

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA JÚLIO DE MESQUITA
FILHO

Hans Muller Junho de Mendonça

**PROPRIEDADES DE ESCALA E CASCATAS DE
BIFURCAÇÕES EM MAPAS UNIDIMENSIONAIS
DISCRETOS**

Rio Claro - SP, Fevereiro de 2018

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA JÚLIO DE MESQUITA
FILHO

Hans Muller Junho de Mendonça

**PROPRIEDADES DE ESCALA E CASCATAS DE BIFURCAÇÕES EM
MAPAS UNIDIMENSIONAIS DISCRETOS**

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Física pelo Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, Câmpus de Rio Claro, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física, área de Física Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Juliano Antônio de Oliveira

Rio Claro - SP, Fevereiro de 2018

517.39 Mendonça, Hans Muller Junho de
M539p Propriedades de escala e cascatas de bifurcações em
mapas unidimensionais discretos / Hans Muller Junho de
Mendonça. - Rio Claro, 2018
65 f. : il., figs., tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista,
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Juliano A. de Oliveira

1. Sistemas dinâmicos diferenciais. 2. Mapas
unidimensionais. 3. Expoentes críticos. 4. Leis de escala. 5.
Crises de fronteiras. 6. Espaço de parâmetros. I. Título.

Hans Muller Junho de Mendonça

**PROPRIEDADES DE ESCALA E CASCATAS DE BIFURCAÇÕES EM
MAPAS UNIDIMENSIONAIS DISCRETOS**

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Física pelo Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, Câmpus de Rio Claro, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física, área de Física Aplicada.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Juliano Antônio de Oliveira (Orientador)
UNESP - Câmpus de São João da Boa Vista

Prof. Dr. Edson Denis Leonel
UNESP - Câmpus de Rio Claro

Prof. Dr. Tiago Pereira da Silva
ICMC-USP - Câmpus de São Carlos

Rio Claro - SP, Fevereiro de 2018

RESULTADO: APROVADO

A minha família,
em especial
aos meus sobrinhos,
Maria e João, *dedico*.

Agradecimentos

Agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho direta ou indiretamente. O apoio e incentivo de todos foram muito importantes para o meu crescimento pessoal ou acadêmico durante esses anos de estudos neste curso de Pós-Graduação.

Agradeço,

- aos meus pais Maria e Sebastião e meu irmão Rodolfo por tudo que me ensinaram durante o decorrer da minha vida e por sempre darem forças para continuar meus estudos;
- aos professores que passaram em minha formação, desde o pré, até o presente momento. Sem vocês, nada disso teria acontecido. Meu muito obrigado;
- ao meu orientador e amigo Prof. Dr. Juliano Antônio de Oliveira, não só por todo o apoio e discussões nesta dissertação, mas também pelas conversas produtivas e dicas para uma vida e carreira acadêmica melhor;
- aos pesquisadores e amigos do Grupo de Estudos de Sistemas Complexos e Dinâmica Não Linear, em especial ao líder Prof. Dr. Edson D. Leonel, Dr. Diogo R. da Costa, Dr. André L. P. Livorati e ao MS. Matheus P. Silva;
- aos Professores Joelson e Flávio, que se tornaram grandes amigos, por todas as conversas e risadas durante as viagens para Rio Claro e ajudas necessárias durante esses anos de Pós-Graduação;
- aos amigos conhecidos durante meu período de moradia em Rio Claro - SP, em especial ao time de vôlei da UNESP e aos moradores e ex-moradores da república Mansão, muito obrigado pelos momentos que vivemos;
- a UNESP-Câmpus de Rio Claro, pela oportunidade de estudar e adquirir grandes conhecimentos nesta instituição;
- a Fundação de Amparo à Pesquisa do estado de São Paulo - FAPESP, pelo auxílio financeiro ao trabalho, cujo número de processo é 2015/22062-3, proporcionando dedicação exclusiva ao mesmo.

Resumo

Neste trabalho estudamos o decaimento das órbitas para os pontos fixos em bifurcações distintas em mapeamentos unidimensionais não lineares discretos. Consideramos o mapa Gauss, analisamos o diagrama de órbitas e estudamos o decaimento das trajetórias para o ponto de equilíbrio nas bifurcações tangente e de duplicação de período. Encontramos analítica e numericamente o conjunto de expoentes críticos que descrevem propriedades de escala nas bifurcações e próximos delas. Estes expoentes caracterizam o tipo de bifurcação do problema. Estudamos, também, eventos chamados crises de fronteiras, que ocorrem a partir de determinado valor do parâmetro de controle ν . Estendemos nossos estudos considerando o mapa Hassell e introduzimos uma perturbação no problema. Assim como no mapa Gauss, analisamos nestes sistemas o diagrama de órbitas, os decaimentos das trajetórias para os pontos fixos nas bifurcações transcíticas e investigamos analítica e numericamente para determinar os expoentes críticos destas bifurcações. Com o intuito de investigar os efeitos da perturbação paramétrica introduzida ao mapa Hassell, construímos e analisamos as trajetórias no espaço de parâmetros. Utilizamos, como ferramentas, as órbitas superestáveis e extremas. Nas duas classes de mapas (Gauss e Hassell), caracterizamos o caos via expoentes de Lyapunov. Mostramos, também que, quando obtidos os expoentes críticos e utilizando transformações de escalas apropriadas nos eixos coordenados, todas as curvas de decaimento para os pontos de equilíbrio se ajustaram em uma única curva, validando os expoentes.

Palavras Chaves: Mapas unidimensionais, pontos fixos, expoentes críticos, leis de escala, crises de fronteiras e espaço de parâmetros.

Abstract

In this work we study the decay of the orbits to the fixed points in different bifurcations of nonlinear discrete one-dimensional mappings. We consider the Gauss map and analyze the orbit diagram to study the convergence of the trajectories to the equilibrium point at the fold and flip bifurcation. We find numerically and analytically the set of critical exponents that describe some scaling properties at the bifurcations and near them. These critical exponents can also characterize which types of bifurcations that arises from the problem in question. We also study particular events called boundary crisis that occur from above a specific value of the control parameter ν . We continue the studies considering the Hassell map and its perturbed version. Just like in the Gauss map, we analyze the orbit diagrams within these systems, as well as the convergence of the orbits to the fixed points at the transcritical bifurcations, while also investigating numerically and analytically to determine the specific critical exponents of those bifurcations. With parametric perturbation added to the Hassell map, we build and analyze the trajectories on the parameter space. We apply, as tools, the superstable and extreme orbits. In the two classes of the maps (Gauss and Hassell), we quantify the chaos by Lyapunov exponents. After the critical exponents are obtained, using convenient scale transformations in the coordinate axes we show that all the curves of decay to the fixed points are collapsed into a universal curve, thus validating the exponents.

Key Words: One-dimensional maps, fixed points, critical exponents, scaling law, boundary crisis and parameter space.

SUMÁRIO

1	Propriedades dinâmicas do mapa Gauss	13
1.1	Diagrama de órbita e ponto fixo	13
1.2	Expoente de Lyapunov	15
1.3	Convergência das órbitas para o ponto fixo	18
1.3.1	Bifurcação tangente	18
1.3.2	Bifurcação de duplicação de período	21
1.4	Aproximações analíticas para as convergências das órbitas para os pontos fixos	24
1.4.1	\mathbf{x}_1^* na bifurcação tangente	24
1.4.2	\mathbf{x}_2^* na bifurcação de duplicação de período	26
1.5	Crises de fronteiras	29
2	Propriedades dinâmicas do mapa Hassell	34
2.1	Diagrama de órbita e ponto fixo	34
2.2	Expoente de Lyapunov	36
2.3	Convergência das órbitas para o ponto fixo	37
2.4	Aproximação analítica da convergência das órbitas para o ponto fixo N_1^*	40
3	Propriedades dinâmicas do mapa Hassell perturbado	43
3.1	Diagrama de órbita e ponto fixo	43
3.2	Expoente de Lyapunov	45
3.3	Convergência das órbitas para o ponto fixo	46
3.4	Aproximação analítica da convergência das órbitas para o ponto fixo N^*	50
3.5	Espaço de parâmetros, órbitas superestáveis e extremas	52
3.5.1	Espaço de parâmetros	53
3.5.2	Órbitas superestáveis e extremas	54
4	Comentários finais	61

Introdução

Com os conceitos matemáticos desenvolvidos na teoria de sistemas dinâmicos não lineares, comportamentos dinâmicos de vários sistemas físicos puderam ser caracterizados [1–5]. Estes sistemas podem ser classificados em dois tipos: determinísticos, ou não determinísticos. O primeiro: quando conhecidas as variáveis de estado em um dado instante, seu comportamento em qualquer instante posterior é determinado univocamente. O segundo: a modelagem, em geral, envolve teorias probabilísticas.

Edward Lorenz, na década de 1960, em seu estudo intitulado “Deterministic nonperiodic flow” [6] notou ao variar sutilmente as condições iniciais do sistema, mudanças totalmente distintas durante a evolução dessas condições quando comparadas entre elas. Isto, teoricamente, estava estranho, pois o problema era determinístico e essas pequenas variações nas condições iniciais não deveriam alterar completamente as características da evolução do problema. Assim, estes comportamentos observados por Lorenz, indicavam ser caóticos.

Como caracterizar um comportamento caótico em sistemas unidimensionais não lineares discretos? Robert Hilborn, em seu livro [7] apresentou uma maneira quantitativa de verificar este tipo de comportamento. Ele analisou o afastamento médio entre trajetórias vizinhas, de forma exponencial, utilizando os expoentes de Lyapunov. Quando os valores destes expoentes são negativos: temos órbitas regulares, ou periódicas. Caso contrário, positivos: temos trajetórias caóticas, implicando na divergência exponencial média entre essas condições iniciais.

Com a descoberta de sistemas sensíveis a condições iniciais, estudos em dinâmica não linear e caos aumentaram muito ao longo das últimas décadas e despertaram o interesse de muitos pesquisadores para essa área [8–19]. Por exemplo, os estudos realizados por Robert May e co-autores [20, 21] com o mapa logístico. Um modelo que possui um parâmetro de controle e não linearidade quadrática, sendo matematicamente simples. Entretanto, quando variamos o parâmetro, este mapeamento apresenta diversos comportamentos em sua dinâmica, como pontos fixos, bifurcações, atratores caóticos, crises. Possui, também, aplicações em diversas áreas da ciência, como economia [22], criptografia [23, 24], dentre outras [25–27].

Existem sistemas dinâmicos lineares e não lineares. O primeiro: existem soluções gerais e nos permite determinar o comportamento futuro do sistema. Mas o segundo:

as soluções exatas, em geral, não são simples de obter analiticamente e se obtidas, os resultados podem ser de difícil interpretação. Há alguns métodos que facilitam os estudos desses sistemas. Por exemplo: as seções de Poincaré [7], em que conseguimos reduzir o fluxo de soluções de um problema de N dimensões para $(N-1)$ dimensões. Outro exemplo: a discretização de equações diferenciais [28]. Este processo, por exemplo, pode demandar um custo numérico menor em obter informações do problema quando comparado com modelos descritos por equações diferenciais.

O conjunto de pontos da evolução de um modelo unidimensional discreto – incluindo a condição inicial estabelecida –, são chamados órbitas ou trajetórias do sistema. Estas órbitas podem ser caóticas ou não caóticas e as características dessas trajetórias estão ligadas ao parâmetro de controle do problema. Uma maneira qualitativa de observar esses comportamentos – descartando o transiente e após um longo período de iterações – é através do diagrama de órbitas do sistema. Este diagrama é a evolução da trajetória do sistema em função do parâmetro de controle e mostra o nascimento, evolução e destruição do conjunto de atratores do problema [29]. Outra maneira de observar – também descartando o transiente e após um longo período de iterações – é através do espaço de parâmetros [30], analisando a dinâmica do sistema em função dos parâmetros de controle, quando o mesmo possui dois ou mais.

Em mapeamentos unidimensionais, podemos observar e estudar alguns comportamentos relacionados a dinâmica do sistema. Um deles: o ponto fixo [12], dado da seguinte forma $F(x^*) = x^*$, sendo um ponto em que “mapeia” a si mesmo. Este ponto pode ser estável, instável ou assintoticamente estável. Outro: o ponto de bifurcação [7], ponto em que ocorre uma mudança na estabilidade do ponto fixo, alterando seu comportamento de assintoticamente estável para instável ou vice e versa. Por último: atratores, classificados em dois tipos: caóticos (ou estranhos) e não caóticos. O comportamento desses atratores são importantes para explicar fenômenos dinâmicos do sistema [29].

Os estudos sobre atratores e como são afetados quando o parâmetro de controle do sistema é variado recebeu atenção de pesquisadores. Alguns tópicos nessa área incluem teoria de bifurcação [31,32], cascatas de duplicação de período resultando em caos [21,33–35], dentre outros. Quando um atrator caótico colide com um ponto fixo instável, ocorrem mudanças no comportamento da dinâmica caótica do sistema, no valor do parâmetro em que acontece esse cruzamento, chamado crise [36–38]. Se o atrator caótico é destruído, temos crise de fronteira, mas se acontece a expansão no mesmo, temos crise interior. Uma ferramenta que ajuda no estudo destes eventos são as órbitas *supertracks*, que são trajetórias avaliadas no ponto cuja derivada do mapeamento é nula e com dependência apenas no parâmetro de controle do mesmo [39].

Neste trabalho estudamos o decaimento das órbitas para os pontos fixos em três bifurcações distintas, sendo elas: tangente, transcritical e duplicação de período. Estudadas em dois mapeamentos unidimensionais não lineares discretos. O primeiro: o mapa

Gauss [7, 40, 41], analisamos o diagrama de órbitas e estudamos o decaimento das trajetórias para o ponto de equilíbrio nas bifurcações tangente e de duplicação de período. Encontramos analítica e numericamente o conjunto de expoentes críticos que descrevem propriedades de escala nas bifurcações e próximas delas. Estes expoentes caracterizam o tipo de bifurcação do problema. Estudamos, também, os eventos chamados crises de fronteiras, que ocorrem a partir de determinado valor de ν . A segunda classe: o mapa Hassell [42, 43] e sua versão perturbada. Nestes dois mapeamentos também analisamos o diagrama de órbitas, os decaimentos das trajetórias para o ponto fixo na bifurcação transcítica e estudamos analítica e numericamente os expoentes críticos característicos desta bifurcação.

Com a perturbação paramétrica introduzida ao mapa Hassell, como aplicada na ref. [44] para o mapa logístico, construímos e analisamos as trajetórias no espaço de parâmetros a partir do cálculo dos expoentes de Lyapunov. Neste estudo, utilizamos como ferramentas as órbitas superestáveis e extremas [44]. Nas duas classes de mapas (Gauss e Hassell), caracterizamos o caos via expoentes de Lyapunov. Mostramos também que quando obtidos os expoentes críticos e utilizando transformações de escalas apropriadas, todas as curvas de decaimento para os pontos de equilíbrio se sobrepõem em uma única curva, validando os expoentes.

Para melhor compreensão da dissertação, organizamos a mesma em quatro Capítulos. No primeiro Capítulo: descrevemos os estudos detalhados sobre os comportamentos dinâmicos para o mapa Gauss. No segundo Capítulo: descrevemos os estudos realizados no mapa Hassell. O terceiro Capítulo: apresentamos os estudos detalhados do mapa Hassell perturbado, analisando também o espaço de parâmetros do mesmo. No último Capítulo: apresentamos os comentários finais sobre o desenvolvimento e resultados do trabalho.

Capítulo 1

Propriedades dinâmicas do mapa Gauss

Nesse Capítulo serão apresentados o diagrama de órbita, os conceitos de ponto fixo, estabilidade e os expoentes de Lyapunov para o mapa Gauss. Mostramos, numericamente os decaimentos das órbitas para os pontos de equilíbrio e aproximações analíticas. Ainda neste Capítulo, analisamos o diagrama de órbitas da variável x em função do parâmetro β , para diferentes valores do parâmetro ν .

1.1 Diagrama de órbita e ponto fixo

Nesta seção consideramos uma família de mapas unidimensionais dada da seguinte forma:

$$F(x_n) = x_{n+1} = e^{-\nu x_n^\xi} + \beta, \quad (1.1)$$

onde ν , ξ e β são os parâmetros de controle, x uma variável dinâmica e n o termo de recorrência do sistema. A escolha de $\xi = 2$ recupera o mapa Gauss, definido como:

$$F(x_n) = x_{n+1} = e^{-\nu x_n^2} + \beta. \quad (1.2)$$

Na referência [41] o mapa Gauss é utilizado para estudar uma rede neural recorrente de um ciclo que é composta por um único neurônio caótico com auto-interação. Neste modelo o parâmetro ν é considerado igual a 1 e o parâmetro β é interpretado como a soma das bias fixas. Robert Hilborn, em seu livro [7] também aborda este mapeamento e descreve alguns comportamentos dinâmicos do mesmo.

Dada uma condição inicial x_0 , o mapa (1.2) evolui através de um processo iterativo do tipo:

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, \quad (1.3)$$

em que este conjunto de pontos representa a órbita ou trajetória do sistema a partir de x_0 , representando a evolução do mesmo. Trajetórias podem ser caóticas ou não caóticas e uma maneira qualitativa de observar esses comportamentos – descartando o transiente e após um longo período de iterações – é através do diagrama de órbitas do sistema. A figura 1.1 mostra este diagrama referente ao mapa (1.2), em que temos x como função de β . Fixamos $\nu = 4,9$ e usamos a condição inicial $x_0 = 0,01$.

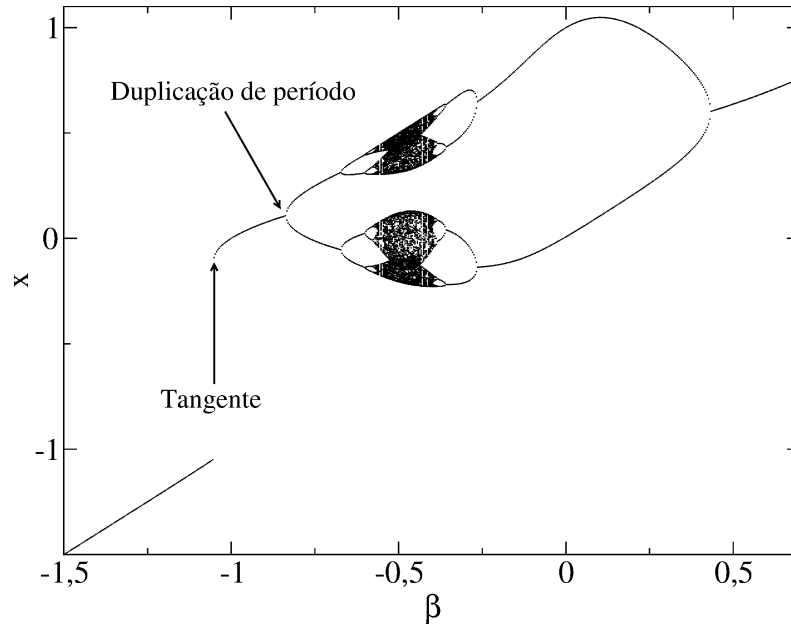


Figura 1.1: Diagrama de órbita para o mapa Gauss, com $\nu = 4,9$ e $x_0 = 0,1$.

Na seção 1.3 vamos estudar a convergência das órbitas para o ponto fixo, obtido da seguinte maneira

$$F(x^*) = x^*. \quad (1.4)$$

Utilizando a equação (1.4), encontramos os pontos fixos de período 1 do mapa (1.2) da seguinte forma

$$F(x^*) = e^{-\nu x^{*2}} + \beta = x^*,$$

$$e^{-\nu x^{*2}} + \beta - x^* = 0, \quad (1.5)$$

que é uma equação transcendente e uma solução analítica não existe. Para encontrarmos os pontos fixos das bifurcações relacionados ao parâmetro β , podemos derivar o mapa (1.2), considerando $\nu = 4,9$ e usar a seguinte equação

$$\left(\frac{dx_{n+1}}{dx_n} \right)_{x_n=x^*} = 1, \quad (1.6)$$

manipulando algebricamente a equação (1.6), temos

$$h(x) = -2\nu x e^{-\nu x^2} - 1. \quad (1.7)$$

Utilizamos o método numérico de Newton Raphson [45] para encontrarmos o ponto fixo da bifurcação a partir de $h(x)$. Com isso, encontramos $x_1^* \approx -0,11$.

Encontrado o ponto fixo da bifurcação, isolamos β na equação (1.5) e obtemos o valor $\beta = \beta_{c_1} \approx -1,05$. O índice c indica que este ponto é um ponto crítico* em que ocorre a bifurcação, caracterizada como tangente [12]. Igualando a equação (1.6) a -1 , temos como característica, uma bifurcação de duplicação de período [12,18] e obtemos $x_2^* \approx 0,11$ e $\beta = \beta_{c_2} \approx -0,84$. Essas bifurcações são indicadas pelas setas na figura 1.1.

1.2 Expoente de Lyapunov

Divergência exponencial média de trajetórias vizinhas é uma propriedade que nos leva a um tipo de comportamento chamado de caótico [7]. Esta divergência é dada da seguinte forma

$$d_t = d_0 e^{\lambda t}, \quad (1.8)$$

onde t é o tempo, d_0 a distância inicial entre as trajetórias, d_t a distância futura e λ é o chamado expoente de Lyapunov.

Seja um mapa unidimensional discreto qualquer, dado da seguinte forma

$$x_{n+1} = F(x_n). \quad (1.9)$$

Vamos considerar duas condições iniciais bem próximas para analisarmos suas órbitas e poderemos introduzir o conceito de expoentes de Lyapunov para mapas unidimensionais.

Considere uma condição inicial x_0 e outra condição inicial \tilde{x}_0 muito próximas, tal que a distância

$$d_0 = |\tilde{x}_0 - x_0|, \quad (1.10)$$

seja muito pequena. Após a primeira iteração do mapa, a distância entre os pontos correspondentes a cada órbita será

$$d_1 = |\tilde{x}_1 - x_1| = |F(\tilde{x}_0) - F(x_0)|, \quad (1.11)$$

realizando a iteração seguinte

$$d_2 = |F(\tilde{x}_1) - F(x_1)| = |F^{[2]}(\tilde{x}_0) - F^{[2]}(x_0)|. \quad (1.12)$$

*Definimos como ponto crítico o ponto em que o ponto fixo troca sua estabilidade de assintoticamente estável para instável ou vice e versa.

Continuando este processo até a n -ésima iteração a distância d_n será dada por

$$d_n = |F^{[n]}(\tilde{x}_0) - F^{[n]}(x_0)|. \quad (1.13)$$

Se o comportamento das órbitas é caótico, a distância entre as trajetórias da equação (1.9) divergem com n [7], então, podemos reescrever a equação (1.8) da seguinte forma

$$d_n = d_0 e^{\lambda n}. \quad (1.14)$$

Substituindo as equações (1.10) e (1.13) na equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} |F^{[n]}(\tilde{x}_0) - F^{[n]}(x_0)| &= |\tilde{x}_0 - x_0| e^{\lambda n}, \\ \frac{|F^{[n]}(\tilde{x}_0) - F^{[n]}(x_0)|}{|\tilde{x}_0 - x_0|} &= e^{\lambda n}, \\ \lambda &= \frac{1}{n} \ln \left(\frac{|F^{[n]}(\tilde{x}_0) - F^{[n]}(x_0)|}{|\tilde{x}_0 - x_0|} \right), \end{aligned} \quad (1.15)$$

como $\tilde{x}_0 = x_0 + d_0$, temos

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{F^{[n]}(x_0 + d_0) - F^{[n]}(x_0)}{d_0} \right). \quad (1.16)$$

Aplicando os limites quando d_0 tende a zero e n tende ao infinito, teremos

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\lim_{d_0 \rightarrow 0} \frac{F^{[n]}(x_0 + d_0) - F^{[n]}(x_0)}{d_0} \right), \quad (1.17)$$

note que, o termo do lado direito entre parênteses é a definição de derivada da função $F^{[n]}(x_0)$. Logo podemos reescrever a equação (1.17) como

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left[\left(\frac{dF^{[n]}(x)}{dx} \right)_{x=x_0} \right]. \quad (1.18)$$

A derivada aplicada no ponto x_0 entre parênteses na equação (1.18) – utilizando a regra da cadeia [46] – pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\left(\frac{dF^{[n]}(x)}{dx} \right)_{x=x_0} = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{dF(x_i)}{dx_i} = \prod_{i=0}^{n-1} F'(x_i), \quad (1.19)$$

substituindo este resultado na equação (1.18) e lembrando que o logaritmo do produto é a soma dos logaritmos de cada um dos seus fatores. Teremos a expressão final para o expoente de Lyapunov dada por

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |F'(x_i)|. \quad (1.20)$$

A função F que define o mapa depende em geral de um parâmetro de controle. Deste modo, o expoente de Lyapunov λ também dependerá desse parâmetro [47], ou seja, $\lambda = \lambda(\beta)$.

Na equação (1.20), se $\lambda > 0$, temos uma marca registrada da ocorrência de caos, pois implica na divergência do somatório para números grandes de iteradas n e caso contrário, $\lambda \leq 0$ as órbitas são regulares.

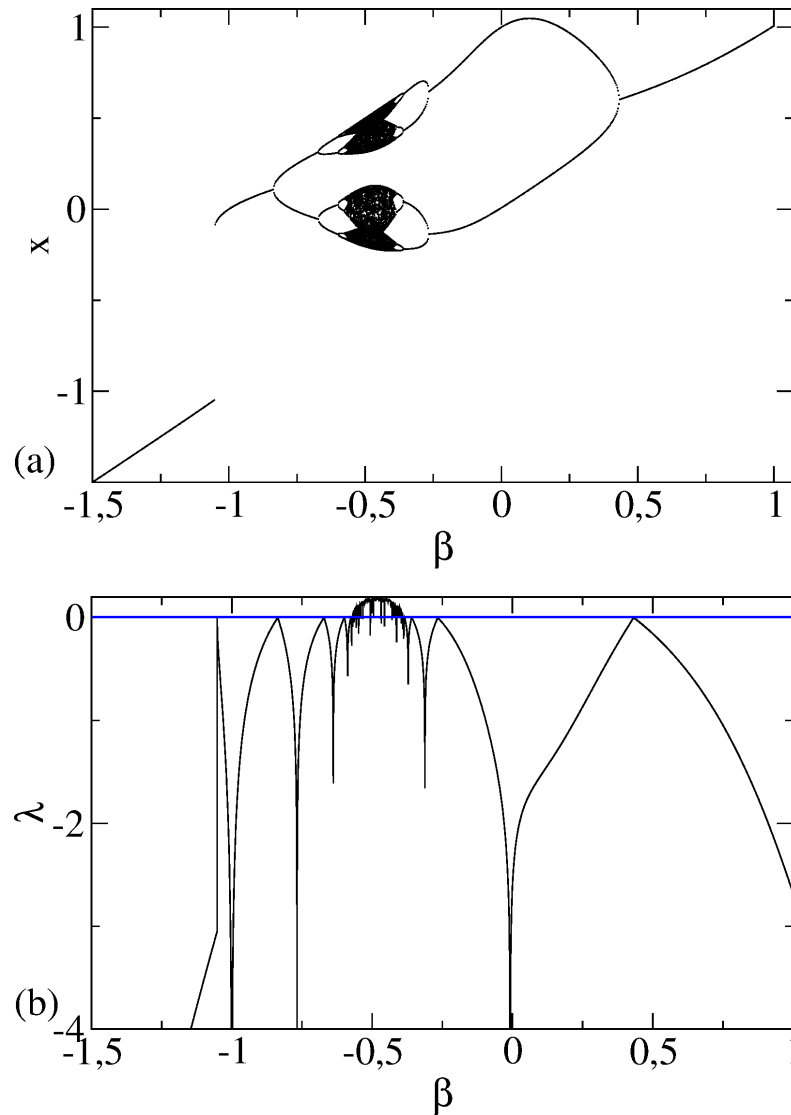


Figura 1.2: (a) Diagrama de órbita para o mapa Gauss, (b) Expoente de Lyapunov referente ao diagrama de órbita mostrado em (a). A linha azul em (b) quando tocada pela curva em preto, marca os pontos de bifurcações.

A figura 1.2(a) mostra a evolução do sistema em função do parâmetro de controle, enquanto a figura 1.2(b) mostra os expoentes de Lyapunov, em que observamos os expoentes positivos e negativos. A linha azul ($\lambda = 0$) na figura 1.2(b) quando tocada pela curva em preto, marca os pontos de bifurcações.

1.3 Convergência das órbitas para o ponto fixo

Para entendermos o decaimento das órbitas para os pontos fixos x_1^* e x_2^* , vamos investigar o comportamento de x aproximando dos pontos fixos em dois casos, sendo eles: Na bifurcação tangente e na bifurcação de duplicação de período. A convergência depende do número de iterações n , da condição inicial x_0 e de um parâmetro $\mu = \beta_c - \beta \cong 0$, com $\beta_c \geq \beta$, que define a distância do ponto de bifurcação, conforme apresentamos a seguir

1.3.1 Bifurcação tangente

Quando temos $\mu_1 = \beta_{c1} - \beta = 0$, implica que, estamos no ponto de bifurcação β_{c1} relacionado ao ponto fixo x_1^* . Desta maneira, a convergência de órbitas para o ponto de equilíbrio é mostrada na figura 1.3, usando os parâmetros de controle e condições iniciais especificados na própria figura.

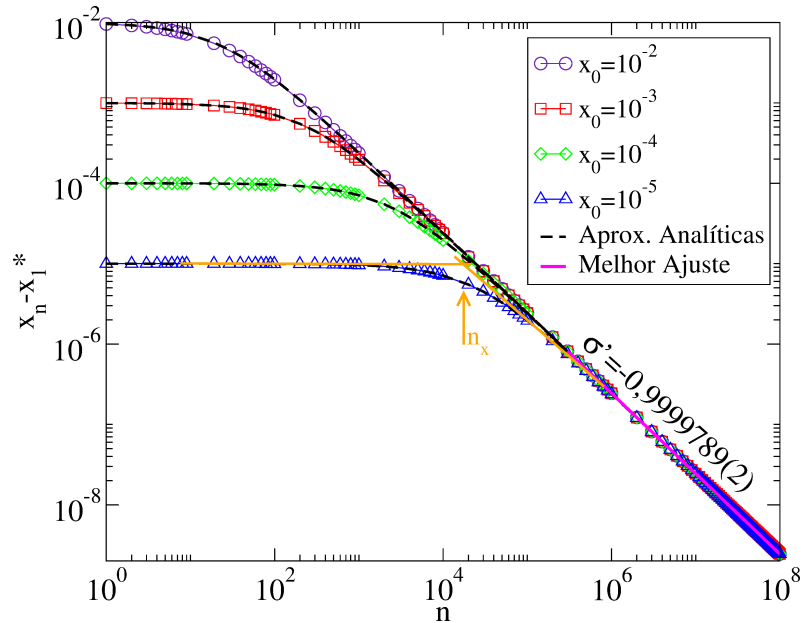


Figura 1.3: Decaimento das órbitas para o ponto fixo $x_1^* \approx -0,11$, quando $\beta = \beta_{c1} = -1,05$ e $\nu = 4,9$.

Na figura 1.3 – dependendo da condição inicial x_0 – as órbitas iniciam e mantêm-se em um comportamento constante até o número de iteração de cruzamento n_x^\dagger . Após este cruzamento as trajetórias decaem em lei de potência descrita pelo expoente σ' . Analisando a figura 1.3, considerando $(x_n - x_1^*) = \epsilon_{n1}$ e $(x_0 - x_1^*) = \epsilon_{01}$, podemos propor as seguintes hipóteses de escala:

i) Para $n \ll n_x$, o comportamento de $(x - x_1^*)$ vs. n é dado por:

$$\epsilon_{n1} \propto \epsilon_{01}^{\sigma'}, \text{ observando que a evolução das órbitas iniciam e mantêm-se constantes}$$

[†]Cruzamento entre as duas linhas em laranja na figura 1.3, uma indicando o comportamento constante e a outra o decaimento em lei de potência.

antes do número de iterações de cruzamento, concluímos que o expoente crítico é $\alpha' = 1$;

ii) Para $n \gg n_x$, o comportamento de $(x - x_1^*)$ vs. n é dado por uma lei de potência do tipo:

$\epsilon_{n_1} \propto n^{\sigma'}$, em que σ' é um expoente crítico;

iii) Finalmente, no número de iterações de cruzamento n_x , temos que:

$n_x \propto \epsilon_{0_1}^{z'}$, em que z' é um expoente crítico.

O expoente σ' pode ser obtido a partir de um ajuste em lei de potência para o regime de decaimento e na figura 1.3 obtivemos que $\sigma' = -0,9999789(2)$, considerando $\mu_1 = 0$ e $\nu = 4,9$. A figura 1.4 mostra n_x como função de ϵ_{0_1} , em que obtivemos o valor do expoente crítico z' dado por um ajuste em lei de potência, sendo $z' \approx -1$.

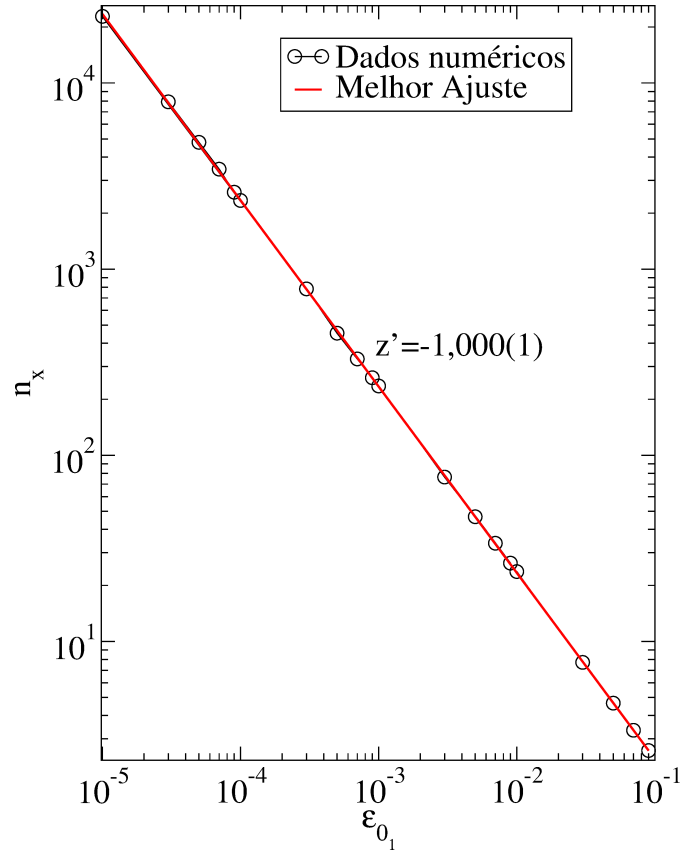


Figura 1.4: Número de iterações de cruzamento n_x como função das condições ϵ_{0_1} .

Com o comportamento observado na figura 1.3 e as hipóteses de escala, podemos descrever o comportamento de ϵ_{n_1} como uma função homogênea generalizada nas variáveis n e ϵ_{0_1} , definida como:

$$x_{(\epsilon_{0_1}, n)} = l' x(l'^{a'} \epsilon_{0_1}, l'^{b'} n), \quad (1.21)$$

em que l' é um fator de escala e a' e b' são expoentes característicos. Como l' é um fator de escala, este pode assumir qualquer valor – em especial – escolhemos $l'^{a'} \epsilon_{0_1} = 1$, levando para $l' = \epsilon_{0_1}^{-1/a'}$. Substituindo isso na equação (1.21) obtemos:

$$x_{(\epsilon_{0_1}, n)} = \epsilon_{0_1}^{-1/a'} x(1, \epsilon_{0_1}^{-b'/a'} n). \quad (1.22)$$

Assumindo o termo $x(1, \epsilon_{0_1}^{-b'/a'} n)$ constante para $n \ll n_x$ e comparando com a primeira hipótese de escala, concluímos que $\alpha' = -1/a'$. Consideramos ainda l' sendo constante e escolhemos agora $l'^{b'} n = 1$, que nos leva para $l' = n^{-1/b'}$ e substituímos na equação (1.21), obtemos

$$x_{(\epsilon_{0_1}, n)} = n^{-1/b'} x(n^{-a'/b'} \epsilon_{0_1}, 1), \quad (1.23)$$

novamente vamos supor que o termo $x(n^{-a'/b'} \epsilon_{0_1}, 1)$ é constante para $n \gg n_x$ e comparando com a segunda hipótese de escala, concluímos que $\sigma' = -1/b'$. Finalmente, comparamos as duas expressões obtidas para o fator de escala. Isso na verdade, nos leva para $n_x = \epsilon_{0_1}^{\alpha'/\sigma'}$.

Uma comparação com a terceira hipótese de escala nos permite obter uma relação entre os três expoentes críticos α' , σ' e z' . Portanto, convergindo para a seguinte lei de escala

$$z' = \frac{\alpha'}{\sigma'}. \quad (1.24)$$

A partir da equação (1.24) podemos ver que conhecendo qualquer dois expoentes, permite-nos encontrar o terceiro. Assim, na figura 1.5 os expoentes também podem ser usados para reescalar as variáveis ϵ_{n_1} e n em uma maneira conveniente, tal que $\epsilon_{n_1} \rightarrow \epsilon_{n_1}/\epsilon_{0_1}^{\alpha'}$ e $n \rightarrow n/\epsilon_{0_1}^{z'}$ em que ocorre o colapso de todas as curvas de ϵ_{n_1} vs. n em uma única curva. Este colapso valida nossos expoentes α' , σ' e z' citados anteriormente.

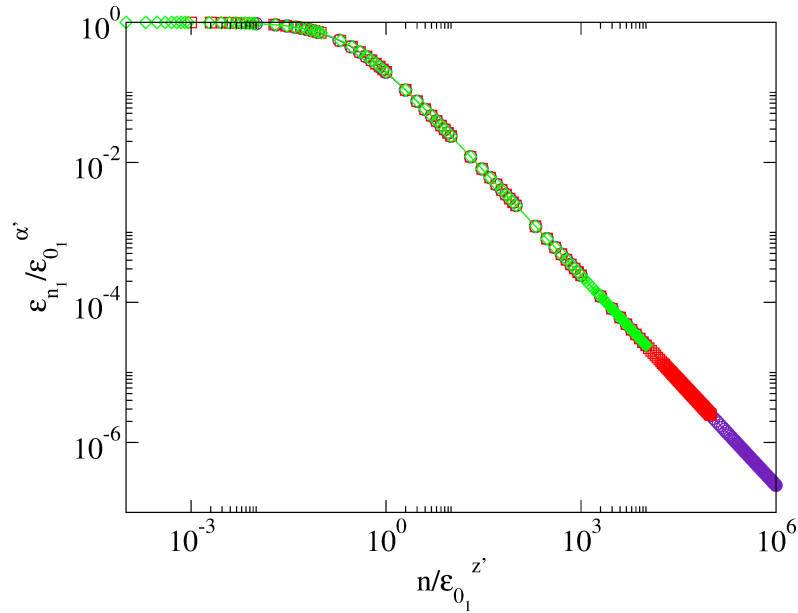


Figura 1.5: Colapso de todas as curvas mostradas na figura 1.3 em uma única curva, depois de uma reescala conveniente dos eixos coordenados.

1.3.2 Bifurcação de duplicação de período

Vamos analisar a convergência das órbitas para o ponto fixo x_2^* considerando $\mu_2 = \beta_{c_2} - \beta = 0$, que significa que estamos no ponto $\beta = \beta_{c_2}$, em que ocorre uma bifurcação de duplicação de período. Com isso, analisaremos as convergências das trajetórias considerando o mapa na sua segunda iteração, da seguinte forma

$$x_{n+2} = e^{-\nu x_{n+1}^2} + \beta. \quad (1.25)$$

Na figura 1.6, podemos ver a convergência das órbitas para o ponto de equilíbrio x_2^* , usando os parâmetros especificados na própria imagem. Dependendo da condição inicial x_0 , as órbitas iniciam e mantêm-se constantes até um número de iterações de cruzamento n_x . Após este cruzamento a trajetória decai em lei de potência, descrita pelo expoente σ e o tamanho do patamar depende da condição inicial x_0 . Analisando o comportamento mostrado na figura 1.6, também podemos usar as hipóteses de escala discutidas na subseção 1.3.1, mas substituindo $(x_n - x_1^*)$ por $(x_n - x_2^*) = \epsilon_{n_2}$, $(x_0 - x_1^*)$ por $(x_0 - x_2^*) = \epsilon_{0_2}$, α' por α , σ' por σ e z' por z .

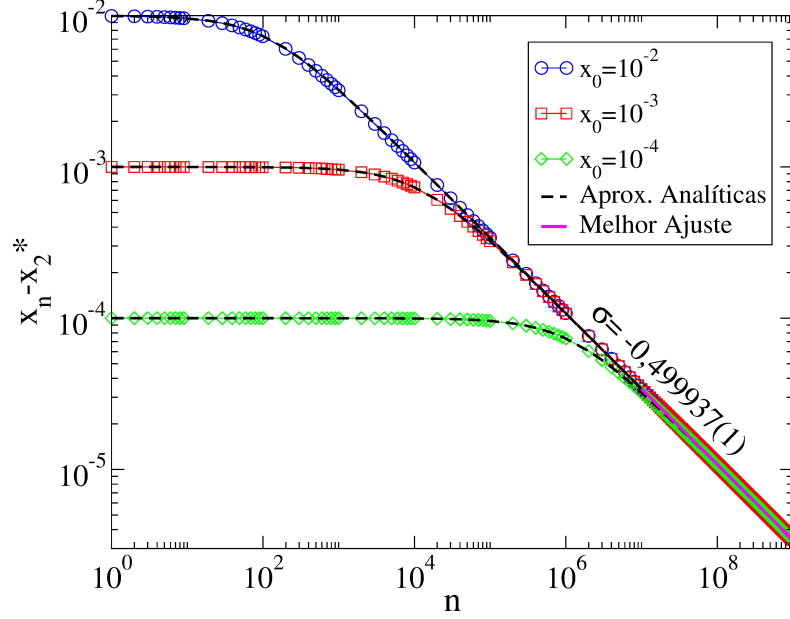


Figura 1.6: Decaimento das órbitas para o ponto fixo $x_2^* \approx 0,11$, quando $\beta = \beta_{c_2} \approx -0,84$ e $\nu = 4,9$.

O expoente σ pode ser obtido a partir da figura 1.6 em um ajuste em lei de potência no regime de decaimento, fornecendo $\sigma = -0,499937(1)$, considerando $\mu = 0$ e $\nu = 4,9$. A figura 1.7 mostra n_x como função de ϵ_{0_2} , em que obtemos o valor do expoente crítico z dado por um ajuste em lei de potência, sendo $z \approx -2$. Com o comportamento observado na figura 1.6 e as hipóteses de escala, podemos descrever o comportamento de ϵ_{n_2} como uma função homogênea generalizada nas variáveis n e ϵ_{0_2} , definida como:

$$x_{(\epsilon_{0_2}, n)} = lx(l^a \epsilon_{0_2}, l^b n), \quad (1.26)$$

em que l é um fator de escala e a e b são expoentes característicos. Utilizando o mesmo procedimento feito na subseção 1.3.1, conseguimos relacionar os três expoentes críticos α , σ e z , pela lei de escala

$$z = \frac{\alpha}{\sigma}. \quad (1.27)$$

Portanto, conhecendo qualquer dois expoentes, permite-nos encontrar o terceiro usando a equação (1.27). A figura 1.8 mostra que os expoentes podem ser utilizados para reescalar os eixos coordenados da figura 1.6 de maneira conveniente, tal que $\epsilon_{n_2} \rightarrow \epsilon_{n_2}/\epsilon_{0_2}^\alpha$ e $n \rightarrow n/\epsilon_{0_2}^z$, de modo que podemos observar o colapso de todas as curvas de ϵ_{n_2} vs. n em uma única curva. Este colapso valida os expoentes α , σ e z citados anteriormente.

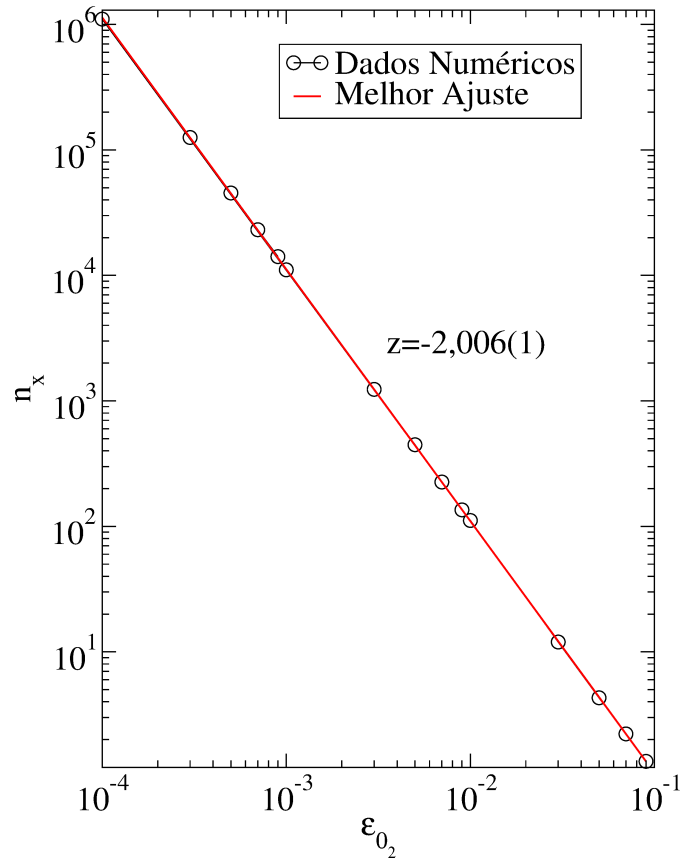


Figura 1.7: Número de iterações de cruzamento n_x como função das condições ϵ_{0_2} .

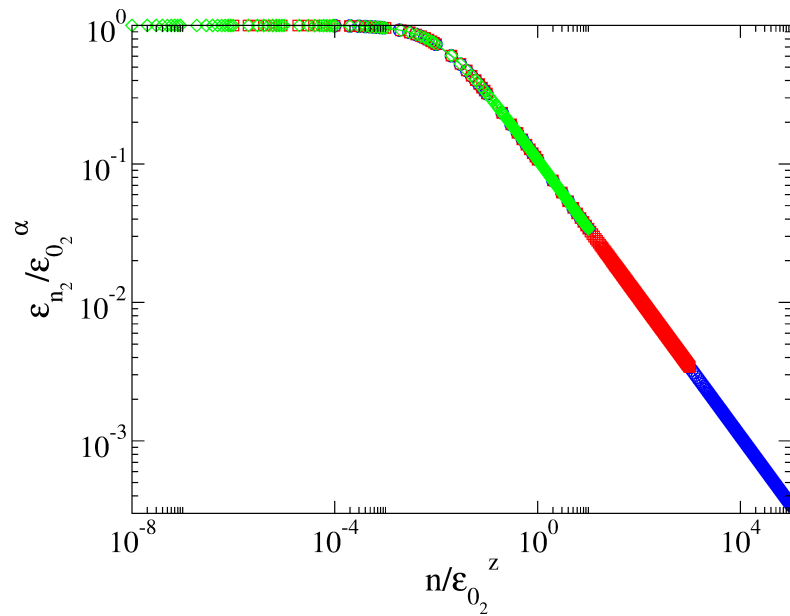


Figura 1.8: Colapso de todas as curvas mostradas na figura 1.6 em uma única curva, depois de uma reescala conveniente dos eixos coordenados.

1.4 Aproximações analíticas para as convergências das órbitas para os pontos fixos

Nesta seção vamos discutir e apresentar as aproximações analíticas para as convergências das órbitas nos pontos fixos x_1^* e x_2^* , nas suas respectivas bifurcações – tangente e duplicação de período. Isso será abordado em dois momentos. O primeiro: na subseção 1.4.1, em que estudamos esta aproximação para o ponto fixo x_1^* na bifurcação tangente. O último: na subseção 1.4.2, em que investigamos a aproximação para o ponto fixo x_2^* na bifurcação de duplicação de período.

1.4.1 x_1^* na bifurcação tangente

Vamos estudar esta aproximação para o caso quando $\mu_1 = 0$, quando estamos no ponto de bifurcação $\beta = \beta_{c_1} \approx -1,05$. Expandindo o mapa (1.2) em série de Taylor em torno do ponto fixo x_1^* , obtemos

$$F(x) \approx F(x_1^*) + F'(x_1^*)(x - x_1^*) + \frac{F''(x_1^*)}{2!} (x - x_1^*)^2 + O(3), \quad (1.28)$$

reescrevendo a equação (1.28) na forma

$$F(x) \approx x_1^* + u_1(x - x_1^*) + u_2(x - x_1^*)^2 + O(3), \quad (1.29)$$

em que u_1 e u_2 são as derivadas de primeira e segunda ordem do mapa (1.2), divididas pelos seus respectivos fatores e aplicadas ao ponto fixo, fornecendo

$$u_1 = -2\nu x_1^* e^{-\nu x_1^{*2}} \quad (1.30)$$

e

$$u_2 = \frac{2\nu e^{-\nu x_1^{*2}} [2\nu x_1^{*2} - 1]}{2!}. \quad (1.31)$$

Resolvendo numericamente para $x_1^* \approx -0,11$, $\beta_{c_1} \approx -1,05$ e $\nu = 4,9$, obtemos $u_1 = 1$ e $u_2 \approx -4,09$.

Perto do ponto fixo, x é muito próximo de 0, então, podemos manter os termos de baixa ordem na expressão (1.28), considerando até o termo de segunda ordem. Com isso, temos

$$x_{n+1} = x_1^* + u_1(x_n - x_1^*) + u_2(x_n - x_1^*)^2, \quad (1.32)$$

supondo que a evolução temporal discreta em relação a variável dinâmica x pode ser considerada como uma evolução contínua, podemos reescrever a equação (1.32) como

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_1^* + x_n - x_1^* + u_2(x_n - x_1^*)^2, \\
\frac{x_{n+1} - x_n}{(n+1) - n} &= u_2(x_n - x_1^*)^2, \\
&\approx \frac{dx}{dn} = u_2\epsilon_1^2,
\end{aligned} \tag{1.33}$$

em que $\epsilon_1 = (x - x_1^*)$. Fazendo separação de variáveis, obtemos a seguinte equação diferencial

$$\frac{dx}{\epsilon_1^2} = u_2 dn. \tag{1.34}$$

A condição inicial x_0 é definida para $n = 0$, enquanto que, para um arbitrário n temos $x(n)$. Então, fazendo o processo de integração na equação (1.34) de ambos os lados e usando estas variáveis como os limites de integração, temos

$$\int_{x_0}^{x(n)} \frac{dx'}{\epsilon_1'^2} = u_2 \int_0^n dn'. \tag{1.35}$$

Integrando esta equação, obtemos

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\epsilon_1'} \Big|_{x_0}^{x(n)} &= u_2 n' \Big|_0^n, \\
-\frac{1}{\epsilon_{n_1}} + \frac{1}{\epsilon_{0_1}} &= u_2 n,
\end{aligned} \tag{1.36}$$

em que $\epsilon_{n_1} = (x(n) - x_1^*)$ e $\epsilon_{0_1} = (x_0 - x_1^*)$. Manipulando algebricamente, chegamos a aproximação analítica para a convergência das órbitas para o ponto fixo x_1^* , escrita como

$$\epsilon_{n_1} = \frac{\epsilon_{0_1}}{(1 - u_2 n \epsilon_{0_1})}. \tag{1.37}$$

Vamos discutir as implicações da equação (1.37) para específicos valores de n . Começamos com o caso $n \ll n_x$, em que $-u_2 n \epsilon_{0_1} \ll 1$, que é equivalente a uma das hipóteses de escala citadas na subseção 1.3.1. Para tal caso, obtemos que

$$\epsilon_{n_1} = \epsilon_{0_1}, \tag{1.38}$$

uma rápida comparação com a primeira hipótese de escala, nos permite concluir que o expoente crítico $\alpha' = 1$. Fazendo uma segunda consideração, agora a situação $n \gg n_x$, em que $-u_2 n \epsilon_{0_1} \gg 1$. Para tal caso, obtemos que

$$\epsilon_{n_1} = -u_2^{-1} n^{-1}, \tag{1.39}$$

comparando este resultado com a segunda hipótese de escala comentada na subseção 1.3.1, nós concluímos que $\sigma' = -1$. O último caso é obtido quando $-u_2 n \epsilon_{0_1} = 1$, isto significa que $n = n_x$. Então, obtemos

$$\begin{aligned} -u_2 n_x \epsilon_{0_1} &= 1, \\ n_x &= -u_2^{-1} \epsilon_{0_1}^{-1}, \end{aligned} \quad (1.40)$$

comparando com a terceira hipótese de escala, nos permite concluir que, $z' = -1$.

Com esses procedimentos, obtivemos de maneira satisfatória, os expoentes críticos α' , σ' e z' discutidos numericamente. A figura 1.3, mostra os decaimentos das órbitas para o ponto fixo x_1^* , com as aproximações analíticas que estão indicadas pelas linhas tracejadas. Aquelas curvas foram construídas a partir da equação (1.37).

1.4.2 x_2^* na bifurcação de duplicação de período

Para estudar a aproximação analítica para o caso quando $\mu_2 = 0$, quando estamos no ponto de bifurcação $\beta = \beta_{c_2} \approx -0,84$, vamos analisar a convergência das trajetórias para o segundo ponto fixo, onde ocorre a bifurcação de duplicação de período. Isto implica que vamos analisar as órbitas a partir da segunda iteração do mapa (1.2), fornecendo a seguinte expressão

$$F(F(x_n)) = x_{n+2} = e^{-\nu F(x_n)^2} + \beta, \quad (1.41)$$

com $F(x_n) = x_{n+1} = e^{-\nu x_n^2} + \beta$. Expandindo a equação (1.41) em série de Taylor, mas agora em torno de x_2^* , obtemos

$$\begin{aligned} F(F(x)) &\approx x_2^* + F'(F(x_2^*))(x - x_2^*) + \frac{F''(F(x_2^*))}{2!}(x - x_2^*)^2 + \frac{F'''(F(x_2^*))}{3!}(x - x_2^*)^3 + O(4), \\ &\approx x_2^* + u_3(x - x_2^*) + u_4(x - x_2^*)^2 + u_5(x - x_2^*)^3 + O(4), \end{aligned} \quad (1.42)$$

em que u_3 , u_4 e u_5 são a primeira, segunda e a terceira derivada do mapa (1.41), divididas pelos seus respectivos fatores, aplicadas ao ponto fixo x_2^* , fornecendo

$$u_3 = 4\nu^2 x_2^* \left[e^{-\nu x_2^{*2}} + \beta \right] e^{-\nu(e^{-\nu x_2^{*2}} + \beta) - \nu x_2^{*2}}, \quad (1.43)$$

$$\begin{aligned} u_4 &= -4\nu^3 x_2^{*2} e^{-[\nu(e^{-\nu x_2^{*2}} + \beta) + 2\nu x_2^{*2}]} + 2\nu^2 e^{-[\nu(e^{-\nu x_2^{*2}} + \beta)^2 + \nu x_2^{*2}]} \left(e^{-\nu x_2^{*2}} + \beta \right) \times \\ &\times \left\{ 1 + x_2^* \left[4\nu^2 x_2^* e^{-\nu x_2^{*2}} \left(e^{-\nu x_2^{*2}} + \beta \right) - 2\nu x_2^* \right] \right\} \end{aligned} \quad (1.44)$$

e

$$u_5 = -2\nu e^{-\nu(F(x_2^*))^2} \{4\nu^2 [F(x_2^*)F'(x_2^*)]^3 - 6\nu F(x_2^*)^2 F'(x_2^*)F''(x_2^*) + 3F'(x_2^*)F''(x_2^*) + F(x_2^*) [F'''(x_2^*) - 6\nu F'(x_2^*)^3] \}. \quad (1.45)$$

Resolvendo numericamente as equações (1.43), (1.44) e (1.45) para $x_2^* \approx 0,11$, $\beta_{c_2} \approx -0,84$ e $\nu = 4,9$, obtemos $u_3 \approx 1$, $u_4 \approx 0$ e $u_5 \approx -43,01$.

Considerando novamente que perto do ponto fixo, x é muito próximo de 0. Então, podemos novamente manter termos de baixa ordem. Na expressão (1.42) consideramos até o termo de terceira ordem, pois o de segunda foi $u_4 \approx 0$. Com isso, obtivemos

$$x_{n+2} = x_2^* + (x_n - x_2^*) + u_5(x_n - x_2^*)^3. \quad (1.46)$$

Supondo novamente que a evolução temporal discreta em relação a variável dinâmica x pode ser considerada como uma evolução contínua, podemos reescrever a equação (1.46), considerando que, $(n+2) \rightarrow (m+1)$ e $n \rightarrow m$, da seguinte maneira

$$\begin{aligned} x_{m+1} &= x_2^* + (x_m - x_2^*) + u_5(x_m - x_2^*)^3, \\ x_{m+1} &= x_2^* + x_m - x_2^* + u_5(x_m - x_2^*)^3, \\ x_{m+1} - x_m &= u_5(x_m - x_2^*)^3, \\ &\approx \frac{dx}{dm} = u_5 \epsilon_2^3, \end{aligned} \quad (1.47)$$

em que $\epsilon_2 = (x - x_2^*)$. Fazendo separação de variáveis, obtemos a seguinte equação diferencial

$$\frac{dx}{\epsilon_2^3} = u_5 dm. \quad (1.48)$$

A condição inicial x_0 é definida para $m = 0$, enquanto que, para um arbitrário m temos $x(m)$. Então, aplicando o processo de integração na equação (1.48) de ambos os lados, usando estas variáveis como os limites de integração, temos

$$\int_{x_0}^{x(m)} \frac{dx'}{\epsilon_2^3} = u_5 \int_0^m dm', \quad (1.49)$$

Integrando esta equação, obtemos

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2\epsilon_2'^2} \Big|_{x_0}^{x(m)} &= u_5 m' \Big|_0^m, \\
\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\epsilon_{m_2}^2} + \frac{1}{\epsilon_{0_2}^2} \right) &= u_5 m,
\end{aligned} \tag{1.50}$$

em que $\epsilon_{m_2} = (x(m) - x_2^*)$ e $\epsilon_{0_2} = (x_0 - x_2^*)$. Manipulando algebricamente chegamos a aproximação analítica para a convergência das órbitas para o ponto fixo x_2^* , escrita como

$$\epsilon_{n_2} = \frac{\epsilon_{0_2}}{\sqrt{(1 - 2u_5 n \epsilon_{0_2}^2)}}, \tag{1.51}$$

retornamos o índice n , visto que $m \rightarrow n$. Vamos agora discutir as implicações da equação (1.51) para específicos valores de n . Começamos com o caso $n \ll n_x$, onde $-2u_5 n \epsilon_{0_2}^2 \ll 1$, que é equivalente a uma das hipóteses de escala citadas em (1.3.2). Para tal caso, obtemos que

$$\epsilon_{n_2} = \epsilon_{0_2}, \tag{1.52}$$

uma rápida comparação com a primeira hipótese de escala, nos permite concluir que o expoente crítico $\alpha = 1$. Fazendo uma segunda consideração, agora a situação $n \gg n_x$, sendo $-2u_5 n \epsilon_{0_2}^2 \gg 1$, para tal caso, obtemos que

$$\epsilon_{n_2} = (-2u_5)^{-1/2} n^{-1/2}, \tag{1.53}$$

comparando este resultado com a segunda hipótese de escala comentada anteriormente em (1.3.2), nós concluimos que $\sigma = -1/2$. O último caso é obtido quando $-2u_5 n \epsilon_{0_2}^2 = 1$, isto significa que $n = n_x$. Então, obtemos

$$\begin{aligned}
-2u_5 n_x \epsilon_{0_2}^2 &= 1, \\
n_x &= (-2u_5)^{-1} \epsilon_{0_2}^{-2},
\end{aligned} \tag{1.54}$$

comparando com a terceira hipótese de escala, nos permite concluir que, $z = -2$.

A figura 1.6, mostra os decaimentos das órbitas para o ponto fixo x_2^* , com as aproximações analíticas que estão indicadas pelas linhas tracejadas. Aquelas curvas ilustram o comportamento da equação (1.51).

Com esses procedimentos, obtivemos os expoentes críticos α , σ e z discutidos numericamente e fazendo uma rápida comparação na literatura em [17] conseguimos comparar estes três expoentes com os obtidos para o mapa logístico, os quais produziram os mesmos expoentes críticos na bifurcação de duplicação de período.

1.5 Crises de fronteiras

Nos anos 80, Celso Grebogi e co-autores publicaram estudos em que observaram mudanças repentinas em atratores caóticos quando o parâmetro de controle do sistema era variado. Estes eventos foram chamados de crises, encontrados nas referências [36–38] e são classificadas de duas maneiras. A primeira: crise de fronteira, que ocorre quando o ponto fixo instável toca o atrator caótico e o mesmo é destruído em um valor de parâmetro de controle crítico. No mapa quadrático, por exemplo, o valor do parâmetro é $C = 2$ [36]. A segunda: crise interior, que acontece quando existe colisão entre atratores caóticos com um ponto fixo instável e após isso, o atrator caótico é aumentado.

Na figura 1.9(b) observamos o diagrama de órbitas do mapa Gauss da variável x como uma função do parâmetro de controle β , quando consideramos $x_0 = 0,01$ e $\nu = 4,9$. Entretanto, escolhendo outros valores para o parâmetro ν e mantendo a mesma condição inicial, este diagrama apresenta algumas mudanças significativas, como a não presença de caos –mostrada figura 1.9(a)–, a junção dos atratores separados na figura 1.9(b) –mostrada na figura 1.9(c)–, até a ocorrência de crises de fronteiras, mostrada na figura 1.9(d).

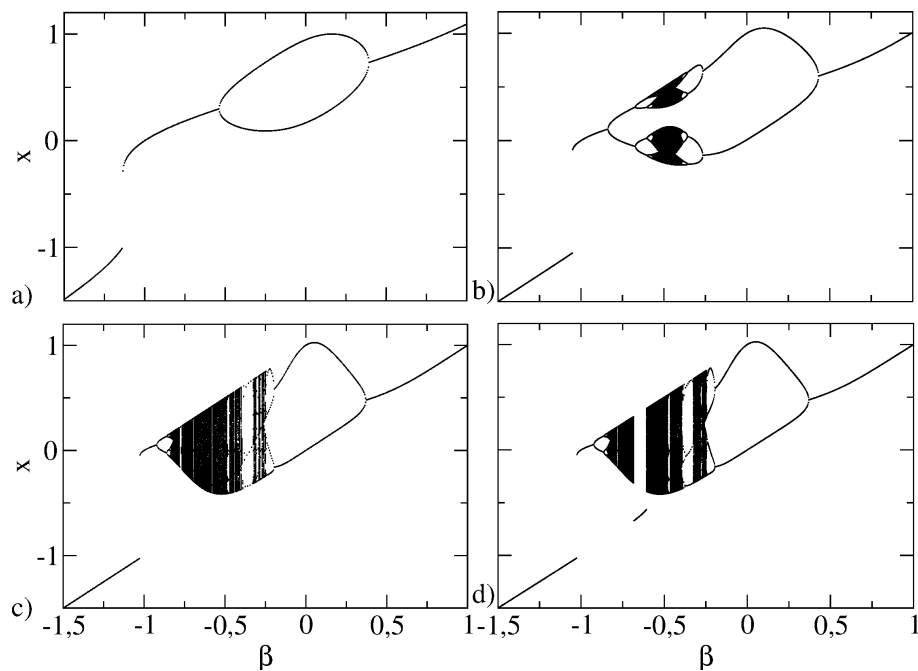


Figura 1.9: Diagramas de órbitas de x em função de β para o mapa Gauss com diferentes valores de ν , sendo em (a) $\nu = 2,0$, (b) $\nu = 4,9$, (c) $\nu = 9,81$ e (d) $\nu = 10$, em todos os diagramas a condição inicial usada foi $x_0 = 0,01$.

Estudamos o comportamento característico de crise de fronteira quando consideramos $\nu = 10$ (figura 1.9(d)). Para isso, vamos utilizar duas ferramentas. A primeira: o ponto fixo instável de período 1, indicado pela linha tracejada e pode ser observado no diagrama de órbitas da figura 1.10. A segunda: as órbitas *supertracks* [39], para encontrar os valores dos parâmetros críticos em que as as crises ocorrem.

Um comportamento observado no mapa logístico [48] e quadrático [36–38] é a existência de apenas um evento de crise, para os valores de parâmetros $r = 4$ no logístico e $C = 2$ para o quadrático. Entretanto, no mapa Gauss é diferente, pois ocorrem dois eventos de crises de fronteiras, para os parâmetros $\beta = \beta_{crise_1}$ e $\beta = \beta_{crise_2}$, conforme mostra a ampliação na figura 1.10.

A figura 1.10 mostra o diagrama de órbitas do mapa Gauss considerando $\nu = 10$. A órbita do ponto fixo instável de período 1 (PFI) é obtida da seguinte maneira

$$\beta = x - e^{-\nu x^2}, \quad (1.55)$$

em que x está entre o intervalo de $-1,5$ a 1 . As órbitas *supertracks* são dadas por

$$s_{n+1}(\beta) = e^{-\nu s_n^2} + \beta, \quad (1.56)$$

mas a condição inicial s_0 tem um valor específico, que é a primeira derivada da equação (1.2) igualada a 0, resultando em $s_0(\beta) = 0$. A partir disso, obtivemos as curvas s_1 , s_2 e s_3 , mostradas na própria figura.

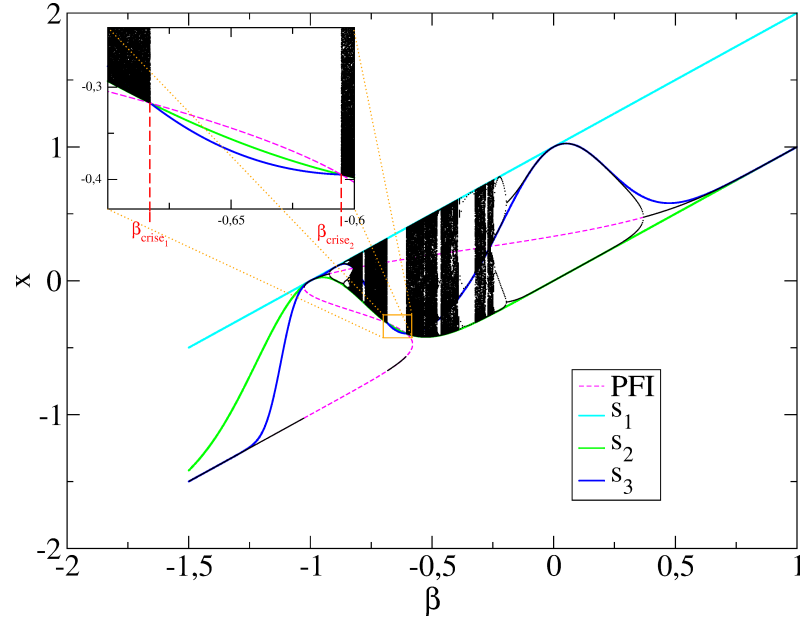


Figura 1.10: Diagramas de órbitas para o mapa Gauss com $\nu = 10$, condição inicial $x_0 = 0,01$, o ponto fixo instável indicado pela linha em tracejado e as órbitas *supertracks* s_1 , s_2 e s_3 . A ampliação na figura evidencia as crises de fronteiras.

Analisando a ampliação na figura 1.10, o ponto fixo instável toca os atratores caóticos nos parâmetros de controle $\beta = \beta_{crise_1}$ e $\beta = \beta_{crise_2}$ no mesmo ponto em que as curvas s_2 e s_3 se interseccionam. Com as órbitas *supertracks*, conseguimos obter numericamente o valor dos parâmetros em que as crises ocorrem. Para isso, utilizamos o método da bisseção e consideramos a condição $s_3 - s_2 \approx 0$. Assim, obtemos os valores dos parâmetros críticos $\beta = \beta_{crise_1} \approx -0,68$ e $\beta = \beta_{crise_2} \approx -0,61$.

Na figura 1.10 consideramos β_{crise} o valor em que ocorrem as crises de fronteiras com a destruição dos atratores caóticos quando β aumenta (ou diminui, para o caso de β_{crise2}) através de β_{crise} . Vamos analisar a crise de fronteira que ocorre em β_{crise1} , considerando um valor de β sutilmente maior que β_{crise1} e um conjunto de condições iniciais na região da bacia de atração do atrator que existe para $\beta < \beta_{crise1}$. Este conjunto comportará como um transiente caótico, isto é, inicialmente as condições iniciais serão atraídas e ocuparão o atrator para $\beta < \beta_{crise1}$, então, aglomeram-se na região caótica, tendo comportamentos imprevisíveis na mesma para $\beta < \beta_{crise1}$ e finalmente, depois deste comportamento e após um longo período de iterações, elas movem-se para fora da região do atrator caótico e aproximam-se para o outro atrator.

O período de tempo que as órbitas gastam até o atrator ser destruído depende sensivelmente da condição inicial, porém considerando um conjunto de condições iniciais, o período do transiente caótico aparentemente tem uma média bem definida que tende para o infinito quando β aproxima-se de β_{crise1} . Por exemplo, se considerarmos um *ensemble* de condições iniciais, o tempo médio de vida dessas condições no atrator caótico será o mesmo se escolhermos uma das condições diferentes dentro desse conjunto. Denotaremos esse tempo médio de sobrevivência do transiente caótico de τ_1 , dado da seguinte forma

$$\tau_1 \sim \mu_1^{-\gamma_1}, \quad (1.57)$$

em que $\mu_1 = (\beta - \beta_{crise1})$ e γ_1 é o expoente crítico do transiente caótico em relação a τ_1 . O mesmo processo é válido para analisar a crise de fronteira em β_{crise2} , entretanto, consideramos o transiente caótico τ_2 escrito como

$$\tau_2 \sim \mu_2^{-\gamma_2}, \quad (1.58)$$

em que $\mu_2 = (\beta_{crise2} - \beta)$ e γ_2 é o expoente crítico do transiente caótico em relação a τ_2 . As figuras 1.11(a) e 1.11(b) mostram os comportamentos dos tempos médios de sobrevivência dos transientes caóticos τ_1 e τ_2 , como funções de μ_1 e μ_2 para os valores de $\beta = \beta_{crise1}$ e $\beta = \beta_{crise2}$.

Nas figuras 1.11(a) e 1.11(b), consideramos um conjunto de 10^5 condições iniciais, 10^8 iterações e $\nu = 10$. Os expoentes críticos γ_1 e γ_2 , foram obtidos por um ajuste em lei de potência, fornecendo $\gamma_1 \approx -0,509(7)$ e $\gamma_2 \approx -0,507(4)$. Estes expoentes estão em bom acordo com os resultados encontrados nas referências [36–38] calculados para o mapa Quadrático. Nas equações (1.57) e (1.58) os tempos de sobrevivência τ dependem do parâmetro β , porém na figura 1.9 quando variamos ν , percebemos a influência desse parâmetro para a existência de crises de fronteiras. Com isso, na figura 1.12 temos uma interface de ν como uma função de β , cuja a cor marrom indica os valores em que as crises ocorrem e a cor cinza onde não acontecem esses eventos.

A figura 1.13 mostra o diagrama de órbitas e três curvas *supertracks* (conforme mostra

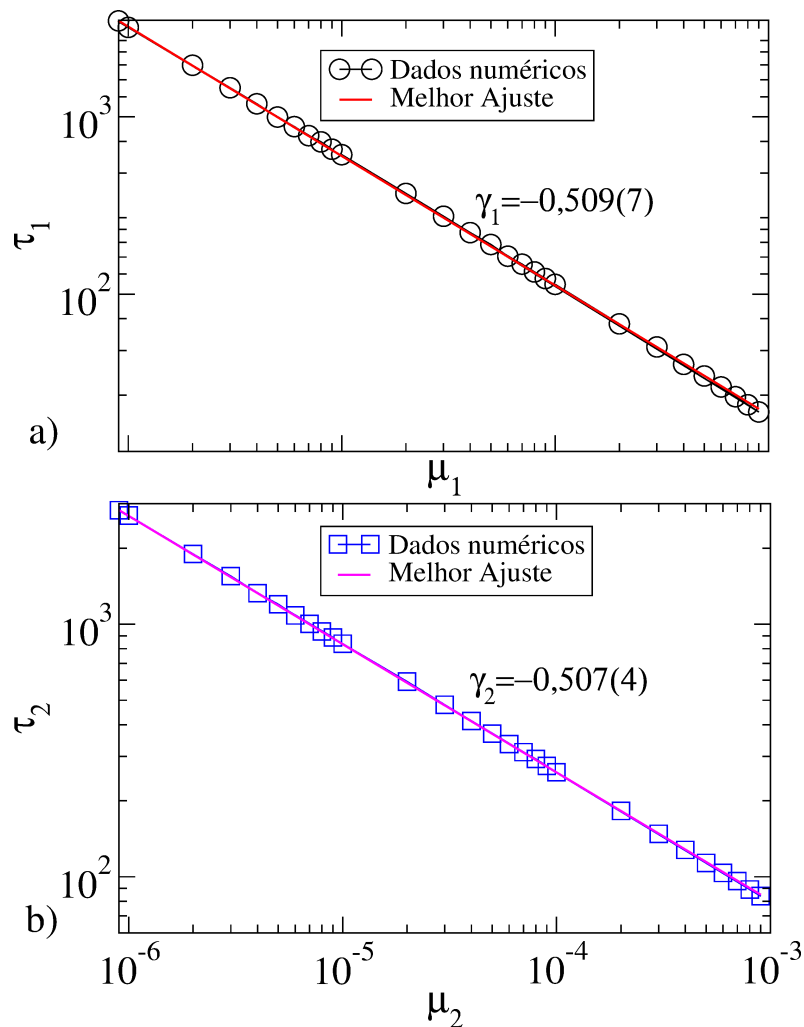


Figura 1.11: Tempo médio de sobrevivência do transiente caótico em (a) τ_1 , como função de μ_1 em $\beta = \beta_{crise_1} \approx -0,68$ e em (b) τ_2 , como função de μ_2 em $\beta = \beta_{crise_2} \approx -0,61$. Nas duas figuras consideramos um conjunto de 10^5 condições iniciais e o parâmetro de controle $\nu = 10$.

a legenda), usando $\nu = 4,9$ e $x_0 = 0,01$. A partir da figura 1.12 e analisando a figura 1.13, vamos utilizar as órbitas *supertracks* para obter numericamente o valor crítico de ν em que as crises começam a ocorrer. Para isso, na figura 1.13 consideramos o intervalo de $\beta \in [-0,8; -0,2]$, em que a curva $s_3 > s_2$ e variamos ν entre 4,8 até 10. Quando s_3 for menor que s_2 paramos o programa, pois implica que ocorreu uma crise de fronteira. Por exemplo, como acontece na figura 1.10. Feito isso, obtivemos que o valor crítico de ν em que o mapa Gauss começa a apresentar as crises de fronteiras é $\nu = \nu_{crise} \approx 9,82$.

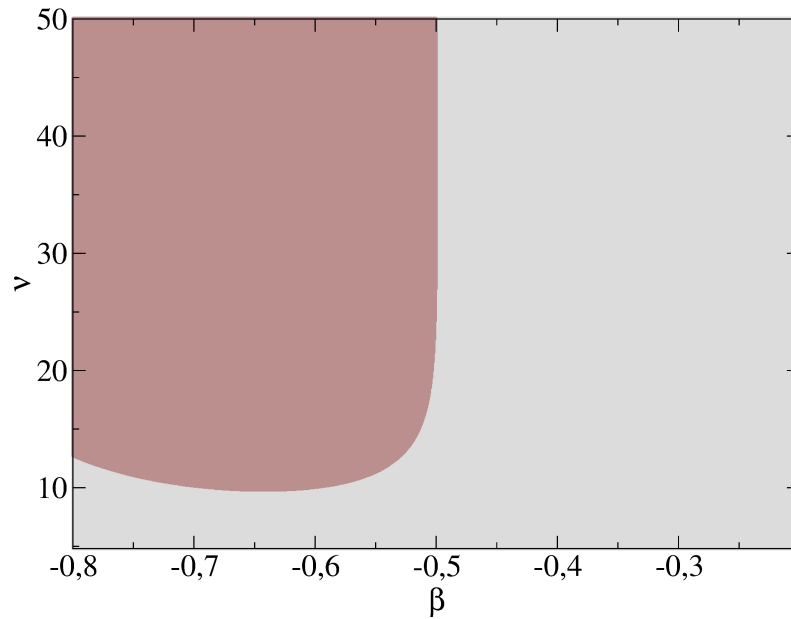


Figura 1.12: Interface mostrando onde os eventos de crises de fronteiras acontecem, a cor marrom indica eventos com crises e a cor cinza, sem crise.

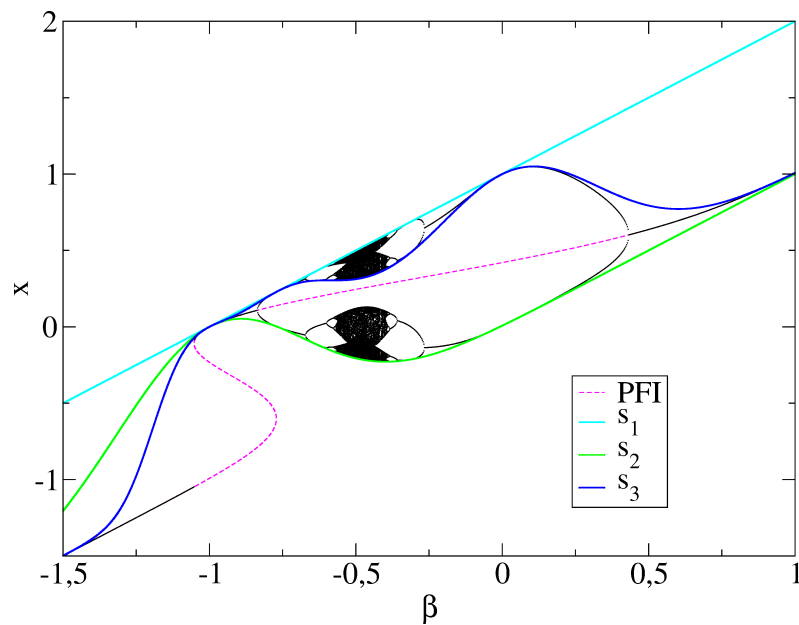


Figura 1.13: Diagrama de órbitas para o mapa Gauss, com $\nu = 4,9$ e a condição inicial $x_0 = 0,01$. As curvas s_1 , s_2 e s_3 são as curvas *supertracks* e a linha em tracejado é o ponto fixo instável de período 1.

Capítulo 2

Propriedades dinâmicas do mapa Hassell

Nesse Capítulo serão apresentados o diagrama de órbita, os cálculos dos pontos fixos, análise de estabilidade, expoente de Lyapunov e convergência para o ponto estacionário. Mostramos, também, o que acontece quando estamos a uma distância μ da bifurcação, chamada de relaxação.

Os resultados apresentados neste Capítulo foram publicados na revista internacional indexada *Physica A* e podem ser encontrados na referência [43].

2.1 Diagrama de órbita e ponto fixo

Nesta seção, vamos considerar o mapa Hassell, definido como

$$F(N_n) = N_{n+1} = \frac{rN_n}{(1 + aN_n)^\gamma}, \quad (2.1)$$

em que a , r e γ são parâmetros de controle e N a variável dinâmica do sistema. De acordo com as referências [42] e [49] este mapeamento é utilizado para descrever estudos sobre populações de insetos. O parâmetro $r > 0$ é a taxa de crescimento da população, $a > 0$ dimensiona o tamanho da população ou ambiente e $\gamma > 0$ descreve a forma e força da competição interna da população.

A figura 2.1 mostra o diagrama de órbitas e uma ampliação na primeira bifurcação, usando os parâmetros de controle $a = 1$, $\gamma = 6$ e a condição inicial $N_0 = 0, 1$.

Os pontos fixos de período 1 deste mapa são obtidos utilizando a seguinte condição:

$$F(N^*) = N^*. \quad (2.2)$$

Fazendo manipulações algébricas do tipo:

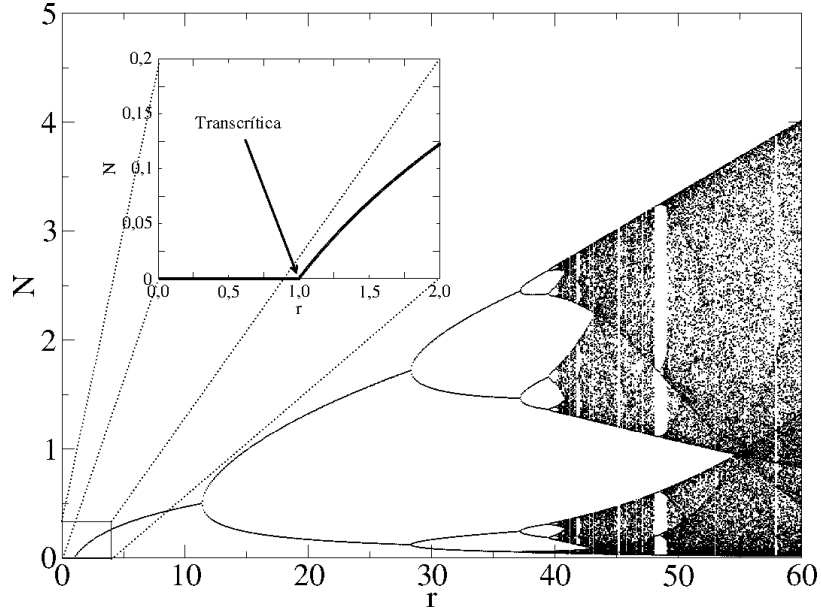


Figura 2.1: Diagrama de órbitas do mapa Hassell com $a = 1$ e $\gamma = 6$ e uma ampliação na figura, evidenciando uma bifurcação transcritical, que ocorre quando $r = r_c = 1$.

$$\begin{aligned}
 F(N^*) &= \frac{rN^*}{(1 + aN^*)^\gamma} = N^*, \\
 &= \frac{rN^*}{(1 + aN^*)^\gamma} - N^* = 0, \\
 &= N^* \left(\frac{r}{(1 + aN^*)^\gamma} - 1 \right) = 0,
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

e resolvendo a equação (2.3), obtemos os pontos fixos $N_1^* = 0$ e $N_2^* = (r^{1/\gamma} - 1)/a$.

Analisando a estabilidade de N_1^* e N_2^* , temos que

$$\left| \left(\frac{dF}{dN} \right)_{N=N^*} \right| < 1, \tag{2.4}$$

onde

$$F = \frac{rN}{(1 + aN)^\gamma} \tag{2.5}$$

e

$$\frac{dF}{dN} = r(1 + aN)^{-\gamma} [1 - a\gamma N(1 + aN)^{-1}], \tag{2.6}$$

aplicando ao ponto fixo $N_1^* = 0$, obtemos

$$\left(\frac{dF}{dN} \right)_{N=N_1^*} = r. \tag{2.7}$$

De acordo com a equação (2.4) este ponto será assintoticamente estável [50] quando

$$-1 < r < 1. \quad (2.8)$$

Como $r \geq 0$, o ponto fixo $N_1^* = 0$ será assintoticamente estável quando $r \in [0, 1)$ e utilizando o mesmo processo, mas para N_2^* , este segundo ponto fixo será assintoticamente estável quando $r \in (1, 11.3)$.

Após o ponto fixo N_2^* uma sequência de bifurcações de duplicação de período é observada, acumulando até regiões caóticas. Após isso, janelas periódicas também são vistas para grandes valores de r .

2.2 Expoente de Lyapunov

Para caracterizar o caos, recorreremos aos estudos sobre os expoentes de Lyapunov apresentados na seção 1.2. O resultado pode ser observado na figura 2.2. A figura 2.2(a) mostra o diagrama de órbitas enquanto na figura 2.2(b) mostra os expoentes de Lyapunov, considerando os parâmetros $a = 1$ e $\gamma = 6$.

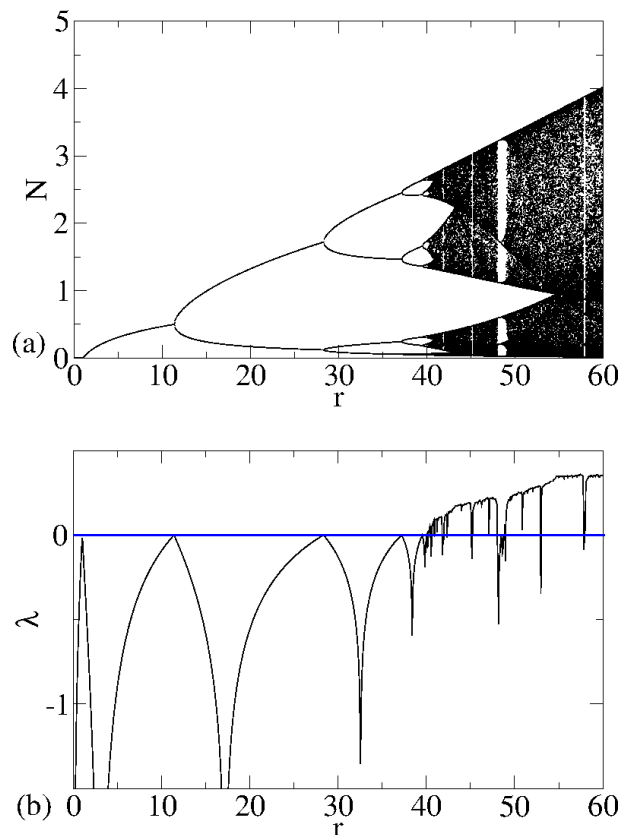


Figura 2.2: (a) Diagrama de órbita para o mapa Hassell e (b) expoentes de Lyapunov referente ao diagrama de órbita mostrado em (a). Os parâmetros de controles usados foram $a = 1$ e $\gamma = 6$.

Quando $r = 1$, a reta (em azul) $\lambda = 0$ é tocada pela curva em preto, isto implica que, neste ponto temos uma bifurcação, caracterizada transcítica.

2.3 Convergência das órbitas para o ponto fixo

Para entendermos o decaimento das órbitas para o ponto fixo, vamos investigar o comportamento de N aproximando do ponto fixo $N_1^* = 0$ na bifurcação transcítica. A convergência depende do número de iterações n , da condição inicial x_0 e de um parâmetro $\mu = r_c - r \cong 0$, com $r_c \geq r$, que define a distância do ponto de bifurcação.

A figura 2.3 mostra a convergência para o ponto fixo, para $\mu = 0$, condições iniciais diferentes, $a = 1$ e $\gamma = 6$. Podemos ver que, dependendo das condições iniciais N_0 , as órbitas ficam confinadas em um patamar constante N e depois de alcançar um número de iterações de cruzamento n_x , elas decaem em lei de potência, descrita por um expoente β' .

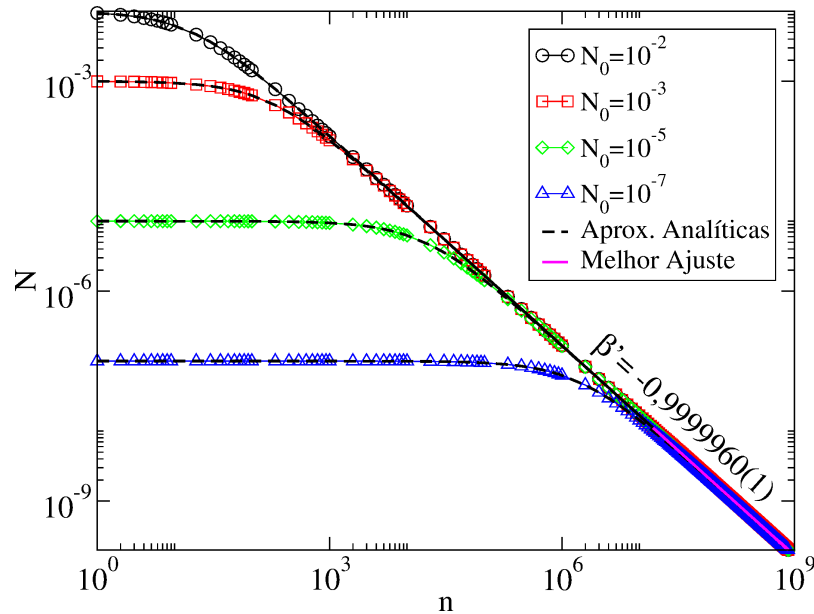


Figura 2.3: Decaimento para o ponto fixo N_1^* , quando $r_c = 1$, $a = 1$ e $\gamma = 6$.

A partir dos comportamentos observados na figura 2.3, podemos supor hipóteses de escala semelhantes aquelas apresentadas na seção 1.3, de modo que

i) Para $n \ll n_x$, o comportamento de N vs. n é dado por:

$N_{(n)} \propto N_0^{\alpha'}$, como as órbitas ficam confinadas em um patamar constante, temos, $\alpha' = 1$.

ii) Para $n \gg n_x$, o comportamento de N vs. n é dado por uma lei de potência do tipo:

$N_{(n)} \propto n^{\beta'}$, em que β' é um expoente crítico.

iii) Finalmente, no número de iterações de cruzamento n_x , o comportamento é dado por: $n_x \propto N_0^{z'}$, em que z' é um expoente crítico.

O expoente β' pode ser obtido a partir de um ajuste em lei de potência, na figura 2.3 obtemos $\beta' = -0.9999960(1)$. O expoente z' pode ser obtido em n_x vs. N_0 , como mostrado na figura 2.4, em que o valor do expoente é dado por uma ajuste em lei de potência, sendo $z' \approx -1$.

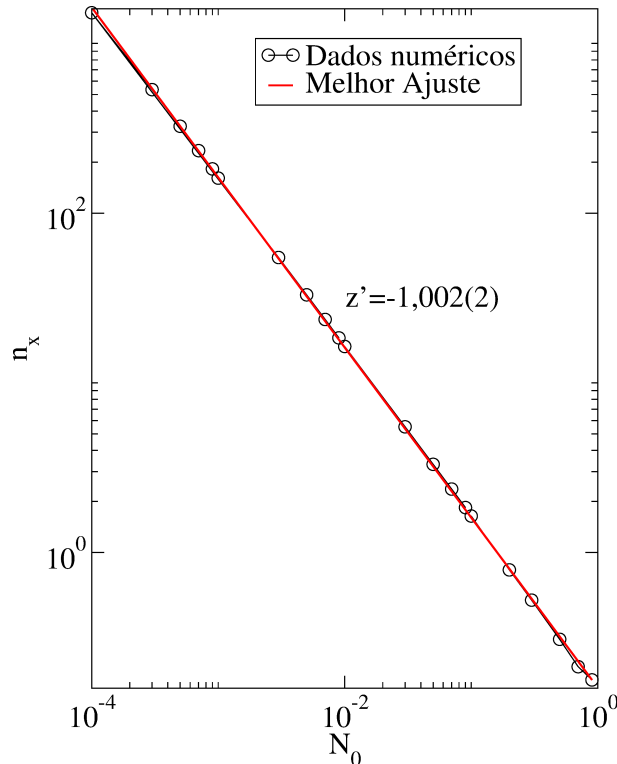


Figura 2.4: Número de iterações de cruzamento n_x como função das condições iniciais N_0 .

O comportamento mostrado na figura 2.3, juntamente com as três hipóteses de escala, permite-nos descrever o comportamento de N como uma função homogênea de variáveis n e N_0 , do tipo

$$N_{(N_0, n)} = lN(l^c N_0, l^d n), \quad (2.9)$$

em que l é um fator de escala e c e d são expoentes característicos. Utilizando o processo análogo aquele discutido na subseção 1.3.1, obtemos a seguinte lei de escala

$$z' = \frac{\alpha'}{\beta'}. \quad (2.10)$$

Da subseção 1.3.1, seguimos o mesmo princípio que, dado o conhecimento de qualquer dois expoentes, permite-nos encontrar o terceiro usando a equação (2.10). A figura 2.4 mostra n_x como uma função de N_0 mostrando a inclinação dada por $z' = -1$. Logo abaixo,

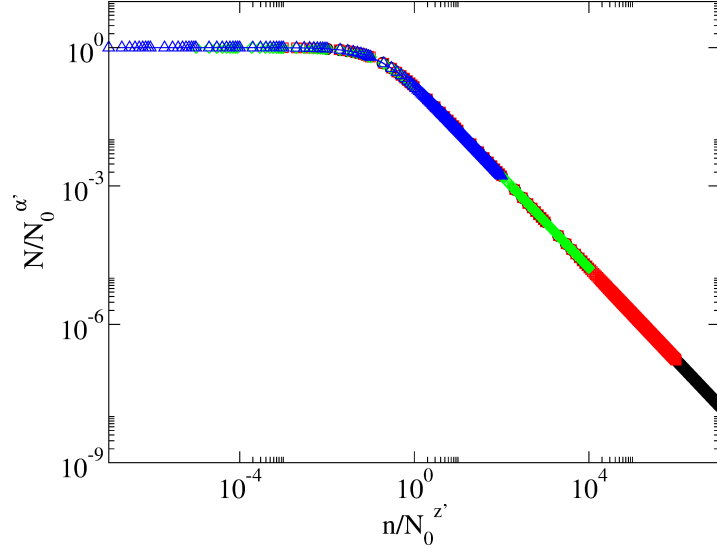


Figura 2.5: Colapso de todas as curvas mostradas na figura (2.3) em uma única curva, após uma reescala conveniente dos eixos.

na figura 2.5 os expoentes também podem ser usados para reescalar os eixos coordenados N e n em uma maneira conveniente, tal que $N \rightarrow N/N_0^{\alpha'}$ e $n \rightarrow n/N_0^{z'}$, em que ocorre o colapso de todas as curvas de N vs. n em uma única curva, validando os expoentes.

Agora vamos discutir a convergência das órbitas do mapa (2.1) para o ponto fixo, quando estamos a uma distância $\mu = r_c - r \cong 0$, com $r_c \geq r$, isto caracteriza a vizinhança ao redor da bifurcação. A evolução das órbitas para o ponto fixo é então dada por uma lei exponencial [13], escrita como

$$N(n, \mu) \propto e^{-n/\tau}, \quad (2.11)$$

em que τ é o tempo de relaxação e tem a seguinte forma

$$\tau \propto \mu^\delta \quad (2.12)$$

e δ é um expoente de relaxação.

A figura 2.6 mostra o comportamento de τ vs. μ , para $a = 1$ e $\gamma = 6$ – embora outros valores de γ produziram o mesmo resultado –, considerando o conjunto de 1000 condições iniciais próximas ao ponto fixo, a distância μ representada em décadas e após um longo número de iterações do mapa (2.1). Um ajuste em lei de potência fornece o expoente $\delta \cong -1$ e é independente do valor do parâmetro γ .

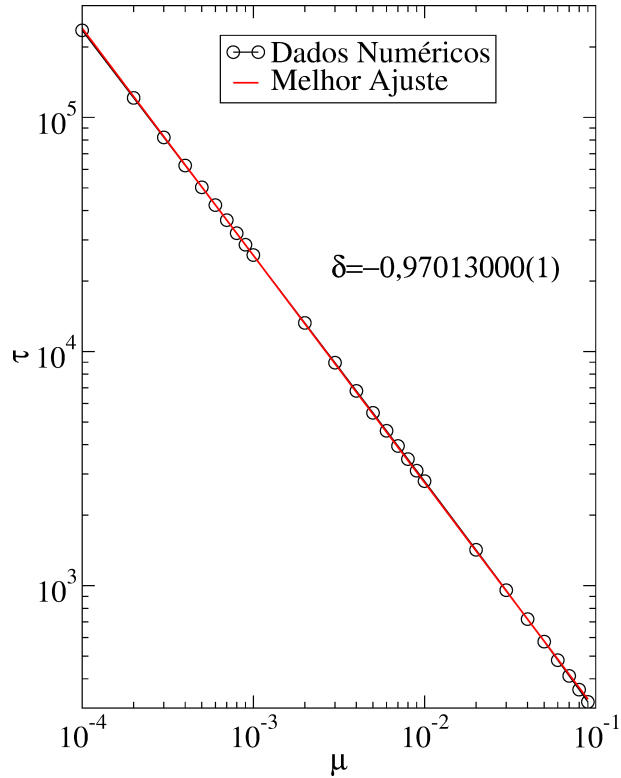


Figura 2.6: Relaxação para o ponto fixo como uma função de μ , quando $\gamma = 6$ e $a = 1$.

2.4 Aproximação analítica da convergência das órbitas para o ponto fixo N_1^*

Nesta seção vamos discutir e apresentar diferentes aproximações analíticas para a convergência das órbitas para o ponto de equilíbrio. No primeiro caso, consideramos o ponto de bifurcação em $\mu = 0$ para $r = r_c = 1$. Deste modo, o mapeamento é reescrito como

$$N_{n+1} = N_n(1 + aN_n)^{-\gamma}, \quad (2.13)$$

expandindo o termo entre parênteses em série de Taylor de N_n , quando $aN_n \ll 1$, obtemos

$$N_{n+1} = N[1 - \gamma aN_n - \frac{1}{2}\gamma a^2(-\gamma - 1)N_n^2 - O(3)], \quad (2.14)$$

perto do ponto fixo, N é muito próximo de 0. Então, podemos manter termos de baixa ordem na expressão, considerando apenas o termo de primeira ordem. Com isso, temos

$$N_{n+1} = N_n(1 - \gamma aN_n), \quad (2.15)$$

sobre essa condição, supomos que a variável dinâmica N pode ser considerada como uma variável contínua. Assim a eq. (2.15) é reescrita como

$$\begin{aligned}
N_{n+1} - N_n &= \frac{N_{n+1} - N_n}{(n+1) - n}, \\
&\approx \frac{dN}{dn} = -a\gamma N^2.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Fazendo separação de variáveis, obtemos a seguinte equação diferencial

$$\frac{dN}{N^2} = -a\gamma dn. \tag{2.17}$$

A condição inicial N_0 é definida para $n = 0$, enquanto que, para um n arbitrário temos $N(n)$. Então, aplicando a integral em ambos os lados da equação (2.17) e usando estas variáveis como os limites de integração, temos

$$\int_{N_0}^{N(n)} \frac{dN'}{N'^2} = - \int_0^n a\gamma dn'. \tag{2.18}$$

Integrando esta equação chegamos na aproximação analítica para o ponto fixo N_1^* , que é escrita como

$$N(n) = \frac{1}{(\gamma an + 1/N_0)}. \tag{2.19}$$

Vamos agora discutir as implicações da equação (2.19) para específicos valores de n . Começamos com o caso $n \ll n_x$, em que $\gamma an \ll 1/N_0$, que é equivalente a uma das hipóteses de escala citadas na seção (2.3). Para tal caso, obtemos que

$$N(n) = N_0. \tag{2.20}$$

Uma rápida comparação com a primeira hipótese de escala, nos permite concluir que o expoente crítico $\alpha' = 1$. Fazendo uma segunda consideração, agora a situação de $n \gg n_x$, em que $\gamma an \gg 1/N_0$. Para tal caso, obtemos que

$$N(n) = (\gamma a)^{-1} n^{-1}. \tag{2.21}$$

Comparando este resultado com a segunda hipótese de escala comentada anteriormente, nós concluímos que $\beta' = -1$. O último caso é obtido quando $\gamma an = 1/N_0$, isto significa que $n = n_x$. Então, obtemos

$$n_x = (\gamma a)^{-1} N_0^{-1}. \tag{2.22}$$

Uma comparação com a terceira hipótese de escala, nos permite concluir que, $\alpha' = -1$. Com esses procedimentos, obtemos todos os nossos três expoentes críticos discutidos numericamente. A figura 2.3, mostra os decaimentos das órbitas para o ponto fixo N_1^* , com

as aproximações analíticas que estão indicadas pelas linhas tracejadas. Aquelas curvas foram construídas a partir da equação (2.19).

Agora, vamos discutir o segundo caso, considerando $\mu \neq 0$. Assim, temos

$$\begin{aligned} N_{n+1} - N_n &= rN_n(1 - \gamma aN_n) - N_n, \\ &= \frac{N_{n+1} - N_n}{(n+1) - n} \approx \frac{dN}{dn}, \\ &= -(1-r)N - raN^2. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Entretanto, perto do ponto fixo $N_1^* = 0$ consideramos que o termo N^2 tende a zero muito mais rápido do que o termo linear N . Logo, o último termo da equação (2.23) pode ser desprezado e temos

$$\frac{dN}{dn} = -\mu N, \tag{2.24}$$

onde $\mu = 1 - r$. Separando as variáveis, considerando novamente que para $n = 0$ a condição inicial é N_0 , vamos aplicar a integral em ambos os lados da equação. Assim, obtemos

$$\int_{N_0}^{N(n)} \frac{dN'}{N'} = -\mu \int_0^n dn'. \tag{2.25}$$

Integrando e reagrupando os termos, obtemos a aproximação analítica da seguinte maneira

$$N(n) = N_0 e^{-\mu n}. \tag{2.26}$$

Comparando este resultado com as equações (2.11) e (2.12), concluímos que $\delta = -1$ está em bom acordo com o resultado mostrado na figura 2.6.

A convergência das trajetórias para o ponto fixo na bifurcação transcítica produziram os mesmos expoentes críticos – incluindo δ – quando comparados com os resultados referentes ao mapa logístico e estes resultados são mostrados na referência [17]. Entretanto, quando comparamos os resultados entre os mapas Hassell e Gauss o decaimento das órbitas para o ponto fixo apresentaram diferentes expoentes. Isto implica que os expoentes críticos em relação ao decaimento das órbitas para o ponto fixo são distintos e dependem do tipo de bifurcação que os estudos são realizados.

Capítulo 3

Propriedades dinâmicas do mapa Hassell perturbado

Nesse Capítulo acrescentamos uma perturbação ao mapa Hassell (2.1). Estudamos se a mesma afeta na convergência das órbitas para o ponto fixo. Começamos estudando o diagrama de órbita, ponto fixo, sua estabilidade, os expoentes de Lyapunov e a convergência das trajetórias para o ponto estacionário quando estamos a uma distância μ da bifurcação, chamada de relaxação. Mostramos, também, a investigação do espaço de parâmetros, estudando as órbitas superestáveis e extremas, como discutidas na referência C.

3.1 Diagrama de órbita e ponto fixo

Nesta seção, vamos considerar o mapa Hassell perturbado definido como

$$F(N_n) = N_{n+1} = \frac{r(1 + b_n\epsilon)N_n}{(1 + aN_n)^\gamma}, \quad (3.1)$$

onde a , r e γ são parâmetros de controle, ϵ controla a amplitude da perturbação paramétrica e b_n pode ser $b_n = (-1)^n$ ou $b_n = (-1)^{n+1}$, isso implica que b_0 pode ser definido como $b_0 = 1$ ou $b_0 = -1$ para uma dada condição inicial N_0 . Se $\epsilon = 0$ o mapa Hassell é recuperado.

A figura 3.1 mostra o diagrama de bifurcações de N como função do parâmetro r para o mapa (3.1), considerando os parâmetros $a = 1$, $\gamma = 6$, $\epsilon = 0,01$ e a condição inicial $N_0 = 0,1$.

O nosso objetivo neste tópico será investigar o efeito da perturbação no comportamento das órbitas do sistema no ponto fixo N^* . Analisando a equação (3.1) e as tabelas 3.1 e 3.2, em que consideramos quatro iterações, podemos ver que o termo b_n pode variar entre (-1) ou $(+1)$.

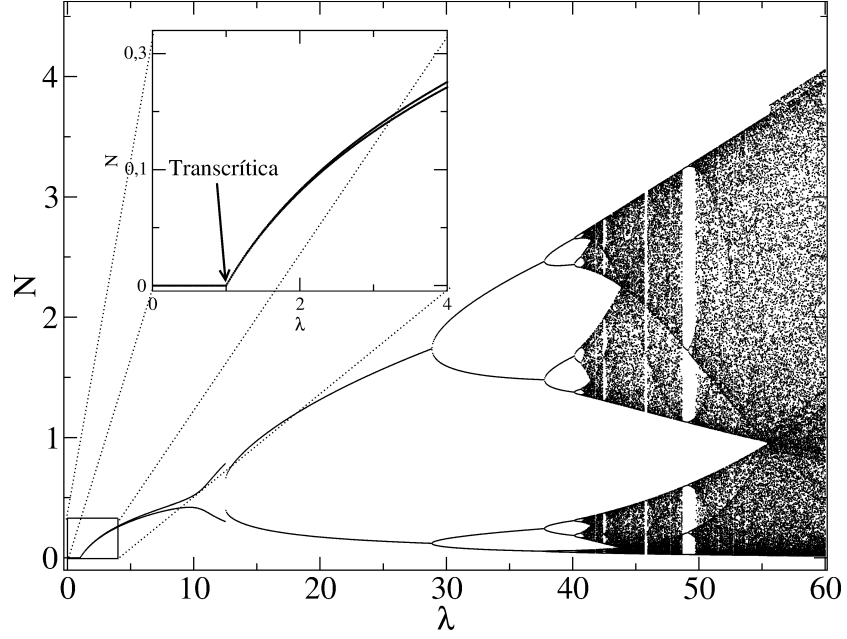


Figura 3.1: Diagrama de bifurcações do mapa Hassell perturbado com $a = 1$ e $\gamma = 6$, $\epsilon = 0,01$ e a condição inicial $N_0 = 0,1$ e uma ampliação do mapa, evidenciando uma bifurcação transcritical.

Tabela 3.1: Oscilação de b_n

n	N_{n+1}	$b_n = (-1)^n$
$n = 0$	N_1	$+1$
$n = 1$	N_2	-1
$n = 2$	N_3	$+1$
$n = 3$	N_4	-1
\vdots	\vdots	\vdots

Tabela 3.2: Oscilação da perturbação

n	$F(N_n^*) = N_{n+1}^*$
$n = 0$	$(r + \epsilon)N_1^*$
$n = 1$	$(r - \epsilon)(r + \epsilon)N_2^*$
$n = 2$	$(r + \epsilon)(r - \epsilon)(r + \epsilon)N_3^*$
$n = 3$	$(r - \epsilon)(r + \epsilon)(r - \epsilon)(r + \epsilon)N_4^*$
\vdots	\vdots

A partir dessas tabelas, podemos observar que a equação (3.1) devido a oscilação de b_n , se repete a cada período 2. Assim, a maneira analítica de calcular o ponto fixo será dada da seguinte forma

$$F(F(N^*)) = N^*,$$

que é a segunda iteração do mapa (3.1). Fazendo esta análise analítica, temos

$$F(F(N^*)) = r^2(1 - \epsilon^2)N^* [(1 + aN^*) + ar(1 - \epsilon)N^*(1 + aN^*)^{(-\gamma+1)}]^{-\gamma} = N^*, \quad (3.2)$$

logo,

$$r^2(1 - \epsilon^2)N^* [(1 + aN^*) + ar(1 - \epsilon)N^*(1 + aN^*)^{(-\gamma+1)}]^{-\gamma} - N^* = 0.$$

Assim obtemos:

$$N^* \left\{ r^2(1 - \epsilon^2) [(1 + aN^*) + ar(1 - \epsilon)N^*(1 + aN^*)^{(-\gamma+1)}]^{-\gamma} - 1 \right\} = 0, \quad (3.3)$$

podemos observar na equação (3.3) que $N^* = 0$ é um ponto fixo, como no mapa Hassell (2.1). Com isso, podemos analisar se a perturbação afeta na convergência das órbitas para o mesmo ponto fixo de ambos os mapas. Seguindo os estudos, vamos analisar a estabilidade deste ponto da seguinte maneira

$$\left| \left(\frac{d(F \circ F)}{dN} \right)_{N=N^*} \right| < 1, \quad (3.4)$$

onde $F \circ F$ é uma função composta de F em F , dada por

$$F \circ F = r^2(1 - \epsilon^2)N^* [(1 + aN^*) + ar(1 - \epsilon)N^*(1 + aN^*)^{(-\gamma+1)}]^{-\gamma}. \quad (3.5)$$

Aplicando o ponto fixo $N^* = 0$ na inequação (3.4), obtemos

$$\left(\frac{d(F \circ F)}{dN} \right)_{N=N^*} = r^2(1 - \epsilon^2). \quad (3.6)$$

De acordo com a equação (3.4) este ponto será assintoticamente estável [50] quando

$$-1 < r^2(1 - \epsilon^2) < 1. \quad (3.7)$$

Como r é maior que 0, o ponto fixo $N^* = 0$ será estável quando $r^2(1 - \epsilon^2) \in [0, 1)$ e com $r = \frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}$ temos uma mudança de estabilidade no ponto fixo, implicando que r neste ponto é um r_c , cujo o índice c representa que este ponto é um ponto crítico.

3.2 Expoente de Lyapunov

Uma maneira de quantificar e caracterizar o caos é recorrendo aos mesmos estudos sobre os expoentes de Lyapunov apresentados nas seções 1.2 e 2.2. Sendo assim, a figura 3.2(a) mostra o diagrama de bifurcações para o mapa Hassell perturbado, enquanto a figura 3.2(b) mostra os expoentes de Lyapunov. Em ambas figuras usamos os seguintes parâmetros de controle $a = 1$, $\gamma = 6$ e $\epsilon = 0,01$

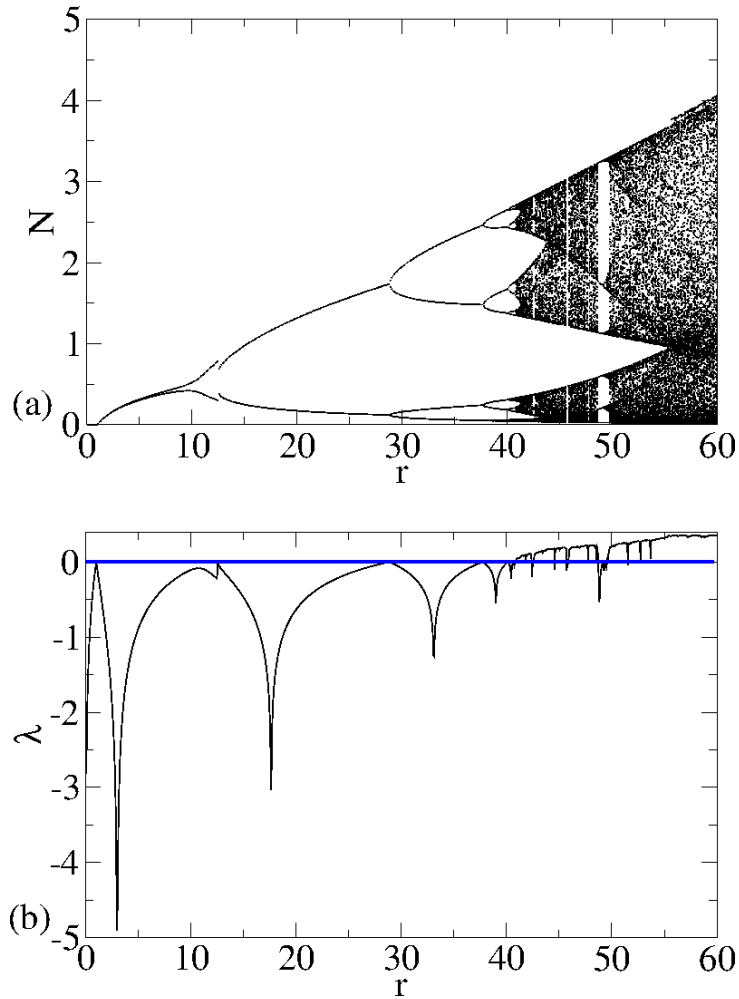


Figura 3.2: (a) Diagrama de órbita para o mapa Hassell perturbado e (b) expoentes de Lyapunov referente ao diagrama de órbita mostrado em (a). Os valores dos parâmetros usados foram $a = 1$, $\gamma = 6$, $\epsilon = 0,01$ e a condição inicial $N_0 = 0,1$.

Quando $r = \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$ a reta azul $-\lambda = 0$ toca a curva preta. Neste ponto temos uma bifurcação, chamada transcítica.

3.3 Convergência das órbitas para o ponto fixo

Para entendermos o decaimento das órbitas para o ponto fixo N^* , vamos considerar o mapa (3.1) na sua segunda iteração, devido a perturbação paramétrica, que comentamos quando realizamos o estudo de ponto fixo na seção 3.1. Novamente, vamos considerar o comportamento de N aproximando do ponto fixo $N^* = 0$, considerando $\mu = r_c - r \cong 0$ com $r_c \geq r$, em que N é uma função de n , que é o número de iterações.

A figura 3.3 mostra a convergência das órbitas para o ponto fixo N^* , para $\mu = 0$, condições iniciais diferentes e os parâmetros $a = 1$, $\gamma = 6$ e $\epsilon = 0,01$. Podemos observar que dependendo das condições iniciais N_0 , as órbitas ficam confinadas em um patamar

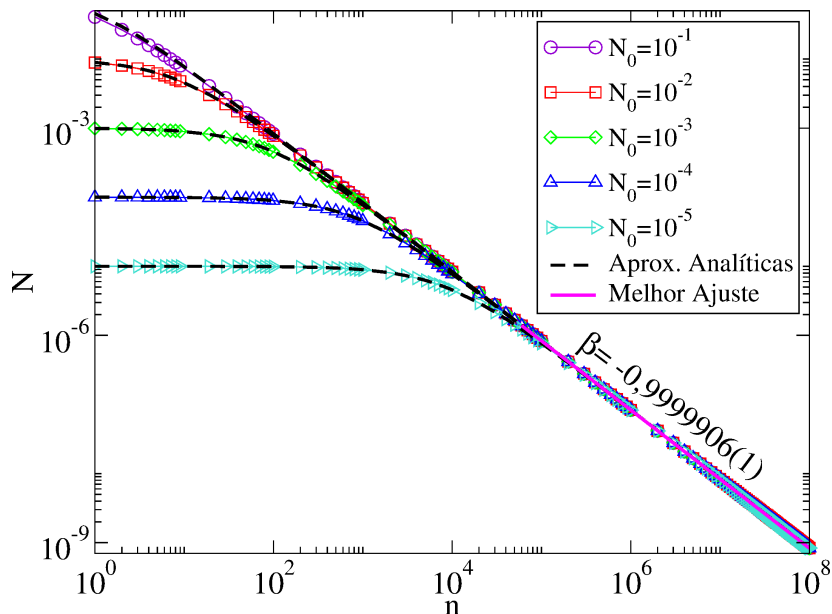


Figura 3.3: Decaimento das órbitas para o ponto fixo N^* , quando $r_c = \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$, $a = 1$, $\gamma = 6$ e $\epsilon = 0,01$.

constante N e depois de alcançar um número de iterações de cruzamento n_x , elas decaem em lei de potência, descrita por um expoente β . A partir do comportamento observado, também podemos supor as hipóteses de escala apresentadas na seção 2.3, mas substituindo α' por α , β' por β e z' por z .

O expoente β pode ser obtido a partir de um ajuste em lei de potência, na figura 3.3 obtemos $\beta = -0,9999906(1)$. O expoente z pode ser obtido por um gráfico de n_x como uma função de N_0 , como mostrado na figura 3.4, O expoente é determinado por um ajuste em lei de potência que fornece $z \approx -1$. Neste caso podemos observar que a perturbação não interferiu nos valores dos expoentes, quando comparados com α' , β' e z' , encontrados anteriormente para o mapa Hassell.

O comportamento mostrado na figura 3.3, juntamente com as três hipóteses de escala, permite-nos descrever o comportamento de N como uma função homogênea de variáveis n e N_0 , do tipo

$$N_{(N_0,n)} = lN(l^c N_0, l^d n), \quad (3.8)$$

em que l é um fator de escala e c e d são expoentes característicos. Fazendo procedimentos semelhantes aqueles discutidos para o mapa Gauss e para o mapa Hassell, conseguimos relacionar nossos três expoentes críticos α , β e z , através de uma lei de escala, dada da seguinte forma

$$z = \frac{\alpha}{\beta}, \quad (3.9)$$

de modo que dado o conhecimento de qualquer dois expoentes, permite-nos encontrar o terceiro usando a equação (3.9). A figura 3.5 mostra que os expoentes obtidos podem ser

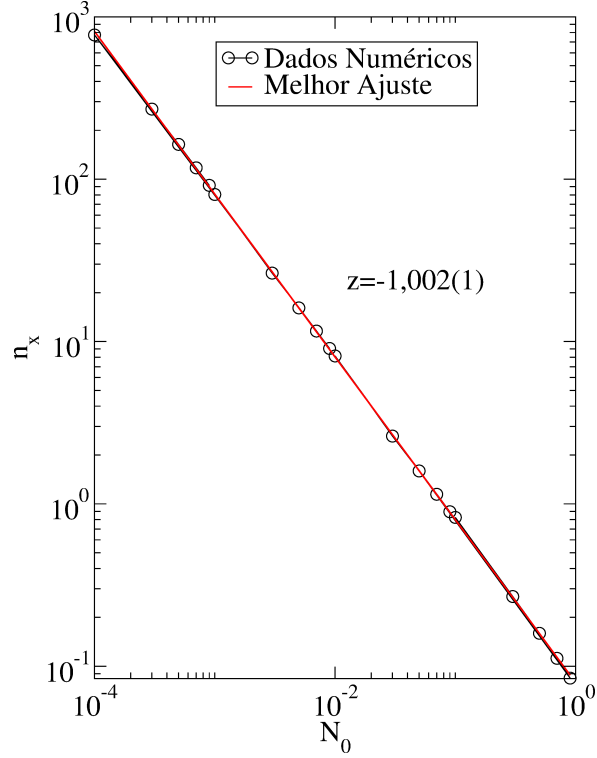


Figura 3.4: Número de iterações de cruzamento n_x como função das condições iniciais N_0 .

usados para reescalar os eixos coordenados da figura 3.3 de maneira conveniente, tal que $N \rightarrow N/N_0^\alpha$ e $n \rightarrow n/N_0^z$. Assim, um colapso de todas as curvas de N vs. n em uma única curva pode ser observado, validando os expoentes α , β e z .

Vamos discutir a convergência das órbitas para o ponto fixo do mapa (3.36), quando não estamos no r_c e sim a uma distância $\mu = r_c - r$ com $r_c \geq r$, isto caracteriza a vizinhança ao redor da bifurcação. A evolução das órbitas para o ponto fixo é então dada por uma lei exponencial [13], escrita como

$$N(n, \mu) \propto e^{-n/\tau}, \quad (3.10)$$

em que τ é o tempo de relaxação e tem a seguinte forma

$$\tau \propto \mu^\delta \quad (3.11)$$

e δ é o expoente de relaxação.

A figura 3.6 mostra o comportamento de τ vs. μ , para $a = 1$ e $\gamma = 6$ e um ajuste em lei de potência fornece o expoente $\delta \approx -1$. Assim como no mapa Hassell o valor do expoente δ é independente do valor do parâmetro γ .

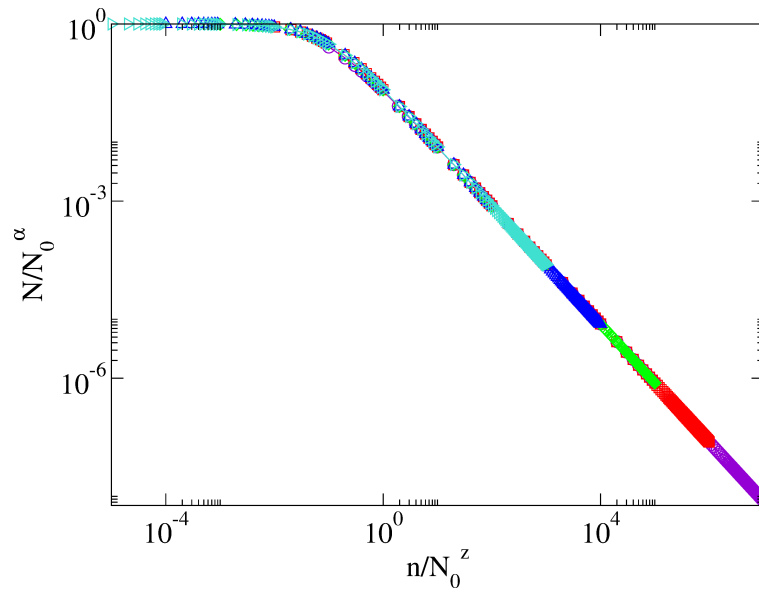


Figura 3.5: Colapso de todas as curvas mostradas na figura 3.3 em uma única curva, após uma reescala conveniente dos eixos.

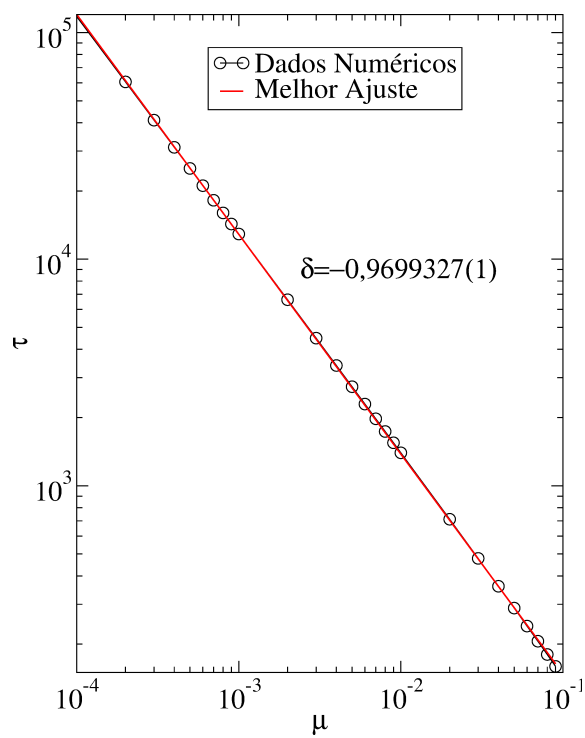


Figura 3.6: Relaxação das órbitas para o ponto fixo como uma função de μ , quando $a = 1$, $\gamma = 6$ e $\epsilon = 0,01$.

3.4 Aproximação analítica da convergência das órbitas para o ponto fixo N^*

Nesta seção vamos discutir as aproximações analíticas diferentes para alcançar a convergência das órbitas para o ponto de equilíbrio N^* . No primeiro caso, consideramos o ponto de bifurcação em $\mu = 0$ para $r = r_c = 1/\sqrt{1-\epsilon^2}$. Devido a perturbação paramétrica ser periódica, como comentado na seção 3.1, vamos reescrever a equação do mapa (3.1) em sua segunda iteração, considerando $(n + 2) \rightarrow (m + 1)$ e $n \rightarrow m$. Assim, obtemos

$$N_{m+1} = r^2(1 - \epsilon^2)N_m [(1 + aN_m) + ar(1 - \epsilon)N_m(1 + aN_m)^{(-\gamma+1)}]^{-\gamma}, \quad (3.12)$$

expandindo o termo entre colchetes em série de Taylor de N_m , quando $aN_m \ll 1$, obtemos

$$N_{m+1} = r^2(1 - \epsilon^2)N_m\{1 - a\gamma[1 + r(1 - \epsilon)]N_m + O(2)\}, \quad (3.13)$$

perto do ponto fixo, N_m é muito próximo de 0. Então, podemos manter termos de baixa ordem na expressão, considerando apenas o termo de primeira ordem. Com isso, temos

$$N_{m+1} = r^2(1 - \epsilon^2)N_m\{1 - a\gamma[1 + r(1 - \epsilon)]N_m\}. \quad (3.14)$$

Sobre essa condição, nos supomos que a variável dinâmica N pode ser considerada como uma variável contínua. Assim, a equação (3.14), considerando $\mu = 0$, pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} N_{m+1} &= r_c^2(1 - \epsilon^2)N_m - r_c^2(1 - \epsilon^2)\phi N_m^2, \\ N_{m+1} - N_m &= \frac{N_{m+1} - N_m}{(m+1) - m}, \\ &\approx \frac{dN}{dm} = -\phi N^2. \end{aligned} \quad (3.15)$$

em que $\phi = a\gamma[1 + r_c(1 - \epsilon)]$. Fazendo separação de variáveis, obtemos a seguinte equação diferencial

$$\frac{dN}{N^2} = -\phi dm. \quad (3.16)$$

A condição inicial N_0 é definida para $m = 0$, enquanto que, para um arbitrário m temos $N(m)$. Então, integrando a equação (3.16) de ambos os lados e usando estas variáveis como os limites de integração, temos

$$\int_{N_0}^{N(m)} \frac{dN'}{N'^2} = - \int_0^m \phi dm'. \quad (3.17)$$

Como $m \rightarrow n$, chegamos a aproximação analítica para o ponto fixo N^* , escrita como

$$N(n) = \frac{N_0}{(\phi n N_0 + 1)}. \quad (3.18)$$

Vamos agora discutir as implicações da equação (3.18) para específicos valores de n . Assim, começamos com o caso $n \ll n_x$, onde $\phi n N_0 \ll 1$, que é equivalente a uma das hipóteses de escala citadas anteriormente nesta seção. Para tal caso, obtemos que

$$N(n) = N_0, \quad (3.19)$$

uma rápida comparação com a primeira hipótese de escala, nos permite concluir que o expoente crítico é $\alpha = 1$. Fazendo uma segunda consideração, agora a situação em que $n \gg n_x$, onde $\phi n N_0 \gg 1$. Para tal caso, obtemos que

$$N(n) = (\phi n)^{-1}. \quad (3.20)$$

Comparando este resultado com a segunda hipótese de escala comentada anteriormente, concluímos que $\beta = -1$. O último caso é obtido quando $\phi n N_0 = 1$, isto significa que $n = n_x$. Então, obtemos

$$\begin{aligned} \phi n_x N_0 &= 1, \\ n_x &= \phi^{-1} N_0^{-1}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

comparando com a terceira hipótese de escala, nos permite concluir que $z = -1$. Com esses procedimentos, obtemos os expoentes críticos α , β e z discutidos numericamente. A figura 3.3 mostra os decaimentos das órbitas para o ponto fixo N^* , com as aproximações analíticas que estão indicadas pelas linhas tracejadas. Aquelas curvas foram obtidas a partir da equação (3.18).

Agora, vamos discutir o segundo caso, considerando $\mu \neq 0$. Assim, temos

$$N_{m+1} = r^2(1 - \epsilon^2)N_m - r^2(1 - \epsilon^2)\phi N_m^2, \quad (3.22)$$

sendo $N_m \ll 1$ o termo N_m^2 tende a zero muito mais rápido que o termo de primeira ordem. Assim, desprezamos o último termo da equação (3.22) e obtemos

$$N_{m+1} = r^2(1 - \epsilon^2)N_m.$$

Subtraindo N_m de ambos os lados, considerando

$$\begin{aligned} r_c &= \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}}, \\ (1-\epsilon^2) &= \frac{1}{r_c^2} \end{aligned} \tag{3.23}$$

e realizando os procedimentos semelhantes como em (3.15), obtemos

$$\begin{aligned} N_{m+1} - N_m &= \left(\frac{r}{r_c}\right)^2 N_m - N_m, \\ &= \frac{N_{m+1} - N_m}{(m+1) - m} \approx \frac{dN}{dm}, \\ &= -\mu\eta N_m, \end{aligned} \tag{3.24}$$

em que $\mu = r_c - r$ e $\eta = \left(\frac{r+r_c}{r_c^2}\right)$. Separando variáveis, considerando novamente que para $m = 0$ a condição inicial é N_0 , e integrando em ambos os lados a equação, obtemos

$$\int_{N_0}^{N(m)} \frac{dN'}{N'} = -\mu\eta \int_0^m dm'. \tag{3.25}$$

Integrando e reagrupando os termos, obtemos a aproximação analítica quando estamos a uma distância μ do ponto de bifurcação, dada da seguinte maneira

$$N(n) = N_0 e^{-\eta\mu n}. \tag{3.26}$$

Comparando este resultado com as equações (3.10) e (3.11), concluímos que $\delta = -1$ está de bom acordo com o resultado numérico mostrado na figura 3.6. Por fim, mesmo existindo a perturbação paramétrica ao mapa Hassell, foram encontrados os mesmos expoentes críticos que no Capítulo 2, incluindo δ , mostrando que a perturbação não afeta nos expoentes da convergência das órbitas para o ponto fixo.

3.5 Espaço de parâmetros, órbitas superestáveis e extremas

Neste Capítulo vamos estudar o espaço de parâmetros do mapa Hassell perturbado, utilizando como ferramenta as órbitas superestáveis e extremas. Obtemos algumas dessas órbitas de forma analítica, dando mais robustez ao nosso trabalho.

3.5.1 Espaço de parâmetros

Existem ferramentas, como espaço de fases, diagrama de órbitas para analisar o comportamento dinâmico de sistemas dinâmicos. Outra forma de analisar o comportamento de um sistema dinâmico é através do espaço de parâmetros [30]. Esta forma de análise é em relação aos parâmetros de controle do sistema. Para estes estudos uma ferramenta importante a ser utilizada é o expoente de Lyapunov (comentada nos Capítulos anteriores), definido da seguinte forma

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\frac{dN_{n+1}}{dN_n} \right). \quad (3.27)$$

Para um λ positivo, temos órbitas caóticas, enquanto que para valores negativos, as órbitas são periódicas. Através do cálculo dos expoentes de Lyapunov, podemos analisar algumas estruturas no espaço de parâmetros. A figura 3.7 mostra r como função de ϵ para uma grade de 1000 por 1000 em relação aos parâmetros, com a condição inicial $N_0 = 0, 1$, considerando um transiente de 10^6 e fazendo 10^6 iterações. A paleta de cores da figura 3.7 mostra os expoentes de Lyapunov λ . Podemos observar uma sequência de estruturas periódicas, também conhecidas como *shrimps* (camarões).

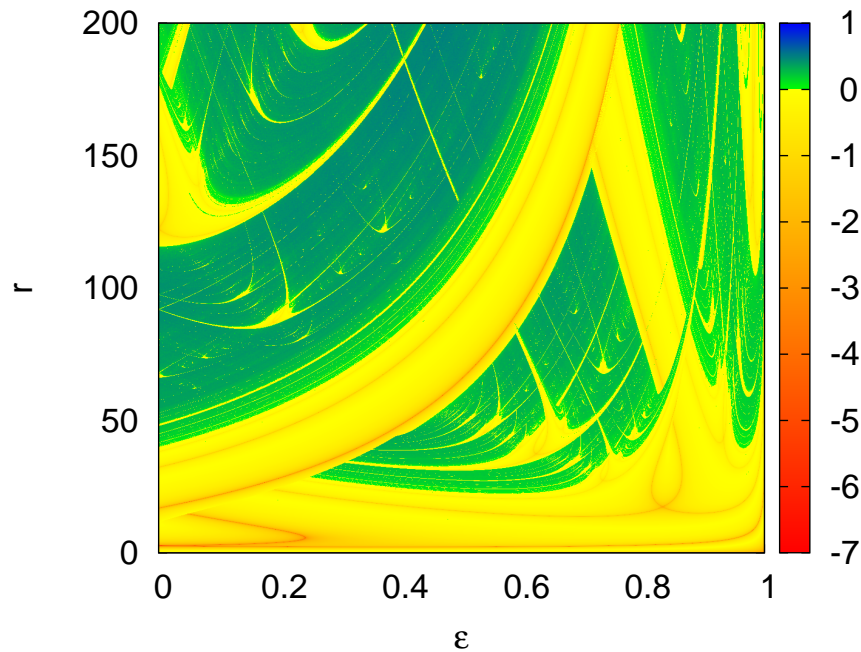


Figura 3.7: Espaço de parâmetro do mapa Hassell perturbado. A paleta de cores representa os expoentes de Lyapunov λ .

A figura 3.8 mostra os períodos dos camarões, em que a paleta de cores da figura exibe o período de cada uma dessas estruturas. Cada estrutura consiste de um corpo principal de período k , mais uma sucessão de domínios adjacentes de períodos $k \times 2^n$ [30].

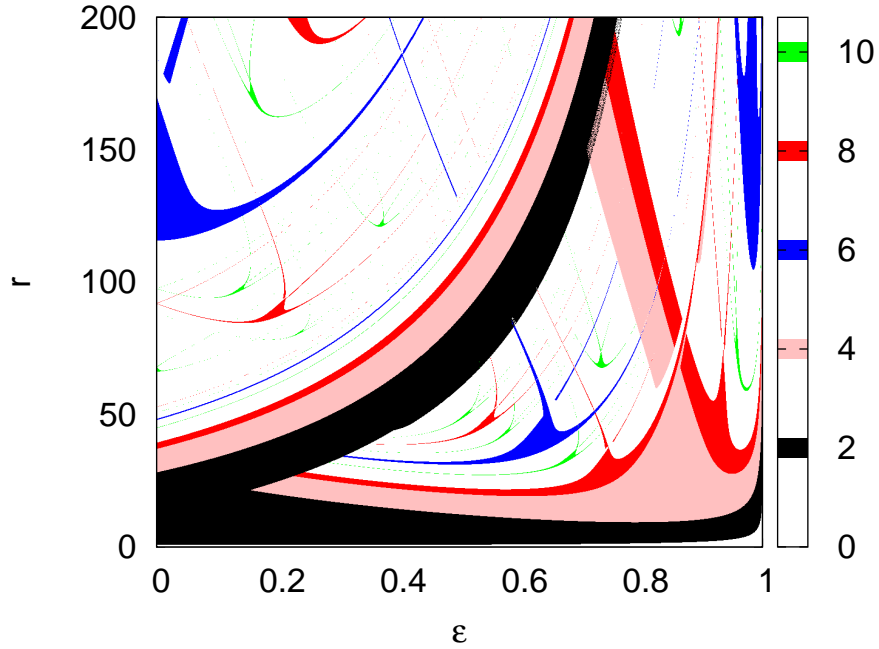


Figura 3.8: Espaço de parâmetro do mapa Hassell perturbado, em que a paleta de cores representa os períodos de cada estrutura camarão observadas na figura 3.7.

3.5.2 Órbitas superestáveis e extremas

Nesta seção vamos estudar as estruturas periódicas observadas nas figuras 3.7 e 3.8 utilizando como ferramentas as órbitas superestáveis. Estas são órbitas em que os expoentes de Lyapunov tendem a menos infinito e estão representadas pelas curvas em laranja/vermelho na figura 3.7.

Estudaremos, também, as órbitas extremas, que são trajetórias conectando pontos de máximos a mínimos ou vice-versa e estão representadas na figura 3.9.

Para isso, considere um mapa unidimensional da forma

$$N_{n+1} = F(N_n), \quad (3.28)$$

com 2 ou mais parâmetros e $N \in \mathbb{R}$. Uma órbita de período k , onde $N_n = F^{(k)}(N_n)$ é superestável se

$$\frac{dF^{(k)}(N_n)}{dN_n} = \prod_{n=0}^{k-1} \frac{dF(N_n)}{dN_n} = \prod_{n=0}^{k-1} F'(N_n) = 0. \quad (3.29)$$

Com isso, uma órbita é superestável se as duas condições

$$N_n = F^{(k)}(N_n), \quad (3.30)$$

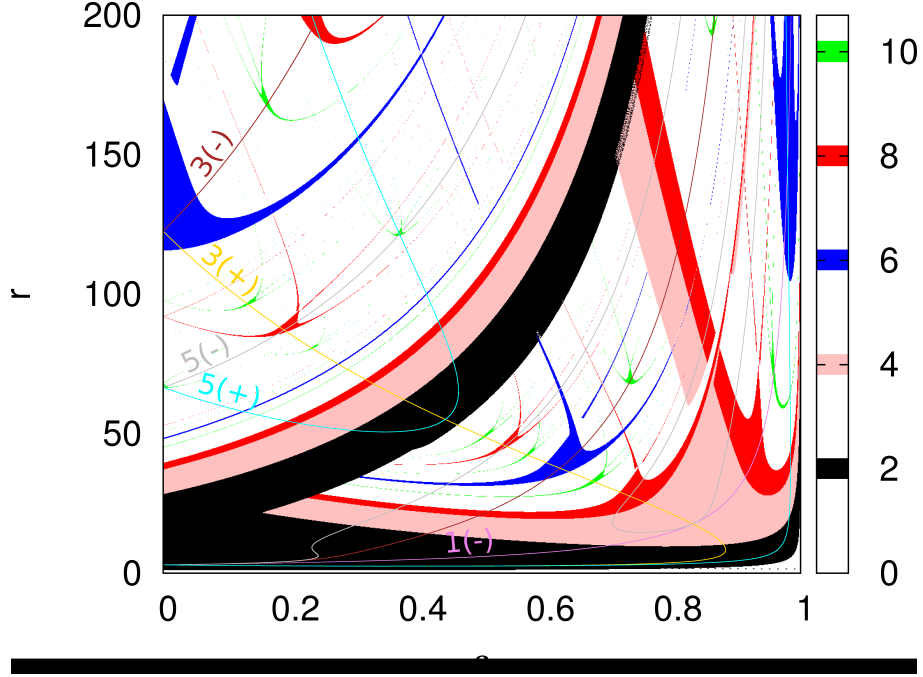


Figura 3.9: Espaço de parâmetro do mapa Hassell perturbado, em que a paleta de cores representa os períodos de cada estrutura periódica e as curvas enumeradas representam as órbitas extremas. O número, por exemplo, 3(+), representa uma órbita extrema de período 3, cujo sinal (+) é devido a $b_n = +1$.

$$F'(N_n) = 0, \quad (3.31)$$

são satisfeitas, porém a equação (3.31) contém pelo menos uma das soluções, do conjunto de soluções dado por $\{N_1^*, N_2^*, \dots, N_i^*, \dots, N_j^*, \dots\}$, que representam pontos de máximos e mínimos da equação (3.28), podendo corresponder a pontos de inflexão também, mas frequentemente correspondem a máximos e mínimos [44]. Com isso, podemos ter soluções para a segunda condição (3.31), que quando substituídas na primeira (3.30), levam a órbitas do tipo

$$F^{(k)}(N_i^*) = N_j^*, \quad (3.32)$$

que conectam pontos de máximos e mínimos ou vice e versa. Quando isto ocorre, temos órbitas extremas [44]. Se $i = j$ e a primeira condição (3.30) é satisfeita, retornamos a condição de uma órbita superestável.

Utilizando a relação (3.31) no mapa Hassell perturbado, podemos obter de maneira analítica, uma das condições de órbitas superestáveis, da seguinte forma

$$F'(N) = r(1 + b_n \epsilon)(1 + aN)^{-\gamma} [1 - a\gamma N(1 + aN)^{-1}] = 0, \quad (3.33)$$

para que a igualdade seja satisfeita, basta que o termo entre colchetes seja zero, com isso,

obtemos

$$\begin{aligned} 1 - a\gamma N(1 + aN)^{-1} &= 0, \\ a\gamma N(1 + aN)^{-1} &= 1, \end{aligned} \quad (3.34)$$

resultando em

$$\tilde{N} = \frac{1}{a(\gamma - 1)}, \quad (3.35)$$

com este resultado, obtemos o valor de N relacionado as órbitas superestáveis e/ou retorno representado por \tilde{N} . Satisfazendo a outra condição, que é a equação (3.30), na primeira iteração, obtemos

$$F(\tilde{N}) = N_{n+1} = \frac{r\tilde{N}(1 + b_n\epsilon)}{(1 + a\tilde{N})^\gamma} = \tilde{N}, \quad (3.36)$$

queremos relacionar os parâmetros ϵ e r , assim, manipulando a equação (3.36), temos

$$\begin{aligned} \frac{r\tilde{N}(1 + b_n\epsilon)}{(1 + a\tilde{N})^\gamma} &= \tilde{N}, \\ (1 + b_n\epsilon) &= \frac{(1 + a\tilde{N})^\gamma}{r}, \\ \epsilon &= \frac{1}{b_n} \left[\frac{(1 + a\tilde{N})^\gamma}{r} - 1 \right] \end{aligned} \quad (3.37)$$

A partir disso, podemos ter a primeira órbita extrema, representada na figura 3.9, que é a órbita extrema 1(-). Dando continuidade aos estudos, mas analisando a segunda iteração, obtemos

$$\begin{aligned} F(F(\tilde{N})) &= uv\tilde{N} \left\{ (1 + a\tilde{N})^{-\gamma} \left[1 + ua\tilde{N}(1 + a\tilde{N})^{-\gamma} \right]^{-\gamma} \right\} = \tilde{N}, \\ &= uv\tilde{N} \left\{ (1 + a\tilde{N}) \left[1 + ua\tilde{N}(1 + a\tilde{N})^{-\gamma} \right] \right\}^{-\gamma} = \tilde{N}, \\ &= uv\tilde{N} \left[(1 + a\tilde{N}) + ua\tilde{N}(1 + a\tilde{N})^{1-\gamma} \right]^{-\gamma} = \tilde{N}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

em que $u = r(1 - \epsilon)$ e $v = r(1 + \epsilon)$. Resolvendo a equação (3.38), obtemos

$$v = \frac{1}{u \left[(1 + aN_n) + uaN_n(1 + aN_n)^{1-\gamma} \right]^{-\gamma}}. \quad (3.39)$$

Para obtermos as curvas que representam as órbitas superestáveis de período 2, vamos relacionar os termos u e v , colocando-os em função dos parâmetros de controle estudados

no espaço de parâmetros. Assim, temos

$$u + v = 2r, \quad (3.40)$$

e

$$u - v = -2r\epsilon. \quad (3.41)$$

De modo que, manipulando a equação (3.40), temos

$$r = \frac{u + v}{2}. \quad (3.42)$$

Substituindo o resultado da equação (3.42) na (3.41), temos

$$\begin{aligned} -2r\epsilon &= u - v, \\ -2\epsilon \left(\frac{u + v}{2} \right) &= u - v, \end{aligned} \quad (3.43)$$

resultando em

$$\epsilon = \frac{u - v}{u + v} \quad \text{e} \quad \epsilon = \frac{-(u - v)}{u + v}. \quad (3.44)$$

Em que as equações (3.42) e (3.44) são as relações entre r e ϵ , com relação a u e v , onde o negativo em ϵ representa a oscilação de b , que é de $+1$ para -1 . Com isso, podemos observar na figura 3.10 as órbitas superestáveis de período 2.

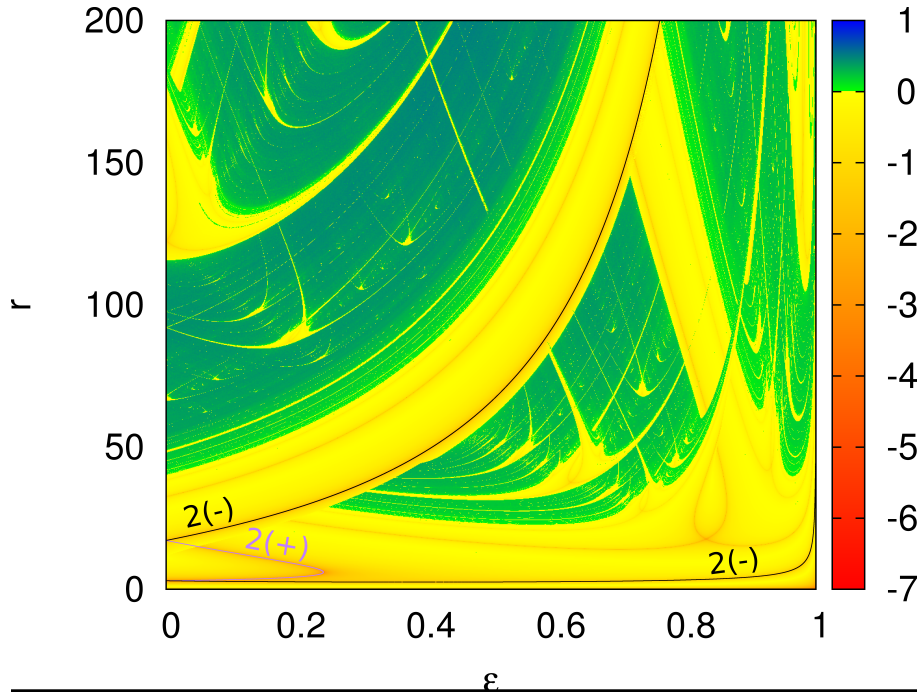


Figura 3.10: Espaço de parâmetro do mapa Hassell perturbado em que a paleta de cores representa os expoentes de Lyapunov e as curvas desenhadas na figura representam as órbitas extremas de período 2.

Por fim, vamos analisar analiticamente quando estamos na terceira iteração. Dessa forma, temos

$$\begin{aligned}
 F(F(F(\tilde{N}))) &= u^2 v \tilde{N} \left[z + a u v \tilde{N} z^{1-\gamma} \right]^{-\gamma} = \tilde{N} , \\
 &= u^2 v \tilde{N} \left[z(1 + a u v \tilde{N} z^{-\gamma}) \right]^{-\gamma} = \tilde{N} , \\
 &= u q [1 + a q]^{-\gamma} = \tilde{N},
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

em que

$$z = (1 + a\tilde{N}) + u a \tilde{N} (1 + a\tilde{N})^{1-\gamma} \tag{3.46}$$

e

$$q = u v \tilde{N} z^{-\gamma}, \tag{3.47}$$

isolando u na equação (3.45), temos

$$u = \frac{N_n}{q[1 + aq]^{-\gamma}}. \tag{3.48}$$

Isolando v na equação (3.47), substituindo o valor de z dado pela equação (3.46), temos

$$v = \frac{q}{uN_n [(1 + aN_n) + uaN_n(1 + aN_n)^{1-\gamma}]^{-\gamma}}. \quad (3.49)$$

A ideia para encontrarmos as órbitas de período 3 no espaço de parâmetros é variarmos q , dado pela equação (3.47), para encontrarmos u . Depois disso, os valores de v , dado pela equação (3.49). Assim, obtemos a órbitas representadas na figura 3.9, nomeadas de 3(+) e 3(-). As demais órbitas de retorno foram obtidas numericamente considerando a condição inicial $N_0 = \tilde{N} = 1/a(\gamma - 1)$, 10^6 iterações e que $|N_{n+1} - \tilde{N}| < 10^{-4}$ para que as órbitas sejam periódicas. Com isso, obtemos as órbitas 5(+), 7(+), 5(-) e 7(-), que estão representadas na figura 3.11, em que a figura 3.12 é o espaço de parâmetros em relação ao cálculo dos expoentes de Lyapunov.

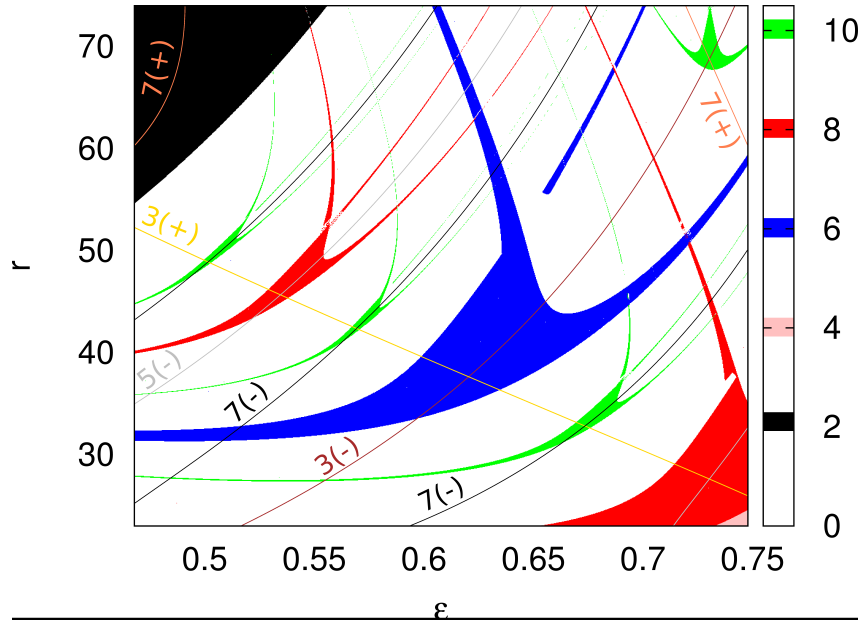


Figura 3.11: Ampliação no espaço de parâmetro do mapa Hassell perturbado mostrado na figura 3.8 com as órbitas extremas.

As equações (3.31) e (3.32) quando satisfeitas, levam a órbitas extremas, entretanto, vamos supor que num período k_1 , temos uma órbita do tipo

$$F^{(k_1)}(N_i^*) = N_j^*, \quad (3.50)$$

e em um período k_2 , temos

$$F^{(k_2)}(N_j^*) = N_i^*, \quad (3.51)$$

Aplicando a equação (3.51) na (3.50), trocando o termo N_i^* por $F^{(k_2)}(N_j^*)$, temos

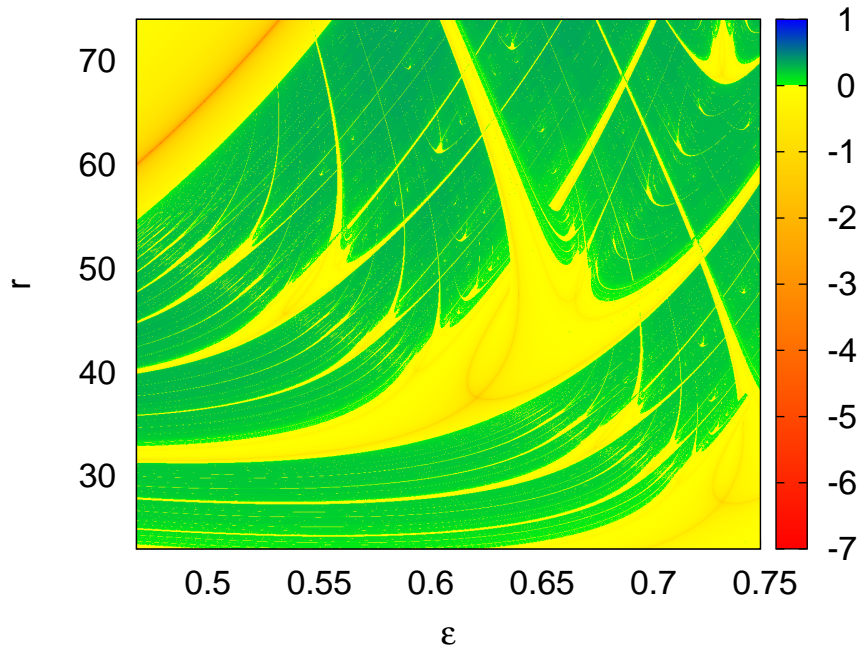


Figura 3.12: Ampliação no espaço de parâmetro do mapa Hassell perturbado mostrado na figura 3.7 em que a paleta de cores representa os expoentes de Lyapunov

$$\begin{aligned}
 F^{(k_1)}(N_i^*) &= F^{(k_1)}(F^{(k_2)}(N_j^*)) , \\
 &= F^{(k_1+k_2)}(N_j^*),
 \end{aligned}
 \tag{3.52}$$

em que a equação (3.52) implica em

$$F^{(k_1+k_2)}(N_j^*) = N_j^*.
 \tag{3.53}$$

Podemos observar que, partimos de um ponto crítico (máximo ou mínimo) e retornamos ao mesmo ponto, mas acrescentando a soma dos períodos ($k_1 + k_2$). Com isso, temos outra forma de obter órbitas superestáveis e podem ser vistas novamente nas figuras 3.9 e 3.11, que são os cruzamentos entre as curvas de índices (+) e (-).

Portanto, analítica e numericamente as órbitas superestáveis e extremas podem ser outras ferramentas para estudo dos períodos e organização das estruturas denominadas *shrimps* no espaço de parâmetros.

Capítulo 4

Comentários finais

Neste trabalho consideramos um conjunto de mapas unidimensionais discretos e investigamos algumas propriedades dinâmicas. Iniciamos os estudos considerando o mapa Gauss e investigamos a convergência das órbitas para os pontos fixos x_1^* e x_2^* para os parâmetros de controle $\beta = \beta_{c_1}$ e $\beta = \beta_{c_2}$, em que ocorrem as bifurcações tangente e duplicação de período respectivamente. Nestes pontos fizemos análises fenomenológicas e observamos que o decaimento das trajetórias para os pontos fixos são caracterizadas por três expoentes críticos cada. Estes expoentes estão relacionados entre si pelas leis de escalas $z' = \alpha'/\sigma'$ e $z = \alpha/\sigma$ e os resultados forneceram $\alpha' = 1$, $\sigma' = -1$ e $z' = -1$ para a bifurcação tangente e $\alpha = 1$, $\sigma = -1/2$ e $z = -2$ para a bifurcação de duplicação de período.

Mostramos no mapa Gauss, quando escolhidos outros valores do parâmetro de controle ν , comportamentos chamados de crises de fronteiras. Caracterizamos estes eventos e obtemos os expoentes $\gamma_1 \approx -0,509(7)$ para a crise de fronteira em $\beta = \beta_{crise_1}$ e $\gamma_2 \approx -0,507(4)$ para crise em $\beta = \beta_{crise_2}$, quando consideramos $\nu = 10$. Estes resultados produziram o mesmo valor encontrado nas referências [36–38] para o mapa quadrático. Utilizando a órbita de ponto fixo instável de período 1 e as órbitas *supertracks*, conseguimos encontrar o valor que iniciam as crises no mapeamento, fornecendo $\nu = \nu_{crise} \approx 9,82$.

Estendemos nossos estudos considerando o mapa Hassell e investigamos a convergência das órbitas para o ponto fixo na bifurcação transcítica. Neste ponto, fizemos análises fenomenológicas e observamos que a convergência das órbitas também são caracterizadas por três expoentes. Eles estão relacionados entre si pela lei de escala $z' = \alpha'/\beta$ e os resultados encontrados foram $\alpha' = 1$, $\beta = -1$ e $z' = -1$. Perto da bifurcação a convergência das órbitas para o ponto fixo no mapa Hassell é marcada por um decaimento exponencial e o tempo de relaxação é descrito pela lei do tipo $\tau \propto \mu^\delta$, com $\delta = -1$.

Comparando os expoentes críticos encontrados para o mapa Hassell e Hassell perturbado, observamos que a perturbação não afetou a convergência das trajetórias para o ponto de equilíbrio na bifurcação transcítica, com isso, conseguimos os mesmos resultados

de expoentes.

Comparando os resultados dos três mapas estudados com os estudos realizados para o mapa logístico em [17], observamos que os expoentes críticos obtidos no mapa Gauss, estudando a convergência das órbitas para o ponto fixo na primeira iterada, na bifurcação tangente; são diferentes dos expoentes obtidos para o mapa Logístico, Hassell e Hassell perturbado. Entretanto, os três últimos mapas, quando estudados os decaimentos das trajetórias na bifurcação transcítica, apresentaram os mesmos expoentes críticos.

Analisamos a convergência das trajetórias para o ponto estacionário no mapa Gauss na bifurcação de duplicação de período e encontramos outros três expoentes críticos. Comparando estes expoentes com os do mapa Logístico, na mesma bifurcação, os expoentes apresentaram os mesmos resultados. Portanto, de acordo com a bifurcação em que estamos analisando o decaimento das órbitas para o ponto de equilíbrio, os expoentes críticos podem ser iguais (se estivermos na mesma bifurcação) ou diferentes (se não estivermos na mesma bifurcação).

Finalizando, utilizamos como ferramenta os expoentes de Lyapunov para obter o espaço de parâmetros e verificar estruturas complexas periódicas chamadas *shrimps* (camarões). Além disso, quando observamos o espaço de parâmetros via períodos e utilizamos as órbitas de retorno que foram encontradas numérica e analiticamente, nos possibilitou entender melhor como essas estruturas se organizam. Visto que, utilizando estas órbitas foi possível localizar mais precisamente os camarões. Com isso, sendo uma importante ferramenta para investigação global e local destas estruturas periódicas complexas.

Temos como perspectivas, analisar o comportamento das órbitas na relaxação para a bifurcação tangente e verificar se há modificação no valor do expoente de relaxação. Além disso, pretendemos acoplar o mapa Gauss ao mapa logístico. Neste tema, vamos investigar os efeitos que este acoplamento pode causar no espaço de parâmetros deste novo sistema. Queremos, também, analisar o que acontece na mudança da bacia de atração no mapa Hassell perturbado, pois quando acrescentamos essa perturbação paramétrica a mesma produz novos comportamentos na dinâmica do mapeamento.

Referências Bibliográficas

- [1] G. A. Luna-Acosta, G. Orellana-Rivadeneira, A. Mendoza-Galván, and C. Jung. Chaotic classical scattering and dynamics in oscillating 1-d potential wells. *Chaos, Solitons & Fractals*, 12(2):349 – 363, 2001. Chaos in Ecology.
- [2] W. B. Zang. *Discrete Dynamical Systems, Bifurcations and Chaos in Economics*. Elsevier Science, 2006.
- [3] E. D. Leonel. Corrugated waveguide under scaling investigation. *Phys. Rev. Lett.*, 98:114102, Mar 2007.
- [4] E. D. Leonel and L. A. Bunimovich. Suppressing fermi acceleration in a driven elliptical billiard. *Phys. Rev. Lett.*, 104:224101, Jun 2010.
- [5] J. A. de Oliveira and E. D. Leonel. Scaling properties and universality in a ratchet system. *The European Physical Journal Special Topics*, 223(13):2969–2978, Dec 2014.
- [6] E. N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20(2):130–141, 1963.
- [7] R. Hilborn. *Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers*. Oxford University Press, 2 edition, 2004.
- [8] Tien-Yien Li and J. A. Yorke. Period three implies chaos. *The American Mathematical Monthly*, 82(10):985–992, 1975.
- [9] J. R. Pounder and T. D. Rogers. Dynamics of a two-parameter family of maps of the interval. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 10(5):415 – 423, 1986.
- [10] R. L. Devaney. *A First Course In Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiment (Studies in Nonlinearity)*. Westview Press, 1992.
- [11] A. J. Lichtenberg and M. A. Leiberman. *Regular and Chaotic Dynamics*. Springer New York, 1992.
- [12] M. Martelli. *Introduction to discrete dynamical systems and chaos*. Wiley, New York, 1999.
- [13] E. D. Leonel, J. K. L. da Silva, and S. O. Kampshort. Relaxation and transients in a time-dependent logistic map. *Int. J. Bifurc. Chaos*, 12:1667 – 1674, 2002.

- [14] R. L. Devaney. *An introduction to chaotic dynamical systems*. Westview Press, Cambridge, 2003.
- [15] O. Galor. *Discrete dynamical systems*. Springer, Heidelberg, 2007.
- [16] J. A. de Oliveira, E. R. Papesso, and E. D. Leonel. Relaxation to fixed points in the logistic and cubic maps: Analytical and numerical investigation. *Entropy*, 15:4310–4318, 2013.
- [17] R. M. N. Teixeira, D. S. Rando, F. C. Geraldo, R. N. C. Filho, J. A. de Oliveira, and E. D. Leonel. Convergence towards asymptotic state in 1-d mappings: A scaling investigation. *Physics Letters A*, 379:1246 – 1250, 2015.
- [18] E. D. Leonel, R. M. N. Teixeira, D. S. Rando, R. N. C. Filho, and J. A. de Oliveira. Addendum to: "Convergence towards asymptotic state in 1-d mappings: A scaling investigation". *Physics Letters A*, 379:1796–1798, 2015.
- [19] D. R. da Costa, R. O. Medrano-T, and E. D. Leonel. Route to chaos and some properties in the boundary crisis of a generalized logistic mapping. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 486:674–680, 2017.
- [20] R. M. May. Biological populations with nonoverlapping generations: Stable points, stable cycles, and chaos. *Science*, 186(4164):645–7, December 1974.
- [21] R. M. May. Bifurcations and dynamic complexity in simple ecological models. *The American Naturalist*, 110(974):573–599, 1976.
- [22] M. Miskiewicz and J. Ausloos. A logistic map approach to economic cycles. (i). the best adapted companies. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 336:206 – 214, 2004.
- [23] N. K. Pareek, V. Patidar, and K. K. Sud. Image encryption using chaotic logistic map. *Image and Vision Computing*, 24:926 – 934, 2006.
- [24] N. Singh and A. Sinha. Chaos-based secure communication system using logistic map. *Optics and Lasers in Engineering*, 48:398 – 404, 2010.
- [25] E. P. Borges, C. Tsallis, G. F. J. A na nos, and P. M. C. de Oliveira. Nonequilibrium probabilistic dynamics of the logistic map at the edge of chaos. *Physical Review Letters*, 89, 2002.
- [26] A. Curtright and T. Veitia. Logistic map potentials. *Physical Letters A*, 375:276 – 282, 2010.
- [27] K. J. Persohn and R. J. Povinelli. Analyzing logistic map pseudorandom number generators for periodicity induced by finite precision floating-point representation. *Chaos, Solitons & Fractals*, 45:238 – 245, 2012.
- [28] J. Banasiak. *Mathematical Modelling in One Dimension: An Introduction via Difference and Differential Equations*. Cambridge University Press, 2013.

- [29] K. T. Alligood, T. D. Sauer, and J. A. Yorke. *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*. Springer-Verlag, New York, 1997.
- [30] J. A. C. Gallas. Structure of the parameter space of the h enon map. *Physical Review Letters*, 70(18), 1993.
- [31] J. E. Marsden and M. McCracken. *The Hopf bifurcation and its applications*. Springer, Berlin, 1976.
- [32] D. Ruelle and F. Takens. On the nature of turbulence. *Turbulence, Strange Attractors and Chaos*, pages 57–84, 1970.
- [33] M. J. Feigenbaum. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *Journal of Statistical Physics*, 19(1):25–52, Jul 1978.
- [34] P. Collet and J. P. Eckmann. *Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Basel, 1 edition, 2009.
- [35] E. Ott. *Strange attractors and chaotic motions of dynamical systems*, pages 103–119. Springer New York, New York, NY, 2004.
- [36] C. Grebogi, E. Ott, and J. A. Yorke. Chaotic attractors in crisis. *Physical Review Letters*, 48(22), 1982.
- [37] C. Grebogi and E. Ott. Crises, sudden changes in chaotic attractors and transient chaos. *Physica 7D*, pages 181–200, 1983.
- [38] C. Grebogi, E. Ott, F. Romeiras, and J. A. Yorke. Critical exponents for crisis-induced intermittency. *Physical Review A*, 36(11), 1987.
- [39] E. M. Oblow. Supertracks, supertrack functions and chaos in the quadratic map. *Physics Letters A*, 128(8), 1988.
- [40] S. Lynch. *Dynamical Systems with Applications using matlab*. Birkhauser, 2 edition, 2001.
- [41] Z. Zhou, W. Shi, Y. Bao, and M. Yang. A gaussian function based chaotic neural network. In *2010 International Conference on Computer Application and System Modeling (ICCASM 2010)*, volume 4, pages V4–203–V4–206, Oct 2010.
- [42] M. P. Hassell. Density-dependence in single-species populations. *The Journal of Animal Ecology*, 44(1):283–295, Feb. 1975.
- [43] H. M. J. de Mendonça, E. D. Leonel, and J. A. de Oliveira. An investigation of the convergence to the stationary state in the hassell mapping. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 466:537 – 543, 2017.
- [44] D. R. da Costa, M. Hansen, G. Guarise, R. O. Medrano-T, and E. D. Leonel. The role of extreme orbits in the global organization of periodic regions in parameter space for one dimensional maps. *Physics Letters A*, 380:1610–1614, 2016.

- [45] V. L. Zaguskin. *Handbook of Numerical Methods for the Solution of Algebraic and Transcendental Equations*. Pergamon Press, 1961.
- [46] J. Stewart. *Cálculo*, volume 1. Cengage Learning., São Paulo, 7 edition, 2013.
- [47] N. Fiedler-Ferreira and C. P. Cintra do Prado. *Caos: uma introdução*. Blücher, 2009.
- [48] L. H. A. Monteiro. *Sistemas Dinâmicos*. Editora Livraria da Física, 2006.
- [49] M. J. Panik. *Growth curve modeling: theory and applications*. Wiley, 2013.
- [50] S. Elaydi. *An introduction to difference equations*. Springer Science+Business Media, 3 edition, 2005.
- [51] H. Bai-Lin. *Elementary Symbolic Dynamics and Chaos in Dissipative Systems*. World Scientific Publishing Co. Inc., Singapore, 1989.