



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

Teoria de Funções Elípticas e Aplicações em Soluções de Sistemas Periódicos em Mecânica

José Vinícius Zapte Bergamo

Rio Claro
2018



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

Teoria de Funções Elípticas e Aplicações em Soluções de Sistemas Periódicos em Mecânica

José Vinícius Zapte Bergamo

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-
Graduação – Mestrado em Matemática como
requisito parcial para a obtenção do grau de
Mestre

Orientador

Prof. Dr. Nelson Callegari Junior

2018

517.36 Bergamo, José Vinícius Zapte
B493t Teoria de funções elípticas e aplicações em soluções de
sistemas periódicos em mecânica / José Vinícius Zapte
Bergamo. - Rio Claro, 2018
100 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista,
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Nelson Callegari Junior

1. Funções elípticas. 2. Integrais elípticas. 3. Mecânica
analítica. I. Título.

TERMO DE APROVAÇÃO

José Vinícius Zapte Bergamo

TEORIA DE FUNÇÕES ELÍPTICAS E APLICAÇÕES EM SOLUÇÕES DE
SISTEMAS PERIÓDICOS EM MECÂNICA

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Nelson Callegari Junior
Orientador

Prof. Dr. Emanuel Fernandes de Lima
Departamento de Física - UFSCar

Prof. Dr. Tadashi Yokoyama
IGCE - UNESP

Rio Claro, 24 de abril de 2018

A Deus e à minha família.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pelo dom da vida e pela força concedida ao longo desta caminhada.

Agradeço aos meus pais, Luiz e Rosa, pelo apoio incondicional e pelo incentivo, sobretudo nas horas mais difíceis.

Agradeço aos meus familiares e amigos pela torcida e pelo estímulo.

Agradeço aos meus colegas de pós-graduação e, em especial, aos meus companheiros Daniel e Elígio, com os quais tive o prazer de compartilhar árduas horas de estudo e grandes experiências.

Agradeço ao professor Nelson pela orientação dedicada e pela paciência ao longo de todo este tempo.

Agradeço a Unesp, na pessoa dos professores da pós-graduação e de seus funcionários, pelo acolhimento.

Por que nele vivemos, nos movemos e existimos.

Atos 17:28-30

Resumo

É bem conhecido que em Mecânica Analítica muitos problemas integráveis não tem primitivas escritas em forma de funções elementares, tais como: corpo rígido assimétrico em rotação livre; pêndulo esférico, entre outros. O uso de funções elípticas faz-se necessário para se buscar soluções analíticas desses problemas. Neste trabalho, faremos primeiramente uma revisão da teoria dessas funções adotando como referência alguns textos clássicos. Feito isso, estudaremos a formulação de problemas de dinâmica, a saber o pêndulo simples e o pião simétrico. Por fim, com as integrais desses problemas em mãos, iremos determinar suas soluções com o uso das funções elípticas de Jacobi e Weierstrass.

Palavras-chave: Integrais Elípticas, Funções Elípticas, Mecânica Analítica.

Abstract

It is well known that in Analytical Mechanics many simple integrable problems cannot be written in terms of elementary functions, such as: rigid asymmetrical body in free rotation, spherical pendulum, among others. The use of elliptic functions becomes necessary in order to obtain analytical solutions of these problems. In this work, we present a review of the theory of these functions accordingly to some classical texts. In the sequence, we study two problems of mechanics: the simple pendulum and the symmetrical top. Finally, we will determine the solutions to these problems using of the Jacobi and Weierstrass elliptic functions.

Keywords: Elliptic Integrals, Elliptic Functions, Analytical Mechanics.

Lista de Figuras

2.1	Gráfico de $F(\phi, k)$, integral elíptica de primeira espécie, para $m = 0.5$ (vermelho), $m = 0.6$ (azul), $m = 0.7$ (verde) e $m = 0.8$ (marrom).	25
2.2	Gráfico de $K(k)$, integral elíptica completa de primeira espécie.	25
2.3	Gráfico de $E(\phi, k)$, integral elíptica de segunda espécie, para $m = 0.5$ (vermelho), $m = 0.6$ (azul), $m = 0.7$ (verde) e $m = 0.8$ (marrom).	27
2.4	Gráfico de $E(k)$, integral elíptica completa de segunda espécie.	27
3.1	Ilustração do paralelogramo fundamental Q	36
4.1	Representação esquemática do pêndulo simples	45
4.2	Ilustração das posições de equilíbrio do pêndulo. (a) Pêndulo em sua posição mais baixa. (b) Pêndulo em sua posição mais alta.	48
4.3	Retratos de fase para o pêndulo simples ($\omega^2 = 1$).	49
4.4	Gráfico da solução θ dada em (4.6) e (4.31) para $\theta_0 = 0.9\pi$ (a) e $\theta_0 = 2\pi/3$ (b).	53
4.5	Gráfico da solução θ dada em (4.6) e (4.31) para $\theta_0 = \pi/3$ (c) e $\theta_0 = \pi/6$ (d).	54
4.6	Gráfico do período do pêndulo em função da ângulo inicial θ_0	55
4.7	Gráfico de θ para $v_0 = 1.9$ (verde) e $v_0 = 1.995$ (azul)	58
4.8	Gráfico de θ para $v_0 = 1.5$ (vermelho), $v_0 = 1.6$ (verde) e $v_0 = 1.7$ (azul)	58
4.9	Gráfico de θ para $v_0 = 0.5$ (vermelho), $v_0 = 0.6$ (verde) e $v_0 = 0.7$ (azul)	59
4.10	Gráfico do período do pêndulo em função da velocidade inicial.	60
4.11	Pião simétrico com ponto fixo.	61
4.12	Gráfico do ângulo de nutação $\theta(t)$	67
4.13	Gráfico do ângulo de nutação gerado numericamente a partir do método de Runge Kutta de quarta ordem padrão ($I_1 = 1$ e $I_3 = 0.5$).	67
4.14	Gráfico de $\theta(t)$ para $I_1 = 1kg \cdot m^2$ e $I_3 = 0.8kg \cdot m^2$	68

4.15	Gráfico do ângulo de nutação gerado numericamente a partir do método de Runge Kutta de quarta ordem padrão ($I_1 = 1kg \cdot m^2$ e $I_3 = 0.8kg \cdot m^2$). . .	68
4.16	Gráfico de $\theta(t)$ para $I_1 = 0.8kg \cdot m^2$ e $I_3 = 1kg \cdot m^2$	69
4.17	Gráfico do ângulo de nutação gerado numericamente a partir do método de Runge Kutta de quarta ordem padrão ($I_1 = 0.8kg \cdot m^2$ e $I_3 = 1kg \cdot m^2$). . .	69
4.18	Gráfico de $\theta(t)$ para $I_1 = 0.6kg \cdot m^2$ e $I_3 = 1kg \cdot m^2$	70
4.19	Gráfico do ângulo de nutação gerado numericamente a partir do método de Runge Kutta de quarta ordem padrão ($I_1 = 0.6kg \cdot m^2$ e $I_3 = 1kg \cdot m^2$). . .	70
4.20	Gráfico de $\theta(t)$ para $I_1 = 0.6kg \cdot m^2$, $I_3 = 1kg \cdot m^2$ e $\dot{\psi}_0 = 1.0rad/s$	71
C.1	Ângulos de Euler.	89
C.2	Rotação do ângulo ϕ em torno do eixo z	90
C.3	Rotação do ângulo θ em torno do eixo ξ	91

Lista de Tabelas

2.1	Valores das funções sn , cn e dn para $u = 0$ e $u = K$	30
4.1	Valores do período de oscilação do pêndulo para diferentes valores de θ_0 . . .	55
4.2	Valores do período de oscilação do pêndulo para diferentes valores de v_0 . . .	59
4.3	Condições iniciais e parâmetros do pião simétrico.	65

Sumário

1	Introdução	19
2	Funções Elípticas de Jacobi	23
2.1	Integrais Elípticas	23
2.1.1	Integral Elíptica de Primeira Espécie	24
2.1.2	Integral Elíptica de Segunda Espécie	26
2.1.3	Integral Elíptica de Terceira Espécie	26
2.2	Funções Elípticas de Jacobi	28
2.2.1	Definição das Funções Elípticas de Jacobi	28
3	Função \wp de Weierstrass	33
3.1	Funções Duplamente Periódicas	33
3.2	A função \wp de Weierstrass	37
4	Aplicações em Mecânica	45
4.1	O Pêndulo Simples	45
4.1.1	Solução Exata para Velocidade Inicial Igual a Zero	50
4.1.2	Solução Exata para Velocidade Inicial Diferente de Zero	55
4.2	Pião Simétrico com um Ponto Fixo	60
4.2.1	O Pião Simétrico	60
4.2.2	Solução do Ângulo de Nutação θ	62
4.2.3	Gráficos para $\theta(t)$	65
5	Conclusão	73
	Referências	75

A	Propriedades das Funções Elípticas de Jacobi	77
B	Funções Analíticas em \mathbb{C}	83
B.1	Noções Preliminares	83
B.1.1	Funções Holomorfas	83
B.1.2	Funções Analíticas de uma Variável Complexa	85
C	Ângulos de Euler	89
C.1	Ângulos de Euler	89
C.2	Velocidade Angular em Termo dos Ângulos de Euler	92
D	Comandos do Mathematica	95
D.1	Pêndulo com $v_0 = 0$	95
D.2	Pêndulo com $v_0 \neq 0$	95
D.3	Pião Simétrico com Ponto Fixo	96

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Sistemas integráveis sem solução analítica em termos de funções elementares são abundantes na física. Um exemplo conhecido é o do pêndulo simples, o qual é constituído de uma massa movendo-se sob vínculo de um fio inextensível e de massa desprezível num campo gravitacional constante e limitado ao plano xy .

O pião simétrico, isto é, quando os momentos de inércia equatoriais são idênticos, é outro exemplo de problema integrável cuja solução não pode ser expressa em termos de funções elementares. Neste trabalho, pretendemos apresentar as soluções destes dois problemas fazendo uso das funções elípticas de Jacobi e de Weierstrass.

As funções elípticas teve como um dos seus precursores Adrien Marie Legendre (1752-1833), que durante vários anos publicou artigos e livros sobre integrais elípticas. Legendre mostrou que a partir de integrais da forma

$$\int \frac{F(x)}{\sqrt{R(x)}} dx, \quad (1.1)$$

onde $F(x)$ é uma função racional e $R(x)$ representa um polinômio de terceiro ou quarto grau em x , podemos obter as três formas de integrais elípticas, a saber: a **integral elíptica de primeira espécie**

$$F(x, k) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1 - k^2 t^2)(1 - t^2)}}, \quad 0 < k^2 < 1, \quad (1.2)$$

a **integral elíptica de segunda espécie**

$$E(x, k) = \int_0^x \sqrt{\frac{1 - k^2 t^2}{1 - t^2}} dt, \quad (1.3)$$

e a **integral elíptica de terceira espécie**

$$\Pi(x, n, k) = \int_0^x \frac{dt}{(1 - nt^2)\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}}. \quad (1.4)$$

Legendre apresentou importantes resultados neste ramo da matemática, como a obra *Exercices Du Calcul Intégral*, que reúne propriedades básicas e tabelas das integrais elípticas.

Apesar de suas notáveis contribuições, foram os trabalhos de Niels Hanrik Abel (1802-1829) e Carl Gustav Jakob Jacobi (1804-1851) que ganharam notoriedade. Além de considerar as funções inversas das integrais elípticas, as quais chamamos hoje de funções elípticas, Abel publicou uma teoria das funções elípticas estabelecendo uma analogia com a teoria das funções trigonométricas. Já Jacobi foi responsável por introduzir a função seno da amplitude de u (atualmente, adotamos a notação $\operatorname{sn}u$) e foi quem provou a dupla periodicidade das funções elípticas.

Tanto os trabalhos de Abel como os de Jacobi foram fundamentais para o desenvolvimento da teoria das funções elípticas, que durante o século XIX, se constituiu numa das áreas de pesquisa mais importantes da matemática, e que, ainda hoje, continua tendo a sua relevância no ramo das ciências exatas. Por isso, nos propomos a fazer uma exposição da teoria dessas funções, ficando, portanto, nosso trabalho organizado da forma como descrevemos a seguir:

No Capítulo 2, apresentamos as chamadas funções elípticas de Jacobi, expondo material de [2], [9] e [12]. Iniciamos o capítulo com a definição das integrais elípticas, que são obtidas a partir da redução de integrais do tipo

$$\int \frac{F(x)}{\sqrt{R(x)}} dx, \quad (1.5)$$

Feita esta introdução, definimos as funções elípticas de Jacobi $\operatorname{sn}(u)$, $\operatorname{cn}(u)$ e $\operatorname{dn}(u)$. A apresentação das propriedades de tais funções é feita no Apêndice A.

O Capítulo 3 tem como objetivo central apresentar a função \wp de Weierstrass. Para isso, fazemos um estudo sobre funções em \mathbb{C} , adotando [11] como nossa principal referência.

Ao longo deste capítulo, tratamos da definição de funções duplamente periódicas e algumas de suas propriedades, dando ênfase aos resultados que consideramos indispensáveis para a definição da função \wp de Weierstrass. Noções preliminares de funções em C , como funções holomorfas, funções analíticas e suas singularidades, são tratadas no Apêndice B.

No Capítulo 4, analisamos a aplicação das funções elípticas de Jacobi e da função elíptica de Weierstrass aos problemas do pêndulo simples e do pião simétrico, nesta ordem. No primeiro caso, fazemos um estudo da solução do pêndulo quando sua velocidade inicial é igual a zero e também quando é diferente de zero, com base em [5] e [13], respectivamente. Ressaltamos que soluções para este problema podem ser encontradas em outros textos (e. g. [2], [8] e [15]). Em seguida, nos dedicamos ao estudo das equações de movimento do pião, que são formuladas com o auxílio dos chamados Ângulos de Euler, cuja definição é apresentada no Apêndice C. Formulamos o problema seguindo [10] e na sequência apresentamos a solução do ângulo de natação em termos da função \wp de Weierstrass conforme [15].

CAPÍTULO 2

FUNÇÕES ELÍPTICAS DE JACOBI

Para o desenvolvimento da seção 2.1, usamos [9]. Outros materiais também foram utilizados para consulta, tais como [12].

2.1 Integrais Elípticas

Considere a integral

$$\int \frac{F(x)}{\sqrt{R(x)}} dx, \quad (2.1)$$

onde $F(x)$ é uma função racional e $R(x)$ representa um polinômio de terceiro ou quarto grau em x . Legendre verificou que integrais do tipo (2.1) não podem ser reduzidas a formas normais conhecidas [4]. Porém, seu trabalho na redução de (2.1) originou três novas formas de integrais.

Neste trabalho, não nos preocuparemos em expor o método que leva a tal redução. Nosso intuito é apenas definir as integrais elípticas de primeira, segunda e terceira espécie, o que faremos a seguir.

2.1.1 Integral Elíptica de Primeira Espécie

A **integral elíptica de primeira espécie** é definida por:

$$F(x, k) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1 - k^2 t^2)(1 - t^2)}}, \quad 0 < k^2 < 1, \quad (2.2)$$

onde o parâmetro k é chamado de **módulo**.

A partir da mudança de variável $t = \sin \theta$, com $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, podemos converter a integral (2.2) para a sua forma trigonométrica:

$$F(\phi, k) = \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}. \quad (2.3)$$

Quando $\phi = \frac{\pi}{2}$, e conseqüentemente $x = 1$ (pois $x = \sin \phi$), obtemos a **integral elíptica completa de primeira espécie** em sua forma trigonométrica e algébrica, respectivamente, as quais são dadas por:

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \quad (2.4)$$

e

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1 - k^2 t^2)(1 - t^2)}}. \quad (2.5)$$

Os gráficos de $F(\phi, k)$ e $K(k)$, exibidos nas Figuras (2.1) e (2.2), foram gerados no software *Mathematica*, onde os gráficos das integrais elípticas são implementados com o uso do parâmetro $m = k^2$. Por isso, indicamos os valores de m ao invés dos valores de k explicitamente (adotamos o mesmo critério para gerar os gráficos das Figuras (2.3) e (2.4)).

Em seu livro (ver [9], p. 17 – 21), Hancock também apresenta os gráficos das integrais de primeira e segunda espécie adotando $k = \sin \alpha$.

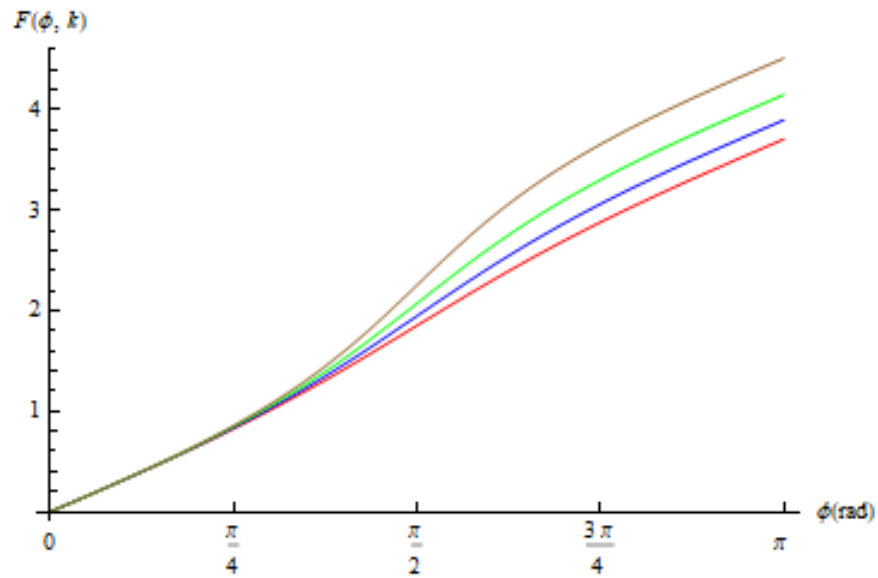


Figura 2.1: Gráfico de $F(\phi, k)$, integral elíptica de primeira espécie, para $m = 0.5$ (vermelho), $m = 0.6$ (azul), $m = 0.7$ (verde) e $m = 0.8$ (marrom).

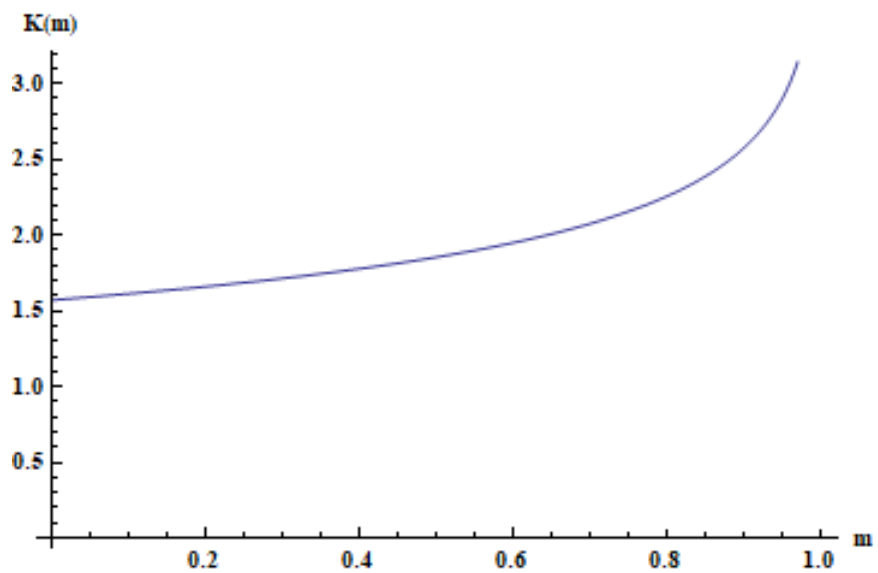


Figura 2.2: Gráfico de $K(k)$, integral elíptica completa de primeira espécie.

2.1.2 Integral Elíptica de Segunda Espécie

A **integral elíptica de segunda espécie** é definida por

$$E(x, k) = \int_0^x \sqrt{\frac{1 - k^2 t^2}{1 - t^2}} dt. \quad (2.6)$$

Assim como foi feito para a integral elíptica de primeira espécie, também podemos escrever a integral (2.6) em sua forma trigonométrica a partir da mudança de variável $t = \text{sen } \theta$

$$E(\phi, k) = \int_0^\phi \sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 \theta} d\theta. \quad (2.7)$$

Finalmente, a **integral elíptica completa de segunda espécie** em sua forma algébrica e trigonométrica é dada por

$$E(k) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - k^2 t^2}{1 - t^2}} dt, \quad (2.8)$$

e

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 \theta} d\theta, \quad (2.9)$$

respectivamente.

Os gráficos de $E(\phi, k)$ e $E(k)$ são exibidos nas Figuras (2.3) e (2.4), respectivamente.

2.1.3 Integral Elíptica de Terceira Espécie

A **integral elíptica de terceira espécie** é definida por

$$\Pi(x, n, k) = \int_0^x \frac{dt}{(1 - nt^2)\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}}. \quad (2.10)$$

A substituição $t = \text{sen } \theta$ fornece

$$\Pi(\phi, n, k) = \int_0^\phi \frac{d\theta}{(1 - n \text{sen}^2 \theta)\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 \theta}}. \quad (2.11)$$

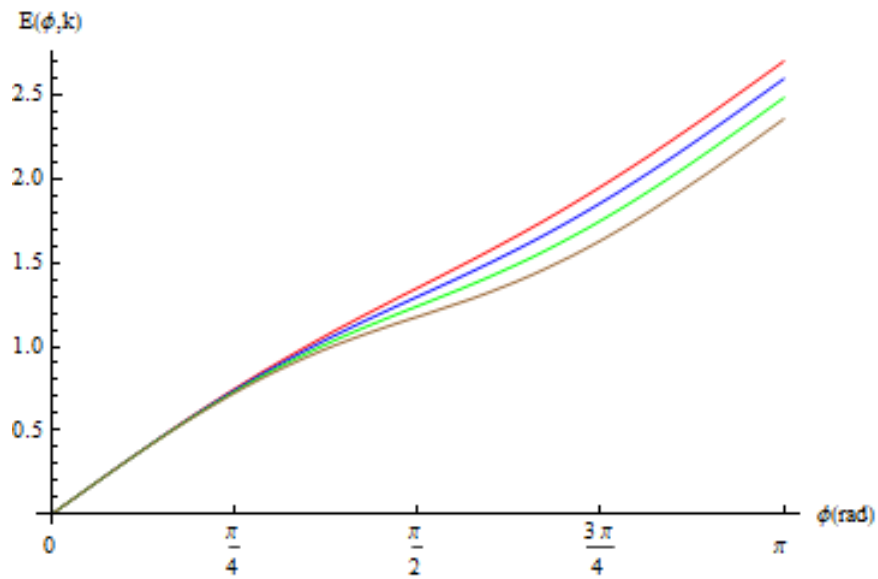


Figura 2.3: Gráfico de $E(\phi, k)$, integral elíptica de segunda espécie, para $m = 0.5$ (vermelho), $m = 0.6$ (azul), $m = 0.7$ (verde) e $m = 0.8$ (marrom).

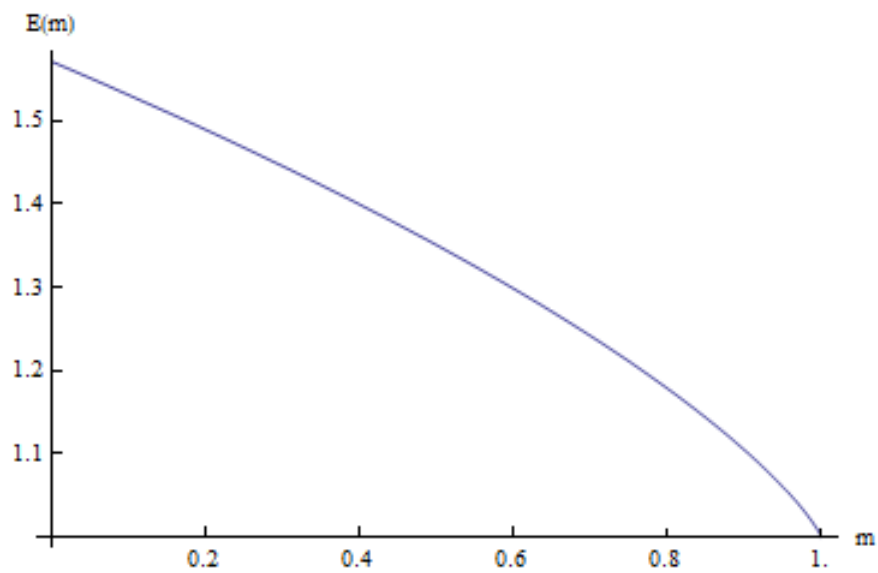


Figura 2.4: Gráfico de $E(k)$, integral elíptica completa de segunda espécie.

Já as **integrais elípticas completas de terceira espécie** em sua forma algébrica e trigonométrica são definidas pelas expressões

$$\Pi(n, k) = \int_0^1 \frac{dt}{(1 - nt^2)\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2t^2)}}, \quad (2.12)$$

e

$$\Pi(n, k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1 - n \sin^2 \theta)\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \quad (2.13)$$

respectivamente.

Neste trabalho, dedicaremos uma atenção maior a integral elíptica de primeira espécie, a partir da qual definiremos as funções elípticas de Jacobi que serão usadas nas soluções do pêndulo estudadas nas seções 4.1.2 e 4.1.3.

2.2 Funções Elípticas de Jacobi

Para o desenvolvimento desta seção, adotamos como referência principal [2] e também outros textos, tais como [6], [9] e [12].

2.2.1 Definição das Funções Elípticas de Jacobi

Considere a integral

$$u = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1 - k^2t)(1 - t^2)}} = \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \theta)}}, \quad t = \sin \theta. \quad (2.14)$$

As funções elípticas de Jacobi são definidas a partir da equação (2.14). Tal equação define u como função de x , ou seja, $u = f(x)$, com x variando entre - 1 e 1. De fato, para $t \in (-1, 1)$, a expressão $\sqrt{(1 - k^2t)(1 - t^2)}$ é um número real positivo e, portanto, u está bem definido para $x \in [-1, 1]$.

Assim, nós temos

$$u = u(\cdot, k) : [-1, 1] \longrightarrow [-K(k), K(k)]$$

$$x \longmapsto \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-k^2t)(1-t^2)}}$$

Podemos, ainda, a partir de

$$u = \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{(1-k^2 \operatorname{sen}^2 \theta)}},$$

definir u como função de ϕ da seguinte forma

$$u = u(\cdot, k) : [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-K(k), K(k)]$$

$$\phi \longmapsto \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{(1-k^2 \operatorname{sen}^2 \theta)}}$$

A variável ϕ que é chamada de **amplitude** do argumento u e foi denotada por Jacobi em 1829¹ [2] por

$$\phi = \operatorname{am}(u).$$

Portanto, do fato de

$$u' = \frac{1}{\sqrt{(1-k^2x)(1-x^2)}} > 0, \quad \forall x \in (-1, 1),$$

$u = f(x)$ é estritamente crescente e podemos investigar a sua inversa, isto é

$$x = f^{-1}(u) = \operatorname{sen} \phi = \operatorname{sen} \operatorname{am}(u). \tag{2.15}$$

¹As descobertas de Jacobi estão publicadas em *Fundamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarum* (1829)

Neste caso, x varia de -1 a 1 , enquanto u varia de $-K(k)$ a $K(k)$. A esta função estão associadas outras duas funções, definidas por

$$\cos \phi = \cos am(u), \quad (2.16)$$

e

$$\Delta \phi = \Delta am(u). \quad (2.17)$$

Atualmente, adotamos a notação proposta por Gudermann e Glaisher [6]:

$$\begin{cases} x & = & sn(u) \\ (1 - x^2)^{1/2} & = & cn(u) \\ (1 - k^2 x^2)^{1/2} & = & dn(u) \end{cases} \quad (2.18)$$

Note que das relações anteriores, obtemos as seguintes identidades

$$cn^2(u) + sn^2(u) = 1, \quad (2.19)$$

e

$$dn^2(u) + k^2 sn^2(u) = 1. \quad (2.20)$$

De (2.14), $u = 0$ quando $x = 0$ e $u = K$ quando $x = 1$, como visto em (2.5). Temos, portanto os valores listados na tabela 2.1:

u	$sn(u)$	$cn(u)$	$dn(u)$
0	0	1	1
K	1	0	k'

Tabela 2.1: Valores das funções sn , cn e dn para $u = 0$ e $u = K$.

A variável u é chamada de **argumento** das funções elípticas de Jacobi e as funções $sn(u)$ e $cn(u)$ são chamadas de **seno elíptico** e de **cosseno elíptico**, respectivamente. No caso em que a dependência do parâmetro k é explícita, convém escrever $sn(u, k)$, $cn(u, k)$ e

$dn(u, k)$. Alguns textos, como [2], escrevem alternativamente $sn(u, m)$, $cn(u, m)$ e $dn(u, m)$, onde $m = k^2$.

CAPÍTULO 3

FUNÇÃO \wp DE WEIERSTRASS

Pretendemos neste capítulo apresentar a função \wp de Weierstrass. Antes, estudaremos algumas propriedades das funções duplamente periódicas, tendo como apoio teórico [11], que, neste capítulo, será nossa principal referência. Um estudo preliminar das funções em \mathbb{C} é feito no Apêndice B.

3.1 Funções Duplamente Periódicas

Nesta seção, pretendemos estudar algumas propriedades das funções duplamente periódicas e apresentar os resultados que terão maior relevância no estudo da função \wp de Weierstrass.

Definição 3.1. *Seja f uma função meromorfa em \mathbb{C} , com conjunto de polos Γ . Dizemos que T é um **período** de f se para todo $z \in \mathbb{C} - \Gamma$ temos $z + T \in \mathbb{C} - \Gamma$ e $f(z + T) = f(z)$. O conjunto de todos os períodos de f é denotado por $Per(f)$.*

Na sequência, apresentamos a definição de uma função duplamente periódica.

Definição 3.2. *Dizemos que uma função f , meromorfa em \mathbb{C} , é **duplamente periódica**, se o seu conjunto de períodos é da forma*

$$Per(f) = \lambda_1\mathbb{Z} + \lambda_2\mathbb{Z} = \{n\lambda_1 + m\lambda_2; \quad m, n \in \mathbb{Z}\},$$

com $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ e $\lambda_2/\lambda_1 \notin \mathbb{R}$. Uma função meromorfa e duplamente periódica recebe o nome de **função elíptica**

Como $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ é uma base de \mathbb{C} como espaço vetorial sobre \mathbb{R} , segue que a representação de um elemento $z \in \lambda_1\mathbb{Z} + \lambda_2\mathbb{Z}$ é única. Além disso, à base $\{\lambda_1, \lambda_2\}$, podemos associar um novo conjunto, cuja definição apresentamos a seguir:

Definição 3.3. Um conjunto da forma

$$Q(z_0; \lambda_1; \lambda_2) = \{z_0 + s\lambda_1 + t\lambda_2; \quad 0 \leq s, t \leq 1\},$$

é chamado de **paralelogramo fundamental** associado à base $\{\lambda_1, \lambda_2\}$.

O próximo resultado garante que se f é uma função duplamente periódica definida em todo o plano complexo, então f é constante. Antes, apresentamos um Lema que nos auxiliará nesta demonstração.

Lema 3.1. Sejam λ_1, λ_2 tais que $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, $\lambda_2/\lambda_1 \notin \mathbb{R}$, e $Q(z_0; \lambda_1, \lambda_2)$ um paralelogramo fundamental associado a $\{\lambda_1, \lambda_2\}$. Então, dado $z \in \mathbb{C}$, existem $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que

$$z - m\lambda_1 - n\lambda_2 \in Q.$$

Demonstração:

Como $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ é uma base do espaço vetorial \mathbb{C} sobre \mathbb{R} , podemos escrever qualquer elemento de \mathbb{C} como combinação linear de λ_1 e λ_2 , em particular

$$z - z_0 = s\lambda_1 + t\lambda_2, \quad \text{onde } s, t \in \mathbb{R}.$$

Tomemos $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $s \in [m, m+1)$ e $t \in [n, n+1)$. Então

$$z - z_0 = s\lambda_1 + t\lambda_2 \Rightarrow z - m\lambda_1 - n\lambda_2 = z_0 + s\lambda_1 + t\lambda_2 - m\lambda_1 - n\lambda_2$$

$$\Rightarrow z - m\lambda_1 - n\lambda_2 = z_0 + \lambda_1(s - m) + \lambda_2(t - n) \in Q$$

□

Do Lema 3.1, podemos concluir que uma função duplamente periódica tem todos os seus valores determinados no paralelogramo fundamental.

Teorema 3.1.1. Se uma função inteira possui dois períodos linearmente independentes, ou seja, é duplamente periódica, então ela é constante.

Demonstração:

Se f for uma função inteira, podemos tomar $Q = Q(0; \lambda_1, \lambda_2)$ e, pelo Lema 3.1 que acabamos de demonstrar, para todo $z \in \mathbb{C}$, existem $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $z - m\lambda_1 - n\lambda_2 \in Q$. Como $f(z) = f(z - m\lambda_1 - n\lambda_2)$, segue que $f(\mathbb{C}) = f(Q)$. Uma vez que $f(Q)$ é compacto, temos que f assume valor máximo e mínimo, ou seja, f é limitada. Portanto, pelo teorema de Liouville⁴, f é constante. \square

À luz deste resultado, vamos considerar apenas funções duplamente periódicas que tenham polos. Este é o caso das funções elípticas, que são meromorfas e que, portanto, possuem um conjunto discreto de polos. Na próxima seção, mostraremos que o conjunto de tais funções é não vazio, apresentando a função elíptica de Weierstrass. Na sequência, examinamos um resultado que determina o valor da integral de uma função duplamente periódica no bordo de um paralelogramo fundamental.

Teorema 3.1. *Sejam f uma função elíptica e Q um paralelogramo fundamental. Suponhamos que ∂Q não possui polos de f . Então,*

$$\int_{\partial Q} f(z)dz = 0.$$

Demonstração:

Sem perda de generalidade, suponhamos $Q = Q(0; \lambda_1, \lambda_2)$. Tomemos agora a parametrização de ∂Q dada pelo caminho

$$\gamma = \gamma_1 * \gamma_2 * (\gamma_3)^{-1} * (\gamma_4)^{-1},$$

com $\gamma_1(t) = t\lambda_1$, $\gamma_2(t) = \lambda_1 + t\lambda_2$, $\gamma_3(t) = \lambda_2 + \gamma_1(t)$ e $\gamma_4(t) = -\lambda_1 + \gamma_2(t)$; $0 \leq t \leq 1$.

Como

$$\int_{\partial Q} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz - \int_{\gamma_3} f(z)dz - \int_{\gamma_4} f(z)dz,$$

basta mostrarmos que as integrais acima se cancelam duas a duas e então teremos o resultado esperado. Com efeito,

⁴Ver ([11], p.198)

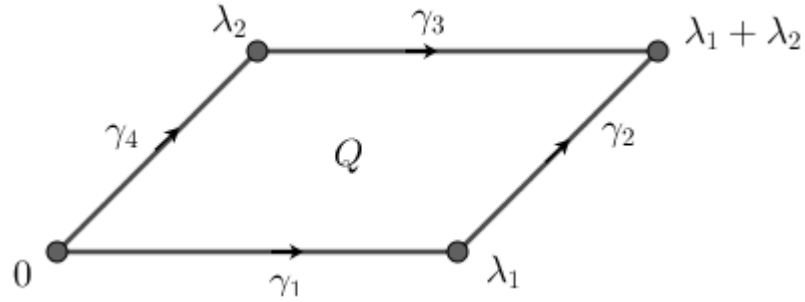


Figura 3.1: Ilustração do paralelogramo fundamental Q .

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_3} f(z)dz &= \int_0^1 f(\lambda_2 + \gamma_1(t))\gamma_1'(t)dt \\ &= \int_0^1 f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)dt = \int_{\gamma_1} f(z)dz, \end{aligned}$$

onde na penúltima igualdade usamos o fato de $f(z + \lambda_2) = f(z)$, pois $\lambda_2 \in \text{Per}(f)$. Por um argumento análogo, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_4} f(z)dz &= \int_0^1 f(-\lambda_2 + \gamma_2(t))\gamma_2'(t)dt \\ &= \int_0^1 f(\gamma_2(t))\gamma_2'(t)dt = \int_{\gamma_2} f(z)dz, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\int_{\partial Q} f(z)dz = 0$$

□

Deste resultado e do Teorema dos Resíduos⁵, segue que a soma dos resíduos nos polos de uma função elíptica em um paralelogramo fundamental é igual a zero. Este fato nos auxiliará na demonstração de um corolário deste teorema.

Definição 3.4. *Seja f uma função elíptica e $a \in \overline{\mathbb{C}}$. Dado um paralelogramo fundamental Q , de modo que $a \notin f(\partial Q)$, denotamos por $N(a, Q, f)$ o número de soluções, contadas com multiplicidade, da equação $f(z) = a$, com $z \in Q - \partial Q$. O número $N(a, Q, f)$ é chamado de grau de f e o denotamos por $\text{grau}(f)$. No caso particular em que $a = \infty$, $N(\infty, Q, f)$ denotará o número de polos de f , contados com multiplicidade, em $Q - \partial Q$*

⁵Ver ([11], p. 228)

Antes de demonstrarmos o próximo resultado, enunciamos o seguinte Lema, cuja demonstração está disponível em ([11], p. 336)

Lema 3.2. *Seja f uma função elíptica. Se Q é um paralelogramo fundamental e $a, b \notin f(\partial Q)$, então*

$$N(a, Q, f) = N(b, Q, f)$$

Com isso, podemos demonstrar o seguinte corolário.

Corolário 3.1. *Se f é uma função elíptica, então $\text{grau}(f) \geq 2$.*

Demonstração:

Seja $z_0 \in \mathbb{C}$ um polo simples de f e suponhamos que z seja o único polo de f em Q . Logo, $\text{Res}(f, z_0) \neq 0$, o que contraria o Teorema (B.4). Portanto, há mais um polo de f em Q ou então a ordem de z_0 é igual ou maior que 2. De qualquer modo, $\text{grau}(f) \geq 2$, o que conclui a demonstração. \square

Até o momento, apenas discutimos algumas propriedades gerais das funções elípticas. Nosso objetivo no próximo parágrafo é mostrar que o conjunto de tais funções é não vazio apresentando como exemplo a função \wp de Weierstrass.

3.2 A função \wp de Weierstrass

Iniciamos esta seção definindo a função \wp de Weierstrass.

Definição 3.5. *Fixados $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$ tais que $\lambda_2/\lambda_1 \notin \mathbb{R}$, a função \wp de Weierstrass é definida pela série*

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Omega^*} \left[\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right], \quad (3.1)$$

onde $\Omega = \lambda_1\mathbb{Z} + \lambda_2\mathbb{Z}$ e $\Omega^* = \Omega - \{0\}$. Alternativamente, podemos escrever

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \left[\frac{1}{(z - (n\lambda_1 + m\lambda_2))^2} - \frac{1}{(n\lambda_1 + m\lambda_2)^2} \right], \quad (3.2)$$

com m e n não nulos simultaneamente.

Resta-nos provar, agora, que o somatório em (3.1) converge.

Proposição 3.1. (1) *A série em (3.1) converge.*

(2) *A função \wp é duplamente periódica com $\lambda_1, \lambda_2 \in \text{Per}(\wp)$.*

Demonstração:

(1) Coloquemos o seguinte conjunto

$$K_n = \{s\lambda_1 + t\lambda_2; \quad s, t \in [-n, n], n \in \mathbb{Z}\}.$$

Tomando $\Omega_n = \Omega - K_{2n}$, vamos mostrar que a série

$$\sum_{\omega \in \Omega_n} \left[\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right],$$

converge em K_n para todo n . Para $z \in K_n$ e $\omega \in \Omega_n$, temos

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| &= \left| \frac{\omega^2 - (z - \omega)^2}{\omega^2(z - \omega)^2} \right| \\ \left| \frac{2z\omega - z^2}{\omega^2(z - \omega)^2} \right| &= \frac{|z\omega| |2 - z/\omega|}{|\omega^4| |1 - z/\omega|^2} \\ &= \frac{|z| |2 - z/\omega|}{|\omega^3| |1 - z/\omega|^2}. \end{aligned}$$

Note que para $z \in K_n$ e $\omega \in \Omega_n$, temos $|z/\omega| < 1/2$ e, conseqüentemente,

$$|1 - z/\omega| > 1/2 \quad \text{e} \quad |2 - z/\omega| \leq 5/2.$$

Assim,

$$\frac{|2 - z/\omega|}{|1 - z/\omega|^2} \leq 10 \quad \text{e} \quad \left| \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| \leq \frac{10R}{|\omega|^3},$$

onde $R = \max\{|n\lambda_1 + n\lambda_2|, |n\lambda_1 - n\lambda_2|\}$. Devemos provar então que a série

$$\sum_{\omega \in \Omega^*} \frac{1}{|\omega|^3},$$

converge. Colocando $C_n = \partial K_n \cap \Omega$, podemos considerar a seguinte enumeração

$$\sum_{\omega \in \Omega^*} \frac{1}{|\omega|^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\omega \in C_n} \frac{1}{|\omega|^3} \right),$$

pois $\Omega^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ e $C_m \cap C_n$.

Considerando que $\min \{|\omega|; \omega \in C_n\} = n \cdot \min \{|\omega|; \omega \in C_1\} = n \cdot k$ e que C_n é formado por $8n$ elementos, segue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\omega \in C_n} \frac{1}{|\omega|^3} \right) \leq 8n \cdot \frac{1}{k^3 n^3} = \frac{8}{k^3} \cdot \frac{1}{n^2},$$

e, portanto

$$\sum_{\omega \in \Omega^*} \frac{1}{|\omega|^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\omega \in C_n} \frac{1}{|\omega|^3} \right) = \frac{8}{k^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

o que conclui a demonstração da convergência de \wp .

(2) Iniciemos demonstrando que \wp' é duplamente periódica. Como a série de \wp converge uniformemente nas partes compactas de \mathbb{C} , podemos calcular \wp' derivando termo a termo.

$$\wp'(z) = \frac{-2}{z^3} + \sum_{\omega \in \Omega^*} \frac{-2}{(z - \omega)^3} = -2 \sum_{\omega \in \Omega} \frac{-2}{(z - \omega)^3}.$$

Para $\omega_0 \in \Omega$, temos

$$\wp'(z + \omega_0) = -2 \sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{(z - \omega + \omega_0)^3} = -2 \sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{(z - (\omega + \omega_0))^3} = -2 \sum_{\theta \in \Omega - \omega_0} \frac{-2}{(z - \theta)^3}$$

onde $\Omega - \omega_0 = \{\omega - \omega_0; \omega \in \Omega\} = \Omega$.

Logo,

$$-2 \sum_{\omega \in \Omega - \omega_0} \frac{-2}{(z - \theta)^3} = -2 \sum_{\theta \in \Omega} \frac{-2}{(z - \theta)^3} = \wp'(z), \quad (3.3)$$

e, portanto, \wp' é duplamente periódica com $\Omega \subset \text{Per}(\wp')$.

Provemos, agora, que $\lambda_1, \lambda_2 \in \text{Per}(f)$. Consideremos a função

$$f_j(z) = \wp(z + \lambda_j) - \wp(z), \quad j = 1, 2.$$

É evidente que $f_j'(z) = 0$ pois, como mostramos anteriormente, $\lambda_j \in \Omega \subset \text{Per}(\wp')$ e, portanto, $\wp'(z + \lambda_j) = \wp'(z)$. Logo, $f_j(z) = c$. Devemos mostrar que $c = 0$. Analisemos f_j em $\frac{-\lambda_j}{2}$.

$$f_j\left(-\frac{\lambda_j}{2}\right) = \wp\left(-\frac{\lambda_j}{2} + \lambda_j\right) - \wp\left(-\frac{\lambda_j}{2}\right) = \wp\left(\frac{\lambda_j}{2}\right) - \wp\left(-\frac{\lambda_j}{2}\right).$$

Notemos, porém, que $\wp\left(-\frac{\lambda_j}{2}\right) = \wp\left(\frac{\lambda_j}{2}\right)$, ou seja, \wp é par. De fato,

$$\begin{aligned}\wp(-z) &= \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Omega^*} \left[\frac{1}{(-z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right] \\ &= \frac{1}{z^2} + \sum_{-\omega \in \Omega^*} \left[\frac{1}{(z + (-\omega))^2} - \frac{1}{\omega^2} \right] = \wp(z)\end{aligned}$$

onde obtemos a última igualdade pelo mesmo argumento usado em (3.3). Assim

$$\wp\left(\frac{\lambda_j}{2}\right) - \wp\left(-\frac{\lambda_j}{2}\right) = \wp\left(\frac{\lambda_j}{2}\right) - \wp\left(\frac{\lambda_j}{2}\right) = 0.$$

Segue, portanto, que $\lambda_j \in \text{Per}(\wp)$. □

Note que, nesta proposição, mostramos que $\Omega \subset \text{Per}(\wp)$. Mas do fato de $z_0 + T \in \Gamma$, se $z_0 \in \Gamma$ e $T \in \text{Per}(f)$ ⁶, onde Γ e $\text{Per}(f)$ são o conjunto de polos e de períodos de uma função elíptica f , segue que $\text{Per}(\wp) \subset \Omega$, ou seja, $\text{Per}(\wp) = \Omega$. Usando argumento análogo, concluímos que $\text{Per}(\wp') = \Omega$. Logo, $\text{Per}(\wp) = \text{Per}(\wp')$. Esta observação será útil na demonstração da Relação de Weierstrass, em Teorema 3.2

A função elíptica de Weierstrass é um exemplo de função elíptica com grau exatamente igual a dois, como provaremos no próximo corolário.

Corolário 3.2. $\text{grau}(\wp) = 2$.

Demonstração:

Como $\Gamma(\wp) = \Omega^7$ e do fato de a soma dos resíduos de uma função elíptica dentro do paralelogramo periódico ser igual a ser zero (Teorema B.4), segue que a parte principal de \wp em $\omega \in \Omega$ é

$$\frac{1}{(z - \omega)^2}.$$

Consideremos, então, o paralelogramo fundamental $Q = \{s\lambda_1 + t\lambda_2; s, t \in [-1/2, 1/2]\}$. Observe que ∂Q não possui polos de \wp mas, por outro lado, 0 é o único polo de \wp em Q . Como a parte principal de \wp em 0 é $1/z^2$, temos que

$$\text{grau}(\wp) = 2.$$

□

⁶A demonstração desta propriedade pode ser consultada em ([11], p. 330)

⁷Para mais detalhes sobre este fato, ver ([11], p. 314 e 343)

Com este resultado também fica demonstrado que \wp possui um único polo de ordem 2 dentro de um paralelogramo fundamental. O próximo teorema garante a existência de uma relação entre \wp e \wp' .

Teorema 3.2. *Sejam $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, Ω e a função \wp como definidos em (3.5). Então, vale a seguinte identidade*

$$(\wp')^2 = 4(\wp)^3 + g_2\wp + g_3,$$

com

$$g_2 = -60 \sum_{\omega \in \Omega^*} 1/\omega^4 \quad e \quad g_3 = -140 \sum_{\omega \in \Omega^*} 1/\omega^6.$$

Demonstração:

Consideremos a função

$$f(z) = (\wp'(z))^2 - 4(\wp(z))^3 - a\wp(z) - b.$$

Como $\text{Per}(\wp) = \text{Per}(\wp') = \Omega$, segue que $\Omega \subset \text{Per}(f)$ e, portanto, f é duplamente periódica com $\lambda_1, \lambda_2 \in \text{Per}(f)$. Vamos mostrar que f é constante. Pelo teorema 3.1.1, basta provarmos que f é inteira, ou seja, que a parte principal de f em Ω é nula, uma vez que $\Gamma(\wp') = \Gamma(\wp) = \Omega$ e, assim, $\Gamma(f) \subset \Omega$. Mas do fato de $\Gamma(f) \subset \Omega \subset \text{Per}(f)$, é suficiente mostrar que a parte principal de f em $z = 0$ é nula.

Tomando o desenvolvimento de Laurent de \wp em 0, obtemos

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots$$

Porém, como já mostramos, \wp é par, logo os termos com expoente ímpar devem ser nulos. Além disso, é $a_0 = 0$. De fato,

$$a_0 = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\wp(z) - \frac{1}{z^2} \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\sum_{\omega \in \Omega^*} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \right) = 0.$$

Logo,

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + a_2z^2 + a_4z^4 + \dots$$

Segue então que

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + 2z + 4z^3 + \dots$$

Vamos agora determinar as partes principais de $(\wp'(z))^2$ e $(\wp(z))^3$.

$$(\wp(z))^3 = \frac{1}{z^6} + \frac{3a_2}{z^2} + 3a_4 \dots,$$

e

$$(\wp'(z))^2 = \frac{1}{z^4} - 8\frac{3a_2}{z^2} + 16a_4 \dots,$$

onde nas duas últimas identidades a notação \dots corresponde aos termos de ordem maior ou igual a 1, que optamos por não escrever tendo em vista que estamos interessados apenas na parte principal de $(\wp(z))^3$ e $(\wp'(z))^2$. Assim,

$$\begin{aligned} (\wp'(z))^2 - 4(\wp(z))^3 &= \left(\frac{4}{z^6} - \frac{8a_2}{z^2} - 16a_4 + \dots \right) - \\ &\quad \left(\frac{4}{z^6} + \frac{12a_2}{z^2} + 12a_4 + \dots \right) = \\ &\quad -\frac{20a_2}{z^2} - 28a_4 + \dots \end{aligned}$$

Note que o termo $20a_2/z^2$ é a parte principal de $20a_2\wp(z)$. Portanto,

$$\begin{aligned} (\wp'(z))^2 - 4(\wp(z))^3 + 20a_2\wp(z) &= \\ -\frac{20a_2}{z^2} - 28a_4 + \dots + 20a_2 \left(\frac{1}{z^2} + a_2z^2 + \dots \right) &= \\ -28a_4 + h(z) \end{aligned}$$

A função

$$h(z) = (\wp'(z))^2 - 4(\wp(z))^3 + 20a_2\wp(z) + 28a_4,$$

é holomorfa em $z = 0$ e $h(0) = 0$, pois ela é formada pelos termos dos somatórios com expoentes maiores ou iguais a 1. Portanto, pelo argumento apresentado no início da demonstração, h é constante e podemos escrever

$$(\wp'(z))^2 = 4(\wp(z))^3 - 20a_2\wp(z) - 28a_4. \quad (3.4)$$

Resta-nos provar que

$$a_2 = 3 \sum_{\omega \in \Omega^*} 1/\omega^4 \quad \text{e} \quad a_4 = 5 \sum_{\omega \in \Omega^*} 1/\omega^6$$

para concluirmos que $g_2 = -20a_2$ e $g_3 = -28a_4$. Considerando a função $g(z) = \wp(z) - 1/z^2$ e tomando a série de Laurent de g em $z = 0$, temos

$$S = a_2 z^2 + a_4 z^4 + \dots,$$

Sabemos de [11] que $a_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dz^k} g(0)$. Assim

$$a_2 = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} g(0) = 6 \sum_{\omega \in \Omega^*} 1/\omega^4,$$

e

$$a_4 = \frac{1}{4!} \frac{d^4}{dz^4} g(0) = 5 \sum_{\omega \in \Omega^*} 1/\omega^6.$$

Substituindo a_2 e a_4 em (3.4), obtemos a relação desejada. □

A Relação de Weierstrass é de fundamental importância, sobretudo na resolução de algumas equações diferenciais não lineares, como no caso do pião simétrico, que será estudado na seção 4.2. Com este resultado, também podemos definir a função de Weierstrass como solução da equação diferencial

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 = 4x^3 - g_2x - g_3 = 4(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3), \quad (3.5)$$

onde e_1, e_2 e e_3 são as raízes do polinômio $4x^3 - g_2x - g_3$. A partir de (3.5), obtemos as seguintes relações

$$\begin{cases} e_1 + e_2 + e_3 = 0 \\ g_2 = -4(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1) \\ \quad = 2(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) \\ g_3 = 4e_1e_2e_3 \end{cases} \quad (3.6)$$

Do Teorema 3.2 e da equação (3.5) temos que os zeros de \wp' no paralelogramo periódico correspondem às raízes e_1, e_2 e e_3 do polinômio cúbico em \wp , ou seja,

$$\wp(z_k) = e_k \quad k = 1, 2, 3, \quad (3.7)$$

com $z_1 = \frac{\lambda_1}{2}$, $z_2 = \frac{\lambda_2}{2}$ e $z_3 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$.

De fato, para qualquer z_k como acima, temos que $2z_k \in \Omega = \text{Per}(\wp')$, o que implica que

$$2z_k = T \implies z_k = -z_k + T, \quad \text{com } T \in \text{Per}(\wp').$$

Daí segue que $\wp'(z_k) = \wp'(-z_k + T) = \wp'(-z_k)$. Mas \wp' é ímpar, logo $\wp'(-z_k) = -\wp'(z_k)$ e, portanto, $\wp'(z_k) = 0$.

Além disso, dado $\epsilon > 0$, com $\epsilon \in (0, 1/2)$, e tomando o paralelogramo

$$Q_\epsilon = \{s\lambda_1 + t\lambda_2 - \epsilon(\lambda_1 + \lambda_2); \quad 0 \leq s, t \leq 1\},$$

temos que $z_1, z_2, z_3 \in Q_\epsilon - \partial Q_\epsilon$. Como $\text{grau}(\wp') = 3$, segue que z_1, z_2 e z_3 são os únicos zeros de \wp' em Q_ϵ , todos eles com multiplicidade 1.

CAPÍTULO 4

APLICAÇÕES EM MECÂNICA

Neste capítulo, analisaremos a aplicação das funções elípticas de Jacobi e da função elíptica de Weierstrass a dois problemas de Mecânica: o pêndulo simples e o pião simétrico.

4.1 O Pêndulo Simples

Considere a seguinte representação:

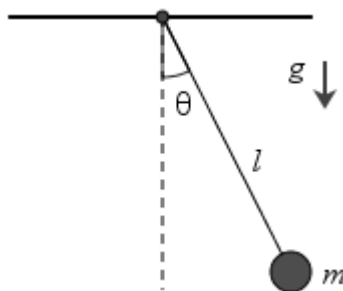


Figura 4.1: Representação esquemática do pêndulo simples

A figura 4.1 traz uma ilustração esquemática de um pêndulo simples sob a ação da gravidade g . No desenho, θ é o ângulo entre o pêndulo e a vertical, m é a massa do pêndulo e l é o seu comprimento.

Usando θ como coordenada generalizada, a lagrangiana é escrita da seguinte forma:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 + mgl \cos \theta. \quad (4.1)$$

Agora, podemos escrever a Equação de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0. \quad (4.2)$$

Como

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = ml^2\ddot{\theta}$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl \operatorname{sen} \theta$$

a equação (4.2) fica da seguinte forma

$$0 = ml^2\ddot{\theta} + mgl \operatorname{sen} \theta \implies$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \operatorname{sen} \theta. \quad (4.3)$$

A equação (4.3) é uma equação diferencial não-linear. A não linearidade se dá em virtude da presença da função seno na equação, que dificulta a sua resolução em termos de funções elementares. Porém, podemos obter facilmente uma solução para (4.3) no caso em que substituímos $\operatorname{sen} \theta$ por θ . Tal linearização restringe o problema para o caso de pequenas oscilações. Fazendo a substituição, (4.3) se torna:

$$\ddot{\theta} = -\omega^2\theta, \quad (4.4)$$

onde $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

A equação (4.4) é a equação de movimento de um oscilador harmônico simples, cuja solução é dada por:

$$\theta(t) = A \cos(\omega t + \phi), \quad (4.5)$$

Considerando as seguintes condições iniciais

$$\theta(0) = \theta_0, \quad 0^\circ < \theta_0 < 180^\circ, \quad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{t=0} = 0. \quad (4.6)$$

teremos

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t). \quad (4.7)$$

De acordo com a solução (4.7), as oscilações são periódicas de amplitude θ_0 e frequência circular $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$. O período, neste caso, é dado por

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (4.8)$$

Note que o período não depende da amplitude, propriedade que é conhecida como "Lei do isocronismo das pequenas oscilações".

Pontos de equilíbrio, estabilidade e plano de fase

Antes de nos dedicarmos às soluções analíticas do pêndulo simples, faremos algumas observações quanto a sua estabilidade, encontrando seus pontos de equilíbrio, e um breve estudo do seu plano de fase.

A partir da equação (4.3) e definindo $\theta = x$, $y = d\theta/dt$, podemos obter o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 \sin x \end{cases} \quad (4.9)$$

Para encontrar os pontos de equilíbrio do sistema (4.9), basta fazer

$$\begin{cases} y = 0 \\ -\omega^2 \sin x = 0 \end{cases}$$

donde segue que $x = \pm n\pi$, $n = 0, 1, 2, \dots$, e $y = 0$. Logo, os pontos de equilíbrio do sistema (4.9) são $(\pm n\pi, 0)$, com $n = 0, 1, 2, \dots$. Esses pontos correspondem a duas posições fixas de equilíbrio. No primeiro caso, quando n é par, a massa do pêndulo está diretamente

abaixo do suporte. Já no segundo caso, quando n é ímpar, a massa está diretamente acima do suporte. As duas configurações estão ilustradas na Figura (4.2).

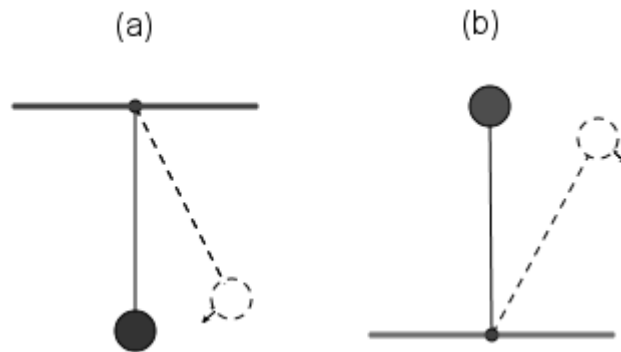


Figura 4.2: Ilustração das posições de equilíbrio do pêndulo. (a) Pêndulo em sua posição mais baixa. (b) Pêndulo em sua posição mais alta.

Intuitivamente, podemos notar que as posições (a) e (b) correspondem às posições de equilíbrio estável e instável do pêndulo, respectivamente. Na configuração (a), se a massa for deslocada ligeiramente de sua posição de equilíbrio, ela irá oscilar indefinidamente com amplitude fixa em torno desse ponto (estamos estudando o pêndulo simples sem amortecimento). Já na configuração (b), qualquer ligeiro deslocamento fará com que a massa se desloque rapidamente para baixo sob influência da gravidade. Também podemos analisar a estabilidade dos pontos críticos a partir do estudo dos autovalores do sistema linear que aproxima o sistema não-linear (4.9)⁸. Próximo à origem, o sistema linear correspondente a (4.9) é:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

Os autovalores do sistema (4.10) são

$$r_1 = \omega i \quad \text{e} \quad r_2 = -\omega i.$$

Neste caso, segundo [3], a origem é um centro estável. O pêndulo apresenta o mesmo comportamento perto dos pontos críticos $(\pm n\pi, 0)$, com n par.

⁸Para um estudo mais detalhado do procedimento utilizado, ver [3].

Já próximo ao ponto $(\pi, 0)$, o sistema linear correspondente a (4.9) é

$$\begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

onde $u = x - \pi$ e $v = y$. Para o sistema linear (4.11), os autovalores são

$$r_1 = -\omega \quad \text{e} \quad r_2 = \omega > 0.$$

Neste caso, conforme [3], o ponto crítico $(\pi, 0)$ é um ponto de sela instável. O mesmo comportamento é apresentado na vizinhança dos pontos de equilíbrio $(n\pi, 0)$, com n ímpar, o que também podemos verificar a partir do retrato de fase exibido na Figura (4.3).

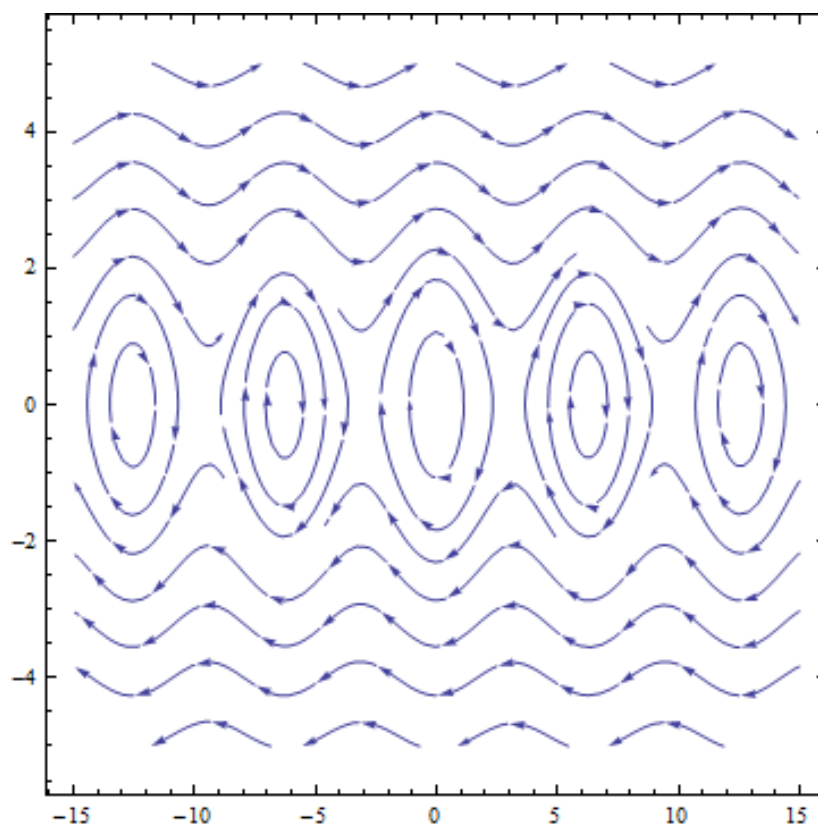


Figura 4.3: Retratos de fase para o pêndulo simples ($\omega^2 = 1$).

4.1.1 Solução Exata para Velocidade Inicial Igual a Zero

Agora, nosso intuito é estudar o problema do pêndulo em sua forma não-linear conforme [5]. Inicialmente, vamos reescrever a equação (4.3) usando a seguinte notação

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 \operatorname{sen}(\theta) = 0. \quad (4.12)$$

Multiplicando a equação (4.12) por $\frac{d\theta}{dt}$, obtemos

$$\frac{d\theta}{dt} \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 \operatorname{sen}(\theta) \frac{d\theta}{dt} = 0. \quad (4.13)$$

Podemos reescrever a equação (4.13) da seguinte forma

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \omega^2 \cos(\theta) \right] = 0. \quad (4.14)$$

Tomando as condições iniciais em (4.6) e integrando (4.14), podemos obter

$$\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = 2\omega^2 (\cos \theta - \cos \theta_0). \quad (4.15)$$

Usando a relação trigonométrica

$$\cos \alpha = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right),$$

reescrevemos (4.15):

$$\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = 4\omega^2 \left[\operatorname{sen}^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) - \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]. \quad (4.16)$$

Denotemos, agora

$$y = \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right), \quad (4.17)$$

e

$$k = \operatorname{sen} \left(\frac{\theta_0}{2} \right), \quad (4.18)$$

com $0 < k < 1$, pois $0^\circ < \theta_0 < 180^\circ$. Das condições iniciais em (4.7) e de (4.17) e (4.18), segue que

$$y(\theta(0)) = \operatorname{sen} \left(\frac{\theta(0)}{2} \right) = \operatorname{sen} \left(\frac{\theta_0}{2} \right) = k. \quad (4.19)$$

De (4.17), nós temos

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\theta}{dt} \cos \left(\frac{\theta}{2} \right), \quad (4.20)$$

e

$$\begin{aligned} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 &= \frac{1}{4} \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{4} \left[1 - \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{1}{4} (1 - y^2) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Temos, portanto

$$\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{4}{1 - y^2} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2, \quad (4.22)$$

e obtemos, assim, $d\theta/dt$ como função de dy/dt

Note que usando (4.17), (4.18) e (4.22) em (4.16), nós temos:

$$\begin{aligned} \frac{4}{1 - y^2} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 &= 4\omega^2 (k^2 - y^2) \implies \\ \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 &= \omega^2 k^2 \left(1 - \frac{y^2}{k^2} \right) (1 - y^2). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Vamos definir as seguintes variáveis

$$\tau = \omega t, \quad x = \frac{y}{k}. \quad (4.24)$$

Então, segue que a equação (4.23) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 = (1-x^2)(1-k^2x^2), \quad (4.25)$$

com

$$x(0) = 1, \quad \left(\frac{dx}{d\tau}\right)_{\tau=0} = 0.$$

Resolvendo para τ a equação (4.25), temos

$$d\tau = \pm \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

donde segue que

$$\tau = - \int_1^x \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} - \int_0^x \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}. \quad (4.26)$$

Conforme definimos na seção 2.1.1, mais especificamente em (2.2) e (2.5), as integrais a direita da segunda igualdade na equação (4.26) são as integrais elípticas de primeira espécie $K(k)$ (completa) e $F(x, k)$ (incompleta). Como visto em (2.3), podemos considerar a integral incompleta $F(x, k)$ em sua forma trigonométrica a partir da seguinte mudança de variável $z = \text{sen } \alpha$ e, assim, escrever

$$F(\phi, k) = \int_0^\phi \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2 \text{sen}^2 \alpha}}.$$

Porém, estamos interessados em uma expressão que relacione τ e x , já que, por (4.24), x depende de θ . Vamos escrever, portanto, $F(\phi, k) = F(\text{arcsen } x, k)$ obtendo, desta forma, τ como função de x e k a partir da seguinte relação:

$$\tau(x) = K(k) - F(\text{arcsen}(x), k). \quad (4.27)$$

De (4.27), obtemos

$$F(\text{arcsen}(x), k) = K(k) - \tau. \quad (4.28)$$

Vimos em (2.15) que a inversa de (4.28) fornece

$$\arcsen(x) = am(K(k) - \tau),$$

onde $am(\phi, k)$ é a função amplitude de Jacobi. Temos, portanto

$$x = \text{sen}(am(K(k) - \tau)) = sn(K(k) - \tau, k), \quad (4.29)$$

onde a última igualdade segue de (2.15) e (2.18).

Substituindo (4.17), (4.18) e (4.24) em (4.28), temos

$$\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \text{sen}\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \cdot sn\left[K\left(\text{sen}\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right) - \omega t, \text{sen}\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right]. \quad (4.30)$$

Finalmente, agora, podemos escrever θ em função de t :

$$\theta(t) = 2 \arcsen\left(\text{sen}\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \cdot sn\left[K\left(\text{sen}\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right) - \omega t, \text{sen}\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right]\right) \quad (4.31)$$

Seguem nas Figuras (4.4) e (4.5) os gráficos gerados pelo software *Mathematica* a partir da solução analítica (4.31) (curva em azul) para diferentes valores de θ_0 . Os comandos usados para gerar o gráfico estão no Apêndice D. A curva em vermelho é a solução do oscilador harmônico simples, cuja expressão analítica é dada em (4.8). Podemos notar que, a medida que θ_0 diminui, o pêndulo se comporta como um oscilador harmônico simples.

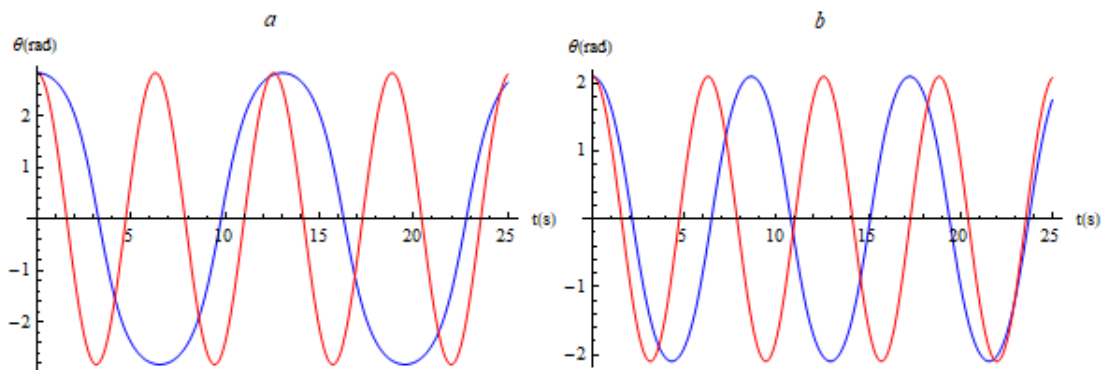


Figura 4.4: Gráfico da solução θ dada em (4.6) e (4.31) para $\theta_0 = 0.9\pi$ (a) e $\theta_0 = 2\pi/3$ (b).

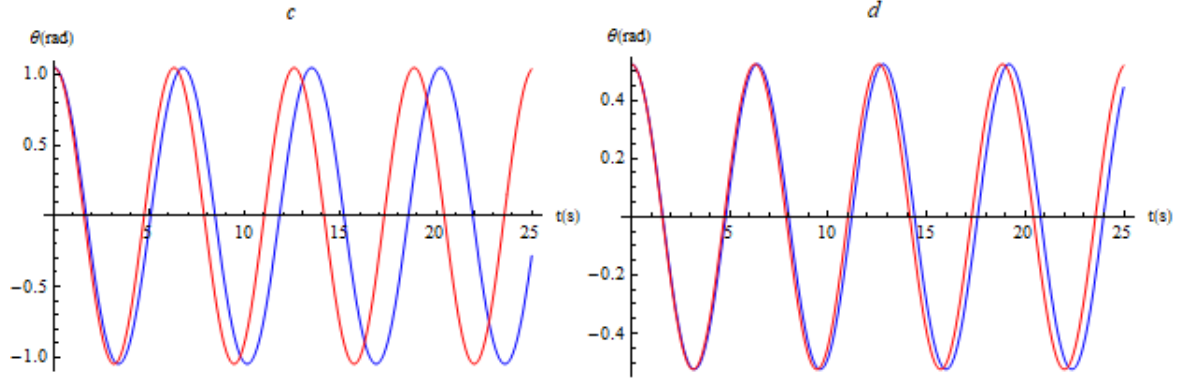


Figura 4.5: Gráfico da solução θ dada em (4.6) e (4.31) para $\theta_0 = \pi/3$ (c) e $\theta_0 = \pi/6$ (d).

Para determinarmos o período de oscilação do pêndulo, devemos considerar que ele é quatro vezes o tempo necessário para o pêndulo realizar o movimento de $\theta = 0$ a $\theta = \theta_0$. Antes, note que para $\theta = 0$ e $\theta = \theta_0$ temos $x = 0$ e $x = 1$, respectivamente. De fato:

- Para $\theta = 0$, segue que

$$x = \frac{y}{k} = \frac{\text{sen}\left(\frac{0}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\theta_0}{2}\right)} = 0.$$

- Para $\theta = \theta_0$, segue que

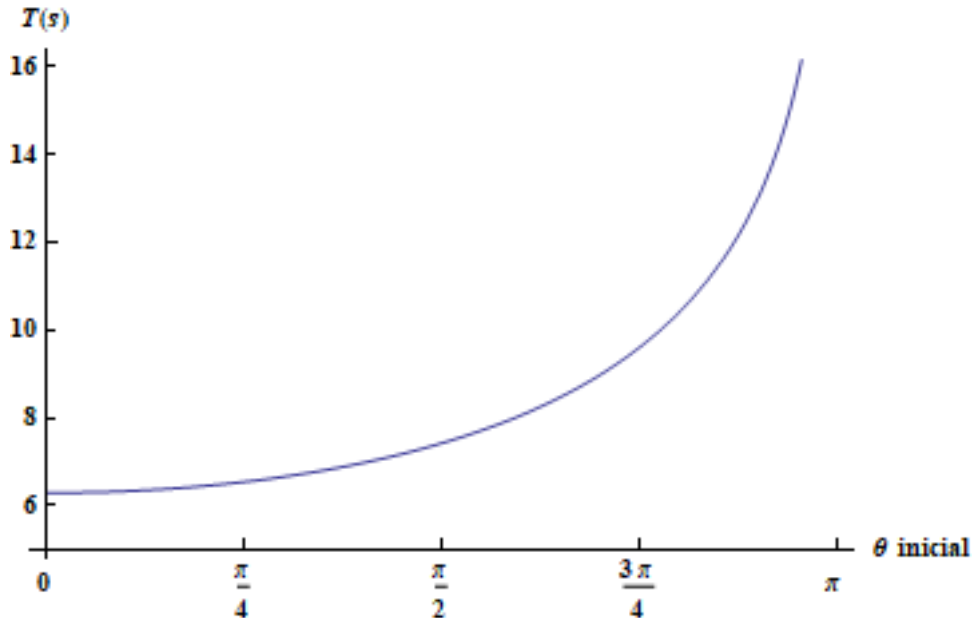
$$x = \frac{y}{k} = \frac{\text{sen}\left(\frac{\theta_0}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\theta_0}{2}\right)} = 1.$$

Temos, portanto, que o período de oscilação T do pêndulo é dado por

$$T = 4t(0) = \frac{4\tau(0)}{\omega} = \frac{4}{\omega}K(k). \quad (4.32)$$

Como $k = \text{sen}\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$, temos que a igualdade acima evidencia a dependência do período T do valor da amplitude θ_0 , ao contrário do que ocorre no movimento harmônico simples, onde não há essa dependência. Logo, para cada θ_0 dos gráficos das Figuras (4.4) e (4.5), o período T assume os valores listados na Tabela 4.1 (assumimos $\omega = 1$). A partir de (4.32) também geramos o gráfico da Figura (4.6), onde notamos que o período é uma função crescente da amplitude, que varia de 0 a π .

Ângulo inicial θ_0	Período T	Ângulo inicial θ_0	Período T
0.9π	13.02s	$\pi/3$	6.74s
$2\pi/3$	8.62s	$\pi/6$	6.39s

Tabela 4.1: Valores do período de oscilação do pêndulo para diferentes valores de θ_0 .Figura 4.6: Gráfico do período do pêndulo em função do ângulo inicial θ_0 .

4.1.2 Solução Exata para Velocidade Inicial Diferente de Zero

Vamos agora determinar uma solução exata para o pêndulo simples com velocidade inicial v_0 diferente de zero e $\theta_0 = 0$, conforme [13]. Inicialmente, consideremos a conservação de energia dada por

$$E = \frac{1}{2}v^2 + \omega^2(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2}v_0^2. \quad (4.33)$$

Assumindo $v = 0$ quando $\theta = \theta_{max}$, ou seja, que a velocidade é zero quando a amplitude é máxima, podemos escrever

$$E = \frac{1}{2}v^2 + \omega^2(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2}v_0^2 = \omega^2(1 - \cos \theta_{max}) = 2\omega^2 \sin^2 \left(\frac{\theta_{max}}{2} \right),$$

usando na última igualdade a relação

$$2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\phi}{2} \right) = 1 - \cos \phi.$$

Assim, temos

$$v^2 = \dot{\theta}^2 = 2\omega^2(\cos \theta - \cos \theta_{max}). \quad (4.34)$$

Usando novamente a relação trigonométrica acima, reescrevemos (4.34) da seguinte forma

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\omega \sqrt{\operatorname{sen}^2 \left(\frac{\theta_{max}}{2} \right) - \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)},$$

donde segue que

$$\omega t = \frac{1}{2} \int_0^\theta \frac{d\varphi}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 \left(\frac{\theta_{max}}{2} \right) - \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right)}}. \quad (4.35)$$

A partir de (4.35), obtemos ainda

$$u = \frac{1}{2k} \int_0^\theta \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{k^2} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right)}}, \quad (4.36)$$

onde

$$u = \omega t, \quad k = \operatorname{sen} \left(\frac{\theta_{max}}{2} \right). \quad (4.37)$$

Por substituição de variável, podemos reescrever (4.36) de modo a obter uma integral elíptica de primeira ordem:

$$x = \frac{1}{k} \operatorname{sen} \left(\frac{\varphi}{2} \right) \implies dx = \frac{1}{2k} \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) d\varphi. \quad (4.38)$$

Usando

$$\cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right)} \quad \text{e} \quad x = \frac{1}{k} \operatorname{sen} \left(\frac{\varphi}{2} \right),$$

chegamos a seguinte igualdade

$$dx = \frac{1}{2k} \sqrt{1 - k^2 x^2} d\varphi,$$

que pode ser escrita da seguinte forma

$$d\varphi = \frac{2kdx}{\sqrt{1-k^2x^2}}. \quad (4.39)$$

Então, substituindo em (4.36), obtemos:

$$u = \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = F(\arcsen z, k^2). \quad (4.40)$$

onde z é o limite superior de x quando $\varphi = \theta$, ou seja, $z = \frac{1}{k} \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right)$.

Da inversa de (4.40) e de (4.37), segue:

$$\arcsen(z) = am(u, k^2) \implies z = \operatorname{sen}(am(u, k^2)) = sn \left(\omega t, \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\theta_{max}}{2} \right) \right)$$

e, portanto,

$$\theta = 2 \arcsen \left[\operatorname{sen} \left(\frac{\theta_{max}}{2} \right) \cdot sn \left(\omega t, \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\theta_{max}}{2} \right) \right) \right] \quad (4.41)$$

A equação (4.41) fornece θ em função de t . Note que, neste caso, a solução depende de v_0 , pois da conservação de energia, nós temos

$$E = \frac{1}{2}v_0^2 = 2\omega^2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\theta_{max}}{2} \right) \implies \theta_{max} = 2 \arcsen \left(\frac{1}{2\omega}v_0 \right),$$

ou seja, a amplitude máxima θ_{max} depende da velocidade inicial v_0 . Como $\operatorname{sen} \left(\frac{\theta_{max}}{2} \right) = k$, também podemos escrever

$$\frac{1}{2}v_0^2 = 2\omega^2 k^2 \implies k = \frac{1}{2\omega}v_0 \quad (< 1). \quad (4.42)$$

e, portanto,

$$v_0 < 2\omega. \quad (4.43)$$

As Figuras (4.7), (4.8) e (4.9) apresentam os gráficos de θ da solução (4.41) para diferentes valores de v_0 . Os gráficos foram gerados no software *Mathematia*. Os comandos utilizados estão no Apêndice D:

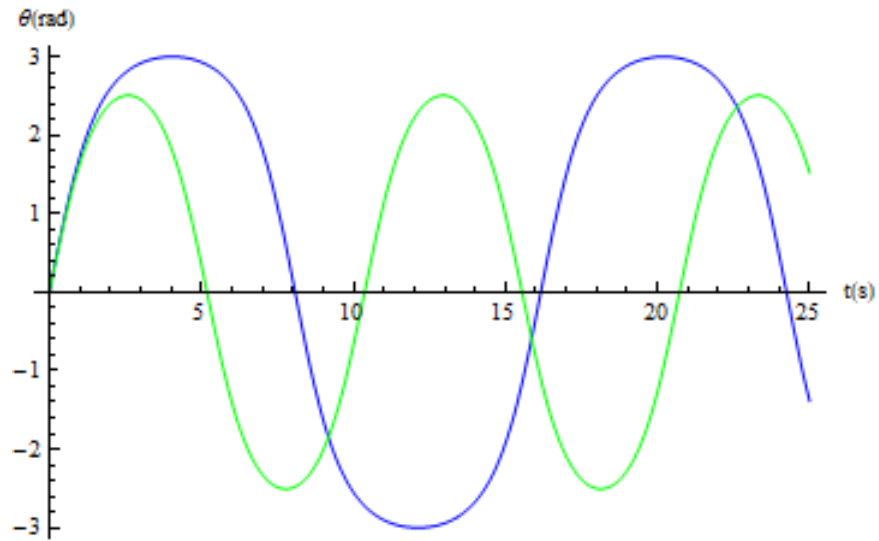


Figura 4.7: Gráfico de θ para $v_0 = 1.9$ (verde) e $v_0 = 1.995$ (azul)

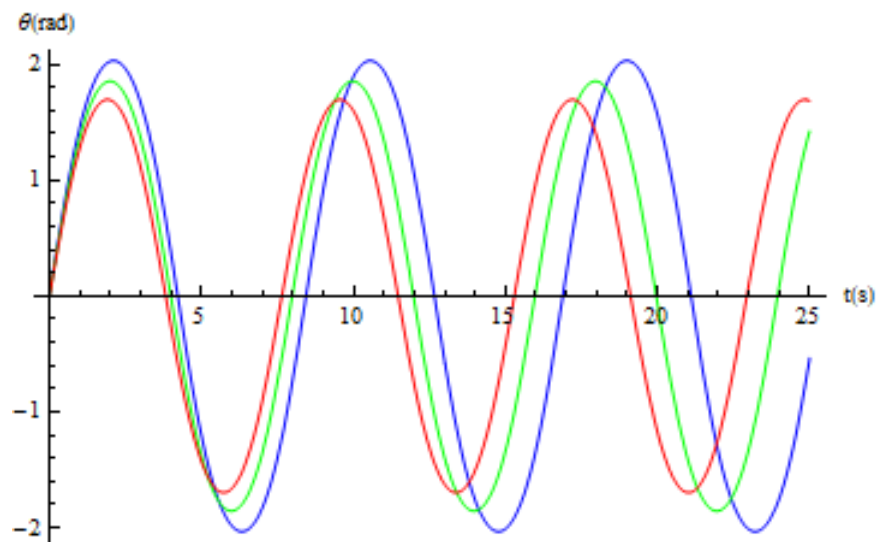


Figura 4.8: Gráfico de θ para $v_0 = 1.5$ (vermelho), $v_0 = 1.6$ (verde) e $v_0 = 1.7$ (azul)

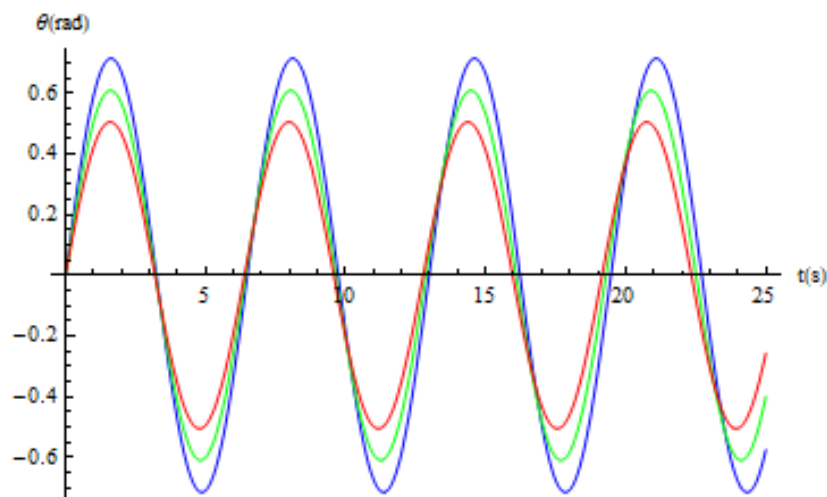


Figura 4.9: Gráfico de θ para $v_0 = 0.5$ (vermelho), $v_0 = 0.6$ (verde) e $v_0 = 0.7$ (azul)

Notamos que a medida que a velocidade inicial diminui, a amplitude do movimento do pêndulo também diminui, fazendo com que o pêndulo tenha comportamento análogo ao do oscilador harmônico simples.

Como vimos em (4.32), o período de oscilação do pêndulo é dado por:

$$T = \frac{4}{\omega} K(k).$$

De (4.42), podemos notar a dependência do período T da velocidade inicial v_0 . Observamos que o período é uma função crescente da velocidade inicial, a qual deve variar de 0 a 2 m/s, de modo que quanto mais v_0 se aproxima de 2, maior é o valor do período T . Seguem os valores dos períodos de oscilação para cada um dos valores de v_0 (em m/s) dos gráficos das Figuras (4.7), (4.8) e (4.9). A Figura (4.10) traz o gráfico do período do pêndulo em função de sua velocidade inicial.

Velocidade inicial v_0	Período T	Velocidade inicial v_0	Período T
1.995	16.15s	1.5	7.36s
1.9	10.36s	0.7	6.49s
1.7	8.44	0.6	6.43s
1.6	7.98s	0.5	6.38s

Tabela 4.2: Valores do período de oscilação do pêndulo para diferentes valores de v_0 .

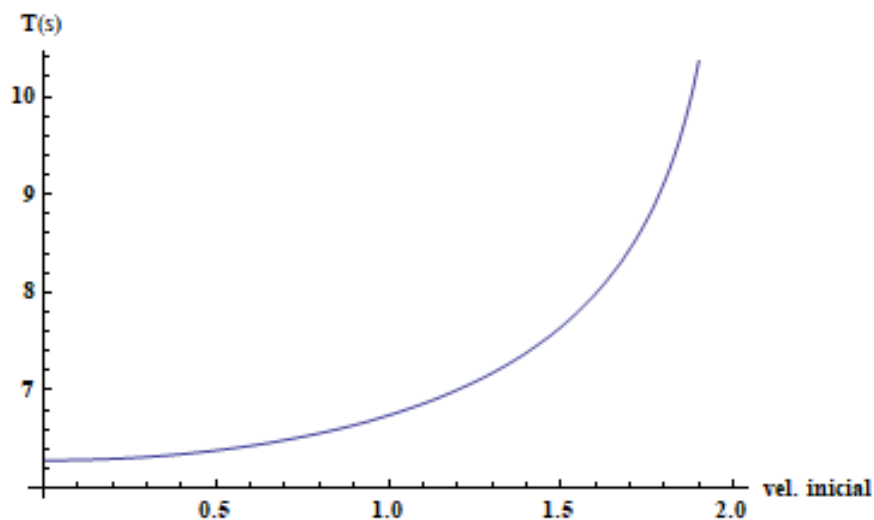


Figura 4.10: Gráfico do período do pêndulo em função da velocidade inicial.

4.2 Pião Simétrico com um Ponto Fixo

Nesta seção, vamos nos dedicar ao estudo das equações de movimento do pião simétrico com ponto fixo. Destacamos que, tanto nas definições apresentadas a seguir como na formulação do problema, adotamos [10] e [14] como referências principais.

4.2.1 O Pião Simétrico

O pião simétrico, representado na Figura 4.11, é um corpo rígido capaz de girar em torno de um ponto fixo O localizado em seu eixo de simetria e a uma distância l do centro de massa CM . Para descrevermos o movimento do pião, será conveniente lançarmos mão dos ângulos de Euler θ, ϕ, ψ definidos no Apêndice C. No caso da Figura 4.11, θ mede a inclinação do eixo de simetria em relação a vertical (eixo z), ϕ descreve a precessão deste mesmo eixo em torno da direção vertical e ψ mede a rotação do pião em torno do seu próprio eixo. Destacamos ainda que as únicas forças externas consideradas para a formulação do problema são as de vínculo exercidas sobre O e a da gravidade.

Usaremos o formalismo lagrangeano para a análise do movimento do pião, conforme [10]. Como $I_1 = I_2$, pois o corpo é simétrico, e a única força aplicada é a força peso, a lagrangiana assume a seguinte forma:

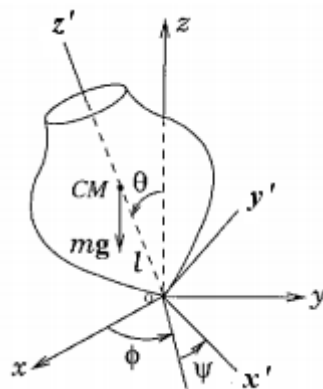


Figura 4.11: Pião simétrico com ponto fixo.

$$L = T - V = \frac{1}{2}I_1 (\omega_{x'}^2 + \omega_{y'}^2) + \frac{1}{2}I_3\omega_{z'}^2 - mgl \cos \theta \quad (4.44)$$

Usando (C.1), a equação (4.44) se escreve:

$$L = \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2}I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - mgl \cos \theta. \quad (4.45)$$

As coordenadas ψ e ϕ são ignoráveis e, portanto, os momentos conjugados p_ψ e p_ϕ correspondentes são constantes de movimento:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = p_\psi = cte \quad (4.46)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I_1\dot{\phi} \sin^2 \theta + I_3 \cos \theta (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = p_\phi = cte. \quad (4.47)$$

A energia também é constante de movimento

$$E = T + V = \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2}I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 + mgl \cos \theta. \quad (4.48)$$

Das equações (4.46) e (4.47), temos, respectivamente

$$\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta = \frac{p_\psi}{I_3}, \quad (4.49)$$

e

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi - p_\psi \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta}. \quad (4.50)$$

Usando as equações (4.46) e (4.50) em (4.48), obtemos

$$\frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 = -\frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} - mgl \cos \theta + E', \quad (4.51)$$

onde

$$E' = E - \frac{p_\psi^2}{2I_3}.$$

4.2.2 Solução do Ângulo de Nutação θ

Temos agora uma equação diferencial de primeira ordem em θ , a qual pode ser resolvida, conforme [15]. Nosso objetivo é expressar o ângulo de nutação θ em termos da função elíptica de Weierstrass. Escrevendo $x = \cos \theta$, temos que $\theta = \arccos(x)$ e

$$\dot{\theta} = -\frac{\dot{x}}{\sqrt{1-x^2}}$$

e

$$\dot{\theta}^2 = \frac{\dot{x}^2}{1-x^2}.$$

Assim, a equação (4.51) se torna

$$\frac{I_1 \dot{x}^2}{2(1-x^2)} = -\frac{(p_\phi - p_\psi x)^2}{2I_1(1-x^2)} - mglx + E'. \quad (4.52)$$

Multiplicando (4.52) por $2I_1(1-x^2)$, obtemos a seguinte equação diferencial

$$I_1^2 \dot{x}^2 = -(p_\phi - p_\psi x)^2 - 2I_1 mgl(x - x^3) + 2I_1 E'(1 - x^2) = f(x) \quad (4.53)$$

O lado direito da equação (4.53) é um polinômio de grau 3. Note que quando $x = 1$ e $x = -1$, o polinômio é negativo. De fato

$$\begin{cases} f(1) = -(p_\phi - p_\psi)^2 < 0, \\ f(-1) = -(p_\phi + p_\psi)^2 < 0. \end{cases}$$

Logo, como $-1 < x = \cos(\theta) < 1$ e $I_1 \dot{x}^2 > 0$, o polinômio deve ser positivo para algum valor de θ , ou seja, para algum valor de x entre -1 e 1. Consequentemente, $f(x)$ deve ter

duas raízes reais entre - 1 e 1 e uma raiz real maior que 1. Denotemos tais raízes por $\cos \alpha$, $\cos \beta$ e $\cosh \gamma$, com

$$\cos \beta > \cos \alpha. \quad (4.54)$$

De (4.53), podemos observar que o polinômio $f(x)$ pode ser reescrito da seguinte forma

$$f(x) = 2I_1 mgl(x - \cos \alpha)(x - \cos \beta)(x - \cosh \gamma), \quad (4.55)$$

donde segue que

$$\begin{aligned} \frac{I_1}{2mgl} \dot{x}^2 &= (x - \cos \alpha)(x - \cos \beta)(x - \cosh \gamma) \implies \\ \frac{2I_1}{mgl} \dot{x}^2 &= 4(x - \cos \alpha)(x - \cos \beta)(x - \cosh \gamma). \end{aligned} \quad (4.56)$$

Assim, escrevemos

$$\sqrt{\frac{mgl}{2I_1}} dt = \frac{dx}{\sqrt{4(x - \cos \alpha)(x - \cos \beta)(x - \cosh \gamma)}}. \quad (4.57)$$

Usando a seguinte mudança de variável,

$$x = \frac{2I_1}{mgl} z + \frac{1}{3}(\cos \alpha + \cos \beta + \cosh \gamma) = \frac{2I_1}{mgl} z + \frac{2I_1 E' + p_\psi^2}{6I_1 mgl}, \quad (4.58)$$

e substituindo em (4.57), obtemos

$$dt = \frac{dz}{\sqrt{4(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)}}. \quad (4.59)$$

onde e_1 , e_2 e e_3 são constantes dadas pelas seguintes equações

$$\begin{cases} e_1 = \frac{mgl}{2I_1} \cosh \gamma - \frac{2I_1 E' + p_\psi^2}{12I_1^2}, \\ e_2 = \frac{mgl}{2I_1} \cos \beta - \frac{2I_1 E' + p_\psi^2}{12I_1^2}, \\ e_3 = \frac{mgl}{2I_1} \cos \alpha - \frac{2I_1 E' + p_\psi^2}{12I_1^2}. \end{cases} \quad (4.60)$$

Além disso, e_1 , e_2 e e_3 também satisfazem as seguintes relações

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0,$$

pois,

$$e_1 + e_2 + e_3 = \frac{mgl}{2I_1}(\cos \alpha + \cos \beta + \cosh \gamma) - \frac{2I_1 E' + p_\psi^2}{4I_1^2} =$$

$$\left(\frac{mgl}{2I_1}\right) \left(\frac{2I_1 E' + p_\psi^2}{2I_1 mgl}\right) - \frac{2I_1 E' + p_\psi^2}{4I_1^2} = \frac{2I_1 E' + p_\psi^2}{4I_1^2} - \frac{2I_1 E' + p_\psi^2}{4I_1^2} = 0,$$

e

$$e_1 > e_2 > e_3.$$

De (4.59) obtemos, portanto,

$$t + c = \int \frac{dz}{\sqrt{4(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)}} \quad (4.61)$$

Vimos na seção 3.1.3, que a função de Weierstrass \wp é solução para a equação diferencial

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 = 4(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3), \quad (4.62)$$

a qual podemos reescrever da seguinte forma

$$z = \int \frac{dx}{\sqrt{4(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)}} \quad (4.63)$$

Logo a solução para (4.61) é a função elíptica de Weierstrass $z(t) = \wp(t + c)$, onde c é uma constante de integração. Consequentemente, de (4.58) e do fato de $x = \cos \theta$ podemos expressar o ângulo θ em função do tempo da seguinte forma

$$x = \cos \theta = \frac{2I_1}{mgl} \wp(t + c) + \frac{2I_1 E' + p_\psi^2}{6I_1 mgl}. \quad (4.64)$$

E finalmente

$$\theta = \arccos \left(\frac{2I_1}{mgl} \wp(t + c) + \frac{2I_1 E' + p_\psi^2}{6I_1 mgl} \right). \quad (4.65)$$

Da equação (4.56), notamos que se $x > \cos \beta$ ou $x < \cos \alpha$, $\dot{x} < 0$, pois admitimos em

(4.54) que $\cos \beta > \cos \alpha$. Logo, a fim de que \dot{x} seja real para valores reais de t é necessário que x esteja entre $\cos \alpha$ e $\cos \beta$, ou seja, $\cos \alpha < x = \cos \theta < \cos \beta$, o que evidencia que $\cos \alpha$ e $\cos \beta$ definem os limites da latitude entre os quais o pião deve oscilar. Disso, de (4.60) e de (4.61), segue que $z = \wp(t + c)$ deve estar entre e_3 e e_2 . Mas como $\wp(\omega_1) = e_i$, conforme vimos em (3.9), e

$$\cos \alpha < \cos \theta = \frac{2I_1}{mgl} \wp(t + c) + \frac{2I_1 E' + p_\psi^2}{6I_1 mgl} < \cos \beta,$$

conforme acabamos de observar, c deve ser o semiperíodo ω_3 mais uma constante τ tal que

$$\cos \theta_0 = \frac{2I_1}{mgl} \wp(\omega_3 + \tau) + \frac{2I_1 E' + p_\psi^2}{6I_1 mgl}$$

Portanto, a solução (4.65) levando em conta essas considerações se escreve da seguinte forma

$$\theta = \arccos \left(\frac{2I_1}{mgl} \wp(t + \omega_3 + \tau) + \frac{2I_1 E' + p_\psi^2}{6I_1 mgl} \right). \quad (4.66)$$

4.2.3 Gráficos para $\theta(t)$

A Tabela (4.3) traz as condições iniciais e parâmetros usados para gerar o gráfico do ângulo de nutação $\theta(t)$.

I_1	$1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	θ_0	0.95 rad	$\dot{\theta}_0$	0 rad/s
I_3	$0.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	ϕ_0	0 rad	$\dot{\phi}_0$	0 rad/s
mgl	$1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$	ψ_0	0 rad	$\dot{\psi}_0$	2.5 rad/s

Tabela 4.3: Condições iniciais e parâmetros do pião simétrico.

Deste modo, obtemos o gráfico da Figura (4.12) para a solução $\theta(t)$ de (4.66) (os comandos usados para gerar o gráfico estão no Apêndice D). Geramos também outros gráficos a partir das condições iniciais da Tabela (4.3), trocando-se, apenas, os valores de I_1 e I_3 . As Figuras (4.12) e (4.14) apresentam o gráfico do ângulo de nutação do **pião alongado** (quando $I_1 > I_3$). Percebemos que com $I_3 = 0.8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ e $I_1 = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, o intervalo e o período de oscilação de θ é menor do que no caso em que $I_3 = 0.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ e $I_1 = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Já as Figuras (4.16) e (4.18) apresentam o gráfico do ângulo de nutação do **pião achatado** (quando $I_1 < I_3$), onde é possível notar que os limites da latitude entre os quais θ deve

oscilar e o período de oscilação diminuem a medida em que se aumenta a diferença entre I_1 e I_3 .

Já o gráfico da Figura 4.20 foi gerado para $I_1 = 0.6kg \cdot m^2$, $I_3 = 1kg \cdot m^2$ e $\dot{\psi}_0 = 1.0rad/s$. Podemos notar que reduzindo a velocidade de rotação própria, o intervalo de oscilação do ângulo de nutação é maior em relação ao gráfico da Figura 4.18, gerado para os mesmos valores de I_1 e I_3 .

A título de comparação, apresentamos os gráficos da solução numérica para o ângulo de nutação θ , obtida por [7] a partir do método de Runge Kutta de quarta ordem padrão, com as mesmas condições iniciais da Tabela (4.3). Notamos o comportamento periódico da oscilação tanto na solução numérica como na solução analítica, com algumas diferenças na amplitude do movimento. Essas diferenças podem estar relacionadas ao modo como alguns parâmetros usados para a implementação da solução θ no Mathematica foram obtidos, tais como e_1 , e_2 e e_3 . Para o cálculo desses parâmetros é necessário obtermos as raízes $\cos \beta$, $\cos \alpha$ e $\cosh \gamma$ do polinômio cúbico dado em (4.53). Essas raízes foram obtidas por meio do comando *solve* do software Mathematica, ou seja, elas podem não ser precisas, o que justificaria as diferenças. Observamos a partir dos gráficos gerados a partir da solução numérica que θ varia numa amplitude menor. Outra observação diz respeito ao ponto de retorno de nutação do corpo no caso em que $I_1 = 1$ e $I_3 = 0.5$, e quando $I_1 = 1$ e $I_3 = 0.8$, que não coincidem. Enquanto no gráfico das Figuras (4.13) e (4.15), o ponto de retorno é o próprio θ_0 , no gráfico da Figuras (4.12) e (4.12) esse ponto se dá em $\theta = 0.39$ rad e $\theta = 0.50$ rad, respectivamente.

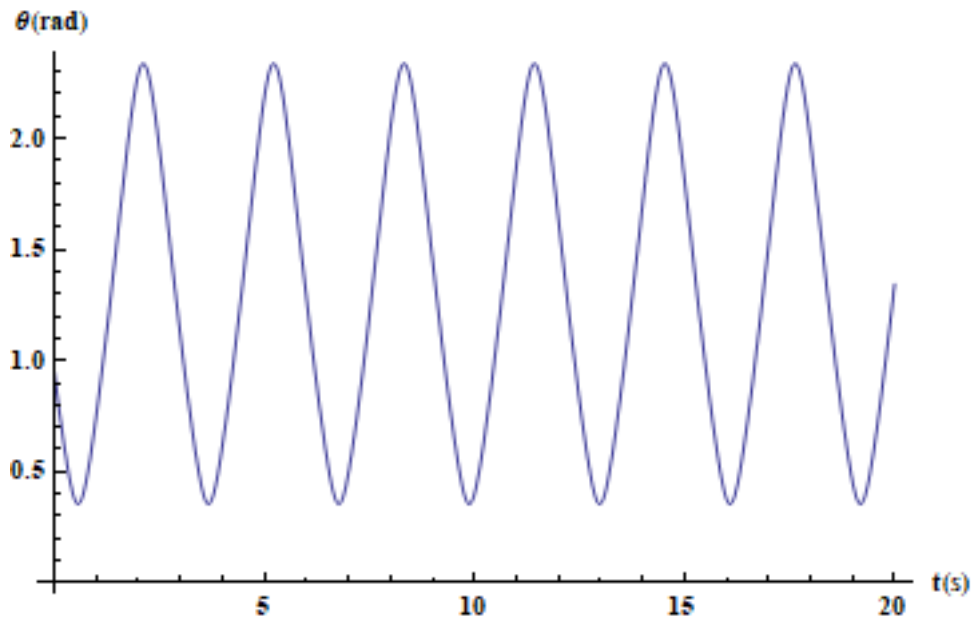


Figura 4.12: Gráfico do ângulo de natação $\theta(t)$.

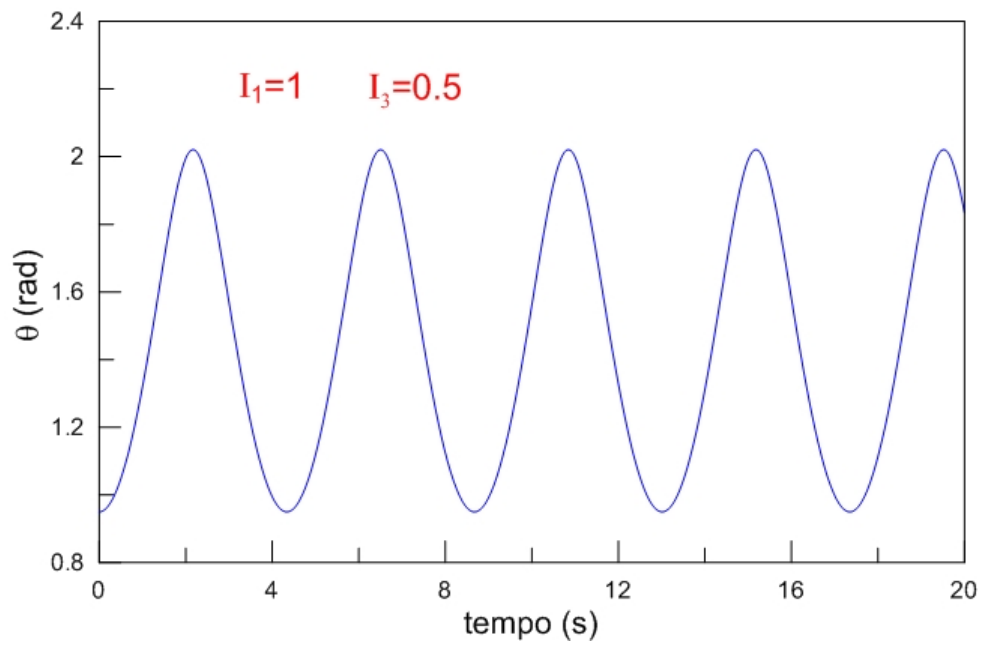


Figura 4.13: Gráfico do ângulo de natação gerado numericamente a partir do método de Runge Kutta de quarta ordem padrão ($I_1 = 1$ e $I_3 = 0.5$).

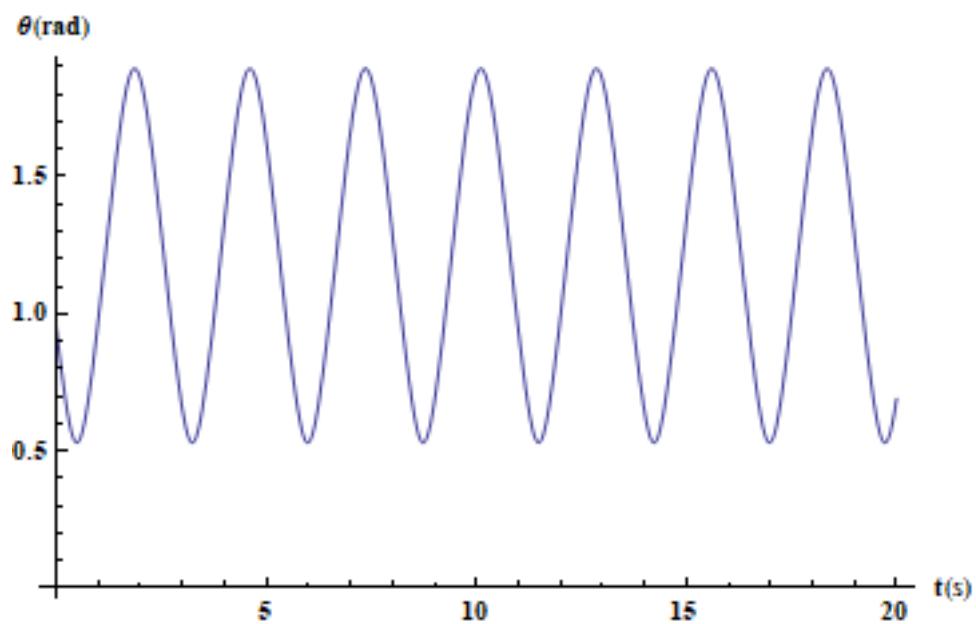


Figura 4.14: Gráfico de $\theta(t)$ para $I_1 = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ e $I_3 = 0.8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

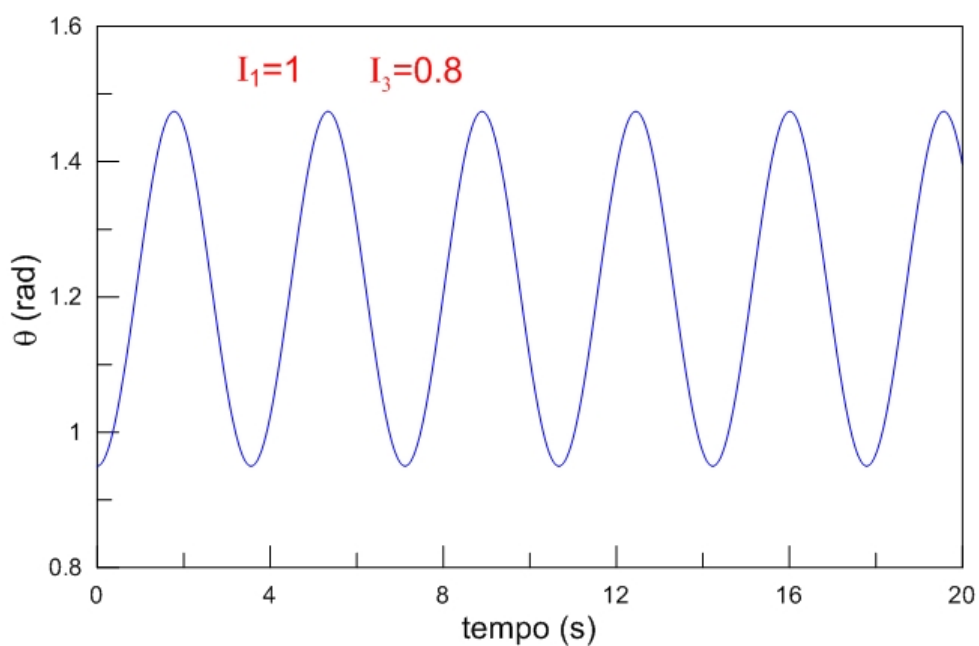


Figura 4.15: Gráfico do ângulo de nutação gerado numericamente a partir do método de Runge Kutta de quarta ordem padrão ($I_1 = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ e $I_3 = 0.8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$).

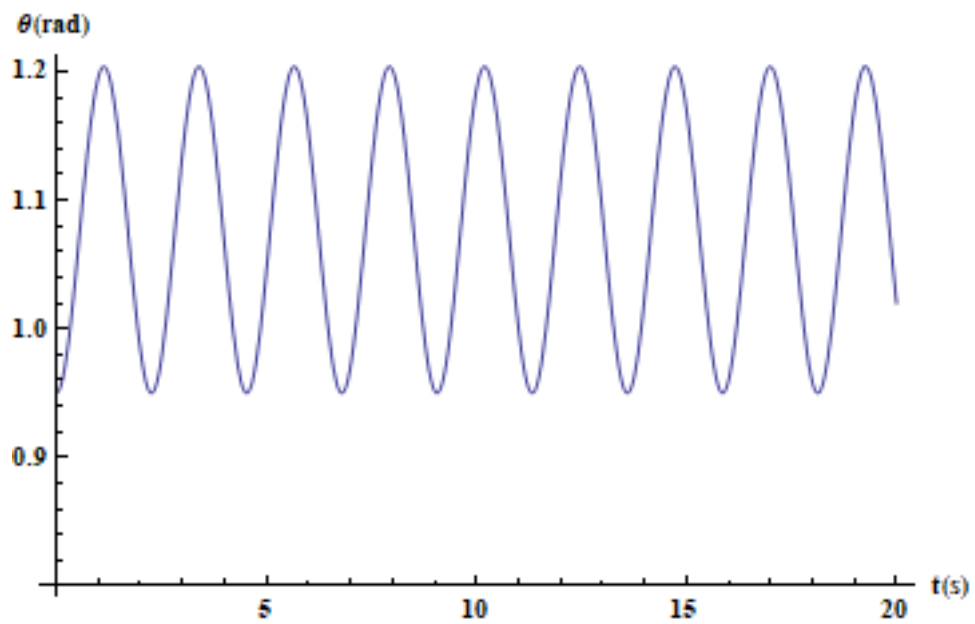


Figura 4.16: Gráfico de $\theta(t)$ para $I_1 = 0.8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ e $I_3 = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

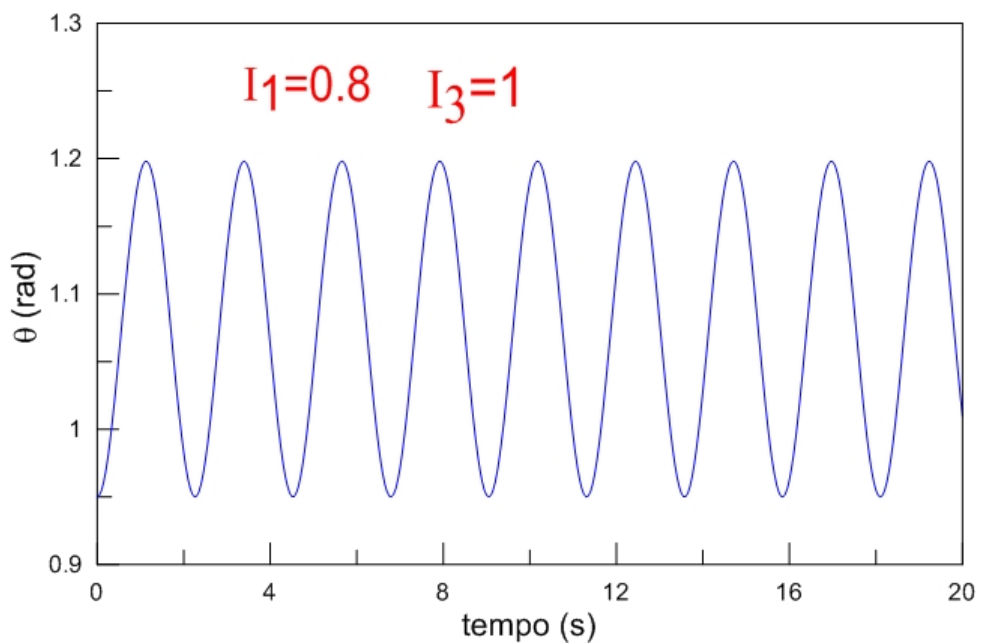


Figura 4.17: Gráfico do ângulo de nutação gerado numericamente a partir do método de Runge Kutta de quarta ordem padrão ($I_1 = 0.8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ e $I_3 = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$).

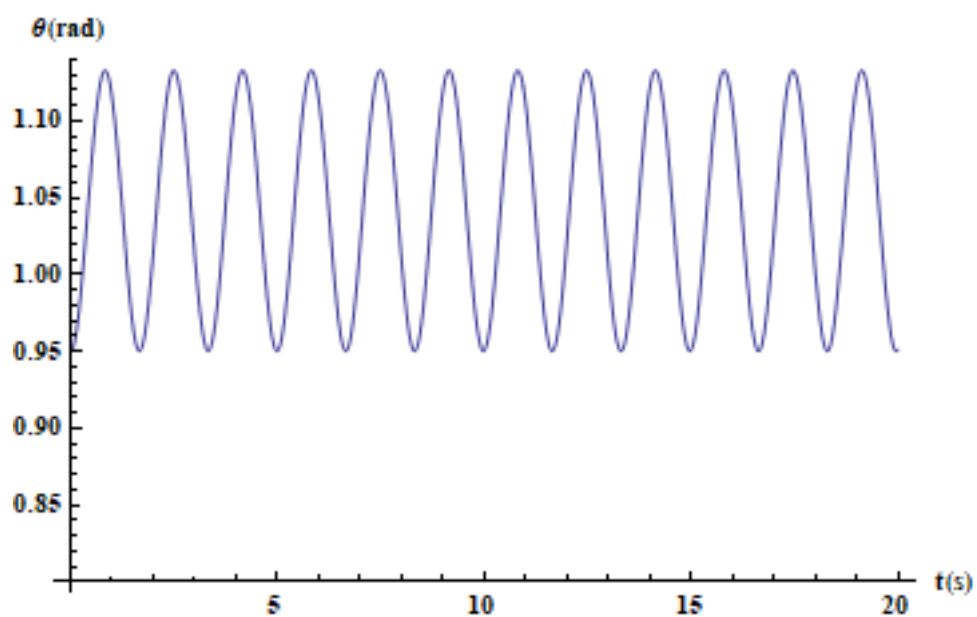


Figura 4.18: Gráfico de $\theta(t)$ para $I_1 = 0.6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ e $I_3 = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

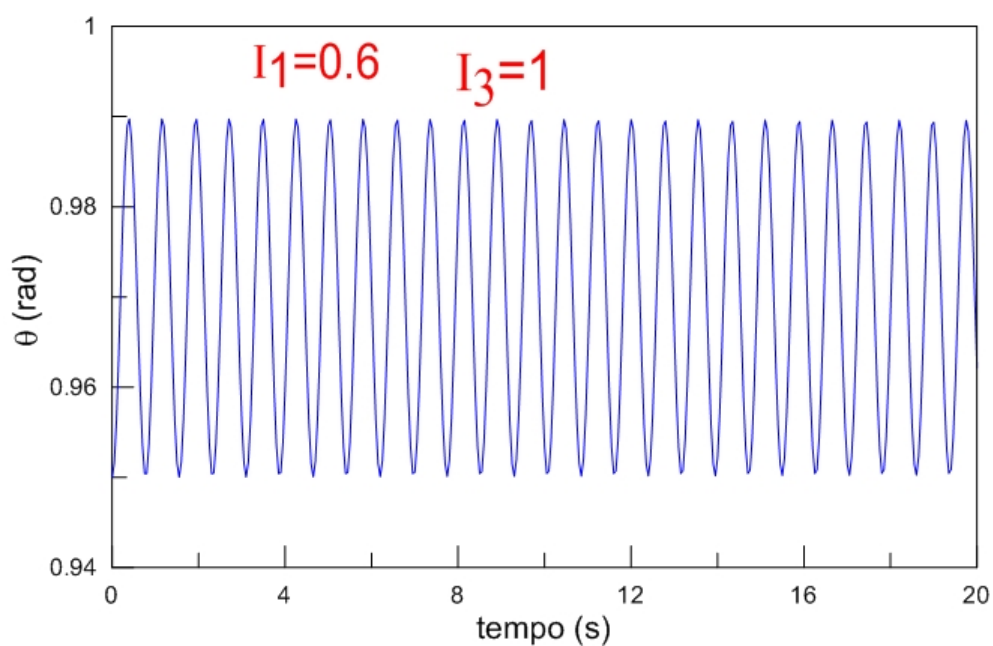


Figura 4.19: Gráfico do ângulo de nutação gerado numericamente a partir do método de Runge Kutta de quarta ordem padrão ($I_1 = 0.6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ e $I_3 = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$).

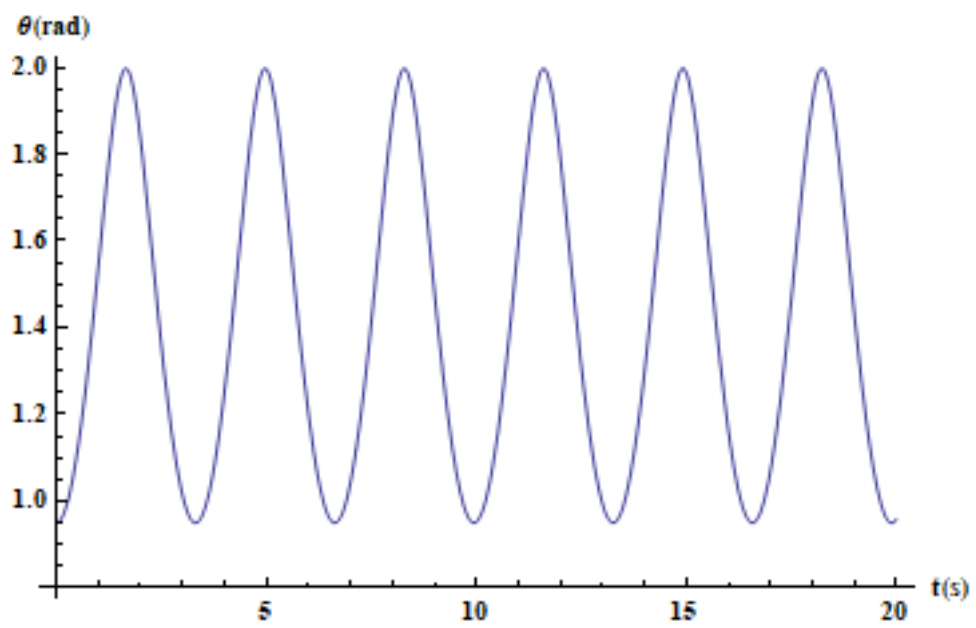


Figura 4.20: Gráfico de $\theta(t)$ para $I_1 = 0.6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $I_3 = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ e $\dot{\psi}_0 = 1.0 \text{ rad/s}$.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÃO

Neste trabalho, apresentamos soluções analíticas para dois problemas clássicos de mecânica: o pêndulo simples e o pião simétrico (resolvido parcialmente). Para o pêndulo simples, escrevemos sua solução em termos da função $\text{sn}(u)$, que é uma das funções elípticas de Jacobi. No caso em que a velocidade do pêndulo é igual a zero, notamos que a medida que seu ângulo inicial θ_0 diminui, o pêndulo se comporta como um oscilador harmônico simples. Também escrevemos a solução para o caso em que a velocidade inicial do pêndulo é diferente de zero e percebemos que a medida que sua velocidade inicial diminui, a amplitude do movimento também diminui, fazendo com que o pêndulo tenha um comportamento análogo ao do oscilador harmônico simples.

Também expressamos o período do pêndulo em função de sua amplitude e de sua velocidade inicial e verificamos que os valores gerados nos gráficos das figuras (4.6) e (4.10) correspondem corretamente ao período observado em cada um dos gráficos gerados a partir das soluções (4.31) e (4.41).

A solução do pião simétrico foi escrita em termos da função elíptica de Weierstrass. Escrevemos a solução apenas para o ângulo de nutação θ . A solução para os demais ângulos de Euler não foi abordada, já que, conforme [15], elas são escritas em termos das funções Zeta e Sigma de Weierstrass, que não foram objeto de estudo ao longo desse trabalho.

Os gráficos das Figuras (4.12), (4.14), (4.16) e (4.18) foram gerados para as mesmas

condições iniciais, com exceção dos valores de I_1 e I_3 . Notamos que no caso do pião alongado (quando $I_1 > I_3$), a amplitude e o período de oscilação diminuíram quando diminuimos a diferença entre I_1 e I_3 . Já no caso do pião achatado (quando $I_1 < I_3$), percebemos que a amplitude e o período de oscilação diminuíram quando aumentamos a diferença entre I_1 e I_3 .

Além disso, comparamos os gráficos da solução analítica escrita em termos da função de Weierstrass com os gráficos gerados pela solução numérica obtida por [7] a partir do método de Runge Kutta de quarta ordem padrão. Os gráficos apresentam comportamento semelhante, com diferenças em relação a amplitude do movimento, que é maior nos gráficos gerados a partir da solução analítica, e também no ponto de retorno, que não coincidem nos casos em que $\theta_0 = 0.9\pi$ e $\theta_0 = 2\pi/3$. Enquanto no gráfico das Figuras (4.13) e (4.15), o ponto de retorno é o próprio θ_0 , no gráfico da Figuras (4.12) e (4.12) esse ponto se dá em $\theta = 0.39$ rad e $\theta = 0.50$ rad, respectivamente.

Por meio destes dois exemplos clássicos, podemos notar a relevância das funções elípticas de Jacobi e de Weierstrass para a resolução de alguns problemas integráveis cujas primitivas não podem se escritas em termos de funções elementares. Ressaltamos que boa parte dos textos sobre as funções elípticas de Jacobi e de Weierstrass datam do fim do século XIX e início do século XX, como é o caso de Whittaker & Watson [15], livro cuja quarta e última edição (1927) adotamos como referência para o estudo da solução analítica do pião. Em face da escassez de textos atuais sobre o assunto, enfatizamos a pertiência de estudos que busquem exemplos da física, da química e de outras áreas do conhecimento por meio dos quais seja possível apresentar aos estudantes de exatas essas importantes funções.

REFERÊNCIAS

- [1] ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. *Handbook of Mathematical Functions: withi Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Nova Iorque: Dover Publications, 10^a edição. 1972. 1046 p.
- [2] AURINO, R. F.; VASCONCELOS, D. S. *Introdução ao Cálculo das Funções Elípticas Jacobianas*. Salvador: Centro Editorial e Didático da UFBA. 1994. 89 p.
- [3] BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. Rio de Janeiro: LTC, 8^a edição. 2006. 434 p.
- [4] BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Bluncher, 2^a edição. 1996. 512 p.
- [5] BELÉNDEZ, A. et. al. Exact solution for the nonlinear pendulum. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 29: 645-648, 2007.
- [6] DIXON, A.C. *The Elementary Properties of the Elliptic Functions*. London: Macmillan & Co. 1894. 142 p.
- [7] EDUARDO, E. C. *Aplicações da Transformada de Fourier e Soluções Numéricas de Sistemas Periódicas em Mecânica*. Dissertação de Mestrado. UNESP, Rio Claro. 2018.
- [8] MELLO, S.F. *Canonical Perturbation Theories, Degenerate Systems and Resonance*. New York: Springer, Astrophysics and Space Science Library. 2007. 341 p.

- [9] HANCOCK, H. *Elliptic Integrals*. New York: Wiley, 1ª Edição. 1917. 108 p.
- [10] LEMOS, N. A. *Mecânica Analítica*. Rio de Janeiro: Livraria da Física, 2ª edição. 2007. 386 p.
- [11] NETO, A. L. *Função de uma Variável Complexa*. Rio de Janeiro: IMPA, 2ª edição. 2012. 468 p. (Projeto Euclides)
- [12] SNAPE, J. *Applications of Elliptic Functions in Classical and Algebraic Geometry*. 117 f. Dissertação (Mestrado) - Collingwood College, University of Durham, Durham. 2004.
- [13] SUZUKI, M.; SUZUKI, I. S. Physics of simple pendulum: a case study of nonlinear dynamics. Disponível em: <<http://www.binghamton.edu/physics/docs/physics-of-simple-pendulum-9-15-08.pdf>>. Acesso em: 16 de janeiro de 2017.
- [14] SYMON, K. R. *Mecânica*. Rio de Janeiro: Campus, 1996. 685 p.
- [15] WHITTAKER, E. T. *A Treatise on the Analytic Dynamics of Particles and Rigid Bodies: with an Introduction to the Problem of Three Bodies*. Cambridge: Cambridge Press, 2ª edição. 1917. p.157-158.

APÊNDICE A

PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES ELÍPTICAS DE JACOBI

Nesta seção, apresentaremos algumas propriedades das funções elípticas de Jacobi.

Proposição A.1 (Derivadas). *As derivadas das funções $sn(u)$, $cn(u)$ e $dn(u)$ são dadas por*

(i)
$$\frac{d}{du}sn(u) = cn(u)dn(u), \tag{A.1}$$

(ii)
$$\frac{d}{du}cn(u) = -sn(u)dn(u), \tag{A.2}$$

(iii)
$$\frac{d}{du}dn(u) = -k^2sn(u)dn(u). \tag{A.3}$$

Demonstração:

(i) Diferenciando (2.14), temos

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Como $x = sn(u)$, segue portanto

$$\frac{dx}{du} = \frac{d}{du}sn(u) = \sqrt{(1-sn^2(u))(1-k^2sn^2(u))} = cn(u)dn(u).$$

Para provar (ii), basta substituir $cn(u)$ por $\sqrt{1-sn^2(u)}$:

$$\frac{d}{du}cn(u) = \frac{d}{du}\sqrt{1-sn^2(u)} = -\frac{2sn(u)dn(u)cn(u)}{2\sqrt{1-sn^2(u)}} = -sn(u)dn(u).$$

Analogamente, demonstramos (iii)

$$\frac{d}{du}dn(u) = \frac{d}{du}\sqrt{1-k^2sn^2(u)} = -\frac{2k^2sn(u)dn(u)cn(u)}{2\sqrt{1-k^2sn^2(u)}} = -k^2sn(u)cn(u).$$

□

Proposição A.2 (Fórmulas da Adição). *As fórmulas da adição para as funções $sn(u)$, $cn(u)$ e $dn(u)$ são dadas por:*

(i)

$$sn(u+v) = \frac{sn(u)cn(u)dn(u) + sn(v)cn(v)dn(v)}{1 - k^2sn^2(u)sn^2(v)}, \quad (\text{A.4})$$

(ii)

$$cn(u+v) = \frac{cn(u)cn(v) - k^2sn(u)sn(v)dn(u)dn(v)}{1 - k^2sn^2(u)sn^2(v)}, \quad (\text{A.5})$$

(iii)

$$dn(u+v) = \frac{dn(v)dn(u) - k^2sn(u)sn(v)cn(u)cn(v)}{1 - k^2sn^2(u)sn^2(v)}. \quad (\text{A.6})$$

Demonstração:

(i) Iniciemos a demonstração denotando $s_1 = sn(u)$, $s_2 = sn(v)$, $c_1 = cn(u)$, $c_2 = cn(v)$, $d_1 = dn(u)$, $d_2 = dn(v)$ e $\Delta = 1 - k^2sn^2(u)sn^2(v)$. Definamos também

$$z = \frac{s_1 c_2 d_2 + s_2 c_1 d_1}{\Delta}.$$

Diferenciando parcialmente em relação a u , obtemos

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\Delta(c_1 d_1 c_2 d_2 - s_1 s_2 d_1^2 - k^2 s_2 s_1 c_1^2) + (2k^2 s_1 c_1 d_1 s_2^2)(s_1 c_2 d_2 + s_2 c_1 d_1)}{\Delta^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} \Delta^2 &= \Delta [(c_1 d_1 c_2 d_2) - s_1 s_2 (d_1^2 + k^2 c_1^2)] + (s_1 c_2 d_2 + s_2 c_1 d_1) 2k^2 s_1 s_2^2 c_1 d_1 \\ &= (c_1 d_1 c_2 d_2)(\Delta + 2k^2 s_1^2 s_2^2) - s_1 s_2 [\Delta(d_1^2 + k^2 c_1^2) - 2k^2 s_2^2 c_1^2 d_1^2] \\ &= c_1 d_1 c_2 d_2 (\Delta + k^2 s_1^2 s_2^2 + k^2 s_1^2 s_2^2) - s_1 s_2 [\Delta d_1^2 + \Delta k^2 c_1^2 - k^2 s_2^2 c_1^2 d_1^2 - k^2 s_2^2 c_1^2 d_1^2]. \end{aligned}$$

Como $\Delta = 1 - k^2 s_1^2 s_2^2$, temos $\Delta + k^2 s_1^2 s_2^2 = 1$ e podemos escrever:

$$\frac{\partial z}{\partial u} \Delta^2 = c_1 d_1 c_2 d_2 (1 + k^2 s_1^2 s_2^2) - s_1 s_2 [d_1^2 (\Delta - k^2 s_2^2 c_1^2) + k^2 c_1^2 (\Delta - s_2^2 d_1^2)]. \quad (\text{A.7})$$

Usando novamente a relação $\Delta = 1 - k^2 s_1^2 s_2^2$ e as identidades $s_1^2 + c_1^2 = 1$ e $d_1^2 + k^2 s_1^2 = 1$, obtemos

$$\Delta - k^2 s_2^2 c_1^2 = 1 - k^2 s_1^2 s_2^2 - k^2 s_2^2 c_1^2 = 1 - k^2 s_2^2 (s_1^2 + c_1^2) = d_2^2.$$

Analogamente, podemos notar que

$$\Delta - s_2^2 d_1^2 = 1 - k^2 s_1^2 s_2^2 - s_2^2 d_1^2 = 1 - s_2^2 (k^2 s_1^2 + d_1^2) = c_2^2.$$

Substituindo em (A.7), obtemos

$$\frac{\partial z}{\partial u} \Delta^2 = c_1 d_1 c_2 d_2 (1 + k^2 s_1^2 s_2^2) - s_1 s_2 (d_1^2 d_2^2 + k^2 c_1^2 c_2^2).$$

Note que $\partial z / \partial u$ é simétrico em relação a u e v . Como z também é simétrico, segue que $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial v}$. Consequentemente, podemos definir

$$z = f(u + v),$$

onde $f(u + v)$ indica uma função de $u + v$, e assim

$$f(u + v) = \frac{s_1 c_2 d_2 + s_2 c_1 d_1}{\Delta}.$$

Para provar (i), basta tomar $v = 0$, obtendo $f(u) = sn(u)$, para todo u . Logo,

$$f(u + v) = sn(u + v).$$

(ii) Usando (2.19) e (A.4), obtemos

$$\begin{aligned} cn^2(u + v) &= 1 - sn^2(u + v) = 1 - \frac{(s_1 c_2 d_2 + s_2 c_1 d_1)^2}{(1 - k^2 s_1^2 s_2^2)^2} \\ &= \frac{(1 - k^2 s_1^2 s_2^2)^2 - (s_1 c_2 d_2 + s_2 c_1 d_1)^2}{(1 - k^2 s_1^2 s_2^2)^2}. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} (c_1^2 + s_1^2 d_2^2)(c_2^2 + s_2^2 d_1^2) &= \\ &= [1 - s_1^2 + s_1^2(1 - k^2 s_2^2)] [1 - s_2^2 + s_2^2(1 - k^2 s_1^2)] \\ &= (1 - k^2 s_1^2 s_2^2)(1 - k^2 s_1^2 s_2^2) = (1 - k^2 s_1^2 s_2^2)^2, \end{aligned}$$

assim, podemos escrever

$$\frac{(c_1^2 + s_1^2 d_2^2)(c_2^2 + s_2^2 d_1^2) - (s_1 c_2 d_2 + s_2 c_1 d_1)^2}{(1 - k^2 s_1^2 s_2^2)^2} = (c_1 c_2 - s_1 s_2 d_1 d_2)^2.$$

Logo,

$$cn^2(u + v) = \frac{(c_1 c_2 - s_1 s_2 d_1 d_2)^2}{(1 - k^2 s_1^2 s_2^2)^2}.$$

Assumindo a raiz quadrada de ambos os lados da igualdade e tomando $v = 0$, obtemos a equação (ii).

(iii) De maneira análoga, podemos provar (iii). De (2.20) e (A.4), temos

$$\begin{aligned} dn^2(u+v) &= 1 - k^2 sn^2(u+v) = 1 - \frac{k^2(s_1 c_2 d_2 + s_2 c_1 d_1)^2}{(1 - k^2 s_1^2 s_2^2)^2} \\ &= \frac{(1 - k^2 s_1^2 s_2^2)^2 - k^2(s_1 c_2 d_2 + s_2 c_1 d_1)^2}{(1 - k^2 s_1^2 s_2^2)^2}. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} (d_1^2 + k^2 s_1^2 c_2^2)(d_2^2 + k^2 s_2^2 c_1^2) &= \\ &= [1 - k^2 s_1^2 + k^2 s_1^2(1 - s_2^2)] [1 - k^2 s_2^2 + k^2 s_2^2(1 - s_1^2)] \\ &= (1 - k^2 s_1^2 s_2^2)(1 - k^2 s_1^2 s_2^2) = (1 - k^2 s_1^2 s_2^2)^2, \end{aligned}$$

assim, podemos escrever

$$\frac{(d_1^2 + k^2 s_1^2 c_2^2)(d_2^2 + k^2 s_2^2 c_1^2) - k^2(s_1 c_2 d_2 + s_2 c_1 d_1)^2}{(1 - k^2 s_1^2 s_2^2)^2} = (d_1 d_2 - k^2 s_1 s_2 c_1 c_2)^2.$$

Logo,

$$dn^2(u+v) = \frac{(d_1 d_2 - k^2 s_1 s_2 d_1 d_2)^2}{(1 - k^2 s_1^2 s_2^2)^2}.$$

Assumindo a raiz quadrada de ambos os lados da igualdade e tomando $v = 0$, obtemos a equação (iii), concluindo assim a demonstração. \square

Podemos usar as fórmulas de adição a fim de estender as definições das funções elípticas para outros valores de u além de $-K \leq u \leq K$. Faremos isso enunciando o seguinte resultado:

Proposição A.3. *As funções $sn(u)$ e $cn(u)$ possuem período igual a $4K$ e a função $dn(u)$ possui período igual a $2K$.*

Demonstração:

Tomando $v = K$ em (A.4), (A.5) e (A.6) e usando a Tabela 2.1, obtemos:

$$sn(u+K) = \frac{sn(u)cn(K)dn(K) + sn(K)cn(u)dn(u)}{1 - k^2 sn^2(u)sn^2(K)} = \frac{cn(u)dn(u)}{dn^2(u)} = \frac{cn(u)}{dn(u)} \quad (\text{A.8})$$

$$cn(u + K) = \frac{cn(u)cn(K) - sn(u)sn(K)dn(u)dn(K)}{1 - k^2sn^2(u)sn^2(K)} = \frac{k'sn(u)dn(u)}{dn^2(u)} = \frac{k'sn(u)}{dn(u)} \quad (\text{A.9})$$

$$dn(u + K) = \frac{dn(u)dn(K) - k^2sn(u)cn(u)sn(K)cn(K)}{1 - k^2sn^2(u)sn^2(K)} = \frac{k'dn(u)}{dn^2(u)} = \frac{k'}{dn(u)} \quad (\text{A.10})$$

Tomando agora $u = K$, temos:

$$(i) \quad sn(2K) = 0 \quad (ii) \quad cn(2K) = -1 \quad (iii) \quad dn(2K) = 1 \quad (\text{A.11})$$

Usando as equações (A.4), (A.5) e (A.6) com $v = 2K$ e usando (A.11), chegamos em:

$$sn(u + 2K) = -sn(u) \quad (\text{A.12})$$

$$cn(u + 2K) = -cn(2K) \quad (\text{A.13})$$

$$dn(u + 2K) = dn(u) \quad (\text{A.14})$$

Finalmente, substituindo u por $u = 2K$ em (A.12) e (A.13), obtemos

$$sn(u + 4K) = sn(u) \quad (\text{A.15})$$

$$cn(u + 4K) = cn(u), \quad (\text{A.16})$$

concluindo assim a demonstração □

É importante destacar que o período das funções sn , cn e dn não é um número absoluto, já que o valor de K varia de acordo com o valor atribuído ao módulo k . Além disso, as funções elípticas de Jacobi possuem um período imaginário, dado por $4K + i4K$ para sn e cn e por $2K + i2K$ para dn (ver [12]).

APÊNDICE B

FUNÇÕES ANALÍTICAS EM \mathbb{C}

B.1 Noções Preliminares

Neste seção vamos apresentar alguns conceitos sobre funções de variável complexa, como funções holomorfas, funções analíticas e singularidades de funções analíticas, expondo material de [11].

B.1.1 Funções Holomorfas

Definição B.1. *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua, onde U é um aberto de \mathbb{C} . Dizemos que f é **holomorfa** em $z_0 \in U$ se existe o limite*

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

O número complexo $f'(z_0)$ é chamado de **derivada** de f em z_0 . Se f for holomorfa em todos os pontos de um subconjunto X de U dizemos que f é holomorfa em X . Em particular, se $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa em todo ponto de \mathbb{C} , dizemos que f é **inteira**.

Alternativamente, tomando $h = z - z_0$, podemos escrever

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Exemplo B.1.1. A função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto z^n \end{aligned}$$

é inteira e $f'(z) = nz^{n-1}$.

De fato, seja $z_0 \in \mathbb{C}$, então

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \\ \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)(z^{n-1} + z^{n-2} \cdot z_0 + \cdots + z \cdot z_0^{n-2} + z_0^{n-1})}{z - z_0} &= \\ \lim_{z \rightarrow z_0} (z^{n-1} + z^{n-2} \cdot z_0 + \cdots + z \cdot z_0^{n-2} + z_0^{n-1}) &= \\ (z_0^{n-1} + z_0^{n-2} \cdot z_0 + \cdots + z_0 \cdot z_0^{n-2} + z_0^{n-1}) &= nz_0^{n-1}. \end{aligned}$$

□

Exemplo B.1.2. A função $\exp(x + iy) = e^x(\cos y + i \sin y)$ é inteira.

Como as partes real e imaginária da função são definidas por $u(x, y) = e^x \cos y$ e $v(x, y) = e^x \sin y$, respectivamente, temos

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y) = e^x \cos y \\ \frac{\partial}{\partial y}(e^x \cos y) = -e^x \sin y \\ \frac{\partial}{\partial x}(e^x \sin y) = e^x \sin y \\ \frac{\partial}{\partial y}(e^x \sin y) = e^x \cos y. \end{array} \right.$$

Note que as derivadas parciais de primeira são funções contínuas e satisfazem às condições de Cauchy-Riemann² em todo o ponto do plano. Portanto a função é inteira. □

²Relações de Cauchy-Riemann: A função $f(z) = u(z) + iv(z)$ é holomorfa em $z_0 = x + iy \in U$ se as

Exemplo B.1.3. A função $f(z) = |z|$ é holomorfa apenas em $(0, 0)$.

Como as partes real e imaginárias de f são dadas respectivamente por

$$u(x, y) = x^2 + y^2 \quad \text{e} \quad v(x, y) = 0$$

as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas apenas na origem, ou seja

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} u(x, y) = 2x = 0 = \frac{\partial}{\partial x} v(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial y} u(x, y) = 2y = 0 = \frac{\partial}{\partial y} v(x, y) \end{cases} \iff (x, y) = 0.$$

Portanto, a função é holomorfa apenas em $(0, 0)$. □

B.1.2 Funções Analíticas de uma Variável Complexa

Definição B.2. Seja $U \subset \mathbb{C}$ aberto. Dizemos que uma função $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ é **analítica** se para todo $z_0 \in U$ existe uma série de potências

$$\sum_{n \geq 0} a_n(z_0)(z - z_0)^n, \tag{B.1}$$

para todo $z \in U$ tal que $|z - z_0| < \rho$. Uma série de potências como a da equação (B.1) é chamada de *série de potências que representa f em z_0* .

É importante destacar que como as funções definidas por série de potências são holomorfas, as funções analíticas são também holomorfas.

Exemplo B.1.4. A função $f = \frac{1}{z}$ definida para $z \in \mathbb{C}^*$ é analítica.

derivadas parciais $\partial u/\partial x, \partial u/\partial y, \partial v/\partial x$ e $\partial v/\partial y$ existem e são contínuas em z_0 , satisfazendo às seguintes condições

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0).$$

As funções $u, v : U \rightarrow \mathbb{R}$ são chamadas **parte real** e **parte imaginária** de f .

Se $z_0 \in \mathbb{C}^*$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{z_0 + z - z_0} = \frac{1}{z_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z-z_0}{z_0}} \\ &= \frac{1}{z_0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-z_0}{z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z_0^{n+1}} (z-z_0)^n. \end{aligned}$$

□

Na sequência, apresentamos a definição de singularidades isoladas de funções analíticas. Esta definição é importante no estudo de algumas funções específicas, como as funções duplamente elípticas.

Definição B.3. *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}$ aberto, uma função analítica. Dizemos que $z_0 \in \mathbb{C} - U$ é uma **singularidade isolada** de f se existe $r > 0$ tal que $D_r(z_0) - \{z_0\} \subset U$, ou seja, se f está definida e é analítica em todos os pontos de uma vizinhança de z_0 , com exceção de z_0 .*

Note que de acordo com a Definição B.3, podemos considerar o desenvolvimento de f em série de Laurent³ no anel $D_r(z_0) - \{z_0\}$

$$f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j (z - z_0)^j.$$

A partir desse desenvolvimento, podemos distinguir as singularidades isoladas em 3 tipos:

- (a) Se $a_j = 0$ para todo $j < 0$ dizemos que z_0 é uma **singularidade removível** de f .
- (b) Se existe $n > 0$ tal que $a_{-n} \neq 0$ e $a_j = 0$ para todo $j < -n$ dizemos que z_0 é um **polo de ordem n** de f e, neste caso, para $z \in D_r(z_0) - \{z_0\}$ podemos escrever

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z - z_0)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_1}{(z - z_0)} + \sum_{j \geq 0} a_j (z - z_0)^j.$$

A função $\frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z - z_0)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_1}{(z - z_0)}$ é chamada parte principal do polo z_0 de f .

³Para mais detalhes sobre este desenvolvimento, ver ([11], p. 211)

(c) Se o desenvolvimento de Laurent em $D_r(z_0) - \{z_0\}$ possui uma infinidade de termos não nulos com potências negativas de $z - z_0$ dizemos que z_0 é uma **singularidade essencial** de f .

Definição B.4. *Sejam $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}$ aberto, uma função holomorfa e $z_0 \in \mathbb{C} - U$ uma singularidade isolada. Considere o desenvolvimento de f por uma série de Laurent no disco $A = D - \{z_0\}$. O resíduo de f em z_0 é por definição o número complexo*

$$\text{Res}(f, z_0) = a_{-1}.$$

Por [11] (ver p. 211)

$$\text{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz \quad (\text{B.2})$$

onde $\gamma(\theta) = z_0 + re^{i\theta}$ e $r > 0$ é tal que o círculo de raio r e centro z_0 está contido no disco perfurado A .

Definição B.5. *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}$ aberto. Dizemos que a função f é **meromorfa** em U se f é holomorfa em $U - \Gamma$, onde $\Gamma \subset U$ é um conjunto discreto formado pelos polos de f .*

Exemplo B.1.5. A função $f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^n}$, definida em $\mathbb{C} - \{z_0\}$ é meromorfa em \mathbb{C} , pois f é holomorfa em $\mathbb{C} - \{z_0\}$ e z_0 é um polo de ordem n de f . Também são meromorfas as funções $\frac{e^z}{z}$ e $\frac{\text{sen } z}{(z - 1)^2}$.

APÊNDICE C

ÂNGULOS DE EULER

C.1 Ângulos de Euler

Considere um corpo rígido e seus três eixos principais \hat{e}_1, \hat{e}_2 e \hat{e}_3 , ao longo dos quais definimos os eixos x', y', z' , respectivamente, que formam o sistema de coordenadas S^* fixo ao corpo. Considere também um sistema de coordenadas cartesianas, S (inercial), com os eixos espaciais x, y e z , e seus respectivos versores \hat{x}, \hat{y} e \hat{z} . Por fim, tome S e S^* como tendo a mesma origem. Para determinar a orientação de S^* em relação a S , vamos lançar mão dos chamados ângulos de Euler.

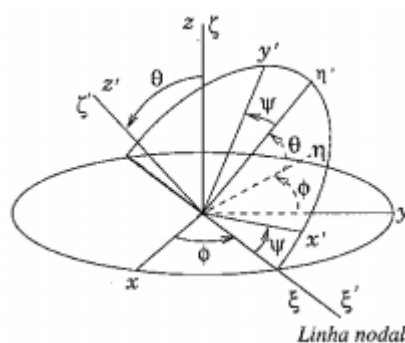


Figura C.1: Ângulos de Euler.

Na Figura (C.1)⁹ θ expressa o ângulo formado entre os eixos z' e z . O ângulo ϕ é medido no plano x, y até a interseção do plano x', y' com o plano x, y . Esta interseção é chamada de linha dos nodos e, no diagrama, ela está representada pela letra grega ξ . Por fim, o ângulo ψ é medido no plano x', y' a partir da linha dos nodos até o eixo x' (neste caso, supomos que tanto o sistema S quanto o sistema S^* são orientados segundo a regra da mão direita).

A transformação do sistema cartesiano $S(x, y, z)$ para o sistema sistema $S^*(x', y', z')$ ocorre em três estágios. A primeira transformação (Figura C.2) é realizada por meio de uma rotação dos eixos (x, y, z) em torno do eixo z do ângulo θ , gerando o sistema (ξ, η, ζ) .

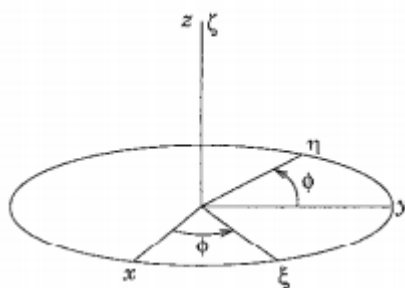


Figura C.2: Rotação do ângulo ϕ em torno do eixo z .

Esquemáticamente, temos

$$\phi : (x, y, z) \xrightarrow{D} (\xi, \eta, \zeta),$$

onde D é a matriz rotação

$$D = \begin{bmatrix} \cos \phi & \text{sen } \phi & 0 \\ -\text{sen } \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A segunda transformação é obtida por meio da rotação em torno do eixo ξ do ângulo θ nos eixos (ξ, η, ζ) , gerando o sistema de eixos (ξ', η', ζ') (Figura C.3).

Assim, temos

$$\theta : (\xi, \eta, \zeta) \xrightarrow{C} (\xi', \eta', \zeta'),$$

⁹As Figuras C.1, C.2, C.3 e 4.11 foram extraídas de [10]

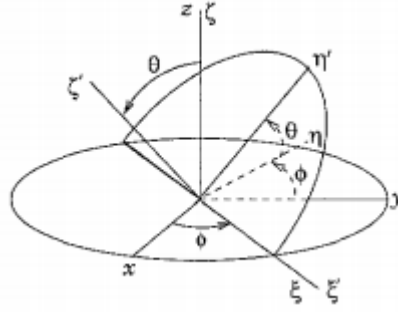


Figura C.3: Rotação do ângulo θ em torno do eixo ξ .

onde C é a matriz rotação

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \text{sen } \theta \\ 0 & -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Por fim, a terceira transformação (Figura C.1) é realizada por meio da rotação do ângulo ψ em torno do eixo ζ' nos eixos (ξ', η', ζ') , obtendo, assim, o sistema S^* , formado pelos eixos (x', y', z') :

$$\theta : (\xi', \eta', \zeta') \xrightarrow{B} (x', y', z'),$$

onde B é a matriz rotação

$$B = \begin{bmatrix} \cos \psi & \text{sen } \psi & 0 \\ -\text{sen } \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, a transformação de S para S^* é realizada pela matriz A , obtida por meio do produto das matrizes D, C e B , ou seja,

$$A = BCD.$$

Temos, portanto

$$A = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \phi - \cos \theta \text{sen } \phi \text{sen } \psi & \cos \psi \text{sen } \phi + \cos \theta \cos \phi \text{sen } \psi & \text{sen } \psi \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \psi \cos \phi - \cos \theta \text{sen } \phi \cos \psi & -\text{sen } \psi \text{sen } \phi + \cos \theta \cos \phi \text{sen } \psi & \cos \psi \text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta \text{sen } \phi & \cos \psi \cos \phi & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

C.2 Velocidade Angular em Termo dos Ângulos de Euler

Nosso objetivo agora é exprimir o vetor velocidade angular em termo dos ângulos de Euler. Para isso, vamos considerar que o corpo se mova de tal forma que ϕ , θ e ψ variem com o tempo e que sua rotação infinitesimal seja resultado de três rotações infinitesimais sucessivas cujas velocidades angulares tenham magnitudes $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$ e $\dot{\psi}$, respectivamente.

Neste caso, é possível determinar o vetor velocidade angular $\vec{\omega}$ somando os vetores velocidade angular $\vec{\omega}_\phi$, $\vec{\omega}_\theta$ e $\vec{\omega}_\psi$ associados a rotações em que apenas um ângulo de Euler varia. Temos, portanto

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\phi + \vec{\omega}_\theta + \vec{\omega}_\psi.$$

O próximo passo é obter as componentes de $\vec{\omega}$ ao longo dos eixos fixos do corpo x' , y' e z' . Para isso, fixados um par de ângulos de Euler, vamos determinar a velocidade angular associada à variação do terceiro ângulo e depois somar os resultados obtidos em cada caso.

- Variação em ϕ

Fixando θ e ψ , podemos notar pela Figura C.2 que o eixo z , que é fixo no espaço, também torna-se fixo ao corpo, sendo, assim, o eixo de rotação. Logo, ω_ϕ é um vetor paralelo ao eixo z com componente $\dot{\phi}$. Em termos matriciais, temos

$$\vec{\omega}_\phi = \dot{\phi} \hat{z} \longrightarrow \vec{\omega}_\phi \Big|_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}$$

de modo que podemos determinar as componentes desse vetor ao longo do sistema S^* da seguinte forma:

$$\vec{\omega}_\phi \Big|_{S^*} = A \cdot \vec{\omega}_\phi \Big|_S = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \sin \psi \sin \theta \\ \dot{\phi} \cos \psi \sin \theta \\ \dot{\phi} \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Lembramos que A é a matriz transformação de S para S^* .

- Variação em θ

De modo análogo, podemos determinar as componentes do vetor $\vec{\omega}_\theta$ ao longo de S^* . Fixando agora ϕ e ψ , a linha nodal torna-se fixa no espaço e no corpo e passa a ser o eixo de rotação (Figura C.3). Assim, $\vec{\omega}_\theta$ é um vetor com a única componente $\dot{\theta}$ paralela ao eixo ξ' , ou seja

$$\vec{\omega}_\theta = \dot{\theta} \xi' \longrightarrow \vec{\omega}_\theta \Big|_\Sigma = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

onde Σ é o sistema formado pelos eixos ξ', η' e ζ' . Temos, portanto

$$\vec{\omega}_\theta \Big|_{S^*} = B \cdot \vec{\omega}_\theta \Big|_\Sigma = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \cos \psi \\ -\dot{\phi} \sin \psi \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Lembramos que B é a matriz transformação do sistema Σ para S^* .

- Variação em ψ

Por fim, fixando os ângulos θ e ψ , o eixo z' torna-se fixo no corpo e no espaço. Além disso, z' passa a ser eixo de rotação $\vec{\omega}_\psi$, torna-se um vetor com componente $\dot{\psi}$ ao longo do eixo z' . Neste caso, como as $\vec{\omega}_\psi$ já estão em termos de S^* , não é necessário aplicar qualquer matriz transformação. Logo

$$\vec{\omega}_\psi = \dot{\psi} z' \longrightarrow \vec{\omega}_\psi \Big|_{S^*} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}.$$

Reunindo as componentes correspondentes, chegamos ao seguinte resultado final

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_{x'} &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \omega_{y'} &= \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \omega_{z'} &= \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \end{aligned}} \quad (\text{C.1})$$

APÊNDICE D

COMANDOS DO MATHEMATICA

D.1 Pêndulo com $v_0 = 0$

- Angulo inicial θ_0

$$\theta_0 = x$$

- Determinando o módulo k

$$k = \text{Sin}[x/2]$$

- Gerando o gráfico $\theta(t)$

$$\text{Plot}[2 * \text{ArcSin}[k * \text{JacobiSN}[\text{EllipticK}[k^2] - t, k^2]], x * \text{Cos}[t], \{t, 0, 25\}]$$

D.2 Pêndulo com $v_0 \neq 0$

- Velocidade inicial

$$v_0 = v$$

- Determinando θ_{max}

$$\theta_{max} = x = 2 * \text{ArcSin} [\text{Sqrt}(v^2)/4]$$

- Determinando o módulo k

$$k = \text{Sin} [x/2]$$

- Gerando o gráfico $\theta(t)$

$$\text{Plot} [2 * \text{ArcSin} [x * \text{JacobiSN} [t, x^2]], \{t, 0, 25\}]$$

D.3 Pião Simétrico com Ponto Fixo

- Parâmetros e condições iniciais

$$I_1 = A$$

$$I_2 = B$$

$$mgl = m$$

$$\theta_0 = \theta$$

$$\dot{\phi} = \phi$$

$$\dot{\psi} = \psi$$

- Constantes

$$p_\psi = p = B * (\psi + \phi * \text{Cos} [\theta])$$

$$p_\phi = q = A * \phi * (\text{Sin} [\theta])^2 + p * \text{Cos} [\theta]$$

$$E = W = 0.5 * A * \phi * (\text{Sin} [\theta])^2 + 0.5 * B * (\psi + \phi * \text{Cos} [\theta])^2 + m * \text{Cos} [\theta]$$

$$E' = Q = W - (p^2)/2 * B$$

- Determinando as raízes do polinômio $f(x)$

$$\text{Solve} \left[-(q - p * x)^2 - 2 * A * m * (x - x^3) + 2 * A * Q * (1 - x^2) == 0, x \right]$$

- Determinando e_1, e_2 e e_3

$$e_1 = s1 = (m * x_1 / (2 * A)) - (2 * A * Q + p^2) / (12 * A^2)$$

$$e_2 = s2 = (m * x_2 / (2 * A)) - (2 * A * Q + p^2) / (12 * A^2)$$

$$e_3 = s3 = (m * x_3 / (2 * A)) - (2 * A * Q + p^2) / (12 * A^2)$$

onde x_1, x_2 e x_3 são as raízes do polinômio $f(x)$.

- Determinando g_2 e g_3

$$g_2 = g2 = -4 * (s2 * s3 + s3 * s1 + s1 * s2)$$

$$g_3 = g3 = 4 * s1 * s2 * s3$$

- Determinando $\omega_3 + \tau$

$$\wp(\omega_3 + \tau) = s4 = (m * \text{Cos}[\theta_0] / (2 * A)) - (2 * A * Q + p^2) / (12 * A^2)$$

$$\omega_3 + \tau = w = \text{InverseWeierstrassP}[-s4, \{g2, g3\}]$$

- Gerando o gráfico de $\theta(t)$

$$\text{Plot} \left[\text{ArcCos} \left[(2 * A / m) * (\text{WeierstrassP}[t + w, g2, g3]) + (2 * A * Q + p^2) / (6 * A * m) \right], \{t, 0, 20\} \right]$$