



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS



PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

DOUGLAS GONÇALVES LEITE

MÉTODO DE PERSPECTIVA E BROUILLON PROJECT:
DOIS ESTUDOS DE DESARGUES SOBRE PERSPECTIVA E GEOMETRIA
DE PROJEÇÕES.

RIO CLARO

2018

DOUGLAS GONÇALVES LEITE

Método de Perspectiva e Brouillon Project:

Dois estudos de Desargues sobre Perspectiva e Geometria de Projeções.

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática

Orientador: Dr. Marcos Vieira Teixeira.

Rio Claro –SP

2018

516.5 Leite, Douglas Gonçalves
L533m Método de perspectiva e Brouillon project : dois estudos de Desargues sobre perspectiva e geometria de projeções / Douglas Gonçalves Leite. - Rio Claro, 2018
94 f. : il., figs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Marcos Vieira Teixeira

1. Geometria projetiva. 2. Geometria de projeções. 3. Brouillon project. 4. Girard Desargues. 5. Perspectiva linear.
I. Título.

DOUGLAS GONÇALVES LEITE

Método de Perspectiva e Brouillon Project:

Dois estudos de Desargues sobre Perspectiva e Geometria de Projeções.

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Marcos Vieira Teixeira – Orientador
IGCE/UNESP/Rio Claro (SP)

Prof. Dr. Fumikazu Saito
PUC/São Paulo (SP)

Prof. Dr. Gerard Emile Grimberg
IM/UFRJ/Rio de Janeiro (RJ)

Resultado: Aprovado
Rio Claro- SP, 23 de Maio de 2018.

Agradecimentos

Não sei como agradecer as pessoas que me ajudaram nesse trabalho, assim como não sei como agradecer as oportunidades que tive para chegar até aqui. Sou imensamente grato pelas oportunidades que surgiram em minha vida, assim como sou grato por estar perto de pessoas que me trouxeram felicidade e sabedoria ao longo de minha jornada.

Uma jornada para além de dois anos de trabalho, uma caminhada com tudo aquilo que chamo de vida até o dia que escrevo essas páginas. Agradeço também a vida que continuarei a ter depois de escrever esse trabalho. Espero que as pessoas que mais amo continuem em minha vida, cada um a sua forma contribuiu para me fazer uma pessoa melhor, cada um com sua vida e companhia me trouxe felicidades e conhecimentos que sozinho, sei que nunca conseguiria chegar ao que sei e sinto hoje.

Por isso, ao invés de nomes, gostaria de agradecer as vidas que estiveram, estão e que surgirão ao longo de minha jornada.

Espero que aqueles que estejam próximos reconheçam meu imenso carinho e singela homenagem que aqui presto. Aos que me conhecem, sabem que meu jeito calado e tímido não impede que eu demonstre meu carinho a todos que estão a minha volta e que eu realmente considero como família.

Sou grato pela imensa família que faço ao longo da vida.

Resumo

O presente trabalho discorre a respeito de dois textos do arquiteto e matemático francês Girard Desargues. As obras que aqui chamamos de *Método de Perspectiva* (1636) e *Brouillon Project* (1639), foram desenvolvidas em um período com ampla produção teórica relacionada a técnicas de representação. No trabalho de 1636 Desargues descreveu o processo necessário para representar uma gaiola em perspectiva. No trabalho, *Brouillon Project*, ele trata de propriedades geométricas envolvendo feixe de retas aproximando-se dos conceitos existentes no campo das projeções de figuras, contudo parte das referências utilizadas, como Chasles, Poudra, Taton, entre outros, consideraram que o *Brouillon Project* foi um trabalho relacionado as seções cônicas. Nosso objetivo é apresentar uma análise envolvendo os conteúdos geométricos explorados nas duas obras citadas com o intuito de relacioná-las com o campo da perspectiva e projeção de figuras. Para isso, desenvolvemos uma pesquisa em história da matemática envolvendo história perspectiva, história da geometria, forma de produção do conhecimento daquele período, em conjunto com teorias que estavam sendo produzidas até o séc. XVII.

Palavras-chaves: Geometria de Projeções. Brouillon Project. Girard Desargues. Perspectiva Linear.

Abstract

The present work deals with two texts of the French architect and mathematician Girard Desargues. The works that we call the Method of Perspective (1636) and Brouillon Project (1639) were developed in a period with a large theoretical production related to representations of figures in perspective. In the work of 1636 Desargues described the process necessary to represent a cage in perspective. At work, Brouillon Project, he dealt with geometric properties involving beam of straight lines approaching the existing concepts in the field of projections of figures. However, some of the references used, such as Chasles, Poudra, Taton, and others, consider that the Brouillon Project was a work related to the conic sections. Our objective is to present a study involving the geometric contents explored in the two works mentioned, seeking to relate them to the field of perspective and projection of figures. For this, we developed a research in history of mathematics involving history, perspective, history of geometry, form of knowledge production of that period, together with theories that were being produced until the century. XVII.

Keywords: Geometry of Projections, Brouillon Project, Girard Desargues. Linear Perspective.

Índice de Figuras

<i>FIGURA 1: Representação em perspectiva Angular e Linear.....</i>	<i>22</i>
<i>FIGURA 2: Apresentação do Templo.....</i>	<i>25</i>
<i>FIGURA 3: Linhas ortogonais em uma perspectiva angular.....</i>	<i>27</i>
<i>FIGURA 4: Anunciação.....</i>	<i>28</i>
<i>FIGURA 5: Representação de Dürer sobre o método de Alberti.....</i>	<i>35</i>
<i>FIGURA 6: Método de Perspectiva, S.G.D.L, 1636.....</i>	<i>44</i>
<i>FIGURA 7: Esboço Método de Perspectiva de Desargues.....</i>	<i>48</i>
<i>FIGURA 8: Visão Superior Gaiola.....</i>	<i>50</i>
<i>FIGURA 9: Tabela de Escalas de Desargues.....</i>	<i>53</i>
<i>FIGURA 10: Plano geometral.....</i>	<i>57</i>
<i>FIGURA 11: Plano geometral de Desargues.....</i>	<i>60</i>
<i>FIGURA 12: Planos de Projeção.....</i>	<i>65</i>
<i>FIGURA 13: Projeção de Circunferência.....</i>	<i>66</i>
<i>FIGURA 14: Feixe de retas e Razão Anarmônica.....</i>	<i>67</i>
<i>FIGURA 15: Brouillon Project.....</i>	<i>70</i>
<i>FIGURA 16: Configuração Árvore Engage.....</i>	<i>77</i>
<i>FIGURA 17: Configuração Árvore Desgagé.....</i>	<i>77</i>
<i>FIGURA 18: Quatro Pontos em Involução.....</i>	<i>81</i>
<i>FIGURA 19: Projeção de seis pontos em involução.....</i>	<i>82</i>
<i>FIGURA 20: Projeção de Quatro Pontos em Involução.....</i>	<i>83</i>
<i>FIGURA 21: Transversal Interceptando um cone em seis pontos de involução.....</i>	<i>84</i>
<i>FIGURA 22: Plano Geometral e Projeção de Pontos.....</i>	<i>88</i>

Sumário

CAPÍTULO 1. INTRODUÇÃO.....	10
Apresentação do Trabalho.....	10
Roteiro de Pesquisa e Revisão Bibliográfica.....	16
CAPÍTULO 2: PERSPECTIVA, CONSIDERAÇÕES HISTÓRICAS.....	18
Trajetos da Perspectiva.....	18
Ciência, <i>Techné</i> e Perspectiva.....	33
CAPÍTULO 3: Biografia de Desargues.....	37
Biografia e informações relevantes.....	37
CAPÍTULO 4. MÉTODO DE PERSPECTIVA.....	44
Descrição da Obra.....	44
Construção da base da gaiola (Primeiro Momento).....	50
Construção de Escalas (Segundo Momento).....	52
Escalas de Medidas (<i>Échelles de Mesures</i>).....	56
Inserindo Pontos no Plano Pavimentado.....	59
Construção da Gaiola em Perspectiva (Terceiro Momento).....	62
Primeiras informações a respeito das retas paralelas com incidência no infinito.....	63
CAPÍTULO 5: Projeção de Figuras e Brouillon Project.....	65
Relação de pontos no infinito.....	72
Retas de Mesma Configuração (<i>Ordonnance de lignes droictes</i>).....	74
Planos de Mesma Configuração.....	75
Árvore.....	76
Involução.....	79
Propriedade de Involução.....	80
Projeção de Pontos em Involução.....	81
Transversal sobre retas de uma configuração.....	83
Seis Pontos em Involução em um Cilindro.....	84
CAPÍTULO 6: CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	86
Método de Perspectiva e <i>Brouillon Project</i> dois trabalhos sobre projeções de figuras.....	86
REFERÊNCIAS.....	91

CAPÍTULO 1. INTRODUÇÃO

Apresentação do Trabalho

A presente dissertação de mestrado é resultado do estudo de dois trabalhos de Girard Desargues, geômetra francês que fez parte de um grupo de matemáticos e arquitetos que produziram teorias voltadas para o campo da perspectiva e técnicas de representação.

Girard Desargues, nascido em Lyon, foi conhecido como matemático e arquiteto, trabalhou com René Descartes (1596-1650), foi professor de Blaise Pascal (1623-1662), Abraham Bosse (1604-1676) e Philippe La Hire (1640-1718). Teve contato com importantes nomes da matemática na Europa, segundo Freguglia (2009) as teorias de Desargues trouxeram contribuições que são associadas ao desenvolvimento da geometria projetiva.

Desargues desenvolveu seus primeiros trabalhos em 1636. O primeiro chamado *Une methode aisee pour apprendre et enseigner a lire et escrire la musique* (Um método fácil para aprender e ensinar a ler e escrever a música), incluso na *Harmonia Universal* do padre Marin Mersenne (1588-1648) e outro trabalho que chamaremos de *Método de Perspectiva*, o qual recebeu o extenso nome de *exemple de l'une des manières universelles du S. G. D. L. touchant la pratique de la perspective sans employer aucun tiers point, de distance ny d'autres nature, qui soit hors du champ de l'ouurage* (Exemplo de uma das formas universais por Sr. Girard Desargues Lionês sobre a prática da perspectiva sem aplicar algum tipo de ponto, distante nem de outra natureza, que esteja fora do campo da obra).

No texto relacionado a perspectiva, Desargues desenvolveu construções geométricas para a representação de uma gaiola. Sua construção trazia uma abordagem distinta de outras técnicas desenvolvidas em mesmo período.

O que havia de novo sobre o método de Desargues era que, como o título de seu livro proclamava, habilitava trabalhar

inteiramente dentro do campo da imagem (FIELD, 1997, p.192, tradução nossa)¹.

Este texto do geômetra emerge em um cenário com mais de cem anos de estudos relacionados à perspectiva. Os primeiros tratados a respeito deste tema foram produzidos por Leon Baptiste Alberti (1404-1472) e Piero della Francesca (1415-1492), ambos também arquitetos e que desenvolveram teorias voltadas às técnicas de representação.

Com relação a teoria da perspectiva de Desargues, no título do trabalho de 1636, ele afirma não utilizar um terceiro ponto externo ao quadro de representação (*sans employer aucun tiers point, de distance ny d'autres nature, qui soit hors du champ de l'ouvrage*), essa afirmação faz referência as técnicas como de, Alberti e della Francesca, entre outros teóricos que utilizavam um ponto externo ao quadro de representação como parte do processo de construção de um plano pavimentado, recurso de grande importância dentro da perspectiva linear.

Ao longo do *Método de Perspectiva*, Desargues descreveu como realizar as construções geométricas necessárias para compor parte das “estruturas” do quadro de representação. Dentre as estruturas utilizadas, há a composição de uma malha em formato triangular, também conhecida como plano geometral, a qual proporcionou um efeito de profundidade indo “em direção ao interior do quadro”.

Além da estrutura citada, o geômetra desenvolve um sistema de escalas, de modo que, a chamada Escala de Comprimentos (*échelles de éloignemens*), “forma uma diminuição progressiva de largura e altura quando os comprimentos são vistos a distâncias maiores do plano de imagem, para uma determinada posição do olho” (FIELD, 1999, p.192, tradução nossa)².

Desargues esteve envolvido com os procedimentos da perspectiva linear, uma técnica que utiliza recursos matemáticos para compor um conjunto de entes geométricos que são responsáveis por auxiliar nas representações

¹ What was new about Desargues' method was that, as the title of his book, proclaims, it enabled one to work entirely inside the picture field. Alternatively, one could use a separate piece of paper, as shown in the scrolls inset at the top of Desargues first plate. (FIELD, 1997, p.192)

² The principle is that one constructs scales which give the progressive diminution in width and height when lengths are seen at greater distances from the Picture plane, for some given position of the eye. (FIELD, 1999, p. 192)

em perspectiva, proporcionando o efeito de tridimensionalidade e profundidade no quadro.

Por se tratar de um trabalho envolvendo o tema perspectiva, em um período que foram produzidos diversos tratados a respeito desse assunto e por utilizar recursos distintos em seus processos, consideramos o *Método de Perspectiva*, uma importante referência a ser estudada.

Em nossas pesquisas encontramos informações a respeito do contexto histórico envolvendo o campo da perspectiva e o trabalho de Desargues, buscamos associar as produções do matemático ao momento histórico que a Europa vivia, em meio as teorias que estavam sendo desenvolvidas ao longo do Renascimento, até a chegada do séc. XVII.

Além deste, outro trabalho escolhido para realizar a análise foi o texto que chamamos de *Brouillon Project*, publicado em 1639, o qual foi intitulado originalmente de *Brouillon Project d'une atteinte aux evenemens des rencontres du cone avec un plan, par S. G. D. L.* (esboço de um corte incidente nos encontros de um cone com um plano, por Sr. Girard Desargues de Lyon).

Segundo Hogendjik (1991, p.4) “Desargues foi um matemático profundamente original, que abordou seus trabalhos de forma distinta se comparada com os Antigos. Assim, existem teoremas no BrP³ que caem totalmente fora do âmbito dos trabalhos dos seus antecessores” Além disso, “Desargues conseguiu encontrar propriedades que são invariantes sob projeção central” (KIRSTI, 2007, p.445, tradução nossa)⁴.

Este texto, *Brouillon Project*, foi considerado perdido por longo período, entretanto na década de 1950, segundo Taton (1951) M. P. Moisy encontrou um exemplar na Biblioteca Nacional da França.

Com relação aos conteúdos tratados no *Brouillon Project*, este trabalho foi reconhecido como um dos primeiros a abordar elementos que seriam estudados pela geometria projetiva. Contudo, nesta pesquisa, buscou-se

³ Essa é uma abreviação utilizada por Hogendjik quando trata do trabalho *Brouillon Project*.

⁴ Desargues conceived the ideas of finding properties that are invariant under a central projection (KIRSTI, 2007, p.445)⁴,

mostrar que este trabalho de Desargues não se distanciou totalmente do estudo da perspectiva, como relata Freguglia.

Devemos a Gérard Desargues (1593-1662) e Blaise Pascal (1623-1662) o estudo de propriedades geométricas, sobre tudo sobre das cônicas, que embora em contexto teórico diferente daquele introduzido por Poncelet, preocuparam-se com geometria projetiva foram inspirados, como veremos, pelo tema da perspectiva. (FREGUGLIA, 2009, p.334, tradução nossa)⁵.

Temos conhecimento de que, para estudarmos textos do séc. XVII, precisamos nos aproximar de outras produções que foram desenvolvidas naquele contexto, isso para nos familiarizarmos com a linguagem e técnicas utilizadas, além de adquirirmos maiores informações com relação as produções que foram desenvolvidas na época de Desargues.

Ao longo da pesquisa, observou-se que os tratados de Desargues surgiram em um ambiente com vasta produção relacionada à técnicas de perspectiva, além da perspectiva linear, outras técnicas de representação como a anamorfose, também estavam sendo estudadas. “Durante o período de ouro da perspectiva francesa, a arte de fazer anamorfose em perspectiva obteve seu primeiro livro, foi escrito pelo sacerdote Jean François Nicéron” (1613-1646) (KIRSTI, 2007, p.454, tradução nossa).

Nicéron foi um teórico francês que estudou deformações existentes nas representações em perspectiva. Seu trabalho de 1638 chamado - *La perspective curieuse, ou magie artificielle des effets merveilleux* (a perspectiva curiosa, ou magia artificial dos efeitos maravilhosos) tratou de alterações existentes em uma forma de projeção envolvendo aberturas angulares.

Com relação aos trabalhos de Desargues ressaltamos a possibilidade de que o tratado de 1639, a respeito das cônicas, possua elementos em comum dentro dos traços da perspectiva.

Em minha opinião ele trabalhou em duas tradições, sendo uma tradição em traços de perspectiva, e a outra, uma abordagem da geometria sintética de Apolônio, essencialmente desenvolvido por último. Ele tratou de diferentes problemas nos

⁵ we owe to Gérard Desargues (1593-1662) and Blaise Pascal (1623-1662) the study of the geometric properties, above all of the conics, which although in a different theoretical context than the one introduced by Poncelet, concern projective geometry and were inspired, as we shall see, by the theme of perspective. (FREGUGLIA, 2009, p. 334).

dois campos- e de certa forma lidou com diferentes projeções também. (KIRSTI, 2007, p.447, tradução nossa)⁶.

Por outro lado, em mesma obra, Desargues encontrou resultados inéditos para um tipo de geometria que surgiu quase dois séculos depois, a geometria projetiva.

[...] pelos trabalhos de Gerard Desargues, que era arquiteto e por Blaise Pascal, matemático. Os resultados geométricos que apresentados efetivamente, sinalizou o nascimento da geometria projetiva. Elementos ideais semelhantes ao que hoje chamamos “ponto no infinito” e “reta no infinito” foram introduzidos. (FREGUGLIA, 2009, p. 332, tradução nossa)⁷.

De acordo com o matemático italiano Cremona, a paternidade da expressão geometria projetiva deve ser atribuído a Klein em seu primeiro artigo de 1871 sobre as geometrias não-euclidianas (NABONNAD, 2009, p.2, tradução nossa)⁸. Portanto, o texto *Brouillon Project* de Desargues é uma importante fonte de pesquisa com relação ao estudo da geometria no séc.XVII.

Tendo conhecimento dessas informações, organizamos nosso trabalho da seguinte forma.

No capítulo I é apresentada uma visão geral do trabalho em conjunto com o roteiro de pesquisa que adotamos. Há também um levantamento bibliográfico em que são expostas as principais informações a respeito dos resultados encontrados por Desargues.

No capítulo II trouxemos informações com relação a história da perspectiva, focando principalmente no período do Renascimento, onde encontramos os primeiros tratados de perspectiva linear, trabalhos que possivelmente influenciaram diversos teóricos da Europa, incluindo Desargues.

Além disso, temos conhecimento de que, os estudos envolvendo perspectiva naquele período eram realizados por artesãos, gravuristas, além de

⁶ In my opinion he worked in two traditions, one being the tradition of tracts on perspective, and the other the Apollonian approach to synthetic geometry, essentially developing the latter.¹⁵ He dealt with different problems in the two fields – and in a way he dealt with different projections as well. (KIRSTI, 2007, p. 447).

⁷ [...] by the works of Gérard Desargues, who was an architect, and by Blaise Pascal, a mathematician. The geometric results that they presented effectively signaled the birth of projective geometry. “Ideal” elements similar to what we today call “point at infinity” and “line at infinity” were introduced (FREGUGLIA, 2009, p. 332).

⁸ Selon le mathématicien italien Cremona, la paternité de l'expression géométrie projective doit être attribuée à Klein dans son premier article de 1871 sur les géométries non-euclidiennes. De fait, le premier ouvrage revendiquant la géométrie projective comme son objet est celui de Cremona. (NABONNAND, 2009, p.2)

arquitetos, matemáticos e engenheiros. Com participações de pessoas de outras áreas, diversos recursos foram utilizados, dentre eles a criação de ferramentas relacionadas a representação em perspectiva foi um importante elemento naquele período.

No capítulo III é feita uma breve biografia de Desargues, destacando elementos como, as principais contribuições do matemático lionês, contatos que ele teve ao longo da vida, e informações a respeito dos alunos que ele teve.

No capítulo IV foram exibidos os conteúdos tratados no trabalho *Método de Perspectiva* de 1636. Neste capítulo foram descritos os processos adotados por Desargues para a representação da gaiola em perspectiva. Como é feita a construção dos sistemas de escalas, a construção do plano geometral e como algumas propriedades geométricas são descritas pelo matemático.

No capítulo V apresenta-se relações existentes entre projeção de figuras e os conceitos utilizados no texto *Brouillon Project*, isso com o objetivo de aproximar o campo da perspectiva linear, projeção de figuras e a noção de cone projetivo.

Em grande parte da literatura utilizada, os pesquisadores consideram que o trabalho *Brouillon Project* foi um texto direcionado ao estudo das seções cônicas, entretanto, nosso objetivo foi o de apresentar elementos existentes nos dois textos, com o intuito de argumentar que ambas as produções de Desargues estão diretamente relacionados com o estudo da perspectiva e projeções de figuras.

Deste modo, no capítulo VI é feita uma análise dos conteúdos geométricos tratados nos dois textos de Desargues. Por meio das reflexões que emergiram ao longo da pesquisa, buscou-se exibir uma possível conexão entre os dois textos estudados.

Roteiro de Pesquisa e Revisão Bibliográfica

Para uma pesquisa desta natureza, foi necessário conhecer os principais pontos com os quais esse trabalho se relaciona. Dentre eles, perpassa pela história da perspectiva linear e as técnicas de representação utilizadas por teóricos do Renascimento; pelos conceitos associados a projeção de figuras e pelos conteúdos matemáticos desenvolvidos nos textos de Desargues.

Com relação ao primeiro ponto, buscou-se informações em referências como as de Edgerton (1975) que realizou um estudo envolvendo técnicas de perspectiva. Nos trabalhos de Panofsky (1953), Floriinsky (2012) e Kemp (1990), há informações relacionadas às técnicas da perspectiva linear e teóricos que estavam produzindo trabalhos voltados a esse tema ao longo dos séc.XIII-XVII. Além desses textos, trabalhos como os de Frangenberg (1992 e 1993), Saito (2008), Freguglia (2009), também trouxeram informações a respeito das técnicas de perspectiva no Renascimento, e como os trabalhos dos gregos antigos influenciaram os tratados que surgiram no séc.XVI.

Com relação às projeções de figuras e perspectiva, no trabalho de Kleine (1972) foi feito um estudo do desenvolvimento da geometria ao longo da história. Neste estudo, Kleine trata dos conteúdos matemáticos existentes no campo da projeção de figuras. Com Chasles (1867) encontrou-se um trabalho que caminha em mesma direção de Kline. Além deles, para um olhar técnico, buscou-se em trabalhos como os de Coxeter (1949), Courant e Robbins (2000), elementos que aproximassem o campo da perspectiva e projeção de figuras aos conteúdos matemáticos utilizados nessas áreas.

A respeito dos trabalhos de Desargues que foram analisados, Poudra (1864), teórico da geometria francesa, reuniu grande parte dos textos escritos pelo matemático lionês. O trabalho intitulado *Oeuvres de Desargues Réunies et Analysées* (Obras de Desargues, reunidas e analisadas) é um estudo das construções geométricas desenvolvidas por Girard e nele, encontra-se o texto *Método de Perspectiva e o Brouillon Project*. Além disso, em mesmo ano, 1864,

Poudra publicou outro texto, este segundo texto é um estudo da história da perspectiva.

No texto de Chasles (1867), que tratou dos métodos geométricos ao longo da história, o trabalho de Desargues, *Brouillon Project*, é citado. Chasles, analisou elementos como dualidade, retas com incidência em um ponto no infinito, a propriedade de involução descrita por Desargues e fez considerações com relação das seções cônicas

Em Taton (1951), foi feita uma extensa análise do texto *Brouillon Project*, ele associa as construções de Desargues a elementos atuais como pontos homólogos, pontos conjugados, entre outras construções. Com Hogendjik (1991) é desenvolvido um estudo associando o texto *Brouillon Project* ao trabalho das cônicas de Apolônio. Nesta obra de Hogendjik há uma análise de como as cônicas de Apolônio estiveram relacionadas com o trabalho de Desargues, e como algumas definições de Desargues podem ter sido baseadas nas composições de Apolônio.

Gray e Field (1987) desenvolveram um trabalho próximo ao feito por Taton, entretanto realizaram um estudo com relação as duas obras de Desargues, exibindo as propriedades matemáticas existentes no *Método de Perspectiva* e no *Brouillon Project*, em uma linguagem atual eles descreveram como as propriedades estudadas por Desargues se aproximam dos conceitos explorados na geometria grega.

Mais recentemente Anglade e Briend (2017) publicaram um artigo a respeito das primeiras páginas do *Brouillon Project*, investigando os elementos tratados pelo matemático francês. Anglade e Briend desenvolveram um estudo das dez primeiras páginas do trabalho de 1639, trazendo informações quanto a abordagem adotada por Desargues e quais conteúdos matemáticos foram explorados pelo geômetra.

CAPÍTULO 2: PERSPECTIVA, CONSIDERAÇÕES HISTÓRICAS

Trajetos da Perspectiva

Neste capítulo descreve-se uma trajetória histórica da perspectiva, perpassando por conceitos que surgiram na Antiguidade e que influenciaram os teóricos do Renascimento e o período de Desargues.

As primeiras representações perspectivas que tem-se registro, são representações desenvolvidas em cenários teatrais.

É notável que tenha sido justamente Anaxágoras - aquele mesmo Anaxágoras que tentou converter o Sol e a Lua, deidades vivas por excelência, em pedras incandescentes, e substituir a divina criação do mundo por um turbilhão central no qual teriam surgido os astros – aquele a quem Vitruvius atribui a invenção da perspectiva, e além disso, da assim denominada pelos antigos, *scaenografia*, isso é, pintura de cenários teatrais. (FLORIENSKY, 2012, p.37).

Perspectiva é uma palavra derivada do verbo latim *Perspicere*, que significa ver claramente, ver bem [...] “Os gregos deram a essa ciência o nome de *Óptica* que deve ter o mesmo significado. Os árabes intitularam suas obras sobre esse assunto como: *Aspectos, Aparência*” (POUDRA, 1864, p.1)⁹.

Como visto, “a perspectiva *não* surge da arte pura e, de acordo com seu objetivo inicial, *não* expressa a percepção artística viva da realidade, mas tem sua origem na esfera da arte aplicada, mais precisamente no âmbito da técnica teatral” (FLORIENSKY, 2012, p.38).

No mesmo período, uma proposta estudada pelos atomistas gregos como Demócrito, Epicuro e Lucrécio, “cuja doutrina postulou a existência de *eidola*, ou películas superfinais (superficiais) que são emitidas das superfícies dos corpos visíveis” (NETO, 2013, p.874). Estes teóricos, assim como Platão, Aristóteles, Hipócrates entre outros, compreendiam a percepção de um objeto como um movimento existente entre os entes emitidos do objeto em direção ao

⁹ Perspective est un mot dérivé du verbe latin *perspicere*, qui signifie voir clairement, bien voir [...] Les Grecs avaient donné à cette science le nom d'optique qui doit avoir la même signification. Les Arabes intitulèrent leurs ouvrages sur ce sujet ; *De aspectibus, de l'aspect*, e l'apparence. (POUDRA, 1864, p.1).

observador e os entes emitidos do observador em direção ao objeto observado¹⁰.

Em nossa pesquisa, direcionamo-nos a estudar trabalhos no campo da perspectiva que envolvessem elementos matemáticos. Dentre os textos dos antigos, “Euclides com seu trabalho escrito no início do século III a. C, abre sua *Óptica* com declarações sobre raios visuais, o cone visual e o ângulo visual” (FRANGENBERG, 1992, p.1, tradução nossa)¹¹.

No Renascimento, a recuperação dos textos originais de Aristóteles, Ptolomeu, Galeno entre muitos outros, foram características daquele período. “A busca por novos textos, bem como por novas traduções, intensificou-se naquela época” (SAITO e BELTRAN, 2014, p.5).

O texto *Óptica* de Euclides representa uma importante referência que influenciou diversos teóricos do Renascimento. “Este trabalho é o primeiro tratado de óptica com características geométricas de que se tem notícia” (SAITO, 2008, p.391), entretanto, este texto sofreu modificações, sendo que, algumas considerações foram introduzidas ao longo da história, proporcionando assim, alterações aos exemplares que chegaram a Europa no período do Renascimento.

Contudo, cabe observar que a *Óptica*, atribuída a Euclides, durante a Idade Média e o Renascimento era, na realidade, uma compilação escrita por Theon de Alexandria. O que significa que a óptica euclidiana veio a ser estudada, no Renascimento, através da obra de Theon, que trazia novos teoremas e demonstrações diferentes daqueles propostos por Euclides (SAITO apud INCARDONA, 1996, p.8)

Segundo o Saito, os postulados do texto *Óptica* de Euclides são traduzidos da seguinte forma:

- I. Que as linhas retas, que procedem do olho, divergem indefinidamente.
- II. Que a figura formada pelos raios visuais é um cone, que tem como vértice o olho e a base o contorno da coisa vista.

¹⁰Para maiores informações dessa natureza, observar trabalho de Neto (2013).

¹¹ Euclid, writing near the beginning of the third century BC, opens his *Optics* with statements about visual rays, the visual cone (or pyramid), and the visual angle. (FRANGENBERG, 1992, p.1).

- III. Que as coisas vistas são aquelas sobre as quais incidem os raios visuais; que aquelas não vistas são aquelas sobre as quais não incidem os raios visuais.
- IV. Que as coisas vistas sob ângulos maiores aparecem maiores; que aquelas vistas sob ângulos menores, menores; aquelas vistas sob ângulos iguais, iguais.
- V. Que as coisas vistas sob raios visuais mais altos aparecem mais altos; aquelas vistas sob raios visuais mais baixos, mais baixo.
- VI. Que as coisa vistas sob mais ângulos aparecem mais claramente.
- VII. Que, similarmente, as coisas vistas sob raios visuais mais à direita aparecem mais à direita; aquelas vistas sob raios visuais mais à esquerda, mais à esquerda.

Conforme é descrito no postulado IV, “*Que as coisas vistas sob ângulos maiores aparecem maiores; que aquelas vistas sob ângulos menores, menores; aquelas vistas sob ângulos iguais, iguais*”.

Deste modo, pode-se considerar que Euclides relacionava a percepção do objeto com a abertura angular do campo visual. Segundo Panofsky (1953), “até nós o que chegou sobre os antigos, ficou-nos a ideia de nunca se desviarem do pressuposto segundo o qual eram os ângulos, e não as distâncias, a determinar as grandezas aparentes” (p.36).

Estas concepções envolvendo abertura angular do campo de visão, foram associadas a perspectiva angular, pois “um dos principais objetos de estudo em óptica geométrica é o ângulo de visão, que é, o ângulo que os objetos vistos subtendem ao olho” (FRANGEMBERG, 1992, p.1)¹².

Segundo (KIRSTI, 2014, p.86, tradução nossa) “alguns autores usam o termo *perspectiva naturalis* no sentido da óptica e *perspectiva artificialis* quando tiveram perspectiva geométrica em mente”¹³.

As duas teorias estão relacionadas com formas de representação, entretanto “a diferença gira em torno da questão euclidiana sobre ângulos

¹² One of the principal objects of study in geometrical optics is the angle of vision, that is, the angle which objects of vision subtend at the eye. (FRANGENBERG, 1992, p.1).

¹³ Some authors employed the term *perspectiva naturalis* in the meaning of optics and *perspectiva artificialis* when they had geometrical perspective in mind (KIRSTI, 2014, p.86).

visuais” (KEMP, 1990, p.49, tradução nossa)¹⁴, entretanto a perspectiva geométrica refere-se àquela que utiliza de mais recursos matemáticos, também conhecida como perspectiva linear.

As técnicas de representação em perspectiva que valorizavam as relações de distâncias angulares, representações próximas da visão natural, foram conhecidas no Renascimento como *perspectiva naturalis* ou perspectiva natural, sendo associadas aos trabalhos desenvolvidos na Óptica de Euclides, enquanto que por outro lado “na perspectiva linear, as quantidades e as distâncias variavam proporcionalmente” (SAITO, 2008 p.398), propiciando assim, distinções entre os elementos utilizados em cada tipo de representação.

A teoria da construção da perspectiva deve ser distinguida da teoria da visão natural, que pode ser traçada a partir de estudos técnicos em Óptica e Catottrica de Euclides, isto é, temos que distinguir o que se chamou perspectiva communis e perspectiva artificial ou perspectiva pingendi (Freguglia, 2009, p.332, tradução nossa)¹⁵.

“De fato, nos séculos XV e XVI, houve um caloroso debate acerca das discrepâncias entre a óptica euclidiana, com sua noção de tamanho angular, e a perspectiva linear, com seu conceito de tamanho projetado” (SAITO, 2008, p.398). Contudo, Saito (2008) argumenta que uma possível separação delimitando cada uma das áreas, pode ser por vezes, difícil de se estabelecer¹⁶.

Frangenberg (1992) discorre a respeito das distinções existentes em cada uma destas técnicas. Na representação da figura 1, o pesquisador analisa cada “ambiente”, fazendo uma comparação entre a percepção a partir da perspectiva angular e da perspectiva linear.

O primeiro dos dois diagramas desta folha é projetado para ilustrar o fenômeno óptico que, quando o olho vê uma cena tridimensional, objetos de igual tamanho são percebidos como iguais, desde que sejam colocados em distâncias iguais dos olhos, não importa em que direção. No segundo diagrama um

¹⁴ The difference revolves around the Euclidean question of visual angles. (KEMP, 1990, p.49).

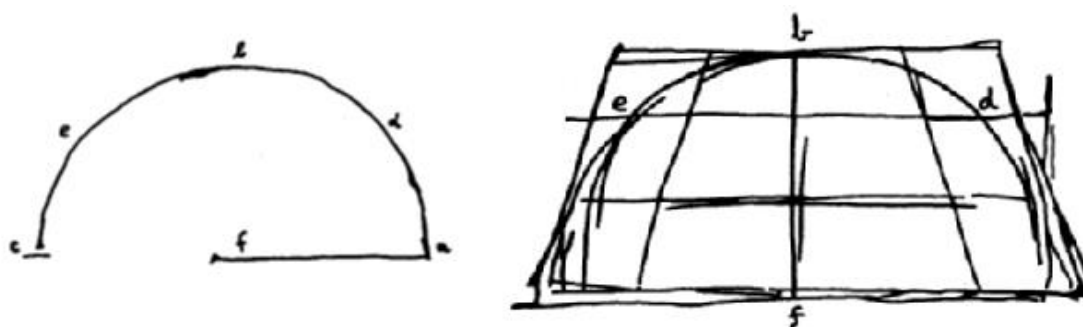
¹⁵ The theory of perspective construction should be distinguished from the theory of natural vision, which can be traced back to technical studies in Euclid's *Ottica* and *Catottrica*, that is, we have to distinguish between what was called *perspectiva communis* and *perspectiva artificialis* or *perspectiva pingendi* (Freguglia, , p.332).

¹⁶ Saito, 2008

arco semelhante é inscrito em um tabuleiro de perspectiva e, portanto, é comparado a uma situação determinada por perspectiva linear. (FRANGENBERG, 1992, p.16, tradução nossa)¹⁷.

Conforme o diagrama (figura 1), no lado esquerdo há um conjunto de pontos representando um campo visual angular. Com ele há uma abertura determinada para cada ponto, estabelecendo distâncias e a dimensão do objeto representado, preservando características de medidas, e a distância entre os pontos é representada de forma angular

FIGURA 1: Representação em perspectiva Angular e Linear.



Fonte: Frangenberg (1992, p.16).

Por outro lado, com um conjunto de pontos representados em um campo visual em perspectiva linear, em conjunto com uma pavimentação do plano, cria o efeito de profundidade, os pontos distribuídos ao longo do plano, em distâncias distintas com relação as linhas da pavimentação construída, proporcionam outra forma de representação, em que os pontos b, d, e aparentam estar mais distantes do ponto f.

“Deve-se notar que a construção de desenhos em perspectiva linear não estava baseada na abertura do ângulo visual, mas na distância entre o olho e o objeto” (SAITO, 2008, p. 397). Deste modo, conforme a distância “aumenta em direção ao interior do quadro”, tem-se a impressão de que as medidas se alteram para preservar o efeito de profundidade, esta é uma das principais características da perspectiva linear.

¹⁷ The first of the two diagrams on this sheet (fig. 9) is designed to illustrate the optical phenomenon that, when the eye views a three-dimensional scene, objects of equal size are perceived as equal as long as they are placed at equal distances from the eye, no matter in what direction. In the second diagram (fig. 10) a similar arc is inscribed into a perspectival checkerboard, and is thus compared to a situation determined by linear perspective. (FRANGEMBERG, 1992, p.16)

Elementos geométricos como o plano pavimentado, também chamado de plano geometral, fazem parte das estruturas da perspectiva linear. O texto de Desargues, *Método de Perspectiva* se adequa aos fundamentos da perspectiva linear, pois nele é descrita uma forma de construção do plano pavimentado.

Para abordar este assunto com maior familiaridade, acredita-se que uma breve descrição destas estruturas contribua para uma aproximação do leitor ao tema.

Comparando esses elementos com as propostas trabalhadas na Antiguidade, a respeito dos entes que emanavam do objeto e do observador, a Antiguidade de certa forma se contrapunha ao que foi desenvolvido de perspectiva linear ao longo dos séculos XV-XVII.

A Óptica da Antiguidade, que levou à concretização destas ideias, opôs-se, inicialmente, à perspectiva linear. Se foram então compreendidas, de maneira tão lúcida, as distorções esféricas da forma, tal compreensão radica em, ou, pelo menos, corresponde a um reconhecimento, mais significativo ainda, das distorções das grandezas. Também neste campo a teoria Óptica da Antiguidade se ajusta melhor do que a perspectiva do Renascimento à estrutura factual da impressão óptica subjetiva. A Óptica da Antiguidade entendia o campo de visão como uma esfera, sustentava, por isso, que as grandezas aparentes (isto é as projeções dos objetos dentro desse campo de visão esférico) são, sempre e exclusivamente, determinadas pela amplitude dos ângulos de visão, não pela distância a que os objetos estão do olho. (PANOFSKY, 1953, p.36)

Deste modo, no que segue, foram realizados apontamentos a respeito da utilização da perspectiva linear ao longo dos séc. XIII-XVI. Para isto, utilizou-se das representações no período do Renascimento que possuíam recursos da perspectiva linear para compor quadros e pinturas, antes mesmo das formalizações estabelecidas pelos teóricos dessa área.

Elementos da Perspectiva entre séc. XIII-XVI.

Para compreender como técnicas da perspectiva linear foram utilizadas ao longo do Renascimento, por vezes fomos levados a observar quadros e pinturas, buscando nas representações, a utilização de recursos geométricos.

A respeito da possibilidade de pintores terem contribuído para o desenvolvimento da matemática por meio de pinturas. Acredita-se que esta foi uma forma de produção de conhecimento daquele período, pois segundo Sevcenko (1988, p.23) “as artes plásticas acabara se convertendo num centro de convergência de todas as principais tendências da cultura renascentista”. Deste modo, compreende-se que a matemática esteve envolvida com o desenvolvimento de pinturas e representações, e por meio delas, obteve novas formulações.

Durante o Renascimento, nomes como Giotto di Bondone (1267-1337), Duccio di Buoninsegna (1255-1319), Ambrogio Lorenzetti (1290-1348), Pietro Lorenzetti (1292-1338), Phillippo Brunelleschi (1377-1446), Leon Baptiste Alberti (1404-1472), Piero della Francesca (1415-1492) e mais uma ampla lista de pintores e teóricos italianos, foram reconhecidos como importantes referências quanto a representações em perspectiva.

Com relação ao plano geometral, nas pinturas analisadas, encontrou-se um plano pavimentado que representa o solo do cenário, e nele é construída uma pavimentação (semelhante a um plano quadriculado) que é distribuída em direção ao centro do quadro, criando assim o efeito de profundidade.

Essa pavimentação do plano aparece de forma discreta nas representações, em alguns casos, a representação do plano pavimentado é exibida através de um padrão de azulejos estabelecido no solo das pinturas.

Nunca será demais afirmar que o padrão de azulejos, utilizado no sentido mencionado representa o exemplo primeiro de um sistema de coordenadas. Ilustra-se através dele, o <<espaço sistemático>> moderno numa esfera concreta do ponto de vista artístico e isto muito antes de o pensamento matemático abstrato o ter postulado. Dos esforços desenvolvidos no campo da perspectiva, viria a surgir a geometria projetiva no século XVIII. Em última análise esta é, à semelhança do que se passa

com muitas disciplinas ligadas à ciência>> moderna um produto da oficina do artista. (PANOFSKY, 1953, p. 55).

Ao observar pinturas daquele período, o chamado “padrão de azulejos” aparece em diversas representações. Um exemplo dessa utilização está no quadro de Lorenzetti de 1342, intitulado *Presentation de Temple (Apresentação do Templo)*, figura 2.

No solo desta pintura há o chamado “padrão de azulejos” citado por Panofsky. A representação do plano pavimentado por meio desse padrão foi um recurso geométrico que auxiliou na localização de diversos pontos do plano.

Figura 2: Apresentação do Templo.



Fonte: <http://www.holytrinityutrecht.nl/people-presentation-christ-anna/>

Esta técnica é conhecida por pintores desde o século XII, “as primeiras utilizações surgem em trabalhos como *A Cura dos Paralíticos*, um mosaico da segunda metade do século XII, que está atualmente na Catedral de Monreale” (PANOFSKY, 1953, p.139).

Além do plano pavimentado, há a construção de linhas que “convergem” em direção ao centro do quadro. Estas linhas atualmente são

conhecidas como linhas de fuga, que também auxiliam na construção de uma representação tridimensional.

Contudo, o uso de técnicas aprimoradas como um plano pavimentado não eram amplamente utilizadas até o séc. XV, como descreve Edgerton.

[...]planos construtivos desenhados em escala eram raros no início do século XV. Quaisquer que fossem as técnicas que Brunelleschi imaginara para medir as ruínas em Roma parecem ter sido mais parecidas com o desenho estratigráfico do plano de grade, tal como os arqueólogos empregam hoje para conspirar a reconstrução de sítios antigos. De fato, Brunelleschi poderia até ter inventado um sistema de mapeamento próprio, baseado no método de coordenação ptolomaica de projeção de grade cartográfica, outra ciência antiga até então desconhecida na Europa Ocidental, mas recentemente recuperada por meio de Florença. (EDGERTON, 2009, p. 56, tradução nossa)¹⁸.

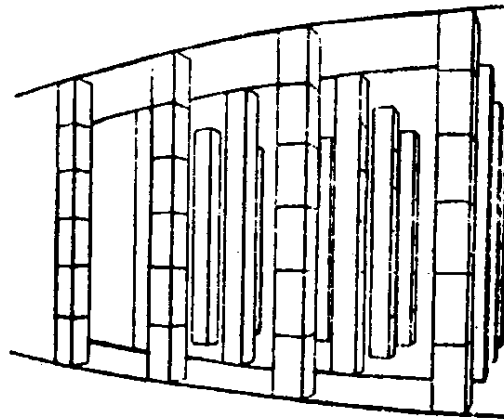
Além do plano pavimentado, a representação de linhas ortogonais foi outro elemento estudado. As linhas poderiam ser representadas de forma distinta em cada uma das técnicas de perspectiva utilizadas.

“Em uma perspectiva angular, as linhas ortogonais sofrem alterações em suas bordas, segundo a óptica do período de Euclides, pois a óptica da Antiguidade entendia a visão como uma esfera” (PANOFSKY, 1953, p.38). Deste modo, em uma representação de linhas ortogonais conforme sugere a perspectiva angular, as colunas representadas proporcionariam o efeito de concavidade nas bordas, pois representações deste tipo estavam diretamente ligadas a concepção de um campo visual em formato esférico.

Numa época em que a percepção era ditada por uma concepção espacial consubstanciada na perspectiva puramente linear, impunha-se a redescoberta das curvaturas do nosso (chamemos-lhe assim) universo óptico esférico. Mas, numa época em que imperava o hábito de ver em perspectiva, perspectiva que não era a linear, a existência dessas curvaturas não levantava dúvidas. Isso acontecia na Antiguidade, na Óptica, e na Teoria das Artes. (PANOFSKY, 1953, p. 36).

¹⁸ building plans drawn to scale were rare in the early fifteenth century. Whatever techniques Brunelleschi had devised for measuring ruins in Rome seem to have been more akin to grid-plan stratigraphic drawing such as archaeologists employ today for plotting the reconstruction of ancient sites. Indeed, Brunelleschi might even have devised a mapping system of his own, based on the Ptolemaic coordinate method of cartographic-grid projection, another antique science heretofore unknown in Western Europe but just recently retrieved by way of Florence. (EDGERTON, 2009, p.56)

Figura 3: Linhas ortogonais em uma perspectiva angular.



Fonte: Panofsky (p.36)

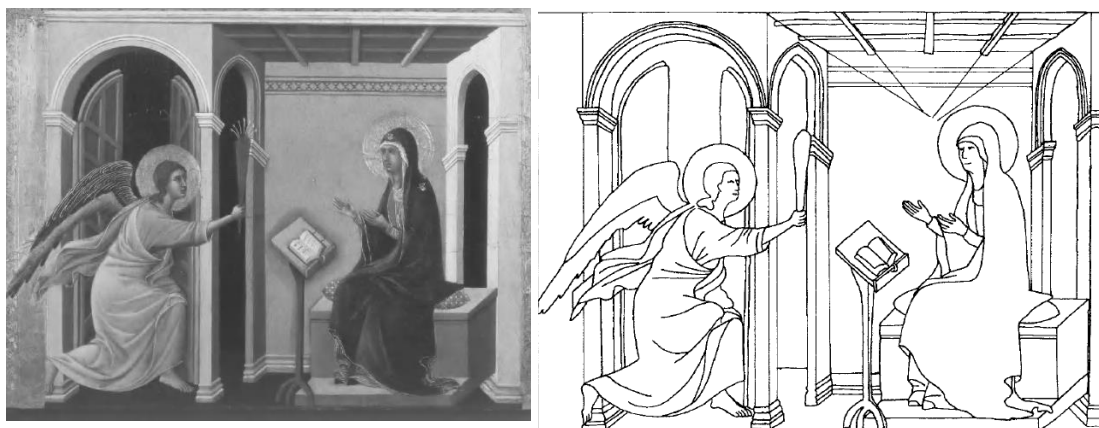
Conforme esboça a figura 3, as colunas representadas seguem uma linha côncava nas extremidades das colunas. Esse tipo de representação se aproxima mais da perspectiva angular, do que da perspectiva linear. Estas distinções entre técnicas de perspectiva começaram a surgir conforme se aprimorava a forma de representar.

De fato no séc.XIV já havia produções que se distanciavam dessas deformações em concavidade, existentes na perspectiva angular.

Em uma representação de Duccio de 1310 intitulada *A Anunciação* (figura 4), as colunas ortogonais não criam o efeito concavidade no quadro. As colunas representadas seguem um formato decrescente, acompanham as linhas em direção a um ponto do quadro, trazendo um efeito de diminuição progressiva de seu tamanho, proporcionando assim um efeito de profundidade na representação.

A *Anunciação da Morte da Virgem* de Duccio, também mostra uma distinção entre ortogonais no teto e outras ortogonais. Nessa pintura, as linhas através dos feixes convergem em direção a um ponto. (KIRSTI, 2007, p.7, tradução nossa)¹⁹.

¹⁹ Duccio's *Annunciation of the Virgin's Death* also shows a distinction between orthogonals in the ceiling and other orthogonals. In this painting, lines through the beams even converge towards one point (KIRSTI, 2007, p.5).

Figura 4: A Anunciação.

Fonte: Kirsti (2007, p.7)

Na pintura de Duccio (figura 4), além de não haver concavidade aparente nas representações das colunas, existe a representação do plano pavimentado no teto e há um conjunto de linhas que se direcionam para um determinado ponto no quadro.

Este tipo de representação se aproxima da prática da perspectiva linear. É provável que Duccio não tivessem uma distinção clara com relação as técnicas tratadas na perspectiva linear e as características da perspectiva natural, visto que em 1310 ainda havia pouca produção com relação aos tipos de perspectiva empregada

Por outro lado, uma forma distinta de representação estava sendo praticada, e essa forma começou a ser amplamente utilizada pelos alunos de Duccio, os irmãos Ambrogio e Pietro Lorenzetti.

Ambos estão diretamente ligados a história da perspectiva, pois “a prática italiana da perspectiva caracterizou-se pelo recurso às teorias matemáticas. As pinturas do Trecento, à maneira dos Lorenzetti tornaram-se progressivamente, mais artificiais, até surgir por volta de 1420, a *Costruzione Legittima*”²⁰ (PANOFSKY, 1953, p. 58).

Já século seguinte, período conhecido como *Quattrocento*, século de produções importantes para a história da perspectiva. Tratados abordando deformações existentes na representação começaram a surgir, além disso, “a

²⁰ Na literatura moderna a construção de Alberti e suas derivações, são algumas vezes referidas como *Costruzione legittima* (KIRSTI, 2007, p.22, tradução nossa).

noção de correção óptica aparece não raramente em textos de Quattrocento e Quinhentista” (FRANGENBERG, 1993, p.213, tradução nossa)²¹.

Nomes como o de Leon Battista Alberti (1404-1472) com o trabalho *A Pintura* de 1435 e Piero della Francesca (1416-1492) com *De Prospectiva Pingendi* de 1474, são reconhecidos importantes contribuintes a respeito de técnicas de representação em perspectiva.

Segundo (ROSSI, 1989, p.32) “foi um humanista como Leon Battista Alberti que deu início aquela concepção científica da arte na qual a matemática (teoria das proporções e teoria da perspectiva) é o terreno comum à obra do pintor e a do cientista”.

Os textos escritos em latim traziam procedimentos e definições para representar objetos.

Em 1435, Alberti terminou *A Pintura*, que contém a primeira definição conhecida de uma representação em perspectiva, como a primeira apresentação de uma construção em perspectiva. (KIRSTI, 2007, p.17, tradução nossa)²².

“Leon Battista Alberti desenvolve as bases de uma nova ciência e as ilustra aplicando à pintura arquitetônica” (FLORIENSKY, p.66).

Por outro lado, Piero della Francesca estudou elementos relacionados as distorções da visão.

Piero discute distorção lateral em dois capítulos. Em ambos os casos, ele dá a essas considerações um lugar de proeminência, nos fins do livro I e I1, respectivamente. Livro I lida com a construção de figuras planas, e na proposição xxx Piero analisa as margens de um pavimento perspectival. O segundo livro diz respeito à construção de objetos tridimensionais. Em sua décima segunda proposição, Piero estuda a construção em perspectiva de uma linha de colunas. (FRANGENBERG, 1992, p.6, tradução nossa)²³.

²¹ The notion of optical correction appears not infrequently in Quattro and Cinquecento texts. (FRANGENBERG, 1993, p.213).

²² In 1435 Alberti finished *De pictura* (On painting), which contains the first known definition of a perspectival representation as well as the first known presentation of a perspective construction. (KIRSTI, 2007, p.17).

²³ Piero discusses lateral distortion in two chapters. In both instances he gives these considerations a place of prominence, at the ends of book I and I1 respectively. Book I deals with the construction of plane figures, and in proposition xxx Piero analyses the margins of a perspectival ‘pavimento’. The second book is concerned with the construction of three-dimensional objects. In its twelfth proposition, Piero studies the perspective construction of a row of columns. (FRANGENBERG, 1992, p.6).

Piero era um artista e matemático e, “por meio de seus trabalhos, aproximou essas duas áreas. Ele apresentou muitas construções de perspectiva em grande detalhe e especulou sobre como elas estavam relacionados com a matemática e óptica” (KIRSTI, 2007 p.17)²⁴.

Em mesma época, Leonardo da Vinci (1452-1519) tratou de propriedades envolvidas entre a perspectiva angular e a linear. “Uma vez que Leonardo entende a visão e a perspectiva como intimamente relacionadas (ambas são chamadas de perspectiva), ele analisa com muito cuidado de que maneira a perspectiva óptica e linear diferem uma da outra” (FRAMGENBERG, 1992, p.10)²⁵.

Em uma nota que data de 1492, Leonardo distinguiu entre três categorias de perspectiva:

Existem três tipos de perspectiva; O primeiro aborda as razões da diminuição dos objetos à medida que se afastam dos olhos e é conhecida como perspectiva decrescente. O segundo contém a forma como as cores variam à medida que se afastam dos olhos. O terceiro e o último se preocupam com a explicação de como os objetos devem ser menos delimitados, pois são remotos e os nomes são: perspectiva linear, perspectiva de cor, perspectiva de desaparecimento (Kirsti apud Leonardo, p.85)²⁶ – Tradução Nossa.

O que percebe-se ao analisar as informações apresentadas acima, é que, ao longo do séc. XV e início o XVI, parte das produções teóricas a respeito da perspectiva, estiveram relacionadas com processos e reprodução de figuras e possíveis distorções que poderiam ocorrer ao longo das representações.

²⁴ Piero, on the other hand, was an artist and a mathematician who wanted to connect these two disciplines. He presented many perspective constructions in great detail and speculated about how they were related to mathematics and optics (KIRSTI, 2007 p.17).

²⁵ Since Leonardo understands vision and perspective as closely related (both are called 'perspective') he analyses very carefully in what way optics and linear perspective differ from one another (FRAMNGEMBERG, 1992, p.10).

²⁶ There are three kinds of perspective; the first deals with the reasons of the diminution of objects as they recede from the eye, and it is known as diminishing perspective. The second contains the way in which colours vary as they recede from the eye. The third and last is concerned with the explanation of how the objects should be less clearly delimited as they are remote, and the names are these: linear perspective, perspective of colour, perspective of disappearance.(Kirsti *apud* Leonardo, p.85).

Com relação as fontes que esses teóricos utilizavam é possível que a partir dos trabalhos de Biagio da Parma e dell'Abaco, uma série de estudos começaram a aparecer.

As obras de dois teóricos daquele período, Paolo dell'Abaco (1366) e depois Biagio da Parma, não chegaram até nós. Mas é provável que tenham sido eles que prepararam o terreno onde, desde o começo do século XV, trabalharam os principais teóricos da doutrina da perspectiva: Filippo Brunelleschi (1377-1449) e Paolo Uccello (1397-1475), depois Leon Battista Alberti, Piero della Francesca (cerca de 1420-1492) e, finalmente, uma série de escultores entre os quais temos que destacar especialmente Donatello (1386-1466) (Garin, 1993, p.63-64)

Segundo Freguglia (2009) nomes como Leon B. Alberti com o trabalho *Della Pictura* de (1435); Piero della Francesca com o *De prospectiva pingendi* (1482); J. Pélerin, *De artificial Perspectiva* (1505); A. Dürer, *Istitutionum geometricorum libri* (1525); S. Serlio, *Prospectiva* (1545), F. Commandino, *in Planisphaerium Ptolomae Commentarius* (1558), J. Cousin, *Livre de Perspective* (1560); Daniele Barbaro *La pratica della Perspectiva* (1569); Stevin, *Perspectiva* (1605). E. Danti, *La prespectiva di Euclide* (1573), fazem parte dos autores que produziram tratados relacionados a perspectiva durante os séc. XV-XVII.

Por outro lado, além da parte teórica, recursos como ferramentas para representações, auxiliaram em composições de Alberti, de Da Vinci e outros teóricos citados. Alberti estava diretamente envolvido com isso, “o seu "*Ludi matemático*" é típico de um certo tipo de tratado do séc.XV em que uma variedade de técnicas matemáticas aplicadas foram exploradas para utilidade e proveito” (KEMP, 1990, p.168)²⁷.

A utilização de ferramentas esteve atrelada ao movimento característico da ciência daquele período, pois, a produção de ferramentas representou um tipo conhecimento direcionado, (por vezes) com fins

²⁷Alberti reflects both the basic and sophisticated forms of mensuration. His “Ludi mathematic” is typical of a certain type of fifteenth centry treatise in which a range of applied mathematical techniques were exploited for utility and delight. (KEMP, 1990, p.168).

funcionais. Rossi (1989) em seu trabalho *A ciência e a Filosofia dos Modernos*, analisa as relações existentes no movimento da ciência moderna:

A ciência apresenta-se, na sua essência, como pensamento que tende à sistematização, à colocação de afirmações particulares em contextos teóricos muito amplos. Mas de nossa imagem da ciência também faz parte integrante a ideia de especialização: vale dizer, a ideia de que a própria existência dos objetos de uma ciência específica pressupõe definições e teorias. As entidades de que falam as nossas ciências não são nem as entidades do senso comum, nem os objetos que encontramos na vida cotidiana. São entidades construídas dentro de teorias com frequência não facilmente acessíveis ou acessíveis a poucos. (ROSSI, 1989, p.53)

Contudo, conforme Rossi discorre, a “existência de objetos de uma ciência específica pressupõe definições e teorias”, portanto o desenvolvimento de ferramentas específicas para reproduções em perspectiva, representa o envolvendo definições e teorias próprias daquela área.

A criação de ferramentas para representação fez parte de uma articulação entre conhecimento prático e conhecimento teórico. Além de Alberti e Leonardo, já citados, nomes como Jost Amman (1539-1591), Jacopo Barozzi (1507-1573), Baldassare Lanci (1510-1571), Cigoli (1559-1613) até Galileo (1564-1642)²⁸ são reconhecidos como teóricos que utilizavam ferramentas para construir as representações.

O que nota-se ao estudar estes envolvimento no campo da ciência é que, a produção do conhecimento naquele contexto utilizava de uma diversidade de recursos para se desenvolver, relações entre o conhecimento aplicado e o desenvolvimento de ferramentas, foi importante para a época, e com isso vemos algumas articulações da chamada *techné*.

²⁸ Kirsti, 2007

Ciência, *Techné* e Perspectiva

No Renascimento, importantes cidades europeias como Paris, Roma Lyon, entre outras, sofriam modificações com relação a arquitetura.

A intenção é substituir a cidade medieval, desenvolvida desordenadamente em torno de si mesma, com seus edifícios amontoados ao longo de vias estreitas e tortuosas, pela nova cidade, planejada segundo um traço racional. Simultaneamente, há um desejo de se transformar ordenamentos contraditórios e complexos em ordens organicamente articuladas. Esse é o ponto em que uma sociedade amadurecida volta-se para si mesma, reflete sobre as próprias estruturas e procura, nas lições do passado, uma sugestão para o futuro, combinando a experiência e a razão com os ensinamentos da história. (GARIN, 1993, p.58).

Novas construções surgiram e com isso a necessidade de novos arquitetos e construtores. Em meio a esse cenário, é possível que a produção de ferramentas voltadas à construção fosse um tipo de conhecimento de grande importância. Contudo, essas produções possuíam um foco principal, o de proporcionar melhorias a partir de uma visão utilitária e funcional.

Quem atentar, mais do que já se faz, aos ensaios dos urbanistas, dos técnicos militares e dos artistas em geral encontrará nos “científicos” a ideia de um conhecimento prático voltado para as construções destinadas à utilidade e à convivência civil, universal, e capaz de reunir em si todo o corpo das ciências e das artes....Leon Alberti chega mesmo a dizer que o homem é por natureza construtor, que é o homem justamente na medida em que é arquiteto. (GARIN, 1993, p.74).

O que emerge nesse cenário é um conhecimento que envolve a estética, a beleza e a funcionalidade, atreladas as necessidades das grandes cidades. Com relação as produções teóricas, estes aspectos influenciaram os tipos de tratados desenvolvidos ao longo do Renascimento.

A literatura dos séculos XV e XVI é extraordinariamente rica em *Tratados* de caráter técnico, que são às vezes autênticos manuais, às vezes considerações esparsas sobre o próprio trabalho ou os procedimentos empregados nas várias artes. Obras desse tipo representaram uma contribuição decisiva ao contato- que então vinha se realizando- entre saber científico e saber técnico-artesanal, e tiveram um efeito determinante no nascimento da cooperação entre cientistas e técnicos, entre ciência e indústria. Antes de proceder a um exame de algumas obras e alguns autores, será oportuno lembrar que nessa

literatura de artistas, engenheiros e artesãos superiores incluem-se os escritos de Brunelleschi, Bhinerti, Piero della Francesca, Leonardo, Cellini,, Paolo Lomazzo o tratado sobre as máquinas de guerra de Konrad Keyser (1366-1405); os tratados técnicos de Fontana (1420) e Mariano (1438); as obras sobre arquitetura de Leon Battista Alberti, Filarete, Francesco di Giorgio Martini, Palladio; o livro sobre máquinas militares de Valturio da Rimini (ROSSI, 1989, p.30)

Esta diversidade de conhecimento, em geral, atrelados a funcionalidade, compõe o que alguns pesquisadores intitulam a chamam de *techné*. “A *techné* foi durante muito tempo ignorada. Isso não significa, entretanto, que ela não fosse importante, visto que este tipo de conhecimento estava presente nas construções, na agricultura e nas artes em geral” (SAITO e BELTRAN, 2014, p. 7).

A *techné* estava diretamente envolvida com um tipo de conhecimento funcional, que se desenvolveu a partir das necessidades, e que os próprios personagens proporcionavam soluções práticas para os problemas encontrados. De certa forma “a *techné* era um tipo de saber que se desenvolvia horizontalmente na medida em que novos problemas práticos precisavam ser resolvidos” (ibid.).

Contudo, esta forma de produção do conhecimento estava pouco envolvida com a Arte. De modo que, no século XIV, a Arte ainda era considerada uma habilidade manual. “O artista era tratado de “tu”, como os criados, e cidadãos abastados e nobres considerariam humilhante a posição do artista. Quase todos os artistas do início do século XV provêm de meios artesãos, camponeses e pequenos burgueses” (ROSSI, 1989, p.34).

No campo da perspectiva, houve uma série de ferramentas que foram produzidas para proporcionar melhores recursos àqueles que se propusessem a representar. “Muitas das máquinas de perspectiva nos anos subsequentes certamente estavam intimamente relacionadas em sua invenção e operação, aos instrumentos medida terrestre” (KEMP,1990, p.168)²⁹. Dentre as invenções, Alberti desenvolveu uma maneira de trabalhar a representação de

²⁹ Many of the perspective machines in subsequent years are certainly closely related in their invention and operation to the instruments of terrestrial and astronomical mensuration. (KEMP, 1990, p.168).

objetos, entretanto sua forma ainda não satisfazia todas as necessidades existentes naquele período.

O modelo de Alberti resolveu a questão de como conceber uma representação de um objeto tridimensional em um plano, mas, ao mesmo tempo, criou uma nova questão: como produzir a representação. Alberti também resolveu este problema na *De pictura*, sugerindo, de fato, duas soluções, uma das quais foi elegantemente ilustrada pelo artista alemão Albrecht Dürer cem anos depois. (KIRSTI, 2007, p.21, tradução nossa)³⁰.

A solução proposta por Alberti se aproximou das relações da *techné*, pois ela representou um conhecimento que se desenvolvia na tensão entre o saber e o fazer. Segundo (SAITO e BELTRAN, 20014, p.8) a *techné* “era um tipo de “conhecimento aplicado” que gerava novos conhecimentos (também aplicáveis) por meio da manipulação física”.

A representação de Dürer de 1525 (figura 5) mostra utilização de uma ferramenta, a qual está entre a pessoa a ser representada e o pintor, este recurso era chamado de quadrícula, além de ter sido um recurso utilizado para medidas de agrimensura, era uma ferramenta utilizada na ampliação e redução de figuras.

A quadrícula era um quadro quadriculado que ficava entre o observador e o objeto, de modo que, com uma tela também quadriculada a frente do pintor, e um trabalho “ponto a ponto”, era possível localizar os pontos desejados no objeto, encontrar a posição deles na quadrícula e assim “transferi-los” para a tela quadriculada.

Figura 5: Representação de Dürer sobre o método de Alberti.



Fonte: Kirsti (2007, p.22)¹.

³⁰ Alberti's model settled the question of how to conceive of a representation of a three-dimensional object upon a plane, but at the same time it created a new question: how to produce the representation. Alberti also solved this problem in *De pictura*, suggesting, in fact, two solutions, one of which was elegantly illustrated by the German artist Albrecht Dürer a hundred years later. (KIRSTI, 2007 ,p.21).

Segundo Kirsti (2007, p.22, tradução nossa), “o método prático de Alberti para construir imagens em perspectiva na ilustração de Dürer, considera seu objeto através de uma rede de quadrados, percebendo onde um raio visual em um ponto definido cruza o plano da rede³¹.

O próprio dispositivo de perspectiva de “Alberti, conforme registrado em *A Pintura*, apresenta o mais simples e onipresente dos procedimentos, a saber, a transcrição direta da disposição linear dos objetos, que aparecem no olho e no plano de intersecção” (KEMP, 1990, p.169)³².

Portanto, percebe-se que, com o envolvimento de arquitetos no campo das representações em perspectiva, novas articulações deste conhecimento surgiram. Por meio dessas articulações, novos olhares com relação ao modo de criar esboços e pinturas, envolvendo elementos matemáticos, proporcionaram o desenvolvimento de outras técnicas de representação.

Contudo, passamos agora a olhar para as contribuições de Desargues, começando primeiramente por uma breve biografia e partindo para uma análise das publicações selecionadas.

³¹ Alberti's practical method for constructing perspective images in Durer's illustration. The artist regards his subject through a net of squares, noticing where a visual ray to a definite point intersects the plane of the net. Then at the corresponding position on his chequered paper he draws the image of the observed point (KIRSTI, 2007, p.21).

³² Alberti's own perspective device as recorded in *De Pictura* introduces us to the most simple and ubiquitous of the procedures, namely the direct transcription of the linear disposition of objects as they appear to the eye on the intersecting plane. (KEMP, 1990 ,p.169).

CAPÍTULO 3: Biografia de Desargues

Biografia e informações relevantes

Neste capítulo apresentamos uma breve biografia de Girard Desargues, para isso nos baseamos em trabalhos de Rene Taton, Poudra, Kemp, Field e Gray, entre outros.

Não há muitos registros com relação a vida de Desargues, diversas informações a respeito dos anos iniciais ainda não foram esclarecidas, sabe-se que “A família de Desargues é originária de Condreiu, pequena cidade, próximo de Lyon” (TATON, 1951, p.11, tradução nossa). “Girard Desargues, foi batizado em 2 de março de 1591 na Igreja de Santa Cruz em Lyon” (TATON, 1951, p.11, tradução nossa)³³, sua família era influente na cidade, visto que “em Lyon em 1606 havia Desargues redator, um médico e um advogado, os quais provavelmente seriam seus parentes” (POUDRA, 1864, p.11)³⁴.

“Nos primeiros, Desargues parece ter estudado em Lyon, onde sua família viveu” (ibid.). O nome Desargues por vezes foi escrito de forma separada, como *des Argues*. Pesquisadores como Adrien Baillet (1649-1706) um dos biógrafos de René Descartes, no trabalho *La vie de mr. Des-Cartes. Réduite en abregé* 1692, utilizou essa forma de escrita *des Argues* quando relatou o contato entre os dois matemáticos.

Temos mais informações de Desargues no período que viveu em Paris. “As primeiras evidências de sua atividade científica são de 9 de setembro de 1626, quando com outro lionês, François Villette, ele propôs ao município que construísse uma máquina potente para elevar água do Sena, para poder distribuir para a cidade” (POUDRA, 1864, p.46)³⁵.

³³ Girard Desargues naquit à lyon, où il fut baptisé à la paroisse Sainte-Croix, le 2 mars 1591. (TATON, 1951, p.11).

³⁴ Il existait encore à Lyon em 1606 um Desargues, désigné comme recteur, docteur-ès-droit, avocat au siège présidial de cette ville, qui était probablement un de ses parents (POUDRA, 1864, p.11)

³⁵ The first evidence of his scientific activity places him in Paris on 9 September 1626, when, with another Lyonnais, Francois Villette, he proposed to the municipality that it construct powerful machines to raise the water of the Seine, in order to be able to distribute it in the city (TATON, 1978, p.46).

“Desargues foi um engenheiro militar, um arquiteto especializado em design de escadas e acima de tudo, um geômetra de extraordinária visão” (KEMP, 1990, p.120)³⁶.

Em Paris ele teve contato com importantes nomes da ciência, além de Descartes, o matemático lionês era um dos integrantes do grupo do padre Marin Mersenne (1588-1648). Neste grupo, estudiosos de toda a Europa se correspondiam com o padre francês. Em um artigo da *Revue 'histoire des sciences et de leurs applications* de 1948, Waard apresentou registros de correspondência entre Desargues e Mersenne. No artigo chamado *A Pesquisa da Correspondência de Mersenne (la recherche de la correspondance de Mersenne)*, há uma lista de nomes para os quais as correspondências de Mersenne foram destinadas.

[...] três volumes de cartas a Mersenne, as quais foram retiradas de cartas de Debeaune (Vol. I, pp. 165-166) de Auzout (I, pp. 228-231), de Desargues em 4 de abril de 1638 (Vol 1, pp. 252-255) (WAARD, C. 1948, p. 13-28, tradução nossa)³⁷.

Nomes como os de Torricelli (1608-1647), Thomas Hobbes (1588-1679), Isaac Beeckman (1588-1637), Fabri Peiresc (1580-1637), Pierre Fermat (1601-1665), Christian Huygens (1629-1695) também foram citados nas correspondências estudadas por Waard.

Mersenne foi um intermediário entre os pensadores de toda a Europa, ele realizava diversas reuniões em Paris. Desargues participava frequentemente desses encontros, há estudiosos que consideram essas reuniões como sendo as primeiras movimentações da reconhecida Academia de Ciências de Paris.

Ele estava entre os estudiosos que se reuniam aos sábados na casa de Sr. Le Pailleur, para falar sobre matemática. Essa reunião precedia a fundação da Academia de Ciência. Este é o lugar que Desargues conhece os homens ilustres dessa ciência, como Gassendi, Bouilaud, Pascal, Roberval, Carccavi e outros. (POUDRA, 1864, p.14, tradução nossa)³⁸.

³⁶ Desargues was a civil and military engineer, an architect specializing in staircase design and above all geometer of extraordinary spatial vision 77. (KEMP, 1990, p.120).

³⁷ Ainsi celui-ci devint possesseur des trois volumes des lettres adressées à Mersenne, auxquels étaient enlevées maintenant les lettres de Debeaune (t. I, pp. 165-166), d'Auzout (I, pp. 228-231), de Desargues du 4 avril 1638 (I, pp. 252-255) (WAARD, C. p.1948, 13-28)

³⁸ Il était du nombre des savants qui se réunissaient tous les samedis chez . le Pailleur, pour y parler de mathématiques. Cette réunion précéda la fondation de l'Académie des sciences. C'est là que Desargues fit

Neste grupo, havia integrantes que discordavam das publicações do matemático lionês, “Beaugrand foi seu implacável inimigo” (TATON, 1970, p.47, tradução nossa)³⁹, que ao longo de sua vida publicou diversas críticas aos trabalhos de Desargues (ibid.). Jean Beaugrand (1584-1640) foi um matemático francês que segundo Waard (1948) também era integrante do grupo de Mersenne e se correspondia com o padre.

Desargues em 1636 publica dois trabalhos, o primeiro chamado “*Une méthode aisée pour apprendre et enseigner a lire et écrire la musique*” (Um método para ensinar e aprender a ler e escrever música), incluso na Harmonia Universal de Mersenne.

O segundo trabalho de 1636, chamado *exemple de l’une des manières universelles du S. G. D. L. touchant la pratique de la perspective sans employer aucun tiers point, de distance ny d’autres nature, qui soit hors du champ de l’ouvrage* (exemplo de Sr Girard Desargues de Lyon, de uma das maneiras universais de prática da perspectiva, sem aplicar algum terceiro ponto, distante, nem outra natureza que estão fora do campo do objeto), descreve um método para construir representações em perspectiva.

No ano seguinte René Descartes publica a obra *Discurso do Método*. O trabalho de “Descartes de maio de 1637, fomentou diversas discussões entre os principais pensadores franceses nos vários problemas mencionados [...] Desargues participou ativamente dessas discussões” (TATON, 1970, p.46, tradução nossa)⁴⁰.

Em 1639, Desargues publica o trabalho chamado *Brouillon project d'une atteinte aux Evenemens des rencontres du Cone avec* (Esboço do encontro de um cone com um plano). Este trabalho não teve forte repercussão em seu período, diversos pesquisadores alegam que por causa do “rápido sucesso do método cartesiano de aplicar a álgebra a geometria foi certamente

connaissance des hommes alors illustres en cette science, tels que Gassendi, Bouillaud, Pascal, Roberval, Carcavi et autres. (POUDRA, 1864, p.14).

³⁹ he made Beaugrand his implacable enemy (TATON, 1970, p.47).

⁴⁰ Descartes's Discours de la method in May 1637, gave rise to ardent discussions among the principal French thinkers on the various problems mentioned [...] Desargues participated very actively in these discussions (TATON, 1970 p.46).

uma das razões pela pobre difusão das ideias de Desargues” (TATON, 1971, p.47)⁴¹.

Em mesmo ano “Beaugrand criticou o trabalho *Brouillon Project*, alegando que algumas de suas demonstrações poderiam ser obtidas mais diretamente por Apolônio” (Ibid.). Também “foi acusado de ter acesso aos trabalho de Aleaume e utilizá-los em seus próprios trabalhos, publicados em 1636 e 1639” (FIELD,1997, p.211)⁴².

No ano seguinte

Em Agosto de 1640, Desargues publicou, novamente sob o título de *Brouillon Project*, um ensaio técnico de corte de pedra e gnomonia. Contudo referindo sobre alguns pontos de seu método de perspectiva apresentado em 1636, ele fornece um exemplo de novo método gráfico que usa e ele recomenda (TATON, 1970, p.47, tradução nossa)⁴³.

“No ano de 1641, Desargues publica um segundo ensaio sobre seções cônicas, citado as vezes sob o título de *Lições Tenebres*” (TATON, 1970, p.47)⁴⁴.

Em 1642, Desargues esteve novamente envolvido com problemas de plágio.

Desargues se esforçou para disseminar o uso de seus métodos gráficos entre os praticantes e conseguiu fazê-los experimentar com seus diagramas de corte de pedras sem encontrar muita resistência. No início de 1642, no entanto, a publicação anônima do primeiro volume de *La perspective pratique* (escrito pelo jesuíta Jean Dubreuil) deu origem a polêmicas amargas. Ao descobrir que seu próprio método de perspectiva foi copiado e distorcido neste livro, Desargues teve dois cartazes postados em Paris, no qual ele acusou o autor e os editores deste tratado de plágio e obtusidade. (TATON 1970, p.48, tradução nossa)⁴⁵.

⁴¹ The rapid success of the Cartesian method of applying algebra to geometry was certainly one of the basic reasons for the poor diffusion of Desargues's ideas [...]In July 1639 Beaugrand criticized Desargues's work, asserting that certain of his demonstrations can be drawn much more directly from Apollonius (Taton, 1970,p.47).

⁴² Desargues was accused of having had acces to Alleaume's aper and of having used them in his own work pblished in 1636 and 1639. (FIELD, 1997, p.211).

⁴³ In August 1640, Desargues published, again under the general title *Brouillon project*, an essay on techniques of stonecutting and on gnomonics . While refining certain points of his method of perspective presented in 1636, he gives an example of a new graphical method whose use he recommends (TATON, 1970, p.47).

⁴⁴ that around 1641 Desargues published a second essay on conic sections, cited sometimes under the title of *Lecons de tenebres*. (p.47).

⁴⁵ Desargues strove to spread the use of his graphical methods among practitioners and succeeded in having them experiment with his stonecutting diagrams without encountering very strong resistance. At the beginning of 1642, however, the anonymous publication of the first volume of *La perspective pratique* (written by the Jesuit Jean Dubreuil) gave rise to bitter polemics . Finding that his own method of

Vale ressaltar que, naquele período, uma diversidade de textos relacionados as técnicas de perspectiva estavam sendo produzidos. Segundo KEMP (1990), trabalhos como os de Vaulezard [1630], Desargues [1636], Niceron [1638 e 1646], Dubreuil [1642, 1647 e 1649], Aleaume e Mignon [1643] Bosse [1648, 1653, 1665 e, 1667], Gaultier [1648], Le Bicheur [1660], Bourgoing [1661], Huret [1670], and Le Clerc [1682]⁴⁶, fizeram parte do amplo repertório de nomes que contribuíram para a perspectiva na França ao longo do séc.XVII.

“Em 1644, novos ataques foram lançados contra os trabalhos de Desargues. Eles originam com o trabalho Corte de Pedras de J. Curabelle, quem criticou violentamente os seus escritos sobre corte de pedra, perspectiva e Gnomonia” (TATON, 1970, p.48).

Ao longo da vida, Desargues teve alunos como Abraham Bosse (1604-1676), Philippe La Hire (1640-1718) e Blaise Pascal (1623-1662). “Bosse foi pintor, escultor e gravurista contribuiu para a preservação do trabalho de Desargues [...] Ele deu a Bosse a responsabilidade pela disseminação de seus métodos” (ibid.)⁴⁷.

Em seu estudo intitulado *Maniere Universelle de Mr. Desargues pour pratiquer la Perspective par petit-pieds comme le Geometral*, (Maneira Universal de Sr. Desargues para praticar a perspectiva pequenos pés, como o geometral) publicado em 1648, Bosse continua a analisar a teoria de representação desenvolvida por Desargues.

Neste texto, “Bosse de fato, anexou uma reimpressão do livro original de doze páginas de Desargues de 1636, em reivindicação da originalidade do método proposto” (FIELD, 1997, p.192, tradução nossa)⁴⁸. Além disso, em 1648, Desargues já havia desenvolvido “seu teorema sobre triângulos projetivos, pois é provável que ele tenha sido publicado em um livro

perspective was both copied and distorted in this book, Desargues had two placards posted in Paris in which he accused the author and the publishers of this treatise of plagiarism and obtuseness. (TATON 1970, p.48).

⁴⁶ Kemp, 1990, p. 120.

⁴⁷ In 1644, however, new attacks were launched against Desargues's work . They originated with a stonemason, J . Curabelle, who violently criticized his writings on stonemasonry, perspective, and gnomonics [...] He has given Bosse the responsibility for the spread of his methods, (TATON, 1970, p.48).

⁴⁸ Bosse in fact appended to this work a reprint of Desargues' original twelve page book of 1636 (FIELD, 1997, p.192).

suplementar de perspectiva o qual ele publicou em 1643, e certamente aparece na exposição de Bosse sobre a *Maneira Universal de Desargues em 1648*” (KEMP, 1990, p.121)⁴⁹.

Em mesmo ano Abraham Bosse foi convidado a ensinar perspectiva na Academia de Pintura e Escultura de Paris. “Como um gravurista de profissão ele não era elegível por eleição formal para a Academia, ele foi nomeado Membro Honorário em 1651 em reconhecimento de sua contribuição como professor” (KEMP, 1990, p. 122)⁵⁰.

Outro de seus alunos, Philippe La Hire foi um dos responsáveis por dar continuidade aos estudos das seções cônicas, uma de suas publicações chamada *Nouvelle méthode en géométrie pour les sections des superficies coniques et cylindriques*, publicado em 1676 (Novo método em geometria para as seções de superfícies cônicas e cilíndricas), La Hire continua a tratar de problemas explorados por Desargues envolvendo proporcionalidade entre segmentos e projeções.

Ele esteve envolvido em considerações sobre razões cruzadas de quatro pontos [...] Desargues preferiu manter a noção mais geral de seis pontos em involução. Entretanto, o trabalho de La Hire se assemelhava ao de Desargues em questões importantes sobre o tratamento de problemas por meio de projeção. (FIELD, 1997, p.228, tradução nossa)⁵¹.

Alguns anos depois, “em 1679, La Hire fez uma cópia do manuscrito *Brouillon Project*, desejando, como ele disse, tornar esse trabalho melhor conhecido” (ibid.). Esta cópia foi aquela estudada por nossas referências, como Poudra, Chasles, Cremona entre outros.

Com relação ao estudo das cônicas, um aluno de Desargues, Blaise Pascal, publica um ano depois de Desargues ter publicado seu *Brouillon Projecti*, o trabalho chamado *Essay pour les Coniques* (Ensaio sobre as Cônicas) em 1640. Há pesquisadores que consideram que os resultados

⁴⁹ The theorem may have been published in the supplementary *Livre de perspective* which he issued in 1643, and it certainly appeared in Bosse’s exposition of Desargues’ *Manière Universelle* in 1648 (KEMP, 1990, p.121).

⁵⁰ Bosse was invited to provide instruction in perspective. As an engraver by profession he was not eligible for formal election to the Academy, but he was made an Honorary Member in 1651 in recognition of his contribution as a teacher. (KEMP, 1990 p. 123).

⁵¹ had involved considering cross ratios of four points [...] Desargues had preferred to stick with the more general notion of six points in involution. However, La Hire’s work resembled Desargues’ in the important matter of treating problems by means of projection. [...] In 1679, Philippe made a manuscript copy of Desargues’ *Rough draft on conics* – wishing, as he said, to get to know the work better. (FIELD, 1997, p.228).

geométricos que eles apresentaram sinalizou efetivamente o nascimento da geometria projetiva.

Além de textos matemáticos, Desargues foi arquiteto e participou de algumas construções, principalmente na região de Lyon.

Em Paris, os autores do período atribuem a Desargues, além de algumas casas e mansões, várias escadarias cuja estrutura era complexa e espetacular. [...] Na região de Lyon, as criações arquitetônicas de Desargues também eram bastante numerosas; participou do planejamento de vários edifícios públicos e privados e de salas cuja arquitetura era particularmente delicada. (TATON, 1970, p.49, tradução nossa)⁵².

Em 1646 a cidade de Lyon queria construir uma prefeitura. “Chamaram Simon Maupin para fazer os planos, mas antes de proceder à execução escreveram ao famoso arquiteto Desargues que era filho da cidade, e pediram para que ele desejasse corrigir os planos de Maupin” (POUDRA, 1864, p.39)⁵³.

Temos conhecimento de sua morte no ano de 1661. “Desargues passou o resto de seus dias meditando sobre matemática e ensinando seu método de corte de pedras para diversos artesãos com quem ele estava cercado” (POUDRA, 1864, p.44, tradução nossa)⁵⁴.

“O trabalho de Desargues foi redescoberto e plenamente apreciado por geômetras do século XIX. Seu trabalho revelou sua fecundidade muito mais por suas extensões do que por suas repercussões imediatas” (TATON, 1970, p.50, tradução nossa)⁵⁵.

⁵² In Paris the authors of the period attribute to Desargues, besides a few houses and mansions, several staircases whose complex structure and spectacular character attest to the exactitude and efficacy of his graphical stonecutting procedures . [...] In the region of Lyons, Desargues's architectural creations were likewise quite numerous; he participated in the planning of several private and public buildings and of rooms whose architecture was particularly delicate(TATON, 1970, p.49).

⁵³ En 1646, la ville de Lyon voulut faire construire un hôtel de ville. Elle chargea Simon Maupin, alors son architecte-voyer, d'en faire les plans, mais , avant de passer à l'exécution , les pré-vôts de la ville écrivirent au célèbre architecte Desargues qui était un enfant de la ville, pour le prier de vouloir corriger ces plans de Maupin. (POUDRA, 1864, p.39).

⁵⁴ Desargues passe le reste de ses jours à méditer sur les mathématiques et à enseigner aux nom breux ouvriers dont il étoit entouré, sa méthode de la coupe des pierres (POUDRA, 1864, p.44).

⁵⁵ ⁵⁵ Desargues's work was rediscovered and fully appreciated by the geometers of the nineteenth century . Thus, like that of all precursors, his work revealed its fruitfulness much more by its remote extensions than by its immediate repercussions . (TATON, 1970, p.50).

CAPÍTULO 4. MÉTODO DE PERSPECTIVA

Descrição da Obra

No segundo trabalho publicado em 1636 (figura 6), intitulado *exemple de l'vne des manières vniverselles dv S. G. D. L. tovchant la pratiqve de la perspective sans employer avcvn tiers point, de distance ny d'avtres nature, qui soit hors du champ de l'ouurage* (exemplo de Sr Girard Desargues de Lyon, de uma das maneiras universais de prática da perspectiva sem aplicar algum terceiro ponto distante, nem outra natureza que estão fora do campo do objeto), que chamaremos de *Método de Perspectiva*, está atualmente

FIGURA 6: Método de Perspectiva, S.G.D.L, 1636.

I

EXEMPLE DE L'VNE DES MANIERES
VNIVERSELLES DV S. G. D. L. TOVCHANT
LA PRATIQVE DE LA PERSPECTIVE SANS EMPLOIER
AVCVN TIERS POINT, DE DISTANCE NY D'AVTRE
nature, qui soit hors du champ de l'ouurage.



O MME cét Exemple d'une maniere vniverselle de pratiquer la perspective sans employer aucun tiers point, de distance ou d'autre nature, qui soit hors du champ de l'ouurage, se manifeste en langue Françoise, ausi les mesures y sont de l'usage de la France.

Les Mots PERSPECTIVE, APARENCE, REPRESENTATION, & POVRTRAIT, y sont chacun le nom d'une même chose.

Les Mots, EXTREMITÉZ, BORDS, COSTEZ & CONTOUR, d'une figure y sont ausi chacun le nom d'une même chose.

Et les Mots, REPRESENTER, POVRTRAIRE, TROUVER L'APARENCE, FAIRE ou METTRE en PERSPECTIVE y sont employez en même signification l'un que l'autre.

Les Mots à NIVEAV, de NIVEAV, PARALEL à L'HORISON, y signifient ausi chacun une même chose.

Les Mots à PLOMB, PERPENDICVLAIRE à L'HORISON, & QVARREMENT à L'HORISON y signifient ausi chacun une même chose.

Et les Mots QVARREMENT, à L'EQVIERE, à DROITS ANGLES, & PERPENDICVLAIREMENT y signifient encor en general une même chose l'un que l'autre.

Ce qu'on se propose à fourtraire y à nom SVIET.

Ce qu'aucuns nomment plan geometral, autres plan de terre, autres la plante du sujet, y à nom ASSIETE du SVIET.

Ce qu'aucuns nomment la transparence, autres la section, autres d'un autre nom, à sçavoir la surface de la chose en laquelle on fait une perspective s'y nomme TABLEAV, devant comme apres l'ouurage acheué.

L'assiete du sujet, & le tableau dont il est icy parlé sont en des surfaces plates, c'est à dire qu'il n'est icy parlé que des tableaux plats, & des assietes de sujet plates, lesquelles assietes & tableaux sont considerez, comme aians deux faces chacun.

La face du tableau qui se trouue exposée à l'œil s'y nomme le DEVANT du TABLEAV comme son autre face laquelle n'est pas exposée à l'œil, s'y nomme le DERRIERE du TABLEAV.

Quand l'assiete du sujet est estendue à Niveau, celle de ses faces qui se trouue tournée du costé du Ciel, y à non le DESSVS de L'ASSIETE du SVIET, comme l'autre face de la mesme assiete qui se trouue tournée

disponível para acesso na Biblioteca Nacional da França, seção Gallica.

O texto original, escrito em francês, possui diversas palavras escritas de forma distinta do modo que se escreve no francês atual.

*Compreende-se que determinado idioma pode se modificar ao longo dos anos e além disso os textos possuem características tipográficas próprias do período. Em nossa tradução, optamos por associar palavras como *sçavoir*, *trouue*, *mesvre*, *povtrat*, *aiant*, entre outras. A palavras como *savoir*, *trouve*, *measure*, *pourtrat*, *avant*, respectivamente.*

Por outro lado, nas notas de rodapé buscou-se preservar as citações originais. O objetivo é mostrar ao leitor, alguns dos obstáculos existentes ao se analisar um texto histórico.

Este trabalho de Desargues descreve a construção de uma estrutura geométrica para a representação de uma gaiola utilizando técnicas de perspectiva. “Com sua técnica é possível transferir as coordenadas de um espaço tridimensional para a figura plana” (KIRSTI, 2007, p.428, tradução nossa)⁵⁶.

No título da obra, Desargues anuncia não utilizar nenhum terceiro ponto fora do campo do objeto. Essa distinção faz referência as teorias que construía um plano geometral (plano pavimentado) a partir de pontos externos ao quadro de representação.

Na primeira página do trabalho, o matemático se dedica a determinar os termos e sinônimos utilizados ao longo do texto.

As palavras perspectiva, aparência, representação e retrato, são cada uma o nome de uma mesma coisa.

As palavras, extremidade, bordas, lado e contorno de uma figura, são também cada uma o nome da mesma coisa.

E as palavras, representar, retrato, encontrar aparência, fazer ou colocar em perspectiva são aplicadas em uma mesma significação.

⁵⁶ Desargues's method consists in transferring coordinates from the three-dimensional space to the picture plane (KIRSTI, 2007, p.428).

As palavras no nível, de nível, paralela ao horizonte, significam também uma mesma coisa.

As palavras, no prumo, perpendicular no horizonte e diretamente ao horizonte significam também cada uma a mesma coisa.

E as palavras enquadrado direto em ângulos retos, perpendicularmente significam ainda em geral a mesma coisa.

Alguns nomeiam plano geometral, outros plano do solo, planta do modelo, nomeamos plano do modelo.

Alguns chamam transparência, outros a seção, outros de um outro nome, a saber a superfície das coisas as quais fazemos uma perspectiva, se chama quadro, antes como depois do trabalho concluído.

A face do quadro que se encontra exposta ao olho é chamada frente da pintura como sua outra face a qual não está exposta ao olho se chama verso da pintura. (DESARGUES, 1636, p.1, tradução nossa)⁵⁷.

A forma como Desargues descreve alguns processos traz questões a respeito de qual público seu trabalho se direcionava. Termos como “*no prumo*” possuem mesmo significado que “perpendicular ao horizonte”. Além disso, ao longo do *Método de Perspectiva*, há afirmações direcionadas ao que ele chamou de *ouvrier*, uma possível tradução para esse termo seria “artífice”, pessoa que exerce trabalho manual, ou possivelmente um artesão.

O trabalho *Método de Perspectiva* é dividido em três partes, ao longo da descrição o geômetra utiliza três representações auxiliares para descrever a construção (figura 7). Segundo Desargues (1636, p.2) “em uma só e mesma

⁵⁷ *Les mots perspective, aparence, representation, e povtrait, y sont chacun le nom d'une même chose. Les mots, extremitéz, bords, costez e contur, d'une figure y sont aussi chacun le nom d'une même chose. E le mots, représenter, poutraire, trouver l'aparence, faire ou mettre em perspective y sont emploiez en même signification l'un que l'autre. Les mots à niveav, de niveav, paralel à l'horison, y signifient aussi chacun une même chose. Les mots à plomb, perpendiculaire à l'horison, et qvarrement à l'horison y signifient aussi chacun une même chose. Et les mots qvarrement, à l'eqviere, à droits angles, perpendiclairement y signifient encor em general une même chose l'un que l'autre. Ce qu'aucuns nomment plan geometral, autres plan de terre, autres la plante du sujet, y à nom ASSIETE DU SVIET. Ce qu'aucuns nomment la transparence, autres la section, autres d'un autre nom, à sçavoir la surface de la chose en laquelle on fait une perpectiue, s'y nome TABLEAV, deuant comme apres l'ouurage acheué. La face du tableau qui se trouue exposée à l'oeil s'y nome le DEVANT du TABLEAV comme son autre face laquele n'est pas exposée à l'oeil, s'y nome le DERRIERE du TABLEAV (DESARGUES, 1636, p.1).*

figura, e por esse mesmo e único exemplo, há três figuras separadas listados de um mesmo nome, mas de forma diferente em cada uma delas”⁵⁸.

Dentre as divisões, junto à primeira figura há a descrição de um processo geométrico construtivo, que foi nomeado de Primeiro Momento. A pequena figura de um quadrado, localizado no canto direito superior da figura 7, representa uma visão superior da base da gaiola e para essa figura, Desargues apresenta uma série de procedimentos para encontrar as dimensões da gaiola e referenciá-la.

Nesta representação, Desargues determina a medida dos lados da gaiola e constrói um sistema de medidas envolvendo os vértices e lados do quadrado, e os eixos (segmento ab e ag) de referência. A construção do geômetra se aproxima de um sistema de coordenadas, contudo, afirmações deste tipo foram evitadas, pois estaríamos possivelmente cometendo um anacronismo.

No Segundo Momento da construção da gaiola, em conjunto com a segunda representação, localizada no canto superior esquerdo da figura 7, é descrito como se constrói o chamado plano geometral, ou plano pavimentado.

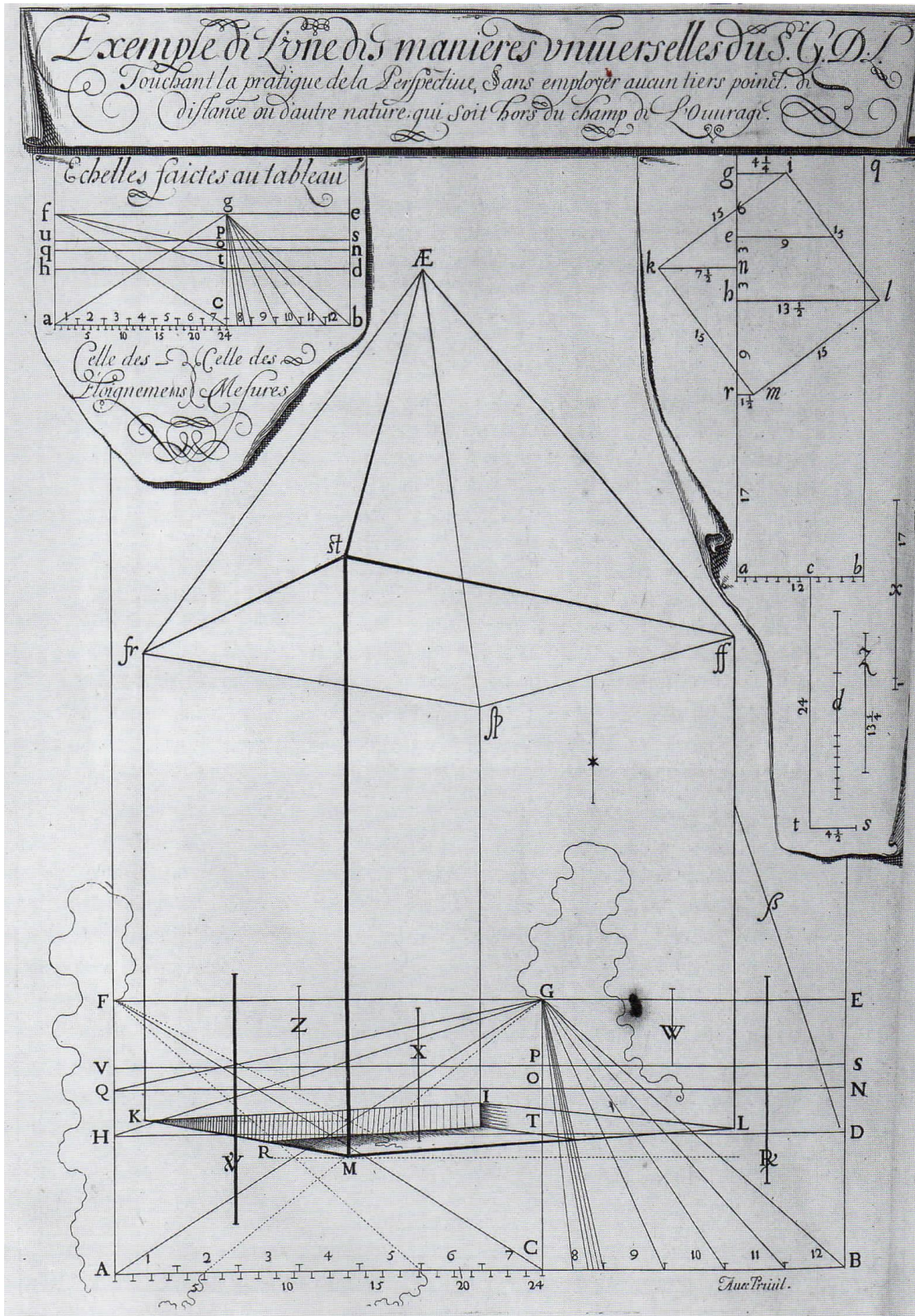
A partir de construções geométricas, Desargues desenvolveu um plano pavimentado com regiões proporcionais, de modo que, as regiões obtidas em cada “divisão” do plano preservam uma determinada proporção com relação ao segmento AB (segmento que está no primeiro plano da representação).

Observou-se que, “o princípio é o de construir escalas que dão a diminuição progressiva de largura e altura quando os comprimentos são vistos a distâncias maiores do plano da imagem” (FIELD, 1997, p.192)⁵⁹.

⁵⁸ En une seule e même stampe, e pour ce même e seul exemple il y a trois figures separees et cotées de caracteres d’un même nom, mais de forme diferente em chacune de ces figures. (DESARGUES, 1636, p.2).

⁵⁹ The principle is that one constructs scales which give the progressive diminution in width and height when lengts are seen at greater distances from the picture plane, for some given position of the eye. (FIELD, 1997, p.192).

Figura 7: Esboço Método de Perspectiva de Desargues.



Fonte: Field (p.192)

Por último, no que chamou-se de Terceiro Momento, há a representação da gaiola em uma visão frontal. Utilizando elementos como a linha do horizonte, Desargues descreveu como representar a altura da gaiola utilizando-se das escalas desenvolvidas no Segundo Momento, e a partir disso, obter uma representação proporcional.

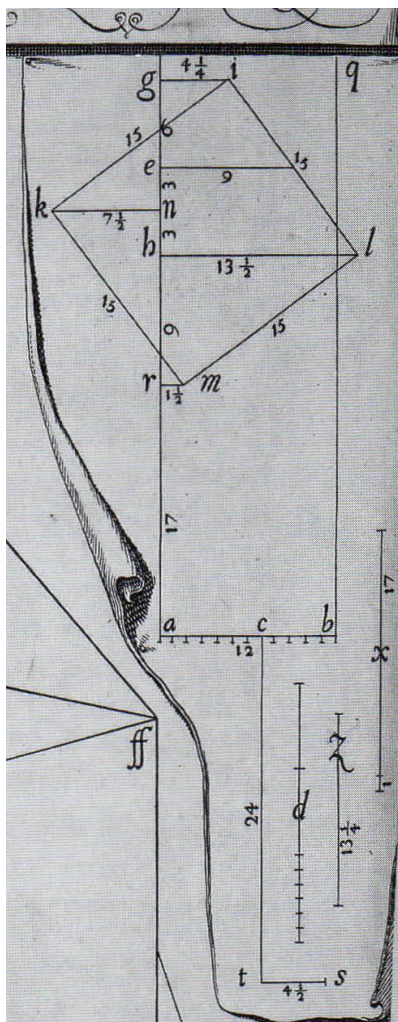
Por fim, nas duas últimas páginas do tratado, o matemático escreveu algumas conjecturas envolvendo linhas paralelas sendo observadas em direção ao infinito.

Seguimos a mesma ordem estabelecida por Desargues, descrevendo as construções contidas em cada momento, analisando-as junto às observações realizadas por pesquisadores que se dedicaram a estudar o *Método de Perspectiva*.

Construção da base da gaiola (Primeiro Momento)

No Primeiro Momento, observa-se a gaiola em uma visão superior com

Figura 8: Visão superior da gaiola.



Fonte: Método de Perspectiva.

vértices m, l, k, i sendo os vértices da base do

objeto, como representado na figura 8.

A largura da base mede quinze pés de comprimento, e os números 15 escritos próximo aos lados do quadrado m, l, k, i , denotam a medida de cada um dos lados dessa figura (DESARGUES, 1636, p. 4, tradução nossa)⁶⁰.

Descrições a respeito dos outros elementos geométricos que compõe a representação são realizadas no começo da mesma seção.

A linha x , é a altura das elevações, perpendiculares da mesma gaiola, estendidas no prumo da base, um para cada um dos quatro lados do quadrado m, l, k, i .

A linha d , é o comprimento de três coisas da escala, para o qual pode ser medido os contornos da base da gaiola, e suas elevações, aqui chamadas de ESCALA DO MODELO.

A linha, ts , é a medida da altura perpendicular do olho acima do plano de base do modelo, o qual a altura do olho reencontra o plano no ponto t .

A linha tc , é a distância perpendicular da base do olho ao plano, diz-se, a distância perpendicular do olho para o mesmo plano. (DESARGUES, 1636, p.3, tradução nossa)⁶¹.

⁶⁰ Ainsi les nombres 15 écrits auprès des bords du carré, m, l, k, i . denotent que chacun des côtes de cette figure a quinze pieds de long (p.4).

⁶¹ La ligne, x , est la hauteur des élévations, pieds dréts, ou montans de la même cage, entendus posez à plomb à son assiete un à chacun des quatre coins du carré m, l, k, i . La ligne, d , est la longueur de trois thoises de l'échelle, à laquelle ont être mesurez les bords de l'assiete de cette cage, e ses élévations, ici nommée ESCHELLE du SVIET. La ligne, ts , est la mesure de la hauteur perpendiculaire de l'oeil au dessus du plan de l'assiete du sujet, laquelle hauteur d'oeil rencontre ce plan au point, t (DESARGUES, p.3). La ligne, tc , est la distance perpendiculaire du pied de l'oeil au tableau, c'est à dire, la distance perpendiculaire de l'oeil au même tableau (DESARGUES, 1636, p.3).

Após descrever os elementos representados na figura e dividir o segmento ab em doze partes iguais, construiu-se um conjunto de eixos que foram utilizados como referências para demarcar as distâncias de cada vértice do quadrado que representa a base da gaiola, com os eixos ag e bq .

Por um dos pontos a ou b, desta linha, ab , como aqui pelo ponto a, no mesmo plano, e na parte da base do modelo, é conduzida uma linha indeterminada ag , paralela a linha tc .

Em seguida, de cada um dos pontos notáveis na base do modelo, a partir dos quatro vértices, e do meio de um dos lados do quadrado, m, l, i, k , são conduzidas até a linha ag , linhas paralelas à linha ab , como as linhas, mr, lh, is, kn , e ig .

Pelo outro ponto b , da mesma linha ab , é conduzida a linha ainda indeterminada bq , paralela as linhas ag, tc .³⁰ (DESARGUES, 1636, p.3-4).

Após essa construção, Desargues continua a determinar as dimensões da gaiola e a definir as distâncias dos vértices com relação aos eixos ag e ab .

Portanto, o número 17 denota que a parte da linha ag , contida entre as linhas rm e ab têm dezessete pés de comprimento.

Similarmente o número $4\frac{1}{2}$ da linha st , mostra que aqui o olho está elevado quatro pés e meio meio de altura, perpendicularmente acima do plano base do modelo.

Da mesma maneira o número $13\frac{1}{2}$ denota que a linha fg , tem treze pés e meio de comprimento.

Do mesmo modo, cada um dos números 9. Denota que a parte da linha ag , contida entre as linhas rm, lh possui 9 pés de comprimento.

Do mesmo modo todos os números 3 denotam ainda que cada um dos outros são iguais. (DESARGUES, 1636, p.4, tradução nossa)⁶².

⁶² Par un des points a ou b, de cette ligne, ab, comme ici par le point a, dans le même plan, e de la part de l'assiette du sujet est menée une ligne indéterminée, ag, parallèle à la ligne, tc. (DESARGUES, 1636, p.3).

Puis de chacun des points remarquables en l'assiette du sujet ici des quatre coins, e du milieu de l'un des cotés du carré, m, l, i, k, sont menées jusqu'à cette ligne, ag, des lignes parallèles à la ligne, ab, comme les lignes, mr, lh, kn, e, is, e ig.

Par le autre point b, de la même ligne ab, est menée la ligne encore indéterminée, bq, parallèle aux lignes ag, tc (DESARGUES, 1636, p.4).

Ainsi le nombre 17 denote que la piece de la ligne, ag, contenue entre les lignes rm e ab, se rencontre avoir dix-sept pieds de longueur.

Após determinar as medidas relacionadas as distâncias dos vértices com relação aos eixos, Desargues escreve a respeito da representação utilizada nos próximos passos.

Agora, a figura inteira é como uma tábua de madeira, uma muralha, ou coisa semelhante, ajustado e preparado para representar um plano de tal extensão que possa ser vasto, pendente a prumo sobre a base do modelo, o qual o plano toca na linha ab , no qual o suposto plano que se propõe a representar essa gaiola por uma figura em perspectiva, de grandeza proporcional àquela do plano, sem a ajuda de algum ponto externo dela, nem representar primeiramente em outro lugar uma outra perspectiva, de largura igual a linha ab , para depois contrapor no plano proporcionalmente (DESARGUES, 1636, p.4, tradução nossa)⁶³.

Construção de Escalas (Segundo Momento)

Neste Momento faz-se a construção do plano geometral, elemento de grande importância no processo de representação da gaiola e nas representações em perspectiva linear. Na figura 9, o plano geometral é representado em “uma visão frontal”, contido no quadro de representação.

A primeira operação consiste em traçar no plano do objeto, uma reta, ab , que represente o contorno do plano da pintura nesse plano. Entende-se que esta reta é tomada de uma grandeza e uma direção adequada, em relação ao objeto a ser representado. (POUDRA, 1864, p.256, tradução nossa)⁶⁴.

Seblablement le nombre $4 \frac{1}{2}$ de la ligne, st, monstre qu'ici l'oeil est éleué quatre pieds e demi de hauteur perpendiculaire au dessus du plan de l'assiette du sujet. De même le nombre $13 \frac{1}{2}$ denote que la ligne, lg, a treize pieds e demi de long. De même l'un des nombres 9. Denote que la piece de la ligne, ag, contenue entre les lignes rn, lh a neuf pieds de long.

Tout de même des nombres 3 comme encore de chacun des autres semblables. (DESARGUES, 1636, p.4).

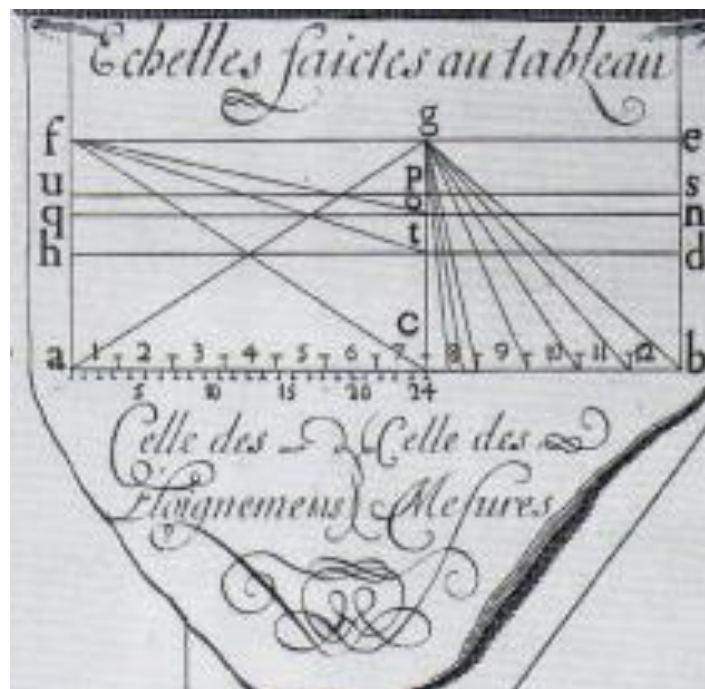
⁶³ Maintenant, la Stampe entiere est comme une planche de bois, une muraille, ou semblable chose accommodée et préparée à faire un tableau de telle étendue qu'il puisse etre, entendu pendant à plomb sur le plan de l'assiette du sujet, auquel plan il touche comme en la ligne, ab , dans lequel tableau supposé que l'on se propose à représenter cette cage par une figure en perspective, de grandeur proportionnée à celle du tableau, sans aide pour cela d'aucun point qui soit hors de lui, ny faire premierement ailleurs une autre perspective de largeur égale à la ligne, ab , pour après la contretirer dans ce tableau proportionnellement (DESARGUES, 1636, p.4).

⁶⁴ [...]cosiste à tracer sur ce plan d'assiette, une droite ab , qui représente la trace du plan du tableau sur ce plan ; il est entendu que cette droite est prise d'une grandeur et dans une direction convenables, relativement au sujet à représenter. (POUDRA, 1864, p.256).

Após construir a linha ab , é necessário dividi-la em 12 partes, como descrito pelo geômetra, “o número 12 escrito sobre a linha, ab , denota que nesse exemplo, essa linha tem doze pés de comprimento” (DESARGUES, 1636, p.4, tradução nossa)

65.

Figura 9: Tabela de Escalas de Desargues



Os próximos passos são determinados de forma descritiva, como elaborado por Desargues.

Em seguida, nas extremidades A e B de uma mesma parte, da linha AB, são conduzidas duas outras linhas AF e BE, paralelas entre si e comumente perpendiculares a linha AB. (DESARGUES, 1636, p.4-5). Tradução Nossa.

Pelo ponto G, em seguida é conduzida a linha GC, paralela a cada uma das linhas AF, AB, sabe-se que o quadrado na linha AB, no espaço AFEB encontra-se dividido em outros dois espaços, cujos lados opostos são em cada um, linhas paralelas

⁶⁵ Ainsi le nombre 12 écrit auprès de la ligne, ab , denote qu'em cét exemple, cette ligne a douze piede de long. (DESARGUES, p.4).

entre si, a saber os espaços GCAF, GCBE. (DESARGUES, 1636, p.5, tradução nossa)⁶⁶.

Neste momento trace os segmentos que tem como uma extremidade em comum, ponto G, e a outra sendo uma das subdivisões de AB. Deste modo, para todos os segmentos construídos, todos tem em comum a extremidade sendo o ponto G. Essa construção também é descrita por Desargues.

Neste exemplo as linhas são conduzidas do ponto G, *g*, apenas aos pontos desta divisão, que estão na parte dessa linha AB, *ab*, que se encontra do lado do espaço, GCBF, *gcbf*, o qual é aqui a parte, BC, *bc*, na medida que é suficiente, possivelmente em menor número: E, da mesma maneira no ponto, G, *g*, são conduzidas linhas aos pontos da subdivisão de um dos doze pés, aqui o sétimo. (Desargues, 1636, p.6, tradução nossa)⁶⁷.

De acordo com os procedimentos descritos, são construídos dois retângulos, o primeiro formado pelos vértices ACGF e o segundo por CBEG. As próximas construções foram realizadas com o objetivo de estabelecer um sistema de escala entre as linhas desse plano pavimentado, de modo que, na primeira região (retângulo ACGF) há a representação da escala de comprimento (*Echelle de Eloignement*), enquanto que na região CBEG têm-se a escala de medidas (*Echelle de Mesures*).

Estas escalas foram consideradas como a base da teoria desarguiana.

A base da construção é a criação de duas escalas geométricas. A “Escala de Medidas” desenha linhas ortogonais de G para uma série de divisões escalonadas na base da figura plana, para fornecer as medidas das dimensões horizontais em “profundidade” no plano do solo em uma estrutura (KEMP, 1990, p.120, tradução nossa)⁶⁸.

⁶⁶ De suite aux bouts A et B d'une même part cette ligne AB, sont menées deux autres lignes AF, et BE, parallèles entr'elles et communément comme icy perpendiculaires à cette ligne AB (Desargues 1636, P.4-5).

Par ce point, G, d'une suite est menée la ligne, GC, parallèle à chacune des lignes, AF, e BE, sçavoir ici quarrement à la ligne, AB de façon que l'espace AFEB, se trouue divise d'aventure en deux autre espaces, dont les bords oposez son en chacun, des lignes parallèles entr'elles, sçavoir ici les espaces GCAF, et GCBE. (p.5).

⁶⁷ Dans cét exemple ces lignes sont menée du point G, *g*, seulement aux pointcs de cette diuision, qui sont en la piece de cette ligne, AB, *ab*, qui se rencontre du côté de l'espace, GCBF, *gcbf*, laquelle est ici la piece, BC, *bc*, d'autant qu'il suffit de cela, voire de moindre nombre : Et de même du point, G, *g*, sont menées des lignes au pointcs de la sous-diuisión de l'un de ces douze pieds, ici le septième. (Desargues, 1636, p.6).

⁶⁸ The basis of construction is the creation of two geometric scales. The “scale of measures’ orthogonal lines drawn from G to a series of scaled divisions at the bases of the picture plane to provide the measures

A primeira escala contida na região do quadrilátero GCAF, é construída da seguinte forma:

Pelo ponto no qual as duas linhas AG, e CF se encontram, é conduzida a linha HD, paralela à linha AB, a qual a linha HD, encontra a linha BE no ponto D, e a linha GC no ponto T, a linha AF no ponto H.

Suponha que pelos pontos f e t , tem-se conduzida a linha ft , então pelo ponto no qual esta linha ft encontra a linha ag é conduzida a linha nq paralela à a linha ab .

Em seguida, pelo ponto no qual a linha nq encontra a linha cg , aqui o ponto, o , e pelo ponto f é conduzida a linha fo .

Depois pelo ponto no qual a linha fo encontra a linha ag é conduzida a linha su paralela à linha ab .

E semelhante operação é continuada quantas vezes for desejado (DESARGUES, 1636, p.5-6, tradução nossa)⁶⁹.

Após apresentar esse procedimento, Desargues afirma que essa construção possibilita criar uma divisão proporcional para o segmento AG.

O benefício, tendo que a linha AG, com vértice G encontra-se cortada do lado do foco G, g, primeiramente em sua metade, depois em sua terça, em seguida em sua quarta parte, e assim seguida da quantidade de partes que continua-se a operação que faz a escala de comprimento (DESARGUES, 1636, p. 7, tradução nossa)⁷⁰.

of horizontal dimensions into the depth of the ground plane in a more-or-less standard manner. (KEMP, 1990, p.120).

⁶⁹ Par le point où ces deux lignes AG, e CF se rencontrent, est menée la ligne, HD, parallèle à la ligne, AB, laquelle ligne, HD, rencontre la ligne, BE, au point, D, la ligne, GC, au point, T la ligne AF, au point H.

Et supposé que par les points, f e t, l'on ait mené la ligne, ft, lors par le point où cette ligne, ft, rencontre la ligne, ag, est menée la ligne nq parallèle à la ligne, ab. Puis par le point où cette ligne, nq, rencontre la ligne, cg, icy le point, o, et par le point, f, est mené la ligne fo.

Puis par le point où cette ligne, fo, rencontre la ligne, ag, est menée la ligne, su, parallèle à la ligne, ab.

Et semblable operation est continuée autant de fois qu'il en est besoin. (DESARGUES, 1636, p.5-6).

⁷⁰ D'ailleurs, il aient que la ligne AG, se trouve retranchée du côté du bout G, g premièrement en sa moitié, puis en sa troisième, puis en sa quatrième partie et ainsi de suite en autant de parties que l'on continue de fois l'operation qui fait l'échelle des éloignemens (DESARGUES, p. 7).

Desargues apresenta uma forma de dividir o segmento AG em quantas partes desejar. Cada parte tem uma relação de proporção com o segmento AB. Essa é uma das principais características de seu método.

Com as divisões linhas do plano pavimentado sendo proporcionais, é possível determinar relações de proporcionalidade entre um objeto representado em uma determinada região, e outro objeto representado em outra região mais próxima ou afastada. Em cada caso, se construído de forma correta, é possível construir representações proporcionais, estabelecendo assim um efeito de diminuição progressiva em direção ao centro do quadro.

Até agora, viu-se a partir de uma visão superior, a distribuição dos pontos da base da gaiola em um sistema de referência de distâncias. Em seguida, construiu-se o plano geometral, criando assim um plano pavimentado com linhas proporcionais. Entretanto, ainda faltam informações com relação ao modo de representar as alturas dos objetos. Para isso, Desargues utiliza da chamada ESCALA DE MEDIDAS (*Échelles de Mesures*).

Escalas de Medidas (*Échelles de Mesures*)

Como visto anteriormente, Desargues construiu uma relação de proporcionalidade envolvendo as medidas dos segmentos HD, NQ, SU e as medidas do segmento AB.

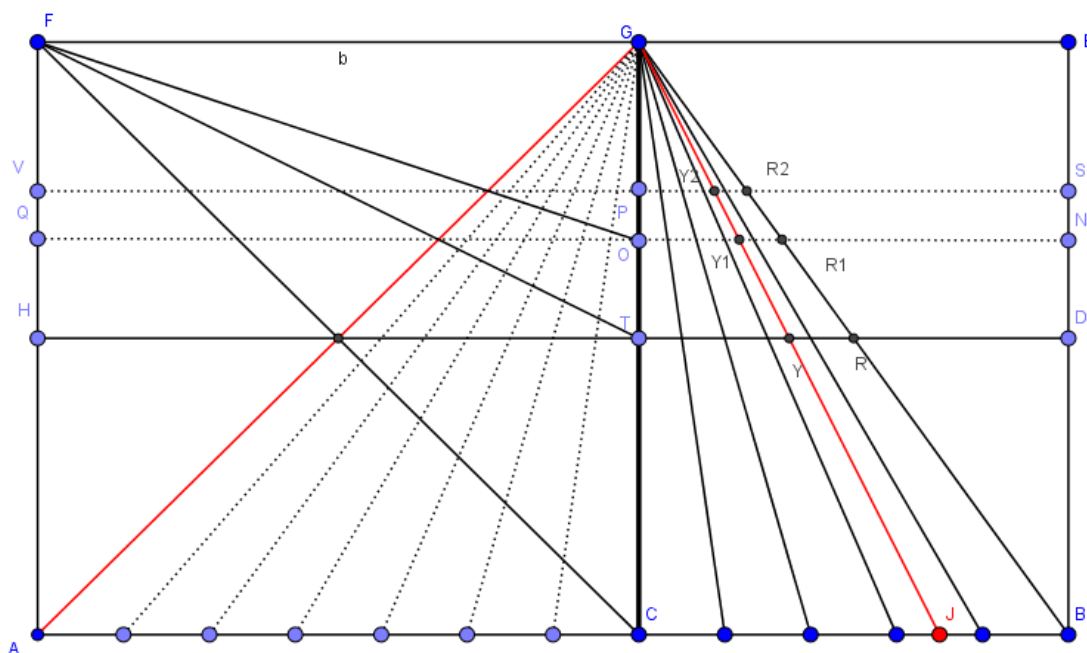
As linhas que compõe a Escala de Comprimento, são as linhas que possuem uma extremidade em um dos pontos da divisão de AB, e a outra em G, em conjunto com as linhas HD, NQ, SU, paralelas a AB.

A proporcionalidade desenvolvida por Desargues possibilita considerar que, conforme representado na figura 10, para um segmento JB, contido na linha AB, há um segmento correspondente, proporcional YR, contido na linha HD.

Com relação a ESCALA DE MEDIDAS, ao observar as dimensões estabelecidas na região do quadrilátero GCBE, percebe-se que, a construção, um segmento JG, que intercepta as linhas HD, QN, VS, paralelas a linha AB,

gera os pontos Y, Y1, Y2 respectivamente. De modo análogo, ao construir o segmento BG, o qual intercepta as linhas HD, QN, VS, tem-se os pontos R, R1, R2 respectivamente.

Figura 10: Plano geométral.



A partir de relações triangulares, descobre-se que, os triângulos JGB, YGR, Y1GR1, Y2GR2 são semelhantes entre si, deste modo pode-se dizer que o triângulo JGB é semelhante ao triângulo Y1GR1, que o triângulo Y2GR2 também é semelhante ao triângulo JGB e assim sucessivamente. A partir da semelhança de triângulos, sabe-se que relações de proporcionalidade envolvem cada um dos triângulos encontrados a partir das divisões do plano geométral.

Percebe-se que a relação de proporcionalidade estabelecidas no plano geométral, está diretamente ligada à relação de semelhança e congruência de triângulos. Desargues tem conhecimento dessas relações e discorre a respeito das dimensões que cada uma das linhas HD, NQ, SU possui

Tínhamos finalmente dessas construções, que a linha, AB, ab contendo 12 pés de comprimento, a linha, HD, hd, contendo

24. A linha, NQ, nq, 36 e a linha, SU, su, 48. Isto para saber cada uma das medidas que a escala de medidas marca sobre a parte que ela encontra.

Daquelas coisas, é evidentes que a linha HD, é a representação de uma linha sobre o plano de base do modelo, paralela à linha ab e recuado 24 pés. (DESARGUES, 1636, p.7-8, tradução nossa)⁷¹.

Neste momento fica evidente que Desargues estabeleceu uma relação de proporcionalidade envolvendo o segmento AB com os outros segmentos construídos paralelamente. Neste caso, a Escala de Medidas é responsável por determinar a dimensão do segmento desejado de modo proporcional, com relação a linha em que esse segmento se encontra.

Além disso, Desargues discorre que essa escala, para aquele que é um artesão ou artífice, ela possui a mesma funcionalidade da ferramenta conhecida como compasso de proporção, uma ferramenta utilizada para desenvolver representações proporcionais.

No momento em que é concluída a outra das duas construções que se refere à perspectiva empreendida, preparação que forma um figura em triângulo, GCB, *gcb* aqui chamada ESCALA DE MEDIDAS (*ECHELLE DE MESURES*), será dita geométrica, ou de outra maneira, que este modo de praticar a perspectiva, é para o artífice uma ferramenta de mesma função que o compasso de proporção (DESARGUES, 1636, p. 6, tradução nossa)⁷².

Portanto, pode se estabelecer que a Escala de Comprimentos (*Échelle de Eloignements*) corresponde a “distribuição” espacial do plano, de modo proporcional, possibilitando encontrar regiões no plano com o efeito de profundidade.

A segunda escala, Escala de Medidas (*Échelle de Mesures*) cria os tamanhos de modo proporcional, como discorre Desargues.

⁷¹ Desquelles choses il est evident que la ligne, HD, est l'aparence 'une ligne du plan de l'assiete du sujet, parallele à la ligne, ab, et reculée 24 pieds. (DESARGUES, 1636, p.7).

Il auaiet finalement de ces preparations, que la ligne, AB, ab contenant 12 pieds de long, la ligne, HD, hd, em contient 24. La ligne, NQ, nq, 36, et la ligne, su, su, 48. Cét à sçavoir chacune de ceux que l'échelle des mesures marque en la piece qu'elle en rencontre.

Desquelle choses il est evident que la ligne, HD, est l'aparence 'une ligne du plan de l'assiete du sujet, parallele à la ligne, ab, et reculée 24 pieds. (DESARGUES, 1636, p.7).

⁷² Lors est achevée l'aure des deux preparations qui concernente la perspectiue entreprise, laquelle preparation forme une figure en triangle, GCB, *gcb*, ici nommée ECHELLE DES MESVRE, dira que voudra Geometrique ou autrement, et qui dans cette maniere de pratiquer la perspective, est à l'ouurier un outil de même usage que le compas de proportion. (DESARGUES, 1636, p. 6).

Pois, com a escala do comprimento, encontra-se os lugares na base de representação, de cada ponto notável no plano de base do modelo.

E com a escala das medidas, encontra-se as várias medidas de cada uma das linhas do modelo que são paralelas a base, seguindo seus diversos comprimentos em relação ao mesmo plano (DESARGUES, 1636, p.6-7, tradução nossa)⁷³.

Com isso, tendo construída as duas escalas, o passo seguinte será descrever o processo de representação da gaiola, utilizando as duas escalas em conjunto com localização dos pontos encontrados no Primeiro Momento. Com estas informações é possível encontrar os pontos necessários para representar a gaiola de modo proporcional, preservando relações em perspectiva.

Inserindo Pontos no Plano Pavimentado

Tendo construído o plano geométrico com as duas escalas, Desargues descreve o processo de representação da seguinte forma (figura 11):

Primeiramente com a escala de comprimentos é encontrado um ponto na linha AG que seja a representação de um ponto na linha ag, afastado 17 pés da base⁷⁴.

Na medida que o ponto m está na linha rm, a direita da linha ag, um pé e meio afastado do ponto r, a linha RM alongada atravessa a escala de medidas, então com um compasso comum é tomado o comprimento de um pé e meio, daqueles que a escala de medidas marca na linha RM, e com o compasso aberto nessa medida, uma de suas pernas é ajustada sobre ponto R, e sua outra perna é ajustada no ponto R, e sua outra perna é virada a direita da linha AG, e fixado sobre a mesma linha, RM como sobre o ponto M, que é a representação do ponto M (DESARGUES, 1636, p.8, tradução nossa.)⁷⁵.

⁷³ Car avec l'échelle des éloignements on trouue les places au tableau des apparences de chaque point remarquable du plan de l'assiete du sujet, et du sujet même. Et avec l'échelle des mesures on trouve les diverses mesures de chacune des lignes du sujet qui son paralleles au tableau suivant leurs divers éloignemens au regard du tableau même (Desargues, 1636, p.6-7).

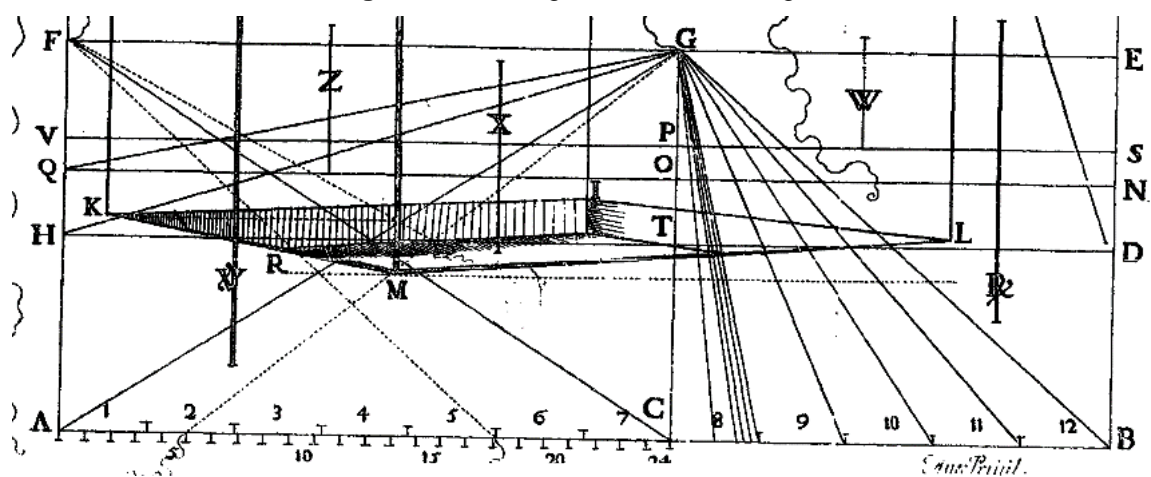
⁷⁴ o ponto encontrado, é o ponto R representado na figura 11.

⁷⁵ Premièrement, avec l'échelle de éloignements est trouué un point en la ligne AG, qui soit l'apparence d'un point en la ligne, ag, reculé 17 pieds loin du tableau [...].

Et d'autant que le point, m est en la ligne, RM, à dréte de la ligne, ag, un pied e demi loin du point, r, la ligne, RM, alongée qu'elle trauerse l'echelle des mesures, lors avec un compass commun est prise la

Este processo de construção é necessário para localizar em que parte do plano pavimentado o ponto M se encontra, ou seja a qual distância o ponto M está da linha AB. Em seguida, tendo localizado a distância do ponto M com relação a linha AB, é necessário encontrar por meio da escala de comprimentos, a respectiva medida proporcional de 1 ½ pés, correspondente de distância entre o ponto E e a linha AG.

Figura 11: Plano geometral de Desargues.



Fonte: Método de
Perspectiva.

A representação de todos os outros pontos se faz de forma análoga. Primeiro encontra-se a região do ponto na Escala Comprimentos que está a uma determinada distância afastada do segmento AB (“eixo” construído no Primeiro Momento). Em seguida constrói-se uma reta paralela a AB que passe pelo ponto encontrado e que intercepte a Escala de Medidas.

Em seguida, com um compasso encontra-se a medida proporcional correspondente na segunda escala e assim, com a medida em um compasso, coloque uma das pontas do compasso, no ponto pertencente a linha AG que corresponda a medida de recuo com relação a AB e então insira com o compasso, a distância do ponto com relação a linha AG.

longueur d'un pied e demi, de ceux que l'échelle des mesures marque en cette ligne, RM, e le compass ouuert de cette mesure, une de ses iambes est aiustée au point, R, e son autre iambe est tourné à dréte de la ligne AG, e arrestée sur la même ligne, RM e comme au point M, lequel est l'aparence du point, m. (p.8).

Outro ponto que pode-se apresentar o processo de construção é o ponto K, outro dos vértices da representação da base da gaiola.

Considere que a linha, ar, de 17 pés de comprimento, a linha, rh, de 9 e a linha, hn de 3. Tendo adaptado esses três números 17, 9 e 3, sua soma é 29. De maneira que, o ponto k se encontre em uma linha paralela a linha, ab, e afastado 29 pés longe da base para trás dela, sabe-se que está cinco pés mais longe que aquela que a linha HD, representa [...]

E na medida que o ponto, K, está na linha nk, a esquerda da linha ag, sete pés e meio longe do ponto n, prolongada a linha conduzida até a base, paralela a linha AB. Diz-se que é a representação da linha kn, assim que ela atravesse a escala de medidas, então com um compasso comum são tomados 7 pés e meio que a escala de medidas ai marca, e o compasso aberto nessa medida, uma das pernas é ajustada para representar o ponto, n, e sua outra perna virada a esquerda sobre a linha, G, e fixada sobre a mesma linha tal como o ponto K, que dessa forma é a representação do ponto k. (DESARGUES, 1636, p.8, tradução nossa)⁷⁶.

Por meio de processos simples e diretos ele conseguiu criar uma maneira de construir o plano geometral e inserir pontos desejados ao longo de todo o plano.

Os últimos elementos que precisam ser construídos são as linhas ortogonais, para elas o processo de construção é semelhante ao dos pontos no plano geometral. As medidas das alturas devem respeitar as dimensões proporcionais encontradas na Escala de Medidas. Com essa escala é possível dimensionar a medida da linha ortogonal, preservando relações de proporcionalidade existente no plano geometral.

⁷⁶ Consideré que la ligne, ar, à 17 pieds de long, la ligne, rh, en à 9, et la ligne, hn en à 3. Aiant aiusté ces trois nombres 17, 9, et 3, ler somme est 29. De façon que ce point k, se rencontre en une ligne parallèle à la ligne, ab, et reculée 29 pieds loin du tableau derriere lui, savoir est cinq pieds davantage loin que n'en est reculée celle que la ligne, HD, represente.

En ce cas, premierement avec l'échelle des éloignemens, est trouuée en la ligne AG, l'aparence d'un point en la ligne, ag, reculée 29 pieds loin du tableau, c'est à dire cinq pieds davantage loin que n'en est reculée la ligne que la ligne, HD, represente ; et pour ce faire, du point, G, [...]

Et dautant que le point, K, est en la ligne, nk à gauche de la ligne ag, sept pieds et demi loin du point n [...] (DESARGUES, 2636, p.8).

Construção da Gaiola em Perspectiva (Terceiro Momento)

Até esse Momento, tratou-se de vários elementos do processo de representação. Apresentou-se como é realizada a “esquemática” dos pontos no plano do objeto a partir de uma visão superior, seguido da construção do plano geometral com a Escala de Comprimentos e a Escala de Medidas.

Agora partiremos para as informações associadas à representação das alturas próximo a gaiola. “Os números, 17, escritos perto da linha de elevação, denotam que cada uma das elevações do objeto tem dezoito pés de comprimento, onde são dezessete pés fora da terra e um pé dentro da terra” (DESARGUES, 1636, p.4)⁷⁷. Estas dimensões foram representadas na parte central da figura 7.

Com relação a proporcionalidade estabelecida no processo de representação da gaiola, Desargues argumenta que a medida que será representada também deve seguir os parâmetros estabelecidos pela Escala de Medidas.

Para este momento, utilizamos a representação central da figura 7.

Agora, para encontrar a representação de um ponto elevado 17 pés perpendicular a cima do ponto m. Pelo ponto M, é conduzida na parte da linha, FE, uma linha, M ξ t, perpendicular à linha ab, e esta linha, M ξ t, é feita igual a 17 que a escala de medidas marca na linha, MR, assim a linha, M ξ t, é a representação da elevação do modelo, com altura de 17 pés perpendicular sobre o ponto m.

As linhas, L, ff, k, fr, e, sp, representam as elevações a partir da base do modelo, em direção aos outros pontos l, k, i, de sua base, m, l, i, k e medindo também cada um 17 pés, são encontradas do mesmo modo que a representação de M ξ t. Certamente que os 17 pés de cada uma dessas representações, é extensão, são aquelas que a escala de medidas marcada na linha conduzida para seu final na base, paralela à linha AB. (DESARGUES, 1636, p.9)⁷⁸.

⁷⁷ Le ligne x, est la mesure de la hauteur d'une personne debout sur le fonds du creux de la cage, lequel fonds est supposé de niveau comme celui d'un bassin de fontaine. (DESARGUES, 1636, p.10).

⁷⁸ Maintenant pour trouver l'apparence d'un point élevé 17 pieds à plomb au dessus du point, m. Par le point, M, est menée de la part de la ligne, FE, une ligne, M ξ t, perpendiculaire à la ligne AB, et cette ligne, M ξ t, est faite égale à 17 des pieds que l'échelle des mesures marque en la ligne, MR ainsi la ligne, M ξ t, est l'apparence de l'élevation du sujet, haute de 17 pieds à plomb sur le point, m.

A forma descrita por Desargues nos pareceu ser um modo descritivo, em que os procedimentos são estabelecidos da seguinte forma. Primeiro é feita a localização de pontos no plano em uma visão superior, em seguida construiu-se um plano pavimentado com linhas proporcionais, depois com as escalas já construídas, realiza-se o dimensionamento adequado das medidas das alturas representadas.

Por fim, após descrever o processo de representação em perspectiva, Desargues discorre a respeito de algumas reflexões com relação a retas paralelas, retas concorrentes e a chamada linha do olho.

Primeiras informações a respeito das retas paralelas com incidência no infinito

Para finalizar o matemático apresenta uma série de afirmações com relação a chamada *ligne de l'oeil*, (linha do olho) do observador, em que ele conjectura possibilidades envolvendo as inclinações dessa linha e sua interseção com outras linhas e com o plano do solo. Um exemplo que trouxemos foi:

Quando as linhas inclinadas entre si tendem todas para um ponto, a linha do olho conduzida no ponto é, paralela ou não paralela a base, mas sempre cada uma dessas linhas do modelo está em um mesmo plano com esta linha do olho, na qual todos estes planos se cortam, portanto em seu eixo comum. (DESARGUES, 1636, p.12, tradução nossa)⁷⁹.

Nesta descrição, as relações existentes entre a variação da inclinação do plano do objeto e da inclinação da linha do olho, são trazidas para tratar das formas de se observar o eixo de projeção. As observações de Desargues estão relacionadas com a possibilidade de que linhas paralelas se encontram em alguma distância.

Les Lignes, L, ff, k, , fr, e lsp, apparences des eleuations du sujet sur les autres pointcs, l, k, i, de son assiete quarré, m, l, i, k, et longes aussi chacune de 17 pieds, sont trouuées de même façon que l'aparence, M ðt, bien entendu que les 17 pieds dont chacune de ces apparences est longue, sont de ceux que l'échelle des mesures marque en la ligne menée par son bout d'embas paralelle à la ligne, AB. (DESARGUES, 1636, p.9).

⁷⁹ Quand des lignes sujet inclinées entr'elles tendent tous à un point, la ligne de l'oeil menée à ce point est, ou bien paralelle, ou bien non paralelle au tableau, mais toujours chacune de ces lignes sujet est en un même plan avec cette ligne de l'oeil, en laquelle tous ces plans s'entre-coupent ainsi qu'en leur commun essieu. (DESARGUES, 1636, p.12).

Estas ideias são exploradas no *Brouillon Project*. Ele continua discorrendo a respeito de linhas paralelas e linhas concorrentes, e generaliza que ambas as linhas podem ser consideradas como linhas de uma mesma configuração. Contudo para explorar melhor esse tema, vimos a necessidade de apresentar alguns conceitos e noções envolvendo plano geométral e projeção de figuras.

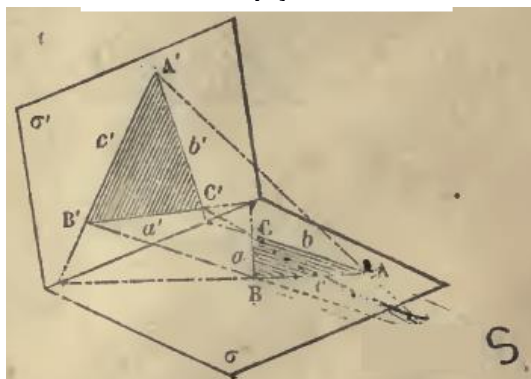
CAPÍTULO 5: Projeção de Figuras e Brouillon Project

Nesta seção tem-se a descrição de elementos relacionados a projeções de figuras e os conteúdos trabalhados no campo da perspectiva linear. A partir de considerações a respeito do foco de projeção e formas de se projetar figuras, buscou-se aproximar esses dois campos do conhecimento, destacando que ambos tratam de formas de se desenvolver representações utilizando elementos geométricos.

Segundo a definições de Cremona, uma representação em perspectiva pode ser representada da seguinte forma, como mostra a figura 12.

Os traços no plano σ projetados por raios e planos formam uma segunda figura, uma imagem da primeira. Quando realizamos as duas operações, na qual a segunda figura é derivada da primeira, nós dizemos que projetamos por um centro (ou vértice) S uma figura dada sobre o plano σ . A nova imagem é chamada de *Imagem Perspectiva* ou em projeção central da primeira (CREMONA, 1885, p.3, tradução nossa)⁸⁰.

Figura 12: Planos de Projeção



Fonte: Cremona (1885, p.3)

Na figura 12 tem-se um triângulo ABC no plano σ e a partir do ponto S (foco de projeção), ponto fora do plano σ , constrói-se um feixe de retas que passam pelos pontos do triângulo ABC e interceptam o plano σ' .

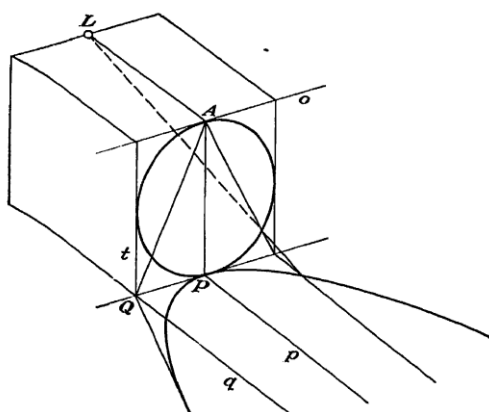
⁸⁰ The traces on the plane σ of the projecting rays and planes will form a second figure, a picture of the first. When we carry out the two operations by which this second figure is derived from the first, we are said to project from a center (or vertex) S a given figure σ upon a plane of projection σ' . The new figure a is called the perspective image or the central projection of the original one. (CREMONA, 1885, p.3).

Essa construção se trata de um tipo de projeção em que, os pontos do triângulo ABC no plano σ , foram projetados para o plano σ' . Neste caso resultando no triângulo correspondente A'B'C' no plano σ' .

Com este tipo construção é possível representar figuras geométricas em infinitos planos, entretanto essas representações podem sofrer alterações conforme a posição do plano ou a posição do foco de projeção.

Coxeter (1907-2003) explora possibilidades deste assunto, no texto intitulado *The Real Projective Plane*, ele construiu um exemplo de projeção de uma circunferência inscrita em uma das faces de um cubo (figura 13). Nesta figura, a circunferência A contida em uma face do cubo é projetada no plano da base do mesmo cubo. Com o foco de projeção sendo o ponto L, em uma aresta da face oposta à face da circunferência, constrói-se a projeção da circunferência.

Figura 13: Projeção de Circunferência.



Fonte: Coxeter (p.3).

base do mesmo cubo. Com o foco de projeção sendo o ponto L, em uma aresta da face oposta à face da circunferência, constrói-se a projeção da circunferência.

Neste caso o que obtêm-se é uma parábola, e não necessariamente a figura inicial. Isso pois, a reta que passa por AL será paralela ao plano em que a parábola é representada, deste modo, é possível considerar que o ponto correspondente ao ponto A, projetado pelo foco L, não toca o plano de base do cubo.

Este exemplo proporciona questionamentos do tipo: É possível construir uma projeção sem deformar a figura original?

Há propriedades geométricas que são preservadas em uma projeção central?

Com relação a primeira pergunta, “além de figuras, as medidas de comprimentos, ângulos, e razões de tais grandeza são geralmente alteradas em projeção” (COURANT; ROBBINS, 2000, p.207).

A respeito da segunda pergunta, o que tem-se é que “nenhuma quantidade que envolva somente três pontos sobre uma reta pode ser invariante⁸¹ sob projeção” (COURANT & ROBBINS, p.211).

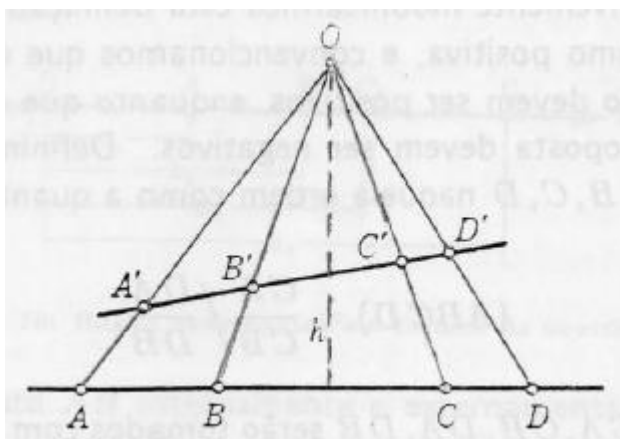
Deste modo, Courant e Robbins argumentam que com três pontos não é possível estabelecer uma projeção que garanta a preservação da figura original. Contudo, em uma projeção com quatro pontos é possível encontrar uma relação que se mantenha invariante em qualquer projeção, essa relação é conhecida como *Razão Anarmônica* e é expressa da seguinte forma (figura 14).

Seja um conjunto de quatro pontos colineares A, B, C, D .

A partir do ponto O , foco da projeção, é construído um feixe de retas, que passa por OA, OB, OC, OD , figura 14.

“A relação que se preserva recebe o nome de *razão anarmônica*, a qual não é um comprimento, nem uma razão entre dois comprimentos, mas uma *razão de duas destas razões*” (COURANT & ROBBINS, p.211).

Figura 14: Feixe de retas e Razão Anarmônica



Fonte: Courant e Robbins (2000, p.213).

A relação que se estabelece garante que a razão Anarmônica possui a seguinte propriedade

$$x = \left(\frac{CA}{CB} \right) / \left(\frac{DA}{DB} \right)$$

Segundo Courant e Robbins, a relação estabelecida entre as medidas dos segmentos A, B, C, D em uma projeção se mantém preservada, pois:

A *razão anarmônica* em A, B, C, D depende apenas dos ângulos subtendidos em O pelos segmentos unidos. Uma vez

⁸¹ Invariante significa que não se altera.

que estes ângulos são os mesmos, para quaisquer quatro pontos A', B', C', D' nos quais A, B, C, D podem ser projetados a partir de O , segue que a razão anarmônica permanece inalterada pela projeção (COURANT; ROBBINS, p.213).

Deste modo, encontra-se uma relação de proporcionalidade envolvendo projeções de segmentos. Contudo, a figura geométrica formada pela construção de um feixe de retas que é interceptado por outras retas, se aproxima da construção do plano geometral da figura 9. Neste caso as retas não são necessariamente paralelas, como construído no texto de 1636.

Pode-se dizer que, por meio das construções geométricas, mesmo que de forma indireta, teóricos que estudaram propriedades geométricas existentes no plano geometral estiveram envolvidos com o estudo de projeções de figuras.

Acreditamos que no texto de Desargues *Método de Perspectiva*, as propriedades geométricas que foram encontradas, são propriedades envolvidas com o estudo de representações e de projeções de figuras. Por outro lado, no trabalho de 1639, Desargues tratou de elementos no campo da projeção de figuras, mas também analisou o caso de uma projeção cônica, pois segundo Chasles (1837, p.22) “ele buscou olhar quais propriedades faziam parte da teoria das seções cônicas, da qual surgiu da análise dos Antigos, seguida pelos métodos de perspectiva” (CHASLES, 1837, p.22).

Sendo assim, é possível que as relações tratadas no *Brouillon Project* se aproximem dos conteúdos trabalhados no *Método de Perspectiva*. Para melhor entendimento destas relações, passamos agora a explorar os conceitos desenvolvidos no texto de 1639.

Brouillon Project

Nesta seção, buscou-se expor os elementos do texto *Brouillon Project*, que se aproximam do campo da perspectiva. Diversos pesquisadores consideram que “a contribuição de maior importância de Desargues no domínio da geometria projetiva é seu célebre *Brouillon Project d'une Atteinte aux evenemens des rencontres du Cone avec um Plan*” (TATON, 1951, p.176, tradução nossa)⁸².

Deste trabalho, “foram impressas aparentemente apenas cinquenta copias, as quais circularam entre seus amigos e conhecidos” (FIELD e GRAY, 1987, p.32, tradução nossa)⁸³. Seu texto original foi considerado perdido por longo período, pesquisadores como Chasles e Poudra, tiveram acesso aos conteúdos do *Brouillon Project* por meio de uma tradução de Philippe La Hire, contudo o pesquisador M. Moisy recentemente conseguiu encontrar um exemplar original deste texto, o qual nos baseamos.

Uma oportunidade extraordinária permitiu que M. Moisy encontrasse em uma coleção de panfletos anônimos da Biblioteca Nacional⁸⁴ uma cópia original desse trabalho geométrico tão importante, considerado como praticamente perdido há quase três séculos (figura 15) (TATON, 1951, p.178-9, tradução nossa)⁸⁵.

Com relação ao modo de análise de um texto histórico, o *Brouillon Project* (figura 15) apresentou as mesmas características tipográficas existentes no trabalho anterior de Desargues. Sendo assim, utilizamos dos mesmos processos de aproximações de palavras e de tradução utilizado no texto *Método de Perspectiva*. Nas notas de rodapé estão presentes as citações originais de Desargues, proporcionando assim maior aproximação do leitor ao texto original.

⁸² La contribution la plus importante de Desargues dans le domaine de la géométrie projective est son célèbre *Brouillon projet d'une atteinte aux Evenemens des rencontres du Cone avec un Plan*, publié à Paris en 1639 (TATON, 1951, p.176).

⁸³ Indeed, since the *Rough Draft on Conics* was apparently printed only in 50 copies, which were circulated to Desargues' friends and acquaintances. (FIELD et GRAY, 1987 ,p.32).

⁸⁴ Acreditamos que Taton se refere a Biblioteca Nacional da França.

⁸⁵ Ces recherches s'étaient révélées infructueuses et nous nous étions décidés à utiliser, faute de mieux, la copie de Ph. de La Hire quand un hasard tout à fait extraordinaire permit à M. P. Moisy de retrouver dans un recueil factice de brochures anonymes de la Bibliothèque Nationale un exemplaire original de cette oeuvre géométrique si importante, considérée comme pratiquement perdue depuis bientôt trois siècles (TATON, 1951, p.178-9).

Figura 15: Brouillon Project.

1639. **AVEC PRIVILEGE.**
BROVILLON PROIECT D'VNE ATTEINTE AVX
enueuements des rencontres du Cone avec un Plan, Par L. S, G, D, L.



Il ne sera pas malaisé de faire icy la distinction necessaire d'entre les impositions de nom, autrement definitions, les propositions, les demonstrations, quand elles sont en suite. Et les autres especes de discours non plus que de choisir entre les figures celle qui à raport au periode qu'on lit, ou de faire ces figures sur le discours.

Noms imposés

Chacun pensera ce qui luy semblera conuenable ou de ce qui est icy deduit, ou de la maniere de le deduire, & verra que la raison essaye à cognoistre des quantitez infinies d'une part: ensemble de celles qui s'apetissent iusques à reduire leurs deux extremittez oppoïees en vne seule, & que l'entendement s'y perr, non seulement à cause de leurs imaginables grandeur & petitesse, mais encore à cause que le raisonnement ordinaire le conduit à en conclure des prioritez, d'où il est incapable de comprendre comment, c'est qu'elles sont.

Icy toute ligne droicte est entendue alongée au besoin à l'infiny d'une part & d'autre. Vn semblable alongement à distance infinie d'une part & d'autre en vne droicte, est icy representé par vne rangée de poinctz alignez d'une part & d'autre en suite de cette droicte.

Pour donner à entendre de plusieurs lignes droictes, qu'elles sont toutes entre-elles où bien paralelles, où bien inclinées à mesme poinct. Il est icy dict, que toutes ces droictes sont d'une mesme ordonnance entre elles, par où l'on conceura de ces plusieurs droictes, qu'en l'une aussi bien qu'en l'autre de ces deux especes de position elles tendent toutes à vn mesme endroit.

Ordonnance de lignes droictes.

L'endroit auquel on conçoit que tendent ainsi plusieurs droictes en l'une aussi bien qu'en l'autre de ces deux especes de position, est icy nommé, *but*, de l'ordonnance de ces droictes.

But, d'une ordonnance de droictes.

Pour donner à entendre l'espece de position d'entre plusieurs droictes en laquelle elles sont toutes paralelles entre elles, il est icy dict, que toutes ces droictes sont entre elles d'une mesme ordonnance, dont le but est à distance infinie en chacune d'elles d'une part & d'autre.

Pour donner à entendre l'espece de position d'entre plusieurs droictes, en laquelle elles sont toutes inclinées à vn mesme poinct, il est icy dict, que toutes ces droictes sont entre elles d'une mesme ordonnance, dont le but est à distance finie en chacune d'elles.

Ainsi deux quelconques droictes en vn mesme Plan, sont entre elles d'une mesme ordonnance, dont le but est à distance ou finie, ou infinie.

Icy tout Plan est entendu pareillement étendu de toutes parts à l'infiny.

Vn semblable étendue d'un Plan à l'infini de toutes parts, est icy representé par vn nombre de poinctz semez de toutes parts aux extremittez du Plan.

Pour donner à entendre de plusieurs Plans, qu'ils sont tous entre eux ou bien paralels, ou bien inclinés à vne mesme droicte, il est icy dict, que tous ces Plans sont entre eux d'une mesme ordonnance, par où l'on conceuera de ces plusieurs Plans qu'en l'une aussi bien qu'en l'autre de ces deux especes de position, ils tendent tous à vn mesme endroit.

Ordonnance de Plans.

L'endroit auquel on conçoit que tendent ainsi plusieurs Plans en l'une aussi bien qu'en l'autre de ces deux especes de position, est icy nommé, *but*, de l'ordonnance de ces Plans.

But, d'une ordonnance de Plans.

Pour donner à entendre l'espece de position d'entre plusieurs Plans, en laquelle ils sont tous paralels entre eux, il est icy dit que tous ces Plans sont entre eux d'une mesme ordonnance, dont le but est en chacun d'eux à distance infinie de toutes parts.

Pour donner à entendre l'espece de position d'entre plusieurs Plans en laquelle ils sont tous inclinés à vne mesme droicte, il est icy dit que tous ces Plans sont entre eux d'une mesme ordonnance, dont le but est en chacun d'eux à distance finie.

Ainsi deux quelconques Plans sont entre eux d'une mesme ordonnance, dont le but est en chacun d'eux à distance ou finie ou infinie.

En conceuant qu'une droicte infinie ayant vn poinct immobile se meut en toute sa longueur, on void qu'aux diuerses places qu'elle prend en ce mouuement, elle donne ou represente comme diuerses droictes d'une mesme ordonnance entre elles, dont le but est son poinct immobile.

Quand le poinct immobile de cette droicte y est à distance finie, & qu'elle se meut en vn Plan, on void qu'aux diuerses places qu'elle prend en ce mouuement elle donne ou represente comme diuerses droictes d'une mesme ordonnance entre elles, dont le but (son poinct immobile) est en chacune d'elles à distance finie, & que tout autre poinct que l'immobile de cette droicte va traceant vne ligne simple uniforme, & dont les deux quelconques parties sont d'une mesme

A

Fonte: Biblioteca Nacional da França Seção Gallica.

Atualmente este texto encontra-se disponível para acesso na Biblioteca Nacional da França, seção Gallica.

Ao iniciarmos nossa análise nos deparamos com algumas peculiaridades, como por exemplo, “sua terminologia arbórea” (ANGLADE e BRIEND, 2017, p.4, tradução nossa)⁸⁶.

Expressões como nó, ramo, galho entre outras foram estabelecidas por Desargues para tratar de objetos geométricos como ponto, segmento e retas respectivamente. Por ser um trabalho com terminologia particular, há pesquisadores que consideraram essa peculiaridade como um possível desafio para uma análise mais aprofundada:

Os conteúdos matemáticos em *Rough Draft on Conics* não são elementares, e provavelmente é suficiente para impedir a maioria daqueles que não são treinados primeiramente pela ciência. Por outro lado, há matemáticos que podem ter se desencorajado pela linguagem e estilo dos trabalhos de Desargues. Por exemplo, afirmações e provas de teoremas são dificilmente separados um do outro. Além disso, uma vez que o trabalho é altamente original e Desargues mesmo foi consciente dessa originalidade, sendo necessário um novo vocabulário. (GRAY; FIELD, 1987, p. 60, tradução nossa)⁸⁷.

Com relação a nomenclatura utilizada por Desargues, listamos algumas definições contidas nas primeiras páginas do *Brouillon Project*:

Tronco- Quanto a diversos pontos de uma reta passando indiferentemente diversas outras retas, essa reta a qual estão os pontos é aqui chamada Tronco.

Nós- Os pontos deste tronco pelos quais passam assim outras retas, eles são nomeados Nós.

Ramos- Ali qualquer outra reta que passa por um destes, é em relação ao tronco, nomeada Ramo.

Ramos retos- Quando dois ramos são paralelos entre si, eles são chamados Ramos Retos.

Ramo Implantado no Tronco- Uma parte qualquer ou segmento de tronco contido entre quaisquer dois nós de um mesmo tronco, é aqui chamado Ramo Implantado no tronco. (DESARGUES, 1639, p.2, tradução nossa)⁸⁸.

⁸⁶ Il introduit ensuite sa terminologie arboricole (ANGLADE & BRIEND, 2017, p.4).

⁸⁷ The mathematical content of the *Rough Draft on Conics* is by no means elementary, and probably suffices to deter a majority of those whose primary training is not in science. On the other hand, mathematicians may well be discouraged by the language and style of Desargues' work. For example, statements and proofs of theorems are rarely separated from one another. Moreover, since the work is highly original-and Desargues himself was conscious of its originality-it required a new vocabulary. (GRAY; FIELD, 1987, p. 60).

⁸⁸ **Tronc-** Quand à diuers poincts d'une droictes passent indifferemment diuers autres droictes, cette droicte en laquelle sont les poincts est icy nommé *Tronc*. **Noeuds-** Les poincts de ce tronc auquel passent ainsi d'autres droictes y sont nommez *Noeuds*. **Rameau-** Là quelconque autre droicte qui passe à un de ces noeuds est à l'égard du tronc nommé Rameau.

Em linguagem atual estes termos seriam descritos como:

- **Tronco** – Representa uma reta que é interceptada por outras retas.
- **Nó** - Ponto encontrado a partir da interseção da reta Tronco com as outras retas.
- **Ramo** – Semirreta com uma das extremidades na reta Tronco.
- **Ramos Retos**– Semirretas que interceptam a reta Tronco e que são paralelas entre si.
- **Ramo Implantado no Tronco**- Segmento de reta que está no Tronco.

Ao longo do texto, ele acrescenta outras características a esses termos, nomes como Nó Médio, Ramos Relativos entre outros, são definições que surgem nas próximas páginas do trabalho, e essas terminações possuem características específicas ao longo da obra.

Além das definições para entes geométricos, Desargues abordou relações entre retas paralelas e retas concorrentes, considerando-as, como “retas de mesma configuração”. Além das retas, ele associa as mesmas características aos planos, em que foi definido que planos concorrentes e planos paralelos “são de mesma configuração”.

Para isso, ele tratou de elementos como pontos no infinito, entretanto este tema estava sendo explorado por outros teóricos do período de Desargues.

Relação de pontos no infinito

Além de Desargues, uma abordagem envolvendo pontos no infinito foi explorada nos estudos de Kepler. No trabalho *Ad Vitellionem Paralipomena* de 1604, Johan Kepler esteve envolvido com seções cônicas e pontos no infinito. Segundo Gray e Field (1987), seria possivelmente um equívoco pensar em uma relação direta entre as publicações dos dois matemáticos.

Rameaux droicts- Quand deux rameaux sont paralels entre eux ils y sont nommez Rameaux droicts.
Rameau plié au tronc- Une quelconque piece ou segment du tronc contenue entre deux quelconque noeuds dun mesme tronc est icy nommé *Rameau plié*, au tronc. (DESARGUES, 1639, p.2)

Não encontramos razões para supor que Desargues estava familiarizado em geral com o trabalho de Kepler, ou com *Ad Vitellionem paralipomena* em particular. A conexão entre pontos no infinito e seções cônicas parece ser uma consequência racional da matemática, em vez de uma consequência histórica de um matemático conhecendo o trabalho do outro (GRAY e FIELD, 1987, p.188, tradução nossa)⁸⁹.

Além de Gray e Field, Coxeter discorre a respeito dos pontos no infinito tratados por Kepler e por Desargues, argumentando que ambos produziram teorias de forma independente e que essas teorias foram fundamentais para o desenvolvimento da matemática.

Mais de duzentos anos antes de Poncelet, o importante conceito de ponto no infinito ocorreu independentemente do astrônomo alemão Johann Kepler (1571-1630) e o arquiteto francês Girard Desargues (1591-1661). Kepler (em seu *Paralipomena en Vitellionem*, 1604) declarou que uma parábola tem dois focos, um dos quais é infinitamente distante em ambas as direções opostas e que qualquer ponto da curva é unido por este foco por uma linha paralela para o eixo.

Desargues (no *Brouillon Project...* 1639) declarou que linhas paralelas "estão entre elas da mesma ordem cujo propósito está em distância infinita". (Ou seja, as linhas paralelas têm uma extremidade comum a uma distância infinita.) E novamente, "Quando em um plano, nenhum dos pontos de um direito está em uma distância finita, esse direito está a uma distância infinita." (COXETER, 1949, p.3, tradução nossa)⁹⁰.

Considera-se que estes elementos (cônicas e pontos no infinito) voltaram a ser estudados no Renascimento, pois graças as traduções de Commandino, Viète, entre outros, os trabalhos da Grécia Antiga estiveram em circulação pela Europa e assim, teóricos tiveram oportunidade de explorar novos caminhos ainda não percorridos pelos gregos.

⁸⁹ We have found no reason to suppose that Desargues was familiar with Kepler's work in general, or with *Ad Vitellionem paralipomena* in particular. The repeated connection between points at infinity and conic sections seems to be a rational consequence of the mathematics rather than a historical consequence of one mathematician knowing the work of another (GRAY et FIELD, p.188).

⁹⁰ More than two hundred years before Poncelet, the important concept of a point at infinity occurred independently to the German astronomer Johann Kepler (1571-1630) and the French architect Girard Desargues (1591-1661). Kepler (in his *Paralipomena in Vitellionem*, 1604) declared that a parabola has two foci, one of which is infinitely distant in both of two opposite directions, and that any point on the curve is joined to this "blind focus" by a line parallel to the axis. Desargues (in his *Brouillon project* 1639) declared that parallel lines "sont entre elles d'une mesme ordonnance dont le but est a distance infinie." (That is, parallel lines have a common end at an infinite distance.) And again, "Quand en un plan, aucun des points d'une droit n'y est a distance finie, cette droit y est a distance infinie. (COXETER, 1949, p.3).

Com relação as cônicas, *Brouillon Project* possui direta influência do trabalho *Cônicas* de Apolônio, entretanto, a abordagem dada pelo matemático francês, se distancia daquela do matemático grego, pois segundo (HOGENDJIK, 1991, p.2) “graças ao seus pontos e linhas no infinito, Desargues foi capaz de derivar em seu *BrP* mais do que a teoria de Apolônio sobre diâmetros e ordenadas de uma maneira mais fácil do que Apolônio”⁹¹.

A respeito do modo que Desargues classifica as retas concorrentes e retas paralelas, o geômetra considera que ambas tem a mesma configuração, ou mesma *Ordonnance*.

Retas de Mesma Configuração (*Ordonnance de lignes droictes*)

A chamada Configuração de retas (*Ordonnance de lignes droictes*), define que todas as retas, paralelas ou concorrentes, tem a mesma configuração, e em ambos os casos, existe um ponto de interseção entre elas.

Para compreender que as várias retas, que são todas de fato, paralelas entre si ou inclinadas para um mesmo ponto. É dito aqui que todas essas retas são de uma mesma configuração entre si, por onde supõe-se que essas várias retas, que em uma quanto em outra das duas espécies de posições, tendem todas para um mesmo lugar (DESARGUES, 139, p.1, tradução nossa)⁹².

Além disso, segundo (DESARGUES, 1639, p.1) “o lugar que conhecemos que tendem várias retas de quaisquer das duas espécies de posições, é aqui chamado, foco (*But*), da configuração destas retas”⁹³.

Com isso, o geômetra afirma que, dado um conjunto de retas, sempre há um ponto em que as incidam, e neste caso o ponto é chamado de foco.

Com relação a Configuração de Planos paralelos ou concorrentes, Desargues apresenta afirmações semelhantes.

⁹¹ Desargues was able to derive in his *BrP* most of the Apollonian theory of diameters and ordinates in a much easier way than Apollonius (HOGENDJIK, 1991, p.2).

⁹² ⁴⁵Pour donner a entendre de plusieurs lignes droictes, qu'elles sont toutes entre-elles où bien paralleles, où bien inclinées à mesmo point. Il est icy dict, que toutes ces droictes sont d'une mesme *ordonnance* entre elles, par où l'on conceura de ces plusieurs droictes, qu'en l'une aussi bien qu'en l'autre de ces deux especes de position elles tendent toutes à vn mesme endroit. (DESARGUES, 1639, p.1)

⁹³ L'endroit auquel on conçoit que tendent ainsi plusieurs droictes en l'une aussi bien qu'en l'autre de ces deux especes de position, est icy nommè, *but*, de l'ordonnance de ces droictes. (DESARGUES, 139, p.1).

Planos de Mesma Configuração

O chamado *Ordonnance de Plans*⁹⁴ é descrito de forma semelhante ao exposto na configuração das linhas, em que é definindo que foco de interseção entre dois planos (*But, d'une Ordonnance de Plans*) é uma reta, mesmo os planos sendo paralelos entre si.

Para compreender que os vários Planos, que eles são todos paralelos entre si ou inclinados para uma mesma reta, é dito aqui que todos esses planos são de uma mesma configuração, por onde supõe-se que os vários planos, que em uma também como em outra das duas espécies de posições, eles tendem todos para um mesmo lugar (DESARGUES, 139, p.1, tradução nossa)⁹⁵.

Desargues define que quaisquer dois planos tem, entre eles, uma mesma configuração (*Ordonnance*), “do qual a interseção está em cada um deles a uma distância finita ou infinita” (DESARGUES, 1639, p.1).

Com relação a condição de que retas paralelas possuam um ponto incidente, Desargues afirma que o ponto de interseção destas retas está a uma distância infinita.

Para compreender que a espécie e a posição de diversas retas as quais elas são todas paralelas entre si, é dito aqui que, todas essas retas são elas de uma mesma configuração, cujo foco (*but*) está a uma distância infinita em cada uma delas. (DESARGUES, 1639, p.1, tradução nossa)⁹⁶.

A respeito denominação de *Configuração* de Retas e Configuração de Planos, “Desargues introduz de uma forma bem clara e geral as noções de feixe de retas e de planos” (TATON 1951, p.100)⁹⁷, sendo assim, compreende-se que, quando o geômetra mencionava uma Configuração de Retas, ele

⁹⁴Il est à noter que le choix du mot ordonnance pourrait avoir été induit par le terme d'ordonnées utilisé dans la théorie apollonienne des coniques : des ordonnées forment une ordonnance dont le but, chez Apollonius est toujours à l'infini. (ANGLADE e BRIEND, 2017, p.7).

⁹⁵ Por donner à entendre de plusieurs Plans, qu'ils sont tous entre eux ou bien paraleles, où bien inclinez à vne mesme droicte, il est icy dicte, que toutes ces Plans sont entre eux d'une mesme *ordonnance*, par où l'on conceuera de ces plusieurs Plans, qu'en l'une aussi bien qu'en l'autre de ces deux especes de position, ils tendent toutes à vn mesme endroit. (DESARGUES, 1639, p.1).

⁹⁶ Pour donner à entendre l'espece de position d'entre plusieurs droictes, en laquelle elles sont toutes paralelles entre elles, il est icy dict, que toutes ces droictes sont entre elles d'une mesme ordonnance, dont le but à distance infinie en chacune d'elles (DESARGUES, 1639, p.1).

⁹⁷ Sous la dénomination d'ordonnances de droites et de plans, Desargues introduit de façon très Claire et très générale les notions de faisceaux de droites et de plans. (TATON, 191, p.100, nota 3).

estava se referindo a um feixe de retas. De modo análogo, tem-se o feixe de planos.

Com relação aos textos que estiveram ao alcance de Desargues naquele período, encontramos algumas informações como:

Desargues tinha disponível a edição em latim de Commandino dos Elementos de Euclides, publicada em 1572, bem como a edição latina dos quatro primeiros livros das Cônicas de Apolônio, publicado em 1566 com extensos comentários de Eutocius, Pappus e Commandino. Os últimos quatro livros das cônicas eram desconhecidos no tempo de Desargues. Duas edições da Coleção de Pappus foram publicadas por Commandino (postumamente) em 1588 e 1602. (GRAY e FIELD, 1987, p.1, tradução nossa)⁹⁸.

Após definir relações envolvendo planos e retas, o matemático descreve as algumas propriedades existentes entre segmentos.

A primeira relação que ele determina é chamada de *Árvore*, em que, a partir de um conjunto de segmentos de uma reta, obtendo-se uma propriedade geométrica envolvendo a razão entre as medidas dos segmentos.

“Ele define a noção de *Árvore* como uma configuração particular de três pares de pontos e de uma *Raiz*⁹⁹ alinhadas em uma reta que ele nomeou de *Tronco*, definido pelas igualdades de retângulos” (ANGLADE e BRIEND, 2017, p.5)¹⁰⁰.

Árvore

Quando em uma reta AH, há um ponto A comum e simultaneamente embutido ou não em duas partes de cada um dos três pares AB, AH; AC, AG; AD, AF, cujos três retângulos são iguais entre si, tal condição nessa reta é aqui denominada *Árvore*, cuja reta mesma é o *Tronco*. (DESARGUES, 1639, p.3, tradução nossa)¹⁰¹.

⁹⁸ Desargues had available Commandino's Latin edition of Euclid's *Elements*, published in 1572, as well as his Latin edition of the first four books of Apollonius' *Conics*, published in 1566 with extensive commentaries by Eutocius, Pappus and Commandino himself. The last four books of the *Conics* were unknown in Desargues' time. Two editions of Pappus' *Collection* had also been published by Commandino (posthumously) in 1588 and 1602 (GRAY and FIELD, 1984, p.1).

⁹⁹ Raiz é um ponto « referência » com relação aos outros pontos do conjunto.

¹⁰⁰ Il définit la notion d'arbre, comme une configuration particulière de trois couples de points et d'une souche alignés sur une droite qu'il nomme tronc, définie par des égalités de rectangles (ou d'aires de rectangles, dirions-nous aujourd'hui) (ANGLADE e BRIEND, 2017, p.5).

¹⁰¹ Quand en vne droicte AH, il y a vn point A commun & semblablement engagé ou degagé aux deux pieces de chacune de trois couples AB, AH, AC, AG, AD, AF, dont les trois rectangles son égaux entre eux, vne telle condition en vne droicte est icy nommée *Arbre*, dont la droictes mesme est *Tronc*. (DESARGUES, p.3).

De acordo com a figura 16, há uma reta AH com um conjunto de pontos chamados de Nós, em que o ponto A recebe o nome de Raiz. Segundo (GRAY & FIELD, 1984, p. 47, tradução nossa) a noção de *Árvore* determina que “três pares de retângulos formados pelos três pares de pontos B, G; C, G; D, F formam uma *árvore*, se houver um ponto A tal que $AB \cdot AH = AC \cdot AG = AD \cdot AF$ ”¹⁰² (I).

Nesta combinação de pontos, Desargues define que o ponto A, “quando ele está entre os dois, é aqui dito que seu ponto comum A, está Engagé entre os dois” (DESARGUES, 1639, p.2)¹⁰³.

Figura 16: Configuração *Árvore Engagé*.



Atualmente a palavra Engagé pode ser traduzida por “envolvido”, neste caso, quando Desargues trata de um ponto Raiz A, Engagé na reta, ele refere-se a um ponto A que está entre os pontos da configuração em *Árvore*.

Além dessa configuração, o matemático analisou outra, em que o ponto A está em uma extremidade do segmento AC (figura 17), neste caso, o ponto A encontra-se a esquerda de todos os outros pontos, e foi chamado de ponto *Desgagé (isolado)*.

Figura 17: Configuração em *Árvore Desgagé*.



Nas considerações seguintes, o geômetra analisou as diversas posições possíveis para o ponto raiz A, de modo que preservasse as igualdades correspondentes encontradas anteriormente.

¹⁰² Three pairs of points $B, H; C, G; D, F$ form a *tree* if there is a point A such that $AB \cdot AH = AC \cdot AG = AD \cdot AF$. The point A was called the *stump* by Desargues (GRAY and FIELD, 1984, p. 47).

¹⁰³ *quand il est entre elles deux, il est icy dit que leur point commun A, est Engagé entre elles deux.* (DESARGUES, 1639, p.2).

Essa relação é de grande importância na teoria desarguiana, pois ela antecede o que ele chamou de pontos em Involução.

Ele mostra então por manipulações da geometria euclidiana clássica sobre as proporções, que essa noção é equivalente a de Involução, onde apenas os três pares de pontos permanecem. (ANGLADE e BRIEND, 2017, p.5, tradução nossa)¹⁰⁴.

Desargues desenvolveu um estudo a respeito das variações nas posições dos pares de pontos correspondentes. Ele “abordou aqui o estudo de involução, correspondência que ele define em primeiro lugar, sem a nomear, para o auxílio do ponto central (raiz) e dos três pares de pontos homólogos” (TATON, 1951, P.105, tradução nossa)¹⁰⁵.

O objetivo destes estudos foi o de encontrar uma relação de proporcionalidade envolvendo medida de segmentos, de modo que fosse possível analisar essas condições em feixe de retas.

Ao longo das manipulações geométricas ele utilizou teoremas desenvolvidos por Pappus de Alexandria (350 d.C). Segundo (GRAY e Field, 1987, p.10, tradução nossa) “na *Coleção* livro VII, ele descreve diversos lemas da obra perdida *Seção Determinada* de Apolônio, que são tipicamente o tipo de manipulação com proporções que Desargues gostava de usar (GRAY; FIELD, 1987, p.10)¹⁰⁶.

Por exemplo, com o conjunto de pontos A, B, C, D, tem-se que $AD \cdot DC = BD \cdot DE$ (ibid.). E manipulando as igualdades (I) e (II), tem-se:

$$\frac{BD}{DE} = \frac{AB \cdot BC}{AE \cdot EC}^{107}$$

Ao comparar as condições (I) e (II), encontra-se uma relação direta entre as propriedade apresentada por Pappus e a igualdade de Árvore definida

¹⁰⁴ Il montre alors, par des manipulations classiques de la géométrie euclidienne sur les proportions, que cette notion est équivalente à celle d'involution, où ne subsistent que les trois couples de points (ANGLADE e BRIEND, 2017, p.5).

¹⁰⁵ Desargues aborde ici l'étude de l'involution, correspondance qu'il définit d'abord, sans la nommer, à l'aide du point central (souche) et de trois couples de points homologues (TATON, 1951, P.105).

¹⁰⁶ In his *Collection* Book VII, he described various lemmas to the lost *Determinate Section* of Apollonius which are typically the kind of manipulations with ratios that Desargues liked to use. For example, Pappus showed that if $AD \cdot DC = BD \cdot DE$ then. (GRAY and FIELD, 1984, p.10).

¹⁰⁷ * Retirado de (GRAY and FIELD, 1984, p.10.)

por Desargues. Contudo, a configuração em *Árvore* foi um recurso que Desargues utilizou para definir a propriedade de *Involução*, que atualmente é reconhecida como *Razão Anarmônica*.

Involução

E quando em uma reta AH, há como antes, três pares de pontos BH, CG, DF assim condicionados, sabe-se que os dois pontos de cada um dos pares são mesmo misturados ou não aos dois pontos de cada um dos outros pares, e que os retângulos assim relativos às partes entre esses pontos, são entre eles como seus gêmeos, tomados de uma mesma ordem, estão entre eles de uma tal disposição de três pares de pontos em uma reta, é aqui chamado de involução (DESARGUES, 1639, p.4, tradução nossa)¹⁰⁸.

Por confusa que possa parecer, logo abaixo ele define que essa propriedade entre os três pares de pontos é válida se elas estiverem em configuração de *Árvore*:

Ou seja, neste caso, aqui é dito, que três pares de pontos alinhados em uma reta, estão dispostos em involução entre si, isso significa que, nessa disposição de três pares de pontos encontram-se todas as condições e propriedades que acabam de ser explicadas, dos nós de uma *Árvore* em cada uma das duas espécies de configuração, ou que esses três pares de pontos são três pares de Nós em uma *Árvore* de uma das duas espécies de configuração explicadas até agora. (DESARGUES, 1639, p. 4, tradução nossa)¹⁰⁹.

Deste modo, Desargues conclui que se há uma configuração em *Árvore* em um dado segmento de reta, tem-se uma involução.

¹⁰⁸ Et quand en vne droicte AH, il y a comme cela trois couples de poincts BH, CG, DF ainsi conditionnées, à sçavoir que les deux poincts de chacune des couples soient de mesme, ou meslez ou démeslez, aux deux poincts de chacune des autres couples. Et que les rectangles ainsi relatifs des pièces d'entre ces points soient entre eux comme leurs gemeaux, pris de mesme ordre, sont entre eux vne telle disposition de ces trois couples de points en vne droicte, est icy nommée *Involution*. (DESARGUES, 1639, p.4).

¹⁰⁹ C'est à dire, qu'alors qu'il est icy dit, que trois couples cottées de poincts en vne droicte sont disposez en involution entre elles ; cela veut dire, qu'en cette disposition de ces trois couples de poincts, se trouent toutes les conditions & proprieté qui viennent d'estre expliquées des noeuds d'un arbre en chacune des deux especes de conformation, ou que ces trois couples de poincts sont trois couples de noeuds en vn arbre de l'vne des deux especes de conformation expliquées cy deuant (DESARGUES, 1639, p. 4)

Propriedade de Involução

Desargues ao encontrar a propriedade de involução, por meio de manipulações geométricas, em resumo, tratou de apresentar a seguinte propriedade (em linguagem moderna):

Se GC, DF e BH são três pares pontos de uma involução centrados em A, temos:

$$\frac{GD.GF}{CD.CF} = \frac{GB.GH}{CB.CH} = \frac{AG}{AC}$$

Conforme pondera Anglade e Briend (2017, p.13) “chama-se involução, todas as combinações de Involução (BH; CG; DF) satisfazendo a condição métrica seguinte”¹¹⁰:

$$\frac{GF.GD}{CF.CD} = \frac{GB.GH}{CB.CH} = \frac{FC.FG}{DC.DG} = \frac{FB.FH}{DB.DH} = \frac{HC.HG}{BC.BG} = \frac{HD.HF}{BD.BF}$$

Segundo (CHASLES, 1864, p.77-8, tradução nossa) “Desargues trabalha com a relação que conhecemos como pontos conjugados, de modo que os três pares de pontos correspondentes, representem os seis pontos que se correspondem, onde são conjugados dois a dois”.

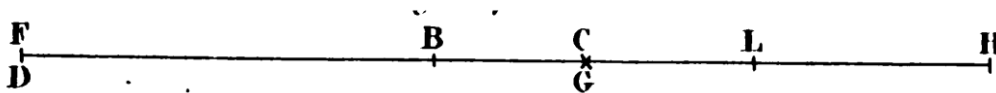
Tendo encontrado esta propriedade entre segmentos, Desargues analisou alguns casos particulares. Dedicou-se ao caso de quatro pontos em involução, ou seja, dois pares de pontos, um caso especial em que dois dos pontos são coincidentes a outros pontos do segmento.

Ele conseguiu descrever seu segundo conceito crucial, o de quatro pontos em involução. Ele começou a partir de uma fórmula equivalente para seis pontos em involução [...] supondo no caso que D e F coincidissem e C e G coincidissem. No caso ele diz que os quatro pontos B, H, G, F são quatro pontos em Involução [...] (GRAY e FIELD, 1984, p.49, tradução nossa).

¹¹⁰ On appelle involution toute involution combinatoire (BH;CG; DF) satisfaisant à la condition métrique suivante : deux rectangles relatifs sont entre eux comme leurs gémeaux. Dit autrement (ANGLADE e BRIIEND, 2017, p.13).

Conforme é expresso na figura 18, tem-se os “pontos duplos” D e F; G e C, como sendo os pares de pontos coincidentes em uma involução de quadro pontos.

Figura 18: Quatro Pontos em Involução.



Fonte: Poudra, (p.3).

Com estas propriedades em mãos, Desargues começou a investigar o envolvimento entre a propriedade de involução em um tipo de projeção, por meio do estudo de feixe de retas

Um dos casos analisados é representado na figura 19, em que, com seis pontos ou três pares de pontos em involução (F, D, B, C, G, H) e a partir de um ponto K, nomeado foco, tem-se a projeção destes pontos.

Projeção de Pontos em Involução

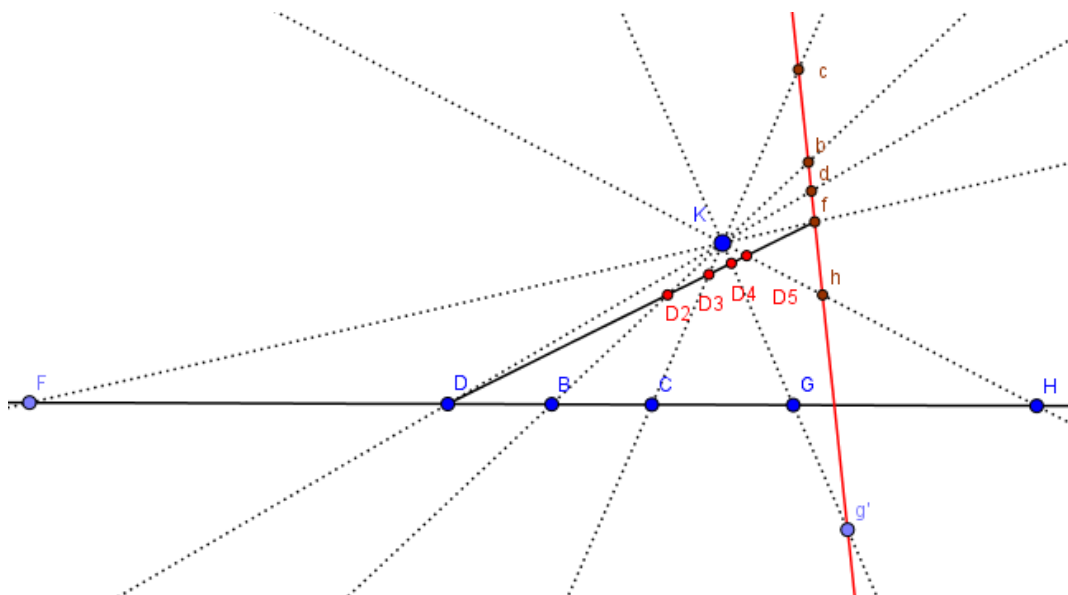
Quando em um tronco de reta GH, com três pares de Nós distintos BH, DF, CG, dispostos entre si em involução, passam três pares de Ramos posicionados FK, DK; BK, HK; CK, GK; todos entre si de uma mesma configuração a um foco K, estes três pares de ramos assim de uma mesma configuração entre si, são todos simultaneamente nomeados de RAMO DE UMA ÁRVORE, e cada um deles fornece em qualquer outra reta cb, conduzida em seu plano, um dos três pares de Nós de uma involução bh, df, cg. (Desargues, 1639, p.11, tradução nossa)

¹¹¹

O objetivo é encontrar uma relação direta entre os pontos em involução e a noção de projeção de segmentos por feixe de retas.

¹¹¹ Quand à vn tronc droict GH, à trois diverses couples de noeuds BH DF, CG dispose entre eux en involution passent trois couples de rameaux deployez FK, DK, BK, HK, CK, GK, tous entre eux d'une mesme ordonnance au but K, ces trois couples de rameaux ainsi d'une mesme ordonnance entre eux sont toutes ensemble nommées *Ramée d'un arbre*, & chacune d'elles donne en quelconque autre droicte cb, menée en leur plan vne des trois couples de noeuds d'une involution bh, df, cg. (Desargues, 1639, p.11, tradução nossa)

Figura 19: Projeção de seis pontos em involução.



Desta forma Desargues anuncia aqui uma propriedade projetiva de Involução. Por outro lado, Segundo (TATON, p.127), “ele considera como evidente nos casos de raios paralelos, em casos de simbolismo, utiliza duas retas auxiliares e faz apelo as propriedades precedentemente demonstradas e ao teorema de Menelaüs”¹¹².

Após analisar o caso da preservação da propriedade de involução para seis pontos em uma projeção, ele começa a descrever como se desenvolve a projeção de involução em um conjunto de quatro pontos, um caso particular do caso de três pares de pontos.

O próximo passo dado por Desargues em direção ao estudo das projeções dos pontos em involução, é uma análise envolvendo uma seção cônica. Para isso, o vértice do cone (foco F) representa um dos focos de projeção (foco do feixe de retas), de modo que, como representado na figura 20, a partir de um quadrilátero inscrito na base do cone, é possível, com outro foco de projeção, encontrar uma transversal a esse feixe de retas.

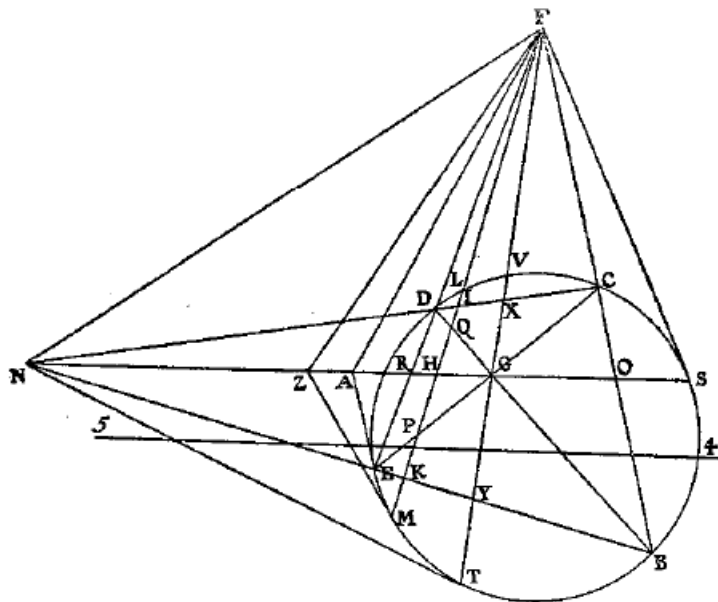
¹¹² il la considère comme évident dans le cas des rayons parallèles ; dans le cas des rayons concourants, sa démonstration, très alourdie par le manque de symbolismes, utilise deux droites auxiliaires et fait appel aux propriétés précédemment démontrées et au théorème de Menelaüs. (TATON, 1951, p.127).

Esta transversal intercepta a seção cônica e os lados do quadrilátero. Os pontos encontrados na interseção formam um conjunto de pontos em involução.

Transversal sobre retas de uma configuração

¹¹³Quando em um plano uma figura NB, NC, se encontram várias retas FCB, FIK, FXY, de uma mesma configuração entre si, e que uma mesma reta NGH, fornece em cada uma destas retas de uma mesma configuração, os pontos G, H, O conjugado ao foco F, de sua configuração em involução, com os dois pontos como XY, IK, CB, que fornece a borda da figura NB, NC. Uma tal reta NGH, é aqui chamada aqui *Transversal* das retas da configuração com foco F, com respeito à figura NB, NC, e as retas desta configuração com foco em F, são por esta razão denominadas *Configuração das Transversais*, N, G, H com respeito a mesma figura NB, NC (DESARGUES, 1639, p.15)

Figura 20: Configuração de uma Transversal.



Fonte: TATON (1951, p.138).

¹¹³ Quand en vn plan vne figure NB, NC, est rencontrée de plusieurs droictes FCB, FIK, FXY, d'vne mesme *Ordonnance* entre elles, & qu'vne mesme droicte NGH, donne en chacune de ces droictes d'vne mesme ordonnance entre elles vn poinct G, H, O couplé au but F, de leur *Ordonnance* en involtion avec les deux poincts comme XY, IK, CB, qu'y donne le bord de la figure NB, NC, vne telle droicte NGH, est pour cela nommée icy *Transversale*, des droictes de l'ordonnance au but F, à l'égard de cette figure NB, NC, & les droictes de cette *Ordonnance* au but F, sont pour cela nommées *Ordonnées de la transversale*, N, G, H à l'égard de la mesme figure NB, NC (DESARGUES, 1636, p.15).

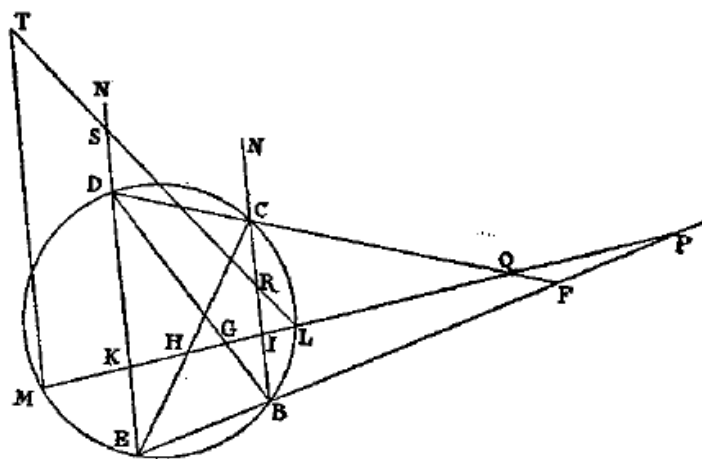
Deste modo ele conseguiu associar os elementos trabalhados anteriormente, envolvendo a composição de pontos em involução, feixe de retas, que por ele é chamado de configuração de retas, associando esses elementos a uma cônica e a noção de projeção de figuras.

Por fim, a última propriedade que iremos apresentar *do Brouillon Project* é a relação de involução em seis pontos em um cilindro (figura 21).

Seis Pontos em Involução em um Cilindro

Quando em um plano com quatro pontos, B, C, D, E como extremidades embutidas, três vezes entre si, passam três pares de retas limites BCN, EDN, BEF, DCF, BDR, ECR, cada um destes três pares de retas limites e a curva de bordo de um corte qualquer do cilindro que passa pelos quatro pontos B, C, D, E fornecem em qualquer outra reta de seu plano de tal maneira que em um tronco I, G, K um dos pares de Nós de uma involução IK, PQ, GH e LM e se as duas retas limites de um dos pares BCN, EDN são paralelas entre si, os retângulos de seus pares relativos de galhos envolvidos no tronco, são entre si como seus gêmeos, os retângulos de galhos cruzados no tronco são entre eles de mesma formação (DESARGUES, 1639, p.16-17, tradução nossa)¹¹⁴.

Figura 21: Configuração de uma Transversal.



Fonte: TATON (1951, p.142).

¹¹⁴ Quand en un plan à quatre points, B, C, D, E comme bornes couplées trois fois entre elles, passent trois couples de droites bornales BCN, EDN, BEF, DCF, BDR, ECR, chacune de ces trois couples de droites bornales & le bord courbe d'une quelconque coupe de rouleau, qui passe à ces quatre points B, C, D, E donne en quelconque autre droite de leur plan ainsi qu'en vn tronc I, G, K, vne des couples de noeuds d'une involution IK, PQ, GH, & LM, & si les deux bornales droites d'une des couples BCN, EDN, sont parallèles entre elles, les rectangles de leurs couples relatifs de brins déployez au tronc sont entre eux comme leurs gêmeos les rectangles de brins pliez au tronc & de mesme ordre son entre eux (DESARGUES, 1864, p.16-17).

Temos então uma representação da propriedade de seis pontos em involução em um cilindro. Segundo Taton (1951, p.143) “essa afirmação é aquela do célebre “Teorema de Desargues”¹¹⁵. Contudo, não deve-se confundir o teorema que Taton ressalta, com o Teorema de Desargues dos triângulos projetivos.

Segundo Taton esse teorema pode ser escrito da seguinte forma:

As cônicas de um feixe pontual, definido por quatro pontos cujo três quaisquer não estão alinhados, determinam em cada reta de seu plano, pares de pontos em involução; as três cônicas degeneradas do feixe, que são o par de lados opostos do quadrângulo completo, satisfazem essa propriedade (TATON, 1951, p.143, tradução nossa)¹¹⁶.

Deste modo, compomos uma análise dos conceitos explorados no trabalho *Brouillon Project*, explorando os elementos como propriedade entre segmentos, pontos em involução e a noção de projeção de figuras a partir de feixe de retas, aproximando-se das seções cônicas.

Desargues, mesmo que de forma indireta, levou seu trabalho em direção ao estudo das projeções de figuras, mesmo que em sua época não houvesse uma teoria bem definida com relação a formas de projeções. Seu trabalho explorou elementos que fazem parte dos recursos com os quais o campo da perspectiva se relaciona.

Seja de forma direta ou indireta, o ato de representar um determinado objeto em perspectiva, perpassa pelo conceito de projeção de figuras. Deste modo, quando um teórico se dedica ao estudo das representações, ele está se aproximando do campo das projeções geométricas.

Por fim, trouxemos algumas considerações que tem o objetivo de relacionar as duas obras analisadas, afirmando que os dois trabalhos não se tratam de dois textos distintos, mas que são textos que se complementam.

¹¹⁵ cet énoncé est celui du célèbre “théorème de Desargues” que l’on exprime aujourd’hui sous la forme suivante (p.143).

¹¹⁶ Les coniques d’un faisceau ponctuel, défini par quatre points dont trois quelconques ne son pas alignés, déterminent sur chaque droite de leur plan dess couples de points en involution ; les trois coniques dégénérées du faisceau, que sont le couples de côtés opposés du quadrangle complet, satison à cette propriété (TATON, 1951, p.143, tradução nossa)

CAPÍTULO 6: CONSIDERAÇÕES FINAIS

Método de Perspectiva e *Brouillon Project* dois trabalhos sobre projeções de figuras

Em nossas últimas considerações, nos permitimos discorrer a respeito das reflexões que surgiram ao longo da pesquisa.

Autores como Hogendjik, Hefez, Chasles, Poudra, Taton, Casse, entre outros, consideraram o texto *Brouillon Project (1639)* como sendo um tratado dedicado ao estudo das seções cônicas. Por outro lado, acreditamos que esse trabalho possui direta ligação com o *Método de Perspectiva*, publicado em 1636.

No *Método de Perspectiva* Desargues utilizou um sistema de escalas e uma malha no plano de representação com o objetivo de localizar pontos no espaço e representá-los no quadro. Segundo KIRSTI (2007, p.447, tradução nossa) “seu método forneceu um esquema fixo para transferir pontos do espaço tridimensional para o plano da imagem”¹¹⁷.

Por outro lado, no texto *Brouillon Project* Desargues introduz de maneira clara e geral as noções de feixe de retas e de planos. “É evidente que essa noção tem suas origens na perspectiva” (TATON, 1951, p.100, tradução nossa)¹¹⁸.

Deste modo, acreditamos que a construção de um plano geometral com várias linhas interceptando-o, está intimamente ligada com a construção de um feixe de retas e retas que o interceptam. Ambos os casos relacionam-se com o chamado “padrão de azulejos” representado em diversos quadros no período Renascimento.

No decorrer da pesquisa observamos que “no *Brouillon Project*, Desargues tratou de projeções de linhas sobre linhas e planos sobre planos,

¹¹⁷ His method of perspective was less projective than several other methods, in that he provided a fixed scheme for transferring points from three-dimensional space to the picture plane and did not deal with the properties of a perspective projection (KIRSTI, 2007, p.447).

¹¹⁸ Sous la dénomination d'ordonnances de droites et de plans, Desargues introduit de façon très claire et très générale les notions de faisceaux de droites et de plans. S'il est évident que cette notion est chez lui d'origine perspective (TATON, 1951, p.100).

enquanto que na perspectiva ele trabalhou com projeções de espaço tridimensional em um plano” (KIRSTI, 2007, p.447, tradução nossa)¹¹⁹.

Seja pelo “padrão de azulejos”, pelo plano geometral ou por feixe de retas envolvendo propriedades entre segmentos, essas três construções se aproximam de estruturas geométricas trabalhadas atualmente na chamada geometria projetiva plana:

A geometria projetiva plana pode ser descrita como o estudo de propriedades geométricas que são inalteradas pela "projeção central", que é essencialmente o que acontece quando um artista desenha uma imagem de um chão de azulejos em uma tela vertical. Os azulejos quadrados deixam de ser quadrados, pois seus lados e ângulos são distorcidos pelo encurvamento; mas as linhas permanecem retas, uma vez que são seções (pelo plano da imagem) dos planos que as juntam ao olho do artista. (COXETER, 1949, p.3, tradução nossa)¹²⁰.

Portanto, quando Desargues analisou propriedades existentes em um feixe de retas, composição próxima do plano geometral, Desargues estava trabalhando com elementos de projeção central.

Por outro lado, a produção do *Brouillon Project* fez parte de uma série de trabalhos que caminhavam em mesma direção, envolvendo estudos a respeito de perspectiva e projeções de figuras.

No séc. XV, o estudo da perspectiva linear assumiu considerável importância em meio predominante das belas artes.

A partir desse momento, há evidências da evolução técnica usando construções em perspectiva para dar uma ilusão da terceira dimensão, mas até o final do séc.XVII, textos sobre perspectiva ainda exibiam marcas de sua origem euclidiana em repetidas referências ao “cone” ou “pirâmide” de raios partindo do olho, emanando em direção ao objeto. Esse “cone de visão” geralmente é um verdadeiro cone no sentido matemático, já que sua base imaginada, o contorno do objeto, pode se adequar a qualquer forma. O plano da imagem, no qual uma imagem em perspectiva do objeto deve ser desenhado, é imaginado como cruzando com este cone de visão, de modo

¹¹⁹ In *Brouillon project* Desargues treated projections of lines upon lines and of planes upon planes, whereas in *La perspective* he worked with projections from three-dimensional space into a plane. (KIRSTI, 2007, p.447).

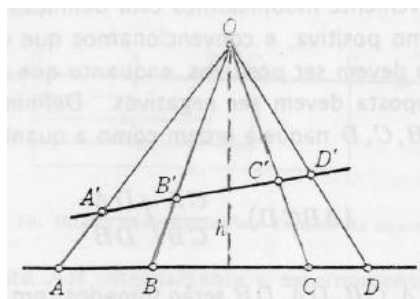
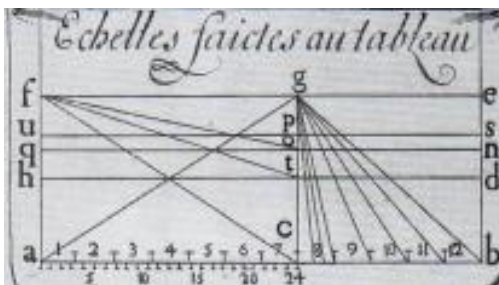
¹²⁰ Plane projective geometry may be described as the study of geometrical properties that are unchanged by "central projection," which is essentially what happens when an artist draws a picture of a tiled floor on a vertical canvas. The square tiles cease to be square, as their sides and angles are distorted by foreshortening; but the lines remain straight, since they are sections (by the picture-plane) of the planes that join them to the artist's eye. (COXETER, 1949, p.3).

que, em termos modernos, a imagem em perspectiva é uma projeção do objeto na imagem plana. A Perspectiva foi vista como a degradação de uma forma em outra, não como uma relação recíproca. (GRAY e FIELD, 1984, p.15-6, tradução nossa)¹²¹.

Desta maneira, acreditamos que Desargues foi influenciado pelo tipo de teoria que estava sendo desenvolvida em sua época, pois diversos teóricos tratavam de conteúdos próximos ao trabalhados por ele.

Com relação a construção do plano geometral e o feixe de retas em pontos em involução, conforme a figura 22, ao observar a representação, é possível encontrar semelhanças entre as figuras geométricas e as propriedades desenvolvidas nestes ambientes, pois ambas representações possuem propriedades matemáticas associadas a interseção de retas com feixe de retas.

Figura 22: Plano geometral e Projeção de pontos.



Desargues, ao explorar as possibilidades envolvendo pontos em involução em feixe de retas, se aproximou das relações trabalhadas no *Método de Perspectiva*, e em ambos os casos, essas teorias estavam próximas do que chamamos hoje de estudo de projeções geométricas.

Podemos considerar que Desargues abordou este tema de duas formas.

¹²¹ In the fifteenth century, the study of linear perspective assumed considerable importance on account of prevailing fashions in the fine arts. From this time onwards there is evidence for the evolution of techniques of using perspective constructions to give an illusion of a third dimension, but even as late as the early seventeenth century, texts on perspective still bear the marks of their Euclidean origin in repeated references to the 'cone' or 'pyramid' of rays issuing from the eye and emanating in the object seen by the eye. This 'cone of vision' is not usually a true cone in the mathematical sense, since its imagined base, the outline of the object, may be of any shape. The plane of the picture, upon which a perspective image of the object is to be drawn, is imagined as intersecting this cone of vision, so that, in modern terms, the perspective picture is a projection of the object on the picture plan... Perspective was seen as the 'degrading' of one shape into another, not as a reciprocal relationship. (GRAY e FIELD, 1984, p.15-6).

¹²²Desargues deu alguma indicação do vasto programa que ele estabeleceu, um programa dominado por dois temas: Por um lado, a preocupação de racionalizar, coordenar e unificar técnicas gráficas por seu “método universal”, e por outro, o desejo de integrar métodos projetivos no corpo da matemática por meios puramente geométricos no estudo de perspectiva. (TATON, 1971, p.46).

Deste modo, no *Método de Perspectiva*, ele trabalhou com técnicas de representação envolvendo construções geométricas. Por meio de processos descritivos o geômetra esteve envolvido com uma matemática funcional, uma matemática direcionada a fins práticos.

Por outro lado, no *Brouillon Project*, Desargues trabalhou com propriedades geométricas relacionadas a feixe de retas e projeções geométricas, ou seja, um conteúdo teórico abstrato, não necessariamente com fins práticos.

Podemos dizer que, seu estudo de propriedade de involução em um cone, não se distancia de sua descoberta de uma malha proporcional no plano geometral. Ambas relações fazem parte de propriedade geométricas que foram construídas em um ambiente de projeção de figuras, envolvendo interseções de retas com feixe de retas.

Segundo Kirsti (2007, p.446, tradução nossa) “a relação de involução, também conhecida como razão cruzada, foi um conteúdo pouco explorado naquele período, pois de fato, a invariância da razão cruzada, não entrou na teoria da perspectiva até o séc.XIX”¹²³, deste modo, Desargues representa um dos primeiros matemáticos a tratar deste assunto dentro do campo das projeções de figuras e no campo da perspectiva.

Acredita-se que exista uma ligação entre o trabalho de Desargues produzido em 1639, *Brouillon Project*, com o texto *Método de Perspectiva* de 1636. Os dois textos, mesmo que por abordagens distintas, se dedicaram a

¹²² Desargues gave some indication of the vast program he had set for himself, a program dominated by two basic themes : on the one hand, the concern to rationalize, to coordinate, and to unify the diverse graphical techniques by his "universal methods" and, on the other, the desire to integrate the projective methods into the body of mathematics by means of a purely geometric study of perspective, (TATON, 1971, p.46).

¹²³ In fact, the invariance of cross ratios did not enter the theory of perspective until the nineteenth century (KIRSTI, 2007, p.446).

discorrer a respeito de propriedades matemáticas que estavam envolvidas no campo das representações em perspectiva.

Pelo trabalho de 1636, Desargues dedicou-se a desenvolver uma teoria voltada a solucionar problemas envolvendo distorções em perspectiva, enquanto que no trabalho de 1639 explorou elementos abstratos de uma matemática teórica.

Observa-se nestas duas obras, um movimento de abstração do conhecimento matemático, em que, a partir de uma teoria voltada a solucionar problemas práticos, essa mesma teoria é direcionada a tratar de conceitos abstratos, proporcionando assim novas descobertas a própria estrutura daquele conhecimento. Acreditamos que estas duas publicações de Desargues sigam esta trajetória, perpassando por elementos práticos, com fins funcionais, indo em direção aos conceitos abstratos de uma geometria que surgiria mais de cem anos depois da publicação do matemático lionês.

Contudo, pensamos que nenhuma pesquisa possui um ponto final, que, conforme nos aprofundamos nos textos matemáticos, encontramos novas possibilidades para trabalhos futuros. Dentre eles, consideramos que novos estudos a respeito dos conflitos das teorias da perspectiva francesa no séc. XVII, proporcionaria informações de grande importância para compreender como esse conhecimento se desenvolvia e quais foram os personagens que contribuíram para seu desenvolvimento.

Indicamos essa direção pois ao longo da pesquisa, encontramos nomes como os de Aleaume, Mignon e Beaugrard, associados a conflitos com relação a criação de técnicas de representação em perspectiva. Deste modo, uma possibilidade seria um estudo detalhado das técnicas de cada autor em conjunto com as cartas que circularam naquele período.

Além deste tema, uma pesquisa voltada às teorias de Desargues e as produções de Abraham Bosse, também seria um trabalho importante e de rica contribuição para a história da matemática, além da história da perspectiva.

REFERÊNCIAS

- ANGLADE, M. BRIEND, J. Y. **La notion d'involution dans le Brouillon Project de Girard Desargues.** Disponível em: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01539106> . Acesso em: 05 de Março de 2018.
- BOYER, Carl. B. **História da Matemática.** Tradução de Elza F. Gomide. 2. ed, São Paulo. Edgard Blucher LTDA, 2001.
- BURTON, H. E. **The Optics of Euclid.** Journal of the Optical society of America. Vol.5 1945.
- CASSE, J. **Projective Geometry, an Introduction.** 1ª ed. New York: Oxford University Press, 2006.
- COURANT, R; ROBBINS, H. O que é Matemática?. Ed. Ciência Moderna. Trad. Adalberto da Silva Brito. 2000.
- CHASLES, M. **Aperçu Historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie, Bruxelles,** 1873.
- COOLIDGE, J. W. **A History of Geometrical Methods.** 1ª ed. Oxford University Press, 1947.
- COXETER, H. S. M. **The Real Projective Plane.** 1ª ed. New York. McGraw Hill Boom Company, inc, 1949.
- , H. S. M, GREITZER, S. L. **Geometry Revised,** The Mathematical Association of America, 1967.
- DARRIGOL, O. **A History of Optic.** 1ª ed. New York: Oxford University Press. 2012.
- DESARGUES, G. **exemple de l'une des manières universelles du S. G. D. L. touchant la pratique de la perspective sans employer aucun tiers point, de distance ny d'autres nature, qui soit hors du champ de l'ouvrage.** Paris, 1636.
- , G. **Brouillon Project d'une atteinte aux evenemens des rencontres du cone avec un plan.** Paris, 1639.
- EDGERTON, S. Y. **The Mirror, The window and the Telescope.** New York: Cornel University Press, 2009
- **The Renaissance Rediscovery of Linear Perspective.** Nova York: Basic Books. 1975.
- EUCLIDES. **Os Elementos.** Tradução de Irineu Bicudo. 1. ed. São Paulo: Editora Unesp. 2009.

FIELD, J, V. **The Invention of Infinity, Mathematics and Art in the Renaissance**. New York: Oxford University Press, 1997.

FIELD, J. and GRAY, J. **The geometrical work of Girard Desargues**. New York: Springer-Verlag 1987.

FRANGENBERG, T. **The angle of vision: problems of perspectival representation in the fifteenth and sixteenth centuries**. The Society for Renaissance Studies. vol 6. No 1. p.1-45, 1992,.

-----, **Optical correction in sixteenth- century theory and practice**. The Society for Renaissance Studies. vol 7. No 2. p.207-228. 1993.

FREGUGLIA, P. **Reflection on the Relationship between Perspective and Geometry in the Sixteenth and Seventeenth Centuries**. Nexus Network Journal. Ed. KWB 331-341, 2009.

GARIN, E. **Ciência e Vida Civil no Renascimento Italiano**. Trad. Cecília Prada. Ed. Unesp. 1993.

MERSENNE, M. **Harmonia Universal**, 1636.

HEFEZ, A. **Uma Introdução a História da Geometria Projetiva**. Vitória: 1985. Notas de uma Palestra proferida na Reunião Regional da SBM. Disponível em: <<http://rmu.sbm.org.br/artigos.php>>. Acesso em: 20 jun. 2017.

HOGENDJIK, J. **Desargues' Brouillon Project and Conics of Apollonius**. Centaurus, vol. 34, p. 1-43, 1991.

INCARDONA, F. "Introdução". In: EUCLIDES, **Ottica**. Trad. de F. Incardona. Roma, Di Renzo Editore. 1996.

KEMP, M. **The Science of Art**. Yale University, 1990.

KIRSTI, A. **The Geometry in Art The History of the Mathematical Theory of Perspective From Alberti to Monge**. Springer, 2007.

Kline, M. **Mathematical Thought from Ancient to Modern Times**. Vol 1. Oxford University Press, 1972.

LE GOFF, Jaques. **Os Intelectuais na Idade Média**. Tradução de Marcos de Castro. 4. Ed. Rio de Janeiro. José Olympio LTDA, 2011.

NABONNAD, P. **Contributions à l'Histoire de la géométrie projective in 19e Siécle**. 2014. Archives ouvertes.fr

NETO, G. R. **Euclides e a Geometria do Raio Visual**. scientiæ zudia, São Paulo, v. 11, n. 4, p. 873-92, 2013.

NICERON, J. F. **La perspective curieuse, ou magie artificielle des effets merveilleux.** 1638.

PEIFFER, J. **Writing the History of Mathematics; Its Historical Development.** Switzerland: Birkhauser Verlag, 2002.

ROSSI, P. **A Ciência e a Filosofia dos Modernos.** Ed. Unesp. Trad. Álvaro Lorencini. 1ª Reimpressão, 1989.

----- Os Filósofos e as Máquinas. Ed. Companhia das Letras. Trad. Frederico Carotti. 1989.

SAITO, F. **Geometria e óptica no século XVI: a percepção do espaço na perspectiva euclidiana,** 2008. Disponível em <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/1334/1132>. Acesso em 30 jun. 2017.

SAITO, F. BELTRAN, H. R. **Revisitando as relações entre ciência e "techné": ciência, técnica e tecnologia nas origens da ciência moderna.** In: 14º Seminário Nacional de História da Ciência e da Tecnologia. 2014, Belo Horizonte. Anais. Belo Horizonte : UFMG, 2014.

SAKAROVITCH, J. **Aux Origines de la géométrie descriptive: entre histoire des sciences et histoire de l'architecture.** Bulletin d'information de l'École d'Architecture. Paris. Vol. 30. p. 31-33, 1999.

TATON, R. **Découverte d'un exemplaire original du « Brouillon project » sur les Coniques de Desargues,** Revue d'histoire des sciences et de leurs applications. vol 4, n°2, 1951. pp. 176-181.

_____. **L'Oeuvre Mathématique de G. Desargues.** Presses Universitaire de France. Paris, 1951.

VITRUVIO, M. **Os Dez livros de Arquitetura,** traduzido por, Joseph Ortiz y sans. Madri, La imprentia Real. 1787.

PANOFSKY, E. **A perspectiva como forma simbólica.** Trad. Elisabete Nunes. Lisboa, Edições 70. 1953.

POUDRA, N. G **Oeuvres de Desargues, Réunies et Analysées,** Paris, 1864.

-----L'Histoire de la Perspective Ancienne et Moderne. Paris, 1864.

Sevcenko, N. **O Renascimento.** 14. ed. Editora da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). 1988.