pode ser reescrita como

$$y_{m+1} = y_m - ay_m^2, \quad (3.12)$$

agrupando convenientemente os termos da equação (3.12), obtemos a seguinte equação de diferenças

$$\frac{y_{m+1} - y_m}{(m+1) - m} = -ay_m^2, \quad (3.13)$$

que pode ser aproximada pela seguinte equação diferencial

$$\frac{dy}{dm} = -ay^2. \quad (3.14)$$

Uma vez que para  $m = 0$  estamos na condição inicial  $y_0$  e que para um  $m$  genérico temos  $y(m)$ , a equação diferencial (3.14) pode ser resolvida usando esses termos como

limites das integrais, da seguinte forma

$$\int_{y_0}^{y(m)} \frac{dy}{y^2} = -a \int_0^m dm. \quad (3.15)$$

Após a integração da equação (3.15) e organizando os termos convenientemente obtemos a seguinte expressão

$$y(m) = \frac{y_0}{1 + ay_0 m}. \quad (3.16)$$

Vamos agora discutir quais as implicações da equação (3.16) para intervalos específicos de  $m$ . Começamos com  $m \ll m_x$ . Isso implica que  $ay_0 m \ll 1$  e, para tal caso, obtemos  $y(m) \approx y_0$  que comparado a primeira hipótese de escala nos permite concluir que o expoente crítico  $\alpha = 1$ . Consideremos agora o caso em que  $m \gg m_x$  que equivale a  $ay_0 m \gg 1$  o que por sua vez nos leva a  $y(m) \approx m^{-1}$  e com uma comparação rápida com a segunda hipótese de escala concluímos que  $\beta = -1$ . Finalmente, o caso em que  $m = m_x$ , o que significa que  $ay_0 m_x = 1$  e então obtemos  $m_x \approx y_0^{-1}$ . Comparando agora com a terceira hipótese de escala, obtemos  $z = -1$ . Com este procedimento, obtemos os três expoentes críticos discutidos anteriormente.

## 3.2 Após a bifurcação ( $\mu < 0$ )

Neste momento vamos discutir a dinâmica para  $\mu \neq 0$ , ou seja, na vizinhança da bifurcação, mais precisamente imediatamente depois que a bifurcação ocorreu. Como pode ser visto em [13] a convergência para o estado estacionário nesse caso é marcada por uma lei exponencial do tipo

$$y(m, \mu) \propto e^{-m/\tau}, \quad (3.17)$$

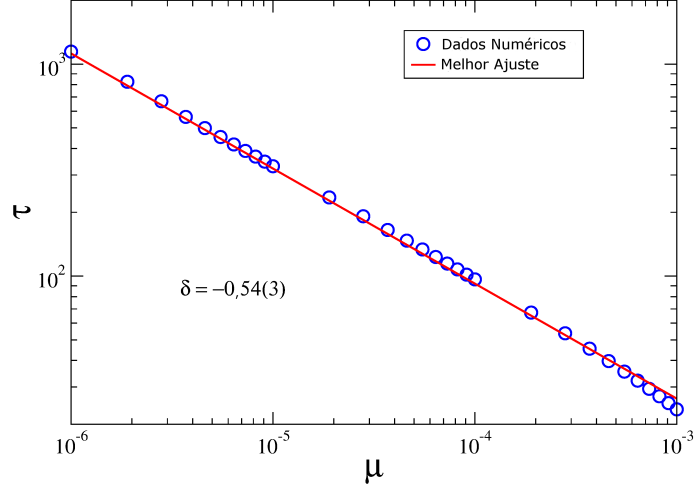
em que  $\tau$  é o tempo de relaxação descrito por

$$\tau \propto \mu^\delta, \quad (3.18)$$

onde  $\delta$  é um expoente de relaxação. A Figura (3.4) mostra o comportamento de  $\tau$  versus  $\mu$ . Um ajuste em lei de potência fornece-nos o expoente  $\delta = -0,54(3)$ .

O tratamento analítico é feito considerando novamente a função  $F^{(3)} = G(x, R)$ ; com isso, faremos uma expansão em Taylor da função  $G(x, R)$  em torno de  $x^*$  e  $R_c$ , como foi feito na seção 2.2, chegando à seguinte expressão

$$y_{m+1} = y_m + \mu + ay_m^2, \quad (3.19)$$



**Figura 3.4:** Gráfico do tempo de relaxação para o ponto fixo em função de  $\mu$

onde chegamos a

$$\frac{dy}{dm} \approx \mu + ay_m^2, \quad (3.20)$$

resolvendo a equação diferencial (3.20)

$$\int_0^\tau dm = \int_{y_0}^{y_m} \frac{dy}{\mu + ay^2}, \quad (3.21)$$

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{a\mu}} \left[ \arctan \left( \frac{y_m}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} \right) - \arctan \left( \frac{y_0}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} \right) \right]. \quad (3.22)$$

Analisando a equação (3.22), é possível notar que  $\tau$  diverge como  $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$  no limite de  $\mu$  pequeno. Assim, temos

$$\tau \propto \mu^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.23)$$

chegando a  $\delta = -\frac{1}{2}$ , o que confirma o resultado encontrado numericamente.



# Considerações Finais

No presente trabalho consideramos o mapa logístico, no qual inicialmente estudamos o fenômeno de intermitência, que ocorre antes de uma bifurcação tangente. Para esse fim, fizemos uma abordagem analítica e outra numérica; em ambos os casos encontramos que o número de passos  $l \propto \mu^{-\frac{1}{2}}$ , ou seja, o número de passos que o processo leva desde a sua entrada até a sua saída diverge como  $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$  no limite de  $\mu$  pequeno.

Continuamos nossos estudos a respeito da bifurcação tangente analisando a convergência para o ponto fixo, no ponto de bifurcação ( $\mu = 0$ ). Primeiramente, fizemos um tratamento fenomenológico do sistema, o que nos levou a uma lei de escala com expoentes críticos bem definidos do tipo  $z = \frac{\alpha}{\beta}$ . Esse tratamento permitiu-nos determinar  $z = -1$ ,  $\beta = -1$  e  $\alpha = 1$ . Ainda no ponto de bifurcação fizemos um tratamento analítico do problema, confirmando os resultados encontrados numericamente.

Feito isso, discutimos a dinâmica para  $\mu < 0$ , ou seja, tendo que a bifurcação já ocorreu. Nesse caso, a convergência para o estado estacionário é marcada por uma lei exponencial do tipo  $y(m, \mu) \propto e^{-\frac{m}{\tau}}$ , onde  $\tau$  é o tempo de relaxação descrito por  $\tau \propto \mu^\delta$ , sendo que nossos estudos mostraram que o expoente de relaxação  $\delta = -\frac{1}{2}$ . Novamente os resultados analíticos e numéricos foram confirmados.

Encerramos nosso estudo envolvendo a bifurcação tangente, uma vez que estudamos antes da bifurcação através da intermitência; na bifurcação, determinando os expoentes críticos e a lei de escala que os relacionam e depois da bifurcação, determinando o expoente de relaxação.

Como perspectivas, pretendemos aplicar a técnica desenvolvida aqui para sistemas dissipativos bidimensionais.

# Referências Bibliográficas

- [1] Ivan Stewart. *Será que Deus joga dados?: A nova matemática do caos*. ZAHAR, 1991.
- [2] Paulo Celso Ferrari. *Temas contemporâneos na formação docente a distância - Uma introdução à teoria do caos*. PhD thesis, Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC, 2008.
- [3] Marcelo Amorim Savi. *Dinâmica não-linear e caos*. E-papers, 2006.
- [4] James Gleick. *Chaos: Making a New Science*. Penguin Books, New York, NY, USA, 1987.
- [5] P. Holmes. Nonlinear dynamics, chaos and mechanics. *Applied Mechanics Review*, 43:23 – 29, 1989.
- [6] Kathleen T. Alligood, Tim D. Sauer, and James A. Yorke. *CHAOS: An Introduction to Dynamical Systems*. Springer, 1996.
- [7] Robert M. May. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, 261:459 – 467, 1976.
- [8] Partha Saha and Steven H. Strogatz. The birth of period three. *Mathematics Magazine*, 68:42 – 47, 1995.
- [9] Richard A. Holmgren. *A first course in discrete dydynamic systems*. Springer, 2 edition, 2013.
- [10] W. H. Maw and J. Dredge. *Engineering*, volume 17. Office for Advertisements and Publication, London, 1874.
- [11] Nelson Fiedler-Ferreira and Carmen P. Cintra do Prado. *Caos: uma introdução*. Blücher, 2009.
- [12] R. M. May. Biological populations with nonoverlapping generations: stable points, stable cycles, and chaos. *Science*, 186:645–647, 1974.

- [13] R. M. N. Teixeira, D. S. Rando, F. C. Geraldo, R. N. C. Filho, J. A. de Oliveira, and E. D. Leonel. Convergence towards asymptotic state in 1-d mappings: A scaling investigation. *Physics Letters A*, 379:1246 – 1250, 2015.
- [14] Ricardo L. Viana. *Introdução à Dinâmica Não-Linear e Caos*. Universidade Federal do Paraná - UFPR, 09 2011.
- [15] Juliano A. de Oliveira, Edson R. Papesso, and Edson D. Leonel. Relaxation to fixed points in the logistic and cubic maps: Analytical and numerical investigation. *Entropy*, 15:4310–4318, 2013.
- [16] J. E. Hirsch, B. A. Huberman, and D. J. Scalapino. Theory of intermittency. *Physical Review A*, 25:519 – 532, 1982.