



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

**Estudo sobre espaços de Banach e de Hilbert
com aplicações em Equações Diferenciais,
Integrais e Teoria da Aproximação**

Carlos Alberto do Nascimento

2018



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

Estudo sobre espaços de Banach e de Hilbert com aplicações em Equações Diferenciais, Integrais e Teoria da Aproximação

Carlos Alberto do Nascimento

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática Universitária como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientadora
Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti

2018

517.5 Nascimento, Carlos Alberto do
N244e Estudo sobre espaços de Banach e de Hilbert com
aplicações em equações diferenciais, integrais e teoria da
aproximação / Carlos Alberto do Nascimento. - Rio Claro,
2018
 79 f. : il.

 Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista,
Instituto de Biociências de Rio Claro
 Orientadora: Marta Cilene Gadotti

 1. Análise funcional. 2. Existência e unicidade. 3. Espaço
de Banach. 4. Espaço de Hilbert. 5. Melhor aproximação. I.
 Título.

TERMO DE APROVAÇÃO

Carlos Alberto do Nascimento

ESTUDO SOBRE ESPAÇOS DE BANACH E DE HILBERT COM
APLICAÇÕES EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS, INTEGRAIS E TEORIA DA
APROXIMAÇÃO

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti
Orientadora

Prof. Dr. Adilson José Vieira Brandão
Departamento de Matemática - UFSCAR

Prof. Dr. Wladimir Seixas
Departamento de Matemática - UFSCAR

Rio Claro, 03 de maio de 2018

Dedico à minha família, esposa Thamires e filho Gabriel.

Agradecimentos

Acredito que nunca realizamos um trabalho sozinho, sempre somos auxiliados com sugestões, uma palavra de incentivo ou apenas um silêncio pensativo. Neste sentido, gostaria de agradecer a todos aqueles que de alguma forma direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

Primeiramente a Deus, que me deu forças e coragem para ultrapassar os obstáculos enfrentados nessa trajetória.

A minha esposa Thamires, que foi uma guerreira ao meu lado, abrindo mão de seus objetivos para viver o meu neste período.

A minha família, mãe Lucila, pai Mario (in memoriam) e irmãos, que sempre me apoiaram nesta caminhada de alguma forma.

Aos professores da Universidade do Estado de Mato Grosso - UNEMAT, Marcia Cristina Dal Toé, Marco Antônio de Alcântara Fernandes, Marinez Cargnin Stieler e Neodir Paulo Travessini, pela amizade, confiança e cartas de recomendação.

A todos os professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática - PGMat Unesp, campus Rio Claro - SP, em especial a Marta Cilene Gadotti, minha orientadora, que me acolheu e com amizade e paciência conseguimos realizar este trabalho.

Meu sincero e muito obrigado aos colegas de classe, Kleber, Tharine, Maria Paula, Greg, Amanda, Marcio, Pedro, Tiago, Joira, Luiz Paulo e Reinaldo, que sempre me ajudaram desde o início de minha jornada, com palavras de força e fé e que tudo iria dar certo e ao amigo Jessé, pelo apoio e ajuda na construção dos gráficos.

Aos funcionários da Seção Técnica de Pós-Graduação, em especial a Inajara, sempre pronta a tirar nossas dúvidas e nos incentivar no decorrer do programa.

Finalmente a Secretaria do Educação do Estado do Mato Grosso - SEDUC/MT pelo afastamento para qualificação profissional.

Arquimedes será lembrado enquanto Ésquilo foi esquecido, porque os idiomas morrem mas as ideias matemáticas permanecem. “Imortalidade” pode ser uma idéia tola, mas provavelmente um matemático tem a melhor chance que pode existir de obtê-la.

G. H Hardy

Resumo

Neste trabalho, abordaremos os principais conceitos e propriedades sobre espaço de Banach e espaço de Hilbert com o objetivo de oferecer o conteúdo necessário para discutirmos algumas aplicações desses conceitos. Mostraremos a existência e unicidade de solução de Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem, existência e unicidade de solução de certas Equações Integrais e existência e unicidade de melhor aproximação em espaços normados e de Hilbert.

Palavras-chave: Espaço de Banach, Espaço de Hilbert, Melhor Aproximação.

Abstract

In this work, we will discuss the main concepts and properties on Banach space and Hilbert space in order to offer the necessary content to discuss some applications of these concepts. We will show the existence and uniqueness of the solution of First Order Ordinary Differential Equations, existence and uniqueness of solution of certain Integral Equations and existence and uniqueness of better approximation in normed and Hilbert spaces.

Keywords: Banach Space, Hilbert Space, Best Approximation.

Lista de Figuras

2.1	Gráfico de f_m . Fonte: Adaptado de Kreyszig (1978, p. 38).	34
2.2	Gráfico de f_m e f_n . Fonte: Adaptado de Kreyszig (1978, p. 38).	34
2.3	Gráfico de f . Fonte: Próprio autor.	34
2.4	Gráfico de f_m . Fonte: Adaptado de Barreto (1971, p. 168).	38
3.1	Gráfico de um cabo flexível entre dois pontos A e B. Fonte: Adaptado de Figueiredo e Neves (2015, p. 40).	57
3.2	Gráfico de $g(x) > 0$ e $0 \leq \alpha \leq \pi/2$. Fonte: Próprio autor.	59
3.3	Região triangular R no caso a e b positivo. Fonte: Adaptado de Kreyszig (1978, p. 322).	61
3.4	Gráfico das funções $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$. Fonte: Próprio autor.	69
3.5	Gráfico das funções $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$. Fonte: Próprio autor.	69
3.6	Gráfico de $t = \cos n\theta$, para $n = 1, 2, 3$. Fonte: Adaptado de Kreyszig (1978, p. 347).	74
3.7	Gráfico de T_1, T_2, T_3 e T_4 . Fonte: Adaptado de Kreyszig (1978, p. 350).	75

Sumário

1	Introdução	19
2	Espaço de Banach e espaço de Hilbert	23
2.1	Espaços Métricos	23
2.2	Normas e espaços normados	30
2.3	Topologia dos espaços normados	35
2.4	Operadores lineares limitados e contínuos	40
2.5	Espaços com produto interno e espaço de Hilbert	45
3	Aplicações	51
3.1	Teorema do ponto fixo de Banach	51
3.2	Aplicações do Teorema do Ponto fixo de Banach	53
3.2.1	Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)	53
3.2.2	Aplicação de Equações Diferenciais Ordinárias	56
3.2.3	Equações Integrais	59
3.3	Teoria da aproximação	63
3.3.1	Aplicação sobre aproximação em espaços normados	73
4	Considerações finais	77
	Referências	79

1 Introdução

A Análise Funcional é uma área da Matemática considerada como a fusão entre as áreas de Análise Clássica, Álgebra Linear e Topologia, podendo ser definida como o estudo dos espaços vetoriais normados, em especial os espaços de Banach e dos operadores lineares contínuos entre eles.

Começou a ser desenvolvida há mais de 90 anos, por volta de 1922, com os trabalhos do matemático polonês *Stefan Banach* (1892 - 1945), sobre operadores lineares limitados [1].

O matemático alemão *David Hilbert* (1862 - 1943) teve grandes contribuições nesta área. Segundo [1], Hilbert foi considerado um dos maiores matemáticos do século XX. Contribuiu em vários campos da Matemática, além da criação dos espaços que levam seu nome, Espaços de Hilbert, durante seus trabalhos em análise sobre equações integrais.

Obteve um grande impulso para seu avanço durante o século XX com a modelagem, devida ao matemático húngaro *John Von Neumann* (1903 - 1957), na mecânica quântica em espaços de Hilbert, pois vários problemas em equações diferenciais e integrais, requeriam o uso de espaços vetoriais de dimensão infinita [2].

Podendo ser vista como Álgebra Linear, tratando de espaços vetoriais de dimensão infinita, a Análise Funcional possui muitas aplicações em diversos ramos da Matemática tais como, Equações Diferenciais Ordinárias, Equações Diferenciais Parciais, Teoria da Aproximação, Equações Integrais entre outras.

O objetivo central deste trabalho é apresentar alguns dos principais conceitos da Análise Funcional sobre espaços de Banach e espaços de Hilbert e discutir aplicações da teoria estudada com ênfase em Equações Diferenciais, Equações Integrais e Teoria da Aproximação. Usaremos os conceitos de espaço normado para provar resultados sobre espaço de Banach e espaço de Hilbert para utilizarmos na garantia de existência e unicidade de solução de equações diferenciais, equações integrais e melhor aproximação.

O trabalho está organizado da seguinte forma: no segundo capítulo introduzimos conceitos básicos sobre espaços métricos, com a finalidade de definirmos espaço de Banach e espaço de Hilbert. Faz-se um breve estudo sobre espaços métricos, do qual

aborda-se o essencial sobre sequências e completude e, não menos importante, um breve estudo sobre espaços métricos compactos, como pré-requisito para a teoria sobre espaços normados e conseqüentemente espaço de Banach. Apresentamos propriedades topológicas destes espaços e resultados sobre operadores lineares limitados e contínuos. Por fim, definimos espaço com produto interno e espaço de Hilbert, com exemplos e definições, destacando subconjunto convexo e soma direta, oferecendo o conteúdo necessário para as aplicações.

No terceiro capítulo, apresentamos a definição de ponto fixo de uma aplicação e o Teorema do Ponto Fixo de Banach e suas aplicações em Equações Diferenciais e Equações Integrais, na garantia da existência e unicidade de soluções para Equações Diferenciais de Primeira Ordem e Equações Integrais de Fredholm de primeira e segunda espécie e a equação de Volterra. Fizemos também uma breve discussão sobre *melhor aproximação* em espaço normado e espaços de Hilbert, mostrando critérios para existência e unicidade para tais aproximações e aplicações desses resultados.

Finalmente, no quarto capítulo, apresentamos as considerações finais a respeito deste trabalho.

A escolha desta área e especificamente deste tema, teve como objetivo, acrescentar na formação acadêmica e promover um aprofundamento dos conceitos matemáticos aprendidos nas disciplinas estudadas durante o programa de mestrado, onde a Análise Funcional teve um papel fundamental nesse sentido, pois engloba amplas áreas da Matemática tais como a Análise Clássica, Álgebra Linear, Espaço Métrico e Equações Diferenciais, onde pudemos rever e aprofundar nossos conhecimentos nesses temas. Além de ser uma disciplina não ofertada no rol de disciplinas do programa, ampliando um pouco mais nossa formação.

O texto é destinado aos leitores que nunca tiveram contato com essa disciplina, onde procuramos contribuir exemplificando de forma simples, graficamente¹ em alguns casos, os principais conceitos estudados, bem como detalhar as demonstrações da maioria dos resultados que envolvem espaços vetoriais de dimensão infinita.

Em alguns casos, deixamos apenas a referência onde poderá ser encontrada uma demonstração desses resultados, pois em nossa concepção, não teria conseqüências significativas na organização das ideias e roteiro do texto, instigando assim o leitor a se interessar pelo tema proposto, visitando as referências, na perspectiva de se aprofundar nesta área extremamente bela e importante da Matemática, pelas suas aplicações como já mencionamos.

Outros problemas podem ser estudados a partir deste tema proposto bem como

¹As figuras foram confeccionadas pelo autor utilizando o software CorelDRAW.

a existência e unicidade de solução de Equações Diferenciais de Ordem Superior e suas aplicações, existência e unicidade de Equações Diferenciais Parciais e aplicações e também Aproximação de funções pelo método dos Mínimos Quadrados em L^2 e aplicações.

2 Espaço de Banach e espaço de Hilbert

O objetivo deste capítulo é apresentar os principais conceitos e propriedades da Análise Funcional sobre espaços de Banach e espaços de Hilbert. Iniciaremos com as propriedades básicas de Espaços Métricos, motivando a definir norma e espaços normados e conseqüentemente, espaço com produto interno e espaço de Hilbert.

Esses conceitos nos darão o embasamento necessário para as aplicações sobre existência e unicidade para pontos fixos de determinados operadores lineares e existência e unicidade de melhores aproximações de funções.

Ressaltamos que para uma melhor compreensão dos temas tratados aqui, faz-se necessário ter conhecimento básicos sobre Espaços Métricos e Álgebra Linear tais como, espaços vetoriais, base, dimensão, transformações lineares e espaço com produto interno. Para maiores investigações sobre esses assuntos consulte as referências [3], [4], [5] e [6].

2.1 Espaços Métricos

Nesta seção, citaremos definições e resultados sobre espaços métricos que serão utilizados para a compreensão do texto.

Definição 2.1. *Uma métrica no conjunto X é toda função $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in X$ um número real $d(x, y)$, chamado de distância de x a y , de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in X$:*

$$M1) d(x, x) = 0;$$

$$M2) \text{ Se } x \neq y \text{ então } d(x, y) > 0; \text{ (positividade)}$$

$$M3) d(x, y) = d(y, x); \text{ (simétrica)}$$

$$M4) d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y). \text{ (desigualdade do triângulo)}$$

Exemplo 2.2. O conjunto dos números reais com a métrica $d(x, y) = |x - y|$ é um espaço métrico. De fato, vamos analisar M1 à M4.

M1) $d(x, x) = 0$;

Note que para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$d(x, x) = |x - x| = 0.$$

M2) Se $x \neq y$ então $d(x, y) > 0$;

$$d(x, y) = |x - y| > 0,$$

para todo $x \neq y$ e $x, y \in \mathbb{R}$.

M3) $d(x, y) = d(y, x)$;

Temos que

$$d(x, y) = |x - y| = |-(y - x)| = |y - x| = d(y, x),$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

M4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

$$d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y),$$

para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$. Portanto, \mathbb{R} é um espaço métrico.

Exemplo 2.3. O conjunto X de todas as funções contínuas com valores reais sobre um intervalo fechado $I = [a, b]$, com a métrica definida por

$$d(x, y) = \max_{t \in I} |x(t) - y(t)|$$

é um espaço métrico denotado por $X = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

A métrica está bem definida pois I é compacto e $f(t) = |x(t) - y(t)|$ é contínua.

Definição 2.4. Seja a um ponto no espaço métrico X . Dado um número real $r > 0$, uma bola aberta de centro a e raio r é o conjunto $B(a; r)$ formado pelos pontos de X cuja a distância ao ponto a é menor que r . Ou seja,

$$B(a; r) = \{x \in X : d(x, a) < r\}.$$

Uma bola aberta $B(x_0; \varepsilon)$ de raio ε é uma ε -vizinhança de x_0 .

Definição 2.5. Seja a um ponto no espaço métrico X . Dado um número real $r > 0$. Uma bola fechada de centro a e raio r é o conjunto $B[a; r]$ formado pelos pontos de X , cuja a distância ao ponto a é menor ou igual a r . Ou seja,

$$B[a; r] = \{x \in X : d(x, a) \leq r\}.$$

Definição 2.6. *Seja X um subconjunto de um espaço métrico M . Diz-se que um ponto $a \in X$ é interior a X quando é centro de uma bola aberta contida em X , ou seja, quando existe $r > 0$ tal que*

$$d(x, a) < r \Rightarrow x \in X.$$

Definição 2.7. *Seja X um subconjunto de um espaço métrico M . Chama-se o interior de X em M ao conjunto $\text{int } X$ formado pelos pontos interiores a X .*

Definição 2.8. *Um subconjunto X de um espaço métrico M diz-se aberto em M quando todos os seus pontos são interiores, isto é, $\text{int } X = X$.*

Definição 2.9. *Um ponto a diz-se aderente a um subconjunto X de um espaço métrico M quando $d(a, X) = 0$, ou seja, para cada $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $x \in X$ tal que $d(a, x) < \varepsilon$.*

Exemplo 2.10. *Se $X = [0, 1)$ na reta \mathbb{R} então 1 é aderente a X .*

Definição 2.11. *O fecho (ou aderência) de um conjunto X num espaço métrico M é o conjunto \overline{X} dos pontos de M que são aderentes a X .*

Exemplo 2.12. *Seja $X = (0, 4)$. O fecho de X em \mathbb{R} é indicado por $\overline{X} = [0, 4]$.*

Definição 2.13. *Diz-se que um conjunto $F \subset M$ é fechado no espaço métrico M quando seu complementar $M - F$ é aberto em M .*

Definição 2.14. *Seja X um subconjunto do espaço métrico M . Um ponto $a \in M$ chama-se ponto de acumulação de X quando toda bola de centro a contém algum ponto de X , diferente do ponto a .*

Definição 2.15. *Um subconjunto X de um espaço métrico M chama-se limitado quando existe uma constante $c > 0$ tal que $d(x, y) \leq c$ para quaisquer $x, y \in X$.*

Definição 2.16. *Uma aplicação $f : X \rightarrow M$, definida num conjunto arbitrário X e tomando os valores num espaço métrico M , chama-se limitada quando sua imagem $f(X)$ é um subconjunto limitado de M .*

Exemplo 2.17. *A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 1/(1 + x^2)$, é limitada porque $f(\mathbb{R}) = (0, 1]$. Por outro lado, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $g(x) = x^2$, não é limitada pois $g(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$.*

Definição 2.18. *Sejam (X, d) e (Y, \bar{d}) espaços métricos. Uma aplicação $T : X \rightarrow Y$ é contínua no ponto x_0 , se para cada $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que, para todo x satisfazendo $d(x, x_0) < \delta$ então $\bar{d}(T(x), T(x_0)) < \varepsilon$. T é contínua se for contínua em todo ponto de X .*

Essa definição e os conceitos apresentados anteriormente nos motivam ao seguinte teorema.

Teorema 2.19. *Uma aplicação T de um espaço métrico X em um espaço métrico Y é contínua se, e somente se, a imagem inversa de qualquer subconjunto aberto de Y é um subconjunto aberto de X .*

Demonstração. Suponha que T seja contínua. Seja $Y_0 \subset Y$ um conjunto aberto e seja $X_0 = T^{-1}(Y_0)$. Se $X_0 = \emptyset$ este é aberto. Suponha que $X_0 \neq \emptyset$, então para cada $x_0 \in X_0$, tomemos $y_0 = T(x_0)$. Como Y_0 é aberto, existe uma bola aberta $B(y_0; \varepsilon) \subset Y_0$. Como T é contínua em x_0 então existe uma bola aberta $B(x_0; \delta)$ tal que

$$T(B(x_0; \delta)) \subset B(y_0; \varepsilon) \subset Y_0.$$

Logo $B(x_0; \delta) \subset X_0$, portanto, X_0 é aberto.

Reciprocamente, considere $x_0 \in X$ arbitrário e tome qualquer bola aberta $B(Tx_0; \varepsilon)$. Por hipótese, $T^{-1}(B(Tx_0; \varepsilon))$ é um aberto em X que contém x_0 . Assim, $T^{-1}(B(Tx_0; \varepsilon))$ contém uma bola aberta $B(x_0; \delta) \subset T^{-1}(B(Tx_0; \varepsilon))$. Portanto,

$$T(B(x_0; \delta)) \subset T^{-1}(T(x_0); \varepsilon) \subset B(Tx_0; \varepsilon),$$

o que implica T contínua em x_0 . □

Definição 2.20. *Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, em um espaço métrico $X = (X, d)$ é convergente se existe um $x \in X$ tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0,$$

x é chamado de limite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e escrevemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

Lema 2.21. *Seja $X = (X, d)$ um espaço métrico. Então*

a) *Uma sequência convergente em X é limitada e seu limite é único.*

b) *Se $x_n \rightarrow x$ e $y_n \rightarrow y$ em X , então $d(x_n, y_n) \rightarrow d(x, y)$.*

Demonstração. a) Suponha que $x_n \rightarrow x$. Tomando um $\varepsilon = 1$, podemos encontrar um N tal que $d(x_n, x) < 1$ para todo $n > N$. Temos que para todo n , $d(x_n, x) < 1 + a$, onde

$$a = \max\{d(x_1, x), \dots, d(x_N, x)\}.$$

Isto mostra que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada.

Assumindo que $x_n \rightarrow x$ e $x_n \rightarrow z$, obtemos da desigualdade triangular M4) que

$$0 \leq d(x, z) \leq d(x, x_n) + d(x_n, z) \rightarrow 0 + 0,$$

e a unicidade do limite, $x = z$ segue de $M2$).

b) Generalizando a desigualdade triangular $M4$), temos que

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n).$$

Obtemos assim que

$$d(x_n, y_n) - d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(y_n, y)$$

e

$$-d(x_n, y_n) + d(x, y) \geq -[d(x_n, x) + d(y_n, y)].$$

Logo,

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leq d(x_n, x) + d(y_n, y) \rightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow \infty$. O que conclui a demonstração. \square

Definição 2.22. Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, em um espaço métrico (X, d) é de Cauchy, se para todo $\varepsilon > 0$ existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que para $m, n > N$, $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Exemplo 2.23. A sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em \mathbb{R} , definida por $x_n = \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, é uma sequência de Cauchy. Com efeito, dado $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, podemos encontrar um $N \in \mathbb{N}$ com $N > \frac{2}{\varepsilon}$. Então, para todos $m, n > N \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon$. De fato,

$$|x_m - x_n| = \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right| \leq \left| \frac{1}{m} \right| + \left| -\frac{1}{n} \right| = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}.$$

Como $n, m > N \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{N}$ e $\frac{1}{m} < \frac{1}{N}$. Assim

$$|x_m - x_n| \leq \frac{1}{N} + \frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

portanto, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy.

Teorema 2.24. Seja M um subconjunto não vazio de um espaço métrico (X, d) e \overline{M} seu fecho. Então:

(a) $x \in \overline{M}$ se, e só se, existe uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em M tal que $x_n \rightarrow x$.

(b) M é fechado se, e somente se, $x_n \in M$, com $x_n \rightarrow x$ implica que $x \in M$.

Demonstração. (a) Suponha que $x \in \overline{M}$. Se $x \in M$, então a sequência será do tipo $x_n = x$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Se x não pertence M , x é ponto de acumulação de M . Assim, para cada $n = 1, 2, 3, \dots$ a bola $B(x, 1/n)$ contém $x_n \in M$ e $x_n \rightarrow x$, porque $1/n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Reciprocamente, se $x_n \in M$ e $x_n \rightarrow x$, então $x \in M$ ou toda vizinhança de x contém pontos $x_n \neq x$, o que implica x ser um ponto de acumulação de M . Portanto, $x \in \overline{M}$, pela definição de fecho.

(b) M é fechado se, e somente se, $M = \overline{M}$, assim (b) segue de (a). \square

Definição 2.25. Um espaço métrico X é completo, se toda sequência de Cauchy em X converge (isto é, tem um limite em X).

Essa definição nos motiva ao seguinte teorema.

Teorema 2.26. Toda sequência convergente em um espaço métrico é uma sequência de Cauchy.

Demonstração. Se $x_n \rightarrow x$, então para cada $\varepsilon > 0$ existe um $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, tal que $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall n > N$. Logo pela desigualdade triangular obtemos

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ para } m, n > N.$$

□

Exemplo 2.27. Seja $X = P([0, 1])$ o conjunto dos polinômios com a métrica definida por $d(x, y) = \max_{t \in I} |x(t) - y(t)|$. Este espaço não é completo. De fato, tomemos a sequência

$$P_n(t) = t^{n-1}.$$

Temos que, $P_n(t)$ é de Cauchy, pois

$$\begin{aligned} |P_n(t) - P_m(t)| &= |t^{n-1} - t^{m-1}| \\ &= \left| \frac{t^n}{t} - \frac{t^m}{t} \right| \\ &= \left| \frac{t^n - t^m}{t} \right| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $m, n \rightarrow \infty$ e $t \in (0, 1]$.

Note que $P_n(t) \rightarrow f(t)$, quando $n \rightarrow \infty$, onde

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \in [0, 1) \\ 1, & \text{se } t = 1 \end{cases}$$

que não é um polinômio.

Teorema 2.28. Um subespaço M de um espaço métrico completo X é completo se, e somente se, o conjunto M é fechado em X .

Demonstração. Suponha que M seja completo. Pelo Teorema 2.24 (a), para cada $x \in \overline{M}$, existe uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, em M tal que $x_n \rightarrow x$. Visto que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy pelo Teorema 2.26 e M é completo, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge em M e o limite é único pelo Lema 2.21. Portanto, $x \in M$. Logo M é fechado em X .

Reciprocamente, seja M fechado e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em M . Então $x_n \rightarrow x \in X$, pois X é completo. Logo $x \in \overline{M}$ pelo Teorema 2.24 (a) e $x \in M$, visto que $M = \overline{M}$, por hipótese. Logo qualquer sequência de Cauchy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, converge em M e portanto, M é completo. □

Teorema 2.29. *Uma aplicação $T : X \rightarrow Y$ de um espaço métrico (X, d) para um espaço métrico (Y, \tilde{d}) é contínua em um ponto $x_0 \in X$ se, e somente se, para qualquer sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x_n \rightarrow x_0$ implica $Tx_n \rightarrow Tx_0$.*

Demonstração. Assuma que T seja contínua em x_0 , então dado $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que $d(x, x_0) < \delta$ implica $\tilde{d}(Tx, Tx_0) < \varepsilon$. Se $x_n \rightarrow x_0$, então existe um N tal que para todo $n < N$ temos $d(x_n, x_0) < \delta$, logo para todo $n > N$ temos $\tilde{d}(Tx_n, Tx_0) < \varepsilon$.

Reciprocamente, suponha que seja falsa. Então existe um $\varepsilon > 0$ tal que para cada $\delta > 0$ existe um $x \neq x_0$ satisfazendo $d(x, x_0) < 1/n$, porém $\tilde{d}(Tx, Tx_0) \geq \varepsilon$. Em particular para $\delta = 1/n$, existe um x_n satisfazendo $d(x_n, x_0) < 1/n$ porém $\tilde{d}(Tx_n, Tx_0) \geq \varepsilon$. É claro que $x_n \rightarrow x_0$ porém $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não converge para Tx_0 , o que contradiz $Tx_n \rightarrow Tx_0$, o que prova o teorema. \square

Definição 2.30. *Um espaço métrico M chama-se compacto quando toda cobertura¹ aberta possui uma subcobertura finita.*

Os conjuntos compactos são muito importantes em nosso estudo, pois são bem comportados. Em conexão com aplicações contínuas, uma propriedade fundamental é que conjuntos compactos, possuem imagens compactas.

Definição 2.31. *Um espaço métrico X é compacto, se toda sequência em X tem uma subsequência convergente.*

Lema 2.32. *Um subconjunto compacto M de um espaço métrico X é fechado e limitado.*

Demonstração. Para todo $x \in \overline{M}$ existe uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em M tal que $x_n \rightarrow x$ pelo Teorema 2.24 a). Como M é compacto, $x \in M$, o que mostra que M é fechado.

Se M não for limitado, M teria uma sequência não limitada $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $d(y_n, b) > n$, onde b é qualquer elemento fixo. Esta sequência não teria uma subsequência convergente, já que uma subsequência convergente deve ser limitada pelo Lema 2.21, o que mostra que M não é compacto, uma contradição. O que conclui a demonstração. \square

Em espaços vetoriais de dimensão infinita, não é verdade que todo conjunto fechado e limitado é compacto. Veja ([6], página 77).

Teorema 2.33. *Sejam X e Y espaços métricos e $T : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua. Então a imagem $T(M)$ de um subconjunto compacto $M \subset X$ é compacta.*

Demonstração. Pela definição 2.31 é suficiente mostrar que cada sequência $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ na imagem $T(M) \subset Y$ contém uma subsequência que converge em $T(M)$. Como $y_n \in T(M)$, temos que $Tx_n = y_n$ para algum $x_n \in M$. Como M é compacto, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contém uma subsequência convergente $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ que converge em M . A imagem de (x_{n_k}) é uma subsequência de $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge em $T(M)$ pelo Teorema 2.29. Portanto, $T(M)$ é compacto. \square

¹Para maiores detalhes ver ([5], página 232).

Corolário 2.34. *Uma aplicação contínua T de um subconjunto compacto M de um espaço métrico X em \mathbb{R} assume um máximo e um mínimo em algum ponto de M .*

Demonstração. O conjunto $T(M) \subset \mathbb{R}$ é compacto pelo Teorema 2.33 e, portanto, é fechado e limitado pelo Lema 2.32, assim $\inf T(M)^2 \in T(M)$ e $\sup T(M)^3 \in T(M)$ e a imagem inversa desses dois pontos, consiste de pontos de M em que Tx é mínima ou máxima, respectivamente. \square

2.2 Normas e espaços normados

Em muitos exemplos, podemos verificar que um espaço vetorial X pode também ser um espaço métrico, desde que consigamos definir uma norma ou um produto interno sobre ele. Contudo, se não há relação entre a estrutura algébrica de espaço vetorial e a topológica de espaço métrico, não podemos avançar muito em termos de aplicações desta teoria, na qual combine conceitos algébricos e métricos. Para garantir tal relação entre essas propriedades sobre X , definimos norma, indicado por $\|x\|$ para todo $x \in X$. Esta prerrogativa nos leva ao conceito de espaço normado $(X, \|\cdot\|)$.

Definição 2.35. *Seja X um espaço vetorial sobre o corpo \mathbb{K} , real ou complexo. Uma norma em X é uma aplicação $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

$$N1) \|x\| > 0 \text{ se } x \neq 0. \text{ E vale } \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

$$N2) \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \alpha \in \mathbb{K} \text{ e } x \in X;$$

$$N3) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, x, y \in X.$$

Definição 2.36. *Um espaço normado X é um espaço vetorial com uma norma definida sobre ele. E podemos definir a métrica $d(x, y) = \|x - y\|$, em X .*

Exemplo 2.37. *O espaço $X = \mathbb{R}^n$, com a norma*

$$\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2} = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

é um espaço normado. A norma $\|\cdot\|$ é chamada de norma canônica do \mathbb{R}^n .

Exemplo 2.38. *Outro espaço importante é o espaço $X = \ell^\infty$ das seqüências limitadas de números complexos. Cada elemento de X é uma seqüência complexa $x = (x_1, x_2, \dots)$,*

²O ínfimo de um conjunto limitado $A \subseteq \mathbb{R}$, denotado por $\inf A$ é a maior das cotas inferiores de A .

³O supremo de um conjunto limitado $A \subseteq \mathbb{R}$, denotado por $\sup A$ é a menor das cotas superiores de A .

$x = (x_j)$ tal que para todo $j = 1, 2, \dots$ temos

$$|x_j| \leq c_x$$

onde c_x é um número real que depende de x , mas não de j . Definimos a norma

$$\|x\| = \sup_j |x_j|,$$

logo ℓ^∞ é um espaço normado.

Definição 2.39. Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em um espaço normado X é convergente se existir um $x \in X$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Escrevemos $x_n \rightarrow x$ e chamamos x de limite da sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Definição 2.40. Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, em um espaço normado X é de Cauchy se para todo $\epsilon > 0$ existir um $N \in \mathbb{N}$ tal que para todos $m, n > N$ tem-se $\|x_m - x_n\| < \epsilon$.

Definição 2.41. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em um espaço normado X , definimos uma sequência $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de somas parciais, por

$$S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n,$$

onde $n = 1, 2, \dots$. Se $S_n \rightarrow s$, isto é, $\|S_n - s\| \rightarrow 0$, dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é

convergente. Caso contrário, dizemos que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é divergente.

Definição 2.42. Todo espaço vetorial normado completo é denominado espaço de Banach.

Exemplo 2.43. Dado o espaço $X = l_p$ com $1 \leq p < \infty$, de todas as sequências $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tais que, $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty$, com norma

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

é um espaço de Banach.

De fato, inicialmente devemos mostrar que l_p com $\|\cdot\|_p$ é normado. Vamos analisar (N1) à (N3).

$$(N1) \quad \|x\| \geq 0.$$

Note que para todo $x = (x_1, x_2, \dots)$ em l_p ,

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq 0$$

e $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. De fato, $\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0 \Leftrightarrow |x_j|^p = 0, \forall j = 1, 2, 3, \dots$
 $x_j = 0, \forall j \Leftrightarrow x = 0$.

(N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \alpha \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$.

$$\|\alpha x\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha|^p |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \|x\|.$$

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

$\|x + y\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j + y_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|x\| + \|y\|$, pela Desigualdade de Minkowski⁴. Portanto, o espaço l_p é normado.

Agora vamos mostrar que l_p é completo.

Seja $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy no espaço l_p , onde $x_m = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots)$. Então, dado $\epsilon > 0$, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todos $m, n > N$,

$$\|x_m - x_n\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j^m - x_j^n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon. \quad (2.1)$$

Segue que para cada $j = 1, 2, \dots$, temos

$$|x_j^m - x_j^n| < \epsilon, \quad m, n > N. \quad (2.2)$$

Escolhemos um j fixado. De (2.2) vemos que $(x_j^1, x_j^2, x_j^3, \dots)$ é uma sequência de Cauchy de números que converge, já que \mathbb{R} \mathbb{C} é completo, ou seja, $x_j^m \rightarrow x_j$ quando $m \rightarrow \infty$.

Usando esses limites, definimos $x = (x_1, x_2, \dots)$ e mostremos que $x \in l_p$ e $x_m \rightarrow x$. De (2.1) para todos $m, n > N$

$$\sum_{j=1}^k |x_j^m - x_j^n|^p < \epsilon^p,$$

⁴A desigualdade para somas finitas foi dada por H. Minkowski (1.896) que é estendida para séries e para integrais, veja [2]. Esta desigualdade é importante e apresenta ser uma ferramenta indispensável em várias teorias e problemas práticos e sua prova pode ser encontrada em [1].

para $k = 1, 2, \dots$.

Fazendo $n \rightarrow \infty$, obtemos para $m > N$,

$$\sum_{j=1}^k |x_j^m - x_j|^p \leq \epsilon^p,$$

$k = 1, 2, \dots$.

Podemos agora fazer $k \rightarrow \infty$, então para $m > N$;

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j^m - x_j|^p \leq \epsilon^p. \quad (2.3)$$

Isso mostra que

$$x_m - x = (x_j^m - x_j) \in l_p.$$

Como $x_m \in l_p$, então,

$$x = x_m + (x - x_m) \in l_p.$$

Além disso, a série em (2.3) representa $\|x_m - x\|^p$, assim (2.3) implica que $x_m \rightarrow x$. Como $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy arbitrária em l_p isto prova a completude de l_p , onde $1 \leq p < \infty$.

Exemplo 2.44. O espaço $X = \ell^\infty$ de todas as sequências limitadas de números complexos é um espaço de Banach.

Exemplo 2.45. O conjunto $X = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ de todas as funções contínuas de valores reais sobre $I = [0, 1]$ com norma $\|f\| = \int_0^1 |f(t)| dt$, não é um espaço de Banach, pois não é completo.

De fato, considere a sequência de funções definidas por

$$f_m(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \in [0, 1/2], \\ m(t - 1/2), & \text{se } t \in (1/2, a_m] \\ 1, & \text{se } t \in (a_m, 1] \end{cases}$$

onde $a_m = \frac{1}{2} + \frac{1}{m}$. Veja a Figura 2.1.

A sequência $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy, pois

$$\|f_m - f_n\| = \int_0^1 |f_m(t) - f_n(t)| dt = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right),$$

que é a área do triângulo compreendida entre a base $\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right)$ e altura 1, veja Figura 2.2. Como,

$$\|f_m - f_n\| \rightarrow 0$$

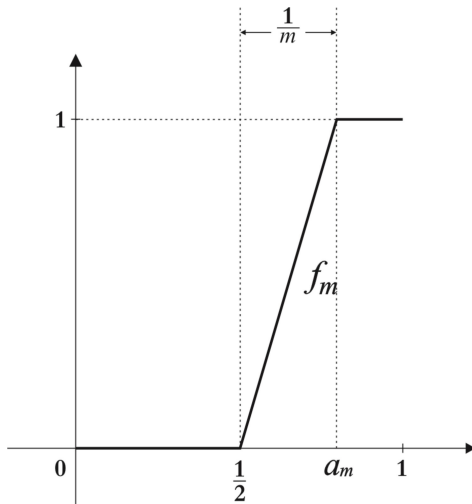


Figura 2.1: Gráfico de f_m . Fonte: Adaptado de Kreyszig (1978, p. 38).

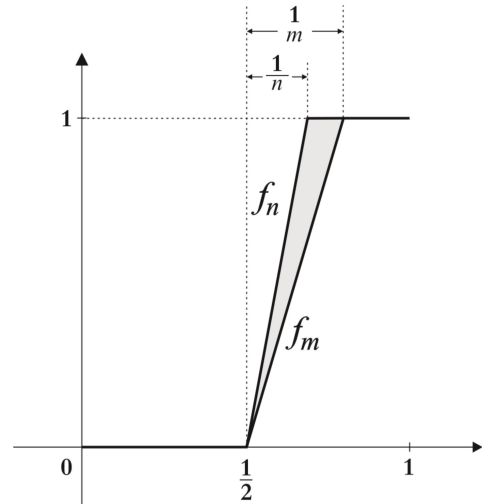


Figura 2.2: Gráfico de f_m e f_n . Fonte: Adaptado de Kreyszig (1978, p. 38).

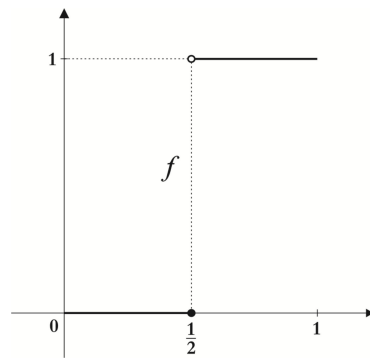


Figura 2.3: Gráfico de f . Fonte: Próprio autor.

quando $n, m \rightarrow \infty$. Segue que é de Cauchy.

Note que $f_m(t) \rightarrow f(t)$, onde

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \in [0, 1/2], \\ 1, & \text{se } t \in (1/2, 1] \end{cases}$$

Pois $\|f_m - f\| = \int_0^1 |f_m(t) - f(t)| dt = \frac{1}{2m} \rightarrow 0$, quando $m \rightarrow \infty$. Como f é descontínua, segue que $f \notin X = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. O que mostra que X não é completo com a norma $\|f\|$.

No entanto, o espaço $X = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ é completo com a norma definida por

$$\|x\| = \max_{t \in [a, b]} |x(t)|.$$

De fato, seja $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ qualquer sequência de Cauchy em X . Então, dado $\varepsilon > 0$, existe um N tal que para todo $m, n > N$ temos

$$\|x_m - x_n\| = \max_{t \in [a, b]} |x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon. \quad (2.4)$$

Para qualquer $t = t_0 \in [a, b]$ fixo,

$$|x_m(t_0) - x_n(t_0)| < \varepsilon, \quad m, n > N.$$

Isso mostra que a sequência $(x_m(t_0))_{m \in \mathbb{N}}$, de números reais é de Cauchy. Como \mathbb{R} é completo, a sequência converge em \mathbb{R} , ou seja,

$$x_m(t_0) \rightarrow x(t_0),$$

quando $m \rightarrow \infty$. Desta forma, podemos associar a cada $t \in [a, b]$ um número real $x(t)$, o que define uma função x em $[a, b]$. Agora, mostremos que $x \in C[a, b]$ e $x_m(t) \rightarrow x(t)$.

De (2.4), fazendo $m \rightarrow \infty$ temos,

$$|x_m(t) - x(t)| \leq \varepsilon, \quad \forall m > N,$$

o que mostra que $x_m \rightarrow x$, quando $m \rightarrow \infty$, logo $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ é completo. A continuidade de x segue do fato da convergência ser uniforme.

2.3 Topologia dos espaços normados

O estudo dos espaços de funções, realizado por matemáticos como Georg Cantor, Vito Volterra, Cesare Arzelà, Jacques Hadamard, entre outros, culminam com o trabalho de Maurice Fréchet, que introduziu a noção de espaço métrico e muitas de suas características, veja [1].

Atualmente os espaços métricos são considerados casos específicos, mas muito importantes, de uma classe mais geral conhecida como espaços topológicos. Neste contexto, a topologia dos espaços normados discute as propriedades e características que possuem os espaços vetoriais normados de dimensão finita e quais resultados se mantêm no caso dos espaços vetoriais normados de dimensão infinita.

Definição 2.46. *Todo subconjunto de um espaço normado X é denominado um subespaço normado.*

Teorema 2.47. *Um subespaço Y de um espaço de Banach X é completo se, e somente se, o conjunto Y é fechado em X .*

Demonstração. Suponha que Y seja completo, então para cada $x \in \overline{Y}$ (onde \overline{Y} indica o fecho de Y), existe uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em Y que converge para $x \in X$. Visto que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é Cauchy e Y é completo, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge em Y , pela unicidade do limite $x \in Y$.

Reciprocamente, seja Y fechado e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em Y . Então $x_n \rightarrow x \in X$, que implica $x \in \overline{Y}$ e assim $x \in Y$, pois $Y = \overline{Y}$ por hipótese. Logo a sequência de Cauchy arbitrária converge em Y , o que prova a completude de Y . \square

Lema 2.48. *Seja $\{x_1, \dots, x_n\}$ um conjunto linearmente independente de vetores em um espaço normado X (de qualquer dimensão). Então existe um número $c \geq 0$ tal que para toda escolha de escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, temos:*

$$\|\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n\| = \left\| \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \right\| \geq c(|\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|) = c \left(\sum_{j=1}^n |\alpha_j| \right).$$

A prova deste resultado pode ser encontrada em [6].

Teorema 2.49. *Todo subespaço Y de dimensão finita de um espaço normado X é completo. Em particular, todo espaço normado de dimensão finita é completo.*

Demonstração. Consideremos uma sequência de Cauchy arbitrária $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ em Y , mostremos que esta é convergente em Y .

Sejam $\dim Y = n$ e $\{e_1, \dots, e_n\}$ qualquer base de Y . Então cada y_m tem uma única representação da forma

$$y_m = \alpha_1^{(m)} e_1 + \dots + \alpha_n^{(m)} e_n,$$

onde $\alpha_j^{(m)}$ são escalares, $j \in \{1, \dots, n\}$ e $m \in \mathbb{N}$.

Como $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy, para todo $\epsilon > 0$ existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que para todos $m, r > N$ tem-se $\|y_m - y_r\| < \epsilon$. Pelo Teorema 2.48 para algum $c > 0$,

$$\epsilon > \|y_m - y_r\| = \left\| \sum_{j=1}^n (\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}) e_j \right\| \geq c \sum_{j=1}^n |\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}|,$$

com $m, r > N$.

Dividindo por $c > 0$,

$$|\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}| \leq \sum_{j=1}^n |\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}| < \frac{\epsilon}{c}, \quad m, r > N.$$

Isso mostra que cada uma das n sequências

$$(\alpha_j^{(m)}) = (\alpha_j^{(1)}, \alpha_j^{(2)}, \dots), \quad j = 1, \dots, n$$

é de Cauchy em \mathbb{R} ou \mathbb{C} , portanto convergente.

Vamos denotar α_j o limite. Usando esses n limites $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, definimos

$$y = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n.$$

Claramente, $y \in Y$. Além disso,

$$\|y_m - y\| = \left\| \sum_{j=1}^n (\alpha_j^{(m)} - \alpha_j) e_j \right\| \leq \sum_{j=1}^n |\alpha_j^{(m)} - \alpha_j| \|e_j\|.$$

Como $\alpha_j^{(m)} \rightarrow \alpha_j$, $\|y_m - y\| \rightarrow 0$, segue que $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ é convergente em Y . \square

Definição 2.50. Uma norma $\|\cdot\|$ sobre um espaço X é equivalente a uma norma $\|\cdot\|_0$ sobre X se existem números reais positivos a e b tais que para todo $x \in X$ vale

$$a\|x\|_0 \leq \|x\| \leq b\|x\|_0. \quad (2.5)$$

Teorema 2.51. Todas as normas são equivalentes em um espaço vetorial de dimensão finita X .

Demonstração. Sejam $\dim X = n$, $\{e_1, \dots, e_n\}$ qualquer base de X e $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_0$ duas normas em X . Então cada $x \in X$ tem uma única representação

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n.$$

Pelo Lema 2.48 existe uma constante c tal que

$$\|x\| \geq c(|\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|) = c \sum_{j=1}^n |\alpha_j|.$$

Por outro lado, a desigualdade triangular afirma que

$$\|x\|_0 \leq \sum_{j=1}^n |\alpha_j| \cdot \|e_j\|_0 \leq k \cdot \sum_{j=1}^n |\alpha_j|,$$

onde $k = \max\{\|e_j\|_0\}$. Logo, $a\|x\|_0 \leq \|x\|$ onde $a = \frac{c}{k} > 0$. A outra desigualdade de (2.5) é agora obtida pela troca de $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_0$ no mesmo argumento, ou seja, existe uma constante c tal que

$$\|x\|_0 \geq c(|\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|) = c \sum_{j=1}^n |\alpha_j|.$$

Por outro lado, a desigualdade triangular mostra que

$$\|x\| \leq \sum_{j=1}^n |\alpha_j| \cdot \|e_j\| \leq \bar{k} \cdot \sum_{j=1}^n |\alpha_j|,$$

onde $\bar{k} = \max\{\|e_j\|\}$ que juntos mostram que, $\|x\| \leq b\|x\|_0$ onde $b = \frac{\bar{k}}{c} > 0$. E a prova está completa. \square

Exemplo 2.52. Sejam $I = [0, 1]$ e os espaços $X_0 = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ com a norma $\|x\|_0 = \sup_j |x_j|$ e $X_1 = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ com a norma $\|x\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$.

Provemos que a identidade $i : X_1 \rightarrow X_0$ é descontínua. De fato, seja a sequência $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ como mostrado na Figura 2.4.

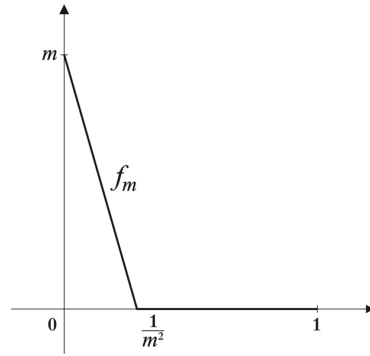


Figura 2.4: Gráfico de f_m . Fonte: Adaptado de Barreto (1971, p. 168).

Assim,

$$\|f_m - 0\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{m^2}\right) \cdot m = \frac{1}{2m} \rightarrow 0,$$

quando $m \rightarrow \infty$, o que mostra que $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ tem como limite a função nula em X_1 . No entanto $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ não tem limite em X_0 , pois

$$\|f_m - 0\|_0 = \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j| = m \rightarrow \infty.$$

O que mostra que $\|\cdot\|_0$ e $\|\cdot\|_1$ não são equivalentes.

Para um espaço normado de dimensão finita, temos o seguinte teorema.

Teorema 2.53. *Em um espaço normado de dimensão finita X , qualquer subconjunto $M \subset X$ é compacto se, e somente se, M é limitado e fechado.*

Demonstração. Pelo Lema 2.32 mostramos que um subconjunto compacto M de um espaço métrico X é fechado e limitado.

Reciprocamente, suponha M limitado e fechado. Seja $\dim X = n$ e $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base de X . Consideremos qualquer sequência $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ em M . Cada x_m possui uma representação $x_m = x_1^m \cdot e_1 + \dots + x_n^m \cdot e_n$. Como M é limitado $\|x_m\| \leq k$ para todo m . Pelo Teorema 2.48,

$$k \geq \|x_m\| = \left\| \sum_{j=1}^n x_j \cdot e_j \right\| \geq c \sum_{j=1}^n |x_j^m|,$$

onde $c > 0$, que implica

$$\sum_{j=1}^n |x_j^m| \leq \frac{k}{c}.$$

Logo, a sequência de números (x_j^m) com j fixo é limitado e pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass (ver [5], página 25), existe um ponto de acumulação $x_j, 1 \leq j \leq n$. Concluímos que $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência $(z_m)_{m \in \mathbb{N}}$ que converge para $z = \sum_{j=1}^n |x_j|$ e como M é fechado, $z \in M$. O que conclui a demonstração. \square

Observação. Para espaços vetoriais de dimensão infinita temos que todo conjunto compacto é limitado e fechado, mas a recíproca não é verdadeira como veremos a seguir.

Teorema 2.54 (Lema de Riesz). *Sejam Y e Z subespaços de um espaço normado X (qualquer dimensão) e suponha que Y é fechado e é um subconjunto próprio de Z . Então para todo número θ no intervalo $(0, 1)$ existe um $z \in Z$ tal que $\|z\| = 1$ e $\|z - y\| \geq \theta$ para todo $y \in Y$.*

Demonstração. Consideremos qualquer $v \in Z - Y$ e denotemos a distância de v à Y por a , isto é,

$$a = \inf_{y \in Y} \|v - y\|.$$

Notemos que $a > 0$ já que Y é fechado. Seja $\theta \in (0, 1)$. Pela definição de ínfimo, existe um $y_0 \in Y$ tal que

$$a \leq \|v - y_0\| \leq \frac{a}{\theta}.$$

Notemos que $a/\theta > a$ já que $0 < \theta < 1$.

Se $z = c(v - y_0)$ onde $c = \frac{1}{\|v - y_0\|}$, então $\|z\| = 1$. Mostremos que $\|z - y\| \geq \theta$ para todo $y \in Y$. De fato,

$$\|z - y\| = \|c(v - y_0) - y\| = c\|v - y_0 - c^{-1}y\| = c\|v - y_1\|,$$

onde $y_1 = y_0 + c^{-1}y \in Y$.

Consequentemente $\|v - y_1\| \geq a$, pela definição de a . Escrevemos então,

$$\|z - y\| = c\|v - y_1\| \geq c \cdot a = \frac{a}{\|v - y_0\|} \geq \frac{a}{a/\theta} = \theta.$$

Como $y \in Y$ é arbitrário, a demonstração está completa. \square

Teorema 2.55 (Dimensão finita). *Se um espaço normado X possui a propriedade que a bola unitária fechada $M = \{x : \|x\| \leq 1\}$ é compacta, então X é de dimensão finita.*

Demonstração. Suponhamos que M seja compacta mas a $\dim X = \infty$. Mostraremos que isso conduz a uma contradição. De fato, seja x_1 de norma 1. Este x_1 gera um subespaço unidimensional X_1 de X , que é fechado e é um subespaço próprio de X unitário, já que $\dim X$ é infinita por hipótese. Pelo Lema de Riesz, existe um $x_2 \in X$ de norma 1 tal que

$$\|x_2 - x_1\| \geq \theta = 1/2.$$

Os elementos x_1 e x_2 geram um subespaço X_2 próprio fechado bidimensional de X . Pelo Lema de Riesz, existe um x_3 de norma 1 tal que para todo $x \in X_2$, temos

$$\|x_3 - x\| \geq 1/2,$$

em particular

$$\|x_3 - x_1\| \geq 1/2$$

e

$$\|x_3 - x_2\| \geq 1/2.$$

Procedendo por indução, obtemos uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos $x_n \in M$ tal que:

$$\|x_m - x_n\| \geq 1/2, \quad (m \neq n).$$

Este fato implica que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não pode ter uma subsequência convergente. Isto contradiz a compacidade de M . Logo, a suposição de que $\dim X = \infty$ é falsa. Portanto, $\dim X$ deve ser finita. \square

2.4 Operadores lineares limitados e contínuos

Uma transformação linear é um tipo particular de função entre dois espaços vetoriais que preserva as operações de adição vetorial e multiplicação por escalar. Uma transformação linear também pode ser chamada de *aplicação* linear.

No caso de espaços vetoriais, em particular normados, uma aplicação é chamada de operador.

Definição 2.56. *Sejam X e Y espaços vetoriais sobre o mesmo corpo \mathbb{K} , \mathbb{R} ou \mathbb{C} , um operador $T : D(T) \rightarrow Y$, é uma função que satisfaz:*

(i) *o domínio $D(T) \subset X$ de T é um espaço vetorial e a imagem $Im(T) \subset Y$ é um subespaço vetorial;*

(ii) *Para todos $x, y \in D(T)$ e escalar α , temos*

$$T(x + y) = Tx + Ty$$

$$T(\alpha x) = \alpha Tx.$$

Teorema 2.57. *Sejam X e Y espaços vetoriais, ambos reais ou complexos. Seja $T : D(T) \rightarrow Y$ um operador linear com domínio $D(T) \subset X$ e imagem $Im(T) \subset Y$, então:*

(a) *A aplicação inversa $T^{-1} : Im(T) \rightarrow D(T)$ existe se, e somente se, $Tx = 0$ implica $x = 0$.*

(b) *Se T^{-1} existe, este é um operador linear.*

(c) *Se $\dim D(T) = n < \infty$ e T^{-1} existe, então $\dim Im(T) = \dim D(T)$.*

A prova deste teorema pode ser encontrada em [6].

Definição 2.58. *Sejam X e Y espaços normados e $T : D(T) \rightarrow Y$ um operador linear em que $D(T) \subset X$. O operador é dito ser limitado se existir um número real c tal que para todo $x \in D(T)$,*

$$\|Tx\| \leq c\|x\|. \quad (2.6)$$

Neste caso, definimos

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}. \quad (2.7)$$

E podemos escrever

$$\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|, \forall x \in D(T). \quad (2.8)$$

A função definida em (2.7) satisfaz as propriedades de norma. Para mais detalhes ver ([6], página 92). Logo está bem definida, além disso, vale ressaltar que, um operador linear limitado aplica conjuntos limitados em conjuntos limitados o que difere da definição de funções limitadas, em que a imagem é um conjunto limitado.

Exemplo 2.59. *Seja o operador $T : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ definido por $y = Tx$, onde*

$$y(t) = \int_0^1 k(t, s)x(s)ds.$$

Onde k é uma dada função $k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, que é chamada de Kernel ou núcleo de T que é contínua, sobre o quadrado fechado $G = [0, 1] \times [0, 1]$, e limitada. Assim, T é um operador linear limitado.

De fato, notemos primeiro que k ser contínua no quadrado fechado G , implica que k é limitada, ou seja, $|k(t, s)| \leq k_0$, para todo $(t, s) \in G$, onde $k_0 \in \mathbb{R}$. Usaremos também o seguinte fato:

$$|x(t)| \leq \max_{t \in [0, 1]} |x(t)| = \|x\| \forall t \in [0, 1].$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|y\| = \|Tx\| &= \max_{t \in [0, 1]} \left| \int_0^1 k(t, s)x(s)ds \right| \\ &\leq \max_{t \in [0, 1]} \int_0^1 |k(t, s)| \cdot |x(s)| ds \\ &\leq \max_{t \in [0, 1]} \int_0^1 k_0 \|x\| ds \\ &= k_0 \|x\|, \end{aligned} \quad (2.9)$$

para todo $x \in C([0, 1])$, o que mostra que T é limitado.

Teorema 2.60. *Se um espaço normado X é de dimensão finita, então todo operador linear sobre X é limitado.*

Demonstração. Por hipótese $\dim X = n$. Seja então $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base de X . Tomemos qualquer $x = \sum_{j=1}^n \beta_j e_j$, β_j escalares para $1 \leq j \leq n$. Consideremos qualquer operador linear T sobre X . Como T é linear, segue que,

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \left\| \sum_{j=1}^n \beta_j T e_j \right\| \leq \sum_{j=1}^n |\beta_j| \|T e_j\| \\ &\leq \max_{1 \leq k \leq n} \|T e_k\| \left(\sum_{j=1}^n |\beta_j| \right). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Pelo Lema 2.48, existe $c > 0$ em que $\alpha_j = \beta_j$ e $x_j = e_j$ tal que

$$\sum_{j=1}^n |\beta_j| \leq \frac{1}{c} \left\| \sum_{j=1}^n \beta_j e_j \right\| = \frac{1}{c} \|x\|.$$

Logo,

$$\|Tx\| \leq \gamma \|x\|,$$

onde $\gamma = \frac{1}{c} \max_{1 \leq k \leq n} \|T e_k\|$, o que mostra que T é limitado. \square

Teorema 2.61 (Continuidade e limitação). *Seja $T : D(T) \rightarrow Y$ um operador linear, onde $D(T) \subset X$ e X, Y são espaços normados. Então:*

(a) *T é contínuo se, e somente se, T é limitado.*

(b) *Se T é contínuo em um único ponto, então T é contínuo.*

Demonstração. (a) Para $T = 0$ a conclusão é trivial. Se $T \neq 0$, então $\|T\| \neq 0$. Suponhamos que T é limitado. Considere qualquer $x_0 \in D(T)$. Dado $\epsilon > 0$ seja $\delta = \frac{\epsilon}{\|T\|}$, então para todo $x \in D(T)$ com

$$\|x - x_0\| < \delta$$

obtemos

$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| \leq \|T\| \|x - x_0\| < \|T\| \delta = \epsilon.$$

Reciprocamente, suponha que T é contínua em um $x_0 \in D(T)$ arbitrário, então dado qualquer $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$\|Tx - Tx_0\| \leq \epsilon \quad (2.11)$$

para $\|x - x_0\| \leq \delta$, $x \in D(T)$.

Consideremos agora qualquer $y \neq 0$ em $D(T)$ e seja $x = x_0 + \frac{\delta}{\|y\|} y$. Então

$$x - x_0 = \frac{\delta}{\|y\|} y,$$

Logo $\|x - x_0\| = \delta$. Como T é linear, temos

$$\begin{aligned} \|Tx - Tx_0\| &= \|T(x - x_0)\| \\ &= \left\| T\left(\frac{\delta}{\|y\|}y\right)\right\| \\ &= \frac{\delta}{\|y\|}\|Ty\| \end{aligned} \quad (2.12)$$

e (2.11) implica

$$\frac{\delta}{\|y\|}\|Ty\| \leq \epsilon.$$

Portanto, $\|Ty\| \leq \frac{\epsilon}{\delta}\|y\|$.

Isso pode ser escrito $\|Ty\| \leq c\|y\|$, onde $c = \frac{\epsilon}{\delta}$, e T é limitado.

(b) A continuidade de T em um ponto implica limitação de T pela segunda parte da prova de (a), que por sua vez implica continuidade de T por (a). \square

Corolário 2.62. *Seja T um operador linear limitado. Então*

(a) $x_n \rightarrow x$ implica $Tx_n \rightarrow Tx$.

(b) O núcleo de T , isto é, $N(T) = \{x \in D(T) : T(x) = 0\}$ é fechado.

Demonstração. (a) Como T é um operador linear limitado então $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|, \forall x \in D(T)$, então

$$\|Tx_n - Tx\| = \|T(x_n - x)\| \leq \|T\|\|x_n - x\| \rightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow \infty$. O que mostra que

$$Tx_n \rightarrow Tx.$$

(b) Para todo $x \in \overline{N(T)}$, existe uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $N(T)$ tal que $x_n \rightarrow x$, pois $x \in \overline{N(T)}$. Por (a) $Tx_n \rightarrow Tx$ e $Tx = 0 \forall n \in \mathbb{N}$, já que $Tx_n = 0$. Portanto, $x \in N(T)$, o que mostra que $N(T)$ é fechado. \square

Definição 2.63. *Uma restrição de um operador $T : D(T) \rightarrow Y$ a um subconjunto $B \subset D(T)$, denotado por $T|_B$, é o operador definido por $T|_B : B \rightarrow Y, T|_B(x) = Tx, \forall x \in B$.*

Definição 2.64. *Uma extensão de um operador T a um conjunto $M \supset D(T)$ é um operador $\tilde{T} : M \rightarrow Y$, tal que $\tilde{T}|_{D(T)} = T$, isto é, $\tilde{T}x = Tx, \forall x \in D(T)$.*

Teorema 2.65 (Extensão linear limitada). *Seja $T : D(T) \rightarrow Y$ um operador linear limitado, onde $D(T) \subset X, X$ é um espaço normado e Y é um espaço de Banach. Então T tem uma extensão $\tilde{T} : \overline{D(T)} \rightarrow Y$, onde \tilde{T} é um operador linear limitado de norma*

$$\|\tilde{T}\| = \|T\|.$$

Demonstração. Consideremos qualquer $x \in \overline{D(T)}$. Pelo Teorema 2.24 (a) existe uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $D(T)$ tal que $x_n \rightarrow x$. Como T é linear e limitado, temos

$$\|Tx_n - Tx_m\| \leq \|T\| \|x_n - x_m\|.$$

Isto mostra que $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy. Também por hipótese, Y é completo o que implica que $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, ou seja, $Tx_n \rightarrow y$ para algum $y \in Y$.

Definimos agora $\tilde{T}x = y$. Mostraremos que esta definição é independente da particular escolha de uma sequência em $D(T)$, convergindo para x .

Suponha que $x_n \rightarrow x$ e $z_n \rightarrow x$, então $v_m \rightarrow x$ onde $(v_m)_{m \in \mathbb{N}}$ é a sequência

$$(x_1, z_1, x_2, z_2, \dots).$$

Logo, $(Tv_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge pelo Corolário 2.62, e portanto as duas subsequências $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(Tv_m)_{m \in \mathbb{N}}$ devem ter o mesmo limite, o que mostra que $\tilde{T}x$ é o único valor definido para cada $x \in D(T)$.

\tilde{T} é linear e $\tilde{T}x = Tx$, para todo $x \in D(T)$, logo \tilde{T} é uma extensão de T .

Como T é linear e limitado segue que,

$$\|Tx_n\| \leq \|T\| \|x_n\|, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.13)$$

Também

$$Tx_n \rightarrow y = \tilde{T}x,$$

e $x \mapsto \|x\|$ define uma aplicação contínua, logo quando $n \rightarrow \infty$ em (2.13), temos

$$\|\tilde{T}x\| \leq \|T\| \|x\|.$$

Assim, T é limitado e $\|\tilde{T}\| \leq \|T\|$. É óbvio que $\|\tilde{T}\| \geq \|T\|$ porque a norma sendo definida pelo supremo como na definição 2.58, não pode diminuir em uma extensão. Portanto, $\|\tilde{T}\| = \|T\|$. \square

Definição 2.66. *Seja X um espaço vetorial sobre o corpo \mathbb{K} (real ou complexo). Um funcional linear sobre X é uma transformação linear de X em \mathbb{K} .*

Definição 2.67 (Funcionais lineares limitados). *Um funcional linear f é limitado se existir um número real c tal que para todo $x \in D(f)$,*

$$|f(x)| \leq c \|x\|. \quad (2.14)$$

Assim, definimos

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in D(f) \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \quad (2.15)$$

ou

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in D(f) \\ \|x\|=1}} |f(x)|, \quad (2.16)$$

e podemos escrever

$$|f(x)| \leq \|f\| \|x\|. \quad (2.17)$$

A norma definida em (2.15) satisfaz as propriedades de espaço normado, análogo a definição 2.58.

Exemplo 2.68. *Seja $X = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ o espaço das funções contínuas com a norma $\|x\| = \max_{t \in [a, b]} |x(t)|$. Se escolhermos um fixo $t_0 \in I = [a, b]$ e a função $f_1(x) = x(t_0)$, $x \in X$.*

Temos que f_1 é linear, limitada e tem norma $\|f_1\| = 1$. De fato,

$$f_1(x + y) = (x + y)(t_0) = x(t_0) + y(t_0) = f_1(x) + f_1(y), \forall x, y \in X.$$

e

$$f_1(\alpha x) = x(\alpha t_0) = \alpha x(t_0) = \alpha f_1(x) \forall \alpha \in \mathbb{R}, x \in X.$$

E que, $|f_1(x)| = |x(t_0)| \leq \|x\|$, pelo fato de $\|x\| = \max_{t \in [a, b]} |x(t)|$, o que implica $\|f_1\| \leq 1$ pela expressão (2.16).

Por outro lado, definindo $x(t_0) = 1$, temos $\|x_0\| = 1$ e obtemos de (2.17)

$$\|f_1\| \geq |f_1(x_0)| = |x(t_0)| = 1 \Rightarrow \|f_1\| \geq 1.$$

Portanto,

$$\|f_1\| = 1.$$

2.5 Espaços com produto interno e espaço de Hilbert

Um produto interno sobre um espaço vetorial de dimensão finita é uma generalização do produto escalar e, em termos de tal produto interno, pode-se também definir “comprimento” e “ângulo”. Espaços reais com produto interno de dimensão finita são considerados como espaços normados e frequentemente denominados espaço euclidiano, pois defini-se a norma a partir do produto interno, como segue abaixo.

Definição 2.69. *Seja X um espaço vetorial sobre o corpo \mathbb{K} (real ou complexo). Um produto interno em X é uma aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

$$P1) \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \quad \forall x, y, z \in X;$$

$$P2) \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in X \text{ e } \alpha \in \mathbb{K};$$

$$P3) \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \quad \forall x, y \in X, \text{ onde a barra indica conjugação para o caso complexo};$$

$$P4) \langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in X. \text{ E vale } \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Um produto interno sobre X define uma norma sobre X dada por:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle},$$

para todo $x \in X$ e uma métrica sobre X dada por

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}.$$

Definição 2.70. *Um espaço pré-hilbertiano é um espaço vetorial com produto interno. Um espaço de Hilbert é um espaço com produto interno completo com respeito à norma $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.*

Teorema 2.71. *Se X é um espaço com produto interno, então, para quaisquer vetores x, y em X e todo escalar $\alpha \in \mathbb{K}$ (real ou complexo), temos*

$$a) \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|;$$

$$b) \|x\| > 0 \text{ para } x \neq 0;$$

$$c) |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|;$$

$$d) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

A prova deste teorema pode ser encontrada em [4].

Exemplo 2.72. *O espaço $X = \mathbb{R}^n$ é um espaço de Hilbert com produto interno definido por*

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n,$$

denominado produto interno canônico. Com a norma definida por

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Exemplo 2.73. *O produto interno canônico de $C([a, b], \mathbb{R})$ é $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$.*

Definição 2.74 (Ortogonalidade). *Um elemento x de um espaço com produto interno X é ortogonal a $y \in X$ se $\langle x, y \rangle = 0$ e escrevemos $x \perp y$.*

Definição 2.75. *Sejam os subconjuntos $A, B \subset X$, escrevemos $x \perp A$ se $x \perp a$ para todo $a \in A$ e $A \perp B$ se $a \perp b \forall a \in A$ e $\forall b \in B$.*

Definição 2.76. *O complementar ortogonal do subespaço Y do espaço com produto interno X , denotado por Y^\perp , é o conjunto*

$$Y^\perp = \{y \in X : \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in Y\}.$$

O próximo resultado é fundamental para verificarmos se uma norma provém ou não de um produto interno.

Teorema 2.77. *Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço normado. Então $\|\cdot\|$ é uma norma que provém de um produto interno se, e somente se, satisfaz a identidade do paralelogramo, ou seja,*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \quad (2.18)$$

para todo $x, y \in X$.

A prova deste resultado pode ser encontrada em [8].

Exemplo 2.78. *O espaço euclidiano $X = \mathbb{R}^n$ é um espaço de Hilbert com norma definida*

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2} = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2},$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Exemplo 2.79. *O espaço $X = l_p$ não é um espaço de Hilbert se $p \neq 2$. De fato, mostremos que a norma não satisfaz a igualdade do paralelogramo com $p \neq 2$. Assim, tomamos $x = (1, 1, 0, 0, \dots) \in l_p$ e $y = (1, -1, 0, 0, \dots) \in l_p$ e calculamos*

$$\|x\| = \|y\| = 2^{1/p} \Rightarrow 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 2^2 \cdot 2^{2/p}$$

e

$$\|x + y\| = \|x - y\| = 2.$$

Assim $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 8 \neq 2^2 \cdot 2^{2/p}$, exceto se $p = 2$. Vemos assim, que a regra do paralelogramo não é satisfeita se $p \neq 2$, logo o espaço $X = l_p$ não é um espaço de Hilbert para $p \neq 2$.

Definição 2.80. *Um subespaço Y de um espaço pré-hilbertiano X é definido como um subespaço vetorial de X , tomando o produto interno sobre X restrito a $Y \times Y$.*

Definição 2.81. *Um subconjunto M de X é dito ser convexo se para todos $x, y \in M$ o segmento definido por*

$$\gamma(\lambda) = (1 - \lambda)x + \lambda y,$$

$\lambda \in [0, 1]$, está contido em M .

Teorema 2.82. *Sejam $(X, \|\cdot\|)$ um espaço normado e $M \neq \emptyset$ um subconjunto convexo de X completo. Então para todo $x \in X$ existe um único número $y \in M$ tal que:*

$$\delta = \inf_{\tilde{y} \in M} \|x - \tilde{y}\| = \|x - y\|. \quad (2.19)$$

Demonstração. (i) Existência: Pela definição de ínfimo existe uma sequência $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em M tal que:

$$\delta_n = \|x - y_n\| \rightarrow \delta. \quad (2.20)$$

Mostraremos que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy. Escrevemos $y_n - x = v_n$, temos $\|v_n\| = \delta_n$ e

$$\|v_n + v_m\| = \|y_n + y_m - 2x\| = 2\left\|\frac{1}{2}(y_n + y_m) - x\right\| \geq 2\delta.$$

Como M é convexo, temos $\frac{1}{2}(y_n + y_m) \in M$. Além disso, $y_n - y_m = v_n - v_m$. Pela Identidade do Paralelogramo:

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^2 &= \|v_n - v_m\|^2 \\ &= -\|v_n + v_m\|^2 + 2(\|v_n\|^2 + \|v_m\|^2) \\ &\leq -(2\delta)^2 + 2(\delta_n^2 + \delta_m^2). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Assim, (2.20) implica que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy. Como M é completo, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, $y_n \rightarrow y \in M$.

Como $y \in M$, segue que $\|x - y\| \geq \delta$.

Também por (2.20)

$$\|x - y\| = \|(x - y_n) + (y_n - y)\| \leq \|x - y_n\| + \|y_n - y\| = \delta_n + \|y_n - y\| \rightarrow \delta.$$

Que mostra que $\|x - y\| = \delta$.

(ii) Unicidade. Suponha que $y \in M$ e $y_0 \in M$ ambos satisfazendo $\|x - y\| = \delta$ e $\|x - y_0\| = \delta$. Mostraremos então que $y = y_0$.

Pela Identidade do Paralelogramo temos

$$\begin{aligned} \|y - y_0\|^2 &= \|(y - x) - (y_0 - x)\|^2 \\ &= 2\|y - x\|^2 + 2\|y_0 - x\|^2 - \|(y - x) + (y_0 - x)\|^2 \\ &= 2\delta^2 + 2\delta^2 - 2^2\left\|\frac{1}{2}(y + y_0) - x\right\|^2. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Do lado direito de (2.22), $\frac{1}{2}(y + y_0) \in M$, logo $\left\|\frac{1}{2}(y + y_0) - x\right\| \geq \delta$.

Isto implica que,

$$\begin{aligned} \|y - y_0\|^2 &= 2\delta^2 + 2\delta^2 - 2^2\left\|\frac{1}{2}(y + y_0) - x\right\|^2 \\ &\leq 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Logo $\|y - y_0\| \leq 0$ e temos a igualdade $y = y_0$. O que conclui a demonstração. \square

Lema 2.83 (Ortogonalidade). *Seja $\delta = \inf_{\tilde{y} \in M} \|x - \tilde{y}\| = \|x - y\|$, tal que para todo $x \in X$ existe um único número $y \in M$, onde X é um espaço normado completo e $M \neq \emptyset$ um subconjunto convexo de X . Se Y um subespaço completo de X e $x \in X$ fixo, então $z = x - y$ é ortogonal a Y .*

Demonstração. Suponha que $z \perp Y$ seja falso, então haveria um $y_1 \in Y$ tal que

$$\langle z, y_1 \rangle = \beta \neq 0. \quad (2.24)$$

Note que, $y_1 \neq 0$ pois caso contrário $\langle z, y_1 \rangle = 0$. Além disso, para qualquer escalar α ,

$$\begin{aligned} \|z - \alpha y_1\|^2 &= \langle z - \alpha y_1, z - \alpha y_1 \rangle \\ &= \langle z, z \rangle - \langle \alpha y_1, z \rangle - \langle z, \alpha y_1 \rangle + \langle \alpha y_1, \alpha y_1 \rangle \\ &= \|z\|^2 - \bar{\alpha} \langle z, y_1 \rangle - \alpha [\langle y_1, z \rangle - \alpha \bar{\alpha} \|y_1\|^2]. \end{aligned}$$

A expressão entre os colchetes é zero se tomarmos

$$\bar{\alpha} = \frac{\bar{\beta}}{\langle y_1, y_1 \rangle}.$$

Observemos que Y é convexo, pois Y é subespaço vetorial de X . De (2.19) temos $\|z\| = \|x - y\| = \delta$, assim

$$\|z - \alpha y_1\|^2 = \|z\|^2 - \frac{|\beta|^2}{\langle y_1, y_1 \rangle} < \delta^2.$$

Mas isso é uma contradição, porque $z - \alpha y_1 = x - y_2$ onde $y_2 = y + \alpha y_1 \in Y$, logo $\|z - \alpha y_1\| \geq \delta$ pela definição de δ . Consequentemente (2.24) não pode ocorrer, e o lema está demonstrado. \square

Definição 2.84 (Soma direta). *Um espaço vetorial X é uma soma direta de dois subespaços Y e Z de X , escrevemos*

$$X = Y \oplus Z,$$

se cada $x \in X$ possui uma única representação

$$x = y + z \quad y \in Y, z \in Z.$$

Se $X = Y + Z$, então $Y \cap Z = \{0\}$ se, e somente se, a representação é única. Então Z é chamado de complemento algébrico de Y em X e vice-versa, o par Y e Z é chamado de par complementar de subespaços em X .

Exemplo 2.85. *Considere os subespaços vetoriais Y e Z de $X = M_n(\mathbb{R})$, o conjunto das matrizes quadradas de coeficientes reais de ordem n , definidas por $Y = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A = A^t\}$ das matrizes simétricas e $Z = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A = -A^t\}$ das matrizes antissimétricas. Temos que*

$$X = Y \oplus Z.$$

De fato, sejam $A \in X$ tal que $A = B + C$, onde $B, C \in Y$. Então

$$B = \frac{A + A^t}{2} \quad e \quad C = \frac{A - A^t}{2},$$

assim,

$$B^t = \left(\frac{A + A^t}{2} \right) = \frac{1}{2}(A + A^t)^t = \frac{1}{2}(A^t + A) = \frac{A + A^t}{2} = B$$

e

$$C^t = \left(\frac{A - A^t}{2} \right) = \frac{1}{2}(A - A^t)^t = \frac{1}{2}(A^t - A) = -\frac{A - A^t}{2} = -C.$$

Portanto, $B \in Y$ e $C \in Z$, logo $X = Y + Z$.

Agora, vamos mostrar que $Y \cap Z = 0$. Se $A \in Y \cap Z \Rightarrow A \in Y \Rightarrow A = A^t$ e $A \in Z \Rightarrow A = -A^t$. Assim, $A^t = -A^t \Leftrightarrow A^t + A^t = 0 \Leftrightarrow 2A^t = 0 \Rightarrow A = 0$. Portanto, $Y \cap Z = \{0\}$ e concluímos que

$$X = Y \oplus Z.$$

Teorema 2.86. *Seja Y qualquer subespaço fechado de um espaço de Hilbert H . Então*

$$H = Y \oplus Y^\perp.$$

Demonstração. Como H é completo e Y é fechado, Y é completo pelo Teorema 2.47. Como Y é convexo, pelo Teorema 2.82 e pelo Lema 2.83, implica que para todo $x \in H$ existe um único $y \in Y$ tal que

$$x = y + z,$$

com $z \in Z = Y^\perp$. Para provar a unicidade, supomos que

$$x = y + z = y_1 + z_1$$

onde $y, y_1 \in Y$ e $z, z_1 \in Z$. Então $y - y_1 = z - z_1$. Como $y - y_1 \in Y$ enquanto que $z_1 - z \in Z = Y^\perp$, vemos que $y - y_1 \in Y \cap Y^\perp = 0$. Isto implica $y = y_1$. Assim temos $z = z_1$. \square

Discutimos neste capítulo as principais propriedades de espaços métricos, normados e espaços com produto interno. Conceitos que nos levam aos espaços de Banach e de Hilbert. Analisamos ainda que algumas propriedades possuem restrições em espaços vetoriais de dimensão infinita como entre outros, o caso do Teorema 2.86. Vimos enfim, a beleza desta teoria e nos preparamos para as futuras aplicações como segue no próximo capítulo.

3 Aplicações

Muitos resultados e definições da Análise Funcional são importantes para o estudo de problemas de outras áreas do conhecimento. Por exemplo, fenômenos que variam com o tempo, como crescimento populacional, resfriamento de um corpo, movimentos de satélites artificiais da terra, são descritos por Equações Diferenciais Ordinárias. Para garantir a existência de solução para este tipo de equação usamos o Teorema do Ponto Fixo de Banach.

Neste capítulo, apresentamos algumas aplicações do estudo realizado no capítulo 2, em especial às Equações Diferenciais, Equações Integrais e a Teoria da Aproximação. Para maiores investigações e detalhes sobre o assunto ver [6] e [7].

3.1 Teorema do ponto fixo de Banach

Definição 3.1. *Um ponto fixo de uma aplicação $T : X \rightarrow X$ é um ponto $\bar{x} \in X$ tal que*

$$T\bar{x} = \bar{x}.$$

Exemplo 3.2. *Considere a aplicação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x + y, x - y)$. Esta aplicação T possui um único ponto fixo $(0, 0)$. De fato,*

$$(x, y) = (x + y, x - y),$$

então $x + y = x$ e $x - y = y$. Assim $y = 0$ e $x = 0$.

O Teorema do Ponto Fixo de Banach, fornece condições suficientes para a existência de um ponto fixo para uma classe de aplicações, chamadas *contrações*. Isto nos motiva à seguinte definição.

Definição 3.3. *Seja $X = (X, d)$ um espaço métrico. Uma aplicação $T : X \rightarrow X$ é chamada de contração sobre X , se existe um real positivo $\alpha < 1$ tal que, para todo $x, y \in X$ temos*

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y). \tag{3.1}$$

Note que a razão $\frac{d(Tx, Ty)}{d(x, y)}$, não excede uma constante menor que 1.

Exemplo 3.4. Considere $X = \mathbb{R}$, com a métrica usual. A aplicação $T : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ definida por $T(x) = \sqrt{x}$ é uma contração. De fato:

$$d(Tx, Ty) = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \cdot \frac{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|}{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|} = \frac{1}{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|} \cdot |x - y|.$$

Como $x, y \geq 1$, temos que $|\sqrt{x} + \sqrt{y}| \geq 2$, ou ainda, $\frac{1}{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|} \leq \frac{1}{2}$.

Portanto

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) &\leq \frac{1}{2}|x - y| \\ &= \frac{1}{2}d(x, y). \end{aligned}$$

Em nosso estudo vamos construir uma sequência de forma recursiva. Neste sentido, *iteração* é um método em que escolhemos um x_0 em um determinado conjunto e calculamos recursivamente uma sequência x_0, x_1, \dots , de uma relação da forma

$$x_{n+1} = Tx_n. \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.2)$$

Esse conceito é muito importante e o utilizaremos no seguinte teorema.

Teorema 3.5 (Teorema do Ponto Fixo). *Considere um espaço métrico $X = (X, d)$, onde $X \neq \emptyset$. Suponha que X é completo e a aplicação $T : X \rightarrow X$ é uma contração sobre X . Então T possui exatamente um ponto fixo.*

Demonstração. Seja $x_0 \in X$. Definimos uma sequência iterativa $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, por

$$x_0, x_1 = Tx_0, x_2 = T^2x_0, \dots, x_n = T^n x_0, \dots \quad (3.3)$$

Podemos afirmar que esta é a sequência das imagens de x_0 sob a aplicação repetida de T . Mostremos que a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy e assim converge no espaço completo X .

Por (3.1) e (3.2), temos

$$\begin{aligned} d(x_{m+1}, x_m) &= d(Tx_m, Tx_{m-1}) \\ &\leq \alpha d(x_m, x_{m-1}) \\ &= \alpha d(Tx_{m-1}, Tx_{m-2}) \\ &\leq \alpha^2 d(x_{m-1}, x_{m-2}) \\ &\leq \dots \\ &\leq \alpha^m d(x_1, x_0). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Pela desigualdade triangular e a fórmula para a soma de uma Progressão Geométrica¹,

¹A fórmula da soma geral dos n primeiros termos de uma P.G é dada por $S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$, onde a_1 é primeiro elemento da P.G, n é a quantidade de elementos e q é a razão.

obtemos para $n > m$

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq (\alpha^m + \alpha^{m+1} + \cdots + \alpha^{n-1}) \cdot d(x_0, x_1) \\ &= \alpha^m \left[\frac{1 - \alpha^{n-m}}{1 - \alpha} \right] d(x_0, x_1). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Como $0 < \alpha < 1$, no numerador temos $1 - \alpha^{n-m} < 1$. Logo

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} \cdot [1 - \alpha^{n-m}] \cdot d(x_0, x_1) < \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} d(x_0, x_1), \quad (3.6)$$

com $n > m$.

Como $0 < \alpha < 1$ e $d(x_0, x_1)$ são fixos, fazendo $m \rightarrow \infty$ com $n > m$, podemos fazer o lado direito da desigualdade (3.6), tão pequeno quanto desejarmos, ou seja $d(x_m, x_n) \rightarrow 0$, o que mostra que $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy e como X é completo $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge para um ponto $x \in X$.

Da desigualdade triangular e (3.1), temos

$$\begin{aligned} d(x, Tx) &\leq d(x, x_m) + d(x_m, Tx) \\ &= d(x, x_m) + d(Tx_{m-1}, Tx) \\ &\leq d(x, x_m) + \alpha d(x_{m-1}, x) \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

quando $m \rightarrow \infty$, pois $x_m \rightarrow x$. Portanto $d(x, Tx) = 0$, o que implica $Tx = x$, que mostra que x é um ponto fixo de T .

Mostremos a unicidade. Suponha que $Tx = x$ e $T\tilde{x} = \tilde{x}$, então por (3.1)

$$d(x, \tilde{x}) = d(Tx, T\tilde{x}) \leq \alpha d(x, \tilde{x})$$

$$d(x, \tilde{x}) \leq \alpha d(x, \tilde{x}) < d(x, \tilde{x}),$$

pois $\alpha < 1$, o que implica $d(x, \tilde{x}) = 0$. Logo $x = \tilde{x}$ e o teorema está provado. \square

As aplicações mais interessantes do Teorema do Ponto Fixo de Banach, surgem em conexão com espaços das funções, como será abordado a seguir.

3.2 Aplicações do Teorema do Ponto fixo de Banach

3.2.1 Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)

Uma EDO de primeira ordem é dada por uma expressão do tipo

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (3.8)$$

onde $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ representa a derivada de x com relação à sua variável independente t . Uma função $x : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma solução de (3.8) se ela for diferenciável e satisfazer à equação (3.8) para $t \in (a, b)$.

No estudo das equações diferenciais da forma (3.8), nos deparamos com duas questões básicas, a primeira é obter uma solução geral e a segunda é obter a solução do problema de valor inicial PVI

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(t, x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases} \quad (3.9)$$

Assim, usaremos o Teorema 3.5 e a *Condição de Lipschitz* para provar o Teorema de Picard, que desempenha um papel principal na teoria das Equações Diferenciais sobre a existência e unicidade de solução.

Definição 3.6. *Uma função $f(t, y)$ satisfaz a condição de Lipschitz na variável y sobre o conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$, se existe uma constante $k > 0$, tal que*

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq k|y_1 - y_2|, \quad (3.10)$$

sempre que $(t, y_1), (t, y_2) \in D$. Assim k é chamada de constante de Lipschitz.

Teorema 3.7 (Existência e unicidade de Picard). *Seja f contínua em um retângulo $R = \{(t, x) : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$ e assim limitada em R , ou seja, $|f(t, x)| \leq c$, para todo $(t, x) \in R$. Suponha que f satisfaça a condição de Lipschitz sobre R com constante k . Então o problema de valor inicial (3.9) tem uma única solução. Esta solução está definida em $[t_0 - \beta, t_0 + \beta]$, onde*

$$0 < \beta < \min\left\{a, \frac{b}{c}, \frac{1}{k}\right\}. \quad (3.11)$$

Demonstração. Seja o espaço de Banach $X = \mathcal{C}([t_0 - \beta, t_0 + \beta], \mathbb{R})$ de todas as funções contínuas, com a métrica definida por

$$d(x, y) = \|x - y\| = \max_{t \in [t_0 - \beta, t_0 + \beta]} |x(t) - y(t)|. \quad (3.12)$$

Um subespaço $\tilde{C} \subset X$, consistindo de todas as funções $x \in X$ que satisfaçam

$$|x(t) - x_0| \leq c\beta,$$

é fechado. Com efeito, seja $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ uma sequência em \tilde{C} que converge para $x \in X$. Mostremos que $x \in \tilde{C}$, isto é,

$$|x(t) - x_0| \leq c\beta,$$

para todo $t \in I = [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$. De fato, temos

$$|x_m(t) - x_0| \leq c\beta, \quad (3.13)$$

para todo $t \in I$ e para todo $m \in \mathbb{N}$, pois $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em \tilde{C} . Fazendo $m \rightarrow \infty$ em (3.13), temos

$$|x(t) - x_0| \leq c\beta,$$

para todo $t \in I$. Portanto, $x \in \tilde{C}$. Logo é um subespaço fechado de um espaço completo e pelo Teorema 2.28 também é completo.

Por integração, (3.8) pode ser escrito como $x = Tx$, onde $T : \tilde{C} \rightarrow \tilde{C}$ é definido por

$$Tx(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds. \quad (3.14)$$

Vemos que T está definida para todo $x \in \tilde{C}$, pois $c\beta < b$, por (3.11). Assim, se $x \in \tilde{C}$, então $s \in [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$ e $(s, x(s)) \in R$ e a integral em (3.14) existe, já que f é contínua em R .

Note que $T : \tilde{C} \rightarrow \tilde{C}$, pois

$$\begin{aligned} |Tx(t) - x_0| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, x(s))| ds \right| \\ &\leq c \cdot \left| \int_{t_0}^t ds \right| \\ &= c \cdot |t - t_0| \\ &\leq c\beta. \end{aligned}$$

Pela condição de Lipschitz (3.10) e pela definição da métrica (3.12), temos

$$\begin{aligned} d(Tx, Tv) &= \max_{s \in [t_0 - \beta, t_0 + \beta]} |Tx(t) - Tv(t)| \\ &= \max_{s \in [t_0 - \beta, t_0 + \beta]} \left| [x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))] - [x_0 + \int_{t_0}^t f(s, v(s))] ds \right| \\ &= \max_{s \in [t_0 - \beta, t_0 + \beta]} \left| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) - f(s, v(s)) ds \right| \\ &\leq \max_{s \in [t_0 - \beta, t_0 + \beta]} \left| \int_{t_0}^t |f(s, x(s)) - f(s, v(s))| ds \right| \\ &\leq \max_{s \in [t_0 - \beta, t_0 + \beta]} \left| \int_{t_0}^t k|x(s) - v(s)| ds \right| \\ &\leq k \max_{s \in [t_0 - \beta, t_0 + \beta]} |x(s) - v(s)| \cdot \left| \int_{t_0}^t ds \right| \\ &= k \cdot |t - t_0| \max_{s \in [t_0 - \beta, t_0 + \beta]} |x(s) - v(s)| \\ &\leq (k\beta)d(x, v). \end{aligned}$$

Segue que,

$$d(Tx, Tv) \leq \alpha d(x, v)$$

onde $\alpha = k\beta < 1$, logo T é uma contração, e pelo Teorema 3.5, T possui um ponto fixo $x \in \tilde{C}$. Assim, por (3.14)

$$Tx(t) = x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds. \quad (3.15)$$

Como $(s, x(s)) \in R$, onde f é contínua, (3.15) é diferenciável e satisfaz (3.8) e cada solução de (3.8) deve satisfazer (3.15) e o teorema está provado. \square

O teorema do Ponto Fixo de Banach, também implica que a solução x de (3.8) é o limite da sequência (x_0, x_1, \dots) obtido pela iteração de Picard

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_n(s)) ds \quad (3.16)$$

onde $n = 1, 2, 3, \dots$. Este resultado desempenha um papel importante na teoria de equações diferenciais ordinárias.

Exemplo 3.8. *Seja a EDO de primeira ordem com PVI definida por*

$$\begin{cases} \dot{x} &= x \\ x(0) &= 1 \end{cases}$$

Temos que

$$x_0(t) = 1$$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= T(x_0) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) ds \\ &= x_0 + \int_0^t 1 ds \\ &= 1 + t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2(t) &= T(x_1) = x_0 + \int_0^t (1 + s) ds \\ &= 1 + t + \frac{t^2}{2} \\ &\dots \end{aligned}$$

$$x_n(t) = T(x_{n-1}) = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} \rightarrow e^t,$$

quando $n \rightarrow \infty$. Observe que $x(t) = e^t$ é a solução do PVI dado.

3.2.2 Aplicação de Equações Diferenciais Ordinárias

Esta aplicação foi baseada na referência [7]. A *catenária* é uma curva formada por um cabo flexível com densidade uniforme, pendurado entre dois pontos, sob a ação do seu próprio peso. Alguns cabos de suspensão de pontes e fios de energia elétrica ou telefônicos presos a dois postes apresentam essa forma como ilustrado na Figura 3.1.

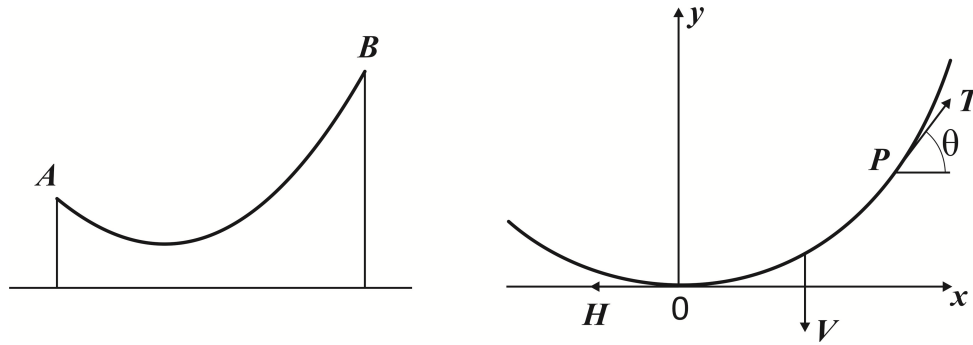


Figura 3.1: Gráfico de um cabo flexível entre dois pontos A e B. Fonte: Adaptado de Figueiredo e Neves (2015, p. 40).

Seja um sistema de coordenadas cartesianas com origem no ponto mais baixo da curva e eixo y coincidente com a vertical. Consideremos o equilíbrio do trecho OP do cabo

$$\vec{H} + \vec{T} + \vec{V} = 0,$$

como ilustrado na Figura 3.1, onde H é a tensão do cabo em seu ponto mais baixo, T é a tensão no ponto $P = (x, y)$ e V é o peso do trecho OP do cabo, $V = \omega s$, ω é o peso por unidade de comprimento e s é o comprimento do arco OP.

Projetando essa equação de equilíbrio sobre os dois eixos obtemos da relação no triângulo retângulo

$$\text{sen } \theta = \frac{V}{T} \quad e \quad \text{cos } \theta = \frac{H}{T},$$

Consequentemente,

$$\text{tg } \theta = \frac{\omega}{H} \cdot s. \tag{3.17}$$

Note que ω e H são constantes, assim $\frac{\omega}{H} = C = \text{constante}$. Observe também que $\text{tg } \theta = f'(x) = C \cdot s(x)$. Assim, derivando (3.17) obtemos

$$f'' = C \cdot \frac{ds}{dx}.$$

Por outro lado, o comprimento do gráfico de uma função $y = f(t)$ para $a \leq t \leq b$ é dado por:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(t)]^2} dt.$$

Assim, o comprimento do arco, de P_0 até P é

$$S(x) = \int_0^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2} dt$$

e substituindo na equação (3.17), obtemos:

$$f'(x) = \frac{\omega}{H} \cdot \int_0^x \sqrt{1 + [(f'(t))]^2} dt.$$

Usando o Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$f''(x) = \frac{\omega}{H} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} = C \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2}. \quad (3.18)$$

Obtivemos uma EDO, cuja a solução é a função que tem como gráfico a *catenária*. Para resolvermos essa equação, vamos simplificar a notação denotando $g(x) = f'(x)$. Assim a equação (3.18) é dada por

$$g'(x) = C \sqrt{1 + (g(x))^2} \Leftrightarrow \frac{g'(x)}{\sqrt{1 + [g(x)]^2}} = C.$$

Que é uma equação separável, então o problema se resume a integração de $\frac{1}{\sqrt{1 + [g(x)]^2}}$, para a qual se consegue uma primitiva com a mudança de variável $g(x) = \cot g(\alpha)$. Assim

$$g(x) = \cot g(\alpha) \Rightarrow dg = -\operatorname{cosec}^2(\alpha) d\alpha = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2(\alpha)}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \cot^2(\alpha)} &= \sqrt{1 + \frac{\cos^2(\alpha)}{\operatorname{sen}^2(\alpha)}} \\ &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)}{\operatorname{sen}^2(\alpha)}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{\operatorname{sen}^2(\alpha)}} \\ &= \frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha)}. \end{aligned}$$

Realizando as substituições

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 + [g(x)]^2}} dg = \int \operatorname{sen}(\alpha) \cdot \left(-\frac{1}{\operatorname{sen}^2(\alpha)} \right) d\alpha = - \int \frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha)} d\alpha = -\ln \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Voltando à variável $g(x)$, usamos as seguintes relações trigonométricas para $\alpha > 0$:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} \right) &= \frac{1 - \cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)} \\ &= \frac{1 - \frac{g(x)}{\sqrt{[g(x)]^2 + 1}}}{\frac{1}{\sqrt{[g(x)]^2 + 1}}} \\ &= \sqrt{[g(x)]^2 + 1} - g(x), \end{aligned}$$

onde $\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{[g(x)]^2 + 1}}$ e $\cos(\alpha) = \frac{g(x)}{\sqrt{[g(x)]^2 + 1}}$, como mostra a Figura 3.2.

Logo temos as primitivas, sendo C a constante de integração

$$-\ln \sqrt{1 + (g(x))^2} - g(x) = Cx + D.$$

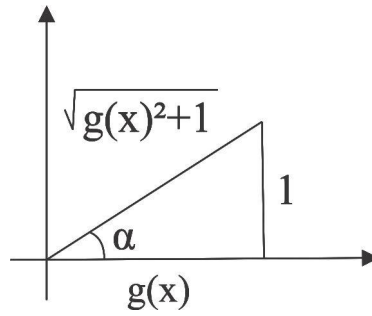


Figura 3.2: Gráfico de $g(x) > 0$ e $0 \leq \alpha \leq \pi/2$. Fonte: Próprio autor.

Como $g(0) = 0$, temos $D = -\ln 1 = 0$. Portanto, a função g é a função que satisfaz:

$$\begin{aligned} \ln\{\sqrt{1 + [g(x)]^2} - g(x)\} &= -Cx \\ \Leftrightarrow e^{\ln\{\sqrt{1 + [g(x)]^2} - g(x)\}} &= e^{-Cx} \Leftrightarrow \\ \sqrt{1 + [g(x)]^2} - g(x) &= e^{-Cx}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Como $g = f'$ e que f é uma função par, concluímos que g é uma função ímpar. Assim obtemos

$$\begin{aligned} -g(-x) + \sqrt{1 + [g(-x)]^2} &= e^{Cx} \Leftrightarrow \\ g(x) + \sqrt{1 + [g(x)]^2} &= e^{Cx}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Subtraindo (3.20) e (3.19) termo a termo, temos

$$2g(x) = e^{Cx} - e^{-Cx} = 2 \sinh(Cx),$$

ou seja,

$$g(x) = f'(x) = \sinh(Cx),$$

logo

$$f(x) = \int \sinh(Cx) = \frac{1}{C} \cosh(Cx) + k.$$

A expressão dada por

$$f(x) = \frac{1}{C} \cosh(Cx) + k$$

é a chamada equação da *catenária*. A constante k que aparece no final da equação só depende da escolha na colocação do eixo x .

3.2.3 Equações Integrais

Vários problemas em Matemática, Física e outras áreas, conduzem de forma natural às equações integrais. Embora muito amplo o assunto, resumiremos aqui, em considerar o Teorema do Ponto Fixo de Banach como ferramenta para provar o teorema da existência e unicidade para equações integrais de Fredholm e de Volterra.

Uma equação da forma

$$v(t) = \int_a^b k(t, s) \cdot x(s) ds \quad (3.21)$$

é chamada de Equação de Fredholm de *primeira espécie* e a equação da forma

$$v(t) = x(t) - \lambda \int_a^b k(t, s) \cdot x(s) ds \quad (3.22)$$

é chamada de Equação de Fredholm de *segunda espécie*, onde $I = [a, b]$ é um dado intervalo, $x(t)$ é uma função em I que é desconhecida e λ é um parâmetro desconhecido.

Nesta seção vamos buscar condições para que (3.22) tenha solução. Vale ressaltar que para encontrarmos a solução de (3.21), podemos aplicar as técnicas da seção anterior.

O *kernel* k da equação é uma função dada no quadrado $G = [a, b] \times [a, b]$ e $v(t)$ é uma função dada em $[a, b]$. Se assumirmos que k é contínua no compacto $G = I \times I$, então existirá uma constante $c > 0$ tal que

$$|k(t, s)| \leq c, \quad \forall (t, s) \in G.$$

Nestas condições, temos o teorema a seguir.

Teorema 3.9 (Equação intergral de Fredholm). *Suponha que k e v em (3.22) sejam contínuas em $I \times I$, respectivamente e $|\lambda| < \frac{1}{c(b-a)}$, com c definido anteriormente. Então a equação integral (3.22) tem uma única solução x sobre I .*

Demonstração. Consideremos as equações integrais sobre o espaço das funções contínuas $X = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ com a métrica definida por

$$d(x, y) = \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|, \quad (3.23)$$

logo X é completo.

Escrevendo (3.22) na forma $Tx = x$, devemos ter:

$$Tx(t) = v(t) + \lambda \int_a^b k(t, s) \cdot x(s) ds \quad (3.24)$$

Como v e k são contínuas, a equação (3.24) define um operador $T : \mathcal{C}[a, b] \rightarrow \mathcal{C}[a, b]$, que é uma contração. De fato, de (3.23)

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) &= \max_{t \in [a, b]} |Tx(t) - Ty(t)| \\ &= |\lambda| \max_{t \in [a, b]} \left| \int_a^b k(t, s) \cdot [x(s) - y(s)] ds \right| \\ &\leq |\lambda| \max_{t \in [a, b]} \int_a^b |k(t, s)| \cdot |x(s) - y(s)| ds \\ &\leq |\lambda| c \max_{t \in [a, b]} \int_a^b |x(s) - y(s)| ds \\ &= |\lambda| c \cdot d(x, y) \cdot (b - a). \end{aligned}$$

Que pode ser escrito por $d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$, onde $\alpha = |\lambda|c(b - a)$, o que torna T uma contração se

$$|\lambda| < \frac{1}{c(b - a)}. \quad (3.25)$$

Pelo Teorema 3.5, a equação integral possui uma única solução sobre o intervalo I , o que conclui a demonstração. \square

Consideremos agora a Equação de Volterra definida como

$$v(t) = x(t) - \lambda \int_a^t k(t, s) \cdot x(s) ds, \quad (3.26)$$

onde o limite de integração t é variável. Enunciamos o teorema da existência e unicidade de solução da Equação de Volterra.

Teorema 3.10 (Equação integral de Volterra). *Suponha que v seja contínua em $[a, b]$ e que k é contínua na região triangular R no ts -plano dado por $a \leq s \leq t$, $a \leq t \leq b$, ver Figura 3.3. Então (3.26) possui uma única solução x em $[a, b]$ para todo λ .*

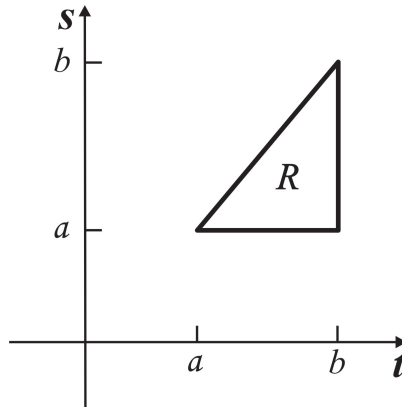


Figura 3.3: Região triangular R no caso a e b positivo. Fonte: Adaptado de Kreyszig (1978, p. 322).

Demonstração. A equação (3.26) pode ser escrita como $Tx = x$, com $T : \mathcal{C}[a, b] \rightarrow \mathcal{C}[a, b]$ definida por

$$Tx(t) = v(t) + \lambda \int_a^t k(t, s) \cdot x(s) ds. \quad (3.27)$$

Como k é contínua em R e R é fechada e limitada, k é uma função limitada em R , ou seja,

$$|k(t, s)| \leq c, \forall (t, s) \in R. \quad (3.28)$$

De (3.23), obtemos, $\forall x, y \in \mathcal{C}[a, b]$

$$\begin{aligned}
 d(Tx, Ty) &= \max_{t \in [a, t]} |Tx(t) - Ty(t)| \\
 &= |\lambda| \max_{t \in [a, t]} \left| \int_a^t k(t, s) \cdot [x(t) - y(t)] ds \right| \\
 &\leq |\lambda| \max_{t \in [a, t]} \int_a^t |k(t, s)| \cdot |x(t) - y(t)| ds \\
 &\leq |\lambda| c \max_{t \in [a, t]} |x(\sigma) - y(\sigma)| \int_a^t ds \\
 &= |\lambda| c \cdot (t - a) \cdot d(x, y).
 \end{aligned}$$

Mostremos por indução que

$$|T^m x(t) - T^m y(t)| \leq |\lambda|^m c^m \frac{(t - a)^m}{m!} d(x, y).$$

Para $m = 1$ a afirmação é válida. Supomos então que (3.29) é válida para algum k e mostremos que vale para $k + 1$:

Por (3.16) e (3.27), temos

$$\begin{aligned}
 |T^{k+1}x(t) - T^{k+1}y(t)| &= |\lambda| \cdot \left| \int_a^t k(t, s) \cdot [T^k x(s) - T^k y(s)] ds \right| \\
 &\leq |\lambda| \cdot \int_a^t |k(t, s)| \cdot |T^k x(s) - T^k y(s)| ds \\
 &\leq |\lambda| \cdot c \cdot \int_a^t |T^k x(s) - T^k y(s)| ds \\
 &\leq |\lambda| \cdot c \cdot \int_a^t |\lambda|^k \cdot c^k \cdot \frac{(s - a)^k}{k!} \cdot d(x, y) \cdot ds \\
 &= |\lambda| \cdot c \cdot \frac{|\lambda|^k \cdot c^k}{k!} \cdot d(x, y) \cdot \int_a^t (s - a)^k ds \\
 &= |\lambda|^{k+1} \cdot \frac{c^{k+1}}{k!} \cdot d(x, y) \cdot \frac{(s - a)^{k+1}}{(k + 1)} \Big|_a^t \\
 &= |\lambda|^{k+1} \cdot \frac{c^{k+1}}{k!} \cdot d(x, y) \cdot \frac{(t - a)^{k+1}}{(k + 1)} \\
 &= |\lambda|^{k+1} \cdot c^{k+1} \cdot \frac{(t - a)^{k+1}}{(k + 1)!} d(x, y)
 \end{aligned}$$

O que completa a prova de (3.29). Tomando o máximo em I obtemos:

$$d(T^m x, T^m y) \leq \alpha_m d(x, y),$$

onde $\alpha_m = |\lambda|^m \cdot c^m \cdot \frac{(b - a)^m}{m!}$. Para λ fixo e m suficientemente grande, podemos fazer $\alpha_m < 1$. Usando o Teorema 3.5, segue a existência da solução e o teorema está provado. \square

Notemos que, uma Equação de Volterra pode ser considerada como um caso particular da Equação de Fredholm onde o *Kernel* k é zero na parte do quadrado $[a, b] \times [a, b]$, onde $s > t$ e pode não ser contínua em pontos da diagonal $t = s$.

3.3 Teoria da aproximação

A teoria da aproximação está preocupada com a aproximação de funções de um determinado tipo, por exemplo, funções contínuas num intervalo, por outras funções, possivelmente mais simples e fáceis de se trabalhar, como os polinômios.

Nesta seção iremos discutir a existência e unicidade do que se define como *melhor aproximação* em espaço normado e espaço de Hilbert que, como podemos perceber, depende da escolha da norma, obtendo assim diferentes tipos de aproximações.

Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço normado e suponha que dado qualquer $x \in X$, pode ser aproximado por um $y \in Y$, onde Y é um subespaço fixo de X . Seja δ a distância de x a Y , como no Teorema 2.82. Assim, se existe um $y_0 \in Y$ tal que

$$\|x - y_0\| = \delta$$

então y_0 é chamado de uma *melhor aproximação* para x de Y . Uma melhor aproximação é um elemento de distância mínima do x dado. Agora, qual é a condição necessária para a existência de $y_0 \in Y$? A unicidade também será abordada, pois, para um $x \in X$ e Y , podem haver mais de uma melhor aproximação. Essa discussão nos motiva ao teorema a seguir. Vamos denotar por $\delta = \delta(x, Y) = \inf_{y \in Y} \|x - y\|$.

Teorema 3.11 (Existência da melhor aproximação). *Se Y é um subespaço de dimensão finita de um espaço normado $(X, \|\cdot\|)$, então para cada $x \in X$, existe uma melhor aproximação de x para Y .*

Demonstração. Seja $x \in X$ dado. Considere a bola fechada

$$\tilde{B} = \{y \in Y : \|y\| \leq 2\|x\|\}.$$

Temos que $0 \in \tilde{B}$, de modo que a distância de x para \tilde{B} satisfaz

$$\delta(x, \tilde{B}) = \inf_{\tilde{y} \in \tilde{B}} \|x - \tilde{y}\| \leq \|x - 0\| = \|x\|. \quad (3.29)$$

Agora, se $y \notin \tilde{B}$, então $\|y\| > 2\|x\|$ e

$$\|x - y\| \geq \|y\| - \|x\| > 2\|x\| - \|x\| = \|x\| \geq \delta(x, \tilde{B}). \quad (3.30)$$

Isso mostra que $\delta(x, \tilde{B}) = \delta(x, Y) = \delta$, e este valor não pode ser assumido por um $y \in Y - \tilde{B}$, por causa do sinal $>$ em (3.30). Portanto se houver uma melhor aproximação, ela deve estar em \tilde{B} . Por isso o motivo do uso de \tilde{B} em vez de todo subespaço Y .

Consideremos o subconjunto compacto \tilde{B} , compacto pois é fechado limitado e Y tem dimensão finita.

A norma é contínua pelo Teorema 2.33. O Corolário 2.34 implica, portanto, que existe um $y_0 \in \tilde{B}$ tal que $\|x - y\|$ assume um mínimo $y = y_0$, portanto, y_0 é uma melhor aproximação para x de Y . \square

O fato da dimensão ser finita de Y no Teorema 3.11 é assencial, pois se $\dim Y = \infty$, não podemos garantir a existência de uma melhor aproximação. Com efeito, seja Y o conjunto de todos os polinômios em $[0, 1/2]$, de qualquer grau, considerado como um subespaço de $\mathcal{C}([0, 1/2], \mathbb{R})$. Isto implica que $\dim Y = \infty$.

Seja $x(t) = (1 - t)^{-1}$. Então, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que, definindo

$$y_n(t) = 1 + t + \cdots + t^n,$$

temos $\|x - y_n\| < \varepsilon$, para todo $n > N$. O que implica $\delta(x, Y) = 0$. No entanto, $x(t)$ não é um polinômio, assim vemos que não existe um $y_0 \in Y$, satisfazendo $\delta = \delta(x, Y) = \|x - y_0\| = 0$.

O conjunto das melhores aproximações é *convexo*. Esse resultado será provado a seguir. Para o próximo resultado usaremos a Definição 2.35.

Lema 3.12. *Em um espaço normado $(X, \|\cdot\|)$ o conjunto M das melhores aproximações de um ponto x para um subespaço Y de X é convexo.*

Demonstração. Tomemos δ como a distância entre x e Y . A conclusão é válida se M for vazio ou se tiver apenas um ponto.

Supomos que M tenha mais de um ponto. Então para $y, z \in M$ temos, por definição

$$\|x - y\| = \|x - z\| = \delta.$$

Mostremos que isto implica em

$$w = \alpha y + (1 - \alpha)z \in M,$$

se $0 \leq \alpha \leq 1$. Com efeito, $\|x - w\| \geq \delta$, já que $w \in Y$ e $\|x - w\| \leq \delta$ pois

$$\begin{aligned} \|x - w\| &= \|x - w + \alpha x - \alpha x\| \\ &= \|x - \alpha y - (1 - \alpha)z + \alpha x - \alpha x\| \\ &= \|x - \alpha y - z + \alpha z + \alpha x - \alpha x\| \\ &= \|\alpha(x - y) + (1 - \alpha)(x - z)\| \\ &\leq \alpha\|x - y\| + (1 - \alpha)\|x - z\| \\ &= \alpha\delta + (1 - \alpha)\delta \\ &= \alpha\delta + \delta - \alpha\delta \\ &= \delta, \end{aligned} \tag{3.31}$$

usamos $\alpha \geq 0$ bem como $(1 - \alpha) \geq 0$. Logo, $\|x - w\| = \delta$. Portanto, $w \in M$, o que mostra que M é convexo. \square

Definição 3.13. *Uma norma estritamente convexa é uma norma tal que para todo x, y de norma 1,*

$$\|x + y\| < 2, \quad \text{se} \quad x \neq y.$$

Um espaço normado com tal norma é chamado de, espaço estritamente convexo.

Exemplo 3.14. O corpo de escalares $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} visto como um espaço normado sobre \mathbb{K} , é estritamente convexo. Mais geralmente, todo espaço normado cuja a dimensão é 0 ou 1 é estritamente convexo.

Exemplo 3.15. Sejam $x_1 = (1, 1, 0, 0, \dots)$ e $x_2 = (1, -1, 0, 0, \dots)$ elementos de c_0 , espaço das seqüências que convergem para 0. Temos que

$$\|x_1\|_\infty = \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j| = 1 = \|x_2\|_\infty = \left\| \frac{x_1 + x_2}{2} \right\|_\infty.$$

Logo o espaço c_0 não é estritamente convexo.

Observe que para $\|x\| = \|y\| = 1$ a desigualdade triangular fornece $\|x + y\| \leq 2$ e a convexidade estrita exclui o sinal de igualdade, exceto quando $x = y$.

Definição 3.16. Um espaço normado $(X, \|\cdot\|)$ é estritamente convexo se para todo $x, y \in X$ tal que $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, temos x e y linearmente dependentes.

Teorema 3.17 (Unicidade de melhor aproximação). Em um espaço normado estritamente convexo X , existe no máximo uma melhor aproximação para um $x \in X$ de um subespaço.

Demonstração. Sejam $y \neq \tilde{y} \in Y$, dois elementos de melhores aproximação de $x \in X$. Então,

$$\begin{aligned} \left\| x - \frac{y + \tilde{y}}{2} \right\| &= \left\| \frac{1}{2}(x - y) + \frac{1}{2}(x - \tilde{y}) \right\| \\ &\leq \frac{1}{2}\|x - y\| + \frac{1}{2}\|x - \tilde{y}\| \\ &= \frac{1}{2}\delta(x, Y) + \frac{1}{2}\delta(x, Y) \\ &= \delta(x, Y), \end{aligned} \tag{3.32}$$

implica que o ponto médio é elemento de melhor aproximação. Consequentemente, por definição existe $\alpha : x - y = \alpha(x - \tilde{y})$.

Se $\alpha = 1$, então $y = \tilde{y}$, que é uma contradição.

Se $\alpha \neq 1$, então

$$x - y = \alpha(x - \tilde{y})$$

$$x - y = \alpha x - \alpha \tilde{y}$$

$$x - \alpha x = y - \alpha \tilde{y}$$

$$x(1 - \alpha) = y - \alpha \tilde{y}$$

$$x = \frac{y - \alpha \tilde{y}}{1 - \alpha} \in Y,$$

o que mostra que $x \in Y$, ou seja, é elemento de melhor aproximação. Portanto, $x = y = \tilde{y}$, o que é uma contradição, o que completa a demonstração. \square

Se o espaço não é estritamente convexo não podemos garantir a unicidade das melhores aproximações. Esse fato nos motiva ao seguinte resultado.

Lema 3.18. *O espaço $X = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, não é estritamente convexo com a norma do máximo.*

Demonstração. Consideremos x_1 e x_2 definido por

$$x_1(t) = 1, \quad x_2(t) = \frac{t - a}{b - a}$$

onde $t \in [a, b]$. Claramente, $x_1, x_2 \in \mathcal{C}[a, b]$ e $x_1 \neq x_2$.

Temos também que $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$ e $\|x_1 + x_2\| = \max_{t \in J} \left| 1 + \frac{t - a}{b - a} \right| = 2$, onde $I = [a, b]$. O que mostra que $\mathcal{C}[a, b]$, não é estritamente convexo. □

Uma vez que o espaço $X = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ não é estritamente convexo, o problema da unicidade requer mais atenção. Por isso, o seguinte conceito será de grande utilidade.

Definição 3.19. *Um ponto extremo de um x em $X = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ é um $t_0 \in [a, b]$ tal que $|x(t_0)| = \|x\|$.*

Exemplo 3.20. *Seja $Y = P_2 \subset X = \mathcal{C}([-2, 2], \mathbb{R})$. A função $x(t) = t^2$ varia de $[0, 2]$ em $t \in [-2, 2]$, deste modo, x possui dois pontos extremos $t = \pm 2$, pois*

$$\|x\| = \max_{t \in [-2, 2]} |x(t)| = 4 = |x(2)|$$

e

$$\|x\| = \max_{t \in [-2, 2]} |x(t)| = 4 = |x(-2)|.$$

O conceito central da nossa discussão é a condição de Haar, que se torna necessária e suficiente para a unicidade de aproximação no espaço $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

Definição 3.21 (Condição de Haar). *Um subespaço Y de dimensão finita do espaço $X = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ satisfaz a condição de Haar se cada $y \in Y, y \neq 0$, tiver no máximo $n - 1$ zeros em $[a, b]$, onde $\dim Y = n$.*

A condição de Haar está bem definida, pois é equivalente a condição que para cada base $\{y_1, \dots, y_n\} \in Y$ e cada n -upla de pontos distintos, t_1, \dots, t_n no intervalo $J = [a, b]$, o determinante da matriz

$$M = \begin{bmatrix} y_1(t_1) & y_1(t_2) & \cdots & y_1(t_n) \\ y_2(t_1) & y_2(t_2) & \cdots & y_2(t_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n(t_1) & y_n(t_2) & \cdots & y_n(t_n) \end{bmatrix},$$

seja diferente de zero. De fato, todo $y \in Y$, possui uma representação $y = \sum_{k=1}^n \alpha_k y_k$. O subespaço Y satisfaz a condição de Haar se, e somente se, todo $y = \sum_{k=1}^n \alpha_k y_k \in Y$, com n ou mais zeros $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ em $I = [a, b]$ for identicamente nulo. Isso significa que as n condições

$$y(t_j) = \sum_{k=1}^n \alpha_k y_k(t_j) = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.33)$$

devem implicar $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. Isto acontece se, e somente se, o determinante de M não é zero.

Exemplo 3.22. O conjunto $X = P_{n-1}([a, b], \mathbb{R})$ satisfaz a condição de Haar.

Lema 3.23. Suponha que um subespaço Y do espaço $X = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ satisfaz a condição de Haar. Se para um dado $x \in X$ e $y \in Y$ a função $x - y$ tem menos de $n + 1$ pontos extremos, então y não é uma melhor aproximação de x para Y , onde $\dim Y = n$.

Demonstração. Por hipótese a função $v = x - y$, tem $m \leq n$ pontos extremos $t_1, t_2, t_3, \dots, t_m$. Se $m < n$, escolhamos pontos adicionais t_j em $I = [a, b]$, até que tenhamos n pontos distintos t_1, \dots, t_n . Usando esses pontos e uma base $\{y_1, \dots, y_n\}$ para Y , consideremos o sistema de equações lineares não homogêneo.

$$\sum_{k=1}^n \beta_k y_k(t_j) = v(t_j), \quad (3.34)$$

$j = 1, \dots, n$ nas incógnitas β_1, \dots, β_n . Como Y satisfaz a condição de Haar, segue que (3.34) possui uma única solução. Usando essa solução, definimos

$$y_0 = \beta_1 y_1 + \dots + \beta_n y_n$$

e

$$\tilde{y} = y + \varepsilon y_0, \quad (\varepsilon > 0).$$

Mostremos que quando $\varepsilon \rightarrow 0$, a norma da função $\tilde{v} = x - \tilde{y}$, satisfaz

$$\|\tilde{v}\| = \|x - \tilde{y}\| < \|x - y\| = \|v\| \quad (3.35)$$

e assim y não pode ser uma melhor aproximação de x para Y .

De fato, vamos dividir $I = [a, b]$ em dois conjuntos N e $K = I - N$, onde N contém os pontos extremos t_1, \dots, t_m de v .

Em N , nos pontos extremos, $|v(t_i)| = \|v\|$ e $\|v\| > 0$, desde que $v = x - y \neq 0$ e $y_0(t_i) = v(t_i)$ por (3.34) e pela definição de y_0 .

Pela continuidade, para cada t_i , existe uma vizinhança N_i tal que em

$$N = N_1 \cup \dots \cup N_m,$$

temos

$$\mu = \inf_{t \in N} |v(t)| > 0, \quad \inf_{t \in N} |y_0(t)| \geq \frac{1}{2} \|v\|. \quad (3.36)$$

Como $y_0(t_i) = v(t_i) \neq 0$, para $t \in N$, temos $\frac{y_0(t)}{v(t)} > 0$, por (3.36) logo

$$\frac{y_0(t)}{v(t)} = \frac{|y_0(t)|}{|v(t)|} \geq \inf \frac{|y_0(t)|}{\|v\|} \geq \frac{1}{2}.$$

Seja $M_0 = \sup_{t \in N} |y_0(t)|$. Então para todo positivo $\epsilon < \frac{\mu}{M_0}$ e todo $t \in N$, obtemos

$$\frac{\epsilon y_0(t)}{v(t)} = \epsilon \frac{|y_0(t)|}{|v(t)|} \leq \frac{\epsilon M_0}{\mu} < 1.$$

Como

$$\tilde{v} = x - \tilde{y} = x - y - \epsilon y_0 = v - \epsilon y_0,$$

usando essa desigualdades, vemos que para todo $t \in N$ e $0 < \epsilon < \frac{\mu}{M_0}$,

$$\begin{aligned} |\tilde{v}(t)| &= |v(t) - \epsilon y_0(t)| \\ &= |v(t)| \cdot \left[1 - \frac{\epsilon y_0(t)}{v(t)} \right] \\ &\leq \|v\| \cdot \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \right) \\ &< \|v\|. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Em $K = I - N$, o qual é fechado, definimos

$$M_1 = \max_{t \in K} |y_0(t)| \quad e \quad M_2 = \max_{t \in K} |v(t)|.$$

Como N contém todos os pontos extremos de v , segue que $M_2 < \|v\|$ e daí $\|v\| = M_2 + \gamma$, onde $\gamma > 0$.

Escolhendo um número positivo $\epsilon < \frac{\gamma}{M_1}$, temos $\epsilon M_1 < \gamma$ e obtemos para todo $t \in K$,

$$\begin{aligned} |\tilde{v}(t)| &\leq |v(t)| + \epsilon |y_0(t)| \\ &\leq M_2 + \epsilon M_1 \\ &< \|v\|. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Escolhendo $\epsilon < \min\{\mu/M_0, \gamma/M_1\}$ e tomando o supremo, temos

$$\|\tilde{v}\| < \|v\|,$$

o que conclui a demonstração. □

Exemplo 3.24. Seja $Y = P_2$ subespaço do espaço $X = \mathcal{C}([0, 2], \mathbb{R})$ e satisfaz a condição de Haar. Tomemos $x(t) = t^3 \in X$ e $z(t) = t^2 \in P_2$. Logo,

$$y(t) = x(t) - z(t) = t^3 - t^2.$$

Temos que $\dim P_2 = 3$ e que y varia de $[-\frac{4}{27}, 4]$ em $t \in [0, 2]$, assim y possui um ponto extremo $t = 2$ pois,

$$\|y\| = \max_{t \in [0, 2]} |y(t)| = 4 = |y(2)|.$$

Logo y não é uma melhor aproximação de x para Y . Podemos observar esse fato graficamente como ilustrado na Figura 3.4.

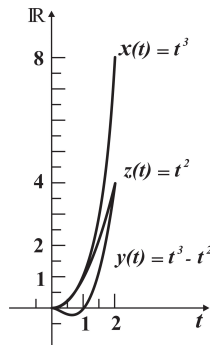


Figura 3.4: Gráfico das funções $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$. Fonte: Próprio autor.

No entanto, seja $Y = P_2 \in X = \mathcal{C}([0, 2], \mathbb{R})$ que satisfaça a condição de Haar tal que, $y(t) = t^2 \in Y$ e $x(t) = t^2 + \frac{1}{4} \in X$. Temos que

$$z(t) = x(t) - y(t) = t^2 + \frac{1}{4} - t^2 = \frac{1}{4}.$$

Logo, a $\dim Y = 3$ e z possui infinitos pontos extremos, como ilustra a Figura 3.5. Portanto, y é uma melhor aproximação de x para Y .

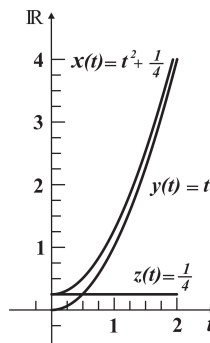


Figura 3.5: Gráfico das funções $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$. Fonte: Próprio autor.

Utilizando o lema anterior, obtemos o importante teorema a seguir.

Teorema 3.25 (Unicidade de Haar para melhor aproximação). *Seja Y um subespaço de dimensão finita do espaço $X = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. Então uma melhor aproximação para Y é única para todo $x \in \mathcal{C}[a, b]$ se, e somente se, Y satisfaz a condição de Haar.*

Demonstração. Suponhamos que Y não satisfaz a condição de Haar, ou seja, $\det M = 0$, logo o sistema homogêneo

$$\gamma_1 y_k(t_1) + \cdots + \gamma_n y_k(t_n) = 0, \quad k = 1, \dots, n$$

possui solução não trivial $\gamma_1, \dots, \gamma_n$. Usando essa solução e qualquer $y = \sum_{k=1}^n \alpha_k y_k \in Y$, temos

$$\sum_{j=1}^n \gamma_j y(t_j) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \left[\sum_{j=1}^n \gamma_j y_k(t_j) \right] = 0. \quad (3.39)$$

Além disso, o sistema transposto

$$\beta_1 y_1(t_j) + \cdots + \beta_n y_n(t_j) = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

também possui uma solução não trivial β_1, \dots, β_n . Usando esta solução definimos $y_0 = \sum_{k=1}^n \beta_k y_k$, o que implica $y_0 \neq 0$ e $y_0 = 0$ em t_1, \dots, t_n .

Seja λ tal que $\|\lambda y_0\| \leq 1$ e seja $z \in \mathcal{C}[a, b]$, tal que $\|z\| = 1$ e

$$z(t_j) = \operatorname{sgn}(\gamma_j) = \begin{cases} -1, & \text{se } \gamma_j < 0 \\ 1, & \text{se } \gamma_j \geq 0, \end{cases}$$

onde $\operatorname{sgn}(\gamma_j)$ denota função sinal. Definimos $x \in X$ por

$$x(t) = z(t)(1 - |\lambda y_0(t)|).$$

Então

$$x(t_j) = z(t_j) = \operatorname{sgn}(\gamma_j),$$

desde que $y_0(t_j) = 0$ e $\|x\| = 1$. Mostremos que esta função x possui infinitas melhores aproximações para Y . Usando $|z(t)| \leq \|z\| = 1$ e $|\lambda y_0(t)| \leq \|\lambda y_0\| \leq 1$, para todo $\varepsilon \in [-1, 1]$, obtemos

$$\begin{aligned} |x(t) - \varepsilon \lambda y_0(t)| &\leq |x(t)| + |\varepsilon \lambda y_0(t)| \\ &= |z(t)(1 - |\lambda y_0(t)|)| + |\varepsilon \lambda y_0(t)| \\ &= |z(t)|(1 - |\lambda y_0(t)|) + |\varepsilon \lambda y_0(t)| \\ &\leq 1 - |\lambda y_0(t)| + |\varepsilon \lambda y_0(t)| \\ &= 1 - |\lambda y_0(t)| + |\varepsilon| |\lambda y_0(t)| \\ &= 1 - (1 - |\varepsilon|) |\lambda y_0(t)| \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

Portanto, todo $\varepsilon\lambda y_0$, $-1 \leq \varepsilon \leq 1$, é uma melhor aproximação para x , desde que

$$\|x - y\| \geq 1, \quad \forall y \in Y. \quad (3.40)$$

Vamos mostrar (3.40) para um arbitrário $y = \sum_{k=1}^n \alpha_k y_k \in Y$. Suponha que $\|x - \tilde{y}\| < 1$, para um $\tilde{y} \in Y$. Então as condições

$$\begin{cases} x(t_j) = \operatorname{sgn}(\gamma_j) = \pm 1 \\ |x(t_j) - \tilde{y}(t_j)| \leq \|x - \tilde{y}\| < 1, \end{cases}$$

implicam que para todo $\gamma_j \neq 0$,

$$\operatorname{sgn}(\tilde{y}(t_j)) = \operatorname{sgn}(x(t_j)) = \operatorname{sgn}(\gamma_j).$$

De fato, se $x(t_j) = 1$, para todo j , assumamos que

$$\operatorname{sgn}(\tilde{y}(t_j)) \neq \operatorname{sgn}(x(t_j)).$$

Assim $\operatorname{sgn}(\tilde{y}(t_j)) = -1$. Segue que

$$\begin{aligned} |x(t_j) - \tilde{y}(t_j)| &= |1 - \tilde{y}(t_j)| \\ &= |1 - (-1)| \\ &> 1. \end{aligned}$$

Logo,

$$\operatorname{sgn}(\tilde{y}(t_j)) = 1 = \operatorname{sgn}(x(t_j)).$$

De maneira análoga, se $x(t_j) = -1$, para todo j , assumamos que

$$\operatorname{sgn}(\tilde{y}(t_j)) \neq \operatorname{sgn}(x(t_j)).$$

Assim $\operatorname{sgn}(\tilde{y}(t_j)) = 1$. Segue que

$$\begin{aligned} |x(t_j) - \tilde{y}(t_j)| &= |-1 - \tilde{y}(t_j)| \\ &= |-1 - 1| \\ &> 1. \end{aligned}$$

Logo,

$$\operatorname{sgn}(\tilde{y}(t_j)) = -1 = \operatorname{sgn}(x(t_j)).$$

Mas isso contradiz (3.39) com $y = \tilde{y}$ pois $\gamma_j \neq 0$, para algum j , assim

$$\sum_{j=1}^n \gamma_j \tilde{y}(t_j) = \sum_{j=1}^n \gamma_j \operatorname{sgn}(\gamma_j) = \sum_{j=1}^n |\gamma_j| \neq 0, \quad (3.41)$$

Portanto, (3.40) acontece.

Reciprocamente, suponha que Y satisfaz a condição de Haar, mas ambos $y_1 \in Y$ e $y_2 \in Y$ são melhores aproximações para o mesmo fixo $x \in \mathcal{C}[a, b]$. Então, definindo

$$v_1 = x - y_1 \quad e \quad v_2 = x - y_2,$$

temos $\|v_1\| = \|v_2\| = \delta$, onde δ é a distância de x a Y , como anteriormente. O Lema 3.12, implica que $y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$ é também uma melhor aproximação para x . Pelo Lema 3.23 a função

$$v = x - y = x - \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = \frac{1}{2}(v_1 + v_2), \quad (3.42)$$

tem pelo menos $n + 1$ pontos extremos t_1, \dots, t_{n+1} . Em tais pontos temos

$$|v(t_j)| = \|v\| = \delta.$$

De (3.42) obtemos

$$2v(t_j) = v_1(t_j) + v_2(t_j) = 2\delta \quad ou \quad -2\delta.$$

Agora, $|v_1(t)| \leq \|v_1\| = \delta$ e também para v_2 . Logo, ambos os termos devem ter o mesmo sinal e o valor absoluto máximo possível, isto é

$$v_1(t_j) = v_2(t_j) = \delta \quad ou \quad -\delta,$$

onde $j = 1, \dots, n + 1$. Isso implica que $y_1 - y_2 = v_2 - v_1$ tem $n + 1$ zeros em $[a, b]$. Logo, $y_1 - y_2 = 0$, pela condição de Haar. Concluimos que $y_1 = y_2$, o que completa a demonstração. \square

Lema 3.26. *Todo espaço de Hilbert é estritamente convexo.*

Demonstração. Para todo x e $y \neq x$ de norma 1, temos $\|x - y\| = \alpha$, onde $\alpha > 0$, e a igualdade do paralelogramo nos mostra que

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= -\|x - y\|^2 + (\|x\|^2 + \|y\|^2) \\ &= -\alpha^2 + 2(1 + 1) < 4. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Logo, $\|x + y\| < 2$. \square

Exemplo 3.27. *O espaço l_1 com a norma usual não é estritamente convexo. Com efeito, sejam $x = (1, 0, 0, \dots) \in l_1$ e $y = (0, 1, 0, \dots) \in l_1$. Então*

$$\|x\|_1 = \|y\|_1 = \left\| \frac{x + y}{2} \right\|_1 = 1 \quad e \quad \|x\| \neq \|y\|.$$

Teorema 3.28. *Para cada x dado em um espaço de Hilbert H e cada subespaço fechado Y de H , existe uma única melhor aproximação para x de Y .*

Demonstração. Segue do Teorema 3.17 e do Lema 3.26. \square

3.3.1 Aplicação sobre aproximação em espaços normados

Nesta seção vamos discutir uma aplicação sobre aproximação de funções em espaço normado, onde deduziremos os conhecidos *Polinômios de Chebyshev*. Apresentaremos inicialmente alguns resultados necessários para a compreensão da aplicação. Vamos considerar nesta subseção o espaço $X = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ com os escalares em \mathbb{R} . Iniciamos com a seguinte

Definição 3.29. *Seja $x \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ e $y \in Y$, onde Y é um subespaço de X . Um conjunto de pontos t_0, \dots, t_k em $[a, b]$, onde $t_0 < t_1 < \dots < t_k$, é chamado de conjunto alternante para $x - y$ se $x(t_j) - y(t_j)$ tem alternadamente os valores $\|x - y\|$ e $-\|x - y\|$ em consecutivos pontos t_j .*

Lema 3.30. *Seja Y um subespaço do espaço $X = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, que satisfaça a condição de Haar. Dado $x \in \mathcal{C}[a, b]$, seja $y \in Y$, tal que para $x - y$, existe um conjunto alternante $n + 1$ pontos, onde $\dim Y = n$. Então y é a melhor aproximação uniforme para Y de x .*

Demonstração. Pelo Teorema 3.11 e pelo Lema 3.25, existe uma única melhor aproximação para x de Y . Se esta solução não é y , ela é algum outro $y_0 \in Y$, então

$$\|x - y\| > \|x - y_0\|.$$

Esta desigualdade implica que, nesses $n + 1$ pontos extremos, a função

$$y_0 - y = (x - y) - (x - y_0),$$

tem o mesmo sinal que $x - y$, pois $(x - y)$ é igual à $\pm\|x - y\|$ em tal ponto, enquanto que, $x - y_0$, nunca pode exceder $\|x - y_0\|$ em valor absoluto, o que é estritamente menor que $\|x - y\|$. Isto mostra que $y_0 - y$ está alternando entre positivo e negativo naqueles $n + 1$ pontos, de modo que tenha n raízes em $[a, b]$, o que é impossível, a menos que $y_0 - y = 0$ e $y_0 - y \in Y$ e Y satisfaça a condição de Haar. Assim, y deve ser a melhor aproximação de x para Y . \square

Um problema clássico muito interessante é a aproximação de $x \in \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$, definida por

$$x(t) = t^n, \tag{3.44}$$

$n \in \mathbb{N}$ fixo, para um subespaço gerado $Y = [y_0, \dots, y_{n-1}]$, pelas funções

$$y_j(t) = t^j, j = 0, \dots, n - 1. \tag{3.45}$$

Ou seja, para $z = x - y$, $y \in Y$, temos

$$z(t) = t^n - [(\alpha_{n-1})t^{n-1} + (\alpha_{n-2})t^{n-2} + \dots + \alpha_0].$$

A resolução deste problema utiliza-se as funções chamadas de *Polinômios de Chebyshev*, do tipo 1 de ordem n .

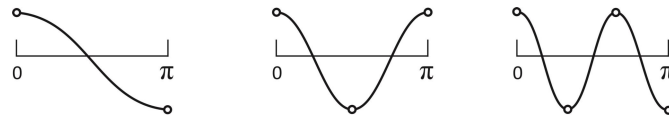


Figura 3.6: Gráfico de $t = \cos n\theta$, para $n = 1, 2, 3$. Fonte: Adaptado de Kreyszig (1978, p. 347).

Seja a função

$$t = \cos n\theta.$$

No intervalo $[0, \pi]$ a função definida por $x(n) = \cos n\theta$ possui $n+1$ pontos extremos, sendo os valores alternados. Pelo Lema 3.30, podemos observar que $x(t) = \cos n\theta$, poderá ajudar a resolver o problema, se pudermos escrever $\cos n\theta$ como polinômio em $t = \cos \theta$.

Pelas identidades trigonométricas, temos que;

$$\cos 0\theta = \cos 0 = 1$$

$$\cos 1\theta = \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

$$\cos 4\theta = 8 \cos^4 \theta - 8 \cos^2 \theta + 1$$

.

.

.

Substituindo $\cos \theta = x$, podemos escrever

$$T_0(x) = \cos(0\theta) = \cos(0) = 1$$

$$T_1(x) = \cos(1\theta) = x$$

$$T_2(x) = \cos 2\theta = 2x(x) - 1 = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = \cos 3\theta = 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = \cos 4\theta = 2x(4x^3 - 3x) - (2x^2 - 1) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T_5(x) = \cos 5\theta = 2x(8x^4 - 8x^2 + 1) - (4x^3 - 3x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

.

.

.

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Portanto, podemos provar por indução que existe uma representação da forma

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x). \quad (3.46)$$

De fato, tomando $T_n(x) = \cos(n\theta)$, para $n = 1$,

$$T_1(x) = \cos(1\theta) = \cos(\theta).$$

Supondo que seja verdade para algum k , mostremos que é válido para $k + 1$. Assim,

$$T_{k+1} \cos(\theta) = \cos(k+1)\theta = \cos(k\theta + \theta) = \cos(k\theta) \cos \theta - \text{sen}(k\theta) \text{sen} \theta.$$

e

$$T_{k-1} \cos(\theta) = \cos(k-1)\theta = \cos(k\theta - \theta) = \cos(k\theta) \cos \theta + \text{sen}(k\theta) \text{sen} \theta.$$

Adicionando em ambos os lados,

$$T_{k+1}(x) + T_{k-1}(x) = 2 \cos(k\theta) \cos \theta$$

$$T_{k+1}(x) = 2T_k(x)x - T_{k-1}(x)$$

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x)$$

Esta fórmula de recursão, nos oferece sucessivamente os gráficos das funções de melhor aproximação mostrado na figura 3.3.1

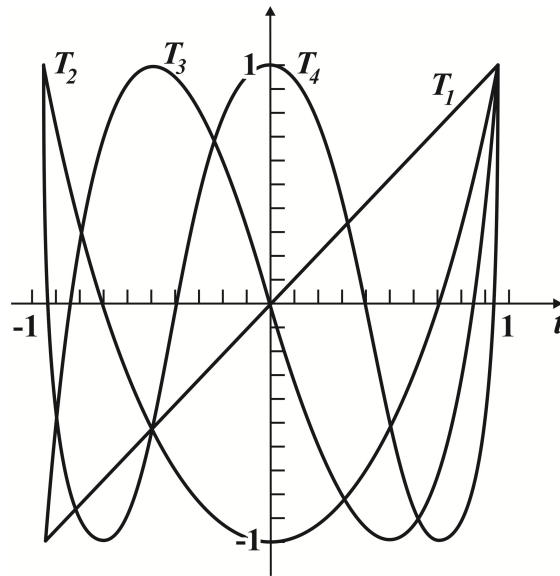


Figura 3.7: Gráfico de T_1, T_2, T_3 e T_4 . Fonte: Adaptado de Kreyszig (1978, p. 350).

Portanto, nossa discussão, obtemos a seguinte formulação do resultado que queríamos, que expressa a propriedade mais famosa dos *Polinômios de Chebyshev*.

Teorema 3.31 (Polinômio de Chebyshev). *O polinômio definido por*

$$\tilde{T}_n(t) = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot T_n(t) = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \cos(n \arccos t) \quad n \geq 1. \quad (3.47)$$

tem o menor desvio máximo de 0 sobre o intervalo $[-1, 1]$ entre todos os polinômios reais considerados em $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ que possuem grau n e coeficiente 1.

A melhor aproximação uniforme para a função $x \in \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$, definido por $x(t) = t^n$, para o gerado $Y = \{y_0, \dots, y_{n-1}\}$ com y_j dado por (3.45) (isto é, a aproximação por um polinômio real de grau menor que n) é y definido por

$$y(t) = x(t) - \frac{1}{2^{n-1}} \cdot T_n(t).$$

Neste capítulo, discutimos a existência e unicidade de um ponto fixo de certas classes de operadores lineares chamadas de *contrações*, que nos levaram aos teoremas sobre existência e unicidade de soluções de Equações Diferenciais e de Equações Integrais. Em seguida, definimos o que é uma melhor aproximação e analisamos as condições necessárias e suficientes para a existência e unicidade de melhores aproximações em espaços normados e espaços de Hilbert. Como aplicação de aproximação em espaço normado, mostramos que o polinômio de Chebyshev possui o menor desvio máximo de 0 no intervalo $[-1, 1]$ entre todos os polinômios reais considerados em $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ que possuem grau n e coeficiente 1.

4 Considerações finais

A Matemática é o alicerce para várias ciências, que nos proporcionam com seus conceitos, a compreensão dos muitos fenômenos ocorridos a nossa volta, na natureza, nos objetos, em seus padrões e relações, nos auxiliando a compreender melhor o mundo em que vivemos.

O termo Equação Diferencial ganhou destaque durante a Segunda Guerra Mundial, já que estas eram utilizadas com a finalidade de calcular a trajetória exata de projéteis lançados por armas e canhões, ver [1].

Originalmente, os matemáticos utilizavam cálculos mais simples de séculos passados para determinar a velocidade, pressão, altura, curva, distância e outros parâmetros.

O desenvolvimento de máquinas capazes de acelerar o cálculo manual de Equações Diferenciais conduziu, em parte, à criação do computador através dos esforços de Vannevar Bush, John Von Neumann, entre outros. Para mais detalhes e aplicações ver [2] e [7].

Neste trabalho, procuramos mostrar a importância da Análise Funcional e suas aplicações para a resolução de muitos problemas reais, transferidos para linguagem matemática e resolvidos entre outras, através das Equações Diferenciais, Equações Integrais e a Teoria da Aproximação.

Discutimos no segundo capítulo, resultados básicos de Espaços Métricos que nos levaram aos principais conceitos sobre espaço de Banach e espaço de Hilbert. Esses resultados nos ofereceram embasamento suficiente para no terceiro capítulo definirmos um ponto fixo de uma aplicação e a prova do Teorema do Ponto Fixo de Banach, garantindo assim, a existência e unicidade de solução para Equações Diferenciais de Primeira Ordem e a existência e unicidade para solução de Equações Integrais de Fredholm de primeira e segunda espécie e a equação de Volterra.

Definimos também, uma *melhor aproximação* para espaços normados e espaços de

Hilbert, provando que a existência e unicidade de tais aproximações, dependem da norma escolhida e de algumas condições necessárias como a Condição de Haar para espaços normados e subespaço convexo para espaço de Hilbert.

Referências

- [1] BOTELHO, G; PELLEGRINO, D; TEIXEIRA, E.- *Fundamentos de Análise Funcional*. SBM, Rio de Janeiro, 2015.
- [2] OLIVEIRA, C.R.- *Introdução à análise funcional*. IMPA. Rio de Janeiro, 2015.
- [3] BUENO, H. P.- *Álgebra Linear*. SBM. Rio de Janeiro, 2006.
- [4] KUNZE, R; HOFFMAN, K.- *Álgebra Linear*. Livros técnicos e científicos Editora S.A. Rio de Janeiro, 1976.
- [5] LIMA, E.L.- *Espaços Métricos*. IMPA. Rio de Janeiro, 2015.
- [6] KREYSZIG, E.- *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons, Canadá, 1978.
- [7] FIGUEIREDO, D. G.; NEVES, A. F.- *Equações diferenciais aplicadas*. IMPA. Rio de Janeiro, 2015.
- [8] HÖNIG, C.S.- *Análise funcional e aplicações*. vol. 1 e 2, IME - USP, São Paulo, 1970.
- [9] LIMA, E.L.- *Análise real volume 1. Funções de uma variável*. IMPA. Rio de Janeiro, 2007.
- [10] RADIN, L.A.- *Tópicos de aproximação em espaços normados*. Unicamp. Campinas, 2002.
- [11] BARRETO, A.C.- *Tópicos de Análise, 8º Colóquio Brasileiro de Matemática*. 1971.