

IGOR THIAGO MINARI RAMOS

**PROJETOS DE CONTROLADORES ROBUSTOS CHAVEADOS PARA SISTEMAS
NÃO LINEARES BASEADOS NA DECOMPOSIÇÃO EM SOMA DE QUADRADOS**

Ilha Solteira

2018



IGOR THIAGO MINARI RAMOS

**PROJETOS DE CONTROLADORES ROBUSTOS CHAVEADOS PARA SISTEMAS
NÃO LINEARES BASEADOS NA DECOMPOSIÇÃO EM SOMA DE QUADRADOS**

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia - UNESP - Campus de Ilha Solteira, para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.
Especialidade: Automação.

Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira
Orientador

Ilha Solteira
2018



FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

R175p Ramos, Igor Thiago Minari.
Projetos de controladores robustos chaveados para sistemas não lineares baseados na decomposição em soma de quadrados / Igor Thiago Minari
Ramos. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2018
99 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia . Área de conhecimento: Automação

Orientador: Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira
Inclui bibliografia

1. Controlador chaveado. 2. Modelos fuzzy polinomiais. 3. Sistemas não lineares incertos. 4. Soma de quadrados (SOS). 5. Sistemas chaveados.



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Câmpus de Ilha Solteira

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Projeto de controladores robustos chaveados para sistemas não lineares baseado na decomposição em soma de quadrados

AUTOR: IGOR THIAGO MINARI RAMOS

ORIENTADOR: MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em ENGENHARIA ELÉTRICA, área: AUTOMAÇÃO pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Profa. Dra. ERICA REGINA MARANI DARUICHI MACHADO
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. EUGÊNIO DE BONA CASTELAN NETO
Departamento de Automação e Sistemas / Universidade Federal de Santa Catarina

Ilha Solteira, 27 de abril de 2018

À minha família, em especial a minha mãe Marli, a minha irmã Thamiris e minha avó Eranides, pela compreensão e incentivo em todos os momentos.

AGRADECIMENTOS

Meus agradecimentos a todos os familiares, amigos, professores e funcionários da FEIS-UNESP, que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho. Em especial, dedico meus agradecimentos:

- A minha família pelo apoio e incentivo em ser a pessoa que sou hoje.
- Ao Laboratório de Pesquisa em Controle da UNESP de Ilha Solteira, por me acolher em um clima familiar de respeito e cooperação.
- Aos meus colegas e amigos da pós graduação da UNESP de Ilha Solteira que foram solícitos para me ajudar e ensinar o que não sabia.
- Ao professor Dr. Marcelo pela orientação, confiança e incentivo.
- A professora Dra. Erica pelas orientações anteriores e acompanhamento desde o início da graduação.
- A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

“A mudança não virá se esperarmos por outra pessoa ou outros tempos. Nós somos aqueles por quem estávamos esperando. Nós somos a mudança que procuramos.”

Barack Obama

“Todo mundo tem dentro de si um fragmento de boas notícias. A boa notícia é que você não sabe quão extraordinário você pode ser! O quanto você pode amar! O que você pode executar! E qual o seu potencial!”

Anne Frank

RESUMO

Neste trabalho são propostos novos métodos de controle chaveado para uma classe de sistemas não lineares incertos utilizando a decomposição em soma de quadrados. Inicialmente é apresentada uma revisão dos conceitos e projetos de controladores baseados em desigualdades matriciais lineares (do inglês *Linear Matrix Inequalities* - LMIs) e a decomposição em soma de quadrados (do inglês *Sum of Squares* - SOS), buscando evidenciar as diferenças e vantagens das metodologias para a área de controle. Comumente são utilizados modelos *fuzzy* para realizar a análise da estabilidade e projeto de controladores para sistemas não lineares, e estes modelos podem ser classificados de acordo com a parte consequente linear ou polinomial. Busca-se neste trabalho evidenciar as diferenças entre os dois modelos *fuzzy* e a metodologia para projeto de controladores. Para o caso de sistemas cujas dinâmicas podem ser descritas apenas por funções polinomiais, serão consideradas incertezas politópicas. Então, visando flexibilizar o projeto utilizando um controlador composto por um único ganho polinomial e aumentar a região de factibilidade, são propostos controladores com ganhos polinomiais chaveados. O objetivo desta lei de chaveamento é minimizar a derivada da função de Lyapunov empregada no projeto. Considerando uma classe de sistemas não lineares mais geral, são propostos controladores com ganhos chaveados para modelos *fuzzy* polinomiais. A metodologia proposta não necessita do conhecimento das funções de pertinência para a implementação da lei de controle chaveada. Este fato é uma vantagem importante com relação aos inúmeros métodos que consideram as funções de pertinência disponíveis pois, muitas vezes, as funções de pertinência podem ser complexas ou podem também depender de parâmetros incertos da planta, o que dificultam ou inviabilizam as suas implementações. Através dos resultados obtidos, com análises teóricas e exemplos numéricos, foi possível mostrar a vantagem da metodologia proposta.

Palavras-chave: Controlador chaveado. Modelos *fuzzy* polinomiais. Sistemas não lineares incertos. Soma de quadrados (SOS). Sistemas chaveados.

ABSTRACT

In this manuscript new control methods are proposed for a class of uncertain nonlinear systems using a sum of squares decomposition. Initially is presented a revision of concepts and control design procedures based on Linear Matrix Inequalities (LMIs) and on sum of squares (SOS) evidencing the differences and advantages of these methodologies in the control system design. Fuzzy models are commonly used to perform stability analysis and controller design for nonlinear systems, and can be classified by a linear or polynomial consequent model. A goal of this dissertation is to compare these two methodologies in the control system design of a class of uncertain nonlinear systems. For the case of systems whose dynamics can be described only by polynomial functions will be also considered polytopic uncertainty. Therefore, in order to make the design more flexible than that obtained with only one controller with polynomial gain and increase the feasibility region, a new procedure for designing controllers with switched polynomial gains is proposed. The purpose of this switching law is to minimize the time derivative of the Lyapunov function employed in the design. For a more general class of nonlinear systems, controllers with switched gains for polynomial fuzzy models are proposed. The proposed methodology does not require the knowledge of the membership functions for an implementation of the control law. This fact is an important advantage over the many methods that consider available the membership functions, because the membership functions can often be complex or may also depend on uncertain plant parameters, which makes their implementation difficult or impossible. The presented results, with theoretical analyses and numerical examples, show the advantages of the proposed procedure.

Keywords: Switched controller. Polynomial fuzzy models. Uncertain nonlinear systems. Sum of Squares (SOS). Switched systems.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Diagrama de blocos do sistema de controle de modelos <i>fuzzy</i>	30
Figura 2	Tipos de modelos <i>fuzzy</i>	31
Figura 3	Setor não linear global.	34
Figura 4	Setor não linear local.	35
Figura 5	Plano de fase do sistema não linear (39) considerando $u = 0$	36
Figura 6	Área de factibilidade do projeto de controladores do sistema (39) considerando modelos <i>fuzzy</i> TS.	38
Figura 7	Representação do setor não linear via SOS considerando o sistema (35).	42
Figura 8	Plano de fase do sistema (39) em malha fechada utilizando modelos <i>fuzzy</i> polinomiais.	44
Figura 9	Trajétoria e variáveis de estado do sistema (118) com aplicação do sinal de controle após 5 segundos de acordo com a lei de realimentação (62) com o controlado dado em (121), considerando $\delta = 0$	65
Figura 10	Trajétoria e variáveis de estado do sistema (118) com aplicação do sinal de controle após 5 segundos de acordo com a lei de realimentação (62) com o controlado dado (121), considerando $\delta = 0.8$	66
Figura 11	Trajétoria e variáveis de estado do sistema (118) com aplicação do sinal de controle após 5 segundos de acordo com a lei de realimentação (62) com o controlado dado (121), considerando $\delta = 1$	66
Figura 12	Estado e trajetória do sistema (122) em malha aberta.	67
Figura 13	Trajétoria do sistema (122) considerando incertezas nos valores nominais com aplicação do sinal de controle após 5 segundos de acordo com a lei de chaveamento (85) e o controlador dado em (125).	69

Figura 14	Variáveis de estado, sinal de controle e chaveamento do sistema (122) considerando incertezas nos valores nominais com aplicação do sinal de controle após 5 segundos de acordo com a lei de chaveamento (85) e o controlador dado em (125).	70
Figura 15	Plano de fase do sistema (127) em malha aberta.	71
Figura 16	Planos de fase do sistema (127) considerando os ganhos (131) para o controlador chaveado (94).	72
Figura 17	Região de Factibilidade utilizando o Teorema 5 (“×”) e o Teorema 8 (“o”).	73
Figura 18	Variáveis de estado, sinal de controle e sinal de chaveamento do sistema (127) considerando $\gamma = 5$ e uma falha no sinal de controle de 15% após 40 segundos, de acordo com a lei de chaveamento (94) e os ganhos do controlador dados em (133).	75
Figura 19	Plano de fase do sistema (160) em malha aberta.	83
Figura 20	Região de factibilidade com a aplicação do controlador chaveado (151) para o sistema (160) considerando o projeto dos ganhos através do Corolário 2	85
Figura 21	Plano de fase do sistema (160) considerando $c_a = 0,14$ e $c_b = 0,25$, em malha fechada através dos ganhos dados em (163) e a lei de controle chaveado (151).	86
Figura 22	Variáveis de estado, sinal de controle e chaveamento do sistema (160) considerando $c_a = 0,14$ e $c_b = 0,25$, utilizando os ganhos dados em (163) e a lei de controle chaveada (151).	87
Figura 23	Plano de fase do sistema (164) em malha aberta.	88
Figura 24	Planos de fase do sistema (165) considerando os ganhos (166) para o controlador chaveado (156).	89

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathbb{R}	Conjunto dos números reais.
\mathbb{R}^n	Conjunto dos vetores $n \times 1$ com elementos reais.
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Conjunto das matrizes $n \times m$ com elementos reais.
\mathbb{N}	Conjunto dos números naturais.
\mathbb{K}_r	Conjuntos dos números $\{1, 2, \dots, r\}$.
M^T	Transposta da matriz real M .
$M > (\geq) 0$	M é uma matriz simétrica e definida (semidefinida) positiva.
$M < (\leq) 0$	M é uma matriz simétrica e definida (semidefinida) negativa.
I	Matriz identidade.
$ z $	Valor absoluto de um número real z .
$\ x\ $	Norma euclidiana do vetor $x \in \mathbb{R}^n$: $\ x\ = \sqrt{x^T x}$.
$\arg \min_{i \in \mathbb{K}_r}^* \{h_i\}$	Menor índice $j \in \mathbb{K}_r$ tal que, para o conjunto $\{h_1, h_2, \dots, h_r\}$, $h_j = \min_{i \in \mathbb{K}_r} \{h_i\}$; por exemplo, dado um conjunto $H = \{h_1 = 3, h_2 = 1, h_3 = 6, h_4 = 3, h_5 = 1\}$, sendo $r = 5$, então $\arg \min_{i \in \mathbb{K}_r}^* \{h_i\} = \min\{2, 5\} = 2$.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
1.1	CONTROLE DE SISTEMAS NÃO LINEARES	11
1.2	OBJETIVOS	16
1.3	ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO	16
2	DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES E SOMA DE QUADRADOS	18
2.1	DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES	18
2.2	SOMA DE QUADRADOS	20
2.2.1	Não negatividade global	20
2.2.2	Decomposição em soma de quadrados	21
2.2.3	Estabilização utilizando soma de quadrados	24
2.3	COMENTÁRIOS	28
3	MODELOS <i>FUZZY</i> COM PARTE CONSEQUENTE LINEAR E POLINOMIAL	30
3.1	COMENTÁRIOS INICIAIS	30
3.2	MODELOS <i>FUZZY</i> COM PARTE CONSEQUENTE LINEAR	31
3.2.1	Setor não linear via modelos lineares	33
3.2.2	Projeto de controladores via LMIs	35
3.3	MODELOS <i>FUZZY</i> COM PARTE CONSEQUENTE POLINOMIAL	39
3.3.1	Setor não linear via modelos <i>fuzzy</i> polinomiais	41
3.3.2	Projeto de controladores via SOS	42
3.4	COMENTÁRIOS	44
4	CONTROLE ROBUSTO CHAVEADO DE SISTEMAS NÃO LINEARES VIA SOS	46

4.1	PROJETO DE CONTROLADOR ROBUSTO VIA SOS	46
4.2	PROJETO DE CONTROLADORES ROBUSTOS CHAVEADOS VIA SOS	52
4.2.1	Caso 1: matriz $B(\alpha, x) = B(x)$ conhecida	52
4.2.2	Caso 2: matriz $B(\alpha, x)$ incerta	55
4.3	RESULTADOS E SIMULAÇÕES	63
4.3.1	Exemplo 1 - sistema caótico unificado	63
4.3.2	Exemplo 2 - sistema caótico de Lorenz	66
4.3.3	Exemplo 3 - equação de Van der Pol	70
4.4	COMENTÁRIOS	75
5	CONTROLE DE MODELOS <i>FUZZY</i> POLINOMIAIS INCERTOS VIA SOS	76
5.1	PROJETO DE CONTROLADORES CHAVEADOS VIA SOS	79
5.1.1	Caso 1: matriz $B(\alpha, x) = B(x)$ conhecida utilizando modelos <i>fuzzy</i> polinomiais	79
5.1.2	Caso 2: matriz $B(\alpha, x)$ incerta utilizando modelos <i>fuzzy</i> polinomiais	80
5.2	RESULTADOS E SIMULAÇÕES	82
5.2.1	Exemplo 1 - exemplo numérico	82
5.2.2	Exemplo 2 - exemplo numérico	87
5.3	COMENTÁRIOS	90
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	91
6.1	PRINCIPAIS CONTRIBUIÇÕES	91
6.2	PERSPECTIVAS FUTURAS	92
6.3	PUBLICAÇÕES	93
6.3.1	Trabalho completo publicado em anal de congresso	93
6.3.2	Trabalho completo aceito em congresso	93
	REFERÊNCIAS	94

1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo é apresentada a motivação para o trabalho realizado e definidos os objetivos a serem atingidos. Ao final deste capítulo apresenta-se a organização do texto.

1.1 CONTROLE DE SISTEMAS NÃO LINEARES

No mundo real e não idealizado, a maioria dos sistemas dinâmicos encontrados tem natureza não linear (SLOTINE; LI et al., 1991). Entretanto, o controle e a análise de sistemas não lineares estão entre os problemas mais desafiadores da teoria de sistemas de controle. Apesar de muitos anos de pesquisa, ainda não há uma metodologia universal para análise da estabilidade e desempenho de sistemas não lineares, muito menos para o projeto de controladores para tais sistemas (PRAJNA; PAPACHRISTODOULOU; WU, 2004).

A teoria introduzida pelo matemático russo Alexandr Mikhailovich Lyapunov é uma importante ferramenta para o estudo da estabilidade e controle de sistemas não lineares. O método proposto não é restrito a análise de apenas uma região ou ponto de operação. Ele determina as propriedades de estabilidade do sistema não linear pela construção e análise ao longo do tempo de uma função “energia”, não havendo, desta forma, a necessidade de resolver as equações diferenciais que descrevem o sistema (SLOTINE; LI et al., 1991).

Considerando as candidatas a funções de Lyapunov do tipo quadrática ou composta, é possível formular vários problemas na teoria de controle através de desigualdades matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* - LMI), que comumente são utilizadas para a análise da estabilidade e projeto de controladores para sistemas lineares (BOYD et al., 1994).

A descrição dos sistemas não lineares por modelos *fuzzy* Takagi-Sugeno (TS) (TAKAGI; SUGENO, 1985) possibilita representá-los como uma combinação de modelos locais lineares, ponderados por funções de pertinência. Estes modelos oferecem uma descrição matemática adequada dos sistemas não lineares (TAKAGI; SUGENO, 1985) e vêm sendo amplamente utilizados na modelagem e controle de sistemas não lineares. São consideradas funções de Lyapunov quadráticas e modelos locais lineares e utilizadas as LMIs para análise da estabilidade e projeto de controladores com restrições, índices de desempenho e incertezas (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998; TANAKA; WANG, 2004; TEIXEIRA; ASSUNÇÃO; AVELLAR, 2003; MOZELLI; PALHARES; AVELLAR, 2008; SOUZA et al., 2013; ALVES et al., 2016).

Os modelos *fuzzy* TS possibilitam a representação dos sistemas não lineares por subsistemas combinados através das funções de pertinência, e por meio das técnicas propostas por Taniguchi

et al. (2001), também conhecida como forma generalizada, os sistemas não lineares podem ser representados de forma exata em uma região de operação.

Esta representação exata permite então o projeto de controladores para sistemas não lineares através de sua descrição pelo modelo *fuzzy* TS, desde que o sistema permaneça na região de espaço de estados na qual o modelo foi obtido. Neste contexto podem ser aplicadas técnicas de controle que utilizam a Compensação Paralela Distribuída (CDP) (TEIXEIRA; ZAK, 1999; WANG; TANAKA; GRIFFIN, 1995, 1996; TANAKA; IKEDA; WANG, 1998; TANAKA; WANG, 2004), fazendo uso das funções de pertinência dos modelos *fuzzy* na composição da lei de controle (ALVES et al., 2016).

Em Parrilo (2000) propõem-se a decomposição de funções não lineares polinomiais multivariadas em soma de quadrados (do inglês *Sum of Squares* - SOS). Essa nova metodologia aplicada na análise da estabilidade e projeto de controladores trouxe vários avanços em relação as LMIs, como, por exemplo, a possibilidade de não se restringir apenas as funções de Lyapunov quadráticas ou compostas (TANAKA et al., 2009; PRAJNA; PAPACHRISTODOULOU; WU, 2004).

Considerando sistemas não lineares cujas dinâmicas podem ser descritas apenas por funções polinomiais dependentes do vetor de estado do sistema (sistemas polinomiais), não há a necessidade da utilização de modelos *fuzzy* TS para a análise da estabilidade e projeto de controladores (PAPACHRISTODOULOU; PRAJNA, 2002; PRAJNA; PAPACHRISTODOULOU; WU, 2004). Como exemplos de sistemas cujas dinâmicas podem ser representadas apenas por funções polinomiais estão os sistemas caóticos, como o sistema de Lorenz (LORENZ, 1963), Rossler (RÖSSLER, 1976), Chen (UETA; CHEN, 2000) e Lü (LÜ; CHEN; ZHANG, 2002).

Sistemas caóticos são não lineares e apresentam uma complexa dinâmica aperiódica, sendo a trajetória do sistema muito sensível às condições iniciais. Os sistemas caóticos apresentam várias aplicações nos dias de hoje, tais como em comunicação segura, sistemas biológicos, sistemas ecológicos, entre outros (LAM, 2010; CHUANG et al., 2013). Controle e sincronização de sistemas caóticos podem ser eficientemente solucionados via SOS (LAM; LI, 2014; RAMOS et al., 2017). A principal diferença entre a utilização de modelos *fuzzy* TS, linearização em torno do ponto de equilíbrio e a decomposição em SOS, é que, diferente dos dois primeiros, com o uso das técnicas de soma de quadrados, o projeto dos controladores é válido para qualquer condição inicial, não havendo necessidade de limitar o sistema a uma região de operação.

A análise da estabilidade e o projeto de controladores para sistemas polinomiais podem, em princípio, serem considerados restritivos em relação aos sistemas não lineares que, em geral, possuem funções não polinomiais no modelo do sistema. Entretanto, tendo em vista o crescente aumento de técnicas de análise e projetos baseados em SOS, tais sistemas estão se tornando cada vez mais atrativos. Em Xu, Xie e Wang (2009) e Jennawasin, Narikiyo e Kawanishi (2010) são propostos projetos de controladores robustos para sistemas polinomiais com

incertezas politópicas. Em Nguang, Saat e Krug (2011) são consideradas incertezas limitadas em norma para realizar o projeto do controlador para realimentação estática da saída de sistemas polinomiais. No trabalho Huang, Hong-Fei e Jian-Ping (2013) propuseram controladores com garantia da norma H_∞ para sistemas polinomiais incertos.

Para contemplar sistemas não lineares cujas dinâmicas são representadas não apenas por funções polinomiais, Tanaka et al. (2007b) propuseram a modelagem em modelos *fuzzy* polinomiais para analisar a estabilidade e em Tanaka et al. (2007a) os autores propuseram projetos de controladores via compensação paralela distribuída polinomial (CAO et al., 2014). No trabalho Tanaka et al. (2009) é possível verificar que o SOS é um caso mais geral que inclui as LMIs, deste modo os resultados dos trabalhos mostraram que a decomposição em SOS dos sistemas não lineares utilizando modelos *fuzzy* polinomiais e funções de Lyapunov polinomiais, reduz o conservadorismo imposto pelas LMIs.

O SOS constitui um método flexível para resolver problemas relacionados à engenharia de controle possibilitando assim como as LMIs, transformar diversos problemas de controle em restrições solucionáveis via algoritmos computacionais. O SOS pode resolver problemas que envolvam muitas variáveis matriciais, contemplando também o caso de matrizes polinomiais, sendo os polinômios dependentes do vetor de estado do sistema. Além disso, diversas restrições podem ser impostas a estas variáveis como índices de desempenho e restrições exigidas no projeto do controlador.

Motivados pelos benefícios da proposta de analisar a estabilidade e de projetar controladores de sistemas não lineares via SOS, pesquisadores apresentaram propostas, como a análise da estabilidade com garantia de taxa de decaimento (YUM; WANG, 2013), a análise da estabilidade e estimação da região de atração (CHEN et al., 2015), a análise da estabilidade utilizando múltiplas funções de Lyapunov (GUELTON et al., 2013), controle com custo garantido de modelos *fuzzy* polinomiais (TANAKA; OHTAKE; WANG, 2009), o critério de estabilidade não convexa para modelos *fuzzy* polinomiais (CHEN et al., 2013) e restrições de entrada e saída considerando modelos *fuzzy* polinomiais (YU; HO, 2012).

Problemas mais complexos como o controle de sistemas não lineares através de modelos *fuzzy* polinomiais considerando atraso no vetor estado do sistema e sujeito a saturação são propostos em Gassara, Hajjaji e Chaabane (2016). Projeto de controladores robustos considerando a redução da norma H_∞ para modelos *fuzzy* polinomiais são propostos por Yu, Huang e Cheng (2016). O controle robusto com custo garantido de modelos *fuzzy* polinomiais considerando atraso no vetor de estado do sistema são propostos por Li e Wang (2012).

Devido aos problemas de caráter prático e acadêmico foram propostas condições que garantem a estabilidade de sistemas chaveados (SOUZA, 2013). Algumas dessas condições são baseadas em LMIs (GEROMEL; DEAECTO, 2009; DEAECTO; GEROMEL; DAAFOUZ, 2011) e, recentemente, foi desenvolvida a metodologia de controle chaveado para sistemas lineares e

não lineares com incertezas politópicas (SOUZA et al., 2013, 2014a; ALVES et al., 2016).

No mundo real a maioria dos sistemas podem conter incertezas, oriundos de desgaste mecânico, variação de constantes no modelo do sistema, imprecisão nos componentes elétricos do circuito, entre outros. Portanto, a habilidade para controlar um sistema em um ambiente incerto ou impreciso é uma característica importante nos controladores a serem projetados (MACHADO, 2003).

Um procedimento que considera as incertezas do sistema nos modelos *fuzzy* TS foi proposto em (SANTIM et al., 2012). Este método considera que o sistema não linear possui parâmetros incertos, sendo os extremos conhecidos. Ainda assim, pode-se obter um modelo *fuzzy* que represente exatamente este sistema em uma região de operação. Contudo, neste procedimento, embora sejam conhecidos os modelos locais, as funções de pertinência obtidas são incertas, pois serão dependentes dos parâmetros incertos. Assim, técnicas que utilizam o conceito de controle CDP não podem ser diretamente utilizadas.

Em Souza et al. (2014a) e Souza et al. (2014b) os autores propõe a não utilização das funções de pertinência do modelo na estrutura do controlador, desta forma, não há a necessidade de utilizar as expressões que definem as funções de pertinência para o cálculo do sinal de controle, que muitas vezes podem ser complexas e difícil de se obter. A lei de chaveamento proposta tem como objetivo a minimização da derivada da função de Lyapunov. Nesta abordagem, a derivada da função de Lyapunov com este controle chaveado é menor ou igual à derivada da função de Lyapunov com a lei de controle usando CDP, que considera as funções de pertinência disponíveis. As condições de projeto são descritas em termos de LMIs e podem ser resolvidas computacionalmente.

A lei de controle chaveada (SOUZA et al., 2014a, 2014b) apresenta menor conservadorismo quando comparada ao uso de um único ganho de realimentação, podendo ser aplicada no controle de modelos *fuzzy* TS incertos e também de modelos lineares com incertezas politópicas (SOUZA et al., 2013). Em Alves et al. (2016) é proposto um exemplo que ilustra o ganho de desempenho que pode ser obtido ao considerar o controle chaveado em comparação com a realimentação do vetor de estado com um único ganho em um sistema linear incerto e invariante no tempo. A partir deste exemplo é possível observar o menor conservadorismo da lei de controle chaveada em relação à realimentação do vetor de estado com um único ganho e também melhores índices de desempenho, quando comparada à utilização de uma lei de controle com um único ganho (OLIVEIRA et al., 2018).

Em Buzetti (2017) é provado que se um sistema pode ser controlado utilizando um único ganho, haverá um controlador com ganhos chaveados proposto em (SOUZA, 2013; SOUZA et al., 2014a, 2013) que também podem controlar o sistema. Em um exemplo também apresentado em Buzetti (2017) é possível observar o melhor desempenho do controlador chaveado e a redução do conservadorismo, pois foi possível controlar um sistema utilizando ganhos chaveados

mas não com um único ganho.

O controle chaveado de sistemas não lineares utilizando modelos *fuzzy* TS é uma metodologia eficaz e pode solucionar problemas complexos, como o projeto de controladores chaveados H_∞ para uma classe de sistemas não lineares incertos sujeito a saturação (OLIVEIRA et al., 2018), sem a necessidade de obter as funções de pertinência que combinam os modelos *fuzzy* TS. Deste modo, estas técnicas de controle são convenientes para aplicações práticas.

Em Chen e Juang (2011) foram desenvolvidos controladores chaveados para modelos *fuzzy* polinomiais, em que a lei de controle é dependente das funções de pertinência e a lei de chaveamento está relacionada com o vetor de estado do sistema de acordo com regras *fuzzy*. Em Baldi, Kosmatopoulos e Ioannou (2013) foi proposto uma metodologia de controle chaveado de supervisão adaptativo para sistemas não lineares incertos.

Em Cao et al. (2014) os autores propuseram o controle de sistemas não lineares incertos utilizando modelos *fuzzy* polinomiais considerando as incertezas limitadas em norma e também a diminuição do conservadorismo no projeto dos controladores em relação ao trabalho proposto em Tanaka et al. (2009). Atualmente, os trabalhos que tratam de sistemas não lineares utilizando modelos *fuzzy* polinomiais utilizam incertezas limitadas em norma (LI; WANG, 2012; CAO et al., 2014; TANAKA et al., 2016; KIM; PARK; JOO, 2016; YU; HUANG; CHENG, 2016). Nestes casos, o sinal de controle é obtido através da combinação dos ganhos com as funções de pertinência.

As incertezas limitadas em norma também foram utilizadas em trabalhos nos quais a planta foi descrita através de modelos *fuzzy* TS, como em Tanaka e Wang (2004), Lee, Park e Chen (2001). Para realizar a modelagem do sistema considerando as incertezas limitadas em norma é necessário conhecer os limites das incertezas para realizar o projeto e também escolher matrizes adicionais adequadas que são utilizadas para expressar a incerteza e que influenciam no projeto do controlador (LEE; PARK; CHEN, 2001). Desta forma, modelar um sistema utilizando as incertezas limitadas em norma, pode acarretar em resultados diferentes ou ineficazes, de acordo com a escolha das matrizes utilizadas para representar as incertezas.

Os projetos de controladores robustos chaveados para sistemas não lineares baseados na decomposição em soma de quadrados ainda é um tema não explorado na literatura. Neste trabalho, serão propostos controladores chaveados baseados em SOS considerando incertezas politópicas, portanto será necessário conhecer os valores de máximo e mínimo das incertezas. Os controladores chaveados propostos serão uma extensão dos trabalhos Souza et al. (2013, 2014a).

1.2 OBJETIVOS

O objetivo principal deste trabalho é propor novas leis de controle, considerando uma classe de sistemas incertos cuja a dinâmica é dada apenas por funções polinomiais dependentes do vetor de estado do sistema. Também serão considerados sistemas não lineares incertos cujas dinâmicas não são representadas apenas por funções polinomiais, sendo que para isso serão utilizados os modelos *fuzzy* polinomiais. Para atingir estes objetivos, neste trabalho são propostos os seguintes objetivos secundários:

- Descrever um sistema não linear incerto utilizando SOS considerando incertezas politópicas, sendo conhecidas as não linearidades e também os valores máximos e mínimos das incertezas.
- Propor projetos de controle para sistemas não lineares utilizando modelos *fuzzy* polinomiais baseados em (SOUZA, 2013; SOUZA et al., 2014a, 2013), não sendo necessário o conhecimento das funções de pertinência.
- Estabelecer procedimentos de projetos para controladores chaveados de sistemas não lineares incertos utilizando SOS.
- Apresentar exemplos e simulações que demonstrem as vantagens dos métodos propostos.

1.3 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

Para uma apresentação adequada do tema e dos resultados obtidos, este trabalho está organizado da seguinte forma:

- No Capítulo 2 será feita uma revisão da literatura sobre LMIs e SOS na área de controle, apresentando os conceitos fundamentais necessários para o desenvolvimento e compreensão do trabalho. De forma teórica, será possível comparar os projetos de controladores com a abordagem de LMIs e SOS.
- No Capítulo 3 serão tratados os modelos *fuzzy* TS, com foco nos modelos com partes consequentes lineares e polinomiais, observando o setor não linear das duas metodologias e destacando as diferenças entre elas. Ainda neste capítulo, serão comparados os projetos de controladores para um sistema não linear utilizando modelos *fuzzy* TS e polinomiais. Desta forma, através de um exemplo, será possível observar as vantagens da utilização dos modelos *fuzzy* polinomiais.
- No Capítulo 4 será considerada uma classe de sistemas não lineares incertos cuja a dinâmica pode ser descrita apenas por funções polinomiais. Inicialmente será utilizada a

proposta de se realizar o controle dos sistemas polinomiais incertos por um controlador $K(x)$ polinomial dependente do vetor de estado. Com o objetivo de reduzir o conservadorismo e aumentar a região de factibilidade, será proposto um ganho $K_i(x)$ para cada vértice i do politopo das incertezas, sendo apresentadas duas leis de chaveamento para selecionar o ganho que reduzirá a derivada da função de Lyapunov. Desta forma, a lei de controle será dada por $u = K_\sigma(x)\hat{x}(x)$, sendo $\hat{x}(x)$ um vetor coluna contendo monômios dependentes do vetor de estado do sistema e $\sigma \in \{1, 2, \dots, r\}$, o índice do ganho do controlador chaveado selecionado, que é uma função do vetor x . São apresentados neste capítulo exemplos e simulações computacionais.

- No Capítulo 5 será considerada uma classe de sistemas não lineares incertos mais geral, sendo a dinâmica do sistema descrita não apenas por funções polinomiais. Desta forma, serão utilizados os modelos *fuzzy* com parte consequente polinomial. Inicialmente será proposto o controle dos sistemas não lineares incertos descritos por modelos *fuzzy* polinomiais através de duas leis de chaveamento, sendo que a lei de controle será dada por $u = K_\sigma(x)\hat{x}(x)$. Deve-se observar que a lei de chaveamento, de certa forma sintetizará as funções de pertinência, de modo a reduzir a derivada da função de Lyapunov. São apresentados neste capítulo exemplos e simulações computacionais.
- No Capítulo 6 serão apresentadas as conclusões sobre o trabalho proposto. Diante dos resultados obtidos e o estado da arte do problema estudado, serão descritas as perspectivas para trabalhos futuros.

Neste trabalho, as implementações computacionais foram feitas no MATLAB. Problemas sintetizados a partir de LMIs foram implementadas através da interface YALMIP (LOFBERG, 2004), com o *solver* SeDuMi (STURM, 1999). Para os problemas sintetizados com SOS, foram implementados através da interface SOSTOOLS (PAPACHRISTODOULOU et al., 2013) com o *solver* SeDuMi.

2 DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES E SOMA DE QUADRADOS

Neste capítulo são apresentados alguns conceitos sobre desigualdades matriciais lineares (LMIs) (BOYD et al., 1994), e também sobre soma de quadrados (SOS). Ao final deste capítulo será possível observar que a abordagem utilizando soma de quadrados é uma extensão da abordagem utilizando LMIs. Será também apresentado o projeto do controlador por realimentação de estado que torna o sistema globalmente assintoticamente estável para controlar um sistema não linear via SOS, cuja a dinâmica possa ser representada apenas por funções polinomiais dependentes do vetor de estado do sistema.

2.1 DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES

Na década de 1980 foram abertos caminhos para que problemas de controle pudessem ser convertidos em problemas convexos descritos por desigualdades matriciais lineares. O desenvolvimento de sofisticados algoritmos numéricos tornaram possível a solução computacional de LMIs de modo eficiente. (BOYD et al., 1994).

As LMIs podem ser usadas para resolver problemas complexos que envolvam muitas variáveis matriciais e, considerando os projetos relacionados à engenharia de controle, diversas restrições podem ser impostas a estas variáveis, dependendo dos requisitos de projeto, constituindo um método flexível para a síntese de controladores (BOYD et al., 1994).

Uma definição importante para o entendimento das LMIs é o conceito de matrizes definidas positivas e semidefinidas positivas. Uma matriz simétrica P é dita definida positiva ($P > 0$) se todos os autovalores forem maiores que 0 e será dita semidefinida positiva ($P \geq 0$) se todos os autovalores forem maiores ou iguais a 0.

Uma LMI é uma desigualdade da seguinte forma (BOYD et al., 1994):

$$S(x) = S_0 + \sum_{i=1}^n x_i S_i \geq 0. \quad (1)$$

Na equação (1), $x \in \mathbb{R}^n$ é uma variável vetorial (suas componentes são $x_i, i = 1, \dots, n$) e as matrizes simétricas $S_i = S_i^T \in \mathbb{R}^{m \times m}, i = 0, 1, \dots, n$ são conhecidas. A LMI (1) é uma restrição convexa em x , ou seja, o conjunto $\{x/S(x) > 0\}$ é convexo. A desigualdade (1) pode representar uma ampla variedade de restrições convexas em x , tais como restrições para controle de sistemas dinâmicos, de acordo com uma candidata a função de Lyapunov quadrática.

Contudo as LMIs são normalmente escritas de forma que as variáveis sejam matrizes, como por exemplo:

$$R + M_1^T P_1 N_1 + N_2^T P_2 M_2 + \cdots + M_n^T P_n N_n + N_n^T P_n M_n < 0. \quad (2)$$

em que M_i , N_i e R , $i = 1, 2, \dots, n$, são matrizes com elementos constantes e P_i , $i = 1, 2, \dots, n$ são variáveis matriciais simétricas, ou seja, cada elemento da matriz é uma variável, sendo estes valores obtidos a partir da solução da restrição (2).

Considere o seguinte sistema linear e invariante no tempo:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (3)$$

sendo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, a matriz de entrada do sistema e $u \in \mathbb{R}^m$ o vetor de entrada. Suponha que todas as variáveis de estado estão disponíveis para realimentação. Deste modo, uma lei de controle do sistema é dado por:

$$u = -Kx, \quad (4)$$

sendo $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Teorema 1. (BOYD et al., 1994) Considere o sistema descrito por (3) e a lei de controle dada em (4). Caso existam uma matriz $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e uma matriz simétrica definida positiva $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que

$$XA^T - M^T B^T + AX - BM < 0, \quad (5)$$

então a lei de controle (4), sendo $K = MX^{-1}$, torna o sistema realimentado (3) e (4) globalmente assintoticamente estável.

Demonstração. A prova será omitida e pode ser obtida em (BOYD et al., 1994). Mas deve-se observar que foi utilizada uma candidata à função de Lyapunov quadrática da forma $V = x^T X^{-1} x$. \square

A LMI (5) pode ser escrita como a inequação (1), sendo S_0 uma matriz nula, portanto:

$$X = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \chi_{ij} Y_{ij}, \quad M = \sum_{s=1}^m \sum_{q=1}^n \bar{\omega}_{sq} \Psi_{sq} \quad (6)$$

sendo que Y_{ij} e Ψ_{sq} são matrizes com elementos (i, j) , (j, i) e (s, q) , (q, s) respectivamente iguais a 1 e todos os outros elementos iguais a 0, χ_{ij} e $\bar{\omega}_{sq}$ são constantes para $i, j, q \in \mathbb{K}_n$ e $s \in \mathbb{K}_m$. Assim, de (1), tem-se que

$$\begin{aligned}
& -XA^T + M^T B^T - AX + BM \\
& = -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \chi_{ij} \Upsilon_{ij} A^T + \sum_{s=1}^m \sum_{q=1}^n \bar{\omega}_{sq} (\Psi_{qs})^T B^T - A \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \chi_{ij} \Upsilon_{ij} + B \sum_{s=1}^m \sum_{q=1}^n \bar{\omega}_{sq} \Psi_{qs} > 0 \quad (7) \\
& = -\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \chi_{ij} (\Upsilon_{ij} A^T + A \Upsilon_{ij}) + \sum_{s=1}^n \sum_{q=1}^n \bar{\omega}_{sq} (B \Psi_{qs} + \Psi_{qs} B^T).
\end{aligned}$$

2.2 SOMA DE QUADRADOS

Métodos computacionais baseado na decomposição em soma de quadrados e programação semidefinida foram propostos em Papachristodoulou et al. (2013), Seiler (2013) para analisar ou criar uma função multivariada semidefinida positiva. Tais métodos podem ser utilizados para a construção de funções de Lyapunov polinomiais para a análise da estabilidade, desempenho e projeto de controladores (PARRILO, 2000; PRAJNA; PAPACHRISTODOULOU; WU, 2004; TANAKA et al., 2009).

A proposta da estrutura baseada em SOS fornece uma série de inovações e melhorias às estruturas baseadas em LMIs e também para o controle de modelos *fuzzy* (TANAKA et al., 2009). A possibilidade de considerar candidatas à função de Lyapunov mais complexas do que apenas quadráticas relaxa o sistema, da mesma forma que a especificação de ganhos formados por termos polinomiais dependentes das variáveis de estado.

O avanço computacional permitiu que algoritmos pudessem fornecer soluções para problemas complexos, como determinar o coeficiente dos monômios que formam um polinômio e o tornam semidefinido positivo, fornecendo uma condição suficiente e não necessária que é restringir este polinômio para ser uma soma de quadrados. Para a área de controle, estes resultados são importantes, pois permitem projetos de controladores que considerem funções de Lyapunov polinomiais e a presença de termos polinomiais nas matrizes que formam as restrições nos projetos de controladores (PARRILO, 2000; PRAJNA; PAPACHRISTODOULOU; WU, 2004; TANAKA et al., 2009).

Na subseções a seguir serão apresentados os conceitos de não negatividade global e decomposição em soma de quadrados, que serão necessários para realizar a escolha da candidata à função de Lyapunov para o estudo da estabilidade e projeto de controladores.

2.2.1 Não negatividade global

Um problema básico que aparece em muitas áreas da matemática é verificar a positividade de uma função polinomial de várias variáveis (multivariada). Considere um polinômio multivariado $F(x), x \in \mathbb{R}^n$, sendo

$$F(x_1, \dots, x_n) \geq 0, \quad \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

Certamente, o problema é dar condições equivalentes ou um procedimento para verificar a validade da proposição. Para se estudar o problema a partir de uma abordagem algorítmica, precisa-se fornecer mais restrições para a classe de funções $F(x)$, uma vez que a questão geral pode não ter solução (PARRILO, 2000).

A seguir serão apresentadas definições que serão úteis para compreender o trabalho.

Definição 1. (PRAJNA; PAPACHRISTODOULOU; WU, 2004) Um monômio dependente de $x \in \mathbb{R}^n$ é uma função da forma $x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_n^{\beta_n}$, sendo $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ inteiros não negativos.

Deve-se notar que o monômio é um polinômio e a ordem do polinômio dependerá do maior valor de $\beta_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Definição 2. (PARRILO, 2000) Um polinômio multivariado $f(x)$ é uma combinação linear finita de monômios:

$$f(x) = \sum_{\beta} c_{\beta} x^{\beta} = \sum_{\beta} c_{\beta} x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n}, \quad c_{\beta} \in \eta, \quad (9)$$

sendo que a soma é sobre um número finito de n-variáveis $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n), \beta_i \in \mathbb{N}$.

Muitos problemas da área de controle podem ser reduzidos a encontrar funções de Lyapunov que permitam analisar a estabilidade do sistema e projetar controladores de acordo com as restrições impostas ou requeridas pelo projetista, ou seja, a verificação da positividade global de funções polinomiais multivariadas (PARRILO, 2000).

O problema geral de testar a positividade global de uma função polinomial multivariada é, de fato, um problema difícil e complexo. Para evitar complexidade inerente relacionada com a solução exata, uma dessas condições é dada pela existência de uma decomposição em soma de quadrados das funções polinomiais (PARRILO, 2000). Deste modo, serão consideradas restrições na classe de funções polinomiais multivariadas para determinar a positividade global.

2.2.2 Decomposição em soma de quadrados

Se um polinômio $F(x)$ satisfaz (8), então uma condição simples para uma função de valor real $F(x)$ ser não negativa em toda região é dada pela existência da decomposição em soma de quadrados:

$$F(x) = \sum_i f_i^2(x) \forall i = 1, \dots, n. \quad (10)$$

Se uma função $F(x)$ pode ser escrita como (10), para n polinômios $f_i(x)$, então ela é não negativa para todos os valores de x .

Embora a soma de quadrados ofereça uma condição suficiente e não necessária, as experiências numéricas parecem indicar que a diferença dos resultados obtidos entre a soma de quadrados e a não negatividade de polinômios é pequena (PRAJNA; PAPACHRISTODOULOU; WU, 2004).

O que é ainda mais instrumental para aplicações de controle é o fato de que quando o polinômio multivariado $f(x)$ não é exatamente determinado, mas os coeficientes dos monômios que formam o polinômio são de outra forma parametrizados em termos de alguma incógnita, a busca por valores eficientes que tornam $f(x)$ uma soma de quadrados ainda pode ser realizada usando programação semidefinida.

A decomposição em soma de quadrados pode ser representada através da matriz de Gram. A ideia básica do método é expressar o polinômio dado como uma forma quadrática em algumas novas variáveis z_i . Estas novas variáveis são dependentes das variáveis originais x_i . Sendo o grau do polinômio m , os monômios serão de grau inferior ou igual a $m/2$ e dados pelos diferentes produtos das variáveis x_i . Portanto, $F(x)$ pode ser representado como (PARRILO, 2000):

$$F(x) = z^T Q z, \quad (11)$$

sendo que Q uma matriz constante. Se na representação acima Q é semidefinida positiva, então $F(x)$ é também semidefinida positiva. Esta metodologia pode ser conservadora de um modo geral. A principal razão é que, uma vez que as variáveis z_i não são independentes, a representação (11) pode não ser única e Q pode ser semidefinida positiva para algumas representações mas não para outras. Usando restrições identicamente satisfeitas que relacionam as variáveis z_i entre si (da forma $z_i z_j = z_k z_l$ ou $z_i^2 = z_k z_l$), pode-se demonstrar que existe um subespaço linear de matrizes Q que satisfaz (11). Se a intersecção deste subespaço com o cone da matriz positiva semidefinida não for vazia, então é garantida que a função original $F(x)$ é uma soma de quadrados (e portanto semidefinida positiva). Isso decorre de uma decomposição espectral para matrizes simétricas, $Q = Y^T D Y$, sendo D uma matriz diagonal com elementos na diagonal principal iguais a $d_i \geq 0$, que implica a soma de quadrados $F(x) = \sum_i d_i (Yz)_i^2$, sendo que $(Yz)_i$ corresponde ao elemento da linha i do vetor (Yz) , conforme a Observação 1. Por outro lado, se $F(x)$ pode de fato ser escrita como uma soma de quadrados de polinômios, então a expansão em monômios irá fornecer a representação (PARRILO, 2000).

Observação 1. A matriz Q é uma matriz simétrica, sendo a função $F(x)$ em (11) uma soma de quadrados. Os autovalores da matriz Q serão iguais ou maiores que zero, pois $F(x) \geq 0$. Desta forma, pode-se utilizar a decomposição espectral para matrizes simétricas, obtendo-se a

seguinte representação $Q = Y^T D Y$, sendo Y uma matriz ortogonal formada pelos autovetores da matriz Q e a matriz diagonal D , cujos elementos da diagonal são os autovalores da matriz Q , representados por d_i . Deve-se observar que $Q \geq 0$, portanto $d_i \geq 0$. Desta forma, tem-se:

$$\begin{aligned} F(x) &= z^T Q z = z^T Y^T D Y z = (Y z)^T D (Y z) \\ &= \sum_i (Y z)_i d_i (Y z)_i = \sum_i d_i (Y z)_i^2 \quad \forall i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Deve-se observar que $(Y z)$ é um vetor com apenas uma coluna, portanto $(Y z)_i$ corresponde ao elemento i da linha do vetor.

Como exemplo, considere o seguinte polinômio apresentado em Parrilo (2000), sendo $F(x_1, x_2) = 2x_1^4 + 2x_1^3 x_2 - x_1^2 x_2^2 + 5x_2^4$. Definindo o vetor de monômios z composto pelos seguintes elementos $z_1 = x_1^2$, $z_2 = x_2^2$, $z_3 = x_1 x_2$, portanto, o polinômio pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) &= 2x_1^4 + 2x_1^3 x_2 - x_1^2 x_2^2 + 5x_2^4 = z^T Q z \\ &= \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -1 + 2\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Observe que a matriz simétrica Q não é necessariamente única e o polinômio $F(x_1, x_2)$ pode ser representado na forma quadrática para qualquer valor real de λ .

Considerando $\lambda = 3$, a matriz Q pode ser decomposta da seguinte forma:

$$Q = L^T L, \quad L = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Deve-se observar que a decomposição $Q = L^T L$ é uma condição para que a matriz simétrica Q seja semidefinida positiva (CHEN, 1998). Deste modo, o polinômio $F(x_1, x_2)$ pode ser decomposto em uma soma de quadrados:

$$F(x_1, x_2) = \frac{1}{2} ((2x_1^2 - 3x_2^2 + x_1 x_2)^2 + (x_2^2 + 3x_1 x_2)^2).$$

Uma decomposição em soma de quadrados para $F(x)$ pode ser obtida usando programação semidefinida, uma vez que equivale a procurar por um elemento Q na intersecção do cone

de matrizes semidefinidas positivas e um conjunto definido por algumas restrições afins que surgem de (11) (PARRILO, 2004).

As propriedades mais importantes que distinguem a condição de programação semidefinida de outras abordagens para o problema da não negatividade polinomial é a sua relativa adaptabilidade e o fato de que ela pode ser facilmente estendida ao caso incerto, isto é, quando procura-se um polinômio semidefinido positivo $F(x)$ sujeito a condições adicionais (PARRILO, 2000). Este último recurso é importante para a aplicação em muitos problemas relacionados com a teoria de controle. A partir da teoria apresentada anteriormente, pode-se formular a seguinte proposição.

Proposição 1. (PRAJNA; PAPACHRISTODOULOU; WU, 2004) Seja $F(x)$ um polinômio multivariado dependente de $x \in \mathbb{R}^n$ de grau $2d$. Além disso, considere que $\hat{x}(x)$ é um vetor coluna com todos os seus elementos sendo monômios em x com grau não maior que d . Então, $F(x)$ é um SOS se, e somente se, existe uma matriz semidefinida positiva P tal que

$$F(x) = \hat{x}^T(x)P\hat{x}(x). \quad (12)$$

Um polinômio multivariado $p(x_1, \dots, x_n)$ é uma soma de quadrados se existirem polinômios $f_1(x), \dots, f_m(x)$ tais que

$$p(x) = \sum_{i=1}^m f_i^2(x).$$

Portanto, $p(x)$ é um SOS, ou seja, $p(x) \geq 0$. Se $p(x) - \varepsilon(x)$ é um SOS sendo que $\varepsilon(x) > 0$ para $x \neq 0$, então $p(x) > 0$ para $x \neq 0$.

Deve-se ter em mente que nem todo polinômio semidefinido positivo é um SOS, como é o caso do polinômio de Motzkin,

$$M(x, y) = x^2y^4 + x^4y^2 + 1 - 3x^2y^2, \quad (13)$$

sendo que $M(x, y) \geq 0$ mas não pode ser decomposto em um SOS (PARRILO, 2000).

Portanto toda soma de quadrados é um polinômio, mas nem todo polinômio semidefinido positivo é uma soma de quadrados. Assim, a soma de quadrados é um subconjunto das funções polinomiais semidefinidas positivas.

2.2.3 Estabilização utilizando soma de quadrados

Considere um sistema $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ sendo $f(x)$ e $g(x)$ funções polinomiais. Encontrar um controlador para o sistema, pode ser equivalente a obter uma lei de realimentação de

estado polinomial $u = K(x)\hat{x}(x)$ e uma função de Lyapunov polinomial (não necessariamente quadrática) $V(x)$ tais que

$$\begin{aligned} V(x) - \varepsilon(x) & \text{ é SOS,} \\ -\frac{\partial V}{\partial x}(f(x) + g(x)K(x)\hat{x}(x)) & \text{ é SOS.} \end{aligned} \quad (14)$$

sendo $\varepsilon(x) > 0$ para $x \neq 0$ e $K(x)$ uma matriz polinomial de dimensões apropriadas.

No entanto, o conjunto solução de $V(x)$ e $K(x)$ que satisfazem as condições anteriores não é um conjunto convexo e portanto uma busca simultânea de tal $V(x)$ e $K(x)$ é complexa, equivalente a resolver algumas desigualdades matriciais bilineares (BMIs) (PRAJNA; PAPACHRISTODOULOU; WU, 2004).

O produto direto ou produto de Kronecker, que será utilizado a seguir para o relaxamento das condições polinomiais, é denotado por \otimes . O produto de Kronecker é um operador em que duas matrizes de dimensões arbitrárias resulta em um bloco matricial (GRAHAM, 1981). O produto de Kronecker não deve ser confundido com a multiplicação de matriz usual.

Dadas as matrizes $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ formada pelos elementos a_{ij} e $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$ formada pelos elementos b_{kl} , define-se o produto de Kronecker de A por B como a matriz $C \in \mathbb{R}^{mp \times nq}$ dada por:

$$C = A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{11}b_{1q} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{11} & a_{1n}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1q} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & \cdots & a_{11}b_{2q} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{21} & a_{1n}b_{22} & \cdots & a_{1n}b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}b_{p1} & a_{11}b_{p2} & \cdots & a_{11}b_{pq} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{p1} & a_{1n}b_{p2} & \cdots & a_{1n}b_{pq} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}b_{11} & a_{m1}b_{12} & \cdots & a_{m1}b_{1q} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{11} & a_{mn}b_{12} & \cdots & a_{mn}b_{1q} \\ a_{m1}b_{21} & a_{m1}b_{22} & \cdots & a_{m1}b_{2q} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{21} & a_{mn}b_{22} & \cdots & a_{mn}b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{p1} & a_{m1}b_{p2} & \cdots & a_{m1}b_{pq} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{p1} & a_{mn}b_{p2} & \cdots & a_{mn}b_{pq} \end{bmatrix}.$$

A seguir será apresentada uma proposição importante com relação ao relaxamento de condições polinomiais.

Proposição 2. (PRAJNA; PAPACHRISTODOULOU; WU, 2004) Suponha que é dada $F(x) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ uma matriz polinomial simétrica de grau $2d$ dependente de $x \in \mathbb{R}^n$. Além disso, seja $\hat{x}(x)$ um vetor coluna cujos elementos são todos monômios em x com grau não maior que d . Considere as seguintes condições:

1. $F(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$;
2. $v^T F(x) v$ é um SOS, sendo que $v \in \mathbb{R}^N$;
3. Existe uma matriz positiva semidefinida Q tal que
 $v^T F(x) v = (v \otimes \hat{x}(x))^T Q (v \otimes \hat{x}(x))$, em que \otimes denota o produto de Kronecker.

Então, $1 \Leftrightarrow 2$ e $2 \Leftrightarrow 3$.

Demonstração. $1 \Leftrightarrow 2$: sendo $v^T F(x) v$ uma soma de quadrados implica que a desigualdade $v^T F(x) v \geq 0$ para todo $(v, x) \in \mathbb{R}^{N+n}$, que é uma consequência equivalente a $F(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

$2 \Leftrightarrow 3$: Esta equivalência segue como um caso especial da 1. O vetor de monômios pode ser escolhido da forma $v \otimes \hat{x}(x)$, devido ao resultado em Reznick (1978), que caracteriza os monômios que podem aparecer na forma quadrática (12). Os detalhes serão omitidos por estarem fora do escopo do trabalho. \square

A equivalência inversa $1 \Rightarrow 2$ geralmente não é válida. Um caso especial quando está implicação é válida é para $n = 1$, como apresentado em Gatermann e Parrilo (2004), sendo uma matriz polinomial simétrica $F(x)$ tal que $v^T F(x) v$ é uma soma de quadrados é denominada de matriz soma de quadrados (PRAJNA; PAPACHRISTODOULOU; WU, 2004).

A seguir será apresentado um Lema que será útil na formulação das restrições utilizando SOS.

Lema 1. (PRAJNA; PAPACHRISTODOULOU; WU, 2004) Para uma matriz polinomial simétrica $P(x)$ que é não singular para todo x , tem-se que

$$\frac{\partial P(x)}{\partial x_i} = -P(x) \left(\frac{\partial P^{-1}(x)}{\partial x_i} \right) P(x). \quad (15)$$

Demonstração. Como $P(x)$ é não singular, tem-se que $P(x)P^{-1}(x) = I$. Diferenciando ambos os lados com respeito a x_i obtém-se

$$\left(\frac{\partial P(x)}{\partial x_i} \right) P^{-1}(x) + P(x) \left(\frac{\partial P^{-1}(x)}{\partial x_i} \right) = 0.$$

Multiplicando a equação pela direita por $P(x)$, tem-se que:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial P(x)}{\partial x_i} \right) + P(x) \left(\frac{\partial P^{-1}(x)}{\partial x_i} \right) P(x) &= 0, \\ \frac{\partial P(x)}{\partial x_i} &= -P(x) \left(\frac{\partial P^{-1}(x)}{\partial x_i} \right) P(x). \end{aligned}$$

Que resulta em (15) e a prova está concluída. \square

Considere o sistema $\dot{x} = f(x) + g(x)u$, escrito da seguinte forma em espaço de estados

$$\dot{x} = A(x)\hat{x}(x) + B(x)u, \quad (16)$$

sendo $A(x)$ e $B(x)$ matrizes polinomiais, ou seja, cada elemento das matrizes podem conter um polinômio em função do vetor de estado do sistema, $\hat{x}(x) \in \mathbb{R}^N$ é um vetor coluna de monômios dependentes também do vetor de estado do sistema satisfazendo a seguinte suposição

Suposição 1. $\hat{x}(x) = 0$ se, e somente se, $x = 0$.

Desta forma, está sendo considerado que a ordem dos monômios que compõem o vetor coluna $\hat{x}(x)$ possui ordem maior ou igual a 1.

Define-se $T(x) \in \mathbb{R}^{N \times n}$ como uma matriz polinomial cujos elementos (i, j) são dados por

$$T^{ij}(x) = \frac{\partial \hat{x}_i(x)}{\partial x_j}, \quad (17)$$

para $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, n$. Considera-se que $A^k(x)$ denota a linha k de $A(x)$, $\kappa = \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$ são os índices das linhas de $B(x)$ correspondentes às linhas iguais a zero e define-se $\tilde{x} = (x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_m})$.

Considere a lei de controle por realimentação de estado

$$u(t) = K(x)\hat{x}(x), \quad (18)$$

que será projetada com o objetivo de tornar o ponto de equilíbrio $x = 0$ assintoticamente estável.

Logo, de (16) e (18) o sistema em malha fechada pode ser representado por

$$\dot{x} = (A(x) + B(x)K(x))\hat{x}(x). \quad (19)$$

Teorema 2. (PRAJNA; PAPACHRISTODOULOU; WU, 2004) Para o sistema (16), suponha que existam uma matriz simétrica polinomial $X(\tilde{x}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$, uma matriz polinomial $M(x) \in \mathbb{R}^{m \times N}$, sendo $\varepsilon_1 > 0$ e $\varepsilon_2(x) \geq 0$, tais que

$$v^T (X(\tilde{x}) - \varepsilon_1 I) v \quad \text{é SOS} \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
& -v^T \left(X(\tilde{x})A^T(x)T^T(x) + T(x)A(x)X(\tilde{x}) \right. \\
& \quad \left. + M^T(x)B^T(x)T^T(x) + T(x)B(x)M(x) \right. \\
& \quad \left. - \sum_{k \in \kappa} \frac{\partial X(\tilde{x})}{\partial x_k} \left(A^k(x)\hat{x}(x) \right) + \varepsilon_2(x)I \right) v \quad \text{é SOS}
\end{aligned} \tag{21}$$

sejam factíveis, sendo $v \in \mathbb{R}^N$ um vetor que independe de x . A matriz $T(x) \in \mathbb{R}^{N \times n}$ definida conforme a equação (17).

Além disso, se (21) é factível com $\varepsilon_2(x) > 0$ para todo $x \neq 0$, então o ponto de equilíbrio em $x = 0$ é assintoticamente estável. Se $X(\tilde{x})$ é uma matriz constante, então é garantida a estabilidade global do sistema. O ganho de realimentação $K(x)$ pode ser obtido por

$$K(x) = M(x)X^{-1}(\tilde{x}). \tag{22}$$

Demonstração. A prova será omitida e pode ser obtida em (PRAJNA; PAPACHRISTODOULOU; WU, 2004). No Capítulo 4 há a demonstração do Teorema 5, que considera o caso em que o sistema polinomial contém incertezas, sendo a demonstração semelhante a do Teorema 2. Deve-se observar que foi utilizada uma candidata à função de Lyapunov polinomial da forma $V = \hat{x}^T(x)X^{-1}(\tilde{x})\hat{x}(x)$.

□

Observação 2. Note que $v \in \mathbb{R}^N$ é um vetor que independe de x . Considerando uma matriz polinomial simétrica $L(x)$ dependente de x , ela não é sempre uma matriz semidefinida positiva para todo $x(t)$ mesmo se $x^T(x)L(x)x(x)$ é um SOS. Contudo é garantido através da Proposição 2 que se $v^T L(x) v$ é um SOS, então $L(x) \geq 0$ para todo x (TANAKA et al., 2009).

Observação 3. Para evitar a introdução de condições não convexas, assume-se que $X(\tilde{x})$ é apenas dependente das variáveis de estado de \tilde{x} , que não são diretamente afetadas pelas entradas de controle, associadas às linhas correspondentes a $B(x)$ que são nulas. Em relação a isto, pode ser vantajoso empregar uma transformação de estado inicial para introduzir linhas nulas quando possível em $B(x)$ (TANAKA et al., 2009; PRAJNA; PAPACHRISTODOULOU; WU, 2004).

2.3 COMENTÁRIOS

Quando $A(x)$ e $B(x)$ são matrizes constantes e $\hat{x}(x) = x$ o sistema será linear, como o sistema representado em (3). Caso a candidata à função de Lyapunov $\hat{x}^T(x)X(\tilde{x})\hat{x}$ dada no Teorema 2 possua $X(\tilde{x})$ como uma matriz também constante, a candidata à função de Lyapunov será quadrática, e desta forma, tem-se o que foi abordado no Teorema 1 apenas para sistemas lineares

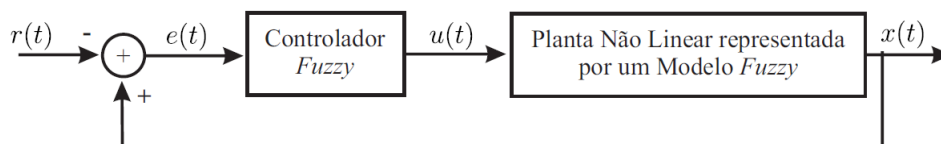
e funções de Lyapunov quadráticas. Desta forma, podemos concluir que a abordagem utilizando SOS é uma extensão das LMIs, sendo as LMIs um caso particular da abordagem com SOS. Assim, a utilização do SOS para resolver problemas na área de controle pode fornecer condições mais relaxadas para o projeto de controladores.

3 MODELOS FUZZY COM PARTE CONSEQUENTE LINEAR E POLINOMIAL

3.1 COMENTÁRIOS INICIAIS

Um diagrama de blocos de um sistema de controle com modelos *fuzzy* é apresentado na Figura 1. O diagrama consiste em uma planta não linear representada por modelos *fuzzy* e um controlador *fuzzy* conectado em malha fechada. O vetor de estado do sistema $x(t)$ ou vetor de saída $y(t)$ (para o caso de realimentação da saída), combinado com o vetor de entrada $r(t)$, serão processados pelo controlador *fuzzy* para gerar o sinal de controle $u(t)$ que é então inserido na planta não linear de modo que o sistema controlado apresente um desempenho adequado.

Figura 1 - Diagrama de blocos do sistema de controle de modelos *fuzzy*.

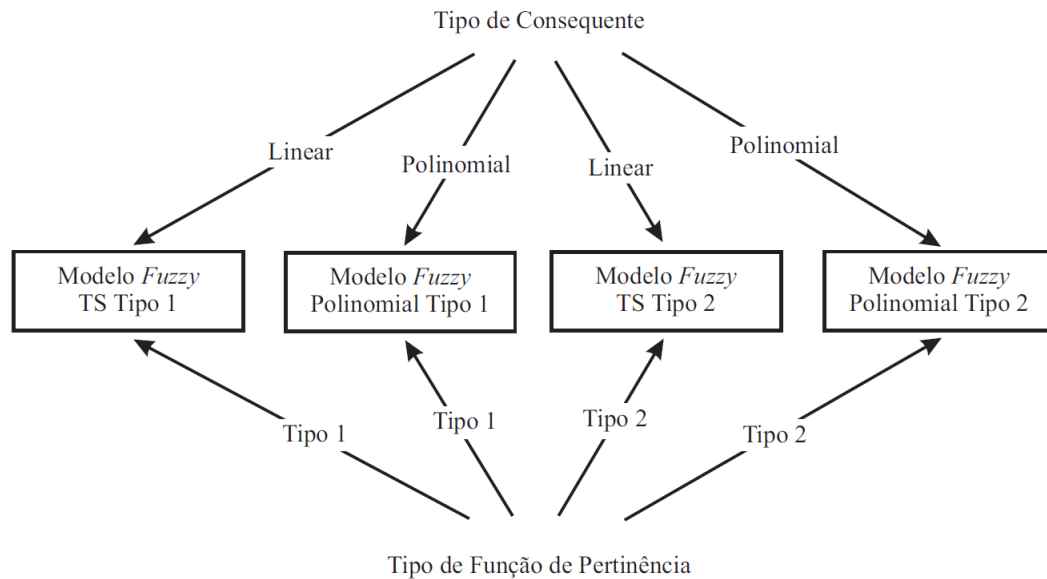


Fonte: Adaptado de Lam (2011).

Os modelos *fuzzy* possibilitam a representação do sistema não linear por subsistemas combinados através das funções de pertinência. Uma ampla classe de sistemas não lineares podem ser representadas de forma exata através das técnicas propostas por Taniguchi et al. (2001), também conhecida como forma generalizada. Várias metodologias de obtenção dos modelos *fuzzy* foram propostas e classificadas como os conjuntos *fuzzy* Tipo 1 e 2 (MENDEL; JOHN; LIU, 2006), cuja a diferença entre eles está nas funções de pertinência e modelos *fuzzy* com subsistemas lineares ou polinomiais. Portanto, como mostrado na Figura 2, há 4 tipos de modelos *fuzzy*.

As funções de pertinência do modelo *fuzzy* Tipo 1 não são boas na representação de incertezas, o que limita sua capacidade de modelagem de sistema em comparação aos conjuntos *fuzzy* do Tipo 2. O modelo *fuzzy* do Tipo 2 pode ser considerado como uma combinação de um número infinito de modelos *fuzzy* tipo 1.

Os modelos *fuzzy* com parte consequente linear são comumente denominados por modelos *fuzzy* TS. O objetivo deste trabalho são os modelos *fuzzy* do Tipo 1 com a parte consequente polinomial. Será introduzido, inicialmente os modelos *fuzzy* do Tipo 1 com a parte consequente linear, com o objetivo de mostrar as diferenças e compará-los com os modelos *fuzzy* com parte consequente polinomial.

Figura 2 - Tipos de modelos *fuzzy*.

Fonte: Adaptado de Lam (2011).

3.2 MODELOS FUZZY COM PARTE CONSEQUENTE LINEAR

Os modelos *fuzzy* TS são descritos por regras SE-ENTÃO que representam localmente as relações lineares entre a entrada e a saída de um sistema não linear. A descrição local da planta dinâmica a ser controlada está disponível em termos dos modelos locais:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_i x(t) + B_i u(t), \\ y(t) &= C_i x(t), \end{aligned} \quad (23)$$

sendo que $i = 1, 2, \dots, r$, o vetor de estado $x(t) \in \mathbb{R}^n$, o vetor de entrada $u(t) \in \mathbb{R}^m$, o vetor de saída $y \in \mathbb{R}^q$, $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $C_i \in \mathbb{R}^{q \times n}$. A informação acima é então fundida com as regras Se-Então disponíveis, sendo que a i -ésima regra pode ter a forma:

$$\begin{aligned} \text{Regra } i : & \text{ Se } z_1(t) \text{ é } M_1^i \text{ E } \dots \text{ E } z_p(t) \text{ é } M_p^i, \\ \text{Então } & \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \\ y(t) = C_i x(t), \end{cases} \end{aligned} \quad (24)$$

sendo $i = 1, 2, \dots, r$, M_j^i , $j = 1, 2, \dots, p$ é o conjunto *fuzzy* j da regra i , $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entrada, $y \in \mathbb{R}^q$ é o vetor de saída e $z_1(t), \dots, z_p(t)$ são as variáveis premissas, que serão consideradas iguais às variáveis de estado da planta, isto é, $z_i(t) = x_i(t)$. Cada equação linear representada por $A_i x(t) + B_i u(t)$ será chamada de subsistema.

Como apresentado em Taniguchi et al. (2001), dado o par $(x(t), u(t))$, o vetor de saída final

do sistema *fuzzy* é inferido da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^r \omega^i(z(t)) (A_i x(t) + B_i u(t))}{\sum_{i=1}^r \omega^i(z(t))}, \\ y(t) = \frac{\sum_{i=1}^r \omega^i(z(t)) C_i x(t)}{\sum_{i=1}^r \omega^i(z(t))}, \end{cases} \quad (25)$$

sendo

$$z(t) = [z(t)_1 \quad z(t)_2 \quad \dots \quad z(t)_p], \quad \omega_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p M_j^i(z(t)_j), \quad \sum_{i=1}^r \omega_i(z(t)) > 0, \quad \omega_i(z(t)) \geq 0, \quad (26)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_r$. $M_j^i(z(t)_j)$ é o “peso” do conjunto *fuzzy* M_j^i associado à variável premissa $z(t)_j$.

Define-se “peso” normalizado e/ou função de pertinência de cada regra, como sendo

$$\alpha_i(z(t)) = \frac{\omega_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r \omega_i(z(t))}. \quad (27)$$

De (26) e (27) tem-se que

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) = 1 \quad \text{e} \quad \alpha_i(z(t)) > 0, \quad i \in \mathbb{K}_r. \quad (28)$$

Portanto, de (25)-(28), a equação (25), pode ser escrita da seguinte forma (TANIGUCHI et al., 2001)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) [A_i x(t) + B_i u(t)] = A(\alpha(z(t)))x(t) + B(\alpha(z(t)))u(t), \\ y(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) C_i x(t) = C(\alpha(z(t)))x(t). \end{cases} \quad (29)$$

sendo $\sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) = 1$ e $\alpha_i(z(t)) \geq 0$, para todo $i \in \mathbb{K}_r$.

Considerando o modelo *fuzzy* (24), os reguladores *fuzzy* via compensação paralela distribuída (CPD) (WANG; TANAKA; GRIFFIN, 1995) possuem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Regra } i: & \text{Se } z_1(t) \text{ é } M_1^i \text{ E } \dots \text{ E } z_p(t) \text{ é } M_p^i, \\ & \text{Então } u(t) = -K_i x(t), \quad i = 1, 2, \dots, r. \end{aligned} \quad (30)$$

De forma análoga à obtenção de (29), pode-se concluir que

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) K_i x(t). \quad (31)$$

Substituindo a equação (31) em (29), considerando $z(t) = x(t)$ e lembrando que $\sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t)) = 1$, obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) \left[A_i x(t) - B_i \left(\sum_{j=1}^r \alpha_j(z(t)) K_j x(t) \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) \left[\sum_{j=1}^r \alpha_j(z(t)) A_i x(t) - \sum_{j=1}^r \alpha_j(z(t)) B_i K_j x(t) \right] \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) [A_i - B_i K_j] x(t). \end{aligned} \quad (32)$$

Utilizando a forma generalizada proposta por Taniguchi et al. (2001) em que os modelos locais são obtidos em função da região de operação, os modelos locais irão corresponder aos valores extremos das não linearidades do sistema, ou seja, aos máximos e mínimos.

Uma grande variedade de sistemas que estejam no mesmo intervalo de operação podem ser modelados através desta técnica. Na construção dos modelos, normalmente, não são consideradas particularidades do comportamento das funções, mas apenas os valores extremos de cada função não linear.

As funções de pertinência também são construídas a partir dos valores extremos das funções não lineares e a combinação com os modelos locais produzem uma modelagem exata. Portanto o número de regras *fuzzy* necessário será igual a 2^s , sendo s o número de funções não lineares do sistema.

3.2.1 Setor não linear via modelos lineares

O setor não linear é baseado na seguinte ideia: considere um sistema não linear simples $\dot{x} = f(x)$, sendo $f(0) = 0$. O objetivo é encontrar um setor global tal que $\dot{x} = f(x) \in [a_1, a_2]x$. Considere como exemplo o seguinte sistema:

$$\dot{x} = 10 \operatorname{sen} \left(\frac{x}{2} \right) + 2x = \left(\frac{10 \operatorname{sen} \left(\frac{x}{2} \right)}{x} + 2 \right) x = g(x)x. \quad (33)$$

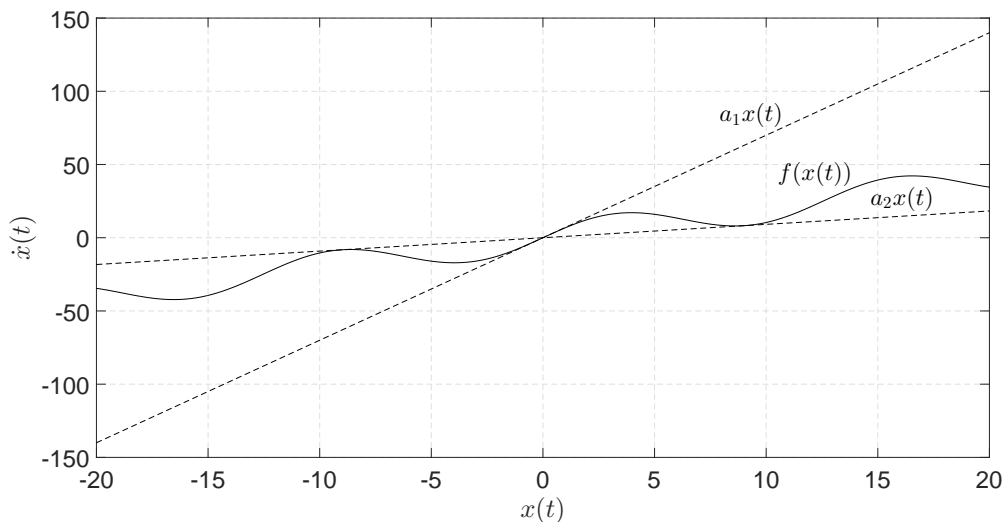
Os modelos locais e as funções de pertinência podem ser escritas da seguinte forma:

$$a_1 = \max(g(x)) = 7, \quad a_2 = \min(g(x)) = 0,9138,$$

$$\alpha_1 = \frac{g(x) - \min(g(x))}{\max(g(x)) - \min(g(x))}, \quad \alpha_2 = 1 - \alpha_1. \quad (34)$$

Deve-se observar que a função $g(x)$ possui valores de máximo e mínimo finitos para qualquer valor de x , o que possibilita a construção do setor não linear global. A Figura 3 ilustra a função $f(x)$ e os modelos locais lineares a_1 e a_2 , que devem ser combinados com as funções de pertinência para que seja possível a reprodução da função $f(x)$. Esta abordagem garante uma construção exata da função não linear através de modelos *fuzzy* TS.

Figura 3 - Setor não linear global.



Fonte: Próprio autor.

Contudo, algumas vezes é difícil encontrar um setor global para sistemas não lineares em geral. Neste caso, pode-se considerar um setor não linear local, o que é razoável, pois as variáveis dos sistemas físicos são sempre limitadas. Portanto, considere como exemplo o seguinte sistema, no qual os modelos locais e as funções de pertinência serão construídos considerando o sistema limitado na seguinte região $x \in [-26, 5, 26, 5]$:

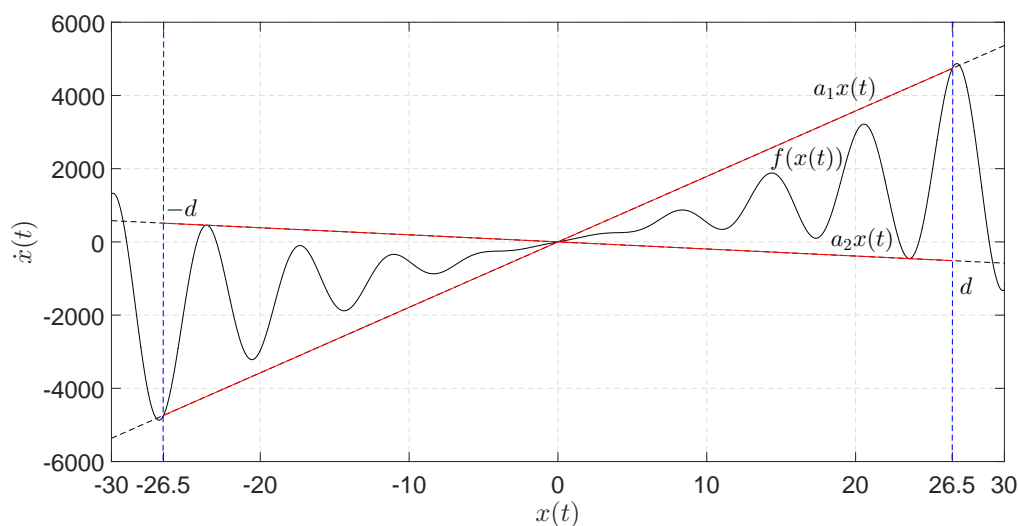
$$\dot{x} = \text{sen}(x)(2x)^2 + 75x = (4\text{sen}(x)x + 75)x = g(x)x. \quad (35)$$

Os modelos locais e as funções de pertinência, para a operação nesta região, podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \max(g(x)) = 178,8119, & a_2 &= \min(g(x)) = -19,3317, \\
 \alpha_1 &= \frac{g(x) - \min(g(x))}{\max(g(x)) - \min(g(x))}, & \alpha_2 &= 1 - \alpha_1.
 \end{aligned}
 \tag{36}$$

A Figura 4 mostra o setor não linear local, sendo que, as linhas em vermelho são os modelos locais lineares que transformam-se nos setores locais de $-d < x < d$, sendo $d = 26,5$. A linha em azul tracejada é a região em que os modelos *fuzzy* TS representam de forma exata o sistema não linear. O modelo *fuzzy* TS representa exatamente o sistema não linear na região “local”, isto é, de $-d < x(t) < d$, através da combinação dos modelos locais com as funções de pertinência. Deve-se observar que fora da região de operação, $f(x) \notin [a_1, a_2]x$, e não será possível representar a função não linear através da combinação dos modelos locais com as funções de pertinência.

Figura 4 - Setor não linear local.



Fonte: Próprio autor.

Deve-se observar que quanto maior for o setor não linear, maior será o número de funções não lineares que poderão ser representados pelos mesmos modelos locais, desta forma, maior será a complexidade em projetar um controlador que torne o ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

3.2.2 Projeto de controladores via LMIs

A análise da estabilidade e o projeto dos controladores de sistemas não lineares representados através de modelos *fuzzy* TS com parte consequente linear podem ser sintetizados em problemas de desigualdades matriciais lineares, considerando candidatas a função de Lyapunov

do tipo quadrática, como em (TANAKA; WANG, 2004; SANTIM et al., 2012; SOUZA et al., 2014a; ALVES et al., 2016). O projeto dos controladores *fuzzy* pode ser realizado a partir do teorema a seguir.

Teorema 3. (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998) O ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema *fuzzy* contínuo no tempo dado em (32) é assintoticamente estável, se existirem uma matriz simétrica definida positiva $X \in \mathbb{R}^{n \times n} (X > 0)$ e matrizes $M_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tais que para todo $i, j \in \mathbb{K}_r$, as seguintes LMIs sejam factíveis:

$$XA_i^T + A_iX - B_iM_i - M_i^T B_i^T < 0, \quad (37)$$

$$(A_i + A_j)X + X(A_i + A_j)^T - B_iM_j - B_jM_i - M_i^T B_j^T - M_j^T B_i^T \leq 0, \quad i < j, \quad (38)$$

excluindo os pares (i, j) tais que $\alpha_i(z(t))\alpha_j(z(t)) = 0$ para todo $x(t)$. Se (37) e (38) forem factíveis, os ganhos são dados por $K_i = M_iX^{-1}$, $i \in \mathbb{K}_r$.

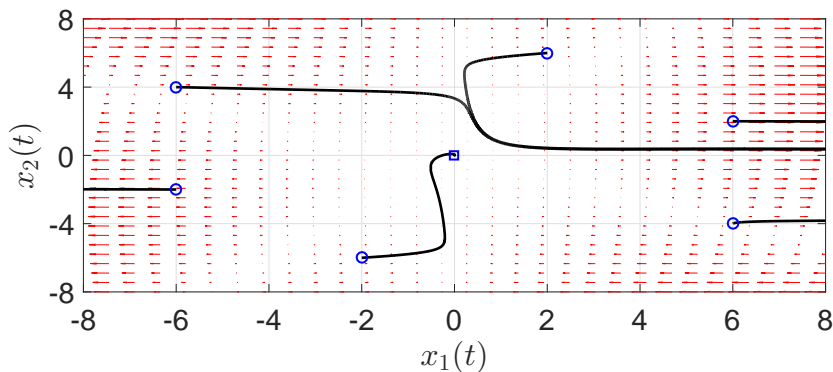
Demonstração. A prova será omitida e pode ser obtida em (TANAKA; WANG, 2004), mas deve-se observar que foi utilizada uma candidata à função de Lyapunov quadrática da forma $V = x^T X^{-1}x$. \square

Considere o seguinte exemplo de sistema não linear apresentado em Tanaka et al. (2009) e dado a seguir

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_1^2 + x_1^3 + x_1^2x_2 - x_1x_2^2 + x_2 + x_1u \\ \dot{x}_2 &= -\text{sen}(x_1) - x_2 \end{aligned} \quad (39)$$

Na Figura 5 é apresentado o plano de fase do sistema não linear, para o caso em que $u = 0$, sendo que os pontos referentes às condições iniciais e aos valores finais da simulação são representados por um círculo e um quadrado em azul respectivamente.

Figura 5 - Plano de fase do sistema não linear (39) considerando $u = 0$.



Fonte: Próprio autor.

De acordo com a Figura 5, a origem não é um ponto de equilíbrio estável para qualquer condição inicial. O objetivo do controlador a ser projetado será estabilizar o sistema na origem para qualquer condição inicial pertencente a uma determinada região de operação. O projeto dos controladores será feito utilizando LMIs. O sistema não linear poderá ser representado exatamente por modelos *fuzzy* TS considerando $x_1 \in [-d_1, d_1]$ e $x_2 \in [-d_2, d_2]$, em que d_1 e d_2 são constantes satisfazendo $0 < d_1 < \infty$ e $0 < d_2 < \infty$.

O modelo *fuzzy* TS pode ser obtido da seguinte forma

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^8 \alpha_i(z) [A_i x + B_i u], \quad (40)$$

sendo que $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$, $z = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$,

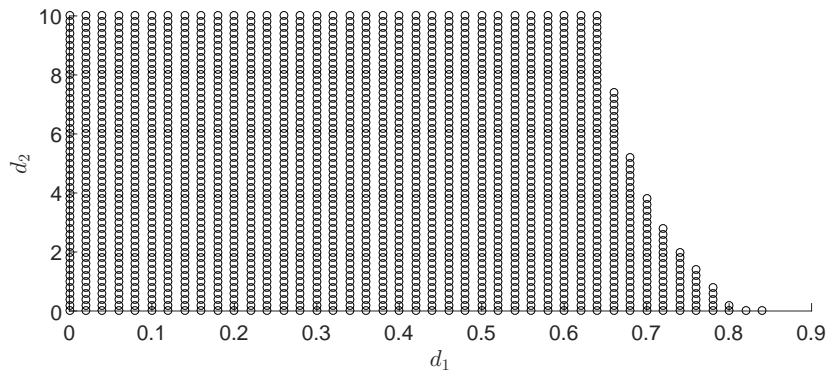
$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} k_{max} & 1 \\ h_{min} & -1 \end{bmatrix}, & A_2 &= \begin{bmatrix} k_{max} & 1 \\ h_{min} & -1 \end{bmatrix}, \\ A_3 &= \begin{bmatrix} k_{max} & 1 \\ h_{max} & -1 \end{bmatrix}, & A_4 &= \begin{bmatrix} k_{max} & 1 \\ h_{max} & -1 \end{bmatrix}, \\ A_5 &= \begin{bmatrix} k_{min} & 1 \\ h_{min} & -1 \end{bmatrix}, & A_6 &= \begin{bmatrix} k_{min} & 1 \\ h_{min} & -1 \end{bmatrix}, \\ A_7 &= \begin{bmatrix} k_{min} & 1 \\ h_{max} & -1 \end{bmatrix}, & A_8 &= \begin{bmatrix} k_{min} & 1 \\ h_{max} & -1 \end{bmatrix}, \\ B_1 = B_3 = B_5 = B_7 &= \begin{bmatrix} d_1 \\ 0 \end{bmatrix}, & B_2 = B_4 = B_6 = B_8 &= \begin{bmatrix} -d_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ h_{min} &= \min_{|x_1| < d_1} \left(\frac{-\text{sen}(x_1)}{x_1} \right), & h_{max} &= \max_{|x_1| < d_1} \left(\frac{-\text{sen}(x_1)}{x_1} \right), \\ k_{min} &= \min_{|x_1| < d_1, |x_2| < d_2} \left(-1 + x_1 + x_1^2 + x_1 x_2 - x_2^2 \right), \\ k_{max} &= \max_{|x_1| < d_1, |x_2| < d_2} \left(-1 + x_1 + x_1^2 + x_1 x_2 - x_2^2 \right). \end{aligned} \quad (41)$$

As funções de pertinência são as seguintes:

$$\begin{aligned}
\alpha_1(z) &= \frac{k - k_{min}}{k_{max} - k_{min}} \times \frac{h - h_{min}}{(h_{max} - h_{min})} \times \frac{x_1 + d_1}{2d_1}, \\
\alpha_2(z) &= \frac{k - k_{min}}{k_{max} - k_{min}} \times \frac{h - h_{min}}{(h_{max} - h_{min})} \times \frac{d_1 - x_1}{2d_1}, \\
\alpha_3(z) &= \frac{k - k_{min}}{k_{max} - k_{min}} \times \frac{h_{max} - h}{(h_{max} - h_{min})} \times \frac{x_1 + d_1}{2d_1}, \\
\alpha_4(z) &= \frac{k - k_{min}}{k_{max} - k_{min}} \times \frac{h_{max} - h}{(h_{max} - h_{min})} \times \frac{d_1 - x_1}{2d_1}, \\
\alpha_5(z) &= \frac{k_{max} - k}{k_{max} - k_{min}} \times \frac{h - h_{min}}{(h_{max} - h_{min})} \times \frac{x_1 + d_1}{2d_1}, \\
\alpha_6(z) &= \frac{k_{max} - k}{k_{max} - k_{min}} \times \frac{h - h_{min}}{(h_{max} - h_{min})} \times \frac{d_1 - x_1}{2d_1}, \\
\alpha_7(z) &= \frac{k_{max} - k}{k_{max} - k_{min}} \times \frac{h_{max} - h}{(h_{max} - h_{min})} \times \frac{x_1 + d_1}{2d_1}, \\
\alpha_8(z) &= \frac{k_{max} - k}{k_{max} - k_{min}} \times \frac{h_{max} - h}{(h_{max} - h_{min})} \times \frac{d_1 - x_1}{2d_1}, \\
k &= -1 + x_1 + x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2, \quad h = \frac{-\text{sen}(x_1)}{x_1}.
\end{aligned} \tag{42}$$

Utilizando o Teorema 3 é possível encontrar os ganhos de realimentação para a lei de controle (31) de modo a assegurar a estabilidade do sistema para uma região de operação. Deve-se observar que a factibilidade das LMIs dependerá da região de operação do sistema, pois ela influencia na obtenção dos modelos locais. Portanto, na Figura 6 está representada a região de factibilidade do projeto do controlador para o sistema (39) de acordo com o Teorema 3 para uma região de operação diferente especificada em termos de d_1 e d_2 .

Figura 6 - Área de factibilidade do projeto de controladores do sistema (39) considerando modelos *fuzzy* TS.



Fonte: Adaptado de Tanaka et al. (2009).

3.3 MODELOS FUZZY COM PARTE CONSEQUENTE POLINOMIAL

Na subseção anterior, os modelos *fuzzy* TS foram utilizados para modelar sistemas não lineares, sendo possível a utilização de LMIs para realizar a análise da estabilidade, e obter o desempenho e projeto de controladores baseados em funções quadráticas de Lyapunov. Nesta subseção serão explorados sistemas não lineares representados através de modelos *fuzzy* com parte consequente polinomial. A análise da estabilidade, do desempenho e o projeto de controladores serão baseados em funções de Lyapunov polinomiais, utilizando a abordagem de SOS (TANAKA et al., 2009).

Considere o sistema não linear representado abaixo:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad (43)$$

sendo $f(x(t), u(t))$ uma função não linear, $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \cdots \ x_n(t)]^T$ o vetor de estado e $u(t) = [u_1(t) \ u_2(t) \ \cdots \ u_m(t)]^T$ o vetor de entrada.

Utilizando o conceito de setor não linear, será utilizado um modelo *fuzzy* polinomial para representar de forma exata o sistema (43). A principal diferença entre o modelo (24) e o modelo *fuzzy* polinomial reside na representação da parte consequente. O modelo *fuzzy* (24) apresenta como parte consequente um modelo linear, enquanto que o modelo *fuzzy* polinomial tem como consequente um modelo não linear.

Regra i : Se $z_1(t) \in M_1^i$ E \cdots E $z_p(t) \in M_p^i$,

$$\text{Então} \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i(x(t))\hat{x}(x(t)) + B_i(x(t))u(t), \\ y(t) = C_i(x(t))\hat{x}(x(t)). \end{cases}, \quad (44)$$

sendo $i = 1, 2, \dots, r$, $M_j^i, j = 1, 2, \dots, p$ é o conjunto *fuzzy* j da regra i . $A_i(x(t))$ e $B_i(x(t))$ matrizes polinomiais em $x(t)$. O termo $\hat{x}(x(t)) \in \mathbb{R}^N$ é um vetor coluna cujos elementos são todos monômios em $x(t)$. Portanto $A_i(x(t))\hat{x}(x(t)) + B_i(x(t))u(t)$ é um vetor polinomial. Então o modelo *fuzzy* polinomial (44) pode conter não linearidades (termos polinomiais) em cada parte consequente.

O processo de defuzzificação do modelo (44) pode ser representado como

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^r \omega^i(z(t)) (A_i(x(t))\hat{x}(x(t)) + B_i(x(t))u(t))}{\sum_{i=1}^r \omega^i(z(t))}, \\ y(t) = \frac{\sum_{i=1}^r \omega^i(z(t)) C_i(x(t))\hat{x}(x(t))}{\sum_{i=1}^r \omega^i(z(t))}, \end{cases} \quad (45)$$

sendo

$$z(t) = [z_1(t) \ z_2(t) \ \dots \ z_p(t)], \quad \omega_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p M_j^i(z_j(t)), \quad \sum_{i=1}^r \omega_i(z(t)) > 0, \quad \omega_i(z(t)) \geq 0, \quad (46)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_r$, $M_j^i(z_j(t))$ é o “peso” do conjunto *fuzzy* M_j^i associado à variável premissa $z_j(t)$. O peso normalizado e/ou função de pertinência $\alpha_i, i \in \mathbb{K}_r$, de cada regra, como sendo

$$\alpha_i(z(t)) = \frac{\omega_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r \omega_i(z(t))}. \quad (47)$$

De (46) e (47) pode-se observar que

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) = 1 \quad \text{e} \quad \alpha_i(z(t)) > 0, \quad i \in \mathbb{K}_r. \quad (48)$$

Portanto, (45)-(48), a equação (45), pode ser escrita da seguinte forma

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) [A_i(x(t))\hat{x}(x(t)) + B_i(x(t))u(t)] \\ \quad = A(\alpha(z(t), x(t)))\hat{x}(x(t)) + B(\alpha(z(t), x(t)))u(t), \\ y(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) C_i(x(t))\hat{x}(x(t)) = C(\alpha(z(t), x(t)))\hat{x}(x(t)). \end{cases} \quad (49)$$

Se $\hat{x}(x(t)) = x(t)$ e $A_i(x(t))$ e $B_i(x(t))$ são matrizes constantes para todo i , então tem-se que $A_i(x(t))\hat{x}(x(t)) + B_i(x(t))u(t)$ é reduzido para $A_i x(t) + B_i u(t)$, equivalente a (25). Portanto a representação (45) é mais geral.

Para sistemas não lineares representados a partir de modelos *fuzzy* polinomiais o número de regras *fuzzy* será no mínimo igual a 2^p , sendo p o número de termos não polinomiais do sistema. Desta forma, o número de regras será igual ou menor que o número de regras dos modelos *fuzzy* TS. Os modelos locais não lineares e as funções de pertinência serão formados de acordo com os valores de máximo e mínimo das funções não polinomiais do sistema, semelhante ao caso dos modelos locais lineares, obtendo também uma representação exata do sistema não linear.

No projeto de controladores *fuzzy* polinomial também será utilizado o conceito de Compensação Paralela Distribuída (CPD) para projetar reguladores para estabilizar os sistemas não lineares descritos por modelos *fuzzy* polinomial. A ideia é projetar um compensador para cada regra do modelo *fuzzy* e para cada regra serão utilizadas técnicas de projeto não lineares, considerando funções de Lyapunov polinomiais. O regulador *fuzzy* projetado irá compartilhar os mesmos conjuntos de regras com o modelo *fuzzy* nas partes premissas possuem a seguinte forma

$$\begin{aligned} \text{Regra } i : & \text{Se } z_1(t) \text{ é } M_1^i \text{ E } \dots \text{ E } z_p(t) \text{ é } M_p^i, \\ & \text{Então } u(t) = -K_i(x(t))\hat{x}(x(t)), \quad i = 1, 2, \dots, r. \end{aligned} \quad (50)$$

O controlador *fuzzy* global pode ser calculado como

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) K_i(x(t)) \hat{x}(x(t)). \quad (51)$$

De (45) e (51) o sistema em malha fechada pode ser representada da seguinte forma

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) \{A_i(x(t)) - B_i(x(t)) K_j(x(t))\} \hat{x}(x(t)). \quad (52)$$

3.3.1 Setor não linear via modelos *fuzzy* polinomiais

O setor não linear via SOS será construído a partir de modelos locais não lineares. Desta forma torna-se possível em muitos casos encontrar um setor global para um sistema não linear, garantindo a exata representação da função não linear por modelos *fuzzy*. Portanto, considere como exemplo o sistema (35). Os modelos locais e as funções de pertinência são dados da seguinte forma:

$$\dot{x} = \text{sen}(x)(2x)^2 + 75x = (4\text{sen}(x)x + 75)x = g(x)x.$$

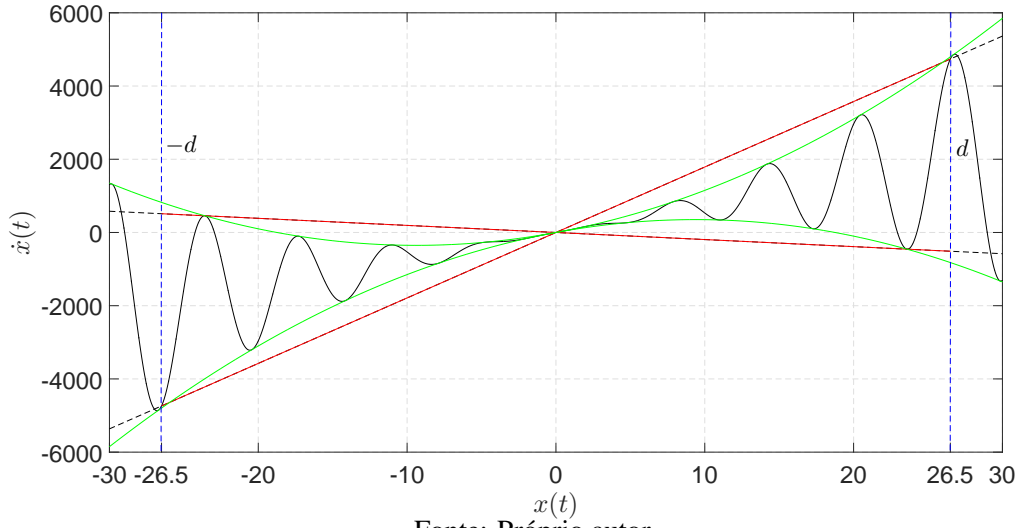
$$a_1 = \max(\text{sen}(x))(2x)^2 + 75x = (2x)^2 + 75x,$$

$$a_2 = \min(\text{sen}(x))(2x)^2 + 75x = -(2x)^2 + 75x, \quad (53)$$

$$\alpha_1 = \frac{\text{sen}(x) - \min(\text{sen}(x))}{\max(\text{sen}(x)) - \min(\text{sen}(x))}, \quad \alpha_2 = 1 - \alpha_1.$$

Na Figura 7 é possível visualizar o setor não linear utilizando modelos locais lineares (linha contínua em vermelho) como na Figura 4, que transformam-se nos setores locais de $-d < x < d$ (linha tracejada em azul), sendo $d = 26,5$, e utilizando modelos locais não lineares (linha contínua em verde). Deve-se observar que o setor não linear construído através de modelos locais não lineares é mais próximo da função não linear $f(x)$ (linha contínua em preto) que o setor não linear construído utilizando modelos locais lineares e possibilita a construção do setor não linear global sem a necessidade de se considerar uma região de operação. Este fato também pode reduzir o conservadorismo no projeto de controladores, pois restringe a classe de funções que seriam representadas pelos modelos locais *fuzzy*.

Figura 7 - Representação do setor não linear via SOS considerando o sistema (35).



Fonte: Próprio autor.

3.3.2 Projeto de controladores via SOS

Considerando modelos *fuzzy* polinomial, a análise da estabilidade e estabilização dos sistemas não lineares podem ser solucionados através da decomposição em SOS. A seguir é apresentado um teorema (TANAKA et al., 2009) para o projeto de controladores para sistemas representados a partir de modelos *fuzzy* polinomiais.

Considere que $A_i^k(x)$ denota a linha k de $A_i(x)$, e que $\kappa = \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$ é o conjunto dos índices das linhas de $B_i(x)$ que correspondem às linhas nulas e define-se $\tilde{x} = (x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_m})$.

Teorema 4. (TANAKA et al., 2009) Para o sistema (49) e (51), suponha que existam uma matriz simétrica polinomial $X(\tilde{x}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ e matrizes polinomiais $M_i(x) \in \mathbb{R}^{m \times N}$, tais que (54) e (55) sejam factíveis, sendo $\varepsilon_1(x)$ e $\varepsilon_{2ij}(x)$ polinômios não negativos tais que $\varepsilon_1(x) > 0$ para $x \neq 0$ e $\varepsilon_{2ij}(x) \geq 0$ para todo x :

$$v^T (X(\tilde{x}) - \varepsilon_1(x)I) v \quad \text{é SOS} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} & -v^T \left(T(x)A_i(x)X(\tilde{x}) - T(x)B_i(x)M_j(x) + X(\tilde{x})A_i^T(x)T^T(x) - M_j^T(x)B_i^T(x)T^T(x) \right. \\ & \quad \left. + T(x)A_j(x)X(\tilde{x}) - T(x)B_j(x)M_i(x) + X(\tilde{x})A_j^T(x)T^T(x) - M_i^T(x)B_j^T(x)T^T(x) \right. \\ & \quad \left. - \sum_{k \in \kappa} \frac{\partial X(\tilde{x})}{\partial x_k} \left(A_i^k(x)\hat{x}(x) \right) - \sum_{k \in \kappa} \frac{\partial X(\tilde{x})}{\partial x_k} \left(A_j^k(x)\hat{x}(x) \right) + \varepsilon_{2ij}(x)I \right) v \quad \text{é SOS}, \quad i \leq j \end{aligned} \quad (55)$$

sendo $v \in \mathbb{R}^N$ um vetor que independe de x . A matriz $T(x) \in \mathbb{R}^{N \times n}$ definida conforme a equação (17).

Além disso, se (55) é factível com $\varepsilon_{2ij}(x) > 0$ para todo $x \neq 0$, então o ponto de equilíbrio em $x = 0$ é assintoticamente estável. Se $X(\tilde{x})$ é uma matriz constante, então é garantida a estabilidade global do sistema, sendo que o ganho de realimentação é dado por $K_i(x) = M_i(x)X^{-1}(\tilde{x})$.

Demonstração. A demonstração será omitida e pode ser obtida em (TANAKA et al., 2009). No Capítulo 5 há a demonstração do Teorema 11, que considera o caso em que o sistema modelado por modelos *fuzzy* polinomiais contém incertezas, sendo a demonstração semelhante a do Teorema 4 mas deve-se observar que foi utilizada uma candidata à função de Lyapunov da forma $V(x) = \hat{x}^T(x)X^{-1}(\tilde{x})\hat{x}(x)$. \square

Como exemplo, considere o sistema (39). Observe que a relação $(\sin(x_1)/x_1)$ possui valores de máximo e mínimo definidos, sendo $\max(\sin(x_1)/x_1) = 1$ e $\min(\sin(x_1)/x_1) = -0,2172$. Deste modo a dinâmica deste sistema não linear pode ser representada exatamente através de modelos *fuzzy* polinomial, sem a necessidade de se considerar uma região de operação. Deste modo

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^2 \alpha_i(z) \{A_i(x)\hat{x} + B_i(x)u\} \quad (56)$$

sendo $x = \hat{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$, $z = x_1$ e

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -1 + x_1 + x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \\ A_2 &= \begin{bmatrix} -1 + x_1 + x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2 & 1 \\ 0.2172 & -1 \end{bmatrix} \\ B_1 &= \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (57)$$

As funções de pertinência são dadas por

$$\alpha_1(z) = \frac{\sin(x_1) + 0,2172x_1}{1,2172x_1}, \quad \alpha_2(z) = \frac{x_1 - \sin(x_1)}{1,2172x_1}. \quad (58)$$

Deve-se notar que a utilização de modelos *fuzzy* polinomiais reduziu o número de modelos locais e o sistema pode ser representado de forma exata sem a necessidade de se considerar uma região de operação. Será empregado o Teorema 4 para projetar os controladores polinomiais. A lei de controle utilizada é dada por:

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t))K_i(x(t))\hat{x}(x(t)).$$

Nas restrições (54) e (55), adotou-se que $\varepsilon_1(x) = \varepsilon_{2ij}(x) = \tau(x_1^2 + x_2^2)$ e τ um valor pequeno, sendo que neste projeto será considerado $\tau = 10^{-9}$.

Portanto, a partir das restrições (54) e (55) foi encontrada a seguinte solução

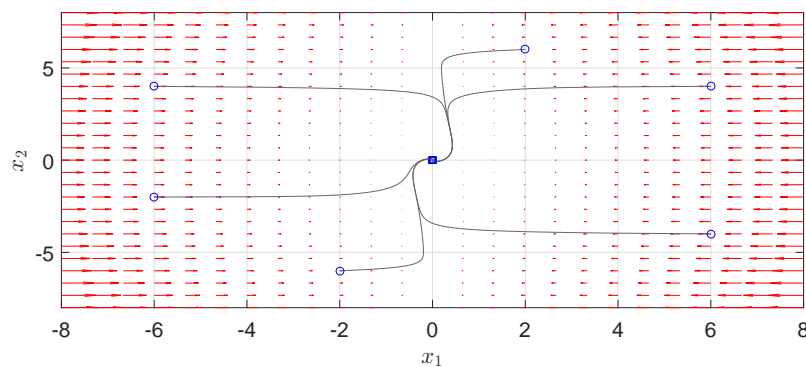
$$X = \begin{bmatrix} 12011 & -0,00862 \\ -0,00862 & 20677 \end{bmatrix},$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 2,48650x_1 + 0,98934x_2 + 0,91279 & 7,9618 \times 10^{-7}x_1 + 3,0177 \times 10^{-8}x_2 + 0,00434 \end{bmatrix},$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 2,49021x_1 + 0,98318x_2 + 0,97115 & 7,8183 \times 10^{-07}x_1 + 2,2813 \times 10^{-08}x_2 + 0,03090 \end{bmatrix}. \quad (59)$$

Na Figura 8 está representado o plano de fase do sistema em malha fechada considerando várias condições iniciais representadas por um círculo azul e a condição final por um quadrado azul.

Figura 8 - Plano de fase do sistema (39) em malha fechada utilizando modelos *fuzzy* polinômiais.



Fonte: Próprio autor.

Pode-se observar na Figura 8 que a estabilidade no ponto de equilíbrio $x = 0$ é global, diferente do resultado obtido utilizando modelos *fuzzy* TS cuja a estabilidade dependerá de uma região de operação que irá influenciar na factibilidade do projeto dos controladores, como pode ser observado na Figura 6.

3.4 COMENTÁRIOS

Neste capítulo, pode-se verificar que os modelos *fuzzy* TS com parte consequente linear são um caso particular dos modelos *fuzzy* com parte consequente polinomial, pois se as matrizes $A_i(x), B_i(x) i \in \mathbb{K}_r, X(\tilde{x})$ e $M_j(x) j \in \mathbb{K}_r$ forem constantes, então a representação pode ser feita através de modelos *fuzzy* TS.

Neste caso, a análise da estabilidade, desempenho e o projeto de controladores podem ser realizados através de LMIs, considerando desta forma, funções de Lyapunov quadráticas. Foi observado o setor não linear formado pelos modelos *fuzzy* TS e *fuzzy* polinomial através de um exemplo abordando um sistema não linear simples, sendo possível destacar as vantagens na utilização dos modelos *fuzzy* polinomial.

Através de um exemplo proposto em Tanaka et al. (2009) foi possível verificar que a obtenção dos controladores depende da região de operação, considerando os modelos *fuzzy* TS. Deve-se observar que o projeto dos controladores considerando a região de operação não garante que o sistema irá permanecer nesta região sem a utilização de restrições adicionais para garantir que o sistema permaneça nesta região, como em (ALVES et al., 2016; OLIVEIRA et al., 2018).

Com a utilização dos modelos *fuzzy* polinomiais, foi possível projetar controladores que garantem a estabilidade global no ponto de equilíbrio, definido como a origem do espaço de estados, do sistema não linear em malha fechada. Deste modo, os modelos *fuzzy* polinomiais se tornam atrativos em relação ao modelos *fuzzy* lineares para a estabilização de sistemas não lineares.

Nos próximos capítulos serão tratados os sistemas não lineares com incertezas, propondo um conjunto de incertezas politópicas e leis de chaveamento para tornar o sistema estável.

4 CONTROLE ROBUSTO CHAVEADO DE SISTEMAS NÃO LINEARES VIA SOS

Neste capítulo será proposto o projeto de controladores chaveados considerando incertezas politópicas para uma classe de sistemas não lineares cuja dinâmica pode ser representada apenas por funções polinomiais. Será necessário conhecer os valores extremos das incertezas, ou seja, os valores de máximo e mínimo.

Por conveniência, serão estabelecidas algumas notações que serão utilizadas neste capítulo:

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_r &= \{1, 2, \dots, r\}, \quad r \in \mathbb{N}; \quad x(t) = x; \quad V(x(t)) = V; \quad \|x\|_2 = \sqrt{x^T x}; \\ (A(x), B(x), C(x), K(x))(\alpha) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i (A_i(x), B_i(x), C_i(x), K_i(x)), \\ \alpha_i &\geq 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^r \alpha_i = 1, \quad \alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r]^T, \end{aligned} \tag{60}$$

sendo $r = 2^s$ e s é o número de parâmetros incertos distintos.

4.1 PROJETO DE CONTROLADOR ROBUSTO VIA SOS

Considere o sistema não linear, cuja a dinâmica é dada apenas por funções polinomiais dependentes do estado do sistema, com incertezas politópicas,

$$\dot{x} = A(\alpha, x)\hat{x}(x) + B(\alpha, x)u, \tag{61}$$

sendo $x \in \mathbb{R}^N$ o vetor de estado, $u \in \mathbb{R}^n$ a entrada de controle, $A(\alpha, x)$ e $B(\alpha, x)$ como em (60) com $i \in \mathbb{K}_r$.

Admitindo que todas as variáveis estejam disponíveis para realimentação, a lei de controle utilizada será dada por

$$u = -K(x)\hat{x}(x), \quad K(x) \in \mathbb{R}^{n \times N}. \tag{62}$$

Substituindo (62) em (61), obtém-se o sistema em malha fechada

$$\dot{x} = A(\alpha, x)\hat{x}(x) - B(\alpha, x)K(x)\hat{x}(x) = \sum_{i=1}^r \alpha_i (A_i(x) - B_i(x)K(x))\hat{x}(x). \tag{63}$$

O teorema a seguir é baseado nos resultados apresentados em Xu, Xie e Wang (2009), que possibilita o projeto de um controlador robusto $u = -K(x)\hat{x}(x)$ para sistemas polinomiais baseado em SOS, com a especificação de um limitante inferior para a taxa de decaimento dado por $\beta \geq 0$.

Teorema 5. *Para o sistema não linear (63), suponha que existam uma matriz simétrica polinomial $X(\tilde{x}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$, uma matriz polinomial $M(x) \in \mathbb{R}^{m \times N}$ e uma constante $\beta \geq 0$, tais que (64) e (65) sejam factíveis, sendo $\varepsilon_1(x) > 0$ e $\varepsilon_{2i}(x) \geq 0$ para todo $x \neq 0$, polinômios não negativos, para todo $i \in \mathbb{K}_r$,*

$$\mathbf{v}^T (X(\tilde{x}) - \varepsilon_1(x)) \mathbf{v} \quad \text{é SOS.} \quad (64)$$

$$\begin{aligned} & -\mathbf{v}^T \left(X(\tilde{x}) A_i^T(x) T^T(x) + T(x) A_i(x) X(\tilde{x}) \right. \\ & \quad \left. - M^T(x) B_i^T(x) T^T(x) - T(x) B_i(x) M(x) \right. \\ & \quad \left. - \sum_{k \in \kappa} \frac{\partial X(\tilde{x})}{\partial x_j} (A_i^k(x) \hat{x}(x)) + 2\beta X(\tilde{x}) + \varepsilon_{2i}(x) I \right) \mathbf{v} \quad \text{é SOS.} \end{aligned} \quad (65)$$

sendo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$ um vetor que independe de x . A matriz $T(x) \in \mathbb{R}^{N \times n}$ definida conforme a equação (17).

Além disso, se (65) é factível com $\varepsilon_{2i}(x) > 0$ para todo $x \neq 0$, então o ponto de equilíbrio em $x = 0$ é assintoticamente estável, com taxa de decaimento maior ou igual a β . Se $X(\tilde{x})$ é uma matriz constante, então é garantida a estabilidade global do sistema, sendo o ganho de realimentação $K(x) = M(x)X^{-1}(\tilde{x})$.

Demonstração. Considere uma candidata a função de Lyapunov $V(x) = \hat{x}^T(x)X^{-1}(\tilde{x})\hat{x}(x)$, sendo $X(\tilde{x}) = X^T(\tilde{x}) > 0$, o que é obtido através da restrição (64). Portanto $V(x)$ é uma função definida positiva. A derivada no tempo de $V(x)$ ao longo da trajetória em malha fechada (63), levando em consideração a definição de $T(x)$ em (17), é dada a seguir

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \hat{x}^T(x)X^{-1}(\tilde{x})\dot{\hat{x}} + \dot{\hat{x}}^T(x)X^{-1}(\tilde{x})\hat{x}(x) + \hat{x}^T(x)\dot{X}^{-1}(\tilde{x})\hat{x}(x) \\ &= \hat{x}^T(x)X^{-1}(\tilde{x})T(x)\dot{x}(x) + \dot{x}^T(x)T^T(x)X^{-1}(\tilde{x})\hat{x}(x) + \hat{x}^T(x) \left(\sum_{k \in \kappa} \frac{\partial X^{-1}(\tilde{x})}{\partial x_k} \dot{x}_k \right) \hat{x}(x). \end{aligned} \quad (66)$$

Como $B_i^k(x) = 0$ para $k \in \kappa$, tem-se que

$$\dot{x}_k = \sum_{i=1}^r \alpha_i(x) \left(A_i^k(x) \hat{x}(x) \right), \quad (67)$$

para $k \in \kappa$. Por outro lado, sendo x_i em que $i \notin \kappa$ e sabendo que a matriz simétrica polinomial

$X(\tilde{x})$ não contém tais variáveis de estado, tem-se

$$\frac{\partial X^{-1}}{\partial x_i}(\tilde{x}) = 0 \quad (68)$$

para $i \notin \kappa$. Considerando $G_i(x) = (A_i(x) - B_i(x)K(x))$ e substituindo em (66), obtêm-se com (63)

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^r \alpha_i \hat{x}^T(x) \left(G_i^T(x) T^T(x) X^{-1}(\tilde{x}) + X^{-1}(\tilde{x}) T(x) G_i(x) + \sum_{k \in \kappa} \frac{\partial X^{-1}(\tilde{x})}{\partial x_k} (A_i^k(x) \hat{x}(x)) \right) \hat{x}(x). \quad (69)$$

Pré e pós multiplicando o termo dentro dos parênteses em (69) por $X(\tilde{x})$, considerando que $K(x) = M(x)X^{-1}(\tilde{x})$ e utilizando os resultados do Lema 1, tem-se a expressão

$$T(x)A_i(x)X(\tilde{x}) - T(x)B_i(x)M(x) + X(\tilde{x})A_i^T(x)T(x) - M^T(x)B_i^T(x)T(x) - \sum_{k \in \kappa} \frac{\partial X(\tilde{x})}{\partial x_k} (A_i^k(x) \hat{x}(x)) \quad (70)$$

Deste modo, para que $\dot{V}(x)$ se torne semidefinida negativa a seguinte condição deve ser satisfeita

$$-\left(T(x)A_i(x)X(\tilde{x}) - T(x)B_i(x)M(x) + X(\tilde{x})A_i^T(x)T(x) - M^T(x)B_i^T(x)T(x) - \sum_{k \in \kappa} \frac{\partial X(\tilde{x})}{\partial x_k} (A_i^k(x) \hat{x}(x)) \right) \geq 0, \quad \forall i \in \mathbb{K}_r. \quad (71)$$

Lembrando que a especificação de uma taxa de decaimento maior ou igual a $\beta \geq 0$ é feita através da condição $\dot{V}(x) \leq -2\beta V(x)$ e utilizando os resultados apresentados na Proposição 2, note que este índice de desempenho é garantido através da restrição (65). Além disso, se $\varepsilon_{2i}(x) > 0$ para $x \neq 0$, então $\dot{V}(x) < 0$ para $x \neq 0$. Desta forma, o ponto de equilíbrio $x = 0$ é assintoticamente estável. Finalmente, se $X(\tilde{x})$ é uma matriz constante, então $V(x)$ é radialmente ilimitada e a estabilidade é global.

□

Definindo outra lei de controle com realimentação do vetor de estado como segue:

$$u = u_\alpha = - \sum_{i=1}^r \alpha_i K_i(x) \hat{x}(x), \quad K_i(x) \in \mathbb{R}^{m \times N}, \quad i \in \mathbb{K}_r. \quad (72)$$

Esta lei de controle é fictícia, pois α_i , $i \in \mathbb{K}_r$, são parâmetros incertos que podem ser in-

disponíveis para medição. Considerando (60) e substituindo (72) em (61), obtém-se o sistema realimentado conforme é apresentado a seguir

$$\dot{x} = A(\alpha, x)\hat{x}(x) - B(\alpha, x)K(\alpha, x)\hat{x}(x) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i \alpha_j (A_i(x) - B_i(x)K_j(x))\hat{x}(x). \quad (73)$$

Agora a ideia é estender o Teorema 5 para o caso em que a lei de controle é como em (72). Assim, segue o seguinte teorema, que foi inspirado em (TANAKA et al., 2009), considerando uma taxa de decaimento maior ou igual a $\beta \geq 0$.

Teorema 6. *Para o sistema não linear (63), suponha que existam uma matriz simétrica polinomial $X(\tilde{x}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$, matrizes polinomiais $M(x) \in \mathbb{R}^{m \times N}$ e uma constante $\beta \geq 0$, tais que (74) e (75) são satisfeitas, sendo $\varepsilon_1(x) > 0$ para todo $x \neq 0$ e $\varepsilon_{2ij} \geq 0$, são polinômios não negativos*

$$v^T (X(\tilde{x}) - \varepsilon_1(x)) v \quad \text{é SOS.} \quad (74)$$

$$\begin{aligned} & -v^T \left(T(x)A_i(x)X(\tilde{x}) - T(x)B_i(x)M_j(x) + X(\tilde{x})A_i^T(x)T^T(x) - M_j^T(x)B_i^T(x)T^T(x) \right. \\ & \quad + T(x)A_j(x)X(\tilde{x}) - T(x)B_j(x)M_i(x) + X(\tilde{x})A_j^T(x)T^T(x) - M_i^T(x)B_j^T(x)T^T(x) \\ & \quad \left. - \sum_{k \in \kappa} \frac{\partial X(\tilde{x})}{\partial x_k} (A_i^k(x)\hat{x}(x)) - \sum_{k \in \kappa} \frac{\partial X(\tilde{x})}{\partial x_k} (A_j^k(x)\hat{x}(x)) + 4\beta X(\tilde{x}) + \varepsilon_{2ij}(x)I \right) v \\ & \quad \text{é SOS,} \quad i \leq j \end{aligned} \quad (75)$$

sendo $v \in \mathbb{R}^N$ um vetor que independe de x . A matriz $T(x) \in \mathbb{R}^{N \times n}$ definida conforme a equação (17).

Além disso, se (74) é factível com $\varepsilon_{2ij}(x) > 0$ para todo $x \neq 0$, então o ponto de equilíbrio $x = 0$ é assintoticamente estável e a taxa de decaimento é maior ou igual a β . Se $X(\tilde{x})$ é uma matriz constante, então é garantida a estabilidade global do sistema. Os ganhos do controlador são dados por $K_i(x) = M_i(x)X^{-1}(\tilde{x})$.

Demonstração. Considere uma candidata a função de Lyapunov $V(x) = \hat{x}^T(x)X^{-1}(\tilde{x})\hat{x}(x)$ sendo $X^{-1}(\tilde{x}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ uma matriz simétrica polinomial. A condição (74) implica que ambos $X(\tilde{x})$ e $X^{-1}(\tilde{x})$ são definidas positivas para todo x e $V(x)$ é uma função definida positiva.

Sendo a matriz $T(x) \in \mathbb{R}^{N \times n}$ definida conforme a equação (17), a derivada no tempo de $V(x)$ ao longo da trajetória de malha fechada (73) é dada por

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \hat{x}^T(x)X^{-1}(\tilde{x})\dot{\hat{x}} + \dot{\hat{x}}^T(x)X^{-1}(\tilde{x})\hat{x}(x) + \hat{x}^T(x)\dot{X}^{-1}(\tilde{x})\hat{x}(x) \\ &= \hat{x}^T(x)X^{-1}(\tilde{x})T(x)\dot{x}(x) + \dot{x}^T(x)T^T(x)X^{-1}(\tilde{x})\hat{x}(x) + \hat{x}^T(x) \left(\sum_{k \in \kappa} \frac{\partial X^{-1}(\tilde{x})}{\partial x_k} \dot{x}_k \right) \hat{x}(x).\end{aligned}\quad (76)$$

Como $B_i^k(x) = 0$ para $k \in \kappa$, tem-se que

$$\dot{x}_k = \sum_{i=1}^r \alpha_i(x) \left(A_i^k(x) \hat{x}(x) \right), \quad (77)$$

para $k \in \kappa$. Por outro lado, sendo x_i em que $i \notin \kappa$ e sabendo que a matriz simétrica polinomial $X(\tilde{x})$ não conterà tais variáveis de estado, tem-se que

$$\frac{\partial X^{-1}(\tilde{x})}{\partial x_i}(\tilde{x}) = 0 \quad (78)$$

para $i \notin \kappa$. De (73), (77) e (78) tem-se

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(x) \alpha_j(x) \hat{x}^T(x) \times \left\{ \Omega_{ij}(x) + \sum_{k \in \kappa} \frac{\partial X^{-1}(\tilde{x})}{\partial x_k} A_i^k(x) \hat{x}(x) \right\} \hat{x}(x) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(x) \alpha_j(x) \hat{x}^T(x) \left\{ \Omega_{ij}(x) + \Omega_{ji}(x) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k \in \kappa} \frac{\partial X^{-1}(\tilde{x})}{\partial x_k} A_i^k(x) \hat{x}(x) + \sum_{k \in \kappa} \frac{\partial X^{-1}(\tilde{x})}{\partial x_k} A_j^k(x) \hat{x}(x) \right\} \hat{x}(x)\end{aligned}\quad (79)$$

sendo que

$$\Omega_{ji}(x) = X^{-1}(\tilde{x})T(x) \{A_i(x) - B_i(x)K_j(x)\} + \{A_i(x) - B_i(x)K_j(x)\}^T T^T(x)X^{-1}(\tilde{x}).$$

A condição (75) implica que

$$\begin{aligned}& - \left(T(x)A_i(x)X(\tilde{x}) - T(x)B_i(x)M_j(x) \right. \\ & \quad + X(\tilde{x})A_i^T(x)T^T(x) - M_j^T(x)B_i^T(x)T^T(x) \\ & \quad + T(x)A_j(x)X(\tilde{x}) - T(x)B_j(x)M_i(x) \\ & \quad + X(\tilde{x})A_j^T(x)T^T(x) - M_i^T(x)B_j^T(x)T^T(x) \\ & \quad \left. - \sum_{k \in \kappa} \frac{\partial X(\tilde{x})}{\partial x_k} \left(A_i^k(x) \hat{x}(x) \right) - \sum_{k \in \kappa} \frac{\partial X(\tilde{x})}{\partial x_k} \left(A_j^k(x) \hat{x}(x) \right) \right), \quad i \leq j\end{aligned}$$

é semidefinida positiva para todos os valores de x . Multiplicando a expressão anterior por $X^{-1}(\tilde{x})$ pela direita e pela esquerda, tem-se

$$-\left\{ \begin{aligned} &\Omega_{ij}(x) + \Omega_{ji}(x) \\ &- \sum_{k \in \kappa} X^{-1}(\tilde{x}) \frac{\partial X(\tilde{x})}{\partial x_k} X^{-1}(\tilde{x}) \left(A_i^k(x) \hat{x}(x) \right) \\ &- \sum_{k \in \kappa} X^{-1}(\tilde{x}) \frac{\partial X(\tilde{x})}{\partial x_k} X^{-1}(\tilde{x}) \left(A_j^k(x) \hat{x}(x) \right) \end{aligned} \right\} \geq 0, \quad i \leq j \quad (80)$$

para $x \neq 0$. Utilizando o Lema 1 e definindo $M_i(x) = K_i(x)X(\tilde{x})$, a inequação (80) pode ser escrita da seguinte forma

$$-\left\{ \Omega_{ij}(x) + \Omega_{ji}(x) + \sum_{k \in \kappa} \frac{\partial X^{-1}(\tilde{x})}{\partial x_k} \left(A_i^k(x) \hat{x}(x) \right) + \sum_{k \in \kappa} \frac{\partial X^{-1}(\tilde{x})}{\partial x_k} \left(A_j^k(x) \hat{x}(x) \right) \right\} \geq 0, \quad i \leq j \quad (81)$$

para $x \neq 0$. Portanto, se (81) é válida, então tem-se $\dot{V}(x) \leq 0$ de (79). Além disso, se $\varepsilon_{2ij}(x) > 0$ para $x \neq 0$, então $\dot{V}(x) < 0$ para $x \neq 0$. Desta forma, o ponto de equilíbrio $x = 0$ é assintoticamente estável. Finalmente, se $X(\tilde{x})$ é uma matriz constante, então $V(x)$ é radialmente ilimitada e a estabilidade é global. Adicionalmente, de (75), é obtida a garantia de uma taxa de decaimento maior ou igual a $\beta \geq 0$ tal que $\dot{V}(x) \leq -2\beta V(x)$. \square

Considere o caso em que $B(\alpha, x) = B(x)$ é uma matriz conhecida, isto é, $B(x)$ será dependente apenas do vetor de estado do sistema e não será dependente das incertezas. Assim como em (61), o sistema pode ser representado da seguinte forma:

$$\dot{x} = A(\alpha, x)\hat{x}(x) + B(x)u. \quad (82)$$

Desta forma é proposto o seguinte corolário.

Corolário 1. Para o sistema (82) com a lei de realimentação (72), suponha que existam uma matriz simétrica polinomial $X(\tilde{x}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$, matrizes polinomiais $M_i(x) \in \mathbb{R}^{m \times N}$ e uma constante $\beta \geq 0$, tais que (83) e (84) são satisfeitas, sendo $\varepsilon_1(x) > 0$ para todo $x \neq 0$ e $\varepsilon_{2ij} \geq 0$, são polinômios não negativos

$$v^T (X(\tilde{x}) - \varepsilon_1(x)) v \quad \text{é SOS.} \quad (83)$$

$$\begin{aligned}
& -v^T \left(T(x)A_i(x)X(\tilde{x}) + X(\tilde{x})A_i^T(x)T^T(x) \right. \\
& \quad \left. - T(x)B(x)M_i(x) - M_i^T(x)B^T(x)T^T(x) \right. \\
& \quad \left. + \sum_{k \in \kappa} \frac{\partial X(\tilde{x})}{\partial x_k} (A_i^k(x)\hat{x}(x)) + 2\beta X(\tilde{x}) + \varepsilon_{2i}(x)I \right) v \quad \text{é SOS,}
\end{aligned} \tag{84}$$

sendo $v \in \mathbb{R}^N$ um vetor que independe de x .

Além disso, se (84) é factível com $\varepsilon_{2i_j}(x) > 0$ para todo $x \neq 0$, então o ponto de equilíbrio $x = 0$ é assintoticamente estável e a taxa de decaimento é maior ou igual a β . Se $X(\tilde{x})$ é uma matriz constante, então é garantida a estabilidade global do sistema. Os ganhos do controlador são dados por $K_i(x) = M_i(x)X^{-1}(\tilde{x})$.

Demonstração. Segue diretamente do Teorema 6, considerando $B_i(x) = B(x)$, $i \in \mathbb{K}_r$. \square

4.2 PROJETO DE CONTROLADORES ROBUSTOS CHAVEADOS VIA SOS

Nesta seção será proposta uma nova metodologia de projeto de controladores chaveados para uma classe de sistemas não lineares com incertezas politópicas utilizando a decomposição em soma de quadrados. Tal método utilizará uma única função de Lyapunov polinomial e a decomposição em soma de quadrados para projetar um conjunto de ganhos para controlador chaveado baseado em SOS.

O controlador proposto é composto por um único ganho, que pertence a um conjunto de ganhos previamente projetados, e é selecionado por uma lei de chaveamento que retorna o menor valor da derivada temporal da função de Lyapunov. Esta metodologia é uma extensão dos trabalhos propostos em (SOUZA et al., 2013; SOUZA, 2013; SOUZA et al., 2014a).

Embora os ganhos sejam obtidos supondo uma combinação convexa adequada dos mesmos, utilizando a lei de chaveamento proposta não há a necessidade de ter acesso a esta combinação, ou seja, os parâmetros utilizados no projeto para obter esta combinação, que podem ser incertos, não precisam ser medidos a cada instante de tempo favorecendo aplicações práticas.

4.2.1 Caso 1: matriz $B(\alpha, x) = B(x)$ conhecida

Nesta subseção o projeto de um controlador chaveado para o sistema não linear incerto (61) é proposto, admitindo que $B(\alpha, x) = B(x)$ é uma matriz conhecida, assim como em (82).

Antes de propor a lei de controle será estabelecida a Definição 3 inspirada nos resultados obtidos com os trabalhos Souza et al. (2013, 2014a) que será utilizada ao longo do trabalho.

Definição 3. Considere o conjunto de índices $\Omega_H(t)$ definido abaixo:

$$\Omega_H = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_N} \hat{x}^T(x) H_i(x) \hat{x}(x) = \left\{ j \in \mathbb{K}_N : \hat{x}^T(x) H_j(x) \hat{x}(x) = \min_{i \in \mathbb{K}_N} \hat{x}^T(x) H_i(x) \hat{x}(x) \right\},$$

sendo que $H_i \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $i \in \mathbb{K}_N$ e $x \in \mathbb{R}^n$. O menor índice $j \in \Omega_H$ será dado por

$$\arg \min_{i \in \mathbb{K}_N}^* \{ \hat{x}^T(x) H_i(x) \hat{x}(x) \} = \min_{j \in \Omega_H} j.$$

Da Definição 3, nota-se que o conjunto Ω_H pode conter mais do que um elemento. Assim, ao definir $\arg \min^*$ estabelece-se uma forma de selecionar o menor deles.

Agora suponha que as condições presentes no Corolário 1 sejam factíveis para todo $i \in \mathbb{K}_r$ e sejam $K_i(x) = M_i(x)X^{-1}(\tilde{x})$, $i \in \mathbb{K}_r$, os ganhos do controlador dado (72). Então, a partir da Definição 3 e considerando $H_i(x) = -X^{-1}(\tilde{x})T(x)B(x)K_i(x)$, define-se o controlador chaveado

$$u = u_\sigma = -K_\sigma(x)\hat{x}(x), \quad \sigma = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_N}^* \{ -\hat{x}^T(x)X^{-1}(\tilde{x})T(x)B(x)K_i(x)\hat{x}(x) \}, \quad \sigma \in \mathbb{K}_r. \quad (85)$$

Portanto, considerando (60), o sistema controlado (82) e (85) é dado por

$$\dot{x} = A(\alpha, x)\hat{x}(x) + Bu_\sigma = \sum_{i=1}^r \alpha_i \left(A_i(x) - B(x)K_\sigma \right) \hat{x}(x). \quad (86)$$

Teorema 7. *Suponha que as condições do Corolário 1 sejam satisfeitas com $\varepsilon_{2ij}(x) > 0$ para todo $x \neq 0$ e $X(\tilde{x})$ é uma matriz constante, relativas ao sistema (82) com a lei de controle (72) e obtenha $K_i(x) = M_i(x)X^{-1}(\tilde{x})$, $i \in \mathbb{K}_r$. Então a lei de controle chaveada dada em (85) torna o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema (82), globalmente assintoticamente estável.*

Demonstração. Considere uma candidata a função de Lyapunov $V(x) = \hat{x}^T(x)X^{-1}(\tilde{x})\hat{x}(x)$. Defina $\dot{V}_{u\alpha}(x)$ e $\dot{V}_{u\sigma}(x)$ a derivada temporal de $V(x)$ para o sistema (82), com a lei de controle (72) e (85), respectivamente.

De (17) e (86), tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{u\sigma}(x) &= 2\hat{x}^T(x)X^{-1}(\tilde{x})\dot{\hat{x}} + \hat{x}^T(x)\dot{X}^{-1}(\tilde{x})\hat{x}(x) \\ &= 2\hat{x}^T(x)X^{-1}(\tilde{x})T(x)[A(\alpha, x) - B(x)K_\sigma(x)]\hat{x}(x) + \hat{x}^T(x) \left(\sum_{k \in \kappa} \frac{\partial X^{-1}(\tilde{x})}{\partial x_k} \dot{x}_k \right) \hat{x}(x) \end{aligned} \quad (87)$$

Como $B_i^k(x) = 0$ para $k \in \kappa$, tem-se que:

$$\dot{x}_k = \sum_{i=1}^r \alpha_i(x) \left(A_i^k(x) \hat{x}(x) \right), \quad (88)$$

para $k \in \kappa$. Por outro lado, sendo x_i em que $i \notin \kappa$ e sabendo que a matriz simétrica polinomial $X(\tilde{x})$ não contém tais variáveis de estado, logo tem-se:

$$\frac{\partial X^{-1}(\tilde{x})}{\partial x_i} = 0. \quad (89)$$

Portanto, de (87) e (88), tem-se que

$$\begin{aligned} \dot{V}_{u\sigma}(x) &= 2\hat{x}^T(x)X^{-1}(\tilde{x})T(x) [A(\alpha, x) - B(x)K_\sigma(x)]\hat{x}(x) \\ &\quad + \hat{x}^T(x) \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial X^{-1}(\tilde{x})}{\partial x_k} \left(A^k(\alpha, x)\hat{x}(x) \right) \right) \hat{x}(x) \\ &= 2\hat{x}^T(x)X^{-1}(\tilde{x})T(x)A(\alpha, x)\hat{x}(x) - 2\hat{x}^T(x)X^{-1}(\tilde{x})T(x)B(x)K_\sigma(x)\hat{x}(x) \\ &\quad + \hat{x}^T(x) \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial X^{-1}(\tilde{x})}{\partial x_k} \left(A^k(\alpha, x)\hat{x}(x) \right) \right) \hat{x}(x). \end{aligned} \quad (90)$$

Assim, note que de (85), lembrando-se que o mínimo de um conjunto de números reais é menor ou igual do que qualquer combinação convexa dos elementos deste conjunto,

$$\min_{i \in \mathbb{K}_r} \left\{ -\hat{x}^T(x)X^{-1}(\tilde{x})T(x)B(x)K_i(x)\hat{x}(x) \right\} \leq -\hat{x}^T(x)X^{-1}(\tilde{x})T(x)B(x) \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i K_i(x) \right) \hat{x}(x).$$

Portanto, de (90) e das leis dadas em (72) e (85) observa-se que

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{u\sigma}(x) &= 2\hat{x}^T(x)X^{-1}(\tilde{x})T(x)A(\alpha, x)\hat{x}(x) + 2\min_{i \in \mathbb{K}_r} \left\{ -\hat{x}^T(x)X^{-1}(\tilde{x})T(x)B(x)K_i(x)\hat{x}(x) \right\} \\
&\quad + \hat{x}^T(x) \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial X^{-1}(\tilde{x})}{\partial x_k} \left(A^k(\alpha, x)\hat{x}(x) \right) \right) \hat{x}(x) \\
&\leq 2\hat{x}^T(x)X^{-1}(\tilde{x})T(x)A(\alpha, x)\hat{x}(x) + 2\hat{x}^T(x)X^{-1}(\tilde{x})T(x)B(x) \left(-\sum_{i=1}^r \alpha_i K_i(x) \right) \hat{x}(x) \\
&\quad + \hat{x}^T(x) \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial X^{-1}(\tilde{x})}{\partial x_k} \left(A^k(\alpha, x)\hat{x}(x) \right) \right) \hat{x}(x) \\
&= 2\hat{x}^T(x)X^{-1}(\tilde{x})T(x) [A(\alpha, x) - B(x)K(\alpha, x)] \hat{x}(x) \\
&\quad + \hat{x}^T(x) \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial X^{-1}(\tilde{x})}{\partial x_k} \left(A^k(\alpha, x)\hat{x}(x) \right) \right) \hat{x}(x) \\
&= 2\hat{x}^T(x)X^{-1}(\tilde{x})T(x) [A(\alpha, x) + B(x)u_\alpha] \hat{x}(x) \\
&\quad + \hat{x}^T(x) \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial X^{-1}(\tilde{x})}{\partial x_k} \left(A^k(\alpha, x)\hat{x}(x) \right) \right) \hat{x}(x) = \dot{V}_{u\alpha}(x).
\end{aligned}$$

Então, $\dot{V}_{u\sigma}(x) \leq \dot{V}_{u\alpha}(x)$. Como as condições do Corolário 1 asseguram que $\dot{V}_{u\alpha}(x) < 0$ se $x \neq 0$, a demonstração está concluída. □

Observação 4. O Teorema 7 mostra que, se as condições do Corolário 1 forem satisfeitas com $\varepsilon_{2ij}(x) > 0 \forall x \neq 0$, então $\dot{V}_{u\alpha}(x) < 0$ para todo $x \neq 0$ e portanto $\dot{V}_{u\sigma}(x) < 0$ para todo $x \neq 0$, assegurando que o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema controlado (82) com a lei de controle (85) seja globalmente assintoticamente estável. Assim, o Corolário 1 pode ser utilizado para projetar os ganhos $K_1(x), K_2(x), \dots, K_r(x)$ e a matriz $X^{-1}(\tilde{x})$ da lei de controle chaveado (85). Adicionalmente, observa-se que a lei de controle chaveada (85) não utiliza os parâmetros α_i , $i \in \mathbb{K}_r$, que podem ser incertos.

4.2.2 Caso 2: matriz $B(\alpha, x)$ incerta

Neste caso, será considerado o sistema não linear com incertezas politópicas como dado em (61), como α_i , $i \in \mathbb{K}_r$, definido em (60), ou seja,

$$\dot{\check{x}} = \check{A}(\alpha, \check{x})\hat{\check{x}}(\check{x}) + \check{B}(\alpha, \check{x})u, \quad \check{A}(\alpha, \check{x}) = \sum_{i=1}^r \alpha_i \check{A}_i(\check{x}), \quad \check{B}(\alpha, \check{x}) = \sum_{i=1}^r \alpha_i \check{B}_i(\check{x}), \quad (91)$$

sendo \check{x} o vetor de estado da planta e $\hat{\check{x}}(\check{x})$ um vetor de monômios em função do \check{x} .

Seja $v \in \mathbb{R}^m$ a derivada temporal do vetor de entrada de controle $u \in \mathbb{R}^m$. Defina x_{n+l} e v_l , tais que $\dot{x}_{n+l} = \dot{u}_l = v_l$, ou seja, $x_{n+l} = u_l = \int_0^t v_l dt$, $l = 1, 2, \dots, m$. Assim, obtém-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{\check{x}} = \check{A}(\alpha, \check{x})\check{x}(\check{x}) + \check{B}(\alpha, \check{x})u, \\ \dot{x}_{n+1} = v_1, \\ \vdots \\ \dot{x}_{n+m} = v_m, \end{cases} \quad (92)$$

ou equivalente (BARMISH, 1983),

$$\dot{x} = A(\alpha, x)\hat{x}(x) + Bv, \quad (93)$$

sendo

$$x = \begin{bmatrix} \check{x}^T & x_{n+1} & \dots & x_{n+m} \end{bmatrix}^T, \quad A(\alpha, \check{x}) = \begin{bmatrix} \check{A}(\alpha, \check{x}) & \check{B}(\alpha, \check{x}) \\ 0_{m \times N} & 0_{m \times m} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ I_{m \times m} \end{bmatrix}.$$

Das considerações acima, nota-se que o sistema (93) é equivalente ao sistema (82) e portanto o problema cai no Caso 1, sendo $\hat{x}(x) \in \mathbb{R}^{(N+m) \times 1}$. Assim, pode-se adotar o procedimento estabelecido no Caso 1 para projetar a lei de controle chaveada $v = -K_\sigma(x)\hat{x}(x)$, $K_\sigma \in \mathbb{R}^{m \times (N+m)}$.

A seguir será proposta uma nova lei de chaveamento, considerando também o caso em que a matriz $B(\alpha, x)$ contém parâmetros incertos, mas sem a necessidade de utilizar integradores adicionais como em (91)-(93). Esta nova lei de chaveamento utiliza matrizes auxiliares $Q_j \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $j \in \mathbb{K}_r$ e através delas, define-se um índice de chaveamento σ . Esta lei de chaveamento também terá por objetivo reduzir a derivada da função de Lyapunov.

Considere que no projeto do controlador as restrições sejam factíveis para todo $i \in \mathbb{K}_r$ e sejam $K_j(x) = M_j(x)X^{-1}(\tilde{x})$, $j \in \mathbb{K}_r$, os ganhos do controlador (72). Então, a partir da Definição 3, tem-se $H_i = Q_j(x)$, define-se o controlador chaveado,

$$u = u_\sigma = -K_\sigma(x)\hat{x}(x), \quad \sigma = \arg \min_{j \in \mathbb{K}_r} \{ \hat{x}^T(x) Q_j(x) \hat{x}(x) \}, \quad \sigma \in \mathbb{K}_r. \quad (94)$$

ou seja, $\sigma \in \mathbb{K}_r$ possui o menor valor do índice j que resulta no menor valor de $\hat{x}^T(x) Q_j(x) \hat{x}(x)$.

Teorema 8. Para o sistema (61) e (94), suponha que existam matrizes simétricas polinomiais $X(\tilde{x}), Q_i(x(t)), Z_i(x(t)) \in \mathbb{R}^{N \times N}$, matrizes polinomiais $M_i(x) \in \mathbb{R}^{m \times N}$ e uma constante $\beta \geq 0$, tais que (95), (96) e (97) são satisfeitas, sendo $\varepsilon_1(x) > 0$ para todo $x \neq 0$, $\varepsilon_{2i}(x), \varepsilon_{3ij}(x) \geq 0$, são polinômios não negativos:

$$\mathbf{v}_1^T (X(\tilde{x}) - \varepsilon_1(x)I) \mathbf{v}_1 \quad \text{é SOS,} \quad (95)$$

$$\begin{aligned} & -\mathbf{v}^T \left(T(x)A_i(x)X(\tilde{x}) + X(\tilde{x})A_i^T(x) \right. \\ & \left. - \sum_{k \in \kappa} \frac{\partial X(\tilde{x})}{\partial x_k} A_i^k(x) \hat{x}(x) + \hat{Q}_i(x) + \hat{Z}_i(x) + 2\beta X(\tilde{x}) + \varepsilon_{2i}(x) \right) \mathbf{v} \quad \text{é SOS,} \end{aligned} \quad (96)$$

$$-\mathbf{v}^T \left(-T(x)B_i(x)M_j(x) - M_j^T(x)B_i^T(x)T(x) - \hat{Z}_i(x) - \hat{Q}_j(x) + \varepsilon_{3ij}(x) \right) \mathbf{v} \quad \text{é SOS,} \quad (97)$$

sejam satisfeitas para todo i e j , sendo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$ um vetor que independe de x . A matriz $T(x) \in \mathbb{R}^{N \times n}$ definida conforme a equação (17).

Além disso, se (96) é factível com $\varepsilon_{2ij}(x) > 0$ para todo $x \neq 0$, então o ponto de equilíbrio em $x = 0$ é assintoticamente estável e a taxa de decaimento é maior ou igual a β . Se $X(\tilde{x})$ é uma matriz constante, então é garantida a estabilidade global do sistema através da lei de chaveamento (94), sendo $K_i(x) = M_i(x)X^{-1}(\tilde{x})$ e $Q_i(x) = X^{-1}(\tilde{x})\hat{Q}_i(x)X^{-1}(\tilde{x})$.

Demonstração. Considere uma candidata a função de Lyapunov $V(x) = \hat{x}^T(x)X^{-1}(\tilde{x})\hat{x}(x)$ sendo $X^{-1}(\tilde{x}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ uma matriz polinomial simétrica. A condição (95) implica que ambos $X(\tilde{x})$ e $X^{-1}(\tilde{x})$ são definidas positivas para todo x e $V(x)$ é uma função definida positiva para todos os valores de x . A condição $\dot{V}(x) \leq -2\beta V(x)$ para todas as trajetórias x , é equivalente à especificação de uma taxa de decaimento maior ou igual a β . Dessa forma, considerando $T(x) \in \mathbb{R}^{N \times n}$ definida conforme a equação (17), tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) + 2\beta V(x) = & \hat{x}^T(x) \left(A^T(\alpha, x)T^T(x)X^{-1} + X^{-1}(\tilde{x})T(x)A(\alpha, x) + 2\beta X^{-1}(\tilde{x}) \right. \\ & - K_\sigma^T(x)B^T(\alpha, x)T^T(x)X^{-1}(\tilde{x}) - X(\tilde{x})T(x)B(\alpha, x)K_\sigma(x) \\ & \left. + \sum_{k \in \kappa} \frac{\partial X^{-1}(\tilde{x})}{\partial x_k} (A_i^k(x)\hat{x}(x)) \right) \hat{x}(x). \end{aligned} \quad (98)$$

Agora, considere que existam matrizes simétricas $Z_i(x), Q_i(x) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ tais que

$$-(X^{-1}(\tilde{x})T(x)B_i(x)K_j(x) + K_j^T(x)B_i^T(x)T^T(x)X^{-1}(\tilde{x})) < Z_i(x) + Q_j(x), \quad \forall i, j \in \mathbb{K}_r. \quad (99)$$

Então, multiplicando-se (99) por α_i , pré e pós multiplicando por $\hat{x}^T(x)$ e pós multiplicando por $\hat{x}(x)$, tomando a somatória de $i = 1$ a r , considerando $A(\alpha, x), B(\alpha, x)$ definidos em (60), tem-se que:

$$\begin{aligned}
& -\hat{x}^T(x)(X^{-1}(\tilde{x})T(x)B(\alpha, x)K_\sigma(x) + K_\sigma^T(x)B^T(\alpha, x)T^T(x)X(\tilde{x}))\hat{x}(x) \\
& = -\sum_{i=1}^r \alpha_i \hat{x}^T(x)(X^{-1}(\tilde{x})T(x)B_i(x)K_\sigma(x) + K_\sigma^T(x)B_i^T(x)T^T(x)X(\tilde{x}))\hat{x}(x) \\
& \leq \sum_{i=1}^r \alpha_i \hat{x}^T(x)Z_i(x)\hat{x}(x) + \hat{x}^T(x)Q_\sigma(x)\hat{x}(x).
\end{aligned} \tag{100}$$

Deve-se ter em mente que o mınimo de um conjunto de numeros reais e menor ou igual a toda combinaao convexa dos elementos deste conjunto. A partir de (60) e (94), observe que $\hat{x}^T(x)Q_\sigma(x)\hat{x}(x) = \min_{j \in \mathbb{K}_r} (\hat{x}^T(x)Q_j(x)\hat{x}(x)) \leq \sum_{i=1}^r \alpha_i \hat{x}^T(x)Q_i(x)\hat{x}(x)$. Entao, de (100) tem-se

$$-\hat{x}(x)(X^{-1}T(x)(\tilde{x})B(\alpha, x)K_\sigma(x) + K_\sigma^T(x)B^T(\alpha, x)T^T(x)X(\tilde{x}))\hat{x}(x) \leq \sum_{i=1}^r \alpha_i \hat{x}^T(x)(Z_i + Q_i)\hat{x}(x). \tag{101}$$

Lembrando que $\alpha_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$, de (98) e (101) tem-se que:

$$\dot{V}(x) + 2\beta V(x) < 0, \tag{102}$$

se

$$\begin{aligned}
& A_i^T(x)T^T(x)X^{-1}(\tilde{x}) + X^{-1}(\tilde{x})T(x)A_i(x) + Z_i(x) + Q_i(x) \\
& + \sum_{k \in \mathcal{K}} \frac{\partial X^{-1}(\tilde{x})}{\partial x_k} (A_i^k(x)\hat{x}(x)) + 2\beta X(\tilde{x}) < 0.
\end{aligned} \tag{103}$$

Agora, defina $\hat{Z}_i = X(\tilde{x})Z_i(x)X(\tilde{x})$, $\hat{Q}_i = X(\tilde{x})Q_i(x)X(\tilde{x})$ e $M_j(x) = K_j(x)X(\tilde{x})$. Pre e pos multiplicando (99) e (103) por $X(\tilde{x})$ e considerando os resultados estabelecidos na Proposiao 2, as condioes (96) e (97) sao obtidas, respectivamente.

□

Em aplicaoes praticas, a grande maioria dos sistemas de controle possuem limitaoes no sinal de controle. Assim, segue o seguinte teorema inspirado em (YU; HO, 2012) para realizar a restriao do sinal de controle.

Teorema 9. *Considere que a condiao inicial $\hat{x}(0)$ e conhecida. A restriao $\|u(t)\|_2 \leq \mu$ e assegurada para $t \geq 0$ se as restrioes dos Teoremas 6 ou 8 (ou 5 substituindo $K_i(x) = K(x)$ e $M_i(x) = M(x)$) ou Corolario 1 e as seguintes condioes forem satisfeitas:*

$$\mathbf{v}_1^T \begin{bmatrix} 1 & \hat{x}^T(x(0)) \\ \hat{x}(x(0)) & X(\tilde{x}) \end{bmatrix} \mathbf{v}_1 \text{ é SOS} \quad (104)$$

$$\mathbf{v}_2^T \begin{bmatrix} X(\tilde{x}) & M_i^T(x) \\ M_i(x) & \mu^2 I \end{bmatrix} \mathbf{v}_2 \text{ é SOS} \quad (105)$$

sendo que $X(\tilde{x}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ é uma matriz polinomial simétrica, $M_i(x) \in \mathbb{R}^{m \times N}$ é uma matriz polinomial e $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ são vetores de dimensões adequadas que independem de x . O ganho de realimentação é $K_i(x) = M_i(x)X^{-1}(\tilde{x})$.

Demonstração. Está demonstração é baseada nos trabalhos (YU; HO, 2012; TANAKA; WANG, 2004). Considere $V(x) = \hat{x}^T(x(t))X^{-1}(\tilde{x})\hat{x}(x(t))$ uma candidata à função de Lyapunov e a condição $\hat{x}^T(x(0))X^{-1}(\tilde{x})\hat{x}(x(0)) \leq 1$.

Consequentemente,

$$1 - \hat{x}^T(x(0))X^{-1}(\tilde{x})\hat{x}(x(0)) \geq 0. \quad (106)$$

A condição (104) implica que

$$\begin{bmatrix} 1 & \hat{x}^T(x(0)) \\ \hat{x}(x(0)) & X(\tilde{x}) \end{bmatrix} \geq 0 \quad (107)$$

e a inequação (106) é transformada em (107) pelo procedimento do complemento de Schur.

Será agora demonstrado que, com as factibilidades de (104) e (105), será atendida, para todo $t \geq 0$, a condição $\|u(t)\|_2 \leq \mu$,

$$u^T(t)u(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(x)\alpha_j(x)\hat{x}^T(x)K_i^T(x)K_j(x)\hat{x}(x) \leq \mu^2.$$

Portanto, esta condição é equivalente a

$$\frac{1}{\mu^2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(x)\alpha_j(x)\hat{x}^T(x)K_i^T(x)K_j(x)\hat{x}(x) \leq 1. \quad (108)$$

Então, como $\dot{V}(x) < 0$ para $x \neq 0$, tem-se que $\hat{x}^T(x)X^{-1}(\tilde{x})\hat{x}(x) < \hat{x}^T(x(0))X^{-1}(\tilde{x})\hat{x}(x(0)) \leq 1$ para $t > 0$. Logo, considerando a factibilidade de (104), tem-se de (106) que

$$\frac{1}{\mu^2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(x) \alpha_j(x) \hat{x}^T(x) K_i^T(x) K_j(x) \hat{x}(x) \leq \hat{x}^T(x) X^{-1}(\tilde{x}) \hat{x}(x) \leq \hat{x}(x(0))^T X^{-1}(\tilde{x}) \hat{x}(x(0)) \leq 1 \quad (109)$$

então (108) é válida. Portanto, tem-se

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(x) \alpha_j(x) \hat{x}^T(x) \left(\frac{1}{\mu^2} K_i^T(x) K_j(x) - X^{-1}(\tilde{x}) \right) \hat{x}(x) \leq 0. \quad (110)$$

Do lado esquerdo de (110), note que é possível representar (110) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(x) \alpha_j(x) \hat{x}^T(x) \left(\frac{1}{\mu^2} K_i^T(x) K_j(x) + \frac{1}{\mu^2} K_j^T(x) K_i(x) - 2X^{-1}(\tilde{x}) \right) \hat{x}(x) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(x) \alpha_j(x) \hat{x}^T(x) \left(\frac{1}{\mu^2} (K_i^T(x) K_i(x) \right. \\ & \quad \left. + K_j^T(x) K_j(x)) - \frac{1}{\mu^2} (K_i(x) - K_j(x))^T (K_i(x) - K_j(x)) - 2X^{-1}(\tilde{x}) \right) \hat{x}(x) \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(x) \alpha_j(x) \hat{x}^T(x) \left(\frac{1}{\mu^2} (K_i^T(x) K_i(x) + K_j^T(x) K_j(x)) - 2X^{-1}(\tilde{x}) \right) \hat{x}(x) \\ &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(x) \hat{x}^T(x) \left(\frac{1}{\mu^2} K_i^T(x) K_i(x) - X^{-1}(\tilde{x}) \right) \hat{x}(x). \end{aligned}$$

Se

$$\frac{1}{\mu^2} K_i^T(x) K_i(x) - X^{-1}(\tilde{x}) \leq 0, \quad (111)$$

então (110) é válida. Definindo $M_i(x) = K_i(x) X^{-1}(\tilde{x})$ para (111) obtém-se

$$\frac{1}{\mu^2} M_i^T(x) M_i(x) - X^{-1}(\tilde{x}) \leq 0. \quad (112)$$

A condição (105) implica que

$$\begin{bmatrix} X^{-1}(\tilde{x}) & M_i^T(x) \\ M_i(x) & \mu^2 I \end{bmatrix} \geq 0, \quad (113)$$

a restrição (112) é transformada em (113) pelo procedimento do complemento de Schur. \square

A vantagem do controlador chaveado para sistemas não lineares com incertezas politópicas

é que ela é menos conservador do que quando se tem um único ganho formando o controlador. O Teorema 10 a seguir, mostra que se um sistema pode ser controlado com um único ganho polinomial, então ele também pode ser controlado por vários ganhos chaveados, utilizando o método de projeto de controle chaveado proposto.

Teorema 10. *Suponha a existência de uma matriz simétrica polinomial $X^{-1}(\tilde{x}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$, uma matriz polinomial $M(x) \in \mathbb{R}^{m \times N}$ e uma constante $\beta \geq 0$ tais que as restrições (114) e (115) sejam factíveis, sendo $\varepsilon_1(x) > 0$ para todo $x \neq 0$ e $\varepsilon_{2i}(x) \geq 0$ para todos os valores de x , sendo polinômios não negativos*

$$v^T (X^{-1}(\tilde{x}) - \varepsilon_1(x)I)v \quad \text{é SOS.} \quad (114)$$

$$\begin{aligned} & -v^T \left(X^{-1}(\tilde{x})T(x)(A_i(x) - B_i(x)K(x)) + (A_i(x) - B_i(x)K(x))^T T^T(x)X^{-1}(\tilde{x}) \right. \\ & \left. + \sum_{k \in \kappa} \frac{\partial X^{-1}(\tilde{x})}{\partial x_k} (A_i^k(x)\hat{x}(x)) + 2\beta X^{-1}(\tilde{x}) + \varepsilon_{2i}(x)I \right) v \quad \text{é SOS.} \end{aligned} \quad (115)$$

sendo $v \in \mathbb{R}^N$ um vetor que independe de x e a matriz $T(x) \in \mathbb{R}^{N \times n}$ definida conforme a equação (17). Considerando que (115) é factível com $\varepsilon_{2i}(x) > 0$ para $x \neq 0$, então o ponto de equilíbrio $x = 0$ é assintoticamente estável. Se $X(\tilde{x})$ é uma matriz constante, então é garantida a estabilidade global do sistema $\dot{x} = (A_i(x) - B_i(x)K(x))\hat{x}(x)$ com uma taxa de decaimento maior ou igual a $\beta \geq 0$, sendo $u = -K(x)\hat{x}(x)$.

Então existem $K_j(x)$, $j \in \mathbb{K}_r$, tais que, para $M_j(x) = K_j(x)X^{-1}(\tilde{x})$, as restrições (95), (96) e (97) são satisfeitas.

Demonstração. Como visto no Teorema 10, as restrições (96) e (97) equivalem às desigualdades (99) e (103) respectivamente:

$$\begin{aligned} & -\hat{x}^T(x)(X^{-1}(\tilde{x})T(x)B_i(x)K_j(x) + K_j^T(x)B_i^T(x)T^T(x)X^{-1}(\tilde{x}))\hat{x}(x) < \hat{x}^T(x)(Z_i(x) + Q_j(x))\hat{x}(x), \\ & \hat{x}^T(x) \left(A_i^T(x)T^T(x)X^{-1}(\tilde{x}) + X^{-1}T(x)A_i(x) + Z_i(x) + Q_i(x) \right. \\ & \left. + \sum_{k \in \kappa} \frac{\partial X^{-1}(\tilde{x})}{\partial x_k} (A_i^k(x)\hat{x}(x)) + 2\beta X^{-1}(\tilde{x}) \right) \hat{x}(x) < 0. \end{aligned}$$

Isto implica que a lei de controle (94) pode tornar o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema $\dot{x} = (A(\alpha, x) - B(\alpha, x)K_\sigma(x))\hat{x}(x)$ globalmente assintoticamente estável com taxa de decaimento maior ou igual a β .

Para mostrar que (115) implica em (99) e (103) impõe-se que $K_j(x) = K(x)$, $Q_j(x) = Q(x)$ e $Z_i(x) = 0$. Então de (115) nota-se que existe um $\phi > 0$ suficientemente pequeno tal que:

$$\begin{aligned} & \hat{x}^T(x) \left(X^{-1}(\tilde{x})T(x)A_i(x) + A_i^T(x)T^T(x)X^{-1}(\tilde{x}) + \sum_{k \in \kappa} \frac{\partial X^{-1}(\tilde{x})}{\partial x_k} (A_i^k(x)\hat{x}(x)) \right. \\ & \left. + (-X(\tilde{x})T(x)B_i(x)K(x) - K^T(x)B_i^T(x)T^T(x)X^{-1}(\tilde{x}) + \phi I) + 2\beta X^{-1}(\tilde{x})) \right) \hat{x}(x) < 0. \end{aligned} \quad (116)$$

Definindo $Q_i(x) = -X^{-1}(\tilde{x})B_i(x)K(x) - K^T(x)B_i^T(x)T^T(x)X^{-1}(\tilde{x}) + 2\beta X^{-1}(\tilde{x}) + \phi I$, então (116) implica na factibilidade da expressão

$$\begin{aligned} & \hat{x}^T(x) \left(A_i^T(x)T^T(x)X^{-1}(\tilde{x}) + X^{-1}(\tilde{x})T(x)A_i(x) \right. \\ & \left. + \sum_{k \in \kappa} \frac{\partial X^{-1}(\tilde{x})}{\partial x_k} (A_i^k(x)\hat{x}(x)) + Q_i(x) + 2\beta X^{-1}(\tilde{x}) \right) \hat{x}(x) < 0 \end{aligned}$$

descrita em (103).

Note que a restrição em (99) também é satisfeita:

$$\begin{aligned} & \hat{x}^T(x) \left(-X^{-1}(\tilde{x})B_i(x)K_j(x) - K_j^T(x)B_i^T(x)T^T(x)X^{-1}(\tilde{x}) - Z_i(x) - Q_j(x) \right) \hat{x}(x) \\ & = \hat{x}^T(x) \left(-X^{-1}(\tilde{x})T(x)B_i(x)K_j(x) - K_j^T(x)B_i^T(x)T^T(x)X^{-1}(\tilde{x}) - 0 \right. \\ & \left. - (-X^{-1}(\tilde{x})T(x)B_i(x)K_j(x) - K_j^T(x)B_i^T(x)T^T(x)X^{-1}(\tilde{x}) + \phi I) \right) \hat{x}(x) = -\phi I < 0. \end{aligned} \quad (117)$$

□

A partir do Teorema 10, pode-se obter uma prova de que se há um controlador único formado por polinômios dependentes do vetor de estado do sistema, também haverá controladores chaveados que tornam o sistema globalmente assintoticamente estável. A prova do Teorema 10 foi realizada com base na lei de chaveamento (94), mas deve-se observar que também é válida caso se utilize a lei de chaveamento (85) e a prova pode ser obtida de forma semelhante.

Deve-se observar que a lei de controle chaveado (94) utiliza matrizes auxiliares, enquanto a lei de chaveamento (85) não necessita. Portanto a lei de chaveamento (85) quando a matriz $B(\alpha, x) = B(x)$ é conhecida, tem um custo computacional menor, pois não há a necessidade de se obter as variáveis matriciais auxiliares.

4.3 RESULTADOS E SIMULAÇÕES

Nesta seção, através de exemplos de sistemas não lineares será possível comprovar a validade da metodologia proposta neste capítulo, assim como a sua eficiência em realizar o controle chaveado de sistemas não lineares incertos cujas dinâmicas podem ser representadas apenas por funções polinomiais.

4.3.1 Exemplo 1 - sistema caótico unificado

Considere o sistema caótico unificado proposto em Lü et al. (2002):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= (25\delta + 10)(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 &= (28 - 35\delta)x_1 - x_1x_3 + (29\delta - 1)x_2, \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - \frac{\delta + 8}{3}x_3,\end{aligned}\tag{118}$$

sendo classificado da seguinte forma:

- Quando $0 \leq \delta < 0.8$, o sistema (118) pertence ao sistema generalizado de Lorenz (LORENZ, 1963), e se $\delta = 0$ o sistema será equivalente ao sistema caótico de Lorenz;
- Quando $\delta = 0.8$ o sistema (118) representa o sistema caótico de Lü (LÜ; CHEN; ZHANG, 2002);
- Quando $0.8 \leq \delta < 1$, o sistema (118) pertence ao sistema generalizado de Chen (CHEN; UETA, 1999), e se $\delta = 1$ o sistema será equivalente ao sistema caótico de Chen.

O sistema caótico unificado conecta os sistemas de Lorenz, Chen e Lü, estabelecendo um espectro de transição e o controle do parâmetro δ mostra a evolução do comportamento dinâmico do atrator de Lorenz até o atrator de Chen. Este sistema caótico foi utilizado em projetos de sincronização caótica para comunicação segura (GRZYBOWSKI; RAFIKOV; BALTHAZAR, 2009; VITAL; VARGAS, 2014).

Considere o valor de δ como uma incerteza, cujo o valor máximo é 1 e o valor mínimo é 0. Será proposto um único controlador polinomial, dependente do vetor de estado do sistema. O projeto do controlador será realizado utilizando a decomposição em soma de quadrados, com o objetivo de garantir que o sistema seja globalmente assintoticamente estável para os sistemas caóticos expostos na classificação anterior. Deve-se observar que para utilizar as técnicas baseadas em LMIs seria necessário limitar o sistema em uma região de operação, o que poderia influenciar no projeto dos controladores, dependendo da região de operação do sistema.

O sistema incerto (118) pode ser descrito como em (61), considerando $\hat{x}(x) = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ e

$$\begin{aligned} A_1(x) &= \begin{bmatrix} -(25 \times 0 + 10) & (25 \times 0 + 10) & 0 \\ (28 - 35 \times 0) & (29 \times 0 - 1) & -x_1 \\ 0 & x_1 & -(0 + 8)/3 \end{bmatrix}, \quad B_1(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ A_2(x) &= \begin{bmatrix} -(25 \times 1 + 10) & (25 \times 1 + 10) & 0 \\ (28 - 35 \times 1) & (29 \times 1 - 1) & -x_1 \\ 0 & x_1 & -(1 + 8)/3 \end{bmatrix}, \quad B_2(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (119)$$

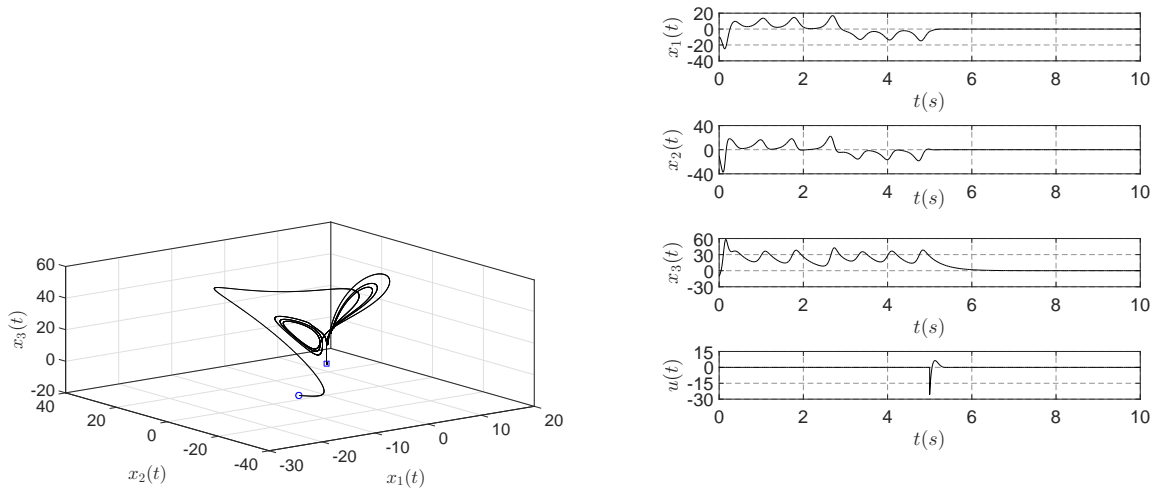
Utilizando o Teorema 5, considerando que $\beta = 2,6$, a matriz $X(\tilde{x})$ sendo constante. Sendo $x^T x = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ um polinômio definido positivo para $x \neq 0$ e 10^{-9} um valor maior que 0 e pequeno para que o projeto dos controladores possa ser factível, definimos $\varepsilon_1 = 10^{-9}$ e $\varepsilon_1 > 0$ e $\varepsilon_{2i} = 10^{-9} \times (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$, $i \in \mathbb{K}_r$, desta forma $\varepsilon_1, \varepsilon_{2i} > 0$. O ganho do controlador obtido $K(x)$ possui em cada elemento da matriz um polinômio, sendo construído utilizando monômios da ordem 0 e 1, os resultados são dados a seguir

$$X(\tilde{x}) = 10^5 \times \begin{bmatrix} 3,51365 & 1,45390 & -4,1 \times 10^{-14} \\ 1,45390 & 3,82421 & 1 \times 10^{-15} \\ -4,1 \times 10^{-14} & 1 \times 10^{-15} & 2,37030 \end{bmatrix}, \quad (120)$$

$$K(x) = \begin{bmatrix} 1,4877 \times 10^{-14} x_1 + 2,1053 \times 10^{-16} x_2 + 4,9106 \times 10^{-16} x_3 - 13,6603 \\ -6,9906 \times 10^{-15} x_1 - 3,354 \times 10^{-16} x_2 - 4,9667 \times 10^{-16} x_3 + 33,4455 \\ 0,61338 x_1 + 1,4374 \times 10^{-16} x_2 + 2,8668 \times 10^{-16} x_3 - 9,7768 \times 10^{-9} \end{bmatrix}^T. \quad (121)$$

As respostas do sistema caótico de Lorenz ($\delta = 0$) sendo a condição inicial escolhida para o sistema de $x(0) = [-10 \ -10 \ -10]^T$, Lü ($\delta = 0.8$) e Chen ($\delta = 1$) sendo a condição inicial escolhida para os sistemas de $x(0) = [-20 \ -20 \ 20]^T$, podem ser obtidas nas Figuras 9, 10 e 11 respectivamente. Considerou-se que até 5 segundos o sistema permanece em malha aberta e posteriormente é aplicado o sinal de controle no sistema. Pode-se observar que com um único controlador foi possível garantir a estabilidade global assintótica de 3 sistemas caóticos.

Figura 9 - Trajetória e variáveis de estado do sistema (118) com aplicação do sinal de controle após 5 segundos de acordo com a lei de realimentação (62) com o controlado dado em (121), considerando $\delta = 0$.



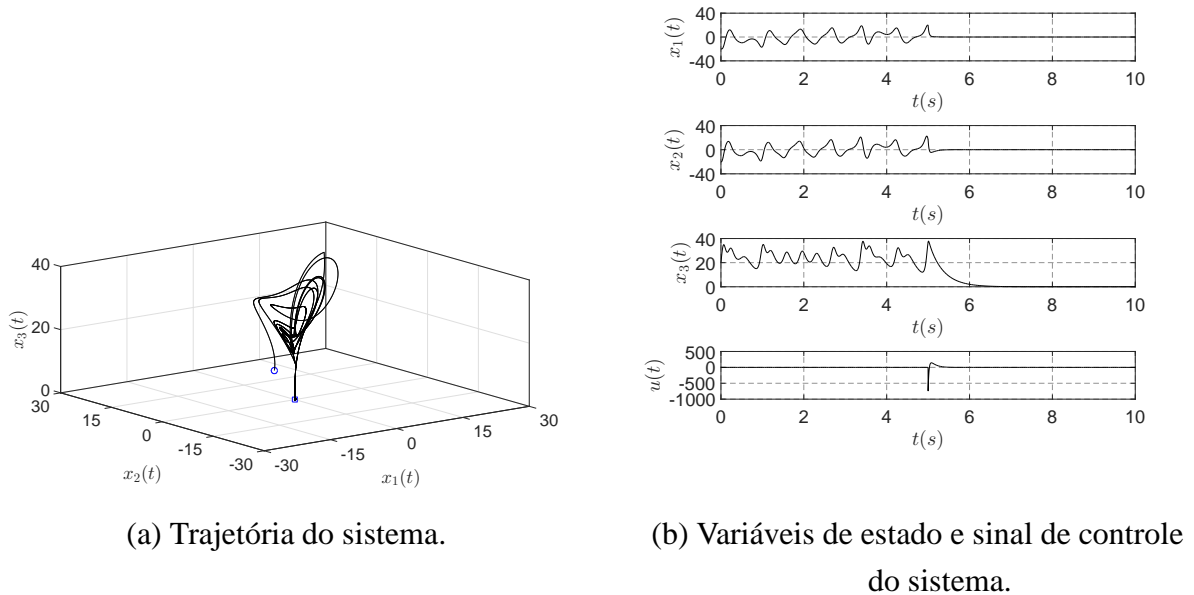
(a) Trajetória do sistema.

(b) Variáveis de estado e sinal de controle do sistema.

Fonte: Próprio autor.

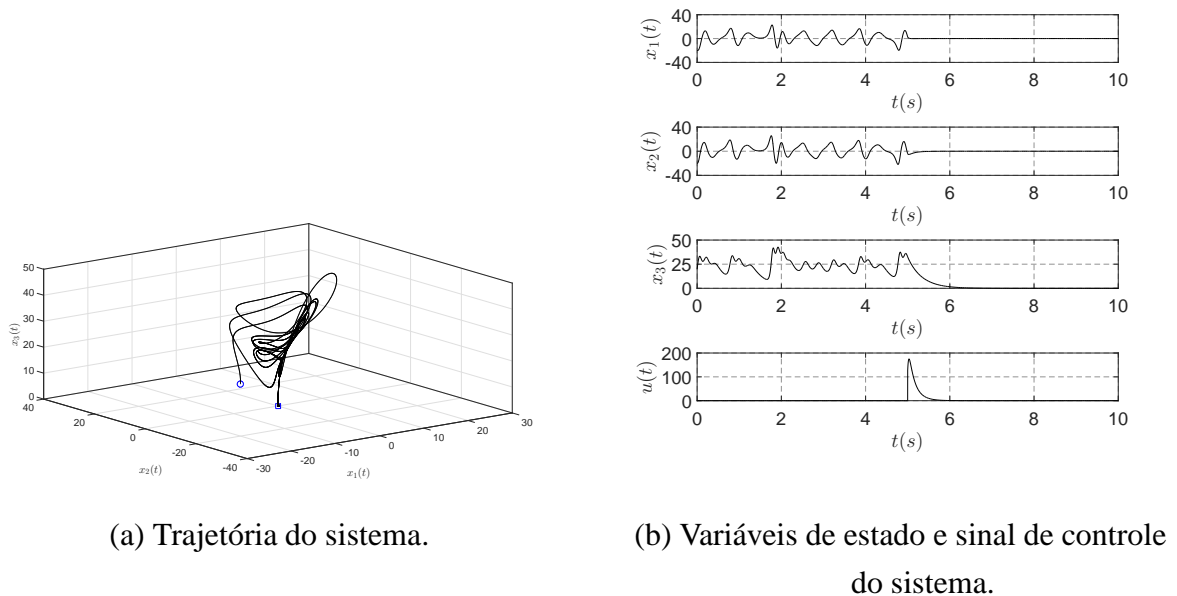
Deve-se observar que para realizar o controle do sistema utilizando modelos *fuzzy* TS seria necessário limitar a região de operação, restringir à candidata a função de Lyapunov em apenas funções quadráticas e os ganhos do controlador serem constantes, sendo que, deste modo, o problema pode ser solucionado via LMIs. Pode-se verificar portanto, que a utilização da decomposição em SOS para a resolução do problema de controlar um sistema polinomial não linear incerto trouxe benefícios.

Figura 10 - Trajetória e variáveis de estado do sistema (118) com aplicação do sinal de controle após 5 segundos de acordo com a lei de realimentação (62) com o controlado dado (121), considerando $\delta = 0.8$.



Fonte: Próprio autor.

Figura 11 - Trajetória e variáveis de estado do sistema (118) com aplicação do sinal de controle após 5 segundos de acordo com a lei de realimentação (62) com o controlado dado (121), considerando $\delta = 1$.



Fonte: Próprio autor.

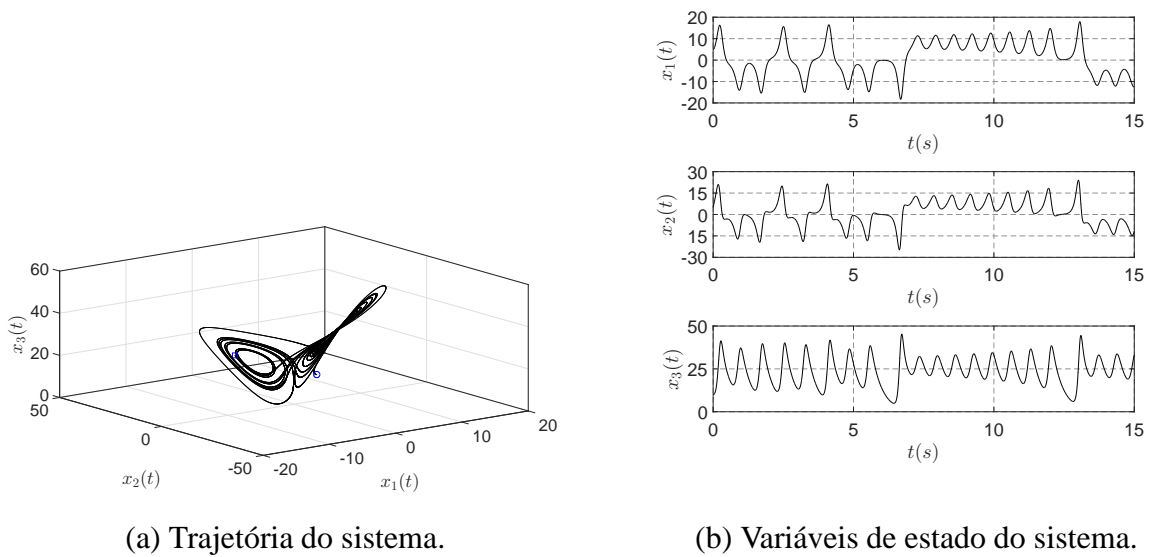
4.3.2 Exemplo 2 - sistema caótico de Lorenz

Considere o sistema caótico de Lorenz com a entrada de controle u descrito a seguir

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -\lambda_1 x_1 + \lambda_1 x_2 + u, \\
\dot{x}_2 &= \lambda_2 x_1 - x_2 - x_1 x_3, \\
\dot{x}_3 &= x_1 x_2 - \lambda_3 x_3.
\end{aligned} \tag{122}$$

sendo os valores nominais de $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ iguais a $(10, 28, 8/3)$ para o surgimento do caos como em (LORENZ, 1963). Na Figura 12 é possível visualizar a trajetória do sistema caótico de Lorenz em malha aberta, considerando a condição inicial de $x(0) = [5 \ 5 \ 10]^T$ representada por um círculo em azul e a condição final após 15 segundos por um quadrado em azul.

Figura 12 - Estado e trajetória do sistema (122) em malha aberta.



(a) Trajetória do sistema.

(b) Variáveis de estado do sistema.

Fonte: Próprio autor.

Neste exemplo será considerado que os parâmetros $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ são incertos e podem assumir valores dentro de uma faixa correspondente a uma porcentagem do seu valor nominal. Portanto o sistema pode ser descrito por uma combinação convexa como em (61) considerando $\hat{x}(x) = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ e

$$A_i(x) = \begin{bmatrix} -\lambda_1^j & \lambda_1^j & 0 \\ \lambda_2^k & -1 & -x_1 \\ 0 & x_1 & \lambda_3^l \end{bmatrix}, \quad B(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{123}$$

sendo $i = 1, 2, \dots, 8$ e $j, k, l = 1, 2$.

Os valores de λ_1^j, λ_2^k e λ_3^l podem ser obtidos da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\lambda_1^1 &= \lambda_1 \times (1 + \gamma), & \lambda_1^2 &= \lambda_1 \times (1 - \gamma), \\
\lambda_2^1 &= \lambda_2 \times (1 + \gamma), & \lambda_2^2 &= \lambda_2 \times (1 - \gamma), \\
\lambda_3^1 &= \lambda_3 \times (1 + \gamma), & \lambda_3^2 &= \lambda_3 \times (1 - \gamma).
\end{aligned} \tag{124}$$

sendo γ o valor referente à porcentagem de incerteza com relação aos valores nominais.

Como a matriz $B(x)$ é conhecida, torna-se possível a utilização do Corolário 1. Considere $\varepsilon_1 = 10^{-9}$ e $\varepsilon_{2i} = 10^{-9} \times (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$, $i \in \mathbb{K}_r$, e a taxa de decaimento escolhida igual a $\beta = 0,5$. O sistema pode ser controlado supondo uma incerteza de até 80% dos valores nominais, e portanto $\gamma = 0,8$. O ganhos do controlador chaveado $K_\sigma(x) \in \mathbb{R}^{m \times N}$ obtido, possuem em cada elemento da matriz um polinômio, sendo construído utilizando monômios da ordem 0 e 1, a matriz $X(\tilde{x})$ foi considerada constante, e os resultados são dados em (125) e (126).

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1,1701 \times 10^{-14}x_1 - 4,9591 \times 10^{-15}x_2 + 1,7752 \times 10^{-17}x_3 + 43,1096 \\ -2,4236 \times 10^{-12}x_1 + 2,4745 \times 10^{-15}x_2 + 5,5896 \times 10^{-16}x_3 + 27,2428 \\ -0,11839x_1 - 1,9652 \times 10^{-15}x_2 - 1,1408 \times 10^{-15}x_3 - 6,7643 \times 10^{-10} \end{bmatrix}^T, \tag{125a}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -8,2853 \times 10^{-15}x_1 - 1,5708 \times 10^{-15}x_2 - 2,1382 \times 10^{-15}x_3 + 43,0844 \\ -2,4236 \times 10^{-12}x_1 + 1,3026 \times 10^{-16}x_2 + 2,1221 \times 10^{-16}x_3 + 27,0225 \\ -0,11839x_1 - 6,2248 \times 10^{-17}x_2 + 3,7163 \times 10^{-16}x_3 - 2,4176 \times 10^{-10} \end{bmatrix}^T, \tag{125b}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 3,9678 \times 10^{-15}x_1 - 4,8718 \times 10^{-15}x_2 - 3,4795 \times 10^{-15}x_3 + 33,1541 \\ -2,428 \times 10^{-12}x_1 - 1,2038 \times 10^{-15}x_2 + 6,6931 \times 10^{-16}x_3 + 23,6977 \\ -0,11838x_1 + 9,3762 \times 10^{-16}x_2 + 2,751 \times 10^{-16}x_3 - 3,0014 \times 10^{-09} \end{bmatrix}^T, \tag{125c}$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} -7,6148 \times 10^{-14}x_1 - 4,8347 \times 10^{-15}x_2 + 7,9921 \times 10^{-16}x_3 + 21,7011 \\ -2,4317 \times 10^{-12}x_1 + 4,7757 \times 10^{-16}x_2 + 7,1725 \times 10^{-16}x_3 + 21,5056 \\ -0,11838x_1 - 1,3269 \times 10^{-15}x_2 + 1,4064 \times 10^{-15}x_3 - 3,201 \times 10^{-10} \end{bmatrix}^T, \tag{125d}$$

$$K_5 = \begin{bmatrix} 4,8383 \times 10^{-15}x_1 + 1,0781 \times 10^{-15}x_2 - 8,9096 \times 10^{-15}x_3 + 40,0365 \\ -2,428 \times 10^{-12}x_1 - 7,9127 \times 10^{-17}x_2 - 3,3215 \times 10^{-15}x_3 + 13,7926 \\ -0,11839x_1 - 2,772 \times 10^{-15}x_2 + 9,9279 \times 10^{-16}x_3 + 7,8998 \times 10^{-09} \end{bmatrix}^T, \tag{125e}$$

$$K_6 = \begin{bmatrix} 4,6355 \times 10^{-14}x_1 - 7,0796 \times 10^{-15}x_2 + 1,7979 \times 10^{-15}x_3 + 30,2244 \\ -2,3965 \times 10^{-12}x_1 - 2,8128 \times 10^{-15}x_2 + 9,0987 \times 10^{-16}x_3 + 11,3168 \\ -0,11839x_1 - 4,2568 \times 10^{-17}x_2 + 3,8851 \times 10^{-16}x_3 + 1,1741 \times 10^{-09} \end{bmatrix}^T, \tag{125f}$$

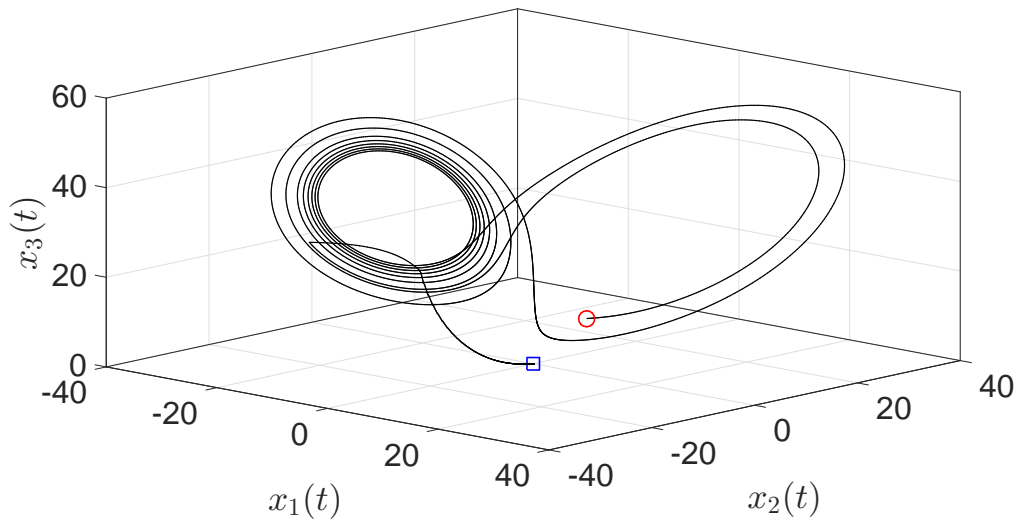
$$K_7 = \begin{bmatrix} 4,9878 \times 10^{-15}x_1 + 1,5497 \times 10^{-16}x_2 + 2,8708 \times 10^{-16}x_3 + 50,8373 \\ -2,427 \times 10^{-12}x_1 + 9,4641 \times 10^{-17}x_2 + 1,1826 \times 10^{-16}x_3 + 8,7501 \\ -0,11838x_1 - 6,3243 \times 10^{-17}x_2 - 3,1737 \times 10^{-16}x_3 - 4,9225 \times 10^{-09} \end{bmatrix}^T, \tag{125g}$$

$$K_8 = \begin{bmatrix} 2,3228 \times 10^{-14}x_1 - 2,3125 \times 10^{-16}x_2 + 9,0743 \times 10^{-17}x_3 + 50,7379 \\ -2,4128 \times 10^{-12}x_1 - 1,3853 \times 10^{-15}x_2 + 2,6199 \times 10^{-17}x_3 + 8,6768 \\ -0,11838x_1 + 4,813 \times 10^{-17}x_2 + 8,7142 \times 10^{-17}x_3 + 1,3599 \times 10^{-10} \end{bmatrix}^T, \quad (125h)$$

$$X(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} 0,3465 \times 10^3 & -0,4149 \times 10^3 & 8,524 \times 10^{-9} \\ -0,4149 \times 10^3 & 3,5050 \times 10^3 & 1,7 \times 10^{-11} \\ 8,524 \times 10^{-9} & 1,7 \times 10^{-11} & 3,5050 \times 10^3 \end{bmatrix}. \quad (126)$$

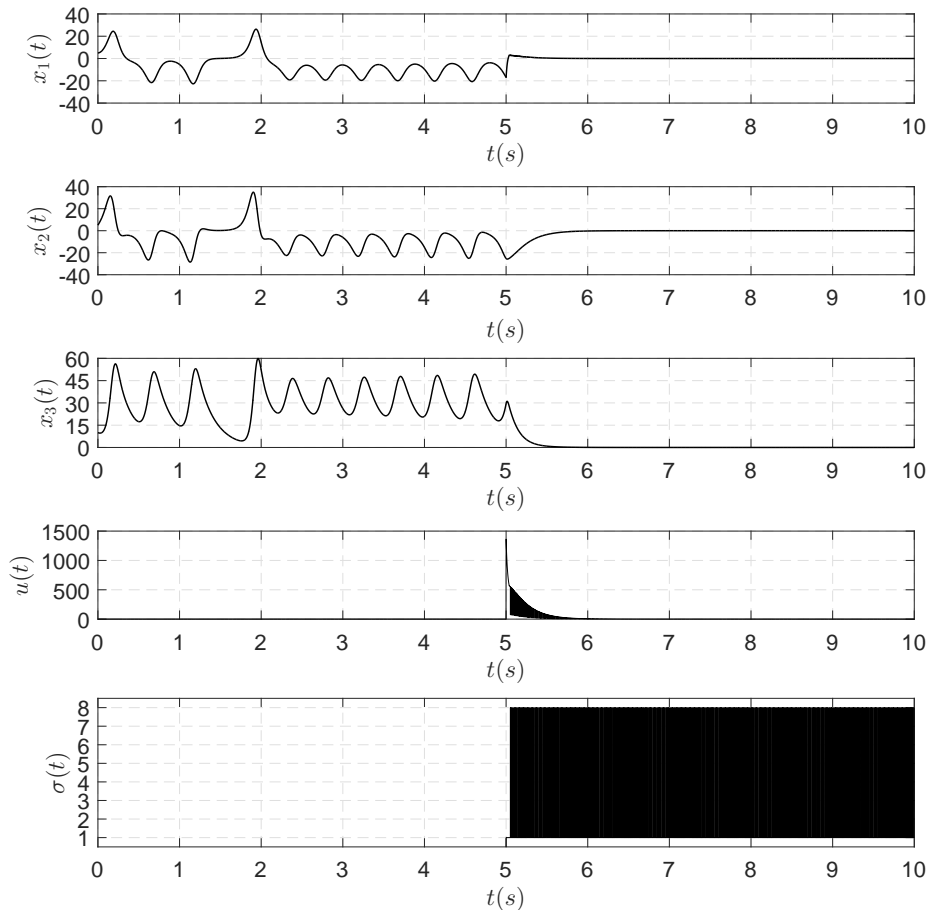
As simulações foram realizadas adotando-se que $\lambda_1 = 15$, $\lambda_2 = 36,4$, $\lambda_3 = 4,8$ e o ponto inicial igual a $x(0) = [5 \ 5 \ 10]^T$. Na Figura 13 é possível observar a trajetória do sistema, sendo a condição inicial e final dadas por um círculo em vermelho e um quadrado em azul, respectivamente. Na Figura 14 pode-se observar as variáveis de estado, o sinal de controle $u(t)$ e o sinal de chaveamento $\sigma(t)$. Foi considerado que o sistema até 5 segundos permaneceria em malha aberta e depois em malha fechada, utilizando a lei de controle chaveado (85) e os controladores projetados em (125).

Figura 13 - Trajetória do sistema (122) considerando incertezas nos valores nominais com aplicação do sinal de controle após 5 segundos de acordo com a lei de chaveamento (85) e o controlador dado em (125).



Fonte: Próprio autor.

Figura 14 - Variáveis de estado, sinal de controle e chaveamento do sistema (122) considerando incertezas nos valores nominais com aplicação do sinal de controle após 5 segundos de acordo com a lei de chaveamento (85) e o controlador dado em (125).



Fonte: Próprio autor.

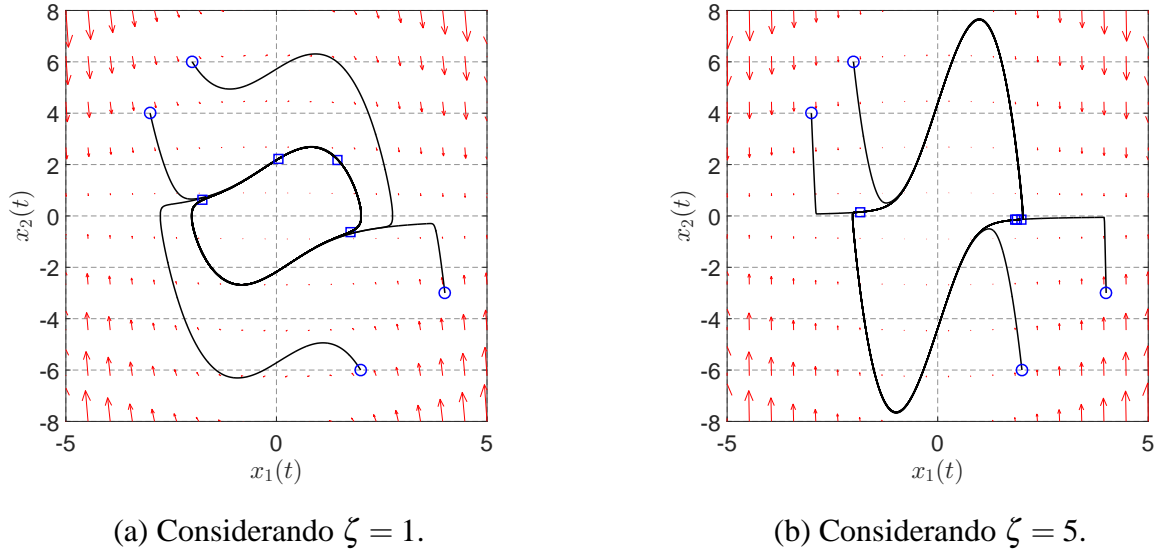
4.3.3 Exemplo 3 - equação de Van der Pol

Considere o seguinte sistema dado pela equação de Van der Pol

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \zeta(1-x_1^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u. \quad (127)$$

Na Figura 15 é apresentado o plano de fase do sistema (127) em malha aberta, considerando $\zeta = 1$ e 5 e as condições iniciais e finais dadas por um círculo e um quadrado em azul respectivamente.

Figura 15 - Plano de fase do sistema (127) em malha aberta.



Fonte: Próprio autor.

Considerando que possa haver uma falha nos atuadores, que equivale a multiplicar o sinal de controle u em (127) por um parâmetro entre 1 e γ , e ζ sendo um valor incerto, o sistema pode ser descrito por uma combinação convexa de acordo com (61), considerando $\hat{x}(x) = [x_1 \ x_2]^T$, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \min(\zeta)(1-x_1^2) \end{bmatrix}, & A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \min(\zeta)(1-x_1^2) \end{bmatrix}, \\
 A_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \max(\zeta)(1-x_1^2) \end{bmatrix}, & A_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \max(\zeta)(1-x_1^2) \end{bmatrix}, \\
 B_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, & B_2 &= \gamma \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, & B_3 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, & B_4 &= \gamma \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{128}$$

Utilizando o Teorema 8 e considerando que $\varepsilon_1 = 10^{-9}$, $\varepsilon_{2i} = 10^{-9} \times (x_1^2 + x_2^2) \forall i \in \mathbb{K}_r$ e $\varepsilon_{3ij} = 10^{-9} \times (x_1^2 + x_2^2) \forall i, j \in \mathbb{K}_r$, foram obtidas as matrizes $X(\bar{x})$, $Q(x)$ e $Z(x)$ constantes e a matriz $M(x)$ contendo em cada elemento um polinômio formado por monômios da ordem 0 e 1, sendo que foi especificada uma taxa de decaimento maior ou igual a $\beta = 0$. Foram projetados ganhos, que serão chaveados de acordo com a lei de chaveamento (94), considerando que o atuador possua uma falha de até 80%, portanto, $\gamma = 0.8$ e ζ possa variar entre 1 e 5. Os resultados obtidos são dados a seguir:

$$X(\bar{x}) = 10^3 \times \begin{bmatrix} 7,8790 & -0,0000 \\ -0,0000 & 7,8621 \end{bmatrix}, \tag{129}$$

$$\hat{Q}_1 = \begin{bmatrix} 0,013478 & 6,612 \\ 6,612 & -767,3515 \end{bmatrix}, \quad \hat{Q}_2 = \begin{bmatrix} 0,013478 & 10,3129 \\ 10,3129 & -16078,4598 \end{bmatrix}, \quad (130)$$

$$\hat{Q}_3 = \begin{bmatrix} 0,013478 & 6,6747 \\ 6,6747 & -50366,0445 \end{bmatrix}, \quad \hat{Q}_4 = \begin{bmatrix} 0,013478 & 10,3881 \\ 10,3881 & -67874,8001 \end{bmatrix},$$

$$K_1(x) = \begin{bmatrix} -3,5475 \times 10^{-20}x_1 + 9,1132 \times 10^{-20}x_2 - 0,0021259 \\ 8,6561 \times 10^{-22}x_1 - 9,1346 \times 10^{-21}x_2 + 4,4946 \end{bmatrix}^T,$$

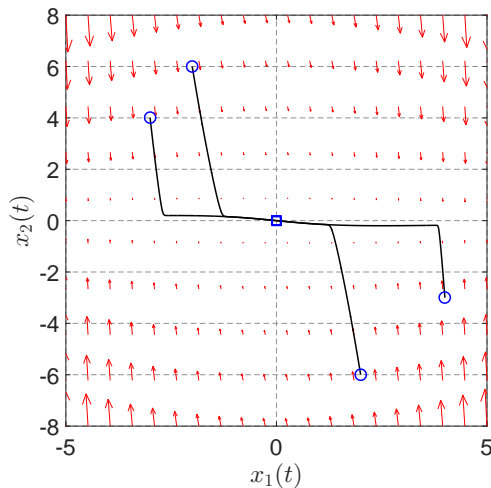
$$K_2(x) = \begin{bmatrix} 5,917 \times 10^{-20}x_1 + 1,4211 \times 10^{-19}x_2 - 0,0026361 \\ -1,6399 \times 10^{-20}x_1 + 2,6022 \times 10^{-21}x_2 + 5,5332 \end{bmatrix}^T, \quad (131)$$

$$K_3(x) = \begin{bmatrix} 2,5826 \times 10^{-20}x_1 - 2,0325 \times 10^{-19}x_2 - 0,0021225 \\ 1,7914 \times 10^{-20}x_1 - 2,8197 \times 10^{-21}x_2 + 7,9064 \end{bmatrix}^T,$$

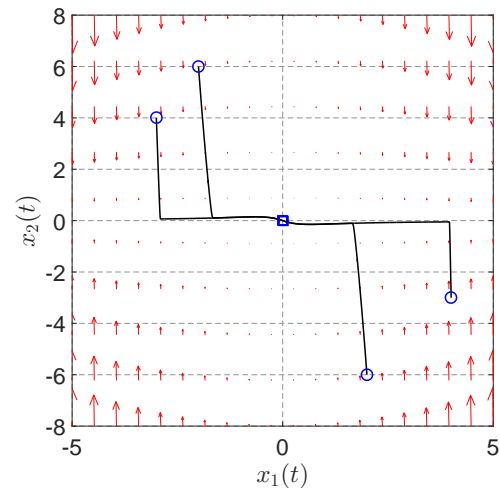
$$K_4(x) = \begin{bmatrix} 2,4346 \times 10^{-20}x_1 - 5,9009 \times 10^{-20}x_2 - 0,0026456 \\ -9,5957 \times 10^{-21}x_1 + 3,1329 \times 10^{-21}x_2 + 9,1472 \end{bmatrix}^T.$$

Na Figura 16 é apresentado o plano de fase do sistema (127) com uma falha no sinal de controle de 20%, considerando os ganhos (131) para o controlador chaveado (94), sendo as condições iniciais e finais, após 50 segundos, representadas por um círculo e um quadrado em azul respectivamente.

Figura 16 - Planos de fase do sistema (127) considerando os ganhos (131) para o controlador chaveado (94).



(a) Considerando $\zeta = 1$.



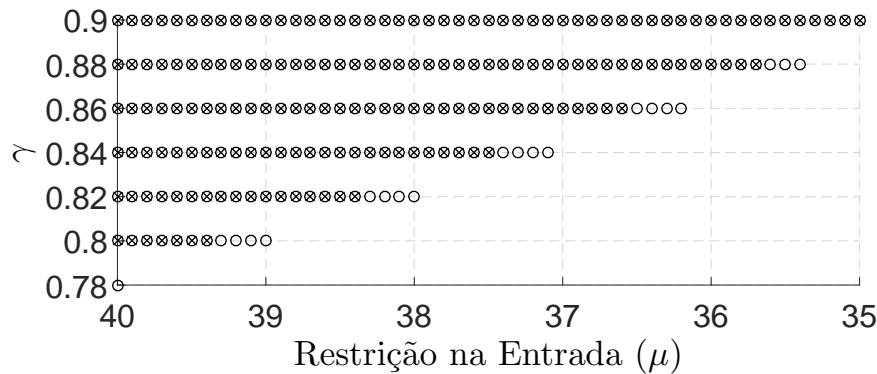
(b) Considerando $\zeta = 5$.

Fonte: Próprio autor.

Considerando que o sinal de controle seja limitado em $|u| \leq \mu$, utilizou-se o Teorema 9 para restringir o sinal de controle considerando a condição inicial $x(0) = \begin{bmatrix} 2 & -6 \end{bmatrix}^T$. Inicialmente foram projetados controladores considerando um único ganho, através do Teorema 5 para o

sistema incerto (127) considerando a combinação convexa dada em (128). A seguir foram projetados controladores com ganhos chaveados, através do Teorema 8. Na Figura 17 é possível ver a comparação da factibilidade entre os dois projetos de controladores robustos, considerando a restrição na entrada μ variando de 35 até 40 e a incerteza γ de 0,78 até 0,9, a incerteza ζ foi mantida de 1 até 5 para todos os projetos.

Figura 17 - Região de Factibilidade utilizando o Teorema 5 (“×”) e o Teorema 8 (“o”).



Fonte: Próprio Autor.

Desta forma, o projeto de controle com ganhos chaveados obteve uma região de factibilidade maior que utilizando um único ganho.

Considerando que é necessário restringir o sinal de controle de modo que $|u| \leq 39$, então serão utilizados os Teoremas 8 e 9 para limitar o sinal de controle e garantir que o sistema seja assintoticamente estável, considerando que a condição inicial é igual a $x(0) = [2 \quad -6]^T$, possa haver uma falha no sinal de controle de 20% e a incerteza ζ variando de 1 até 5. Deve-se observar que não seria possível projetar um controlador, com estes requisitos de projeto, utilizando um único ganho e o projeto com base nos Teoremas 5 e 9. Desta forma, obtém-se os seguintes resultados.

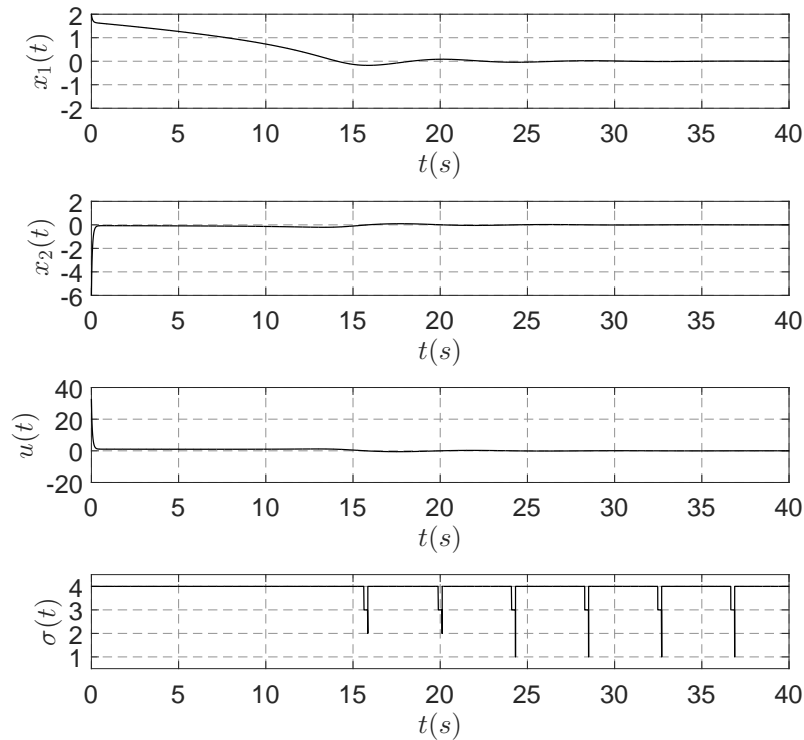
$$X(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} 63,5677 & -0,0045 \\ -0,0045 & 38,4479 \end{bmatrix}, \quad (132)$$

$$\begin{aligned}
K_1(x) &= \begin{bmatrix} 2,2763 \times 10^{-22}x_1 + 3,1209 \times 10^{-23}x_2 - 0,38964 \\ 9,0018 \times 10^{-25}x_1 - 5,0488 \times 10^{-24}x_2 + 4,6837 \end{bmatrix}^T, \\
K_2(x) &= \begin{bmatrix} 2,7219 \times 10^{-22}x_1 - 1,4461 \times 10^{-22}x_2 - 0,48714 \\ -6,184 \times 10^{-25}x_1 - 4,6372 \times 10^{-25}x_2 + 4,9178 \end{bmatrix}^T, \\
K_3(x) &= \begin{bmatrix} 1,0318 \times 10^{-21}x_1 + 2,9855 \times 10^{-22}x_2 - 0,38642 \\ -2,7543 \times 10^{-25}x_1 + 1,685 \times 10^{-24}x_2 + 6,1005 \end{bmatrix}^T, \\
K_4(x) &= \begin{bmatrix} -6,8288 \times 10^{-22}x_1 + 1,0165 \times 10^{-22}x_2 - 0,49384 \\ 4,974 \times 10^{-23}x_1 - 7,8807 \times 10^{-22}x_2 + 6,2551 \end{bmatrix}^T.
\end{aligned} \tag{133}$$

$$\begin{aligned}
\hat{Q}_1 &= \begin{bmatrix} 0,013595 & 9,7437 \\ 9,7437 & -23,4147 \end{bmatrix}, & \hat{Q}_2 &= \begin{bmatrix} 0,013501 & 15,3288 \\ 15,3288 & -69,5827 \end{bmatrix}, \\
\hat{Q}_3 &= \begin{bmatrix} 0,01379 & 9,6711 \\ 9,6711 & -193,8821 \end{bmatrix}, & \hat{Q}_4 &= \begin{bmatrix} 0,013819 & 15,5246 \\ 15,5246 & -239,9069 \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{134}$$

Na Figura 18 podem ser visualizadas as variáveis de estado do sistema (127) considerando $\gamma = 5$ e uma falha no sinal de controle de 90%, utilizando os resultados obtidos em (132), (133) e (134). Na Figura 18 também pode ser visualizado o sinal de chaveamento, pode-se verificar que não houve um chaveamento constante, mas todos os ganhos foram selecionados em determinados instantes de tempo, de modo que a derivada da função de Lyapunov fosse minimizada.

Figura 18 - Variáveis de estado, sinal de controle e sinal de chaveamento do sistema (127) considerando $\gamma = 5$ e uma falha no sinal de controle de 15% após 40 segundos, de acordo com a lei de chaveamento (94) e os ganhos do controlador dados em (133).



Fonte: Próprio autor.

4.4 COMENTÁRIOS

Neste capítulo foram propostos projetos de controladores considerando sistemas não lineares incertos cuja dinâmica pode ser representada apenas por funções polinomiais. A partir dos exemplos e simulações na Seção 4.3 foi possível visualizar a eficiência da metodologia proposta para o controle de sistemas não lineares incertos. Deve-se observar que não foi necessária a utilização de técnicas como a linearização ou modelos *fuzzy* TS para controlar tal classe de sistemas não lineares, projetando controladores globalmente assintoticamente estáveis.

O projeto de controladores via SOS foi uma metodologia flexível que permitiu ao projetista acrescentar restrições de acordo com o projeto, como taxa de decaimento e restrição na entrada, como pode ser visto nos exemplos propostos. Com o objetivo de abranger uma classe maior de sistemas não lineares incertos, cuja dinâmica pode ser representada por termos não polinomiais, no Capítulo 5 serão utilizados modelos *fuzzy* polinomiais, sendo proposto o controle chaveado para sistemas não lineares utilizando modelos *fuzzy* polinomiais incertos.

5 CONTROLE DE MODELOS FUZZY POLINOMIAIS INCERTOS VIA SOS

Neste capítulo será proposto o projeto de controladores com ganhos chaveados para sistemas não lineares modelados a partir de modelos *fuzzy* polinomiais considerando incertezas sendo que a dinâmica do sistema é descrita também por funções não polinomiais ou caso seja necessário limitar o sistema em uma região de operação. Será proposto um procedimento que considera as incertezas nos modelos *fuzzy* polinomiais do sistema, deste modo os extremos das incertezas devem ser conhecidos. Por conveniência, serão estabelecidas algumas notações que serão utilizadas neste capítulo:

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_r &= \{1, 2, \dots, r\}, r \in \mathbb{N}; \quad x(t) = x; \quad V(x(t)) = V; \quad \|x\|_2 = \sqrt{x^T x}; \\ (A(x), B(x), C(x), K(x))(\alpha) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i (A_i(x), B_i(x), C_i(x), K_i(x)), \\ \alpha_i(z) &\geq 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^r \alpha_i(z) = 1, \quad \alpha = [\alpha_1(z), \alpha_2(z), \dots, \alpha_r(z)]^T, \\ z &= \begin{bmatrix} x & \delta(t) \end{bmatrix}, \quad \delta = \delta(t), \quad \delta = [\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_p]^T, \quad \alpha(z) = \alpha, \end{aligned} \tag{135}$$

sendo $r = 2^s$ e s é o número de parâmetros incertos e funções não polinomiais distintos na planta, o vetor δ representa os parâmetros incertos distintos presentes no sistema. Deve-se observar que a função α (função de pertinência) será dependente do vetor z cujos elementos são variáveis premissas que dependem do vetor de estado x e de parâmetros incertos ou variáveis desconhecidas do sistema, deste modo é diferente da formulação apresentada no Capítulo 3 em que as funções de pertinência são dependentes das variáveis de estado do sistema. Portanto, neste capítulo, para representar as incertezas presentes no sistema, será considerada funções de pertinência que podem ser incertas.

O sistema não linear incerto será representado por modelos *fuzzy* polinomiais incertos (suas funções de pertinência são dependentes dos parâmetros incertos da planta). Portanto, considere o seguinte sistema não linear incerto

$$\dot{x} = f(z)(x, u), \tag{136}$$

sendo f uma função não linear, $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ é o vetor de estado e $u = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_m]^T$ é o vetor de entrada. Desta forma, pode-se representar o sistema (136) com modelos *fuzzy* polinomial (globalmente ou semiglobalmente) da seguinte forma

$$\begin{aligned} \text{Regra } i : & \text{ Se } z_1 \text{ é } M_1^i \text{ E } \dots \text{ E } z_p \text{ é } M_p^i, \\ \text{Então } & \begin{cases} \dot{x} = A_i(x)\hat{x}(x) + B_i(x)u, \\ y = C_i(x)\hat{x}(x), \end{cases} \end{aligned} \quad (137)$$

sendo $i = 1, 2, \dots, r$, M_j^i , $j = 1, 2, \dots, p$ é o conjunto *fuzzy* j da regra i . $A_i(x)$ e $B_i(x)$ matrizes polinomiais em x . O termo $\hat{x}(x) \in \mathbb{R}^N$ é um vetor coluna cujos elementos são todos monômios em x . Portanto $A_i(x)\hat{x}(x) + B_i(x)u$ é um vetor polinomial. Então o modelo *fuzzy* polinomial (137) pode conter não linearidades (termos polinomiais) em cada parte consequente.

O processo de defuzzificação do modelo (137) pode ser representado como

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\sum_{i=1}^r \omega^i(z) (A_i(x)\hat{x}(x) + B_i(x)u)}{\sum_{i=1}^r \omega^i(z)}, \\ y = \frac{\sum_{i=1}^r \omega^i(z) C_i(x)\hat{x}(x)}{\sum_{i=1}^r \omega^i(z)}, \end{cases} \quad (138)$$

sendo

$$z = [z_1 \ z_2 \ \dots \ z_p], \quad \omega_i(z) = \prod_{j=1}^p M_j^i(z_j), \quad \sum_{i=1}^r \omega_i(z) > 0, \quad \omega_i(z) \geq 0, \quad (139)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_r$, $M_j^i(z_j)$ é o “peso” do conjunto *fuzzy* M_j^i associado à variável premissa z_j . O peso normalizado e/ou função de pertinência α_i , $i \in \mathbb{K}_r$, de cada regra, como sendo

$$\alpha_i(z) = \frac{\omega_i(z)}{\sum_{i=1}^r \omega_i(z)}. \quad (140)$$

Desta forma, de (139) e (140) pode-se notar que

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i(z) = 1 \quad \text{e} \quad \alpha_i(z) > 0, \quad i \in \mathbb{K}_r. \quad (141)$$

o que condiz com as notações (135).

De (138)-(141), a equação (138), pode ser escrita da seguinte forma

$$\begin{cases} \dot{x} = \sum_{i=1}^r \alpha_i(z) [A_i(x)\hat{x}(x) + B_i(x)u] \\ \quad = A(\alpha(z, x))\hat{x}(x) + B(\alpha(z, x))u, \\ y = \sum_{i=1}^r \alpha_i(z) C_i(x)\hat{x}(x) = C(\alpha(z, x))\hat{x}(x). \end{cases} \quad (142)$$

Uma vez que o CPD utiliza a estrutura do modelo *fuzzy* de um sistema, um controlador

fuzzy com parte consequente polinomial pode ser construído a partir do modelo *fuzzy* polinomial (137).

$$\begin{aligned} \text{Regra } i : & \text{Se } z_1 \text{ é } M_1^i \text{ E } \dots \text{ E } z_p \text{ é } M_p^i, \\ & \text{Então } u = -K_i(x) \hat{x}(x), \quad i = 1, 2, \dots, r. \end{aligned} \quad (143)$$

O controlador *fuzzy* global pode ser calculado como:

$$u = - \sum_{i=1}^r \alpha_i(z) K_i(x) \hat{x}(x). \quad (144)$$

De (138) e (144), o sistema em malha fechada pode ser representado por

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(z) \alpha_j(z) \{A_i(x) - B_i(x) K_j(x)\} \hat{x}(x). \quad (145)$$

Considerando a lei de controle (144) e uma taxa de decaimento maior ou igual a $\beta \geq 0$, os controladores para controlar o sistema não linear (145) podem ser obtidos através do projeto dado pelo teorema a seguir inspirado nos resultados apresentados em (TANAKA et al., 2009).

Teorema 11. *Para o sistema não linear (142), suponha que exista uma matriz simétrica polinomial $X(\tilde{x}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$, matrizes polinomiais $M_j(x) \in \mathbb{R}^{m \times N}$ e uma constante $\beta \geq 0$, tais que (146) e (147) são satisfeitas, sendo $\varepsilon_1(x) > 0$ para todo $x \neq 0$ e $\varepsilon_{2ij} \geq 0$, são polinômios não negativos*

$$v^T (X(\tilde{x}) - \varepsilon_1(x)I) v \quad \text{é SOS.} \quad (146)$$

$$\begin{aligned} & -v^T \left(T(x)A_i(x)X(\tilde{x}) - T(x)B_i(x)M_j(x) + X(\tilde{x})A_i^T(x)T^T(x) - M_j^T(x)B_i^T(x)T^T(x) \right. \\ & \quad \left. + T(x)A_j(x)X(\tilde{x}) - T(x)B_j(x)M_i(x) + X(\tilde{x})A_j^T(x)T^T(x) - M_i^T(x)B_j^T(x)T^T(x) \right. \\ & \quad \left. - \sum_{k \in \kappa} \frac{\partial X(\tilde{x})}{\partial x_k} \left(A_i^k(x) \hat{x}(x) \right) - \sum_{k \in \kappa} \frac{\partial X(\tilde{x})}{\partial x_k} \left(A_j^k(x) \hat{x}(x) \right) + 4\beta X(\tilde{x}) + \varepsilon_{2ij}(x)I \right) v \\ & \quad \text{é SOS,} \quad i \leq j \end{aligned} \quad (147)$$

sendo $v \in \mathbb{R}^N$ um vetor que independe de x . A matriz $T(x) \in \mathbb{R}^{N \times n}$ definida conforme a equação (17).

Além disso, se (147) é factível com $\varepsilon_{2ij}(x) > 0$ para todo $x \neq 0$, então o ponto de equilíbrio $x = 0$ é assintoticamente estável e a taxa de decaimento é maior ou igual a $\beta \geq 0$. Se $X(\tilde{x})$ é uma matriz constante, então é garantida a estabilidade global do sistema. Os ganhos do controlador são dados por $K_i(x) = M_i(x)X^{-1}(\tilde{x})$.

Demonstração. A prova é semelhante a do Teorema 6. \square

Desta forma, torna-se possível representar e projetar controladores para um sistema não linear incerto globalmente, através de modelos *fuzzy* polinomial, com o conhecimento dos valores extremos das incertezas e funções não polinomiais, mas deve-se observar que nesta metodologia de projeto, as funções de pertinência serão incertas. Desta forma serão propostas leis de chaveamentos que irão estimar as funções de pertinência com o objetivo de reduzir a derivada da função de Lyapunov.

5.1 PROJETO DE CONTROLADORES CHAVEADOS VIA SOS

A seguir serão considerados dois casos para o projeto de controladores chaveados. O primeiro caso abordará sistemas que $B(\alpha, x) = B(x)$, ou seja, não haverá funções não polinomiais ou incertezas na matriz $B(x)$. O segundo caso abordará uma classe mais abrangente de sistemas nos quais a matriz $B(\alpha, x)$ é composta também por parâmetros incertos ou funções não polinomiais.

5.1.1 Caso 1: matriz $B(\alpha, x) = B(x)$ conhecida utilizando modelos *fuzzy* polinomiais

Nesta seção será proposto o projeto de um controlador chaveado para o sistema *fuzzy* polinomial incerto (142), considerando que $B(\alpha, x) = B(x)$, ou seja, não há funções não polinomiais e incertezas em $B(x)$, isto é

$$\dot{x} = A(\alpha, x)\hat{x}(x) + B(x)u. \quad (148)$$

Os controladores podem ser obtidos através do projeto dado no Teorema 11. A seguir será proposto um corolário considerando o caso em que $B(\alpha, x) = B(x)$.

Corolário 2. Para o sistema (148) com a lei de realimentação (144), suponha que exista uma matriz simétrica polinomial $X(\tilde{x}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$, matrizes polinomiais $M_i(x) \in \mathbb{R}^{m \times N}$ e uma constante $\beta \geq 0$, tais que (149) e (150) são satisfeitas, sendo $\varepsilon_1(x) > 0$ para todo $x \neq 0$ e $\varepsilon_{2ij} \geq 0$ para todos os valores de x

$$v^T (X(\tilde{x}) - \varepsilon_1(x)) v \quad \text{é SOS.} \quad (149)$$

$$\begin{aligned} & -v^T \left(T(x)A_i(x)X(\tilde{x}) + X(\tilde{x})A_i^T(x)T^T(x) \right. \\ & \quad \left. - T(x)B(x)M_i(x) - M_i^T(x)B^T(x)T^T(x) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{k \in \kappa} \frac{\partial X(\tilde{x})}{\partial x_k} (A_i^k(x)\hat{x}(x)) + 2\beta X(\tilde{x}) + \varepsilon_{2i}(x)I \right) v \quad \text{é SOS,} \end{aligned} \quad (150)$$

sendo $v \in \mathbb{R}^N$ um vetor que independe de x . A matriz $T(x) \in \mathbb{R}^{N \times n}$ definida conforme a equação (17).

Além disso, se (150) é factível com $\varepsilon_{2ij}(x) > 0$ para todo $x \neq 0$, então o ponto de equilíbrio $x = 0$ é assintoticamente estável e a taxa de decaimento é maior ou igual a $\beta \geq 0$. Se $X(\tilde{x})$ é uma matriz constante, então é garantida a estabilidade global do sistema. Os ganhos do controlador são dados por $K_i(x) = M_i(x)X^{-1}(\tilde{x})$.

Demonstração. Segue diretamente do Teorema 11, considerando $B_i(x) = B(x)$, $i \in \mathbb{K}_r$. \square

Suponha que as restrições (149) e (150) sejam factíveis e sejam $K_i(x) = M_i(x)X^{-1}(\tilde{x})$, $i \in \mathbb{K}_r$, os ganhos do controlador dados em (144) e $X(\tilde{x})$ obtidos das condições do Corolário 2. Então, considerando na Definição 3 $H_i(x) = X^{-1}(\tilde{x})T(x)B(x)K_i(x)$, define-se o controlador chaveado

$$u = u_\sigma = -K_\sigma(x)\hat{x}(x), \quad \sigma = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_N}^* \{ -\hat{x}^T(x)X^{-1}(\tilde{x})T(x)B(x)K_i(x)\hat{x}(x) \}, \quad \sigma \in \mathbb{K}_r. \quad (151)$$

Portanto, considerando (135), o sistema controlado (148) é dado por

$$\dot{x} = A(\alpha, x)\hat{x}(x) + Bu_\sigma = \sum_{i=1}^r \alpha_i \left(A_i(x) - B(x)K_\sigma \right). \quad (152)$$

Teorema 12. *Suponha que as condições do Corolário 2 sejam satisfeitas com $\varepsilon_{2ij}(x) > 0$ para todo $x \neq 0$ e $X(\tilde{x})$ é uma matriz constante, relativas ao sistema (148) com a lei de controle (144) e obtenha $K_i(x) = M_i(x)X^{-1}(\tilde{x})$, $i \in \mathbb{K}_r$. Então a lei de controle chaveada dada em (151) torna o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema (148), globalmente assintoticamente estável.*

Demonstração. A demonstração é semelhante a do Teorema 7. \square

O Teorema 12 mostra que, se as condições do Corolário 2 forem satisfeitas, então a derivada da função de Lyapunov com a lei de realimentação chaveada (151) será menor ou igual que a derivada da função de Lyapunov utilizando as funções de pertinência. Deve-se observar que as funções de pertinência podem ser incertas. Assim, a utilização da lei de chaveamento se faz eficaz ao, de certa forma, sintetizar as funções de pertinência com o objetivo de reduzir a derivada das funções de Lyapunov.

5.1.2 Caso 2: matriz $B(\alpha, x)$ incerta utilizando modelos *fuzzy* polinomiais

Neste caso, será considerado o sistema *fuzzy* similar ao dado em (142), como α_i , $i \in \mathbb{K}_r$, definido em (135), ou seja,

$$\dot{\check{x}} = \check{A}(\alpha, \check{x})\hat{\check{x}}(\check{x}) + \check{B}(\alpha, \check{x})u, \quad \check{A}(\alpha, \check{x}) = \sum_{i=1}^r \alpha_i \check{A}_i(\check{x}), \quad \check{B}(\alpha, \check{x}) = \sum_{i=1}^r \alpha_i \check{B}_i(\check{x}), \quad (153)$$

sendo \check{x} o vetor de estado da planta e $\hat{\check{x}}(\check{x})$ um vetor de monômios em função do \check{x} .

Seja $v \in \mathbb{R}^n$ a derivada temporal do vetor de entrada de controle $u \in \mathbb{R}^m$. Defina x_{n+l} e v_l , tais que $\dot{x}_{n+l} = \dot{u}_l = v_l$, ou seja, $x_{n+l} = u_l = \int_0^t v_l dt$, $l = 1, 2, \dots, m$. Assim, obtém-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{\check{x}} = \check{A}(\alpha, \check{x})\hat{\check{x}}(\check{x}) + \check{B}(\alpha, \check{x})u, \\ \dot{x}_{n+1} = v_1, \\ \vdots \\ \dot{x}_{n+m} = v_m, \end{cases} \quad (154)$$

ou equivalente (BARMISH, 1983),

$$\dot{x} = A(\alpha, x)\hat{x}(x) + B(x)v, \quad (155)$$

sendo

$$x = \begin{bmatrix} \check{x}^T & x_{n+1} & \dots & x_{n+m} \end{bmatrix}^T, \quad A(\alpha, \check{x}) = \begin{bmatrix} \check{A}(\alpha, \check{x}) & \check{B}(\alpha, \check{x}) \\ 0_{m \times N} & 0_{m \times m} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ I_{m \times m} \end{bmatrix}.$$

Das considerações acima, nota-se que o sistema (155) é equivalente ao sistema (148) e portanto o problema cai no Caso 1, sendo $\hat{x}(x) \in \mathbb{R}^{(N+m) \times 1}$. Assim, pode-se adotar o procedimento estabelecido no Caso 1 para projetar a lei de controle chaveada $v = K_\sigma(x)\hat{x}(x)$, $K_\sigma \in \mathbb{R}^{m \times (N+m)}$.

A seguir será proposto uma nova lei de chaveamento, considerando também o caso em que a matriz $B(\alpha, x)$ contém parâmetros incertos, mas sem a necessidade de utilizar integradores como em (153)-(155). Esta nova lei de chaveamento utiliza matrizes auxiliares $Q_j \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $j \in \mathbb{K}_r$, que serão definidas posteriormente, e escolhe um índice σ . Esta lei de chaveamento também terá por objetivo reduzir a derivada da função de Lyapunov.

Considere que no projeto do controlador as restrições sejam factíveis para todo $i \in \mathbb{K}_r$ e sejam $K_j(x) = M_j(x)X^{-1}(\check{x})$, $j \in \mathbb{K}_r$, os ganhos do controlador (144). Então, considerando a Definição 3 $H_i = Q_j(x)$, define-se o controlador chaveado,

$$u = u_\sigma = -K_\sigma(x)\hat{x}(x), \quad \sigma = \arg \min_{j \in \mathbb{K}_r}^* \{\hat{x}^T(x)Q_j(x)\hat{x}(x)\}, \quad \sigma \in \mathbb{K}_r. \quad (156)$$

ou seja, $\sigma \in \mathbb{K}_r$ possui o valor do índice j que resulta no menor valor de $\hat{x}^T(x)Q_j(x)\hat{x}(x)$.

Teorema 13. Para o sistema (138) e (156), suponha que existam matrizes simétricas polinomiais $X(\tilde{x}), Q_i(x), Z_i(x) \in \mathbb{R}^{N \times N}$, matrizes polinomiais $M_i(x) \in \mathbb{R}^{m \times N}$ e uma constante $\beta \geq 0$, tais que (157), (158) e (159) são satisfeitas, sendo $\varepsilon_1(x) > 0$ para todo $x \neq 0$ e $\varepsilon_{2ij}(x) \geq 0$ para todos os valores de x , sendo polinômios não negativos:

$$v_1^T (X(\tilde{x}) - \varepsilon_1(x)I) v_1 \quad \text{é SOS}, \quad (157)$$

$$-v^T \left(T(x)A_i(x)X(\tilde{x}) + X(\tilde{x})A_i^T(x) - \sum_{k \in \kappa} \frac{\partial X(\tilde{x})}{\partial x_k} A_i^k(x) \hat{x}(x) + \hat{Q}_i(x) + \hat{Z}_i(x) + 2\beta X(\tilde{x}) + \varepsilon_{2i}(x)I \right) v \quad \text{é SOS}, \quad (158)$$

$$-v^T \left(-T(x)B_i(x)M_j(x) - M_j^T(x)B_i^T(x)T(x) - \hat{Z}_i(x) - \hat{Q}_j(x)\varepsilon_{3ij}(x)I \right) v \quad \text{é SOS}, \quad (159)$$

sejam satisfeitas para todo i e j , sendo $v \in \mathbb{R}^N$ um vetor que independe de x . A matriz $T(x) \in \mathbb{R}^{N \times n}$ definida conforme a equação (17).

Além disso, se (158) é factível com $\varepsilon_{2ij}(x) > 0$ para todo $x \neq 0$, então o ponto de equilíbrio em $x = 0$ é assintoticamente estável e a taxa de decaimento é maior ou igual a $\beta \geq 0$. Se $X(\tilde{x})$ é uma matriz constante, então é garantida a estabilidade global do sistema através da lei de chaveamento (156), sendo $K_i(x) = M_i(x)X^{-1}(\tilde{x})$ e $Q_i(x) = X^{-1}(\tilde{x})\hat{Q}_i(x)X^{-1}(\tilde{x})$.

Demonstração. A demonstração é semelhante a do Teorema 8. □

5.2 RESULTADOS E SIMULAÇÕES

Nesta seção, serão apresentados exemplos do controle de sistemas não lineares incertos via SOS baseados em modelos *fuzzy* polinomial utilizando ganhos chaveados de acordo com uma lei de chaveamento, cujo o objetivo é reduzir a derivada da função de Lyapunov. Com exemplos e simulações será possível verificar a eficiência da metodologia de controle proposta.

5.2.1 Exemplo 1 - exemplo numérico

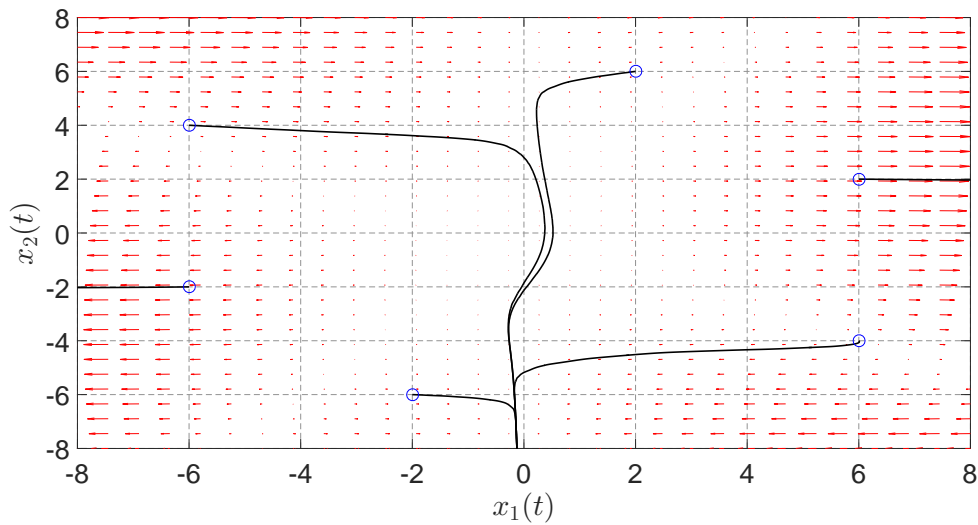
Considere o sistema não linear adaptado de (TANAKA et al., 2009), contendo duas incertezas $\Delta_1(t)$ e $\Delta_2(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (-1 + \Delta_1(t) + x_1 + x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2)x_1 + x_2 + x_1u, \\ \dot{x}_2 &= -2 \sin(x_1) - (6 + \Delta_2(t))x_2 + 7u, \end{aligned} \quad (160)$$

sendo que $\Delta_1(t) = c_a \sin(200\pi t)$, $\Delta_2(t) = c_b \sin(200\pi t)$, c_a e c_b são valores incertos e u é o sinal de controle.

Na Figura 19 é representado o plano de fase do sistema (160) em malha aberta, sendo a condição inicial representado por um círculo em azul. As condições finais após 10 segundos se distanciam muito da origem e por este motivo não estão representadas.

Figura 19 - Plano de fase do sistema (160) em malha aberta.



Fonte: Próprio Autor.

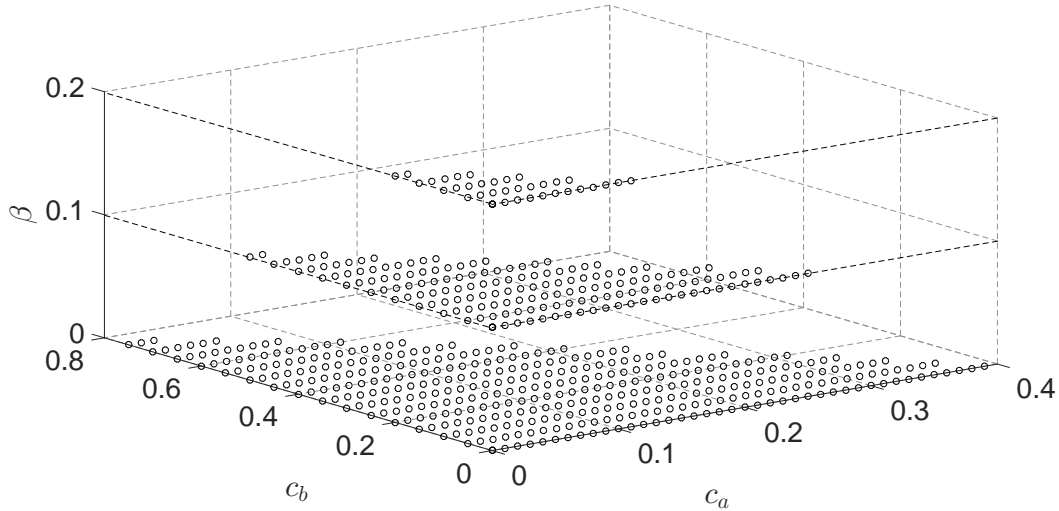
As funções de pertinência no projeto de controle robusto utilizando a modelagem *fuzzy* proposta, devido às incertezas, são incertas. O número de funções não polinomiais e incertezas independentes presentes no sistema é igual a 3, portanto o número de modelos locais necessários para representar de forma exata o sistema não linear incerto é igual a $2^3 = 8$ modelos locais.

Portanto, o sistema não linear com parâmetros incertos pode ser representado utilizando a variação paramétrica das incertezas como em (148), considerando que $\hat{x}(x) = x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$,

$$\begin{aligned}
A_1(x) &= \begin{bmatrix} -1 + \max(c_a) + x_1 + x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2 & 1 \\ -2 & -6 + \max(c_b) \end{bmatrix}, \\
A_2(x) &= \begin{bmatrix} -1 + \max(c_a) + x_1 + x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2 & 1 \\ 0,4344 & -6 + \max(c_b) \end{bmatrix}, \\
A_3(x) &= \begin{bmatrix} -1 - \max(c_a) + x_1 + x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2 & 1 \\ -2 & -6 + \min(c_b) \end{bmatrix}, \\
A_4(x) &= \begin{bmatrix} -1 - \max(c_a) + x_1 + x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2 & 1 \\ 0,4344 & -6 + \min(c_b) \end{bmatrix}, \\
A_5(x) &= \begin{bmatrix} -1 + \min(c_a) + x_1 + x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2 & 1 \\ -2 & -6 - \max(c_b) \end{bmatrix}, \\
A_6(x) &= \begin{bmatrix} -1 + \min(c_a) + x_1 + x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2 & 1 \\ 0,4344 & -6 - \max(c_b) \end{bmatrix}, \\
A_7(x) &= \begin{bmatrix} -1 - \min(c_a) + x_1 + x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2 & 1 \\ -2 & -6 - \min(c_b) \end{bmatrix}, \\
A_8(x) &= \begin{bmatrix} -1 - \min(c_a) + x_1 + x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2 & 1 \\ 0,4344 & -6 - \min(c_b) \end{bmatrix}, \\
B_1(x) = B_2(x) = \dots = B_8(x) &= \begin{bmatrix} x_1 \\ 7 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{161}$$

Através do projeto dos ganhos do controlador chaveado dado no Corolário 2 considerando $\varepsilon_1 = 10^{-9}$, $\varepsilon_{2i}(x) = 10^{-9} \times (x_1 + x_2)$, $X(\tilde{x})$ uma matriz constante e $M(x)$ uma matriz polinomial, sendo que cada elemento é um polinômio contendo os monômios de ordem 0 e 1. A região de factibilidade do projeto dos ganhos para o controlador chaveado é descrita na Figura 20 e será dada em função dos valores incertos c_a, c_b e da taxa de decaimento maior ou igual a $\beta \geq 0$.

Figura 20 - Região de factibilidade com a aplicação do controlador chaveado (151) para o sistema (160) considerando o projeto dos ganhos através do Corolário 2 .



Fonte: Próprio Autor.

Deve-se observar a influência da taxa de decaimento na região de factibilidade, pois quanto maior a taxa de decaimento, houve uma menor região de factibilidade em relação aos valores das incertezas. Considerando $c_b = \beta = 0$ tem-se o exemplo dado em (TANAKA et al., 2016), que considera no projeto dos controladores incertezas limitadas em norma e região não convexa, sendo que foi obtido um controlador para $c_a \leq 0.76$. Este artigo também apresenta uma comparação com a metodologia do trabalho (CAO et al., 2014), que obteve controladores para $c_a \leq 0.39$, o mesmo obtido nesta dissertação. Deve-se observar que na metodologia proposta, não há a necessidade de se utilizar as funções de pertinência para compor o sinal de controle e o projeto pode ser realizado de maneira sistemática conhecendo os valores de máximo e mínimo das incertezas, sem a necessidade de matrizes adicionais. Em (TANAKA et al., 2016) e (CAO et al., 2014), os procedimentos de projeto utilizados consideram o conhecimento das funções de pertinência para a implementação das leis de controle.

A vantagem da metodologia proposta é que não há a necessidade de utilizar as funções de pertinência para compor o sinal de controle.

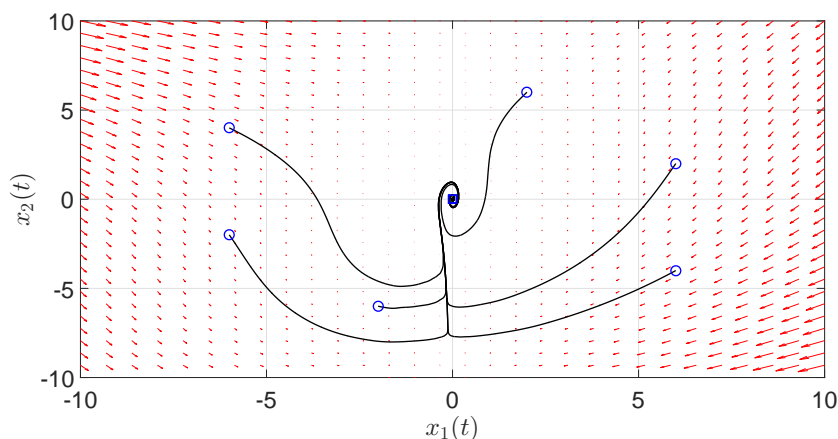
Considerando o projeto para dos ganhos do controlador chaveado utilizando o Corolário 2, sendo $\beta = 0.1$, $c_a = 0.14$ e $c_b = 0.25$, os resultados obtidos são dados a seguir:

$$X(\tilde{x}) = 10^5 \times \begin{bmatrix} 0.1566 & -8.3682 \times 10^{-10} \\ -8.3682 \times 10^{-10} & 2.3896 \end{bmatrix}, \quad (162)$$

$$\begin{aligned}
K_1(x) &= \begin{bmatrix} 1,7813x_1 + 0,010871x_2 + 1,8678 \\ -2,7966 \times 10^{-10}x_1 - 1,4928 \times 10^{-09}x_2 - 0,78392 \end{bmatrix}^T, \\
K_2(x) &= \begin{bmatrix} 1,7804x_1 + 0,019427x_2 + 2,2178 \\ 4,9319 \times 10^{-10}x_1 + 1,8711 \times 10^{-09}x_2 - 0,7839 \end{bmatrix}^T, \\
K_3(x) &= \begin{bmatrix} 1,7823x_1 + 0,011106x_2 + 1,8674 \\ -3,8433 \times 10^{-10}x_1 - 1,9388 \times 10^{-09}x_2 - 0,78393 \end{bmatrix}^T, \\
K_4(x) &= \begin{bmatrix} 1,7866x_1 + 0,0086538x_2 + 2,2232 \\ -2,9754 \times 10^{-09}x_1 - 4,643 \times 10^{-09}x_2 - 0,78409 \end{bmatrix}^T, \\
K_5(x) &= \begin{bmatrix} 1,9285x_1 + 0,016337x_2 + 1,8711 \\ -3,3689 \times 10^{-10}x_1 - 1,6954 \times 10^{-09}x_2 - 0,85523 \end{bmatrix}^T, \\
K_6(x) &= \begin{bmatrix} 1,9285x_1 + 0,018146x_2 + 2,2175 \\ -5,9315 \times 10^{-10}x_1 - 3,0008 \times 10^{-09}x_2 - 0,85523 \end{bmatrix}^T, \\
K_7(x) &= \begin{bmatrix} 1,9307x_1 + 0,012469x_2 + 1,8686 \\ -2,4958 \times 10^{-10}x_1 - 2,0848 \times 10^{-09}x_2 - 0,85526 \end{bmatrix}^T, \\
K_8(x) &= \begin{bmatrix} 1,9353x_1 + 0,0079817x_2 + 2,2076 \\ -9,3492 \times 10^{-10}x_1 - 2,5724 \times 10^{-09}x_2 - 0,85535 \end{bmatrix}^T,
\end{aligned} \tag{163}$$

Na Figura 21 pode ser visualizado o plano de fase do sistema (160), considerando $c_a = 0,14$ e $c_b = 0,25$, em malha fechada através dos ganhos dados em (163) chaveados a partir da lei de controle (151).

Figura 21 - Plano de fase do sistema (160) considerando $c_a = 0.14$ e $c_b = 0.25$, em malha fechada através dos ganhos dados em (163) e a lei de controle chaveado (151).

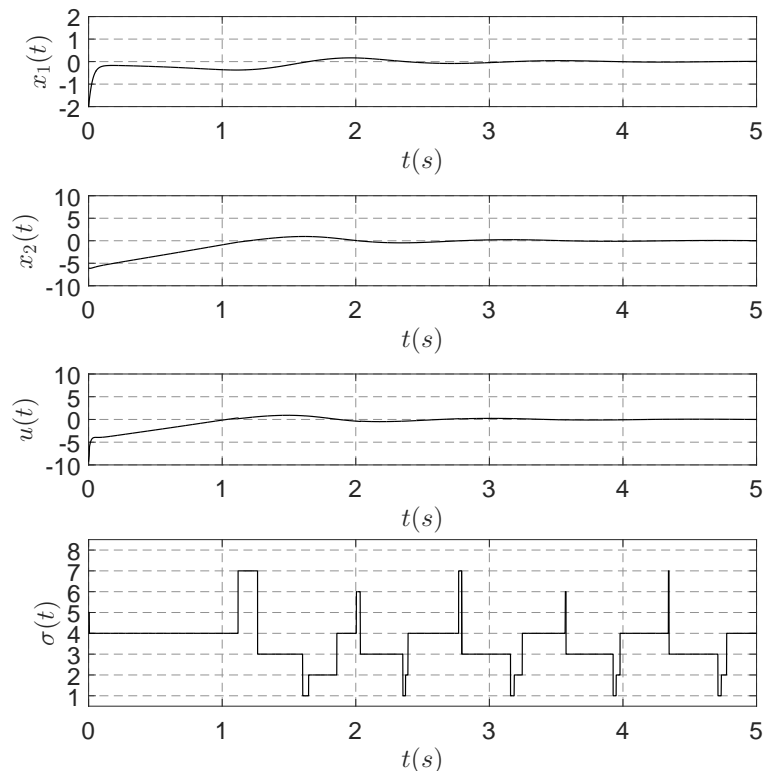


Fonte: Próprio Autor.

Na Figura 22 podem ser visualizados as variáveis de estado do sistema ao longo do tempo,

o sinal de controle e o chaveamento ao longo do tempo considerando a condição inicial $x(0) = \begin{bmatrix} -2 & -6 \end{bmatrix}^T$ sendo $c_a = 0,14$ e $c_b = 0,25$.

Figura 22 - Variáveis de estado, sinal de controle e chaveamento do sistema (160) considerando $c_a = 0,14$ e $c_b = 0,25$, utilizando os ganhos dados em (163) e a lei de controle chaveada (151).



Fonte: Próprio autor.

5.2.2 Exemplo 2 - exemplo numérico

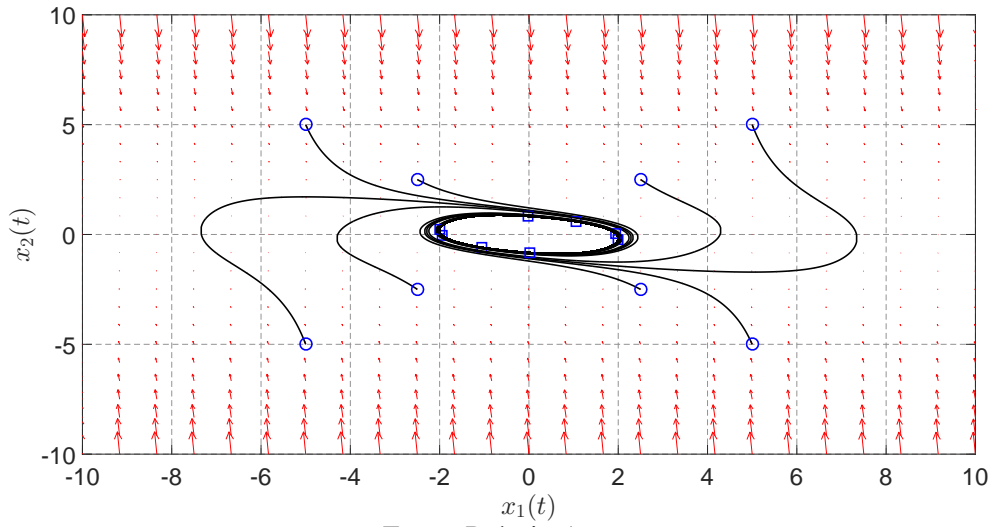
Considere o seguinte sistema não linear adaptado do trabalho (TANAKA et al., 2012):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \text{sen}(x_1) - 5x_2 + (x_2^2 + 5)u, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2^3. \end{aligned} \tag{164}$$

sendo u o sinal de controle.

Na Figura 23 é apresentado o plano de fase do sistema (164) em malha aberta, sendo a condição inicial e final após 100 segundos representados por um círculo e um quadrado em azul respectivamente.

Figura 23 - Plano de fase do sistema (164) em malha aberta.



Fonte: Próprio Autor.

Neste exemplo será considerado que pode haver uma falha de 90% do sinal de controle. Portanto, o sistema não linear com parâmetros incertos pode ser representado utilizando a variação paramétrica das incertezas como em (148), considerando que $\hat{x}(x) = x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$,

$$\begin{aligned} A_1(x) = A_3(x) &= \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -x_2^2 \end{bmatrix}, & A_2(x) = A_4(x) &= \begin{bmatrix} -0,2172 & 5 \\ -1 & -x_2^2 \end{bmatrix}, \\ B_1(x) = B_2(x) &= \begin{bmatrix} x_2^2 + 5 \\ 0 \end{bmatrix}, & B_3(x) = B_4(x) &= 0,1 \times \begin{bmatrix} x_2^2 + 5 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (165)$$

Desta forma, será considerando que pode haver o caso em que $u = \lambda K(x)\hat{x}(x)$, sendo $0, 1 \leq \lambda \leq 1$, considerando o caso em haja 100% do sinal de controle ($\lambda = 1$) sendo aplicado no sistema até o caso em haja apenas 10% do do sinal de controle ($\lambda = 0,1$), sendo possível desta forma haver uma falha no atuador do sistema de até 90%.

Através do projeto dos ganhos do controlador chaveado dado no Teorema 13 considerando $\varepsilon_1(x) = \varepsilon_{2i}(x) = \varepsilon_{3ij}(x) = 10^{-9}(x_1^2 + x_2^2)$, $X(\bar{x})$, $Q(x)$ e $Z(x)$ são matrizes constantes, $M(x)$ é uma matriz cujos elementos são polinômios formados por monômios da ordem 0 e 1, e será considerado que a taxa de decaimento especificada é maior ou igual a $\beta = 0$. Portanto, os resultados obtidos são dados a seguir.

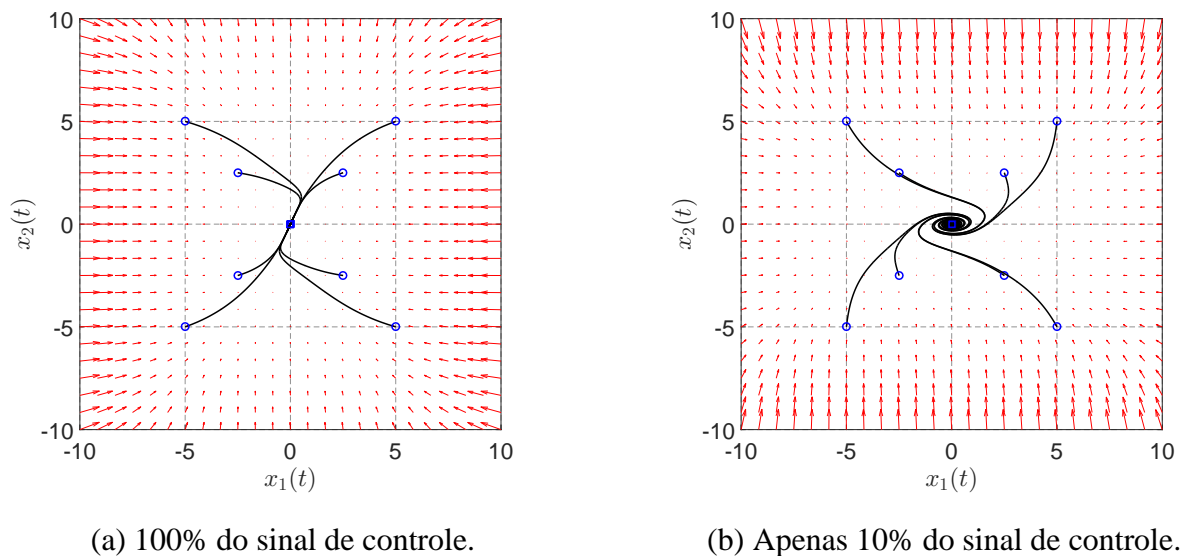
$$\begin{aligned} K_1(x) &= \begin{bmatrix} 1,4595 & -2,3779 \times 10^{-8} \\ 2,5314 & -4,1243 \times 10^{-8} \end{bmatrix}, & K_2(x) &= \begin{bmatrix} 1,4367 & -2,3408 \times 10^{-8} \\ 1,5687 & -2,5558 \times 10^{-8} \end{bmatrix}, \\ K_3(x) &= \begin{bmatrix} 1,4595 & -2,3779 \times 10^{-8} \\ 2,5314 & -4,1243 \times 10^{-8} \end{bmatrix}, & K_4(x) &= \begin{bmatrix} 1,4367 & -2,3408 \times 10^{-8} \\ 1,5687 & -2,5558 \times 10^{-8} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (166)$$

$$\begin{aligned} Q_1(x) &= \begin{bmatrix} -0,14987 & 0,058169 \\ 0,058169 & 0,088775 \end{bmatrix}, & Q_2(x) &= \begin{bmatrix} 7,3427 & 0,058169 \\ 0,058169 & 0,088775 \end{bmatrix}, \\ Q_3(x) &= \begin{bmatrix} -160,1693 & 0,058153 \\ 0,058153 & 0,088775 \end{bmatrix}, & Q_4(x) &= \begin{bmatrix} -40,6331 & 0,058151 \\ 0,058151 & 0,088775 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (167)$$

$$X(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} 72,9305 & 2,3764 \times 10^{-7} \\ 2,3764 \times 10^{-7} & 14,5861 \end{bmatrix}, \quad (168)$$

Na Figura 24 é apresentado o plano de fase do sistema (165) considerando os ganhos (166) para o controlador chaveado (156) considerando as condições iniciais e finais após 20 segundos, representadas por um círculo e um quadrado em azul respectivamente.

Figura 24 - Planos de fase do sistema (165) considerando os ganhos (166) para o controlador chaveado (156).



Fonte: Próprio autor.

Através deste exemplo pode-se verificar a estabilidade assintótica global de sistemas não lineares incertos utilizando modelos *fuzzy* polinomiais via SOS, através de uma lei de chaveamento.

5.3 COMENTÁRIOS

Neste capítulo foi proposto o projeto de controladores considerando sistemas não lineares incertos em geral, utilizando modelos *fuzzy* polinomial. Os controladores com ganhos chaveados trazem algumas vantagens em relação as técnicas utilizadas na literatura (CAO et al., 2014; TANAKA et al., 2016), como a não necessidade da utilização das funções de pertinência e um desempenho melhor dos controladores em comparação com os ganhos interpolados com as funções de pertinência. Pode-se verificar na Seção 5.2 os resultados com os controladores propostos neste capítulo.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

De um modo geral, neste trabalho procura-se estabelecer novos projetos de controle para sistemas não lineares incertos, utilizando como recurso a decomposição em soma de quadrados, que pode ser vista como uma extensão das desigualdades matriciais lineares. As desigualdades matriciais lineares é uma metodologia comumente utilizada para a análise de desempenho e projeto de controladores para sistemas lineares e não lineares utilizando modelos *fuzzy* TS com parte consequente linear.

No Capítulo 1 foi apresentada uma revisão do estado da arte para o controle de sistemas não lineares de forma mais abrangente, sendo possível conhecer técnicas relevantes atualmente disponíveis para o projeto de controladores para sistemas não lineares baseados na decomposição em soma de quadrados. No Capítulo 2 foi apresentada uma revisão da literatura em que os conceitos fundamentais necessários para o desenvolvimento e compreensão do trabalho foram revisados, dentre esses, destacam-se; *i*) a estabilidade no sentido de Lyapunov; *ii*) projeto de controladores baseado em desigualdades matriciais lineares para sistemas lineares; *iii*) projeto de controladores baseado em decomposição em soma de quadrados para sistemas não lineares cuja a dinâmica é representada apenas por funções polinomiais, possibilitando deste modo, observar que a metodologia via SOS é mais geral do que a baseada em LMIs.

No Capítulo 3 também foi apresentada uma revisão da literatura com foco em modelos *fuzzy* com parte consequente linear e polinomial, destacando; *i*) projeto de controladores para sistemas não lineares baseado em modelos *fuzzy* TS considerando funções de Lyapunov quadráticas; *ii*) projeto de controladores para sistemas não lineares baseado em modelos *fuzzy* polinomial considerando funções de Lyapunov polinomiais; *iii*) estudo e comparação do setor não linear de acordo com as duas metodologias tratadas; *iv*) comparação entre os modelos *fuzzy* lineares e polinomiais.

6.1 PRINCIPAIS CONTRIBUIÇÕES

No Capítulo 4 foram propostas metodologias de controle baseadas na decomposição em soma de quadrados para sistemas não lineares com incertezas politópicas com a dinâmica do sistema descrita apenas por funções polinomiais. O primeiro projeto estudado, visa o projeto de um único ganho polinomial de acordo com a lei de realimentação $u = -K(x)\hat{x}(x)$. Em seguida foram propostos dois outros métodos de projeto para a mesma classe de sistema considerando controladores com ganhos chaveados, de acordo com a lei de realimentação $u = -K_{\sigma}(x)\hat{x}(x)$.

Foi possível provar que se houver um controlador com ganho único $K(x)$ que garanta a estabilidade do sistema, haverá um controlador com ganhos chaveados $K_{\sigma}(x)$, projetado com o método proposto. Através de um exemplo pode-se observar que o contrário não é válido.

Com o objetivo de projetar controladores para sistemas lineares incertos, cuja a dinâmica não pode ser descrita apenas por funções polinomiais, no Capítulo 5 foram propostos controladores com ganhos chaveados baseados na decomposição em soma de quadrados, utilizando uma lei de controle do tipo $u = -K_{\sigma}(x)\hat{x}(x)$. As incertezas foram consideradas nos modelos *fuzzy* polinomiais, desta forma, as funções de pertinência serão incertas o que torna adequada a utilização das lei de chaveamento proposta para, de certa forma, sintetizar a função de pertinência. Deste modo, não há a necessidade de se conhecer as funções de pertinência, que muitas vezes podem ser complexas e/ou desconhecidas.

Os projetos de controladores para sistemas não lineares incertos propostos se diferenciam do projeto de controladores com incertezas limitadas baseado em SOS descritos na literatura por não dependerem das funções de pertinência para compor o sinal de controle. Através das leis de chaveamento propostas, pode-se realizar projetos de controladores considerando a norma H_{∞} , sistemas sujeitos a saturação no sinal de controle, restrição na entrada, entre outros índices de desempenho.

6.2 PERSPECTIVAS FUTURAS

- Estabelecer condições de relaxamento baseado no trabalho (KIM; PARK; JOO, 2016). Deste modo, considerando aplicações práticas, o objetivo será tornar os ganhos do controlador independentes da matriz polinomial $X(\tilde{x})$.
- Na metodologia proposta neste trabalho, foram consideradas candidatas à função de Lyapunov $V(x) = \hat{x}(x)X^{-1}(\tilde{x})\hat{x}$, sendo \tilde{x} composto pelas variáveis de estado que não são diretamente afetadas pela entrada de controle. Baseado na proposta do trabalho (GASSARA; HAJJAJI; CHAABANE, 2016) pretende-se considerar candidatas à função de Lyapunov mais gerais $V(x) = \hat{x}(x)X^{-1}(x)\hat{x}$.
- Tendo em vista aplicações práticas, pretende-se considerar saturação no sinal de controle, estabelecendo deste modo uma região de operação, como em (ALVES et al., 2016; KLUG; CASTELAN; COUTINHO, 2015) e (GASSARA; HAJJAJI; CHAABANE, 2016). Podendo ainda estabelecer projetos de controle semi-globalmente estáveis como em (TANAKA et al., 2016).

6.3 PUBLICAÇÕES

6.3.1 Trabalho completo publicado em anal de congresso

RAMOS, I. T. M.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R.; ALVES, U. N. L. T.; MACHADO, E. R. M. D. Controle do sistema caótico de lorenz utilizando soma de quadrados. In: CONFERÊNCIA BRASILEIRA DE DINÂMICA, CONTROLE E APLICAÇÕES - DINCON, 41, 2017, São José do Rio Preto. **Anais...** São José do Rio Preto: SBA, 2017. p. 1-7.

6.3.2 Trabalho completo aceito em congresso

RAMOS, I. T. M.; ALVES, U. N. L. T.; de OLIVEIRA, D. R. de; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; MACHADO, E. R. M. D.; ASSUNÇÃO, E. On switched controller design for robust control of uncertain polynomial nonlinear systems using sum of squares. In: SYMPOSIUM ON ROBUST CONTROL DESIGN- IFAC, 9., 2018, Florianópolis. **Symposium...** Florianópolis: [s.n.], 2018.

REFERÊNCIAS

- ALVES, U. N. L.; TEIXEIRA, M.; OLIVEIRA, D. R.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E.; SOUZA, W. A. Smoothing switched control laws for uncertain nonlinear systems subject to actuator saturation. **International Journal of Adaptive Control and Signal Processing**, West Sussex, v. 30, n. 8-10, p. 1408–1433, 2016.
- BALDI, S.; KOSMATOPOULOS, E. B.; IOANNOU, P. A. Semiglobal stabilization of nonlinear uncertain systems via a Lyapunov-based switching logic. In: CONFERENCE ON AND CONTROL, 52, 2013, Florence. **Proceedings...** Florence: IEEE, 2013. p. 7259–7264.
- BARMISH, B. Stabilization of uncertain systems via linear control. **Automatic Control, IEEE Transactions on**, Piscataway, v. 28, n. 8, p. 848–850, 1983.
- BOYD, S.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. **Linear matrix inequalities in system and control theory**. Philadelphia: SIAM, 1994. 193 p.
- BUZETTI, A. S. **Projeto de controle robusto chaveado com falhas nos sensores**. 2017. 88 f. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista (UNESP) – Júlio de Mesquita Filho – UNESP, Ilha Solteira, 2017.
- CAO, K.; GAO, X. Z.; VASILAKOS, T.; PEDRYCZ, W. Analysis of stability and robust stability of polynomial fuzzy model-based control systems using a sum-of-squares approach. **Soft Computing**, Heidelberg, v. 18, n. 3, p. 433–442, March 2014.
- CHEN, C.-T. **Linear system theory and design**. [S.l.]: Oxford University Press, Inc., 1998. 461 p.
- CHEN, G.; UETA, T. Yet another chaotic attractor. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, New Jersey, v. 9, n. 7, p. 1465–1466, July 1999.
- CHEN, S.-H.; JUANG, J.-C. A switching controller design via sum-of-squares approach for a class of polynomial TS fuzzy model. **International Journal of Innovative Computing, Information and Control**, v. 7, n. 7 b, p. 4363–4376, July 2011.
- CHEN, Y. J.; TANAKA, M.; TANAKA, K.; WANG, H. O. Nonconvex stabilization criterion for polynomial fuzzy systems. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 52., 2013, Florence. **Proceedings...** Florence: IEEE, 2013. p. 7415–7419.
- CHEN, Y.-J.; TANAKA, M.; TANAKA, K.; WANG, H. O. Stability analysis and region-of-attraction estimation using piecewise polynomial Lyapunov functions: polynomial fuzzy model approach. **Fuzzy Systems, IEEE Transactions on**, Piscataway, v. 23, n. 4, p. 1314–1322, 2015.
- CHUANG, C. F.; WANG, W. J.; SUN, Y. J.; CHEN, Y. J. Convergence time guarantee for

- uncertain chaotic systems synchronisation. **International Journal of Systems Science**, Taylor & Francis, v. 44, n. 6, p. 1052–1060, June 2013.
- DEAECTO, G. S.; GEROMEL, J. C.; DAAFOUZ, J. Switched state-feedback control for continuous time-varying polytopic systems. **International Journal of Control**, Oxfordshire, v. 84, n. 9, p. 1500–1508, Sep 2011.
- GASSARA, H.; HAJJAJI, A. E.; CHAABANE, M. Control of time delay polynomial fuzzy model subject to actuator saturation. **International Journal of Fuzzy Systems**, Heidelberg, v. 18, n. 5, p. 763–772, Oct 2016.
- GATERMANN, K.; PARRILO, P. A. Symmetry groups, semidefinite programs, and sums of squares. **Journal of Pure and Applied Algebra**, Heidelberg, v. 192, n. 1–3, p. 95–128, Sep 2004.
- GEROMEL, J. C.; DEAECTO, G. S. Switched state feedback control for continuous-time uncertain systems. **Automatica**, Oxford, v. 45, n. 2, p. 593–597, 2009.
- GRAHAM, A. **Kronecker products and matrix calculus with applications**. Nova Iorque: John Wiley & Sons, 1981. 129 p.
- GRZYBOWSKI, J.; RAFIKOV, M.; BALTHAZAR, J. M. Synchronization of the unified chaotic system and application in secure communication. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, Heidelberg, v. 14, n. 6, p. 2793–2806, 2009.
- GUELTON, K.; MANAMANNI, N.; DUONG, C.-C.; KOUMBA-EMIANIWE, D. L. Sum-of-squares stability analysis of Takagi-Sugeno systems based on multiple polynomial Lyapunov functions. **International Journal of Fuzzy Systems**, Tapei, v. 15, n. 1, p. 1–8, 2013.
- HUANG, W.-C.; HONG-FEI, S.; JIAN-PING, Z. Robust control synthesis of polynomial nonlinear systems using sum of squares technique. **Acta Automatica Sinica**, Beijing, v. 39, n. 6, p. 799–805, June 2013.
- JENNAWASIN, T.; NARIKIYO, T.; KAWANISHI, M. An improved SOS-based stabilization condition for uncertain polynomial systems. In: **SICE ANNUAL CONFERENCE**, n. 48, 2010, Tapei. **Proceedings...** Tapei: IEEE, 2010. p. 3030–3034.
- KIM, H. S.; PARK, J. B.; JOO, Y. H. Less conservative robust stabilization conditions for the uncertain polynomial fuzzy system under perfect and imperfect premise matching. **International Journal of Control, Automation and Systems**, Heidelberg, v. 14, n. 6, p. 1588–1598, Dec 2016.
- KLUG, M.; CASTELAN, E. B.; COUTINHO, D. A T–S fuzzy approach to the local stabilization of nonlinear discrete-time systems subject to energy-bounded disturbances. **Journal of Control, Automation and Electrical Systems**, Heidelberg, v. 26, n. 3, p. 191–200, 2015.
- LAM, H. Chaotic synchronisation using output/full state-feedback polynomial controller. **Control Theory Applications, IET**, Stevenage, v. 4, n. 11, p. 2285–2292, 2010.
- LAM, H.; LI, H. Synchronization of chaotic systems using sampled-data polynomial controller.

Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, London, v. 136, n. 3, p. 031006–1–031006–7, May 2014.

LAM, H. K. Polynomial fuzzy-model-based control systems: stability analysis via piecewise-linear membership functions. **Fuzzy Systems, IEEE Transactions on**, Piscataway, v. 19, n. 3, p. 588–593, 2011.

LEE, H. J.; PARK, J. B.; CHEN, G. Robust fuzzy control of nonlinear systems with parametric uncertainties. **Fuzzy Systems, IEEE Transactions on**, Piscataway, v. 9, n. 2, p. 369–379, Apr 2001.

LI, W.; WANG, W. Guaranteed cost control for polynomial fuzzy time delay systems by sum-of-squares approach. In: **WORLD CONGRESS INTELLIGENT CONTROL AND AUTOMATION**, 10., 2012, Beijing. **Proceedings...** Beijing: IEEE, 2012. p. 1806–1811.

LOFBERG, J. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: **IEEE INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON COMPUTER AIDED CONTROL SYSTEMS DESIGN**, 34., 2004, Taipei. **Proceedings...** Taipei: IEEE, 2004. p. 284–289.

LORENZ, E. N. Deterministic nonperiodic flow. **Journal of the atmospheric sciences**, Boston, v. 20, n. 2, p. 130–141, March 1963.

LÜ, J.; CHEN, G.; CHENG, D.; CELIKOVSKY, S. Bridge the gap between the lorenz system and the chen system. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, New Jersey, v. 12, n. 12, p. 2917–2926, Dec 2002.

LÜ, J.; CHEN, G.; ZHANG, S. The compound structure of a new chaotic attractor. **Chaos, Solitons and Fractals**, Heidelberg, v. 14, n. 5, p. 669–672, Sep 2002.

MACHADO, E. R. M. D. **Modelagem e controle de sistemas fuzzy Takagi-Sugeno**. 2003. 209 f. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Júlio de Mesquita Filho – UNESP, Ilha Solteira, 2003.

MENDEL, J. M.; JOHN, R. I.; LIU, F. Interval type-2 fuzzy logic systems made simple. **Fuzzy Systems, IEEE Transactions on**, Piscataway, v. 14, n. 6, p. 808–821, 2006.

MOZELLI, L. A.; PALHARES, R. M.; AVELLAR, G. S. de. Novas condições de estabilidade e de estabilização para sistemas Takagi-Sugeno baseadas na função de Lyapunov fuzzy. In: **CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA-CBA**, 17., 2008, Juiz de Fora. **Anais...** Juiz de Fora: SBA, 2008. p. 1–6.

NGUANG, S. K.; SAAT, S.; KRUG, M. Static output feedback controller design for uncertain polynomial systems: an iterative sums of squares approach. **Control Theory Applications, IET**, IET, Stevenage, v. 5, n. 9, p. 1079–1084, June 2011.

OLIVEIRA, D. R. de; TEIXEIRA, M. C. M.; ALVES, U. N. L. T.; SOUZA, W. A. de; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R. On local H_∞ switched controller design for uncertain TS fuzzy systems subject to actuator saturation with unknown membership functions. **Fuzzy Sets and Systems**, Piscataway, v. 344, n. 1, p. 1–26, 2018.

PAPACHRISTODOULOU, A.; ANDERSON, J.; VALMORBIDA, G.; PRAJNA, S.;

- SEILER, P.; PARRILO, P. A. SOSTOOLS: sum of squares optimization toolbox for MATLAB. [S. l.: s. n.], 2013. Disponível em <<http://www.eng.ox.ac.uk/control/sostools>>, <<http://www.cds.caltech.edu/sostools>> e <<http://www.mit.edu/~parrilo/sostools>>. Acesso em: 4 jul 2017.
- PAPACHRISTODOULOU, A.; PRAJNA, S. On the construction of Lyapunov functions using the sum of squares decomposition. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 41., 2002, Las Vegas. **Proceedings...** Las Vegas: IEEE, 2002. p. 3482–3487.
- PARRILO, P. A. **Structured semidefinite programs and semialgebraic geometry methods in robustness and optimization**. 2000. 209 f. Tese (Doutorado) — California Institute of Technology, 2000. Disponível em: <www.mit.edu/parrilo/pubs/files/thesis.pdf>. Acesso em: 8 set 2016.
- PARRILO, P. A. Sum of squares programs and polynomial inequalities. SIAM, v. 15, n. 2, p. 7–15, 2004.
- PRAJNA, S.; PAPACHRISTODOULOU, A.; WU, F. Nonlinear control synthesis by sum of squares optimization: A Lyapunov-based approach. In: ASIAN CONTROL CONFERENCE, 5., 2004, Melbourne. **Proceedings...** Melbourne: IEEE, 2004. v. 1, p. 157–165.
- RAMOS, I. T. M.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R.; ALVES, U. N. L. T.; MACHADO, E. R. M. D. Controle do sistema caótico de lorenz utilizando soma de quadrados. In: CONFERÊNCIA BRASILEIRA DE DINÂMICA, CONTROLE E APLICAÇÕES - DINCON, 41., 2017, São José do Rio Preto. **Anais...** São José do Rio Preto: SBA, 2017. p. 1–7.
- REZNICK, B. Extremal PSD forms with few terms. **Duke Mathematical Journal**, Durham, v. 45, n. 2, p. 363–374, 1978.
- RÖSSLER, O. E. An equation for continuous chaos. **Physics Letters A**, Heidelberg, v. 57, n. 5, p. 397–398, 1976.
- SANTIM, M.; TEIXEIRA, M.; SOUZA, W. A. d.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. Design of a Takagi-Sugeno fuzzy regulator for a set of operation points. **Mathematical Problems in Engineering**, New Iorque, v. 2012, n. 1, p. 1–17, 2012.
- SEILER, P. SOSOPT: a toolbox for polynomial optimization. [S. l.: s. n.], 2013. Disponível em: <<http://www.aem.umn.edu/AerospaceControl/>>. Acesso em: 4 jul 2017.
- SLOTINE, J. J. E.; LI, W. et al. **Applied nonlinear control**. [S.l.]: prentice-Hall, 1991. 461 p.
- SOUZA, W. A. **Projeto de controladores robustos chaveados para sistemas nao lineares descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno**, 2013, 93 f. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Júlio de Mesquita Filho – UNESP, Ilha Solteira, 2013.
- SOUZA, W. A.; TEIXEIRA, M.; SANTIM, M.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. On switched control design of linear time-invariant systems with polytopic uncertainties. **Mathematical Problems in Engineering**, New Iorque, v. 2013, n. 1, p. 1–10, 2013.

- SOUZA, W. A. d.; TEIXEIRA, M. C. M.; SANTIM, M. P. A.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. Robust switched control design for nonlinear systems using fuzzy models. **Mathematical Problems in Engineering**, New Iorque, v. 2014, n. 1, p. 1–11, 2014a.
- SOUZA, W. A. de; TEIXEIRA, M. C.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. On switched regulator design of uncertain nonlinear systems using Takagi–Sugeno fuzzy models. **Fuzzy Systems, IEEE Transactions on**, Piscataway, v. 22, n. 6, p. 1720–1727, 2014b.
- STURM, J. F. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. **Optimization Methods and Software**, Oxfordshire, v. 11, n. 1-4, p. 625–653, 1999.
- TAKAGI, T.; SUGENO, M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. **Systems, Man, and Cybernetics, IEEE Transactions on**, Piscataway, v. 15, n. 1, p. 116–132, 1985.
- TANAKA, K.; IKEDA, T.; WANG, H. O. Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI-based designs. **Fuzzy Systems, IEEE Transactions on**, Piscataway, v. 6, n. 2, p. 250–265, 1998.
- TANAKA, K.; OHTAKE, H.; SEO, T.; TANAKA, M.; WANG, H. O. Polynomial fuzzy observer designs: a sum-of-squares approach. **Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics), IEEE Transactions on**, Piscataway, v. 42, n. 5, p. 1330–1342, 2012.
- TANAKA, K.; OHTAKE, H.; WANG, H. O. Guaranteed cost control of polynomial fuzzy systems via a sum of squares approach. **Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics), IEEE Transactions on**, Piscataway, v. 39, n. 2, p. 561–567, 2009.
- TANAKA, K.; TANAKA, M.; CHEN, Y.-J.; WANG, H. O. A new sum-of-squares design framework for robust control of polynomial fuzzy systems with uncertainties. **Fuzzy Systems, IEEE Transactions on**, Piscataway, v. 24, n. 1, p. 94–110, 2016.
- TANAKA, K.; WANG, H. O. **Fuzzy control systems design and analysis: a linear matrix inequality approach**. Nova Iorque: John Wiley & Sons, 2004. 309 p.
- TANAKA, K.; YOSHIDA, H.; OHTAKE, H.; WANG, H. O. Stabilization of polynomial fuzzy systems via a sum of squares approach. In: IEEE INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON INTELLIGENT CONTROL, 22., 2007, Singapore. **Proceedings...** Singapore: IEEE, 2007a. p. 160–165.
- TANAKA, K.; YOSHIDA, H.; OHTAKE, H.; WANG, H. O. A sum of squares approach to stability analysis of polynomial fuzzy systems. In: PROCEEDINGS OF THE 2007 AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 26., 2007, New Iorque. **Proceedings...** New Iorque: IEEE, 2007b. p. 4071–4076.
- TANAKA, K.; YOSHIDA, H.; OHTAKE, H.; WANG, H. O. A sum-of-squares approach to modeling and control of nonlinear dynamical systems with polynomial fuzzy systems. **Fuzzy Systems, IEEE Transactions on**, Piscataway, v. 17, n. 4, p. 911–922, 2009.
- TANIGUCHI, T.; TANAKA, K.; OHTAKE, H.; WANG, H. O. Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems. **Fuzzy Systems, IEEE Transactions on**, Piscataway, v. 9, n. 4, p. 525–538, 2001.

- TEIXEIRA, M. C.; ASSUNÇÃO, E.; AVELLAR, R. G. On relaxed LMI-based designs for fuzzy regulators and fuzzy observers. **Fuzzy Systems, IEEE Transactions on**, Piscataway, v. 11, n. 5, p. 613–623, Oct 2003.
- TEIXEIRA, M. C. M.; ZAK, S. H. Stabilizing controller design for uncertain nonlinear systems using fuzzy models. **Fuzzy Systems, IEEE Transactions on**, Piscataway, v. 7, n. 2, p. 133–142, 1999.
- UETA, T.; CHEN, G. Bifurcation analysis of chen's equation. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, New Jersey, v. 10, n. 8, p. 1917–1931, 2000.
- VITAL, F.; VARGAS, J. A. R. Sistema para comunicação com segurança baseado em osciladores caóticos. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA-CBA, 23., 2014, Belo Horizonte. **Anais...** Juiz de Fora: SBA, 2014. p. 1–8.
- WANG, H. O.; TANAKA, K.; GRIFFIN, M. Parallel distributed compensation of nonlinear systems by Takagi-Sugeno fuzzy model. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON FUZZY SYSTEMS, 2., 1995, Yokohama. **Proceedings...** Yokohama: IEEE, 1995. v. 2, p. 531–538.
- WANG, H. O.; TANAKA, K.; GRIFFIN, M. F. An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues. **Fuzzy Systems, IEEE Transactions on**, Piscataway, v. 4, n. 1, p. 14–23, 1996.
- XU, J.; XIE, L.; WANG, Y. Simultaneous stabilization and robust control of polynomial nonlinear systems using SOS techniques. **Automatic Control, IEEE Transactions on**, IEEE, New Iorque, v. 54, n. 8, p. 1892–1897, Aug 2009.
- YU, G. R.; HO, K.-H. Constraints on control input and output of polynomial fuzzy systems via a sum of squares approach. In: FUZZY SYSTEMS (FUZZ-IEEE), 2012 IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON, 10., 2012, Brisbane. **Proceedings...** Brisbane: IEEE, 2012. p. 1–6.
- YU, G. R.; HUANG, Y. C.; CHENG, C. Y. Robust H_∞ controller design for polynomial fuzzy control systems by sum-of-squares approach. **Control Theory Applications, IET**, Stevenage, v. 10, n. 14, p. 1684–1695, 2016.
- YUM, G. R.; WANG, W. Y. SOS-based fuzzy control of a wheeled mobile robot with decay rate. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON SYSTEMS, MAN, AND CYBERNETICS-SMC, 2013, Manchester. **Proceedings...** Manchester: IEEE, 2013. p. 4700–4705.