UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO" UNESP

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ÁREA DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA E SEUS FUNDAMENTOS FILOSÓFICO-CIENTÍFICOS

A LINGUAGEM MATEMÁTICA NO ESTUDO DE NÚMEROS RACIONAIS: UMA ABORDAGEM ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

SABRINA APARECIDA MARTINS VALLILO

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO

2018

SABRINA APARECIDA MARTINS VALLILO

A LINGUAGEM MATEMÁTICA NO ESTUDO DE NÚMEROS RACIONAIS: UMA ABORDAGEM ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus Rio Claro, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Orientadora: Lourdes de la Rosa Onuchic

Rio Claro –SP

2018

510.07 Vallilo, Sabrina Aparecida Martins
V188L A linguagem matemática no estudo de números racionais : uma abordagem através da resolução de problemas / Sabrina Aparecida Martins Vallilo. - Rio Claro, 2018
237 f. : il., figs., quadros, fots.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientadora: Lourdes de la Rosa Onuchic

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Resolução de problemas. 3. Metodologia de ensino-aprendizagem - Avaliação de matemática através da resolução de problemas. 4. Linguagem matemática. 5. Linguagem vernácula. 6. Números racionais. I. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP - Ana Paula S. C. de Medeiros / CRB 8/7336

SABRINA APARECIDA MARTINS VALLILO

A LINGUAGEM MATEMÁTICA NO ESTUDO DE NÚMEROS RACIONAIS: UMA ABORDAGEM ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus Rio Claro, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Comissão Examinadora

Prof. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic – orientadora

Prof. Dra. Rosana Giaretta Sguerra Miskulin

Prof. Dra. Edna Maura Zuffi

Rio Claro – SP, 26 de Abril de 2018

Resultado: APROVADA

À minha sobrinha Ana Lua e ao meu avô José Gucci.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus por me dar essa oportunidade e me ajudar a chegar até aqui.

Ao meu pai Antonio, minha mãe Clarice e meu irmão Jean pelo amor e todo apoio que me deram para realizar este trabalho. Agradeço por sempre estarem do meu lado, me apoiando e torcendo por mim.

À minha orientadora Professora Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic pela paciência e dedicação durante todo período de orientação para a realização deste trabalho. Agradeço por me apresentar seus livros e por suas contribuições que me fizeram crescer a cada dia.

Aos membros da Banca, Professora Dra. Edna Maura Zuffi e Professora Dra. Rosana Giareta Sguerra Miskulin pelo compromisso e dedicação que tiveram com meu trabalho, contribuindo com suas valiosas sugestões no exame de Qualificação.

Ao GTERP pelo acolhimento e momentos de trabalho e estudo, possibilitando meu crescimento profissional e pessoal. Em especial, agradeço aos amigos Lilian, Egídio, Cecília, Luiz e Márcio por todas as conversas, conselhos, por lerem e me ajudarem na fase final da Dissertação.

Aos alunos do PPGEM e amigos que Rio Claro me deu.

Agradeço à Cida e ao Nilton, de maneira especial, pelos anos de amizade e por me deixarem passar várias noites em suas casas. Aos grandes amigos de São Carlos, por toda compreensão, apoio e incentivo. Obrigada, Dani, Ri, Anderson, Edna, Teté e Dani. Em especial, agradeço à minha prima Lívia pela convivência de um ano em Rio Claro e ao Vinicius por todo amor e compreensão na fase final de escrita do trabalho.

Aos meus familiares que sempre me apoiaram na realização desse trabalho. Em especial, meus padrinhos, tias, primas e primos que me incentivaram na realização desse importante degrau em minha formação acadêmica.

Aos professores que fizeram parte de toda a minha trajetória, em especial aos professores do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Unesp de Rio Claro.

Ao CNPq pelo financiamento desta pesquisa, permitindo minha dedicação exclusiva para a pesquisa.

RESUMO

Esta pesquisa tem como objetivo investigar como que a Linguagem Vernácula e a Linguagem Matemática contribuem no trabalho com números racionais quando se faz uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Esta pesquisa foi desenvolvida seguindo a Metodologia Científica de Romberg-Onuchic apresentada por Onuchic e Noguti (2014). Apresentamos a fundamentação teórica desta pesquisa a partir de três variáveis-chave (Resolução de Problemas, Linguagem Vernácula e Linguagem Matemática, Números Racionais). Procuramos investigar de que forma as Linguagens Vernácula e Matemática contribuem para o trabalho com as diferentes personalidades do número racional visando a aprendizagem e a avaliação do aluno ao se adotar a Metodologia de Resolução de Problemas. Para tanto, estabelecemos como procedimentos da pesquisa a elaboração de um Projeto e sua aplicação em uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola estadual da rede pública de ensino da cidade de Rio Claro - SP. Esse Projeto envolve o ensino de algumas personalidades do número racional apresentadas por Botta e Onuchic (1997) como ponto racional, fração e quociente. Percebemos que o trabalho do professor de incentivar os alunos a entenderem os significados das palavras presentes nos enunciados dos problemas que envolvem números racionais, possibilita que eles compreendam e escrevam usando da linguagem vernácula para que possam dominar a linguagem matemática corretamente.

PALAVRAS-CHAVE: Resolução de Problemas. Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Linguagem Matemática. Linguagem Vernácula. Números Racionais.

ABSTRACT

This research aims to inquiry how the native language and the mathematical language contribute in the work with rational numbers when we carry out a practice in the Teaching-Learning-Assessment Methodology of Mathematics through Problem Solving. That study was developed with the scientific methodology of research of Romberg-Onuchic as pointed out by Onuchic and Noguti (2014). We came out our theoretical tenants in three variables-key, such that: Problem Solving, native language and mathematical language, and rational numbers. We had looked for following up from which ways the native language and mathematical language can contribute to the educational work with the different personalities of rational numbers in the use of methodology on Problem Solving. Therefore, we had pointed out as research procedures the figuring out of a project and its application at a 6th grade of the Elementary School in a State Public School of the City of Rio Claro – SP. This project encompasses the teaching of some personalities of the rational numbers, such that: rational point, fractions and quotient presented by Botta and Onuchic (1997). Within that work, we can perceive that the mathematic's teacher's work with the practical methodology of Teaching-Learning-Assessment through Problem Solving end up allowing that actors of that cenary can understand and write finding out the native language to hold upon the mathematical language correctly and properly.

KEYWORDS: Teaching-Learning-Assessment Methodology of Mathematics through Problem Solving. Problem Solving. Mathematical language. Native language. Rational numbers.

LISTA DE QUADROS

ÍNDICE DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Esta Dissertação de Mestrado é resultado de uma pesquisa que abrange dois temas: Linguagem Matemática e Números Racionais. A pesquisa tem a pretensão de evidenciar como o professor de Matemática pode promover o domínio da linguagem matemática, em suas aulas, quando propõe a resolução de problemas, especificamente ao trabalhar Números Racionais no Ensino Fundamental. Buscamos promover a compreensão do aluno sobre a estrutura da linguagem matemática, com seus símbolos e regras, a fim de tornar o aluno capaz de se comunicar matematicamente.

Para seu desenvolvimento, a pesquisa se apoia na *Metodologia Científica de Romberg-Onuchic*. Desta forma, nosso objetivo foi o de elaborar um Projeto para uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental, mostrando como o professor pode trabalhar as personalidades dos Números Racionais, destacando o importante papel das linguagens vernácula e matemática e fazendo uso da *Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas* como Metodologia Pedagógica.

Esta dissertação está dividida em nove Seções de forma que sua escrita é apresentada de duas formas. É usada a primeira pessoa do singular para se referir às falas da pesquisadora Sabrina e a primeira pessoa do plural para se referir à escrita da pesquisadora juntamente com sua orientadora.

A Seção 1- *Metodologia de Pesquisa* apresenta algumas concepções que temos sobre pesquisa e sobre pesquisa em Educação Matemática a partir de alguns referenciais teóricos. Nessa Seção, esclarecemos que a Metodologia Científica de Romberg-Onuchic conduziu o desenvolvimento da pesquisa de forma que são contempladas as onze etapas sugeridas pela metodologia. Essas onze etapas estão distribuídas em três blocos: o primeiro conduz à identificação do problema (atividades 1, 2, 3, 4 e 5); o segundo bloco sugere que o pesquisador levante estratégias e realize procedimentos a fim de resolver o problema (atividades 6 e 7); e o terceiro e último bloco conduz à análise das informações obtidas, buscando evidências a partir dos procedimentos colocados em ação para responder à pergunta da pesquisa (atividades 8, 9, 10 e 11). Para compor e nomear cada seção da Dissertação, tomamos como base as atividades descritas por Romberg nesses três grandes blocos que tratam do reconhecimento da pergunta da pesquisa, o desenvolvimento e as conclusões do trabalho, respectivamente

A Seção 2 - *Começando a Pesquisa: o primeiro bloco de Romberg-Onuchic* apresenta o desenvolvimento de todas as etapas do primeiro bloco, esclarecendo nosso Fenômeno de Interesse e nosso Modelo Preliminar, um modelo que apresenta as primeiras ideias relacionadas aos temas de investigação que vieram à cabeça da pesquisadora. Apresentamos quais foram as motivações da pesquisadora que provocaram interesse em pesquisar.

Essa Seção apresenta quais são as variáveis-chave da pesquisa, consideradas temas importantes a serem abordados. Escolhemos as seguintes variáveis-chave para esta pesquisa: Resolução de Problemas, Linguagens Vernácula e Matemática e Números Racionais. As seções seguintes se referem à fundamentação teórica construída a partir da etapa *Relacionar com ideias de outros* que faz parte do primeiro bloco de Romberg-Onuchic.

A Seção 3 – *Resolução de Problemas* traz uma breve abordagem histórica sobre a Resolução de Problemas e apresenta a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, apontando suas características e seus fundamentos.

A Seção 4 – *Diferentes formas de Linguagens* apresenta definições e aborda alguns aspectos sobre comunicação e linguagem, vistos a partir do ambiente escolar, de forma que o professor possa entender como se dá o processo de comunicação entre ele e seu aluno na aula de Matemática. Essa Seção também apresenta relações entre a linguagem vernácula e a linguagem matemática, apresenta caraterísticas próprias da linguagem matemática e referenciais teóricos que orientam o trabalho do professor com as linguagens vernácula e matemática buscando à compreensão de enunciados de problemas.

Na Seção 5 – *Números Racionais,* apresentamos alguns teóricos que se dedicaram ou se dedicam ao estudo do conjunto dos números racionais e sobre as dificuldades que os alunos possuem em identificar um número racional como fração, quociente e razão, por exemplo. Apresentamos para o professor de Matemática, de forma especial, a teoria de Ohlsson (1991) sobre Números Racionais e seus construtos.

A Seção 6 - *O Modelo Modificado e a Pergunta da Pesquisa* apresenta o Modelo Modificado, elaborado a partir do Modelo Preliminar com modificações advindas das reflexões da pesquisadora após “ouvir” as ideias de outros pesquisadores que fundamentaram a pesquisa nas seções anteriores. Finalizamos a seção apresentando nossa pergunta de pesquisa:

De que forma as Linguagens Vernácula e Matemática contribuem para o trabalho com as diferentes personalidades do número racional ao se adotar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas?

Na Seção 7 – *Dando prosseguimento à pesquisa: o segundo bloco de Rombeg-Onuchic*, apresentamos as estratégias adotadas e os procedimentos que foram colocados em ação para a apresentação de dados que conduziram às respostas da pergunta da pesquisa. Os procedimentos dizem respeito à criação de um Projeto para o 6º ano do Ensino Fundamental que contemple o ensino de números racionais valorizando os papéis das linguagens vernácula e matemática. Este projeto foi aplicado em uma escola da rede pública de ensino da cidade de Rio Claro -SP.

A Seção 8 – *Tirando conclusões: o terceiro bloco de Romberg-Onuchic* apresenta a análise dos dados obtidos a partir da aplicação do Projeto. Assim, mostramos o que ficou evidente nessa aplicação ao escrever as etapas do terceiro bloco e procuramos responder nossa pergunta da pesquisa ao relatar resultados e, na Seção 9 – *Conclusões,* apresentamos nossas conclusões finais sobre a realização deste trabalho, esclarecendo-as ao leitor. Trazemos como conclusão que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas possibilita um bom trabalho ao professor que se interessa em trabalhar Números Racionais se atentando ao importante papel das linguagens vernácula e matemática.

Por fim, nossas conclusões permitem antecipar ações de outros pesquisadores que estejam interessados em investigar a linguagem matemática em uma turma de 6ºano do Ensino Fundamental e apresentar novos resultados para a área de pesquisa em Educação Matemática.

1. Metodologia de Pesquisa

Começamos este trabalho com uma breve reflexão sobre o que é pesquisa e o que é pesquisa em Educação Matemática, trazendo alguns aportes teóricos para isso. Nesta seção, apresentaremos a metodologia científica de pesquisa adotada para a realização deste trabalho.

1.1 O que é Pesquisa?

Podemos encontrar diversas definições para o termo pesquisa no dicionário Houaiss como: conjunto de atividades que têm por finalidade a descoberta de novos conhecimentos no domínio científico, literário ou artístico. Pesquisar, segundo o mesmo dicionário, é investigar e procurar com aplicação.

D'Ambrósio (1996, p.79) afirma que "pesquisa é o que permite a interface interativa entre teoria e prática e partir para a prática é como um mergulho no desconhecido". Diz, ainda, que "na etimologia da palavra, pesquisa está ligada à investigação, à busca e a ideia, sempre a mesma, é a de mergulhar na busca de explicações dos porquês e dos comos, com foco em uma prática" (D'AMBRÓSIO, 1996, p.94).

Para Romberg (2007), pesquisa refere-se a processos, a coisas que o pesquisador faz, não a objetos que alguém pode tocar e ver.

A partir dessas ideias, podemos começar a pensar sobre o que realmente significa pesquisar. Trata-se de procurar respostas sobre inquietações que se tem sobre um determinado assunto, pensar em como proceder e o que fazer para alcançar respostas. Em linhas gerais, pesquisar é investigar.

Souza (2010), com base em D'Ambrósio (1996), apresenta duas vertentes para a pesquisa: a pesquisa quantitativa e a pesquisa qualitativa.

> A primeira delas lida com grande número de indivíduos e recorre aos métodos estatísticos para coletar e analisar os dados obtidos. Não há preocupação em se relacionar os dados coletados com o pesquisador ou com o ambiente de pesquisa. É comum *chamá-la de pesquisa estatística ou pesquisa positivista*. [...] D'Ambrósio diz que pesquisa qualitativa, também chamada pesquisa naturalística, tem, em sua essência, a interação do pesquisador com a interpretação dos dados e discursos, mesmo quando ela envolve grupos de participantes. (SOUZA, 2010, p. 21)

Sobre a pesquisa qualitativa, D'Ambrósio descreve algumas etapas que devem ser seguidas pelo pesquisador:

> 1) Formulação das questões a serem investigadas com base no referencial teórico do pesquisador;
>
> 2) Seleção de locais, sujeitos e objetos que constituirão o foco da investigação;
>
> 3) Identificação das relações entre esses elementos;
>
> 4) Definição de estratégias de coleção e análise de dados;
>
> 5) Coleção de dados sobre os elementos selecionados no item 2 e sobre as relações identificadas no item 3;
>
> 6) Análise desses dados e refinamento das questões formuladas no item 1 e da seleção proposta no item 2;
>
> 7) Redefinição de estratégias definidas no item 4;
>
> 8) Coleta e análise dos dados. (D'AMBRÓSIO, 1996, p. 103)

Esperamos que essas etapas estejam presentes em toda pesquisa qualitativa, visto que o pesquisador se preocupa em pensar sobre o que investigar e como fazê-lo. Assim, essas etapas fazem parte do processo de pesquisar.

1.2 O que é Pesquisa em Educação Matemática?

Entendendo pesquisa como o processo de se investigar, nos questionamos sobre que área de estudos nossa pesquisa se situa. Este trabalho de mestrado coloca-se na área da Educação Matemática, área recente pois começou a ser entendida como investigação somente no final do século XIX. Nessa época, seu objetivo era o de fazer com que os professores de Matemática das universidades, além de ministrarem aulas, desenvolvessem pesquisas.

A Educação Matemática foi, então, criando seu próprio espaço como campo de pesquisa. Kilpatrick (1996), no artigo *Fincando estacas: uma tentativa de demarcar a Educação Matemática como campo profissional e científico*, com tradução de Miskulin et al, aponta, em seu resumo, que

> O campo da Educação Matemática tem aspectos profissionais e acadêmicos. Do lado acadêmico, a questão do que é considerado pesquisa está ainda sendo debatida. Um exame de dois conjuntos de critérios propostos para avaliar a qualidade da pesquisa em Educação Matemática revela que, apropriadamente interpretados, os critérios emprestados das ciências naturais e sociais são relevantes para um campo que está tentando ser científico. Do lado profissional, a Educação Matemática deve inevitavelmente preocupar-se com a aplicação do conhecimento especializado para auxiliar os estudantes e os professores que são seus clientes. A formação de professores continua sendo a função maior da Educação Matemática, paralelamente à busca do conhecimento sólido para ser aplicado. Os educadores matemáticos universitários precisam trabalhar junto com matemáticos e com professores em sala de aula no desenvolvimento da teoria e da prática. A Educação Matemática tem se desenvolvido bem em países nos quais as estruturas institucionais a apoiam como um campo acadêmico identificável. (KILPATRICK, 1996, p.99)

No Brasil, a Educação Matemática

> Teve início a partir do MMM[1], mais precisamente no final dos anos de 1970 e durante a década de 1980. É nesse período que surge a Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) e os primeiros programas de pós-graduação em Educação Matemática. (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p.07)

É sobre o campo de pesquisa da Educação Matemática que esta pesquisa buscou sua atuação.

1.3 A Metodologia Científica da Pesquisa

A escola é um ambiente com diversas variáveis complexas que interferem, direta ou indiretamente, no processo de ensino e aprendizagem, visto que a escola é formada por seres sociais. No que diz respeito ao ensino da Matemática, o currículo, a postura e as concepções do professor, a infraestrutura da escola e o envolvimento dos alunos em suas atividades são algumas das variáveis que influenciam esse processo.

A insatisfação do pesquisador, frente a alguma coisa que lhe chame a

[1] Movimento da Matemática Moderna

atenção para investigar, permite fazer surgir questões a se pesquisar. Ao tratar sobre isso, Romberg (2007) enfatiza a importância de se escolher um método para estudar essas questões e buscar respostas.

Durante uma pesquisa, os questionamentos e as teorias desenvolvidas e estudadas fazem-se muito presentes. De acordo com Santos (2007),

> Teorizar é levantar um problema e, para ele, gerar soluções possíveis [...] O próximo passo é escolher, entre várias soluções possíveis, a mais adequada ao suprimento da necessidade geradora inicial. Este é o conteúdo da técnica, a aplicação dos resultados teóricos [...] A capacidade de questionar intencionalmente é, pois, a marca maior de racionalidade. É o que permite ao ser racional ir além das respostas naturais, únicas, para as suas necessidades impostas por instinto/ambiente/rotina, e diversificar. A razão, assim, manifesta-se na diversidade das respostas. (SANTOS, 2007, p. 16)

Ainda, para o mesmo autor “nada é mais útil e prático para o animal racional do que uma boa teoria. Resultado do esforço individual e coletivo para dar significação à realidade, a teoria é a geradora e a organizadora da cultura e das suas ciências.” (SANTOS, 2007, p. 20)

Sobre isso, Onuchic e Noguti (2014) fazem questionamentos sobre o que pesquisar e como pesquisar.

> Se pesquisar é o exercício intencional da pura atividade intelectual, visando a melhorar as condições práticas da existência, como pesquisar? Quais são as atividades que um pesquisador desenvolve ao longo de sua pesquisa? Que métodos usa o pesquisador para realizar suas pesquisas? (ONUCHIC; NOGUTI, 2014, p. 56)

Escolher uma metodologia de pesquisa é escolher como proceder para realizar a pesquisa. Ao nos adentrarmos na área de pesquisa em Educação Matemática, a vemos além de uma disciplina, olhamos para ela como um campo de estudo, corroborando com Romberg (2007). Por isso, para as pesquisas em Educação Matemática, é conveniente usar uma metodologia científica para nortear os passos.

Assim, cada pesquisador deve escolher seu método, ciente de que

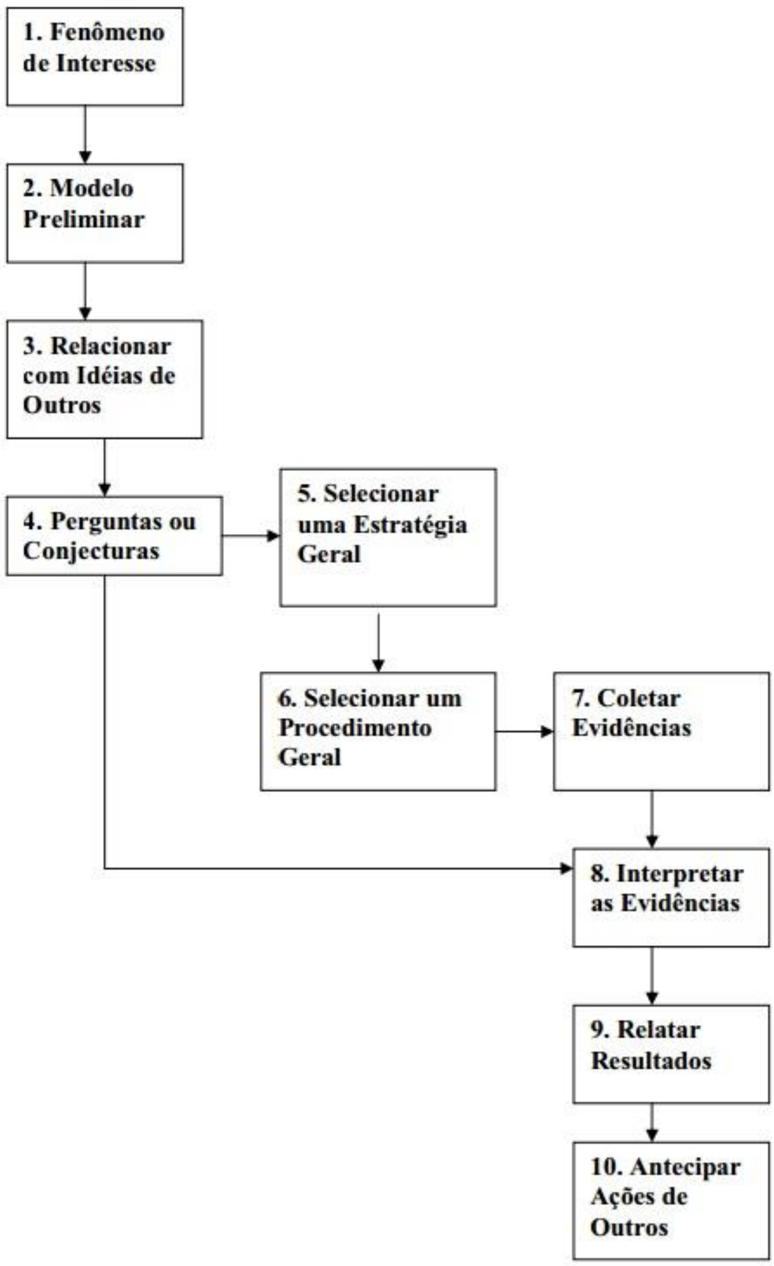
> O que diferencia um método de outro não é só o modo pelo qual a informação é coletada, analisada e relatada mas, também, os próprios tipos de perguntas tipicamente feitas e os princípios ou paradigmas sobre os quais os métodos para investigar tais perguntas estão baseados. (ROMBERG, 2007, p.97)

Entendemos que o método e a metodologia escolhidos para fazer uma pesquisa têm muito a ver com as perguntas que se quer responder ao realizar a pesquisa e com o modo de o pesquisador procurar responder suas inquietações.

1.3.1 A Metodologia Científica de Romberg

Enquanto esta pesquisa começava a ser pensada, procuramos encontrar uma metodologia científica para dar suporte aos interesses acerca da pesquisa em Educação Matemática. Para guiar as atividades da pesquisa científica, Thomas A. Romberg propõe um fluxograma em um artigo de 1992, com tradução de Onuchic e Boero (2007) e com título “Perspectivas sobre o Conhecimento e Métodos de Pesquisa”. Romberg (1992) também se preocupou em mostrar as tendências de pesquisa que estão ligadas ao ensino e à aprendizagem de Matemática e aos métodos de pesquisa. No artigo, ele apresenta algumas atividades para serem realizadas a fim de conduzir o trabalho do pesquisador. Pode-se ver essas atividades na Figura 1.

Figura 1: Atividades de pesquisa e como elas estão relacionadas



Fonte: (ROMBERG, 2007, p.98)

Há dez atividades propostas no fluxograma de Romberg, de forma agrupada em três blocos que, basicamente, dizem respeito à elaboração do Modelo de Pesquisa (Atividades de 1 a 4); Seleção de Estratégias e Procedimentos (Atividades 5 e 6); Coleta e Interpretação de Evidências (Atividades 7 e 8), que levam ao Relato de Resultados (Atividade 9) e Antecipação de ações de outros (Atividade 10), respectivamente.

A escolha de um fenômeno de interesse é o “pontapé” inicial de qualquer pesquisa científica, já que esta trata de estudar uma inquietação sobre alguma coisa que chama a atenção do pesquisador, que aponta seu objeto de estudo. Daí, surge a necessidade da elaboração de um modelo preliminar em que se procura delimitar alguns passos que o pesquisador julga necessários para a execução da pesquisa. Após olhar para esse modelo, o pesquisador pode perceber que alguns de seus dados podem variar. Esses dados que variam pedem por “ouvir” outros pesquisadores que falam a respeito deles. Esses dados são as variáveis-chave da pesquisa, entendidas como os assuntos principais que serão abordados durante o trabalho.

Ao que diz respeito a relacionar com ideias de outros, o pesquisador deve apresentar as ideias de outros autores que já pensaram, ou ainda pensam, sobre as variáveis escolhidas, construindo uma fundamentação teórica para os assuntos que o inquietam. A próxima etapa, visto que o pesquisador já tem um aporte teórico bem estruturado e um modelo dos passos que pretende seguir para sanar suas inquietações, é definir qual a pergunta da pesquisa ou as conjecturas levantadas para se investigar.

Com a pergunta da pesquisa ou a conjectura, o pesquisador começa a selecionar estratégias e procedimentos, que buscam auxiliá-lo a responder sua pergunta ou provar sua conjectura. Essas atitudes condizem com o segundo bloco do fluxograma de Romberg. O pesquisador trabalha, portanto, na elaboração da pesquisa, passo em que se deve coletar evidências e analisá-las para relatar resultados sobre a pergunta da pesquisa. Por fim, o pesquisador antecipa ações de outros, sugerindo temas de estudo para pesquisadores a partir das evidências apresentadas e analisadas em seu trabalho.

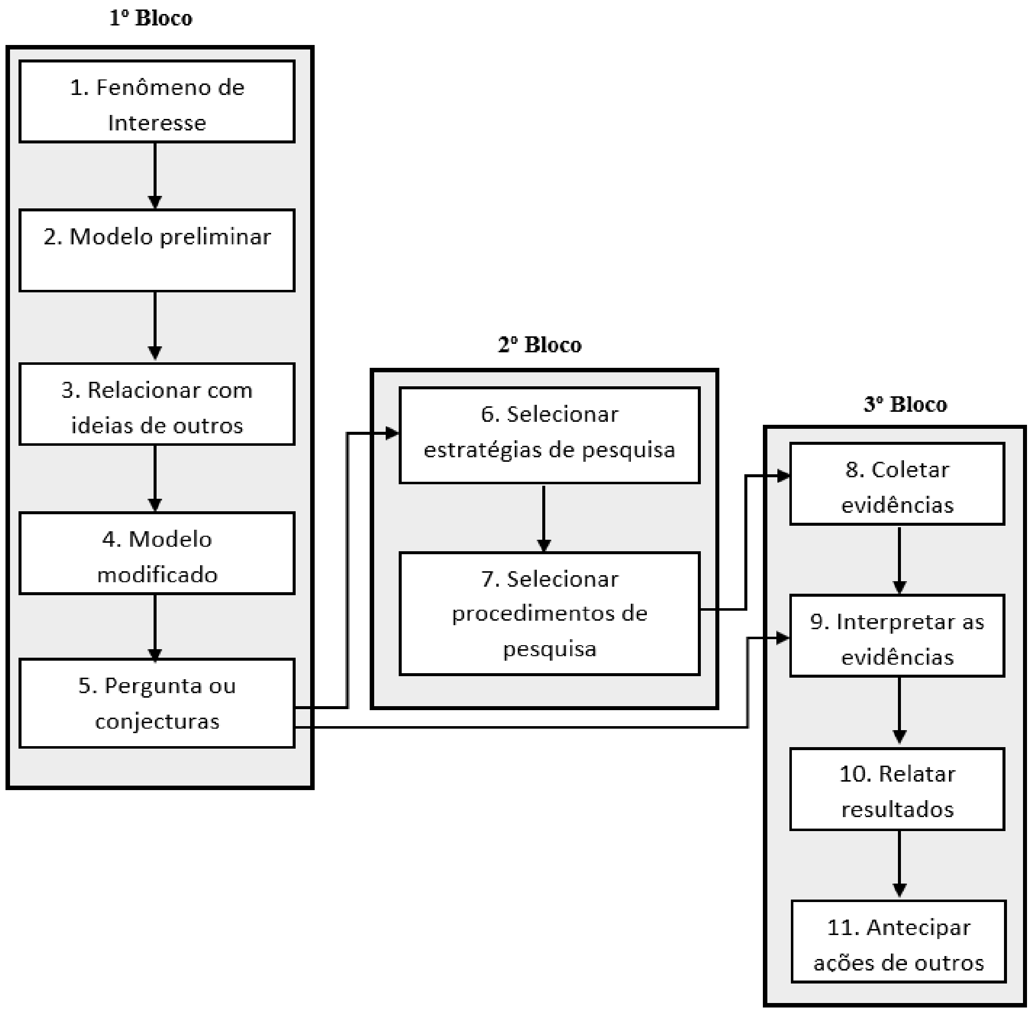
Vale ressaltar que, embora as etapas apresentem uma linearidade no fluxograma, Romberg deixa claro que tais atividades podem ser realizadas em diferentes ordens de acordo com a preferência do pesquisador. Além disso, a pesquisa é aqui entendida como a realização de vários processos que conduzem à resposta de uma pergunta ou à validação de uma conjectura e este deve ser o objetivo principal do pesquisador ao fazer pesquisa.

1.3.2 Metodologia Científica de Romberg-Onuchic

Os membros do Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de

Problemas (GTERP[2]) fizeram algumas contribuições ao fluxograma de Romberg, devidas a suas experiências ao utilizar a Metodologia Científica de Romberg em suas pesquisas. Trata-se de uma implementação de um novo passo no primeiro bloco. O GTERP julgou necessário implementar a elaboração de um *Modelo Modificado* após a atividade *Relacionar com ideias de outros*. Onuchic e Noguti (2014) apresentam o fluxograma de Romberg-Onuchic, presente no Livro "Resolução de Problemas: Teoria e Prática". Com essas contribuições, o fluxograma foi organizado em três blocos com suas respectivas atividades, como podemos ver na Figura 2.

Figura 2: Fluxograma de Romberg-Onuchic



Fonte: (ONUCHIC; NOGUTI, 2014, p.59)

[2] http://igce.rc.unesp.br/#!/departamentos/educacao-matematica/gterp/

A grande contribuição do fluxograma de Romberg-Onuchic é a inclusão da atividade *Modelo Modificado* no primeiro bloco. A intenção do GTERP ao incluir a produção de um modelo modificado à realização da pesquisa é devido ao entendimento que o grupo tem de que o *Modelo Preliminar* pode sofrer alterações durante o desenvolvimento da pesquisa. Assim, propõe-se que, após relacionar suas ideias com ideias de outros, o pesquisador pode alterar seus objetivos e intenções presentes no *Modelo Preliminar* e, assim, pode criar um novo modelo, mais completo e mais elaborado, denominado *Modelo Modificado.*

Entendemos que, para pensar sobre os processos e perguntas que surgem ao se trabalhar com Educação Matemática, há diferentes modos de conduzir uma pesquisa dentro da área, e cada um evidencia algumas características que o pesquisador busca como respostas às suas questões. Foi adotada, portanto, a Metodologia Científica de Romberg-Onuchic para conduzir esta pesquisa dentro do campo da Educação Matemática.

2. Começando a Pesquisa: o primeiro bloco de Romberg-Onuchic

Esta Dissertação de Mestrado começou a ser pensada por mim, Sabrina, desde o início de minha formação como professora de Matemática. As grandes inquietações que tomavam conta do meu interesse eram sobre as dificuldades que as pessoas têm em expressar seus raciocínios matemáticos, seja de forma oral ou, principalmente, de forma escrita.

Sobre isso, eu via nos cadernos de meus colegas do ensino médio que a organização dos símbolos matemáticos e a compreensão do significado de cada símbolo eram caóticos. Isso também acontecia com os alunos com quem tive contato durante os estágios que realizei em minha graduação no curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Federal de São Carlos (UFSCAR) e com meus alunos durante minha atuação na rede pública de ensino. Ao ler enunciados de problemas de Matemática, percebia que esses alunos não conseguiam interpretar o que era dito e tampouco expressar o que o problema pretendia obter como solução. As dificuldades iam desde entender os significados das palavras dentro do contexto da Matemática, como soma, produto, equação, desigualdade, fração, razão, função, entre outras, até como organizar seu pensamento para propor uma resolução ao problema.

Pensei, muitas vezes, em como eu, professora de Matemática em atuação, poderia auxiliar meus alunos quanto à compreensão da linguagem matemática e sobre o ensino de seus símbolos. Pensei, então, se a matemática poderia ser vista como uma linguagem carregada de características próprias com sua gramática e sua sintaxe. Sobre todos esses pensamentos, esta pesquisa começou a ser elaborada.

Logo depois de formada, atuei como professora por um ano e crescia em mim a vontade de investigar sobre essas inquietações no contexto de aulas de Matemática. Por isso, decidi me inscrever na seleção para Mestrado, no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP) de Rio Claro. Como costumava trabalhar com resolução de problemas durante minha prática docente, me candidatei para a linha de pesquisa Resolução de Problemas dentro dessa instituição. Em 2016, aprovada na seleção, comecei a trabalhar e estudar Resolução de Problemas segundo a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas no GTERP, coordenado pela professora Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic.

O cotidiano de um aluno do Ensino Fundamental é repleto de experiências que exigem interpretação de ideias, textos, regras e ações. As tarefas referentes às disciplinas também exigem interpretação, principalmente dos textos e das imagens com que se tem contato no ambiente escolar. Nas aulas de Matemática não é diferente, pois os alunos estão, diariamente, buscando ler, compreender e interpretar textos que falam de matemática, seja nos livros didáticos ou em enunciados de problemas.

É notável a importância de um bom entendimento do que se lê, nas aulas de Matemática, para um efetivo aprendizado[3] de Matemática. Nessas aulas o aluno se depara com duas linguagens: a linguagem vernácula[4] e a linguagem matemática. Cada uma dessas duas formas de se expressar tem seu objetivo e sua utilidade e é preciso que o aluno saiba identificar os momentos em que cada uma delas deve ser usada em seu cotidiano, não apenas em suas aulas de Matemática. Pensando nisso, esta pesquisa se preocupa em mostrar como a linguagem matemática é importante para, fazendo uso da língua portuguesa, ser trabalhada pelo professor na sala de aula, a fim de preparar os alunos a saber se comunicar matematicamente, interpretando o mundo ao seu redor.

Entre várias situações de que me recordo sobre dificuldades com a leitura de símbolos matemáticos, os casos que envolvem representação de números racionais são os que mais chamam minha atenção. Muitas vezes, durante minhas aulas, os alunos se sentiam inseguros ao trabalhar com números racionais ou operações sobre eles. Além disso, o reconhecimento da existência das personalidades de números racionais e, principalmente entre uma razão e uma fração não se mostrava evidente para os alunos, pois eles não conseguiam

[3] Compreendemos por “aprendizado” o produto do processo de aprendizagem, o resultado obtido depois que se aprendeu.

[4] Entendemos por “linguagem vernácula” a língua própria de um país, segundo Houaiss (2015). Como sinônimo, encontramos, neste trabalho, o termo “língua materna”. Para Houaiss (2015), “língua materna” é a primeira língua aprendida por uma pessoa na infância. Compreendemos que, para os brasileiros, a Língua Portuguesa faz o papel de linguagem vernácula e língua materna.

interpretar o contexto e o que representava aquele número racional em um problema.

Iniciando a pesquisa e refletindo sobre a linguagem presente em aulas de Matemática, vemos que é quase impossível separar a linguagem vernácula da linguagem matemática. Os documentos PCN (BRASIL,1997,1998) incluem as duas linguagens no trabalho do professor de matemática. Por isso, é imprescindível que falemos das duas neste trabalho.

A partir dessa percepção, pudemos começar a pensar sobre o *Fenômeno de Interesse* desta pesquisa. O primeiro Bloco de Romberg-Onuchic traz orientações para o pesquisador quanto à definição de seu fenômeno de interesse para prosseguir criando um *Modelo Preliminar* e definir variáveis-chave que ajudam a relacionar o fenômeno de interesse com ideias de outros. Neste bloco, o pesquisador pode relacionar suas ideias com as de outros pesquisadores que pesquisaram ou ainda pesquisam sobre seu fenômeno de interesse para contribuir na elaboração de um *Modelo Modificado* das atividades de sua pesquisa.

2.1 Definindo o Fenômeno de Interesse

Pensando na linguagem matemática que permeia problemas que envolvem os números racionais em suas diversas formas tais como ponto racional, quociente, fração, medida e razão, as operações com números racionais e sobre a dificuldade de os alunos na compreensão dos significados das palavras e, além disso, considerando a complexidade no processo de escrita e entendimento dessa linguagem, surgiram as primeiras ideias de um fenômeno de interesse.

Refletimos sobre os interesses que tínhamos ao realizar esta pesquisa. Sobre o quê exatamente queríamos investigar? Nosso interesse circundava entre as linguagens presentes em aulas de Matemática, como a linguagem vernácula e a linguagem matemática, por exemplo. Além disso, víamos na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, metodologia pedagógica trabalhada e estudada pelo

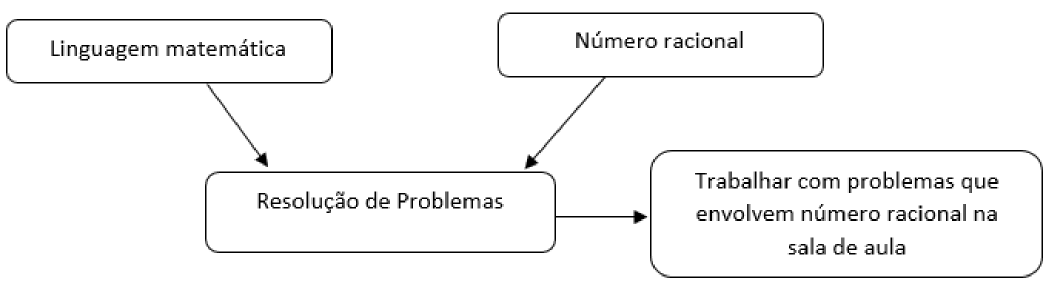
GTERP, uma forma de conduzir aulas de matemática trabalhando as linguagens na sala de aula.

Assim, o Fenômeno de Interesse, nosso objeto de estudo nesta pesquisa é **A Linguagem Matemática e a Resolução de Problemas ao se trabalhar com números racionais na sala de aula**.

2.2 O Modelo Preliminar

Começamos a pensar quais seriam os passos e as principais questões que deveriam ser abordadas na pesquisa para atender o Fenômeno de Interesse. Para isso, pensamos que a Resolução de Problemas seria uma aliada ao elaborar um Projeto que visasse a trabalhar a linguagem matemática e o conteúdo Números Racionais em aulas de matemática. Assim, elaboramos o seguinte Modelo Preliminar:

Figura 3: O primeiro Modelo Preliminar

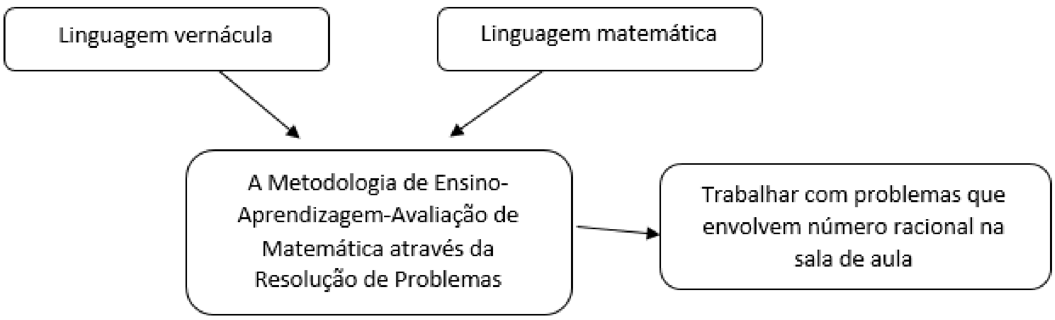


Fonte: Elaborado pela autora

Para esse primeiro Modelo Preliminar não nos demos conta de que tanto na sala de aula e, principalmente na vida cotidiana, a linguagem vernácula é a predominante e por isso deve influenciar diretamente o uso da linguagem matemática. Além disso, não tínhamos uma ideia de como abordar a Resolução de Problemas em aulas de Matemática. Esse modelo apresenta, de modo sintético, as ideias iniciais do que pretendíamos realizar ao longo da pesquisa. A partir dele, pudemos definir quais seriam as variáveis-chave que poderiam conduzir todo o trabalho.

Como membros do GTERP, refletimos e adotamos como Metodologia Pedagógica a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Entendemos que essa metodologia dá oportunidade para o professor discutir a linguagem vernácula e a linguagem matemática presente nos problemas, explorando os significados das palavras contidas nos enunciados. Posteriormente, refletimos sobre como as duas linguagens presentes nas aulas de Matemática podem ser trabalhadas durante a prática da Metodologia Pedagógica escolhida. Por isso, fez-se necessária a produção de um segundo Modelo Preliminar como podemos ver na Figura 4.

Figura 4: O segundo Modelo Preliminar



Fonte: Elaborado pela autora

2.3 Definindo variáveis-chave

Com a elaboração do *Modelo Preliminar*, pudemos pensar sobre possíveis variáveis-chave em nossa pesquisa. Essas variáveis poderiam dizer quais assuntos deveriam ser tratados como fundamentação teórica no desenvolvimento da pesquisa, além de ajudarem a orientar o pesquisador na busca de outros pesquisadores que já falaram ou ainda falam sobre o tema.

Para esta pesquisa, nos parece pertinente tomar como *variáveis-chave*: Resolução de Problemas, Linguagens Vernácula e Matemática e Números Racionais, como subsídio pedagógico para a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Essas variáveis foram escolhidas devido a sua relevância em nossas inquietações, visto que são dados que variam no nosso Modelo Preliminar. Essas *variáveis-chave* serão abordadas nas Seções 3, 4 e 5.

2.4 Relacionando com ideias de outros

O *Modelo Preliminar* e as *variáveis-chave:* Resolução de Problemas, Linguagens Vernácula e Matemática e Números Racionais nos conduzem a procurar respostas sobre as inquietações que temos a respeito desses assuntos. Pesquisa é investigação e o momento *Relacionar com ideias de outros* é fundamental para ela. Apresentar contribuições importantes de outros pesquisadores ao nosso trabalho,

> Trata-se de um momento em que o pesquisador “ouve” os outros sem se manifestar. Utiliza “recortes” de outros autores ou suas obras para que, num segundo momento, possa se apoiar nas ideias desses autores, para a construção de seu *Modelo Modificado* e da *Pergunta da Pesquisa*. (ONUCHIC; NOGUTI, 2014, p. 61, *grifo do autor*).

3. Resolução de Problemas

Nesta seção, apresentaremos como a Resolução de Problemas surgiu no âmbito da Educação Matemática e como vem se desenvolvendo, além de mostrar a concepção que o GTERP tem sobre a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

3.1 Uma abordagem histórica da Resolução de Problemas

Para entendermos como a Resolução de Problemas aparece no contexto da sala de aula de Matemática, Onuchic (1999) sugere que entendamos como o processo de ensino de matemática se desenvolveu ao longo do século XX.

> A importância dada à Resolução de Problemas é recente e somente nas últimas décadas é que os educadores matemáticos passaram a aceitar a idéia de que o desenvolvimento da capacidade de se resolver problemas merecia mais atenção. A caracterização de Educação Matemática, em termos de Resolução de Problemas, reflete uma tendência de reação a caracterizações passadas como um conjunto de fatos, domínio de procedimentos algorítmicos ou um conhecimento a ser obtido por rotina ou por exercício mental. Hoje, a tendência é caracterizar esse trabalho considerando os estudantes como participantes ativos, os problemas como instrumentos precisos e bem definidos e a atividade na resolução de problemas como uma coordenação complexa simultânea de vários níveis de atividade. O ensino de Resolução de problemas, enquanto campo de pesquisa em Educação Matemática, começou a ser investigado de forma sistemática sob a influência de Polya, nos Estados Unidos, nos anos 60 (ONUCHIC, 1999, p. 203).

Para essa autora, há três marcos importantes que devem ser lembrados: o ensino de Matemática por repetição, o ensino de Matemática com compreensão e o ensino de Matemática influenciado pelo Movimento da Matemática Moderna (MMM). Para ela, Thorndike, Brownell e Polya são os grandes nomes que contribuíram de forma significativa para a construção de uma base teórica da Resolução de Problemas a partir de 1950.

O ensino de Matemática por repetição, como sugerido por Thorndike, consistia em um processo em que o aluno memorizava os fatos trabalhados pelo professor e os repetia. Era comum o treino de exercícios em sala de aula e em casa e os alunos, basicamente, reproduziam tudo o que o professor havia informado, sem refletir sobre o que faziam ou qual o porquê do que aprendiam era Matemática. Segundo Onuchic (1999), naquela época o currículo de Matemática não estava bem definido, mas sabe-se que os alunos estudavam Aritmética, Álgebra e Geometria.

O ensino de Matemática com compreensão, apoiado nos estudos de Brownell, contrariando o ensino por repetição, buscava fazer com que o aluno compreendesse o que fazia e que matemática estava produzindo. O aluno treinava técnicas operatórias que eram utilizadas na resolução de problemas ou para aprender algum conteúdo novo e, assim, “nesta época, começou-se a falar de resolução de problemas como um meio de se aprender matemática” (ONUCHIC, 1999, p.201). Por volta de 1948, no cenário dos Estados Unidos, começou a surgir um currículo de Matemática que contemplava o ensino com compreensão a partir de situações-problema.

Durante o MMM, compreendido entre os anos de 1960 a 1970, a Matemática era apoiada em estruturas lógica, algébrica, topológica e de ordem, enfatizando a teoria dos conjuntos. Assim, o ensino de símbolos e da linguagem matemática era forte, porém com pouca compreensão por parte dos alunos. Eles não entendiam muito bem o que os professores falavam, e não viam relação nenhuma entre a Matemática que viam na escola e aquela usada fora da escola. Repetiam os exercícios e propriedades vistos em aula sem lhes dar significado (ONUCHIC, 1999).

De acordo com Morais e Onuchic (2014), os resultados da configuração escolar deixada pelo MMM não eram bons, visto que os professores eram mal preparados e os alunos tinham muitas dificuldades em aprender as abstrações e as habilidades básicas da Matemática. Além disso, as famílias dos alunos não conseguiam auxiliá-los em suas tarefas de casa, pois a Matemática que haviam aprendido era diferente daquela que estava sendo ensinada. Era preciso uma mudança na forma de ensinar e no currículo de Matemática, de forma que os alunos conseguissem desempenhar suas habilidades em resolver problemas e, mais do que isso, “entender os princípios e as operações matemáticas do problema, ampliando os conhecimentos adquiridos para outros contextos. Era a vez da retomada do ‘ensino com compreensão’” (MORAIS; ONUCHIC, 2014, p. 27).

Nesse contexto, surge a Resolução de Problemas como uma teoria bem estruturada, ganhando espaço em currículos dos Estados Unidos e de outros países do mundo. O ensino pautado na resolução de problemas começou a ser estudado, de forma sistemática, por Polya por volta de 1945, quando o autor publicou a primeira edição de seu livro: *A arte de resolver problemas*[5]. No livro, Polya aponta uma sequência de quatro fases para serem executadas durante a resolução de um problema:

1) Compreender o problema;
2) Estabelecer um plano;
3) Executar o plano;
4) Examinar a solução obtida.

Morais e Onuchic (2014) trazem alguns trabalhos escritos por Polya, preocupado com a melhoria das habilidades da resolução de problemas pelos alunos. Esse autor buscava escrever para ajudar os professores a se tornarem bons resolvedores de problemas e então ensinarem bem a seus alunos.

A Resolução de Problemas ganha força a partir de 1970, época em que começa um movimento a fim de incentivar o ensino por meio de resolução de problemas. Em 1980, o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) publicou *An agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980’s*, documento que colocou a resolução de problemas como foco do ensino da matemática escolar para essa década (ONUCHIC, 1999). A partir daí começaram a surgir discussões de como desenvolver currículos que abrangessem a resolução de problemas, de como preparar os professores para trabalhar com seus alunos e sobre como o professor poderia elaborar problemas e produzir materiais para seu trabalho em sala de aula. Porém, algumas faltas de concordância na forma de compreender a Resolução de Problemas surgem entre os educadores matemáticos.

Onuchic (1999) e Morais e Onuchic (2014), frente a essa discordância, apontam que Schroeder e Lester mostraram que havia três formas de distinguir

[5] Título em inglês: *How to solve it: a new aspect of mathematical method.*

a abordagem de ensino com Resolução de Problemas, para que os objetivos de cada educador ficassem claros e coerentes. A primeira forma foi a de ensinar *sobre* resolução de problemas, a segunda, ensinar *para* resolver problemas e a terceira, ensinar *via* resolução de problemas.

O ensino *sobre* resolução de problemas trata de trabalhar com o método empregado por Polya ou formas de se ensinar a matemática com problemas, dando ênfase à orientação dos alunos na resolução de problemas. É uma forma de se estudar a teoria acerca da Resolução de Problemas.

O ensino *para* resolução de problemas coloca a Matemática como utilitária, ou seja, o ensino de matemática objetiva a resolução de problemas. Dessa forma, o conteúdo de matemática é ensinado pelo professor para que, depois, se possa aplicar seu conhecimento em problemas. Nos parece que essa concepção é muito comum nas abordagens tradicionais de aulas de matemática até hoje.

Por fim, o ensino *via* resolução de problemas trata de um ensino em que os problemas são válidos para se aprender Matemática e fazer Matemática, de forma que os alunos aprendam conceitos, procedimentos e conteúdos onde técnicas e propriedades dos conteúdos matemáticos são construídas ao resolver problemas.

Segundo o NCTM (2000, p. 52, tradução nossa), “a resolução de problemas é parte integrante de toda a aprendizagem matemática e assim não deve ser uma parte isolada do programa de matemática”. Ainda, orienta que as escolas devem permitir aos alunos

> Construir novo conhecimento matemático através da resolução de problemas; resolver problemas que surgem na Matemática e em outros contextos; aplicar e adaptar uma variedade de estratégias apropriadas para resolver problemas; monitorar e refletir sobre o processo de resolução de problemas matemáticos. (NCTM, 2000, p.52, tradução nossa).

No Brasil, os Parâmetros Curriculares Nacionais também recomendam que a resolução de problemas seja ponto de partida para o ensino de Matemática nas escolas (BRASIL, 1998). Esse documento orienta que

> A situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las;
>
> O problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada;
>
> Aproximações sucessivas de um conceito são construídas para resolver um certo tipo de problema; num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros, o que exige transferências, retificações, rupturas, segundo um processo análogo ao que se pode observar na História da Matemática;
>
> Um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações. Assim, pode-se afirmar que o aluno constrói um campo de conceitos que toma sentido num campo de problemas, e não um conceito isolado em resposta a um problema particular; a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas. (BRASIL, 1998, p.40)

Estudos na área de Resolução de Problemas foram desenvolvidos no país. Atualmente, o grupo GTERP, considerado referência quanto ao estudo e desenvolvimento de trabalhos nessa área, procura investigar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, que será abordada na próxima seção.

3.2 A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

Frente às dificuldades apresentadas quanto ao ensino de Matemática vistas até aqui e com as pesquisas desenvolvidas nas três abordagens dadas à Resolução de Problemas, faz-se necessário pensar sobre as práticas escolares no que diz respeito aos papéis destinados ao professor e aos alunos em salas de aula.

Pensar em colocar o aluno como protagonista na construção do seu conhecimento é uma forma de auxiliá-lo em seu desenvolvimento de criatividade, autonomia e habilidade. O professor como mediador, que propicia ambientes de descoberta e situações em que o aluno se coloca a pensar, também é uma das propostas da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014). Essa metodologia é desenvolvida pelos alunos do GTERP e não concebe a resolução de problemas apenas como teoria ou como uma forma de aplicar a Matemática, mas sim como uma metodologia pedagógica que busca, através da resolução de problemas, dar condições para que o aluno possa aprender um conceito, um procedimento ou um conteúdo novo.

Os processos de ensino, aprendizagem e avaliação são interligados na concepção dessa metodologia, de forma que a avaliação ocorre, durante a resolução de problemas por parte dos alunos, integradamente ao ensino, promovendo a aprendizagem. Assim, o professor pode saber quais as dificuldades que os alunos enfrentam quanto a um conteúdo matemático para que possa melhorar sua forma de mediar as dúvidas dos alunos, objetivos e problemas. Para Pironel (2002), a avaliação, aqui, não tem o sentido de atribuir qualidades ou notas expressas por números, mas tem o sentido de avaliar se o aluno desenvolveu seu conhecimento ou não, se aprendeu ou não!

Nessa metodologia "o problema é ponto de partida para a aprendizagem de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos" (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014, p. 44). Porém, um problema só é um problema para o aluno quando ele não sabe resolvê-lo mas tem interesse em fazê-lo, de nada adianta o professor ensinar regras e técnicas para o aluno obter a solução.

A partir de 1998, professores se questionavam sobre a forma de se "ensinar" através da Resolução de Problemas (ONUCHIC, 1999). Frente a isso, o GTERP buscou, ao longo dos anos, tornar a metodologia um pouco mais prescritível. Assim, foram elaboradas algumas etapas para orientar o professor. Recentemente, foram organizadas dez etapas de desenvolvimento da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, segundo Allevato e Onuchic (2014):

1) Proposição do problema;

2) Leitura individual;
3) Leitura em grupo;
4) Resolução do problema;
5) Observar e incentivar;
6) Registro das resoluções na lousa;
7) Plenária;
8) Busca do consenso;
9) Formalização do conteúdo;
10) Proposição e resolução de novos problemas.

Para iniciar seu trabalho, o professor seleciona um problema, chamado problema gerador, que visa à construção de um conhecimento novo. O professor pode pretender construir um conhecimento novo ou um conceito, princípio ou procedimento, de forma que “o conteúdo matemático necessário ou mais adequado para a resolução do problema ainda não foi trabalhado em sala de aula” (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014, p. 45).

Sugere-se que os alunos trabalhem em pequenos grupos e que cada aluno receba uma folha com o enunciado escrito do problema. A primeira etapa é propor o problema para os grupos e depois sugere que o aluno o leia individualmente, de forma a perceber suas dúvidas e a identificar o que entendeu para poder trabalhar em grupo. Nessa segunda etapa, o aluno deve refletir e colocar-se em contato com as linguagens vernácula e matemática, desenvolvendo sua compreensão sobre o enunciado do problema. Além disso, o aluno pode identificar as palavras e os símbolos que não compreendeu para procurar tirar suas dúvidas com os colegas do grupo ou com o professor.

Em seguida, na terceira etapa, os alunos fazem uma leitura em conjunto e discutem o problema a partir do entendimento que cada integrante do grupo teve. A partir da quarta etapa, os grupos começam a resolver o problema, elaborando estratégias de resolução que conduzirão à construção do novo conteúdo pretendido pelo professor. De acordo com Allevato e Onuchic (2014, p.45), “a ação dos alunos volta-se à expressão escrita, pois, para resolver o problema, precisarão da linguagem matemática ou de outros recursos de que dispõem: linguagem corrente, desenhos, gráficos, tabelas ou esquemas.” Vemos, nessa etapa, a importância do domínio da linguagem matemática em sua forma escrita para que os alunos se comuniquem no grupo e entre os grupos.

Sobre a quinta etapa, enquanto os alunos trabalham na resolução dos problemas, o professor observa seus trabalhos, individualmente e nos grupos, e os incentiva a utilizar seus conhecimentos prévios, auxiliando-os nas dificuldades sem lhes fornecer respostas prontas.

Após esse trabalho, um representante de cada grupo de alunos faz seu registro na lousa, com soluções corretas ou não, como sugere a sexta etapa. Assim, para a sétima etapa, o professor deve estimular discussões entre os grupos sobre todas as resoluções apresentadas pelos alunos em uma plenária, esclarecendo o motivo dos erros nas que estão incorretas e dos acertos nas que estão corretas, a fim de que todos os alunos possam compreender o conteúdo que o professor esperava ensinar. Também, nessa plenária, é possível haver um ato de socialização em que cada aluno, quando fala, deve ser ouvido por todos os outros.

Fruto da plenária, os alunos chegam a um consenso sobre o resultado correto do problema. Percebemos que a oitava etapa "é um momento em que ocorre grande aperfeiçoamento da leitura e da escrita matemáticas e relevante construção de conhecimento acerca do conteúdo" (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014, p.46).

Durante a nona etapa, em que ocorre a formalização, o professor faz um registro formal do que foi construído na lousa, organizado em linguagens vernácula e matemática, em que se padronizam os conceitos que envolvem o conteúdo abordado pelo problema gerador. Nesse momento, o professor deve deixar esclarecidos todos os conceitos que foram discutidos e aprendidos durante a resolução do problema, apontando as palavras e seus significados abordados e introduzindo o novo conceito, conteúdo ou procedimento dando ênfase aos símbolos da linguagem matemática.

A décima etapa sugere a proposição e a resolução de novos problemas, que podem auxiliar na análise da compreensão dos conceitos formalizados, tanto para o professor quanto para os alunos. Esses problemas "possibilitam analisar se foram compreendidos os elementos essenciais do conteúdo matemático introduzido naquela aula e consolidar as aprendizagens construídas nas etapas anteriores” (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014, p. 46).

A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas se apoia na teoria de Vygotsky ao trabalhar sobre a participação efetiva do aluno na construção de seu conhecimento. Para isso, parte-se da identificação da Zona do Desenvolvimento Proximal (ZDP). A ZDP representa a distância entre a capacidade da criança de resolver problemas sozinha, chamada de Nível de Desenvolvimento Real (NDR) e a capacidade de resolver problemas com a ajuda de alguém, chamada de Nível de Desenvolvimento Potencial (NDP). A ZDP, então, envolve tudo o que o aluno não consegue resolver sozinho, mas que conseguirá com o auxílio de alguém.

O professor age na ZDP de seu aluno, conduzindo-o a atingir o seu NDR. Sua função é conduzi-lo ao aprendizado de um novo conteúdo, o que ele não conseguiria fazer sozinho. Logo, o professor deve levantar questionamentos que façam o aluno refletir, raciocinar e criar conjecturas sobre o que está estudando para que construa, ele mesmo, um novo conhecimento. Para isso, ao utilizar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, o professor deve saber quais são os conhecimentos prévios que seu aluno possui, para que ele possa propor um problema que seu aluno tenha potencialidade para resolver. Pois, ao resolver problemas, segundo essa metodologia, é necessário que o aluno tenha conhecimentos prévios que lhe dê potencialidade para construir um novo conceito, conteúdo ou procedimento e que permita ao professor agir na ZDP do aluno.

De acordo com Onuchic (1999):

> Colocando o foco em Resolução de Problemas, defendemos que: o ponto de partida das atividades matemáticas não é a definição mas o problema; que o problema não é um exercício no qual o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou uma determinada técnica operatória; que aproximações sucessivas ao conceito criado são construídas para resolver um certo tipo de problemas e que, num outro momento, o aluno utiliza o que já aprendeu para resolver outros problemas; que o aluno não constrói um conceito em resposta a um problema, mas constrói um campo de conceitos que tomam sentido num campo de problemas (ONUCHIC, 1999, p. 215).

Percebemos que o trabalho apoiado na Metodologia de Ensino-

Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas é uma nova visão do papel do aluno frente à construção de seu conhecimento, bem como do papel do professor em promover a autonomia do aluno quanto aos seus raciocínios e à sua comunicação em matemática.

4. Diferentes formas de Linguagens

Conhecer sobre linguagens é um dos interesses que tivemos ao desenvolver esta pesquisa. Por isso, trazemos alguns aspectos que achamos relevantes quanto ao estudo desse tema e, entre eles, como se desenvolve o processo de comunicação e linguagem nos seres humanos e como as diferentes linguagens, especialmente a vernácula e a matemática, estão presentes nas aulas de matemática.

4.1 Comunicação e Linguagem

Para entender do que trata a Comunicação, trazemos a ideia dada por Andrade (1985), que diz ser a comunicação uma produção humana social, que pode ser intencional ou não. Para ele, a comunicação exige o uso de signos[6], como os símbolos e é imprescindível a presença de um canal de comunicação (palavras, gestos, sons), bem como um emissor (o sujeito que emite) e um receptor (o sujeito que recebe) uma mensagem. Complementando essa ideia, Menezes (2000, p.2) entende que o termo comunicação tem raiz na Linguística e é vista como "uma forma de interação social entre indivíduos". A comunicação só ocorre quando o emissor e o receptor da mensagem têm uma clara compreensão da mensagem que está sendo emitida, ou seja, quando o receptor compreende a mensagem do emissor.

A comunicação é essencial para o convívio entre os homens e pode auxiliar cada pessoa a se entender através da auto reflexão ou produção escrita que pode ser consultada posteriormente. Para interpretar um texto, por exemplo, o leitor deve entender de que se trata e isso é determinado pelo significado que ele atribui às palavras que lê.

4.1.1 Comunicação em aulas de Matemática

Diariamente, a comunicação e o ato de se comunicar estão presentes na vida do ser humano. Ele se comunica com seus pares em bares, escolas e no

[6] Segundo Houaiss, signo é "um sinal indicativo, indício ou marca". Entendemos signo como uma abstração que expressa comunicação. Como exemplo, temos o símbolo que, segundo Houaiss é "o que, por analogia ou convenção, representa, sugere ou substitui outra coisa; ser, objeto ou imagem a que se atribui certo significado".

ambiente familiar através da fala, da escrita de cartas e e-mails, de gestos e desenhos, por exemplo. Dentro do contexto da sala de aula não é diferente. Podemos encontrar vários momentos em que a comunicação ocorre: a fala do professor e o aluno que escuta o que o professor fala; as conversas entre alunos; os registros escritos que os alunos têm em seus cadernos; entre outros. A comunicação está presente nos processos de ensino e aprendizagem, podendo garantir efetividade no aprendizado dos alunos.

O documento *Professional Standards for Teaching Mathematics* (NCTM, 1991) diz que

> Comunicação envolve a habilidade em ler e escrever matemática e interpretar significados e ideias. Escrever e falar sobre seu pensamento esclarece as ideias dos alunos e dá ao professor informações valiosas a partir das quais pode tomar decisões instrucionais. Enfatizar a comunicação em uma aula de matemática ajuda a mudar a sala de aula de um ambiente em que os alunos são totalmente dependentes do professor para um em que os alunos assumem mais responsabilidade para validar seu próprio pensamento.(NCTM, 1991, p.78, tradução nossa)

O documento *Principles and Standards for school mathematics* (NCTM, 2000) traz seis princípios para a matemática trabalhada na escola: Equidade, Currículo, Ensino, Aprendizagem, Avaliação e Tecnologia. Também, são apresentados cinco padrões de conteúdo: Números e Operações, Álgebra, Geometria, Medida e Análise de Dados, bem como cinco padrões de procedimento: Resolução de Problemas, Raciocínio e Prova, Comunicação, Conexões e Representação. Nos interessa dizer que, dentre esses cinco padrões de procedimento, são destacados Resolução de Problemas como o primeiro da lista e Comunicação, destinados à construção do conhecimento durante toda a escolaridade.

Segundo o NCTM (2000), o processo de Comunicação permite ao aluno expor suas ideias a outros alunos e ao professor e, ainda, lhes permite usar a linguagem matemática. Também, o professor pode perceber concepções erradas que os alunos têm quanto a um conteúdo matemático através do que seu aluno comunica pela fala e escrita e, assim, pode auxiliá-lo a construir conhecimento.

O documento ainda orienta o professor a encorajar seus alunos a se comunicarem usando a linguagem matemática, ao dizer que

> Alunos que têm oportunidade, encorajamento e apoio para falar, escrever, ler e ouvir nas aulas de matemática colhem dois benefícios: eles se comunicam para aprender matemática e aprendem para se comunicar matematicamente (NCTM, 2000, p.60, tradução nossa)

Também enfatiza que a linguagem matemática pode ser trabalhada desde os anos iniciais de ensino, pois a comunicação está presente desde o nascimento das crianças.

> Crianças nas primeiras séries, por exemplo, podem aprender a explicar suas respostas e descrever suas estratégias. Jovens estudantes podem ser convidados a "pensar em voz alta", e questões bem elaboradas propostas pelo professor ou por um colega de classe podem provocá-los a reexaminar seu raciocínio. Com experiência, os alunos ganharão proficiência na organização e no registro de seu pensamento. A escrita em matemática também pode ajudar os estudantes a pensar, porque exige que eles reflitam sobre seu trabalho e esclareçam seus pensamentos sobre as ideias desenvolvidas na aula. Mais tarde, eles poderão achar útil reler o registro de seus próprios pensamentos.(NCTM, 2000, p.61, tradução nossa)

Em aulas de Matemática, algumas palavras são ditas e escritas diariamente notando-se que, muitas vezes, o aluno desconhece seu significado no contexto da disciplina e, por isso, enfrenta dificuldade na comunicação em matemática. Sobre isso, diz-se que

> Professores podem ajudar os alunos a ver que algumas palavras que são usadas na linguagem diária, como semelhante, fator, área ou função, são usadas em matemática com significados diferentes ou mais precisos. Essa observação é o fundamento para a compreensão do conceito de definições matemáticas. É importante dar aos alunos experiências que os ajudem a apreciar o poder e a precisão da linguagem matemática. Começando nos *Middle Grades* os estudantes deveriam entender o papel de definições matemáticas e deveriam usá-las no trabalho matemático. Fazendo assim, se tornaria pervasiva na *High School*. (NCTM, 2000, p. 63, tradução nossa, grifo nosso[7])

[7] *Middle Grades* são os sexto, sétimo e oitavo anos *e High School* são o primeiro, segundo, terceiro e quarto anos da escola secundária nos Estados Unidos.

Para Menezes (2000, p. 16), a comunicação entre os alunos “permite o desenvolvimento de capacidades, de atitudes e de conhecimentos”. Pois, para ele, o processo de comunicação presente nas aulas de Matemática, principalmente quando o professor as planeja, possibilita mudanças no comportamento dos alunos quanto a serem independentes e autônomos na construção de seu próprio conhecimento.

Esse mesmo autor, baseado em Baroody (1993), aponta que a comunicação na aula de Matemática “(i) desenvolve o conhecimento matemático; (ii) desenvolve a capacidade de resolver problemas; (iii) melhora a capacidade de raciocínio; (iv) encoraja a confiança” (MENEZES, 2000, p. 16).

Concluindo, fica evidente que, tratando-se do aprendizado de matemática, o professor deve incentivar a comunicação entre alunos e mesmo entre alunos e professor, seja por forma oral ou escrita. Para isso, deve-se pensar como ocorre a comunicação entre as pessoas.

4.1.2 Linguagens em aulas de Matemática

Muitos psicólogos se debruçaram a estudar as relações que o pensamento possui com a linguagem desde a formação de conceitos até o uso de palavras. Entre eles, destacamos Lev Seminovich Vygotsky e Alexander Romanovich Luria. Muitos deles se questionavam sobre a relação entre o pensamento e a linguagem e sobre a evolução dos significados das palavras. Viram, através da evolução histórica da linguagem, que a estrutura do significado e a natureza psicológica da linguagem se transformam.

Não podemos esquecer que, ao tratar de teorias de aprendizagem, Jean Piaget, com a teoria construtivista e Vygostsky, com a teoria sociocultural, se destacam. Segundo Van de Walle (2013, p. 19, tradução nossa), as “teorias de aprendizagem têm sido desenvolvidas através das análises de estudantes (e de adultos) enquanto eles desenvolvem novas compreensões”. Segundo o autor, a teoria construtivista e a teoria sociocultural são as comumente usadas pelos pesquisadores na Educação Matemática para compreender como os estudantes aprendem matemática.

Segundo Van de Walle (2013), com base em Goos (2004), para a teoria sociocultural de Vygotsky

> O modo pelo qual a informação é internalizada (ou aprendida) depende de ela estar dentro da Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) do aluno. Simplesmente dizendo a ZDP se refere a uma gama de conhecimento que pode estar fora do alcance da pessoa para aprender por si próprio, mas estar acessível se o aprendiz tiver apoio de seus pares ou de outros mais bem preparados" (VAN DE WALLE, 2013, p.20, tradução nossa).

Ainda, "a ZDP não é um espaço físico, mas um espaço simbólico criado pela interação dos aprendizes com outros melhor preparados e da cultura que as precede" (GOSS, 2004, p.262, tradução nossa).

Os significados das palavras, segundo Vygotsky (2008), se alteram e, por isso, a relação entre pensamento e palavra também se modifica. Essa relação surge a partir do desenvolvimento verbal, que é o motivo pelo qual o indivíduo gera um pensamento, modela um pensamento e o significado das palavras.

Luria, um dos seguidores de Vygotsky, entende que a linguagem humana surgiu a partir do trabalho social do homem que possuía uma necessidade de comunicação entre seus pares. As primeiras etapas da linguagem eram caracterizadas por gestos, sons que significam alertas e dependiam da situação prática em que os indivíduos se encontravam. Com essas etapas, o homem foi capaz de desenvolver um sistema de códigos que designavam objetos ou situações. Entende-se que a linguagem surgiu no homem como uma prática mas, para Luria, além disso, a linguagem começou a incluir um sistema de códigos suficientes para transmitir qualquer informação e assim

> Como resultado da história social, a linguagem transformou-se em instrumento decisivo do conhecimento humano, graças ao qual o homem pode superar os limites da experiência sensorial, individualizar as características dos fenômenos, formular determinadas generalizações ou categorias. (LURIA, 1986, p. 22)

Essas características diferenciam a linguagem humana da linguagem dos outros animais, que possuem necessidade apenas de transmitir uma informação sobre seu estado e nada mais do que isso. Ainda, Luria afirma que a linguagem humana é um "complexo sistema de códigos que designam objetos, características, ações ou relações; códigos que possuem a função de codificar e transmitir a informação” (LURIA, 1987, p. 25).

A capacidade humana de se comunicar através de uma linguagem depende dos códigos que os homens utilizam. Daí surgem os estudos sobre a “palavra”. Luria afirma que a palavra é o elemento fundamental da linguagem pois codifica as experiências do homem. Tanto Luria quanto Vygotsky dão à palavra um papel essencial: o de significado conceitual, que engloba a capacidade de substituir e representar objetos, analisar os objetos e se introduzir em um sistema de relações. Em linhas gerais, a palavra designa uma coisa, separa suas características e, por isso, possui uma função de generalização (LURIA, 1987).

> A palavra não é apenas instrumento do pensamento, também é meio de *comunicação*. Qualquer comunicação, ou seja, transmissão de informações, exige que a palavra não se restrinja a designar um objeto determinado, mas que também generalize a *informação sobre esse objeto*. (LURIA, 1987, p. 37, grifos do autor)

Esse autor ainda afirma que, em uma linguagem desenvolvida, a palavra se torna um meio de comunicação a partir do fato de que transmite ao sujeito a experiência trazida das gerações anteriores e acumulada na história da sociedade. Assim, a palavra carrega a experiência do desenvolvimento histórico. Na Matemática, por exemplo, pode-se perceber que muitas palavras designam objetos do contexto da matemática e que foram definidas assim de acordo com a época em que se começou a usar a palavra ou até mesmo um símbolo.

A palavra, unidade fundamental da linguagem, inclui dois componentes fundamentais: o significado e o sentido. Significado, segundo Luria (1987, p. 45), é um “sistema de relações que se formou objetivamente no processo histórico e que está encerrado na palavra”, construído historicamente e entendido igualmente por todas as pessoas. Segundo ele, sentido é o “significado individual da palavra” (LURIA, 1987, p. 45) e é composto por aqueles enlaces que têm relação com o momento e a situação dados.

A partir do sentido e do significado que uma palavra pode possuir, os indivíduos se comunicam e expressam ideias. Para isso, é preciso que cada indivíduo, em sua infância, determine conceitos através das palavras. Cada palavra possui uma pluralidade de significados e de sentidos, logo é preciso escolher um significado, determinado pelo contexto em que a palavra está inserida e pela situação em que ocorre a comunicação. Vygotsky entende que a palavra possui sempre a mesma referência do objeto, porém adquire estruturas semânticas que permitem que seu significado se desenvolva.

Luria (1987) explica que há duas condições para a compreensão do significado das palavras. A primeira se relaciona com a frequência da palavra na língua, ou seja, sobre qual é o significado mais comum da palavra em determinada língua. A segunda é sobre o significado que a palavra expressa dentro de um contexto. Para o processo de compreensão do significado da palavra é preciso escolher um significado entre muitos para determinar uma palavra em um contexto. LURIA (1987).

Percebe-se esse processo quando se pensa em palavras que são usadas em diferentes contextos. Por exemplo, na Matemática a palavra função tem um significado próprio nessa ciência

Para se comunicar o homem usa duas principais linguagens: a linguagem oral e a linguagem escrita. O monólogo e o diálogo fazem parte da linguagem oral, em que o primeiro depende das tarefas daquele que fala e o segundo fala a quem já sabe sobre o que se fala. Logo, no diálogo, as pessoas envolvidas têm conhecimento sobre o que está sendo dito e podem utilizar elementos não verbais como mímicas, gestos e entonação de voz. Por outro lado, a linguagem escrita permite que a comunicação se estabeleça através de textos ou narrativas. Ela não possui complemento não verbal e não exige o conhecimento prévio do assunto por parte do destinatário, por isso deve usar claramente a gramática e a sintaxe da língua para que o leitor possa compreender o que está escrito e seu significado (LURIA, 1987).

A criança aprende a linguagem oral de forma natural através do seu contato direto com adultos, porém a compreensão da linguagem escrita começa com o uso das letras e das sílabas, que são instrumentos não usados pela criança em sua comunicação via linguagem oral. As letras reproduzem os sons que as crianças já conhecem e cabe a elas começar a “escrevê-los”. Por isso, para Luria (1987), a linguagem escrita é essencial para os processos de pensamento. Segundo esse autor, “sabe-se que, para clarear a ideia, o melhor é procurar escrever, expressar esta ideia em forma escrita” (LURIA, 1987, p. 171). Ainda, ele vê que “a linguagem escrita não possui nenhum meio não-verbal, por isso deve ser gramaticalmente completa e isto é o que permite que a comunicação escrita seja compreensível” (LURIA, 1987, p. 171).

Para David Pimm, a competência comunicativa “envolve saber usar e compreender estilos de linguagem apropriados a circunstâncias sociais particulares” (PIMM, 1987, p. 4, tradução nossa). Para esse autor, a linguagem

> Permite, além da comunicação direta com os outros, a reflexão sobre o próprio pensamento. Articular aspectos de uma situação pode ajudar o orador a esclarecer pensamentos e significados e, portanto, alcançar uma maior compreensão. (PIMM, 1987, p. 24, tradução nossa)

Para se comunicar em sociedade, são estabelecidas condições para que o emissor e o receptor de uma mensagem cumpram suas funções de emitir e receber, respectivamente, uma mensagem de forma clara e bem compreendida. Uma condição é a existência de uma linguagem que se estabeleça entre os dois sujeitos, emissor e receptor.

Em uma sociedade, a linguagem vernácula se torna a principal linguagem usada para a comunicação de indivíduos. No caso do Brasil, a linguagem vernácula é a Língua Portuguesa, e as pessoas têm contato com ela logo ao nascer, através da comunicação que pode haver entre seus pais e nas mídias, por exemplo.

Adentrar em um estudo sobre a linguagem presente na sala de aula exige, primeiramente, a compreensão do que se entende por Linguagem. O que quer nos dizer esse termo tão evocado neste trabalho?

Pode-se citar pesquisadores que utilizam o termo “linguagem” em diferentes contextos, desde a Psicologia, da Linguística e da Filosofia até em questões pragmáticas. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais,

> A linguagem é uma forma de ação interindividual orientada por uma finalidade específica; um processo de interlocução que se realiza nas práticas existentes nos diferentes grupos de uma sociedade, nos distintos momentos de sua história (BRASIL, 1997, p. 23).

Para Menezes (2000),

> A linguagem é um meio de comunicação utilizado por uma comunidade [...] para transmitir mensagens. Em sentido mais estrito, a linguagem é vista como um sistema de signos diretos ou naturais e pressupõe um sujeito falante e implica fenômenos ligados à transmissão da mensagem dentro de um contexto espaciotemporal e cultural chamado situação. (MENEZES, 2000, p. 3)

Entre diversos contextos, a linguagem se manifesta de diversas formas. A linguagem falada e escrita, com o propósito de comunicação através do uso de palavras, caracteriza a linguagem verbal. A linguagem não-verbal é aquela que não usa palavras para a comunicação, mas faz uso de desenhos, imagens, gestos, símbolos, etc.

Para que as mensagens sejam elaboradas e entendidas, o emissor e o receptor devem dominar uma língua. Mas o que é uma língua? Segundo Houaiss (2015), de acordo com a Linguística, a língua é o "conjunto de palavras e das regras que as combinam, usado por uma comunidade linguística como principal meio de comunicação e de expressão, falado ou escrito".

De acordo com Bruner (1986), o domínio da linguagem implica algumas ideias: sintaxe, referência, significado e a capacidade de constituição. A sintaxe se refere às regras para formar bons enunciados e exige abstrações para se comunicar, pois é preciso saber a sintaxe do enunciado para entendê-lo e saber a sintaxe das linguagens para poder compreendê-las. A referência diz respeito ao correto uso de palavras como artigos e pronomes que se referem a palavras já utilizadas anteriormente no mesmo enunciado. O significado se refere à relação entre palavras ou expressões. Por fim, a constituição se refere à capacidade da linguagem de criar enunciados.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais sobre a área de Língua Portuguesa indicam que

> O domínio da língua, oral e escrita, é fundamental para a participação social efetiva, pois é por meio dela que o homem se comunica, tem acesso à informação, expressa e defende pontos de vista, partilha ou constrói visões de mundo, produz conhecimento. Por isso, para ensiná-la, a escola tem a responsabilidade de garantir a todos os seus alunos

> o acesso aos saberes linguísticos, necessários para o exercício da cidadania. (BRASIL, 1997, p. 15)

Temos, ainda, que

> A língua é um sistema de signos histórico e social que possibilita ao homem significar o mundo e a realidade. Assim, aprendê-la é aprender não só as palavras, mas também os seus significados culturais e, com eles, os modos pelos quais as pessoas do seu meio social entendem e interpretam a realidade e a si mesmas. A linguagem verbal possibilita ao homem representar a realidade física e social e, desde o momento em que é aprendida, conserva um vínculo muito estreito com o pensamento. Possibilita não só a representação e a regulação do pensamento e da ação, próprios e alheios, mas, também, comunicar ideias, pensamentos e intenções de diversas naturezas e, desse modo, influenciar o outro e estabelecer relações interpessoais anteriormente inexistentes. (BRASIL, 1997, p. 24)

Machado (2011) nos esclarece que a língua tem a função de expressão e comunicação. Para ele, entre várias funções, a língua deve englobar o "desenvolvimento da capacidade de descrever o mundo, mas também de interpretar, criar significados, imaginar, compreender, extrapolar" (MACHADO, 2011, p.97).

Quando uma criança brasileira começa a frequentar a escola, ela já tem um certo domínio da língua portuguesa, mesmo que apenas pela oralidade. Durante seu processo de escolarização, a criança se aperfeiçoa no conhecimento de sua língua materna. Mas, também, é dada a ela a oportunidade de conhecer uma outra linguagem que irá acompanhar seus estudos durante muitos anos. Trata-se da linguagem matemática e, quanto a essa, a criança, quase sempre, não tem nem mesmo um domínio oral, já que não faz parte da cultura de nossa sociedade usar termos da Matemática diariamente de forma oral.

Machado (2011) se preocupa com a dificuldade que a maioria dos alunos tem com a aprendizagem de Matemática. Além disso, esse autor se questiona sobre o porquê de os alunos terem mais dificuldade em trabalhar com a linguagem matemática do que com a língua materna. Ele nos explica que a Matemática é uma linguagem formal, que não comporta a oralidade e é caracterizada como um sistema simbólico escrito, enquanto a Língua Portuguesa se caracteriza como uma língua natural. Sobre isso, ele nos diz que

> Tais linguagens [as formais] delinearam-se a partir do pressuposto de que as línguas naturais são imperfeitas, permitindo a ambiguidade; além disso, suas gramáticas são, muitas vezes, destituídas de lógica. A partir daí,muitos filósofos como Leibniz, Descartes, Condillac e outros sonharam com a construção de uma língua adequada para o exercício da razão, uma 'língua dos cálculos', cuja gramática teria características plenamente lógicas e que possibilitaria uma expressão precisa, sem dar margem a querelas de quaisquer tipos (MACHADO, 2011, p. 111).

Percebemos que, desde sua concepção, a linguagem matemática admite suas próprias características que diferem, para nós, da língua portuguesa. Por se tratar de línguas diferentes, espera-se que os processos de ensino e aprendizagem de tais línguas sejam distintos. Também se espera que as dificuldades ao aprender tais línguas sejam de diferentes naturezas.

Sendo assim, para que alguém se alfabetize em uma língua, o principal caminho é dado pela fala, que conduzirá à escrita. Como a língua materna é falada pelas crianças desde pequenas, diferente da linguagem matemática, é justificável que os alunos sintam mais dificuldade em lidar com a linguagem matemática, incluindo a escrita de símbolos.

Concordando com essa ideia, Pimm (1987) enfatizou que há uma forte relação entre qualquer língua materna e a Matemática e, ainda, que o professor de matemática deve se conscientizar disso para preparar suas aulas.

Com a inquietação sobre o aprendizado da língua portuguesa e da matemática, Machado (2011) afirma que existe uma impregnação mútua entre a Matemática e a Língua Materna, de forma que as funções de cada língua são paralelas. Para ele, aprender a língua materna, tanto em sua forma oral quanto na forma escrita, é ter a capacidade de construção de um sistema de representação da realidade. E aprender matemática é ser capaz de interpretar, analisar, sintetizar e significar. Por fim, essas funções se complementam, mas não podemos interpretar que uma língua empresta funções da outra, mas sim que as duas estão mutuamente impregnadas.

Machado (2011) ainda salienta que o aprendizado da escrita deve ser valorizado em aulas de língua portuguesa e de matemática, embora a linguagem oral esteja mais presente no cotidiano dos alunos.

Buscaremos, durante esta pesquisa, evidenciar situações em que o professor possa enfatizar o uso da linguagem escrita em aulas de Matemática, a fim de que seus alunos construam significados frente aos símbolos usados em Matemática e, também, possam entender os significados das palavras que envolvem conteúdos de Matemática. Para tal feito, o domínio da oralidade sobre a língua materna é um facilitador para os processos de ensino e aprendizagem da Matemática e de sua linguagem.

> De fato, todo o conhecimento da realidade que os alunos já trazem ao chegarem à escola encontra expressão através da fala; é deste suporte de significados que emergirão os signos para a construção da escrita. Apesar de ser tecnicamente possível a aprendizagem da escrita como a de um código, restrito apenas a seus aspectos sintáticos, com a total ignorância do significado dos signos envolvidos, não é assim que ela naturalmente ocorre em qualquer lugar do mundo. Sobretudo na forma escrita, as palavras já nascem prenhes de significação. Assim, enquanto suporte de tais significações, a língua falada configura um degrau natural para a aprendizagem do sistema de representação da escrita. A minimização do papel deste degrau é responsável por grande parte das dificuldades que se manifestam na capacidade de expressão escrita. (MACHADO, 2011, p.109-110)

Com base nesse trecho, e pensando sobre a impregnação mútua entre a Língua Materna e a Matemática, refletimos sobre o quanto o papel do professor, de enfatizar o significado dos símbolos e das palavras que estão sendo usados em suas aulas de Matemática, pode propiciar que seus alunos tenham domínio sobre a escrita da linguagem matemática.

Machado (2011) também nos aponta caminhos de valorizar a impregnação entre as línguas. A língua portuguesa possui um signo, chamado de monema, relacionado com um significado, de forma que em todo o processo de comunicação o monema emite seu significado. Quando o aluno não é incentivado a trabalhar com a escrita através do entendimento de seus significados, ele apresenta dificuldade em escrever. Quanto às linguagens formais como a Matemática, os signos se definem de acordo com as relações que estabelecem com outros signos. Esse autor salienta que

> Naturalmente, ainda que prescindam de interpretantes, os sistemas formais são passíveis de interpretações. Numa interpretação, os objetos do sistema são colocados em correspondência com certas entidades que podem ser objetos físicos, elementos geométricos, números, ideias, ou o que quer que se deseje, fazendo-se corresponder a cada proposição um enunciado que tem um significado, independentemente do sistema. (MACHADO, 2011, p. 120)

Sobre o ensino de Matemática pautado em uma preocupação com o entendimento dos símbolos e palavras que envolvem a Matemática, para que a comunicação ocorra através da linguagem escrita e/ou oral, Machado (2011) aponta que

> É fundamental a mediação da oralidade, emprestada da Língua Materna e que funciona como um degrau natural na aprendizagem da escrita;
>
> É importante que os objetos matemáticos, como as palavras que utilizamos ordinariamente, sejam apreendidos prenhes de significações e não como meras formas vazias, destinadas a interpretações posteriores;
>
> É necessária uma articulação mais consistente entre os papéis da análise e da síntese na construção do conhecimento matemático, de modo a harmonizar-se uma visão global, sintética, de cada tema com uma postura analítica, capaz de esmiuçar, enriquecer, aprofundar;
>
> É essencial o reconhecimento da importância dos resultados aproximados, das estimativas, das questões em aberto ou impossíveis de responder no seio de problemas caracteristicamente matemáticos;
>
> É imprescindível a aceitação do fato de que não se deve fugir das abstrações, hipertrofiando a importância do concreto, bem como de que lidar com abstrações não é característica exclusiva da Matemática, estando presente de modo igualmente marcante na constituição da Língua Materna. (MACHADO, 2011, p. 142-143)

Silveira (2015) nos esclarece que, para saber o que alguém sabe ou não sabe, devemos analisar o que ele diz ou escreve. Para essa autora, o que o aluno sabe pode ser convertido em escrita para que o professor possa ter uma ideia sobre a compreensão que o aluno tem sobre um conceito matemático. Ela acredita que “o uso da linguagem e de significações que brotam das palavras na comunicação entre professor e aluno podem fornecer sentidos aos conceitos matemáticos.” (SILVEIRA, 2015, p. 232)

Diz, ainda, essa autora, que ler o que o aluno escreve sobre sua compreensão de um conceito pode fornecer valiosas contribuições para o professor. Por exemplo, pode-se notar quais os erros dos alunos e o porquê deles. Muitas vezes, o aluno erra sem que o professor perceba o motivo. Às vezes, o professor utiliza palavras em suas aulas que lhe são bem claras já que ele está inserido no contexto da Matemática, porém seu aluno não faz ideia do significado das palavras que estão sendo ditas. Também deve se atentar para o sentido das expressões matemáticas e de seus símbolos, pois

> Na maioria das vezes, a linguagem do aluno reflete confusões e regras mal interpretadas, seja pelo fato de a linguagem matemática apresentar símbolos que não fazem sentido para ele, seja pela interpretação equivocada das regras matemáticas explicadas pelo professor, ou ainda, pela explicação do professor com uma linguagem inadequada. (SILVEIRA, 2015, p. 235)

O professor deve estar sempre atento à existência de um paralelismo entre as funções do ensino da Língua Portuguesa e da Matemática. Não podemos tratar a Matemática apenas como uma linguagem formal (MACHADO, 2011).

Concluindo,

> **É preciso compreender a Matemática como um sistema básico de expressão e compreensão do mundo, em sintonia e em absoluta complementaridade com a língua materna. Em outras palavras, é preciso reencantar a Matemática, e para tanto, a exploração de sua aproximação visceral com a língua materna é fundamental.** (MACHADO, 2011, p.181, grifo do autor)

Para nós, entender a linguagem matemática como uma língua impregnada à língua portuguesa também diz respeito a entendê-la como uma língua dotada de sintaxe e gramática próprias. De acordo com Pimm (1987), a linguagem matemática possui seus próprios símbolos que devem ser escritos e lidos de acordo com uma gramática própria, além de uma sintaxe da escrita matemática, que é construída com o apoio da sintaxe da língua materna.

Pode-se ver que a Língua Portuguesa e a Linguagem Matemática caminham juntas em aulas de matemática. E, ainda, que podemos entender essa relação entre as duas para que nós, pesquisadores e professores de matemática, possamos trabalhar bem o domínio dessas linguagens através da resolução de problemas matemáticos.

4.2 Linguagem Vernácula e Linguagem Matemática

Ao se pensar na comunicação existente nas aulas de Matemática, nota-se que a Língua Portuguesa é a que se faz mais presente, devido à importância que essa linguagem tem no cotidiano dos brasileiros.

Por isso, não faz sentido falar do modo como os alunos aprendem e usam uma outra linguagem, como a Linguagem Matemática por exemplo, sem falar de como aprendem e usam a Língua Portuguesa. De forma bastante geral, vemos que o domínio da Língua Portuguesa permite a interação social entre indivíduos, a comunicação entre eles e o mais importante: uma maneira de se comunicar através da escrita ou da fala, de forma a ser compreendido por outros. Sobre isso, os PCN trazem que:

> O domínio da língua tem estreita relação com a possibilidade de plena participação social, pois é por meio dela que o homem se comunica, tem acesso à informação, expressa e defende pontos de vista, partilha ou constrói visões de mundo, produz conhecimento. (BRASIL, 1997, p. 23)

Entre várias formas de linguagem, a verbal é a que mais se faz presente no cotidiano escolar no que diz respeito aos processos de ensino e aprendizagem, pois tanto professor como aluno escreve e fala muito mais do que faz gestos ou dança ao se produzir conhecimento. Usando a linguagem verbal, a escrita e a leitura se fazem essenciais para se ensinar e se aprender nas aulas de Matemática.

O professor, que adota a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, pode perceber que a leitura do enunciado de um problema e a interpretação de suas palavras ou símbolos são essenciais à sua resolução, bem como a formalização do conteúdo construído através da escrita dos procedimentos da resolução.

Onuchic e Leal Junior (2016) apontam que a leitura é o fator principal de percepção para os alunos sobre os conceitos trabalhados por meio de problemas. Os autores, apoiados em Vygotsky, trazem a relação da linguagem com a produção de sentido e significado das palavras. Trazemos um exemplo dentro do contexto da Matemática. Quando, em uma conversa informal, usamos o termo "chegar a um denominador comum", alguém pode entender "chegar a uma conclusão sobre alguma coisa". Logo o sentido de "denominador comum" para essa pessoa, nesse contexto, é o de atingir o mesmo objetivo ou a mesma conclusão. Porém, em uma aula de Matemática onde o professor está trabalhando soma de frações, o termo "denominador comum" tem o sentido de mesmo denominador para duas frações e possui esse significado no contexto da Matemática.

Para o entendimento de significados de termos usados nos enunciados dos problemas de matemática, é preciso que o aluno faça uma boa leitura do problema e identifique suas dúvidas. Além disso, ao ler um enunciado, o aluno deve traduzir o que está escrito em linguagem vernácula para a linguagem matemática. A tradução é uma das habilidades essenciais à leitura apresentadas por Onuchic e Leal Junior (2016). As outras habilidades são decodificação, compreensão, interpretação e retenção e são apresentadas no Quadro 1.

Quadro 1: Habilidades de leitura na Resolução de Problemas

Habilidade	**Caracterização**
Decodificação	É a etapa em que o leitor decodifica o signo no problema. Para tanto, é preciso que o signo utilizado no problema seja devidamente ligado ao seu significado. Esta habilidade também está estritamente relacionada à produção de sentidos, o que implicará no estabelecimento da segunda habilidade, a compreensão. Ela prescinde de conhecimentos *a priori* para que possa acontecer. Caso contrário o aluno não conseguirá sequer reconhecer os signos dos problemas, quiçá produzir sentido ou (res)significá-los.

Compreensão	A compreensão está relacionada ao reconhecimento e à captação dos principais tópicos do problema; ao reconhecimento das regras das linguagens vernácula e matemática usadas no problema; o reconhecimento das regras de enunciação e sintáticas; a apreensão de significações envolvidas no problema; e à capacidade de inferenciar. Passa-se a construir conceitos e conhecimentos a partir de processamentos de informações e de conexões com as ideias que se tem *a priori*. "Usamos as ideias que já temos para a construção de uma nova ideia, desenvolvendo no processo uma rede de conexões entre as ideias, as quais são influenciadas pelos sentidos e pelas significações adjacentes. Quanto mais ideias sejam usadas e quanto mais conexões sejam feitas, melhor será a compreensão." (VAN DE WALLE, 2001, p. 27).
Interpretação	É imprescindível que uma compreensão do problema aconteça para que haja uma interpretação do mesmo. Isso porque a compreensão prescinde dos conhecimentos *a priori* do sujeito, os quais interagem e interligam-se aos conceitos e conteúdos constituintes dos problemas. Ao fazer as conexões desses conhecimentos já apreendidos com os significados do problema, o sujeito amplia seus conhecimentos, e torna-se capaz de reformular seus esquemas sobre a temática do problema. É na interpretação que o sujeito leitor torna-se crítico sobre o problema. A interpretação pode ser direcionada através do trabalho de mediação. Ela é uma habilidade subjetiva e cada leitor retirará, do problema, percepções diferenciadas, pois ela dependerá idiossincraticamente da experiência que este sujeito tem/teve no mundo. É algo que dependerá dos objetivos, tanto do problema (proposto pelo professor) quanto do aluno/leitor. O que fará com que este último acione as estratégias mais adequadas para a resolução do problema.
Retenção	Ela é a apreensão do conhecimento sobre determinados conceitos e que foi construído através de problemas relacionados. Esta habilidade advém após a interpretação de conceitos. A Retenção acontece em dois níveis: a partir da compreensão e após a interpretação. No primeiro caso, a compreensão dos problemas permite a retenção tanto da temática quanto dos conceitos mais significativos. No segundo, tem-se um processo mais complexo, uma vez que para interpretar um problema é necessário sua compreensão de forma mais profícua. Ela possibilita aos alunos a resolução dos problemas a partir do que conseguiram apreender na leitura sem ser preciso retornar ao texto.

Fonte: (ONUCHIC; LEAL JUNIOR, 2016, p.30-31)

Esses autores enfatizam a importância da linguagem dos problemas ser acessível aos alunos e do entendimento do enunciado do problema através da leitura pois, através disso, o leitor produz significado aos conceitos que já possui a priori e que pode auxiliá-lo na resolução do problema.

Com a prática da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, a oportunidade de se trabalhar em grupos possibilita a discussão de sentido atribuído por cada integrante do grupo sobre uma palavra, para que o aluno crie significados sobre essa palavra dentro do contexto da Matemática. Em outras palavras,

> As negociações de significado e produção de sentido se dão na leitura em grupo/conjunto, onde são discutidas por meio da interação entre sujeitos que já conseguiram, através da leitura individual, identificar e reter os signos, os sentidos e os significados relacionados aos seus conceitos a priori. (ONUCHIC; LEAL JUNIOR, 2016, p.31)

Mas, ao se trabalhar com problemas de matemática, percebemos que a linguagem vernácula tem a função de apoiar os problemas através dos enunciados e está presente na leitura, na compreensão e na interpretação dos objetos matemáticos. Sobre isso, Brito (2013) ressalta a importância de se estudar os significados dos conceitos matemáticos segundo a língua portuguesa e a matemática. A autora, ao trabalhar com a representação fracionária e a representação decimal de um número racional, percebe que é necessário que o aluno entenda, a partir da leitura do enunciado de um problema, o que se pede em língua portuguesa e o que se pede quanto à matemática. É preciso que o aluno entenda o que significa fração e número decimal em seu cotidiano bem como na matemática, ou seja, o professor deve trabalhar com as duas linguagens em aulas de matemática.

> Na compreensão da palavra fração, inúmeras vezes os alunos irão utilizar a língua materna para a compreensão, apreensão do sentido da palavra ou do termo usado na matemática, ou seja, uma busca de pertinência de conceitos entre a matemática e a língua materna (...). Por isso é possível ler em matemática e escrever na língua materna, ou ao contrário, pois ambas as linguagens são uma representação de um pensamento matemático transferido para um pensamento em língua materna. (BRITO, 2013, p.6)

Para entender e dominar alguma linguagem, Silveira (2015), com estudos baseados em Wittgenstein, tomando um ponto de vista da filosofia da Educação Matemática, traz questionamentos sobre o que significa ler um enunciado e compreender o que se pede. Como o aluno interpreta uma regra ou texto matemático?

> A conversão da linguagem natural para a linguagem matemática exige a compreensão das regras matemáticas que estão implícitas no texto. Cada uma dessas regras, quando interpretada, define os conceitos contidos no enunciado, bem como a evidência das consequências de sua aplicação. (SILVEIRA, 2015, p. 183)

Essa autora fala sobre como o texto em linguagem natural pode influenciar a interpretação do aluno pois, como se trata de uma língua formal, pode deixar ambiguidades. Isso pode ocorrer quando se expressa uma ordem clara no enunciado de um problema como “multiplique”, por exemplo. Ou, ainda, o problema pode trazer um texto que deve ser interpretado para que o aluno realize uma multiplicação. Em ambos os casos, as palavras têm um significado preestabelecido pelo contexto da Matemática e o aluno deve conhecê-lo.

Pressuposto um contexto,

> O significado de uma palavra está no uso e pode ser objetivado por meio da escrita, já o seu sentido depende do contexto em que ela está sendo empregada. A expressão três x ao quadrado na oralidade pode ser compreendida pelo aluno como $(3x)^2$ ou $3x^2$. A linguagem formal é desprovida de oralidade, mas ela é importante para que o sujeito construa sentidos. Os atos de fala representam o fazer matemático, pois existe circularidade entre os atos do professor que constitui o conceito do objeto e as regras que constituem o conceito. A ação de dizer três x ao quadrado é ambígua e necessita do ato de mostrar por meio de um gesto o significado da expressão. O conceito de três x ao quadrado é um conceito ostensivo, ele necessita ser mostrado por meio da escrita. (SILVEIRA, 2015, p. 185-186)

A linguagem gestual é uma acompanhante comum do professor em aulas de matemática. Muitas vezes, ele mostra através de gestos o que é difícil de explicar por meio das palavras (SILVEIRA, 2015).

O professor deve ouvir as lógicas de seus alunos para mostrar a lógica matemática e explicar como são os significados das palavras dentro do contexto da Matemática. Para isso, deve tomar cuidado ao usar as palavras de sua linguagem natural pois são polissêmicas enquanto as palavras do contexto da matemática possuem um significado dentro de um determinado contexto. Assim, segundo Silveira (2015), o professor não deve ver a linguagem matemática apenas como uma linguagem formal, “é preciso dar vida aos seus símbolos e às suas regras que não têm significado para o aluno” (SILVEIRA, 2015, p.189). Esse processo de dar vida aos símbolos e regras da Matemática só é possível quando o professor compreende o processo de comunicação. Assim,

> É preciso que o professor compreenda que a linguagem é instrumento de comunicação e é por meio dela que pode entrar em entendimento com o aluno. É por meio do diálogo que tanto aluno quanto professor aprendem a ser criativos: o aluno ensina ao professor o que não compreende e o professor ensina ao aluno utilizando outras palavras- aprimorando o seu vocabulário – de uma forma que o aluno compreenda. (SILVEIRA, 2015, p. 189)

Quando o aluno se depara com enunciados em língua portuguesa e precisa entender a Matemática e a linguagem matemática contida no problema para entendê-lo, ocorre um processo de tradução, em que a linguagem matemática é vista como uma língua estrangeira e

> A Matemática é objetivada por meio de sua linguagem, que é regida por uma sintaxe que segue regras matemáticas, porém, essa linguagem, quando traduzida para a linguagem natural, passa também a seguir regras gramaticais. Nesse processo de tradução de uma linguagem à outra, a sintaxe deve ser compreendida para que a semântica se complete. (SILVEIRA, 2015, p. 181)

Essa autora argumenta, ainda,

> Em certos casos, o vocabulário matemático não faz parte do repertório do estudante, pois são poucas as palavras desse vocabulário que podem ser compreendidas na sua linguagem materna, como por exemplo, o texto matemático pode ser escrito em linguagem natural com expressões do vocabulário

> matemático, tais como: o triângulo ABC; existe um e somente um x para cada y. (SILVEIRA, 2015, p. 204)

Esse trecho nos faz pensar sobre como é difícil para o aluno, que não está acostumado a trabalhar com textos matemáticos, entender o que seu professor lhe diz e os enunciados de problemas de matemática. Para uma boa compreensão, Silveira (2015) sugere que seja feita uma tradução dos símbolos matemáticos para a língua materna, a fim de interpretar a matemática que possui uma linguagem formal e estrangeira.

A questão que se passa no momento da tradução é: como ela deve ser feita? Devemos traduzir palavra por palavra ou pensar no sentido que os símbolos possuem numa sentença matemática?

Para Silveira (2015), a comunicação do leitor com o texto matemático é virtual pois a linguagem matemática não possui oralidade e necessita da língua materna para dar sentido aos seus símbolos. Sobre isso, a autora afirma que texto é "tudo aquilo que for escrito em linguagem natural ou com símbolos matemáticos" (SILVEIRA, 2015, p. 216). Como exemplo temos o enunciado de um problema e até mesmo a explicação do professor no quadro. Para a autora, um texto deve ser fornecido aos alunos quando se tem a pretensão de ensinar um conceito matemático. E esse texto deve ser traduzido.

> Nota-se que na tradução de textos matemáticos é necessário primeiro traduzir seus símbolos para a linguagem natural e, posteriormente, dar sentido ao texto traduzido. Assim, na expressão matemática apresentada, não basta que seja traduzido apenas os seus símbolos, pois é necessário dar sentido à tradução. (SILVEIRA, 2015, p. 216)

Dar sentido à tradução é mais do que traduzir palavra por palavra pois isso pode causar prejuízos à interpretação do texto. Por exemplo, a tradução da expressão $2 \times (3 + 8)$ é clara quando está escrita. Porém, quando o professor fala "duas vezes três mais oito" pode levar o aluno a traduzir como $2 \times 3 + 8$, que é completamente diferente da primeira. Pimm (1987) apresentou uma outra questão sobre a tradução de palavras em textos matemáticos, ao narrar uma situação em que se pergunta "qual é a diferença entre os números 24 e 9? " e um aluno responde que 24 é par e 9 é ímpar, enquanto outro aluno responde que 24 possui dois algarismos e 9 possui apenas um. Isso nos mostra que esses alunos não compreenderam o significado da palavra *diferença* no contexto da matemática. Ainda, no primeiro exemplo, podemos perceber que a linguagem matemática se comporta muito bem com a escrita, não permitindo ambiguidades, coisa que não ocorre com a oralidade.

Silveira (2015, p. 220), baseada em Baruk, afirma que "aprender a falar matemática é proceder por meio de traduções e entrelaçamentos de sentido, a partir da linguagem do próprio aluno e da linguagem acadêmica." A autora conclui que a aquisição da linguagem matemática não é dada apenas por uma tradução literal do texto para uma linguagem natural, mas sim pela compreensão e significação dos símbolos matemáticos.

Muitas vezes, os alunos apresentam falta de domínio de sintaxe simbólica, como em casos de mau uso de parênteses. Porém, também não sabem a sintaxe de sua linguagem natural, o que os conduz à dificuldade em lidar com os símbolos da matemática. Isso aponta que o professor deve agir na construção do conhecimento sobre a sintaxe das linguagens que usa em suas aulas de matemática, seja a matemática, seja a língua portuguesa. Sobre o uso de símbolos da matemática, Curcio (1990) alerta que os símbolos e notações devem ser introduzidos à criança após ela demonstrar ter conhecimento sobre o conceito matemático que o símbolo expressa. De nada adianta o professor ensinar diversos símbolos se a criança não entende o que eles representam.

Para Miura (2001), a linguagem pode influenciar as representações matemáticas que os alunos fazem. Para a autora, existem dois tipos de representações que constroem a compreensão dos problemas matemáticos. São as representações instrucionais, consideradas externas ao aluno pois é usada pelo professor para dar as definições e exemplos aos alunos, e as representações cognitivas, interna ao aluno, construídas pelo próprio aluno para o conceito matemático fazer sentido a ele enquanto resolve problemas. Por fim, esses dois tipos são fortemente influenciados pela linguagem matemática.

> As conexões entre a idéia matemática e a representação instrucional ou entre a notação matemática e a representação podem ser mais fáceis de discernir sobre algumas características da linguagem verbal. As representações cognitivas também podem ser diretamente influenciadas pelas

> características de linguagens específicas. (MURIA, 2001, p. 53, tradução nossa)

Essas influências das características da linguagem em aulas de matemática são fornecidas em três casos: 1) No sistema de nomeação dos números segundo a representação cognitiva de número: como o aluno representa os números de acordo com sua linguagem materna. Nosso sistema de contagem com um sistema de base dez tem origem na língua chinesa, em que o "nome" do dígito do número depende do seu valor posicional; 2) Nos nomes das frações quando compreendida como as representações geométricas da relação parte-todo: os professores devem compreender a linguagem que envolve a fração (a relação parte-todo), entender o significado do numerador e denominador e utilizar figuras divididas em partes iguais para a compreensão dos alunos; 3) A influência das unidades em problemas de aritmética: os professores devem incentivar seus alunos a utilizarem corretamente as unidades em todos os problemas que envolvem números. Como por exemplo: duas folhas de papel, uma gota d'água, um copo de suco (MIURA, 2001).

Em especial, sobre os nomes das frações, Lamon (2001) afirma que os professores não se dedicam muito ao ensino da representação de frações e muito menos ao ensino dos diferentes construtos do número racional. Diz também que os professores se dedicam muito ao ensino da representação algébrica mas se esquecem que os números racionais também merecem atenção para a compreensão dos alunos, visto que razões e frações, por exemplo, são ferramentas muito utilizadas no cotidiano de profissionais como contadores (LAMON, 2001).

4.3 A Linguagem Matemática

Quando nos propusemos a estudar a linguagem matemática, percebemos que esta é uma linguagem rica em símbolos com significados próprios. Também é notável a importância da ordem em que os símbolos são empregados em uma sentença, a fim de expressar uma situação da realidade. Por isso, é conveniente dizer que a linguagem matemática possui sua própria gramática e sintaxe, que auxilia na escrita para que a comunicação entre o emissor e o receptor ocorra perfeitamente.

> A Matemática ensinada, principalmente a partir do sétimo ano, é impregnada de símbolos, que foram construídos ao longo de séculos. As etapas dessa construção, são por vezes, ignoradas nas salas de aula e livros didáticos. O pressuposto desse ensino é que o aluno precisa dominar regras, sendo automaticamente capaz de aplicá-las a situações concretas. (TINOCO, 2011, p. 33)

Machado (2011) sugere que o currículo de matemática deva ser construído com os mesmos objetivos do currículo da língua portuguesa, no caso do Brasil, pois, embora, as duas disciplinas tenham seus próprios objetivos e funções, ambas se resumem na explicação do mundo por meio de símbolos, sejam palavras ou números. O autor enfatiza que tanto a língua materna quanto a matemática devam ser tratadas na escola de forma escrita e de forma oral. Em geral, a criança tem o primeiro contato com a matemática através da escola, onde aprende a lidar com os números de forma escrita, sem que o professor se preocupe com a semântica de símbolos, deixando de mostrar a diferença entre número e numeral, por exemplo. A língua materna, por sua vez, aparece na vida da criança em sua forma oral e, só depois, a criança aprende suas regras e sintaxe. Esse autor sugere que a matemática também seja valorizada através da oralidade, porém sem que se abandone a escrita de símbolos matemáticos e seus significados.

Segundo Raimes (1987), os professores devem incentivar a escrita dos alunos no processo de aprendizagem de uma nova língua. Para ele, o ato de escrever permite que o aluno reflita sobre o que está aprendendo, treine sua escrita com o intuito de comunicar o que está pensando e, por fim, aprenda sobre o que está escrevendo. Trazendo essas ideias para o ensino de matemática, acreditamos que a escrita sobre o que se está aprendendo seja uma ferramenta muito útil no processo de aprendizagem, pois possibilita a reflexão sobre um conteúdo matemático, além do domínio e entendimento dos significados de símbolos matemáticos.

Para Pimm (1987), a linguagem matemática está presente em todo tipo de comunicação advinda de aulas de Matemática, situação na qual os alunos encontram dificuldade ao lidar com símbolos matemáticos. Para que o aluno aprenda sobre conteúdos matemáticos e os significados dos símbolos, esse autor salienta a importância de “conversar consigo mesmo” para esclarecer as ideias e expor seus pensamentos de forma oral e escrita. Sendo assim, ele admite que a matemática seja uma linguagem, pois possui características que permitem a comunicação, como significado, símbolos próprios e sintaxe.

Com relação aos significados, Pimm (1987) explicita que as palavras que aparecem nas aulas de matemática devem ser totalmente compreendidas pelos alunos, seja pela explicação do professor bem como pela consulta a dicionários. É importante que os alunos compreendam as palavras escritas através da linguagem matemática e não apenas da língua oral e vernácula. Símbolos e sintaxe também estão presentes na linguagem matemática, pois cada símbolo traz um significado e a organização dos símbolos diz muito sobre aquilo que se pretende comunicar utilizando-se da linguagem matemática. Dessa forma, o professor deve incentivar seus alunos quanto ao entendimento de símbolos matemáticos e à ordem que eles aparecem para a organização dos pensamentos.

Pimm (1987) ainda trata da fala dos alunos sobre o que estão aprendendo, algo extremamente importante quando se trata de linguagem. Para ele é muito importante que o aluno fale e reflita sobre seus pensamentos e ideias, pois isso pode ajudar a esclarecer seus próprios raciocínios. Algumas ideias são apresentadas e justificadas por Pimm (1987) para auxiliar o aluno a trabalhar suas falas. São elas: conversar consigo mesmo, conversar com outros, falar e ouvir matemática, discutir matemática utilizando-se das formas oral e escrita. Parece-nos que essas ideias se relacionam muito bem com a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, pois nessa metodologia o problema é tomado como ponto de partida e os alunos trabalham em grupos, o que possibilita que os alunos conversem com seus colegas, falem e ouçam matemática.

O domínio da linguagem matemática deve ser construído em aulas de matemática e, para isso, é preciso entendê-la como uma linguagem com suas características próprias e, mais do que isso, é preciso que o professor conduza os alunos à compreensão dessa linguagem, a fim de que o aluno consiga se comunicar matematicamente. Dessa forma, o aluno que domina a linguagem matemática deve traduzir enunciados de problemas escritos em língua materna em sentenças que utilizam, de forma correta, os símbolos matemáticos.

Pimm (1987), ao tratar do sistema de escrita matemático, apresenta algumas categorias de símbolos usados em Matemática. São eles: logogramas, pictogramas, símbolos de pontuação e símbolos alfabéticos. Explicaremos, de forma breve, o que o autor entende por cada categoria.

Os logogramas são símbolos usados especificamente no contexto da matemática e que possuem significados apenas para a Matemática. Como exemplos podemos citar os seguintes símbolos:

$$\int, +,\ -,\ \times,\ \div,\ \sqrt{\ },\ \sqrt[3]{\ },\ \in,\ \%,\ \complement,\ \exists,\ \nexists,\ \therefore,\ \cup,\ \cap, \forall.$$

Os pictogramas são ícones geométricos utilizados para interpretar a imagem de um objeto da Geometria, como por exemplo:

$$\measuredangle \text{ para ângulo}$$
$$\triangle \text{ para triângulo retângulo,}$$
$$\perp \text{ para a relação de perpendicularidade.}$$

Os símbolos de pontuação são emprestados da língua materna e usados com significados matemáticos. Temos os seguintes exemplos: ‘,’ e ‘.’ usados em números decimais para separar a parte inteira da parte não-inteira, ‘!’ que é empregado na matemática com o significado de fatorial, entre outros.

Os símbolos alfabéticos, constituídos por letras maiúsculas, minúsculas ou do alfabeto grego são usadas na Matemática com um significado matemático. Por exemplo, para denotar retas usamos letras minúsculas do nosso alfabeto e para denotar pontos usamos letras maiúsculas. As letras do alfabeto grego são usadas para denotar planos e alguns conceitos da matemática como a letra grega Δ (lê-se “delta”) que simboliza o discriminante de uma equação polinomial do segundo grau.

É de extrema importância que o professor procure, em suas aulas, explorar com os alunos os significados desses diversos símbolos adotados em

Matemática, bem como a ordem de escrita de cada um para que ocorra a compreensão da escrita matemática. Não é aconselhável que o professor use os símbolos matemáticos sem que os alunos saibam seus significados, ou pior, que o professor os apresente apenas como convenção de cada uso, pois isso acarretaria uma falta de domínio da escrita dos símbolos por parte dos alunos. É preciso que o aluno interaja com os símbolos e seus significados e entenda como a linguagem matemática usa cada um para facilitar a comunicação entre todos aqueles que falam matematicamente, seja de forma oral ou escrita. De acordo com o que diz Pimm (1987)

> A notação matemática é um enorme sistema conservativo em que os mesmos símbolos são usados repetidamente com diferentes significados em diferentes contextos, mais do que novos símbolos serem inventados (...)
>
> É importante que os símbolos empregados já existam como objeto conceitual para o usuário, ou seja, que possam ser reconhecidos, formados e distinguidos sem esforço e de preferência sem qualquer atenção consciente. (PIMM, 1987, p.148, tradução nossa)

Como estamos mais acostumados a escrever nossas ideias segundo a língua materna e sua sintaxe e gramática, é difícil a compreensão de que os símbolos podem trazer tantos significados já que “símbolos fornecem meios eficientes de armazenar e transmitir informações porque permitem a compressão de muitas informações em um espaço pequeno” (PIMM, 1987, p. 149, tradução nossa).

Ao tratar da escrita matemática, o referido autor aponta alguns princípios da escrita e os emprega especificamente na escrita matemática. São eles: Cor, Ordem, Posição, Tamanho Relativo, Orientação e Repetição (PIMM, 1987). Todos os princípios são essenciais para a escrita matemática no que diz respeito a uma perfeita compreensão do que o emissor tem a dizer.

O Princípio da Ordem, por exemplo, justifica a ordem em que os símbolos devem ser escritos e lidos de acordo com a cultura em que o emissor e o receptor estão inseridos. Para nós do Ocidente, a leitura é feita da esquerda para a direita e, por isso, espera-se que a escrita seja feita nessa mesma ordem para que o receptor compreenda a mensagem que está sendo passada.

Além disso, os símbolos têm uma posição a ser respeitada, como por exemplo, ao escrever uma operação entre números naturais, sabe-se que o símbolo da operação é escrito entre os números que são operados. Aqui estamos falando do Princípio da Posição, que é sutil em muitas escritas matemáticas. O escritor deve estar consciente em usar os símbolos matemáticos na posição correta (para cima ou para baixo, na esquerda ou na direita) para expressar o que deseja. Como exemplo, podemos citar a escrita de “dois elevado à terceira potência” com símbolos matemáticos, em que o correto é o ‘numero 2’ para baixo e o ‘número 3’ em cima.

Como o último exemplo, pode-se notar que o ‘número 3’, na potência, não é escrito com o mesmo tamanho que o ‘número 2’. Esse é o Princípio do Tamanho Relativo, que diz respeito ao tamanho dos símbolos matemáticos empregados em uma sentença. Isso não quer dizer que cada símbolo tenha um tamanho próprio, mas que seu tamanho é relativo a seu uso em uma sentença. Assim, “dois elevado à terceira potência” seria equivalente a 2^3, utilizando símbolos matemáticos. Nesse caso, o símbolo ‘2’ que representa a base é maior do que o símbolo ‘3’ que representa o expoente.

O Princípio da Orientação diz respeito a como o escritor deve orientar os símbolos que podem ser usados em diversas orientações. É o caso dos símbolos ‘< e >’ e ‘6 e 9’, que podem ser confundidos por serem idênticos mas usados com orientações diferentes.

O Princípio da Repetição refere-se à repetição de símbolos em uma sentença, o que pode sugerir novos significados. Por exemplo, as sentenças $f'(x)$ e $f''(x)$ têm significados distintos (a primeira se refere à derivada primeira de uma função no ponto x, enquanto a segunda se refere à derivada segunda), embora se utilizem os mesmos símbolos e, no segundo caso, há a repetição do símbolo “ $'$ ”.

Compreender cada um desses princípios e praticá-los ao escrever matemática pode auxiliar na compreensão do significado de cada símbolo.

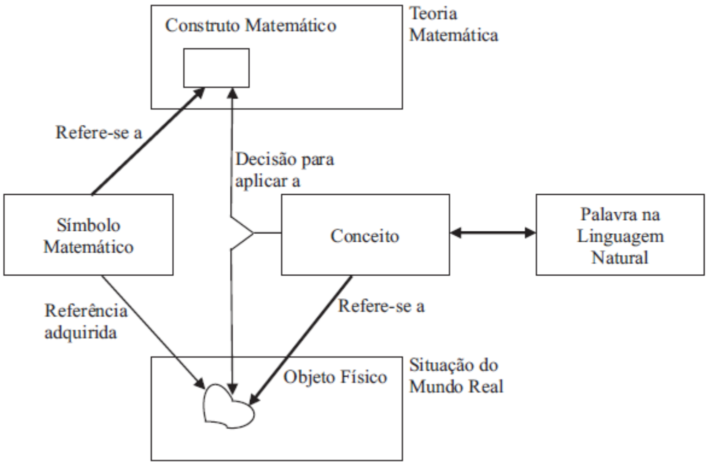
Porém, ao trabalhar com os símbolos matemáticos os alunos enfrentam dificuldades advindas de uma confusão entre símbolo e seu significado, ou também, entre a palavra e o conceito a que ela se refere. Sobre isso, Pimm (1987) ressalta que os alunos dão atenção às regras e não entendem os conceitos que envolvem cada símbolo ou palavra que designa um conceito. Por exemplo, o aluno sabe que $\frac{5}{2}$ é um número racional e que $1{,}5$ é um número decimal pelas características de o número ter ou uma barra fracionária ou uma vírgula, respectivamente. Mas, muitas vezes, não sabem identificar que esses números são número racional e número decimal, pois desconhecem as propriedades dos números e os significados dos símbolos.

A relação do significado das palavras e do símbolo matemático é trabalhada por Ohlsson (1991). O autor esclarece que, para cada situação do mundo real, há um símbolo matemático referente ao objeto físico pertencente a essa situação, que, por sua vez, está incluída em uma teoria matemática. O objeto do mundo físico é descrito por um conceito que deve ser apresentado segundo uma palavra da língua materna. O autor diz que há dois fatores que impregnam os construtos matemáticos com significado:

> Primeiro, um construto adquire significado a partir da teoria matemática em que ela aparece. Os axiomas e teoremas da teoria funcionam como postulados significativos que especificam o significado matemático do construto. Segundo, um construto adquire significado a partir de suas aplicações ao mundo real. Uma aplicação atribui tanto um sentido como uma referência ao construto matemático. O sentido é especificado por um conceito da linguagem natural que circunscreve a classe de situações do mundo real para o qual o construto é aplicado. A referência é especificada através de um mapeamento entre o construto matemático e os objetos do mundo real. Uma classe de situações e um mapeamento referencial constituem um significado aplicacional para o construto matemático. Se um construto é aplicado de diferentes modos, então ele tem vários significados aplicacionais diferentes. Uma aplicação é bem-sucedida na medida em que a teoria matemática se revela uma boa teoria da classe de situações especificada, sob o mapeamento referencial especificado. (OHLSSON, 1991, p.61, tradução nossa)

Essa relação entre significado e aplicação fica evidente ao analisar o diagrama da Figura 5, traduzido por Onuchic e Allevato (2008) do trabalho de Ohlsson (1991), que a teoria matemática busca descrever uma situação do mundo real, caracterizada por um objeto do mundo físico. Para essa descrição, a matemática conta com um símbolo matemático carregado de significado e expresso por um conceito construído com o auxílio de uma palavra ou conjunto de palavras da linguagem natural. A estrutura dessa teoria é sumarizada na Figura 5.

Figura 5: A relação entre significado matemático e significado aplicacional



Fonte: (ONUCHIC; ALLEVATO, 2008, p. 85)

Nota-se, assim, a extrema importância de entender o porquê do uso de símbolos em Matemática e mostrar a diferença entre o símbolo, o conceito e a palavra em aulas de Matemática. A prática da escrita matemática nas aulas pode auxiliar esses esclarecimentos desde que o aluno se questione sobre o significado dos símbolos e das palavras que usa.

As ideias matemáticas devem ser trabalhadas em aulas de Matemática de qualquer ano de escolaridade, pois a escrita permite a comunicação sobre a matemática entre os sujeitos além de esclarecer suas próprias ideias para o estudante e entender a sintaxe e a gramática da linguagem matemática. Os registros escritos sobre conteúdos da Matemática exigem muito esforço de quem escreve mas se mantêm mais vivos do que na oralidade.

Pimm (1987) justifica a dificuldade que os alunos têm em escrever com símbolos matemáticos, dizendo que escrever não faz parte do hábito dos alunos em aulas de Matemática, enquanto que falar é habitual para eles desde que motivados pelo professor a falar. Também diz que os alunos não acreditam que possam escrever o que dizem de forma oral como é feito na forma simbólica na Matemática.

Por outro lado, Pimm (1987) aponta vários benefícios para o processo de ensino e aprendizagem que envolvem a escrita dos alunos sobre conteúdos matemáticos. A escrita possibilita que o professor saiba claramente as ideias que cada aluno tem sobre um conteúdo da Matemática, o que não é possível notar em aulas em que os alunos apenas falam e não fazem registros. Além disso, um registro escrito possibilita que o aluno recorra à sua própria escrita sempre que tiver dúvidas.

Tinoco (2011) salienta alguns aspectos para definir quando se deve usar os símbolos matemáticos. Para isso, essa autora destaca o que se espera que seja desenvolvido com os alunos:

> Compreensão e sensibilidade em relação ao poder dos símbolos, quando e como podem e devem ser usados; quando estes devem ser abandonados em favor de outras abordagens.
>
> Habilidade de manipular mecanicamente as expressões simbólicas, acoplada à de leitura compreensiva dessas expressões, estabelecendo conexões e verificando a razoabilidade de resultados.
>
> Habilidade de selecionar e construir representações simbólicas para problemas e a coragem de procurar expressões melhores para substituí-las.
>
> Percepção da necessidade de verificar os significados dos símbolos e de confrontá-los, ao resolver um problema.
>
> Consciência dos diferentes papéis que os símbolos podem assumir em diferentes contextos. (TINOCO, 2011, p. 33)

É muito importante para o desenvolvimento do conhecimento matemático que os alunos dominem a linguagem matemática para se comunicar, seja de forma oral, ou principalmente de forma escrita, visto que essa é a forma que possibilita mais facilidade ao aprendizado de Matemática, segundo Pimm (1987). A Matemática é vista e utilizada em muitas áreas da ciência como uma linguagem para a comunicação, e isso ocorre, muitas vezes, de forma escrita. Por isso, é fundamental que os alunos desenvolvam habilidades de escrita em Matemática nas escolas.

Há três estilos diferentes de registro para a linguagem matemática segundo Pimm (1987): o registro verbal, o registro misturado e o registro simbólico. O registro verbal se refere a uma escrita que não se utiliza de símbolos matemáticos, em que as sentenças são expressas utilizando apenas a língua materna. O registro misturado envolve uma transição entre símbolos matemáticos e palavras da língua materna. Já o registro simbólico é caracterizado por uma escrita que possui poucas palavras da língua materna e muitos símbolos matemáticos.

Falando, em especial, sobre a Linguagem Algébrica, utilizada para comunicar as ideias da Álgebra e caracterizada pelo uso de letras, pode ser encarada como um importante meio para a reflexão sobre as dificuldades que os alunos enfrentam sobre o uso da linguagem simbólica. Quando o aluno compreende a linguagem algébrica e a utiliza de maneira correta, pode-se dizer que seu registro é simbólico de acordo com a classificação de Pimm (1987).

Tinoco (2011) relaciona o desenvolvimento da linguagem algébrica, historicamente, em três estágios: o estágio retórico, o estágio sincopado e o estágio simbólico. O primeiro se refere ao uso de expressões escritas totalmente em palavras sem o uso de símbolos ou abreviações. Por exemplo, segundo Guelli (2002, p.26, apud TINOCO, 2011, p.34) a equação $6x + 4x + 2x = 36$ era descrita da seguinte forma: “é preciso, em primeiro lugar, que vocês somem seis raízes com quatro raízes e com duas raízes. Como doze raízes vale o mesmo que trinta e seis unidades então o valor de uma raiz é três unidades”. Esse estágio abrange a álgebra dos egípcios, babilônios e gregos. Já o estágio sincopado abrange uma linguagem algébrica que foi tendo as palavras substituídas por abreviações e, a partir, das abreviações, os matemáticos começaram a substituí-las por letras e sinais. O estágio simbólico, correspondente aos séculos XVI e XVII, é marcado pelo uso de símbolos matemáticos como aperfeiçoamento na padronização de notações.

Adquirir domínio da linguagem matemática exige a compreensão dos símbolos matemáticos bem como das palavras usadas para expressar um conceito. Pimm (1987) sugere que o professor utilize dicionários em suas aulas de matemática para sanar as dúvidas sobre os significados das palavras. A aquisição de registros matemáticos também provoca compreensão sobre os símbolos matemáticos, diminuindo a confusão entre conceito, palavra e símbolo feita por grande parte dos alunos. Um aluno que possui o estilo de registro simbólico de escrita consegue realizar e entender registros escritos sobre um conteúdo matemático.

A partir da sexta série (atual sétimo ano) de escolaridade, os símbolos da Matemática começam a se fazer mais presentes nas aulas, pois o professor começa a se preocupar com o ensino da Álgebra. Tinoco (2011) apresenta algumas concepções da Álgebra que os professores devem dominar para trabalhar com seus alunos. Essas concepções veem a Álgebra como Generalizadora da Aritmética, como Álgebra Funcional, como Álgebra das Equações e como Álgebra Estrutural.

De forma geral, a Álgebra como Generalizadora da Aritmética é “utilizada para traduzir e generalizar. As variáveis (letras) e expressões são generalizadoras de números, operações e modelos aritméticos” (TINOCO, 2011, p. 7). Como exemplo, podemos ver que a igualdade $a + b = b + a$ é uma generalização da propriedade comutativa da adição.

A Álgebra Funcional “é considerada como estudo de relações entre grandezas” (TINOCO, 2011, p.8). É o caso do estudo das funções, em que se analisa o comportamento de uma grandeza enquanto outra está variando de acordo com uma relação estabelecida por uma igualdade. Vejamos um exemplo:

> Numa função do tipo $y = ax + b$, os valores de y (variável dependente) são determinados pelos da variável x (variável independente). A maneira pela qual x e y estão relacionadas dependem dos valores de a e de b (parâmetros). Por exemplo, os valores de y e x aumentam ou diminuem simultaneamente, sempre que o parâmetro a é positivo. (TINOCO, 2011, p.8)

Na Álgebra das Equações, o interesse se dá na resolução de equações. Explorar e manipular a igualdade significa, nessa concepção de Álgebra, determinar o valor das letras dentro da equação. Essa é a dimensão em que os alunos têm o primeiro contato com a Álgebra, por volta do sétimo ano de escolaridade.

A Álgebra Estrutural é usada em exercícios de puro cálculo algébrico, em que as letras são símbolos abstratos que devem ser manipulados seguindo algumas regras. As letras não são vistas nem como incógnitas, nem como variáveis, tampouco como parâmetros. Exige-se apenas, nessa concepção de álgebra a manipulação algébrica que “incluem classificação, procedimento e operações entre expressões algébricas, tais como fatorar, simplificar expressões, reduzir termos semelhantes, adicionar, etc.” (TINOCO, 2011, p.10).

Quando se trabalha com Álgebra fica claro que essas concepções não ocorrem totalmente separadas, ou seja, pode-se trabalhar com duas ou mais ao mesmo tempo. Quando se trabalha com funções, por exemplo, é comum ver a álgebra das equações e a álgebra estrutural durante a resolução de um problema. O que é comum em todas as concepções, do ponto de vista da sala de aula, é a dificuldade dos alunos em entender a linguagem algébrica, importante componente da linguagem matemática, pois conta com o uso de muitos símbolos, entre eles as letras.

5. Números Racionais

Apresentaremos, a partir de agora, o que pesquisadores entendem por Números Racionais a fim de orientar nossa visão sobre tal conteúdo. Behr et al (1992, p. 296, tradução nossa) afirmam que “há uma plena concordância de que a aprendizagem de conceitos de número racional permanece um sério obstáculo no desenvolvimento matemático das crianças”.

Um obstáculo encontrado ao se estudar os números racionais através do trabalho de outros pesquisadores é o de se encontrar clareza sobre o que se entende por número racional e o que se entende por fração ou número fracionário. Autores como Kieren (1991) e Behr, Harel, Post e Lesh (1992) denominam ao conjunto dos construtos identificados sobre números racionais por “frações”. No GTERP, preferiu-se usar como tópico geral para esse trabalho “números racionais” e, nesse tópico, trabalhar as diferentes personalidades do número racional

Onuchic e Botta (1997) apresentam as diferentes personalidades do número racional, ao tratarem de diversos significados que o número racional assume em diferentes contextos. São eles: ponto racional, quociente, fração, medida, razão e operador. Para as autoras, “de acordo com Kieren, o fato de terem entendido números racionais significa entenderem as diferentes interpretações dos números racionais tanto quanto as diferentes interpretações inter-relacionadas” (ONUCHIC; BOTTA; 1997, p.7). Recentemente, Onuchic e Allevato (2008) também usaram o termo personalidades do número racional.

Compreendemos que o número racional, pertencente ao Conjunto dos Números Racionais (denotado por $\mathbb{Q}$), é aquele que pode ser expresso na forma $\frac{a}{b}$ com a, b números inteiros e b diferente de zero. Utilizando apenas o registro simbólico, temos que

$$\mathbb{Q} = \left\{x = \frac{a}{b};\ a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$$

Kieren (1991) apresentou suas inquietações sobre as características que devem ser aprendidas ao construir-se o conhecimento sobre número racional. Para isso, segundo Behr et al (1992), Kieren

> Primeiro introduziu a ideia de que número racional consiste de vários construtos e que a compreensão do conceito de número racional depende de se ganhar uma compreensão da confluência desses construtos. Behr, Lesh, Post e Silver (1983) restauraram esses construtos de uma forma em termos um pouco diferentes e a análise de números racionais de Nesher (1985) distinguia entre os seguintes conceitos: fração como uma relação parte-todo; número racional como o resultado da divisão de dois números, como uma razão, como um operador, e como uma probabilidade. Kieren (1988) indicava que um pleno desenvolvimento do conceito de número racional compreende quatro subconstrutos: medida, quociente, razão e operador multiplicativo. Vergnaud (1983) e Freudenthal (1983) parecem concordar (BEHR et al, 1992, p. 297, tradução nossa)

Vergnaud (1988), ao definir campo conceitual como um conjunto de problemas e situações para o tratamento de conceitos, procedimentos e representações de diferentes e interconectados tipos, introduziu um campo conceitual multiplicativo como um exemplo e identificar os amplos ramos desse campo ao incluir: multiplicação, divisão, frações, razão, números racionais, funções lineares e espaços vetoriais.

Para explicar o que Kieren (1991) entendia por cada subconstruto, recorremos ao trabalho de Botta (1997), que explicita:

> No subconstruto medida (ou parte-todo) uma unidade é dada. Esta unidade pode ser discreta (uma coleção de objetos) ou contínua (por exemplo, um bolo). A unidade é partida em partes de igual tamanho ou em formas não congruentes mas com a mesma área, por exemplo quando ¾ de um círculo são sombreados ou quando 1/6 de uma cartela com 12 ovos é frito.
>
> O subconstruto quociente refere-se ao uso do número racional como solução para situações de divisão. Por exemplo, quando um número de objetos precisa ser igualmente dividido por um certo número de pessoas: dividir igualmente treze barras de chocolate entre quatro pessoas. Esta situação é representada por 13 ÷ 4 ou 13/4 ou 3 ¼ de barras de chocolate entre quatro pessoas. Neste subconstruto, um número como 2/3 é o resultado de 2 objetos divididos por 3 pessoas.
>
> O subconstruto razão: razão é uma relação de comparação entre duas quantidades de mesma grandeza. Por exemplo, o número

> racional ¼ pode descrever a razão de um copo de suco concentrado para quatro copos de água. Se grandezas diferentes são comparadas, a razão é chamada taxa. Por exemplo, uma indústria de tecido produz 1500 metros de tecido por dia ou 1500m/dia.
>
> No subconstruto operador, o número racional tem a função de "esticador" ou "encolhedor". Por exemplo, em um armazém, a cada 3 dias de venda, dois dias representam lucro, então, num período de 30 dias teremos 20 dias de lucro, porque 2/3 de 30 é 20. Neste caso, o número racional 2/3 tem a função de "operar" sobre a quantidade dada. Como operador, um número racional pode ser um "aumentador" se o numerador for maior que o denominador ou um "diminuidor", se o numerador for menor que o denominador. (BOTTA, 1997, p. 52, grifo do autor)

Ainda, para compreender os números racionais, Kieren (1991) afirma que é preciso dominar esses quatro subconstrutos mencionados. Para isso, é importante que o estudante possua conhecimentos prévios bem estruturados, como dominar as propriedades e as operações que ocorrem no conjunto dos números naturais, por exemplo. Vergnaud (1988) afirma que, até mesmo dentro do campo conceitual multiplicativo, cada conceito depende de um conhecimento que o estudante já possui. Por isso, sugere que os estudantes de dez a doze anos devam aprender frações e as propriedades dos números racionais para estarem preparados a aprender proporção.

Sobre esse assunto, Botta (1997) aborda como são trabalhados o conjunto dos números naturais e dos números inteiros e as operações aritméticas básicas com as crianças. Essa autora traz as propriedades dos números naturais e apresenta todos os fatos básicos que as crianças devem memorizar sobre as operações básicas adição, subtração, multiplicação e divisão.

Quando a criança começa a trabalhar com números racionais, os fatos básicos das operações feitas dentro desse conjunto não podem ser memorizados pois são infinitas as situações que envolvem operações de números racionais. Além disso, as técnicas para operar números racionais são diferentes das que ocorrem com os números naturais, embora as ideias que envolvem o conceito de operação sejam as mesmas. Surge, então, a necessidade de se compreender como os números racionais são classificados e estudados, além de compreender as técnicas de operações com números racionais de forma significativa.

Kieren (1991) se preocupava com o uso da linguagem para o ensino de números racionais. Para esse autor, a construção do conhecimento matemático depende diretamente de como as pessoas desenvolvem sua atividade mental e começam a usar a linguagem. Além de usar a linguagem verbal escrita para entender os conceitos de medida, quociente, razão e operador, o aluno também aprende com imagens. Corroborando com essa ideia, Vergnaud (1988) afirma que expressões, diagramas e tabelas também são importantes para o ensino de número racionais, pois possibilitam que as relações não sejam esquecidas ou possam ser recordadas quando necessárias.

É muito comum alunos entenderem e professores trabalharem número racional vendo-o apenas como fração. Para Smith III (2002), o conceito de número racional é empregado para falar de três ideias: quociente, fração e razão. Essas ideias não são as mesmas, e por isso o autor propõe que o professor auxilie seus alunos quanto à compreensão de cada uma.

O estudo das personalidades do número racional, como dito anteriormente, é recente, datado a partir de 1976 com o trabalho de Kieren. É de se esperar que os professores não saibam reconhecer as diferentes personalidades do número racional, impedindo o desenvolvimento do raciocínio multiplicativo no ensino de Matemática. Segundo Ohlsson (1991), o aluno encontra dificuldades ao trabalhar com números racionais devido à semântica que envolve a composição do número racional (dois números inteiros são escritos de forma tal que um está em cima do outro e são separados por uma barra). Isso se dá, também, porque olhar para um número racional envolve olhar para diversos conceitos, como as propriedades dos números inteiros, por exemplo.

Botta (1997, p. 68) faz o seguinte questionamento: “Quais são as relações entre frações, medidas, proporções, quocientes, taxas, razões e números racionais?” A partir disso, percebemos que muitos pesquisadores concordam que quociente, razão, operador e relação parte-todo são ideias centrais dos números racionais. Faz-se necessário, então, compreender essas ideias e conceitos.

5.1 Números racionais segundo Ohlsson

O trabalho com Números e Operações é um Padrão de Conteúdo segundo o NCTM (2000), isto quer dizer que, durante todos os anos de escolaridade, os alunos estudarão números. Entre eles, está o conteúdo Número Racional.

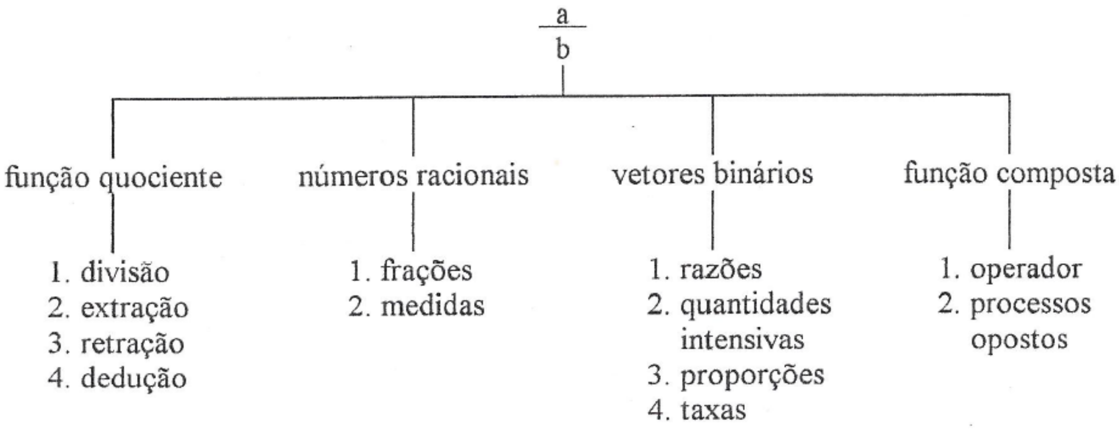
Procuraremos evidenciar as grandes ideias que competem a cada uma dessas personalidades para, mais adiante, apontar formas de o professor trabalhar números racionais e seus diversos significados na sala de aula, buscando valorizar a escrita matemática dos alunos e também outros componentes de domínio da linguagem matemática, como o significado das palavras e de símbolos que envolvem os enunciados de problemas e as soluções de um problema.

Ohlsson (1991) procurou enxergar o que os diferentes construtos do número racional tinham em comum. Para o pesquisador, a barra-fracionária é o elemento comum entre os números racionais, de forma que depende da relação entre os números inteiros *a* e *b*, para que se possa fazer uma interpretação entre eles e obter um construto do número racional $\frac{a}{b}$.

Botta (1997) apresenta o seguinte esquema que representa a interpretação que se pode fazer entre os números *a* e *b* e a barra fracionária. Como vemos na Figura 6, para Ohlsson (1991) os construtos do número racional são: função quociente, números racionais[8], vetores binários, função composta.

[8] O termo *números racionais* usado na teoria de Ohlsson (1991) não deve ser confundido como o conjunto dos números racionais. Deve ser compreendido como uma parte desse conjunto $\mathbb{Q}$ que, por falta de um nome melhor, usamos esse termo. O referido autor afirma que não há um isomorfismo entre o conjunto $\mathbb{Q}$ e o construto *números racionais*.

Figura 6: Esquema da teoria de Ohlsson



Fonte: (BOTTA, 1997, p. 72)

A partir desse esquema, procuraremos abordar como Ohlsson (1991) construiu uma teoria acerca dos números racionais assim como nós os entendemos. Para isso, nos apoiamos em Botta (1997).

5.1.1 Quociente

Para Ohlsson (1991, p.63, tradução nossa), "a função quociente pode ser definida como a inversa da função multiplicação". Logo, ao enxergar o número racional como um quociente, vemos o resultado de uma divisão.

Há três valores que envolvem o quociente: os elementos a e b e o número $\frac{a}{b}$.

Esse autor aponta que a função quociente é aplicada em diversas situações, nas quais emprega processos de partição, extração, retração (encolhimento) e dedução.

Ao tratar de partição, por exemplo, esses três valores são considerados, respectivamente, um referente à quantidade a ser particionada, um referente à quantidade de partes iguais em que a primeira quantidade será particionada e o terceiro representa a função quociente, significando uma divisão entre as primeiras quantidades.

Já ao tratar de extração, Ohlsson (1991) diz que esses valores representam a quantidade de onde ocorre a extração, a quantidade que é extraída e o quociente que representa o número de vezes que a extração ocorreu, respectivamente.

Em cada caso, a função quociente tem um significado, embora represente, em ambos, uma divisão. Segundo o dicionário Houaiss, quociente é o “resultado de uma divisão” (HOUAISS, 2015). Pensando como esta definição, a barra do quociente representa uma divisão entre os números a e b. Por se tratar de uma divisão, os elementos a e b do quociente são chamados dividendo e divisor, respectivamente.

Entendendo a função quociente como a inversa da função multiplicação, podemos definir as duplas inversas obtidas pela comutatividade da multiplicação:

$$x \times y = r \iff \begin{cases} x = \dfrac{r}{y}, y \neq 0 \\ y = \dfrac{r}{x}, x \neq 0 \end{cases}$$

A partir dessa definição, Ohlsson (1991) apresenta algumas leis que podem ser deduzidas e provadas:

a) Lei da Equivalência:

$x \div y \equiv z \div w \iff x \times w = y \times z$

b) Lei da Adição:

$x \div y + z \div w = (x \times w + z \times y) \div (y \times w)$

c) Leis da Multiplicação:

$(x \div y) \times z = (x \times z) \div y$

$(x \div y) \times (z \div w) = (x \times z) \div (y \times w)$

d) Lei da Distribuição da Multiplicação sobre a Adição:

$[(x \div y) + (u \div v)] \times (m \div n) = (x \div y) \times (m \div n) + (u \div v) \times (m \div n)$

Vista como a função inversa da multiplicação, a função quociente pode ter várias aplicações, referentes a uma divisão partitiva ou quotitiva. Entendemos por divisão partitiva aquela que divide uma quantidade em subquantidades. Por exemplo, ao dividir 12 balas entre 3 crianças obtemos o resultado 4 balas/criança, ou seja, obtemos uma parte dentro da quantidade inicial. E, por divisão quotitiva, entendemos como sendo o resultado de uma divisão que busca mostrar a quantidade de subquantidades dentro de uma quantidade inicial. Vejamos o exemplo: dividir 12 balas em grupos de 4 balas/crianças significa obtemos o quociente 3 crianças, ou seja, temos uma quota da quantidade inicial.

Para cada situação que envolve a função quociente, apresentamos um problema como exemplo. Todos os problemas foram retirados da Dissertação de Botta (1997) com título: "Números Racionais e raciocínio proporcional: considerações sobre o ensino-aprendizagem".

<u>Partição (Divisão):</u> Particionar ou dividir uma quantidade é separá-la em partes de tamanhos iguais, ou melhor, de quantidades iguais. Assim, o elemento a se refere à quantidade a ser particionada; o elemento b se refere ao número de partes iguais em que a quantidade é particionada; e o número $\frac{a}{b}$ se refere à quantidade de uma das partes.

Um exemplo de situação do mundo real, onde a aplicação da função quociente é vista como uma partição é a seguinte:

Há três pizzas para serem repartidas igualmente entre quatro pessoas. Quanto de pizza cada pessoa receberá?

$$3\, pizzas\ \div 4\, pessoas = \frac{3}{4}\ pizza/pessoa$$

Nessa situação, vemos que

3 pizzas: representa a quantidade a ser dividida

4 pessoas: número de partes iguais que a quantidade 3 será dividida

¾ pessoas/pizza: quociente que representa a quantidade de uma das partes resultantes

<u>Extração</u>: Extrair é tirar repetidamente uma quantidade de outra quantidade. Neste sentido, o elemento a se refere à quantidade que sofrerá as extrações; o elemento b se refere ao número de partes iguais que serão

extraídas; e o número $\frac{a}{b}$ se refere à função quociente que é a quantidade de vezes que a extração ocorreu. Conclui-se, então, que a função quociente representa uma divisão quotitiva.

A seguinte situação exemplifica essa aplicação:

Tenho dez metros de tecido. Quantos pedaços de dois metros posso ter a partir dessa quantidade de tecido?

$$10\,m \div 2m = 5$$

Nessa situação, vemos que

10 m: representa a quantidade que sofrerá extração

2 m: quantidade que será extraída repetidas vezes

5: quociente que representa a quantidade de vezes que a quantidade 2 m foi extraida da quantidade 10 m. É uma quota.

<u>Retração (Encolhimento)</u>: O processo de retração envolve uma quantidade que é retirada de alguma outra quantidade por um período de tempo. Nesse sentido, o elemento a se refere à quantidade que sofrerá o encolhimento; o elemento b é um parâmetro referente ao número que será retraído (encolhido) dentro da quantidade a; e o número $\frac{a}{b}$ se refere à função quociente que é a quantidade que sobrou depois que a retração ocorreu.

Vejamos um exemplo:

O volume inicial de um balão era de 6 m^3. Sofreu uma retração com um fator três, resultando um volume de 2 m^3.

$$6\,m^3 \div 3 = 2m^3$$

Podemos dizer que, ao sofrer uma retração, o balão reduziu-se a um terço de seu tamanho original. Temos:

6 m^3: representa a quantidade que sofrerá contração

3: parâmetro que se refere à quantidade que será contraída da quantidade inicial

2 m^3: quociente que representa a quantidade final após a contração.

Dedução (Edução): O processo de dedução é uma aplicação em que se tira conclusões importantes a partir de uma quantidade multidimensional com o auxílio de outro valor. Nesse caso, o elemento a se refere a uma quantidade multidimensional; o elemento b se refere ao fator da quantidade multidimensional dada; e o número $\frac{a}{b}$ se refere à função quociente que é outra quantidade multidimensional.

Vejamos uma situação como exemplo:

Conhecidos a área A e o comprimento C de um retângulo, qual a largura L deste retângulo?

Temos

$$A = C \times L \ \rightarrow \frac{A}{C} = \frac{C \times L}{C} = L, \qquad C \neq 0$$

Observemos que não fizemos uma divisão em partes iguais, ou uma retração ou uma contração para obtermos a largura do retângulo a partir da área. A dedução feita é obtida a partir do quociente entre a área do retângulo e seu comprimento. Temos:

$C \times L$: representa a quantidade multidimensional

L: um dos fatores da quantidade multidimensional

5.1.2 Números Racionais

Ao falar sobre Números Racionais, Ohlsson (1991, p. 69, tradução nossa) afirma que "os números racionais estão intimamente ligados com a função quociente". Considere o número racional

$$r = \frac{x}{y} \ , \ y \neq 0$$

como solução inteira da equação $y \times r = x$.

O número racional é valor da função quociente para os argumentos x e y e pode ser escrito como $x \div y$.

Podemos, então, definir o número racional como sendo a solução não inteira r da equação $y \times r = x$. Assim, a barra fracionária é definida como um separador dos argumentos x e y, usada como um um objeto e não mais uma função como no caso da função quociente. Podemos, então, escrever $< x, y >$ para simbolizar o número racional.

Os números racionais possuem as seguintes leis que podem ser provadas:

a) Lei da Equivalência:

$< x, y > \equiv < z, w > \Leftrightarrow x \times w = y \times z$

b) Lei da Adição:

$< x, y > + < z, w > = < x \times w + z \times y, y \times w >$

c) Leis da Multiplicação:

$< x, y > \times z = < x \times z, y >$

$< x, y > \times < z, w > = < x \times z, y \times w >$

d) Lei da Distribuição da Multiplicação sobre a Adição:

$(r_1 + r_2) \times r_3 = (r_1 \times r_3) + (r_2 \times r_3)$, com $r_1 = \frac{x}{y}, r_2 = \frac{z}{w}, r_3 = \frac{t}{v}$.

Na teoria dos números racionais, $\frac{x}{y}$ é visto como o par ordenado $< x, y >$ que representa o número racional. Nessa teoria, Ohlsson (1991) cria teoremas sobre os pares ordenados e, também, se questiona sobre a equivalência entre dois números racionais.

O que significa ser equivalente? O que há de comum entre dois números racionais equivalentes? Botta (1987), apoiada em Ohlsson (1991), afirma que os pares ordenados ficam bem definidos por seus próprios elementos. Assim, dizer que $< 1,2 >$ e $< 2,4 >$ são equivalentes não faz sentido se pensarmos em pares ordenados, visto que o par $< 1,2 >$ é diferente do par $< 2,4 >$ porque seus elementos correspondentes são diferentes.

Por outro lado, os pares ordenados estão representando números racionais. Logo, se dissermos que $< 1,2 >$ e $< 2,4 >$ são equivalentes estamos dizendo que os pares representam o mesmo número racional. Assim, fez-se necessária a criação de uma teoria sobre a equivalência entre dois pares ordenados e entre dois números racionas. Ohlsson cria, então, um postulado que diz que as duas entidades- par ordenado e número racional- serão equivalentes quando elas tiverem propriedades de pares ordenados diferentes, mas propriedades de números idênticas.

Essa entidade é vista como uma terna $< x, y, r >$, onde x e y são os dois elementos do par ordenado $< x, y >$ e $r = r_{x,y}$ é um correspondente número racional. Dessa forma, duas ternas serão: idênticas quando os três elementos forem os mesmos; equivalentes quando seus dois primeiros elementos forem diferentes e os terceiros forem iguais; diferentes quando todos os três elementos forem diferentes.

Para Ohlsson (1991) existem duas aplicações para o número racional, as frações e as medidas. Vejamos, agora, um pouco sobre cada uma dessas aplicações.

Fração

Ohlsson afirma que a fração tem propriedades de pares ordenados como, por exemplo, duas frações são diferentes se seus numeradores ou se seus denominadores são diferentes, mas, também tem propriedades de números, como o fato de poderem ser ordenadas, adicionadas e multiplicadas. Além disso, o termo fração significa uma parte de um todo que foi fracionado ou partido. Porém, essa compreensão permite ambiguidades pois uma fração pode representar uma quantidade maior do que um inteiro.

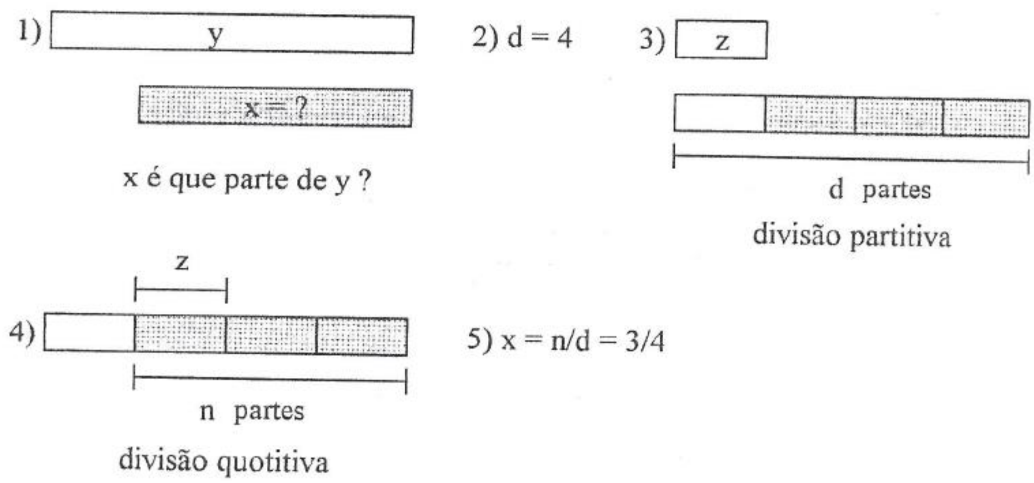
Para não causar ambiguidades, Ohlsson, seleciona passos para construir uma representação numérica das frações. Dada uma quantidade contínua y, chamada quantidade de referência, considera-se uma quantidade contínua x, parte de y, chamada quantidade de interesse. Chamamos x de quantidade fracionária. Dados somente números inteiros, determinar uma quantidade fracionária é criar uma representação numérica para x sem assumir que y seja conhecida. Os passos, para isso, determinados por Ohlsson, são:

1. Selecionar uma quantidade de referência contínua y, que é o todo.
2. Selecionar um parâmetro de divisão d, $d \neq 0$.

3. Dividir y em d partes iguais e chamar de z cada parte da divisão.
4. Extrair z de x sucessivamente, chamando de n o resultado. Se n não for um inteiro, ou seja, se houver resto, então deve-se voltar ao passo 2 e selecionar outro parâmetro de divisão.
5. Construir o par ordenado $< n, d >$: o número racional $\frac{n}{d}$ que representa a quantidade fracionaria x.

Para exemplificar os passos apresentados acima, Botta (1987) traz representações com diagramas na Figura 7.

Figura 7: Exemplos de quantidades fracionárias



Fonte: (BOTTA, 1997, p.82)

Compreendemos o significado dos algarismos 2 e 6 combinados para obter o número racional 2/6, por exemplo. Visto como uma fração, temos que o numerador é 2 e o denominador é 6. Ainda, o denominador diz em quantas partes iguais o todo foi dividido (em 6 partes, no caso) e o numerador diz quantas dessas partes foram tomadas (2 partes, no caso). Logo, o número racional $\frac{2}{6}$ diz que dividimos um todo em seis partes iguais e tomamos 2 dessas partes. Pode-se notar que se faz uso da divisão partitiva quando dividimos y em d partes iguais e o uso da divisão quotitiva quando procuramos saber quantas vezes a parte de tamanho z cabe em x. Por essse motivo, Ohlsson considera que a boa compreensão sobre divisão e, consequentemente, da função quociente, é pré-requisito para o entendimento das frações.

Medidas

Medidas são uma outra aplicação dos números racionais. Essa aplicação está muito próxima do conceito de relação parte-todo das frações. Quando frações são usadas como medidas, nós usamos uma unidade padrão de medida fixa e um parâmetro de divisão d fixo, determinando uma parte fixa z. Por exemplo, um metro (y) é particionado em dez (d) partes iguais para obter decímetros (z).

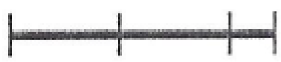
Como nas frações, o número racional expresso por $\frac{a}{b}$ é registrado por

$$\frac{numerador}{denominador}$$

O denominador indica em quantas partes iguais o todo foi dividido e lhe dá nome. O numerador indica quantas dessas partes iguais foram tomadas. Botta (1987) apresenta um exemplo prático:

Qual a medida do segmento da figura abaixo?

Figura 8: Medida de um segmento



Fonte: (BOTTA, 1987, p.83)

Segundo a autora, para obter a medida desse segmento, temos que considerar uma quantidade de referência padrão. No caso o centímetro, com sua unidade secundária como o milímetro, por exemplo. No segmento cabem dois centímetros e um resto, que será novamente dividido. Sabe-se que quando o centímetro é dividido em dez partes iguais, obtém-se o milímetro e, assim, 2 milímetros é a medida do resto do segmento. Logo, o segmento mede 2 cm + 2mm = 20 mm + 2 mm = 22 mm ou 2 cm + 2mm = 2 cm + 0,2 cm = 2,2 cm.

5.1.3 Vetores Binários

Para Ohlsson (1991) pares ordenados vistos como números racionais e pares ordenados vistos como vetores binários estão em teorias diferentes. Nesse segundo caso, a notação barra fracionária é usada para simbolizar vetores binários, assim $\frac{x}{y} \equiv (x, y)$. A barra fracionária funciona como um delimitador para um par ordenado. Assim, os pares ordenados que são interpretados como vetores binários estão encaixados em uma teoria diferente da dos pares ordenados que são interpretados por números racionais na fala de Ohlsson.

Um vetor é uma entidade abstrata e são frequentemente representados graficamente como flechas dentro de um espaço. Diferente do conceito de número racional, o conceito de vetor é um conceito comparativo que tem duas propriedades distintas: o módulo e a declividade. Os teoremas para vetores binários não são isomorfos aos teoremas para números racionais. Em particular, a Lei da Adição para vetores binários difere da Lei da Adição para números racionais de um modo curioso.

Em $\frac{x}{y}$, os termos x e y dos vetores binários são chamados de antecedente e consequente, respectivamente.

A definição de vetor explicitamente diferencia entre o aspecto absoluto de um vetor (seu tamanho) e o aspecto comparativo (sua declividade). Seu tamanho é o módulo e sua declividade é uma expressão da relação entre seus vetores componentes ou, de forma equivalente, da relação entre o vetor e algum sistema de coordenadas para o espaço no qual ele existe.

Ohlsson descreve as seguintes leis dos vetores binários:

a) Comprimento (Módulo):

$$C_{(x,y)} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

b) Declividade:

$$D_{(x,y)} = x \div y$$

c) Lei da Equivalência:

$$(x,y) \equiv (u,v) \Leftrightarrow (x \div y) = (u \div v)$$

d) Lei da Adição:

$$(x,y) + (u,v) = (x+u, y+v)$$

e) Leis da Multiplicação:

$$\begin{cases} (x,y) \times u = (x \times u, y \times u), u \in \mathbb{R} \\ (x,y) \times (u,v) = (x \times u, y \times v) \end{cases}$$

f) Lei Distributiva ou Lei da Distribuição da Multiplicação sobre a Adição:

$$[(x_1,x_2) + (y_1,y_2)] \times (u_1,u_2) = (x_1,x_2) \times (u_1,u_2) + (y_1,y_2) \times (u_1,u_2)$$

A declividade de um vetor é calculada aplicando-se a função quociente às componentes do vetor e, consequentemente, o símbolo $\frac{x}{y}$ tem significados duplos com relação aos vetores. Ele pode simbolizar o vetor ou sua declividade.

Como os vetores são identificados por módulo, direção e sentido, o aspecto absoluto (dado por seu módulo) e o aspecto comparativo (dado pela sua declividade), pode-se falar que é a declividade que diferencia o vetor binário do número racional pois ela permite comparar os componentes vetoriais x e y do vetor (x,y).

As aplicações dos vetores binários, segundo Ohlsson, são quatro: a razão, as quantidades intensivas, a proporção e a taxa. Isso porque, para ele, os vetores podem representar quantidades comparativas. Apoiada em Ohlsson, Botta (1997) explica que

> Uma expressão numérica para uma quantidade comparativa é criada ao se fazer o quociente entre as duas quantidades de comparação, e em seguida, interpretá-lo como uma declividade vetorial. Esta interpretação implica que expressões numéricas para quantidades comparativas sejam manipuladas segundo os

> teoremas dos vetores binários e não segundo os teoremas do quociente. (BOTTA, 1997, p.85)

As razões, as quantidades intensivas, as proporções e as taxas são vistas como quantidades comparativas, em que se tem a ideia de comparação no sentido de quanto há de uma quantidade em uma unidade de outra quantidade.

<u>Razão</u>

Falar em razão é falar de uma expressão que indica uma comparação multiplicativa entre duas grandezas. É dizer o quanto há de uma quantidade em relação à outra quantidade. Quando se trabalha com razões, diz-se que o argumento a do número $\frac{a}{b}$ se refere à primeira quantidade e o argumento b se refere à segunda quantidade e são denominados, respectivamente, antecedente e consequente. O valor da razão $\frac{a}{b}$ (lê-se: a está para b) é uma expressão da comparação multiplicativa entre as duas quantidades.

Botta (1997) apresenta um exemplo,

Em uma sala de aula há dois meninos para cada cinco meninas. Então, a razão entre meninos e meninas nessa sala de aula é dada por $\frac{2\, meninos}{5\, meninas} = \frac{2}{5}$.

A razão entre meninos e meninas nessa sala de aula é expressa por $\frac{2}{5}$, ou seja, que para cada dois meninos há cinco meninas. Da mesma maneira, pode-se dizer que a quantidade de 2 meninos está para a quantidade de 3 meninas, ou que a razão entre meninos e meninas é de $\frac{2}{5}$ $(lê - se\ 2\ para\ 5)$.

Ohlsson se questionava sobre adição de razões, pois era comum ouvir se dizer que razões não poderiam ser adicionadas. Porém, esse autor se questionava: "se razões são números, por que não podem ser adicionadas?"

A partir de tal questionamento, Ohlsson avançou muito ao perceber que a adição de razões é possível na teoria dos vetores binários. Assim, as razões não podem ser adicionadas segundo a teoria dos números inteiros e a das frações.

Um problema que trata desse assunto é o seguinte: se um aluno fizesse $\frac{3}{5} + \frac{2}{7} = \frac{5}{12}$, é claro que isso estaria errado se fosse soma de frações, pois

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{7} = \frac{21}{35} + \frac{10}{35} = \frac{31}{35} \neq \frac{5}{12}$$

Mas, se esse aluno dissesse: “Joguei 5 bolas e acertei 3. Depois, em outro momento, joguei 7 bolas e acertei 5. Qual foi meu desempenho?” E respondendo diria: “Joguei 12 bolas e acertei 5.”

Como justificar isso?

A operação feita pelo aluno foi a de uma comparação multiplicativa. Se ele, na primeira jogada fizesse 3 em 5 e se, na segunda jogada ele fizesse 6 em 10, seu desempenho seria o mesmo, pois $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ e, portanto, se trata de razão. Mas como ele fez $\frac{3}{5}$ na primeira jogada e $\frac{2}{7}$ na segunda, juntando-se as duas ele fez $\frac{3}{5} + \frac{2}{7} = \frac{5}{12}$, isto é, jogou 12 bolas no total e acertou 5.

Outro problema seria:

Em uma sala de aula com 45 alunos, há 2 meninos para cada 3 meninas. Quantos alunos são meninos e quantos são meninas?

Assumindo x como a quantidade de meninos nessa sala de aula e y como a quantidade de meninas, tem-se $\frac{x}{2}$ e $\frac{y}{3}$ e, ainda, $x + y = 45$.

Pela Lei da Adição de vetores binários,

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = \frac{x+y}{2+3} = \frac{45}{5} = 9$$

Se olharmos para a razão como um par ordenado tem-se

$$(x, 2) + (y, 3) = (x + y, 5)$$

Segundo uma propriedade das razões que diz “a soma dos antecedentes está para a soma dos consequentes assim como cada antecedente está para seu consequente”, segue que

$$\frac{x}{2} = \frac{45}{5} = 9 \therefore \frac{x}{2} = 9 \ e \ x = 18$$

$$\frac{y}{3} = \frac{45}{5} = 9 \therefore \frac{y}{3} = 9 \ e \ y = 27$$

Logo, há 18 meninos e 27 meninas totalizando 45 alunos nessa sala de aula, atendendo as condições do problema: $x + y = 18 + 27 = 45$ e $\frac{x}{y} = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}$.

Construindo a sequência comparativa multiplicativa vem:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{10}{15} = \frac{12}{18} = \frac{14}{21} = \frac{16}{24} = \frac{18}{27}$$

Assim, a razão $\frac{a}{b}$ é uma expressão de quanto há de uma quantidade a em relação a outra quantidade b onde:

- O primeiro elemento refere-se à primeira quantidade,
- O segundo elemento refere-se à segunda quantidade,
- O valor da razão $\frac{a}{b}$ é uma expressão numérica de comparação multiplicativa.

No caso de quantidades discretas a razão é uma expressão de quantos elementos há no primeiro conjunto para cada elemento do segundo conjunto. No caso de quantidades contínuas, a razão mostra quanto há da primeira quantidade para cada unidade da segunda quantidade.

A ideia de que razões não podem ser adicionadas tem suas raízes em observações do tipo:

“Se ando 8 milhas por galão de combustível em meu carro durante a primeira parte de uma viagem, mas que, por alguma razão, ando somente 4 milhas por galão durante a segunda parte, então, o desempenho de meu carro ao longo da viagem não é 12 milhas por galão.”

A resposta $\frac{8\ milhas}{1\ galão} + \frac{4\ milhas}{1\ galão} = \frac{12\ milhas}{1\ galão}$ estaria correta se fosse uma soma de frações. Porém, trata-se de um caso em que se envolve razão e, portanto,

$$\frac{8\ milhas}{1\ galão} + \frac{4\ milhas}{1\ galão} = \frac{(8+4)\ milhas}{(1+1) galão} = \frac{12\ milhas}{2\ galões} = \frac{6\ milhas}{1\ galão},$$

Ou seja, o desempenho do carro é 6 milhas por galão de combustível.

Observamos que esse problema não é um caso de números em que se opera uma divisão entre eles, não é caso de fração, com numerador e denominador para se adicionar. São dois eventos distintos: 2 partes da viagem. É caso de razão e, portanto, de uma comparação multiplicativa.

Quantidades Intensivas

Na Matemática da quantidade intensiva de Schwartz, uma quantidade intensiva é um tipo de quantidade que não é diretamente contada ou medida. Por exemplo, a grandeza distância (50 km, por exemplo) é uma quantidade intensiva e a grandeza velocidade (50 km/h, por exemplo) é uma quantidade intensiva.

Ohlsson (1991, p. 82, tradução nossa), citando Schwartz, diz que "razões que são interpretadas como aplicações de propriedades fisicamente reais tendem a ser chamadas de quantidades intensivas".

A razão entre massa e volume de um objeto, por exemplo, se refere à densidade desse objeto. A densidade só é medida se consideradas as duas quantidades: a massa e o volume do objeto. Assim, a densidade é uma razão que é chamada quantidade intensiva.

Em uma quantidade intensiva, tem-se que

- O argumento a do número $\frac{a}{b}$ se refere à primeira quantidade a ser comparada,
- O argumento b se refere à segunda quantidade a ser comparada,
- O valor da razão $\frac{a}{b}$ se refere à quantidade intensiva.

Botta (1997, p. 88) apresenta, com as palavras de Behr, Harel, Post e Lesh (1992, p. 298) que "quantidade intensiva se refere a uma razão que relaciona duas quantidades de diferentes espaços métricos para a qual um nome comum, tal como densidade (massa/volume), é aplicável".

Proporção

Ohlsson afirma que o termo proporção tem duas conotações distintas: uma no discurso matemático e outra no discurso diário.

Segundo Botta (1997), no discurso matemático o termo proporção é usado para se referir à igualdade entre duas razões. Um exemplo do uso nesse contexto é falar da razão entre as alturas de dois triângulos e as bases destes mesmos triângulos. Sejam ABC um triângulo de altura h_1 e base b_1 e DEF um triângulo de altura h_2 e base b_2. Dizer que as alturas dos triângulos e as suas respectivas bases são proporcionais é dizer que as razões entre elas são iguais, ou seja:

$$\frac{h_1}{b_1} = \frac{h_2}{b_2}$$

Dizemos que os triângulos ABC e DEF são semelhantes[9] se seus lados correspondentes são proporcionais e se seus ângulos correspondentes são congruentes.

No discurso cotidiano, o termo proporção se refere a uma parte tomada em relação a seu todo. Por exemplo, a relação entre a quantidade de 4 homens em uma reunião com 10 pessoas presentes é dita como a "proporção de homens para pessoas é de 4/10" (lê-se 4 homens para 10 pessoas). Nesse sentido, entendemos que o argumento a do número $\frac{a}{b}$ se refere ao tamanho da parte e o argumento b se refere à dimensão do todo. O valor da proporção $\frac{a}{b}$ (lê-se: a está para b) se refere a uma expressão numérica de comparação multiplicativa.

É comum que as pessoas confundam a palavra proporção no discurso diário com frações. Segundo Ohlsson (1991), o termo de baixo b do número racional $\frac{a}{b}$ pode identificar: fração e proporção. Uma vez que, na fração o número de baixo indica em quantas partes o todo foi dividido e lhe dá nome denominador e na proporção, no sentido do discurso diário do professor, o número de baixo chamado consequente. A partir dessa distinção, aparecem duas variações da proporção: a porcentagem e a probabilidade. A porcentagem é uma proporção em que o todo tomado como referência é constituído de cem partes iguais e, portanto, o denominador é chamado centésimos. A probabilidade, advinda da

[9] Dois triângulos são semelhantes se seus lados correspondentes são proporcionais e seus ângulos correspondentes são congruentes. O fato de dizer que seus lados são proporcionais significa que eles estão numa mesma razão.

razão, possui consequente referente a um universo de eventos e antecedente referente à um subconjunto de ocorrências de um certo evento.

Taxa

De acordo com Ohlsson (1991) e Botta (1997), a taxa é uma razão entre uma quantidade e um período de tempo. Por isso, na taxa o argumento a do número $\frac{a}{b}$ se refere a uma quantidade e o argumento b se refere a uma unidade de tempo e a taxa $\frac{a}{b}$ descreve o quanto há da quantidade em uma unidade de tempo. Exemplos de taxas são: a velocidade média (razão entre a quantidade de distância percorrida em uma unidade de tempo) e a taxa de mortalidade infantil (razão entre o número de mortes de crianças em uma unidade de tempo).

5.1.4 Função Composta

A função composta é construída aplicando-se uma função ao valor de outra função. A barra fracionária é usada para simbolizar uma classe de funções compostas definidas dessa forma

$$\frac{a}{b} \cdot x = a \cdot (x \div b) = (a \cdot x) \div b$$

onde a e b são constantes e x expressa uma quantidade.

A função $\frac{a}{b}$ traz o significado de que primeiro deve-se dividir a quantidade x por b e depois multiplicar o resultado por a ou primeiro multiplicar a quantidade x por a e depois dividir o resultado por b.

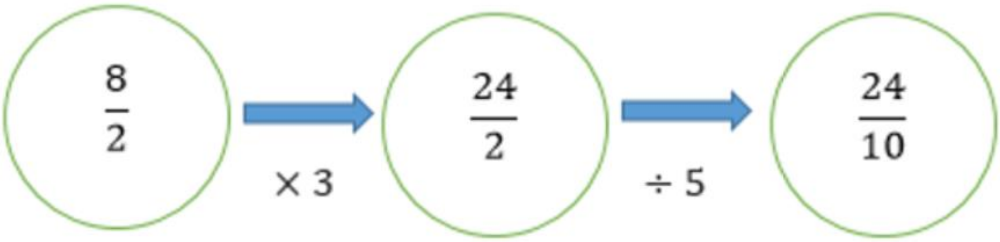
Segundo Ohlsson (1991), a função composta pode ser vista como um operador unitário MD, em que a função multiplicação e a função divisão são interpretadas como operadores. O operador MD[10] possui leis obtidas como consequências algébricas feitas a partir de produtos e quocientes.

O argumento a do operador $\frac{a}{b}$ descreve um aumento na quantidade x e o argumento b do operador descreve uma diminuição na quantidade x. Vemos, a

[10] MD: multiplicação-divisão.

seguir, um exemplo de função composta: $\frac{3}{5} \times \frac{8}{2}$. Nesse caso, $\frac{3}{5}$ é visto como um operador aplicado em $\frac{8}{2}$, de forma que primeiro se multiplica por 3 e depois se divide o resultado por 5.

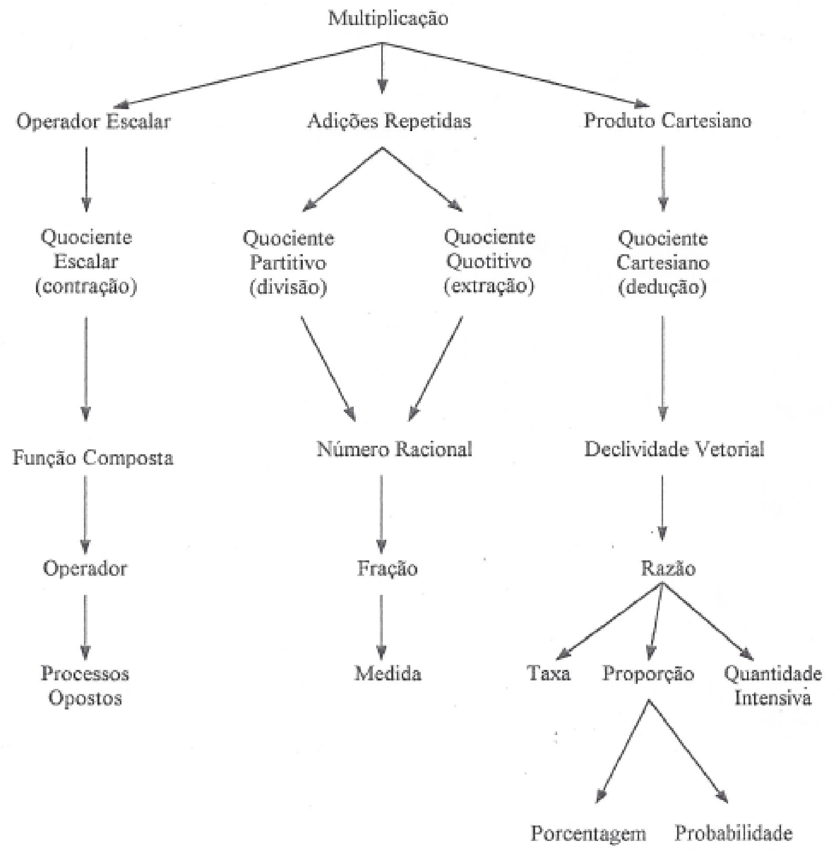
Figura 9: Número Racional como Função Composta



Fonte: Elaborado pela autora

Ohlsson (1991) explicita que o conjunto dos termos fração, razão, proporção e porcentagem derivam do conceito de quociente, como podemos ver na Figura 10. As diferentes aplicações do quociente originam distintos termos quocientes e são derivadas de diferentes aplicações da multiplicação.

Figura 10: Resumo das relações entre termos quociente segundo Ohlsson (1991)



Fonte: (BOTTA, 1987, p. 92)

Ainda, para Ohlsson (1991) existem tantos termos quocientes quantas aplicações distintas dos construtos matemáticos, advindas de situações do mundo real, que emergem da função quociente. A dificuldade enfrentada pelos estudantes, associada à frações e números racionais, está associada à semântica dos conceitos quociente e não à complexidade dos procedimentos de cálculos ou nas definições de cada termo quociente.

Nota-se a importância de compreender a função quociente como pré-requisito para a compreensão dos conceitos de fração, medida, razão, taxa, proporção, porcentagem e probabilidade. Mais do que isso, para compreender a função quociente com suas diferentes aplicações é necessário que se entenda o conceito de multiplicação através de suas diferentes funções, seja como operador escalar, como soma de parcelas iguais ou como produto cartesiano. A compreensão do conceito de multiplicação é, então, o primeiro pré-requisito para se compreender as diferentes personalidades do número racional.

6. O Modelo Modificado e a Pergunta da Pesquisa

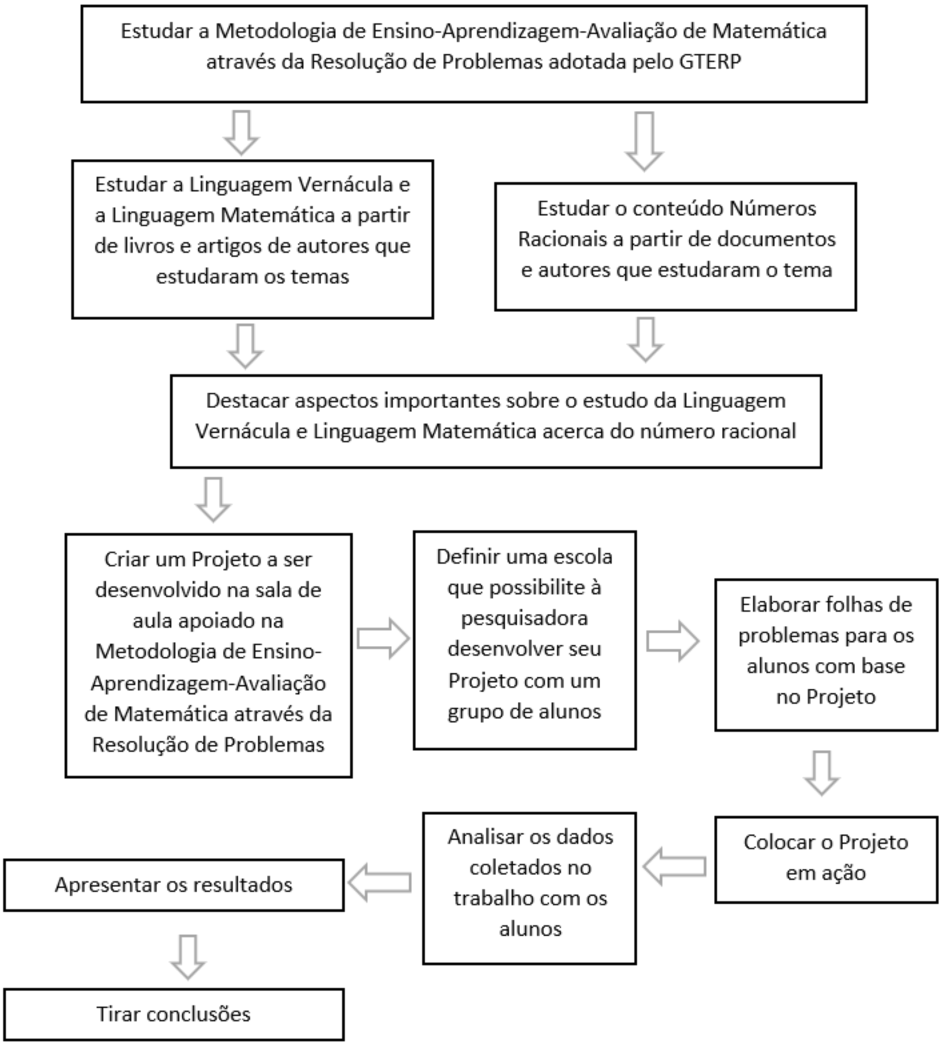
Para abordar as contribuições do domínio da linguagem matemática na resolução de problemas, faz-se necessária uma aplicação prática em uma turma do Ensino Fundamental, nível de ensino para o qual os PCN sugerem que se aprofunde o estudo acerca do conteúdo Números Racionais. Ao pensar sobre essa aplicação a partir do Modelo Preliminar, nos interessamos em investigar as diferentes personalidades do número racional, como uma boa oportunidade de perceber a presença e a importância da linguagem matemática. Para nortear esse interesse, criamos um Modelo Modificado, apoiado na fundamentação teórica.

Na Figura 11, o modelo busca evidenciar as etapas que foram realizadas no decorrer da pesquisa, iniciada com a necessidade de se estudar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, as Linguagens Vernácula e Matemática e o conteúdo Números Racionais. Esses passos serão seguidos pela elaboração e pela aplicação de um Projeto.

6.1 A criação do Modelo Modificado

O Modelo Modificado, de forma a complementar o Modelo Preliminar da Figura 4, nos dá uma visão clara do que esta pesquisa pretende. Pode-se ver quais os passos que pretendidos para obter resultados, desde o interesse relacionado às variáveis-chave até a elaboração de um projeto a ser aplicado em sala de aula, chamado Projeto. Assim, pudemos determinar a pergunta considerada como o Problema da Pesquisa.

Figura 11: Modelo Modificado



Fonte: Elaborado pela autora

6.2 Pergunta da Pesquisa

Com vista aos interesses que foram descritos até aqui e de acordo com o que vemos no Modelo Modificado, criamos a seguinte pergunta:

De que forma as Linguagens Vernácula e Matemática contribuem para o trabalho com as diferentes personalidades do número racional ao se adotar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas?

A reflexão sobre os desdobramentos que poderiam ser encontrados ao responder a essa pergunta específica, nos levou a algumas perguntas mais gerais que, ainda, podem contribuir para o desenvolvimento desta pesquisa:

- Que dificuldades os alunos enfrentam ao ler e interpretar um problema escrito em Linguagem Vernácula ao passar para a Linguagem Matemática?
- Que contribuições a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas pode dar ao estudar-se a linguagem vernácula e a linguagem matemática acerca do conteúdo Números Racionais?

7. Dando prosseguimento à pesquisa: o segundo bloco de Romberg-Onuchic

Para responder à pergunta da pesquisa, seguindo as etapas do fluxograma de Romberg-Onuchic, o pesquisador deve elaborar estratégias e correspondentes procedimentos. Tomamos como base as etapas descritas no Modelo Modificado, no qual estão presentes as principais atividades estruturadas para a pesquisa.

7.1 Definindo Estratégias

Elaborar estratégias significa pensar sobre o que se deve fazer para resolver o problema proposto pela Pergunta da Pesquisa. Pensando nisso, foi elaborada a seguinte

Estratégia Geral: Criar um Projeto para trabalhar números racionais com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, destacando o importante papel da Linguagem Vernácula e da Linguagem Matemática fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

A Estratégia Geral é a principal estratégia que leva à obtenção de respostas para a pergunta da pesquisa. Porém, para contemplá-la, foi necessário propor estratégias auxiliares a partir das etapas propostas pelo Modelo Modificado. Enumeramos essas estratégias a fim de facilitar a elaboração de procedimentos.

E_1: Estudar Resolução de Problemas, Linguagem Vernácula, Linguagem Matemática e Números Racionais.

Recursos a serem utilizados:

- Consultar livros e artigos de autores brasileiros e estrangeiros que estudam ou estudaram esses temas;
- Consultar documentos oficiais para o ensino de Matemática como os Parâmetros Curriculares Nacionais;

E_2 : Definir uma escola onde o Projeto será aplicado.

E_3: Visitar a escola definida.

E_4 : Criar um Projeto.

Recursos a serem utilizados:

- Escolher o tema do Projeto;
- Identificar os objetivos do Projeto;
- Usar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática;
- Elaborar um roteiro de problemas.

E_5 : Aplicar o Projeto,

E_6: Analisar a aplicação do Projeto.

Com as estratégias elaboradas, o passo seguinte foi a elaboração de procedimentos correspondentes a cada estratégia auxiliar descrita.

7.2 Definindo Procedimentos

Elaborar procedimentos diz respeito sobre pensar em como colocar em prática cada estratégia definida. É a hora de refletir sobre como podemos realizar, através de ações, o que as estratégias propõem. Para isso, o Procedimento Geral corresponde à Estratégia Geral, e cada Procedimento Auxiliar corresponde à Estratégia Auxiliar de mesmo número.

Procedimento Geral: <u>Criação</u> de um Projeto para trabalhar números racionais com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, destacando o importante papel da Linguagem Vernácula e da Linguagem Matemática fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Os Procedimentos Auxiliares são os seguintes:

P_1: Estudo de Resolução de Problemas, Linguagem Vernácula, Linguagem Matemática e Números Racionais.

P_2: Definição de uma escola onde se possa apresentar um Projeto sobre números racionais, dentro de um currículo de Matemática para o 6º ano do Ensino Fundamental.

P_3: Visita à escola definida buscando:

- Autorização da Direção da Escola para a aplicação do Projeto construído;
- Identificação de um professor de matemática dessa escola que poderia ceder uma turma de 6º ano em que o Projeto poderia ser aplicado;
- Identificação de uma turma do 6º ano cedida pelo professor para a aplicação do Projeto;
- Autorização junto à direção e ao professor da escola para a aplicação do Projeto;
- Pedido à Direção para que envie uma carta aos pais dos alunos dessa turma para pedir a autorização de seus filhos para a participação nesta pesquisa.

P_4: Criação de um Projeto.

- Escolha do tema do Projeto;
- Identificação do objetivo do Projeto;
- Uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática;
- Elaboração de um roteiro de problemas.

P_5 : Aplicação do Projeto.

Recursos a serem utilizados:

- Preparação prévia do professor para cada aula programada;
- Elaboração de roteiro de problemas bem definido para os encontros;
- Conhecer os pré-requisitos para trabalhar Números Racionais com os alunos;
- Identificar os objetivos de cada encontro e os objetivos de cada atividade.

P_6: Análise da aplicação do Projeto.

7.3 Procedimentos em ação

Colocar os procedimentos em ação é executá-los, ou seja, colocá-los em prática. Para executar o Procedimento Geral, cada procedimento auxiliar será desenvolvido isoladamente. Quando todos os procedimentos auxiliares são colocados em ação, concluímos que o Procedimento Geral está concluído.

7.3.1 P_1 em ação: Estudo

O estudo de Resolução de Problemas, Linguagem Vernácula, Linguagem Matemática e Números Racionais já foi realizado, quando apresentamos a fundamentação teórica da pesquisa, nas Seções 3, 4 e 5.

7.3.2 P_2 em ação: Definição de uma escola onde se possa apresentar um Projeto

A escolha da escola onde o Projeto será aplicado se deu na cidade de Rio Claro-SP. Entre algumas escolas visitadas, escolhemos a Escola Estadual Carolina Augusta Seraphim que permitiu que desenvolvêssemos nosso Projeto, pois mantém vínculo com a UNESP através do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência - PIBID e outras atividades de extensão.

7.3.3 P_3 em ação: Visita à escola definida

O Projeto que será criado tem o tema Números Racionais de acordo com o currículo do 6º ano do Ensino Fundamental. Esse Projeto será trabalhado na escola definida durante certo número de horas, tempo permitido por um professor de uma classe dessa escola, destacando fortemente a Linguagem Vernácula e a Linguagem Matemática e fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Foi entregue à direção dessa escola uma Carta de Autorização (ANEXO A) para o desenvolvimento de nossa pesquisa com alunos do 6º ano. A escola autorizou a realização de nosso trabalho e nos deu abertura para conversar com os professores.

Os professores de matemática da escola se mostraram dispostos a contribuir com nossa pesquisa. Em especial, o professor de matemática responsável pelas duas turmas de 6º ano da escola, permitiu que a professora-pesquisadora ministrasse suas aulas de acordo com um Projeto em uma das turmas e com a sua participação, fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Pedimos à direção que enviasse uma Carta de Autorização para os pais dos alunos da turma de 6º ano para que autorizassem seus filhos a participar das aulas da professora pesquisadora de acordo com o Projeto. Essa Carta de Autorização foi escrita por nós e nela fica claro que as aulas serão usadas para uma pesquisa de Mestrado.

7.3.4 P_4 em ação: Criação do Projeto

De acordo com Reys et al (2004),

> Frações e decimais têm sido um obstáculo para muitos estudantes. Uma razão para isso pode ser o fato de que o currículo tende a apressar a simbolização e as operações sem desenvolver fortes compreensões conceituais para números e operações com eles. (...) Desenvolver fluência no uso de frações e decimais para crianças mais velhas é recomendado somente depois de eles terem desenvolvido habilidades de estimativa e compreensões conceituais. (p. 283, tradução nossa)

Para esses autores,

> Os conceitos associados com frações e decimais são complexos; entretanto duas ideias mais simples e poderosas –

> partição e equivalência - podem ajudar a ligar muitas dessas ideias. Em referência às frações e decimais, partição é o processo de repartir igualmente (um bolo repartido igualmente entre cinco pessoas ou seis barras de doces repartidas em partes iguais entre quatro pessoas). Equivalência foca sobre diferentes representações de uma mesma quantidade (três quartos de um bolo é a mesma quantidade de seis oitavos desse bolo apesar de serem problemas diferentes, três quartos é equivalente a seis oitavos). (REYS et al ,2004, p. 283, tradução nossa)

Segundo os PCN (1998), muitos alunos do terceiro ciclo do ensino fundamental não compreendem os diferentes significados do número racional. O documento traz a proposta de o professor trabalhar com seus alunos os significados do número racional: relação parte/todo, divisão e razão, além de explorar os conceitos envolvidos em cada significado como quociente, operador, fração, entre outros.

Para Reys et al (2004), os alunos deveriam ser capazes de compreender números, modos de representar números, relações entre números e sistemas numéricos. As expectativas para todos os estudantes são:

> Conectar números a palavras e numerais às quantidades que eles representam, usando vários modelos físicos e representações;
>
> Compreender e representar frações comumente usadas como $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$;
>
> Compreender a estrutura do valor posicional do número na base dez e ser capaz de representar e comparar números naturais (no Brasil, todos os naturais incluindo o zero) e decimais;
>
> Desenvolver uma compreensão de frações como partes de um todo, como parte de uma coleção, como localizações em linhas numéricas e como divisão de números naturais;
>
> Usar modelos, marcadores e formas equivalentes para determinar os tamanhos de frações;
>
> Reconhecer e gerar formas equivalentes de frações comumente usadas, decimais e porcentagens. (p. 284, tradução nossa)

Van de Walle e Lovin (2006) colocam as seguintes grandes ideias que o ensino de frações deve contemplar desde os primeiros anos do ensino fundamental:

> As partes fracionárias são parcelas iguais ou partes de tamanho igual de um todo ou unidade. Uma unidade pode ser um objeto ou uma coleção de coisas. Mais abstratamente, as unidades são contadas como 1. Na linha de números, a distância de 0 a 1 é a unidade.
>
> As partes fracionárias têm nomes especiais que indicam quantas partes do tamanho são necessárias para fazer o todo. Por exemplo, terços requerem três partes para fazer um todo.
>
> Quanto mais partes fracionárias forem usadas para fazer um todo, menor será a parte. Por exemplo, oitavos são menores do que quintos.
>
> O denominador de uma fração indica por qual número o todo foi dividido para produzir o tipo de parte em consideração. Assim, o denominador é um divisor. Em termos práticos, o denominador designa o tipo de fração que está sendo considerada. O numerador de uma fração conta quantas partes fracionárias (do tipo indicado pelo denominador) estão sendo consideradas. Portanto, o numerador é um multiplicador - indica um múltiplo da dada fração. (VAN DE WALLE; LOVIN, 2006, p. 131, tradução nossa)

Falaremos de Geometria porque no primeiro problema proposto em nosso roteiro é abordado o conceito de retângulo e no segundo problema trabalharemos o conceito de reta numérica. É esperado que os alunos do 6º ano conheçam o conceito de retângulo. Pensando nisso podemos apresentar algumas grandes ideias sobre o pensamento geométrico e conceitos da geometria segundo Van de Walle e Lovin (2006):

> O que torna as formas parecidas ou diferentes pode ser determinado por um arranjo de propriedades geométricas. Por exemplo, as formas têm lados que são paralelos, perpendiculares ou nenhum deles. Eles têm simetria axial, simetria rotacional ou nenhuma delas; elas são semelhantes, congruentes ou nenhuma delas.
>
> As formas podem se mover num plano ou no espaço. Essas mudanças podem ser descritas em termos de translações, reflexões e rotações.
>
> As formas podem ser descritas em termos de sua localização num plano ou no espaço. Os sistemas coordenados podem ser usados para descrever precisamente essas localizações. Por sua vez, a visão da coordenada da forma oferece outro modo de compreender certas propriedades de formas, mudanças na posição (transformações), e como eles aparecem ou mudam de tamanho (visualização).

> As formas podem ser vistas de diferentes perspectivas. A habilidade em perceber formas de diferentes pontos de vista ajuda a compreender relações entre figuras bidimensionais e tridimensionais e mentalmente mudar a posição e o tamanho das formas. (VAN DE WALLE, 2006, p. 179, tradução nossa)

Falaremos, a partir de agora, sobre como os professores podem ensinar algumas das personalidades do número racional em suas aulas através das ideias que permeiam esse número, seguindo a sugestão dos PCN. O professor que pretende trabalhar com números racionais e explorar suas relações de parte/todo, quociente, razão, entre outros, deve reconhecer quais os pré-requisitos que os alunos deveriam possuir para conseguir aprender o que é proposto.

O documento dos PCN, elaborado em 1997, especial para o Ensino Fundamental I, correspondente ao período da 1ª à 4ª série (atualmente, corresponde ao período do 1º ano ao 5ºano), traz os seguintes conteúdos a serem trabalhados durante todo o ciclo:

> Reconhecimento de números naturais e racionais no contexto diário;
> Compreensão e utilização das regras do sistema de numeração decimal, para leitura, escrita, comparação e ordenação de números naturais de qualquer ordem de grandeza;
> Formulação de hipóteses sobre a grandeza numérica, pela observação da posição dos algarismos na representação decimal de um número racional;
> Extensão das regras do sistema de numeração decimal para compreensão, leitura e representação dos números racionais na forma decimal;
> Comparação e ordenação de números racionais na forma decimal;
> Localização na reta numérica, de números racionais na forma decimal.;
> Leitura, escrita, comparação e ordenação de representações fracionárias de uso frequente;
> Reconhecimento de que os números racionais admitem diferentes (infinitas) representações na forma fracionária;
> Identificação e produção de frações equivalentes, pela observação de representações gráficas e de regularidades nas escritas numéricas;
> Exploração dos diferentes significados das frações em situações-problema: parte/todo, quociente e razão;
> Observação de que os números naturais podem ser expressos na forma fracionária;

> Relação entre representações fracionária e decimal de um mesmo número racional; Reconhecimento do uso da porcentagem no contexto diário. (BRASIL, 1997, p. 58)

Como esse Projeto visa ao trabalho em uma turma de 6º ano (antiga 5ª série), espera-se que os estudantes desse nível tenham os conhecimentos que foram apresentados acima como pré-requisitos para os problemas contidos no Roteiro de Problemas. Além disso, para trabalhar ponto na reta numérica, fração e quociente o professor deve procurar problemas que conduzam os alunos a entenderem que o número $\frac{a}{b}$ quando representa um quociente, evidencia que todas divisões que ocorrem no conjunto dos números racionais têm resto igual a zero. Neste caso, assim como em uma divisão, o elemento a é chamado *dividendo* e o elemento b é chamado *divisor*. Ressaltamos que o sufixo *–endo* na palavra dividendo transforma essa palavra no elemento que sofre a ação, enquanto o sufixo *–or* na palavra divisor se refere ao elemento que realiza a ação.

Ao se preocupar com a linguagem que permeia a sala de aulas de matemática, o professor deve salientar o que significa obter um número racional ao se dividir uma quantidade por outra. Essa resposta é um número? O que significa? O que é quociente? O que essa palavra significa? Essas são exemplos de perguntas que o professor pode fazer durante suas aulas para que o aluno reflita sobre o quociente.

O número racional, quando visto como um operador, possui a definição dada por Ohlsson (1991) apresentada anteriormente. O número racional $\frac{a}{b}$, quando visto como um operador, significa o mesmo que “encolher”, “esticar” ou “ampliar”. Assim, o elemento a é chamado *multiplicando* e o elemento b é chamado *multiplicador*. Vale ressaltar que o sufixo *–ando* na palavra multiplicando transforma essa palavra no elemento que sofre a ação, enquanto o sufixo *–or* na palavra multiplicador se refere ao elemento que realiza a ação.

Se o aluno não compreende o significado de cada termo que envolve o conceito de operador, ele pode ter dificuldades em resolver problemas que envolvem a multiplicação de números racionais. Ver o número racional como uma fração significa entender que ela representa uma parte ou fragmento de uma certa quantidade, ou seja, a fração é vista como uma relação parte-todo.

Segundo Houaiss (2015), fração é parte de um todo ou, ainda, uma ou mais partes em que se dividiu a unidade.

Fica claro qual é o entendimento que o aluno deve possuir sobre frações. Espera-se que, ao falar de comunicação em aulas de matemática, o aluno saiba falar e escrever essas ideias, afirmando que compreende do que se trata uma fração.

Entre tantos termos que envolvem o estudo de frações, é importante que o professor explique os significados de cada palavra como, por exemplo, o que é o numerador e o que é o denominador da fração. Como já vimos anteriormente, o estudo do vocabulário pode auxiliar muito no aprendizado do aluno sobre um tema, pois ele cria significados para o que está estudando. Segundo Van de Walle e Lovin (2006, p. 69, tradução nossa), "as palavras numerador e denominador não têm referência comum para crianças. Se essas palavras não são usadas, as próprias palavras não ajudarão as crianças a entenderem os seus significados".

Por isso, o professor deve incentivar seus alunos a compreenderem os significados dessas palavras como apresentado acima, dentro do contexto de frações. Acreditamos que o significado da própria palavra "fração" deve ser explorado pelos alunos, a fim de evitar confusões com o conjunto dos números racionais.

Também, o símbolo da barra na fração, chamada de *barra fracionária*, adota um significado que deve ser compreendido pelos alunos. Trata-se, nesse caso, de um delimitador entre o numerador e o denominador.

O professor deve estar bem preparado para trabalhar operações com Frações. É comum que, ao trabalhar com as operações aritméticas no Ensino Fundamental, os professores generalizem os algoritmos das operações para quaisquer personalidades do número racional. Porém, é preciso que o professor tenha conhecimento sobre os algoritmos que se aplicam às diferentes personalidades dos números racionais. Como já foi visto, a soma de razões, por exemplo, é feita de forma diferente da que é feita com a soma das frações por se tratarem de construtos diferentes.

Vejamos quais as ideias que devem ser abordadas no ensino de operações de frações. Segundo Van de Walle e Lovin (2006)

> Os significados de cada operação com frações são os significados para as operações com números inteiros. Operações com frações devem começar aplicando-se esses mesmos significados a partes fracionárias.
>
> Para adição e subtração, é fundamental entender que o numerador diz o número de partes e o denominador o tipo de parte.
>
> Para a multiplicação por uma fração, é útil lembrar que o denominador é um divisor. Esta ideia nos permite encontrar partes do outro fator.
>
> Para a divisão por uma fração, as duas maneiras de pensar sobre a operação - partição e medição - são extremamente importantes. A partição ou partilha, conceito de divisão levará a um procedimento de divisão muito diferente do conceito de medição ou subtração repetida. (VAN DE WALLE; LOVIN, p. 66, tradução nossa)

Os conceitos que envolvem as operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão) são os mesmos que as crianças estudam desde os anos iniciais, ou seja, a concepção que devem ter ao trabalhar cada operação entre números racionais é a mesma que se trabalha com números naturais e números inteiros. Por isso, o entendimento do que significa operar com números naturais é pré-requisito para estudar as operações entre números racionais no Ensino Fundamental.

Além disso, as grandes ideias e as propriedades de cada operação devem ser compreendidas pelos alunos. O professor deve explorar com seus alunos os conceitos e as ideias que surgem ao falar de cada operação.

A adição envolve várias ideias que as crianças têm como juntar, reunir, adicionar e acrescentar. A subtração por sua vez envolve as ideias de diferença, resto e comparação. Essas ideias devem permanecer ao se trabalhar com frações. É comum os alunos terem dificuldades em adicionar ou subtrair frações por não entenderem o que significa o numerador e o denominador da fração. Quando essa dificuldade é superada, o professor deve ensinar como ocorre a adição ou subtração de frações com denominadores iguais ou diferentes. Para isso, espera-se que o aluno compreenda o significado de encontrar um denominador comum ao adicionar frações em vez de apenas decorar algoritmos. O professor pode esclarecer que há diversas maneiras de resolver uma adição sem primeiro encontrar um denominador comum entre as frações, porém deve evidenciar que, segundo o algoritmo usual, o primeiro passo é reduzir as frações a um mesmo denominador. Mais do que isso, o professor deve conduzir o aluno a compreender o porquê de encontrar um mesmo denominador para duas frações que possuem denominadores diferentes. Isso envolve mais do que entender a técnica de se encontrar o mínimo mútiplo comum entre os denominadores, pois o aluno deve perceber que as frações que estão sendo operadas resultarão em uma fração que é parte de um todo que foi dividido em um número de partes que é múltiplo dos denominadores das frações que foram adicionadas ou subtraídas. Para esse trabalho, o professor pode contar com materiais manipulativos e representações pictóricas.

Comumente é ensinado às crianças que multiplicação se trata de uma soma de parcelas iguais. Mas, além disso, a multiplicação também está relacionada com o raciocínio combinatório. O professor deve evidenciar, em suas aulas, que a multiplicação de frações envolve dois elementos em que um é considerado um operador, assim como apresentado anteriormente. Para auxiliar esse trabalho, pode-se recorrer a desenhos como modelos retangulares, por exemplo.

A ideia de divisão envolve agrupamentos de mesma quantidade, subtração de parcelas iguais de uma quantidade inicial, partição e medida. Essas ideias devem ser exploradas e compreendidas pelos alunos ao realizar divisão de frações através de problemas diversos. Por exemplo, deve-se explorar problemas que envolvam a divisão de uma fração por um número natural e vice-versa, além da divisão entre frações. Espera-se que o aluno compreenda o significado de dividir e não apenas memorize algoritmos. Além disso, o professor deve explorar com os alunos que a divisão entre números racionais tem sempre resto igual a zero. Isso pode ser formalizado algebricamente ou através de representações pictóricas e pode contribuir para a compreensão do algoritmo da divisão de frações .

7.3.4.1 Objetivo do Projeto

Adotando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, o objetivo deste Projeto é apresentar uma forma de como o professor pode trabalhar o conteúdo Números Racionais e explorar as linguagens vernácula e matemática acerca dos conceitos que envolvem diferentes personalidades do número racional ponto na reta numérica, fração e quociente, com o principal objetivo de promover o aprendizado do aluno. Escrever sobre suas ideias, procurar palavras no dicionário para conhecer seu significado, compreender o significado de uma palavra dentro do contexto da matemática e valorizar o uso da linguagem matemática são atitudes que devem ser incentivadas pelo professor.

Os alunos deverão trabalhar em pequenos grupos para resolver problemas, onde cada aluno deverá discutir com seus pares estratégias para resolução do problema. Entendendo-se problema como tudo “aquilo que não se sabe fazer mas que se está interessado em resolver” (ONUCHIC, 1999, p. 215). O professor deve ser mediador do trabalho dos alunos nos grupos, levantando questões que os conduzam à construção do seu próprio conhecimento. Ao fazer uso dessa metodologia, o professor pode seguir as etapas que já foram apresentadas:

- Proposição do problema;
- Leitura individual;
- Leitura em grupo;
- Resolução do problema;
- Observar e incentivar;
- Registro das resoluções na lousa;
- Plenária;
- Busca do consenso;
- Formalização do conteúdo;
- Proposição de novos problemas.

7.3.4.2 Roteiro de Problemas

Serão realizados, no total, dez encontros de duas horas/aula cada um totalizando 20 horas/aula para desenvolver o Projeto na sala de aula. Serão trabalhados sete problemas com os alunos, considerados problemas geradores dos conceitos ponto na reta numérica, fração e quociente. O problema gerador é aquele que tem o objetivo de gerar um novo conceito, conteúdo ou procedimento e é ponto de partida da aula. Além disso, ao desenvolver um problema gerador, o aluno constrói seu próprio conhecimento. Para a elaboração de cada encontro, escolhemos alguns problemas geradores do conteúdo Números Racionais, em especial as que envolvem as personalidades ponto racional, fração e quociente.

Os problemas envolvem os conceitos ponto na reta numérica, fração e quociente pois são conceitos a serem trabalhados no Ensino Fundamental, a partir do 6º ano, justificando nossa escolha por essas personalidades.

Os problemas geradores foram retirados da dissertação de Botta (1997) com título "Números Racionais e raciocínio proporcional: considerações sobre o ensino-aprendizagem" e do artigo de Onuchic e Allevato (2008), intitulado "As diferentes 'Personalidades' do número racional trabalhadas através da Resolução de Problemas" e do Problema da Retangularização, presente no artigo "Números e Operações" de Travassos, Araium, Morais e Souza (2014). Fizemos algumas alterações nos enunciados dos problemas para adequá-los ao nosso Projeto.

Para preparar cada encontro, a pesquisadora se debruçou sobre a fundamentação teórica apresentada acerca de Resolução de Problemas, linguagens em aulas de matemática e números racionais. Dessa forma, ela organizou a dinâmica da sala de aula em cada um dos encontros com os alunos.

- Primeiro Encontro

A professora pesquisadora se apresentará aos alunos, esclarecendo seu objetivo em trabalhar com eles, falando de sua pesquisa e lhes falando que seus pais deveriam entregar a Carta de Autorização (ANEXO B) assinada para que eles participassem da pesquisa. A professora levará um Termo de Compromisso (ANEXO C) em que os alunos devem assinar, assumindo o compromisso de se dedicarem à realização da pesquisa. Deverá ficar claro que os alunos trabalharão em pequenos grupos de até quatro alunos e que todos devem ser ativos na resolução dos problemas propostos. Ela vai expor como ocorrerão esses dez encontros, dirá o que significa trabalhar em grupo, a importância de os alunos participarem ativamente das atividades, a importância que eles terão para a pesquisa, que devem expor suas ideias e discutir as ideias de colegas na lousa e nos grupos. Além disso, a professora deve esclarecer as etapas da metodologia pedagógica de que fará uso no decorrer da pesquisa.

- Segundo Encontro

Nesse encontro, pretendemos trabalhar com o Problema da Retangularização.

Problema[11]

Como se apresenta a retangularização dos seguintes números: 9, 10, 11, 12 e 13? *Retangularizar* um número é procurar dois fatores que, quando multiplicados, resultem nesse número. A figura que ilustra esse procedimento é um retângulo.

Pré-requisitos

Conceito de Multiplicação e Retângulo.

Objetivo

Levar o aluno a compreender o que são múltiplos e divisores de um número natural, números primos e números compostos, além de saber explicar o que são cada um desses conceitos usando simbologia e vocabulário do próprio aluno. É importante que o aluno saiba identificar os múltiplos e os divisores de um número natural como pré-requisito para trabalhar com operações de frações.

Soluções

Para o número 9, espera-se que o aluno perceba que os fatores que podem resultar no número desejado são 1 e 9 ou 3 e 3, pois $1 \times 9 = 9$ e $3 \times 3 = 9$. Para o número 10, espera-se que o aluno encontre os fatores 1 e 10 ou 2 e 5,

[11] Nesse problema, apesar de os alunos conhecerem os números decimais, eles devem ser orientados a considerarem fatores apenas número naturais.

pois $1 \times 10 = 10$ e $2 \times 5 = 10$. Para o número 11, percebe-se que apenas os números 1 e 11 são fatores de 11. Assim, tem-se $1 \times 11 = 11$. Para o número 12, é possível encontrar os fatores 1 e 12, 3 e 4, e 2 e 6, pois $1 \times 12 = 12$, $3 \times 4 = 12$ e $2 \times 6 = 12$. O número 13 só possui dois fatores, a saber o 1 e o 13, pois $1 \times 13 = 13$. Podemos ver as soluções na Figura 12.

Figura 12: Soluções do Problema da Retangularização

Possíveis estratégias para a resolução do problema
Solução Figurativa

Solução com Símbolos Numéricos

9	10	11	12	13
1×9	1×10	1×11	1×12	1×13
$3\times3=3^2$	2×5		2×6	
			3×4	

Fonte: (TRAVASSOS et al, 2014, p. 76)

Para o desenvolvimento do problema é importante que os alunos pensem em todos os fatores que podem resultar em cada um dos números. Além disso, para fazer os retângulos, resultantes de cada fatoração para obter os números 9, 10, 11, 12 e 13, é preciso ter um conhecimento sobre a figura geométrica retângulo e suas dimensões.

- Terceiro Encontro

Problema Localize os números $\frac{2}{5}$, $\frac{7}{5}$ e $\frac{3}{10}$ na reta.

Pré-requisitos

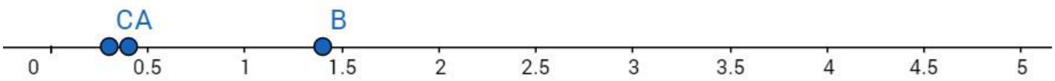
Multiplicação e divisão e noção de reta numérica.

Objetivo

Fazer com que os alunos percebam que o número racional pode ser visto como um ponto na reta numérica e para representá-lo precisa-se entender o que é a unidade na reta, ver o número racional como um número e, também, perceber a equivalência dele com um número decimal. Saber expressar em linguagem escrita, materna ou matemática, o que se entende por um ponto na reta.

Soluções

Apresentamos um segmento da reta numérica em que os pontos $A = \left(\frac{2}{5}\right)$, $B = \left(\frac{7}{5}\right)$ e $C = \left(\frac{3}{10}\right)$ estão indicados.



- Quarto Encontro

Problema Marina comprou um bolo e o partiu em 5 partes iguais. Após o jantar Marina comeu 3 pedaços desse bolo. Que número representa a quantidade de bolo que Marina comeu?

Pré-requisitos

Saber fazer relações entre o todo e sua parte.

Objetivo

Fazer com que o aluno construa conhecimento sobre o que é fração, observando uma relação parte-todo. Ao fim desse encontro, o professor deve propor que os alunos pensassem sobre a quantidade de bolo que sobrou, assim os alunos podem realizar adição e subtração com frações de mesmo denominador.

Soluções

Os alunos podem usar de poucas estratégias para resolver, visto que o problema é visto como um problema simples. Seria comum que os alunos desenhassem a situação como, por exemplo, desenhar um bolo e reparti-lo em 5 pedaços. Esse desenho pode ser representado por um inteiro retangular ou de forma circular. Enfim, a solução do problema é dizer que a parte do bolo que Marina comeu é dada pelo número 3/5 (lê-se "três quintos").

- Quinto Encontro

Problema Do salário do meu pai, ele gastou 2/5 com aluguel. Do que sobrou gastou metade com alimentação. Da segunda sobra, colocou 1/3 na poupança. Restaram-lhe R$ 300,00. Qual é o valor do salário de meu pai?

Pré-requisitos

Saber fazer relações entre o todo e sua parte; conceito de fração.

Objetivo

Fazer com que o aluno se atente ao enunciado do problema e reconheça a relação parte-todo que cada fração do problema representa, de forma que saiba expressar qual o todo que é considerado em cada situação.

Soluções

É preciso compreender que o único valor dado no problema são os R$ 300, 00, que representa uma parte do salário que se deseja descobrir. Esse valor corresponde ao resto do salário após o gasto com a poupança, ou seja, após os gastos com aluguel e alimentação, sobrou um valor do qual um terço foi colocado na poupança. É preciso compreender que o todo que temos aqui é o valor antes do gasto com a poupança. Esse todo foi dividido em três partes, das quais uma foi para a poupança e duas resultaram nos R$ 300,00. Para saber o valor de uma parte (um terço) basta dividir R$ 300,00 por 2, obtendo R$ 150, 00. Como o todo foi dividido em três partes e cada parte vale R$ 150, 00 obtém-se que o todo vale R$ 450, 00. Temos, agora, o valor do todo antes do gasto com a poupança. Porém, esse todo se refere à metade de um outro todo a ser considerado, o valor que se tinha antes do gasto com alimentação. Sendo assim, se R$ 450, 00 é a metade, R$ 900,00 é o valor todo. Notemos ainda que R$ 900,00 é o valor que se obteve após o gasto com aluguel, ou seja, esse valor é parte de um todo que é o salário total. Se foram gastos dois quintos do salário com aluguel, então os R$900,00 correspondem à três quintos do salário. Para saber o valor de cada parte, referente a um quinto do salário, divide-se R$ 900,00 por três, obtendo o valor R$ 300,00. Logo, o todo, correspondente à cinco quintos é igual a 5 × R$ 300,00 = R$ 1500,00.

- Sexto Encontro

Problema

Arnaldo tinha 75 bolinhas de gude. Deu a seu amigo Rodrigo 1/3 delas; do que sobrou deu 2/5 a Carlos e a Daniel 1/6 do restante. Qual o número de bolinhas que coube a cada um deles no final dessa partilha?

Pré-requisitos

Saber fazer relações entre o todo e sua parte; conceito de fração.

Objetivo

Reconhecer a relação parte-todo que cada fração do problema representa, de forma que saiba expressar qual o todo que é considerado. Ao fim desse encontro, o professor deve propor que os alunos pensem sobre qual a relação entre a parte de bolinhas distribuídas aos amigos Rodrigo, Carlos e Daniel e o total de bolinhas, assim os alunos poderiam realizar adição e subtração com frações de denominadores diferentes.

Soluções

Inicialmente, tem-se 75 bolinhas. Dessas bolinhas serão dadas um terço a Rodrigo. É preciso calcular um terço de 75 bolinhas. Temos aqui o número racional como um operador. Pode-se notar também que é preciso identificar a relação da parte com o todo de 75 bolinhas. Assim, dividimos 75 bolinhas em três partes iguais de 25 bolinhas. Uma parte, 25 bolinhas, será dada a Rodrigo. Segundo o enunciado, do que sobrou, serão entregues dois quintos a Carlos. É preciso saber o todo a ser considerado, no caso é o restante das bolinhas após a entrega a Carlos. Temos 75 – 25=50. Calculando dois quintos de 50 bolinhas, dividimos 50 bolinhas em 5 partes iguais de 10 bolinhas cada. Pegando duas partes temos 20 bolinhas para Carlos. Finalmente, desse novo resto e, portanto, novo todo, 50 – 20=30, daremos um sexto dessas bolinhas para Daniel. Então, 30 bolinhas divididas em 6 partes iguais resultam em 5 bolinhas para cada parte. Portanto, Daniel receberá 5 bolinhas. Por fim, Arnaldo receberá as bolinhas restantes, ou seja, 30bolinhas – 5 bolinhas =25 bolinhas.

- Sétimo Encontro

Problema

Arnaldo tinha 75 bolinhas de gude. Deu a seu amigo Rodrigo 1/3 delas e deu 2/5 delas a Carlos. Qual o número de bolinhas que coube a cada um deles no final dessa partilha?

Objetivo

Fazer com que o aluno se atente ao enunciado do problema e reconheça a relação parte-todo que cada fração do problema representa, de forma que saiba expressar qual o todo que é considerado.

Pré-requisitos

Saber fazer relações entre o todo e sua parte; conceito de fração.

Soluções

Primeiramente é preciso compreender que o total de 75 bolinhas é o todo a ser considerado no problema. Logo, para calcular quantas bolinhas Rodrigo receberá basta calcular um terço de 75 bolinhas, dividindo 75 bolinhas em três partes iguais de 25 bolinhas. Assim, Rodrigo receberá 25 bolinhas. Para saber a quantidade de bolinhas que Daniel receberá, basta dividir o total de 75 bolinhas em 5 partes iguais de 15 bolinhas. Como ele receberá dois quintos, então são duas partes, o que corresponde a 30 bolinhas. Arnaldo receberá o restante de bolinhas, ou seja, 75 - 25 - 30 = 20. Caberão 20 bolinhas a Arnaldo.

- Oitavo Encontro:

Problema Três pizzas devem ser divididas igualmente entre cinco pessoas. Quanto de pizza cada pessoa comerá?

Pré-requisitos

Conceito de divisão em partes iguais.

Objetivo

Identificar que o número racional também pode representar o resultado de uma divisão, um quociente.

Soluções

Como a pergunta sugere que a solução expresse a quantidade de pizza que cada pessoa comerá, espera-se que o aluno compreenda que existe um total de três unidades de pizza que serão divididas igualmente entre cinco pessoas. Assim, para expressar a quantidade que cada pessoa comeu, basta lembrarmos do conceito de divisão (3 dividido por 5). Como estamos trabalhando com números racionais, podemos expressar a resposta como um quociente na forma $\frac{3}{5}$.

- Nono Encontro

Os alunos devem responder as seguintes questões sobre os encontros realizados:

1. Você já tinha trabalhado em grupos em aulas de Matemática?
2. Você gostou de trabalhar em grupos? Por quê?

3. Você gostou de resolver os problemas na lousa e ver como os colegas fizeram?

4. Você achou difícil resolver os problemas?

5. O que você realmente aprendeu durante as atividades desenvolvidas?

6. Cite cinco conteúdos ou conceitos que você aprendeu com os problemas.

- Décimo Encontro

Desenvolva dois problemas sobre o que você aprendeu durante as aulas e tente resolvê-los.

Objetivo

Fazer com que os alunos reflitam sobre o que aprenderam nos encontros anteriores para que possam elaborar um problema, se atentando à linguagem vernácula e à linguagem matemática a fim de enunciar um problema. Além disso, ao ler a resolução do problema apresentada pelo aluno, o professor pode e deve avaliar o aprendizado dele.

7.3.5 P_5 em ação: Aplicação do Projeto

Colocar esse procedimento em ação é aplicar o Projeto na sala de sexto ano escolhida. Descreveremos, agora, como se deu a aplicação do Projeto, principalmente o Roteiro de Problemas. Para cada problema proposto no Roteiro, foi elaborada uma folha com o enunciado do problema que foi entregue para cada aluno durante os encontros. Essas folhas podem ser consultadas no ANEXO D.

Foram realizados, no total, 10 encontros de duas horas/aula cada um totalizando 20 horas/aula para desenvolver o Projeto. Participaram como sujeitos desta pesquisa, 35 alunos do 6º ano de uma escola pública da cidade de Rio Claro – SP. Os alunos se organizaram e se dividiram em 8 grupos de trabalho, formando 4 grupos de cinco alunos, 3 grupos de quatro alunos e 1 grupo de três alunos.

Procuramos descrever como foram realizados os encontros de acordo com as etapas sugeridas por Allevato e Onuchic (2014) para a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Por isso, o desenvolvimento de cada problema na sala de aula será descrito de acordo com as etapas: apresentação do problema, observar e incentivar, registro das resoluções na lousa, plenária, busca por um consenso e formalização do conteúdo. No fim da descrição de cada encontro, serão feitos comentários de como ocorreu a aplicação de cada problema, quais foram as dificuldades dos alunos e quais conteúdos foram trabalhados em cada encontro. Esses comentários fazem parte da análise da aplicação, referente ao Procedimento Auxiliar P_6.

Para manter oculta a identidade de cada aluno, a fala de cada aluno foi registrada pelo termo *A*, sem identificar seu nome. *Q*uando o termo *P* aparece estamos nos referindo a uma ação da professora pesquisadora. O termo *A* representa a fala dos alunos em geral. Para o desenvolvimento das aulas, a pesquisadora tomou uma postura de professora. Para evitar repetições, escreveremos apenas professora em vez de professora pesquisadora.

O desenvolvimento do Projeto foi gravado em áudios e fotografias, além de cada aluno ter um registro em uma folha com o problema. Os áudios foram transcritos e alguns trechos das transcrições estão presentes nesta seção, assim como algumas fotografias e imagens das folhas de problemas dos alunos. A fim de evidenciar a linguagem oral e escrita presente nas aulas desenvolvidas na aplicação do Projeto, decidimos apresentar diversos trechos de diálogos entre os alunos e a professora.

7.3.5.1 O primeiro encontro: a apresentação da professora

Para o primeiro encontro como proposto no Roteiro de Problemas, a professora entregou à sala de aula o Termo de Compromisso, presente no ANEXO C, que esclarece como os alunos e professora deveriam se portar durante as aulas, como seriam realizadas as aulas e quais os papeis de cada um.

Conversei com os alunos sobre como seria o desenvolvimento das nossas aulas e de como esperava que eles participassem, esclarecendo as obrigações deles e as minhas. Para isso, uma aluna leu o Termo de Compromisso, elaborado por mim, para que nosso trabalho em conjunto fosse agradável.

Combinamos em trabalhar em grupos de acordo com a afinidade de cada aluno com seus colegas. Os alunos se comprometeram a trabalharem em grupos, participando, resolvendo os problemas, discutindo com seus colegas de grupo e levantando questionamentos sobre os problemas. Eles ficaram um pouco surpresos sobre escolher um aluno de cada grupo para apresentar a resolução do problema para os outros grupos, porém aceitaram essa condição. A impressão que tive foi de que eles não têm muito costume em apresentar na lousa a resolução de seus problemas.

7.3.5.2 O segundo encontro: Problema da Retangularização

- **Apresentação do Problema**

Como se apresenta a retangularização dos seguintes números:
9, 10, 11, 12 e 13?

Retangularizar um número é procurar dois fatores que, quando multiplicados, resultem nesse número. A figura que ilustra esse procedimento é um retângulo.

Quais são suas observações a partir da retangularização desses números?

- **Observar e incentivar**

Alguns questionamentos que a professora fez aos alunos durante a resolução do problema são:

P: O que é retangularização? Vocês sabem?
P: Que palavras vocês conhecem que tem aí nesse quadro?
P: O que é multiplicação?
P: O que significa o retângulo três por três?
P: Você montou um retângulo?

P: O problema pediu pra encontrarmos dois números que se multiplicados resultam em 11. Quais os números que você encontrou?

Essas questões aparecem nos diálogos entre alunos e professora. Após ler o enunciado do problema com todos os alunos, surgiu o seguinte diálogo:

P: O que é retangularização? Vocês sabem?

A: Não!

P: Temos um quadrinho que vai explicar: Retangularizar um número é procurar dois fatores que, quando multiplicados, resultem nesse número. O que vocês entenderam do que estava escrito no quadrinho?

A: Nada!

P: Que palavras vocês conhecem que tem aí nesse quadro?

A: Retângulo.

P: O que mais?

A: Multiplicação.

P: O que é multiplicação?

A: Quando você multiplica um número por outro.

P: Muito bem!

A: Então retangularizar é quando você multiplica um número pelo outro.

Um diálogo que aconteceu em um grupo:

P: Que números são esses?

A: 5 vezes 5?

P: E dá 10?

A: Não.

P: Vamos olhar para o 9. Quantas formas vocês encontraram?

A: 3 vezes 3. 9 vezes 1.

P: Agora desenhem!

A: Ai fica três aqui e mais três aqui.

[...]

P: Vocês colocaram 5 vezes 2 para o 10. Tá certo, né? 5 vezes 2 dá 10.

A: Sim.

P: Você montou um retângulo?

A: Sim.

P: E para o 11 como você fez?

A: Fiz 11 quadradinhos.

P: Mas formou um retângulo?

A: Não.

P: O problema pediu pra encontrarmos dois números que se multiplicados resultam em 11. Quais os números que você encontrou?

A: 11 vezes 1.

P: Muito bem. 11 vezes 1 dá 1. Mas quantos quadradinhos eu vou ter?

A: Seria 11 de um lado e 11 do outro?

P: E ai ficaria 11 vezes 1 quadradinhos?

A: Então seria 11 quadradinhos de um lado e 1 do outro.

[...]

P: Esse tá formando um retângulo?

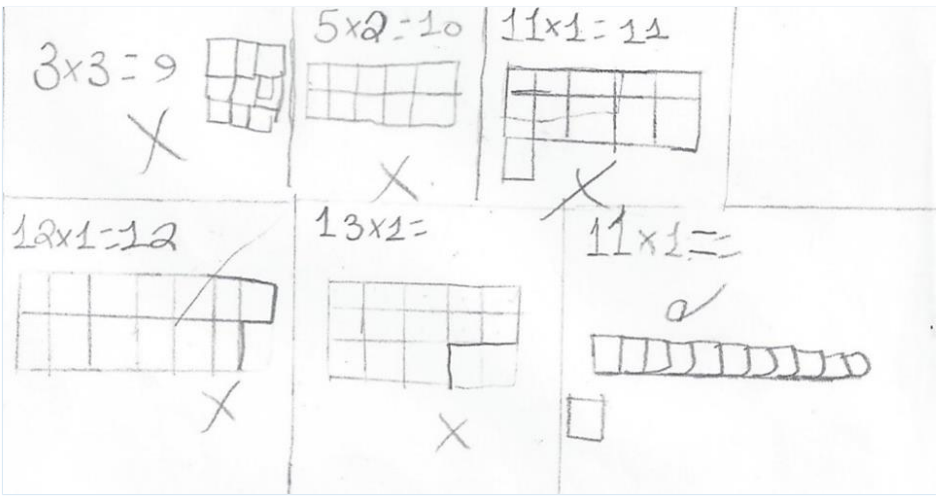
A: Não.

P: Por quê?

A: Porque eu deveria colocar 12 de um lado e 1 do outro.

[...]

Figura 13: Folha de atividade de um aluno



Fonte: Produção dos dados da pesquisa

Uma discussão que ocorreu em outro grupo*:*

P: O seu está um retângulo de verdade?

A: Não.

P: Por quê?

A: Porque tem uns quadradinhos sobrando.

P: E como eu posso fazer para não ter esses quadradinhos? Está certo, 5 vezes 2 dá 10?

A: Sim.

P: E aí tenho que montar um retângulo com os números 5 e 2. Como posso fazer?

Mais uma discussão:

A: Quantos mais quantos dá 11?

A: 11 vezes 1.

A: 5 mais 6.

A: Então teria que ser, mas não daria.

P: Por quê? Que conta vocês estão fazendo?

A: De multiplicação.

P: 5 + 6 é multiplicação?

A: Não, só que a gente fez para saber quantos caberiam de quadradinhos, entendeu?

P: Que número vocês querem encontrar? O número 11?

A: Isso.

P: Mas vocês fizeram uma multiplicação?

A: A gente está querendo saber o quanto a gente vai dividir por quadradinho.

P: Quando o número era 10, que números vocês encontraram?

A: 5 vezes 2.

P: E como fizeram?

A: Cinco em cima e cinco em baixo.

P: Mas quantos tem nessa direção? (mostrando no papel)

A: 5.

P: E na outra direção?

A1: 2.

P: Por quê?

A: Porque Ahhh. Agora eu entendi. Porque aqui o número 2 é de largura ou comprimento, sei lá, então nesse caso deveria ser 11 e 1.

Outro grupo:

P: Quantos quadradinhos tem aqui?

A: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Mas não era para ter feito três quadradinhos? Aqui tem três: 1, 2, 3 e aqui também tem três: 1, 2, 3. Não está certo?

P: Eu não sei. Quantos quadradinhos eu quero fazer? Não são 9?

A: Eu tenho que fazer mais quadradinhos.

P: Esse aqui era 10 e você escreveu 5 vezes 2. Lembra o 11 que você fez 11 "de assim" e só um "de assim"?

A: Vou ter que fazer mais três quadradinhos aqui.

Mais um grupo:

P: O que é retangularização?

A: Tem que formar um retângulo.

P: Muito bem. Que números você fez com o 9?

A: Três.

P: Formou um retângulo?

A: Ahh. Não sei.

P: O que é um retângulo?

A: Uma forma fechada.

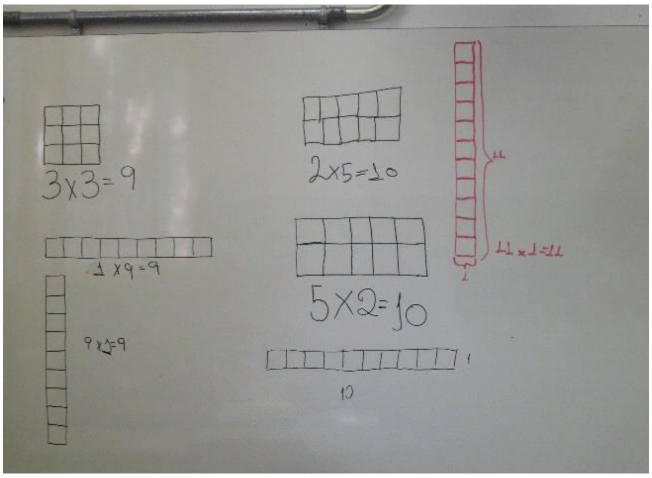
P: E como é essa forma fechada?

A: Tem que ter dois lados iguais e outros dois lados iguais.

- **Registro das resoluções na lousa**

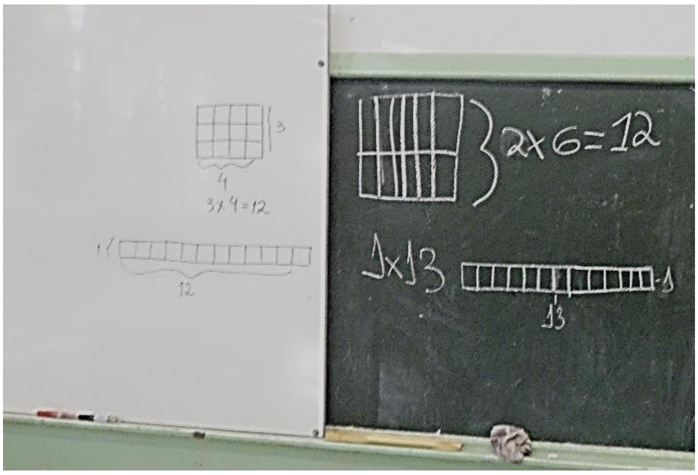
Trazemos aqui as fotos que foram tiradas após a resolução do problema na lousa. Para cada um dos números 9, 10, 11, 12 e 13, um grupo diferente apresentou suas soluções. Os outros grupos complementaram as respostas dos colegas.

Figura 14: Registro da resolução do problema da Retangularização para os números 9, 10 e 11



Fonte: Produção dos dados da pesquisa

Figura 15: Registro da resolução do problema da Retangularização para os números 12 e 13.



Fonte: Produção dos dados da pesquisa

- **Plenária**

Os grupos foram convidados, conforme sua organização na sala de aula, para que apresentassem sua resolução na lousa para os colegas da sala. Eles poderiam usar a linguagem escrita e oral para explicar os passos e raciocínios de cada solução.

Cada grupo deveria apresentar a resolução sobre a retangularização de um dos números que o problema pedia. Caso algum grupo tivesse uma solução distinta das que foram apresentadas, os integrantes poderiam se manifestar. Após a apresentação de cada grupo, os alunos puderam fazer perguntas aos colegas.

Sobre a retangularização do número 9:

A: A gente tava vendo e para o nove, a gente pensou nos números que multiplicados davam nove. A gente achou na tabuada do 3, na do 9 e na do 1. (desenhou na lousa)

Sobre a retangularização do número 10:

A: Nós pegamos a tabuada do dez pra saber como achar o número dez. E dava na tabuada do 5 e do 1.

P: Pode fazer. Vocês olharam onde na tabuada?

A: No resultado.

Sobre a retangularização do número 11:

A: Eu vi que o 11 como ele é número primo só tinha na tabuada dele mesmo e do 1.

P: O que é número primo?

A: É um número que só divide por 1 e por e mesmo.

P: Que legal! Quem mais pensou isso? (se dirigindo para a turma toda)

Sobre a retangularização do número 12:

P: Como vocês fizeram a retangularização do número 12?

A: Nós fizemos 2 vezes 6 igual a 12.

Sobre a retangularização do número 13:

A: A gente percebeu que ele (o número 13) tá na tabuada do 1 e na dele.

P: E como vocês fizeram? Que números escolheram?

A: O 1 e o 13.

Por fim, a professora leu, juntamente com os alunos, cada exemplo que estava na lousa. Perguntou aos alunos se estavam corretos e eles disseram que sim. Ainda, a professora perguntou se algum grupo resolveu de outra maneira.

Sobre a retangularização do número 10, o grupo que resolveu na lousa apresentou apenas a forma 5 vezes 2. Alguns grupos disseram que fizeram 1 vezes 10 e 10 vezes 1.

P: E como que ficaria 1 vezes 10?

A: Coloca um quadradinho dez vezes.

A: Fica 10 vezes 1 ou 1 vezes 10.

Sobre a retangularização do número 12, fizeram 2 vezes 6.

P: Alguém fez de outra maneira?

A: Ahh a gente fez tipo, de vertical três quadradinhos e de horizontal, quatro.

A: Aí ficou 4 vezes 3.

P: Alguém mais fez de outro jeito?

A: 12 vezes 1.

P: Mais alguma maneira?

A: Eu fiz ao contrário. 6 vezes 2. Aí ficou seis fileiras de 2.

- **Busca por um consenso**

Ao discutir com os alunos sobre as soluções que foram expostas na Plenária, a professora discutiu com todos os alunos:

P: Por que teve número que teve mais de uma maneira e outros que não?

A: Porque alguns são números primos.

P: Quais?

A: Onze e treze.

P: E quantas maneiras tem de fazer?

A: Só uma.

P: Por quê?

A: Por que só divide por 1 e por ele mesmo.

P: Muito bem. Aí só tem uma maneira de fazer. São esses que são feitos com uma fileirinha só. E os outros números?

A: Não são.

P: Como se chamam os números que não são primos?

A: Cardinais.

P: Mas cardinais não são os números que a gente conta?

A: Ah é.

A: Ordinais.

P: O que é ordinal?

A: Que dá ordem. O primeiro, o segundo ...

P: Muito bem! Os números que não são primos são números compostos.

A: É mesmo.

P: Agora uma pergunta: o que os números 1 e 11 são do número 11?

A: Primos.

P: Mas o 1 e 11 são primos?

A: O 13 é número primo.

A: Números primos são os números que só dá pra dividir por 1 e por ele mesmo.

P: Como chamam esses números que dividem o 13?

A: Divisor.

P: Isso mesmo!

A: O 13 é divisor.

P: O que é divisor? Olhem para essa palavra: divisor.

A: O que divide um número.

P: Muito bem. O 13 é divisor de 13?

A: Sim.

P: E o 12, por exemplo? Ele é primo?

A: Não.

P: Ele tem divisor?

A: Sim.

P: Quais são os divisores?

A: 6, 12, 4, 3, 2 e 1.

P: Muito bem! Como vocês sabem que o número é divisor?

A: Porque estão na tabuada.

A: Deu pra fazer o retângulo com eles.

P: Então, o que o 3 é do 12?

A: Divisor.

P: O que quer dizer divisor?

A: É quando divide um pelo outro.

A: Dá pra dividir.

A: Quando dá pra dividir pelo número.

P: E o 12? O que o 12 é do 3?

A: Múltiplo?

P: O que é múltiplo?

A: O que multiplica um número.

A: Que tem na tabuada de um número.

P: Então o 12 é múltiplo do 3?

A: É. Porque se pegar o 3 e multiplicar por 4 dá 12.

A: O 2 também.

P: O 12 é múltiplo do 2? Por quê?

A: Por que se pegar 2 vezes o 6 dá 12.

P: Muito bem!

- **Formalização do conteúdo**

De acordo com as respostas dos alunos na busca por um consenso, a professora apresentou a formalização dos seguintes conceitos:

1. Múltiplo de um número A é todo número que é produto desse número A com qualquer outro número natural (0, 1, 2, 3, 4, ...). Podemos falar que os múltiplos de um número formam a tabuada desse número.

2. Divisor de um número A é todo número que quando for dividido por A resulta em resto Zero.

3. Números primos são os números que possuem apenas dois divisores: o 1 e ele mesmo.

4. Números Compostos são os números que não são primos.

- **Comentários**

Percebemos, durante a aplicação desse problema que os alunos associam o conceito de múltiplo de um número com os números que estão na tabuada dele.

Além disso, confundem as operações de adição e multiplicação na hora de construir retângulos, pois percebem que o retângulo possui dois pares de lados com mesma medida, porém não percebem que a multiplicação dos lados resulta na área do retângulo. Alguns grupos fizeram adição para encontrar os fatores dos números 9, 10 e 11.

Notamos, também, que os alunos desconheciam algumas palavras do enunciado como retangularização e fatores. Foi preciso que a professora discutisse esses conceitos com os alunos.

7.3.5.3 O terceiro encontro: Problema do ponto racional

8 Apresentação do Problema

Localize os números $\frac{2}{5}$, $\frac{7}{5}$ e $\frac{3}{10}$ na reta.

9 Observar e incentivar

As discussões que surgiram nos grupos enquanto a professora passava pela sala e os alunos resolviam o problema foram:

P: O que é uma reta?

A: Uma linha?

P: Uma linha com o quê?

A: Com números.

P: Muito bem! E que números eu devo colocar na reta?

A: O 1, o 2, o 3 ...

A: Localizar?

P: O que é localizar?

A: Achar onde está.

P: Quais pontos?

A: Dois quintos, sete quintos e três sobre dez.

P: Qual o primeiro desafio?

A: Fazer uma reta.

P: Então vamos fazer uma reta. O que uma reta tem de especial?

A: Os números.

P: E que números vamos colocar?

A: O dois quintos, o sete quintos e três décimos.

P: Mas antes desses quais eu coloco? Você sabe colocar esses números sem ter nenhum número antes? Por exemplo, cadê o zero da reta de vocês?

A: O zero. Aqui.

P: O próximo número, qual seria?

A: O um.

P: Onde fica o 1?

A: Aqui.

P: E o próximo?

A: O 2. Aqui.

P: Uma coisa muito importante: O espaço daqui até aqui (de zero a 1) e daqui até aqui (de 1 a 2) é o mesmo?

A: Não.

P: Por quê?

A: Porque tem que medir com a régua.

P: Só que daqui até aqui (de zero a 1) quanto vale?

A: 7 centímetros.

P: Quanto é sete centímetros na régua?

A: Ah .. Não é não.

P: Do zero até o 1 vale 1, não é?

A: É.

P: E do 1 até o 2?

A: 1.

P: Então, não deve ser o mesmo espaço?

A: Sim.

P: Esse espaço é chamado de unidade.

Uma discussão que ocorreu em outro grupo:

P: O que é isso que você desenhou?

A: Uma reta.

P: E qual esse tamanho?

A: Ah é um centímetro.

P: Certo. Mas precisa ser um centímetro?

A: Não.

P: Pode ser quanto?

A: Quanto eu quiser.

Em outro grupo:

A: Eu quis descobrir aqui o que era 2 por 5. Aqui é o 2 (o ponto 2) e o professor sempre disse que aqui no meio é sempre meio (0,5). Então somando dá dois e meio.

P: Muito bem. Está certinho. Esse é o zero, esse é o um, aqui é o dois e esse pedacinho aqui vale meio. Então esse aqui é o dois e meio. Mas esse número 2,5 e esse é o mesmo (2/5)?

A: Não. Porque esse é uma fração e esse é decimal

P: Mas fração pode ser número decimal, não pode?

A: Sim.

P: Como eu escrevo meio em fração?

A: Dois ....?

P: Como é metade?

A: Metade.

P: Mas e o número? Como eu escrevo com a barrinha?

A: 0,5.

P: Muito bem mas aí é com número decimal.

A: 0 sobre 5?

A: 1 sobre 2. Uma metade.

P: Isso. E como escrevo metade com vírgula?

A: 2,5.

P: Como é?

A: 0,5.

P: É o mesmo número?

A: É metade.

P: Muito bem. Os dois são metade. Então está certo falar que 2,5 é o mesmo que 2 sobre 5?

A: Não.

P: Como eu escrevo 2 sobre 5?

A: É o 2.

P: É o mesmo que 2?

A: 2 sobre 1.

P: O que é dois sobre um?

A: É metade.

P: Será?

A: Não. Um sobre dois que é metade.

P: Onde que está um sobre dois na sua reta?

A: No meio do 1.

Outro grupo:

A: A gente não lembra como faz isso.

P: Desenharam a reta?

A: Sim.

P: Foi fácil?

A: Não.

P: O que é importante nessa reta?

A: Ter números.

P: Vocês desenharam uma reta ou uma régua?

A: Uma régua.

P: Tô vendo os números. Que número é esse?

A: Esse é o três.

A: E esse é o cinco.

A: Esse seria o 2, o 4.

P: Eu quero achar o 2 sobre cinco.

A: Então seria o 2,5?

P: 2,5 é igual a 2 sobre cinco?

A: Eu acho que é.

P: Por exemplo, se eu tenho meia laranja, como eu escrevo em fração?

A: Um em cima e dois em baixo.

P: Muito bem. E se eu quiser escrever em número decimal?

A: 1, 5 ou?

P: Hum.

A: Um e meio.

P: Um e meio não quer dizer que eu tenho 1 mais meio?

A: Ah é verdade. Então tem que ser só metade. Então se fosse dez seria cinco.

P: Muito bem, mas como fica em número decimal.

A: É meio.

P: Como eu escrevo meio?

A: 0,5.

P: Então é do mesmo jeito que eu escrevo decimal e fração?

A: Não.

P: Então 2/5 é 2,5?

A: Não.

P: Se eu te pedisse um sobre dois?

A: Aí é meio, aqui no 0,5.

P: Muito bem! O que você teve que pensar?

A: Peguei o 1 e dividi em 2.

P: E o dois sobre cinco? O que eu vou fazer?

A: Dividir ele.

P: Ótimo.

A: Agora pensamos como vamos dividir esse número.

Uma discussão que ocorreu em outro grupo de alunos:

A: Vamos supor que o professor ensinou um negócio de transformar fração em números decimais.

P: Tá. E como que faz?

A: Assim, se você pegar a unidade dois quintos ai você pode pegar o 2 e o 5. (escrevendo o número 2,5)

P: Mas então dois quintos é igual a 2,5? Será? Vocês sabem o que é a unidade da reta?

A: Cada número. Do zero ao 1 tem uma unidade.

P: Como posso pegar o dois sobre cinco, então?

A: No três.

P: Por que três?

A: Porque tinha 5 e tirou 2.

P: Mas o que você vai dividir por 5?

A: A unidade?

P: E o que é a unidade?

A: Do zero ao um.

P: Então pega do zero ao um e divide em quantas vezes?

A: Em cinco.

10 Registro das Resoluções na lousa

Cada grupo foi convidado para localizar um ponto na reta numérica. Um grupo se propôs a desenhar a reta numérica na lousa e outros três grupos escolheram um número do problema para localizar na reta desenhada.

11 Plenária

A seguir, conferimos os diálogos que ocorreram durante a Plenária

Construindo a reta numérica na lousa:

P: Os alunos vão explicar como o grupo deles fez a reta. Como vocês fizeram a reta?

A: A gente fez usando uma régua e aí a gente desenhou ela assim, a gente foi colocando os centímetros.

P: Tá. Colocaram os números iguais ao da régua?

A: Sim.

P: Quem mais fez igual a régua? (os grupos levantaram as mãos) Bastante gente, né? Algum grupo usou a régua para fazer mas sem usar a régua pra medir? Eu preciso usar a régua para fazer uma reta toda vez?

A: Não.

P: Não. Eu preciso usar para fazer a reta certinha mas pra medir precisa ser a medida da régua?

A: Não.

P: O que precisa ter importante na reta?

A: Os riscos serem iguais.

A: Todas as distâncias serem iguais.

P: Muito bem. Então, do zero ao um vale quanto?

A: Um centímetro.

P: Um centímetro?

A: Um qualquer coisa.

P: Tem que ser sempre um centímetro?

A: Não.

Localizando o ponto $\frac{2}{5}$ na reta numérica:

P: Como faz para escrever o número dois sobre cinco? Dá para escrever?

A: Até dá ...

P: Vamos ver. O grupo vai mostrar. Então dois quintos está localizado onde?

A: No meio.

P: No meio do que?

A: Do dois e do três.

P: Por quê?

A: Por que assim, o professor ensinou a gente que esse número aqui (falando do 2), o grandão, é o número dele mesmo. E o meio (falando do 5) é sempre a metade então ele vai ser 0,5 então somando isso dá isso.

P: Mas o número que a gente tinha que encontrar era 2,5?

A: Não.

P: Não. Era dois sobre cinco. É a mesma coisa?

A: Não.

P: Não. Por quê?

A: Porque você tem que transformar em número decimal.

Um grupo quis mostrar como resolveu o problema:

P: Vocês fizeram transformando em número decimal? Vem mostrar pra gente que conta é essa?

A: Divisão.

P: O de cima pelo de baixou ou de baixo pelo de cima?

A: O de cima pelo de baixo.

P: Por quê?

A: Porque o de baixo mostra a quantidade.

P: Que resposta que deu??

A: Deu 0,4.

P: E onde fica o 0,4 na reta?

A: (aqui, colocando na reta)

P: 0,4 e 2,5 é o mesmo número?

A: Não.

P: Então esse está certo (apontando para o ponto 2,5)?

A: Não.

P: Dois sobre cinco é igual a 0,4. Teve grupo que fez de outro jeito?

...

P: O que é dois quintos? Discutimos bastante isso nos grupos.

A: É duas partes de cinco

P: Divido em quantas partes?

A: Cinco.

P: E pego quantas?

A: Duas.

P: Agora, o que eu divido em cinco partes?

A: Um chocolate?

P: Pode ser um chocolate. E na reta, o que eu divido?

A: O número dois.

A: A medida.

P: Mas qual medida especial?

A: O dois sobre cinco.

A: O 5.

A: A reta.

A: Um sobre cinco.

A: O um.

P: Muito bem. O um. A unidade da reta. Então do zero ao um eu vou dividir em quantas partes?

A: Em cinco.

P: Por que 5?

A: Porque é o número que está em baixo.

A: O número de baixo é em quanto você divide ou vai dividir e o de cima é quanto tem.

P: Muito bem!

P: Teve grupo que dividiu o 1 em dez em vez de dividir em cinco. Tá errado?

A: Não.

P: Por que? Qual outro jeito de ler esse número 0 vírgula quatro?

A: Quatro décimos porque são tipo dez pedaços do zero ao um.

P: Então, da unidade eu pego e divido em dez e pego quantos?

A: Em 4.

Localizando o ponto $\frac{7}{5}$ na reta numérica:

A: A gente pegou o número de baixo, o sete, e o cinco é quantas vezes a gente dividiu esse número. Ai a gente fez sete dividido por 5 que deu 1,4 e ai a gente colocou aqui

P: E 1,4 é maior que 1?

A: Sim.

Localizando o ponto $\frac{3}{10}$ na reta numérica:

A: De 10 centímetros pegou o número três.

P: Tá. O que significa três décimos, pessoal?

A: 0,3

P: E onde está o 0,3?

A: Aqui.

P: Tá bem pertinho do zero não tá?? Então 0,3 é igual a 3?

A: Não.

P: Como eu leio zero vírgula três?

A: Três décimos.

P: E como escrevo 0,3 em "fração"?

A: Três sobre dez.

P: E o 0,4?

A: 4 sobre dez.

P: E que outra forma vocês sabem?

A: Dois sobre cinco.

A: São equivalentes.

A: É que a mesma fração.

A: Dois quintos é a simplificação de 4 décimos.

P: Muito bem.

A: Os dois números ficam no mesmo ponto.

12 Busca por um consenso

Ao se discutir o que foi apresentado na Plenária a professora fez alguns questionamentos aos alunos de acordo com o que percebeu ao observar e incentivar como as seguintes:

1. Como construo uma reta? E uma reta numérica?
2. O que é localizar um número na reta? Como coloco os números na reta?
3. Quais números coloco na reta?
4. O que significa o número 2/5 na reta, por exemplo?
5. 2/5 e 0,4 são o mesmo número? Por quê?

13 Formalização do conteúdo

A partir desses questionamentos, a professora pôde formalizar o conceito de ponto racional: o número $\frac{a}{b}$ pode ser representado na reta e é um ponto bem definido.

- **Comentários**

Para localizar e marcar os pontos dados no problema foi preciso, primeiramente, construir a reta numérica. Foi importante discutir com os alunos a unidade que seria tomada. Essa unidade poderia ser escolhida por eles, mas deveria ficar claro que ela é referência para a localização de todos os pontos na reta numérica. Isto é, desde que ela seja tomada, a unidade será a mesma distância em todos os pontos marcados pelos números naturais. Após essa construção, o professor pode trabalhar com números racionais, de forma que irá mostrar que localizar os pontos do problema é mostrar partes da unidade de referência adotada.

Foi preciso trabalhar com os alunos que o número $\frac{a}{b}$ é um número que pode ser localizado na reta numérica, pois alguns alunos apenas localizaram os pontos a e b. Além disso, foi trabalhada a diferença entre a barra fracionária e a vírgula que separa a parte inteira da parte decimal. Muitos alunos localizaram o ponto 2,5 no lugar de $\frac{2}{5}$, por exemplo. Trabalhamos, a partir do conceito do ponto racional, que o número racional pode ser representado por um número decimal, mostrando que pode ser feita uma divisão, pois:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \div b}{b \div b} = \frac{a \div b}{1} = a \div b$$

7.3.5.4 O quarto encontro: O primeiro problema da fração

8 Apresentação do Problema

<u>Problema</u>

Marina comprou um bolo e o partiu em 5 partes iguais. Após o jantar Marina comeu 3 pedaços desse bolo. Que número representa a quantidade de bolo que Marina comeu?

9 Observar e incentivar

Após ler o enunciado do problema junto com os alunos, a professora questionou:

P: O que vocês entenderam sobre o enunciado?

A: Marina comprou um bolo e cortou.

A: Não dá pra saber.

A: É conta de mais porque ela comprou e conta de menos porque ela comeu.

A: É que tipo assim, se fosse (conta) de menos não ia dar para dividir..

A: É de dividir.

A: É conta de mais. Eu não sei explicar.

P: O que a Marina tinha?

A: Um bolo.

P: O que ela fez?

A: Repartiu.

P: O que é repartir?

A: É dividir. Então é de dividir.

P: Dividir o que?

A: O bolo.

A: Dividir é quando você divide entre pessoas. Por exemplo, você tem cinco pães e vai dividir entre pessoas.

Enquanto a professora passeava pela sala de aula, realizou os seguintes diálogos com um grupo de alunos:

P: O que eu tenho?

A: Um bolo inteiro.

P: E o que se faz com ele?

A: Divide.

P: Em quantos pedaços?

A: Três?

A: Em cinco.

P: Como são os pedaços?

A: Em partes iguais

P: Muito bem. Então o bolo vai ser dividido em ..

A: Pedaços iguais.

P: E depois?

A: Dividir para as pessoas.

P: Mas ela (a Marina do problema) dividiu com alguém?

A: Não. Ela comeu.

P: Quantos pedaços?

A: Três.

P: Três o que?

A: Pedaços

P: De quantos?

A: De cinco.

P: Então está certo cinco dividido em três?

A: Não porque ela não dividiu.

P: Uma pergunta: você dividiu o bolo em cinco partes. Quanto vale cada parte?

A: Cinco?

P: Por quê?

A: Vou fazer (desenhar) um bolo

P: Esse bolo tá dividido em cinco?

A: Não é divisão então é de menos.

P: Por que de menos?

A: Porque ela come.

P: Tá! Ela come. Quantos pedaços ela comeu?

A: Três.

P: Tá. Só que o problema quer saber o quanto de bolo que ela comeu.

A: É três.

P: Mas três de que?

A: Pedaços.

P: Pedaços. Ela não comeu três bolos não é?

A: Ela quer saber o tanto de bolo ao todo.

P: Mas como eu chamo cada pedaço do bolo?

A: Parte?

P: Muito bem! E como eu chamo essa parte, em especial?

A: Pedaço.

P: mas não tem um número que representa cada parte?

A: Um inteiro!!!

P: O que é um inteiro?

A: O bolo inteiro.

P: Eu tenho que ver um número que representa o bolo que ela comeu.

A: Quantos pedaços ela comeu?

P: Qual o nome do número que que representa a parte do bolo que ela comeu? Qual a palavra que usamos?

A: Fração? É Fração.

A: Ai meu Deus.

A: Eu aprendi isso no quinto ano.

A: É três quintos.

P: E como chama um pedaço do bolo?

A: Um quinto.

P: Muito bem!!

Em outro grupo:

P: O que está escrito aí?

A: Uma fração.

P: Mas o que é uma fração? Quando uso uma fração?

A: Quando uma pessoa divide alguma coisa.

A: A ideia é de dividir.

P: Como que chama cada pedaço de bolo?

A: É uma fração.

P: Cada pedaço, quando eu divido em 5, tem um nome especial

A: Um quinto!!

P: Muito bem. E quantos pedaços foram pegos?

A: Três quintos!!!

P: O que que sobrou?

A: Dois.

P: Dois o que?

A: Quintos!!

P: Dois quintos! Muito bem!

10 Plenária

Três grupos foram à lousa mostrar como resolveram o problema. Um grupo resolveu apresentando a resposta em forma de número decimal. Os outros dois fizeram representações da fração $\frac{3}{5}$, um com representação retangular e outro com representação circular.

Para começar a plenária, a professora começou um diálogo:

P: Como o seu grupo fez?

A: Três sobre cinco.

P: Quem mais pensou nesse número?

A: Eu pensei que, como o bolo ela repartiu em 5 partes e 5 é o inteiro e três foi a parte que ela comeu. Só que também dá para chamar esse número de decimal, dividindo, 0,6.

P: Alguém pensou de outra forma?

A: Sim.

P: Alguém fez desenho?

A: Eu fiz.

Outro grupo se propôs a apresentar na lousa sua resolução:

P: Venha mostrar como o seu grupo fez?

A: Eu pintei três (fazendo uma representação da fração em círculo).

P: Você pintou três por quê?

A: Porque foi o tanto que ela comeu.

P: Muito bem! Vocês entenderam o que ele fez?

A: A gente entendeu, mas fez o desenho de outro jeito.

O terceiro grupo que apresentou sua resolução:

P: Venham aqui mostrar!!

A: (fez representações em retângulo na lousa).

P: Então, nesses dois exemplos o desenho do bolo foi dividido em quantos pedaços?

A: Em três.

P: Em três?

A: Não. Em cinco.

P: Por quê?

A: Porque no problema fala que ela dividiu o bolo.

P: E quantos ela comeu?

A: Três.

P: Muito bem! Como eu chamo esse número?

A: Três quintos!

P: Muito bem! E três quintos é a quantidade de bolo que a Marina comeu?

A: Sim!

P: E como chama o número desse tipo, três quintos?

A: Fração!

P: E vocês já estudaram fração?

A: Sim. No quarto ano.

P: Vamos olhar para os desenhos. Uma coisa importante é dividir a fração de que forma?

A: Em partes iguais.

P: Muito bem! Então a gente tem o número três quintos e o primeiro grupo transformou em número decimal. Tá errado?

A: Não. São equivalentes.

P: Isso mesmo!

A: Três quintos.

P: Vocês sabem como que chamam os números de cima e o de baixo em uma fração?

A: Denominador e numerador

P: Muito bem! Mas qual é o denominador?

A: O de baixo.

P: E por que chama denominador? O que significa essa palavra?

A: É o de baixo.

A: É quanto tem.

A: É o total.

P: O que a palavra denominador lembra pra vocês?

A: De nome.

A: Denominar.

P: O que é denominar?

A: Ter o poder.

P: Poder de que?

A: Quer dizer quantos você tem.

P: O que é de-no-mi-nar?

A: É dar o nome.

P: Muito bem! Então esse número é quem dá nome à fração

A: Em quantas partes vai se dividir!!

P: E o outro número como chama?

A: Numerador!

P: E o que significa numerador?

A: É quantos você pegou

A: É o número.

P: Como chama esse número, então? É um número? (me referindo a fração $\frac{3}{5}$)

A: Três quintos!!

P: Isso! O cinco denomina chamar de??

A: Quintos!!!

Após a plenária, a professora pediu para que os alunos escrevessem em suas folhas de atividade, utilizando suas próprias palavras, as respostas das perguntas:

1. O que é uma fração?
2. O que é denominador de uma fração?
3. O que é numerador de uma fração?

Nesse momento, ela passou nos grupos procurando esclarecer as dúvidas. A seguir, apresentamos uma conversa com os alunos em grupos:

P: E aí?

A: Denominador é o que divide tudo e o numerador é o que você usa, o que você come, o q você pega...

P: Muito bem. No caso do bolo, por exemplo, eu poderia cortar em quantos eu queria não é? E aí o número de partes em que eu cortar é o número de cima ou o de baixo?

A: De baixo.

P: Por quê?

A: Porque é ele que dividiu!

P: Então, denominador o que significa?

A: Que dá o nome.

P: Por que a fração chama quinto nesse caso?

A: Porque eu cortei em cinco.

P: E se tivesse cortado em 3?

A: Três quintos.

P: Por quê?

A: Não. Terços. Três terços.

P: Muito bem. Se eu tivesse cortado em dois?

A: Dois.

P: Se eu cortar em seis?

A: Sextos!!

P: Muito bem! E o número de cima o que significa?

A: O que a gente usa, come, pega ..

P: O numerador!!

A: O número q eu peguei.

P: Eu cortei o bolo do problema em cinco então são quintos e peguei três, então são quantos?

A: Três quintos.

11 **Busca por um consenso**

Ao buscar um consenso sobre o que foi aprendido com o problema, o professor pode levantar os seguintes questionamentos:

Como posso chamar cada pedaço com relação ao bolo todo?

Como eu leio o número que representa esse pedaço?

Qual a relação desse número que representa cada pedaço com a quantidade de bolo que Marina comeu?

Vocês sabem o que significa a palavra fração?

Na fração o número de baixo é o denominador. Vocês sabem o que significa essa palavra?

E o número de cima da fração é o numerador. Vocês sabem o que significa essa palavra?

12 Formalização do conteúdo

Para formalizar os conceitos que foram aprendidos com esse problema a professora apresentou o conceito de fração e escreveu na lousa:

Fração vem da palavra fracionar, que significa partir, quebrar, é uma relação entre a parte e o todo. E é um número! O número que chamamos de fração é formado por uma barrinha com um número inteiro em cima e um número inteiro em baixo da barrinha. Essa barra é um limitador entre o numerador (o número de cima da fração) e o denominador (o número de baixo da fração).

O denominador da fração, como sugere a palavra, é o número que denomina, ou seja, que dá nome, à fração. Isso significa que olhando em quantas partes o todo foi dividido, temos o nome de cada parte do todo.

O numerador da fração é o número que mostra a quantidade de partes tomadas ao se dividir o todo pelo denominador. Ele numera quantas partes "nomeadas" pelo denominador são consideradas.

- **Comentários**

Percebemos, a partir dos diálogos apresentados entre a professora e os alunos, que foi preciso trabalhar com os alunos o conceito de divisão em partes iguais para que compreendessem a relação parte-todo, conceito muito importante para compreender a personalidade fração.

A identificação do que o problema exigia não foi tão direta quanto esperado inicialmente pela professora. Muitos alunos começaram a fazer operações de adição ou subtração com os algarismos 3 e 5 que apareceram no problema sem refletir o que o enunciado exigia que fosse feito para resolver o problema. A professora induziu os alunos a se questionarem sobre as palavras do enunciado, principalmente o significado de repartir. A partir disso, começaram a pensar no conceito de divisão em partes iguais. Perceberam, então, que deve haver um número para representar a quantidade de bolo que Marina comeu. É interessante ressaltar que os alunos já tinham trabalhado com frações, porém é perceptível que ainda não tinham claro o conceito. Acreditamos que os alunos associam a palavra “comeu” do enunciado com a ideia de subtração.

Foram poucos os alunos que começaram a fazer desenhos que representassem a situação do problema e até mesmo a fração $\frac{3}{5}$. A professora fez essa sugestão a alguns grupos de alunos e cada grupo realizou um desenho em formato circular ou retangular, de acordo com sua preferência. Nota-se que os alunos não fizeram os desenhos com as partes de igual tamanho, embora mostrassem entender que a divisão era em partes iguais. Percebemos que, com os desenhos feitos, era mais fácil notar uma relação entre a parte e o todo do bolo. Assim, puderam reconhecer a parte de uma quantidade discreta.

A compreensão e a identificação dos conceitos numerador e denominador foram possíveis a partir da discussão com exemplos de frações que não seriam obtidas pelo problema como metades, terços e quartos. O uso de frações unitárias, principalmente $\frac{1}{2}$, foi frequente durante as explicações da professora pois é a primeira fração que os alunos aprendem na escola.

7.3.5.5 O quinto encontro: O segundo problema da fração

8 Apresentação do Problema

Do salário do meu pai, ele gastou 2/5 com aluguel. Do que sobrou gastou metade com alimentação. Da segunda sobra, colocou 1/3 na poupança. Restaram-lhe R$ 300,00. Qual é o valor do salário de meu pai?

9 Observar e incentivar

Após os alunos lerem o problema, a professora perguntou:

P: Todo mundo entendeu o que está dizendo o enunciado?

A: Sim.

P: Quem me explica o que está acontecendo?

A: Ela está falando o quanto ele gastou por meio de frações e ela quer que a gente descubra quanto que o pai dela ganha.

P: Então o pai dela recebe um salário e gasta primeiro com o que?

A: Com o aluguel?

P: Quanto que ele gasta com aluguel?

A: Dois quintos.

P: O que isso significa?

A: Gastar metade.

A: Ele divide em cinco partes e pega duas delas.

P: Todos concordam?

A: Sim.

Apresentamos alguns diálogos que ocorreram enquanto a professora questionava os alunos nos grupos:

P: Esses dois terços são dois terços do que?

A: Do que restou.

P: Será? Mas do que restou quando?

A: Quando ele colocou na poupança.

P: Tá. Então sobrou dois terços que é 300 reais?

A: Isso. Aí um terço é 150.

Em outro grupo:

P: Do que está falando o problema?

A: Do salário do meu pai, ele gastou dois quintos com o aluguel.

P: O que significa dois quintos de alguma coisa?

A: Dois quintos? Que ele gastou duas partes de cinco. Como se tivesse cortado em cinco partes e ele comeu duas.

P: Muito bem! E o que é essa coisa que ele cortou?

A: O aluguel.

P: Por que? Vamos ler de novo? Está certo. Ele gastou com o aluguel mas o que ele dividiu pra gastar com o aluguel?

A: O dinheiro.

P: Ele dividiu o dinheiro! Então ele pegou o dinheiro, dividiu em cinco e pegou quanto?

A: Ele pegou duas partes.

P: Muito bem!! Agora, me conta por que você está fazendo continha de mais?

A: Porque ele está perguntando só o valor do salário

P: Tá. E como você vai fazer continha de mais?

A: Com os números que estão aqui.

P: Vamos pensar se está certo. Vamos fazer um desenho pra ver se ajuda?!

A: Esse aqui é um terço, é meio que a metade.

P: Um terço é metade?

A: Um terço, eu não sei explicar.

P: Esses 300 você pegou aqui mas um terço e metade é a mesma coisa?

A: Um terço é um pedaço de três partes.

P: Muito bem. Então não é metade que vou pegar, é quanto?

A: Uma parte de três.

P: Certo. Eu tinha um tanto, dividi em três e peguei quantos?

A: Uma.

P: E sobrou 300 reais. O que esses 300 reais têm a ver com o um terço?

A: Seria a metade de dois terços, 150.

P: Ok.

A: Aí aqui tinha pensado em metade, ai juntando o 150 com 300 dá 450, já que aqui é metade dá 450 mais 450 que dá 900. E essa parte eu me perdi.

P: Muito bem! Vamos pensar. É o mesmo raciocínio que você teve até aqui. Eu tinha um tanto e dividi em quanto que deu esses 900?

A: Dois quintos.

P: E o que significa dois quintos?

A: Duas partes de cinco.

P: E se eu pegar duas partes de cinco quanto sobra?

A: Três partes que é 900.

P: Então vamos ver como eu faço para saber quanto vale uma parte?

A: Eu multiplico por 5 depois.

P: E para saber uma parte?

A: Divido por 5.

P: Por que? O que o 900 representa?

A: Três quintos.

P: Como faço pra saber o valor de um quinto?

A: Divide por três.

A: 300.

P: Muito bem. É uma parte de 5 não é? Como faço, agora, para saber o total, as cinco partes?

A: Agora multiplica tudo por 5

P: Muito bem!

As discussões que ocorreram em outro grupo:

A: Aqui, eu fiz de trás pra frente.

P: Pode ser! Me conta!

A: Aqui se eu fosse dividir seria dividido pelo de baixo aí eu fiz o contrário e coloquei multiplicado pelo de baixo.

P: Tá. Tinham 300 reais né. Ai você multiplicou por 3, por quê?

A: Porque aqui era um terço e eu fiz a operação inversa.

P: Tá, tudo bem! Só que, por exemplo, a hora que multiplico por três eu tô querendo dizer que estou pegando três pedaços não é?

A: É.

P: Mas é verdade que aqui eu tenho três pedaços? Que o 300 é um pedaço e vai virar 3?

A: Não.

P: Quantos pedaços é o 300?

A: Um.

P: Mas aí você concorda que isso (o 300) é uma parte de 3?

A: Sim, porque aí eu vou dividir três pedaços e ficar com três, multiplico por três.

P: Mas esses 300 são o mesmo da poupança? Foram trezentos reais que ele colocou na poupança?

A: Não!

P: O que você acha de escrever o que você pensou?!

A: Escrever é mais difícil do que falar!

A: Aqui eu fiz, deu 450 porque já tinha ido um terço na poupança daí sobraram dois terços. Desses dois terços era 150, ou seja, ele colocou 150 na poupança. Desse jeito, tinha 450 aqui na segunda sobra. De 450 foi pra 900 pq era a metade com alimentação. E aqui como sobrou três quintos que era metade da alimentação, eu fiz 900 vezes 3 que deu 2700.

P: Tá. Entendi. Muito bem!! Só que desses 900 quanto você disse que vale?

A: Três quintos do total.

P: Isso. Três quintos do total, então eu preciso descobrir o valor de um quinto seguindo o seu raciocínio, para eu saber quanto tem no total. Aqui você multiplicou por 5 e dividiu por 2, então você tá multiplicando pelo inverso, não por quanto ele é. Esse 900 é três quintos, certo?

A: Certo. Eu já descobri que 450 são esses dois juntos. Aí eu divido por dois pra saber a metade?

P: Por que divido por dois?

A: Porque tá que é a metade.

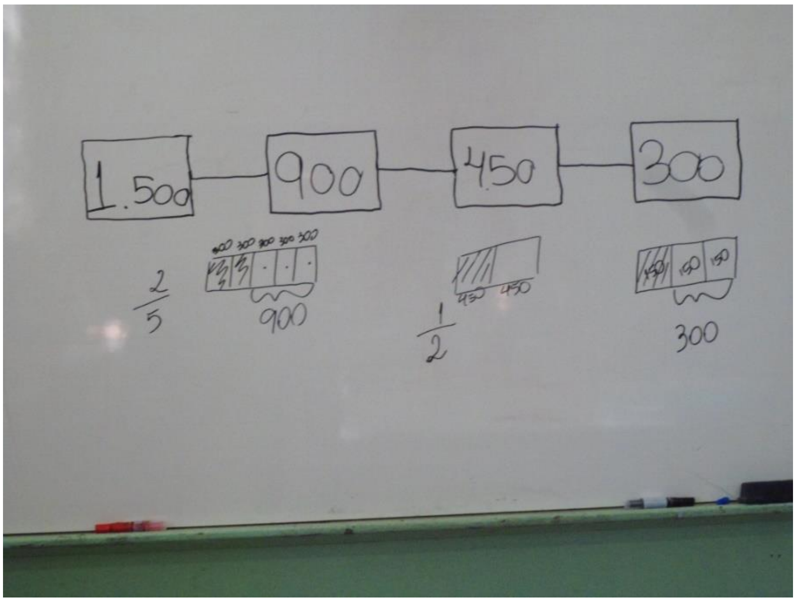
P: Tá. Vamos pensar! Eu tinha um tanto, peguei a metade e deu 450. Como faço par saber quanto eu tinha?

A: Eu multiplico por 2.

10 Registro das resoluções na lousa

Dois grupos decidiram e se prontificaram a apresentar suas resoluções na lousa. Um dos registros feitos na lousa pode ser visto na Figura 16.

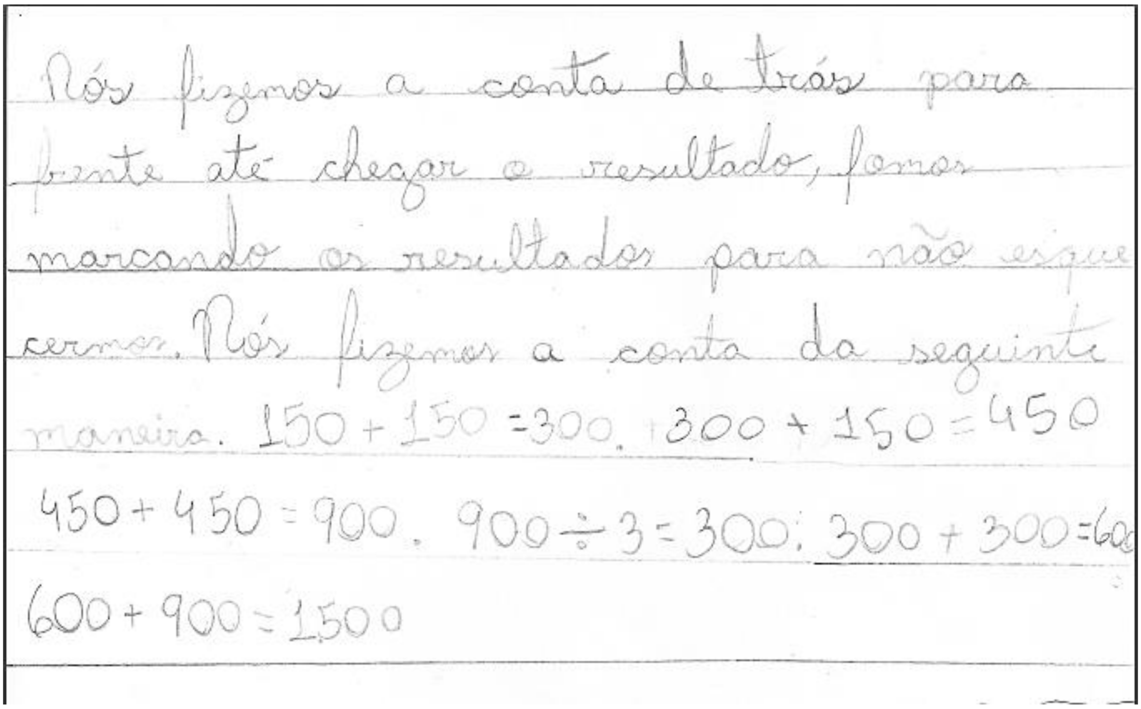
Figura 16: Foto da resolução do problema do salário na lousa



Fonte: Produção dos dados da pesquisa

O outro grupo de alunos preferiu ler o texto que fez sobre a resolução do problema:

Figura 17: Imagem do texto produzido por um grupo para a resolução do problema do salário


Nós fizemos a conta de trás para frente até chegar o resultado, fomos marcando os resultados para não esquecermos. Nós fizemos a conta da seguinte maneira. 150 + 150 = 300. 300 + 150 = 450
450 + 450 = 900. 900 ÷ 3 = 300; 300 + 300 = 60
600 + 900 = 1500

Fonte: Produção dos dados da pesquisa

11 Plenária

Depois de os dois grupos apresentarem suas resoluções sobre o problema, um deles apresentou o texto da Figura 17 produzido pelos integrantes. Apresentaremos uma discussão que ocorreu durante as apresentações.

A: No início, ele estava com 300 reais, sobrou 300 reais no caso, que era dois terços do que ele tinha colocado na poupança. No caso, ele tinha colocado 150, então 150 mais 300, 450. Ele tinha colocado metade do que sobrou no início com comida e essa daqui é a metade do que ele gastou com comida então aqui é 900 porque o contrário da metade é o dobro. Daí ele tinha gastado dois quintos no aluguel e os três quintos ele tinha gastado com comida. Daí ele dividiu o salário em cinco partes.

P: E pegou quantas?

A: Duas. Para pagar o aluguel. Daí sobrou três quartos.

P: Certo. E qual o salário inicial?

A: 1500.

P: Muito bem. Muita gente chegou nesse resultado, né?

P: Todo mundo entendeu o que esse grupo fez?

A: Sim.

P: Quem não entendeu?

A: Eu!

P: Então vamos lá! O pai tem um salário e foi gastando uma quantia com alimentação, com aluguel e com poupança. E sobrou quanto?

A: Trezentos reais.

P: Só isso que eu sei. Antes de ele sobrar os 300 reais o que ele fez? Ele gastou quanto na poupança?

A: 150.

P: Mas em fração, quanto ele colocou?

A: Um terço

P: Muito bem. Um terço do que tinha, né? Então, vamos pensar: o que é um terço? Eu pego o inteiro e divido em?

A: Três.

P: Três partes iguais e pego?

A: Uma.

P: Então se ele colocou uma parte na poupança, quantas sobraram?

A: Duas.

A: Os trezentos reais.

P: Os 300 reais. Como faço para saber o valor de cada parte? As duas partes não são 300 reais?

A: Sim.

P: Como faço para saber uma parte?

A: 150.

P: Então aqui é 150, aqui é 150, aqui é 150 (me referindo a cada terço). Que dá quanto somando tudo?

A: 450.

P: O que são esses 450?

A: O que ele tinha antes da poupança.

P: E antes disso? O que aconteceu? Lê aí.

A: Gastou metade com alimentação.

P: O que é metade?

A: Dividir por dois.

P: Todo mundo concorda?

A: Sim.

P: E que fração é metade?

A: Um meio.

P: Como eu escrevo?

A: Um sobre cinco.

P: Um sobre?

A: Dois!!

P: Ah lembra que a gente viu que a barra e a vírgula são diferentes. Então meio é o que?

A: Pego o inteiro e divido em dois.

P: Se ele gastou metade que é 450, como faço para saber tudo?

A: Faz 450 vezes dois.

P: E dá quanto?

A: 900.

P: Ou seja, antes de ele gastar com alimentação ele tinha 900 reais. Agora vamos ver o começo do problema. Ele tinha um salário inteiro. E aí?

A: Gastou com o aluguel.

P: Quanto ele gastou com aluguel?

A: Dois quintos.

P: E sobrou quanto?

A: Sobrou 900 reais.

P: E o que são dois quintos?

A: São duas partes de cinco.

P: Em quantas partes eu divido o todo?

A: Em cinco.

P: E quantas que eu pego?

A: Duas.

P: E o que sobrou é?

A: Os 900.

P: Como eu faço para descobrir cada parte dessa (me referindo a cada quinto)?

A: Faz 900 dividido por três?

P: Por que por três?

A: Para saber quanto custa um quinto.

P: Muito bem!! Para saber quanto vale um quinto. Eu tenho o valor de três quintos. Para saber o valor de cada quinto, eu divido por?

A: 3.

P: Quanto é 900 dividido por 3?

A: 300.

P: Então tenho 300, 300, 300, 300 e 300. Quanto tenho no total?

A: 1500 reais.

P: E o que é isso?

A: É o salário inicial.

P: Muito bem!!

- **Comentários**

A principal dificuldade enfrentada pelos alunos foi começar a resolver o problema. Muitos não conseguiram expressar um modo de resolver, embora a maioria dos alunos compreendesse o que o problema pedia: que se descobrisse o salário inicial. Percebemos que, ao ler cuidadosamente o enunciado desse problema com a ajuda da professora, os alunos puderam perceber que o todo ao qual cada fração do problema se refere ia se modificando de acordo com a ação descrita, ou seja, a partir dos gastos que o pai teve, o valor do salário que sobrava ia se alterando.

Sabendo qual o todo a que se referia a fração e que parte desse todo ela representa, os alunos não tiveram dificuldade em calcular o valor de uma parte. Logo entenderam que, se temos o valor c (em reais) correspondente a $\frac{a}{b}$, basta realizarmos as operações $(c \div a) \times b = T$, para obtermos o valor do todo T. Enquanto realizavam essas operações, os alunos se referiam a elas como “operações inversas”. Para eles, essas operações desfaziam a operação feita pela fração (entendida, grosseiramente, por “dividir um todo pelo número que é o denominador e obter uma parte e multiplicar a parte pelo número que é o numerador”).

Porém, a última etapa do problema, em que se obtém o valor do salário total, foi realizada com dificuldade, pois os alunos não compreenderam que a fração $\frac{2}{5}$ era a parte do salário gasta com aluguel e $\frac{3}{5}$ é a parte que corresponde ao valor de R$ 900,00. Acreditamos que essa dificuldade seja reflexo da falta de familiaridade em trabalhar com frações que não são unitárias. Embora tenham compreendido as operações que eles chamaram de inversas, não perceberam tão rapidamente que, sabendo o valor de R$ 900,00 e querendo descobrir o salário, bastava dividir 900 reais em 3 partes iguais e multiplicar o resultado por 5.

De modo geral, esse problema evidenciou que os alunos não costumam usar a unidade de medida quando se referem a uma quantidade. Por exemplo, eles falam 300 e não 300 reais, dizem apenas um ou uma e não um terço ou uma parte. Percebe-se que a professora também não utiliza as unidades em todas as suas falas e isso pode influenciar os alunos a acharem que não é necessário falar as unidades.

7.3.5.6 O sexto encontro: O terceiro problema da fração

8 Apresentação do problema

Arnaldo tinha 75 bolinhas de gude. Deu a seu amigo Rodrigo 1/3 delas; do que sobrou deu 2/5 a Carlos e a Daniel 1/6 do restante. Qual o número de bolinhas que coube a cada um deles no final dessa partilha?

9 Observar e incentivar

Após a leitura do enunciado, a professora esclareceu algumas dúvidas:

P: Vamos ler o enunciado: Arnaldo tinha 75 bolinhas de gude. Deu a seu amigo Rodrigo um terço delas. O que vem depois?

A: Do que sobrou.

P: Do que sobrou deu dois quintos. Então são dois quintos do que *sobrou ...*

A: E aí você vai calculando de acordo com o que sobrou.

A: Porque ele diz uma quantidade que deve ser dada para cada um.

P: Muito bem. Temos que usar as quantidades que os problemas nos fornecem de acordo com cada pessoa.

Durante a resolução de problemas, a professora fez alguns questionamentos aos grupos enquanto ela passeava pela sala de aula:

P: Tinham 75 bolinhas. Deu um terço a seu amigo Rodrigo. O que quer dizer isso?

A: Que eu tenho que dividir.

P: E quanto que deu?

A: 25.

P: O que quer dizer esse 25?

A: Que sobrou 25 bolinhas.

P: Será que sobrou? Vamos ler: deu a seu amigo um terço delas.

A: Então ele deu a seu amigo 25 bolinhas.

P: Muito bem!!

A: Eu posso escrever como eu resolvi e depois te entregar?

P: Claro que sim!

A: Porque pra mim é mais fácil.

Em outro grupo:

P: O que você fez com as 75 bolinhas?

A: Eu fui dividindo as contas.

P: Tinha 75 e você dividiu por quanto?

A: Por três.

P: Por quê?

A: Porque aqui era três.

P: E depois?

A: Por 5.

P: O que sobrou?

A: É. Porque eu dividi por três e o resultado aqui eu fiz vezes esse e vezes esse. Aí deu 50 e eu dividi por 5, por 10. Daí deu o que sobrou.

P: E os dois quintos? Está certo dividir por cinco, mas ele quer só um quinto? O que faltou fazer aqui?

A: Tem que ser 20.

P: Por que?

A: Eu que eu coloquei já os dois juntos. Eu fiz a conta uma vez e contei duas.

P: E o Daniel recebeu quanto?

A: Mas ele não recebeu aqui junto?

Em outro grupo, aconteceu o seguinte diálogo:

P: 75 dividido por 3 por quê?

A: Porque aparece um três aqui.

P: Está certo e depois você dividiu por quanto?

A: Aí eu dividi por cinco.

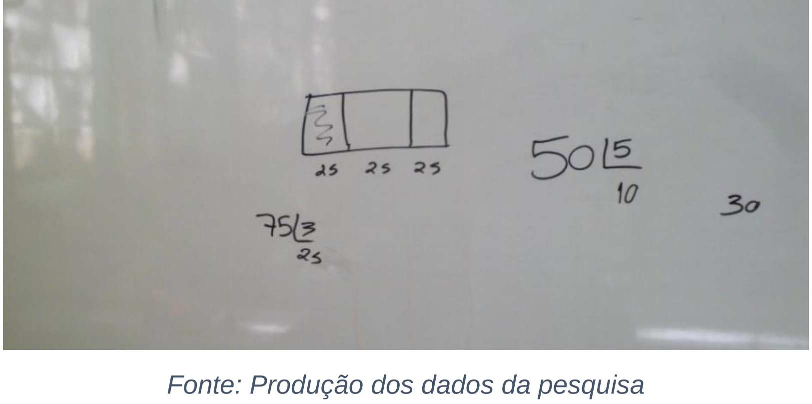
P: Mas na hora que ele dividiu a bolinha, a quantidade não mudou?

A: Ah verdade!!

10 Registro das resoluções na lousa

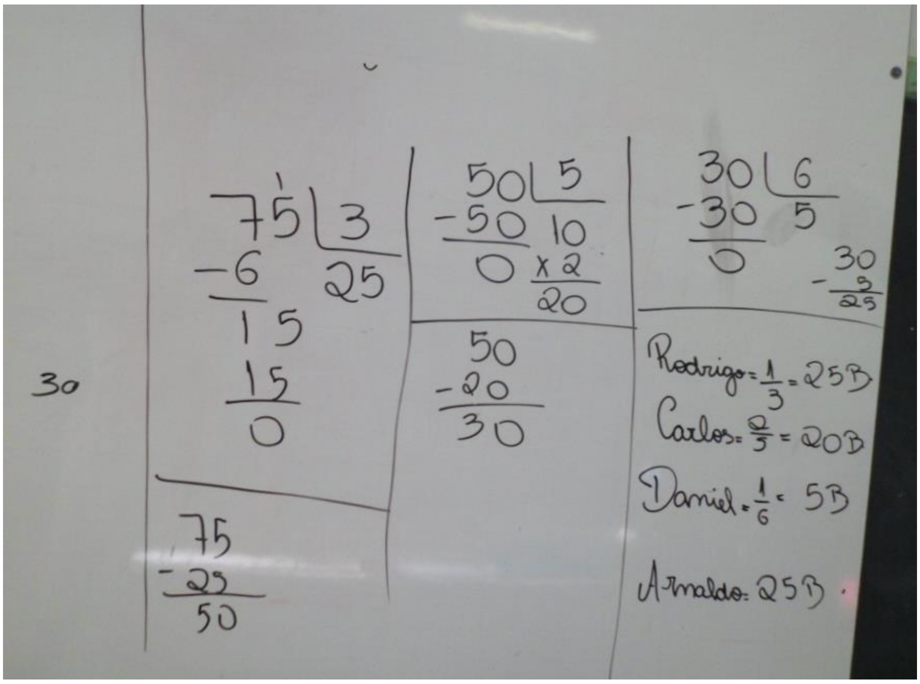
Dois grupos se propuseram a resolver o problema na lousa. A seguir, vemos os registros da resolução de cada um.

Figura 18: Registro da resolução de um grupo do terceiro problema da fração na lousa



Fonte: Produção dos dados da pesquisa

Figura 19: Registro da resolução de outro grupo do terceiro problema da fração na lousa



Fonte: Produção dos dados da pesquisa

11 Plenária

Para resolver esse problema, um grupo de alunos começou a explicar como foi feita sua resolução:

A: Primeiro a gente vai começar, Arnaldo tinha 75 bolinhas e deu a seu amigo um terço. Então, para gente saber a gente tem que dividir em três. Então, para saber cada parte a gente tem que dividir os 75 por três, que é o denominador da fração. E deu 25.

P: Qual é o denominador dessa fração?

A: O 3.

A: Então 75 dividido por 3 (fazendo as continhas na lousa) então vai ser 25 em cada parte. Ele deu um terço, então ele deu essa parte (mostrando um terço na ilustração) e ficou com 50 bolinhas de gude.

P: Então, quanto que ele deu para o Rodrigo?

A: 25.

P: Tá. Todos concordam?

A: Sim.

A: E desses 50 ele deu dois quintos a Carlos e a Daniel. Então a gente pega os 50 para ver o que o Arnaldo tem que dar e divide por 5 porque é o denominador da fração. E 50 dividido por 5 vai dar 10. Daí desses dez, já que o numerador é dois a gente vai ter que fazer dez vezes dois e vai dar 20. Daí ele deu 10 pra Carlos e 10 pra Daniel e sobrou 30. Desses 30, um sexto é o que sobrou e sobrou 30. Um sexto a gente já sabe que é 30 o que sobrou. Então, Rodrigo ficou com 25, Carlos e Daniel ficou com 10 e Arnaldo ficou 30.

P: Daniel e o Carlos, cada um ficou com 10?

A: Sim.

P: Os dois quintos foi um para cada um?

A: Sim.

P: Alguém fez diferente?

A seguir vemos a resolução de outro grupo:

A: Eu fiz assim, eu peguei do 75 de Arnaldo e peguei um terço igual ao deles.

P: Essa parte todo mundo fez igual?

A: Sim.

A: Deu 25 bolinhas. Aí esses 25 ficou pro Rodrigo. Depois, do que sobrou que foi o 50, ele deu 2 quintos para o Carlos. Aí eu fiz o 5 dividido por 50 e multiplicado por 2.

P: Você fez o 50 dividido pelo 5 né?

A 24: É. Daí deu 20 e do que sobrou ele deu um sexto para o Daniel. Aí eu fiz o 30 dividido por 6 que deu 5. E aí o que sobrou ficou para o Arnaldo.

P: Todo mundo entendeu como ela fez?

A: Sim.

P: Tem uma diferença nas duas respostas. Quem percebe a diferença?

A: É que assim, ela fez de um jeito a conta e a outra de outro. A 2 fez o Carlos e o Daniel e fez junto e não separado como a outra.

P: Isso! Mas vamos ver como está escrito? "Do que sobrou deu 2 quintos a Carlos" né "e a Daniel um sexto do restante". Ou seja, do jeitinho que está escrito aqui, A 24 fez certinho as quantidades né. Deu um sexto para o Daniel e dois quintos para o Carlos. Então, a gente tem que se atentar a como está escrito *o enunciado. Os dois quintos não foram para os dois ao mesmo tempo, não é? Dois quintos para o Carlos e um sexto para o Daniel.*

- **Comentários**

Percebemos, a partir dos trechos dos diálogos apresentados anteriormente que os alunos tiveram dificuldade em compreender o que o problema pedia, bem como reconhecer o todo que variava no desenrolar do problema e qual parte caberia a cada um dos meninos do problema. Tiveram dificuldade com a leitura do enunciado, de forma que não reconheciam as relações entre as frações dadas e as sobras depois de cada distribuição de bolinhas.

Nota-se que, em geral, os alunos conseguiram resolver o problema a partir das questões levantadas pela professora enquanto ela passava pela sala, observando e incentivando. Eles reconheceram o todo e que cada fração se relacionava com a quantidade que era sobra da distribuição de bolinhas. Assim, puderam reconhecer a parte de uma quantidade discreta.

Nos diálogos, pudemos notar que a professora insistiu em usar as unidades de medidas de bolinhas, enfatizando que não faz sentido falar apenas da quantidade.

7.3.5.7 O sétimo encontro: O quarto problema da fração

8 Apresentação do Problema

Problema Arnaldo tinha 75 bolinhas de gude. Deu a seu amigo Rodrigo 1/3 delas e deu 2/5 delas a Carlos. Qual o número de bolinhas que coube a cada um deles no final dessa partilha?

9 Observar e incentivar

A professora buscou ler o enunciado do problema com todos os alunos. Em seguida, fez alguns questionamentos enquanto os grupos resolviam o problema. Em um dos grupos, ocorreu o seguinte diálogo:

P: Esses 50 aqui de onde saiu?

A: É porque assim, Arnaldo tinha 75 bolinhas de gude e deu a seu amigo um terço e três terços são 75, dois terços são 50 e ele deu um terço. Então ele deu 25 e sobrou 50.

P: E você dividiu 50 por 5?

A: Sim.

P: Um terço é de quanto?

A: É 25.

P: Mas é um terço do que?

A: Das bolinhas de gude.

P: De quais?

A: Das 75.

P: E esses dois quintos?

A: Do que sobrou.

P: Não é de tudo também?

A: Delas!!!!!!

P: Entendeu? É dois quintos do total que é 75 também.

Em outro grupo:

P: Vamos ver: por que o Carlos ficou com 20?

A: Tinha sobrado 50 ai eu fiz assim o dois quintos peguei o 50 e dividi por 5 que deu 10 só que como são dois, multiplicou por 2 e ficou 20.

P: Só que vamos ver a palavrinha que está aqui: 1/3 delas. O que é um terço delas?

A: Um terço das bolinhas.

P: Muito bem! E esses dois quintos delas?

A: Das bolinhas.

P: Quais bolinhas? Quantas são?

A: Das 75.

P: Muito bem. Então eu devo calcular um terço disso e dois quintos disso também.

A: Eu fiz isso.

P: Mas a hora que você faz a conta com o 50 você não está usando o que sobrou?

A: Sim, mas aqui nos dois quintos eu subtrai e sobrou 50.

P: Está certinho! Mas vamos ver o outro problema. Olha só ... o que tem nesse problema: "do que sobrou deu dois quintos". E nesse tem "do que sobrou..."?

A: Não.

P: Entendeu a diferença?

A: Então são as 25.

P: Quanto eu tinha no total?

A: Tinha 75.

P: A hora que você fez um terço delas você fez de quanto?

A: De 75.

P: Então se eu fizer dois quintos delas eu vou fazer dois quintos de?

A: De 75.

A professora também questionou outros grupos:

P: Me explica por que deu 13?

A: É porque eu transformei em um número normal.

P: Ah tá. Mas eu posso fazer isso?

A: Eu quis transformar em um número.

P: Como assim? Me dá outro exemplo.

A: Tipo o 75.

P: Mas o um terço também é um número.

A: É.

P: E o que significa dois terços. Você se lembra?

A: Um de três?

P: Então que continha que eu tenho que fazer para obter um terço de 75?

A: Eu vou dividir 75.

P: 75 dividido em?

A: 3

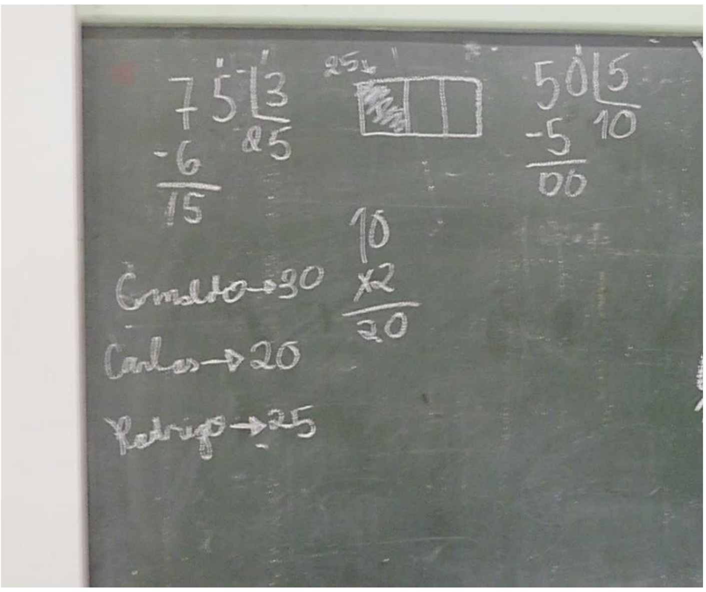
P: Muito bem!!

A: É. O número de baixo é pelo que eu divido e o um só serve para ver.

10 Registro das resoluções na lousa

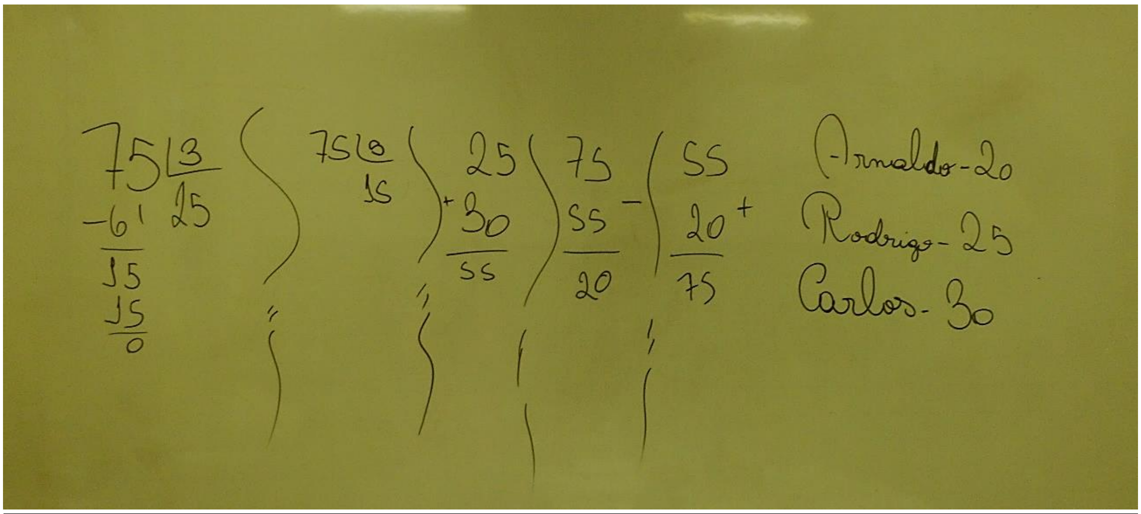
A seguir apresentamos algumas fotos das resoluções que os alunos fizeram na lousa.

Figura 20: Registro da resolução do quarto problema da fração feita por um grupo de alunos



Fonte: Produção dos dados da pesquisa

Figura 21: Registro da resolução do problema feita por um grupo de alunos



Fonte: Produção dos dados da pesquisa

11 Plenária

Dois grupos resolveram o problema na lousa. O trecho a seguir é referente ao momento da plenária do problema, em que os alunos discutem as soluções do problema.

P: Vamos lá! Leia e explique como vocês fizeram.

A: Arnaldo tinha 75 bolinhas de gude. Deu a seu amigo Rodrigo um terço delas e deu a seu amigo Daniel dois quintos delas. Qual o número de bolinhas coube a cada um no fim da partilha? É, eu vou fazer as contas ...

P: Todo mundo entendeu o que tem que fazer no problema? O que era para fazer?

A: Quantas bolinhas cada um iria ganhar.

A: Primeiro ela pegou as 75 bolinhas, pegou um terço e então dividiu por 3.

P: Então quando eu quero ter um terço, eu divido por três?

A: Sim.

P: Por que eu faço isso?

A: Por que o número de baixo é o que eu divido.

P: Agora, leiam para mim uma coisa: está escrito um terço do quê?

A: Um terço delas.

P: O que é um terço delas?

A: Um terço das bolinhas.

P: Muito bem, então esses 25 foi para quem?

A: Para o Rodrigo.

A: Depois ela fez 75 dividido por 5 que deu 15. Depois ela fez 25 mais 15 para chegar no 75.

P: Certo! Por que ele fez 75 dividido por 5? Quem sabe?

A: Porque não é do que sobrou, é desde o início.

P: Muito bem!! Está escrito: deu dois quintos delas à Daniel. Qual a diferença desse problema para o anterior?

A: O outro era do que sobrou e estava escrito.

P: Isso mesmo. Então temos que prestar atenção nas palavras. E por que ela dividiu por 5?

A: Porque eram dois quintos.

A: E divide pelo de baixo.

P: E quantas partes temos que pegar?

A: Dois.

P: Como eu faço para pegar duas partes se eu dividi 75 por 5 e deu 15.

A: Faz vezes 2.

12 Comentários

A resolução correta desse problema só foi possível depois que os alunos perceberam que ele era diferente do problema anterior. Para isso, foi preciso que a professora chamasse a atenção para o enunciado do problema, principalmente para o pronome "delas", que faz referência ao total de 75 bolinhas de gude.

7.3.5.8 O oitavo encontro: Problema do quociente

8 Apresentação do problema

Três pizzas devem ser divididas igualmente entre cinco pessoas. Quanto de pizza cada pessoa comerá?

9 Observar e incentivar

Vejamos alguns trechos dos diálogos entre a professora e os alunos com alguns questionamentos dela.

Em um dos grupos, ocorreu o seguinte diálogo:

A: Eu estou pensando em divisão, mas acho que deu errado porque deu número com vírgula. 1,8. Aí eu não estou conseguindo fazer.

P: Está certo. Eu tenho 3 pizzas. E eu quero saber o que do problema?

A: tem que dividir entre 5 pessoas em partes iguais. E está perguntando quantos pedaços de pizza cada pessoa vai ganhar

P: Quantos pedaços? É isso que está escrito?

A: Quanto de pizza. É.

P: Você dividiu em 5 pedaços para ver?

A: Não porque não dá pra dividir certinho.

A: Não tem como dividir em pedaços iguais.

A: É difícil.

P: Vamos pensar assim: você vai chamar mais quatro pessoas para comer pizza na sua casa. Como seria mais fácil cortar a pizza?

A: Em cinco pedaços.

P: Muito bem! E então?

A: Vai dar um quinto.

P: Muito bem! Vocês disseram que cada pessoa vai ganhar um quinto de cada pizza porque dividimos em cinco. Agora uma pergunta: olhem como a pergunta está escrita "quanto de pizza cada pessoa comerá?". Então o meu todo não é apenas uma pizza.

A: Três ... esqueci como se fala o número de baixo?

P: Nessa pizza quanto ela vai comer?

A: Um quinto.

P: E nessa?

A: Um.

P: Um o quê?

A: Um quinto.

P: E nessa?

A: Um quinto.

P: E somando tudo dá quanto?

A: Três quintos.

O diálogo que ocorreu em outro grupo:

P: O que eu quero saber do problema?

A: O tanto de pizza que cada pessoa comeu.

P: E o que você vai fazer?

A: Eu acho que a gente pega três pizzas e divide entre 5

P: Muito bem! E como fazer isso?

A: Pode fazer em forma de fração?

P: Como?

A: Uma fração que é uma divisão.

P: E como eu escrevo, então?

A: Três dividido por cinco?

P: Isso mesmo!

Um grupo de alunos tentou explicar como resolveu o problema:

A: Primeiro eu dividi, eram três pizzas pra cinco. Aí eu dividi, coloquei zero e vírgula, e se a pizza tem oito pedaços é seis de oito. E daí são seis pedaços para cada um.

P: Seis pedaços para cada um?

A: É.

P: Mas aí você não tá pensando numa pizza só?

A: É ..., mas espera aí. Tenho que pensar em três pizzas. São 8, 16, 24.

Em outro grupo:

A: Cada pizza tem 5 pedaços porque são cinco pessoas aí a gente fez 5 vezes 3, dá 15.

P: E o que são esses 15?

A: São quinze pedaços ao todo. Daí como são 5 pessoas eu divido em 5 e dá 3 e cada pessoa vai comer 5 pedaços.

P: Muito bem! Agora qual o número que representa tudo isso? O 3?

A: Três quintos!

P: Muito bem!! Lembrando que vocês estão pensando em pedaços né!! Mas o número que representa o tanto de pizza que cada pessoa comeu é três quintos. Há uma pizza só?

A: Não. São três.

P: Então é três quintos de uma pizza ou de todas juntas?

A: Do total.

Um grupo de alunos começou o seguinte diálogo:

A: Eu pensei assim, eu dividi cinco pessoas em três pedaços de pizza.

P: Por quê?

A: São três pizzas.

P: Mas cinco pessoas por três pizzas por quê?

A: Por que acho que não fez sentido três dividido por cinco.

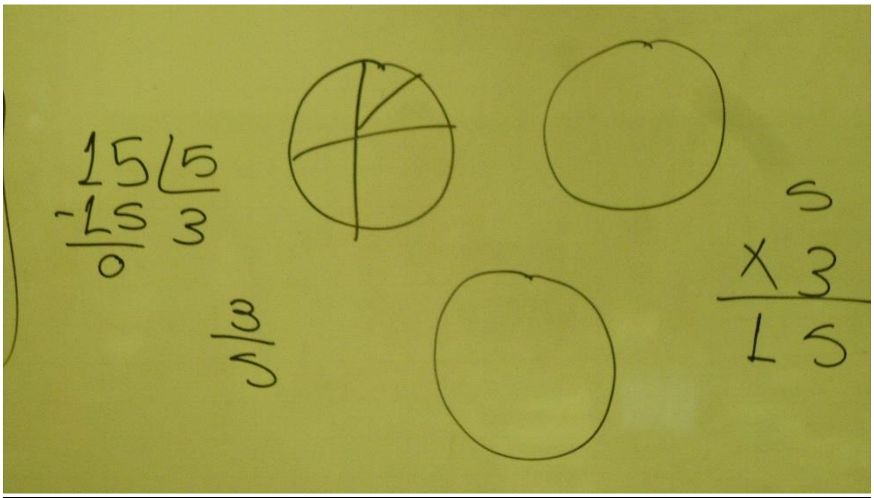
P: Mas olha, o que significa cinco pessoas dividido por três pizzas? Você vai dar cinco pessoas para três pizzas? Faz sentido?

A: Não.

- **Registro das resoluções na lousa**

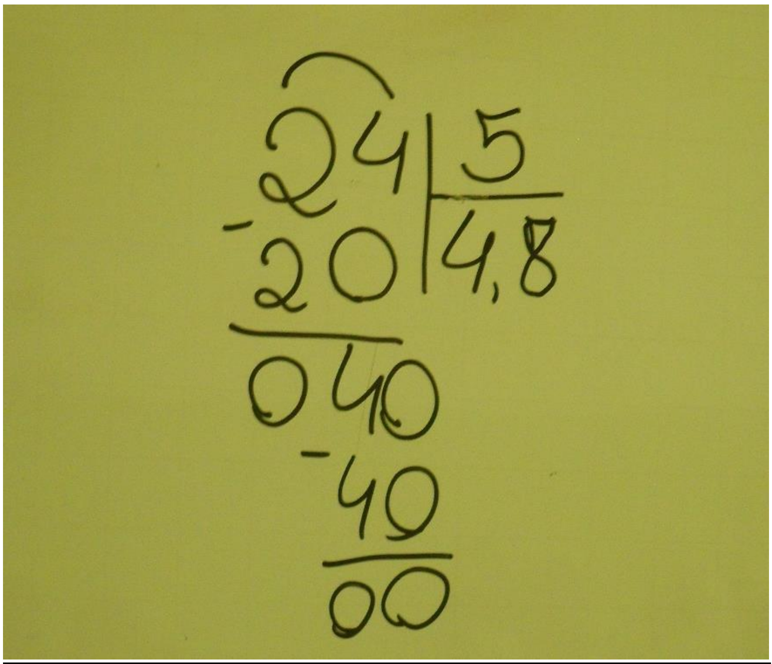
Dois grupos resolveram o problema na lousa.

Figura 22: Registro da resolução do problema do quociente feita por um grupo



Fonte: Produção dos dados da pesquisa

Figura 23: Registro da resolução do problema do quociente feita por outro grupo



Fonte: Produção dos dados da pesquisa

10 Plenária

O trecho a seguir é referente à plenária que ocorreu após a resolução do problema pelos dois grupos na lousa.

A: Três pizzas devem ser divididas igualmente entre 5 pessoas. Eu comecei assim: eu desenhei três pizzas. E cada pizza terá 5 pedaços porque será dividida em 5 pessoas. Mas como são três pizzas e cada pizza tem 5 pedaços eu fiz 3 vezes que dá 15. Aí eu quis saber quantos pedaços cada pessoa iria comer ai eu fiz 15 dividido por 5 porque são 5 pessoas. Ou seja, cada pessoa comerá 3 pedaços. E a fração que representa isso é três quintos

P: Esses três pedaços que cada pessoa vai comer é das três pizzas juntas. São 15 pedaços no total e cada um vai comer três. Todos entenderam? Agora a Ingrid vai vir fazer na lousa.

A: A gente fez assim: a gente pegou a pizza e dividiu em 8 porque é normalmente o tanto de pedaço que vem. Aí a gente somou os 8 pedaços das três pizzas e deu 24 aí a gente dividiu por 5 que é o número de pessoas, daí deu o resultado que é 4,8 então cada pessoa vai comer 4,8 pedaços.

P: Certo! O que significa esse 4,8? É de uma pizza ou de todas?

A: Das três pizzas.

P: Agora o outro grupo vai vir na lousa resolver o problema.

A: Eu pensei primeiro na fração antes de começar a fazer a conta. Daí eu pesei na pizza de cinco pedaços. Aí se cada pizza teria 5 pedaços, deu 15 mas eu fiz na cabeça. São 15 pedaços de 5 pessoas que iriam comer.

P: E deu quanto?

A: Daria 3. Mas primeiro eu fiz a fração.

P: Qual fração?

A: Três quintos.

P: Não posso falar que 3 quintos é igual a 15 por 5 né? Ela percebeu que comer três pedaços no total é igual comer três quintos da quantidade total de pizza.

P: Agora uma pergunta: vocês lembram do problema do bolo? Como que era?

A: Era um bolo dividido em cinco pedaços iguais e comeu três.

P: A resposta deu igual?

A: Sim.

P: Qual a diferença daquele problema para esse?

A: É que aquele ela comeu pedaços de um bolo e nesse são três pizzas que vão ser divididas.

P: Muito bem! No problema do bolo eram três quintos do bolo total e agora são três pizzas divididas entre cinco pessoas.

11 Formalização do conteúdo

Para formalizar o conceito de número racional como quociente, a professora definiu que quociente é resultado de uma divisão. E uma divisão envolve dois números: o dividendo (o número que sofre a divisão) e o divisor (o número que realiza a divisão).

- **Comentários**

Nesse problema, percebemos que os alunos entenderam as várias formas de pensar sobre a divisão da pizza como dividir cada pizza em cinco pedaços iguais e dar um quinto de cada pizza para cada pessoa ou dar três quintos de uma mesma pizza direto para cada pessoa. Além disso, os alunos também tentaram resolver dividindo a pizza em oito pedaços iguais como é de costume no dia-a-dia deles.

Notamos que um grupo teve dificuldade em compreender a divisão de três pizzas por cinco pessoas e inverteu os números, o que nos leva a acreditar que, para esse grupo de alunos, não faz sentido realizar uma divisão de um número por outro maior que ele.

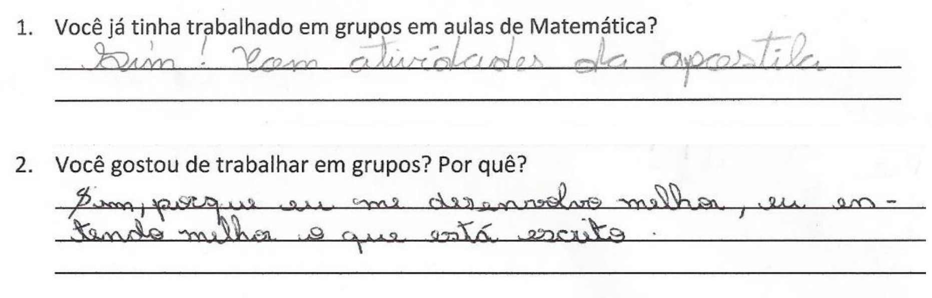
7.3.5.9 O nono encontro: Atividade de fechamento

Nesse nono encontro, os alunos receberam uma folha com as seguintes questões a serem respondidas individualmente.

1. Você já tinha trabalhado em grupos em aulas de Matemática?
2. Você gostou de trabalhar em grupos? Por quê?
3. Você gostou de resolver os problemas na lousa e ver como os colegas fizeram?
4. Você achou difícil resolver os problemas?
5. O que você realmente aprendeu durante as atividades desenvolvidas?
6. Cite cinco conteúdos ou conceitos que você aprendeu com os problemas.

Algumas respostas que obtivemos foram as seguintes:

Figura 24: Respostas dos alunos às perguntas


1. Você já tinha trabalhado em grupos em aulas de Matemática?
Sim! com atividades da apostila

2. Você gostou de trabalhar em grupos? Por quê?
Sim, porque eu me desenvolvo melhor, eu entendo melhor o que está escrito.

3. Você gostou de resolver os problemas na lousa e ver como os colegas fizeram?

Sim, por que da para ver que tem mais de um jeito de fazer aquela conta

4. Você achou difícil resolver os problemas?

Não, só um ou outro que tive que pensar um pouco mais e pedir ajuda

4. Você achou difícil resolver os problemas?

Alguns eu achei sim bem difícil porque eu e meu grupo não lembravamos muito de fração

5. O que você realmente aprendeu durante as atividades desenvolvidas?

A prestar mais atenção, porque as vezes eu só errava por não prestar atenção

6. Cite cinco conteúdos ou conceitos que você aprendeu com os problemas.

Socarar os números na Reta.
Retangularização dos numeros
frações
Falámos sobre o que é fração
E quella é fundamental na nossa vida

6. Cite cinco conteúdos ou conceitos que você aprendeu com os problemas.

· fração
· divisão com sobra
· divisão do número inicial
· operações inversas
· multiplicação

Fonte: Produção dos dados da pesquisa

- **Comentários**

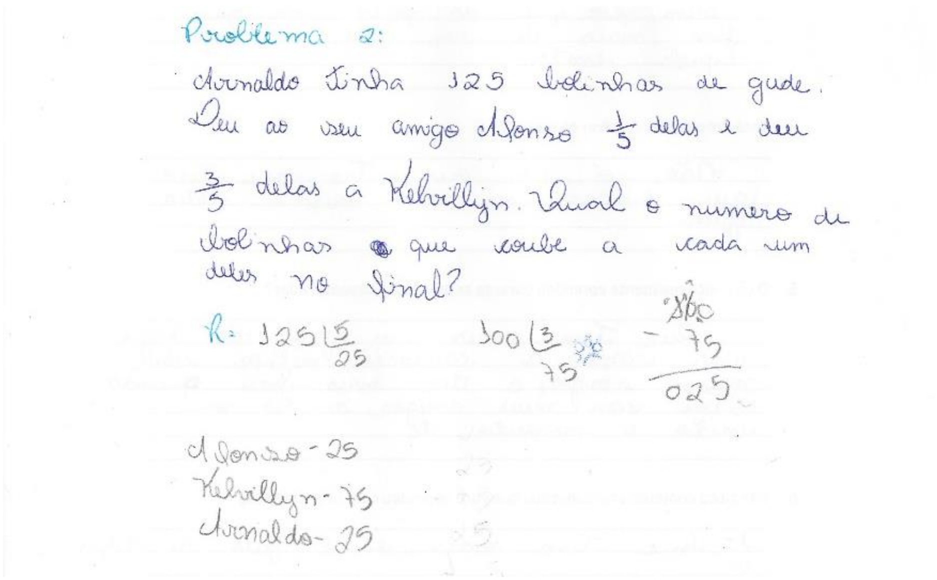
Olhando para as respostas dos alunos, percebemos que eles já trabalharam com resolução de problemas em outras aulas de Matemática. Os alunos apontaram que gostaram de resolver problemas e perceberam que é preciso prestar atenção nos enunciados. Além disso, apesar de não ter sido trabalhado diretamente o conceito de multiplicação, ele aparece em muitas respostas dos alunos na questão 6. Os conceitos de ponto racional localizado na reta numérica, fração e divisão também apareceram nas respostas.

7.3.5.10 O décimo encontro: Proposição e resolução de novos problemas

No décimo e último encontro, cada aluno foi convidado a propor dois problemas sobre os conteúdos e conceitos que aprenderam nas aulas e resolver cada um deles. Os alunos sugeriram que um colega resolvesse o problema elaborado por eles. Achei a ideia interessante e então apoiei.

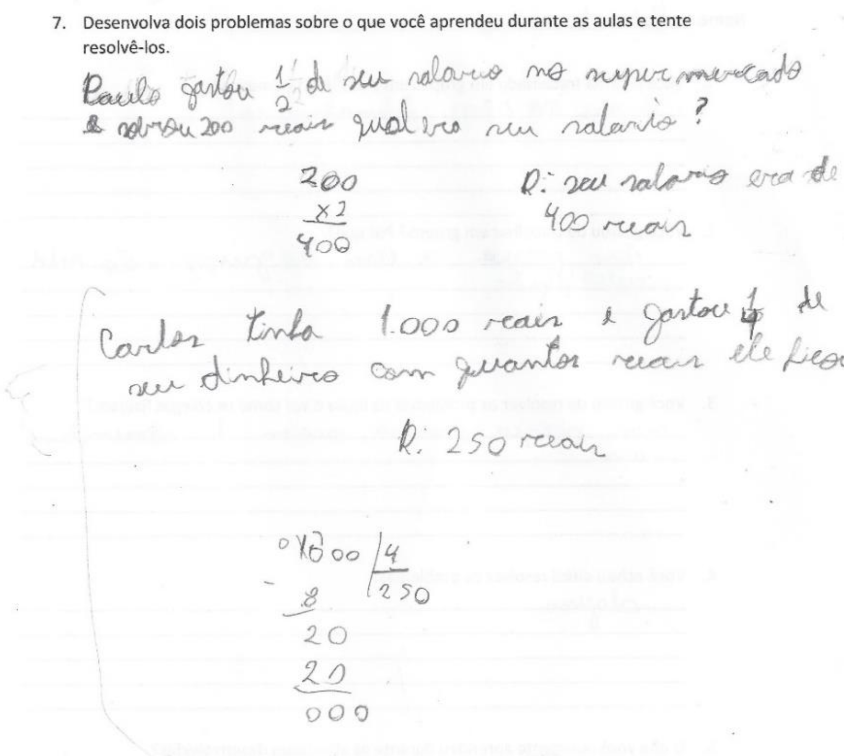
A seguir apresentamos alguns problemas elaborados e resolvidos pelos alunos.

Figura 25: Problema elaborado por aluno (1)



Fonte: Produção dos dados da pesquisa

Figura 26: Problema elaborado por aluno (2)



7. Desenvolva dois problemas sobre o que você aprendeu durante as aulas e tente resolvê-los.

Paulo gastou $\frac{1}{2}$ de seu salario no supermercado e sobrou 200 reais qual era seu salario?

$$\begin{array}{r} 200 \\ \underline{\times 2} \\ 400 \end{array}$$

R: seu salario era de 400 reais

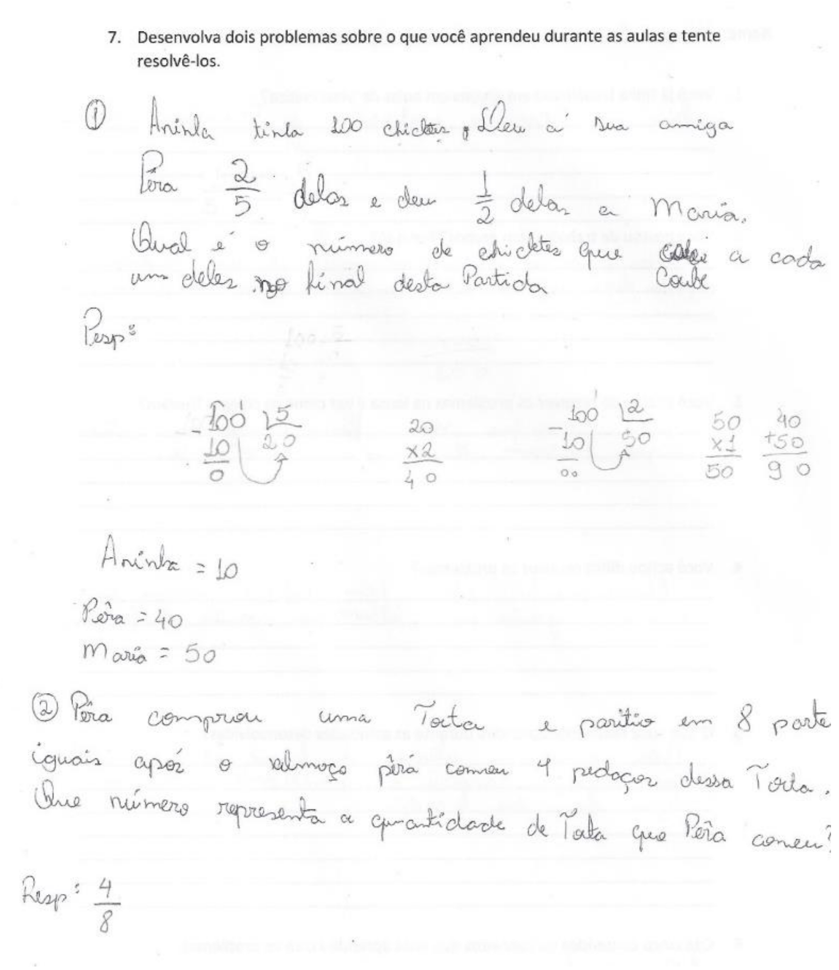
Carlos tinha 1.000 reais e gastou $\frac{1}{4}$ de seu dinheiro com quantos reais ele ficou

R: 250 reais

$$\begin{array}{r|l} 1000 & 4 \\ \underline{-8} & 250 \\ 20 & \\ \underline{20} & \\ 000 & \end{array}$$

Fonte: Produção dos dados da pesquisa

Figura 27: Problema elaborado por aluno (3)



7. Desenvolva dois problemas sobre o que você aprendeu durante as aulas e tente resolvê-los.

① Aninha tinha 100 chicletes, deu à sua amiga Pêra $\frac{2}{5}$ delas e deu $\frac{1}{2}$ delas a Maria. Qual é o número de chicletes que ~~coube~~ a cada um deles ~~no~~ final desta Partida Coube

Resp:

$100 \div 5 = 20$ $\quad$ $20 \times 2 = 40$ $\quad$ $100 \div 2 = 50$ $\quad$ $50 \times 1 = 50$ $\quad$ $40 + 50 = 90$

Aninha = 10

Pêra = 40

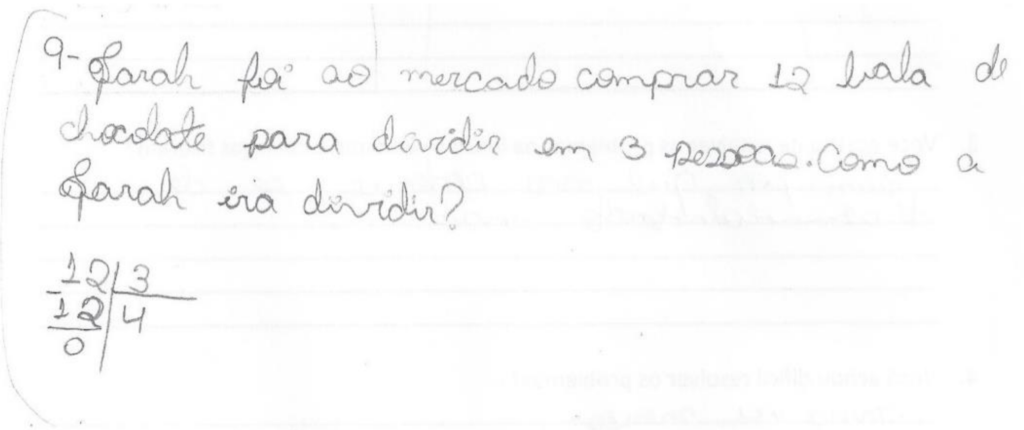
Maria = 50

② Pêra comprou uma Torta e partiu em 8 parte iguais após o almoço pêra comeu 4 pedaços dessa Torta. Que número representa a quantidade de Torta que Pêra comeu?

Resp: $\frac{4}{8}$

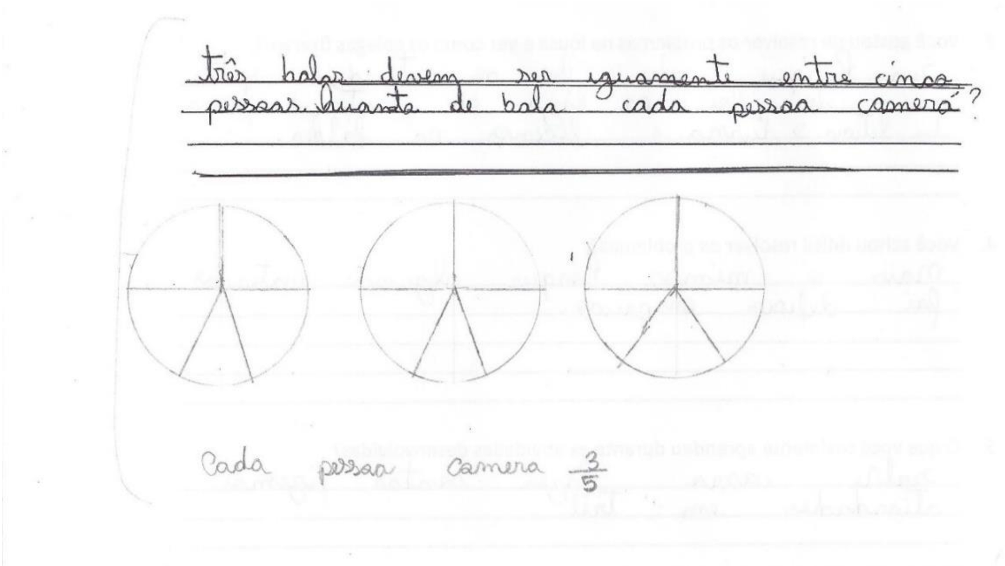
Fonte: Produção dos dados da pesquisa

Figura 28: Problema elaborado por aluno (4)



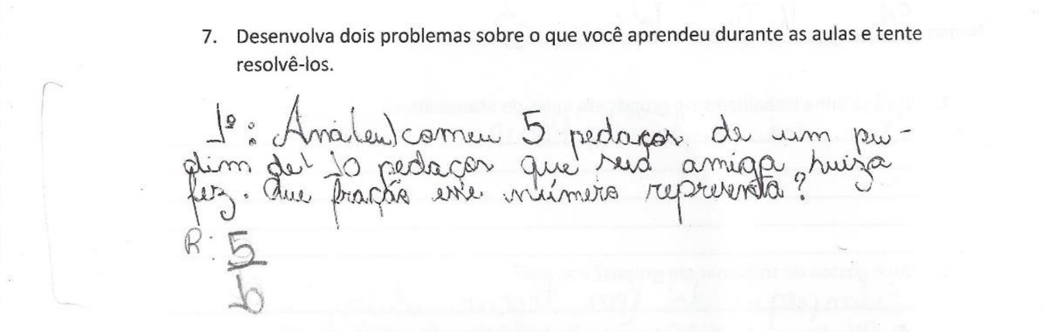
Fonte: Produção dos dados da pesquisa

Figura 29: Problema elaborado por aluno (5)



Fonte: Produção dos dados da pesquisa

Figura 30: Problema elaborado por aluno (6)



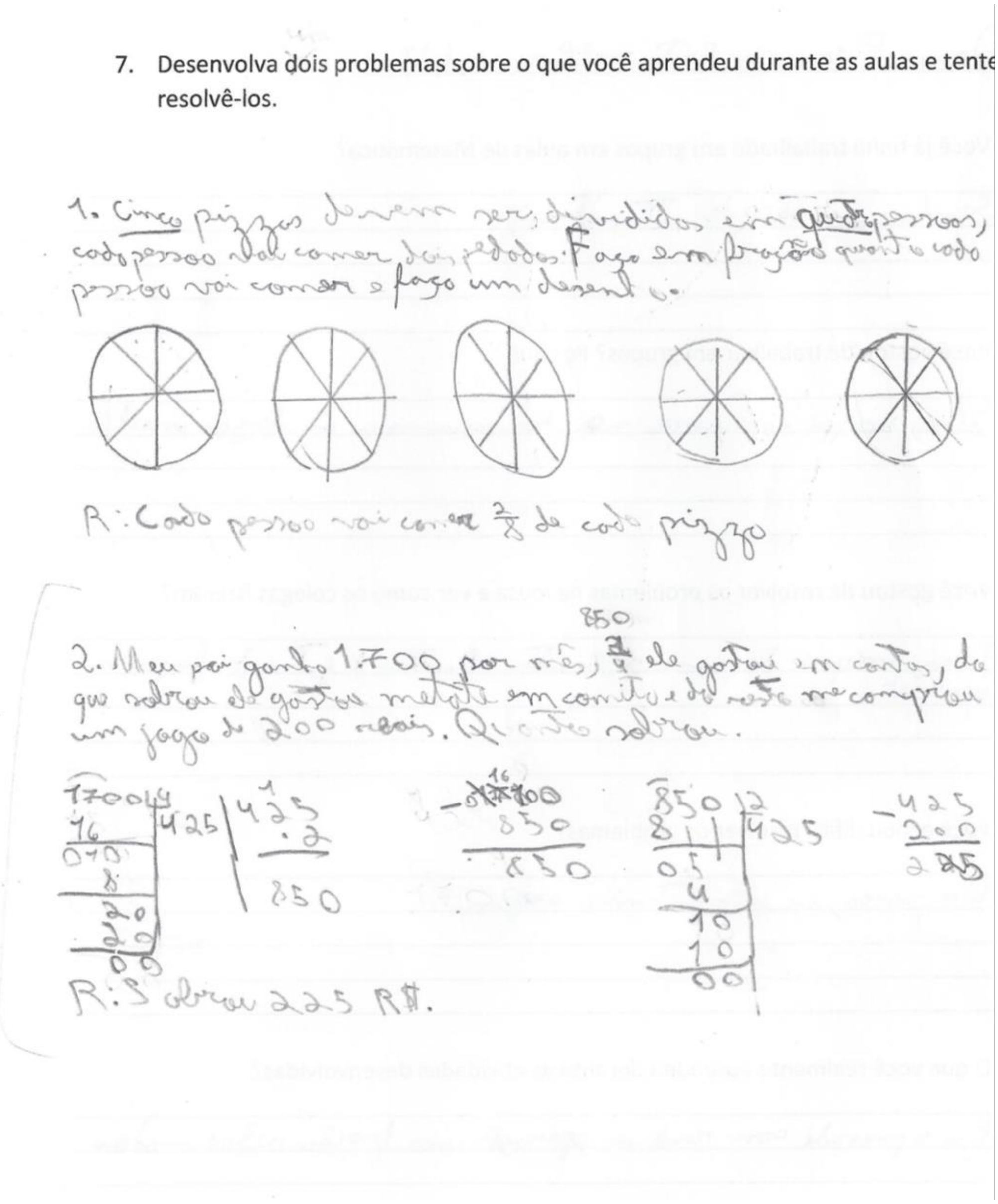
7. Desenvolva dois problemas sobre o que você aprendeu durante as aulas e tente resolvê-los.

1º: Ana (Leu) comeu 5 pedaços de um pudim de 10 pedaços que sua amiga Luiza fez. Que fração esse número representa?

R: $\frac{5}{10}$

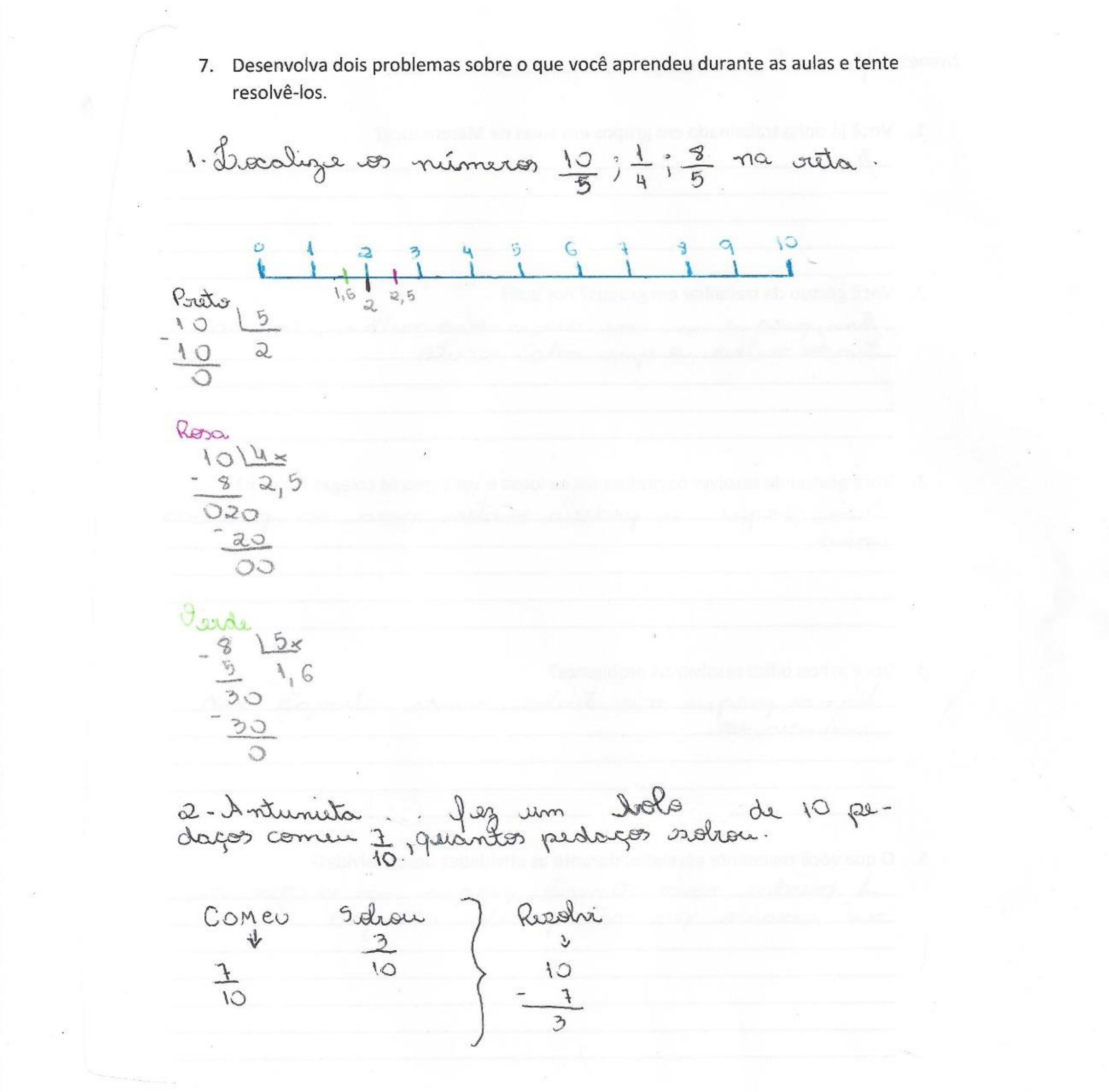
Fonte: Produção dos dados da pesquisa

Figura 31: Problemas elaborados por aluno (7)



Fonte: Produção dos dados da pesquisa

Figura 32: Problema elaborado por aluno (8)



Fonte: Produção dos dados da pesquisa

- **Comentários**

Analisando os problemas apresentados que foram elaborados pelos alunos, percebemos que eles criaram problemas parecidos com aqueles trabalhados em sala de aula junto com a professora. Todos os conceitos trabalhados durante a aplicação do projeto foram contemplados na elaboração dos problemas, principalmente os conceitos de fração e quociente.

Percebemos, ao analisar os enunciados e as resoluções dos problemas, que faltam algumas palavras nos enunciados para a clara compreensão do leitor.

Porém, é notável que os alunos apresentaram em seus problemas os conceitos que aprenderam.

$\mathbf{7.3.6}$ $\boldsymbol{P_6}$ em ação: Análise da aplicação do Projeto

A análise da aplicação do Projeto foi feita nas seções dos comentários de cada encontro, descritos juntamente com o P_5 em ação. A análise continua nas atividades do Terceiro bloco de Romberg-Onuchic, portanto, a realização completa desse procedimento resultou na Seção 8.

8. Tirando conclusões: o terceiro bloco de Romberg-Onuchic

O terceiro Bloco de Romberg-Onuchic sugere que o pesquisador colete evidências, interprete as evidências coletadas, relate resultados e antecipe ações de outros.

Romberg (2007) aponta algumas questões que devem ser pensadas ao se escolher o método que poderá ser usado para coletar evidências como sugere o terceiro bloco de Romberg-Onuchic. Entre essas questões, estão o fato de analisar o tempo em que a pergunta de pesquisa se orienta (passado, presente ou futuro) e as fontes dessas evidências (artefatos, livros ou falas). Tem-se que a pergunta desta pesquisa se orienta no tempo presente e que as fontes das evidências são os registros de áudio e folhas de problemas obtidos a partir da execução do procedimento P_5.

8.1 As evidências coletadas

Começaremos a descrever a execução do procedimento P_6. Ao olhar para os dados produzidos a partir do desenvolvimento do Projeto, selecionamos algumas evidências que nos chamam a atenção ao tentar responder nossa pergunta da pesquisa. Podemos classificá-las em três categorias, que se relacionam muito bem com as variáveis-chave da pesquisa. São elas: evidências sobre resolução de problemas, evidências sobre linguagens e evidências sobre números racionais.

As evidências são justificadas a partir dos trechos retirados da transcrição dos áudios ou das folhas de problemas.

i. Evidências sobre resolução de problemas

Fica evidente, durante a resolução dos problemas em grupos que os alunos não estavam acostumados a trabalhar em grupos em aulas de matemática. Muitas vezes, tentavam resolver sozinhos sem discutir com os colegas o que estavam pensando como resolução. Também não estavam familiarizados com o fato de apresentar sua resolução na lousa para os colegas. Apresentamos alguns trechos que enfatizam essa evidência.

A: Quando um aluno vai falar, o outro pode ajudar?

A: A maneira como eu resolvi foi ...

Porém, com o decorrer das aulas, os alunos foram se adaptando à Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas e perceberam que era bom expor seus pensamentos e formas de resolver o problema para a sala. Além disso, começaram a valorizar os erros cometidos como fonte de aprendizagem e decidiram se expor mais para os colegas.

A: Deixa eu fazer o próximo?

A: Acho que está errado. Mas posso fazer na lousa mesmo assim?

Durante as primeiras aulas, na etapa de resolver o problema em grupos, fica evidente que os alunos não tinham esclarecimento sobre como seria o papel do professor, apresentando dúvidas sobre o porquê de a professora não responder com certo ou errado, mas, ao invés disso, fazer questionamentos que conduziriam o aluno à sua zona de desenvolvimento real sobre o conteúdo trabalhado. Nota-se que os alunos, quase em sua maioria, sentem uma certa frustração sobre o professor não afirmar se o que estão pensando está certo ou não.

A: Eu não entendo o jeito que você explica.

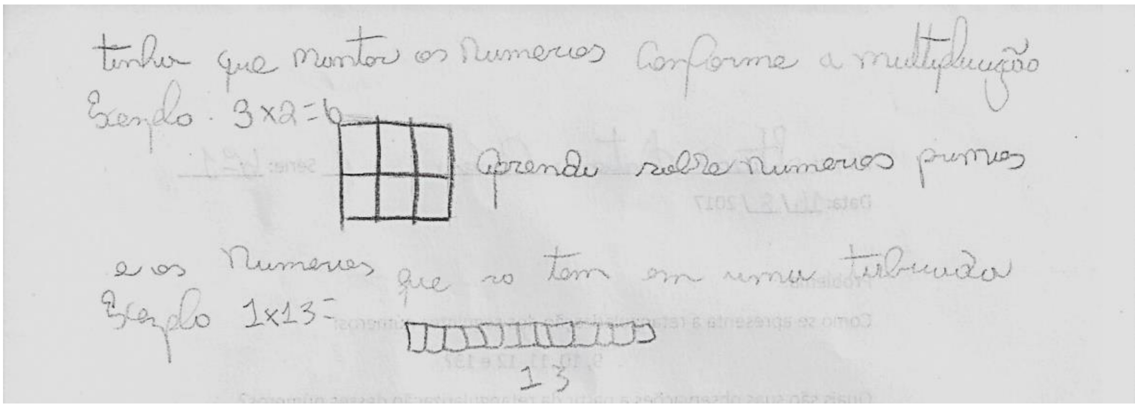
Voltando o olhar para o trabalho do professor que faz uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, fica evidente que este deve se preparar muito para as aulas. É preciso que ele pense sobre os pré-requisitos que seu aluno deve ter para conseguir construir seu aprendizado e pensar muito bem nos problemas que irá elaborar para que haja uma efetiva construção de conhecimento.

Ainda, o professor deve estar preparado para não responder as perguntas dos alunos de forma pronta, deve levantar questionamentos e motivar os alunos a resolver os problemas. Para isso, deve se preparar e pensar quais as dúvidas que podem surgir durante a resolução do problema para evitar frustrações ou dar respostas prontas. Também fica evidente nesta pesquisa a dificuldade de o professor conseguir observar e incentivar todos os grupos de alunos, pois em uma sala com cerca de 30 alunos é difícil acompanhar as explicações de cada um. Porém, o trabalho em grupos facilita esse acompanhamento, visto que cada grupo busca por um consenso na resolução de um problema.

ii. Evidências sobre linguagem

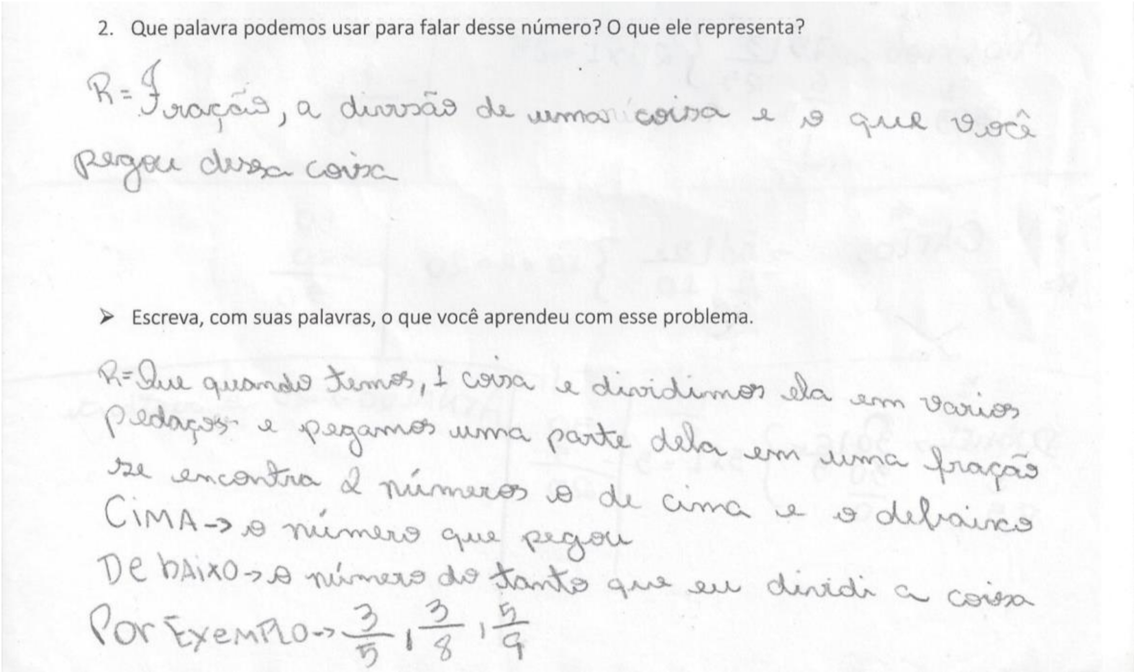
Algumas evidências foram observadas durante o desenvolvimento do procedimento Geral e são pertinentes as linguagens vernácula e matemática. Por exemplo, a falta de familiaridade desses alunos em escrever utilizando a língua portuguesa em aulas de matemática. Os exemplos a seguir são referentes às escritas de alunos que misturam os símbolos da Matemática com a escrita em língua materna.

Figura 33: Folha de atividade de um aluno escrevendo sobre a retangularização de números



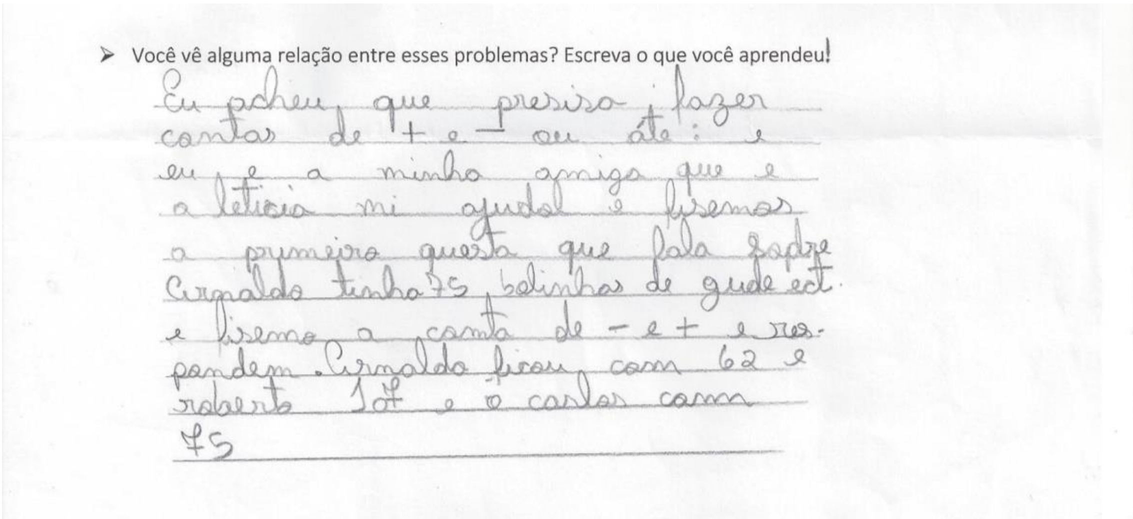
Fonte: Produção de dados da pesquisa

Figura 34: Folha de atividade de um aluno escrevendo sobre o conceito de fração



Fonte: Produção de dados da pesquisa

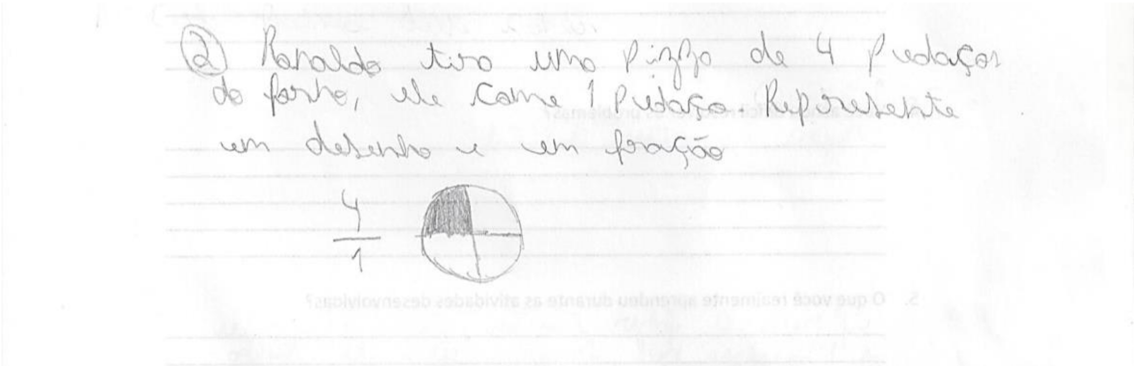
Figura 35: Folha de atividade de um aluno escrevendo as diferenças entre dois problemas



Fonte: Produção de dados da pesquisa

Em geral, os alunos possuem falta de domínio da língua portuguesa e de alguns aspectos da linguagem matemática apontados por Pimm (1987) como, por exemplo, o Princípio da Posição (no caso da escrita de frações).

Figura 36: Problema elaborado por um aluno



Fonte: Produção de dados da pesquisa

Fica evidente, também, que a professora buscou motivar os alunos a escrever sobre sua resolução de cada problema e a se atentar às palavras do enunciado do problema, como visto anteriormente e aqui repetido.

P: Vocês conseguem escrever num textinho como fizeram passo a passo?

P: Agora cada um vai escrever o que entendeu sobre denominador e numerador da fração!!

P: O que é retangularização? Vocês sabem?

P: O que é multiplicação?

P: Vamos ler o enunciado do problema todos juntos?

P: Vamos ler: Arnaldo tinha 75 bolinhas de gude. Deu a seu amigo Rodrigo ...?

P: Vamos ler: do salário do meu pai, ele gastou dois quintos ...

P: Olha pessoal, o grupo da Isabela escreveu um textinho sobre como elas fizeram. Vamos ouvir.

P: Por que eu sei que é fração? Quando uso uma fração?

A seguir, destacamos um trecho em que a professora buscou chamar a atenção dos alunos para o significado das palavras existentes em um dos enunciados do problema e sobre a compreensão do que o problema pede.

A: Tinha sobrado 50 aí eu fiz assim os dois quintos peguei o 50 e dividi por 5 que deu 10 só que como são dois, multiplicou por 2 e ficou 20.

P: Só que vamos ver a palavrinha que está aqui: 1/3 delas. O que é um terço delas?

A: Um terço das bolinhas.

Além disso, no decorrer das aulas, notamos que os alunos começaram a falar, se expor mais, usando a língua portuguesa, embora alguns terem apresentado dificuldades em escrever seu raciocínio.

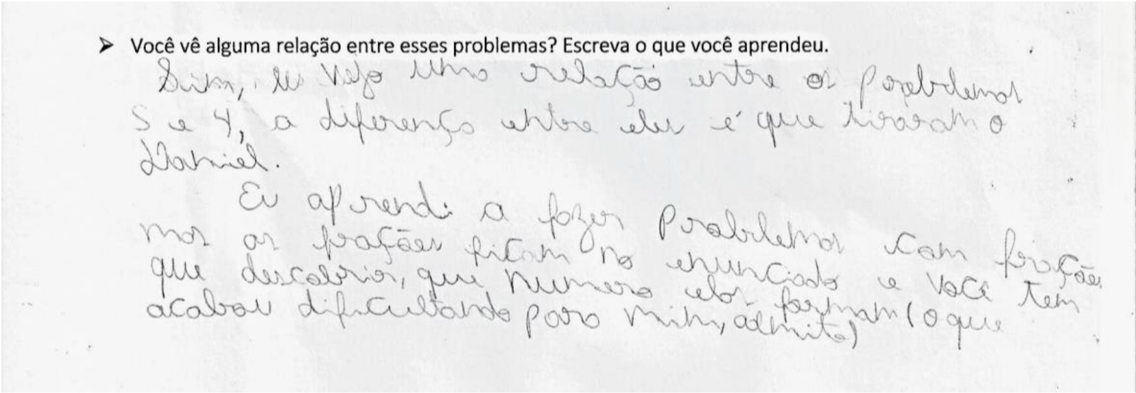
A: Escrever é mais difícil do que falar!

Destacamos a fala de um aluno que preferiu escrever como foi apresentada sua resolução e, também, a escrita de um grupo de alunos sobre os passos que seguiram para resolver o problema do salário.

A: Eu posso escrever como eu resolvi e depois te entregar?

Ficou evidente que os alunos prestaram mais atenção no enunciado do problema e nos dados que eles forneciam

Figura 37: Escrita de um aluno (1)



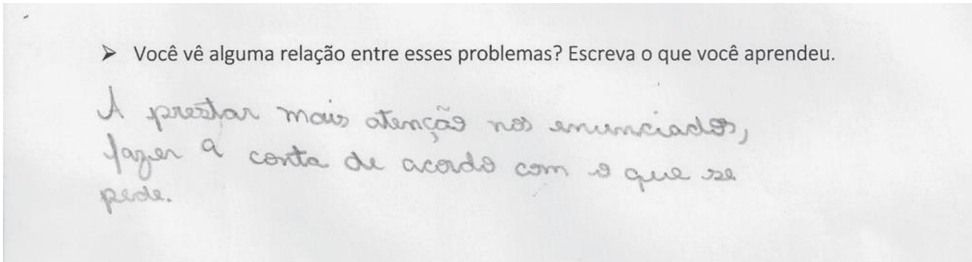
➢ Você vê alguma relação entre esses problemas? Escreva o que você aprendeu.

Sim, eu vejo uma relação entre os problemas 3 e 4, a diferença entre eles é que tiraram o Daniel.

Eu aprendi a fazer problemas mas os frações ficam no enunciado com frações que decoravios, que numero elas formam (o que você tem acabou dificultando para mim, admito)

Fonte: Produção de dados da pesquisa

Figura 38: Escrita de um aluno (2)



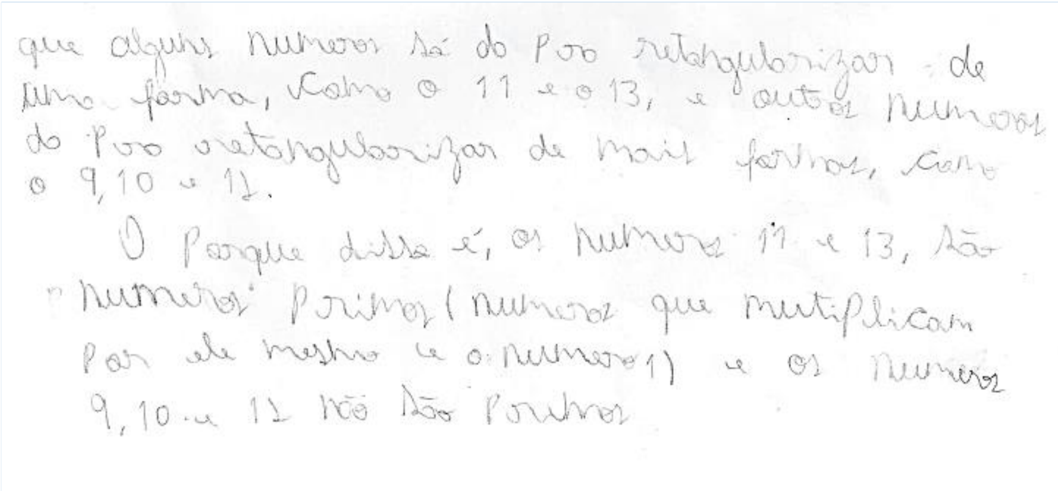
➢ Você vê alguma relação entre esses problemas? Escreva o que você aprendeu.

A prestar mais atenção nos enunciados, fazer a conta de acordo com o que se pede.

Fonte: Produção de dados da pesquisa

Durante a aplicação do Projeto, ficou evidente que os alunos começaram a se questionar mais como visto nos diálogos apresentados na seção que descreve a aplicação do Projeto. Para expor através da escrita o que estavam pensando, os alunos começaram a se preocupar em explicar alguma coisa para alguém ler.

Figura 39: Escrita de um aluno (3)

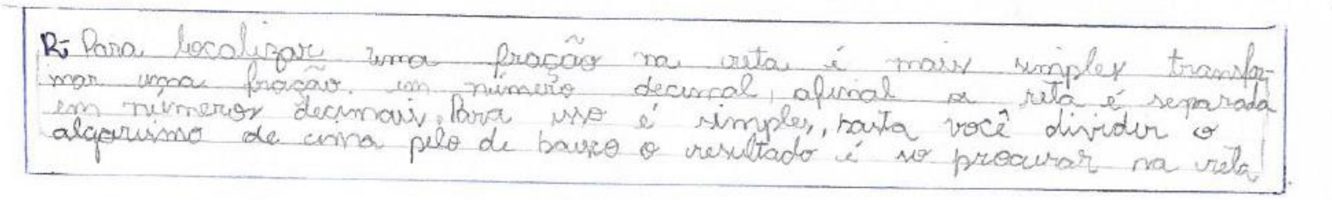


que alguns numeros só do pro retangularizar de uma forma, como o 11 e o 13, e outros numeros do pro retangularizar de mais formas, como o 9, 10 e 12.

O porque disso é, os numeros 11 e 13, são numeros primos (numeros que multiplicam por ele mesmo e o numero 1) e os numeros 9, 10 e 12 não são primos

Fonte: Produção de dados da pesquisa

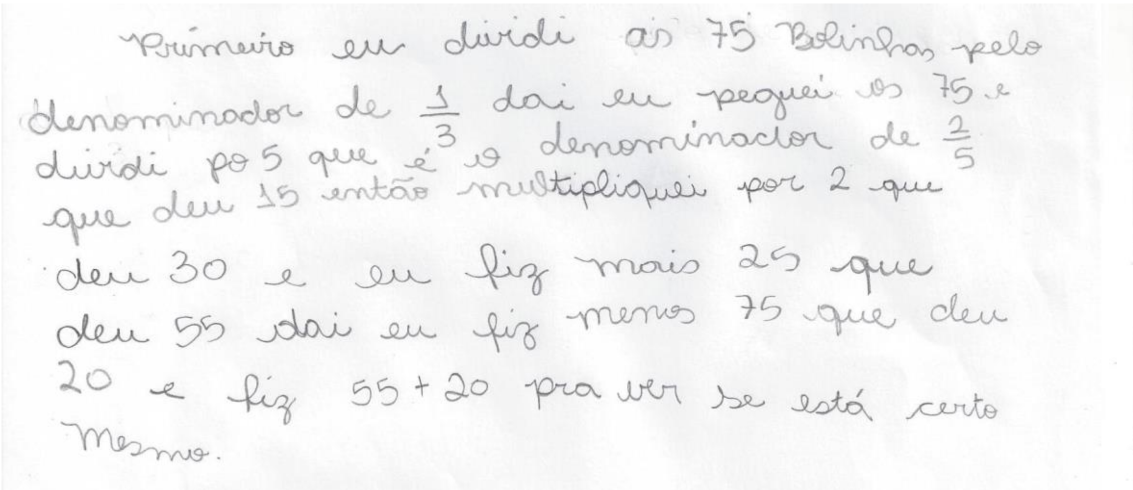
Figura 40: Escrita de um aluno (4)



R: Para localizar uma fração na reta é mais simples transformar uma fração em número decimal, afinal a reta é separada em números decimais. Para isso é simples, basta você dividir o algarismo de cima pelo de baixo o resultado é só procurar na reta.

Fonte: Produção de dados da pesquisa

Figura 41: Escrita de um aluno (5)



Primeiro eu dividi as 75 bolinhas pelo denominador de $\frac{1}{3}$ daí eu peguei os 75 e dividi po 5 que é o denominador de $\frac{2}{5}$ que deu 15 então multipliquei por 2 que deu 30 e eu fiz mais 25 que deu 55 daí eu fiz menos 75 que deu 20 e fiz 55 + 20 pra ver se está certo mesmo.

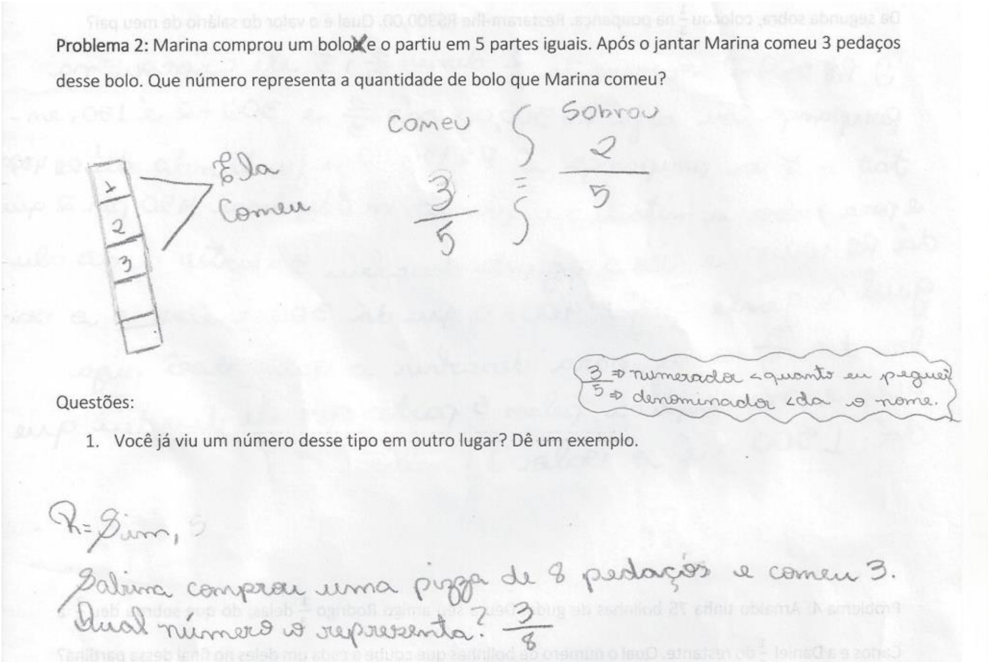
Fonte: Produção de dados da pesquisa

iii. Evidências sobre números racionais

As evidências coletadas que se relacionam com a variável-chave números racionais são:

1. Compreensão sobre a relação parte – todo e o significado de fração.

Figura 42: Resolução do primeiro problema da fração por um aluno



Fonte: Produção de dados da pesquisa

2. Identificação do numerador e denominador de uma fração.

P: Cada pedaço, quando eu divido em 5, tem um nome especial.

A: Um quinto!!

P: Muito bem. E quantos pedaços foram pegos?

A: Três quintos!!!

A: Um terço é um pedaço de três partes.

P: Por que a fração chama quinto neste caso?

A: Porque eu cortei em cinco.

P: E se tivesse cortado em 3?

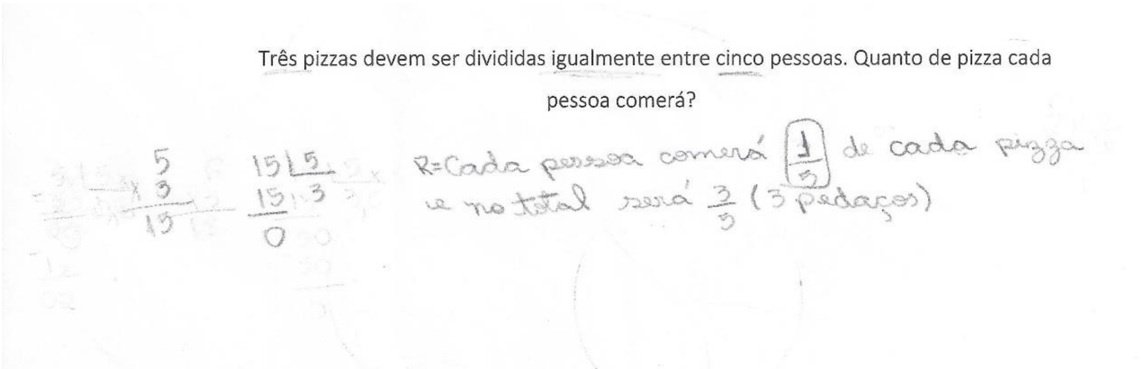
A: Três quintos.

P: Por quê?

A: Não. Terços. Três terços.

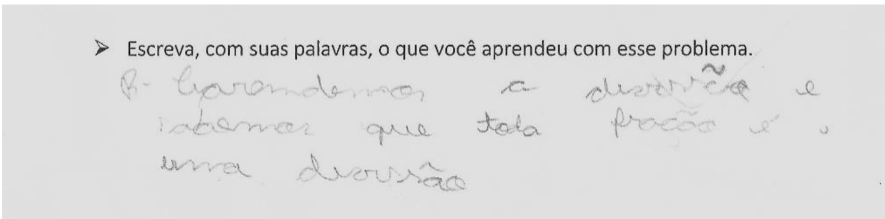
3. Compreensão de que o número racional pode representar um quociente.

Figura 43: Resolução do problema do quociente por um aluno



Fonte: Produção de dados da pesquisa

Figura 44: Escrita de um aluno (6)



Fonte 1: Produção de dados da pesquisa

4. Os alunos não identificam o número racional como um número.

P: Me explica por que deu 13?

A: É porque eu transformei em um número normal.

P: Ah tá. Mas eu posso fazer isso?

A: Eu quis transformar em um número.

P: Como assim? Me dá outro exemplo.

A: Tipo o 75.

P: E o que significa dois terços. Você se lembra?

A: Um de três?

P: Então o que eu tenho que fazer para obter um terço de 75?

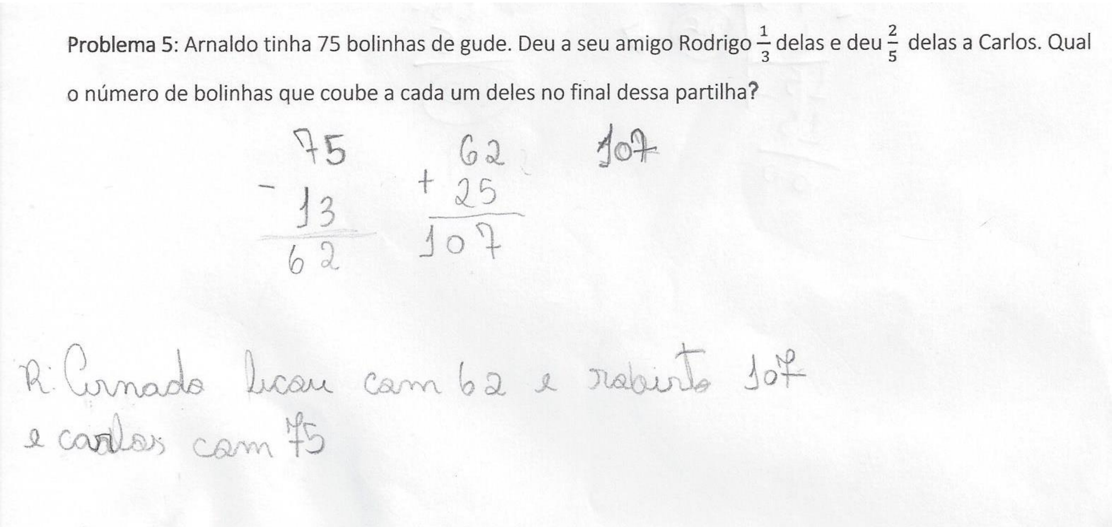
A: Eu vou dividir. 75

P: 75 dividido por?

A: 3

Podemos ver na resolução do terceiro problema da fração que o aluno escreve o número 13 no lugar de $\frac{1}{3}$, pois não identifica a fração como um "número".

Figura 45: Resolução do quarto problema da fração por um aluno

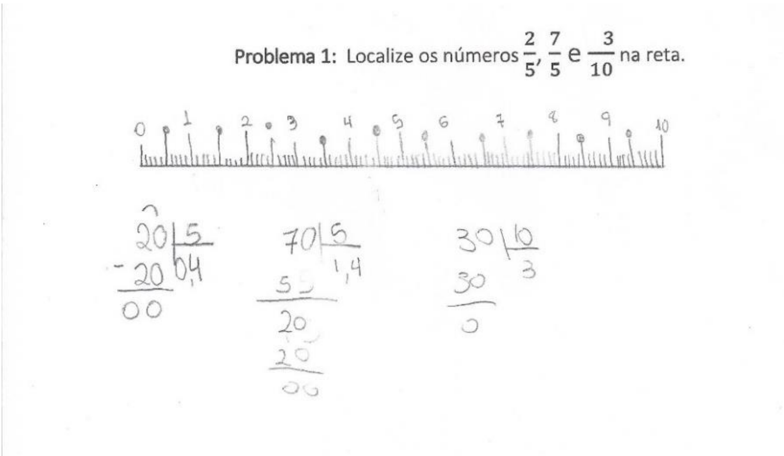


Fonte: Produção de dados da pesquisa

5. Dificuldade em construir uma reta numérica, como visto nos comentários apresentados na descrição da aplicação do Projeto.

6. Confusão entre reta numérica e régua. Os alunos mostraram confusão entre a unidade e um centímetro e apresentaram convicção de que uma unidade é sempre igual a um centímetro.

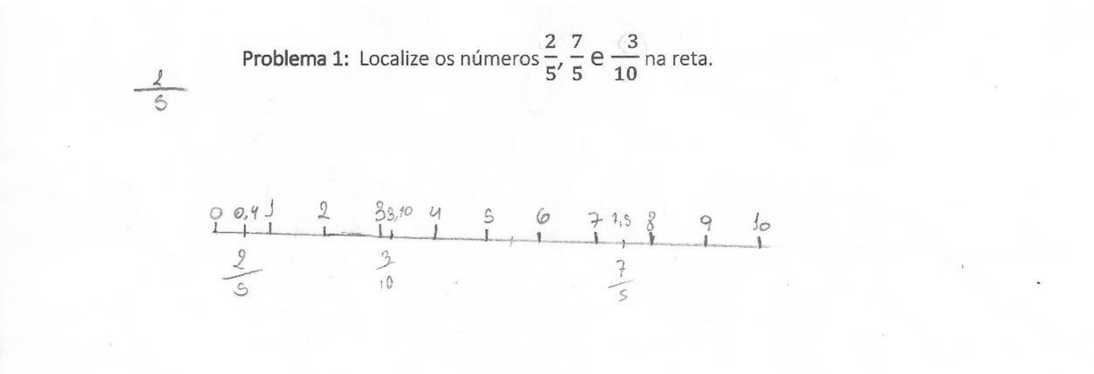
Figura 46: Resolução do problema do ponto racional por um aluno (1)



Fonte: Produção de dados da pesquisa

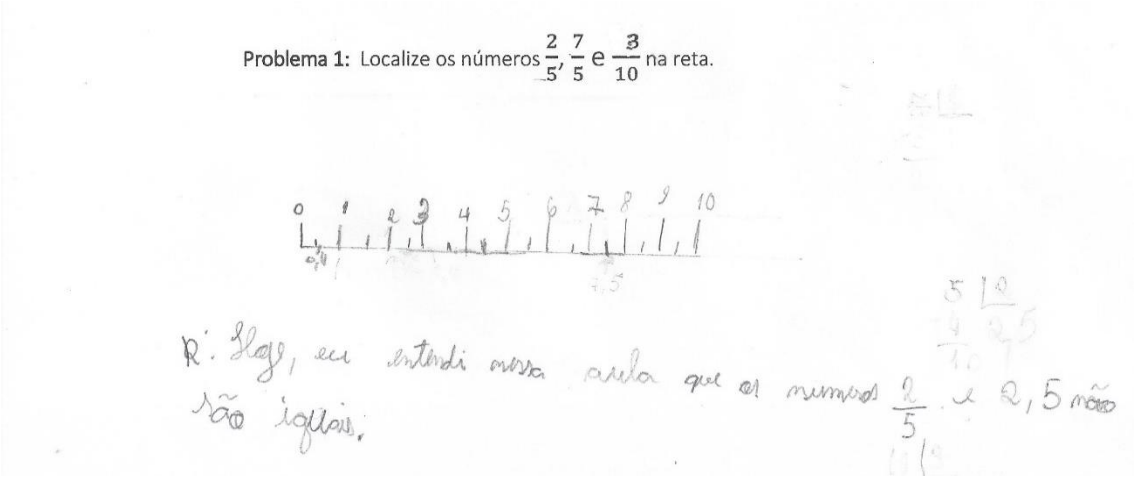
7. Confusão entre a simbologia de um número racional e um número decimal.

Figura 47: Resolução do problema do ponto racional por um aluno (2)



Fonte: Produção de dados da pesquisa

Figura 48: Resolução do problema do ponto racional por um aluno (3)



Fonte: Produção de dados da pesquisa

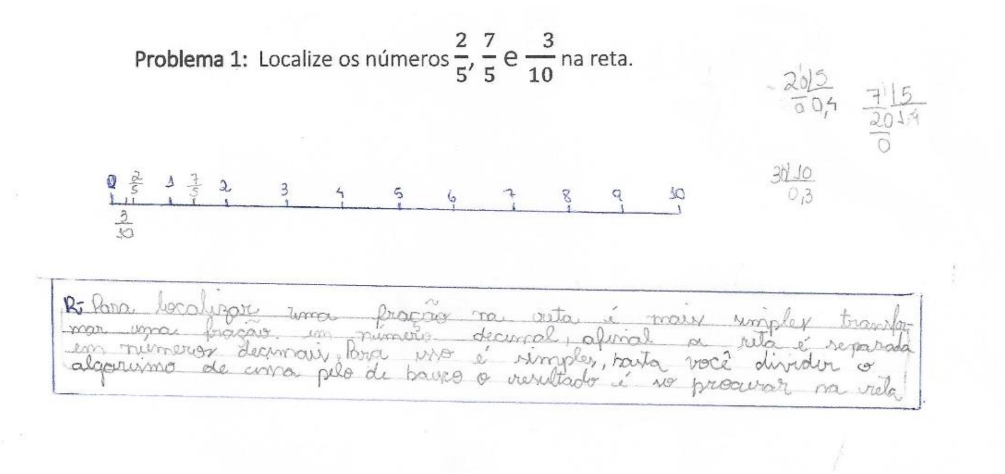
8. Dificuldade em transformar um número racional em decimal.

A: A gente pegou o número de baixo, o sete, e o cinco é quantas vezes a gente dividiu esse número. Aí a gente fez sete dividido por 5 que deu 1,4 e aí a gente colocou aqui (referindo-se ao ponto na reta numérica).

P: E 1,4 é maior que 1?

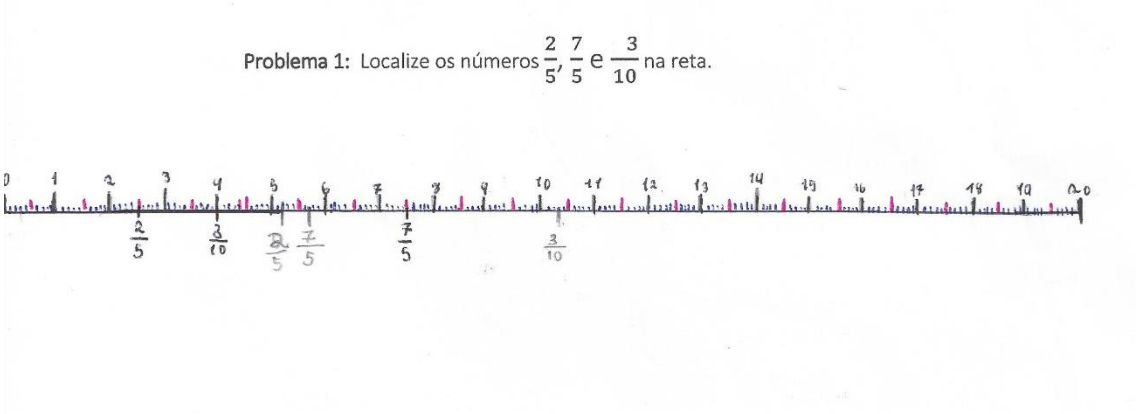
A: Sim.

Figura 49: Resolução do problema do ponto racional por um aluno (4)



Fonte: Produção de dados da pesquisa

Figura 50: Resolução do problema do ponto racional por um aluno (5)



Fonte: Produção de dados da pesquisa

8.2 Interpretando as evidências: fazer do erro uma oportunidade de aprender

Voltar nosso olhar para as evidências coletadas e apresentadas anteriormente é um momento muito importante em que o pesquisador tem a oportunidade de refletir sobre sua pergunta de pesquisa. Para isso, é preciso interpretar as evidências coletadas, ressaltando quais são importantes para o nosso trabalho e como vão nos ajudar a encontrar respostas para a pergunta.

Primeiramente, ao fazer uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem- Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, é evidente que o professor de Matemática deve se preparar para bem trabalhar o conteúdo que pretende ensinar a seus alunos. Para trabalhar Números Racionais durante a aplicação do Projeto, embora a professora estivesse preocupada com as personalidades ponto na reta, fração e quociente, foi necessário estudar toda a teoria que envolve esse conteúdo, como a apresentada na Seção 5.

Falar de alguns construtos do número racional na sala de aula requer que o professor compreenda a relação entre os diferentes construtos e compreenda que a multiplicação não pode ser vista apenas como uma soma de parcelas. Se o professor não se prepara para trabalhar um conteúdo, certamente ele levará o aluno a concepções errôneas e isso pode dificultar sua aprendizagem de outros conteúdos no futuro. Por exemplo, a professora não trabalhou o conceito de razão com os alunos, porém estudou esse construto e suas operações para se preparar caso algum aluno tivesse dúvidas que pudessem envolver tal conceito.

Fica evidente que a Metodologia Pedagógica adotada permite que os alunos possam dar atenção aos enunciados de problemas de forma mais significativa do que em aulas em que empregam uma metodologia de ensino tradicional. Isso se nota, pois, em vários trechos de transcrições dos áudios, pudemos perceber que os alunos perguntam a seus colegas de grupos e à professora o que o problema perguntava. O trabalho em grupo permite que os alunos reflitam sobre como entendem e interpretam um problema, bem como discutam as resoluções que acham cabíveis ao problema.

As respostas das perguntas, feitas no nono encontro do Projeto, apresentado na Seção 7, ajudam a evidenciar que o trabalho em grupo é rico para a construção do conhecimento dos alunos. Além disso, os fatos de resolver o problema na lousa e fazer uma plenária dão oportunidade a todo aluno de expressar sua opinião e suas dúvidas. Também percebemos que os alunos não costumam trabalhar em grupos e irem à lousa com frequência, porém com o passar das aulas eles perceberam como é importante expressar sua resolução a todos os colegas e ouvir a deles.

O momento de leitura, tanto individual quanto em grupo, se mostrou para nós um momento rico em que o contato com a linguagem vernácula e com a linguagem matemática se fazem presentes e contribui para que o aluno perceba a existência dessas duas linguagens. De acordo com e Onuchic e Leal Junior (2016), no momento da leitura o aluno precisa fazer a decodificação do que está escrito em língua materna para que ocorram a compreensão, interpretação e retenção acerca de um conteúdo a ser trabalhado. A habilidade inicial de leitura, denominada pelos autores de decodificação, se mostrou presente durante a aplicação de todos os problemas do Projeto.

O papel do professor que faz uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas deve ser o de questionador, interessado em ajudar seu aluno a construir seu próprio conhecimento através de questões que o conduzam a isso. A preocupação com o domínio da linguagem matemática e a compreensão das personalidades do número racional ponto na reta, fração e quociente contribuíram para que nosso Projeto buscasse evidenciar a preparação do professor de matemática durante sua aplicação.

As evidências coletadas acerca do domínio da linguagem matemática nos levam a uma interpretação de que, em geral, os alunos dessa turma de sexto ano possuem um registro misturado em que escrevem com palavras da língua vernácula utilizando símbolos da linguagem matemática, segundo Pimm (1987).

O progresso dos alunos quanto às suas escritas é muito interessante, pois no começo das aulas eles não acreditavam que poderiam escrever a resolução do grupo utilizando-se da língua vernácula, e ao longo do nosso trabalho eles se preocuparam com a escrita, buscando ser claros para que a professora e os colegas entendessem o que haviam escrito. Além disso, os alunos buscaram refletir mais sobre os enunciados dos problemas, procurando entender o que cada problema perguntava e isto se configura como um momento no qual o professor pode avaliar o aprendizado do aluno.

Percebemos que os alunos não costumam refletir sobre o significado das palavras que estão presentes em um enunciado de problema. Quando foram questionados sobre o que entendiam por uma determinada palavra, a maioria dos alunos do sexto ano preferia dizer que não sabia do que buscar informação em um dicionário ou se questionar. Com o passar das aulas, eles foram se habituando a questionar todo o enunciado do problema e interpretá-lo, no que diz respeito ao conteúdo matemático, o que deveria ser feito para resolvê-lo.

Segundo Machado (2011), o ensino de Matemática pautado na preocupação com o entendimento de símbolos e palavras deve ser mediado pela oralidade, emprestada da língua materna e, ainda, deve levar em conta que os objetos matemáticos possuem significado que devem ser explorados pelos alunos. Baseados, nesse ensino, procuramos conduzir a aplicação do Projeto.

As evidências apresentadas acerca da compreensão dos alunos sobre as personalidades do número racional trabalhadas ponto na reta, fração e quociente, mostram um dado que já foi levantado na pesquisa, o fato de os alunos comumente entenderem o número $\frac{a}{b}$ apenas como fração. Percebemos que, em muitas vezes, o aluno espera que o professor diga qual papel aquele número tem no problema.

Procuramos trabalhar com o conceito de multiplicação ao propor o Problema da Retangularização, pois esse conceito é base para todos os construtos do número racional. As evidências coletadas referentes ao trabalho com o ponto racional nos levam a uma interpretação de que os alunos compreendem que o número racional pode ser expresso por um número decimal e que o segundo está bem definido na reta. Porém, os alunos em geral, não compreendem que o número racional na forma $\frac{a}{b}$ está bem definido na reta e também pode ser localizado nela. Além disso, eles apresentam dificuldade em relacionar o número racional com a unidade na reta. Nesse momento, também ficou evidente que, geralmente, os alunos compreendem que o significado da barra fracionária ao se localizar um ponto na reta tem o mesmo significado da vírgula no número decimal. Foi preciso trabalhar com os alunos o significado de cada um desse símbolos (barra fracionária e vírgula) para que eles pudessem perceber a utilidade da linguagem matemática ao resolver os problemas propostos.

No trabalho com frações, as evidências mostram que os alunos já tinham alguma familiaridade com o tema, porém não compreendiam a relação da parte com o todo. Para que tivessem essa compreensão, buscamos discutir com os alunos o que entendiam pelas palavras fração, numerador e denominador. Além de ouvir as ideias dos alunos, a professora também propôs a consulta a dicionários, como sugere Pimm (1987).

Percebemos que os alunos notaram que a fração representa uma parte de um todo e que é preciso compreender a qual todo o problema se refere para saber qual a relação da parte com ele. Assim, ficou claro reconhecer os papéis que cabem ao numerador, ao denominador e à barra fracionária que "está entre" esses dois números. Porém, as evidências coletadas também nos levam a perceber a confusão entre a ordem do numerador e do denominador. Apesar de os alunos compreenderem a relação parte-todo e compreendê-la através do significado de denominador e de numerador da fração, comumente confundem a ordem de escrita, colocando o denominador em cima e o numerador embaixo da barra fracionária. É preciso que o professor trabalhe o Princípio da Posição que, segundo Pimm (1987), é um dos princípios para a escrita matemática e, talvez, esse erro se origine por pensarem primeiro no denominador, e, assim, o colocarem em cima da barra fracionária.

Por fim, interpretamos as evidências que se referem à personalidade quociente do número racional. De forma geral, os alunos apresentam dificuldade em enxergar o número racional como resultado de uma divisão, justamente por não perceberem que o número racional não é sempre uma fração. A escolha dos números presentes no problema do quociente e no problema da fração foi proposital para que os alunos percebessem a diferença entre fração e quociente. Buscamos discutir o que significa ser quociente e o que significa a divisão em partes iguais. A partir da análise das folhas de problemas do décimo encontro, em que os alunos elaboraram problemas, percebemos que eles se atentaram para a diferença conceitual entre o quociente e a fração, porém confundem a posição de escrita do número racional (colocam o divisor em cima da barra fracionária e o dividendo em baixo).

De forma geral, podemos interpretar que as dificuldades encontradas por alguns alunos em trabalhar com os números racionais vistos como ponto na reta numérica, fração e quociente sejam justificadas pelo fato de os alunos não estarem no mesmo Nível de Desenvolvimento Potencial que o professor imaginava que eles estivessem, de acordo com a teoria de Vygotsky. Isso implica, que esses alunos não possuíam os pré-requisitos supostos pelo professor. Logo, o professor não consegue agir sobre sua Zona de Desenvolvimento Proximal

(ZDP) a fim de mediá-lo na construção de um conhecimento novo, atingindo assim seu Nível de Desenvolvimento Real.

É esperado que os alunos possuam sentidos e significados diferentes entre si sobre os conceitos matemáticos que foram trabalhados na aplicação do Projeto. Além disso, esses sentidos e significados também são diferentes do que o professor esperava que os alunos possuíssem. O professor deve se preocupar em questionar quais os sentidos que seus alunos possuem sobre ponto na reta numérica, fração e quociente para que juntos construam significados desses conceitos dentro da área de Matemática.

8.2.1 Refletindo as mudanças em uma nova aplicação do Projeto

As interpretações das evidências apresentadas nos fazem refletir sobre alguns aspectos que sofreriam mudanças em uma hipotética chance de reaplicação do Projeto.

Em primeiro lugar, ao elaborar o Problema do ponto racional, faríamos uma alteração no enunciado, acrescentando o termo "reta numérica". Percebemos que o enunciado fica incompleto ao pedir que se localize os pontos em uma reta se essa não for numérica.

8.3 Relatando resultados

Esta pesquisa se constitui até aqui na busca de encontrar respostas para a nossa pergunta, identificada a partir do nosso *Fenômeno de Interesse*, das nossas variáveis-chave e de nosso *Modelo Modificado*. A elaboração de nossas estratégias e procedimentos também foi feita com o objetivo de responder nossas inquietações. Voltemos à nossa pergunta da pesquisa:

De que forma as Linguagens Vernácula e Matemática contribuem para o trabalho com as diferentes personalidades do número racional ao se adotar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas?

Relatar resultados é dizer como as evidências coletadas e interpretadas levaram nosso olhar de pesquisador a algumas respostas para essa pergunta específica. Buscaremos explicitar alguns resultados encontrados nos tópicos seguintes:

- **As linguagens contribuem para a construção de significados**

Para a construção do conhecimento sobre as personalidades do número racional ponto na reta, fração e quociente, o uso das linguagens vernácula e matemática foram essenciais. A contribuição da linguagem vernácula durante e aplicação do Projeto foi o maior destaque pois, através da oralidade, a professora pôde esclarecer as dúvidas dos alunos e conduzi-los à construção dos significados das personalidades do número racional estudadas.

A linguagem vernácula esteve muito presente na escrita dos alunos que foram convidados a escrever sobre as resoluções dos problemas. Mais do que isso, para entender cada personalidade, para entender cada enunciado de problema e para expor as resoluções na lousa e aos colegas os alunos recorreram a essa linguagem.

A diferença e as características de cada personalidade do número racional não são óbvias aos alunos. Por isso, eles precisaram refletir sobre o que o problema exigia e sobre qual o significado do número racional do problema: ele expressava um ponto na reta, expressava uma relação entre um todo e sua parte ou era o resultado de uma divisão? Para cada uma dessas ideias, foi preciso utilizar as duas linguagens para esclarecer os significados que estavam sendo construídos.

O uso da linguagem pictórica, aquela que faz uso de desenhos e ilustrações para expressar uma ideia ou mensagem, auxiliou os alunos a entenderem os enunciados dos problemas, principalmente os que envolviam o conceito de fração e quociente e, também, auxiliou na organização do raciocínio da resolução.

- **A linguagem vernácula auxilia no domínio da linguagem matemática**

Entre as contribuições da linguagem vernácula neste trabalho, está claro que a escrita em língua portuguesa auxilia muito na compreensão dos símbolos matemáticos e, consequentemente, no domínio da linguagem matemática. Os alunos, enquanto refletem as relações do número de cima e do número de baixo do número racional a fim de identificar uma fração, um quociente ou um ponto, estão mais próximos de utilizar o símbolo da barra fracionária corretamente, isto é, dominar os símbolos da linguagem matemática. Por exemplo, quando os alunos escrevem o que entendem por numerador e denominador de uma fração, eles devem compreender a ordem de escrever na barra fracionária. O mesmo ocorre quando identificam o dividendo e o divisor em um quociente. De forma geral, o domínio da linguagem vernácula contribui muito para o domínio dos princípios da escrita como sugere Pimm (1987).

Mais do que isso, a linguagem vernácula contribui para que o aluno compreenda a relação entre a parte e o todo na fração pois, ao ler o enunciado do problema, o aluno deve identificar a que “todo” a fração se refere. O enunciado é escrito em linguagem vernácula, porém a resolução é feita com a linguagem matemática. A boa compreensão da relação parte-todo do enunciado contribui para a resolução com símbolos matemáticos. Essa ideia vai ao encontro do que Onuchic e Leal Junior (2016) apresentam sobre as habilidades de leitura de um enunciado, enfatizando que o entendimento do enunciado conduz o leitor à construção de significados.

Além de entender o enunciado do problema, é feita uma tradução da linguagem vernácula para a linguagem matemática. Corroborando com Silveira (2015), essa tradução exige a compreensão das regras matemáticas e da sintaxe para que a semântica seja compreendida. Obtemos como resultado desta pesquisa que, ao trabalhar números racionais, foi importante esclarecer a sintaxe da língua portuguesa do enunciado para compreender a fração como relação parte-todo, o quociente com resultado de uma divisão e ponto racional bem definido na reta numérica.

- **A escrita possibilita reflexão sobre os conteúdos aprendidos**

As linguagens também possibilitam que os alunos possam escrever a resolução do problema em linguagem vernácula ou linguagem matemática. Isso pode auxiliar na reflexão sobre o que estão aprendendo, ou seja, a escrita é parceira do aluno autor do seu conhecimento. Como apresentamos em nossa fundamentação teórica, Pimm (1987) aponta que a escrita possibilita uma reflexão sobre o próprio pensamento, auxiliando numa maior compreensão.

- **A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas possibilita um trabalho que destaca o papel da Linguagem Vernácula e da Linguagem Matemática**

Durante o desenvolvimento do Projeto, a metodologia pedagógica escolhida mostrou alguns pontos que nos ajudam a concluir que ela contribui muito para um trabalho que destaca o uso da Linguagem Vernácula e da Linguagem Matemática. O principal ponto é que a metodologia visa ao trabalho em grupos e tem como princípio que o aluno é o construtor de seu conhecimento. Isso leva o aluno a refletir em grupo sobre o que está aprendendo e, se ele for convidado a desenhar e a escrever, poderá desenvolver suas linguagens. O trabalho em grupo contribui para que os alunos possam, ouvindo uns aos outros, expor suas dúvidas e descobrir o significado de palavras que desconhecem em um enunciado e perceber símbolos matemáticos usados. Esse trabalho que os alunos têm ao fazer uso da metodologia poderá conduzi-los ao domínio da linguagem matemática.

Outro ponto muito importante que merece ser destacado é que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas propõe dois momentos de leitura do enunciado de um problema (uma leitura individual e uma leitura em grupo). Esses momentos são muito oportunos para o professor identificar as dúvidas dos alunos, as palavras que desconhecem, os símbolos matemáticos que desconhecem e procurar esclarecer essas dúvidas. Nesse momento o professor pode recorrer a dicionários, questionar os alunos sobre o que acham que as palavras e os símbolos significam e conduzir à resolução do problema.

Quando elaboramos nossa *Pergunta da Pesquisa*, surgiram algumas perguntas secundárias que também deveriam ser respondidas. Eram elas: que dificuldades os alunos enfrentam ao ler e interpretar um problema escrito em Linguagem Vernácula ao passar para a Linguagem Matemática? Que contribuições a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas pode dar ao estudar-se a linguagem vernácula e a linguagem matemática acerca do conteúdo Números Racionais?

No que diz respeito ao trabalho com as personalidades do número racional ponto na reta, fração e quociente, a maior dificuldade ao ler o enunciado de um problema é conhecer o significado das palavras e interpretar os números ou os símbolos matemáticos. Algumas palavras que eram desconhecidas pela maioria dos alunos e apareceram nos problemas do nosso Projeto são: fatores, localizar, numerador, denominador e quociente.

Notamos também que os alunos precisam refletir muito sobre o problema para compreenderem o que ele exige. Normalmente estão acostumados a realizar operações com números sem pensar o que isso significa. Ao passar para a linguagem matemática, os alunos parecem não estar acostumados a refletir o que os números do enunciado estão expressando e logo resolvem alguma operação com os números que estão no enunciado, dizendo que o problema está resolvido.

Utilizar a linguagem matemática corretamente significa interpretar os símbolos matemáticos e, entre eles, os algarismos para saber qual a relação entre esses símbolos. Em nosso Projeto, cada problema apresentava uma personalidade do número racional e só era possível compreendê-la ao entender o problema e as relações matemáticas que ele apresentava.

A leitura do enunciado do problema como já foi explorada, o trabalho do professor como mediador que busca instigar a descoberta de significados e o papel do aluno que constrói seu próprio conhecimento são contribuições valiosas que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através de Problemas atribui ao trabalho com números racionais.

9. Conclusões

Começamos nossa pesquisa dizendo que pesquisar é investigar, é buscar respostas para nossas inquietações. Terminamos nossa pesquisa apresentando respostas que concluem nosso trabalho. Desde o início, com a escolha da Metodologia Científica de Romberg-Onuchic para conduzir nossos passos para a pesquisa, definimos quais nossas inquietações para realizá-la. O papel da Linguagem Vernácula e da Linguagem Matemática no trabalho com Números Racionais ao se fazer uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas conduziram nosso interesse de investigação.

O ensino de Números Racionais vai muito além do que apenas reconhecer as personalidades dos números racionais, assim como o trabalho com as linguagens não deve ser caso isolado de algumas aulas. Porém, apresentamos neste momento um recorte em que uma turma do sexto ano teve a oportunidade de trabalhar as personalidades ponto racional, fração e quociente ao resolver problemas com a mediação de uma professora que fez uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas e motivou o uso das linguagens vernácula e matemática.

Os alunos que ingressam no 6º ano do Ensino Fundamental já estudaram números racionais. Eles conhecem as frações unitárias, equivalência de frações e operações com frações. A partir desse ano, poderão ter contato com outras personalidades do número racional como quociente, localização do ponto racional na reta numérica, razão e proporção e conhecer o conjunto dos números racionais. Os documentos oficiais sugerem que o aluno que conclui o Ensino Fundamental saiba esses conteúdos. Sugere, também, que o aluno saiba se comunicar utilizando-se das linguagens vernácula e matemática. Mas será que esses alunos reconhecem as personalidades dos números racionais? Será que estão aprendendo a se comunicar?

Para o 6º ano, ao trabalhar com números racionais, percebemos que os alunos não têm o costume de escrever em aulas de matemática. Eles também não procuram descobrir o significado das palavras e símbolos matemáticos que usam nas aulas ou que encontram nos problemas. Parece que estão acostumados com o modelo de ensino tradicional em que os alunos quando perguntam ao professor, detentor do conhecimento, esse lhes dá respostas prontas. Isso vai contra a prática da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, que ainda não é muito comum nas escolas.

O trabalho em grupo e com resolução de problemas permite que os alunos discutam entre si o enunciado do problema e o que ele propõe. Essa discussão auxilia no entendimento de símbolos e de palavras desconhecidas. Por isso, vemos na metodologia citada uma riqueza para o trabalho em que o professor se preocupa que seu aluno utilize corretamente a linguagem matemática. Embora o GTERP apresente muitos trabalhos sobre a metodologia, a sala de aula ainda carece do trabalho com resolução de problemas em grupos de alunos.

A Linguagem Vernácula está claramente presente nas aulas de Matemática, mas, infelizmente, predomina na fala do professor. É comum ver que os alunos têm dúvidas sobre como utilizar os símbolos matemáticos e o que isso significa. Ao trabalhar com frações no 6º ano, por exemplo, os alunos não entendem o termo “fração” como uma parte do todo, não entendem que o número racional que expressa uma fração diz respeito a uma relação entre o número de cima e o número de baixo, que têm nomes e significados próprios, numerador e denominador, respectivamente.

Quando o aluno sabe relacionar os símbolos a, b da fração $\frac{a}{b}$, ele sabe usá-los corretamente e sabe o significado do numerador e denominador, além de reconhecer a relação parte-todo. E isso não se nota só para fração, mas para as outras personalidades do número racional que foram apresentadas neste trabalho. Em relação ao ponto na reta e ao quociente, o aluno também deve ter claro o significado de $\frac{a}{b}$ para que utilize os símbolos matemáticos corretamente.

Tínhamos como principal objetivo apontar como as linguagens vernácula e matemática estavam presentes em aulas de matemática e como poderiam ser ferramentas para o trabalho do professor ao adotar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. No percurso de nossa investigação, notamos o quanto este trabalho contribuiu para a área de Educação Matemática, pois essa Metodologia contribui com o trabalho das linguagens vernácula e matemática ao trabalhar números racionais, de forma que a discussão sobre o significado de palavras e compreensão dos enunciados de problemas na sala de aula permite que os alunos construam significados dos conceitos trabalhados no Projeto.

Todos os conceitos presentes nos problemas do Projeto envolviam outros conceitos da Matemática como pré-requisito. A unidade da reta numérica e a barra fracionária no ponto racional, divisão em partes iguais, uma relação entre a parte e o todo, a identificação do todo na fração, o reconhecimento do numerador e denominador de uma fração e seus significados como palavra e na Matemática foram alguns conceitos discutidos em sala de aula para que os alunos mostrassem quais os sentidos que possuíam sobre números racionais. Dessa forma, o professor conseguiu ajudá-los a construir significado sobre ponto racional, fração e quociente.

Mostramos em nossa pesquisa que, para o aluno possuir domínio da linguagem matemática, a linguagem vernácula é uma forte aliada. Mais do que isso, a linguagem vernácula está intrinsicamente relacionada com a Linguagem Matemática. Dessa forma, os alunos que são incentivados a escrever em Linguagem Vernácula as resoluções de seus problemas, sobre seus conhecimentos, sobre o que entendem por uma palavra ou por um símbolo matemático respeitando a gramática da Língua Portuguesa, poderão dominar a linguagem matemática de modo a saber ler e escrever matematicamente.

Não podemos esquecer que o resultado deste trabalho teve forte contribuição da metodologia pedagógica escolhida. Resolver problemas seguindo-a é uma maneira que propicia ao professor convidar seus alunos a darem atenção ao importante papel das linguagens em aulas de Matemática.

Deixamos este trabalho ao público que possa se interessar pelo tema, em especial aos professores de Matemática da Escola Básica. Acreditamos que, se o professor de Matemática se preocupar com o correto uso da Linguagem Matemática em suas aulas, se apoiando na Linguagem Vernácula ao fazer uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, poderá contribuir para a formação de um aluno mais consciente, melhor preparado para ler e interpretar problemas, capaz de se comunicar e expressar seu conhecimento matemático utilizando símbolos e palavras do universo da Matemática de forma correta.

Compreendemos que existem muitas pesquisas que se preocupam com o estudo da linguagem e da linguagem matemática. Também existem muitos pesquisadores que se debruçaram em estudos sobre números racionais em aulas de Matemática. Esperamos contribuir para futuras pesquisas que, assim como esta, se interessou em ver a Linguagem Matemática e a Resolução de Problemas ao se trabalhar com números racionais na sala de aula. Esta nossa pesquisa procurou, especificamente, trabalhar com os conceitos: ponto racional, fração e quociente valorizando a linguagens vernácula e a linguagem matemática em aulas de uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola estadual e pública do Estado de São Paulo.

Convidamos os pesquisadores da área de Educação Matemática a “voltar seus olhares” para o tema, buscando estender nosso trabalho a outras personalidades do número racional que não foram contempladas aqui, bem como investigar o papel da Linguagem Vernácula e da Linguagem Matemática ao se trabalhar com outros conteúdos da Matemática.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que Através da Resolução de Problemas. In: ONUCHIC, L. R. et al. (org.). **Resolução de Problemas: Teoria e Prática.** Jundiaí: Paco Editorial, 2014. P. 35-.52

ANDRADE, R. E. H. **Introdução à Teoria da Comunicação**. Assis, 1985.

AZZOLINO, A. Writing as a Tool for Teaching Mathematics: The Silent Revolution. In: **Teaching & Learning Mathematics in the 1990s**. Yearbook 1990. NCTM, 1990, p. 92-100.

BEHR, M. J.; HAREL, G.; POST, T.; LESH, R. Rational number, ratio and proportion. In: GROUWS, D. A. (Ed.) **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. New York: Macmillan, 1992. P. 296-333.

BOTTA, L. S. **Números Racionais e raciocínio proporcional: considerações sobre o ensino-aprendizagem**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro. 1997, 185f.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Língua Portuguesa.** (Primeiro e segundo ciclos do Ensino Fundamental). Brasília: MEC, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** (Terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental). Brasília: MEC, 1998.

BRITO, C. C. **Ler em português e escrever em matemática: ou vice-versa.** Universidade Federal do Rio Grande do Norte. 2013. Acesso em

30/03/2017. Disponível em <http://www.grupocontar.com.br/arquivos/2013/Ler_em_portugues_e_escrever_em_matematica_-ou_vice_versa.pdf>

CURCIO, F. R. Mathematics as Communication: Using a Language-Experience Approach in the Elementary Grades. In: **Teaching & Learning Mathematics in the 1990s**. Yearbook 1990. NCTM, 1990, p. 69-75.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática: da teoria à prática.** Campinas, SP: Papirus, 1996.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**, Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

GOOS, M. Learning Mathematics in a Classroom Community of Inquity. **In: Journal for Research in Mathematics Education.** Vol. 35, No. 4, p. 258-291, 2004.

IRONS, R. R.; IRONS, C. J. Language Experiences: A Base for Problem Solving. In: **New directions for Elementary School Mathematics**. Yearbook 1989. NCTM, 1989, p. 85-98.

KIEREN, T. E. **Personal Knowledge of Rational Numbers: Its Intuitive and Formal Development**. In: HIEBERT, J. & BEHR, M. (Eds.) Numebr concepts and operations in the middle grades. 3 ed. Reston: LEA, NCTM, 1991. p. 162-181.

KILPATRICK, J. Fincando estacas: uma tentativa de demarcar a Educação Matemática como campo profissional e científico. Tradução de MISKULIN, R. G. S.; PASSOS, C. L. B.; GRANDO, R. C.; ARAÚJO, E. A. **ZETETIKÉ** – Campinas – UNICAMP, n. 5, p.89-98, 1996.

LAMON, S. J. Presenting and Representing From Fractions to Rational Numbers. In: **The Roles of Representation in School Mathematics.** Yearbook. Reston: NCTM, 2001. P. 146- 165.

LURIA, A. R. **Pensamento e Linguagem: as últimas conferências de Luria**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1987.

MACHADO, N. J. **Epistemologia e didática: As concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente.** Cortez Editora, 2ª Ed., 1947.

MACHADO, N. J. **Matemática e Língua Materna: análise de uma impregnação mútua**. Cortez Editora, 6ª Ed., 2011.

MENEZES, L. **Matemática, Linguagem e Comunicação.** In: Revista Millenium. Repositório Científico do Instituto Politécnico de Viseu, Universidade de Lisboa: Ed. Instituto Politécnico de Viseu. n°20. Outubro/2000.

MORAIS, R. S.; ONUCHIC, L. R. Uma abordagem Histórica da Resolução de Problemas. In: ONUCHIC, L. R. et al. (org.). **Resolução de Problemas: Teoria e Prática.** Jundiaí: Paco Editorial, 2014. P. 17-34.

MIURA, I. T. The Influence of Language on Mathematical Representations. In: The Roles of Representation in School Mathematics. Yearbook, 2001. Reston: NCTM. 53-62.

NCTM. **Professional Standards for Teaching Mathematics**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1991.

NCTM. **Principles and standards for school mathematics**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2000.

OHLSSON, S. Mathematical Meaning and Application Meaning in the Semantics of fractions and Related Concepts. In: HIEBERT, J. & BEHR, M. (Eds.). **Numbers Concepts and Operations in the Middle Grades**. 3. Ed. Reston: NCTM. 1991. p.53-92

ONUCHIC, L. R.; BOTTA, L. S. Uma nova visão sobre o ensino e a aprendizagem dos números racionais. **Revista de Educação Matemática**. São Paulo: SBEM. Ano 5, n. 3, 1997, p. 5-8.

ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V. (org). **Pesquisa em Educação Matemática**. São Paulo: Editora UNESP, 1999, p. 199-220.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (org.) **Educação Matemática: pesquisa em movimento.** São Paulo: Cortez, 2004. p. 212- 231.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. As diferentes “Personalidades” do número racional trabalhadas através da Resolução de Problemas. In: **BOLEMA**, Rio Claro (SP), Ano 21, nº 31, 2008, p. 79 -102.

ONUCHIC, L. R.; NOGUTI, F. C. H. A Pesquisa Científica e a Pesquisa Pedagógica. In: ONUCHIC, L. R. et al. (org.). **Resolução de Problemas: Teoria e Prática.** Jundiaí: Paco Editorial, 2014. P. 53-68.

ONUCHIC, L. R.; LEAL JÚNIOR, L. C. A Influência da Leitura na Resolução de Problemas: Questões de sentidos e significados. In: **REMATEC**, Natal-RN, Ano 11, n° 21, p. 24-46, 2016.

PIMM, D. **Speaking Mathematically: Communication in Mathematics Classrooms**. London and New York: Routledge , 1987.

PIRONEL, M. **A avaliação integrada no processo de Ensino-Aprendizagem da Matemática**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro. 2002, 193f.

RAIMES, A. **Why Write? From Purpose to Pedagogy**. English Teaching Forum, 1987.

REYS, R. E.; SUDAM, M. N.; LINDQUIST, M. M.; LAMBDIN, D. V., SMITH, N, L. **Helping Children learn Mathematics. Active learning edition with integrated field activities**. 7th Edition. 2004.

ROMBERG, T. A. Perspectivas sobre o Conhecimento e Métodos de Pesquisa. Tradução de ONUCHIC, L. R.; BOERO, M. L. **BOLEMA- Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro- UNESP, n.27, p. 93-139, 2007.

SILVEIRA, M. R. A. **Matemática, discurso e linguagens: contribuições para a Educação Matemática.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.

SOUZA, A. C. P. **Análise Combinatória no Ensino Médio apoiada na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro. 2010, 344f.

SMITH III, J. P. The Development of Students' Knowledge of Fractions and Ratios. In: LITWILLER, B; BRIGHT, G. (org.). **Making Sense of Fractions, Rations, and Proportions.** Yearbook 2002. NCTM, 2002, p. 3-18.

TINOCO, L. A. A. **Álgebra: pensar, calcular, comunicar...** 2 ed. Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2011.

TRAVASSOS, M. L. G. L.; ARAIUM, R.; MORAIS, R. S.; SOUZA, T. C. P. Números e Operações. In: ONUCHIC, L. R. et al. (org.). **Resolução de Problemas: Teoria e Prática.** Jundiaí: Paco Editorial, 2014. P. 71-99.

VAN DE WALLE, J. A. LOVIN, L. H. **Teaching student centered mathematics** Grades 3-5. Volume 2 of Van de Walle professional mathematics series. 2006.

VAN DE WALLE, J. A. LOVIN, L. H. **Teaching student centered mathematics** Grades 5-8. Volume 3 of Van de Walle professional mathematics series. 2006.

VAN DE WALLE, J. A; KARP, K. S.; BAY-WILLIAMS, J. M. Elementary and middle school mathematics: teaching developmentally. 8ª edição. 2013.

VERGNAUD, G. Multiplicative Structures. In: **Numbers concepts and operations**. Handbook 1988, p. 141-161. 1988.

VYGOTSKY, L. S. **Pensamento e linguagem.** São Paulo: Martins Fontes. 2008.

APÊNDICE A: Carta de autorização enviada à escola

CARTA DE AUTORIZAÇÃO ENVIADA À ESCOLA

Rio Claro, 05 de junho de 2017.

Prezada Senhora,

Eu, Sabrina Aparecida Martins Vallilo, portadora da carteira de identidade número 48754123-6, venho por meio deste solicitar à Vossa Senhoria permissão para aplicação de meu projeto para coleta de dados de minha pesquisa de Mestrado, do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, da Unesp de Rio Claro – SP, sob orientação da Profª. Drª. Lourdes de la Rosa Onuchic. O objetivo do projeto é coletar dados para analisar a o domínio sobre a linguagem matemática que os alunos possuem acerca dos temas que tratam do conteúdo Números Racionais, através da Resolução de Problemas. Acreditamos que, com essa metodologia de ensino, possamos favorecer o processo de ensino-aprendizagem dos mesmos. O período para a realização do referido projeto será iniciado em junho e terminado agosto de 2017.

Atenciosamente,

____

Sabrina Aparecida Martins Vallilo

Ilma Srª

Diretora da Escola

APÊNDICE B: Carta de autorização enviada aos pais

CARTA DE AUTORIZAÇÃO ENVIADA AOS PAIS

Rio Claro, ____ de _________de 2017.

Eu, ____, portador da carteira de identidade número _________________________, declaro para os devidos fins que autorizo **Sabrina Aparecida Martins Vallilo** a utilizar toda a informação captada – filmagem e áudio – durante a participação de meu filho (a), _______________________________________, na sala de aula, para fins de sua pesquisa de mestrado no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP de Rio Claro – SP.

_______________________ _________________________

Aluno Responsável

APÊNDICE C: Termo de Compromisso

TERMO DE COMPROMISSO

Escola: Escola Estadual Carolina Augusta Seraphim
Conteúdo: Números Racionais
Série (Ano): 5ª série (6º ano)
Quantidade de Alunos: ___ alunos
Quantidade de Aulas Previstas: ____ horas/aula
Período: ___/___/___ até ___/___/___

Introdução

Este termo de compromisso tem por objetivo estabelecer parâmetros para nortear o desenvolvimento e a organização de um trabalho diferenciado em Matemática, apontando as responsabilidades e os direitos dos alunos e da professora. O trabalho será realizado na disciplina de Matemática na 5ª série (6º ano) do Ensino Fundamental, em uma escola estadual, localizada na cidade de Rio Claro – SP. Será desenvolvida parte do conteúdo matemático pertinente à 5ª série (6º ano) do Ensino Fundamental, proposto pela instituição, cujo trabalho será aplicado pela pesquisadora e pelo professor da turma, utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, sob a observação participante da pesquisadora Sabrina Aparecida Martins Vallilo. O trabalho será dividido em dois momentos: um momento de desenvolvimento de atividade diagnóstica e um outro momento do desenvolvimento do conteúdo Números Racionais.

Normas:

- As regras da escola deverão ser obedecidas;
- O trabalho será desenvolvido de forma cooperativa e colaborativa. Os estudantes trabalharão em pequenos grupos, com o objetivo de resolver problemas visando à construção de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos;
- Os grupos serão formados por quatro alunos, aceitando-se três na impossibilidade de um quarto elemento juntar-se ao grupo, devido à insuficiência do número de alunos na sala de aula;

- Todos deverão engajar-se na discussão dos problemas apresentados;
- O trabalho individual de cada membro terá um efeito direto sobre o sucesso do grupo;

APÊNDICE D: Folhas de problemas que foram entregues aos alunos

Nome:____Série:_______

Data: ___/___/ 2017

Problema 1: Como se apresenta a retangularização dos seguintes números:

9, 10, 11, 12 e 13?

Retangularizar um número é procurar dois fatores que, quando multiplicados, resultem nesse número. A figura que ilustra esse procedimento é um retângulo.

Quais são suas observações a partir da retangularização desses números?

Nome:____Série:_______

Data: ___/___/ 2017

Problema 2: Localize os números $\frac{2}{5}$, $\frac{7}{5}$ e $\frac{3}{10}$ na reta.

Nome:____Série:________

Data: ___/___/ 2017

Problema 3:

Marina comprou um bolo e o partiu em 5 partes iguais. Após o jantar Marina comeu 3 pedaços desse bolo. Que número representa a quantidade de bolo que Marina comeu?

Nome:____Série:________

Data: ___/___/ 2017

Problema 4:

Do salário do meu pai, ele gastou 2/5 com aluguel. Do que sobrou gastou metade com alimentação. Da segunda sobra, colocou 1/3 na poupança. Restaram-lhe R$ 300,00. Qual é o valor do salário de meu pai?

Nome:_______________________________________Série:_______

Data: ___/___/ 2017

Problema 5:

Arnaldo tinha 75 bolinhas de gude. Deu a seu amigo Rodrigo 1/3 delas; do que sobrou deu 2/5 a Carlos e a Daniel 1/6 do restante. Qual o número de bolinhas que coube a cada um deles no final dessa partilha?

Nome:_______________________________________Série:_______

Data: ___/___/ 2017

Problema 6:

Arnaldo tinha 75 bolinhas de gude. Deu a seu amigo 1/3 delas e deu 2/5 delas a Carlos. Qual o número de bolinhas que coube a cada um deles no final dessa partilha?

Nome:____Série:_______

Data: ___/___/ 2017

Problema 7:

Problema Três pizzas devem ser divididas igualmente entre cinco pessoas. Quanto de pizza cada pessoa comerá?

Nome: ____

1. Você já tinha trabalhado em grupos em aulas de Matemática?

2. Você gostou de trabalhar em grupos? Por quê?

3. Você gostou de resolver os problemas na lousa e ver como os colegas fizeram?

4. Você achou difícil resolver os problemas?

5. O que você realmente aprendeu durante as atividades desenvolvidas?

6. Cite cinco conceitos ou conteúdos que você aprendeu com os problemas.

7. Desenvolva dois problemas sobre o que você aprendeu durante as aulas e tente resolvê-los.