

RESSALVA

Atendendo solicitação do(a) autor(a), o texto completo desta dissertação será disponibilizado somente a partir de 17/04/2020.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

EDUARDO CARVALHO PINHEIRO

Equações de Clohessy-Wiltshire: modelo linear para variação de massa nas manobras evasivas de veículos espaciais

Guaratinguetá

2018

Eduardo Carvalho Pinheiro

Equações de Clohessy-Wiltshire: modelo linear para variação de massa nas manobras evasivas de veículos espaciais

Dissertação de Mestrado apresentado ao Conselho de Curso da Pós-Graduação em Física da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Mestre em Física.

Orientador: Rafael Sfair de Oliveira

Co-orientador: Antônio Delson Conceição de Jesus

Guaratinguetá

2018

Pinheiro, Eduardo Carvalho
P654e Equações de Clohessy-Wiltshire: modelo linear / para variação de
 massa nas manobras evasivas de veículos espaciais – Guaratinguetá, 2018.
 95 f : il.
 Bibliografia: f. 95

 Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de
Engenharia de Guaratinguetá, 2018.
 Orientador: Prof. Dr. Rafael Sfair
 Co-orientador: Prof. Dr. Antônio Delson Conceição de Jesus

 1. Veículos espaciais – Sistemas de propulsão. 2. Satélites artificiais -
Órbitas. I. Título.

CDU 629.7(043)


Luciana Máximo
Bibliotecária/CRB-8 3595

EDUARDO CARVALHO PINHEIRO

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
“MESTRE EM FÍSICA”

PROGRAMA: FÍSICA

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO



Prof. Dr. Konstatin Georgiev Kostov
Coordenador

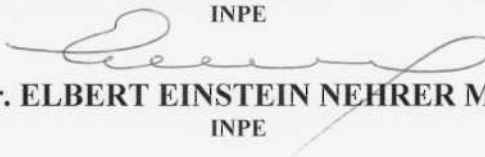
BANCA EXAMINADORA:



Prof. Dr. RAFAEL SFAIR OLIVEIRA
Orientador / UNESP/FEG



Prof. Dr. ANTONIO FERNANDO BERTACHINI DE ALMEIDA PRADO
INPE



Prof. Dr. ELBERT EINSTEIN NEHRER MACAU
INPE

Abril de 2018

DADOS CURRICULARES

EDUARDO CARVALHO PINHEIRO

NASCIMENTO 15/11/1984 - Caxias / MA

FILIAÇÃO Elias Tadeu de Oliveira Pinheiro
Raimunda Vilanova de Carvalho

2009 / 2014 Curso de Graduação, Licenciatura em Física,
Universidade Estadual de Feira de Santana

2015 / 2018 Curso de Pós Graduação em Física, nível Mestrado,
Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá,
Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Jesus Cristo por ter me ensinado a escolher os melhores caminhos para conduzir minha vida.

Aos meus pais pelo apoio e incentivo durante o curso.

Aos meus orientadores Prof. Dr. Rafael Sfair de Oliveira e Prof. Dr. Antônio Delson pela paciência que tiveram para responder a todas as minhas perguntas e pelo aprendizado que adquiri durante suas orientações.

Não posso deixar de agradecer Rafael Ribeiro e Ricardo Moraes pela paciência em sanar minhas dúvidas computacionais.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Obrigado a todos!

Este trabalho contou com o apoio financeiro da:
CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

RESUMO

Detritos espaciais (DE) são objetos que possuem altas velocidades e são capazes de inviabilizar o sucesso de missões espaciais, caso venham a colidir com veículos espaciais, além de colocar em risco a segurança dos astronautas. O nosso modelo matemático é baseado, inicialmente, nas equações dinâmicas derivadas de Clohessy-Wiltshire (1960). Estas equações regem o movimento relativo entre dois corpos e seu uso é apropriado aqui porque descrevemos o movimento relativo entre um veículo espacial e um DE. Dado ao fato de soluções do modelo linear apresentar vários fatores resultou em algumas dificuldades nas simulações computacionais, mas obtivemos êxito em contornar essas dificuldades e conseguimos implementar manobras evasivas usando o modelo linear.

PALAVRAS-CHAVE: Detritos Espaciais. Propulsão. Manobras.

ABSTRACT

Space debris (DE) are objects that have high speeds and are capable of unfeasible space missions successful if they collide with space vehicles, as well as endangering the safety of astronauts. Our mathematical model is based initially on the dynamic equations derived from Clohessy-Wiltshire (1960). These equations govern the relative motion between two bodies and their use is appropriate here because we describe the relative motion between a space vehicle and an ED. Due to the fact that solutions of the linear model have several factorials, some difficulties were encountered in the computational simulations, but we succeeded in getting around these difficulties and we were able to implement evasive maneuvers using the linear model.

KEYWORDS: Space Debris. Propulsion. Maneuvers.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 -	Ilustração da queima do combustível de um veículo espacial, visto por um referencial inercial na Terra.	19
Figura 2 -	Vetor \vec{v}' sendo representado pela soma dos vetores \vec{v}_e e $\vec{v} + d\vec{v}$	20
Figura 3 -	Esquema mostra o sistema de coordenada dos satélites.	25
Figura 4 -	Esquema da dinâmica relativa.	26
Figura 5 -	Possibilidades de Colisão versus velocidade relativa de colisão.	32
Figura 6 -	Possibilidades de Colisão versus posição inicial.	32
Figura 7 -	Curva de dinâmica relativa.	35
Figura 8 -	Curva de dinâmica relativa.	36
Figura 9 -	Distribuição do número condições iniciais versus velocidade relativa de colisão.	52
Figura 10 -	Distribuição do número condições iniciais versus velocidade relativa de colisão.	53
Figura 11 -	Distribuição do número condições iniciais versus velocidade relativa de colisão.	54
Figura 12 -	Distribuição do número condições iniciais versus velocidade relativa de colisão.	54
Figura 13 -	Condições iniciais em coordenadas esféricas que fornecem $r_{max} \leq 2000km$	55
Figura 14 -	Condições iniciais em coordenadas esféricas que fornecem $r_{max} \leq 2000km$	56
Figura 15 -	Condições iniciais em coordenadas esféricas que fornecem $r_{max} \leq 2000km$	56
Figura 16 -	Condições iniciais em coordenadas esféricas que fornecem $r_{max} \leq 2000km$	57
Figura 17 -	Representação dos vetores posição do veículo espacial \vec{R}_v e do detrito espacial \vec{R}_D em relação ao referencial inercial na Terra.	64
Figura 18 -	Representação do vetor posição do veículo em relação à Terra.	65
Figura 19 -	Trajetória de colisão em relação a Terra	67
Figura 20 -	Curva de dinâmica relativa.	69
Figura 21 -	Curva de dinâmica relativa.	69

Figura 22 - Curva de dinâmica relativa.	70
Figura 23 - Curva de dinâmica relativa.	71
Figura 24 - Curva de dinâmica relativa.	71
Figura 25 - Trajetória de colisão em relação a Terra	73
Figura 26 - Trajetória de colisão em relação a Terra.	73
Figura 27 - Trajetória de colisão em relação a Terra	74
Figura 28 - Curva de dinâmica relativa.	75
Figura 29 - Curva de dinâmica relativa.	76
Figura 30 - Curva de dinâmica relativa.	77
Figura 31 - Curva de dinâmica relativa.	77
Figura 32 - Curva de dinâmica relativa.	78
Figura 33 - Curva de dinâmica relativa.	78
Figura 34 - Ilustração de uma manobra evasiva numa situação real. Onde r_v é o raio do veículo e r_l é o raio do lixo espacial.	80
Figura 35 - Curva de dinâmica relativa.	89
Figura 36 - Curva de dinâmica relativa.	90
Figura 37 - Curva de dinâmica relativa.	90
Figura 38 - Curva de dinâmica relativa.	91
Figura 39 - Curva de dinâmica relativa.	91
Figura 40 - Curva de dinâmica relativa.	92
Figura 41 - Curva de dinâmica relativa.	92
Figura 42 - Curva de dinâmica relativa.	93
Figura 43 - Curva de dinâmica relativa.	93
Figura 44 - Curva de dinâmica relativa.	94
Figura 45 - Curva de dinâmica relativa.	94
Figura 46 - Curva de dinâmica relativa.	95
Figura 47 - Curva de dinâmica relativa.	95
Figura 48 - Curva de dinâmica relativa.	96
Figura 49 - Curva de dinâmica relativa.	96
Figura 50 - Curva de dinâmica relativa.	97
Figura 51 - Curva de dinâmica relativa.	97
Figura 52 - Curva de dinâmica relativa.	98
Figura 53 - Curva de dinâmica relativa.	98
Figura 54 - Curva de dinâmica relativa.	99
Figura 55 - Curva de dinâmica relativa.	99
Figura 56 - Curva de dinâmica relativa.	100
Figura 57 - Curva de dinâmica relativa.	100
Figura 58 - Curva de dinâmica relativa.	101

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 -	Valores típicos de velocidades de exaustão de foguetes químicos . . .	22
Tabela 2 -	Impulso específicos típicos de propulsores	23
Tabela 3 -	Análise da condição de expansão para altitude de $220km$, para o caso homogêneo.	57
Tabela 4 -	Análise da condição de expansão para altitude de $700km$, para o caso homogêneo.	58
Tabela 5 -	Dados para avaliar a condição de existência do logaritmo na altitude de $220km$, onde $t_c = 2667s$ e $\chi = 5$	59
Tabela 6 -	Dados para avaliar a condição de existência do logaritmo na altitude de $700km$, onde $t_c = 2980kms$ e $\chi = 5$	60
Tabela 7 -	Dados usados na equação (112) e cálculo da velocidade final (v_{xf}) para $v_e = 1,7km/s$ e $t_c = 2667s$	61
Tabela 8 -	Dados usados na equação (112) e cálculo da velocidade final (v_{xf}) para $v_e = 0,5km/s$. Altitude de $220km$ e $t_c = 2667s$. Δv_x são valores aproximados.	62
Tabela 9 -	Dados usados na equação (112) e cálculo da velocidade final(v_{xf}) para $v_e = 0,5km/s$. Altitude de $700km$ e $t_c = 2980s$. Δv são valores aproximados.	62
Tabela 10 -	Análise da condição de expansão para veículos espaciais na altitude de $220 km$	63
Tabela 11 -	Análise da condição de expansão para veículos espaciais na altitude de $700 km$, para o caso $r_0 = 300 km$	63
Tabela 12 -	Posição relativa final dos veículos espaciais para as mesmas condições iniciais. Empuxo aplicado na mesma direção de \vec{v}_e	72
Tabela 13 -	Posição relativa final dos veículos espaciais para condições iniciais diferentes na altitude de $700km$. Empuxo aplicado na mesma direção de \vec{v}_e	79

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	OBJETIVOS	14
1.2	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	15
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	16
3	PARÂMETROS DE PERFORMANCE DE VEÍCULOS ESPACIAIS	19
3.1	EQUAÇÃO DE TSIOLKOVSKY	19
3.2	EMPUXO E IMPULSO ESPECÍFICO	21
3.3	PROPULSORES	21
3.3.1	Propulsores Químicos	22
3.3.2	Propulsão Elétrica	22
4	EQUAÇÕES DE CLOHESSY-WILTSHIRE	24
4.1	EQUAÇÕES DA DINÂMICA DE RENDEZVOUS	24
4.2	EQUAÇÕES DA DINÂMICA RELATIVA PARA MANOBRAS EVASIVAS	26
4.3	DINÂMICA RELATIVA DE COLISÃO	29
4.4	MANOBRAS EVASIVAS: MODELO EXPONENCIAL PARA O DECAIMENTO DA MASSA DE COMBUSTÍVEL	33
5	EQUAÇÕES DE CLOHESSY-WILTSHIRE: MODELO LINEAR PARA VARIAÇÃO DE MASSA NAS MANOBRAS EVASIVAS DE VEÍCULOS ESPACIAIS	37
5.1	SOLUÇÃO PARTICULAR DO MODELO LINEAR	37
6	RESULTADOS	50
6.1	DINÂMICA DE COLISÃO E POSIÇÃO RELATIVA MÁXIMA	50
6.2	CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA, CONVERGÊNCIA DAS SOLUÇÕES EM SÉRIES E INCREMENTO NA VELOCIDADE DO VEÍCULO ESPACIAL	58
6.2.1	Trajetória de colisão	64
6.3	DINÂMICA RELATIVA DE MANOBRAS DE EVASÃO: MODELO LINEAR PARA VARIAÇÃO DE MASSA DO COMBUSTÍVEL	67
7	CONCLUSÃO	82
	REFERÊNCIAS	85
	APÊNDICE A: CURVAS DE DINÂMICA RELATIVA I	89

1 INTRODUÇÃO

A exploração do espaço de maneira freqüente só é possível graças aos foguetes que possuem empuxo elevado para vencer a força gravitacional da Terra e colocar objetos em órbita. A tecnologia dos foguetes já era conhecida pelos chineses por volta do século *VI d.C.* Eram muito usados em datas comemorativas e com o tempo foram transformados em armas de guerra. Mas, foi um cientista russo chamado Konstantin Tsiolkovky (1857–1935) que, em 1903, apresentou a tese de que foguetes poderiam chegar ao espaço usando propelentes líquido. Já o americano Robert H. Goddard (1882 – 1945) realizou experimentos com foguetes no início do século *XX* e seu interesse baseava-se em como os foguetes atingiam altitudes maiores que os balões mais leve que o ar. Por meio dos seus testes, chegou à conclusão de que os foguetes conseguem ter maior eficiência no vácuo do que no ar e que foguetes com múltiplos estágios atingiriam altitudes ainda maiores. Dessa maneira seria possível atingir a velocidade necessária para escapar da força gravitacional da Terra . Porém, o grande marco da atividade humana no espaço viria com os estudos do engenheiro Sergei Pavlovitch Korolev (1907 – 1966) (PÔRTO, 2010). A partir de 1946, ele trabalhou no desenvolvimento de foguetes com capacidade de levar cargas ao espaço. Assim surgiu o Semiorca ou *R7*, um foguete com a capacidade de colocar uma massa de 1300 *kg* em órbitas baixas. Por apresentar excelentes resultados logo nos primeiros testes a Academia de Ciência da URSS decidiu, em 1956, usar o Semiorca para o lançamento de um satélite artificial chamado de Sputnik 1, cujo lançamento ocorreu em 4 de Outubro 1957 (WINTER; MELO, 2007). A partir deste feito histórico o homem foi desenvolvendo e aperfeiçoando tecnologias espaciais capazes não só de orbitar a Terra mas também de chegar a outros planetas.

A exploração espacial possibilitou a humanidade realizar diversos avanços tecnológicos tais como monitoramento do clima, comunicação, observações astronômicas e também aplicações militares. Todavia, a atividade espacial humana causou o aumento do número de objetos orbitando a Terra, contribuindo significativamente para o acúmulo de detrito espacial.

Objetos que orbitam a Terra sem função alguma tais como estágios de foguetes, resíduos de combustível de propulsão química, ferramentas que escapam das mãos dos astronautas, satélites artificiais fora de operação, meteoroides, entre outros, são considerados detritos espaciais (DE).

Os foguetes capazes de colocar satélites em órbita possuem vários estágios que vão sendo descartados na medida em que seu combustível se esgota. Enquanto os estágios

dos foguetes vão sendo descartados são desprendidos lascas de tinta, pequenos parafusos e os resíduos de combustível acabam virando pequenos detritos.

O sistema de propulsão dos foguetes que usam propelentes sólidos ("Solid Rocket Motors- SRM) contribuem significativamente para geração de detritos. Estes motores podem incluir até 20% de partículas de alumínio, a fim de estabilizar a combustão e o óxido de alumínio gerado durante o empuxo representa 30% dos produtos gerados pela queima de propelente. Por exemplo, em 1997 foram ejetadas 16 toneladas de óxido de alumínio devido à atividade de motores do tipo SRM. A combustão usada para estabilizar a órbita ejeta partículas com baixa velocidade, de tamanhos entre 1 a 2 centímetros e são compostas por uma mistura de alumínio e óxido de alumínio. A maior parte dos DE da ordem de centímetros são oriundos do uso de SRM (ESA, 2006).

Um objeto de 10 *cm* não é muito grande quando comparado com as dimensões de um satélite artificial. Porém, um objeto pequeno, orbitando em torno da Terra, viajando a uma velocidade da ordem de *km/s*, tem energia suficiente para danificar a Estação Espacial Internacional, liberando o oxigênio, destruindo aparelhos eletrônicos, perfurar o tanque de combustível de uma nave ou a roupa de um astronauta, fatos que comprometeriam toda missão espacial (PENG, 2015).

Normalmente, DE são detectados e monitorados usando radares e telescópios. No entanto, não é possível detectá-los aqui da Terra quando são muito pequenos (menores que 10 *cm*). Para este fim, entre Abril de 1984 e Janeiro de 1990, a NASA lançou o "Long Duration Exposure Facility"(LDEF) para recolher informações sobre DE que não podem ser rastreados pelos radares na superfície da Terra. Esse satélite cilíndrico tinha dimensões de 9 *m* de comprimento e 4,3 *m* de diâmetro, foi coberto com placas planas e ficou em órbita por 5,7 anos. Quando foi recuperado pelo ônibus espacial Columbia, toda a sua superfície exterior de cerca de 130 *m*² foi exaustivamente examinada para verificar os danos causados pelos impactos de micrometeoroides e DE. Verificou-se mais de 4.600 impactos, de tamanhos que variavam de 0.3 *mm* a 5 *mm* (HALL, 2014).

A fragmentação de objetos em órbitas de operações espaciais terrestres é outro fator que contribui para o aumento de DE. Por exemplo, caso ocorra uma colisão entre dois satélites artificiais, os fragmentos gerados colidiriam entre si e produziriam mais fragmentos, gerando um efeito cascata, conhecido também como efeito Kessler (KESSLER; COUR-PALAIS, 1978).

Um exemplo disso ocorreu em 24 de julho de 1996, quando foi registrado a colisão do microsatélite Cerise que na ocasião foi atingido por um pedaço de estágio do foguete Ariane que explodiu dez anos antes (JESUS et al., 2012). Em 10 de fevereiro de 2009, um satélite militar russo (Cosmos 2251) e outro de comunicação dos Estados Unidos (Iridium 33) colidiram a cerca de 780 km acima do território da Sibéria, na Rússia. Esta é a primeira colisão já registrada entre satélites artificiais (HALL, 2014).

Outro caso de fragmentação de DE ocorreu em 2007, para testar uma arma anti-satélite a China destruiu o próprio satélite meteorológico que estava fora de operação. Estima-se

que esse episódio gerou 150000 fragmentos maiores que 1cm (PENG, 2015).

Os acidentes citados servem de alerta para que seja desenvolvida uma política internacional que vise a busca de meios para explorar o espaço sem comprometer o futuro das missões espaciais.

As órbitas LEO (Low-altitude Earth Orbit), cujo a altitude vai de 160 *km* a 2000 *km*, e GEO (Geostationary Earth Orbit), com altitude acima de 35800 *km*, são as regiões onde há a maior população de objetos artificiais, mas temos também objetos na região intermediária a essas duas órbitas conhecida como órbita MEO (Medium Earth orbit). Há um esforço por parte de algumas agências espaciais em adotar medidas para minimizar a geração de DE nessas regiões. A Inter-Agency Space Debris Coordination Committee (IADC), por exemplo, tem a finalidade de trocar informações sobre a exploração e rastreamento de DE. Porém, não haverá resultado significativo se somente uma nação aderir medidas preventivas, pois o espaço é um domínio público e deve ser protegido por todos. O problema do DE ainda se perpetuará por um longo tempo, até que os estudos para modificar as técnicas utilizadas na exploração espacial sejam aplicáveis (ESA, 2006).

Diante do problema exposto e dado o fato de não existir uma tecnologia para limpar o espaço, é necessário que os veículos espaciais sejam capazes de realizar manobras de evasão para evitar colisões com o lixo espacial, evitando possíveis danos que venham a inviabilizar a missão espacial e a perda de uma quantidade significativa de dinheiro.

1.1 OBJETIVOS

O objetivo geral deste trabalho é estudar o problema da viabilidade de manobras orbitais evasivas de veículos espaciais, quando há risco iminente de colisão com DE. O estudo da dinâmica relativa entre veículo e DE se dará por meio das soluções analíticas das equações de Clohessy-Wiltshire (1960). Estas equações quando solucionadas para o caso homogêneo, nos permitem impor condições iniciais que irão garantir que haverá colisão ao final de um certo intervalo de tempo. Estas condições iniciais serão catalogadas e quando um veículo se enquadrar dentro destas condições iniciais de colisão, ele poderá acionar o sistema de propulsão, dando início à manobra de evasão.

Originalmente essas equações diferenciais são chamadas de equações de Hill no caso não homogêneo e no caso homogêneo quando se trata de órbitas circulares são chamadas de equações de Clohessy-Wiltshire. Jesus et al. (2012) foi o pioneiro em encontrar uma solução analítica para as equações de Clohessy-Wiltshire para o caso particular usando o modelo exponencial para o decaimento da massa de combustível e aplicou essas soluções na dinâmica de manobra evasiva. Com o acionamento da propulsão a dinâmica relativa entre veículo espacial e DE foi dada pelas soluções dessas equação, obtendo êxito no escape da colisão.

Nesse trabalho iremos solucionar as equações de Clohessy-Wiltshire admitindo que a massa de combustível do veículo decaia linearmente com o tempo. Feito isto, desejamos que ao final do intervalo de tempo no qual ocorreria colisão, as soluções para o caso

não-homogêneo, nos forneça uma posição relativa em que o veículo esteja a uma certa distância do DE, caracterizando uma manobra evasão.

1.2 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Organizamos este trabalho da seguinte forma: No Capítulo 1, apresentamos uma introdução onde dissertamos um pouco da história da exploração espacial até chegar no problema da ameaça dos detritos espaciais. No Capítulo 2 encontram-se registros bibliográficos de autores que preveram o aumento dos detritos espaciais ao longo dos anos e também registramos trabalhos que tratam das equações de Clohessy-Wiltshire. No Capítulo 3 mostramos alguns conceitos e equações que são de fundamental importância nos testes das soluções do modelo linear e interpretação dos resultados. No Capítulo 4, apresentamos um resumo do trabalho de Clohessy-Wiltshire para dinâmica de rendezvous, mostramos também que essas mesmas equações podem ser adaptadas para o problema de manobras evasivas, além disso fizemos um breve resumo do trabalho de Jesus et al. (2012) onde as soluções encontradas são usadas para realizar manobras de evasão. No Capítulo 5 mostramos o método para solucionar as equações de Clohessy-Wiltshire para o caso particular e também as integrais que foram resolvidas usando o modelo linear para encontrar as soluções dessas equações. No Capítulo 6 mostramos os resultados onde buscamos condições iniciais convenientes para realizar manobras evasivas e investigamos as limitações do modelo linear, mostramos também manobras evasivas de alguns veículos espaciais. E no Capítulo 7 está a conclusão.

7 CONCLUSÃO

Neste trabalho foi investigada a viabilidade da implementação de manobras evasivas de veículos espaciais usando as soluções das equações de Clohessy-Wiltshire, admitindo o modelo linear para o decaimento da massa de combustível. No processo de resolver essas equações analiticamente encontrou-se integrais que possuem soluções em séries. Devido à forma como foram feitas as escolhas para aplicar o método da substituição obteve-se uma solução com problemas para convergir computacionalmente, porém fazendo escolhas mais adequadas para aplicar o método da substituição e usando o método de integração por partes para manipular as séries foi possível reescrevê-las em forma de funções muito estudadas na literatura e assim obteve-se uma solução que converge dentro de alguns limites impostos pela condição de existência de logaritmo.

As soluções de todas as coordenadas ficaram dependentes de séries que contêm fatoriais e isso impôs limitações computacionais para calculá-las. Os valores inseridos nelas podem requerer a soma de muitos termos para a série convergir e fazer o computador ultrapassar a capacidade de realizar os cálculos de fatoriais. Nessas séries os fatoriais dependem dos valores que os índices dos somatórios assumem, somar muitos termos significa calcular somatórios de números cada vez maiores. Como a condição de existência do logaritmo limitou a escolha de \dot{m} e todas as séries têm dependência direta desse fator, então teve-se que encontrar valores de \dot{m} dentro desse intervalo de condição de existência do logaritmo que também se adequasse a convergência das séries.

A escolha inadequada do valor de \dot{m} , mesmo que este esteja satisfazendo à condição de existência do logaritmo, também pode causar inconsistências físicas. Nas simulações de manobra evasivas dependendo do valor escolhido para \dot{m} pode fazer o combustível do veículo acabar antes de finalizar a manobra e quando isso acontece pelo fato de o valor estar dentro da condição de existência do logaritmo, o algoritmo continua com o cálculo da posição relativa e ao final da manobra o veículo tem massa final inferior a sua massa sem combustível. A escolha de \dot{m} também tem influência direta no acréscimo da velocidade orbital do veículo, e se esse acréscimo for muito alto pode fazer o veículo começar a ir para longe da sua órbita nominal fazendo sua velocidade angular não ser constante invalidando as soluções das equações de Clohessy-Wiltshire.

Devido às limitações impostas ao modelo linear e com base nos resultados obtidos chega-se à conclusão de que o modelo é aplicável somente em órbitas próximas da Terra. Como o modelo foi aplicado assumindo que o propulsor do veículo permaneceu ligado durante toda a manobra evasiva, durante um intervalo de tempo maior que a metade do

seu período orbital, quanto maior for a altitude maior será esse tempo e pela condição de existência do logaritmo o valor de \dot{m} será cada vez menor e esse fato pode trazer limitações computacionais para a convergência das séries.

Por causa de todos esses fatores não é possível definir um \dot{m} que seja comum a qualquer veículo, pois os resultados mostraram que para cada massa de veículo espacial existe um determinado \dot{m} para satisfazer às limitações do modelo linear. Essas limitações têm interferência direta no empuxo aplicado ao veículo e conseqüentemente interfere na posição relativa final e isso significa que existem tamanhos específicos de detritos espaciais que cada veículo consegue escapar.

Além das limitações com relação à convergência de séries, as curvas de posição relativa dadas pelas soluções do caso homogêneo e do modelo linear têm que obedecer às condições de expansão e essa obediência depende das condições iniciais que são implementadas nas soluções. As condições iniciais também podem colocar o veículo e o detrito em órbitas tão próximas que a colisão ocorreria com velocidade relativa igual a zero tornando desnecessário a realização de uma manobra evasiva, por isso houve a necessidade mapear condições iniciais que fornecessem velocidade de colisão com poder destrutivo e que também fizesse com que a posição relativa obedecesse às condições de expansão.

Quanto ao tipo de propulsão, o modelo linear se mostrou aplicável somente quando foi usada velocidade de exaustão típica de propulsores com propelente de gás firo, os demais tipos de propulsão fornecem velocidades de exaustão muito alta dando acréscimo muito alto na velocidade orbital do veículo e também violando as condições de expansão. Seria ideal se fosse possível aplicar velocidades de exaustão típicas de propulsores que utilizam plasma, pois esses propulsores não deixam resíduos que contribuem para o aumento do detrito espacial.

Nas manobras apresentadas aqui foram desprezadas forças de perturbação tais como o arrasto atmosférico e achatamento da Terra, a implicação física disso é que o detrito espacial permanecerá na órbita em que foi condicionado pelas condições iniciais e por isso, após a manobra evasiva o veículo espacial não poderá retornar a sua órbita nominal este deverá ir para uma outra órbita, próxima o suficiente para manter a velocidade angular que estava antes da manobra e ainda deve realizar correções na inclinação de sua órbita porque uma componente da força de propulsão foi aplicada perpendicularmente ao plano da órbita circular, em razão dessas correções foi importante ter no final da manobra evasiva uma certa quantidade de combustível para realizar essa tarefa.

A existência de determinadas condições iniciais que quando aplicadas ao modelo linear fornecem curvas de dinâmica relativa que satisfazem às condições de expansão e o fato de também existir dentro da condição de existência de logaritmo determinados valores de \dot{m} que possibilitam as convergências das séries presentes nas soluções das equações de Clohessy-Wiltshire para o modelo linear, podemos concluir que se a tecnologia do veículo espacial contemplar a todas essas limitações é possível obter sucesso na implementação dessas soluções em manobras evasivas, pois os resultados fornecidos por elas podem ser

interpretados fisicamente.

REFERÊNCIAS

- BIBLARZ, O.; PRICE, E. W. Rocket jet-propulsion device and vehicle. **Encyclopedia Britannica**. 2017. Disponível em: <https://www.britannica.com/technology/rocket-jet-propulsion-device-and-vehicle>. Acesso em: 17 dez. 2017.
- CHOBOTOV, V. A. **Orbital mechanics**. 3. ed. Reston: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2002. 451 p.
- CLOHESSY, W. H.; WILTSHIRE, R. S. Terminal guidance system for satellite rendezvous. **Journal of the Aerospace Sciences**, v. 27, jan. 1960. Disponível em: <https://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/8.8704?journalCode=jasps>. Acesso em: 05 dez 2017.
- CORDELLI, A.; FARINELLA, P.; ROSSI, A. The influence of the fragmentation threshold on the long term evolution of the orbital debris environment. **Planetary and Space Science**, v. 46, fev. 1998. Disponível em: <http://adsabs.harvard.edu/abs/1998P%26SS...46..691C>. Acesso em: 05 dez 2017.
- CURTIS, H. D. **Orbital mechanics for engineering students**. 3. ed. Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2013. 687 p.
- ESA. **Position space debris mitigation: implementing zero debris creation zones**. 1. ed. Noordwijk: ESA Publications Division, 2006. Disponível em: <http://www.esa.int/esapub/sp/sp1301/sp1301.pdf>. Acesso em: 13 dez. 2017.
- GOEBEL, D. M.; KATZ, I. **Fundamentals of electric propulsion: ion and hall thrusters**. 1. ed. Nova Jersey: John Wiley & Sons, 2008. 486 p.
- GRADSHTEYN, I. S.; RYZHIK, I. M. **Table of integrals, series, and products**. 7. ed. Califórnia: Elsevier, 2007. 1140 p.
- GURFIL, P. Relative Motion between Elliptic Orbits: Generalized Boundedness Conditions and Optimal Formationkeeping. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 28, jul. 2005. Disponível em: <http://arc.aiaa.org/doi/10.2514/1.9439>. Acesso em: 05 dez 2017.
- HALL, L. The History of Space Debris. **Space Traffic Management Conference**, v. 1, jun. 2014. Disponível em: <http://commons.erau.edu/stm/2014/thursday/19>. Acesso em: 18 mar 2016.
- HENNEMANN, L.; ANDRADE, J. C.; SOUSA COSTA, F. Experimental investigation of a monopropellant thruster using nitrous oxide. **Journal of Aerospace Technology and Management**, v. 6,

out. 2014. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S2175-91462014000400363&script=sci_abstract>. Acesso em: 05 dez 2017.

HILL, G. W. Researches in the Lunar Theory Author. **American Journal of Mathematics**, v. 1, jan. 1878. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/2369430>>. Acesso em: 05 dez 2017.

JAHN, R. G. **Physics of electric propulsion**. 1. ed. Nova Iorque: McGRAW-Hill, 1968. 339 p.

JESUS, A. D. C. et al. Evasive maneuvers in space debris environment and technological parameters. **Mathematical Problems in Engineering**, v. 2012, aug. 2012. Disponível em: <<https://www.hindawi.com/journals/mpe/2012/126521/cta/>>. Acesso em: 05 dez 2017.

JESUS, A. D. C.; SOUSA, R. R. Processing optimized for symmetry in the problem of evasive maneuvers. **Computational and Applied Mathematics**, v. 34, jul. 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s40314-014-0147-6>>. Acesso em: 05 dez 2017.

KAPLAN, M. H. **Modern spacecraft dynamics and control**. 1. ed. Nova Iorque: John Wiley & Sons, 1976. 415 p.

KASDIN, N. J.; GURFIL, P.; KOLEMEN, E. Canonical modelling of relative spacecraft motion via epicyclic orbital elements. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 92, ago. 2005. Disponível em: <<https://link.springer.com/article/10.1007/s10569-004-6441-7>>. Acesso em: 05 dez 2017.

KESSLER, D. J. Orbital Debris Environment and Data Requirements. **NASA Johnson Space Center**, v. 3035, jun. 1989. Disponível em: <<https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19890014176.pdf>>. Acesso em: 05 dez 2017.

KESSLER, D. J. Collisional cascading: The limits of population growth in low earth orbit. **Advances in Space Research**, v. 11, jan. 1991. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/027311779190543S>>. Acesso em: 05 dez 2017.

KESSLER, D. J.; COUR-PALAIS, B. G. Collision frequency of artificial satellites: The creation of a debris belt. **Journal of Geophysical Research**, v. 83. 1978. Disponível em: <<http://webpages.charter.net/dkessler/files/Collision%20Frequency.pdf>>. Acesso em: 05 dez 2017.

LEE, D.; COCHRAN, J. E.; JO, J. H. Solutions to the variational equations for relative

motion of satellites. **Advances in the Astronautical Sciences**, v. 123 I, may. 2007. Disponível em: <<https://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/1.24373>>. Acesso em: 05 dez 2017.

LIU, J.-C.; JOHNSON, N. L. Risks in space from orbiting debris. **Science**, v. 311, jan. 2006. Disponível em: <<http://science.sciencemag.org/content/311/5759/340>>. Acesso em: 05 dez 2017.

PENG, B. Space debris: The hubris of humanity. **Berkeley Scientific Journal**, v. 19, jul. 2015. Disponível em: <<https://bsj.berkeley.edu/wp-content/uploads/2015/10/Complete-Spring-2015-BSJ-Waste.pdf>>. Acesso em: 05 dez 2017.

PINHEIRO, E. C. **Manobras evasivas e propulsão plama linear**. 2014. 75.f. Monografia (Licenciatura em Física) - UEFS (Universidade Estadual de Feira de Santana), Feira de Santana, Bahia. 2014.

PÔRTO, C. D. S. Os foguetes: história e desenvolvimento. **Astronomia, Astronáutica e Ciências Espaciais na Escola**. 2010. Disponível em: <https://educacaoespacial.files.wordpress.com/2010/10/os-foguetes-ii_revisado.pdf>. Acesso em: 05 dez 2017.

RAMOS, T. S. SOUZA COSTA, F. Investigação teórica de um propulsor eletrotérmico-catalítico usando peróxido de hidrogênio. **Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais. Cachoeira Paulista. São Paulo**, v. 1. 2009. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/47444521_Investigacao_Teorica_de_Um_Propulsor_Eletermico-Catalitico_Usando_Peroxido_de_Hidrogenio>. Acesso em: 05 dez 2017.

ROA, J.; PELAEZ, J. The elliptic rendezvous problem in dromo formulation. **Advances in the Astronautical Sciences**, v. 152, jan. 2014. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/280134802_The_elliptic_rendezvous_problem_in_DROMO_formulation>. Acesso em: 05 dez 2017.

RUSSELL, R. P.; LANTOINE, G. Optimal control of relative motion in arbitrary fields: Application at deimos. **The Journal of the Astronautical Sciences**, v. 59, jun. 2012. Disponível em: <<https://link.springer.com/article/10.1007/s40295-013-0013-6>>. Acesso em: 05 dez 2017.

SALTER, A. W. Space debris: A law and economics analysis of the orbital commons. **Mercatus Working Paper, Mercatus Center at George Mason University, Arlington, VA**, v. 1, set. 2015. Disponível em: <<https://www.mercatus.org/system/files/Salter-Space-Debris.pdf>>. Acesso em: 05 dez 2017.

SANTOS, C. C. C. D. P. **Estudo da dinâmica de pequenos detritos espaciais e mete-**

oróides. 2007. 263.f. Tese (Doutorado em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica e Controle) - INPE (Instituto de Pesquisas Espaciais), São José dos Campos, São Paulo. 2007.

SCHAUB, H. Relative orbit geometry through classical orbit element differences. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 27, sep. 2004. Disponível em: <<http://arc.aiaa.org/doi/10.2514/1.12595>>. Acesso em: 05 dez 2017.

SOUSA, R. R. **Estudo de manobras evasivas com perturbações orbitais**. 2015. 83.f. Dissertação (Mestrado em Física) - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, São Paulo. 2015.

SOUZA, J. H. C. **Estudo da dinâmica de partículas em um propulsor a plasma do tipo Hall com imãs permanentes**. 2006. 60.f. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade de Brasília, Brasília, Distrito Federal. 2006.

TELES, T. N. **Análise algébrica e numérica de manobras de rendezvous num ambiente com detritos e em formation flying**. 2006. 79.f. Monografia (Bacharel em Física)- UEFS (Universidade Estadual de Feira de Santana), Feira de Santana, Bahia. 2006.

WINTER, O. C.; MELO, C. F. D. **A conquista do espaço: do Sputnik à missão centenário**. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2007. 315 p. Disponível em: <http://www.cdcc.usp.br/cda/oba/aeb/a-conquista-do-espaco/index.html>. Acesso em: 10 out. 2015.

WORMNES, K. et al. Esa technologies for space debris remediation. In: 6th European Conference on Space Debris, 6, 2013, Darmstadt. **Anais...** Darmstadt: ESA, 1994. p.85-93. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/2013ESASP.723E..85W>>. Acesso em: 05 dez 2017.

YAMANAKA, K.; ANKERSEN, F. New State Transition Matrix for Relative Motion on an Arbitrary Elliptical Orbit. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 25, jan. 2002. Disponível em: <<http://arc.aiaa.org/doi/10.2514/2.4875>>. Acesso em: 05 dez 2017.

ZANETTI, R. Optimal glideslope guidance for spacecraft rendezvous. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 34, sep. 2011. Disponível em: <<http://arc.aiaa.org/doi/10.2514/1.54103>>. Acesso em: 05 dez 2017.