



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

Marco Antônio de Freitas Contessoto

Uma adaptação da teoria de homologia para problemas de
reconhecimento topológico de padrões

São José do Rio Preto
2018

Marco Antônio de Freitas Contessoto

Uma adaptação da teoria de homologia para problemas de
reconhecimento topológico de padrões

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadoras:
FAPESP-Proc. 2016/25659-3
CAPES

Orientadora: Profa. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi

São José do Rio Preto
2018

Contessoto, Marco Antônio de Freitas

Uma adaptação da teoria de homologia para problemas de reconhecimento topológico de padrões / Marco Antônio de Freitas
Contessoto . -- São José do Rio Preto, 2018

51 f. : il.

Orientador: Alice Kimie Miwa Libardi

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Topologia algébrica. 3. Teoria de homologia.
4. Reconhecimento de padrões. I. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. II. Título.

CDU – 513.831

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Marco Antônio de Freitas Contessoto

Uma adaptação da teoria de homologia para problemas de
reconhecimento topológico de padrões

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadoras:
FAPESP - Proc. 2016/25659-3
CAPES

Comissão Examinadora

Profa. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi
Orientadora

Prof. Dr. Daniel Vendrúscolo
UFSCar - São Carlos

Profa. Dra. Eliris Cristina Rizziolli
UNESP - Rio Claro

Rio Claro
09 de março de 2018

A toda minha família e amigos.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por ter me presenteado com seus dons e por ter colocado pessoas tão especiais e essenciais na minha vida.

Agradeço principalmente aos meus pais, Tô e Carminha, por não medirem esforços, pelas palavras de conforto e consolo quando precisei e por fazerem dos meus sonhos os deles, aos meus irmãos, Gugu e Ana, pelos momentos felizes que me davam uma injeção de ânimo para continuar e a toda minha família, por estar sempre unida e me apoiar.

Também sou grato a minha orientadora, prof. Dra. Alice, por me ajudar nas escolhas, ter paciência e dedicação e por todos os ensinamentos, ao prof. Dr. Facundo, pelo incentivo, ajuda na pesquisa e as parcerias desde a graduação, a pesquisadora Isabelle Buano Silva, por ter fornecido os dados para uma das aplicações e ao Guilherme Vituri, pela ajuda na parte computacional.

Aos grandes amigos que fiz em Rio Claro, por se tornarem minha família e estarem sempre me apoiando, em especial aqueles que estão ligados a República Mateca e ao vôlei da Unesp.

Agradeço imensamente a Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado de São Paulo, FAPESP, processo 2016/25659-3 e a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, Capes, pelo apoio financeiro ao projeto.

Enfim, a todos que direta ou indiretamente me ajudaram a tornar este trabalho possível.

RESUMO

O objetivo dessa dissertação é apresentar parte do artigo [2] de Gunnar Carlsson, onde se discute a adaptação de métodos da teoria usual de homologia para problemas de reconhecimento topológico de padrões em conjuntos de dados. Esta adaptação conduz aos conceitos de homologia de persistência e de barcodes. Atualmente, várias aplicações são obtidas com o uso deste método. Apresentaremos alguns casos onde a homologia de persistência é usada, ilustrando diferentes modos em que podem ser aplicados. Descreveremos, também baseado no artigo de Carlsson, um novo método para estudar a persistência de características topológicas através de uma família de conjuntos de dados, chamado persistência zig-zag . Este método generaliza a teoria de homologia de persistência e chama atenção de situações que não são cobertas pela outra teoria. Além disso, são apresentadas algumas aplicações dessa ferramenta para a obtenção de informações de alguns conjuntos de dados.

Palavras-chave: Topologia Algébrica, Análise topológica de dados, Barcodes, Zig-zag.

ABSTRACT

The main goal of this work is to present a part of the Gunnar Carlsson paper [2], where the adaptation of the theory of usual homology to topological pattern recognition problems in point cloud data sets is discussed. This adaptation leads to the concepts of persistence homology and barcodes. Several applications have been obtained using this method. We will present some cases where persistence homology is used, illustrating different ways in which the method can be applied. We will describe, also based in the Carlsson's paper, a new method to study the persistence of topological features through point cloud data sets, called zig-zag persistence. This method generalizes the homology persistent theory and we will pay attention to situations that are not covered by the other theory. In addition, some applications of this tool are presented to obtain information from some data sets.

Keywords: Algebraic Topology, Topological Data Analysis, Barcodes, Zig-zag.

Lista de Figuras

1.1	Anel. Figura de [2]	11
2.1	Um espaço com um único laço e outro com três laços distintos. Figuras de [2]	15
2.2	(a)Dois laços equivalentes. (b)Laços não equivalentes. Figuras de [2]	16
2.3	O complexo simplicial W . Figura de [2].	19
2.4	O complexo X . Figura de [2].	21
2.5	Um complexo com um 2-simplexo adicionado. Figura de [2].	22
2.6	Duas triangulações do mesmo espaço. Figuras de [2].	22
3.1	Espaço discreto com padrão de dois laços. Figura de [2]	27
3.2	Agrupamentos Figura de [2]	28
3.3	Dendrograma. Figura de [2].	28
3.4	Espaço métrico e complexo de Vietoris-Rips associado. Figura de [2]	30
3.5	Família crescente de complexos de Vietoris-Rips.Figura de [2]	31
3.6	Barcode e diagrama de persistência. Figura de [2].	36
3.7	Barcode e diagrama de persistência para um espaço como um círculo Figura de [2]	36
3.8	Persistência funcional para um conjunto como um "T" ou "Y". Figura de [2].	38
3.9	Persistência funcional para um conjunto de dados sobre um disco.Figura de [2].	39
4.1	Conjunto de dados sobre a reta.	41
4.2	Diagrama de persistência e barcode	43
4.3	Dendrograma	43
4.4	Conjunto de dados sobre o plano.	44
4.5	Filtração	44
4.6	Dendrograma	45
4.7	Diagrama de persistência e barcode	46
4.8	Patás.	47

Sumário

1	Introdução	11
2	Elementos básicos de Álgebra Linear e Topologia	13
2.1	Relações de Equivalência Gerada	13
2.2	Homotopia	15
2.3	Homologia	17
3	Estrutura de dados	27
3.1	Agrupamentos	27
3.2	Persistência	30
3.3	A álgebra dos espaços vetoriais persistentes	31
3.4	Persistência funcional	36
3.5	Persistência zig-zag	38
4	Aplicações	41
4.1	Cálculos diretos de homologia persistente	41
4.2	Patas de animais	47
4.3	Mosca do figo - <i>Zaprionus Indianus</i>	49
	Referências	51

1 Introdução

Um dos problemas fundamentais da ciência moderna é buscar ferramentas matemáticas e computacionais que possibilitem caracterizar um conjunto grande e complexo de dados. Houve um grande desenvolvimento nos métodos para a organização, consulta e análise de dados, baseado em estruturas computacionais.

A parte teórica deste trabalho foi fortemente baseada no artigo [2] de G. Carlsson, que apresenta abordagens que nos permitem obter algumas informações de um conjunto de dados, que pode ser grande e complexo.

Uma das abordagens consiste em dar uma estrutura codificada, usando a noção de espaços métrico, que também age como princípio organizador para um conjunto finito, porém grande, de dados.

A Topologia trata da estrutura de um espaço de duas formas distintas. Uma delas consiste em construir uma representação combinatória simples para a estrutura, via processo de triangulação. No entanto, observa-se que durante esse processo de discretização algumas informações são perdidas, como, por exemplo, curvatura em certos pontos, mas a estrutura geral é preservada.

A outra forma é tentar contar ou medir os aspectos da estrutura. Isso é feito via *assinaturas homológicas*, as quais essencialmente contam as ocorrências de padrões dentro da estrutura. A adaptação dessas assinaturas ao estudo de um conjunto de dados é o objetivo desse trabalho.

A ideia intuitiva por trás da topologia algébrica é que devemos tentar diferenciar e caracterizar espaços pela ocorrência de padrões dentro desse espaço. Considere o exemplo de um anel onde podemos dizer que a característica padrão é a presença de um laço no espaço, cercado um disco removido do meio. Podemos dizer também, intuitivamente, que o número de laços no anel é 1, no sentido de que existe "essencialmente" um laço no espaço caracterizado pelo fato de estar cercado um único disco central removido. Observe na figura abaixo.

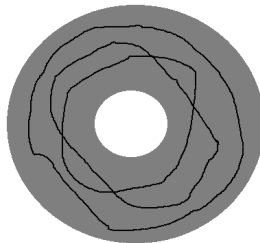


Figura 1.1: Anel. Figura de [2]

No contexto geométrico, podemos enxergar um padrão como uma aplicação de um espaço modelo, como um círculo ou uma esfera, no nosso espaço.

O processo de reduzir construções abstratas em construções matemáticas mais concretas é um dos objetivos do trabalho, introduzindo a identificação padrão de assinaturas que surgem na topologia algébrica, e simultaneamente desenvolver métodos matriciais que as façam calculáveis e úteis para vários problemas geométricos, particularmente nos domínios de conjuntos de dados ou espaços métricos finitos.

A partir de métodos padrões de homologia apresentaremos uma adaptação da homologia usual como uma ferramenta para estudo de conjunto de dados. Essa adaptação é chamada *Homologia Persistente* ou *Homologia de Persistência*. Gerados esses elementos, veremos como interpretar os valores obtidos com as construções de homologia persistente.

Este trabalho está dividido em três capítulos: no capítulo 1, serão apresentados os conceitos básicos da topologia e álgebra linear que serão usados. No capítulo 2, construiremos a ferramenta e introduziremos a interpretação para os elementos obtidos com ela e finalmente, no capítulo 3, apresentaremos duas aplicações sobre o material desenvolvido nos capítulos anteriores.

2 Elementos básicos de Álgebra Linear e Topologia

Nesse capítulo lembraremos alguns conceitos fundamentais de álgebra linear e da topologia algébrica no desenvolvimento dessa nova ferramenta. No que concerne aos conceitos de homotopia e homologia a boa descrição através de um exemplo apresentado em [2], nos levou a reproduzi-los abaixo. Para maior aprofundamento indicamos [8] e [9], porém ressaltamos que o essencial para o desenvolvimento desta dissertação se encontra a seguir.

2.1 Relações de Equivalência Gerada

Uma operação (binária) em um conjunto não vazio \mathbb{X} é um subconjunto de $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$. Vamos denotar relações por \sim , e escreveremos $x \sim x'$ para indicar que (x, x') está na relação.

Vamos considerar um caso especial de relação \sim em um conjunto \mathbb{X} , a saber, as *relações de equivalência*.

Pela *classe de equivalência* de $x \in \mathbb{X}$, denotada por $[x]$, entenderemos o conjunto

$$\{x' \in X/x \sim x'\}.$$

Os conjuntos $[x]$, para todo $x \in \mathbb{X}$ formam uma partição do conjunto \mathbb{X} . Se \sim é qualquer relação binária sobre um conjunto \mathbb{X} , então pela *relação de equivalência gerada por \sim* (ou *fecho transitivo* de \sim) entendemos a relação de equivalência \sim' definida pela condição que $x_0 \sim' x_1$ se, e somente se, existe um inteiro positivo n e uma sequência de elementos x'_0, x'_1, \dots, x'_n tal que $x'_0 = x_0$, $x'_n = x_1$ e $x'_i \sim x'_{i+1}$, qualquer i tal que $0 \leq i \leq n - 1$.

Para um conjunto e uma relação de equivalência \sim em \mathbb{X} , denotaremos o conjunto de classes de equivalência sob \sim por \mathbb{X}/\sim e nos referiremos a ele como *quociente* de \mathbb{X} com respeito a \sim . Existem muitos casos especiais importantes dessa definição. Um deles é o quociente de um espaço vetorial por um subespaço. Seja \mathbb{V} um espaço vetorial sobre um corpo k e seja $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$ um subespaço. Definimos uma relação de equivalência $\sim_{\mathbb{W}}$ sobre \mathbb{V} definindo que $v \sim_{\mathbb{W}} v' \iff v - v' \in \mathbb{W}$. Vamos provar que, com essa definição, $\sim_{\mathbb{W}}$ é uma relação de equivalência. Para isso, provemos que valem as três propriedades da definição:

1. Precisamos mostrar que $\forall v \in \mathbb{V} \implies v \sim_{\mathbb{W}} v$. Mas $v \sim_{\mathbb{W}} v \iff v - v \in \mathbb{W} \iff 0 \in \mathbb{W}$. Como \mathbb{W} é subespaço de \mathbb{V} , temos que $0 \in \mathbb{W}$. Logo, está provado;

2. Suponha que $v \sim_{\mathbb{W}} v'$. Então $v - v' \in \mathbb{W}$. Como \mathbb{W} é subespaço de \mathbb{V} , segue que $-(v - v') = v' - v \in \mathbb{W}$, o que implica que $v' \sim_{\mathbb{W}} v$;
3. Suponha que $v \sim_{\mathbb{W}} v'$ e $v' \sim_{\mathbb{W}} v''$. Então $v - v' \in \mathbb{W}$ e $v' - v'' \in \mathbb{W}$. Como \mathbb{W} é subespaço de \mathbb{V} , segue que $(v - v') + (v' - v'') = v - v'' \in \mathbb{W}$, o que implica que $v \sim_{\mathbb{W}} v''$.

Como valem as três afirmações, segue, de fato, que $\sim_{\mathbb{W}}$ é uma relação de equivalência. Podemos, então formar o quociente $\mathbb{V}/\sim_{\mathbb{W}}$ e observar que $\mathbb{V}/\sim_{\mathbb{W}}$ é naturalmente um espaço vetorial sobre k , com as regras de adição e multiplicação por escalar satisfazendo $[v] + [v'] = [v + v']$ e $k[v] = [kv]$. Nesse caso especial, denotaremos $\mathbb{V}/\sim_{\mathbb{W}}$ por \mathbb{V}/\mathbb{W} e nos referiremos como espaço quociente de \mathbb{V} por \mathbb{W} .

A próxima proposição nos dá uma caracterização da estrutura dos espaços quocientes.

Proposição 2.1. *Suponha que temos uma base B para um espaço vetorial \mathbb{V} e $B' \subseteq B$ é um subconjunto. Se \mathbb{W} é o subespaço gerado por B' , então o quociente \mathbb{V}/\mathbb{W} possui os elementos $\{[b]/b \notin B' \text{ e } b \in B\}$ como base e a dimensão de \mathbb{V}/\mathbb{W} é $\#(B) - \#(B')$, onde $\#$ representa a cardinalidade do conjunto. Mais geralmente, se \mathbb{W}' é o complemento de \mathbb{W} em \mathbb{V} , tal que $\mathbb{W} + \mathbb{W}' = \mathbb{V}$ e $\mathbb{W} \cap \mathbb{W}' = \{0\}$, então a composta*

$$\mathbb{W}' \hookrightarrow \mathbb{V} \xrightarrow{p} \mathbb{V}/\mathbb{W}$$

é uma transformação linear bijetiva e a dimensão de \mathbb{V}/\mathbb{W} é igual a dimensão de \mathbb{W}' , onde p é a aplicação que associa $v \in \mathbb{V}$ a sua classe de equivalência $[v]$ sob $\sim_{\mathbb{W}}$.

Demonstração. Suponha $B = \{b_1, \dots, b_\alpha\}$, onde $\alpha \in J$, J finito ou não e $B' \subseteq B$ um subconjunto.

Provemos que os elementos de $\{[b]/b \notin B' \text{ e } b \in B\}$ geram \mathbb{V}/\mathbb{W} e são linearmente independentes. Primeiro mostremos que geram \mathbb{V}/\mathbb{W} . Seja $[v] \in \mathbb{V}/\mathbb{W}$. Temos que o representante de classe $v \in \mathbb{V}$, ou seja, v pode ser escrito como combinação linear dos elementos de B .

$$v = \sum_{i=1}^{\alpha} k_i b_i \Rightarrow [v] = \left[\sum_{i=1}^{\alpha} k_i b_i \right] = \sum_{i=1}^{\alpha} [k_i b_i] = \sum_{i=1}^{\alpha} k_i [b_i]$$

Como quocientamos \mathbb{V} por \mathbb{W} , todos os $b \in B'$ são levados na classe de $[0_{\mathbb{V}}]$, ou seja, são anulados na equação anterior e assim os únicos elementos que sobram no somatório são as classes $[b]/b \notin B'$ e $b \in B$, o que termina essa primeira parte da prova.

Agora devemos mostrar que os elementos do nosso conjunto são linearmente independentes. Seja $B' = \{b_{\gamma_1}, b_{\gamma_2}, \dots, b_{\gamma_j}\}$, onde $b_{\gamma_i} \in B$, $\forall 1 \leq i \leq j$. Então

$$\sum_{i=1}^j k_{\gamma_i} [b_{\gamma_i}] = [0_{\mathbb{V}}] \Rightarrow \left[\sum_{i=1}^j k_{\gamma_i} b_{\gamma_i} \right] = [0_{\mathbb{V}}] \Rightarrow \sum_{i=1}^j k_{\gamma_i} b_{\gamma_i} \in \mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}.$$

Como esses b_{γ_i} são todos elementos da base B de \mathbb{V} então todos os escalares da última igualdade são iguais a 0. Provamos assim que o conjunto é uma base para \mathbb{V}/\mathbb{W} . A parte do resultado que diz respeito a dimensão do espaço segue, agora, direta.

A segunda parte da proposição pode ser provada de forma análoga a anterior.

□

A interpretação matricial das transformações lineares é esboçada a seguir.

Sejam \mathbb{V} e \mathbb{W} espaços vetoriais com bases ordenadas e seja $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ uma transformação linear, com matriz $A(f)$ associada as bases dadas. A *imagem* de f é um subespaço de \mathbb{W} e escrevemos $\theta(f)$ para o espaço quociente $\mathbb{W}/\text{im}(f)$. Neste contexto, temos:

Proposição 2.2. *Se $g : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ e $h : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{W}$ são transformações lineares invertíveis, então $\theta(f)$ é isomorfo a $\theta(h \circ f \circ g)$. Segue que se tivermos a equação matricial $A(f') = A(h)A(f)A(g)$, então $\theta(f')$ é isomorfa a $\theta(h \circ f \circ g)$.*

Demonstração. A demonstração segue do fato de que

$$w \sim_{\text{im}(f)} w' \iff h(w) \sim_{\text{im}(hf)} h(w')$$

□

Observação 2.3. *Note que para qualquer matriz A de posto n sobre um corpo, podemos aplicar operações nas linhas e colunas de modo a obter uma matriz da forma*

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nesse caso, a dimensão do quociente pode facilmente ser calculada usando a proposição 2.2.

2.2 Homotopia

Usando métodos da topologia algébrica que permitem a contagem de ocorrências de padrões geométricos em um espaço topológico, tentaremos distinguir as ocorrências uma das outras ou encontrar características similares entre elas. Um simples exemplo dessa noção é dado na figura abaixo.

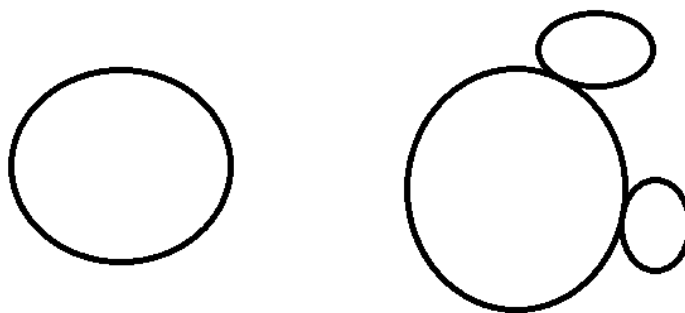


Figura 2.1: Um espaço com um único laço e outro com três laços distintos. Figuras de [2]

Observamos que o espaço à esquerda possui um único laço, enquanto o da direita contém três laços distintos. Porém parece difícil transformar essa ideia intuitiva em uma noção matemática rigorosa. É razoavelmente fácil interpretar o sentido do que

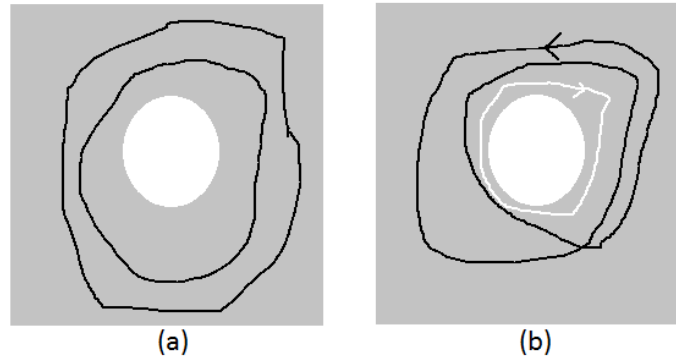


Figura 2.2: (a)Dois laços equivalentes. (b)Laços não equivalentes. Figuras de [2]

um laço significa em um espaço \mathbb{X} , isto é, uma aplicação contínua $f : S^1 \rightarrow \mathbb{X}$. Mas existem infinitos laços no espaço, já que cada laço pode ser reparametrizado por uma precomposição com um homeomorfismo do círculo nele mesmo. Outra dificuldade, no entanto, é a situação ilustrada na figura 2.2 (a) a seguir.

A característica interessante é o buraco central e ambos os laços capturam essa característica, no sentido de que estão cercado o mesmo e isso acontece para um número infinito de laços. Então a ideia aqui é um certo tipo de contagem para a característica, usando a presença de laços ao redor dela, e não mais contar o número de laços, que já percebemos que é infinito.

Definição 2.4. Dadas duas aplicações $f, g : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ entre espaços topológicos, dizemos que f e g são homotópicas, e escrevemos $f \simeq g$, se existe uma aplicação contínua $H : \mathbb{X} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{Y}$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{X}$. A relação de ser homotópico é uma relação de equivalência. Quando existem pontos bases fixados $x_0 \in \mathbb{X}$ e $y_0 \in \mathbb{Y}$, falamos de aplicações com ponto base como aplicações $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ tais que $f(x_0) = y_0$ e como homotopias com ponto base como homotopias $H(x_0, t) = y_0, \forall t \in [0, 1]$. Homotopia com ponto base também é uma relação de equivalência sobre o conjunto de aplicações com ponto base de \mathbb{X} em \mathbb{Y} .

O conjunto de classes de homotopia de aplicações contínuas de um espaço \mathbb{X} em um espaço \mathbb{Y} é um invariante que nos dá uma boa descrição sobre o conjunto de aplicações de \mathbb{X} em \mathbb{Y} . Quando \mathbb{X} é a n -esfera S^n , podemos dar uma estrutura de grupo sobre o conjunto de classes de equivalência de aplicações com ponto base de S^n em \mathbb{Y} . O grupo resultante é denotado por $\pi_n(\mathbb{Y}, y_0)$. Aplicado ao exemplo acima, com um simples obstáculo no plano, esse grupo π_1 é uma cópia dos inteiros com adição como operação. O inteiro associado a um laço dado é chamado de número de voltas "winding number" do laço, o qual conta quantas vezes o laço contorna o obstáculo, com sinal dependendo da orientação. Na figura 2.2 (b) acima, o laço preto possui número de voltas $+2$, enquanto o branco possui -1 .

Os grupos $\pi_n(\mathbb{Y}, y_0)$ são conhecidos como grupos de homotopia do espaço \mathbb{Y} . Eles servem como uma forma de reconhecer as ocorrências de padrões como as n -esferas. Os grupos de homotopia podem nos ajudar a distinguir espaços, como segue.

Definição 2.5. Dois espaços topológicos \mathbb{X} e \mathbb{Y} são ditos serem homotopicamente equivalentes se existem aplicações contínuas $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ e $g : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ tais que gf e fg são

homotópicas as aplicações identidades de \mathbb{X} e \mathbb{Y} , respectivamente. Existe uma noção correspondente para aplicações com ponto base e homotopias com ponto base.

Proposição 2.6. *Suponha que dois espaços \mathbb{X} e \mathbb{Y} com pontos bases x_0 e y_0 , respectivamente, são homotopicamente equivalentes com ponto base. Então os grupos de homotopia $\pi_n(\mathbb{X}, x_0)$ e $\pi_n(\mathbb{Y}, y_0)$ são isomorfos.*

Demonstração. A demonstração se encontra no capítulo 9 em [8] □

Esse resultado geralmente nos ajuda a concluir que dois espaços que não são homotopicamente equivalentes não são homeomorfos. Por exemplo, $\pi_2(S^2, 0)$ é isomorfo ao grupo dos inteiros, enquanto $\pi_2(\mathbb{R}^2, 0)$ é isomorfo ao grupo trivial. Assim podemos concluir que esses dois espaços não são homeomorfos.

Apesar de ser fácil de se definir e possuir um conceito muito atrativo, os grupos de homotopia são muito difíceis de se calcular. Existe um outro tipo de invariante, chamado de *homologia*, o qual é um pouco mais difícil de se definir, mas um pouco mais fácil de se calcular e é ele que veremos agora.

2.3 Homologia

Os grupos de homologia, em geral nos dão uma boa descrição da geometria dos espaços, porém para nossos problemas onde os espaços são finitos, pouca informação podemos obter a partir deles. Para nossos propósitos, faremos uma adaptação da teoria da homologia usual, mais precisamente, usaremos a homologia persistente.

Denote por $S = \{x_0, \dots, x_n\}$ um subconjunto de um espaço euclidiano \mathbb{R}^k .

Definição 2.7. *Dizemos que S está em posição geral se não está contido em um hiperplano afim de \mathbb{R}^k de dimensão menor do que n . Quando S está em posição geral, definimos como simplexo gerado por S como a envoltória convexa $\sigma = \sigma(S)$ de S em \mathbb{R}^k . Os pontos x_i são chamados de vértices e os simplexos $\sigma(T)$ gerados por subconjuntos não-vazios $T \subseteq S$ são chamados faces de σ . Por um complexo simplicial (finito) entenderemos uma coleção finita χ de simplexos em um espaço euclidiano tal que valem as seguintes condições.*

1. Para qualquer simplexo σ de χ , todas as faces de σ também estão contidas em χ ;
2. Para quaisquer dois simplexos σ e τ de χ , a interseção $\sigma \cap \tau$ é um simplexo, o qual é uma face de ambos σ e τ .

Note que qualquer complexo simplicial determina um objeto combinatório consistindo de subconjuntos do conjunto de todos os vértices, motivando a seguinte definição.

Definição 2.8. *Por um complexo simplicial abstrato X , entenderemos o par $X = (V(X), \Sigma(X))$, onde $V(X)$ é um conjunto finito chamado de vértices de X e onde $\Sigma(X)$ é um subconjunto (chamado de simplexos) da coleção de todos os subconjuntos não-vazios de $V(X)$, satisfazendo as condições de que se $\sigma \in \Sigma(X)$ e $\emptyset \neq \tau \subseteq \sigma$ então $\tau \in \Sigma(X)$. Simplexos consistindo de exatamente dois vértices são chamados de arestas.*

Podemos definir, a partir de um complexo simplicial χ , um complexo simplicial abstrato cujo conjunto de vértices $V(\chi)$ é o conjunto de todos os vértices de todos os simplexes de χ e onde um subconjunto de $V(\chi)$ está na coleção de simplexes se, e somente se, o conjunto é um conjunto de vértices de algum simplexo de χ . Além disso, dado qualquer complexo simplicial abstrato X , podemos associar a ele um espaço $|X|$, a *realização geométrica* de X , e qualquer complexo simplicial é homeomorfo a realização geométrica de seu complexo simplicial abstrato associado.

Dados dois complexos simpliciais abstratos X e Y , uma *aplicação entre complexos simpliciais abstratos* f de X em Y é uma aplicação dos conjuntos $f_V : V(X) \rightarrow V(Y)$ tal que, para qualquer simplexo $\sigma \in \Sigma(X)$, o subconjunto $f_V(\sigma) \in \Sigma(Y)$. A construção da realização geométrica é *functorial*, ou seja, qualquer aplicação $f : X \rightarrow Y$ entre complexos simpliciais abstratos induz uma aplicação contínua $|f| : |X| \rightarrow |Y|$, tal que $|f \circ g| = |f| \circ |g|$ e $|Id_X| = Id_{|X|}$. Por uma *triangulação* do espaço Z entenderemos um homeomorfismo da realização de um complexo simplicial abstrato com Z .

Acontece que é fácil descrever o conjunto de componentes conexas de um complexo simplicial em termos de seu complexo simplicial abstrato associado. Seja χ um complexo simplicial e X seu complexo simplicial abstrato associado.

Proposição 2.9. *Seja R a relação de equivalência sobre $V(X)$ gerada pela relação binária R' sobre $V(X)$ dada por*

$$R' = \{(v, v') / \{v, v'\} \text{ é um simplexo de } X\}$$

As componentes conexas de χ estão em correspondência bijetiva com o quociente $V(X)/R$.

Demonstração. Denote por $\pi_0(\chi)$ o conjunto de componentes conexas de χ . Precisamos definir uma aplicação bijetiva entre o conjunto $\pi_0(\chi)$ e $V(X)/R$.

Seja $Z \in \pi_0(\chi)$. Como Z é uma componente conexa, temos que $Z \neq \emptyset$, ou seja, existe pelo menos um 0-simplexo, ou vértice, nesse conjunto. Denote por z esse vértice tal que $z \in Z$.

Defina $f : \pi_0(\chi) \rightarrow V(X)/R$ como $f(Z) = z + R$.

A aplicação acima definida está bem definida. De fato, sejam $z_1, z_2 \in Z \in \pi_0(\chi)$ dois vértices. Se provarmos que $z_1 + R = z_2 + R$ temos que a aplicação está bem definida. Como z_1 e z_2 estão na mesma componente conexa de um complexo simplicial, significa que existe uma sequência de simplexes formando um caminho entre eles, ou seja, existe um caminho de 1-simplexes ligando esses dois vértices. Em outras palavras, existem x_0, x_1, \dots, x_n tais que $x_0 = z_1$, $x_n = z_2$ e $\{x_i, x_{i+1}\}$, para $0 \leq i \leq n-1$ são 1-simplexes, ou arestas, do complexo simplicial. Mas isso é equivalente a dizer que $z_1 \sim_R z_2 \implies z_1 + R = z_2 + R$.

A aplicação é injetora, pois dadas duas componentes conexas $M, N \in Z$ distintas, temos que existem $z_1 \in M$ e $z_2 \in N$, 0-simplexes, e esses simplexes não estão ligados por um caminho, pois caso estivessem, estariam na mesma componente conexa. Como $z_1 + R = z_2 + R$ se, e somente se, existe um caminho entre esses dois vértices, e sabemos que tal caminho não existe, temos que $z_1 + R \neq z_2 + R \implies f(M) \neq f(N)$. Além disso, a aplicação f é sobrejetora, pois dado $z + R \in V(X)/R$, basta verificar de qual componente conexa veio o ponto z da realização geométrica e tomar essa componente conexa, que será aplicada no ponto $z + R \in V(X)/R$.

Logo, a correspondência é bijetiva. □

Considere agora o seguinte exemplo de um complexo simplicial abstrato, denotado por W . A lista de simplexes no complexo simplicial correspondente é agora

$$\{\{A\}, \{B\}, \{C\}, \{D\}, \{E\}, \{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}, \{D, E\}\}$$

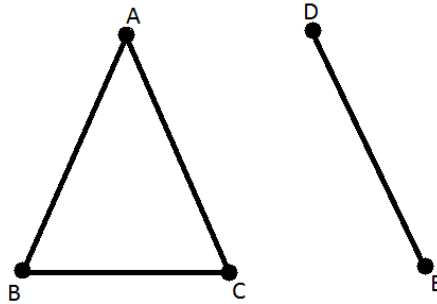


Figura 2.3: O complexo simplicial W . Figura de [2].

A realização geométrica desse complexo possui duas componentes conexas, nomeadas como o triângulo ABC e o intervalo DE . Nosso primeiro objetivo é descrever o cálculo do número de componentes conexas usando métodos de álgebra linear.

Definição 2.10. *Sejam k um corpo e S um conjunto finito. Então, pelo k -espaço vetorial livre sobre o conjunto S entenderemos o espaço vetorial $V_k(S)$ de funções a valores em k de S com operações dadas pela adição e multiplicação ponto a ponto. $V_k(S)$ tem como base $B_k(S)$ identificada com S , consistindo das funções características φ_s definidas por $\varphi_s(s') = 1$ se $s' = s$ e $\varphi_s(s') = 0$ se $s \neq s'$. Em particular, a dimensão de $V_k(S)$ é $\#(S)$. Se $f : S \rightarrow T$ é uma aplicação entre conjuntos, então existe uma transformação linear associada $V_k(f) : V_k(S) \rightarrow V_k(T)$, definida em um elemento $\varphi : S \rightarrow k$ de $V_k(S)$ pela fórmula*

$$V_k(f)(\varphi)(t) = \sum_{\{s|f(s)=t\}} \varphi(s).$$

Note que um elemento base φ_s é levado pela $V_k(f)$ em um elemento base $\varphi_{f(s)}$. Agora, suponhamos que seja dado um conjunto finito X com uma relação binária $R \subseteq X \times X$. Definimos um subespaço $V_k(R) \subseteq V_k(X)$ como o subespaço gerado pelo conjunto

$$\{\varphi_x - \varphi_{x'} / (x, x') \in R\}.$$

Proposição 2.11. *Existe um isomorfismo entre k -espaços vetoriais*

$$V_k(X)/V_k(R) \cong V_k(X/R).$$

Ainda mais, a composta $V_k(X) \rightarrow V_k(X)/V_k(R) \rightarrow V_k(X/R)$ é a transformação linear induzida pela projeção $X \rightarrow X/R$.

Demonstração. De fato, olhando na definição anterior temos que: se $f : S \rightarrow T$ é uma aplicação entre conjuntos, então existe uma transformação linear associada $V_k(f) : V_k(S) \rightarrow V_k(T)$, definida em um elemento $\varphi : S \rightarrow k$ de $V_k(S)$ pela fórmula

$$V_k(f)(\varphi)(t) = \sum_{\{s|f(s)=t\}} \varphi(s).$$

Tomemos $f : X \rightarrow X/R$ a função projeção. Pela definição, existe uma transformação linear associada $V_k(f) : V_k(X) \rightarrow V_k(X/R)$, dada pela fórmula acima. Não é difícil provar que $V_k(f)$ é um homomorfismo sobrejetor.

Note agora que, como $V_k(R)$ é o subespaço gerado pelos elementos da forma $\{\varphi_x - \varphi_{x'}/(x, x') \in R\}$, temos que $\ker(V_k(f)) = V_k(R)$.

Assim, pelo teorema do isomorfismo, segue que $V_k(X)/V_k(R) \cong V_k(X/R)$.

A segunda parte da proposição fica clara devido a construção da nossa aplicação acima. \square

Por simplicidade, agora vamos assumir que nosso corpo seja \mathbb{Z}_2 . Associamos ao complexo simplicial W mostrado na figura 2.3, a matriz ∂_1 dada por

$$\partial_1 = \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \\ \text{D} \\ \text{E} \end{array} \begin{bmatrix} \text{AB} & \text{AC} & \text{BC} & \text{DE} \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

As colunas estão em correspondência com as arestas e as linhas em correspondência com os vértices. As entradas são determinadas pela incidência de um vértice com a aresta: é 1 se o vértice está contido na aresta e 0, caso contrário. Examinando as colunas, e lembrando que $v - v' = v + v'$ devido a escolha do corpo, vemos que elas são exatamente os elementos de

$$\{v - v'/v \text{ e } v' \text{ geram uma aresta em } W\}.$$

Proposição 2.12. Denote por $\pi_0(|W|)$ o conjunto das componentes conexas de $|W|$ e denote com $v_0(W)$ o conjunto de vértices de W . Então o espaço vetorial $V_k(\pi_0(|W|))$ é isomorfo ao espaço quociente de $V_k(v_0(W))$ pelo espaço coluna $\text{col}(\partial_1)$ de ∂_1 . Ainda mais, existe uma escolha natural de base para $V_k(\pi_0(W))$ consistindo nas classes de equivalência dos vértices.

Demonstração. Para detalhes da demonstração consulte [8] e [9]. \square

Em particular, o número de componentes conexas é igual a dimensão de $V_k(v_0(W))/\text{col}(\partial_1)$ que é igual a $\#(v_0(W)) - \text{posto}(\partial_1)$. A interpretação linear algébrica do número de componentes conexas sugere que tentemos interpretar o núcleo de ∂_1 assim como o posto.

Note que o posto de ∂_1 é 3 e por conseguinte (pelo teorema do núcleo e da imagem) que a dimensão do núcleo de ∂_1 é $4 - \text{posto}(\partial_1) = 1$. Podemos verificar que uma base para o núcleo consiste do elemento

$$\varphi_{AB} + \varphi_{AC} + \varphi_{BC}.$$

Se pensarmos nessa soma como união, essa combinação linear corresponde a união das arestas AB, AC e BC . Essa união é um ciclo de comprimento 3 mostrado na figura 2.3. Para entender a interpretação, consideremos o seguinte complexo.

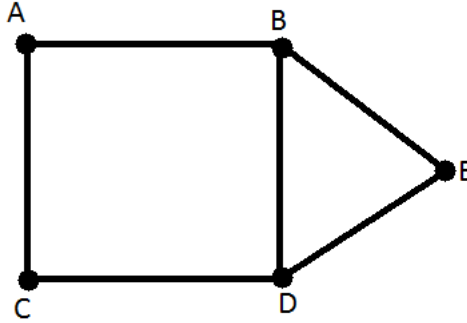


Figura 2.4: O complexo X. Figura de [2].

Podemos ver que existem dois ciclos bem evidentes, $AB + BD + DC + AC$ e $BE + ED + DB$, representados pelos elementos do núcleo $\varsigma_1 = \varphi_{AB} + \varphi_{BD} + \varphi_{DC} + \varphi_{AC}$ e $\varsigma_2 = \varphi_{BE} + \varphi_{ED} + \varphi_{DB}$. Porém existe outro ciclo dado por

$$AB + BE + ED + DC + CA. \quad (2.1)$$

Perceba, entretanto, que a soma $\varsigma_1 + \varsigma_2$ é igual ao elemento

$$\varphi_{AB} + \varphi_{BE} + \varphi_{ED} + \varphi_{DC} + \varphi_{CA},$$

o qual é o elemento do núcleo $\mathbb{1}$ de ∂_1 correspondente ao ciclo em (2.1). Os ciclos, na verdade, correspondem a elementos do espaço vetorial e podem então ser adicionados ou multiplicados por escalares. Temos assim uma maneira muito útil de organizar os ciclos. Em particular, podemos construir uma *base* para os ciclos, em vez de contá-los individualmente.

Considere agora o complexo da figura a seguir, junto com a matriz ∂_1 correspondente.

A parte sombreada reflete o fato de que existe agora um 2-simplexo, nomeado $\{B, E, D\}$. Como no complexo X na figura 2.4, temos os dois laços $ABDC$ e BED . Porém, aqui, o laço BED está preenchido por um simplexo e o laço $ABEDC$ pode ser deformado de forma contínua no espaço no laço $ABDC$ passando pelo 2-simplexo. Então, do mesmo modo discutido em homotopia na seção anterior, devemos formalizar nossas ideias de modo que esses dois ciclos sejam iguais, sempre lembrando que estamos interessados na construção de espaços vetoriais que, no final, dependam somente do seu espaço subjacente, não de uma triangulação particular, ou seja, um modo particular de representá-lo como um complexo simplicial.

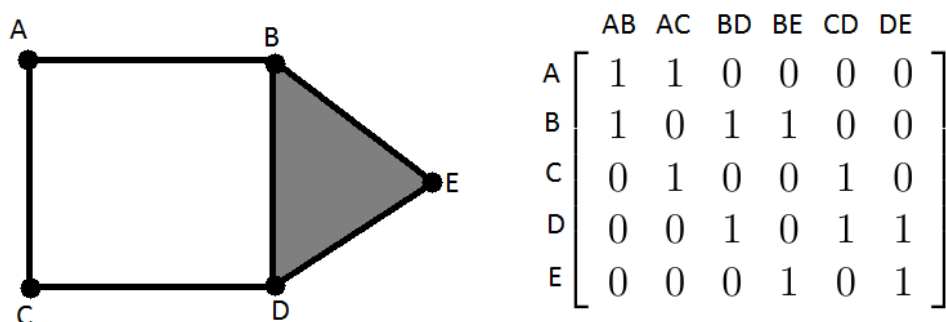


Figura 2.5: Um complexo com um 2-simplexo adicionado. Figura de [2].

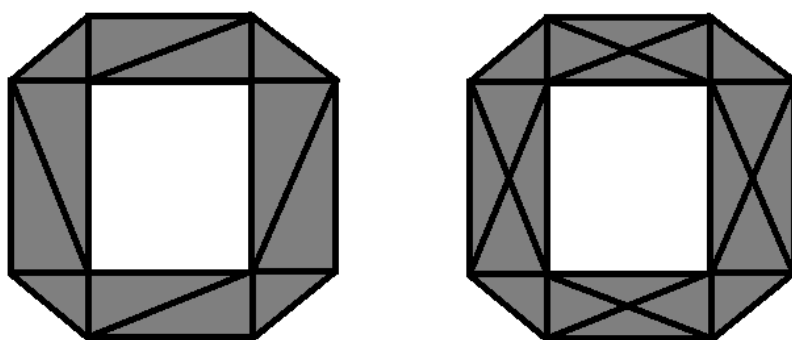


Figura 2.6: Duas triangulações do mesmo espaço. Figuras de [2].

Na figura 2.6 podemos ver o mesmo espaço representado de dois modos diferentes como complexos simpliciais. Se calcularmos a matriz ∂_1 da representação a esquerda, poderemos perceber que o núcleo dela teria dimensão 12, enquanto o da direita teria dimensão 20. Como se trata do mesmo espaço, já percebemos que teremos que modificar os argumentos da álgebra linear que introduzimos para que obtenhamos os mesmos resultados homológicos, já que se trata do mesmo espaço representado por duas triangulações diferentes.

Para motivar essa construção, considere o complexo X na figura 2.5. Junto aos vértices e arestas, agora temos um 2-simplexo, cuja fronteira é o ciclo BED . A combinação linear correspondente

$$\varphi_{BE} + \varphi_{ED} + \varphi_{BD}$$

em $V_k(\sigma_1(X))$ é a diferença entre as combinações lineares

$$\varphi_{AB} + \varphi_{BE} + \varphi_{ED} + \varphi_{DC} + \varphi_{CA} \text{ e } \varphi_{AB} + \varphi_{BD} + \varphi_{DC} + \varphi_{CA},$$

novamente lembrando que, devido a escolha do nosso corpo, diferenças e somas são a mesma coisa. A ideia principal aqui é formar o quociente do núcleo de ∂_1 pelo elemento

$$\varphi_{BE} + \varphi_{ED} + \varphi_{BD},$$

que será chamado de *fronteira*, já que é derivado da fronteira do simplexo $\{B, E, D\}$. Essa discussão nos leva a seguinte construção ligada a um complexo simplicial abstrato, a qual inclui todos os simplexos de dimensão elevada.

Seja X um complexo simplicial. Denote por $\Sigma_i(X)$ o conjunto de simplexos i -dimensionais, isto é, os simplexos que como subconjuntos do conjunto de vértices $V(X)$ possuem cardinalidade $i + 1$. Definimos as matrizes ∂_i como as matrizes cujas colunas estão em correspondência injetora com $\Sigma_i(X)$ e cujas linhas estão em correspondência injetora com $\Sigma_{i-1}(X)$, definindo que a entrada na linha correspondente ao $(i - 1)$ -simplexo τ e a coluna correspondente ao i -simplexo τ' é 1 se $\tau \subseteq \tau'$ como conjuntos de vértices e 0, caso contrário. Essa definição está de acordo com as construções que já fizemos. Uma observação chave relacionando as matrizes ∂_i e ∂_{i-1} é:

Proposição 2.13. *O produto de matrizes $\partial_{i-1} \cdot \partial_i$ é igual a matriz nula.*

Demonstração. As linhas de $\partial_{i-1} \cdot \partial_i$ estão em correspondência injetora com $\Sigma_{i-2}(X)$ e suas colunas em correspondência injetora com $\Sigma_i(X)$. É fácil ver que a entrada na linha correspondendo ao $(i - 2)$ -simplexo τ e na coluna correspondente ao i -simplexo τ' é igual ao número de elementos $\bar{\tau}$ de $\Sigma_{i-1}(X)$ que satisfaz $\tau \subseteq \bar{\tau} \subseteq \tau'$. Esse número ou é 0, no caso onde τ não estar contido em τ' , ou 2, caso contrário. Ambos os números são zero no nosso corpo k . \square

As matrizes ∂_i podem ser consideradas como as matrizes ligadas as transformações lineares de $V_k(\Sigma_i(X))$ em $V_k(\Sigma_{i-1}(X))$, relativa a base de $V_k(\Sigma_i(X))$. Abusando da notação, denotaremos as matrizes e transformações por ∂_i . O que temos agora é o diagrama,

$$\dots \xrightarrow{\partial_{i+1}} V_k(\Sigma_i(X)) \xrightarrow{\partial_i} V_k(\Sigma_{i-1}(X)) \xrightarrow{\partial_{i-1}} \dots \xrightarrow{\partial_2} V_k(\Sigma_1(X)) \xrightarrow{\partial_1} V_k(\Sigma_0(X))$$

no qual cada composta de duas transformações lineares consecutivas é identicamente nula, pela proposição anterior. Essa observação nos sugere a seguinte definição:

Definição 2.14. *Por uma complexo de cadeias C_\star sobre um corpo k , entenderemos uma escolha de espaço vetorial C_i para qualquer $i \geq 0$, junto as transformações lineares $\partial_i : C_i \rightarrow C_{i-1}$ para todo i , tal que $\partial_{i-1} \cdot \partial_i = 0$, para todo i .*

Agora, para qualquer i , definimos dois subespaços B_i e Z_i de C_i . Z_i é definido como o núcleo de ∂_i e B_i como a imagem de ∂_{i+1} . Pela proposição 2.12, segue que $B_i \subseteq Z_i$ e, assim, podemos definir $H_i(C_\star)$ como o espaço quociente Z_i/B_i . Esses espaços vetoriais, aplicados a um complexo de cadeia associada a um complexo simplicial, chamaremos de *grupos de homologia* do complexo.

Descreveremos agora a álgebra linear que está envolvida no cálculo dos grupos de homologia e, em particular, sua dimensão. Isto é, interpretaremos o cálculo de grupos de homologia de um complexo em termos de operações com linhas e colunas. As operações com linhas e colunas serão multiplicar uma linha (coluna) por um elemento não nulo de k , adicionar o múltiplo de uma linha (coluna) a outra e transpor um par de linhas (colunas). Da observação 2.3, podemos afirmar que dada uma matriz A sobre um corpo k , podemos usar as operações de linhas e colunas descritas acima para obter uma matriz \bar{A} obtendo a forma

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

onde n é o posto de A . \bar{A} é unicamente determinada por A .

Precisaremos agora estudar as formas normais de pares de matrizes (A, B) com $A.B = 0$.

Proposição 2.15. *Recordando que cada matriz está associada a uma transformação linear e cada transformação linear possui sua matriz associada, sejam*

$$U \xrightarrow{B} V \xrightarrow{A} W$$

transformações lineares, tais que $A.B = 0$. Sejam $F : U \rightarrow U$, $G : V \rightarrow V$ e $H : W \rightarrow W$ transformações lineares inversíveis. Então temos que $HAG^{-1}.GBF = 0$ e existe um isomorfismo de espaços vetoriais

$$\ker(A)/\text{im}(B) \cong \ker(HAG^{-1})/\text{im}(GBF).$$

A prova da proposição anterior segue do mesmo fato da proposição 2.2.

A versão matricial usa o seguinte conjunto de operações admissíveis em tal par.

1. Uma operação linha arbitrária em A .
2. Uma operação coluna arbitrária em B .
3. Realizar uma operação coluna em A e uma operação linha em B simultaneamente, com as operações relacionadas como segue. Se a operação coluna em A é multiplicação da i -ésima coluna por uma constante não nula x , então a operação linha em B é multiplicar a i -ésima linha por x^{-1} . Se a operação coluna em A é transpor duas colunas, então a operação linha em B é transpor as duas linhas correspondentes em B . Finalmente, se a operação coluna em A é adicionar x vezes a i -ésima coluna na j -ésima coluna, então a operação linha em B é subtrair x vezes a j -ésima linha da i -ésima linha.

Note que se aplicarmos qualquer uma das operações acima em um par (A, B) para obter um par (A', B') , manteremos a propriedade de que (A', B') também satisfaz $A'.B' = 0$. Agora temos a seguinte proposição:

Proposição 2.16. *Dado um par (A, B) , com $A.B = 0$, podemos realizar operações do tipo descritas acima para obter o par (A', B') , com*

$$\left(\left(\begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} \right) \right).$$

Demonstração. Primeiro realizamos operações linhas e colunas em A (não esquecendo de aplicar as operações correspondentes em B sempre que uma operação coluna for realizada em A) para obter um par (A', B') da forma

$$\left(\begin{bmatrix} I_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B'_{11} & B'_{12} & B'_{13} \\ B'_{21} & B'_{22} & B'_{23} \\ B'_{31} & B'_{32} & B'_{33} \end{bmatrix} \right)$$

para algum k . Da condição que $A' \cdot B' = 0$, temos que $B'_{11} = B'_{12} = B'_{13} = 0$. Agora podemos realizar operações linhas e colunas na matriz B' , que é da forma

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ B'_{21} & B'_{22} & B'_{23} \\ B'_{31} & B'_{32} & B'_{33} \end{bmatrix}.$$

Realizaremos operações linhas envolvendo somente as últimas linhas, já que as primeiras são nulas. Cada operação linha possui uma operação coluna correspondente na matriz A' , que atingiria suas últimas colunas, que já são nulas, ou seja, não alteram A' . Realizar essas operações é equivalente a realizar operações linhas e colunas na matriz

$$\begin{bmatrix} B'_{21} & B'_{22} & B'_{23} \\ B'_{31} & B'_{32} & B'_{33} \end{bmatrix}.$$

que denotaremos por \overline{B}' . Podemos então realizar operações (que não alteram A') para transformar \overline{B}' na forma

$$\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e, usando tranposições de linhas e colunas, podemos deixá-la da forma

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}.$$

□

Observação 2.17. *Apresentamos espaços vetoriais associados a complexos simpliciais, na seção 2.2, grupos $\pi_n(\mathbb{X}, x_0)$ associado a um espaço \mathbb{X} com ponto base x_0 e conjuntos $\pi_0(\mathbb{X})$, tudo isso porque essas construções são capazes de refletir o comportamento entre aplicações de complexos simpliciais e aplicações contínuas de espaços topológicos. Essa propriedade é conhecida como funtorialidade.*

Para qualquer aplicação de complexos simpliciais abstratos $f : X \rightarrow Y$, existe uma transformação linear induzida $H_n(f) : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$. Essa transformação linear é obtida seguindo os seguintes fatos:

1. *Existem transformações lineares $V_k(\Sigma_n(f)) : V_k(\Sigma_n(X)) \rightarrow V_k(\Sigma_n(Y))$ que levam elementos base φ_τ em elementos base $\varphi_{f(\tau)}$;*
2. *O homomorfismo ∂_i respeita as aplicações $V_k(\Sigma_n(f))$ no sentido que os seguintes diagramas comutam;*
3. *Segue de (2) que $V_k(\Sigma_n(f))$ aplica $Z_n(X)$ em $Z_n(Y)$ e $B_n(X)$ em $B_n(Y)$;*

$$\begin{array}{ccc}
 V_k(\Sigma_n(X)) & \xrightarrow{V_k(\Sigma_n(f))} & V_k(\Sigma_n(Y)) \\
 \partial_n \downarrow & & \downarrow \partial_n \\
 V_k(\Sigma_{n-1}(X)) & \xrightarrow{V_k(\Sigma_{n-1}(f))} & V_k(\Sigma_{n-1}(Y))
 \end{array}$$

4. Segue de (3) que existe um homomorfismo induzido

$$H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X) \xrightarrow{H_n(f)} Z_n(Y)/B_n(Y) = H_n(Y)$$

Tendo apresentado os conceitos necessários da topologia algébrica para o desenvolvimento do trabalho, no capítulo seguinte vamos adaptar métodos homológicos descritos previamente, a espaços bem particulares: espaços métricos finitos. Isso é importante, pois nossos dados são sempre nuvens de pontos, que podem ser vistas em algum \mathbb{R}^n , com a métrica discreta. Assim, depois de adaptados, nossos métodos poderão nos dar informações interessantes sobre a forma ou estrutura de nossa nuvem de pontos.

3 Estrutura de dados

Observamos que ao aplicar os métodos descritos na seção anterior muitas vezes não obtemos informação nenhuma a respeito da forma com que esses pontos estão espalhados no espaço, ou seja, da sua estrutura. Dessa forma, o objetivo principal desse trabalho é estender os métodos anteriores de modo que se tornem aplicáveis a espaços métricos finitos e que nos dê informações procuradas. Um exemplo é a figura abaixo, onde a expectativa seria que a ferramenta produzida pudesse identificar o padrão de dois laços nela.



Figura 3.1: Espaço discreto com padrão de dois laços. Figura de [2]

Mostraremos a seguir que é possível desenvolver tal ferramenta e, como motivação dessa construção, vamos olhar uma metodologia comum em estatística.

3.1 Agrupamentos

O aspecto mais simples da estrutura de um objeto geométrico é o seu número de componentes conexas. Porém, ao estudarmos conjuntos de pontos, que são discretos, obtemos que cada ponto é uma componente conexa por si só, não trazendo para nós informação relevante nenhuma sobre o mesmo. Então, estatísticos pensaram no que seria uma boa ideia para componentes conexas em um conjunto de pontos, sob a ideia de *clusters*, que serão traduzidos por nós como agrupamentos.

Suponhamos que são dados um espaço métrico finito com pontos $\mathbb{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ e as distâncias dois a dois desses pontos. Para qualquer valor não-negativo R , podemos formar a relação \sim_R sobre o conjunto \mathbb{X} pelo critério:

$$x \sim_R x' \text{ se e somente se } d(x, x') \leq R$$

Denote por \simeq_R a relação de equivalência gerada por \sim_R . O conjunto de classes de equivalência sob \simeq_R nos dá agora uma partição de \mathbb{X} , a qual pode ser pensada

como candidata para ser as componentes conexas de \mathbb{X} . Note que, para cada valor R , obtemos uma partição de \mathbb{X} .

Agora é natural perguntar qual deles é o correto a se escolher, ou seja, qual deles representa melhor nosso conjunto de pontos. Perceba, entretanto, que não há necessidade de escolhermos uma dessas partições, já que cada uma delas traz informação a respeito do nosso conjunto.

O que fazemos é dar outra abordagem a isso, observando que existe uma compatibilidade conforme R vai mudando, no sentido que se $R \leq R'$, então a partição associada a R' é "mais grossa" do que a associada a R , isto é, a partição vai se encaminhando para a trivial conforme R cresce, como indicado na figura abaixo.

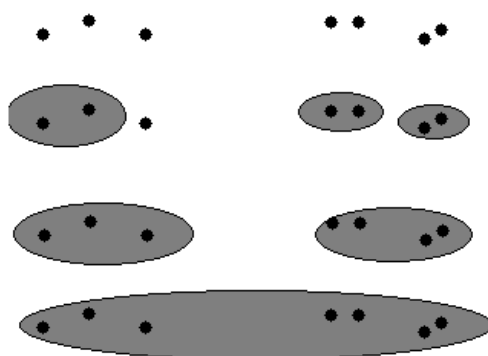


Figura 3.2: Agrupamentos Figura de [2]

A figura indica a mudança nos agrupamentos conforme o valor R é alterado. O que foi reconhecido por estatísticos é que existe um único diagrama, chamado *dendrograma*, no qual tem-se representado visualmente as informações trazidas por todas as partições de um conjunto simultaneamente. A figura a seguir mostra um espaço e seu respectivo dendrograma.

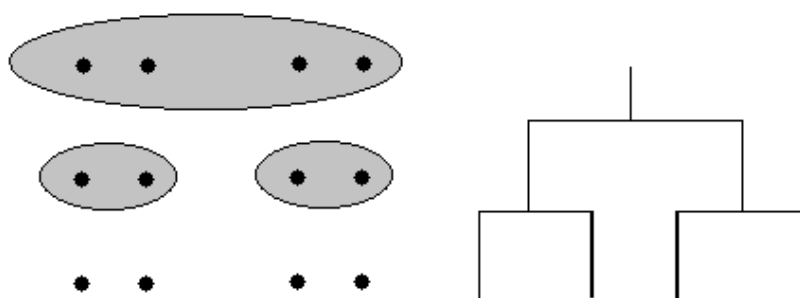


Figura 3.3: Dendrograma. Figura de [2].

O resultado é um complexo simplicial sem laços T , também conhecido como árvore, junto a uma aplicação referência de T nos reais não-negativos. Na nossa figura, por exemplo, a aplicação referência é a função altura com relação ao eixo x .

Existe uma outra maneira de interpretar um dendrograma. Para cada valor R , denotaremos por X_R o conjunto de classes de equivalência para a relação de equivalência

\simeq_R . Sabemos que existe uma aplicação de conjuntos $X_R \longrightarrow X_{R'}$, sempre que $R \leq R'$, a qual associa a cada agrupamento no nível R ao (único) agrupamento no nível R' em que ele está incluso. Essa construção é tão útil que recebe um nome especial, a saber:

Definição 3.1. *Por um conjunto persistente entendemos uma família de conjuntos $\{X_R\}_{R \in \mathbb{R}}$ munido de aplicações*

$$\varphi_R^{R'} : X_R \longrightarrow X_{R'}, \text{ para todo } R \leq R'$$

tais que

$$\varphi_R^{R'} \varphi_{R'}^{R''} = \varphi_R^{R''} \text{ para todo } R \leq R' \leq R''.$$

Podemos falar de um objeto persistente como uma família de tais objetos parametrizada por \mathbb{R} , tendo uma aplicação do objeto parametrizado por r no objeto parametrizado por r' , sempre que $r \leq r'$, com as mesmas compatibilidades acima mencionadas. Assim, podemos generalizar tal definição para qualquer tipo de objetos, tais como complexos simpliciais, espaços vetoriais ou espaços topológicos, desde que estejam junto a aplicações entre esses objetos (aplicações de complexos simpliciais, transformações lineares, aplicações contínuas, etc...).

Para cada conjunto persistente existe um dendrograma associado e vice versa. Vamos agora fazer uma reformulação do dendrograma (e conseqüentemente um conjunto persistente), que será associada a um espaço métrico finito usando noções topológicas e vai deixar claro o desenvolvimento de métodos de definição de homologia de dimensões mais altas para espaços métricos finitos.

Definição 3.2. *Dados um espaço métrico finito \mathbb{X} e um número real não-negativo R , construímos um complexo simplicial abstrato $VR(\mathbb{X}, R)$, chamado de complexo de Vietoris-Rips de \mathbb{X} , escolhendo o conjunto de vértices como o espaço subjacente de \mathbb{X} e considerando que qualquer subconjunto $\{x_0, \dots, x_n\}$ de \mathbb{X} é um simplexo de $VR(\mathbb{X}, R)$ se, e somente se,*

$$d(x_i, x_j) \leq R \text{ para todo } i, j \in \{0, \dots, n\}.$$

Note que sempre que $R \leq R'$ existe uma inclusão $VR(\mathbb{X}, R) \hookrightarrow VR(\mathbb{X}, R')$, já que o conjunto de vértices dos dois complexos abstratos são iguais e que qualquer simplexo de $VR(\mathbb{X}, R)$ é também um simplexo de $VR(\mathbb{X}, R')$. Segue também que obtemos aplicações

$$|VR(\mathbb{X}, R)| \longrightarrow |VR(\mathbb{X}, R')|.$$

De modo sucinto, a família de complexos Vietoris-Rips $\{VR(\mathbb{X}, R)\}_{R \in \mathbb{R}}$ forma um complexo simplicial persistente.

O principal ponto dessa definição é que dado qualquer espaço métrico \mathbb{X} , podemos definir o conjunto $\pi_0(|VR(\mathbb{X}, R)|)$ de componentes conexas de $|VR(\mathbb{X}, R)|$ e devido a functorialidade da construção π_0 , obtemos um conjunto persistente $\{\pi_0(|VR(\mathbb{X}, R)|)\}_{R \in \mathbb{R}}$. Esse conjunto persistente pode facilmente ser visto como idêntico ao conjunto persistente obtido acima. O ponto é que ele é induzido por uma aplicação entre espaços topológicos, as quais apontarão o caminho para definir invariantes homológicos da estrutura de espaços métricos finitos.

3.2 Persistência

Antes de definirmos a construção de Vietoris-Rips, para cada valor de R era possível ter uma partição ou separação do nosso espaço métrico finito. Agora, definida essa construção, somos capazes de construir um complexo simplicial e, portanto, um espaço topológico, ou seja, uma estrutura bem mais rica que a antiga. No exemplo mostrado na figura a seguir, o espaço métrico subjacente consiste de 6 pontos e está representado a esquerda. A barra inferior representa o valor do parâmetro R e a direita temos a representação do complexo de Vietoris-Rips associado a esse espaço métrico e a esse parâmetro.

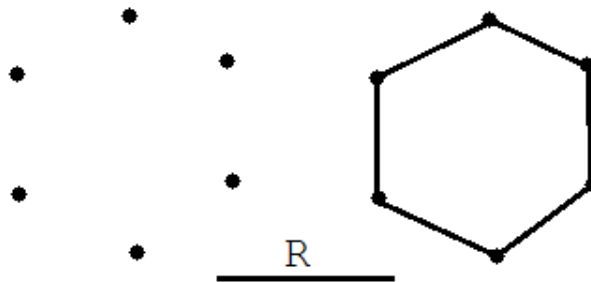


Figura 3.4: Espaço métrico e complexo de Vietoris-Rips associado. Figura de [2]

Note que o complexo simplicial associado a esse espaço e esse parâmetro contém um laço e essa característica não deveria demorar a acontecer, já que os pontos foram "tirados" de um círculo. Isso sugere que os complexos de Vietoris-Rips podem ser úteis para identificação de padrões da estrutura dos nossos conjuntos. É claro que o problema da escolha do parâmetro se mantém, já que essa construção continua fortemente ligada a escolha de um parâmetro inicial.

Perceba que no nosso conjunto o consistindo de 6 pontos, quando R é pequeno temos que o complexo de Vietoris-Rips associado é um conjunto discreto formado pelos pontos e se torna um complexo completo (que não admite admite laço não trivial) quando R é maior do que o diâmetro do espaço métrico original. Isso sugere que deveríamos encontrar o valor "correto" para R capturar a estrutura do espaço. Entretanto, não há caminho óbvio de fazer essa escolha.

A situação permanece análoga a situação dos clusters, descrita na seção anterior. Lá, era possível construir um diagrama, dendrograma, que fornece uma representação simples do comportamento dos clusters para todos os valores do parâmetro R de uma vez. Vamos agora mostrar que existe uma diagrama similar que nos leva a estudar homologia em dimensões mais altas de complexos de Vietoris-Rips em todos os valores para R de uma vez também.

Dado um espaço métrico finito \mathbb{X} , podemos construir a família $\{VR(\mathbb{X}, R)\}_{R \in \mathbb{R}}$ e muní-la das aplicações inclusões. Agora fixado um inteiro não-negativo i , aplicando H_i a família $\{VR(\mathbb{X}, R)\}_{R \in \mathbb{R}}$, obtemos a família $\{H_i(VR(\mathbb{X}, R))\}_{R \in \mathbb{R}}$ de espaços vetoriais parametrizados pela reta real e, lembrando da functoriedade da homologia do capítulo anterior, podemos dar a estrutura de *espaço vetorial persistente* a essa família. Esse espaço vetorial persistente contém informação sobre a homologia de todos os complexos

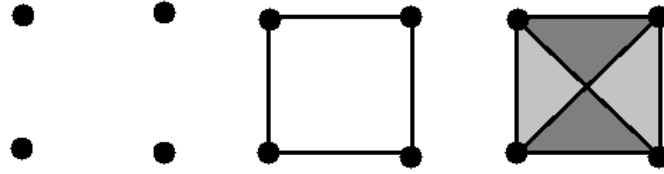


Figura 3.5: Família crescente de complexos de Vietoris-Rips.Figura de [2]

de Vietoris-Rips para todos os valores de R , assim como o comportamento das transformações lineares induzidas pelas aplicações inclusões de um complexo de Vietoris-Rips no outro.

Antes, mesmo que obtívéssemos uma partição para cada R , fomos capazes de definir o "dendrograma" de modo a ter uma representação visual do que acontecia em todos os parâmetros. O que faremos agora é mostrar que existe uma representação visual e conceitual simples para esses espaços vetoriais persistentes, mas para tal, precisaremos introduzir um pouco de álgebra.

3.3 A álgebra dos espaços vetoriais persistentes

Primeiro vamos definir espaços vetoriais persistentes.

Definição 3.3. *Seja k um corpo qualquer. Então, por um espaço vetorial persistente sobre k , entendemos uma família de k -espaços vetoriais $\{V_r\}_{r \in \mathbb{R}}$, junto a transformações lineares $L_V(r, r') : V_r \rightarrow V_{r'}$, sempre que $r \leq r'$, tais que $L_V(r', r'') \cdot L_V(r, r') = L_V(r, r'')$ para todo $r \leq r' \leq r''$. Uma transformação linear f de espaços vetoriais persistentes sobre k de $\{V_r\}$ em $\{W_r\}$ é uma família de transformações lineares $f_r : V_r \rightarrow W_r$, tal que para todo $r \leq r'$, todos os diagramas*

$$\begin{array}{ccc} V_r & \xrightarrow{L_V(r, r')} & V_{r'} \\ f_r \downarrow & & \downarrow f_{r'} \\ W_r & \xrightarrow{L_W(r, r')} & W_{r'} \end{array}$$

comutam, ou seja,

$$f_{r'} \circ L_V(r, r') = L_W(r, r') \circ f_r.$$

Uma transformação linear é um *isomorfismo* se admite inversa dos dois lados. Um *subespaço vetorial persistente* de $\{V_r\}$ é uma escolha de k -subespaços $U_r \subseteq V_r$, para todo $r \in [0, +\infty)$, tais que $L_V(r, r')(U_r) \subseteq U_{r'}$ para todo $r \leq r'$. Se $f : \{V_r\} \rightarrow \{W_r\}$ é uma transformação linear, então a *imagem* de f , denotada por $im(f)$, é o subespaço vetorial persistente $\{im(f_r)\}$.

Observação 3.4. *Em muitas construções a variável será restrita a $[0, \infty)$. Isso ficará claro pelo contexto e não deve causar confusão.*

A noção de espaço quociente também é estendida para espaços vetoriais persistentes. Se $\{U_r\} \subseteq \{V_r\}$ é um subespaço vetorial persistente, então podemos formar o espaço vetorial persistente $\{V_r/U_r\}$, onde $L_{V/U}(r, r')$ é a transformação linear de V_r/U_r em $V_{r'}/U_{r'}$ que envia a classe de equivalência $[v]$ na classe de equivalência $[L_V(r, r')(v)]$ para qualquer $v \in V_r$.

Também queremos estender a noção de espaço vetorial livre sobre um conjunto. Seja X um conjunto qualquer, munido de uma função $\rho : X \rightarrow [0, +\infty)$. Vamos nos referir ao par (X, ρ) como um conjunto \mathbb{R}_+ -filtrado. Então, por um *espaço vetorial persistente livre* sobre o par (X, ρ) , vamos entender o espaço vetorial persistente $\{W_r\}$, com $W_r \subseteq V_k(X)$, igual ao k -espaço linear gerado pelos elementos de $X[r]$, onde $X[r] = \{x \in X / \rho(x) \leq r\}$. Note que $X[r] \subseteq X[r']$ quando $r \leq r'$ e, por isso, existe a inclusão $W_r \subseteq W_{r'}$.

Proposição 3.5. *Uma combinação linear $\sum_x a_x x \in V_k(X)$ está em W_r se, e somente se, $a_x = 0$, para todo x com $\rho(x) > r$.*

Demonstração. Note que W_r é o k -espaço linear gerado pelos elementos de $X[r]$, onde $X[r] = \{x \in X / \rho(x) \leq r\}$. Assim

$\sum_x a_x x \in W_r \iff$ para todo x nessa representação tem-se $\rho(x) \leq r$, ou seja, se existe x' nessa representação tal que $\rho(x') > r$ então $a_{x'} = 0$. \square

Denotaremos esse espaço vetorial persistente por $\{V_k(X, \rho)_r\}$. Dizemos que um espaço vetorial persistente é *livre* se é isomorfo a um espaço da forma $V_k(X, \rho)$ para algum (X, ρ) e dizemos que é *finitamente gerado* se X pode ser tomado finito.

Definição 3.6. *Um espaço vetorial persistente é finitamente apresentado se é isomorfo a um espaço vetorial persistente da forma $\{W_r\}/\text{im}(f)$ para alguma transformação linear $f : \{V_r\} \rightarrow \{W_r\}$ entre espaços vetoriais persistentes livres finitamente gerados $\{V_r\}$ e $\{W_r\}$.*

A escolha de uma base para os espaços vetoriais V e W nos leva a representar transformações lineares de V em W por matrizes. Mostraremos agora que existe uma representação similar para transformações lineares entre espaços vetoriais persistentes livres. Para qualquer par (X, Y) de conjuntos finitos e um corpo k , uma (X, Y) -matriz é um vetor $[a_{xy}]$ de elementos de k . Escrevemos $r(x)$ para a linha correspondente a $x \in X$ e $c(y)$ para a coluna correspondente a y . Para qualquer espaço vetorial persistente livre finitamente gerado $\{V_r\} = \{V_k(X, \rho)_r\}$, observe que $V_k(X, \rho)_r = V_k(X)$ para r suficientemente grande, já que X é finito e assim o conjunto das distâncias de pares de elementos desse conjunto admite um máximo. Por isso, para qualquer transformação linear $f : \{V_k(Y, \sigma)_r\} \rightarrow \{V_k(X, \rho)_r\}$ entre espaços vetoriais persistentes livres finitamente gerados, f nos dá uma transformação linear $f_\infty : V_k(Y) \rightarrow V_k(X)$ entre espaços vetoriais de dimensão finita sobre k e usando as bases $\{\varphi_x\}_{x \in X}$ de $V_k(X)$ e $\{\varphi_y\}_{y \in Y}$ de $V_k(Y)$ determinamos a (X, Y) -matriz $A(f) = [a_{xy}]$ com entradas em k .

Proposição 3.7. *A (X, Y) -matriz $A(f)$ tem a propriedade que $a_{xy} = 0$ sempre que $\rho(x) > \sigma(y)$. Qualquer (X, Y) -matriz A satisfazendo essa condição determina unicamente uma transformação linear de espaços vetoriais persistentes*

$$f : \{V_k(Y, \sigma)_r\} \longrightarrow \{V_k(X, \rho)_r\}$$

e as correspondências $f \longrightarrow A(f)$ e $A \longrightarrow f_A$ são uma a inversa da outra.

Demonstração. O vetor base y está em $V_k(Y, \sigma)_{\sigma(y)}$ e

$$f(\varphi_y) = \sum_{x \in X} a_{xy} \varphi_x.$$

Por outro lado, pela proposição 3.5, $\sum_{x \in X} a_{xy} \varphi_x$ somente está em $V_k(X, \rho)_{\sigma(y)}$ se todos os coeficientes a_{xy} são zero, para $\rho(x) > \sigma(y)$. □

Dado um par de conjuntos finitos \mathbb{R}_+ -filtrados (X, ρ) e (Y, σ) , chamaremos a (X, Y) -matriz satisfazendo as condições da proposição 3.7 de (ρ, σ) -adaptada.

Suponha agora que são dados (X, ρ) e (Y, σ) , com ρ e σ ambas funções de X e Y , respectivamente, com valores em $[0, \infty)$. Então a matriz $A = [a_{xy}]$ satisfazendo as condições da proposição 3.7 determina um espaço vetorial persistente via a correspondência

$$A \xrightarrow{\theta} V_k(X, \rho)/im(f_A)$$

Temos então os seguintes resultados sobre essa construção.

Proposição 3.8. *Para qualquer A como descrito acima, $\theta(A)$ é um espaço vetorial persistente finitamente gerado. Ainda mais, qualquer espaço vetorial persistente finitamente gerado é isomorfo a um da forma $\theta(A)$ para alguma tal matriz A .*

Demonstração. Esse resultado segue imediatamente da correspondência entre matrizes e transformações lineares dadas na proposição 3.7. □

Proposição 3.9. *Seja (X, ρ) um conjunto \mathbb{R}_+ -filtrado. Então, sob a matriz da transformação linear correspondente, os automorfismos de $V_k(X, \rho)$ estão indentificados com o grupo de todas as (X, X) -matrizes inversíveis (ρ, ρ) -adaptadas.*

Proposição 3.10. *Sejam (X, ρ) e (Y, σ) conjuntos \mathbb{R}_+ -filtrados e seja A uma (X, Y) -matriz (ρ, σ) -adaptada. Seja B uma (X, X) -matriz (ρ, ρ) -adaptada e C uma (Y, Y) -matriz (σ, σ) -adaptada. Então BAC é também (ρ, σ) -adaptada e o espaço vetorial persistente $\theta(A)$ é isomorfo a $\theta(BAC)$.*

Observação 3.11. *Para qualquer $r \in F$, onde F é um corpo, a matriz elementar $e(i, j, r)$ é dada por $e_{tt}(i, j, r) = 1$ para todo t , $e_{ij}(i, j, r) = r$ e $e_{uv}(i, j, r) = 0$ sempre que $(u, v) \neq (i, j)$ e $u \neq v$. Multiplicação a esquerda por $e(i, j, r)$ possui o efeito de adicionar r vezes a j -ésima linha a i -ésima linha e multiplicação a direita por $e(i, j, r)$ tem o efeito de adicionar r vezes a i -ésima coluna a j -ésima coluna. Essa observação sugere que dados dois conjuntos \mathbb{R}_+ -filtrados (X, ρ) e (Y, σ) , e uma (ρ, σ) -matriz A , definimos uma operação linha adaptada como a operação que adiciona um múltiplo de $r(x)$ a $r(x')$, onde $\rho(x) \geq \rho(x')$. Similarmente, definimos uma operação coluna adaptada como a operação que adiciona um múltiplo de $c(y)$ a $c(y')$, onde $\sigma(y) \geq \sigma(y')$.*

Usaremos esse resultado para classificar, a menos de isomorfismo, todos os espaços vetoriais persistentes finitamente gerados. Começamos definindo o espaço vetorial persistente $P(a, b)$ para qualquer par (a, b) , onde $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ e $a < b$, com interpretação óbvia quando $b = +\infty$. $P(a, b)$ é definido por $P(a, b)_r = k$ para $r \in [a, b)$, $P(a, b)_r = \{0\}$ quando $r \notin [a, b)$ e onde $L(r, r') = id_k$ sempre que $r, r' \in [a, b)$. Note que $P(a, b)$ é finitamente apresentado. Supondo b finito, denote por (X, ρ) e (Y, σ) conjuntos \mathbb{R}_+ -filtrados, com espaço subjacente consistindo de únicos elementos x e y , com $\rho(x) = a$ e $\sigma(y) = b$. Então a (X, Y) -matriz 1×1 é (ρ, σ) -adaptada, já que $a < b$ e é claro que $P(a, b)$ é isomorfo a $\theta([1])$. Quando $b = +\infty$, $P(a, b)$ é isomorfo ao espaço vetorial persistente $V_k(X, \rho)$ e, por isso, pode ser escrito como $\theta(0)$, onde 0 denota a transformação linear zero do espaço vetorial persistente $\{0\}$.

Agora segue um dos resultados mais importantes aqui, que garante que um espaço com certas condições pode ser representado como soma direta de outros espaços bem mais simples.

Proposição 3.12. *Qualquer espaço vetorial persistente finitamente gerado sobre k é isomorfo a uma soma direta finita da forma*

$$P(a_1, b_1) \oplus P(a_2, b_2) \oplus \cdots \oplus P(a_n, b_n)$$

para escolhas de $a_i \in [0, +\infty)$, $b_i \in [0, +\infty]$ e $a_i < b_i$ para todo i .

Demonstração. Veja que uma (X, Y) -matriz (ρ, σ) -adaptada A a qual possui a propriedade que qualquer linha e coluna possui pelo menos um elemento não-nulo, que é igual a 1, possui a propriedade de $\theta(A)$ ser da forma descrita na proposição. Pois, se $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2) \cdots (x_n, y_n)\}$ é o conjunto de pares (x_i, y_i) tais que $a_{x_i y_i} = 1$, então existe uma decomposição

$$\theta(A) \cong \bigoplus_i P(\rho(x_i), \sigma(y_i)) \oplus \bigoplus_{x \in X - \{x_1, \dots, x_n\}} P(\rho(x), +\infty)$$

Então, é suficiente construir matrizes B e C , que são (X, X) -matriz (ρ, ρ) -adaptada e (Y, Y) -matriz (σ, σ) -adaptada respectivamente, tais que BAC tem a propriedade que qualquer linha e coluna possui pelo menos um elemento não-nulo, e esse elemento é 1. Para ver que podemos fazer isso, adaptamos a abordagem de operações linhas e colunas a essa configuração. As operações linha e coluna (ρ, σ) -adaptadas consistem de todas as multiplicações possíveis de uma linha ou coluna por um elemento não-nulo de k , todas as adições possíveis de um múltiplo de $r(x)$ a $r(x')$, quando $\rho(x) \geq \rho(x')$, e todas as adições possíveis de um múltiplo de $c(y)$ a $c(y')$, quando $\sigma(y) \geq \sigma(y')$. Utilizando essas operações podemos chegar em uma matriz com pelo menos um elemento não-nulo em cada linha e coluna. Para ver isso, primeiro encontre um y que maximiza $\sigma(y)$ sobre o conjunto de todos os y com $c(y) \neq 0$. Agora encontre um x que maximize $\rho(x)$ sobre o conjunto de todos os x para os quais $a_{xy} \neq 0$. Da forma com que x foi escolhido, estamos livres para adicionar múltiplos de $r(x)$ a todas as outras linhas de modo a zerar $c(y)$ exceto na entrada xy . Da forma com que escolhemos y , podemos adicionar múltiplos de $c(y)$ para zerar $r(x)$ exceto em xy , sem afetar $c(y)$. O resultado é uma matriz na qual o único elemento não-nulo em ambos $r(x)$ e $c(y)$ é a_{xy} . Multiplicando $r(x)$ por $1/a_{xy}$, fazemos a entrada xy se tornar 1. Excluindo $r(x)$ e $c(y)$, obtemos uma $(X - \{x\}, Y - \{y\})$ -matriz, a qual é (ρ', σ') -adaptada, onde ρ' e σ' são as restrições de ρ e σ aos conjuntos $X - \{x\}$ e $Y - \{y\}$, respectivamente. Podemos aplicar o processo

indutivamente a essa matriz. Cada operação linha e coluna adaptada necessária pode ser interpretada como linhas e colunas na matriz original e não afetarão $r(x)$ e $c(y)$. Iterando esse processo, obtemos uma matriz com entradas todas nulas e observe que a matriz transformada possui no máximo um elemento não-nulo em cada linha e coluna. O resultado segue então pela proposição 3.10. \square

Tão importante quanto o resultado anterior é o próximo, que nos garante a unicidade a menos de isomorfismos.

Proposição 3.13. *Suponha que $\{V_r\}$ é um espaço vetorial persistente finitamente apresentado sobre k e que possui duas decomposições*

$$\{V_r\} \cong \bigoplus_{i \in I} P(a_i, b_i) \text{ e } \{V_r\} \cong \bigoplus_{j \in J} P(c_j, d_j),$$

onde I e J são conjuntos finitos. Então $\#(I) = \#(J)$ e o conjunto da ocorrência dos pares (a_i, b_i) , com multiplicidade, é idêntico ao conjunto da ocorrência dos pares (c_j, d_j) .

Demonstração. Denotemos por a_{min} e c_{min} os menores valores para a_i e c_j , respectivamente; a_{min} pode ser caracterizado intrinsecamente como $\min\{r/V_r \neq 0\}$ e segue que $a_{min} = c_{min}$. Agora, denote por b_{min} o $\min\{b_i/a_i = a_{min}\}$ e d_{min} com a definição correspondente. b_{min} também pode ser definido intrinsecamente como $\min\{r'/\ker(L(r, r')) \neq 0\}$, então $b_{min} = d_{min}$ também. Significa que $P(a_{min}, b_{min})$ aparece em ambas as decomposições. Para cada decomposição, considere a soma de todas as ocorrências do somando $P(a_{min}, b_{min})$. Elas são ambas subespaços vetoriais persistentes de $\{V_r\}$ e podemos, na verdade, caracterizá-las intrinsecamente como o subespaço vetorial persistente $\{W_r\}$, onde W_r é o *kernel* da transformação linear

$$\text{im}(L(a_{min}, r)) \xrightarrow{L(r, b_{min} | \text{im}(L(a_{min}, r)))} V_{b_{min}}$$

Agora segue que o número de somandos da forma $P(a_{min}, b_{min})$ nas duas decomposições é o mesmo e, mais ainda, que eles correspondem isomorficamente nas decomposições. Denote por I' o subconjunto de I obtido removendo todos os i tais que $a_i = a_{min}$ e $b_i = b_{min}$ e defina J' de modo correspondente. Podemos agora formar o quociente de $\{V_r\}$ por $\{W_r\}$ e observar que obtemos as identificações

$$\{V_r\}/\{W_r\} \cong \bigoplus_{i \in I'} P(a_i, b_i) \text{ e } \{V_r\}/\{W_r\} \cong \bigoplus_{j \in J'} P(c_j, d_j).$$

Por indução sobre o número de somandos nas decomposições, obtemos o resultado. \square

Observe que existe um algoritmo análogo ao construído na proposição 2.16 para calcular homologia, nesse caso usando operações linha e coluna adaptadas em vez de operações arbitrárias. Esse algoritmo então produz uma apresentação para homologia persistente.

As classes de isomorfismo de espaços vetoriais persistentes finitamente gerados estão em correspondência injetiva com os subconjuntos finitos (com multiplicidade) do conjunto $\{(a, b)/a \in [0, +\infty), b \in [0, +\infty] \text{ e } a < b\}$. Tais conjuntos podem ser representados visualmente de dois modos distintos, um como uma família de intervalos da reta real não-negativa e a outra como uma coleção de pontos no subconjunto $\{(x, y)/x \geq 0$

e $y > x$ do primeiro quadrante no plano xy . No segundo caso, colocamos pontos com $b = +\infty$ em cima do diagrama na linha horizontal indicando infinito. A primeira representação é chamada *barcode* e a segunda *diagrama de persistência*.

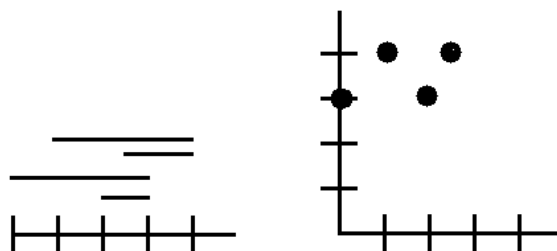


Figura 3.6: Barcode e diagrama de persistência. Figura de [2].

Agora temos uma solução para o problema da seção 3.1. Podemos associar a um espaço métrico finito um barcode ou diagrama de persistência. O que aconteceu foi que o número de Betti foi "trocado" pelas barras. O modo para conciliar essas duas noções é que, grosseiramente falando, os barcodes geralmente consistem de barras curtas e barras longas. As barras curtas geralmente são consideradas ruídos e as longas relacionadas as características geométricas.

A figura abaixo nos mostra o barcode e o diagrama de persistência para a homologia 1-dimensional associada ao espaço ao lado.

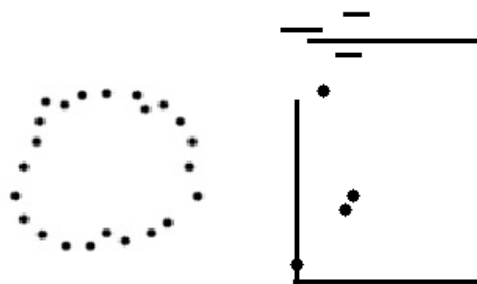


Figura 3.7: Barcode e diagrama de persistência para um espaço como um círculo Figura de [2]

Podemos notar visivelmente que os pontos do espaço se comportam como se estivessem sobre um círculo. O barcode possui várias barras curtas e somente uma bem longa, o que reflete que o número de Betti da primeira dimensão associado ao espaço é 1 e sabemos que isso é uma característica da S^1 por exemplo. Estudaremos mais exemplos no capítulo 5 desse trabalho.

3.4 Persistência funcional

Aplicar homologia persistente ingenuamente a muitos conjuntos de dados geralmente produz barcodes triviais, ou seja, sem barras longas na sua composição. A razão

disso é que os dados podem ter um núcleo central, ao qual tudo está conectado. Nos dados mostrados abaixo, podemos notar que existe um núcleo central e aparentemente 3 raios saindo dele.



Grosseiramente, isso tem a forma de um "Y" ou "T", e não esperamos capturar esse aspecto da estrutura com métodos homológicos, já que esses espaços são contráteis e por isso possuem homologia nula em dimensões maiores que zero. Nessa seção veremos como adaptar nossos métodos para capturar aspectos desse tipo.

Quando introduzimos homologia persistente, cada espaço métrico finito era associado a uma família "crescente" de complexos de Vietoris-Rips $\{VR(X, r)\}_r$, que era usada para calcular homologia persistente. Existe um outro método para construir famílias "crescentes" de complexos simpliciais.

Definição 3.14. (Persistência funcional) *Seja X um espaço métrico finito e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função a valores reais não-negativos. Escolha um número positivo real ρ . Então, pelo complexo simplicial f -filtrado com escala ρ vamos entender a família "crescente" de complexos simpliciais*

$$\{VR(f^{-1}([0, R]), \rho)\}_R.$$

Essa construção tem um barcode próprio, que refletirá as propriedades topológicas em cada conjunto subnível de f . Chamaremos esse método de produzir barcodes ou diagramas de persistência de persistência funcional.

Uma função muito interessante para se estudar dessa maneira é a função que mede o grau de centralidade ou excentricidade de um ponto dado. Considere

$$e(x) = \max_{x' \in X} d(x, x').$$

Claramente, pontos que estão mais próximos do centro de X tem valores menores para cada uma dessas e_p e pontos que estão na periferia ou extremidades de X terão valores maiores. Usaremos esses valores para estudar persistência dos extremos de X , e para isso precisaremos alterar nossa função de modo que os pontos que possuem valores maiores dessas funções apareçam primeiro em nossa filtração. Para isso, usaremos a função \bar{e} dada por

$$\bar{e}(x) = \frac{e^{max} - e(x)}{e^{max} - e^{min}}$$

onde e^{max} e e^{min} são os valores máximo e mínimo, respectivamente, atingidos pela função $e(x)$ em X . A função \bar{e} toma valores em $[0, 1]$, incluindo 0 e 1. Consideraremos a família crescente de complexos

$$\{VR_p^{-1}([0, R], \rho)\}_R$$

e seus barcodes em dois exemplos.

Exemplo 3.1. Estudando a homologia persistente do conjunto mais a esquerda, percebemos que o conjunto gera somente barcodes triviais, ou seja, com uma barra longa na dimensão zero e nenhuma longa em dimensões maiores. Porém quando associamos esse espaço a função \bar{e}_p e tomamos um valor pequeno para R podemos perceber que sua filtração nos dá nitidamente três componentes conexas. Estudando então a homologia persistente desse nosso conjunto, com a função \bar{e}_p e esse valor de R obteremos o barcode da homologia zero-dimensional da imagem abaixo, que possui três barras longas, representando as três componentes conexas do conjuntos. Assim podemos dizer que nosso conjunto possui uma estrutura de um "Y" ou "T" por exemplo.



Figura 3.8: Persistência funcional para um conjunto como um "Y" ou "T". Figura de [2].

Exemplo 3.2. Também associamos ao conjunto de dados abaixo a função \bar{e}_p , porém notamos uma grande diferença com relação ao primeiro exemplo. Ao filtrarmos o conjunto, o barcode zero-dimensional do conjunto não foi alterado, já que parece ainda que o conjunto continua com uma única componente conexa. Porém, ao estudarmos o barcode relacionado a homologia de dimensão 1 podemos notar uma grande diferença. O barcode que antes era trivial, agora tem uma barra longa, representando que, depois da filtração, a estrutura ou forma do conjunto pode ser vista como uma S^1 .

3.5 Persistência zig-zag

Objetos persistentes (conjuntos, espaços vetoriais, etc.) são definidos por uma coleção de objetos parametrizados pela reta real não-negativa junto a morfismos de objetos com parâmetro r em objetos com parâmetro r' , sempre que $r \leq r'$. Se restringirmos o objeto persistente a estrutura dos inteiros não-negativos podemos ver um objeto persistente como um diagrama

$$X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_n \longrightarrow \cdots$$

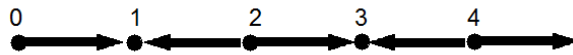
de objetos X_n e morfismos $X_n \longrightarrow X_{n+1}$ para todo $n \geq 0$. Podemos informalmente dizer que um objeto persistente restrito aos inteiros não-negativos é equivalente a um diagrama de objetos tendo a estrutura



Figura 3.9: Persistência funcional para um conjunto de dados sobre um disco.Figura de [2].



onde os pontos são objetos (conjuntos, espaços vetoriais, complexos simpliciais, \dots) e as flechas indicam um morfismo de um objeto no outro. Podemos ver esse diagrama como um *diagrama aljava*. Qualquer grafo direcionado Γ é chamado *aljava* e uma representação de Γ sobre o corpo k é uma escolha de k -espaços vetoriais V_v para cada vértice de Γ e uma k -transformação linear $L_e : V_v \rightarrow V_w$ para toda aresta e de v em w . Também vamos nos referir a uma representação de Γ como um diagrama de estrutura Γ . Podemos também considerar diagramas com a estrutura



Precisamente, esse corresponde a uma família de objetos parametrizada pelos inteiros não-negativos, com morfismo $X_i \rightarrow X_{i+1}$ quando i é par e morfismo $X_{i+1} \rightarrow X_i$ quando i é ímpar. Chamamos esse diagrama de k -espaços vetoriais, quando k é um corpo, de *espaço vetorial de persistência zig-zag*. Espaços vetoriais zig-zag aparecem de muitas maneiras.

Exemplo 3.3. Considere um espaço métrico finito X muito grande, tão grande que não sejamos capazes de calcular a homologia persistente usando complexos de Vietoris-Rips. Em vez disso, podemos tentar formar várias amostras $\{S_i\}$ de X , e tentar fazer cálculos com essas amostras do conjunto. Note que, dada tal família de amostras, podemos fixar um parâmetro R e construir $VR(S_i, R)$ para todo i . Para tentar avaliar a consistência dos cálculos que obtemos com esses complexos, podemos formar uniões $S_i \cup S_{i+1}$. Note que temos as aplicações inclusões $S_i \hookrightarrow S_i \cup S_{i+1}$ e $S_{i+1} \hookrightarrow S_i \cup S_{i+1}$. Essas aplicações induzem aplicações nos complexos de Vietoris-Rips e, aplicando homologia a esses complexos, obtemos k -espaços vetoriais $V_i = H_j(VR(S_i, R))$ e $V_{i,i+1} = H_j(VR(S_i \cup S_{i+1}), R)$. As aplicações inclusões significam que temos um diagrama da forma

$$V_0 \rightarrow V_{0,1} \leftarrow V_1 \rightarrow V_{1,2} \leftarrow V_2 \rightarrow V_{2,3} \leftarrow V_3 \rightarrow \dots$$

Em um nível intuitivo, consistência entre os cálculos é medida pela existência de classes $x_i \in V_i$ e $x_{i+1} \in V_{i+1}$, tais que as imagens de x_i e x_{i+1} em $V_{i,i+1}$ são a mesma classe não-nula e, mais geralmente, para sequências de classes $\{x_i\}$, com $x_i \in V_i$, tais que para todo i , as imagens de x_i e x_{i+1} em $V_{i,i+1}$ são iguais ao mesmo elemento não-nulo.

Exemplo 3.4. Dado um complexo simplicial X e uma aplicação de X na reta real não-negativa, triangulado, com o conjunto de vértices sendo os inteiros não-negativos e as arestas sendo os intervalos fechados $[n, n+1]$, podemos formar subcomplexos $f^{-1}([n, n+1])$, também como $f^{-1}(n)$. Temos o diagrama

$$f^{-1}(0) \rightarrow f^{-1}([0, 1]) \leftarrow f^{-1}(1) \rightarrow f^{-1}([1, 2]) \leftarrow f^{-1}(2) \rightarrow \dots$$

Um esquema que permite calcular homologia somente dos complexos baseados nos nódulos do diagrama e o qual pode extrair a homologia do complexo inteiro desses cálculos, permitira a paralelização dos cálculos de homologia em pedaços pequenos do espaço. Isso é muito desejável.

Definição 3.15. Um k -espaço vetorial persistente zig-zag V é chamado cíclico se existem inteiros $m \leq n$ tais que $V_i = k$ para $m \leq i \leq n$, $V_i = 0$ se $i < m$ ou $i > n$ e os homomorfismos $V_i \rightarrow V_{i+1}$ ou $V_{i+1} \rightarrow V_i$ são todos iguais ao homomorfismo identidade de k sempre que $m \leq i \leq i+1 \leq n$.

Um exemplo é

$$\{0\} \rightarrow k \xleftarrow{id} k \xrightarrow{id} k \leftarrow \{0\} \rightarrow \{0\} \rightarrow \dots$$

Cada espaço vetorial persistente cíclico é indecomponível, ou seja, não pode ser representado como soma direta de diagramas. Note que os espaços vetoriais persistentes zig-zag cíclicos são parametrizados por intervalos $[m, n]$ com extremidades em inteiros. Escrevemos $V[m, n]$ para o k -espaço vetorial que é não-nulo exatamente para os inteiros $[m, n]$. Temos então que vale também a seguinte resultado.

Teorema 3.16. Dizemos que um k -espaço vetorial persistente zig-zag é de tipo finito se:

- (a) cada espaço vetorial V_i é de dimensão finita e;
- (b) $V_i = \{0\}$ para i suficientemente grande.

Então, para qualquer k -espaço vetorial persistente zig-zag de tipo finito, existe um isomorfismo

$$V \cong \bigoplus_i V[m_i, n_i]$$

para alguma escolha de pares de inteiros (m_i, n_i) . Ainda mais, essa decomposição é única a menos da ordem dos somandos.

O conteúdo desse teorema é que existe uma descrição como barcode da classe de isomorfismos de espaços vetoriais persistentes zig-zag, assim como no espaço vetorial persistente, exceto pelo fato de que os extremos das barras nos barcodes são inteiros.

4 Aplicações

Nesse capítulo temos algumas aplicações da homologia de persistência a certos conjuntos de dados. Essa ferramenta vem se tornando cada vez mais poderosa e útil em vários problemas interdisciplinares, como reconhecimento de imagens, [5], e cada vez vem se aprimorando mais para ser aplicada mais situações, [3]. A seguir, algumas aplicações da homologia de persistência para obter informações de um conjunto de dados e obter resultados interessantes.

4.1 Cálculos diretos de homologia persistente

Nessa seção tomaremos alguns conjuntos de dados simples e calcularemos, usando a construção de Vietoris-Rips, a homologia persistente dos conjuntos.

Vamos começar com um conjunto de dados onde cada ponto possui uma única coordenada, ou seja, podemos vê-lo sobre a reta real. Suponha então que o conjunto seja formado pelos seguintes pontos de \mathbb{R} : -5, -2, 1, 3 e 5. Observe abaixo o conjunto representado sobre a reta.

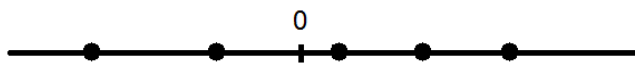


Figura 4.1: Conjunto de dados sobre a reta.

Agora o que faremos é construir o complexo de Vietoris-Rips e calcular as homologias de todos esses complexos, para depois calcularmos a homologia persistente sobre \mathbb{Z} desse conjunto. Note que como o conjunto está sobre a reta real, as únicas informações que poderemos obter são sobre H_0 já que não haverá a formação de um ciclo em nenhuma hipótese.

Para isso, vamos começar escolhendo $\varepsilon = 0$ e denotar o complexo de Vietoris-Rips associado por $VR(X, 0)$. Note que para essa escolha de ε , o nosso complexo simplicial é formado por 5 pontos isolados, ou seja, quando calcularmos $H_0(VR(X, 0), \mathbb{Z})$ obteremos $H_0(VR(X, 0), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, já que esse grupo de homologia detecta as componentes conexas.



Note que, para $0 \leq \varepsilon < 2$, esse complexo simplicial não será alterado, já que a distância euclidiana mínima entre dois pontos distintos do nosso conjunto é 2.

Agora, para $\varepsilon = 2$, teremos o acréscimo de dois 1-simplexos no nosso complexo simplicial, já que $d(1, 3) = 2$ e $d(3, 5) = 2$. Então, do modo como é definida a construção de Vietoris-Rips, devemos considerar $\{1, 3\}$ e $\{3, 5\}$ como simplexos do nosso complexo. Logo, a representação de $VR(X, 2)$ fica representada abaixo e $H_0(VR(X, 2), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, já que três pontos agora estão conectados por arestas.



Para $2 \leq \varepsilon < 3$ o complexo não é alterado, ou seja, o H_0 permanece o mesmo.

Para $\varepsilon = 3$, como temos $d(-5, -2) = 3$ e $d(-2, 1) = 3$, teremos que acrescentar os simplexos $\{-5, -2\}$ e $\{-2, 1\}$ no nosso complexo simplicial e agora tudo está conectado, ou seja $H_0(VR(X, 3), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Como estamos interessados no H_0 do nosso complexo e todos os pontos já estão conectados, sabemos que para qualquer $\varepsilon > 3$ o complexo, e portanto o grupo de homologia, não se alterará. Então já estamos prontos para calcular a homologia persistente desse conjunto.



Das informações obtidas acima podemos notar que há a morte de duas componentes no instante $\varepsilon = 2$ e mais duas no instante $\varepsilon = 3$, assim a homologia persistente, olhando somente para H_0 , pode ser dada pelo seguinte conjunto

$$\{[0, \infty) \oplus [0, 2] \oplus [0, 2] \oplus [0, 3] \oplus [0, 3]\}.$$

Representando como barcode e diagrama de persistência obtemos



Perceba que o diagrama de persistência tem só três pontos, porém deve-se perceber que os pontos $(0, 2)$ e $(0, 3)$ possuem multiplicidade dois, já que representam cada um dois intervalos da homologia persistente.

Utilizando o R, com o pacote TDA, e entrando com os dados obtemos o seguinte diagrama de persistência e barcode:

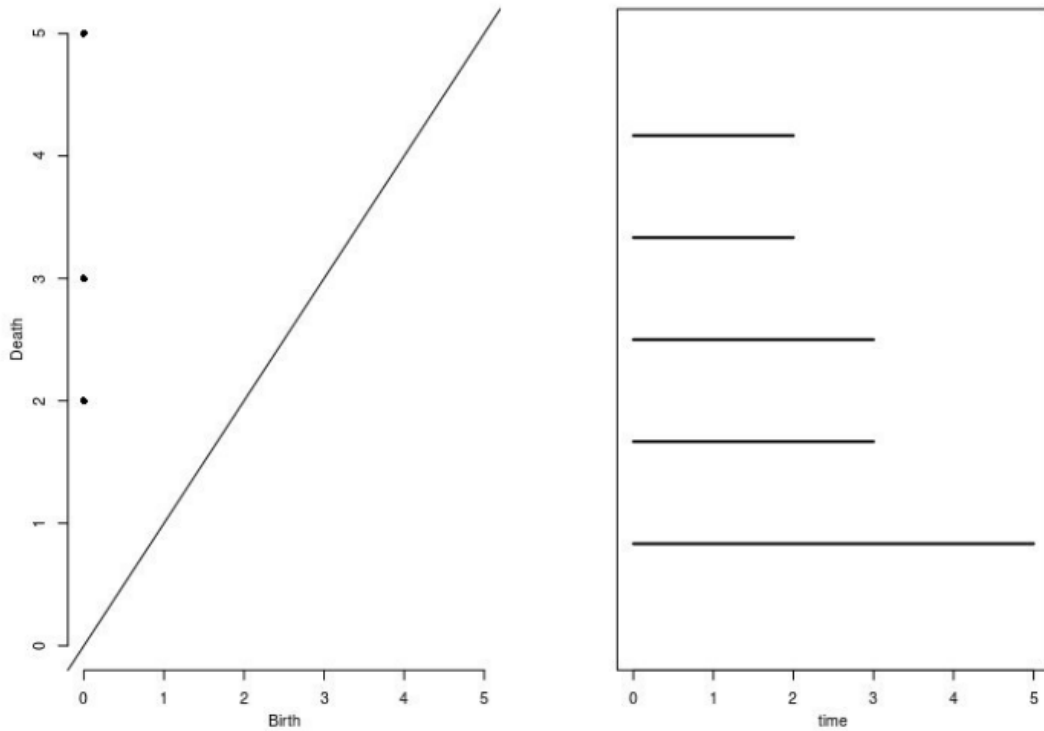


Figura 4.2: Diagrama de persistência e barcode

Perceba que obtemos um barcode e diagrama de persistência idênticos ao da nossa análise. Além do barcode e diagrama de persistência, o programa também pode gerar o dendrograma associado, como segue:

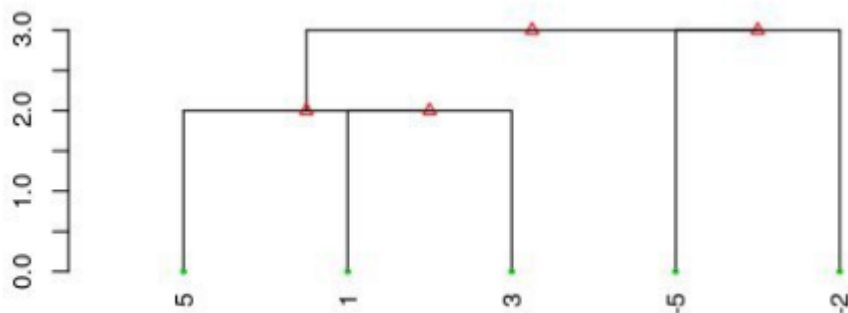


Figura 4.3: Dendrograma

Olhando o dendrograma é fácil concluir que quando o parâmetro foi 2, três componentes se juntaram e o mesmo ocorreu no parâmetro 3.

Nesse exemplo, como tínhamos dados com somente uma coordenada, nos preocupamos somente com os 0-simplexos e 1-simplexos, já que sabíamos que ciclos não apareciam. Agora vamos considerar um conjunto de pontos onde cada ponto possui duas coordenadas, e assim deixar o exemplo um pouco mais interessante, já que o aparecimento de ciclos pode ser possível.

Tomemos agora o conjunto formado pelos seguintes pontos : $a = (0, 0)$, $b = (0, 2)$, $c = (2, 0)$, $d = (2, 3)$, $e = (3, 1)$ e $f = (3, 3)$, representados na figura abaixo.

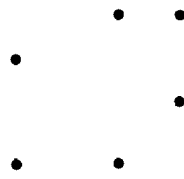


Figura 4.4: Conjunto de dados sobre o plano.

Vamos construir os complexos e calcular as homologias para obtermos a homologia persistente, como no exemplo anterior. A diferença agora é que podem ocorrer ciclos, então calcularemos tanto H_0 quanto H_1 , logo estaremos construindo o complexo de Vietoris Rips somente com 0-simplexos, 1-simplexos e 2-simplexos.

Escolhendo $\varepsilon = 0$, temos que o nosso complexo é formado por 6 pontos isolados do plano, ou seja, $H_0(VR(X, 0), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e $H_1(VR(X, 0), \mathbb{Z}) = 0$, já que não temos nenhum ciclo no nosso complexo ainda.

O próximo simplexo aparece quando $\varepsilon = 1$, já que $d(d, f) = 1$. Então, para $\varepsilon = 1$, temos a adição de um 1-simplexo unindo d e f e assim perdemos uma componente conexa, ou seja, $H_0(VR(X, 1), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Ainda não temos a aparição de nenhum ciclo.

Seguindo de modo análogo ao primeiro exemplo obtemos a seguinte filtração do nosso complexo:

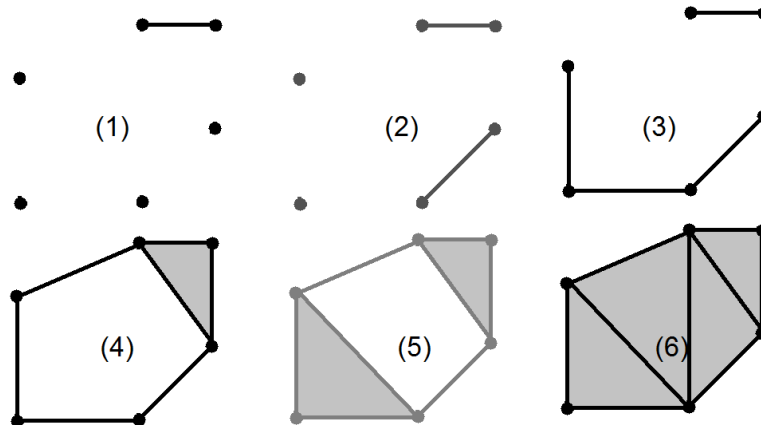


Figura 4.5: Filtração

A figura (1) é relacionada com o $\varepsilon = 1$, já descrito acima.

Em (2) temos representado $VR(X, \sqrt{2})$, onde não podemos notar a formação de nenhum ciclo, mas é notável a perda de uma componente conexa, já que temos que acrescentar o 1-simplexo $\{c, e\}$, ou seja, $H_0(VR(X, \sqrt{2}), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Em (3) temos representado $VR(X, 2)$, onde foram adicionados três 1-simplexos: $\{a, b\}$, $\{a, c\}$ e $\{f, e\}$. Logo $H_0(VR(X, 2), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, quanto H_1 ainda não foi alterado.

Em (4) temos representado $VR(X, \sqrt{5})$ e onde acontecem duas coisas novas. A primeira é a adição de um 2-simplexo $\{d, e, f\}$ e a segunda é a formação de um ciclo. Além dessas duas novidades, também acrescentamos mais dois 1-simplexos. Assim $H_0(VR(X, \sqrt{5}), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ e $H_1(VR(X, \sqrt{5}), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, já que houve a formação de um ciclo no complexo.

Em (5) temos representado $VR(X, \sqrt{8})$ onde há a adição de mais um 2-simplexo, o simplexo $\{a, b, c\}$, mas que não altera em nada as homologias, já que tudo ainda permanece conexo e o ciclo persiste.

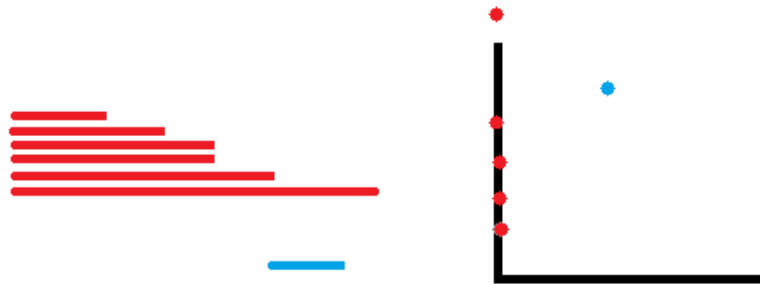
Em (6) temos representado $VR(X, 3)$, onde há a adição de mais dois 2-simplexos e assim o ciclo é preenchido, zerando a H_1 .

Como nossos dados estavam no plano, essas são as únicas homologias que poderiam nos trazer informações a respeito de sua estrutura, então paramos por aqui. Analisando as informações acima, podemos calcular a homologia persistente do nosso conjunto de dados.

A homologia persistente do nosso conjunto, levando em conta o H_0 e o H_1 , respectivamente, é

$$\{[0, \infty) \oplus [0, 1] \oplus [0, \sqrt{2}] \oplus [0, 2] \oplus [0, 2] \oplus [0, \sqrt{5}]\} \text{ e } \{[\sqrt{5}, 3]\}.$$

Representando como barcode e diagrama de persistência obtemos



onde a cor vermelha está relacionada ao H_0 e a cor azul ao H_1 .

Utilizando o R, com o pacote TDA, e entrando com os dados obtemos os seguintes dendrograma, diagrama de persistência e barcode:

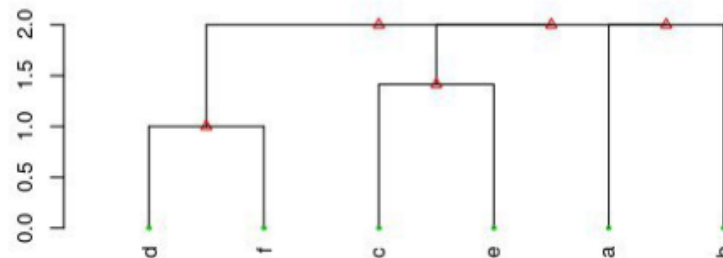


Figura 4.6: Dendrograma

Novamente, diagrama e barcode muito próximos da nossa análise.

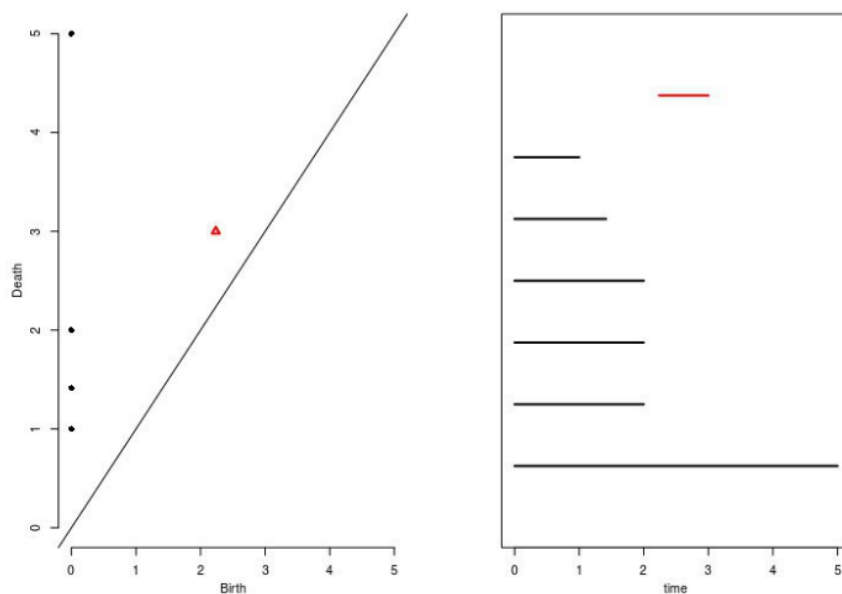


Figura 4.7: Diagrama de persistência e barcode

Podemos cada vez mais generalizar esse conjunto de pontos e fazer essa mesma análise, porém conforme os pontos vão tendo mais coordenadas, mais difíceis são os cálculos e visualizações e para isso temos o auxílio dos computadores. Existem vários pacotes de softwares que calculam homologia e homologia persistente, podemos citar:

1. R, com pacote TDA (usado no exemplo);
2. CHOMP;
3. Javaplex;
4. Dionysus;

Nesses programas entra-se com um conjunto de dados e eles fornecem como resposta os objetos de homologia persistente, como barcodes, diagramas de persistência e dendrogramas. Em alguns deles é até possível escolher a construção do complexo simplicial, Vietoris-Rips, CW-complex, Witness, entre outros.

4.2 Patas de animais

Na seguinte aplicação consideraremos os animais Bisão, Orangotango, Galinha, Gato e Cavalo.

Primeiro vamos começar com uma pata padrão de cada um desses animais, representadas abaixo.

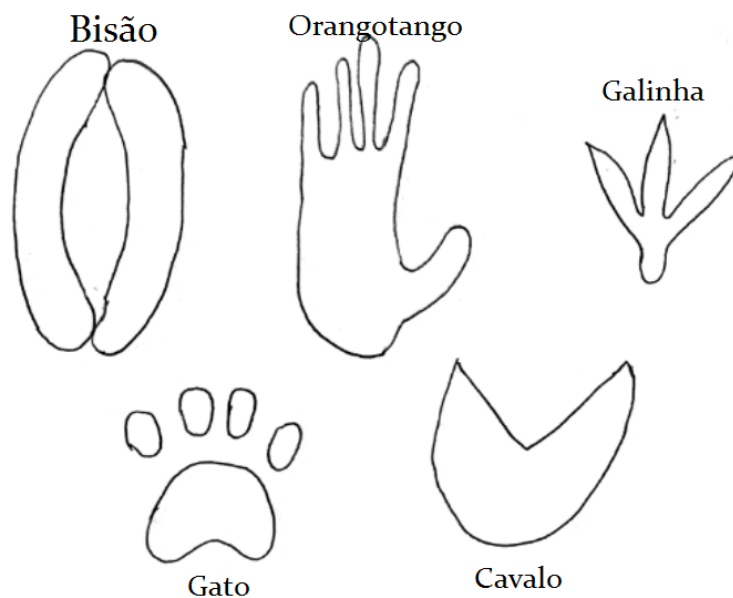
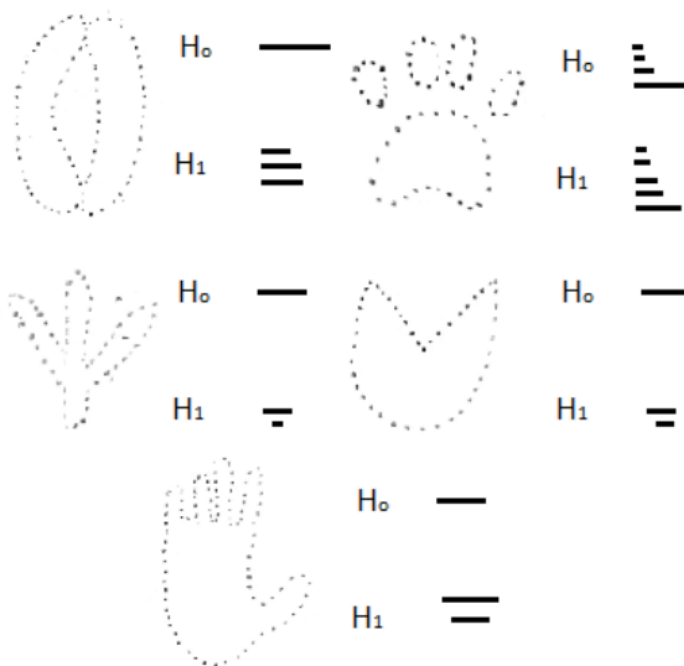


Figura 4.8: Patas.

Depois, transformamos essas patas num conjunto de pontos do \mathbb{R}^2 . Isso não é fácil, porém cada dia mais se desenvolvem algoritmos e programas que nos permitem a partir de uma imagem, extrair pontos principais ou relevantes, para se efetuar o cálculo da homologia de persistência. Obtemos os seguintes conjuntos de pontos:



Calculando a homologia persistente desses conjuntos, usando a construção de Vietoris-Rips, obtemos, já descartando os ruídos, os seguintes barcodes:



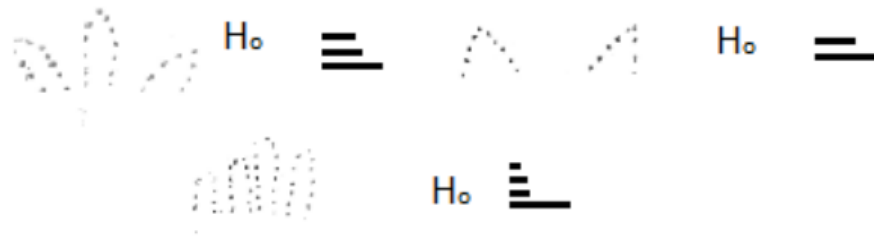
Agora temos informações sobre a homologia desses dados em qualquer ε escolhido na construção do complexo e podemos dividi-los em alguns grupos. A ideia aqui é pegar qualquer pata acima e identificar a qual animal essa pata pertence. Vamos ver como fazer isso.

Primeiro, notemos que para um pequeno valor de ε , o único conjunto de dados que não é completamente conectado é o conjunto de dados do gato. Em outras palavras, se estudarmos o barcode da homologia zero-dimensional e percebermos que ele possui mais do que uma barra, podemos afirmar que essa pata que estamos estudando é de um gato. Perceba que o barcode da homologia zero-dimensional das outras quatro patas possuem somente uma barra, então precisaremos de outro critério para separá-las.

Usando agora o barcode da homologia uni-dimensional para os outros conjuntos de dados, podemos notar que o único barcode que possui três barras para um valor pequeno de ε é o relacionado aos dados do bisão, não é difícil perceber quais são os três ciclos da imagem que dão origem a isso, ao mesmo tempo que os outros conjuntos de dados possuem somente uma barra. Então usando o barcode da homologia unidimensional é possível classificar se a pata é ou não de um bisão.

As outras três patas possuem conjuntos de dados que produzem barcodes muito parecidos, então aqui utilizaremos uma ferramenta introduzida em 3.14, a persistência funcional.

Para resolver nosso problema utilizaremos a função profundidade, ou seja, colocaremos uma reta real na vertical ao lado do conjunto de dados, com o zero dela correspondendo ao ponto mais alto da imagem. Projetamos agora os outros pontos na reta. Assim cada ponto assumiu um valor positivo na reta real. Definimos uma f em cada ponto do conjunto como o número em \mathbb{R} sobre o qual esse ponto se projetou.



Observe que, para um pequeno valor de R , o barcode associado a pata do orangotango possui quatro barras, o barcode associado a pata galinha possui três barras e o barcode associado a pata do cavalo possui duas barras, todas na dimensão zero. Então, isso resolve o nosso problema para identificar as patas de animais.

4.3 Mosca do figo - *Zaprionus Indianus*

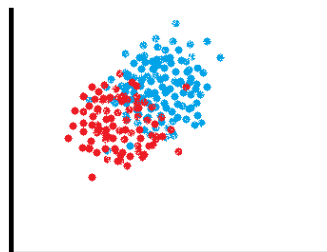
Os dados dessa aplicação foram coletados e cedidos pela estudante Isabelle Bueno Silva, graduada em ciências biológicas, UNESP - Rio Claro.

Desenvolveu-se uma pesquisa sobre o efeito da umidade no período de pupação da mosca *Zaprionus Indianus*, popularmente conhecida como mosca do figo. As variáveis em questão eram tamanhos da asa e do corpo.

O interesse na pesquisa aconteceu porque essa mosca está sendo considerada praga e os agricultores estão perdendo muitos de seus frutos para esse animal. Ao contrário das outras moscas que atacam frutos em estado de decomposição, essa ataca o figo no início de sua maturação, causando seu apodrecimento. Além desse problema, essa mosca também chega a fase adulta muito rapidamente, cerca de 15 dias após ser ovulada e vive muito tempo, tendo assim um período fértil muito longo e se reproduzindo muito.

A ideia original, de que a umidade alterava as características da mosca, foi comprovada, ou seja, existe uma separação entre os dados das moscas desenvolvidas com um período de pupação com umidade normal e com umidade alta. O que queremos é tentar identificar essa característica usando métodos homológicos descritos nesse trabalho.

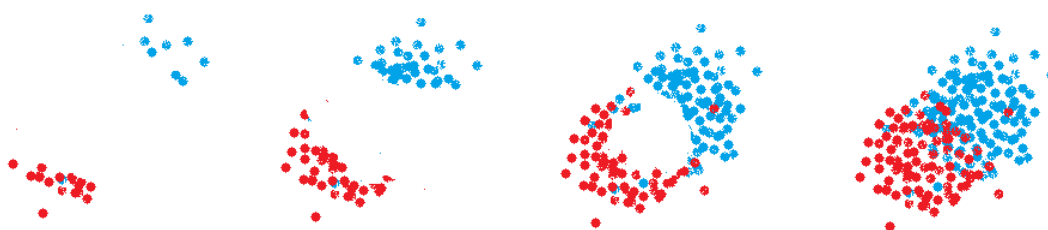
No conjunto de dados abaixo, a cor azul representa dados de moscas da alta umidade, a cor vermelha representa da baixa umidade, o eixo na vertical representa o tamanho da asa e o na horizontal o tamanho do corpo. O conjunto de dados pode ser representado na figura abaixo.



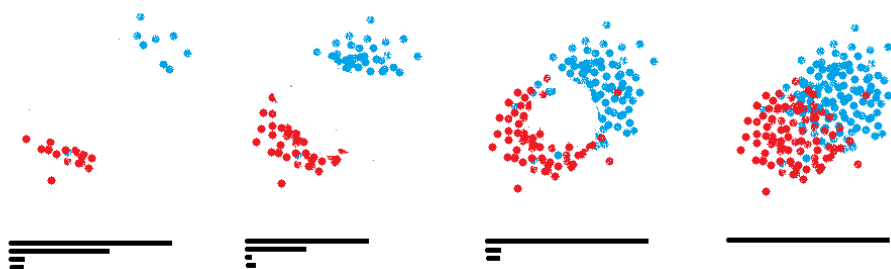
Calculando a homologia persistente desse conjunto obtemos somente barcodes tri-

viais, ou seja, no nível 0 de homologia temos apenas uma barra longa e no nível 1 de homologia nenhuma barra longa. Poderíamos aqui então desistir e aceitar que o método não era eficaz nesse problema. Porém, em 3.14, vimos que existe como filtrar nosso conjunto, utilizando uma função, e assim talvez obter informações que foram passadas em branco.

O problema desse conjunto de dados é que por mais que haja uma separação, existe uma região comum dos dados de alta e umidade normal, ou seja, todos os dados estão conectados a um conjunto central. O que faremos agora é considerar a função excentricidade adaptada, \bar{e}_p , descrita em 3.14. Essa função associa os pontos mais afastados do centro do conjunto a valores próximos de zero, enquanto os pontos perto do centro do conjunto são levados a valores próximos do 1. Podemos então filtrar esse conjunto para valores entre 0 e 1.



Agora calculando as homologias persistentes dessas filtrações obtidas somos capazes de perceber que há de fato uma separação existente entre as umidades, já que o nosso H_0 possui duas barras nas filtrações com valores mais próximos de zero, ou seja, nesses estágios há uma separação do conjunto em duas componentes conexas, que são visivelmente os dados associados a alta umidade e a umidade normal.



Podemos concluir então, que relevando uma pequena região de intersecção, essa condição tem uma influência no desenvolvimento da mosca.

Referências

- [1] Botnan, M. B.(2015) *Interval Decomposition of Infinite Zigzag Persistence Modules*. arXiv:1307.6188v1
- [2] Carlsson, G. (2014). *Topological pattern recognition for point cloud data*. Acta Numerica, 23, pp 289-368 doi:10.1017/S0962492914000051
- [3] Carlsson, G. e Silva, V. de (2008). *Zigzag persistence*. arXiv: 0812.0197v1
- [4] Chazal, F., Silva, V. de, Glisse, M. e Oudot, S.(2013). *The structure and stability of persistence modules*. arXiv: 1207.3674v3
- [5] Ghrist, R.(2008). *Barcode: the persistent homology*. Bulletin of American Mathematical Society (New Series) 45.
- [6] Edelsbrunner, H. e Harer,J. (2008). *Persistent Homology - a Survey*. Contemporary Mathematics.
- [7] Oudot, S. Y. (2010). *Persistence Theory: from quiver representations to Data Analysis*. Mathematical Surveys and Monographs, v209.
- [8] Munkres, J. R. (1974). *Topology; a first course*. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall.
- [9] Munkres, J. R. (1993). *Elements of Algebraic Topology*. Addison-Wesley.