



Universidade Estadual Paulista
Campus de São José do Rio Preto Instituto de Biociências,
Letras e Ciências Exatas

Alex Paulo Francisco

Estrutura local de alguns subconjuntos do espaço
euclidiano via teoria de desdobramentos

São José do Rio Preto
Fevereiro - 2015



Universidade Estadual Paulista
Campus de São José do Rio Preto Instituto de Biociências,
Letras e Ciências Exatas

Estrutura local de alguns subconjuntos do espaço euclidiano via teoria de desdobramentos

Alex Paulo Francisco

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Luciana de Fátima Martins

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências,
Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual
Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São
José do Rio Preto, como parte dos requisitos para a
obtenção do título de Mestre em Matemática, na área
de Singularidades.

São José do Rio Preto
Fevereiro - 2015

Francisco, Alex Paulo.

Estrutura local de alguns subconjuntos do espaço euclidiano via teoria de desdobramentos / Alex Paulo Francisco. -- São José do Rio Preto, 2015

162 p. : il., gráfs.

Orientador: Luciana de Fátima Martins

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Geometria. 3. Singularidades (Matemática)
4. Deformações das singularidades. I. Martins, Luciana de Fátima.
II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 513

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Alex Paulo Francisco

Estrutura local de alguns subconjuntos do espaço euclidiano via teoria de desdobramentos

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Singularidades, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Orientadora

Prof^{fa}. Dr^a. Luciana de Fátima Martins
UNESP - São José do Rio Preto

Primeiro Examinador

Prof. Dr. Farid Tari
ICMC-USP - São Carlos

Segundo Examinador

Prof. Dr. João Carlos Ferreira da Costa
UNESP - São José do Rio Preto

SUPLENTES

Prof^{fa}. Dr^a. Ana Claudia Nabarro
ICMC-USP - São Carlos

Prof. Dr. Paulo Ricardo da Silva
UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto, 09 de Fevereiro de 2015.

*Aos meus pais Paulo e Silvânia,
ao meu irmão Alan
e a memória da Prof.^a Fabiana Marcuzo de Caires
dedico.*

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todos que, de alguma forma, contribuíram para que este trabalho pudesse ser realizado. Em especial agradeço:

À Luciana de Fátima Martins, mais que uma orientadora, uma amiga, que com muito talento e maestria me orientou durante vários anos, me propiciando um excelente amadurecimento matemático. Agradeço pelos elogios, também pelos puxões de orelha, pelo maravilhoso trabalho que fizemos juntos e por sua amizade que levarei para sempre.

À minha família, pelo imenso amor que recebo todos os dias, pelo apoio, o incentivo, o carinho e por me fazer sentir querido por pessoas tão especiais. Sobretudo, agradeço aos meus pais, por terem me dado a vida, pelo amor e carinhos que tiveram comigo desde o dia em que nasci e por fazerem minha vida tão especial com a vossa presença.

A todos os meus amigos da faculdade e do mestrado, que me apoiaram, me ajudaram, me fizeram rir diversas vezes e me atormentaram também, em especial à Hellen, uma parceira de estudos, uma amiga, uma irmã, agradeço a Deus por ter colocado-a em meu caminho; agradeço também aos meus amigos Flávio, Robson e Rodrigo, sempre como irmãos mais novos me atormentando, mas me fazendo rir. Agradeço, também, aos amigos e colegas da graduação e pós graduação de diversos anos que tive o prazer de conhecer, os quais não listo aqui por se tratar de muitos nomes, mas agradeço a amizade de cada um que fez parte dessa história.

À Prof.^a Fabiana Marcuzo de Caires (em memória), que foi uma excepcional professora e que me mostrou o quão belo é esta ciência dos números e do raciocínio, a matemática. Infelizmente ela partiu ainda jovem, mas em homenagem a tudo que ela representou pra mim e ao amor a matemática que ela demonstrou, dedico este trabalho à sua memória.

À OBMEP, que juntamente com seus professores e os programas PIC e PICME - CNPq, me incentivaram ainda mais em trilhar este caminho, buscando aprender e descobrir coisas novas neste vasto universo da matemática.

À banca, que se dispôs a participar deste trabalho, cujas sugestões e correções foram cruciais para melhorar ainda mais este texto.

À CAPES e à FAPESP, pelo suporte financeiro, o qual foi essencial para a realização deste trabalho.

“Assim como todos que vivem para ver tempos assim, mas não cabe a eles decidir, tudo o que temos de decidir é o que fazer com o tempo que nos é dado.”

Gandalf, o cinzento.

Resumo

Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Podemos naturalmente considerar F como uma família de funções a r -parâmetros, a qual é chamada de um desdobramento de uma determinada função desta família. A existência de desdobramentos com a propriedade de serem “versais” é um dos resultados centrais da Teoria de Singularidades. A grosso modo, um desdobramento versal de uma função real g contém todas as funções próximas a g . Reconhecer desdobramentos versais é importante para o estudo de propriedades de subconjuntos do espaço Euclidiano que são preservadas por difeomorfismos. Neste trabalho, vamos passar por alguns resultados importantes da Teoria de Singularidades relacionados à transversalidade, genericidade, classificação e sobre desdobramentos de funções reais e, então, por algumas aplicações ao estudo da estrutura local genérica de alguns subconjuntos do espaço Euclidiano, como curvas e superfícies.

Palavras Chave: Genericidade. Desdobramentos versais. Conjunto bifurcação. Conjunto discriminante.

Abstract

Let $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$ be a smooth function. We can naturally regard F as an r -parameter family of functions, which is called an unfolding of a certain function in this family. The existence of unfoldings with the property of be “versal” is one of the central results of the Singularity Theory. Roughly speaking, a versal unfolding of a real function g contains every functions close to g . Recognize versal unfoldings is important to study properties of subsets of the Euclidean space which are preserved by diffeomorphisms. In this work we will go through some of the important results of the Singular Theory about transversality, genericity, classification and about unfoldings of real functions and then through some applications to the study of the generic local structure of some subsets of the Euclidean space like curves and surfaces.

Key Words: Genericity. Versal unfoldings. Bifurcation set. Discriminant set.

Lista de Figuras

1	Cúspide ordinária (esquerda) e cuspidal edge (direita).	19
1.1	Possíveis intersecções entre $f_a(\mathbb{R})$ e N (Exemplo 1.2.4).	28
1.2	1 e 3 são transversais, 2, 4 e 5 não são transversais.	33
1.3	Importância da condição N ser fechado na Proposição 1.3.4.	40
1.4	Importância da condição M ser compacta na Proposição 1.3.4.	41
2.1	Forma normal de Monge para γ	55
2.2	Aplicação de Monge-Taylor para o círculo unitário (Exemplo 2.2.2).	56
2.3	O conjunto de vértices de ordem maior em V_4	60
3.1	Conjuntos singular e bifurcação de $G(t, x_1) = t^3 + x_1t$	95
3.2	Conjuntos singular e bifurcação de $H(t, x_1, x_2) = t^3 + x_1t + x_2t^2$	96
3.3	Conjuntos singular e bifurcação de $F(t, x_1, x_2) = \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{2}x_1t^2 + x_2t$	96
3.4	Conjuntos singular e bifurcação de uma singularidade A_2	110
3.5	Conjuntos singular e bifurcação de uma singularidade A_3	111
3.6	Conjunto bifurcação de uma singularidade A_4 (rabo de andorinha).	111
3.7	Elipse, parábola e suas evolutas.	118
3.8	Curva dual de (t, t^3)	121
3.9	Associação entre retas orientadas no plano e pontos de $S^1 \times \mathbb{R}$	121
3.10	Paralelas e evoluta da parábola.	122
3.11	O círculo unitário e sua superfície paralela.	124
3.12	A curva $(t, t^3 + 1)$ e sua ortotômica(em negrito).	127
3.13	A curva $\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(t), \text{sen}(t), t)$ e seu conjunto focal.	130
3.14	A curva $\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(t), \text{sen}(t), t)$ e o conjunto de valores críticos de sua aplicação de Gauss.132	
3.15	A curva $\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(t), \text{sen}(t), t)$ e sua tangente desenvolvível.	136
4.1	Cota inferior da integral para j par.	152
4.2	Cota inferior da integral para j ímpar.	152

Sumário

Introdução	19
1 Transversalidade	23
1.1 Variedades suaves	23
1.2 Transversalidade	27
1.3 Propriedades abertas, densas e genéricas	37
2 Genericidade	43
2.1 Elementos da Teoria de Singularidades	44
2.1.1 \mathcal{R} -equivalência e classificação de funções reais	44
2.1.2 Funções altura e distância ao quadrado e contato entre curvas	48
2.2 Propriedades genéricas de curvas planas	54
2.3 Propriedades genéricas de curvas espaciais	65
3 Desdobramentos de funções reais	79
3.1 Desdobramentos p-versais	80
3.1.1 Critérios para p-versalidade	87
3.1.2 Conjunto singular e conjunto bifurcação	94
3.1.3 Desdobramentos p-versais de singularidades A_2, A_3 e A_4	110
3.2 Desdobramentos versais	112
3.2.1 Conjunto zero e discriminante	113
3.2.2 Desdobramentos versais de singularidades A_1, A_2 e A_3	116
3.3 Aplicações	117
3.3.1 Curvas planas	118
3.3.2 Curvas espaciais	129
3.3.3 Lema de Transversalidade de Thom e desdobramentos	139
4 Teorema do Desdobramento p-Versal: caso analítico	143
Referências Bibliográficas	161

Introdução

Nas últimas décadas a Teoria de Singularidades não somente reinterpretou resultados clássicos da geometria diferencial de subvariedades em \mathbb{R}^n , mas também permitiu a descoberta de resultados fascinantes sobre esta geometria. Estes novos resultados seguiram da sugestão de René Thom que consiste em estudar o contato de subvariedades com objetos degenerados tais como planos, retas, esferas, círculos, etc. Estes contatos são medidos através das singularidades de algumas funções ou aplicações. Muitos dos objetos tratados nestes estudos surgem como conjuntos discriminante ou bifurcação (os quais foram estudados por Arnold [2]) de determinadas famílias de funções ou aplicações. Dessa forma, se tivermos um estudo da estrutura local desses conjuntos, podemos então saber sobre a estrutura local dos objetos em questão. Nesta dissertação, o principal objetivo é mostrar como se desenvolve esta linha de raciocínio para estudar a estrutura local de alguns objetos, como curvas e superfícies. No entanto, geralmente este estudo não é completo. Assim, um dos objetivos desta dissertação é fazer uso de algumas propriedades genéricas de curvas planas e espaciais, para tentar tornar este estudo genérico.

Sabemos que, na vizinhança de pontos regulares de curvas e superfícies, estas são difeomorfas a retas ou a planos, respectivamente. Portanto, a questão que resta analisar é quanto a estrutura local em pontos singulares, ou seja, em pontos onde não temos bem definido a reta tangente ou o plano tangente. Por exemplo, a curva $\alpha(t) = (t^3, t^2)$ não é regular em $t = 0$ (Figura 1, esquerda), e a superfície parametrizada por $f(x, y) = (x, y^2, y^3)$ (Figura 1, direita), não é regular em $\{(x, 0); x \in \mathbb{R}\}$, a primeira é chamada *cúspide ordinária*, e a segunda *cuspidal edge*.

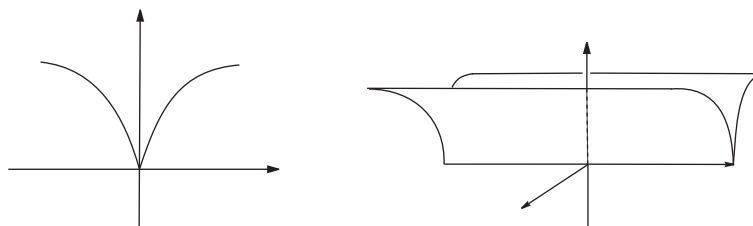


Figura 1: Cúspide ordinária (esquerda) e cuspidal edge (direita).

A organização deste trabalho é como segue: No Capítulo 1 apresentamos os conceitos e resultados sobre variedades e transversalidade, os quais servem de base para o estudo de propriedades genéricas de aplicações suaves. O principal resultado deste capítulo é o Teorema de Transversalidade de Thom 1.2.9, o qual é o resultado chave para obter a genericidade de propriedades de aplicações suaves. Ao fim deste capítulo, definimos propriedades abertas, densas e genéricas no conjunto das aplicações suaves e mostramos que a propriedade de ser transversal a uma dada variedade é, sob certas condições, genérica. Em sequência, no Capítulo 2, apresentamos primeiramente, na Seção 2.1, diversos conceitos e resultados básicos, porém fundamentais da Teoria de Singularidades, os quais são ferramentas cruciais em todo o restante da dissertação, dos quais destacamos o Teorema 2.1.7, que classifica todas os germes de funções reais com singularidade A_k , para algum inteiro k , segundo a \mathcal{R} -equivalência (exceto os germes de funções chatas); os resultados que relacionam o tipo de singularidade das funções altura e distância ao quadrado com o contato de curvas com retas, planos, círculos e esferas e, no caso plano, a relação destes com vértices e inflexões da curva (Proposição 2.1.14). Nas duas seções seguintes (2.2 e 2.3) utilizamos a aplicação de Monge-Taylor para facilitar o estudo da geometria de curvas planas e espaciais, a fim de obter propriedades genéricas das mesmas. Nestas seções obtemos resultados extremamente interessantes, que são fundamentais para o tratamento genérico do estudo da estrutura local de alguns objetos. Por exemplo, o resultado que diz que, genericamente, toda curva plana compacta possui um número finito de vértices e inflexões ordinários e não possui vértices e inflexões de ordem maiores (Teorema 2.2.8).

No Capítulo 3 apresentamos fundamentos e resultados sobre desdobramentos de funções reais. Nas duas primeiras seções apresentamos os principais resultados sobre desdobramentos p-versais e versais. A diferença básica na definição entre eles é a existência de uma função constante. Associado a desdobramentos p-versais temos os conjuntos singular e bifurcação e, associado a desdobramentos versais, temos os conjuntos zero e discriminante. Os conjuntos singular (no caso p-versal) e zero (no caso versal) são variedades diferenciáveis suaves, de mesma dimensão que o espaço de parâmetros. Já o mesmo não ocorre para os conjuntos bifurcação e discriminante. Neste capítulo fazemos um estudo da estrutura local dos conjuntos bifurcação (no caso p-versal) e discriminante (no caso versal) baseando-se no tipo de singularidade A_k da função desdobrada e no número r de parâmetros do desdobramento. Além disso, apresentamos os modelos de estrutura local dos conjuntos discriminante e bifurcação para valores pequenos de k e r . A existência de desdobramentos com a propriedade de serem “versais” é um dos resultados centrais da Teoria de Singularidades. A grosso modo, um desdobramento versal de uma função real g contém todas as funções próximas a g . O principal resultado deste capítulo é o Teorema do Desdobramento p-Versal 3.1.8, que diz sobre a existência de desdobramentos “versais” das funções $\pm t^{k+1}$. Na última seção deste capítulo utilizamos o que foi feito no Capítulo 2 e nas seções anteriores do Capítulo 3 para concluir sobre a estrutura local genérica

de algumas curvas e superfícies. Veremos, por exemplo, que a evoluta de uma curva parametrizada regular é, na vizinhança de um ponto singular (que é vértice ordinário da curva dada), o conjunto bifurcação de um desdobramento e, como consequência de resultados que veremos, é difeomorfa a uma cúspide ordinária. Vários outros conjuntos podem ser estudados com a mesma técnica, como por exemplo, a superfície paralela, a ortotômica, a curva dual de uma curva plana, a superfície dual e a tangente desenvolvível de uma curva no espaço, entre outros.

No Capítulo 4 estudamos a demonstração do Teorema do Desdobramento p-Versal 3.1.8 para o caso analítico. Assim, as aplicações abordadas na Seção 3.3 do Capítulo 3 ficam completamente provadas para curvas analíticas. Além disso, como as deformações do Capítulo 2 são polinomiais e, conseqüentemente, analíticas, então obtemos um tratamento completo da estrutura local genérica de curvas analíticas planas e espaciais.

A referência principal deste estudo é o livro de J. W. Bruce e P. J. Giblin ([7]) e outras referências consultadas estão citadas na bibliografia. Os resultados que enunciamos estão no livro [7], ou como proposição/teorema, ou como exercício proposto. Acreditamos que nossa maior contribuição na elaboração deste trabalho é apresentar um texto em português, rico em detalhes e com algumas demonstrações alternativas às do livro, contando com diversos exercícios de [7] feitos com todos os detalhes.

Parte do trabalho desenvolvido nesta dissertação de mestrado pode ser encontrado, de modo mais direto, em [11] disponível no link:

http://www2.fc.unesp.br/revistacqd/v2n2/v2n2_art1.pdf .

Transversalidade

O conceito de transversalidade é uma ideia central e fundamental no estudo da Teoria de Singularidades e, juntamente com os trabalhos de René Thom, mais exatamente o Teorema de Transversalidade de Thom, geram uma gama de aplicações bastante interessantes. Neste capítulo, apresentamos alguns conceitos necessários para se trabalhar com a transversalidade entre variedades e entre aplicações e variedades, fazemos um estudo sobre o Teorema de Transversalidade de Thom e algumas de suas aplicações. Por fim, definimos propriedades abertas, densas e genéricas e provamos que ser transversal a uma variedade é uma propriedade genérica.

Nesta dissertação, trabalhamos com curvas parametrizadas regulares e curvas regulares conforme a nomenclatura clássica de Geometria Diferencial (por exemplo, [10]). No entanto, cometemos um abuso chamando ambas de curvas regulares, porém o contexto deixa claro se tratamos da curva como uma aplicação ou como um conjunto de pontos. Além disso, não nos preocupamos com a classe de diferenciabilidade das aplicações utilizadas neste trabalho. Portanto, todas as aplicações aqui consideradas são *suaves*, isto é, de classe C^∞ .

No que segue sempre que falarmos em variedades diferenciáveis, estaremos considerando-as como subconjuntos do espaço euclidiano \mathbb{R}^n , para algum n . Além disso, nos referimos a uma vizinhança aberta simplesmente como vizinhança. As referências para este capítulo são [7], [10], [14], [16], [17], [18], [19] e [20].

1.1 Variedades suaves

O objetivo desta seção é apresentar conceitos e resultados sobre variedades suaves utilizados no decorrer do capítulo e da dissertação. Os resultados desta seção não são demonstrados aqui por se tratar de resultados clássicos da teoria de variedades diferenciáveis e que tornariam esta seção por demais extensa. A principal referência utilizada foi o Capítulo 4 do livro [7], mas também utilizamos [10] e [19].

Definição 1.1.1 Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação suave definida em um aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Dizemos que f é uma **imersão** (resp. **submersão**) se $df_p : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação injetora (resp. sobrejetora), para todo $p \in U$, onde df_p é a diferencial de f em p .

Considere V um subconjunto de \mathbb{R}^n . Uma **parametrização de dimensão** $m \leq n$ (suave) de V é uma imersão $\varphi : V_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ que é um homeomorfismo sobre a imagem $\varphi(V_0) \subset V$, onde V_0 é um aberto em \mathbb{R}^m . Definimos variedades suaves como segue.

Definição 1.1.2 Uma **variedade suave de dimensão** m em \mathbb{R}^n é um conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ em que para todo $p \in M$ existe um aberto U de \mathbb{R}^n contendo p , tal que $V = U \cap M$ é a imagem de uma parametrização suave de dimensão m , $\varphi : V_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida em um aberto V_0 de \mathbb{R}^m .

Exemplo 1.1.3 (i) Um conjunto aberto U de \mathbb{R}^n é uma variedade suave de dimensão n . De fato, para todo $p \in U$ existe o aberto \mathbb{R}^n contendo p , tal que $U = \mathbb{R}^n \cap U$ é a imagem da aplicação inclusão $i : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $i(x) = x$, a qual é uma parametrização suave de dimensão n .

(ii) Um subespaço vetorial real N de \mathbb{R}^n de dimensão m (como espaço vetorial) é uma variedade suave de dimensão m . De fato, para todo $p \in N$ existe o aberto \mathbb{R}^n contendo p , tal que $N = \mathbb{R}^n \cap N$ é a imagem do isomorfismo $i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ dado por $i(a_1e_1 + \dots + a_me_m) = a_1b_1 + \dots + a_mb_m$, onde $\{e_1, \dots, e_m\}$ é a base canônica de \mathbb{R}^m e $\{b_1, \dots, b_m\}$ é uma base de N . Claramente i é uma parametrização suave de N de dimensão m .

(iii) A esfera unitária n -dimensional $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma variedade suave de dimensão n . Para o caso $n = 2$ ver Exemplo 1 p.65, de [10]. Para o caso geral utilizamos a próxima proposição e o fato de que $S^n = g^{-1}(0)$, onde $g : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $g(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 - 1$.

(iv) Seja $M(s, n)$ o espaço vetorial real das matrizes reais $s \times n$. Denotemos por N_r o subconjunto de $M(s, n)$ formado pelas matrizes $s \times n$ de posto r . O conjunto N_r é uma variedade suave de dimensão $(s + n - r)r$. Para mais detalhes ver Exemplo 3 p. 62, de [19]. \square

Note que o conjunto V da definição acima é um aberto de M com a topologia induzida de \mathbb{R}^n , o qual chamamos de uma **vizinhança parametrizada** do ponto $p \in M$. Em outras palavras, uma variedade suave em \mathbb{R}^n é um conjunto que pode ser coberto por vizinhanças parametrizadas de seus pontos.

Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade suave de dimensão m . Definimos a **codimensão de** M por $\text{cod } M = n - \dim M$.

Uma variedade de dimensão 2 em \mathbb{R}^3 é chamada de **superfície regular** em \mathbb{R}^3 , de dimensão 1 em \mathbb{R}^3 de **curva regular espacial** e de dimensão 1 em \mathbb{R}^2 de **curva regular plana**.

Observamos que dadas M e N variedades suaves de dimensões m e n , respectivamente, o produto cartesiano $M \times N$ também é uma variedade suave e tem dimensão $m + n$.

Seja $p \in \mathbb{R}^n$. Um **vetor em p** é um par $(p, x) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, que denotaremos por x_p , ou simplesmente x quando $p = 0$. O conjunto $\{(p, x) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; x \in \mathbb{R}^n\}$ é chamado de **espaço tangente a \mathbb{R}^n em p** e é denotado por \mathbb{R}_p^n . O vetor x_p é chamado de **vetor tangente a \mathbb{R}^n em p** . Este conjunto, juntamente com as operações

$$x_p + y_p = (x + y)_p \quad \text{e} \quad \lambda(x_p) = (\lambda x)_p,$$

para $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x, y \in \mathbb{R}^n$, formam um espaço vetorial real, o qual é isomorfo a \mathbb{R}^n pelo isomorfismo $(p, x) \mapsto x$. Note que o elemento neutro de \mathbb{R}_p^n com relação à adição é o vetor 0_p . Geometricamente, o vetor x_p pode ser visto como o vetor em \mathbb{R}^n com ponto inicial em p e final em $p + x$. Assim, 0_p é, geometricamente, o próprio p .

Definição 1.1.4 *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ suave, com U um subconjunto aberto de \mathbb{R}^m que contém um ponto $q \in \mathbb{R}^m$ e $f(q) = p$. A **aplicação tangente** de f em q é a aplicação linear $Tf(q) : \mathbb{R}_q^m \rightarrow \mathbb{R}_p^n$ cuja matriz é a matriz jacobiana de f em q . Dessa forma, $Tf(q)(x_q) = (df_q(x))_p$, $\forall x_q \in \mathbb{R}_q^m$.*

Considere $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade suave de dimensão m , $p \in M$ e $V \subset M$ uma vizinhança parametrizada de p que é imagem da parametrização $\varphi : V_0 \rightarrow V$, com $\varphi(q) = p$ e V_0 um aberto de \mathbb{R}^m .

Definição 1.1.5 *O **espaço tangente** M_p (ou $T_p M$) a M em p é a imagem da aplicação tangente $T\varphi(q) : \mathbb{R}_q^m \rightarrow \mathbb{R}_p^n$.*

Note que a dimensão de M_p é igual à dimensão de \mathbb{R}_q^m , ou seja, $\dim M_p = m = \dim M$. O espaço tangente definido acima independe da parametrização (ver [7], Proposição 8.4, p. 208).

Considere τ_j a j -ésima coluna da matriz jacobiana de φ em q , a qual identificamos como um elemento de \mathbb{R}^n . Da mesma forma que $\tau_1, \dots, \tau_m \in \mathbb{R}^n$ geram a imagem de $d\varphi_q$, os vetores $(\tau_1)_p, \dots, (\tau_m)_p \in \mathbb{R}_p^n$ geram a imagem de $T\varphi(q)$, ou seja, geram o espaço tangente M_p .

Definição 1.1.6 *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^s$ uma aplicação suave, com U um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n que contém $p \in \mathbb{R}^n$. O ponto $p \in U$ é chamado de **ponto regular** de f se a diferencial df_p é sobrejetora. Um ponto $c \in \mathbb{R}^s$ é chamado de **valor regular** de f se todo $x \in f^{-1}(c)$ é ponto regular de f .*

Note que se $c \notin \text{Im } f$, então $f^{-1}(c) = \emptyset$ e, conseqüentemente, c é valor regular de f . Portanto, todos os pontos de \mathbb{R}^s que não pertencem a imagem de f são valores regulares.

Note que mostrar que um determinado conjunto é uma variedade suave nem sempre é uma tarefa fácil. Assim, precisamos de resultados que nos digam quando um dado conjunto é uma variedade suave. A próxima proposição diz que se o conjunto que estamos investigando pode ser visto como imagem inversa de um valor regular de uma aplicação suave, então tal conjunto é uma variedade suave.

Proposição 1.1.7 ([7], p. 70 e p. 80) *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ suave, com U um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n contendo p e $f(p) = c$. Se c é valor regular de f , então $M = f^{-1}(c)$ é uma variedade suave de dimensão m em \mathbb{R}^n . Além disso, o espaço tangente a M em p é o núcleo da aplicação tangente $Tf(p) : \mathbb{R}_p^n \rightarrow \mathbb{R}_c^{n-m}$, isto é, $M_p = \{x_p; x \in \text{Ker } df_p\}$, onde Ker denota o núcleo de uma aplicação linear.*

Um pergunta natural que podemos fazer é se vale a recíproca desta proposição, ou seja, toda variedade suave pode ser vista como imagem inversa de um valor regular por uma aplicação suave? A proposição a seguir responde tal questão.

Proposição 1.1.8 ([19], p. 59) *Seja M uma variedade suave de dimensão m de \mathbb{R}^n . Para cada ponto $p \in M$, existe um aberto U em \mathbb{R}^n , contendo p , e uma aplicação suave $g : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ tal que $0 \in \mathbb{R}^{n-m}$ é valor regular de g e $M \cap U = g^{-1}(0)$, ou seja, M é localmente a imagem inversa de um valor regular de uma aplicação suave.*

E se tivermos aplicações entre variedades suaves? Neste caso, o que significaria ser suave? Como seria a aplicação tangente associada? As definições a seguir trazem esses conceitos.

Definição 1.1.9 (i) *Dadas $M \subset \mathbb{R}^n$ e $N \subset \mathbb{R}^s$ variedades suaves, uma aplicação $f : M \rightarrow N$ é **suave** se, para todo $p \in M$, existe $U \subset \mathbb{R}^n$ uma vizinhança de p e uma aplicação suave $F : U \rightarrow \mathbb{R}^s$ com $F|_{M \cap U} = f|_{M \cap U}$.*

(ii) *Dada f como acima, a **aplicação tangente** $Tf(p) : M_p \rightarrow N_{f(p)}$ é definida por $Tf(p)(x_p) = (dF_p(x))_{f(p)}$.*

A aplicação $Tf(p)$ independe da escolha de F (ver [7], p. 209).

Todos os resultados usuais de cálculo e as definições anteriores têm uma versão análoga para aplicações entre variedades suaves e, portanto, embora serão utilizados, não enunciaremos aqui. Por exemplo, se M e N são variedades suaves e $f : M \rightarrow N$ é uma aplicação suave, então um ponto $c \in N$ é dito um **valor regular** de f se a aplicação $Tf(p) : M_p \rightarrow N_c$ é sobrejetora, $\forall p \in f^{-1}(c)$. Também temos um resultado análogo ao da Proposição 1.1.7, ver Exercício 10.(7) p. 211, de [7].

Definição 1.1.10 *Dizemos que um subconjunto A de \mathbb{R}^n tem **medida nula** se, dado $\epsilon > 0$, existe uma coleção enumerável de blocos limitados $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ tais que*

$$(i) A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \text{ e}$$

$$(ii) \sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}(B_k) < \epsilon,$$

onde $\text{vol}(B_k)$ denota o volume do bloco B_k .

A noção de conjunto de medida nula definida acima pode ser estendida para uma variedade suave e, dessa forma, temos o seguinte teorema.

Teorema 1.1.11 (Teorema de Sard) ([7], p.297) *Sejam M, N variedades suaves e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação suave. Os pontos de N que não são valores regulares de f formam um conjunto de medida nula em N .*

1.2 Transversalidade

O objetivo desta seção é apresentar a demonstração e aplicações do Teorema de Transversalidade de Thom. Nossa principal referência é o Capítulo 8 do livro [7], mas também utilizamos [14], [16] e [18].

Um método para obter variedades suaves é considerando a imagem inversa de um valor regular c de uma aplicação suave $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s$. Em vez de considerar um valor regular $c \in \mathbb{R}^s$, podemos considerar uma variedade $N \subset \mathbb{R}^s$ e perguntar quais condições sobre f e N substituem a condição de valor regular a fim de garantir que $f^{-1}(N)$ seja uma variedade suave. A resposta para essa questão é dada na Teorema 1.2.5.

Definição 1.2.1 *Sejam $M \subset \mathbb{R}^n$ e $N \subset \mathbb{R}^s$ variedades suaves, $f : M \rightarrow \mathbb{R}^s$ uma aplicação suave. Se $f(p) \in N$ e a condição*

$$\text{Im } Tf(p) + N_{f(p)} = \mathbb{R}_{f(p)}^s$$

*é satisfeita, onde Im denota o conjunto imagem de uma aplicação linear, então dizemos que f é **transversal a N em p** . Se $f(p) \notin N$, então dizemos que f é **transversal a N em p** . Se f é transversal a N em p para todo $p \in f^{-1}(N)$, dizemos que f é **transversal a N** , e escrevemos $f \pitchfork N$.*

Observação 1.2.2 (i) *Se $f(M) \cap N = \emptyset$, então é imediato da definição que $f \pitchfork N$.*

Em particular, se $\dim M + \dim N < s$, então f é transversal a N se, e somente se, $f(M) \cap N = \emptyset$. De fato, como $\dim \text{Im } Tf(p) \leq \dim M_p = \dim M$ e $\dim N_{f(p)} = \dim N$, temos $\dim(\text{Im } Tf(p) + N_{f(p)}) \leq \dim M + \dim N < s = \dim \mathbb{R}_{f(p)}^s$. Então $f \pitchfork N$ se, e somente se, $f(M) \cap N = \emptyset$.

- (ii) Se f é uma submersão, então f é transversal a qualquer variedade suave $N \subset \mathbb{R}^s$. De fato, como $Tf(p)$ é sobrejetora, para todo $p \in M$, então $\text{Im } Tf(p) = \mathbb{R}_{f(p)}^s$, para todo $p \in M$. Logo, $\text{Im } Tf(p) + N_{f(p)} \supset \mathbb{R}_{f(p)}^s$, para todo $p \in M$ e, conseqüentemente, tem-se $f \pitchfork N$.

Exemplo 1.2.3 Sejam $f : M \rightarrow \mathbb{R}^s$ uma aplicação suave, onde M é uma variedade suave e $N = \{c\} \subset \mathbb{R}^s$. Neste caso, $N_{f(p)} = \{0_{f(p)}\}$, para todo $p \in M$, pois o espaço tangente tem a mesma dimensão da variedade (neste caso 0) e, além disso, é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}_{f(p)}^s$. Portanto, f é transversal a N se, e somente se, $\text{Im } Tf(p) = \mathbb{R}_{f(p)}^s$, para todo $p \in f^{-1}(N) = f^{-1}(c)$ (ou seja, $Tf(p)$ é sobrejetora, para todo $p \in f^{-1}(c)$). Ou seja, f é transversal a $N = \{c\}$ se, e somente se, c é valor regular de f . \square

Exemplo 1.2.4 Defina, para algum $a \in \mathbb{R}$, $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ por $f_a(p) = (p, a)$ e considere $N \subset \mathbb{R}^2$ sendo a parábola $\{(x, x^2); x \in \mathbb{R}\}$.

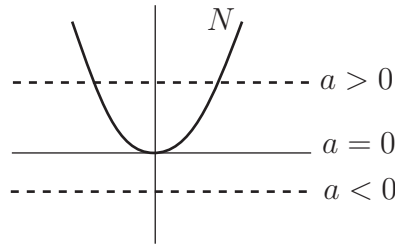


Figura 1.1: Possíveis intersecções entre $f_a(\mathbb{R})$ e N (Exemplo 1.2.4).

Claramente $f_a(\mathbb{R})$ encontra N em:

- (i) dois pontos $(\pm a^{\frac{1}{2}}, a)$ se $a > 0$;
- (ii) um único ponto $(0, 0)$ se $a = 0$;
- (iii) nenhum ponto se $a < 0$.

Se $a < 0$ então $f_a(\mathbb{R}) \cap N = \emptyset$. Assim, pela Observação 1.2.2(i), concluímos que f_a é transversal a N .

Se $a > 0$ então, pelo mesmo argumento acima, concluímos que fora dos pontos $(\pm a^{\frac{1}{2}}, a)$, f_a é transversal a N . Analisemos agora nos pontos $(\pm a^{\frac{1}{2}}, a)$.

A variedade suave N é o traço de $\alpha(t) = (t, t^2)$. Assim, seu espaço tangente em $(\pm a^{\frac{1}{2}}, a)$ é a reta tangente a α em $t = \pm a^{\frac{1}{2}}$. Logo, tal reta é gerada por $(\alpha'(t))_{\alpha(t)} = (1, \pm 2a^{\frac{1}{2}})_{\alpha(\pm a^{\frac{1}{2}})}$. Aqui denotamos $\mathbb{R}\{(1, \pm 2a^{\frac{1}{2}})_{\alpha(\pm a^{\frac{1}{2}})}\}$ como o espaço vetorial real gerado pelo vetor $(1, \pm 2a^{\frac{1}{2}})_{\alpha(\pm a^{\frac{1}{2}})}$. Além disso, temos

$$Tf_a(p)(x_p) = (d(f_a)_p(x))_{f_a(p)} = (Jf_a(p) \cdot (x))_{f_a(p)} = ((1, 0) \cdot (x))_{f_a(p)} = (x, 0)_{f_a(p)}.$$

Logo $Im Tf_a(p) = (\mathbb{R} \times \{0\})_{f_a(p)} = \mathbb{R}\{(1, 0)_{f_a(p)}\}$. Desse modo,

$$Im Tf_a(\pm a^{\frac{1}{2}}) + N_{(\pm a^{\frac{1}{2}}, a)} = \mathbb{R}\{(1, 0)_{(\pm a^{\frac{1}{2}}, a)}\} + \mathbb{R}\{(1, \pm 2a^{\frac{1}{2}})_{(\pm a^{\frac{1}{2}}, a)}\} = \mathbb{R}^2_{(\pm a^{\frac{1}{2}}, a)}.$$

Portanto, se $a > 0$, então f_a é transversal a N .

Se $a = 0$ então, exceto em $(0, 0)$, f_a é transversal a N . Analisemos em $(0, 0)$.

Como vimos anteriormente, $Im Tf_a(0)$ é $\mathbb{R}\{(1, 0)_{(0,0)}\}$. Mas a reta tangente a N em $(0, 0)$ é gerada por $(\alpha'(0))_{(0,0)} = (1, 0)_{(0,0)}$. Portanto,

$$Im Tf_a(0) + N_{(0,0)} = \mathbb{R}\{(1, 0)_{(0,0)}\} \neq \mathbb{R}^2_{(0,0)}.$$

Logo, f_0 não é transversal a N em $(0, 0)$. Note que fazendo uma pequena perturbação em f_0 (ou seja, tomando f_a , com $a \neq 0$ próximo de 0) podemos obter uma aplicação transversal a N . \square

Em resposta à questão feita no início desta seção, temos:

Teorema 1.2.5 ([7], p. 212 e [14], p. 41) Sejam $M \subset \mathbb{R}^{m+k}$, $N \subset \mathbb{R}^s$ variedades suaves, de dimensões m e n , respectivamente, e $f : M \rightarrow \mathbb{R}^s$ uma aplicação suave transversal a N . Então $P = f^{-1}(N)$ é uma variedade suave de mesma codimensão de N e, além disso, para todo $p \in P$, temos $P_p = (Tf(p))^{-1}(N_q)$, onde $q = f(p)$.

Demonstração. Seja $p \in P$. Mostremos que existe uma vizinhança de p em P que é uma variedade suave.

Seja V uma vizinhança de $q = f(p)$ em N , que é a imagem inversa de um valor regular $c \in \mathbb{R}^{s-n}$ por uma aplicação suave $g : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^{s-n}$, ou seja, $V = g^{-1}(c)$. Assim, $f^{-1}(V)$ é uma vizinhança de p em P . Logo, basta mostrar que $f^{-1}(V)$ é uma variedade suave em M .

Observe que

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(c)) = (g \circ f)^{-1}(c).$$

Assim, $f^{-1}(V)$ é uma variedade suave em \mathbb{R}^{m+k} se c é valor regular de $g \circ f$. Logo, basta mostrarmos que c é valor regular de $g \circ f$, ou seja, que

$$T(g \circ f)(x)(M_x) = \mathbb{R}_c^{s-n}, \quad \forall x \in f^{-1}(V),$$

ou ainda, que

$$Tg(y)(Tf(x)(M_x)) = \mathbb{R}_c^{s-n}, \quad \forall x \in f^{-1}(V),$$

com $y = f(x)$.

Como c é valor regular de g , temos

$$Tg(y)(\mathbb{R}_y^s) = \mathbb{R}_c^{s-n}, \quad \forall y \in V. \quad (1.1)$$

Além disso, pela Proposição 1.1.7, temos

$$\text{Ker } Tg(y) = V_y = N_y, \quad \forall y \in V.$$

A última igualdade deve-se ao fato de V ser um aberto de N .

Como f é transversal a N , temos:

$$\text{Im } Tf(x) + N_y = \mathbb{R}_y^s, \quad y = f(x).$$

Logo, se $x \in f^{-1}(V)$ então:

$$\text{Im } Tf(x) + \text{Ker } Tg(y) = \mathbb{R}_y^s.$$

Assim, usando (1.1), temos

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_c^{s-n} &= Tg(y)(\text{Im } Tf(x) + \text{Ker } Tg(y)) = Tg(y)(\text{Im } Tf(x)) + Tg(y)(\text{Ker } Tg(y)) \\ &= Tg(y)(Tf(x)(M_x)). \end{aligned}$$

Como queríamos.

Logo, $f^{-1}(V)$ é uma variedade suave.

Calculemos agora a dimensão de $f^{-1}(V)$. Como $f^{-1}(V) = (g \circ f)^{-1}(c)$, com c valor regular de $g \circ f$, então, pela Proposição 1.1.7 para variedades, $f^{-1}(V)_p = \text{Ker } T(g \circ f)(p)$. Por outro lado, $m = \dim f^{-1}(V)_p + \dim \text{Im } T(g \circ f)(p)$. Como c é valor regular de $g \circ f$, então $\dim \text{Im } T(g \circ f)(p) = s - n$. Logo, $\dim f^{-1}(V) = m + n - s$.

Portanto, $f^{-1}(V)$ é uma variedade suave tal que $\text{cod } f^{-1}(V) = \text{cod } N$ e, conseqüentemente, P também é uma variedade suave tal que $\text{cod } P = \text{cod } N$.

Mostremos agora que para todo $p \in P$, temos $P_p = (Tf(p))^{-1}(N_q)$, onde $q = f(p)$.

Considere o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^s \\ i \uparrow & & \uparrow i \\ P & \xrightarrow{f|_P} & N \end{array}$$

onde i denota a aplicação inclusão. A partir do diagrama acima obtemos um novo diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} M_p & \xrightarrow{Tf(p)} & \mathbb{R}_q^s \\ i \uparrow & & \uparrow i \\ P_p & \xrightarrow{T(f|_P)(p)} & N_q \end{array}$$

Logo, para todo $x_p \in P_p$, temos $Tf(p)(x_p) = T(f|_P)(p)(x_p) \in N_q$, ou seja, $P_p \subset (Tf(p))^{-1}(N_q)$. Para mostrar que $P_p = (Tf(p))^{-1}(N_q)$ basta provar que as di-

mensões são iguais. Para isso, considere a aplicação linear $\overline{Tf(p)} : (Tf(p))^{-1}(N_q) \rightarrow N_q$ dada pela restrição de $Tf(p)$ à $(Tf(p))^{-1}(N_q)$.

Note que $\text{Ker } \overline{Tf(p)} = \text{Ker } Tf(p)$ e $\text{Im } \overline{Tf(p)} = \text{Im } Tf(p) \cap N_q$.

Assim, temos

$$\begin{aligned} \dim (Tf(p))^{-1}(N_q) &= \dim \text{Ker } \overline{Tf(p)} + \dim \text{Im } \overline{Tf(p)} \\ &= m - \dim \text{Im } Tf(p) + \dim(\text{Im } Tf(p) \cap N_q). \end{aligned}$$

Como f é transversal a N , então $\dim(\text{Im } Tf(p) + N_q) = s$. Logo,

$$s = \dim(\text{Im } Tf(p) + N_q) = \dim \text{Im } Tf(p) + \dim N_q - \dim(\text{Im } Tf(p) \cap N_q),$$

ou seja,

$$\dim(\text{Im } Tf(p) \cap N_q) - \dim \text{Im } Tf(p) = n - s.$$

Assim,

$$\dim (Tf(p))^{-1}(N_q) = m + n - s = \dim P_p.$$

Portanto, $P_p = (Tf(p))^{-1}(N_q)$, como queríamos. \square

Note que segue do Exemplo 1.2.3 que, quando $N = \{c\}$, a condição para $f : M \rightarrow \mathbb{R}^s$ ser transversal a N se reduz a c ser valor regular de f . Neste sentido, transversalidade generaliza a ideia de valor regular.

A proposição a seguir trata-se do exercício proposto 8.16(7), p. 216, do livro [7] e será essencial para o próximo capítulo.

Proposição 1.2.6 *Se $f : M \rightarrow \mathbb{R}^s$ é transversal a N e $\dim M + \dim N = s$, então $f^{-1}(N)$ é discreto. Além disso, se M é compacta, então $f^{-1}(N)$ é finito.*

Demonstração. Sejam $x \in f^{-1}(N)$ e $n = \dim N$. Pela Proposição 1.1.8, existe uma vizinhança V de $f(x)$ em \mathbb{R}^s tal que $N \cap V = g^{-1}(c)$, onde $g : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^{s-n}$ e c é valor regular de g . Assim, $x \in f^{-1}(g^{-1}(c)) = (g \circ f)^{-1}(c)$. Além disso, como $f(x) \in g^{-1}(c)$ e c é valor regular de g , então $Tg(f(x))$ é sobrejetora e, pela Proposição 1.1.7, $\text{Ker } Tg(f(x)) = N_{f(x)}$.

Mostremos que $g \circ f$ é um difeomorfismo local em x , ou seja, que $T(g \circ f)(x)$ é um isomorfismo. No entanto, como $\dim \mathbb{R}^{s-n} = \dim \text{Im } T(g \circ f)(x) + \dim \text{Ker } T(g \circ f)(x)$, então basta mostrar que $T(g \circ f)(x)$ é injetora ou sobrejetora, mostremos a sobrejetividade.

Como f é transversal a N e $\dim \text{Im } Tf(x) \leq \dim M$, então

$$s = \dim(\text{Im } Tf(x) + N_{f(x)}) \leq \dim \text{Im } Tf(x) + \dim N_{f(x)} \leq \dim M + \dim N.$$

Mas $\dim M + \dim N = s$, por hipótese. Assim, $\dim \text{Im } Tf(x) = \dim M_x$ e $\text{Im } Tf(x) \cap N_{f(x)} = \{0\}$. Logo, $Tf(x)$ é injetora e $\text{Im } Tf(x) \cap \text{Ker } Tg(f(x)) = \{0\}$.

Como $\mathbb{R}_{f(x)}^s = \text{Im } Tf(x) \oplus \text{Ker } Tg(f(x))$ e $Tg(f(x))$ é sobrejetora, então $\text{Im } T(g \circ f)(x) = Tg(f(x))[\text{Im } Tf(x)] = \mathbb{R}_c^{s-n}$, ou seja, $T(g \circ f)(x)$ é sobrejetora. Portanto, $T(g \circ f)(x)$ é isomorfismo e, conseqüentemente, $g \circ f$ é difeomorfismo em um aberto U_0 contendo x .

Seja $U = f^{-1}(V) \subset M$, o qual é não vazio, pois $x \in U$, já que $f(x) \in V$. Como f é contínua, então U é uma vizinhança de x em M . Daí,

$$\begin{aligned} (U \cap U_0) \cap f^{-1}(N) &= (f^{-1}(V) \cap f^{-1}(N)) \cap U_0 = (f^{-1}(N \cap V)) \cap U_0 \\ &= (f^{-1}(g^{-1}(c))) \cap U_0 = ((g \circ f)^{-1}(c)) \cap U_0 = \{x\}, \end{aligned}$$

pois $g \circ f$ é bijetora em U_0 . Portanto, $f^{-1}(N)$ é discreto.

Suponhamos que M é compacto. Se $f^{-1}(N)$ é infinito, então pelo Teorema 8 de [18], p. 15, que diz que todo subconjunto infinito limitado de \mathbb{R}^n admite pelo menos um ponto de acumulação, concluimos que $f^{-1}(N)$ possui pelo menos um ponto de acumulação, o que contradiz o fato de $f^{-1}(N)$ ser discreto. Portanto, $f^{-1}(N)$ é finito. \square

Definição 1.2.7 *Sejam $N, M \subset \mathbb{R}^n$ variedades suaves. Se $N_p + M_p = \mathbb{R}_p^n$ dizemos que N e M são **transversais em** $p \in N \cap M$. Dizemos que N é **transversal a** M se N é transversal a M para todo $p \in N \cap M$ ou se $N \cap M = \emptyset$, e denotamos por $N \pitchfork M$.*

A definição acima é apenas um caso particular da definição de transversalidade vista anteriormente. De fato, se tomarmos $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ como a aplicação inclusão e voltarmos a definição de $f \pitchfork N$ temos

$$f \pitchfork N \Leftrightarrow \text{Im } Tf(p) + N_{f(p)} = \mathbb{R}_{f(p)}^n \Leftrightarrow \text{Im } Tf(p) + N_p = \mathbb{R}_p^n,$$

e como f é inclusão temos $\text{Im } Tf(p) = M_p$, logo

$$f \pitchfork N \Leftrightarrow M_p + N_p = \mathbb{R}_p^n; \quad p \in N \cap M \Leftrightarrow N \pitchfork M.$$

Exemplo 1.2.8 *Sejam $M = \{(x, 0); x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ (o eixo x) e $N = \{(0, y); y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ (o eixo y). O único ponto de intersecção entre M e N é $(0, 0)$. Nesse ponto, os espaços tangentes a M e N são gerados por $(1, 0)$ e $(0, 1)$, respectivamente, e portanto sua soma dá \mathbb{R}^2 . Então M é transversal a N em $(0, 0)$ e, portanto, M e N são transversais.*

Agora considere $M = \{(x, 0, 0); x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$ (o eixo x) e $N = \{(0, y, 0); y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$ (o eixo y). Novamente, o único ponto de intersecção entre M e N é $(0, 0)$, mas, neste caso, $\mathbb{R}\{(1, 0, 0)\} + \mathbb{R}\{(0, 1, 0)\} \neq \mathbb{R}^3$, ou seja, M não é transversal a N em $(0, 0)$ e, portanto, M e N não são transversais. \square

A Figura 1.2, mostra alguns exemplos geométricos de variedades suaves transversais e não transversais.

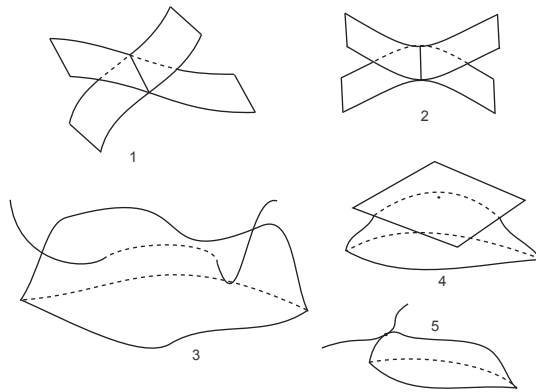


Figura 1.2: 1 e 3 são transversais, 2, 4 e 5 não são transversais.

Dos exemplos dessa seção podemos perceber que a interseção não transversal é muito rara. Em cada caso uma pequena deformação nas variedades torna tal interseção transversal. O propósito do próximo resultado é justificar tais afirmações.

O teorema a seguir nos permitirá provar o resultado de que “a maioria” das aplicações $f : M \rightarrow \mathbb{R}^s$ são transversais a uma variedade $N \subset \mathbb{R}^n$ (Proposição 1.3.3). Nessa seção, usaremos o termo “para quase todo” para dizer que algo ocorre *a menos de um conjunto de medida nula*.

Como vimos, a noção de transversalidade generaliza a ideia de valor regular. Desse modo, o Teorema de Sard (Teorema 1.1.11) será um resultado importante nesta seção. No Teorema de Sard, dada $f : M \rightarrow \mathbb{R}^s$, prova-se que quase todos os pontos de \mathbb{R}^s são valores regulares de f . O resultado que estamos interessados é de que, dada a variedade suave N em \mathbb{R}^s , quase todas as aplicações $f : M \rightarrow \mathbb{R}^s$ são transversais a N . O seguinte teorema é fundamental para obtenção de tal resultado.

O Lema de Transversalidade de Thom abaixo pode ser abordado de maneira mais geral, como podemos ver, por exemplo, nos livros [14], p. 49 e [16]. No entanto, o modo com que abordamos tal resultado é o suficiente para nosso estudo.

Teorema 1.2.9 (Lema de Transversalidade de Thom) ([7], p. 217 e [14], p. 49) *Sejam $M \subset \mathbb{R}^n$, $N \subset \mathbb{R}^s$ variedades suaves, $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto e $G : M \times U \rightarrow \mathbb{R}^s$ uma aplicação suave transversal a N . Então, para quase todo $a \in U$, a aplicação $G_a : M \rightarrow \mathbb{R}^s$ dada por $G_a(x) = G(x, a)$ é transversal a N .*

Demonstração. Como G é transversal a N então, pelo Teorema 1.2.5, $P = G^{-1}(N)$ é uma variedade suave em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Considere $\pi : P \rightarrow U$ a projeção natural na segunda componente. Afirmamos que $a \in U$ é valor regular de π se, e somente se, G_a é transversal a N . Supondo esta afirmação verdadeira, o resultado segue do Teorema de Sard.

Mostremos a afirmação.

Como G é transversal a N , então para todo $(x, a) \in M \times U$ e $y = G(x, a) \in N$, temos

$$TG(x, a)(M_x \times U_a) + N_y = \mathbb{R}_y^s. \quad (1.2)$$

Dizer que G_a é transversal à N , significa que para todo $x \in M$ com $y = G_a(x) \in N$, temos

$$TG_a(x)(M_x) + N_y = \mathbb{R}_y^s,$$

o que pode ser escrito como

$$TG(x, a)(M_x \times \{0_a\}) + N_y = \mathbb{R}_y^s, \quad (1.3)$$

pois, como $d(G_a)_x(v) = d(G_a)_x(\alpha'(0)) = (G_a \circ \alpha)'(0)$ e $G_a(\alpha(t)) = G(\alpha(t), a) = G(\gamma(t))$, onde $\gamma(t) = (\alpha(t), a)$ para alguma curva regular $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ tal que $\alpha(0) = x$ e $\alpha'(0) = v$, então

$$\begin{aligned} TG(x, a)(v, 0) &= (dG_{(x,a)}(v, 0))_y = (dG_{(x,a)}(\gamma'(0)))_y = ((G \circ \gamma)'(0))_y \\ &= ((G_a \circ \alpha)'(0))_y = (d(G_a)_x(v))_y = TG_a(x)(v). \end{aligned}$$

Por outro lado, dizer que a é valor regular de π significa que, para todo $(x, a) \in P$, temos

$$T\pi(x, a)(P_{(x,a)}) = U_a,$$

o que equivale a

$$M_x \times \{0_a\} + P_{(x,a)} = M_x \times U_a, \quad (1.4)$$

ou seja, que $M \times \{a\}$ é transversal a P , pois como π restrição de uma aplicação linear, então $T\pi(x, a) = \pi$ e, assim, $\pi(P_{(x,a)}) = U_a$ equivale a $M_x \times \{0_a\} + P_{(x,a)} = M_x \times U_a$.

Portanto, para provar a afirmação basta provar que a Equação (1.3) é equivalente à Equação (1.4).

(1.4) \Rightarrow (1.3): Aplicando $TG(x, a)$ na Equação (1.4), temos

$$TG(x, a)(M_x \times \{0_a\}) + TG(x, a)(P_{(x,a)}) = TG(x, a)(M_x \times U_a).$$

Pelo Teorema 1.2.5, $P_{(x,a)} = (TG(x, a))^{-1}(N_y)$. Dessa forma,

$$TG(x, a)(P_{(x,a)}) = TG(x, a)((TG(x, a))^{-1}(N_y)) \subset N_y.$$

Note que não podemos garantir a igualdade pois não sabemos se $TG(x, a)$ é sobrejetora. Assim, concluímos que

$$TG(x, a)(M_x \times \{0_a\}) + N_y = TG(x, a)(M_x \times U_a) + N_y = \mathbb{R}_y^s,$$

onde a última igualdade deve-se a Equação (1.2), ou seja, a Equação (1.3) é válida.

(1.3) \Rightarrow (1.4): Note que $M_x \times \{0_a\} + P_{(x,a)} \subset M_x \times U_a$. Mostremos a inclusão contrária.

Seja $(u, v) \in M_x \times U_a$. Assim, $TG(x, a)(u, v) \in \mathbb{R}_y^s$. Daí, pela Equação (1.3), podemos escrever

$$TG(x, a)(u, v) = TG(x, a)(\bar{u}, 0) + \bar{v},$$

onde $\bar{u} \in M_x$ e $\bar{v} \in N_y$. Logo,

$$\bar{v} = TG(x, a)(u, v) - TG(x, a)(\bar{u}, 0) = TG(x, a)(u - \bar{u}, v),$$

ou seja, $(u - \bar{u}, v) \in (TG(x, a))^{-1}(N_y) = P_{(x,a)}$. Assim, $(u, v) = (\bar{u}, 0) + (u - \bar{u}, v)$, onde $(\bar{u}, 0) \in M_x \times \{0_a\}$ e $(u - \bar{u}, v) \in P_{(x,a)}$, ou seja, $M_x \times U_a \subset M_x \times \{0_a\} + P_{(x,a)}$. Logo, concluímos que a Equação (1.4) é válida.

Portanto, as Equações (1.3) e (1.4) são equivalentes e, conseqüentemente, a afirmação está provada. \square

Seja $F : M \times U \rightarrow \mathbb{R}^s$ uma aplicação suave, com M uma variedade suave e U um aberto de \mathbb{R}^m , para algum $m \geq 1$. Dizemos que F é uma **família de aplicações suaves** e para cada **parâmetro** $a \in U$, denotamos por F_a a aplicação $F(_, a) : M \rightarrow \mathbb{R}^s$.

Observamos que o Lema de Transversalidade de Thom é o tipo de resultado que queríamos. De fato, suponhamos que $f : M \rightarrow \mathbb{R}^s$ não é transversal a N . Se f for membro de uma família de aplicações $G : M \times U \rightarrow \mathbb{R}^s$ transversal a N , com $G_0 = f$, então o Lema de Transversalidade de Thom garante que, arbitrariamente próximo de 0, existe $a \in U$ tal que G_a é transversal a N . Geralmente, nas aplicações do Lema de Transversalidade de Thom, construímos G de modo que seja uma submersão e, portanto, pela Observação 1.2.2 (ii), transversal a qualquer variedade N em \mathbb{R}^s .

Vejamos algumas aplicações do Lema de Transversalidade de Thom.

Proposição 1.2.10 ([7], p. 218) *Sejam M e N variedades suaves em \mathbb{R}^n . Para quase todo $a \in \mathbb{R}^n$, a variedade $a + M$ é transversal a N .*

Demonstração. Considere $G : M \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $G(x, a) = a + x$. Claramente G é submersão (pois sua matriz jacobiana tem dois blocos de ordem n formados por matrizes identidade). Assim, pela Observação 1.2.2 (ii), G é transversal a N . Logo, pelo Lema de Transversalidade de Thom, para quase todo $a \in \mathbb{R}^n$ temos $G_a : M \rightarrow \mathbb{R}^n$, dada por $G_a(x) = G(x, a)$, transversal a N . Como $Im TG_a(x) = (M + a)_{G_a(x)} = (G_a(M))_{G_a(x)}$, concluímos que $G_a(M) = a + M$ é transversal a N , como queríamos. \square

Se M e N são variedades suaves em \mathbb{R}^3 que não se intersectam transversalmente então, pela proposição acima, por uma translação arbitrariamente pequena de uma delas, podemos garantir intersecção transversal.

Na próxima aplicação do Lema de Transversalidade de Thom estamos, com abuso de notação, considerando a associação biunívoca entre matrizes e transformações lineares. Denotamos por $M(s, n)$ o espaço das matrizes reais de ordem $s \times n$. Se $A \in M(s, n)$, então $A(x) \in \mathbb{R}^s$ é a imagem de $x \in \mathbb{R}^n$ pela transformação linear cuja matriz associada, com relação as respectivas bases canônicas dos espaços considerados, é a matriz A .

Proposição 1.2.11 ([7], p. 218) *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s$, $s \geq 2n$, uma aplicação suave. Para cada $A \in M(s, n)$ defina $F_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s$ por $F_A(x) = f(x) + A(x)$. Então, para quase todo $A \in M(s, n)$, a aplicação F_A tem posto máximo, ou seja, F_A é uma imersão.*

Demonstração. Seja $F : \mathbb{R}^n \times M(s, n) \rightarrow \mathbb{R}^s$ dada por $F(x, A) = F_A(x) = f(x) + A(x)$. Considere $G : \mathbb{R}^n \times M(s, n) \rightarrow M(s, n)$ dada por $G(x, A) = d(F_A)_x = df_x + A$.

Então, a matriz jacobiana de G em (x, A) terá um bloco de ordem sn sendo a matriz identidade. Logo, a matriz jacobiana de G em (x, A) tem posto máximo sn , ou seja, G é uma submersão.

Considere $N_r = \{X \in M(s, n); \text{posto}(X) = r\}$, o qual é uma variedade suave de dimensão $(s + n - r)r$ em $M(s, n) \simeq \mathbb{R}^{sn}$ (Exemplo 1.1.3(iv)). Como G é submersão então, pela Observação 1.2.2 (ii), G é transversal a cada N_r , com $0 \leq r \leq n$. Assim, pelo Lema de Transversalidade de Thom, para quase todo $A \in M(s, n)$, a aplicação $G_A : \mathbb{R}^n \rightarrow M(s, n)$ dada por $G_A(x) = d(F_A)_x$ é transversal a N_r , para cada r com $0 \leq r \leq n$.

Se $r \leq n - 1$, temos $\dim N_r = (s + n - r)r \leq (s + 1)(n - 1)$. Assim,

$$\dim \mathbb{R}^n + \dim N_r \leq n + sn - s + n - 1 = sn - s + 2n - 1 < sn = \dim M(s, n).$$

Logo, pela Observação 1.2.2 (i) para $d(F_A)$, temos $d(F_A)(\mathbb{R}^n) \cap N_r = \emptyset$, para $r \leq n - 1$, ou seja, $d(F_A)(\mathbb{R}^n) \subset N_n$. Portanto, F_A tem posto n , ou seja, F_A é uma imersão. \square

Segue da proposição acima que, arbitrariamente próxima da matriz nula, existe $A \in M(s, n)$ tal que F_A é uma imersão. Tal F_A é uma aproximação de f em qualquer subconjunto compacto de \mathbb{R}^n . Em particular, tomando $n = 1$ e $s = 2$ ou 3 , adicionando termos lineares às componentes de qualquer curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^s$, $s = 2, 3$, quase sempre obtemos uma curva regular.

Note que na proposição anterior usamos uma extensão do Lema de Transversalidade de Thom. Trocamos uma variedade suave N por um número finito de variedades N_r . O que nos permitiu fazer essa extensão foi o fato de que união finita de conjuntos de medida nula tem medida nula. De forma mais geral, podemos estender o Lema de Transversalidade de Thom para uma coleção enumerável de variedades N_i em \mathbb{R}^s , uma vez que a união enumerável de conjuntos de medida nula tem medida nula. Veremos mais aplicações do Lema de Transversalidade de Thom na Seção 3.3.3.

1.3 Propriedades abertas, densas e genéricas

Nesta seção veremos a definição de propriedade aberta, densa e genérica no conjunto das aplicações suaves definidas entre variedades suaves. Nosso objetivo é mostrar que a transversalidade é uma propriedade genérica. Como antes, a principal referência para esta seção é o Capítulo 8 de [7].

Definição 1.3.1 *Sejam $M \subset \mathbb{R}^n$ e $N \subset \mathbb{R}^s$ variedades suaves e \mathcal{P} uma propriedade no conjunto das aplicações suaves de M em N .*

- (i) \mathcal{P} é dita **densa** se, dada uma aplicação suave $f : M \rightarrow N$, existe uma família de aplicações suaves $F : M \times U \rightarrow N$, com U uma vizinhança de 0 em \mathbb{R}^m (para algum $m \geq 1$), tal que $F_0 = f$ (isto é, $F(x, 0) = f(x)$) e existe uma sequência (u_n) em U , com $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, de forma que $F_n = F(_, u_n)$ possui a propriedade \mathcal{P} , para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (ii) \mathcal{P} é dita **aberta** se, para toda aplicação suave $f : M \rightarrow N$ com a propriedade \mathcal{P} e para toda família de aplicações suaves $F : M \times U \rightarrow N$, onde U é uma vizinhança qualquer de 0 em \mathbb{R}^m (para algum $m \geq 1$), com $F_0 = f$, existe uma vizinhança $U' \subset U$ de 0 tal que $F_a = F(_, a)$ tem a propriedade \mathcal{P} , para todo $a \in U'$.
- (iii) \mathcal{P} é dita **genérica** se, \mathcal{P} é aberta e densa.

Intuitivamente, uma propriedade \mathcal{P} é *densa* se toda aplicação f pode ser arbitrariamente aproximada (no sentido da definição (i) acima) por uma aplicação que tenha a propriedade \mathcal{P} e, uma propriedade \mathcal{P} é *aberta* se, dada uma aplicação f que satisfaz a propriedade \mathcal{P} , então qualquer outra aplicação g suficientemente próxima de f (no sentido da definição (ii) acima) satisfaz a propriedade \mathcal{P} .

Observação 1.3.2 *As definições de propriedade densa, aberta e genérica podem ser tratadas da maneira usual que vemos nos livros de Variedades Diferenciáveis, onde consideramos um subconjunto X de $C^\infty(M, N)$ (espaço das aplicações suaves de M em N munido com a topologia de Whitney) constituído pelas aplicações que satisfazem determinada propriedade. Então a propriedade é densa ou aberta, se X for denso ou aberto em $C^\infty(M, N)$, com relação à topologia considerada.*

Dadas $M \subset \mathbb{R}^n$ e $N \subset \mathbb{R}^s$ variedades suaves, podemos nos perguntar se existem muitas funções $f : M \rightarrow \mathbb{R}^s$ que são transversais a N . A proposição a seguir responde tal questão e trata-se do exercício proposto 8.20(7), p. 220, do livro [7].

Proposição 1.3.3 *Sejam $M \subset \mathbb{R}^n$ e $N \subset \mathbb{R}^s$ variedades suaves. Considere o conjunto das aplicações suaves $f : M \rightarrow \mathbb{R}^s$. A propriedade “ f é transversal a N ” é densa.*

Demonstração. Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}^s$ suave e considere $G : M \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^s$ dada por $G(x, a) = f(x) + a$. A matriz jacobiana de G em (x, a) é

$$\left(\text{Jac}f(x) : Id_s \right)_{s \times (n+s)},$$

a qual tem posto s . Portanto, G é submersão e, pela Observação 1.2.2(ii), G é transversal a N . Note que $G_0 = f$.

Pelo Lema de Transversalidade de Thom, para quase todo $a \in \mathbb{R}^s$, G_a é transversal a N . Portanto, existe $a \in \mathbb{R}^s$ arbitrariamente próximo de 0 tal que G_a é transversal a N , ou seja, a propriedade “ f é transversal a N ” é densa. \square

Uma vez que a propriedade “ f é transversal a N ” é densa, uma pergunta natural é se tal propriedade é aberta e conseqüentemente genérica. Veremos na proposição a seguir, uma situação em que a resposta para tal pergunta é positiva.

Proposição 1.3.4 ([7], p. 223) *Sejam $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade suave compacta e $N \subset \mathbb{R}^s$ uma variedade suave que é um subconjunto fechado de \mathbb{R}^s . Considere o conjunto das aplicações suaves $f : M \rightarrow \mathbb{R}^s$. A propriedade “ f é transversal a N ” é aberta.*

Demonstração. Sejam $f : M \rightarrow \mathbb{R}^s$ uma aplicação suave e transversal a N e $F : M \times U \rightarrow \mathbb{R}^s$ uma família de aplicações suaves, com $F_0 = f$ e U uma vizinhança de 0 em \mathbb{R}^m (para algum $m \geq 1$).

Primeiramente mostremos que, para todo $(x', 0) \in M \times U$, existe uma vizinhança V de $(x', 0)$ em $M \times U$ tal que F_a é transversal a N em x , para todo $(x, a) \in V$.

Seja $(x', 0) \in M \times U$. Se $f(x') \notin N$, então considere W uma vizinhança de $f(x')$ em \mathbb{R}^s tal que $W \cap N = \emptyset$ (existe W pois N é fechado em \mathbb{R}^s). Considere o aberto $V = F^{-1}(W)$, o qual é uma vizinhança de $(x', 0)$ em $M \times U$. Então F_a é transversal a N em x , para todo $(x, a) \in V$, uma vez que, neste caso, $W \cap N = \emptyset$.

Suponhamos que $f(x') \in N$. Pela Proposição 1.1.8, existe uma vizinhança W de $f(x')$ em \mathbb{R}^s tal que $W \cap N = g^{-1}(0)$ para alguma aplicação $g : W \rightarrow \mathbb{R}^r$ suave, com 0 valor regular de g e $r = s - \dim N$. Consideremos o aberto $V_1 = F^{-1}(W)$, o qual é uma vizinhança de $(x', 0)$ em $M \times U$.

Neste caso, $g \circ F$ restrita a $(M \times \{0\}) \cap V_1$ é submersão em $(x', 0)$. De fato, considere $\pi_1 : M \times U \rightarrow M$ a projeção natural na primeira componente. Então,

$$\begin{aligned} T(g \circ F)(x', 0)((M \times \{0\}) \cap V_1)_{(x', 0)} = \mathbb{R}_0^r &\Leftrightarrow T(g \circ F_0)(x')(\pi_1(V_1)_{x'}) = \mathbb{R}_0^r \\ &\Leftrightarrow Tg(f(x'))(Tf(x')(\pi_1(V_1)_{x'})) = \mathbb{R}_0^r \end{aligned} \quad (1.5)$$

Note que $f(x') \in N \cap W = g^{-1}(0)$, dessa forma, $f(x') \in g^{-1}(0)$. Como π_1 é uma aplicação aberta, então $\pi_1(V_1)$ é um conjunto aberto em M e, assim, $M_{x'} = \pi_1(V_1)_{x'}$. Como f é transversal a N , então

$$Tf(x')(\pi_1(V_1)_{x'}) + N_{f(x')} = \mathbb{R}_{f(x')}^s.$$

Aplicando $Tg(f(x'))$ na equação acima, temos

$$Tg(f(x'))(Tf(x')(\pi_1(V_1)_{x'})) + Tg(f(x'))(N_{f(x')}) = Tg(f(x'))(\mathbb{R}_{f(x')}^s).$$

Como W é aberto, então $W_{f(x')} = \mathbb{R}_{f(x')}^s$. Além disso, $N \cap W$ é vizinhança de $f(x')$ em N , logo, $N_{f(x')} = g^{-1}(0)_{f(x')} = \text{Ker } Tg(f(x'))$, ou seja, $Tg(f(x'))(N_{f(x')}) = \{0\}_0$. Assim, usando o fato de que $Tg(f(x'))$ é sobrejetora, uma vez que 0 é valor regular de g , temos

$$Tg(f(x'))(Tf(x')(\pi_1(V_1)_{x'})) = \mathbb{R}_0^r.$$

Portanto, por (1.5), $g \circ F$ restrita a $(M \times \{0\}) \cap V_1$ é submersão em $(x', 0)$, ou seja, $T(g \circ F_0)(x')$ é sobrejetora. Então existe uma vizinhança V de $(x', 0)$, com $V \subset V_1$, tal que $T(g \circ F_a)(x)$ é sobrejetora, para todo $(x, a) \in V$. Mostremos que F_a é transversal a N em x , para todo $(x, a) \in V$.

Podemos supor que $F_a(x) \in N$. Como $\text{Im } TF_a(x) + N_{F_a(x)} \subset \mathbb{R}_{F_a(x)}^s$, então basta mostrar a inclusão contrária. Note que, como $(x, a) \in V \subset V_1 = F^{-1}(W)$, então $F_a(x) \in N \cap W = g^{-1}(0)$ e como 0 é valor regular de g , então, $Tg(F_a(x))$ é sobrejetora.

Como $g \circ F_a$ é submersão em x , para todo $(x, a) \in V$, então

$$\mathbb{R}_0^r = \text{Im } T(g \circ F_a)(x) = Tg(F_a(x))(\text{Im } TF_a(x)).$$

Sendo $Tg(F_a(x))$ sobrejetora, concluímos das igualdades acima que

$$Tg(F_a(x))(\text{Im } TF_a(x)) = \mathbb{R}_0^r = Tg(F_a(x))(W_{F_a(x)}) = Tg(F_a(x))(\mathbb{R}_{F_a(x)}^s). \quad (1.6)$$

A última igualdade segue do fato de W ser um aberto em \mathbb{R}^s .

Seja $u \in \mathbb{R}_{F_a(x)}^s$. Aplicando $Tg(F_a(x))$ temos $v = Tg(F_a(x))(u) \in \mathbb{R}_0^r$. Por outro lado, por (1.6) existe $w \in \text{Im } TF_a(x)$ tal que $Tg(F_a(x))(w) = v$. Logo, $Tg(F_a(x))(u) - Tg(F_a(x))(w) = 0$, ou seja, $Tg(F_a(x))(u - w) = 0$, ou ainda, $u - w \in \text{Ker } Tg(F_a(x)) = g^{-1}(0)_{F_a(x)} = N_{F_a(x)}$.

Portanto, $u = w + (u - w)$, com $w \in \text{Im } TF_a(x)$ e $u - w \in N_{F_a(x)}$ e, conseqüentemente

$$\text{Im } TF_a(x) + N_{F_a(x)} = \mathbb{R}_{F_a(x)}^s.$$

Logo, mostramos que, para todo $(x', 0) \in M \times U$, existe uma vizinhança V de $(x', 0)$ em $M \times U$ tal que F_a é transversal a N em x , para todo $(x, a) \in V$.

Dessa forma, os conjuntos V 's como acima formam uma cobertura aberta para $M \times \{0\}$, o qual é compacto e, portanto, admite uma subcobertura finita, digamos V_1, \dots, V_t . Considere $\pi : M \times U \rightarrow U$ a projeção natural na segunda componente. Como o conjunto $\pi(V_i)$ é aberto, $i = 1, \dots, t$, (já que π é uma aplicação aberta) então $\bigcap_{i=1}^t \pi(V_i)$ é uma vizinhança U' de 0 , com F_a sendo transversal a N para todo $a \in U'$, ou seja, a propriedade “ f é transversal a N ” é aberta. \square

A observação a seguir discute sobre a necessidade das condições impostas sobre M e N na proposição anterior (exercícios propostos 8.24(1) e 8.24(2), p.224, em [7]).

Observação 1.3.5 Na Proposição 1.3.4, nenhuma das condições de N ser fechada em \mathbb{R}^s e M ser compacta em \mathbb{R}^n pode ser descartada. De fato,

(i) Considere $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\} = S^1 \subset \mathbb{R}^2$ (a qual é compacta) e $N = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1^2 + x_2^2 < 1 \text{ e } x_3 = 0\}$ (a qual não é fechada em \mathbb{R}^3).

Mostremos que a propriedade \mathcal{P} : “ f é transversal a N ” não é aberta.

Tome, por exemplo, $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(x, y) = (x, y, 0)$. Note que f tem a propriedade \mathcal{P} , pois $f(M) \cap N = \emptyset$.

Seja $F : M \times (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $F(p, a) = f(p) + (a, 0, 0)$. Geometricamente, escrevendo $F_a(p) = F(p, a)$, então F_a é uma translação da circunferência $f(M)$ no plano x_1x_2 , de forma que, para $a \neq 0$, a intersecção entre $F_a(M)$ e N não é vazia. (Figura 1.3)

Dado $a \in (-1, 1)$ não nulo, seja $p \in M$ tal que $F_a(p) \in F_a(M) \cap N$. Assim, como $N_{F_a(p)}$ é o plano $x_3 = 0$ e $Im TF_a(p)$ é uma reta contida no plano $x_3 = 0$, então $Im TF_a(p) + N_{F_a(p)} \not\subset \mathbb{R}^3_{F_a(p)}$, ou seja, F_a não é transversal a N em p .

Portanto, F_a não tem a propriedade \mathcal{P} e, conseqüentemente, \mathcal{P} não é aberta.

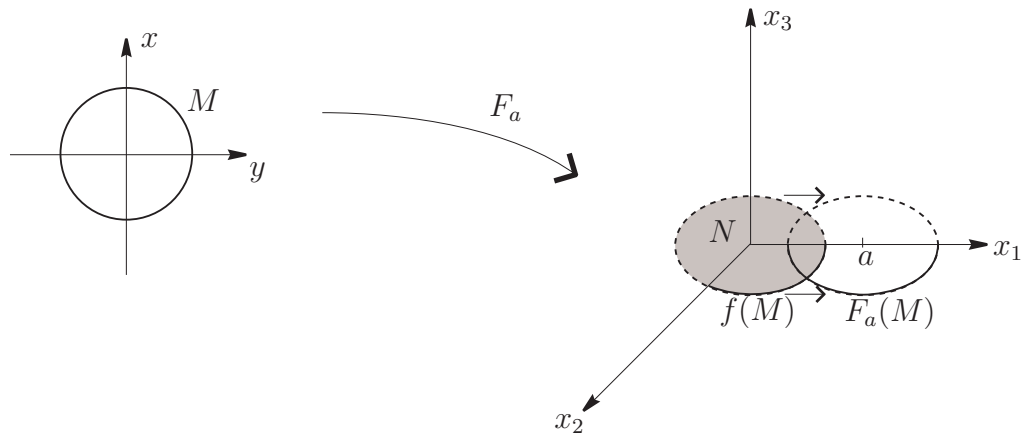


Figura 1.3: Importância da condição N ser fechada na Proposição 1.3.4.

(ii) Tomando $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$ (a qual não é compacta), $N = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1^2 + x_2^2 = 1 \text{ e } x_3 = 0\}$ (a qual é fechada em \mathbb{R}^3) e $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(x, y) = (x, y, 0)$, de modo análogo ao item anterior, concluímos que a propriedade \mathcal{P} : “ f é transversal a N ” não é aberta. Neste caso, F_a é uma translação do interior da circunferência N no plano x_1x_2 , de forma que, para $a \neq 0$, a intersecção entre $F_a(M)$ e N não é vazia. (Figura 1.4)

Juntando as duas proposições anteriores obtemos o seguinte resultado.

Corolário 1.3.6 Sejam $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade suave compacta e $N \subset \mathbb{R}^s$ uma variedade suave a qual é um subconjunto fechado de \mathbb{R}^s . Considere o conjunto das aplicações suaves $f : M \rightarrow \mathbb{R}^s$. A propriedade “ f é transversal a N ” é genérica.

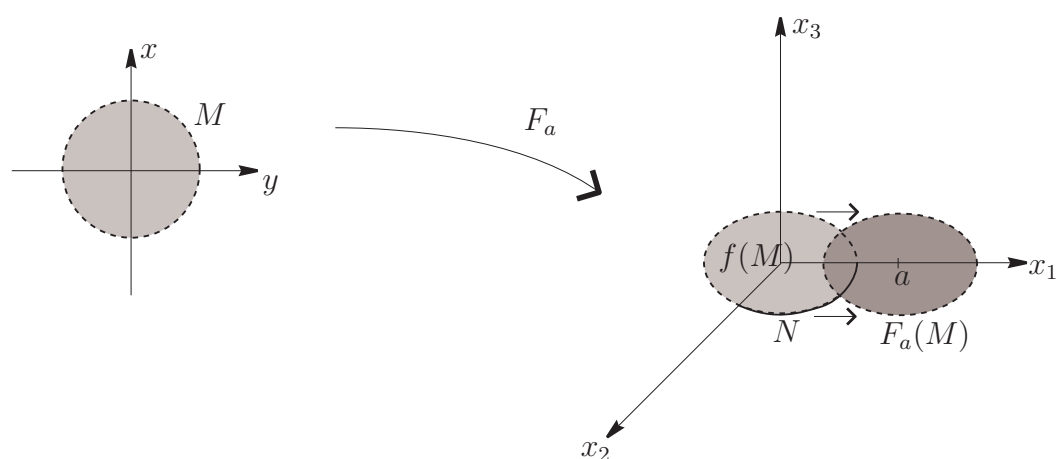


Figura 1.4: Importância da condição M ser compacta na Proposição 1.3.4.

Genericidade

Neste capítulo nosso objetivo é obter propriedades genéricas de curvas planas e espaciais. Para isso, dada uma curva plana ou espacial, vamos obter uma nova curva, em algum espaço Euclidiano, que preserve informações infinitesimais e que forneça mais claramente informações sobre a geometria da curva original. Para obter essa nova curva, faremos uso de uma ferramenta chamada aplicação de Monge-Taylor. Usando tais curvas e o Lema de Transversalidade de Thom 1.2.9 e a Proposição 1.3.4, provaremos que algumas propriedades de curvas planas e espaciais regulares, que são amplamente utilizadas no estudo da estrutura local de alguns objetos, como fazemos na Seção 3.3 desta dissertação, são genéricas no conjunto de tais curvas (Teorema 2.2.8, Corolários 2.2.9 e 2.3.4 e Proposições 2.3.2, 2.3.3 e 2.3.6). No entanto, para isso precisamos de alguns elementos da Teoria de Singularidades, os quais apresentamos na seção a seguir.

Seja $\gamma : J \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ uma curva regular, onde $J \subset \mathbb{R}$ é um aberto. Usando notações usuais de Geometria Diferencial (como em [10], por exemplo) denotaremos por κ a função curvatura, por τ a função torção, por $T(t)$ o vetor tangente unitário em t , por $N(t)$ o vetor normal unitário em t e por $B(t)$ o vetor binormal unitário em t da curva γ . Para utilizar a Proposição 1.3.4, precisaremos que as curvas que trabalhamos estejam definidas em variedades compactas. Assim, o mais natural seria trabalhar com curvas definidas em um intervalo fechado $[a, b]$. No entanto, um intervalo fechado $[a, b]$ não é uma variedade como definimos no primeiro capítulo deste trabalho. Para resolver este problema trabalharemos com curvas definidas em S^1 , as quais chamamos de *curva compacta*. Neste capítulo, exceto na próxima seção, consideramos aplicações definidas em subconjuntos abertos e conexos do círculo unitário, $\gamma : I \subset S^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$. Usando o homeomorfismo local $\theta(s) = (\cos s, \sin s)$, dizemos que γ é uma curva regular se $\gamma \circ \theta$ é uma curva regular em cada componente conexa de $\theta^{-1}(I)$. Assim temos, sob certas condições (regular em \mathbb{R}^2 e regular com curvatura não nula em \mathbb{R}^3), um vetor tangente e um normal para cada parâmetro $t \in I$ bem definidos ($T_\gamma = T_{\gamma \circ \theta}$, $N_\gamma = N_{\gamma \circ \theta}$ e $B_\gamma = B_{\gamma \circ \theta}$). Dessa forma, para não sobrecarregar a notação, faremos uso do seguinte abuso $\gamma'(t) = (\gamma \circ \theta)'(s)$

(onde $\theta(s) = t$). Quando γ é uma curva regular suave definida em S^1 diremos que γ é uma **curva compacta**. Observamos que neste trabalho todas as singularidades consideradas são locais, não estamos considerando singularidades multilocais.

Este capítulo (exceto a primeira seção) consiste do estudo do Capítulo 9 do livro [7]. Conforme dito pelos autores de [7], nem todos os resultados foram provados com todos os detalhes em [7], mas aqui apresentamos as demonstrações completas, algumas delas alternativas às do livro [7]. Além do livro [7], também utilizamos [4] e [9].

2.1 Elementos da Teoria de Singularidades

Nosso objetivo nesta seção é apresentar alguns conceitos e resultados básicos da Teoria de Singularidades, os quais são utilizados intensivamente neste e nos capítulos seguintes. As definições e resultados desta seção podem ser encontrados nos Capítulos 2 e 3 do livro [7], não enunciados, necessariamente, da maneira como expomos a seguir.

2.1.1 \mathcal{R} -equivalência e classificação de funções reais

Sejam A e B dois subconjuntos de \mathbb{R}^n contendo um ponto $p \in \mathbb{R}^n$. Dizemos que A é equivalente a B se existe um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ contendo p tal que $A \cap U = B \cap U$. Isso define uma relação de equivalência entre subconjuntos de \mathbb{R}^n contendo p . A classe de equivalência de um subconjunto A é chamada de **germe de A em p** e é denotada por (A, p) .

Sejam U e V abertos de \mathbb{R}^n contendo um ponto $p \in \mathbb{R}^n$, e considere $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ aplicações suaves. Dizemos que f é equivalente à g se existe um aberto $W \subset U \cap V$ contendo p tal que $f|_W = g|_W$. Esta relação é claramente uma relação de equivalência no conjunto de aplicações suaves definidas em subconjuntos abertos de \mathbb{R}^n contendo p . A classe de equivalência de uma aplicação suave $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, com U aberto de \mathbb{R}^n contendo p , é chamada de **germe de f em p** e é denotada por $f : (\mathbb{R}^n, p) \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Em algumas situações queremos que todos os elementos das classes de equivalência tenham o mesmo valor em p , digamos $q \in \mathbb{R}^m$. Neste caso, usamos a seguinte notação $f : (\mathbb{R}^n, p) \rightarrow (\mathbb{R}^m, q)$.

O principal resultado desta seção é o que classifica os germes de funções $f : (\mathbb{R}, t_0) \rightarrow \mathbb{R}$ segundo a \mathcal{R} -equivalência dada a seguir.

Definição 2.1.1 *Sejam $f : (\mathbb{R}, t_0) \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : (\mathbb{R}, s_0) \rightarrow \mathbb{R}$ germes de funções. Dizemos que f (em t_0) é \mathcal{R} -equivalente à g (em s_0) se existe um germe de difeomorfismo*

$h : (\mathbb{R}, s_0) \rightarrow (\mathbb{R}, t_0)$ e uma constante c de modo que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, t_0) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}, f(t_0)) \\ h \uparrow & & \uparrow k_c \\ (\mathbb{R}, s_0) & \xrightarrow{g} & (\mathbb{R}, g(s_0)) \end{array}$$

onde $k_c(t) = t - c$, ou seja, $g(t) = f(h(t)) + c$.

Concluimos da definição acima que $c = g(s_0) - f(t_0)$.

Exemplo 2.1.2 Sejam $f(t) = t^k$ e $g(t) = -t^k$, com k um número par. Verifiquemos se f e g são \mathcal{R} -equivalentes em 0.

Para que f e g sejam \mathcal{R} -equivalentes em 0, devem existir um germe de difeomorfismo h e uma constante c tal que $g(t) = f(h(t)) + c$, para todo t numa vizinhança de 0, ou seja, tal que $-t^k = (h(t))^k + c$. No entanto, da definição acima, temos $c = g(0) - f(0) = 0$. Assim, $-t^k = (h(t))^k$. No entanto, como k é um número par, então $-t^k \leq 0$ e $(h(t))^k \geq 0$. Logo, a condição $g(t) = f(h(t)) + c$ só ocorre para $t = 0$. Portanto, f não é \mathcal{R} -equivalente à g . \square

Exemplo 2.1.3 Sejam $f(t) = t^k$ e $g(t) = -t^k$, com k um número ímpar. Os germes de funções f e g são \mathcal{R} -equivalentes em 0.

De fato, tome h o difeomorfismo dado por $h(t) = -t$ e a constante $c = 0$. Assim, como k é um número ímpar, concluimos que $f(h(t)) = f(-t) = (-t)^k = -t^k = g(t)$, para todo t numa vizinhança de 0, ou seja, f e g são \mathcal{R} -equivalentes. \square

Podemos verificar facilmente que a \mathcal{R} -equivalência é uma relação de equivalência. Assim, é natural buscar pelas classes de equivalência e suas formas normais (representantes para cada classe). O próximo teorema dá uma classificação dos germes de funções reais segundo a \mathcal{R} -equivalência (a qual não é completa, pois não inclui os germes de funções que tem todas as derivadas nulas no ponto investigado, tais germes são chamados de germes de **funções chatas**) e sua demonstração faz uso do seguinte lema. No que segue, denotamos a p -ésima derivada de f em t_0 por $f^{(p)}(t_0)$.

Lema 2.1.4 (Lema de Hadamard) ([7], p. 50) *Sejam $f : (\mathbb{R}, t_0) \rightarrow \mathbb{R}$ um germe de função e $k \geq 0$. Se $f^{(p)}(t_0) = 0$, para $p = 1, 2, \dots, k$, então existe um germe de função $f_1 : (\mathbb{R}, t_0) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(t) = f(t_0) + (t - t_0)^{k+1} f_1(t)$, para todo t próximo de t_0 . Além disso, se $f^{(k+1)}(t_0) \neq 0$, então $f_1(t_0) \neq 0$.*

Demonstração. Considere inicialmente o caso particular $t_0 = f(t_0) = 0$.

Seja $F : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ um germe de função tal que $F^{(p)}(0) = 0$ para $p = 1, 2, \dots, k$. Provemos o resultado para F . Tal prova é feita por indução sobre k .

i) Para $k = 0$, temos $F(0) = 0$. Mostremos que existe um germe de função $F_2 : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(t) = tF_2(t)$. Note que

$$F(t) = F(t) - F(0) = \int_0^1 \frac{d}{du} F(tu) du = \int_0^1 tF'(tu) du = t \int_0^1 F'(tu) du.$$

Seja

$$F_2(t) = \int_0^1 F'(tu) du,$$

a qual é suave. Portanto, $F(t) = tF_2(t)$.

ii) Suponhamos o resultado válido para $k \geq 0$ e mostremos para $k + 1$, ou seja, mostremos que se $F^{(p)}(0) = 0$ para $p = 1, 2, \dots, k + 1$, então existe um germe de função $F_1 : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(t) = t^{k+2}F_1(t)$.

Do caso $k = 0$, concluímos que $F(t) = tF_2(t)$, onde $F_2(t) = \int_0^1 F'(tu) du$. Derivando ambos os lados p vezes, concluímos que $F^{(p)}(t) = pF_2^{(p-1)}(t) + tF_2^{(p)}(t)$. Quando $t = 0$, temos $F^{(p)}(0) = pF_2^{(p-1)}(0)$. Da hipótese segue que $F_2^{(p)}(0) = 0$, para $p = 1, 2, \dots, k$. Logo, pela hipótese de indução para F_2 , existe um germe de função $F_1 : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F_2(t) = t^{k+1}F_1(t)$. Ou seja,

$$F(t) = tF_2(t) = t(t^{k+1}F_1(t)) = t^{k+2}F_1(t),$$

como queríamos.

Resta-nos provar o caso geral. Suponhamos que $f^{(p)}(t_0) = 0$ para $p = 1, 2, \dots, k$.

Seja $F(t) = f(t + t_0) - f(t_0)$. Como f é suave, então F é suave. Além disso, $F(0) = 0$ e $F^{(p)}(0) = f^{(p)}(t_0) = 0$, para $p = 1, 2, \dots, k$.

Assim, pela primeira parte da demonstração, existe um germe de função $F_1 : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(t) = t^{k+1}F_1(t)$. Logo, $f(t + t_0) - f(t_0) = t^{k+1}F_1(t)$. Fazendo a mudança de coordenadas $u = t + t_0$, obtemos $f(u) = f(t_0) + (u - t_0)^{k+1}F_1(u - t_0)$. Tomando $f_1(u) = F_1(u - t_0)$ e renomeando a variável u concluímos que $f(t) = f(t_0) + (t - t_0)^{k+1}f_1(t)$, como queríamos.

Além disso, se $f^{(k+1)}(t_0) \neq 0$, então $F^{(k+1)}(0) \neq 0$, pois $F(t) = f(t + t_0) - f(t_0)$. Por outro lado, como $F(t) = t^{k+1}F_1(t)$, então $F^{(k+1)}(0) = (k + 1)!F_1(0)$. Logo, $f_1(t_0) = F_1(0) \neq 0$. \square

Definição 2.1.5 *Seja $f : (\mathbb{R}, t_0) \rightarrow \mathbb{R}$ um germe de função. Dizemos que*

- f é uma **singularidade** (em t_0), se f é singular em t_0 ;
- f é uma **singularidade A_k** (em t_0), para $k \geq 1$, se $f^{(p)}(t_0) = 0$, para $p = 1, 2, \dots, k$ e $f^{(k+1)}(t_0) \neq 0$;

- f é uma **singularidade** $A_{\geq k}$ (em t_0), para $k \geq 1$, se $f^{(p)}(t_0) = 0$, para $p = 1, 2, \dots, k$;
- f é uma **singularidade** A_0 (em t_0), se $f'(t_0) \neq 0$ (note que neste caso cometemos um abuso de linguagem, pois f é regular em t_0).

Se trabalharmos com funções $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, com U um aberto de \mathbb{R} contendo t_0 , ao invés de seu germe (ou seja, tomando representantes do germe) dizemos que a função f tem uma singularidade A_k em $t \in U$ se o germe de f em t é uma singularidade A_k (em t).

Definição 2.1.6 *Seja $f : (\mathbb{R}, t_0) \rightarrow \mathbb{R}$ um germe de função. Definimos o k -jato de f em t_0 ($k \geq 1$ inteiro) como sendo o polinômio em uma variável de grau menor ou igual a k dado por:*

$$j^k f(t_0) = f'(t_0)t + \frac{1}{2}f''(t_0)t^2 + \dots + \frac{1}{k!}f^{(k)}(t_0)t^k.$$

Note que o k -jato de f em t_0 não é o polinômio de Taylor de f em t_0 , mas sim o de $g : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(t) = f(t+t_0) - f(t_0)$ em 0. Além disso, se f é uma singularidade A_k , então $j^p f(t_0) = 0$, para $p = 1, 2, \dots, k$.

Observe que se $f : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ é um polinômio de grau $k \geq 1$, então $j^l f(0) = f$, para todo $l \geq k$.

No que segue neste trabalho, denotamos por $g(t) = \pm t^{k+1}$, se $g(t) = t^{k+1}$ para todo t , ou $g(t) = -t^{k+1}$ para todo t .

Teorema 2.1.7 ([7], p. 50) *Seja $f : (\mathbb{R}, t_0) \rightarrow \mathbb{R}$ um germe de função. O germe f é uma singularidade A_k para algum $k \geq 1$ se, e somente se, f é \mathcal{R} -equivalente à $g : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(t) = \pm t^{k+1}$, onde $g(t) = t^{k+1}$ se $f^{(k+1)}(t_0) > 0$ e $g(t) = -t^{k+1}$ se $f^{(k+1)}(t_0) < 0$.*

Demonstração. Como f é uma singularidade A_k para algum $k \geq 1$, então $f^{(p)}(t_0) = 0$, para $p = 1, 2, \dots, k$ e $f^{(k+1)}(t_0) \neq 0$. Pelo Lema de Hadamard 2.1.4, existe um germe de função $f_1 : (\mathbb{R}, t_0) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(t) = f(t_0) + (t - t_0)^{k+1} f_1(t)$, com $f_1(t_0) \neq 0$.

Considere

$$h(t) = (t - t_0)(\pm f_1(t))^{\frac{1}{k+1}},$$

onde o sinal \pm é o sinal de $f_1(t_0)$. Logo, $h'(t_0) = (\pm f_1(t_0))^{\frac{1}{k+1}} > 0$, ou seja, h é um germe de difeomorfismo. Além disso, compondo g com h obtemos

$$g(h(t)) = \pm (h(t))^{k+1} = \pm ((t - t_0)(\pm f_1(t))^{\frac{1}{k+1}})^{k+1} = (t - t_0)^{k+1} f_1(t) = f(t) - f(t_0).$$

Logo, f e g são de fato \mathcal{R} -equivalentes, como afirmado. A recíproca é imediata. \square

Exemplo 2.1.8 Utilizando alguns cálculos de derivadas e o teorema anterior, concluímos:

- (i) $f_1(t) = 3t^5 + 4t^2 - 3$ e $f_2(t) = -\cos(t)$ são singularidades A_1 (em 0), ou seja, f_1 e f_2 são \mathcal{R} -equivalentes à $g(t) = t^2$ (em 0). Neste caso, $j^3 f_1(0) = 4t^2$ e $j^3 f_2(0) = \frac{1}{2}t^2$.
- (ii) $f(t) = 2t^6 - 5t^3 + 2$ é uma singularidade A_2 (em 0), ou seja, f é \mathcal{R} -equivalente à $g(t) = -t^3$ (em 0). Neste caso, $j^3 f(0) = -5t^3$. \square

Portanto, o teorema anterior classifica os germes de funções (exceto os germes de funções chatas) segundo a \mathcal{R} -equivalência. Os germes de funções $\pm t^{k+1}$ são chamados **formas normais** de uma singularidade A_k . Na observação a seguir mostramos que tais formas normais não são de fato \mathcal{R} -equivalentes para dois valores distintos de k e investigamos sob quais condições elas são \mathcal{R} -equivalentes para um mesmo k .

Observação 2.1.9 (i) *Como já vimos nos Exemplos 2.1.2 e 2.1.3, se k for ímpar, então t^k e $-t^k$ são \mathcal{R} -equivalentes (em 0) e, se k for par, então t^k e $-t^k$ não são \mathcal{R} -equivalentes (em 0).*

(ii) *Para $l \neq k$, o germe de função t^{l+1} não é \mathcal{R} -equivalente a $\pm t^{k+1}$ (em 0), pois se fossem, deveria existir um germe de difeomorfismo $h : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ tal que $\pm(h(t))^{k+1} = t^{l+1}$, com $k \neq l$. Se $k > l$, então, derivando ambos os lados $l+1$ vezes e avaliando em $t = 0$, o lado esquerdo torna-se 0 enquanto o lado direito diferente de 0, o que é uma contradição. De modo análogo, para $k < l$ também temos uma contradição.*

2.1.2 Funções altura e distância ao quadrado e contato entre curvas

Outros conceitos que são muito utilizados neste trabalho são os de evoluta, vértices e inflexões de curvas planas, os quais apresentamos a seguir.

Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular com curvatura $\kappa(t)$ não nula. Um ponto x de \mathbb{R}^2 é dito **centro de curvatura** de γ em t se

$$x = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)}N(t).$$

O lugar geométrico dos centros de curvatura de γ é conhecido como **evoluta** de γ . Para propriedades de evolutas ver, por exemplo, [7] e [15]. O círculo com centro no centro de curvatura de γ em t e raio $|\frac{1}{\kappa(t)}|$ é chamado de **círculo osculador de γ em t** .

Considere $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular. Dado $t_0 \in I$ temos:

- $\gamma(t_0)$ é dito **vértice** se $\kappa(t_0) \neq 0$ e $\kappa'(t_0) = 0$. Um vértice é chamado:

ordinário se $\kappa''(t_0) \neq 0$;

de ordem maior se $\kappa''(t_0) = 0$.

- $\gamma(t_0)$ é dito **inflexão** se $\kappa(t_0) = 0$. Uma inflexão é chamada:

ordinária se $\kappa'(t_0) \neq 0$;

de ordem maior se $\kappa'(t_0) = 0$.

Exemplo 2.1.10 (i) Seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (r \cos(t), r \sin(t))$, uma circunferência centrada na origem e de raio $r > 0$. Fazendo alguns cálculos, concluímos que $\kappa(t) = r$, $\kappa'(t) = 0$ e $\kappa''(t) = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Portanto, todos os pontos $\gamma(t)$ do círculo são vértices de ordem maior.

(ii) Seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (2 \cos(t), \sin(t))$, uma elipse centrada na origem. Podemos verificar facilmente que $\kappa(t) = 2(4 \sin^2(t) + \cos^2(t))^{-\frac{1}{2}} > 0$. Além disso, que $\kappa'(t) = 0$ se, e somente se, $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$, que $\kappa''(0) = \kappa''(\pi) = -6 \neq 0$ e $\kappa''(\frac{\pi}{2}) = \kappa''(\frac{3\pi}{2}) = \frac{3}{4} \neq 0$. Portanto, os pontos $\gamma(0) = (2, 0)$, $\gamma(\frac{\pi}{2}) = (0, 1)$, $\gamma(\pi) = (-2, 0)$ e $\gamma(\frac{3\pi}{2}) = (0, -1)$ são vértices ordinários.

(iii) Seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (t, t^n)$.

- Para $n = 1$, temos $\kappa(t) = \kappa'(t) = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$, ou seja, todo ponto a reta (t, t) é uma inflexão de ordem maior.

- Para $n = 2$, fazendo alguns cálculos, concluímos que $\kappa(t) = 2(1 + 4t^2)^{-\frac{3}{2}} > 0$. Assim, $\kappa'(t) = -24t(1 + 4t^2)^{-\frac{5}{2}}$ e $\kappa''(t) = -24(1 + 4t^2)^{-\frac{5}{2}} + 480t^2(1 + 4t^2)^{-\frac{7}{2}}$. Logo, $\kappa'(t) = 0$ se, e somente se, $t = 0$. Além disso, $\kappa''(0) = -24 \neq 0$. Portanto, o conhecido vértice $(0, 0)$ da parábola (t, t^2) é um vértice ordinário.

- Para $n > 2$, fazendo alguns cálculos, obtemos $\kappa(t) = n(n-1)t^{n-2}(1 + n^2t^{2n-2})^{-\frac{3}{2}}$, a qual é nula se, e somente se, $t = 0$. Além disso,

$$\kappa'(t) = n(n-1)(n-2)t^{n-3}(1 + n^2t^{2n-2})^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}n(n-1)t^{n-2}(1 + n^2t^{2n-2})^{-\frac{5}{2}}(n^2(2n-2)t^{2n-3}),$$

ou seja, $\kappa'(0) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \geq 4 \\ 6, & \text{se } n = 3 \end{cases}$. Portanto, a conhecida inflexão $(0, 0)$ da função $f(t) = t^3$ é uma inflexão ordinária. Além disso, concluímos que $(0, 0)$ é uma inflexão de ordem maior da curva (t, t^n) , para todo $n \geq 4$. \square

Os conceitos de função altura e função distância ao quadrado são amplamente utilizados na Teoria de Singularidades e neste trabalho também são essenciais.

Definição 2.1.11 (i) Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva regular e $u \in \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$. A função $d : I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d(t) = \|\gamma(t) - u\|^2$$

é chamada de **função distância ao quadrado** de γ com respeito a u .

(ii) Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva regular e $u \in \mathbb{R}^n$ um vetor unitário, $n = 2, 3$. A função $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$h(t) = \langle \gamma(t), u \rangle$$

é chamada de **função altura** de γ com respeito a u . (Denotamos por $\langle _, _ \rangle$ o produto interno usual de \mathbb{R}^n).

A próxima definição nos fornece uma ferramenta para medir a proximidade entre duas curvas ou entre uma curva e uma superfície na vizinhança de um ponto. Tal ferramenta nos permitirá mostrar a relação das funções altura e distância ao quadrado com a geometria de curvas e realçar a importância dessas funções. Para medir o contato entre duas curvas tomamos uma delas na forma parametrizada e a outra na forma implícita. Recordemos que, dada $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que 0 é valor regular de F então $F^{-1}(0)$ é uma curva regular se $n = 2$ ou uma superfície regular se $n = 3$.

Definição 2.1.12 *Sejam $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva regular e $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave onde 0 é valor regular de F , $n = 2, 3$. Dizemos que γ e $F^{-1}(0)$ têm **contato de ordem** k em $t_0 \in I$, se a função $g : I \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $g(t) = (F \circ \gamma)(t)$, tem singularidade A_{k-1} em t_0 e $g(t_0) = 0$.*

Pode ser mostrado facilmente que a definição de contato independe da reparametrização que tomamos para γ .

Vejam como as funções altura e distância ao quadrado podem nos ser úteis quando analisamos, por exemplo, o contato de uma curva plana com um círculo ou uma reta, e o contato de uma curva no espaço com uma esfera ou um plano.

Proposição 2.1.13 (i) *Sejam $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular e $u \in \mathbb{R}^2$. O contato em $t_0 \in I$ entre γ e o círculo centrado em u passando por $\gamma(t_0)$ é de ordem k se, e somente se, a função distância ao quadrado d de γ com respeito a u tem singularidade A_{k-1} em t_0 .*

(ii) *Sejam $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular e $u \in S^1$. O contato em $t_0 \in I$ entre γ e a reta por $\gamma(t_0)$ ortogonal a u é de ordem k se, e somente se, a função altura h de γ com respeito a u tem singularidade A_{k-1} em t_0 .*

Demonstração. (i) Considere o círculo centrado em u passando por $\gamma(t_0)$ dado implicitamente por $F^{-1}(0)$, onde

$$F(p) = \|p - u\|^2 - \|\gamma(t_0) - u\|^2, \quad p \in \mathbb{R}^2.$$

Assim,

$$g(t) = (F \circ \gamma)(t) = \|\gamma(t) - u\|^2 - \|\gamma(t_0) - u\|^2.$$

Logo,

$$d(t) = \|\gamma(t) - u\|^2 = g(t) + c,$$

onde $c = \|\gamma(t_0) - u\|^2$ é uma constante.

Portanto, g tem singularidade A_{k-1} em t_0 se, e somente se, a função distância ao quadrado d tem singularidade A_{k-1} em t_0 .

(ii) Considere a reta por $\gamma(t_0)$ ortogonal a u dada implicitamente por $F^{-1}(0)$, onde

$$F(p) = \langle p - \gamma(t_0), u \rangle = \langle p, u \rangle - \langle \gamma(t_0), u \rangle,$$

com $u \in S^1$, $p \in \mathbb{R}^2$. Assim,

$$g(t) = (F \circ \gamma)(t) = \langle \gamma(t), u \rangle - \langle \gamma(t_0), u \rangle.$$

Logo,

$$h(t) = \langle \gamma(t), u \rangle = g(t) + c,$$

onde $c = \langle \gamma(t_0), u \rangle$ é uma constante, de onde concluímos (ii). \square

Podemos redefinir vértices e inflexões de curvas planas por meio do contato com círculos e retas da seguinte forma:

Proposição 2.1.14 *Considere $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular e $t_0 \in I$.*

(i) $\gamma(t_0)$ é um vértice ordinário (resp. de ordem maior) se, e somente se, o círculo osculador de γ em t_0 tem contato de ordem 4 (resp. maior ou igual a 5) com γ em t_0 .

(ii) $\gamma(t_0)$ é uma inflexão ordinária (resp. de ordem maior) se, e somente se, a reta tangente a γ em t_0 tem contato de ordem 3 (resp. maior ou igual a 4) com γ em t_0 .

Demonstração. Suponhamos $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizada por comprimento de arco.

Primeiramente, analisemos sob quais condições a função distância ao quadrado d de γ tem certo tipo de singularidade. Para isso, calculemos as derivadas da função d . Seja $u \in \mathbb{R}^2$. Omitimos os parâmetros para não sobrecarregar a notação. Temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}d' &= \langle \gamma - u, T \rangle; \\ \frac{1}{2}d'' &= 1 + \langle \gamma - u, \kappa N \rangle; \\ \frac{1}{2}d''' &= \langle \gamma - u, \kappa' N \rangle - \langle \gamma - u, \kappa^2 T \rangle; \\ \frac{1}{2}d^{(4)} &= \langle \gamma - u, \kappa'' N \rangle - \langle 3(\gamma - u), \kappa \kappa' T \rangle - \kappa^2 - \langle \gamma - u, \kappa^3 N \rangle. \end{aligned}$$

Assim, após alguns cálculos, concluímos que a função distância ao quadrado de γ com respeito a u tem singularidade:

- $A_{\geq 1}$ em $t \Leftrightarrow u = \gamma(t) + \lambda N(t)$;
- $A_{\geq 2}$ em $t \Leftrightarrow \kappa(t) \neq 0$ e $u = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)}N(t)$;
- $A_{\geq 3}$ em $t \Leftrightarrow \kappa(t) \neq 0$, $u = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)}N(t)$ e $\kappa'(t) = 0$;

- $A_{\geq 4}$ em $t \Leftrightarrow \kappa(t) \neq 0, u = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)}N(t), \kappa'(t) = 0$ e $\kappa''(t) = 0$.

(i) Usando a definição de vértice, concluímos que $\gamma(t_0)$ é um vértice ordinário (resp. vértice de ordem maior) se, e somente se, a função distância ao quadrado d de γ com respeito a $u = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)}N(t)$ tem singularidade A_3 (resp. $A_{\geq 4}$) em t_0 , o que ocorre, segundo a Proposição 2.1.13, se, e somente se, o círculo osculador de γ em t_0 tem contato de ordem 4 (resp. maior ou igual a 5) com γ em t_0 .

Agora faremos a mesma análise para a função altura h sobre γ . Seja $u \in \mathbb{R}^2$ unitário. Temos:

$$\begin{aligned} h' &= \langle T, u \rangle; \\ h'' &= \langle \kappa N, u \rangle; \\ h''' &= \langle \kappa' N, u \rangle - \langle \kappa^2 T, u \rangle. \end{aligned}$$

Assim, após alguns cálculos, concluímos que a função altura de γ com respeito a u tem singularidade:

- $A_{\geq 1}$ em $t \Leftrightarrow u = \pm N(t)$;
- $A_{\geq 2}$ em $t \Leftrightarrow u = \pm N(t)$ e $\kappa(t) = 0$;
- $A_{\geq 3}$ em $t \Leftrightarrow u = \pm N(t), \kappa(t) = 0$ e $\kappa'(t) = 0$.

(ii) Usando a definição de inflexão, concluímos que $\gamma(t_0)$ é uma inflexão ordinária (resp. inflexão de ordem maior) se, e somente se, a função altura h de γ com respeito a $u = \pm N(t)$ tem singularidade A_2 (resp. $A_{\geq 3}$) em t_0 , o que ocorre, segundo a Proposição 2.1.13, se, e somente se, a reta tangente à γ em t_0 tem contato de ordem 3 (resp. maior ou igual a 4) com γ em t_0 . \square

Segundo a proposição anterior, o círculo osculador (resp. a reta tangente) de γ em t_0 tem contato de ordem maior ou igual a 4 (resp. 3) com γ em t_0 . Poderíamos nos perguntar se existe outro círculo (resp. reta) com tal propriedade. No entanto, os cálculos feitos na demonstração da proposição acima garantem a unicidade, ou seja, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 2.1.15 (i) *O círculo osculador de γ em t_0 é o único círculo tendo contato de ordem maior ou igual a 4 com γ em t_0 .*

(ii) *A reta tangente a γ em t_0 é a única reta tendo contato de ordem maior ou igual a 3 com γ em t_0 .*

Juntando as duas proposições anteriores obtemos o seguinte corolário.

Corolário 2.1.16 Considere $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular suave e $t_0 \in I$.

(i) $\gamma(t_0)$ é um vértice ordinário (resp. de ordem maior) se, e somente se, a função distância ao quadrado de γ com respeito a $u = \gamma(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)}N(t_0)$ tem singularidade A_3 (resp. $A_{\geq 4}$) em t_0 .

(ii) $\gamma(t_0)$ é uma inflexão ordinária (resp. de ordem maior) se, e somente se, a função altura de γ com respeito a $u = \pm N(t_0)$ tem singularidade A_2 (resp. $A_{\geq 3}$) em t_0 .

Agora nosso objetivo é fazer uma análise parecida com a feita para curvas planas, buscando uma relação entre as funções altura e distância ao quadrado e o contato de curvas espaciais com planos e esferas. De forma análoga à demonstração da Proposição 2.1.13, podemos mostrar que a função distância ao quadrado mede contato de γ com esferas, e que a função altura mede contato de γ com planos.

Proposição 2.1.17 (i) Sejam $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular com curvatura κ não nula e $u \in \mathbb{R}^3$. O contato em $t_0 \in I$ entre γ e a esfera centrada em u passando por $\gamma(t_0)$ é de ordem k se, e somente se, a função distância ao quadrado d de γ com respeito a u tem singularidade A_{k-1} em t_0 . Além disso, se $\tau(t_0) \neq 0$, então existe uma única esfera tendo contato de ordem maior ou igual a 4 com γ em t_0 .

(ii) Sejam $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular com curvatura κ não nula e $u \in S^2$. O contato em t_0 entre γ e o plano por $\gamma(t_0)$ ortogonal a u é de ordem k se, e somente se, a função altura h de γ com respeito a u tem singularidade A_{k-1} em t_0 . Além disso, o plano osculador de γ em t_0 é o único plano tendo contato de ordem maior ou igual a 3 com γ em t_0 .

Demonstração. Suponhamos $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizada por comprimento de arco. As primeiras partes dos itens (i) e (ii) são feitas de modo análogo à demonstração da Proposição 2.1.13 e omitimos aqui.

Mostremos que se $\tau(t_0) \neq 0$, então existe uma única esfera tendo contato de ordem maior ou igual a 4 com γ em t_0 . Seja $u \in \mathbb{R}^3$. Temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}d' &= \langle \gamma - u, T \rangle; \\ \frac{1}{2}d'' &= 1 + \langle \gamma - u, \kappa N \rangle; \\ \frac{1}{2}d''' &= \langle \gamma - u, \kappa' N \rangle + \langle \gamma - u, \kappa \tau B \rangle - \langle \gamma - u, \kappa^2 T \rangle. \end{aligned}$$

Assim, após alguns cálculos, concluímos que a função distância ao quadrado d de γ com respeito a u tem singularidade:

- $A_{\geq 1}$ em $t \Leftrightarrow u = \gamma(t) + \lambda N(t) + \mu B(t)$;
- $A_{\geq 2}$ em $t \Leftrightarrow u = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)}N(t) + \mu B(t)$;

- $A_{\geq 3}$ em $t \Leftrightarrow u = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)}N(t) - \frac{\kappa'(t)}{\kappa^2(t)\tau(t)}B(t)$.

Logo, podemos concluir que γ em t terá contato de ordem maior ou igual a 4 com a esfera de centro $u = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)}N(t) - \frac{\kappa'(t)}{\kappa^2(t)\tau(t)}B(t)$ e raio $\|\gamma - u\|$.

Resta-nos mostrar que o plano osculador de γ em t_0 é o único plano tendo contato de ordem maior ou igual a 3 com γ em t_0 . Para isso calculemos as derivadas da função altura h . Seja $u \in \mathbb{R}^3$ unitário. Temos:

$$\begin{aligned} h' &= \langle T, u \rangle; \\ h'' &= \langle \kappa N, u \rangle; \\ h''' &= \langle \kappa' N, u \rangle + \langle \kappa \tau B, u \rangle - \langle \kappa^2 T, u \rangle. \end{aligned}$$

Assim, após alguns cálculos, concluímos que a função altura h de γ com respeito a u tem singularidade:

- $A_{\geq 1}$ em $t \Leftrightarrow u = \lambda N(t) + \mu B(t)$;
- $A_{\geq 2}$ em $t \Leftrightarrow u = \pm B(t)$;
- $A_{\geq 3}$ em $t \Leftrightarrow u = \pm B(t)$ e $\tau(t) = 0$.

Logo, podemos concluir que o contato de γ em t com o plano ortogonal a $u = \pm B(t)$ por $\gamma(t)$ é de ordem maior ou igual a 3. Como $u = \pm B(t)$, então esse plano é o plano osculador. Note que o contato será de ordem maior ou igual a 4 com o plano osculador se $\tau = 0$. \square

A esfera que existe devido a proposição anterior é chamada de **esfera de curvatura de γ em t_0** e seu centro é chamado de **centro de curvatura esférica de γ em t_0** .

2.2 Propriedades genéricas de curvas planas

Dada uma curva plana, vamos obter uma nova curva, em algum espaço Euclidiano, de modo que analisando a forma com que essa nova curva intersecta os eixos coordenados (em um sistema de coordenadas apropriado), podemos concluir sobre o número de vértices e inflexões e o tipo de inflexões que a curva original possa ter. Usando tais curvas e o Lema de Transversalidade de Thom 1.2.9, provamos que quase toda curva plana compacta tem somente inflexões e vértices ordinários. Nesta seção nossa principal referência é o Capítulo 9 do livro [7] e também utilizamos [9].

Considere $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular suave, $I \subset S^1$. Dado $t_0 \in I$, temos uma direção tangente $T(t_0)$ e uma normal $N(t_0)$ bem definidas. Utilizando o movimento rígido χ que leva $\gamma(t_0)$ em $(0, 0)$ e a reta tangente a $\gamma(I)$ em $\gamma(t_0)$ no eixo- x , obtemos uma nova curva $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\tilde{\gamma}(t) = \chi \circ \gamma(t)$. Queremos estudar os vértices e inflexões

de γ . No entanto, como movimentos rígidos não alteram o tipo e o número de vértices e inflexões, podemos supor $\gamma = \tilde{\gamma}$. Usando o sistema de coordenadas $\{T(t_0), N(t_0)\}$, podemos escrever $\gamma(t) = \gamma(t_0) + a(t)T(t_0) + b(t)N(t_0)$, onde $a(t)$ e $b(t)$ são as coordenadas de $\gamma(t)$ com relação à base considerada. Como $a(t) = \langle \gamma(t), T(t_0) \rangle - \langle \gamma(t_0), T(t_0) \rangle$, então $a'(t_0) = \langle \gamma'(t_0), T(t_0) \rangle \neq 0$, pois γ é regular. Portanto, existe uma mudança de parâmetros $h : J \subset \mathbb{R} \rightarrow I$, onde J é uma vizinhança de 0, tal que o traço da curva $\alpha : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(\xi) = \gamma \circ h(\xi)$ é o gráfico de uma função $f_{t_0} : J \rightarrow \mathbb{R}$, ou seja, $\alpha(\xi) = (\xi, f_{t_0}(\xi))$. Logo, podemos escrever $\gamma(I)$ na **forma normal de Monge** (localmente), isto é, $\gamma(I)$ é, localmente em $\gamma(t_0)$, o gráfico de uma função $\eta = f_{t_0}(\xi)$, com ξ ao longo do eixo tangente e η ao longo do eixo normal. Note que f_{t_0} é inalterada por movimentos rígidos de $\gamma(I)$ no plano. Além disso, se $\gamma \circ \psi$ é reparametrização de γ , então $f_{t_0} = f_{s_0}$, onde $\psi(s_0) = t_0$ (pois todo o referencial e o traço da curva são os mesmos, a menos de parâmetros). A Figura 2.1 descreve tal processo.

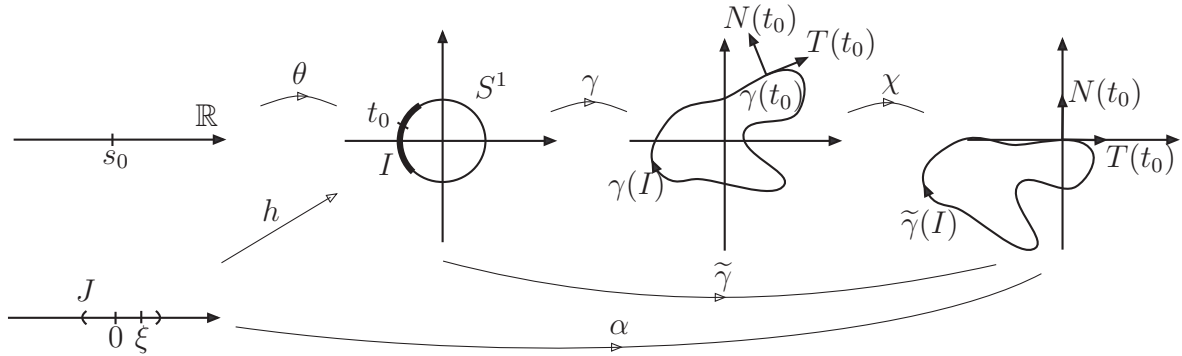


Figura 2.1: Forma normal de Monge para γ .

Seja V_k ($k \geq 2$) o espaço de polinômios em uma variável ξ de grau maior ou igual a 2 e menor ou igual a k . Note que cada elemento de V_k , $a_2\xi^2 + \dots + a_k\xi^k$, é determinado por seus $k - 1$ coeficientes reais, ou seja, V_k pode ser identificado com \mathbb{R}^{k-1} via as coordenadas (a_2, \dots, a_k) . Além disso, em V_k , chamamos de *eixo* a_i o subconjunto dos polinômios da forma $a_i\xi^i$, ou seja, os polinômios de V_k tais que $a_j = 0$, para $j \neq i$.

Definição 2.2.1 A **aplicação de Monge-Taylor** (de ordem k) de γ é a aplicação $\mu_\gamma : I \rightarrow V_k$ que a cada $t \in I$ associa o k -jato de f_t em 0, ou seja, $\mu_\gamma(t) = j^k f_t(0)$.

Geralmente denotamos μ_γ simplesmente por μ quando está claro qual é a curva γ e, usando a identificação de V_k com \mathbb{R}^{k-1} temos, com abuso de notação,

$$\mu(t) = (a_2(t), \dots, a_k(t)), \text{ onde } a_i(t) = \frac{f_t^{(i)}(0)}{i!}.$$

Como o eixo ξ é tangente a $\gamma(I)$ em $\gamma(t_0)$, temos $f_{t_0}(0) = f'_{t_0}(0) = 0$ (onde $'$ denota $\frac{d}{d\xi}$). Logo $\mu(I)$ é, de fato, um subconjunto de V_k .

Exemplo 2.2.2 Considere $\gamma \circ \theta(s) = (\cos s, \sin s)$ o círculo unitário e o ponto $t_0 = (0, -1) = \theta(\frac{3\pi}{2})$ (Figura 2.2).

Usando o sistema de coordenadas ξ e η em $\gamma(t_0) = t_0 = (0, -1)$, o círculo tem equação $\xi^2 + (\eta - 1)^2 = 1$, ou seja, $\eta^2 - 2\eta + \xi^2 = 0$ (equação de segundo grau em η). Assim, $\eta = 1 \pm \sqrt{1 - \xi^2}$. Como estamos interessados em uma vizinhança de $(0, -1)$, então $0 < \eta < 1$, ou seja, $\eta = 1 - \sqrt{1 - \xi^2}$. Usando a série de Taylor em torno da origem, temos $\eta = \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^4 + \dots$, para ξ pequeno. Assim, $\mu(t_0) = j^k(1 - \sqrt{1 - \xi^2})(0)$. Para $k = 3$, temos $\mu(t_0) = (\frac{1}{2}, 0)$ e para $k = 4$, temos $\mu(t_0) = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{8})$.

Como o círculo unitário pode ser visto como a rotação do mesmo, então f_{t_0} é a mesma para qualquer t_0 , ou seja, para $k = 3$, temos $\mu(t) = (\frac{1}{2}, 0)$ e para $k = 4$, temos $\mu(t) = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{8})$.

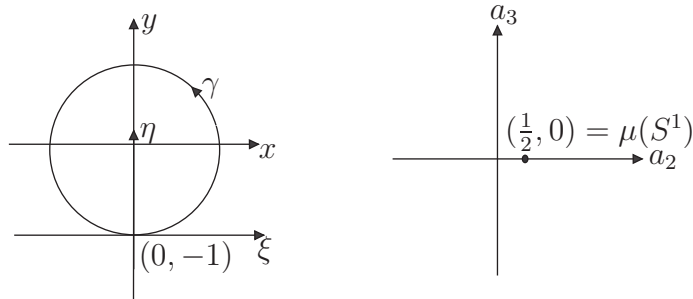


Figura 2.2: Aplicação de Monge-Taylor para o círculo unitário (Exemplo 2.2.2).

□

Sejam $t_0 \in I$, $\alpha : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, com $0 \in J$ tal que $\alpha(\xi) = (\xi, f_{t_0}(\xi))$ e $h : J \subset \mathbb{R} \rightarrow I$ a mudança de parâmetros tal que $\alpha(\xi) = \gamma \circ h(\xi)$. Sabemos que $\kappa_\alpha(\xi) = \kappa_\gamma(h(\xi)) = \kappa_\gamma(t)$, em particular, $\kappa_\alpha(0) = \kappa_\gamma(t_0)$.

Assim,

$$\kappa_\alpha(\xi) = \frac{f''_{t_0}(\xi)}{(1 + (f'_{t_0}(\xi))^2)^{\frac{3}{2}}},$$

então $f''_{t_0}(\xi) = \kappa_\alpha(\xi)(1 + (f'_{t_0}(\xi))^2)^{\frac{3}{2}}$. Em particular, $f''_{t_0}(0) = \kappa_\alpha(0)$. Logo, obtemos:

$$f^{(i)}_{t_0}(\xi) = \kappa_\alpha^{(i-2)}(\xi)(1 + (f'_{t_0}(\xi))^2)^{\frac{3}{2}} + O(\xi),$$

onde $O(\xi)$ é formado por termos que envolvem derivadas de ordem menor que i de f_{t_0} e menor que $i - 2$ de κ_α , $i = 3, 4, \dots$.

Portanto, em cada ponto $\gamma(t)$, os números $a_2(t), \dots, a_k(t)$, onde $a_i(t) = \frac{f_t^{(i)}(0)}{i!}$, com $i = 2, \dots, k$, podem ser expressos em termos da curvatura de α e suas derivadas até ordem $k - 2$ em 0 e, conseqüentemente, da curvatura de γ e de suas primeiras $k - 2$ derivadas em t .

Observamos que $' = \frac{d}{d\xi}$ e, para evitar confusões, usaremos as duas notações. A proposição a seguir também pode ser encontrada em [9], p. 532.

Proposição 2.2.3 ([7], p. 229) (i) $\kappa_\gamma(t) = 2a_2(t)$, $\frac{d}{d\xi}(\kappa_\gamma(t)) = 6a_3(t)$ e $\frac{d^2}{d\xi^2}(\kappa_\gamma(t)) = 24(a_4(t) - (a_2(t))^3)$.

(ii) A curva γ tem:

- uma inflexão ordinária em t se, e somente se, $a_2(t) = 0$ e $a_3(t) \neq 0$;
- uma inflexão de ordem maior em t se, e somente se, $a_2(t) = a_3(t) = 0$;
- um vértice ordinário em t se, e somente se, $a_2(t) \neq 0$, $a_3(t) = 0$ e $a_4(t) \neq (a_2(t))^3$;
- um vértice de ordem maior em t se, e somente se, $a_2(t) \neq 0$, $a_3(t) = 0$ e $a_4(t) = (a_2(t))^3$.

Demonstração. (i) Com as notações acima, como $\kappa_\alpha(\xi) = \kappa_\gamma(h(\xi)) = \kappa_\gamma(t)$, então

$$\frac{d}{d\xi}(\kappa_\gamma(t)) = \frac{d}{d\xi}(\kappa_\alpha(\xi)) \quad \text{e} \quad \frac{d^2}{d\xi^2}(\kappa_\gamma(t)) = \frac{d^2}{d\xi^2}(\kappa_\alpha(\xi)).$$

Para $i = 2$, temos $2a_2(t_0) = f''_{t_0}(0) = \kappa_\gamma(t_0)(1 + (f'_{t_0}(0))^2)^{\frac{3}{2}} = \kappa_\gamma(t_0)$, ou seja, $\kappa_\gamma(t_0) = 2a_2(t_0)$.

Para $i = 3$, temos

$$f'''_{t_0}(\xi) = \kappa'_\alpha(\xi)(1 + (f'_{t_0}(\xi))^2)^{\frac{3}{2}} + \kappa_\alpha(\xi)\frac{3}{2}(1 + (f'_{t_0}(\xi))^2)^{\frac{1}{2}}2f'_{t_0}(\xi)f''_{t_0}(\xi).$$

Logo, $f'''_{t_0}(0) = \frac{d}{d\xi}(\kappa_\alpha(\xi))|_{\xi=0} = \frac{d}{d\xi}(\kappa_\gamma(t))|_{t=t_0}$. Portanto, $\frac{d}{d\xi}(\kappa_\gamma(t))|_{t=t_0} = f'''_{t_0}(0) = 6a_3(t_0)$.

Para $i = 4$, temos

$$f^{(4)}_{t_0}(0) = \frac{d^2}{d\xi^2}(\kappa_\alpha(\xi))|_{\xi=0} + 3(\kappa_\alpha(0))^3 = \frac{d^2}{d\xi^2}(\kappa_\alpha(\xi))|_{\xi=0} + 3(2a_2(t_0))^3.$$

Assim, $24a_4(t_0) = \frac{d^2}{d\xi^2}(\kappa_\alpha(\xi))|_{\xi=0} + 24(a_2(t_0))^3$, ou seja, $\frac{d^2}{d\xi^2}(\kappa_\gamma(t))|_{t=t_0} = \frac{d^2}{d\xi^2}(\kappa_\alpha(\xi))|_{\xi=0} = 24(a_4(t_0) - a_2^3(t_0))$.

Como t_0 foi tomado arbitrariamente em I , então o resultado segue.

(ii) Segue de (i) e da definição de vértices e inflexões, usando as seguintes igualdades (uma vez que $h'(\xi) \neq 0$),

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi}(\kappa_\gamma(t)) &= \frac{d}{d\xi}(\kappa_\gamma(h(\xi))) = \frac{d}{dt}\kappa_\gamma(t)h'(\xi). \\ \frac{d^2}{d\xi^2}(\kappa_\gamma(t)) &= \frac{d^2}{d\xi^2}(\kappa_\gamma(h(\xi))) = \frac{d^2}{dt^2}\kappa_\gamma(t)(h'(\xi))^2 + \frac{d}{dt}\kappa_\gamma(t)h''(\xi). \end{aligned}$$

□

Considere $k = 3$ e a aplicação de Monge-Taylor $\mu : I \rightarrow V_3$. O espaço V_3 pode ser identificado com o plano de coordenadas (a_2, a_3) e a imagem de μ como uma curva nesse

plano. Se $\mu(I)$ passa pela origem, então, pelo item (ii) da proposição anterior, γ tem uma inflexão de ordem maior. Se $\mu(I)$ intersecta o eixo a_2 , sem ser na origem, então γ tem um vértice, e assim por diante. Logo, analisando a intersecção de $\mu(I)$ com os eixos podemos concluir sobre o número de vértices e inflexões e o tipo de inflexões.

A imagem da aplicação de Monge-Taylor no espaço Euclidiano associado é exatamente a curva que queríamos no início desta seção. A última proposição mostra, em particular, que, quando $k = 3$, analisando a forma com que essa curva intersecta os eixos a_2 e a_3 , podemos concluir sobre o número de vértices e inflexões e o tipo de inflexão da curva original, como podemos ver no exemplo abaixo.

Como a série de Taylor de uma função é uma aproximação, até determinada ordem, de tal função, então fica claro que a aplicação de Monge-Taylor μ_γ transporta informações infinitesimais relativas a γ , em cada ponto $\gamma(t)$, até ordem k .

Exemplo 2.2.4 Considere $\gamma \circ \theta(s) = (\cos s, \sin s)$ como no Exemplo 2.2.2. No exemplo referido, vimos que, para $k = 3$, $\mu(S^1) = (\frac{1}{2}, 0)$ (Figura 2.2, direita), ou seja, a curva $\mu(S^1)$ é degenerada a um único ponto, o qual está sobre o eixo a_2 . Logo, pela Proposição 2.2.3, concluímos que todo ponto do círculo é um vértice (a saber vértice de ordem maior segundo o Exemplo 2.1.10(i)). \square

A proposição anterior nos garante, para $k = 3$, que se γ tem um vértice (resp. inflexão) em t , então $\mu(I)$ intersecta o eixo a_2 (resp. a_3). A proposição a seguir mostra que tal intersecção é transversal se o vértice (resp. inflexão) for ordinário, além disso, mostra quando a curva $\mu(I)$ é regular e trata-se do exercício proposto 9.4(3), p. 231, do livro [7].

Proposição 2.2.5 *Seja $\mu : I \rightarrow V_3$ a aplicação de Monge-Taylor de $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$.*

- (i) *Se γ tem uma inflexão ordinária em t , então μ é transversal ao eixo a_3 ;*
- (ii) *Se γ tem um vértice ordinário em t , então μ é transversal ao eixo a_2 ;*
- (iii) *Se a curva $\mu(I)$ é regular, então todos os vértices de γ são ordinários. Além disso, se todos os vértices e inflexões de γ são ordinários, então a curva $\mu(I)$ é regular.*

Demonstração. Seja h a mudança de parâmetros tal que $\alpha(\xi) = \gamma(h(\xi)) = (\xi, f_t(\xi))$.

Primeiramente, mostremos que $\frac{d}{dt}(\mu(t)) = [h'(\xi)]^{-1}(3a_3(t), 4(a_4(t) - a_2^3(t)))$.

Note que $\frac{d}{dt}\mu = (\frac{d}{dt}a_2, \frac{d}{dt}a_3)$, $a_2(t) = \frac{1}{2}\kappa_\gamma(t)$ e $a_3(t) = \frac{1}{6}\frac{d}{d\xi}(\kappa_\gamma(t))$.

Como $\frac{d}{d\xi}(\kappa_\gamma(t)) = \frac{d}{dt}(\kappa_\gamma(t))h'(\xi)$, então

$$\frac{d}{dt}(a_2(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\kappa_\gamma(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{d\xi}(\kappa_\gamma(t))[h'(\xi)]^{-1} = 3a_3(t)[h'(\xi)]^{-1}.$$

E, como $\frac{d^2}{d\xi^2}(\kappa_\gamma(t)) = \frac{d}{d\xi}[\frac{d}{dt}(\kappa_\gamma(t))h'(\xi)] = \frac{d^2}{dt^2}(\kappa_\gamma(t))(h'(\xi))^2 + \frac{d}{dt}(\kappa_\gamma(t))h''(\xi)$, então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(a_3(t)) &= \frac{1}{6} \frac{d}{dt}[\frac{d}{d\xi}(\kappa_\gamma(t))] = \frac{1}{6} \frac{d}{dt}[\frac{d}{dt}(\kappa_\gamma(t))h'(\xi)] \\ &= \frac{1}{6} [\frac{d^2}{dt^2}(\kappa_\gamma(t))h'(\xi) + \frac{d}{dt}(\kappa_\gamma(t))h''(\xi)(h^{-1})'(t)] \\ &= \frac{1}{6} \frac{d^2}{d\xi^2}(\kappa_\gamma(t))[h'(\xi)]^{-1} = 4(a_4(t) - a_2^3(t))[h'(\xi)]^{-1}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}(\mu(t)) = [h'(\xi)]^{-1}(3a_3(t), 4(a_4(t) - a_2^3(t))).$$

(i) Seja N_1 o eixo a_3 em V_3 . Pela Proposição 2.2.3, γ tem uma inflexão ordinária em t se, e somente se, $a_2(t) = 0$ e $a_3(t) \neq 0$. Mostremos que $\mu \pitchfork N_1$, ou seja, que $Im T\mu(t) + N_{1\mu(t)} = \mathbb{R}_{\mu(t)}^2$.

Note que $N_{1\mu(t)} = \langle (0, 1)_{\mu(t)} \rangle$ e $Im T\mu(t) = \frac{d}{dt}(\mu(t))(I_t) = [h'(\xi)]^{-1}(3a_3(t), 4a_4(t))(I_t) = \langle (1, a_4(t))_{\mu(t)} \rangle$.

Logo,

$$Im T\mu(t) + N_{1\mu(t)} = \langle (1, a_4(t))_{\mu(t)} \rangle + \langle (0, 1)_{\mu(t)} \rangle = \mathbb{R}_{\mu(t)}^2.$$

Portanto, $\mu \pitchfork N_1$.

(ii) Seja N_2 o eixo a_2 em V_3 . Pela Proposição 2.2.3, γ tem um vértice ordinário em t se, e somente se, $a_2(t) \neq 0$, $a_3(t) = 0$ e $a_4(t) \neq a_2^3(t)$.

Mostremos que $\mu \pitchfork N_2$, ou seja, que $Im T\mu(t) + N_{2\mu(t)} = \mathbb{R}_{\mu(t)}^2$.

Note que $N_{2\mu(t)} = \langle (1, 0)_{\mu(t)} \rangle$ e $Im T\mu(t) = \frac{d}{dt}(\mu(t))(I_t) = [h'(\xi)]^{-1}(0, 4(a_4(t) - a_2^3(t)))(I_t) = \langle (0, 1)_{\mu(t)} \rangle$.

Logo,

$$Im T\mu(t) + N_{2\mu(t)} = \langle (0, 1)_{\mu(t)} \rangle + \langle (1, 0)_{\mu(t)} \rangle = \mathbb{R}_{\mu(t)}^2.$$

Portanto, $\mu \pitchfork N_2$.

(iii) Suponhamos que $\mu(I)$ é uma curva regular.

Como $\frac{d}{dt}(\mu(t)) = [h'(\xi)]^{-1}(3a_3(t), 4(a_4(t) - a_2^3(t)))$, então $a_3(t) \neq 0$ ou $a_4(t) \neq (a_2(t))^3$, para todo $t \in I$.

Se $\gamma(t)$ é um vértice, então $a_2(t) \neq 0$ e $a_3(t) = 0$. Logo, $a_4(t) \neq (a_2(t))^3$, ou seja, $\gamma(t)$ é um vértice ordinário. Portanto, todos os vértices de γ são ordinários.

Além disso, suponhamos que todos os vértices e inflexões de γ são ordinários. Mostremos que $\mu(I)$ é regular.

Suponhamos, por absurdo, que $\mu(I)$ não é regular em t_0 . Então $a_3(t_0) = 0$ e $a_4(t_0) = (a_2(t_0))^3$.

Se $\gamma(t_0)$ é um vértice, então $a_2(t_0) \neq 0$ e $a_3(t_0) = 0$. No entanto, como $a_4(t_0) = (a_2(t_0))^3$, então $\gamma(t_0)$ é um vértice de ordem maior, o que contradiz a hipótese.

Se $\gamma(t_0)$ não é um vértice, então $a_2(t_0) = 0$. Logo, $a_2(t_0) = a_3(t_0) = 0$, ou seja, $\gamma(t_0)$ é uma inflexão de ordem maior, o que também contradiz a hipótese.

Portanto, $\mu(I)$ é uma curva regular. □

Segue do item (i) da proposição anterior que, quando $k = 3$, $\mu(I)$ somente pode tangenciar o eixo a_3 na origem.

Nosso objetivo agora é mostrar que quase toda curva regular plana compacta, ou seja, $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tem somente inflexões e vértices ordinários. Sejam N_1 o eixo a_3 , N_2 o eixo a_2 e N_3 o subconjunto dos polinômios de V_4 tais que $a_3 = 0$ e $a_4 = a_2^3$ (representado na Figura 2.3). Tais conjuntos caracterizam os pontos que são inflexões (N_1) e vértices (N_2) em V_3 e vértices de ordem maior (N_3) em V_4 . É natural esperar que pequenas perturbações em γ façam com que μ deixe de intersectar um desses conjuntos, os quais são variedades. Assim, do estudo feito no Capítulo 1, esperamos que μ seja transversal a tais variedades para quase toda perturbação de γ , ou seja, o resultado que necessitamos é um resultado de transversalidade, o qual enunciamos no próximo teorema e, do qual obtemos os resultados de genericidade que queríamos.

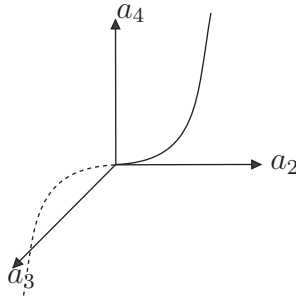


Figura 2.3: O conjunto de vértices de ordem maior em V_4 .

No entanto, devemos nos atentar ao fato de que não sabemos como pequenas perturbações em γ interferem em μ . Para resolver tal problema, tomaremos perturbações de γ dadas de uma forma especial, como segue.

Seja P_k o conjunto das aplicações $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ em que cada função coordenada é uma função polinomial de grau menor ou igual a k . Logo, um elemento ψ de P_k é determinado pelos coeficientes dos monômios $x^i y^j$ de cada função coordenada, sendo $0 \leq i + j \leq k$. Há no total $1 + 2 + \dots + (k + 1) = \frac{1}{2}(k + 1)(k + 2)$ monômios de grau menor ou igual a k . Logo, P_k pode ser identificado (isomorfo) com $\mathbb{R}^{(k+1)(k+2)}$.

No que segue consideremos $I = S^1$, ou seja, $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$. A aplicação identidade $\text{id} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\text{id}(x, y) = (x, y)$ é um elemento de P_k ($k \geq 1$). Como $d(\text{id})_{(x,y)}$ é um isomorfismo, para todo (x, y) , e ter posto máximo é uma condição aberta, então existe \mathcal{U} uma vizinhança de id em P_k tal que se $\psi \in \mathcal{U}$, então $d\psi_{(x,y)}$ é isomorfismo para todo (x, y) e, portanto, $(\psi \circ \gamma)'(t) = d\psi_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) \neq 0$, ou seja, $\psi \circ \gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva regular, para todo $\psi \in \mathcal{U}$.

O próximo teorema é o principal resultado desta seção, o qual nos permitirá obter a genericidade de algumas propriedades de curvas planas, como veremos mais adiante, e pode ser encontrado também como o resultado (4.1), p. 538 de [9].

Teorema 2.2.6 ([7], p. 233) *Seja γ uma curva plana compacta. Existe um aberto $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}$ em P_k contendo a aplicação identidade, tal que a aplicação $\mu : S^1 \times \mathcal{U}_1 \rightarrow V_k$ dada por $\mu(t, \psi) = \mu_{\gamma \circ \psi}(t)$ é uma submersão, onde $\mu_{\gamma \circ \psi}$ é a aplicação de Monge-Taylor de ordem k de $\gamma \circ \psi$. Consequentemente, μ é transversal a qualquer variedade $N \subset V_k$*

Demonstração. É suficiente mostrar que μ é submersão em $(t, \text{id}) \in S^1 \times \mathcal{U}$. De fato, se μ é submersão em (t, id) então, como ser submersão é uma condição aberta, ou seja, se uma função é submersão num ponto, então ela continua sendo em uma vizinhança do ponto, existe uma vizinhança de (t, id) em $S^1 \times \mathcal{U}$, onde μ é submersão. Assim, usando a projeção na primeira coordenada e que projeção é uma aplicação aberta, obtemos uma cobertura aberta para S^1 . Como S^1 é compacta, então existe uma subcobertura finita, e tomando a projeção na segunda coordenada dos respectivos abertos de $S^1 \times \mathcal{U}$, obtemos o conjunto \mathcal{U}_1 , para o qual μ continua submersão.

Seja $t_0 \in S^1$ arbitrário. Analogamente ao que foi feito antes, por uma escolha de coordenadas podemos supor $\gamma(t_0) = 0 \in \mathbb{R}^2$ e $\gamma(S^1)$ dada pela equação $y = f(x)$ próximo da origem, onde $f(0) = f'(0) = 0$. Assim, $\mu(t_0, \text{id}) = j^k f(0)$ (tal mudança de coordenadas não afeta o resultado, pois ela é a composta de uma translação com uma aplicação linear (rotação), o que acarreta que a aplicação de Monge-Taylor é a mesma).

Mostremos que $d\mu_{(t_0, \text{id})}$ é sobrejetora. Considere $F(x) \in V_k$ e definimos $\psi^s(x, y) = (x, y + sF(x))$, $s \in \mathbb{R}$. Note que para s próximo de 0, digamos $s \in (-\epsilon, \epsilon)$, temos $\psi^s \in \mathcal{U}$. Considere o caminho $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S^1 \times \mathcal{U}$, dado por $\alpha(s) = (t_0, \psi^s)$. Note que $\alpha(0) = (t_0, \psi^0) = (t_0, \text{id})$. Como

$$\psi^s(\gamma(t)) = \psi^s(u, f(u)) = (u, f(u) + sF(u)) = (u, (f + sF)(u))$$

e F tem grau maior ou igual a 2, então $\psi^s \circ \gamma$ é localmente em $\psi^s(\gamma(t_0)) = \psi^s(0, 0) = (0, sF(0)) = (0, 0)$, o gráfico de $(f + sF)$ e, assim, a aplicação de Monge-Taylor de $\psi^s(\gamma(S^1))$ em t_0 é $j^k(f + sF)(0)$. Seja $\beta = \mu \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow V_k$, ou seja, $\beta(s) = \mu(t_0, \psi^s)$. Então $d\mu_{(t_0, \text{id})}(\alpha'(0)) = \beta'(0)$ e

$$\begin{aligned} \beta'(0) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\beta(s) - \beta(0)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\mu(t_0, \psi^s(x, y)) - \mu(t_0, \text{id})}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\mu_{\psi^s \circ \gamma}(t_0) - \mu_{\gamma}(t_0)}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{j^k(f + sF)(0) - j^k f(0)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{j^k f(0) + s j^k F(0) - j^k f(0)}{s} \\ &= j^k F(0) = F(x). \end{aligned}$$

Logo, $d\mu_{(t_0, \text{id})}(\alpha'(0)) = F(x)$ e $F(x) \in V_k$ é qualquer, ou seja, $d\mu_{(t_0, \text{id})}$ é sobrejetora e, portanto, μ é submersão em (t_0, id) .

Daí, pela Observação 1.2.2(ii), o resultado segue. \square

Seja N uma variedade qualquer em V_k . Do teorema anterior e do Lema de Transversalidade de Thom 1.2.9, concluímos que $\mu_{\psi \circ \gamma}$ é transversal a N para quase todo $\psi \in \mathcal{U}_1$.

Observação 2.2.7 (i) *Considere $k = 3$ e suponhamos que γ tem uma inflexão de ordem maior em t_0 . Então, pela Proposição 2.2.3, $a_2(t_0) = a_3(t_0) = 0$, ou seja, a curva associada $\mu_\gamma(S^1)$ passa pela origem em t_0 . Considere a variedade N_1 formada pelos polinômios de V_3 tais que $a_2 = a_3 = 0$. Pelo discutido acima $\mu_{\psi \circ \gamma}$ é transversal a N_1 , para quase todo $\psi \in \mathcal{U}_1$. Como $\mu_{\psi \circ \gamma} : S^1 \rightarrow V_3$, $\dim S^1 + \dim N_1 = 1 < 2 = \dim V_3$ e $\mu_{\psi \circ \gamma} \pitchfork N_1$, para quase todo $\psi \in \mathcal{U}_1$, então, pela Observação 1.2.2(i), $\mu_{\psi \circ \gamma}(S^1) \cap N_1 = \emptyset$, para quase todo $\psi \in \mathcal{U}_1$. Isto significa que quase toda curva $\psi \circ \gamma$ próxima de γ não tem inflexão de ordem maior. Em particular, existe uma sequência (ψ_n) em \mathcal{U}_1 convergindo para id , tal que $\psi_n \circ \gamma$ não tem inflexões de ordem maior, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

(ii) *Considere $k = 4$ e suponhamos que γ tem um vértice de ordem maior em t_0 . Então, pela Proposição 2.2.3, $a_2(t_0) \neq 0, a_3(t_0) = 0$ e $a_4(t_0) = (a_2(t_0))^3$, ou seja, a curva associada $\mu_\gamma(S^1)$ intersecta a variedade N_2 , formada pelos polinômios de V_4 tais que $a_3 = 0$ e $a_4 = a_2^3$, em t_0 . Pelo discutido anteriormente $\mu_{\psi \circ \gamma}$ é transversal a N_2 , para quase todo $\psi \in \mathcal{U}_1$. Como $\mu_{\psi \circ \gamma} : S^1 \rightarrow V_4$, $\dim S^1 + \dim N_2 = 2 < \dim V_4 = 3$ e $\mu_{\psi \circ \gamma} \pitchfork N_2$, para quase todo $\psi \in \mathcal{U}_1$, então, pela Observação 1.2.2(i), $\mu_{\psi \circ \gamma}(S^1) \cap N_2 = \emptyset$ para quase todo $\psi \in \mathcal{U}_1$. Isto significa que quase toda curva $\psi \circ \gamma$ próxima de γ não tem vértices de ordem maior. Em particular, existe uma sequência (ψ_n) em \mathcal{U}_1 convergindo para id , tal que $\psi_n \circ \gamma$ não tem vértices de ordem maior, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

A seguir reescrevemos a definição de propriedade aberta, densa e genérica no conjunto das curvas regulares planas usando as notações atuais.

- Uma propriedade \mathcal{P} , no conjunto das curvas planas regulares, é dita **densa** se, para toda curva regular $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, existe uma família de curvas planas regulares $\tilde{\gamma} : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^2$, com U uma vizinhança de 0 em \mathbb{R}^m (para algum $m \geq 1$), tal que $\tilde{\gamma}(t, 0) = \gamma(t)$ e existe uma sequência (u_n) em U , com $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, de forma que γ_n possui a propriedade \mathcal{P} , para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $\gamma_n(t) = \tilde{\gamma}(t, u_n)$.

- Uma propriedade \mathcal{P} , no conjunto das curvas planas regulares, é dita **aberta** se, para toda curva regular $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ com a propriedade \mathcal{P} e para toda família de curvas planas regulares $\tilde{\gamma} : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde U é uma vizinhança qualquer de 0 em \mathbb{R}^m (para algum $m \geq 1$), com $\tilde{\gamma}(t, 0) = \gamma(t)$, temos $\tilde{\gamma}_u$ com a propriedade \mathcal{P} , para todo u em alguma vizinhança U_1 de 0, onde $\tilde{\gamma}_u(t) = \tilde{\gamma}(t, u)$.

- Uma propriedade \mathcal{P} , no conjunto das curvas planas regulares, é dita **genérica** se, \mathcal{P} é aberta e densa.

De posse das definições e resultados anteriores, chegamos ao resultado esperado. Na sua demonstração usamos o símbolo lógico \wedge , que significa “e”. Parte da proposição a seguir pode ser encontrada também como o resultado (4.9), p. 540 de [9].

Teorema 2.2.8 ([7], p. 235) *A propriedade, no conjunto das curvas planas compactas, de ter um número finito de inflexões e vértices ordinários e não ter inflexões e vértices de ordem maior é genérica.*

Demonstração. Considere as seguintes propriedades

- \mathcal{P}_1 : “ γ tem somente inflexões ordinárias”;
- \mathcal{P}_2 : “ γ tem somente vértices ordinários”;
- \mathcal{P}_3 : “ γ tem um número finito de inflexões”;
- \mathcal{P}_4 : “ γ tem um número finito de vértices”.

• Mostremos primeiramente que a propriedade $\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2$ (ter somente inflexões e vértices ordinários) é aberta.

Sejam N_1 o subconjunto formado pelos polinômios de V_3 tais que $a_2 = a_3 = 0$ e N_2 o subconjunto formado pelos polinômios de V_4 tais que $a_3 = 0$ e $a_4 = a_2^3$. Considere $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tendo a propriedade $\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2$ e $\tilde{\gamma} : S^1 \times U \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma família de curvas planas regulares (para alguma vizinhança U de 0 em algum \mathbb{R}^m) com $\tilde{\gamma}_0 = \gamma$ (onde $\tilde{\gamma}_0(t) = \tilde{\gamma}(t, 0)$). Sejam $\mu : S^1 \times U \rightarrow V_3$ e $\tilde{\mu} : S^1 \times U \rightarrow V_4$ as famílias de aplicações de Monge-Taylor de ordem 3 e 4, respectivamente, de $\tilde{\gamma}$. Note que N_1 e N_2 são subconjuntos fechados de V_3 e V_4 , respectivamente, S^1 é compacta, μ_γ é transversal a N_1 (pois $\mu_\gamma(S^1) \cap N_1 = \emptyset$, já que γ não tem inflexões de ordem maior) e $\tilde{\mu}_\gamma$ é transversal a N_2 (pois $\tilde{\mu}_\gamma(S^1) \cap N_2 = \emptyset$, já que γ não tem vértices de ordem maior). Então, pela Proposição 1.3.4, $\mu_{\tilde{\gamma}_u}$ é transversal a N_1 e $\tilde{\mu}_{\tilde{\gamma}_v}$ é transversal a N_2 , para u em uma vizinhança $U_1 \subset U$ de 0 e v em uma vizinhança $U_2 \subset U$ de 0. Tomando $U'_1 = U_1 \cap U_2 \subset U$, temos $\mu_{\tilde{\gamma}_u}$ transversal a N_1 e $\tilde{\mu}_{\tilde{\gamma}_u}$ transversal a N_2 , para todo $u \in U'_1$. Como $\dim N_1 = 0$, $\dim N_2 = 1$, $\dim S^1 = 1$ e $\mu_{\tilde{\gamma}_u} \pitchfork N_1$ e $\tilde{\mu}_{\tilde{\gamma}_u} \pitchfork N_2$, para todo $u \in U'_1$, então, pela Observação 1.2.2(i), $\mu_{\tilde{\gamma}_u}(S^1) \cap N_1 = \emptyset$ e $\tilde{\mu}_{\tilde{\gamma}_u}(S^1) \cap N_2 = \emptyset$, para todo $u \in U'_1$.

Portanto, $\tilde{\gamma}_u$ tem somente inflexões e vértices ordinários, para todo $u \in U'_1$, ou seja, essa propriedade é aberta.

• Mostremos agora que a propriedade $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2 \wedge \mathcal{P}_3 \wedge \mathcal{P}_4$ (ter um número finito de inflexões e vértices ordinários e não ter inflexões e vértices de ordem maior) é aberta.

Note primeiramente que, pela Proposição 2.2.5, se γ tem uma inflexão ordinária (resp. vértice ordinário) em $t \in S^1$, então a imagem da aplicação $\mu_\gamma : S^1 \rightarrow V_3$ intersecta o eixo a_3 (resp. a_2) em $\mu_\gamma(t)$ e é transversal a esse eixo neste ponto.

Sejam $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana regular com a propriedade \mathcal{P} e $\tilde{\gamma} : S^1 \times U \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma família de curvas planas regulares (para alguma vizinhança U de 0 em algum \mathbb{R}^m),

com $\tilde{\gamma}_0 = \gamma$ (onde $\tilde{\gamma}_0(t) = \tilde{\gamma}(t, 0)$). Do comentário anterior, segue que $\mu_\gamma : S^1 \rightarrow V_3$ é transversal aos eixos a_3 e a_2 . Como S^1 é compacta e os eixos a_3 e a_2 são subconjuntos fechados de V_3 , então, pela Proposição 1.3.4, $\mu_{\tilde{\gamma}_u} : S^1 \rightarrow V_3$ é transversal ao eixo a_3 , para todo $u \in U_3 \subset U$ e transversal ao eixo a_2 , para todo $u \in U_4 \subset U$, onde U_3 e U_4 são vizinhanças abertas de 0. Logo, $\mu_{\tilde{\gamma}_u}$ é transversal aos eixos a_3 e a_2 , para todo $u \in U'_2 = U_3 \cap U_4 \subset U$.

Sejam N_3 o eixo a_3 e N_4 o eixo a_2 em V_3 . Como $\mu_{\tilde{\gamma}_u}$ é transversal a N_3 e a N_4 , para todo $u \in U'_2$, $\dim S^1 + \dim N_i = 2 = \dim V_3$, $i = 3, 4$, e S^1 é compacta, então, pela Proposição 1.2.6, $\mu_{\tilde{\gamma}_u}^{-1}(N_i)$ é finito, $i = 3, 4$, para todo $u \in U'_2$, ou seja, $\tilde{\gamma}_u$ tem um número finito de inflexões e vértices, para todo $u \in U'_2 \subset U$.

Tomando $U' = U'_1 \cap U'_2$, concluímos que $\tilde{\gamma}_u$ tem um número finito de inflexões e vértices ordinários e não tem inflexões e vértices de ordem maior, para todo $u \in U'$, ou seja, a propriedade \mathcal{P} é aberta.

• Mostremos que a propriedade $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2 \wedge \mathcal{P}_3 \wedge \mathcal{P}_4$ (ter um número finito de inflexões e vértices ordinários e não tem inflexões e vértices de ordem maior) é densa.

Seja $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular. Considere N_1, N_2, N_3 e N_4 como anteriormente. No entanto, note que N_1, N_3 e N_4 são subvariedades de V_3 enquanto que N_2 é subvariedade de V_4 . Para trabalhar com todas subvariedades em um mesmo espaço, considere a projeção natural $\pi : V_4 \rightarrow V_3$ nas duas primeiras entradas (fazendo a identificação de V_k com \mathbb{R}^{k-1}). Assim, sejam $N'_1 = \pi^{-1}(N_1)$, $N'_2 = N_2$, $N'_3 = \pi^{-1}(N_3)$ e $N'_4 = \pi^{-1}(N_4)$. Como N_1, N_2, N_3 e N_4 são variedades suaves e π é uma submersão (logo, transversal a N_1, N_3 e N_4) então, pela Teorema 1.2.5, N'_1, N'_3 e N'_4 são variedades suaves.

Aplicando o Teorema 2.2.6, concluímos que existem $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3$ e \mathcal{U}_4 vizinhanças de id em P_4 tal que $\mu : S^1 \times \mathcal{U}_i \rightarrow V_4$ é transversal a N'_i , para $i = 1, 2, 3, 4$. Seja $\mathcal{U}_5 = \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \cap \mathcal{U}_3 \cap \mathcal{U}_4$ vizinhança de id em P_4 . Assim, $\mu : S^1 \times \mathcal{U}_5 \rightarrow V_4$ é transversal a N'_i , para $i = 1, 2, 3, 4$. Pelo Lema de Transversalidade de Thom 1.2.9, temos $\mu_{\psi \circ \gamma} \pitchfork N'_i$, para $i = 1, 2, 3, 4$, para quase todo $\psi \in \mathcal{U}_5$. Em particular, existe uma sequência (ψ_n) em \mathcal{U}_5 tal que $\mu_{\psi_n \circ \gamma} \pitchfork N'_i$, para $i = 1, 2, 3, 4$.

Vamos mostrar agora que $\psi_n \circ \gamma$ possui cada uma das propriedades \mathcal{P}_i , $i = 1, 2, 3, 4$.

Como $\dim S^1 + \dim N'_1 = 2 < 3 = \dim V_4$ e $\mu_{\psi_n \circ \gamma} \pitchfork N'_1$, então, pela Observação 1.2.2(i), $\mu_{\psi_n \circ \gamma}(S^1) \cap N'_1 = \emptyset$, para todo n . Logo, $\pi(\mu_{\psi_n \circ \gamma}(S^1)) \cap \pi(N'_1) = \emptyset$, uma vez que N'_1 é o eixo a_4 . Além disso, $\pi(\mu_{\psi_n \circ \gamma}(S^1))$ é a imagem de $\mu_{\psi_n \circ \gamma}$ com o contra-domínio sendo V_3 . Portanto, concluímos que $\mu_{\psi_n \circ \gamma}(S^1) \cap N_1 = \emptyset$, ou seja, que $\psi_n \circ \gamma$ tem a propriedade \mathcal{P}_1 .

Como $\dim S^1 + \dim N_2 = 2 < 3 = \dim V_4$ e $\mu_{\psi_n \circ \gamma} \pitchfork N_2$, então, pela Observação 1.2.2(i), $\mu_{\psi_n \circ \gamma}(S^1) \cap N_2 = \emptyset$, para todo n , ou seja, $\psi_n \circ \gamma$ tem a propriedade \mathcal{P}_2 .

Como $\dim S^1 + \dim N'_3 = 3 = \dim V_4$, $\mu_{\psi_n \circ \gamma} \pitchfork N'_3$ e S^1 é compacta, então, pela Proposição 1.2.6, $\mu_{\psi_n \circ \gamma}^{-1}(N'_3)$ é finito, ou seja, o número de parâmetros $t \in S^1$ tais que $\mu_{\psi_n \circ \gamma}(t) \in N'_3$ é finito. Dessa forma, considerando a aplicação de Monge-Taylor com

contra-domínio sendo V_3 (ou seja, estamos tomando a projeção π), concluímos que o número de parâmetros $t \in S^1$ tais que $\mu_{\psi_n \circ \gamma}(t) \in N_3$ é finito, ou seja, $\mu_{\psi_n \circ \gamma}^{-1}(N_3)$ é finito. Portanto, $\psi_n \circ \gamma$ tem a propriedade \mathcal{P}_3 .

De modo análogo, usando N'_4 ao invés de N'_3 , concluímos que $\psi_n \circ \gamma$ tem a propriedade \mathcal{P}_4 .

Portanto, como $\psi_n \circ \gamma$ tem as propriedades $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$ e \mathcal{P}_4 , então $\psi_n \circ \gamma$ tem a propriedade \mathcal{P} .

Finalmente, usando a associação de \mathcal{U}_5 (vizinhança de id em P_4) com U (vizinhança de 0 em \mathbb{R}^{30}), concluímos que existe uma sequência u_n que converge a 0 associada a sequência ψ_n . Seja $\tilde{\gamma} : S^1 \times U \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\tilde{\gamma}_u = \psi \circ \gamma$. Assim, existe uma sequência (u_n) em U tal que $u_n \rightarrow 0$ e $\tilde{\gamma}_{u_n} = \psi_n \circ \gamma$ tem a propriedade \mathcal{P} , ou seja, \mathcal{P} é densa. \square

Logo, com o teorema anterior, mostramos que a propriedade de ter um número finito de inflexões e vértices ordinários e não ter inflexões e vértices de ordem maior é “estável” no sentido que, ao deformarmos levemente uma curva em uma família de dimensão finita, essas propriedades são preservadas, enquanto que o contrário dessas propriedades são “instáveis” (uma curva que não possui tais propriedades está arbitrariamente próxima de curvas que possuem todas elas).

Utilizando o teorema anterior e o Corolário 2.1.16 podemos concluir o seguinte resultado.

Corolário 2.2.9 (i) *Genericamente a função distância ao quadrado de uma curva plana compacta tem somente singularidades A_k , $k \leq 3$. Além disso, o número de singularidades A_3 é finito.*

(ii) *Genericamente a função altura de uma curva plana compacta tem somente singularidades A_k , $k \leq 2$. Além disso, o número de singularidades A_2 é finito.*

2.3 Propriedades genéricas de curvas espaciais

Nossa principal referência para esta seção é o capítulo 9 de [7] e também utilizamos [4]. Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular suave, com I um subconjunto aberto e conexo de S^1 . Nosso objetivo é obter um resultado de transversalidade parecido com o que obtivemos para curvas planas. Para isso precisamos obter um sistema de coordenadas adequado para escrever a curva γ como gráfico de função nessas coordenadas. O modo mais natural para se fazer isso seria adotar o triedro de Serret-Frenet, no entanto, nem todas as curvas espaciais regulares possuem um triedro de Serret-Frenet bem definido (nos pontos em que a curvatura é nula, o vetor normal principal não está definido). Para resolver tal problema procedemos da forma a seguir.

Seja $V : I \rightarrow S^2$ uma família de vetores satisfazendo $\langle V(t), T(t) \rangle = 0$, para todo $t \in I$. Uma maneira de obter tal família é tomando um vetor $v \in S^2 \setminus T(I)$ e, para cada $t \in I$,

considerar $V(t)$ como normalização da projeção de v no plano ortogonal a $T(t)$, ou seja,

$$V(t) = \frac{v - \langle v, T(t) \rangle T(t)}{\|v - \langle v, T(t) \rangle T(t)\|}.$$

Seja $W : I \rightarrow S^2$ dado por $W(t) = T(t) \times V(t)$. De modo análogo ao feito para curvas planas só que agora usando o sistema de coordenadas ortonormais $\{T, V, W\}$, podemos escrever $\gamma(I)$, localmente em t_0 , da forma $(\xi, f_t(\xi), g_t(\xi))$, ou seja, como gráfico da aplicação cujas funções coordenadas são f_t e g_t , com f_t e g_t suaves e $f'_t(0) = g'_t(0) = 0$.

Considere novamente o conjunto V_k dos polinômios em uma variável ξ de grau maior ou igual a 2 e menor ou igual a k . Dessa forma, definimos a aplicação de Monge-Taylor para curvas espaciais como a aplicação suave $\mu_\gamma : I \rightarrow V_k \times V_k$ dada por $\mu_\gamma(t) = (j^k f_t(0), j^k g_t(0))$. Claramente a aplicação de Monge-Taylor depende diretamente da escolha de V .

Considere P_k o conjunto das aplicações $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ em que cada função coordenada é uma função polinomial de grau menor ou igual a k . Logo, um elemento ψ de P_k é determinado pelos coeficientes dos monômios $x^i y^j z^m$ de cada função coordenada, sendo $0 \leq i + j + m \leq k$. Há no total $\frac{1}{2} \sum_{i=0}^k (k-i+1)(k-i+2)$ monômios de grau menor ou igual a k . Logo, P_k pode ser identificado (isomorfo) com \mathbb{R}^m , com $m = \frac{3}{2} \sum_{i=0}^k (k-i+1)(k-i+2)$.

As deformações de γ que estamos interessados são da forma $\psi \circ \gamma$, com $\psi \in P_k$, para algum k . Uma pergunta natural que podemos fazer é como definir a aplicação de Monge-Taylor para $\psi \circ \gamma$? Devemos entender como a família $V(t)$ deve ser obtida para a perturbação $\psi \circ \gamma$ de γ . Consideremos agora $I = S^1$.

Seja \mathcal{U} uma vizinhança de id em P_k consistindo de todas aplicações polinomiais que aplicam um aberto de \mathbb{R}^3 contendo $\gamma(I)$ difeomorficamente em sua imagem. Assim, $d\psi_{\gamma(t)}(V(t)) \neq 0$ e, uma vez que $(\psi \circ \gamma)'(t) = d\psi_{\gamma(t)}(\gamma'(t))$ é tangente a $\psi \circ \gamma$ em t , então $d\psi_{\gamma(t)}(V(t))$ não é tangente a $\psi \circ \gamma$ em t . Logo, projetando o vetor $d\psi_{\gamma(t)}(V(t))$ no plano normal a $\psi \circ \gamma$ em t , obtemos uma família suave de vetores $V_\psi(t)$. Note que quando ψ é a identidade, então $V_\psi(t) = V(t)$, dado anteriormente.

Seja

$$\mu : S^1 \times \mathcal{U} \rightarrow V_k \times V_k$$

a família de aplicações de Monge-Taylor das deformações (usando a família de vetores $V_\psi(t)$) dada por

$$\mu_\psi(t) = \mu(t, \psi) = \mu_{\psi \circ \gamma}(t).$$

Com estas considerações e notações, temos o principal resultado desta seção.

Teorema 2.3.1 ([7], p. 238) *Considere a aplicação $\mu : S^1 \times \mathcal{U} \rightarrow V_k \times V_k$ como acima. Existe uma vizinhança $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}$ de id em P_k , tal que a aplicação $\mu : S^1 \times \mathcal{U}_1 \rightarrow V_k \times V_k$ é*

uma submersão. Consequentemente, μ é transversal a qualquer variedade $N \subset V_k \times V_k$.

Demonstração. É suficiente mostrar que μ é submersão em $(t, \text{id}) \in S^1 \times \mathcal{U}$. De fato, se μ é submersão em (t, id) então, como ser submersão é uma condição aberta, ou seja, se uma função é submersão num ponto, então ela continua sendo em uma vizinhança do ponto, existe uma vizinhança de (t, id) em $S^1 \times \mathcal{U}$, onde μ é submersão. Assim, usando a projeção na primeira coordenada e que projeção é uma aplicação aberta, obtemos uma cobertura aberta para S^1 . Como S^1 é compacta, então existe uma subcobertura finita, e tomando a projeção na segunda coordenada dos respectivos abertos de $S^1 \times \mathcal{U}$, obtemos o conjunto \mathcal{U}_1 , para o qual μ continua submersão.

Seja $t_0 \in S^1$. Fazendo rotações e translações, podemos supor $\gamma(t_0) = (0, 0, 0)$, $T(t_0) = (1, 0, 0)$, $V(t_0) = (0, 1, 0)$ e $W(t_0) = (0, 0, 1)$. Então $\gamma(S^1)$ pode ser escrito, localmente em t_0 , da forma $(\xi, f(\xi), g(\xi))$, com $f(0) = g(0) = f'(0) = g'(0) = 0$. Assim, $\mu_{\gamma(t_0)} = \mu(t_0, \text{id}) = (j^k f(0), j^k g(0))$.

Mostremos que $d\mu_{(t_0, \text{id})}$ é sobrejetora. Considere $F(x)$ e $G(x)$ em V_k e definimos $\psi^s(x, y, z) = (x, y + sF(x), z + sG(x))$, com $s \in \mathbb{R}$.

Note que, para s próximo de 0, digamos $s \in (-\epsilon, \epsilon)$, temos ψ^s próximo de id e, portanto, em \mathcal{U} . Considere o caminho $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S^1 \times \mathcal{U}$ dado por $\alpha(s) = (t_0, \psi^s)$. Observe que $\alpha(0) = (t_0, \text{id})$. Como

$$\psi^s(\gamma(t)) = \psi^s(u, f(u), g(u)) = (u, f(u) + sF(u), g(u) + sG(u)) = (u, (f + sF)(u), (g + sG)(u))$$

e F e G tem grau ≥ 2 , então $\psi^s \circ \gamma$ é, localmente em $\psi^s(\gamma(t_0)) = (0, sF(0), sG(0)) = (0, 0, 0)$, escrito da forma $(\xi, (f + sF)(\xi), (g + sG)(\xi))$, e assim, $\mu(t_0, \psi^s) = \mu_{\psi^s \circ \gamma}(t_0) = (j^k(f + sF)(0), j^k(g + sG)(0))$.

Seja $\beta = \mu \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow V_k \times V_k$, ou seja, $\beta(s) = \mu(t_0, \psi^s)$. Então, $\beta'(0) = d\mu_{(t_0, \text{id})}(\alpha'(0))$. Como

$$\begin{aligned} \beta'(0) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\beta(s) - \beta(0)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\mu(t_0, \psi^s) - \mu(t_0, \text{id})}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(j^k(f + sF)(0), j^k(g + sG)(0)) - (j^k f(0), j^k g(0))}{s} \\ &= \left(\lim_{s \rightarrow 0} \frac{j^k f(0) + s j^k F(0) - j^k f(0)}{s}, \lim_{s \rightarrow 0} \frac{j^k g(0) + s j^k G(0) - j^k g(0)}{s} \right) \\ &= (j^k F(0), j^k G(0)) = (F(x), G(x)). \end{aligned}$$

Logo, $d\mu_{(t_0, \text{id})}(\alpha'(0)) = (F(x), G(x))$. Como $F(x)$ e $G(x)$ são arbitrários, então $d\mu_{(t_0, \text{id})}$ é sobrejetora e, portanto, μ é submersão em (t_0, id) . \square

Usando o teorema anterior e a definição de propriedade genérica, temos as seguintes aplicações.

A primeira aplicação diz que, genericamente, a curvatura de uma curva espacial compacta não se anula. Dessa forma, se uma curva tem curvatura que se anula, então existe uma curva próxima (no sentido de que podem ser vistas em uma família de curvas suaves com parâmetros próximos) com curvatura que não se anula. Tal resultado trata-se do exercício proposto 9.10(1), p. 239, do livro [7] e a parte relacionada a densidade pode ser encontrada demonstrada em [4], p. 46. Na demonstração que apresentamos a seguir não usamos as ideias apresentadas em [4], mas sim procuramos usar as técnicas e resultados abordados nesta dissertação.

Proposição 2.3.2 *Genericamente, a curvatura de uma curva espacial compacta não se anula.*

Demonstração. Do discutido anteriormente, sabemos que γ pode ser reparametrizada, localmente em t_0 , por $\alpha(\xi) = (\xi, f(\xi), g(\xi))$. Logo,

$$\kappa_\alpha(\xi) = \frac{\|\alpha'(\xi) \times \alpha''(\xi)\|}{\|\alpha'(\xi)\|^3} = \sqrt{\frac{(f'(\xi)g''(\xi) - f''(\xi)g'(\xi))^2 + (f''(\xi))^2 + (g''(\xi))^2}{(1 + (f'(\xi))^2 + (g'(\xi))^2)^3}}.$$

Por outro lado, $\kappa_\gamma(t_0) = \kappa_\alpha(0) = \sqrt{(f''(0))^2 + (g''(0))^2}$. Seja $j^k f(0) = a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + \dots + a_k\xi^k$ e $j^k g(0) = b_2\xi^2 + b_3\xi^3 + \dots + b_k\xi^k$, onde $a_i = \frac{f^{(i)}(0)}{i!}$ e $b_i = \frac{g^{(i)}(0)}{i!}$. Logo,

$$\kappa_\gamma(t_0) = \sqrt{(f''(0))^2 + (g''(0))^2} = \sqrt{4a_2^2 + 4b_2^2} = 2\sqrt{a_2^2 + b_2^2}.$$

Assim, $\kappa_\gamma(t_0) = 0$ se, e somente se, $a_2 = b_2 = 0$.

Mostremos que a propriedade

$$\mathcal{P}: \text{“}\kappa_\gamma \text{ não se anula”}$$

é genérica. Para isso, considere N a variedade suave em $V_2 \times V_2$ formada pelos polinômios com $a_2 = b_2 = 0$.

Primeiramente, mostremos que a propriedade \mathcal{P} é aberta.

Sejam $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ regular, com a propriedade \mathcal{P} , e $\tilde{\gamma} : S^1 \times U \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma família de curvas regulares, com U uma vizinhança de 0 em algum \mathbb{R}^m (para algum $m \geq 1$) e $\tilde{\gamma}(t, 0) = \gamma(t)$. Mostremos que $\tilde{\gamma}_u$ tem a propriedade \mathcal{P} , para todo $u \in U_1$, onde $U_1 \subset U$ é vizinhança de 0 e $\tilde{\gamma}_u(t) = \tilde{\gamma}(t, u)$.

Seja $\mu : S^1 \times U \rightarrow V_2 \times V_2$ a família de aplicações de Monge-Taylor de $\tilde{\gamma}$ como no Teorema 2.3.1. Como γ tem a propriedade \mathcal{P} e $\kappa_\gamma(t) = \kappa_\alpha(0)$, para α a reparametrização local de γ em t da forma $(\xi, f_t(\xi), g_t(\xi))$, então $\kappa_\gamma(t) = 2\sqrt{a_2^2(t) + b_2^2(t)} \neq 0$, isto é, $\mu_\gamma(t) = (a_2(t), b_2(t)) \neq (0, 0)$, ou seja, $\mu_\gamma(S^1) \cap N = \emptyset$. Como $\dim S^1 + \dim N = 1 < 2 = \dim(V_2 \times V_2)$ e $\mu_\gamma(S^1) \cap N = \emptyset$, então, pela Observação 1.2.2(i), μ_γ é transversal a N . Assim, pela Proposição 1.3.4, $\mu_{\tilde{\gamma}_u}$ é transversal a N , para todo $u \in U_1$, onde U_1 é uma vizinhança de 0 em U .

Como $\mu_{\tilde{\gamma}_u} \pitchfork N$ e $\dim S^1 + \dim N = 1 < 2 = \dim(V_2 \times V_2)$, novamente pela Observação 1.2.2(i), $\mu_{\tilde{\gamma}_u}(S^1) \cap N = \emptyset$, para todo $u \in U_1$, ou seja, $\tilde{\gamma}_u$ tem a propriedade \mathcal{P} , para todo $u \in U_1$. Portanto, a propriedade \mathcal{P} é aberta.

Falta mostrar que a propriedade \mathcal{P} é densa.

Considere $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular. Pelo Teorema 2.3.1 e pelo Lema de Transversalidade de Thom 1.2.9, concluímos que $\mu_{\psi \circ \gamma}$ é transversal a N , para quase todo $\psi \in \mathcal{U}_1$, onde $\mu : S^1 \times \mathcal{U}_1 \rightarrow V_2 \times V_2$.

Como $\dim S^1 + \dim N = 1 < 2 = \dim(V_2 \times V_2)$ e $\mu_{\psi \circ \gamma} \pitchfork N$, para quase todo $\psi \in \mathcal{U}_1$, então, pela Observação 1.2.2(i), $\mu_{\psi \circ \gamma}(S^1) \cap N = \emptyset$, para quase todo $\psi \in \mathcal{U}_1$. Em particular, existe uma sequência (ψ_n) em \mathcal{U}_1 tal que $\mu_{\psi_n \circ \gamma}(S^1) \cap N = \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\psi_n \rightarrow \text{id}$, ou seja, $\psi_n \circ \gamma$ tem a propriedade \mathcal{P} .

Usando a associação de \mathcal{U}_1 (vizinhança de id em P_2) com U (vizinhança de 0 em \mathbb{R}^{30}), concluímos que existe uma sequência (u_n) em U tal que $u_n \rightarrow 0$ e cada termo u_n é unicamente associado ao termo ψ_n . Seja $\tilde{\gamma} : S^1 \times U \rightarrow \mathbb{R}^3$ a família de curvas regulares dada por $\tilde{\gamma}_u = \psi \circ \gamma$. Assim, encontramos uma sequência (u_n) em U tal que $u_n \rightarrow 0$ e $\tilde{\gamma}_{u_n} = \psi_n \circ \gamma$ tem a propriedade \mathcal{P} , ou seja, \mathcal{P} é densa.

Portanto, a propriedade \mathcal{P} é genérica, ou seja, genericamente, a curvatura de uma curva espacial compacta não se anula. \square

As próximas aplicações fazem um estudo da genericidade dos tipos de singularidades das funções altura e distância ao quadrado e serão fundamentais para o estudo da estrutura local de subconjuntos do espaço Euclidiano, feita na Seção 3.3 do Capítulo 3 deste trabalho, quanto a genericidade. Tal aplicação trata-se do exercício proposto 9.10(2), p. 239 do livro [7].

Proposição 2.3.3 *Genericamente, a função altura de uma curva espacial compacta tem somente singularidades A_k , com $k \leq 3$.*

Demonstração. A prova seguirá algumas etapas. Primeiramente, obtemos as condições para a função altura ter singularidade $A_{\geq k}$ com $1 \leq k \leq 4$. Posteriormente, mostramos que as singularidades $A_{\geq k}$ com $k = 3$ e 4 estão relacionadas com as soluções de certas equações. Em seguida, verificamos que o conjunto das soluções das equações relacionadas com singularidade $A_{\geq 4}$ é, sob certas condições, uma variedade suave. E, finalmente, mostramos que a propriedade “a função altura de uma curva espacial compacta tem somente singularidades A_k com $k \leq 3$ ” é genérica, utilizando as etapas anteriores.

Seja $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular suave e considere a reparametrização $\alpha : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ (a curva γ na forma normal de Monge) como feito no início desta seção. Note que a curva α é dada por $\alpha(\xi) = (\xi, a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + \dots, b_2\xi^2 + b_3\xi^3 + \dots)$. Considere a função altura h da curva α com respeito a $(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$, ou seja, $h(\xi) = \langle \alpha(\xi), (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}) \rangle$. Primeiramente, encontremos as condições para que h tenha singularidade $A_{\geq k}$ na origem, com $1 \leq k \leq 4$.

Note que

$$h'(0) = \langle \alpha'(0), (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2}) \rangle = \langle (1, 0, 0), (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2}) \rangle = x,$$

ou seja, $h'(0) = 0$ se, e somente se, $x = 0$.

Calculando as derivadas da função h e usando $x = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} h''(0) &= \langle (0, 2a_2, 2b_2), (0, y, \sqrt{1-y^2}) \rangle = 0 \Leftrightarrow -a_2y = b_2\sqrt{1-y^2}; \\ h'''(0) &= \langle (0, 6a_3, 6b_3), (0, y, \sqrt{1-y^2}) \rangle = 0 \Leftrightarrow -a_3y = b_3\sqrt{1-y^2}; \\ h^{(4)}(0) &= \langle (0, 24a_4, 24b_4), (0, y, \sqrt{1-y^2}) \rangle = 0 \Leftrightarrow -a_4y = b_4\sqrt{1-y^2}. \end{aligned}$$

Portanto, a função h tem, na origem, singularidade

$$\begin{aligned} A_{\geq 1} &\Leftrightarrow x = 0; \\ A_{\geq 2} &\Leftrightarrow x = 0 \text{ e } -a_2y = b_2\sqrt{1-y^2}; \\ A_{\geq 3} &\Leftrightarrow x = 0, -a_2y = b_2\sqrt{1-y^2} \text{ e } -a_3y = b_3\sqrt{1-y^2}; \\ A_{\geq 4} &\Leftrightarrow x = 0, -a_2y = b_2\sqrt{1-y^2}, -a_3y = b_3\sqrt{1-y^2} \text{ e } -a_4y = b_4\sqrt{1-y^2}. \end{aligned}$$

No que segue assumiremos $x = 0$.

- Mostremos que h tem singularidade $A_{\geq 3}$ na origem se, e somente se, $a_2b_3 - a_3b_2 = 0$.
(\Rightarrow) Suponhamos que h tem singularidade $A_{\geq 3}$ na origem. Assim,

$$\begin{cases} -a_2y = b_2\sqrt{1-y^2} \\ -a_3y = b_3\sqrt{1-y^2} \end{cases}.$$

Se $y = 0$, então $b_2 = b_3 = 0$ e, portanto, $a_2b_3 - a_3b_2 = 0$.

Se $y \neq 0$ e $b_2b_3 \neq 0$, então $\frac{-a_2}{b_2} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{y} = \frac{-a_3}{b_3}$ e, conseqüentemente, $a_2b_3 - a_3b_2 = 0$.

Se $y \neq 0$ e $b_2b_3 = 0$, então, claramente, $a_2b_3 - a_3b_2 = 0$.

- (\Leftarrow) Suponhamos que $a_2b_3 - a_3b_2 = 0$. Mostremos que h tem singularidade $A_{\geq 3}$ na origem, o que ocorre se o sistema

$$\begin{cases} -a_2y = b_2\sqrt{1-y^2} \\ -a_3y = b_3\sqrt{1-y^2} \end{cases}$$

tem alguma solução y .

Analisando os sinais dos coeficientes temos as seguintes soluções, as quais podem ser facilmente verificadas.

Se $a_2 < 0$, então $y = \frac{b_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$ é uma solução.

Se $a_2 > 0$, então $y = \frac{-b_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$ é uma solução.

Se $a_2 = 0$ e $a_3 = 0$, então, $y = \pm 1$ é uma solução.

Se $a_2 = 0$ e $a_3 < 0$, então $y = \frac{b_3}{\sqrt{a_3^2+b_3^2}}$ é uma solução.

Se $a_2 = 0$ e $a_3 > 0$, então $y = \frac{-b_3}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2}}$ é uma solução.

Como todos os casos foram abordados, concluímos que h tem singularidade $A_{\geq 3}$ na origem.

- Mostremos agora que h tem singularidade $A_{\geq 4}$ na origem se, e somente se, $a_2b_3 - a_3b_2 = 0$ e $a_2b_4 - a_4b_2 = 0$.

A função h tem singularidade $A_{\geq 4}$ na origem se, e somente se,

$$\begin{cases} -a_2y = b_2\sqrt{1-y^2} \\ -a_3y = b_3\sqrt{1-y^2} \\ -a_4y = b_4\sqrt{1-y^2} \end{cases} .$$

Usando a primeira e a segunda equações, obtemos o caso anterior, o que ocorre se, e somente se, $a_2b_3 - a_3b_2 = 0$. De modo análogo, podemos concluir que a primeira e terceira equações são válidas se, e somente se, $a_2b_4 - a_4b_2 = 0$.

- Mostremos que o subconjunto N de $V_4 \times V_4$ formado pelos polinômios que satisfazem $a_2b_4 - a_4b_2 = a_2b_3 - a_3b_2 = 0$, com $a_2 \neq 0$ ou $b_2 \neq 0$, é uma variedade suave.

Seja N' o subconjunto de \mathbb{R}^6 associado a N . Considere

$$A = \{(a_2, a_3, a_4, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^6; a_2 = b_2 = 0\}$$

e $g : \mathbb{R}^6 \setminus A \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $g(a_2, \dots, b_4) = (a_2b_4 - a_4b_2, a_2b_3 - a_3b_2)$. Note que $\mathbb{R}^6 \setminus A$ é aberto em \mathbb{R}^6 , que a matriz jacobiana de g em (a_2, \dots, b_4) é

$$\begin{pmatrix} b_4 & 0 & -b_2 & -a_4 & 0 & a_2 \\ b_3 & -b_2 & 0 & -a_3 & a_2 & 0 \end{pmatrix}$$

e que $N' = g^{-1}(0)$.

Como, fora dos pontos da forma $(0, a_3, a_4, 0, b_3, b_4)$, a matriz acima tem posto 2, então 0 é valor regular de g e, conseqüentemente, N' é variedade suave.

Usando o fato de que $V_4 \times V_4$ é isomorfo a $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ e que tal isomorfismo é submersão (pois é linear) concluímos que N é variedade suave (Teorema 1.2.5). Calculemos a dimensão de N .

Pela Proposição 1.1.7, $N'_p = \text{Ker } Tg(p)$, para todo $p \in N'$. Logo, basta calcular $\dim \text{Ker } Tg(p)$. Como 0 é valor regular de g , então $\dim \text{Im } Tg(p) = 2$. Logo, $\dim \text{Ker } Tg(p) = 6 - \dim \text{Im } Tg(p) = 4$. Portanto, $\dim N = \dim N' = \dim N'_p = 4$.

- Finalmente, mostremos que a propriedade

\mathcal{P} : “a função altura de uma curva espacial compacta tem somente singularidade A_k com $k \leq 3$ ”

é genérica.

Primeiramente, mostremos que a propriedade \mathcal{P} é aberta

Sejam $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ regular com a propriedade \mathcal{P} e $\tilde{\gamma} : S^1 \times U \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma família de curvas regulares, com U uma vizinhança de 0 em \mathbb{R}^m (para algum $m \geq 1$) com $\tilde{\gamma}(t, 0) = \gamma(t)$. Mostremos que $\tilde{\gamma}_u$ tem a propriedade \mathcal{P} , para todo $u \in U_1$, onde $U_1 \subset U$ é vizinhança de 0 e $\tilde{\gamma}_u(t) = \tilde{\gamma}(t, u)$.

Seja $\mu : S^1 \times U \rightarrow V_4 \times V_4$ a família de aplicações de Monge-Taylor de $\tilde{\gamma}$ como no Teorema 2.3.1. Como γ tem a propriedade \mathcal{P} , então a função altura de γ não tem singularidade $A_{\geq 4}$, ou seja, $a_2b_4 - a_4b_2 \neq 0$ ou $a_2b_3 - a_3b_2 \neq 0$, o que implica que $\mu_\gamma(S^1) \cap N = \emptyset$. Como $\dim S^1 + \dim N = 5 < 6 = \dim(V_4 \times V_4)$ e $\mu_\gamma(S^1) \cap N = \emptyset$, então, pela Observação 1.2.2(i), μ_γ é transversal a N . Assim, pela Proposição 1.3.4, $\mu_{\tilde{\gamma}_u}$ é transversal a N , para todo $u \in U_1$, onde U_1 é uma vizinhança de 0 em U . Novamente, como $\mu_{\tilde{\gamma}_u} \pitchfork N$ e $\dim S^1 + \dim N = 5 < 6 = \dim(V_4 \times V_4)$, então, pela Observação 1.2.2(i), $\mu_{\tilde{\gamma}_u}(S^1) \cap N = \emptyset$, para todo $u \in U_1$. Assim, para cada $u \in U_1$, temos ($a_2b_3 - a_3b_2 \neq 0$ ou $a_2b_4 - a_4b_2 \neq 0$) ou $a_2 = b_2 = 0$. Como κ_γ não se anula (pois, caso contrário, $a_2 = b_2 = 0$ e, conseqüentemente, $a_2b_3 - a_3b_2 = a_2b_4 - a_4b_2 = 0$, o que não ocorre, já que γ tem a propriedade \mathcal{P}), então, pela Proposição 2.3.2, existe uma vizinhança U_2 de 0 em U_1 tal que $\kappa_{\tilde{\gamma}_u}$ não se anula, para todo $u \in U_2$. Logo, como $\mu_{\tilde{\gamma}_u}(S^1) \cap N = \emptyset$, para todo $u \in U_1$, concluímos que $\tilde{\gamma}_u$ tem a propriedade \mathcal{P} , para todo $u \in U_2$. Portanto, a propriedade \mathcal{P} é aberta.

Mostremos que a propriedade \mathcal{P} é densa.

Considere $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular. Pelo Teorema 2.3.1 e pelo Lema de Transversalidade de Thom 1.2.9, concluímos que $\mu_{\psi \circ \gamma}$ é transversal a N , para quase todo $\psi \in \mathcal{U}_1$, onde $\mu : S^1 \times \mathcal{U}_1 \rightarrow V_4 \times V_4$.

Como $\dim S^1 + \dim N = 5 < 6 = \dim(V_4 \times V_4)$ e $\mu_{\psi \circ \gamma} \pitchfork N$, para quase todo $\psi \in \mathcal{U}_1$, então, pela Observação 1.2.2(i), $\mu_{\psi \circ \gamma}(S^1) \cap N = \emptyset$, para quase todo $\psi \in \mathcal{U}_1$. Por outro lado, pela Proposição 2.3.2, genericamente a curvatura de uma curva regular compacta espacial não se anula. Assim, para quase todo $\psi \in \mathcal{U}_1$, temos $\mu_{\psi \circ \gamma}(S^1) \cap N = \emptyset$ e $\kappa_{\psi \circ \gamma}$ não nula. Em particular, existe uma sequência (ψ_n) em \mathcal{U}_1 tal que $\mu_{\psi_n \circ \gamma}(S^1) \cap N = \emptyset$ e $\kappa_{\psi_n \circ \gamma}$ não se nula, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\psi_n \rightarrow \text{id}$, ou seja, $\psi_n \circ \gamma$ tem a propriedade \mathcal{P} .

Usando a associação de \mathcal{U}_1 (vizinhança de id em P_4) com U (vizinhança de 0 em \mathbb{R}^{105}), concluímos que existe uma sequência (u_n) em U tal que $u_n \rightarrow 0$ e cada termo u_n é unicamente associado ao termo ψ_n . Seja $\tilde{\gamma} : S^1 \times U \rightarrow \mathbb{R}^3$ a família de curvas regulares dada por $\tilde{\gamma}_u = \psi \circ \gamma$. Assim, encontramos uma sequência (u_n) em U tal que $u_n \rightarrow 0$ e $\tilde{\gamma}_{u_n} = \psi_n \circ \gamma$ tem a propriedade \mathcal{P} , ou seja, \mathcal{P} é densa.

Portanto, a propriedade \mathcal{P} é genérica, ou seja, genericamente, a função altura de uma curva espacial compacta tem somente singularidades A_k com $k \leq 3$. \square

Vimos anteriormente que a curvatura de uma curva espacial compacta não se anula. E para a torção, temos algum resultado parecido? O corolário abaixo fornece informações sobre a genericidade envolvendo a torção. A parte relacionada a densidade pode ser

encontrada em [4], p. 46. Na demonstração que apresentamos a seguir não usamos as ideias apresentadas em [4], mas sim procuramos usar as técnicas e resultados abordados nesta dissertação.

Corolário 2.3.4 *Genericamente, se a torção de uma curva espacial compacta se anula em algum ponto, então sua derivada não se anula em tal ponto.*

Demonstração. Sejam γ uma curva espacial compacta e h a função altura de γ com respeito a $u \in S^2$. Através de alguns cálculos de derivadas concluímos que h tem singularidade $A_{\geq 4}$ em t se, e somente se, $u = \pm B(t)$ e $\tau(t) = \tau'(t) = 0$.

No entanto, pela proposição anterior, genericamente, a função altura não tem singularidade $A_{\geq 4}$. Portanto, genericamente, se $\tau(t) = 0$ para algum $t \in S^1$, então $\tau'(t) \neq 0$. \square

A seguir, apresentamos um resultado análogo a proposição anterior, agora para a função distância ao quadrado, o qual trata-se do exercício proposto 9.10(3), p. 239, do livro [7]. O lema abaixo foi feito para ser utilizado em sua demonstração.

Recordemos que a aplicação de Monge-Taylor $\mu : S^1 \rightarrow V_3 \times V_3$ pode ser identificada com a aplicação que a cada $t \in S^1$ associa o ponto $(a_2(t), a_3(t), b_2(t), b_3(t)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. O lema abaixo mostra que, genericamente, as funções a_3 e b_3 não se anulam simultaneamente.

Lema 2.3.5 *Genericamente, uma curva espacial compacta tem $(a_3, b_3) \neq (0, 0)$.*

Demonstração. Sejam \mathcal{P} a propriedade “ γ tem $(a_3, b_3) \neq (0, 0)$ ” e N a variedade suave em $V_3 \times V_3$ formada pelos polinômios com $a_3 = b_3 = 0$.

De modo análogo ao feito na demonstração da Proposição 2.3.2, podemos mostrar que a propriedade \mathcal{P} é genérica. \square

Proposição 2.3.6 *Genericamente, a função distância ao quadrado de uma curva espacial compacta tem somente singularidades A_k com $k \leq 4$.*

Demonstração. A prova seguirá algumas etapas. Primeiramente, obtemos as condições para a função distância ao quadrado ter singularidade $A_{\geq k}$ com $1 \leq k \leq 5$. Posteriormente, mostramos que as singularidades $A_{\geq k}$ com $k = 4$ e 5 estão relacionadas com as soluções de certas equações. Em seguida, verificamos que o conjunto das soluções das equações relacionadas com singularidade $A_{\geq 5}$ é uma variedade suave. E, finalmente, mostramos que a propriedade “a função distância ao quadrado de uma curva espacial compacta tem somente singularidades A_k com $k \leq 4$ ” é genérica, utilizando as etapas anteriores.

Seja $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular suave e considere a reparametrização $\alpha : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ (a curva γ na forma normal de Monge) como feito no início desta seção. Note que a curva

α é dada por $\alpha(\xi) = (\xi, a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + \dots, b_2\xi^2 + b_3\xi^3 + \dots)$. Considere a função distância ao quadrado d da curva $\alpha(\xi) = (\xi, a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + \dots, b_2\xi^2 + b_3\xi^3 + \dots)$ com respeito a (x, y, z) , ou seja, $d(\xi) = \|\alpha(\xi) - (x, y, z)\|^2 = \langle (\alpha(\xi) - (x, y, z)), (\alpha(\xi) - (x, y, z)) \rangle$. Primeiramente, encontremos as condições para que d tenha singularidade $A_{\geq k}$ na origem, com $1 \leq k \leq 5$.

Note que

$$d'(0) = \langle 2\alpha'(0), (\alpha(0) - (x, y, z)) \rangle = 2\langle (1, 0, 0), (-x, -y, -z) \rangle = -2x,$$

ou seja, $d'(0) = 0$ se, e somente se, $x = 0$.

Calculando as derivadas da função d e usando $x = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} d''(0) &= 2(1 - 2a_2y - 2b_2z) = 0 \Leftrightarrow a_2y + b_2z = \frac{1}{2}; \\ d'''(0) &= 12(-a_3y - b_3z) = 0 \Leftrightarrow a_3y + b_3z = 0; \\ d^{(4)}(0) &= 2(-24a_4y - 24b_4z + 12a_2^2 + 12b_2^2) = 0 \Leftrightarrow a_4y + b_4z = \frac{a_2^2 + b_2^2}{2}; \\ d^{(5)}(0) &= 2(-120a_5y - 120b_5z + 120a_3a_2 + 120b_3b_2) = 0 \Leftrightarrow a_5y + b_5z = a_2a_3 + b_2b_3. \end{aligned}$$

Portanto, a função d tem, na origem, singularidade

$$\begin{aligned} A_{\geq 1} &\Leftrightarrow x = 0; \\ A_{\geq 2} &\Leftrightarrow x = 0 \text{ e } a_2y + b_2z = \frac{1}{2}; \\ A_{\geq 3} &\Leftrightarrow x = 0, a_2y + b_2z = \frac{1}{2} \text{ e } a_3y + b_3z = 0; \\ A_{\geq 4} &\Leftrightarrow x = 0, a_2y + b_2z = \frac{1}{2}, a_3y + b_3z = 0 \text{ e } a_4y + b_4z = \frac{a_2^2 + b_2^2}{2}; \\ A_{\geq 5} &\Leftrightarrow x = 0, a_2y + b_2z = \frac{1}{2}, a_3y + b_3z = 0, a_4y + b_4z = \frac{a_2^2 + b_2^2}{2} \text{ e } a_5y + b_5z = a_2a_3 + b_2b_3. \end{aligned}$$

No que segue assumiremos $x = 0$.

- Mostremos que se d tem singularidade $A_{\geq 4}$ na origem, então $\phi_1 = (a_2^2 + b_2^2)(a_3b_2 - a_2b_3) + (a_4b_3 - a_3b_4) = 0$, com $a_2 \neq 0$ ou $b_2 \neq 0$

Como d tem singularidade $A_{\geq 4}$ na origem, então

$$\begin{cases} a_2y + b_2z = \frac{1}{2} \\ a_3y + b_3z = 0 \\ a_4y + b_4z = \frac{a_2^2 + b_2^2}{2} \end{cases}.$$

Assim, da primeira equação concluímos que $a_2 \neq 0$ ou $a_3 \neq 0$. Mostremos que $\phi_1 = (a_2^2 + b_2^2)(a_3b_2 - a_2b_3) + (a_4b_3 - a_3b_4) = 0$.

Note que, pela terceira equação, temos

$$(a_2^2 + b_2^2)(a_3b_2 - a_2b_3) = (2a_4y + 2b_4z)(a_3b_2 - a_2b_3) = 2a_4a_3b_2y - 2a_4a_2b_3y + 2b_4a_3b_2z - 2b_4a_2b_3z.$$

Usando a primeira e a segunda equações, temos

$$(a_2^2 + b_2^2)(a_3b_2 - a_2b_3) = 2[-a_2a_4b_3y - a_4b_2b_3z + \frac{1}{2}a_3b_4].$$

Novamente pela primeira equação, concluímos que

$$(a_2^2 + b_2^2)(a_3b_2 - a_2b_3) = -(a_4b_3 - a_3b_4),$$

ou seja, $\phi_1 = 0$.

• Supondo $a_3 \neq 0$ ou $b_3 \neq 0$, mostremos que d tem singularidade $A_{\geq 5}$ na origem se, e somente se, $\phi_1 = 0$ e $\phi_2 = 2(a_2a_3 + b_2b_3)(a_3b_2 - a_2b_3) + (a_5b_3 - a_3b_5) = 0$.

(\Rightarrow) Suponhamos que d tem singularidade $A_{\geq 5}$ na origem e mostremos que $\phi_1 = \phi_2 = 0$.

Em particular, d tem singularidade $A_{\geq 4}$ na origem, assim, pelo caso anterior, concluímos que $\phi_1 = 0$. Logo, resta mostrar que $\phi_2 = 0$.

Como d tem singularidade $A_{\geq 5}$ na origem, então

$$\left\{ \begin{array}{l} a_2y + b_2z = \frac{1}{2} \\ a_3y + b_3z = 0 \\ a_4y + b_4z = \frac{a_2^2 + b_2^2}{2} \\ a_5y + b_5z = a_2a_3 + b_2b_3 \end{array} \right. .$$

Note que, pela quarta equação, temos

$$2(a_2a_3 + b_2b_3)(a_3b_2 - a_2b_3) = 2(a_5y + b_5z)(a_3b_2 - a_2b_3) = 2[a_3a_5b_2y - a_2a_5b_3y + b_2a_3b_5z - b_3a_2b_5z].$$

Usando a primeira e a segunda equações, temos

$$2(a_2a_3 + b_2b_3)(a_3b_2 - a_2b_3) = 2[a_3b_2b_5z - \frac{1}{2}a_5b_3 + a_2a_3b_5y].$$

Novamente pela primeira equação, concluímos que

$$2(a_2a_3 + b_2b_3)(a_3b_2 - a_2b_3) = -(a_5b_3 - a_3b_5),$$

ou seja, $\phi_2 = 0$.

(\Leftarrow) Suponhamos que $\phi_1 = \phi_2 = 0$ e mostremos que d tem singularidade $A_{\geq 5}$ na origem, o que ocorre se o sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} a_2y + b_2z = \frac{1}{2} \\ a_3y + b_3z = 0 \\ a_4y + b_4z = \frac{a_2^2 + b_2^2}{2} \\ a_5y + b_5z = a_2a_3 + b_2b_3 \end{array} \right.$$

tem alguma solução y, z .

Como $a_3 \neq 0$ ou $b_3 \neq 0$, então suponhamos $a_3 \neq 0$. Assim, da segunda equação, temos $y = \frac{-b_3}{a_3}z$. Usando a primeira equação, concluímos que $z = \frac{1}{2} \frac{a_3}{a_3b_2 - a_2b_3}$ e, conseqüentemente, $y = \frac{1}{2} \frac{-b_3}{a_3b_2 - a_2b_3}$. Logo, resta-nos mostrar que y e z satisfazem a terceira e a quarta equação. Note que

$$a_4y + b_4z = \frac{1}{2} \frac{a_3b_4 - a_4b_3}{a_3b_2 - a_2b_3} = \frac{1}{2}(a_2^2 + b_2^2),$$

onde esta última igualdade deve-se a hipótese de $\phi_1 = 0$. E finalmente,

$$a_5y + b_5z = \frac{1}{2} \frac{a_3b_5 - a_5b_3}{a_3b_2 - a_2b_3} = a_2a_3 + b_2b_3,$$

onde esta última igualdade deve-se a hipótese de $\phi_2 = 0$.

De modo análogo, se $b_3 \neq 0$, então chegamos a mesma solução do sistema.

Portanto, o sistema tem solução, ou seja, d tem singularidade $A_{\geq 5}$ na origem.

• Mostremos que o subconjunto N de $V_5 \times V_5$ formado pelos polinômios que satisfazem $\phi_1 = \phi_2 = 0$, com $a_3 \neq 0$ ou $b_3 \neq 0$, é uma variedade suave.

Seja N' o subconjunto de \mathbb{R}^6 associado a N . Considere

$$B = \{(a_2, a_3, a_4, a_5, b_2, b_3, b_4, b_5) \in \mathbb{R}^8; a_3 = b_3 = 0\}$$

e $h : \mathbb{R}^8 \setminus B \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $h(a_2, \dots, b_5) = (\phi_1, \phi_2) = (a_2^2a_3b_2 - a_2^3b_3 + a_3b_2^2 - a_2b_2^2b_3 + a_4b_3 - a_3b_4, 2a_2a_3^2b_2 - 2a_2^2a_3b_3 + 2a_3b_2^2b_3 - 2a_2b_2b_3^2 + a_5b_3 - a_3b_5)$. Note que $\mathbb{R}^8 \setminus B$ é aberto em \mathbb{R}^8 , que $N' = h^{-1}(0)$ e que

$$\frac{\partial h}{\partial a_4} = (b_3, 0), \quad \frac{\partial h}{\partial a_5} = (0, b_3), \quad \frac{\partial h}{\partial b_4} = (-a_3, 0) \text{ e } \frac{\partial h}{\partial b_5} = (0, -a_3).$$

Como, fora dos pontos da forma $(a_2, 0, a_4, a_5, b_2, 0, b_4, b_5)$, duas dessas derivadas são não nulas, ou seja, a matriz jacobiana de h tem posto 2, então 0 é valor regular de h e, conseqüentemente, N' é variedade suave.

Usando o fato de que $V_5 \times V_5$ é isomorfo a $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ e que tal isomorfismo é submersão (pois é linear) concluímos que N é variedade suave (Teorema 1.2.5). De modo análogo ao feito na demonstração da proposição anterior, concluímos que $\dim N = 6$.

• Finalmente, mostremos que a propriedade

\mathcal{P} : “a função distância ao quadrado de uma curva espacial compacta tem somente singularidade A_k com $k \leq 4$ ”

é genérica.

Primeiramente, mostremos que a propriedade \mathcal{P} é aberta

Sejam $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ regular com a propriedade \mathcal{P} e $\tilde{\gamma} : S^1 \times U \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma família de curvas regulares, com U uma vizinhança de 0 em \mathbb{R}^m (para algum $m \geq 1$) com $\tilde{\gamma}(t, 0) =$

$\gamma(t)$. Mostremos que $\tilde{\gamma}_u$ tem a propriedade \mathcal{P} , para todo $u \in U_1$, onde $U_1 \subset U$ é vizinhança de 0 e $\tilde{\gamma}_u(t) = \tilde{\gamma}(t, u)$.

Seja $\mu : S^1 \times U \rightarrow V_5 \times V_5$ a família de aplicações de Monge-Taylor de $\tilde{\gamma}$ como no Teorema 2.3.1. Como γ tem a propriedade \mathcal{P} , então a função distância ao quadrado de γ não tem singularidade $A_{\geq 5}$, ou seja, $(\phi_1 \neq 0$ ou $\phi_2 \neq 0)$ ou $(a_3 = b_3 = 0)$ e em ambos os casos temos $\mu_\gamma(S^1) \cap N = \emptyset$. Como $\dim S^1 + \dim N = 7 < 8 = \dim(V_5 \times V_5)$ e $\mu_\gamma(S^1) \cap N = \emptyset$, então, pela Observação 1.2.2(i), μ_γ é transversal a N . Assim, pela Proposição 1.3.4, $\mu_{\tilde{\gamma}_u}$ é transversal a N , para todo $u \in U_2$, onde U_2 é uma vizinhança de 0 em U . Novamente, como $\mu_{\tilde{\gamma}_u} \pitchfork N$ e $\dim S^1 + \dim N = 7 < 8 = \dim(V_5 \times V_5)$, então, pela Observação 1.2.2(i), $\mu_{\tilde{\gamma}_u}(S^1) \cap N = \emptyset$, para todo $u \in U_2$. Por outro lado, não sabemos se γ tem $(a_3, b_3) \neq (0, 0)$ ou não, mas como a propriedade de ter $(a_3, b_3) \neq (0, 0)$ é aberta (pelo Lema 2.3.5), então existe uma vizinhança U_1 de 0 em U_2 tal que $\tilde{\gamma}_u$ tem $(a_3, b_3) \neq (0, 0)$ para todo $u \in U_1$ com $u \neq 0$. De fato, se não existisse uma vizinhança com tal propriedade, poderíamos construir uma sequência (u_n) em U_2 tal que $u_n \rightarrow 0$ e $\tilde{\gamma}_{u_n}$ tem $(a_3, b_3) = (0, 0)$. Dessa forma, a propriedade de ter $(a_3, b_3) = (0, 0)$ seria densa, o que contradiz o fato da propriedade de ter $(a_3, b_3) \neq (0, 0)$ ser aberta. Logo, para todo $u \in U_1$ com $u \neq 0$, temos $\mu_{\tilde{\gamma}_u}(S^1) \cap N = \emptyset$ e $(a_3, b_3) \neq (0, 0)$, ou seja, $\tilde{\gamma}_u$ tem a propriedade \mathcal{P} , para todo $u \in U_1$. Portanto, a propriedade \mathcal{P} é aberta.

Mostremos que a propriedade \mathcal{P} é densa.

Considere $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular. Pelo Teorema 2.3.1 e pelo Lema de Transversalidade de Thom 1.2.9, concluímos que $\mu_{\psi \circ \gamma}$ é transversal a N , para quase todo $\psi \in \mathcal{U}_1$, onde $\mu : S^1 \times \mathcal{U}_1 \rightarrow V_5 \times V_5$.

Como $\dim S^1 + \dim N = 7 < 8 = \dim(V_5 \times V_5)$ e $\mu_{\psi \circ \gamma} \pitchfork N$, para quase todo $\psi \in \mathcal{U}_1$, então, pela Observação 1.2.2(i), $\mu_{\psi \circ \gamma}(S^1) \cap N = \emptyset$, para quase todo $\psi \in \mathcal{U}_1$. Por outro lado, pelo Lema 2.3.5, genericamente γ tem $(a_3, b_3) \neq (0, 0)$. Assim, para quase todo $\psi \in \mathcal{U}_1$, temos $\mu_{\psi \circ \gamma}(S^1) \cap N = \emptyset$ e $(a_3, b_3) \neq (0, 0)$. Em particular, existe uma sequência (ψ_n) em \mathcal{U}_1 tal que $\mu_{\psi_n \circ \gamma}(S^1) \cap N = \emptyset$ e $(a_3, b_3) \neq (0, 0)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\psi_n \rightarrow \text{id}$, ou seja, $\psi_n \circ \gamma$ tem a propriedade \mathcal{P} .

Usando a associação de \mathcal{U}_1 (vizinhança de id em P_5) com U (vizinhança de 0 em \mathbb{R}^{168}), concluímos que existe uma sequência (u_n) em U tal que $u_n \rightarrow 0$ e cada termo u_n é unicamente associado ao termo ψ_n . Seja $\tilde{\gamma} : S^1 \times U \rightarrow \mathbb{R}^3$ a família de curvas regulares dada por $\tilde{\gamma}_u = \psi \circ \gamma$. Assim, encontramos uma sequência (u_n) em U tal que $u_n \rightarrow 0$ e $\tilde{\gamma}_{u_n} = \psi_n \circ \gamma$ tem a propriedade \mathcal{P} , ou seja, \mathcal{P} é densa.

Portanto, a propriedade \mathcal{P} é genérica, ou seja, genericamente, a função distância ao quadrado de uma curva espacial compacta tem somente singularidades A_k com $k \leq 4$. \square

Desdobramentos de funções reais

Nosso objetivo neste capítulo é apresentar, de forma detalhada, fundamentos e resultados sobre desdobramentos de funções reais e utiliza-los no estudo da estrutura local de alguns subconjuntos do espaço Euclidiano, tendo como referências os Capítulos 6 e 7 de [7], [4], [5], [8], [9], [6] e [13].

Dado um germe $F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ dizemos que F é uma família de germes de funções de n variáveis e r parâmetros. Considere o germe de função $f : (\mathbb{R}^n, t_0) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $f(t) = F(t, x_0) = F_{x_0}(t)$ (aqui a notação F_x não indica derivada parcial como usual, mas sim que $x \in \mathbb{R}^r$ está fixado, obtendo assim um germe de função $F_x : (\mathbb{R}^n, t_0) \rightarrow \mathbb{R}$). Dizemos que F é um *desdobramento a r -parâmetros* de f e que f é o *germe desdobrado*. Por exemplo, um desdobramento a 3-parâmetros para o germe de função $f(t) = t^5$ é a família de germes de funções $F : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, (0, 0)) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(t, a, b, c) = t^5 + at^3 + bt^2 + ct$. Vale notar que alguns autores chamam de deformação o que aqui chamamos de desdobramento, considerando que estamos adotando a mesma nomenclatura abordada em [7].

Considere $f : (\mathbb{R}, t_0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ e $F : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0)) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ um desdobramento a r -parâmetros de f . Às vezes, os zeros de f e de germes próximos (isto é, $F_x = F(_, x)$, para x próximo de x_0) serão importantes. Neste caso, nos referimos a f simplesmente como um *germe de função*. Em outro contexto no entanto, os zeros de f e de germes próximos não são relevantes, mas seus pontos críticos são. Neste caso, nos referimos a f como um *germe de função potencial*. Estamos considerando o mesmo germe, temos apenas enfoques diferentes. Sendo assim, é conveniente estudar separadamente as duas situações. O prefixo “p” será utilizado para indicar que os germes envolvidos são germes de funções potenciais, onde existe arbitrariedade na escolha do nível do germe. Assim, neste caso, germes de funções que diferem por uma constante receberão o mesmo tratamento, ou seja, não possuirão uma diferença significativa (as mudanças de coordenadas permitem o acréscimo de uma constante). Logo, um desdobramento F de f poderá ser “reduzido” a um certo desdobramento G (que chamaremos de p-miniversal) que satisfaz $G_x(0) = 0$.

No entanto, no primeiro enfoque, germes de funções que diferem por uma constante terão tratamentos diferenciados (as mudanças de coordenadas não permitem o acréscimo de uma constante) e, neste caso, um desdobramento F de f poderá ser “reduzido” a um certo desdobramento G (que chamaremos de miniversal) mas que não satisfaz necessariamente $G_x(0) = 0$.

A principal diferença entre os dois enfoques está em considerar ou não constantes. Dessa forma, as definições que faremos para o caso potencial apresentarão a adição de um germe de função $c(x)$ (para cada x , $c(x)$ é apenas a adição de uma constante), o que não ocorre no caso não potencial (ou seja, devemos apenas omitir $c(x)$). Tais diferenças produzirão resultados extremamente semelhantes, cujas demonstrações serão análogas, com uma certa adaptação.

No Capítulo 2, vimos algumas propriedades genéricas de curvas compactas planas e espaciais. Nas duas primeiras seções deste capítulo, fazemos um estudo da estrutura local de certos subconjuntos do espaço Euclidiano, chamados conjuntos bifurcação e discriminante (Teoremas 3.1.30 e 3.2.12). Na Seção 3.3, utilizaremos este estudo da estrutura local e as propriedades genéricas do Capítulo 2 para concluir sobre a estrutura local genérica de alguns conjuntos especiais, como a evoluta, a superfície paralela, a dual, entre outras. Além disso, a existência de desdobramentos com uma propriedade bastante especial (de serem p-versais ou versais) é o resultado central deste capítulo (Teorema do Desdobramento p-Versal 3.1.8 e Teorema do Desdobramento Versal 3.2.3) uma vez que nos permite obter modelos de conjuntos bifurcação e discriminante, para a demonstração geral deste resultado necessitamos de ferramentas que não dispomos no momento, por isto faremos a demonstração para o caso analítico no Capítulo 4.

3.1 Desdobramentos p-versais

Nesta seção abordamos conceitos e resultados sobre desdobramentos p-versais, onde os germes envolvidos são germes de funções potenciais. A grosso modo um desdobramento p-versal de um germe de função real f é um desdobramento que contém todos os germes de funções próximos a f (dois germes de funções são ditos próximos se eles podem ser incluídos em uma família de germes de funções onde os parâmetros correspondentes são próximos).

Definição 3.1.1 *Seja $G : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s, (t_0, y_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ um desdobramento a s -parâmetros do germe de função $g = G_{y_0}$. Considere*

$$\begin{cases} a : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0)) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ onde } a(t, x_0) = t \\ b : (\mathbb{R}^r, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^s, y_0), \text{ onde } b(x_0) = y_0 \\ c : (\mathbb{R}^r, x_0) \rightarrow \mathbb{R} \end{cases}$$

em que a, b e c são germes de aplicações. O desdobramento $F : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ a r -parâmetros do germe de função $f(t) = g(t) + c(x_0)$ dado por

$$F(t, x) = G(a(t, x), b(x)) + c(x)$$

é dito **p -induzido de G** . Se todo desdobramento de g é p -induzido de G , dizemos que G é um **desdobramento p -versal de g em t_0**

A observação abaixo nos dá uma definição equivalente de desdobramentos p -induzidos, a qual será utilizada em algumas demonstrações como, por exemplo, do Critério 2 (Teorema 3.1.12) e do Teorema do Desdobramento p -Versal 3.1.8 (feita no Capítulo 4).

Observação 3.1.2 *Seja G como na Definição 3.1.1 e $F : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ um desdobramento de $f = g + c_0$. Apresentamos uma definição equivalente de desdobramentos p -induzidos. Suponhamos que existam germes de aplicações suaves*

$$\begin{cases} a_1 : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0)) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ com } a_1(t, x_0) = t \\ b : (\mathbb{R}^r, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^s, y_0) \\ c : (\mathbb{R}^r, x_0) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ com } c(x_0) = c_0 \end{cases}$$

tais que

$$F(a_1(t, x), x) = G(t, b(x)) + c(x).$$

Considere o germe $a_1 \times \text{id} : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0)) \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r$ dado por $(a_1 \times \text{id})(t, x) = (a_1(t, x), x)$, onde id é a aplicação identidade. Note que a matriz jacobiana de $a_1 \times \text{id}$ em (t_0, x_0) é

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial t}(t_0, x_0) & \frac{\partial a_1}{\partial x_1}(t_0, x_0) & \cdots & \frac{\partial a_1}{\partial x_n}(t_0, x_0) \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

cujos determinante é $\frac{\partial a_1}{\partial t}(t_0, x_0) = 1$, pois $a_1(t, x_0) = t$. Portanto, $a_1 \times \text{id}$ é um germe de difeomorfismo.

Logo, como $a_1 \times \text{id}$ difere de id apenas na primeira coordenada, então a inversa de $a_1 \times \text{id}$ tem a forma $a \times \text{id}$, para alguma $a : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $a_1(t, x) = \lambda \Leftrightarrow a(\lambda, x) = t$.

Assim, $F(t, x) = G(a(t, x), b(x)) + c(x)$, onde $a(t, x_0) = t$ (devido a relação entre a e a_1 obtida anteriormente), $b(x_0) = y_0$ e $c(x_0) = c_0$. Ou seja, F é p -induzido de G .

Portanto, F é p -induzido de G se, e somente se, existem germes

$$\begin{cases} a_1 : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0)) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ com } a_1(t, x_0) = t \\ b : (\mathbb{R}^r, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^s, y_0) \\ c : (\mathbb{R}^r, x_0) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ com } c(x_0) = c_0 \end{cases},$$

tais que $F(a_1(t, x), x) = G(t, b(x)) + c(x)$ (a recíproca é feita de modo análogo).

Exemplo 3.1.3 Sejam $g(t) = t^3$, $G : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, (0, 0)) \rightarrow \mathbb{R}$ um desdobramento a 1-parâmetro de g dado por $G(t, x_1) = t^3 + x_1 t$, e $H : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, (0, 0)) \rightarrow \mathbb{R}$ um desdobramento a 2-parâmetros de g dado por $H(t, x_1, x_2) = t^3 + x_1 t + x_2 t^2$. Afirmamos que G é p-induzido de H e H é p-induzido de G .

De fato, observe que $G(t, x_1) = H(t, x_1, 0)$. Assim, tomando

$$\begin{cases} a : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, (0, 0)) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ dado por } a(t, x_1) = t \\ b : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0), \text{ dado por } b(x_1) = (x_1, 0) \\ c : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ dado por } c(x_1) = 0 \end{cases},$$

obtemos $G(t, x_1) = H(a(t, x_1), b(x_1)) + c(x_1)$, de onde concluímos que G é p-induzido de H . Mostremos agora que H é p-induzido de G .

Por uma mudança de variáveis podemos eliminar o termo t^2 , obtendo

$$H\left(t - \frac{1}{3}x_2, x_1, x_2\right) = G\left(t, x_1 - \frac{1}{3}x_2^2\right) + \frac{2}{27}x_2^3 - \frac{1}{3}x_1 x_2.$$

Usando a observação anterior, concluímos que $H(a_1(t, x_1, x_2), x_1, x_2) = G(t, b(x_1, x_2)) + c(x_1, x_2)$, com

$$\begin{cases} a_1 : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, (0, 0)) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ dado por } a_1(t, x_1, x_2) = t - \frac{1}{3}x_2 \\ b : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0), \text{ dado por } b(x_1, x_2) = x_1 - \frac{1}{3}x_2^2 \\ c : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ dado por } c(x_1, x_2) = \frac{2}{27}x_2^3 - \frac{1}{3}x_1 x_2 \end{cases},$$

ou seja, H é p-induzido de G . □

Note que um desdobramento F de um dado germe de função f é uma família de perturbações de f . No entanto, se F é um desdobramento p-versal de f , então qualquer perturbação de f que não está em F pode ser obtida a partir de perturbações de f que estão em F . Dessa forma, podemos dizer que um desdobramento p-versal contém todas as perturbações (próximas) do germe desdobrado.

Antes de apresentarmos exemplos de desdobramentos p-versais, façamos algumas questões. Nos referimos aos germes de funções f e g , sem dar maiores detalhes de seus domínios, ficando subentendido que são germes de funções em $t_0 \in \mathbb{R}$.

(I) Se G é um desdobramento p-versal de g em t_0 e F é um desdobramento qualquer de g , então F_x (em t_0) é \mathcal{R} -equivalente a $G_{b(x)}$ (em $(a_x(t_0))$)?

Sim. De fato, como G é p-versal, então existem germes a, b e c como na Definição 3.1.1 tal que $F(t, x) = G(a(t, x), b(x)) + c(x)$. Para cada x fixado definimos $F_x(t) = F(t, x)$, $a_x(t) = a(t, x)$, $G_{b(x)}(a_x(t)) = G(a(t, x), b(x))$ e $c_x = c(x)$. Assim, temos

$$F_x(t) = G_{b(x)}(a_x(t)) + c_x.$$

Por outro lado, como $a(t, x_0) = t$, então $a'_{x_0}(t) = 1$ e, pela continuidade, $a'_x(t) \neq 0$ para x próximo de x_0 , ou seja, a_x é um germe de difeomorfismo. Portanto, para x próximo de x_0 , temos que F_x (em t_0) é \mathcal{R} -equivalente a $G_{b(x)}$ (em $a_x(t_0)$).

(II) Se F é desdobramento de f e f é \mathcal{R} -equivalente à $g(t) = \pm t^{k+1}$ (em 0) qual a relação entre F e g ? Podemos obter um desdobramento p-versal de g a partir de F ?

Analizamos esta questão a seguir, com a Proposição 3.1.4.

(III) Se F é um desdobramento de f então, utilizando mudanças de coordenadas adequadas, podemos relacionar F com um desdobramento mais “simples”?

Responderemos esta questão após o Teorema do Desdobramento p-Versal, utilizando o mesmo e a Proposição 3.1.4.

(IV) Existem desdobramentos p-versais? É único? Existem muitos?

Tal questão será retomada algumas vezes no decorrer desta seção. Ver Teorema do Desdobramento p-Versal, Exemplo 3.1.9 e Critério 2 (Teorema 3.1.12).

Agora responderemos a questão (II) e, juntamente, parte das questões (III) e (IV).

Seja $F : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ um desdobramento de f , com f uma singularidade A_k . Pelo Teorema 2.1.7, $f(t) = g(h(t)) + c$, com $g(t) = \pm t^{k+1}$, $h : (\mathbb{R}, t_0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ um germe de difeomorfismo e c uma constante.

Utilizando F e o germe de difeomorfismo h podemos construir um desdobramento $\overline{F} : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (0, x_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ de g da seguinte forma $\overline{F}(t, x) = F(h^{-1}(t), x) - c$. Como h é germe de difeomorfismo, então $F(t, x) = \overline{F}(h(t), x) + c$.

A proposição a seguir responde o último item da questão (II).

Proposição 3.1.4 *Com as notações acima o desdobramento F é p-versal se, e somente se, \overline{F} é p-versal.*

Demonstração. Suponhamos $g(t) = t^{k+1}$, o caso $g(t) = -t^{k+1}$ é análogo.

Suponhamos que F é p-versal e mostremos que \overline{F} é p-versal. Para isto, dado $\overline{F}_1 : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s, (0, y_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ um desdobramento de g , devemos mostrar que \overline{F}_1 é p-induzido de \overline{F} .

Considere $F_1 : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s, (t_0, y_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ o desdobramento de f dado por $F_1(t, y) = \overline{F}_1(h(t), y) + c$. Como F é p-versal, então F_1 é p-induzido de F , ou seja, existem germes a, b e c tais que $F_1(t, y) = F(a(t, y), b(y)) + c(y)$, com $a(t, y_0) = t$ e $b(y_0) = x_0$. Logo, como h é germe de difeomorfismo,

$$\begin{aligned} \overline{F}_1(t, y) &= F_1(h^{-1}(t), y) - c = F(a(h^{-1}(t), y), b(y)) + c(y) - c \\ &= \overline{F}(h(a(h^{-1}(t), y)), b(y)) + c(y), \end{aligned}$$

com $h(a(h^{-1}(t), y_0)) = h(h^{-1}(t)) = t$ e $b(y_0) = x_0$.

Portanto, \overline{F}_1 é p -induzido de \overline{F} e, conseqüentemente, \overline{F} é p -versal.

A recíproca é análoga. \square

Notemos que, seguindo a definição, não é fácil provar que um determinado desdobramento é p -versal. Assim, precisamos de resultados que facilitem o reconhecimento de um desdobramento p -versal. Nesta linha, apresentamos a proposição e o corolário a seguir que tratam-se do exercício proposto 6.8p(1), p. 138, do livro [7].

Proposição 3.1.5 *Seja $g : (\mathbb{R}, t_0) \rightarrow \mathbb{R}$ um germe de função e sejam F, G e H desdobramentos de g em t_0 . Se F é p -induzido de G e G é p -induzido de H , então F é p -induzido de H .*

Demonstração. Suponhamos $F : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0)) \rightarrow \mathbb{R}$, $G : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s, (t_0, y_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ e $H : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^v, (t_0, u_0)) \rightarrow \mathbb{R}$.

Como F é p -induzido de G , então existem germes $a : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0)) \rightarrow \mathbb{R}$, $b : (\mathbb{R}^r, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^s, y_0)$ e $c : (\mathbb{R}^r, x_0) \rightarrow \mathbb{R}$, tais que $a(t, x_0) = t$, $b(x_0) = y_0$ e

$$F(t, x) = G(a(t, x), b(x)) + c(x).$$

Como G é p -induzido de H , então existem germes $a_1 : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s, (t_0, y_0)) \rightarrow \mathbb{R}$, $b_1 : (\mathbb{R}^s, y_0) \rightarrow (\mathbb{R}^v, u_0)$ e $c_1 : (\mathbb{R}^s, y_0) \rightarrow \mathbb{R}$, tais que $a_1(t, y_0) = t$, $b_1(y_0) = u_0$ e

$$G(t, y) = H(a_1(t, y), b_1(y)) + c_1(y).$$

Assim,

$$F(t, x) = G(a(t, x), b(x)) + c(x) = H(a_1(a(t, x), b(x)), b_1(b(x))) + c_1(b(x)) + c(x).$$

Sejam

$$\begin{cases} a_2 : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0)) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ dado por } a_2(t, x) = a_1(a(t, x), b(x)) \\ b_2 : (\mathbb{R}^r, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^v, u_0), \text{ dado por } b_2(x) = (b_1 \circ b)(x) \\ c_2 : (\mathbb{R}^r, x_0) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ dado por } c_2(x) = (c_1 \circ b)(x) + c(x) \end{cases}.$$

Como, $a_2(t, x_0) = a_1(a(t, x_0), b(x_0)) = a_1(t, y_0) = t$ e $b_2(x_0) = b_1(b(x_0)) = b_1(y_0) = u_0$, concluímos que F é p -induzido de H . \square

Como conseqüência da proposição acima, obtemos:

Corolário 3.1.6 *Seja $g : (\mathbb{R}, t_0) \rightarrow \mathbb{R}$ um germe de função e sejam G e H desdobramentos de g em t_0 . Se G é desdobramento p -versal de g em t_0 e G é p -induzido de H , então H é desdobramento p -versal de g em t_0 .*

Demonstração. Como G é desdobramento p-versal de g em t_0 , então todo desdobramento F de g em t_0 é p-induzido de G . No entanto, como G é p-induzido de H então, pela proposição anterior, F é p-induzido de H . Logo, todo desdobramento F de g em t_0 é p-induzido de H , ou seja, H é desdobramento p-versal de g em t_0 . \square

Exemplo 3.1.7 (Este exemplo trata-se do exercício proposto 6.19(6), p.151 de [7] adaptado para o caso p-versal) Considere $f : (\mathbb{R}, t_0) \rightarrow \mathbb{R}$ uma singularidade A_0 . Assim, pelo Teorema 2.1.7, f é \mathcal{R} -equivalente a $g : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(t) = t$.

Mostremos que todo desdobramento de f é p-versal. Para isso basta mostrar que todo desdobramento de g é p-versal (utilizando a Proposição 3.1.4).

Seja $G : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s, (0, y_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ o desdobramento de g dado por $G(t, y) = t$ e considere $F : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (0, x_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ um desdobramento qualquer de g . Então, existem germes

$$\begin{cases} a : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (0, x_0)) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ dada por } a(t, x) = F(t, x) \\ b : (\mathbb{R}^r, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^s, y_0), \text{ dado por } b(x) = y_0 \\ c : (\mathbb{R}^r, x_0) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ dada por } c(x) = 0 \end{cases},$$

tais que $a(t, x_0) = F(t, x_0) = g(t) = t$, $b(x_0) = y_0$ e $G(a(t, x), b(x)) + c(x) = a(t, x) = F(t, x)$. Ou seja, F é p-induzido de G . Além disso, como F é qualquer, concluímos que G é desdobramento p-versal de g em 0.

Por outro lado, existem germes

$$\begin{cases} a_1 : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s, (0, y_0)) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ dada por } a_1(t, y) = t \\ b_1 : (\mathbb{R}^s, y_0) \rightarrow (\mathbb{R}^r, x_0), \text{ dado por } b_1(y) = x_0 \\ c_1 : (\mathbb{R}^s, y_0) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ dada por } c_1(y) = 0 \end{cases},$$

tais que $a_1(t, y_0) = t$, $b_1(y_0) = x_0$ e $F(a_1(t, y), b_1(y)) + c_1(y) = F(t, x_0) = g(t) = t = G(t, y)$. Ou seja, G é p-induzido de F . Assim, como G é p-versal e é p-induzido de F , concluímos que F é um desdobramento p-versal de g em 0. Portanto, todo desdobramento de $g(t) = t$ é p-versal.

Portanto, todo desdobramento de uma singularidade A_0 é p-versal. \square

O teorema a seguir é um dos resultados fundamentais deste trabalho e responde a questão de existência de desdobramentos p-versais para os germes de funções $\pm t^{k+1}$ com $k \geq 1$. Sua demonstração para o caso analítico é feita no Capítulo 4 e a versão geral pode ser encontrada em [3], a qual não é feita aqui por necessitar de ferramentas que não dispomos no momento, como, por exemplo, o Teorema de Preparação de Malgrange.

Teorema 3.1.8 (Teorema do Desdobramento p-Versal) ([7], p. 137) *Seja $g : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(t) = \pm t^{k+1}$. Então o desdobramento $G : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k-1}, (0, 0)) \rightarrow \mathbb{R}$ de g dado por*

$$G(t, x) = \pm t^{k+1} + x_{k-1}t^{k-1} + \cdots + x_2t^2 + x_1t$$

é p -versal.

Veremos que o desdobramento G dado no teorema anterior é um desdobramento p -versal com menor número de parâmetros (ver Critério 2 (Teorema 3.1.12)), então G também é chamado *desdobramento p -miniversal* de $\pm t^{k+1}$ em 0.

Agora responderemos a questão (III). Seja F um desdobramento de f . Se f é uma singularidade A_k , com $k \geq 1$, então como vimos antes da Proposição 3.1.4, obtemos a partir de F o desdobramento \overline{F} de $\pm t^{k+1}$. No entanto, como o desdobramento G de $\pm t^{k+1}$ dado no teorema anterior é p -versal então, por mudanças de coordenadas adequadas, podemos “reduzir” o desdobramento \overline{F} a “forma normal” G .

No teorema anterior, vimos que existe um desdobramento p -versal dos germes de funções $\pm t^{k+1}$ com $k \geq 1$. No entanto, o exemplo a seguir mostra que tal desdobramento p -versal não é único.

Exemplo 3.1.9 (Exercício 6.8p(2) proposto em [7], p. 138) Seja $H : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k, (0, 0)) \rightarrow \mathbb{R}$, dado por $H(t, x) = t^{k+1} + x_k t^k + \dots + x_1 t$, desdobramento de $g : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(t) = t^{k+1}$. Mostremos que H é um desdobramento p -versal de g em 0.

Seja $G : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k-1}, (0, 0)) \rightarrow \mathbb{R}$ o desdobramento p -versal de g em 0 dado no Teorema do Desdobramento p -Versal, ou seja, $G(t, x) = t^{k+1} + x_{k-1} t^{k-1} + \dots + x_2 t^2 + x_1 t$. Mostremos que G é p -induzido de H .

Note que $G(t, x_1, \dots, x_{k-1}) = H(t, x_1, \dots, x_{k-1}, 0)$. Logo, considerando

$$\begin{cases} a : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k-1}, (0, 0)) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ dado por } a(t, x_1, \dots, x_{k-1}) = t \\ b : (\mathbb{R}^{k-1}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^k, 0), \text{ dado por } b(x_1, \dots, x_{k-1}) = (x_1, \dots, x_{k-1}, 0) \\ c : (\mathbb{R}^{k-1}, 0) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ dado por } c(x_1, \dots, x_{k-1}) = 0 \end{cases}$$

obtemos

$$G(t, x) = H(a(t, x), b(x)) + c(x),$$

ou seja, G é p -induzido de H .

Como G é desdobramento p -versal de g em 0 e G é p -induzido de H então, pelo Corolário 3.1.6, concluímos que H é desdobramento p -versal de g em 0. \square

Abordemos novamente a questão (IV). Vimos que o Teorema do Desdobramento p -Versal mostra a existência de desdobramentos p -versais para os germes de funções $\pm t^{k+1}$, $k \geq 1$ e o exemplo anterior mostra que tal desdobramento não é único. Além disso, vimos no Capítulo 2 que dado um germe de função $f : (\mathbb{R}, t_0) \rightarrow \mathbb{R}$ (que não é um germe de função chata (flat)), podemos classifica-lo segundo a \mathcal{R} -equivalência, cujas classes são A_k , para $k = 0, 1, 2, \dots$ e as formas normais são $\pm t^{k+1}$. Logo, a questão (IV) está respondida para as formas normais com $k \geq 1$, mas e para germes de funções quaisquer pertencentes as classes A_k com $k \geq 1$? Para responder a questão (IV) para tais germes, considere f uma

singularidade A_k (em t_0), $k \geq 1$. Pelo Teorema 2.1.7, existe um germe de difeomorfismo h e uma constante c tal que $f = g \circ h + c$, onde $g(t) = \pm t^{k+1}$. Utilizando o germe de difeomorfismo h e o desdobramento G de $\pm t^{k+1}$ dado no Teorema do Desdobramento p-Versal podemos definir um desdobramento $F : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k-1}, (t_0, 0)) \rightarrow \mathbb{R}$ de f dado por $F(t, x) = G(h(t), x) + c$. Assim, como G é p-versal então, pela Proposição 3.1.4, o desdobramento F é p-versal. Isto mostra a existência de desdobramentos p-versais para singularidades A_k , $k \geq 1$. Como o desdobramento p-versal para a forma normal não é único, segue que não é único para singularidades A_k , $k \geq 1$. Na próxima subseção analisaremos se existem muitos desdobramentos p-versais de um mesmo germe.

3.1.1 Critérios para p-versalidade

Note que, seguindo a definição de desdobramento p-versal, é difícil verificar se um dado desdobramento é p-versal. Desse modo, necessitamos de condições (critérios) que nos digam quando um desdobramento é p-versal. O objetivo desta subseção é apresentar três critérios equivalentes bastante úteis, que serão fundamentais no restante deste trabalho. Primeiramente enunciamos os critérios e apresentamos alguns exemplos. Em seguida, mostraremos que os critérios são equivalentes e, portanto, é suficiente apresentar a demonstração de apenas um deles, o que faremos, concluindo assim esta subseção. No que segue, consideramos $F : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ um desdobramento de $f : (\mathbb{R}, t_0) \rightarrow \mathbb{R}$, onde f é uma singularidade A_k ($k \geq 1$).

Teorema 3.1.10 (Critério 1) ([7], p. 140) *O desdobramento F é p-versal se, e somente se, todo polinômio real $p(t)$ de grau menor ou igual a $k - 1$ e sem termo constante pode ser escrito na forma:*

$$p(t) = \sum_{i=1}^r c_i j^{k-1} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} (t, x_0) \right) (t_0), \quad (3.1)$$

onde c_i é uma constante real e j^{k-1} é o $(k - 1)$ -jato.

Recordemos que o $(k - 1)$ -jato de $\frac{\partial F}{\partial x_i} (t, x_0)$ em t_0 é dado por

$$\begin{aligned} j^{k-1} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} (t, x_0) \right) (t_0) &= t \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial F}{\partial x_i} (t, x_0) \right] (t_0) + \frac{t^2}{2} \frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{\partial F}{\partial x_i} (t, x_0) \right] (t_0) + \\ &+ \cdots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \left[\frac{\partial F}{\partial x_i} (t, x_0) \right] (t_0). \end{aligned}$$

Exemplo 3.1.11 Considere G o desdobramento p-versal de $g(t) = \pm t^{k+1}$ dado no Teorema do Desdobramento p-Versal. Neste caso, $j^{k-1} \left(\frac{\partial G}{\partial x_i} (t, x_0) \right) (0) = t^i$, $i = 1, \dots, k - 1$. Portanto, é claro que todo polinômio de grau menor ou igual a $k - 1$ e sem termo constante pode ser escrito como combinação linear de t, t^2, \dots, t^{k-1} . \square

O critério a seguir também pode ser encontrado como o resultado (6.2), p. 543 de [9].

Teorema 3.1.12 (Critério 2) ([7], p. 140) *Seja*

$$j^{k-1}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x_0)\right)(t_0) = \alpha_{1i}t + \alpha_{2i}t^2 + \cdots + \alpha_{(k-1)i}t^{k-1},$$

para $i = 1, \dots, r$. Então F é p-versal se, e somente se, a matriz dos coeficientes $(\alpha_{ji})_{(k-1) \times r}$ tem posto $k-1$ (isso requer que $k-1 \leq r$).

Exemplo 3.1.13 Considere G o desdobramento p-versal de $g(t) = \pm t^{k+1}$ dado no Teorema do Desdobramento p-Versal. Neste caso, a matriz dada no Critério 2 é a matriz identidade de ordem $(k-1) \times (k-1)$ e, portanto, tem posto $k-1$. \square

Exemplo 3.1.14 (Exercício 6.12p (3), proposto em [7], p. 141) Seja $F_1(t, x) = t^4 + x_1t^3 + x_2t^2 + x_3t$ um desdobramento a 3-parâmetros de $g(t) = t^4$. Note que g é uma singularidade A_3 (em 0). Temos

$$j^2\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}(t, 0)\right)(0) = 0; \quad j^2\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_2}(t, 0)\right)(0) = t^2; \quad j^2\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3}(t, 0)\right)(0) = t.$$

Logo, escrevendo $j^2\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_i}(t, 0)\right)(0) = \alpha_{1i}t + \alpha_{2i}t^2$, para $i = 1, 2, 3$, a matriz (α_{ji}) dada no Critério 2 é

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

a qual possui posto 2. Segue, portanto, que F_1 é um desdobramento p-versal de g em 0.

Consideremos agora o desdobramento a 2-parâmetros F_2 de g em 0 dado por $F_2(t, x) = t^4 + x_1x_2t^2 + x_2t$. Como

$$j^2\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1}(t, 0)\right)(0) = 0; \quad j^2\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_2}(t, 0)\right)(0) = t$$

então a matriz (α_{ji}) é

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

a qual possui posto 1. Portanto, F_2 não é desdobramento p-versal de g em 0. \square

Sejam $\mathbb{R}[t]$ o anel dos polinômios com coeficientes em \mathbb{R} e \mathcal{M} o ideal maximal de $\mathbb{R}[t]$ formado pelos polinômios sem termo constante, ou seja, $\mathcal{M} = \langle t \rangle_{\mathbb{R}[t]}$ (onde $\langle a \rangle_A$ denota o ideal gerado por a em A). Considere \mathcal{M}^k o ideal de $\mathbb{R}[t]$ formado por polinômios cujos monômios que o compõe são de grau maior ou igual a k e sem termo constante, ou seja, $\mathcal{M}^k = \langle t^k \rangle_{\mathbb{R}[t]}$. Recordemos que $\mathbb{R}\{t, t^2, \dots, t^{k-1}\}$ denota o espaço vetorial real gerado por $\{t, t^2, \dots, t^{k-1}\}$. Então, $\mathcal{M}/\mathcal{M}^k = \mathbb{R}\{t, t^2, \dots, t^{k-1}\}$.

Teorema 3.1.15 (Critério 3) ([7], p. 140) *O desdobramento F é p-versal se, e somente se, os $(k-1)$ -jatos de $\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x_0)$ em t_0 geram o espaço vetorial real $\mathcal{M}/\mathcal{M}^k$.*

Exemplo 3.1.16 Considere G o desdobramento p-versal de $g(t) = \pm t^{k+1}$ dado no Teorema do Desdobramento p-Versal. Sabemos que t, t^2, \dots, t^{k-1} gera o espaço vetorial real $\mathcal{M}/\mathcal{M}^k$. Mas t, t^2, \dots, t^{k-1} são exatamente os $(k-1)$ -jatos de $\frac{\partial G}{\partial x_i}(t, x_0)$ em 0. \square

Observamos que se $k = 1$, então as condições dadas nos critérios acima são automaticamente satisfeitas por vacuidade. *Portanto, todo desdobramento de uma singularidade A_1 é p-versal.*

Note também que, se $k-1 \leq r$, então sempre existe uma escolha adequada dos α_{ji} tais que a matriz dada no Critério 2 tenha posto igual a $k-1$, obtendo assim um desdobramento p-versal de f . Observamos também que se $k-1 > r$, então não existe desdobramento p-versal de f , pois a matriz não terá posto $k-1$. Assim, o menor número de parâmetros para um desdobramento p-versal de f em t_0 é $k-1$. Devido a isto, um desdobramento p-versal a $(k-1)$ -parâmetros de f em t_0 é chamado de **desdobramento p-miniversal** de f em t_0 . Note ainda que, quase todos os desdobramentos a r -parâmetros de f com $r \geq k-1$ são p-versais, uma vez que para um desdobramento não ser p-versal devemos ter todos os menores de ordem $k-1$ nulos.

Nosso objetivo agora é mostrar que os critérios 1, 2 e 3 são equivalentes (Exercícios 6.12p (1) e (2), propostos em [7], p. 141).

Lema 3.1.17 *Todo polinômio real $p(t)$ de grau menor ou igual a $k-1$ e sem termo constante pode ser escrito na forma (3.1) se, e somente se, a matriz $(\alpha_{ji})_{(k-1) \times r}$ dada no Critério 2 tem posto $k-1$.*

Demonstração. (\Rightarrow) Suponhamos que todo polinômio $p(t)$ sem termo constante e de grau menor ou igual a $k-1$ pode ser escrito da forma (3.1). Logo, o conjunto $\mathcal{A} = \{1, j^{k-1}(\frac{\partial F}{\partial x_1}(t, x_0))(t_0), \dots, j^{k-1}(\frac{\partial F}{\partial x_r}(t, x_0))(t_0)\}$ gera o espaço vetorial real dos polinômios de grau menor ou igual a $k-1$, para o qual $\mathcal{B} = \{1, t, \dots, t^{k-1}\}$ é uma base. Assim, \mathcal{A} tem k elementos linearmente independentes e, portanto, a matriz em que cada linha é constituída pelos coeficientes de cada elemento de \mathcal{A} escrito como combinação linear dos elementos de \mathcal{B} , ou seja, a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{(k-1)1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \alpha_{1r} & \cdots & \alpha_{(k-1)r} \end{bmatrix}_{(r+1) \times k}$$

tem posto k , de onde segue o resultado desejado.

(\Leftarrow) Como $j^{k-1}(\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x_0))(t_0) = \alpha_{1i}t + \dots + \alpha_{(k-1)i}t^{k-1}$, para $i = 1, \dots, r$, e a matriz $(\alpha_{ji})_{(k-1) \times r}$ tem posto $k-1$, então $\{1, j^{k-1}(\frac{\partial F}{\partial x_1}(t, x_0))(t_0), \dots, j^{k-1}(\frac{\partial F}{\partial x_r}(t, x_0))(t_0)\}$ gera o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a $k-1$. Consequentemente, todo polinômio de grau menor ou igual a $k-1$ e sem termo constante pode ser escrito na forma (3.1). \square

Lema 3.1.18 *Todo polinômio $p(t)$ em $\mathbb{R}[t]$, sem termo constante e grau menor ou igual a $k-1$, pode ser escrito na forma (3.1), se, e somente se, os $(k-1)$ -jatos de $\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x_0)$ em t_0 geram o espaço vetorial real $\mathcal{M}/\mathcal{M}^k$.*

Demonstração. (\Rightarrow) Mostremos que os $(k-1)$ -jatos $j^{k-1}(\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x_0))(t_0)$ geram o espaço vetorial real $\mathcal{M}/\mathcal{M}^k$. Por hipótese, todo polinômio $p(t)$ em $\mathbb{R}[t]$, sem termo constante e grau menor ou igual a $k-1$, pode ser escrito na forma (3.1). Em particular, vale para os polinômios $p(t) = t^l$, com $l = 1, \dots, k-1$. Logo,

$$t^l = \sum_{i=1}^r c_i j^{k-1}(\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x_0))(t_0).$$

Como $\mathcal{M}/\mathcal{M}^k = \mathbb{R}\{t, \dots, t^{k-1}\}$ e cada elemento dessa base se escreve como combinação linear dos $(k-1)$ -jatos de $\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x_0)$ em t_0 , concluímos que os $(k-1)$ -jatos geram o espaço vetorial $\mathcal{M}/\mathcal{M}^k$.

(\Leftarrow) Como $t^l \in \mathcal{M}/\mathcal{M}^k$, para $l = 1, \dots, k-1$, segue da hipótese que

$$t^l = \sum_{i=1}^r c_i j^{k-1}(\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x_0))(t_0).$$

Como todo polinômio sem termo constante e grau menor ou igual a $k-1$ é escrito como combinação dos t^l , o resultado segue. \square

Provemos, finalmente, a equivalência dos critérios.

Proposição 3.1.19 *Os critérios 1, 2 e 3 de p-versalidade são equivalentes.*

Demonstração. Equivalência entre os Critérios 1 e 2:

(1 \Rightarrow 2) Suponhamos que o Critério 1 é verdadeiro e mostremos o Critério 2.

(\Rightarrow) Suponhamos que F é um desdobramento p-versal de f e mostremos que a matriz (α_{ji}) dada no Critério 2 tem posto $k-1$.

Como F é p-versal e o Critério 1 é válido, então todo polinômio $p(t)$ sem termo constante e de grau menor ou igual a $k-1$ pode ser escrito da forma (3.1). Logo, pelo Lema 3.1.17, a matriz $(\alpha_{ji})_{(k-1) \times r}$ tem posto $k-1$, como queríamos.

(\Leftarrow) Suponhamos que a matriz (α_{ji}) dada no Critério 2 tem posto $k-1$ e mostremos que F é um desdobramento p-versal de f em t_0 .

Segue do Lema 3.1.17 que todo polinômio real $p(t)$ de grau menor ou igual a $k - 1$ e sem termo constante pode ser escrito na forma (3.1) e, pelo Critério 1, concluímos que F é um desdobramento p -versal.

(1 \Leftrightarrow 2) Supomos que o Critério 2 é verdadeiro e queremos mostrar que o Critério 1 também é. O raciocínio para a prova do que queremos é completamente análogo ao que fizemos acima, usando o Lema 3.1.17 e o Critério 2.

Equivalência entre os Critérios 1 e 3:

Considerando o Lema 3.1.18, a equivalência segue com raciocínio análogo ao feito acima. \square

Como os critérios apresentados para p -versalidade são equivalentes, basta provar um deles. Apresentaremos a demonstração do Critério 2 (Teorema 3.1.12), a qual pode ser encontrada também em [7], p. 141, onde os autores deixam os detalhes para o leitor. A demonstração que apresentamos contém todos os detalhes.

Como f é uma singularidade A_k , então $f(t) = g(h(t)) + c$, onde $g(t) = \pm t^{k+1}$, $h : (\mathbb{R}, t_0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ é um germe de difeomorfismo e c uma constante. Seja $\overline{F} : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (0, x_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ o desdobramento de g dado por $\overline{F}(t, x) = F(h^{-1}(t), x) - c$. Sejam $(\alpha_{ji})_F$ e $(\alpha_{ji})_{\overline{F}}$ as matrizes dadas no Critério 2 (Teorema 3.1.12) de F e \overline{F} , respectivamente.

Com o lema abaixo pretendemos que a demonstração do Critério 2 fique mais clara e objetiva.

Lema 3.1.20 *Com as notações acima a matriz $(\alpha_{ji})_F$ tem posto $k - 1$ se, e somente se, a matriz $(\alpha_{ji})_{\overline{F}}$ tem posto $k - 1$.*

Demonstração. Suponhamos $g(t) = t^{k+1}$, o caso $g(t) = -t^{k+1}$ é análogo.

Faremos a demonstração por indução sobre k . Antes disso, note que como $F(t, x) = \overline{F}(h(t), x) + c$, então

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x_0) = \frac{\partial \overline{F}}{\partial x_i}(h(t), x_0).$$

Logo,

$$j^{k-1} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x_0) \right) (t_0) = j^{k-1} \left(\frac{\partial \overline{F}}{\partial x_i}(h(t), x_0) \right) (t_0)$$

e

$$\frac{\partial^{j+1} F}{\partial t^j \partial x_i}(t_0, x_0) = \frac{\partial^{j+1} \overline{F}}{\partial t^j \partial x_i}(0, x_0) (h'(t_0))^j + \beta_{ji}, \quad (3.2)$$

onde β_{ji} é um termo envolvendo as derivadas de $\frac{\partial \overline{F}}{\partial x_i}(t, x_0)$ até ordem j , para $1 \leq j \leq k - 1$ e $1 \leq i \leq r$.

• Para $k = 2$, temos

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x_i}(t_0, x_0) = \frac{\partial^2 \overline{F}}{\partial t \partial x_i}(0, x_0) h'(t_0)$$

e, como $h'(t_0) \neq 0$, então a matriz $(\alpha_{ji})_F$ tem posto 1 se, e somente se, a matriz $(\alpha_{ji})_{\overline{F}}$ tem posto 1.

- Suponhamos o resultado válido para k e mostremos que continua válido para $k + 1$.

Suponhamos primeiramente que a matriz $(\alpha_{ji})_{\overline{F}}$ tem posto k e mostremos que a matriz $(\alpha_{ji})_F$ também tem posto k , para $1 \leq j \leq k$ e $1 \leq i \leq r$.

Como $(\alpha_{ji})_{\overline{F}}$ tem posto k , então a matriz $(\alpha_{ji})_{\overline{F}}$, para $1 \leq j \leq k - 1$ e $1 \leq i \leq r$, tem posto $k - 1$. Assim, pela hipótese de indução, a matriz $(\alpha_{ji})_F$, para $1 \leq j \leq k - 1$ e $1 \leq i \leq r$, tem posto $k - 1$. Logo, para mostrar que $(\alpha_{ji})_F$, para $1 \leq j \leq k$ e $1 \leq i \leq r$, tem posto k , basta mostrar que a última linha da mesma é linearmente independente com relação às anteriores.

Suponhamos, por absurdo, que a k -ésima linha da matriz $(\alpha_{ji})_F$ é linearmente dependente com relação às anteriores, ou seja,

$$\frac{\partial^k F}{\partial t^{k-1} \partial x_i}(t_0, x_0) = \sum_{j=1}^{k-2} \delta_j \frac{\partial^{j+1} F}{\partial t^j \partial x_i}(t_0, x_0),$$

para $1 \leq i \leq r$. Pela equação (3.2), obtemos

$$\frac{\partial^k \overline{F}}{\partial t^{k-1} \partial x_i}(0, x_0)(h'(t_0))^{k-1} + \beta_{(k-1)i} = \sum_{j=1}^{k-2} \delta_j \left(\frac{\partial^{j+1} \overline{F}}{\partial t^j \partial x_i}(0, x_0)(h'(t_0))^j + \beta_{ji} \right),$$

para $1 \leq i \leq r$. Além disso, como $h'(t_0) \neq 0$, então

$$\frac{\partial^k \overline{F}}{\partial t^{k-1} \partial x_i}(0, x_0) = \frac{1}{(h'(t_0))^{k-1}} \left[\sum_{j=1}^{k-2} \delta_j \left(\frac{\partial^{j+1} \overline{F}}{\partial t^j \partial x_i}(0, x_0)(h'(t_0))^j + \beta_{ji} \right) - \beta_{(k-1)i} \right],$$

para $1 \leq i \leq r$. No entanto, como β_{ji} é combinação linear das derivadas de $\frac{\partial \overline{F}}{\partial x_i}(t, x_0)$ até ordem $j \leq k - 1$, para $1 \leq i \leq r$, concluímos que a k -ésima linha da matriz $(\alpha_{ji})_{\overline{F}}$ é linearmente dependente com relação às anteriores, ou seja, a matriz $(\alpha_{ji})_{\overline{F}}$, para $1 \leq j \leq k$ e $1 \leq i \leq r$, tem posto menor do que k , o que é uma contradição.

Portanto, a matriz $(\alpha_{ji})_F$, para $1 \leq j \leq k$ e $1 \leq i \leq r$, tem posto k . Reciprocamente, como $\overline{F}(t, x) = F(h^{-1}(t), x) - c$, então o resultado segue de modo análogo. \square

Demonstração do Teorema 3.1.12 (Critério 2) Segue do lema anterior e da Proposição 3.1.4 que é suficiente mostrar que \overline{F} é p-versal se, e somente se, a matriz $(\alpha_{ji})_{\overline{F}}$ tem posto $k - 1$. Ou seja, basta mostrar o Critério 2 para o caso em que $f(t) = g(t) = \pm t^{k+1}$. Faremos o caso $f(t) = g(t) = t^{k+1}$, já que o outro caso é análogo.

(\Leftarrow) Suponhamos que a matriz (α_{ji}) tem posto $k - 1$ e mostremos que $F : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (0, x_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ é desdobramento p-versal de g em 0.

Do Teorema do Desdobramento p-Versal, $G : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k-1}, (0, 0)) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $G(t, u) = t^{k+1} + u_{k-1}t^{k-1} + \dots + u_1 t$ é desdobramento p-versal de g em 0. Assim, F é p-induzido

de G , ou seja, existem germes a, b e c tais que $F(t, x) = G(a(t, x), b(x)) + c(x)$, onde $a(t, x_0) = t$ e $b(x_0) = 0$.

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x_0) &= \frac{\partial G}{\partial t}(t, 0) \frac{\partial a}{\partial x_i}(t, x_0) + \sum_{l=1}^{k-1} \frac{\partial G}{\partial u_l}(t, 0) \frac{\partial b_l}{\partial x_i}(x_0) + \frac{\partial c}{\partial x_i}(x_0) \\ &= (k+1)t^k \frac{\partial a}{\partial x_i}(t, x_0) + \sum_{l=1}^{k-1} t^l \frac{\partial b_l}{\partial x_i}(x_0) + \frac{\partial c}{\partial x_i}(x_0), \end{aligned}$$

onde $u_l = b_l(x)$.

Assim, como estamos interessados no $(k-1)$ -jato de $\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x_0)$ em 0, o termo constante $\frac{\partial c}{\partial x_i}(x_0)$ pode ser ignorado e, além disso, como o jato é em torno de 0, quando derivamos o termo $(k+1)t^k \frac{\partial a}{\partial x_i}(t, x_0)$ até ordem $k-1$ e avaliamos em $t=0$ ele se anula. Logo,

$$j^{k-1}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x_0)\right)(0) = \sum_{l=1}^{k-1} t^l \frac{\partial b_l}{\partial x_i}(x_0),$$

de onde obtemos $(\alpha_{ji}) = \left(\frac{\partial b_l}{\partial x_i}(x_0)\right)$. Logo, a matriz $\left(\frac{\partial b_l}{\partial x_i}(x_0)\right)$ tem posto $k-1$.

Seja $F_1 : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s, (0, w_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ um desdobramento qualquer de g . Utilizando a Observação 3.1.2 e o fato de que F_1 é p-induzido de G , podemos encontrar germes A_1, B e C tais que $F_1(A_1(t, w), w) = G(t, B(w)) + C(w)$, com $A_1(t, w_0) = t$ e $B(w_0) = 0$. Ainda pela Observação 3.1.2, podemos encontrar um germe de função a_1 tal que $F(a_1(t, x), x) = G(t, b(x)) + c(x)$, onde $a_1(t, x_0) = t$.

Considere as $k-1$ equações $b(x) - B(w) = 0$, com $x \in \mathbb{R}^r$ e $w \in \mathbb{R}^s$. Como a matriz $\left(\frac{\partial b_l}{\partial x_i}(x_0)\right)$ tem posto $k-1$, então podemos escrever os x 's em função dos w 's, digamos $x = B_1(w)$, logo $b(B_1(w)) - B(w) = 0$, para w próximo de w_0 e tal que $B_1(w_0) = x_0$.

Assim,

$$F_1(A_1(t, w), w) - C(w) = G(t, B(w)) = G(t, b(B_1(w))) = F(a_1(t, B_1(w)), B_1(w)) - c(B_1(w)).$$

Novamente pela Observação 3.1.2, concluímos que existe um germe de função $A(t, w)$ tal que

$$F_1(t, w) = F(a_1(A(t, w), B_1(w)), B_1(w)) - c(B_1(w)) + C(w),$$

com $a_1(A(t, w_0), B_1(w_0)) = a_1(t, x_0) = t$ e $B_1(w_0) = x_0$.

Portanto, F_1 é p-induzido de F . Como F_1 foi tomado de modo arbitrário, concluímos que F é um desdobramento p-versal de g em 0.

(\Rightarrow) Suponhamos que F é um desdobramento p-versal de g em 0 e mostremos que a matriz (α_{ji}) tem posto $k-1$.

Como F é p -versal, então o desdobramento G dado no Teorema do Desdobramento p -Versal é p -induzido de F , ou seja, existem germes a, b, c , de modo que $G(t, u) = F(a(t, u), b(u)) + c(u)$. Assim,

$$\frac{\partial G}{\partial u_i}(t, 0) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, x_0) \frac{\partial a}{\partial u_i}(t, 0) + \sum_{l=1}^r \frac{\partial F}{\partial x_l}(t, x_0) \frac{\partial b_l}{\partial u_i}(0) + \frac{\partial c}{\partial u_i}(0).$$

Como $F_{x_0} = g$ é uma singularidade A_k (em 0), então $\frac{\partial F}{\partial t}(t, x_0) = g'(t)$ é uma singularidade A_{k-1} (em 0). Portanto,

$$j^{k-1}\left(\frac{\partial G}{\partial u_i}(t, 0)\right)(0) = \sum_{l=1}^r \frac{\partial b_l}{\partial u_i}(0) j^{k-1}\left(\frac{\partial F}{\partial x_l}(t, x_0)\right)(0).$$

Seja $p(t) \in \mathbb{R}[t]$ com grau menor ou igual a $k-1$ e sem termo constante. Note que

$$p(t) = c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_{k-1} t^{k-1} = \sum_{i=1}^{k-1} c_i j^{k-1}\left(\frac{\partial G}{\partial u_i}(t, 0)\right)(0).$$

Logo,

$$\begin{aligned} p(t) &= \sum_{i=1}^{k-1} c_i j^{k-1}\left(\frac{\partial G}{\partial u_i}(t, 0)\right)(0) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} c_i \left(\sum_{l=1}^r \frac{\partial b_l}{\partial u_i}(0) j^{k-1}\left(\frac{\partial F}{\partial x_l}(t, x_0)\right)(0)\right) \\ &= \sum_{l=1}^r \left(\sum_{i=1}^{k-1} c_i \frac{\partial b_l}{\partial u_i}(0)\right) j^{k-1}\left(\frac{\partial F}{\partial x_l}(t, x_0)\right)(0). \end{aligned}$$

Assim, tomando $d_l = \sum_{i=1}^{k-1} c_i \frac{\partial b_l}{\partial u_i}(0)$, temos

$$p(t) = \sum_{l=1}^r d_l j^{k-1}\left(\frac{\partial F}{\partial x_l}(t, x_0)\right)(0),$$

e, pelo Lema 3.1.17, concluímos que a matriz (α_{ji}) tem posto $k-1$. \square

3.1.2 Conjunto singular e conjunto bifurcação

Nesta subseção definimos os conjuntos singular e bifurcação de um desdobramento e estudamos suas estruturas locais em termos do tipo de singularidade do germe desdobrado e do número de parâmetros do desdobramento. Muitos objetos de interesse da matemática podem ser vistos como conjuntos singular ou bifurcação de um determinado

desdobramento como, por exemplo, a evoluta de uma curva plana. Logo, a fim de estudar a estrutura local desses objetos (a menos de difeomorfismos) basta estudar a estrutura local dos conjuntos singular e bifurcação.

Definição 3.1.21 *Seja $F : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ um desdobramento de $f = F_{x_0}$. O conjunto singular de F (em (t_0, x_0)) é o germe de conjunto*

$$(S_F, (t_0, x_0)) = \{(t, x) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0)); \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = 0\}.$$

O conjunto bifurcação de F (em x_0) é o germe de conjunto

$$(\mathcal{B}_F, x_0) = \{x \in (\mathbb{R}^r, x_0); \exists t \in (\mathbb{R}, t_0), \text{ com } \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(t, x) = 0\},$$

o t que existe é dito **correspondente** a x .

Observação 3.1.22 *Estamos interessados em estudar a estrutura local dos conjuntos $(S_F, (t_0, x_0))$ e (\mathcal{B}_F, x_0) , onde o germe desdobrado $f = F_{x_0}$ é uma singularidade A_k . No entanto, este estudo só faz sentido se tivermos $(t_0, x_0) \in (S_F, (t_0, x_0))$ e $x_0 \in (\mathcal{B}_F, x_0)$. Desse modo, vale notar que se $k = 0$, então*

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t_0, x_0) = \frac{dF_{x_0}}{dt}(t_0) = f'(t_0) \neq 0,$$

ou seja, $(t_0, x_0) \notin (S_F, (t_0, x_0))$ e, conseqüentemente, $x_0 \notin (\mathcal{B}_F, x_0)$. Por outro lado, se $k = 1$, então $(t_0, x_0) \in (S_F, (t_0, x_0))$, mas $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(t_0, x_0) = f''(t_0) \neq 0$, ou seja, $x_0 \notin (\mathcal{B}_F, x_0)$.

Por essa razão estudamos a estrutura local dos conjuntos singular e bifurcação de desdobramentos de singularidades $A_{\geq 2}$.

Exemplo 3.1.23 *Seja $G(t, x_1) = t^3 + x_1 t$ o desdobramento p-miniversal de t^3 em 0 dado no Teorema do Desdobramento p-Versal. Note que t^3 é uma singularidade A_2 (em 0). Temos $(S_G, (0, 0)) = \{(t, -3t^2), t \in (\mathbb{R}, 0)\}$ e $(\mathcal{B}_G, 0) = \{0\}$. Ver Figura 3.1.*

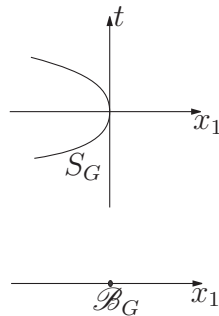


Figura 3.1: Conjuntos singular e bifurcação de $G(t, x_1) = t^3 + x_1 t$.

Exemplo 3.1.24 Seja $H(t, x_1, x_2) = t^3 + x_1t + x_2t^2$ desdobramento p -versal de t^3 em 0. Então $(S_H, (0, 0)) = \{(t, x_1, x_2) \in (\mathbb{R}^3, 0); 3t^2 + x_1 + 2x_2t = 0\}$ e $(\mathcal{B}_H, 0) = \{(\frac{1}{3}x_2^2, x_2), x_2 \in (\mathbb{R}, 0)\}$. Note que $(S_H, (0, 0))$ é um germe de superfície regular em \mathbb{R}^3 , pois cada representante é imagem inversa de um valor regular, ver Figura 3.2.

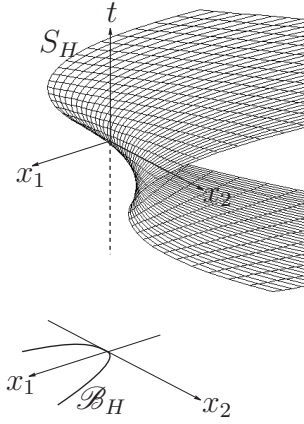


Figura 3.2: Conjuntos singular e bifurcação de $H(t, x_1, x_2) = t^3 + x_1t + x_2t^2$.

□

Exemplo 3.1.25 Seja $F(t, x_1, x_2) = \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{2}x_1t^2 + x_2t$ desdobramento de $\frac{1}{4}t^4$. Então $(S_F, (0, 0)) = \{(t, x_1, x_2) \in (\mathbb{R}^3, 0); t^3 + x_1t + x_2 = 0\}$ e $(\mathcal{B}_F, 0) = \{(x_1, x_2) \in (\mathbb{R}^2, 0); 4x_1^3 + 27x_2^2 = 0\}$. Neste caso, cada representante do conjunto $(\mathcal{B}_F, 0)$ é uma curva chamada cúspide, isto é, uma curva regular difeomorfa a curva parametrizada por (t^2, t^3) , para $t \in \mathbb{R}$ próximo de 0. Note que novamente $(S_F, (0, 0))$ é um germe de superfície regular em \mathbb{R}^3 , ver Figura 3.3.

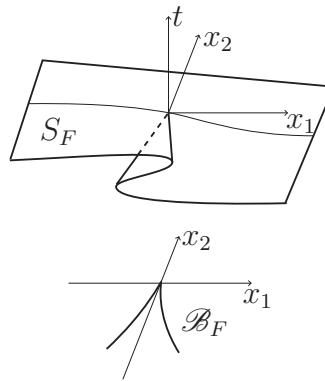


Figura 3.3: Conjuntos singular e bifurcação de $F(t, x_1, x_2) = \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{2}x_1t^2 + x_2t$.

□

Exemplo 3.1.26 Neste exemplo vamos calcular os conjuntos singular e bifurcação do germe da família de funções distância ao quadrado e verificar se tal família é um des-

dobramento p-versal de algum germe de função real. Este estudo engloba os exercícios propostos 7.6(1), 7.6(2) e 7.6(3), p. 163, do livro [7].

Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^r$ uma curva regular parametrizada por comprimento de arco, com $r = 2, 3$. Consideremos o germe da família de funções distância ao quadrado de γ :

$$\begin{aligned} F &: (I \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0)) \rightarrow \mathbb{R} \\ F(t, x) &= \langle (\gamma(t) - x), (\gamma(t) - x) \rangle. \end{aligned} \quad (3.3)$$

• Suponhamos $r = 2$. Então, F é um desdobramento a 2-parâmetros de $f = F_{x_0}$. Para existir um desdobramento p-versal de uma singularidade A_k , temos que ter $r \geq k - 1$. Como $r = 2$, devemos ter, portanto, $k \leq 3$. Logo, não precisamos nos preocupar com $k \geq 4$, pois em tal situação o germe nunca será desdobrado p-versalmente a 2-parâmetros. Encontremos condições para f ser uma singularidade A_2 ou A_3 em t_0 . Utilizando os cálculos feitos na demonstração da Proposição 2.1.14, concluímos em (t, x) o que segue.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} = 0 &\Leftrightarrow x = \gamma(t) + \lambda N(t), \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R}; \\ \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0 &\Leftrightarrow \kappa(t) \neq 0 \text{ e } x = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)} N(t); \\ \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{\partial^3 F}{\partial t^3} = 0 &\Leftrightarrow \kappa(t) \neq 0, x = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)} N(t) \text{ e } \kappa'(t) = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{\partial^3 F}{\partial t^3} = \frac{\partial^4 F}{\partial t^4} = 0 &\Leftrightarrow \kappa(t) \neq 0, x = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)} N(t), \kappa'(t) = 0 \text{ e } \kappa''(t) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, f é uma singularidade A_2 (em t_0) se, e somente se, x_0 é centro de curvatura de γ em t_0 e $\kappa'(t_0) \neq 0$, o que implica que $\gamma(t_0)$ não é um vértice. Ainda mais, f é uma singularidade A_3 (em t_0) se, e somente se, x_0 é centro de curvatura de γ em t_0 , $\kappa'(t_0) = 0$ e $\kappa''(t_0) \neq 0$, o que implica que $\gamma(t_0)$ é um vértice ordinário.

Verifiquemos se F é desdobramento p-versal quando f é uma singularidades A_2 ou A_3 em t_0 .

Escrevendo $\gamma(t) = (X(t), Y(t))$, temos $F(t, x) = (X(t) - x_1)^2 + (Y(t) - x_2)^2$ e,

$$j^2\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(t, x_0)\right)(t_0) = -2(tX'(t_0) + \frac{1}{2}t^2X''(t_0))$$

e

$$j^2\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}(t, x_0)\right)(t_0) = -2(tY'(t_0) + \frac{1}{2}t^2Y''(t_0)).$$

Portanto, se f é uma singularidade A_2 , então a matriz dada no Critério 2 (Teorema 3.1.12) é

$$\begin{pmatrix} -2X'(t_0) & -2Y'(t_0) \end{pmatrix}$$

a qual tem posto 1, já que γ é regular. Portanto, F é desdobramento p-versal de $f = F_{x_0}$

em t_0 . Concluimos portanto que o germe da família de funções distancia ao quadrado F de uma curva plana γ é um desdobramento p-versal de f em t_0 , sendo f uma singularidade A_2 em t_0 se, e somente se, x_0 é centro de curvatura de γ em t_0 e γ não tem vértice em t_0 .

Se f é uma singularidade A_3 em t_0 , então a matriz dada no Critério 2 é

$$\begin{pmatrix} -2X'(t_0) & -2Y'(t_0) \\ -X''(t_0) & -Y''(t_0) \end{pmatrix}$$

a qual é invertível, já que o determinante é igual a $\kappa(t_0)$, que é não nulo. Concluimos assim que F é um desdobramento p-versal de $f = F_{x_0}$ em t_0 (o que ocorre se, e somente se, x_0 é centro de curvatura de γ em t_0 e γ tem um vértice ordinário em t_0).

Encontremos o conjunto singular e bifurcação de F . Dos cálculos das derivadas de F com relação a t feitos acima, concluimos que o conjunto singular é

$$(S_F, (t_0, x_0)) = \{(t, \gamma(t) + \lambda N(t)), \lambda \in \mathbb{R}, t \in (I, t_0)\}$$

e o conjunto bifurcação é

$$(\mathcal{B}_F, x_0) = \{x \in (\mathbb{R}^2, x_0); \exists t \in (I, t_0); x = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)}N(t)\}$$

o qual é o germe da evoluta de γ em x_0 .

• Suponhamos $r = 3$. Neste caso, adicionamos a hipótese de que a curvatura de γ é não nula. Então F é um desdobramento a 3-parâmetros de $f = F_{x_0}$. Como $r = 3$, devemos ter, portanto, $k \leq 4$ para que F possa ser um desdobramento p-versal de f uma singularidade A_k . Encontremos condições para f ser singularidade A_2, A_3 ou A_4 (em t_0). Utilizando os cálculos feitos na demonstração da Proposição 2.1.17, concluimos que em (t, x) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} = 0 &\Leftrightarrow x = \gamma(t) + \lambda N(t) + \mu B(t), \text{ com } \lambda, \mu \in \mathbb{R}; \\ \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0 &\Leftrightarrow x = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)}N(t) + \mu B(t), \text{ com } \mu \in \mathbb{R}; \\ \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{\partial^3 F}{\partial t^3} = 0 &\Leftrightarrow x = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)}N(t) - \frac{\kappa'(t)}{\kappa^2(t)\tau(t)}B(t) \text{ ou} \\ &x = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)}N(t) + \mu B(t), \text{ com } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \tau(t) = \kappa'(t) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, f é uma singularidade A_2 (em t_0) se, e somente se, $x_0 = \gamma(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)}N(t_0) + \mu B(t_0)$, com $\mu \neq \frac{\kappa'(t_0)}{\kappa^2(t_0)\tau(t_0)}$ (logo, x_0 não é centro de curvatura esférica de γ em t_0) ou $\tau(t_0) = 0$ enquanto $\kappa'(t_0) \neq 0$.

As condições para F_{x_0} ser singularidade A_3 ou A_4 (em t_0) envolvem expressões complicadas em função das derivadas de κ e τ por isso não as calculamos aqui. Assim, resta-nos encontrar as condições para F ser desdobramento p-versal de F_{x_0} em t_0 .

Verifiquemos se F é desdobramento p-versal quando f é uma singularidade A_2 , A_3 ou A_4 (em t_0). Para isso, suponhamos $\gamma(t) = (X(t), Y(t), Z(t))$ e $x = (x_1, x_2, x_3)$. Assim,

$$F(t, x) = (X(t) - x_1)^2 + (Y(t) - x_2)^2 + (Z(t) - x_3)^2$$

e, além disso,

$$\begin{aligned} j^3\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(t, x_0)\right)(t_0) &= -2X'(t_0)t - X''(t_0)t^2 - \frac{X'''(t_0)}{3}t^3; \\ j^3\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}(t, x_0)\right)(t_0) &= -2Y'(t_0)t - Y''(t_0)t^2 - \frac{Y'''(t_0)}{3}t^3; \\ j^3\left(\frac{\partial F}{\partial x_3}(t, x_0)\right)(t_0) &= -2Z'(t_0)t - Z''(t_0)t^2 - \frac{Z'''(t_0)}{3}t^3. \end{aligned}$$

Sem perda de generalidade podemos supor $\gamma(t_0) = 0$, $T(t_0) = (1, 0, 0)$, $N(t_0) = (0, 1, 0)$ e $B(t_0) = (0, 0, 1)$. Assim, $(X''(t_0), Y''(t_0), Z''(t_0)) = (0, \kappa(t_0), 0)$ e $(X'''(t_0), Y'''(t_0), Z'''(t_0)) = (-\kappa^2(t_0), \kappa'(t_0), \kappa(t_0)\tau(t_0))$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} j^3\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(t, x_0)\right)(t_0) &= -2t + \frac{\kappa^2(t_0)}{3}t^3; \\ j^3\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}(t, x_0)\right)(t_0) &= -\kappa(t_0)t^2 - \frac{\kappa'(t_0)}{3}t^3; \\ j^3\left(\frac{\partial F}{\partial x_3}(t, x_0)\right)(t_0) &= \frac{-\kappa(t_0)\tau(t_0)}{3}t^3. \end{aligned}$$

Portanto, se $f = F_{x_0}$ é uma singularidade A_2 , então a matriz dada no Critério 2 (Teorema 3.2.5) é

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a qual tem posto 1. Portanto, F é desdobramento p-versal de f em t_0 .

Se f é uma singularidade A_3 , então a matriz dada no Critério 2 (Teorema 3.2.5) é

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa(t_0) & 0 \end{pmatrix}$$

a qual tem posto 2 uma vez que $\kappa(t_0) \neq 0$, por hipótese. Consequentemente, F é desdobramento p-versal de f em t_0 .

Se f é uma singularidade A_4 em t_0 , então a matriz dada no Critério 2 (Teorema 3.2.5) é

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa(t_0) & 0 \\ \frac{\kappa^2(t_0)}{3} & \frac{-\kappa'(t_0)}{3} & \frac{-\kappa(t_0)\tau(t_0)}{3} \end{pmatrix}$$

com determinante igual a $\frac{-2\kappa^2(t_0)\tau(t_0)}{3}$. Portanto, F é desdobramento p-versal de f em

t_0 se, e somente se, $\tau(t_0) \neq 0$.

Encontremos os conjuntos singular e bifurcação de F . Dos cálculos das derivadas de F com relação a t feitos acima, concluímos que o conjunto singular de F é

$$(S_F, (t_0, x_0)) = \{(t, \gamma(t) + \lambda N(t) + \mu B(t)), t \in (I, t_0), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

e o conjunto bifurcação de F é

$$(\mathcal{B}_F, x_0) = \{x \in (\mathbb{R}^3, x_0); \exists t \in (I, t_0); x = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)}N(t) + \mu B(t), \text{ com } \mu \in \mathbb{R}\}.$$

□

Exemplo 3.1.27 (Este exemplo é parte do exercício 7.6(4) de [7]) Assim como fizemos, no exemplo anterior, para o germe da família de funções distância ao quadrado podemos nos perguntar sobre o germe da família de funções altura.

Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada por comprimento de arco com curvatura não nula. Consideremos o germe da família de funções altura de γ :

$$\begin{aligned} H : (I \times S^2, (t_0, u_0)) &\rightarrow \mathbb{R} \\ H(t, u) &= \langle \gamma(t), u \rangle. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Logo, H é um desdobramento a 2-parâmetros de H_{u_0} .

Podemos verificar facilmente que o conjunto bifurcação de H é

$$(\mathcal{B}_H, u_0) = \{\pm B(t); t \in (I, t_0)\}.$$

Considere t_0 correspondente de u_0 , ou seja, $u_0 = \pm B(t_0)$. Encontremos condições para o germe de função $h = H_{u_0}$ ser singularidade A_2 ou A_3 (em t_0). Utilizando os cálculos feitos na demonstração da Proposição 2.1.17, concluímos em (t_0, u_0) o que segue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 H}{\partial t^3} = 0 &\Leftrightarrow \tau(t_0) = 0; \\ \frac{\partial^3 H}{\partial t^3} = \frac{\partial^4 H}{\partial t^4} = 0 &\Leftrightarrow \tau(t_0) = 0 \text{ e } \tau'(t_0) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, h é uma singularidade A_2 (resp. A_3) (em t_0) se, e somente se, $\tau(t_0) \neq 0$ (resp. $\tau(t_0) = 0$ e $\tau'(t_0) \neq 0$).

Verifiquemos se H é um desdobramento p -versal quando h é uma singularidade A_2 ou A_3 (em t_0). Para tal, considere a parametrização local de S^2 , $\theta : (\mathbb{R}^2, x_0) \rightarrow (S^2, u_0)$ dada por $\theta(x_1, x_2) = (x_1, x_2, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2})$. Considere também $\varphi : (I \times \mathbb{R}^2, (t_0, x_0)) \rightarrow (I \times S^2, (t_0, u_0))$ dada por $\varphi(t, x) = (t, \theta(x)) = (t, (x_1, x_2, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}))$. Assim, seja $F : (I \times \mathbb{R}^2, (t_0, x_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $F(t, x) =$

$H \circ \varphi(t, x) = \langle \gamma(t), (x_1, x_2, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}) \rangle$. Logo, tomando $a(t, x) = t$ e $b(x) = (x_1, x_2, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2})$ na definição de ser p -induzido, concluímos que F é p -induzido de H . Portanto, se mostrarmos que F é p -versal, então, pelo Corolário 3.1.6, H também será p -versal. Vale observar que F_{x_0} é igual a H_{u_0} para algum x_0 . Assim, as condições para singularidade A_2 e A_3 continuam as mesmas. Dessa forma, basta mostrar que F é p -versal.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\gamma(t_0) = 0, T(t_0) = (1, 0, 0), N(t_0) = (0, 1, 0)$ e $B(t_0) = (0, 0, 1)$. Observe que

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(t, x) = \langle \gamma(t), (1, 0, \frac{-x_1}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}}) \rangle; \quad \frac{\partial F}{\partial x_2}(t, x) = \langle \gamma(t), (0, 1, \frac{-x_2}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}}) \rangle.$$

Logo, se F_{x_0} é uma singularidade A_2 (em t_0), então a matriz dada no Critério 2 (Teorema 3.1.12) é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\kappa(t_0) \end{pmatrix},$$

cujos determinante é $-\kappa(t_0) \neq 0$. Portanto, F é um desdobramento p -versal de F_{x_0} em t_0 e, conseqüentemente, H também é um desdobramento p -versal de H_{u_0} em t_0 .

Se F_{x_0} é uma singularidade A_3 (em t_0), então a matriz dada no Critério 2 (Teorema 3.1.12) terá uma linha a mais que a matriz anterior, ou seja, a matriz anterior é uma submatriz de ordem 2 invertível. Portanto, F é um desdobramento p -versal de F_{x_0} em t_0 e, conseqüentemente, H também é um desdobramento p -versal de H_{u_0} em t_0 . \square

Os conjuntos singulares dos desdobramentos dos exemplos acima são germes de variedades suaves. A proposição a seguir diz que isto sempre é verdadeiro quando o desdobramento é p -versal (desde que o germe desdobrado não seja um germe de função chata).

Proposição 3.1.28 *Se $F : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ é um desdobramento p -versal de $f = F_{x_0}$ em t_0 , com f uma singularidade A_k (em t_0), $k \geq 1$, então $(S_F, (t_0, x_0))$ é um germe de variedade suave de dimensão r .*

Demonstração. Dizer que $(S_F, (t_0, x_0))$ é um germe de variedade suave significa que, para todo representante de F existe uma vizinhança U de (t_0, x_0) em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r$ tal que $S_F \cap U$ é uma variedade suave de dimensão r . Note que se mostramos para um representante F , então para outro representante F_1 teremos $(S_{F_1}, (t_0, x_0)) = (S_F \cap U, (t_0, x_0))$, ou seja, existe um aberto U_1 de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r$ contendo (t_0, x_0) tal que $S_{F_1} \cap U_1 = S_F \cap (U \cap U_1)$, a qual é uma variedade suave. Dividimos a demonstração em dois casos.

• Suponhamos $k \geq 2$. Consideremos a função $\frac{\partial F}{\partial t} : V \rightarrow \mathbb{R}$, onde V é um aberto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r$ contendo (t_0, x_0) . Temos:

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t_0, x_0) = \frac{dF_{x_0}}{dt}(t_0) = f'(t_0) = 0,$$

uma vez que $k \geq 2$.

Como F é p-versal, a matriz (α_{ji}) do Critério 2 tem posto igual a $k - 1$. Assim, em particular, existe i tal que $j^1(\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x_0))(t_0)$ é não nulo. Então

$$j^1(\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x_0))(t_0) = \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x_i}(t_0, x_0)t \neq 0.$$

Conseqüentemente, existe uma vizinhança U de (t_0, x_0) em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r$ tal que $\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x_i}(t, x) \neq 0$, para todo $(t, x) \in U$. Assim, $\nabla(\frac{\partial F}{\partial t})(t, x) \neq 0$, para todo $(t, x) \in U$, ou seja, todo ponto de U é ponto regular da função $\frac{\partial F}{\partial t}|_U : U \rightarrow \mathbb{R}$ e, conseqüentemente, 0 é valor regular de $\frac{\partial F}{\partial t}|_U$. Logo, $(\frac{\partial F}{\partial t}|_U)^{-1}(0) = S_F \cap U$ é uma variedade suave de dimensão r , ou seja, existe uma vizinhança U de (t_0, x_0) em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r$ tal que $S_F \cap U$ é uma variedade suave de dimensão r em \mathbb{R}^{r+1} .

• Para $k = 1$, temos

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(t_0, x_0) = f''(t_0) \neq 0.$$

Logo, existe uma vizinhança U de (t_0, x_0) em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r$ tal que $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(t, x) \neq 0$, para todo $(t, x) \in U$ e, conseqüentemente, $\nabla(\frac{\partial F}{\partial t})(t, x) \neq 0$, para todo $(t, x) \in U$. Portanto, o resultado segue de modo análogo ao feito anteriormente. \square

Vimos as definições e alguns exemplos de conjuntos singular e bifurcação. No entanto, podemos fazer as seguintes perguntas: O que tais conjuntos são geometricamente? Qual a relação geométrica entre eles? Vamos agora em busca das respostas para estas questões.

Considere $F : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ um desdobramento de $f = F_{x_0}$ e C o subconjunto de S_F definido por:

$$(t, x) \in C \Leftrightarrow (t, x) \in S_F \text{ e } \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(t, x) = 0.$$

Seja $\pi : S_F \rightarrow \mathbb{R}^r$ a restrição a S_F da projeção dada por $\pi(t, x) = x$. Assim, $\pi(C) = \mathcal{B}_F$.

Suponhamos que F é desdobramento p-versal de f em t_0 e que f é uma singularidade A_k em t_0 , com $k \geq 1$.

Logo, pela proposição anterior, S_F é, numa vizinhança de (t_0, x_0) , uma variedade suave de dimensão r , sendo que $T_{(t,x)}S_F$ é ortogonal ao vetor $\nabla(\frac{\partial F}{\partial t})(t, x)$.

Encontremos o conjunto dos pontos críticos de π . Note que $d\pi_{(t,x)} : T_{(t,x)}S_F \rightarrow \mathbb{R}^r$. Recorde que $(t, x) \in S_F$ é ponto crítico de π (ou seja, $d\pi_{(t,x)}$ não é sobrejetora) se, e somente se, $\text{Ker } d\pi_{(t,x)}$ tem dimensão maior ou igual a 1.

Considerando $v \in T_{(t,x)}S_F$, então $v = \alpha'(0)$ para alguma curva $\alpha : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow S_F$ tal que $\alpha(0) = (t, x)$ e $\alpha'(0) = v$. Escrevendo $\alpha(s) = (t(s), x_1(s), \dots, x_r(s))$, temos:

$$d\pi_{(t,x)}(v) = (\pi \circ \alpha)'(0) = (x'_1(0), \dots, x'_r(0)).$$

Assim, $v \in \text{Ker } d\pi_{(t,x)}$ se, e somente se, $x'_1(0) = \dots = x'_r(0) = 0$, isto é, $v = t'(0)(1, 0, \dots, 0)$. Portanto, $\dim \text{Ker } d\pi_{(t,x)} \geq 1$ se, e somente se, $T_{(t,x)}S_F$ contém o eixo t , ou seja, os vetores $\nabla(\frac{\partial F}{\partial t})(t, x)$ e $(1, 0, \dots, 0)$ são ortogonais, isto é, $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(t, x) = 0$. Consequentemente, (t, x) é ponto crítico de π se, e somente se, $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(t, x) = 0$.

Portanto, C é o conjunto dos pontos críticos de π e \mathcal{B}_F é a imagem da projeção $(t, x) \mapsto x$ restrita aos pontos de S_F para os quais o plano tangente a S_F é paralelo ao eixo t (ou ainda, \mathcal{B}_F é o conjunto dos valores críticos de π). Note que isto independe do representante de F que tomamos.

Veremos a seguir que o conjunto bifurcação de qualquer desdobramento p-versal a r -parâmetros de uma singularidade A_k , com $k \geq 1$, é localmente o mesmo, a menos de difeomorfismo, o mesmo valendo para o conjunto singular. Antes disso, vejamos um lema que será utilizado na demonstração de tal resultado.

O lema a seguir trata-se do exercício proposto 6.15p(2), p. 145, do livro [7].

Lema 3.1.29 *Seja $F : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ um desdobramento p-versal de f em t_0 , onde f é uma singularidade A_k e $r > k - 1$. Considere H sendo um desdobramento p-miniversal de f em t_0 . Defina o desdobramento $\tilde{H} : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R}^{r-k+1}, (t_0, y_0, z_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ a r -parâmetros de f dado por $\tilde{H}(t, y, z) = H(t, y)$. Então $(S_F, (t_0, x_0))$ e $(S_{\tilde{H}}, (t_0, y_0, z_0))$ são localmente difeomorfos, o mesmo acontece com (\mathcal{B}_F, x_0) e $(\mathcal{B}_{\tilde{H}}, (y_0, z_0))$.*

Demonstração. Note primeiramente que, como $\tilde{H}(t, y, z) = H(t, y)$, então $S_{\tilde{H}} = S_H \times \mathbb{R}^{r-k+1}$ e $\mathcal{B}_{\tilde{H}} = \mathcal{B}_H \times \mathbb{R}^{r-k+1}$.

Queremos encontrar germes de difeomorfismos de $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0))$ para $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R}^{r-k+1}, (t_0, y_0, z_0))$ e de (\mathbb{R}^r, x_0) para $(\mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R}^{r-k+1}, (y_0, z_0))$ que levem $(S_F, (t_0, x_0))$ em $(S_{\tilde{H}}, (t_0, y_0, z_0))$ e (\mathcal{B}_F, x_0) em $(\mathcal{B}_{\tilde{H}}, (y_0, z_0))$, respectivamente.

Como H é um desdobramento p-miniversal de f em t_0 , então existem germes $a : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0)) \rightarrow \mathbb{R}$, $b : (\mathbb{R}^r, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^{k-1}, y_0)$ e $c : (\mathbb{R}^r, x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$F(t, x) = H(a(t, x), b(x)) + c(x). \quad (3.5)$$

Primeiramente, mostremos que a matriz jacobiana de b em x_0 tem posto $k - 1$.

De (3.5), temos:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x_0) = \frac{\partial H}{\partial t}(t, y_0) \frac{\partial a}{\partial x_i}(t, x_0) + \sum_{l=1}^{k-1} \frac{\partial H}{\partial u_l}(t, y_0) \frac{\partial b_l}{\partial x_i}(x_0) + \frac{\partial c}{\partial x_i}(x_0).$$

Logo,

$$j^{k-1}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x_0)\right)(t_0) = \sum_{l=1}^{k-1} j^{k-1}\left(\frac{\partial H}{\partial u_l}(t, y_0)\right)(t_0) \frac{\partial b_l}{\partial x_i}(x_0),$$

pois $\frac{\partial c}{\partial x_i}(x_0)$ é constante e como $H_{y_0} = f$ é uma singularidade A_k (em t_0), então $\frac{\partial H}{\partial t}(t, y_0)$ é uma singularidade A_{k-1} (em t_0).

Sejam P e Q as matrizes dos jatos de F e H do Critério 2, respectivamente. Assim, da equação acima, $P = Q(\frac{\partial b_l}{\partial x_i}(x_0))$. Como F e H são desdobramentos p-versais de f em t_0 , então, pelo Critério 2, as matrizes P e Q têm posto $k - 1$. Além disso, como H é um desdobramento p-miniversal de f em t_0 , a matriz Q é quadrada e, conseqüentemente, invertível. Logo, como o posto é preservado pela multiplicação de matrizes invertíveis, então o posto da matriz jacobiana de b em x_0 é $k - 1$.

Agora obteremos os germes de difeomorfismos que estamos interessados utilizando o germe b da seguinte forma:

Mostremos que existem germes de aplicações lineares $l_i : (\mathbb{R}^r, x_0) \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, r - k + 1$ tais que os germes $\tilde{b} = (b, l_1, \dots, l_{r-k+1}) : (\mathbb{R}^r, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^r, (y_0, z_0))$ e $(a, \tilde{b}) : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0)) \rightarrow (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, y_0, z_0))$ sejam germes de difeomorfismos.

Como l_i é linear, então $l_i(x_1, \dots, x_r) = \alpha_{i1}x_1 + \dots + \alpha_{ir}x_r$, para $i = 1, \dots, r - k + 1$.

Assim,

$$Jac \tilde{b}(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial b_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial b_1}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial b_1}{\partial x_r}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial b_{k-1}}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial b_{k-1}}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial b_{k-1}}{\partial x_r}(x_0) \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{(r-k+1)1} & \alpha_{(r-k+1)2} & \cdots & \alpha_{(r-k+1)r} \end{bmatrix}.$$

Além disso, vimos que a matriz jacobiana de b em x_0 tem posto $k - 1$, então sem perda de generalidade podemos supor que as primeiras $k - 1$ colunas da matriz $Jac b(x_0)$ sejam linearmente independentes e denotando a matriz formada por essas colunas por B temos:

$$Jac \tilde{b}(x_0) = \begin{bmatrix} B & D = (\frac{\partial b_i}{\partial x_j}(x_0)) \\ A = (\alpha_{ij}) & C = (\alpha_{ij}) \end{bmatrix}.$$

Logo, tomando $A = 0$ e $C = Id_{(r-k+1)}$ concluímos que a matriz jacobiana de \tilde{b} em x_0 tem posto r , ou seja, tomando $l_i(x_1, \dots, x_r) = x_{k-1+i}$, $i = 1, \dots, r - k + 1$, temos que \tilde{b} é um germe de difeomorfismo.

Além disso, com essa escolha dos germes l_i 's, temos que a matriz

$$Jac(a, \tilde{b})(t_0, x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial a}{\partial t}(t_0, x_0) & \frac{\partial a}{\partial x_1}(t_0, x_0) & \cdots & \frac{\partial a}{\partial x_r}(t_0, x_0) \\ \frac{\partial \tilde{b}_1}{\partial t}(x_0) & \frac{\partial \tilde{b}_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial \tilde{b}_1}{\partial x_r}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \tilde{b}_r}{\partial t}(x_0) & \frac{\partial \tilde{b}_r}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial \tilde{b}_r}{\partial x_r}(x_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\partial a}{\partial x}(t_0, x_0) \\ 0 & Jac \tilde{b}(x_0) \end{bmatrix}$$

é invertível, já que $Jac \tilde{b}(x_0)$ é invertível. Portanto, a mesma escolha dos germes l_i 's faz com que o germe (a, \tilde{b}) seja um germe de difeomorfismo.

Resta-nos provar que (a, \tilde{b}) leva $(S_F, (t_0, x_0))$ em $(S_{\tilde{H}}, (t_0, y_0, z_0))$ e \tilde{b} leva (\mathcal{B}_F, x_0) em $(\mathcal{B}_{\tilde{H}}, (y_0, z_0))$.

Como $H(t, y) = \tilde{H}(t, y, z)$, então $H(a(t, x), b(x)) = \tilde{H}(a(t, x), \tilde{b}(x))$. Assim, $F(t, x) = H(a(t, x), b(x)) + c(x) = \tilde{H}(a(t, x), \tilde{b}(x)) + c(x)$ e, conseqüentemente,

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial t}(a(t, x), \tilde{b}(x)) \frac{\partial a}{\partial t}(t, x).$$

Além disso, como $\frac{\partial a}{\partial t}(t, x) \neq 0$ para todo (t, x) suficientemente próximo de (t_0, x_0) , então $\frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = 0$ se, e somente se, $\frac{\partial \tilde{H}}{\partial t}(a(t, x), \tilde{b}(x)) = 0$, ou seja, $(t, x) \in (S_F, (t_0, x_0))$ se, e somente se, $(a(t, x), \tilde{b}(x)) \in (S_{\tilde{H}}, (t_0, y_0, z_0)) = (S_H \times \mathbb{R}^{r-k+1}, (t_0, y_0, z_0))$.

Agora mostremos que se $x \in (\mathcal{B}_F, x_0)$, então $\tilde{b}(x) \in (\mathcal{B}_{\tilde{H}}, (y_0, z_0))$.

Novamente, temos

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial t}(a(t, x), \tilde{b}(x)) \frac{\partial a}{\partial t}(t, x)$$

e

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(t, x) = \frac{\partial^2 \tilde{H}}{\partial t^2}(a(t, x), \tilde{b}(x)) \left(\frac{\partial a}{\partial t}(t, x) \right)^2 + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial t}(a(t, x), \tilde{b}(x)) \frac{\partial^2 a}{\partial t^2}(t, x).$$

Logo, $x \in (\mathcal{B}_F, x_0)$, (isto é, existe $t \in (\mathbb{R}, t_0)$, tal que $\frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(t, x) = 0$) se, e somente se, existe $t \in (\mathbb{R}, t_0)$, tal que $\frac{\partial \tilde{H}}{\partial t}(a(t, x), \tilde{b}(x)) = \frac{\partial^2 \tilde{H}}{\partial t^2}(a(t, x), \tilde{b}(x)) = 0$. Portanto,

$$x \in (\mathcal{B}_F, x_0) \Leftrightarrow \tilde{b}(x) \in (\mathcal{B}_{\tilde{H}}, (y_0, z_0)) = (\mathcal{B}_H \times \mathbb{R}^{r-k+1}, (y_0, z_0)),$$

como queríamos. □

Considere F e f como na Proposição 3.1.28 e $G : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_1, u_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ um desdobramento p-versal a r -parâmetros de $g = G_{u_0}$ em t_1 . Suponhamos que g também é uma singularidade A_k , $k \geq 1$, (em t_1). Pela proposição anterior, para todo representante de F e G existem vizinhanças U de (t_0, x_0) e V de (t_1, u_0) em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r$ tais que $S_F \cap U$ e $S_G \cap V$ são variedades suaves de dimensão r .

O teorema abaixo (para f e g germes de funções \mathcal{R} -equivalentes) também pode ser encontrado em [5], p. 196.

Teorema 3.1.30 ([7], p. 143) **(Unicidade dos conjuntos singular e bifurcação)**

Com as notações acima, para todo representante de F e de G , as vizinhanças U e V podem ser escolhidas tais que existe um difeomorfismo $\phi : U \rightarrow V$ da forma $\phi(t, x) = (a(t, x), b(x))$, para aplicações $a : U \rightarrow \mathbb{R}$ e $b : \pi(U) \rightarrow \pi(V)$, com $a(t_0, x_0) = t_1$, $b(x_0) = u_0$, π a projeção no espaço dos parâmetros e satisfazendo as seguintes condições.

(i) $\phi(S_F \cap U) = S_G \cap V$;

(ii) b é um difeomorfismo e $b(\mathcal{B}_F \cap \pi(U)) = \mathcal{B}_G \cap \pi(V)$.

Ou seja, os conjuntos singulares $(S_F, (t_0, x_0))$ e $(S_G, (t_1, u_0))$ são localmente difeomorfos, o mesmo valendo para os conjuntos bifurcações (\mathcal{B}_F, x_0) e (\mathcal{B}_G, u_0) .

Demonstração. Faremos a demonstração em dois casos, sendo que em um deles subdividiremos em outros dois casos.

- Suponhamos que f é \mathcal{R} -equivalente à g .

Neste caso, $f(t) = g(h(t)) + c$, com $h : (\mathbb{R}, t_0) \rightarrow (\mathbb{R}, t_1)$ um germe de difeomorfismo.

◇ Primeiramente consideremos o caso em que $r = k - 1$:

Seja $\overline{G}(t, u) = G(h(t), u) + c$. Pela Proposição 3.1.4, \overline{G} é um desdobramento p-versal de f em t_0 , já que G é desdobramento p-versal de g em t_1 .

Para \overline{G} no lugar de F o resultado é verdadeiro, pois basta tomar $\phi(t, u) = (h(t), u)$ e U pode ser escolhido suficientemente pequeno para que ϕ seja difeomorfismo sobre a sua imagem.

Mostremos agora que para \overline{G} no lugar de G o teorema também é verdadeiro e, assim, o resultado geral segue fazendo a composta dos ϕ 's encontrados.

Como F e \overline{G} são desdobramentos p-versais, existem germes a, b e c como na Definição 3.1.1, de modo que $F(t, x) = \overline{G}(a(t, x), b(x)) + c(x)$ com $a(t, x_0) = t$ e $b(x_0) = u_0$. Tomando representantes de a e b , mostremos que $\phi = (a, b)$ e b são difeomorfismos.

Primeiramente mostremos que $b : \pi(U) \rightarrow \pi(V)$ é difeomorfismo. Temos

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial \overline{G}}{\partial t} \frac{\partial a}{\partial x_i} + \sum_{l=1}^{k-1} \frac{\partial \overline{G}}{\partial u_l} \frac{\partial b_l}{\partial x_i} + \frac{\partial c}{\partial x_i}.$$

Como $\overline{G}(t, u_0) = f(t)$ é uma singularidade A_k (em t_0), então $\frac{\partial \overline{G}}{\partial t}(t, u_0) = f'(t)$ é uma singularidade A_{k-1} (em t_0). Assim,

$$j^{k-1}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x_0)\right)(t_0) = j^{k-1}\left(\frac{\partial \overline{G}}{\partial t}(t, u_0)\frac{\partial a}{\partial x_i}(t, x_0) + \sum_{l=1}^{k-1} \frac{\partial \overline{G}}{\partial u_l}(t, u_0)\frac{\partial b_l}{\partial x_i}(x_0) + \frac{\partial c}{\partial x_i}(x_0)\right)(t_0),$$

mas $\frac{\partial c}{\partial x_i}(x_0)$ é constante e não contribui para o jato e, como $\frac{\partial \overline{G}}{\partial t}(t, u_0)$ é uma singularidade A_{k-1} (em t_0), então no $(k - 1)$ -jato seu valor é zero. Daí,

$$j^{k-1}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x_0)\right)(t_0) = \sum_{l=1}^{k-1} j^{k-1}\left(\frac{\partial \overline{G}}{\partial u_l}(t, u_0)\right)(t_0)\frac{\partial b_l}{\partial x_i}(x_0).$$

Como F e \overline{G} são desdobramentos p-versais, então as matrizes dos coeficientes (α_{ji}) do Critério 2 (Teorema 3.1.12) são invertíveis. Logo, chamando de P e Q tais matrizes referentes a F e \overline{G} , respectivamente, temos:

$$P = Q\left(\frac{\partial b_l}{\partial x_i}(x_0)\right),$$

e, como tais matrizes são quadradas, o determinante de ambos os lados da igualdade são não nulos. Assim, o determinante de $(\frac{\partial b_i}{\partial x_i}(x_0))$ é não nulo, ou seja, a matriz $(\frac{\partial b_i}{\partial x_i}(x_0))$ é invertível e é a matriz jacobiana de b em x_0 . Portanto, b é um difeomorfismo (reduzindo U e V se necessário).

Agora mostremos que $\phi = (a, b)$ é um difeomorfismo.

Como $\frac{\partial a}{\partial t}(t_0, x_0) = 1$, então a matriz jacobiana de ϕ em (t_0, x_0) é

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{\partial a}{\partial x}(t_0, x_0) \\ 0 & \frac{\partial b}{\partial x}(x_0) \end{bmatrix},$$

e, como vimos, b é um difeomorfismo. Logo, a matriz jacobiana de ϕ em (t_0, x_0) tem posto máximo. Portanto, ϕ é um difeomorfismo (reduzindo U e V se necessário). Assim, como

$$F(t, x) = \overline{G}(a(t, x), b(x)) + c(x),$$

ao derivarmos F com relação a t , obtemos

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial \overline{G}}{\partial t}(\phi(t, x)) \frac{\partial a}{\partial t}(t, x).$$

Portanto, se $(t, x) \in S_F$, então $\frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = 0$ e, assim, $\frac{\partial \overline{G}}{\partial t}(\phi(t, x)) \frac{\partial a}{\partial t}(t, x) = 0$. Mas como $\phi = (a, b)$ é difeomorfismo, então $\frac{\partial a}{\partial t}(t, x) \neq 0$ em U . Portanto, $\frac{\partial \overline{G}}{\partial t}(\phi(t, x)) = 0$, ou seja, $\phi(t, x) \in S_{\overline{G}}$, provando assim, o item (i).

Resta-nos verificar que b leva \mathcal{B}_F em $\mathcal{B}_{\overline{G}}$.

Calculando algumas derivadas obtemos

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial \overline{G}}{\partial t}(a(t, x), b(x)) \frac{\partial a}{\partial t}(t, x)$$

e

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(t, x) = \frac{\partial^2 \overline{G}}{\partial t^2}(a(t, x), b(x)) \left(\frac{\partial a}{\partial t}(t, x) \right)^2 + \frac{\partial \overline{G}}{\partial t}(a(t, x), b(x)) \frac{\partial^2 a}{\partial t^2}(t, x).$$

Assim, segue que $\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0$ em (t, x) se, e somente se, $\frac{\partial \overline{G}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \overline{G}}{\partial t^2} = 0$ em $(a(t, x), b(x))$. Portanto, (reduzindo U e V se necessário)

$$b(x) \in \mathcal{B}_{\overline{G}} \cap \pi(V) \Leftrightarrow x \in \mathcal{B}_F \cap \pi(U).$$

◇ Agora consideremos o caso em que $r > k - 1$:

Sejam $F_1 : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k-1}, (t_0, y_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ e $G_1 : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k-1}, (t_1, w_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ desdobramentos p -miniversais de f e g , respectivamente. Definimos $\tilde{F} : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R}^{r-k+1}, (t_0, y_0, z_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ por $\tilde{F}(t, y, z) = F_1(t, y)$ e $\tilde{G} : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R}^{r-k+1}, (t_1, w_0, v_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ por $\tilde{G}(t, w, v) = G_1(t, w)$.

Assim, pelo lema anterior aplicado a F , temos $(S_F, (t_0, x_0))$ e (\mathcal{B}_F, x_0) localmente difeomorfos a $(S_{\tilde{F}}, (t_0, y_0, z_0)) = (S_{F_1} \times \mathbb{R}^{r-k+1}, (t_0, y_0, z_0))$ e $(\mathcal{B}_{\tilde{F}}, (y_0, z_0)) = (\mathcal{B}_{F_1} \times \mathbb{R}^{r-k+1}, (y_0, z_0))$, respectivamente. Da mesma forma, aplicando o lema anterior para G , concluímos que $(S_G, (t_1, u_0))$ e (\mathcal{B}_G, u_0) são localmente difeomorfo a $(S_{\tilde{G}}, (t_1, w_0, v_0)) = (S_{G_1} \times \mathbb{R}^{r-k+1}, (t_1, w_0, v_0))$ e $(\mathcal{B}_{\tilde{G}}, (w_0, v_0)) = (\mathcal{B}_{G_1} \times \mathbb{R}^{r-k+1}, (w_0, v_0))$, respectivamente.

No entanto, como F_1 e G_1 são desdobramentos p -versais a $k-1$ parâmetros de f e g , respectivamente, então, pelo caso $r = k-1$ provado acima, temos que $(S_{F_1}, (t_0, y_0))$ e (\mathcal{B}_{F_1}, y_0) são localmente difeomorfos a $(S_{G_1}, (t_1, w_0))$ e (\mathcal{B}_{G_1}, w_0) , respectivamente.

Portanto, denotando por $A \approx B$ quando dois conjuntos A e B são localmente difeomorfos concluímos que:

$$(S_F, (t_0, x_0)) \approx (S_{F_1} \times \mathbb{R}^{r-k+1}, (t_0, y_0, z_0)) \approx (S_{G_1} \times \mathbb{R}^{r-k+1}, (t_1, w_0, v_0)) \approx (S_G, (t_1, u_0))$$

e

$$(\mathcal{B}_F, x_0) \approx (\mathcal{B}_{F_1} \times \mathbb{R}^{r-k+1}, (y_0, z_0)) \approx (\mathcal{B}_{G_1} \times \mathbb{R}^{r-k+1}, (w_0, v_0)) \approx (\mathcal{B}_G, u_0).$$

Além disso, todos os difeomorfismos utilizados tem a forma $(a(t, x), b(x))$ e, portanto, a composição desses difeomorfismos gera um difeomorfismo de mesma forma, o que conclui a demonstração para o caso em que f e g são \mathcal{R} -equivalentes.

• Suponhamos que f não é \mathcal{R} -equivalente à g .

Neste caso, f e g são singularidades A_k , para algum $k \geq 1$ ímpar. Então, pelo Teorema 2.1.7, podemos considerar que f é \mathcal{R} -equivalente a t^{k+1} (em 0) e que g é \mathcal{R} -equivalente a $-t^{k+1}$ (em 0).

Considere $F_1 : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k-1}, (0, 0)) \rightarrow \mathbb{R}$ o desdobramento p -miniversal de t^{k+1} em 0 dado por $F_1(t, x) = t^{k+1} + x_{k-1}t^{k-1} + \dots + x_1t$ e $G_1 : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k-1}, (0, 0)) \rightarrow \mathbb{R}$ o desdobramento p -miniversal de $-t^{k+1}$ em 0 dado por $G_1(t, x) = -t^{k+1} + x_{k-1}t^{k-1} + \dots + x_1t$. Assim, aplicando o lema anterior para $r > k-1$, ou o caso provado anteriormente para $r = k-1$, concluímos que $(S_F, (t_0, x_0))$ e (\mathcal{B}_F, x_0) são localmente difeomorfos a $(S_{F_1} \times \mathbb{R}^{r-k+1}, (0, 0, 0))$ e $(\mathcal{B}_{F_1} \times \mathbb{R}^{r-k+1}, (0, 0))$, respectivamente.

Portanto, podemos supor $F = F_1$, $G = G_1$, $f(t) = t^{k+1}$ e $g(t) = -t^{k+1}$.

Calculando algumas derivadas concluímos que

$$\begin{aligned} S_F &= \left\{ (t, -(k+1)t^k - \sum_{i=1}^{k-2} (k-i)x_{k-i}t^{k-i-1}, x_2, \dots, x_{k-1}) \right\} \\ \mathcal{B}_F &= \left\{ \left((k+1)(k-1)t^k + \sum_{i=1}^{k-3} (k-i)(k-i-2)x_{k-i}t^{k-i-1}, \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{-k(k+1)}{2}t^{k-1} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-3} (k-i)(k-i-1)x_{k-i}t^{k-i-2}, x_3, \dots, x_{k-1} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_G &= \left\{ (t, (k+1)t^k - \sum_{i=1}^{k-2} (k-i)u_{k-i}t^{k-i-1}, u_2, \dots, u_{k-1}) \right\} \\
\mathcal{B}_G &= \left\{ (-(k+1)(k-1)t^k + \sum_{i=1}^{k-3} (k-i)(k-i-2)u_{k-i}t^{k-i-1}, \right. \\
&\quad \left. \frac{k(k+1)}{2}t^{k-1} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-3} (k-i)(k-i-1)u_{k-i}t^{k-i-2}, u_3, \dots, u_{k-1}) \right\}.
\end{aligned}$$

Neste caso, existe o difeomorfismo $\phi(t, x_1, \dots, x_{k-1}) = (t, -x_1, \dots, -x_{k-1}) = (t, u_1, \dots, u_{k-1})$ (ou seja, $u_j = -x_j$, para $j = 1, \dots, k-1$) tal que

$$\begin{aligned}
&\phi(t, -(k+1)t^k - \sum_{i=1}^{k-2} (k-i)x_{k-i}t^{k-i-1}, x_2, \dots, x_{k-1}) = \\
&= (t, (k+1)t^k + \sum_{i=1}^{k-2} (k-i)x_{k-i}t^{k-i-1}, -x_2, \dots, -x_{k-1}) = \\
&= (t, (k+1)t^k - \sum_{i=1}^{k-2} (k-i)u_{k-i}t^{k-i-1}, u_2, \dots, u_{k-1}),
\end{aligned}$$

ou seja, $\phi(S_F) = S_G$.

Além disso, ϕ é da forma $\phi(t, x) = (a(t, x), b(x))$, com $a(t, x) = t$ e $b(x) = -x$. Claramente b é difeomorfismo e

$$\begin{aligned}
&b((k+1)(k-1)t^k + \sum_{i=1}^{k-3} (k-i)(k-i-2)x_{k-i}t^{k-i-1}, \\
&\quad \frac{-k(k+1)}{2}t^{k-1} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-3} (k-i)(k-i-1)x_{k-i}t^{k-i-2}, x_3, \dots, x_{k-1}) = \\
&= (-(k+1)(k-1)t^k - \sum_{i=1}^{k-3} (k-i)(k-i-2)x_{k-i}t^{k-i-1}, \\
&\quad \frac{k(k+1)}{2}t^{k-1} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-3} (k-i)(k-i-1)x_{k-i}t^{k-i-2}, -x_3, \dots, -x_{k-1}) = \\
&= (-(k+1)(k-1)t^k + \sum_{i=1}^{k-3} (k-i)(k-i-2)u_{k-i}t^{k-i-1}, \\
&\quad \frac{k(k+1)}{2}t^{k-1} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-3} (k-i)(k-i-1)u_{k-i}t^{k-i-2}, u_3, \dots, u_{k-1}),
\end{aligned}$$

ou seja, $b(\mathcal{B}_F) = \mathcal{B}_G$, o que concluí a demonstração. \square

Concluimos do teorema anterior que para estudarmos propriedades do conjunto bifurcação de um desdobramento p -versal de uma singularidade A_k , as quais são preser-

vadas por difeomorfismos, basta estudarmos o conjunto bifurcação de um desdobramento p-versal de t^{k+1} . É claro que devemos tomar $r \geq k - 1$.

3.1.3 Desdobramentos p-versais de singularidades A_2, A_3 e A_4

Vamos estudar os conjuntos singular e bifurcação de singularidades A_k , para valores pequenos de k e r , mais precisamente, para $3 \geq r \geq k - 1$.

Note que para uma singularidade A_1 é interessante estudar apenas o conjunto singular (como vimos na Observação 3.1.22). No entanto, pela Proposição 3.1.28, sabemos que a estrutura local do conjunto singular é suave. Logo, o mais interessante é saber qual a estrutura local do conjunto bifurcação, por isso estudamos as singularidades $A_{\geq 2}$.

Exemplo 3.1.31 Desdobramentos p-versais de uma singularidade A_2 ($r \geq 1$)

Para $r = 1$, como $k = 2$, tomamos $f(t) = t^3$ e $F(t, x) = t^3 + xt$. Os conjuntos singular e bifurcação foram obtidos no Exemplo 3.1.23. Para $r > 1$, basta tomarmos $\bar{F} : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (0, 0)) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $\bar{F}(t, x) = t^3 + x_1 t$ (o qual independe dos parâmetros x_2, \dots, x_r). Então, $(\mathcal{B}_{\bar{F}}, 0) = (\mathcal{B}_F \times \mathbb{R}^{r-1}, (0, 0)) = (\{0\} \times \mathbb{R}^{r-1}, (0, 0))$. Assim, o conjunto bifurcação de um desdobramento p-versal a r -parâmetros de uma singularidade A_2 é localmente um espaço vetorial de dimensão $r - 1$ em \mathbb{R}^r e, portanto, é localmente difeomorfo a uma variedade suave de dimensão $r - 1$ em \mathbb{R}^r . A Figura 3.4 mostra a estrutura local dos conjuntos $(S_F, (t_0, x_0))$ e (\mathcal{B}_F, x_0) de uma singularidade A_2 , com $r = 1, 2, 3$ (no caso $r = 3$, o conjunto singular de F não é representado na figura por ser um subconjunto de \mathbb{R}^4).

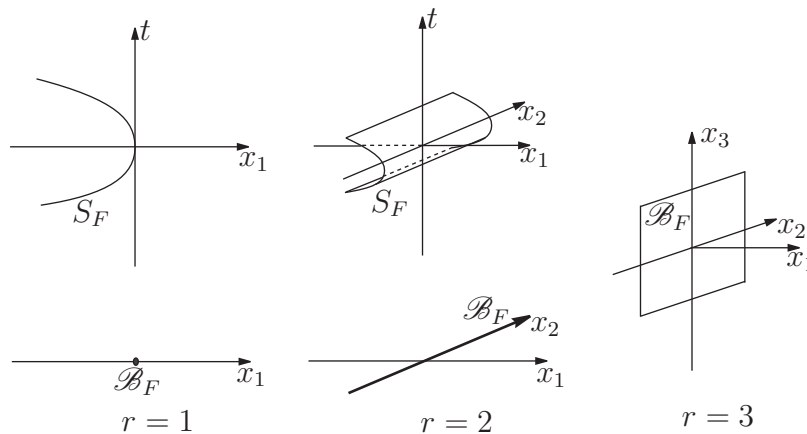


Figura 3.4: Conjuntos singular e bifurcação de uma singularidade A_2 .

□

Exemplo 3.1.32 Desdobramentos p-versais de uma singularidade A_3 ($r \geq 2$)

Para $r = 2$, como $k = 3$, tomamos $f(t) = t^4$ e F o desdobramento p-versal de f em 0 dado no Exemplo 3.1.25. Os conjuntos singular e bifurcação são dados no exemplo referido.

Para $r = 3$, de modo análogo podemos concluir que o conjunto bifurcação é uma superfície chamada cuspidal edge (isto é, difeomorfa ao conjunto $\{(x, y, z) \in (\mathbb{R}^3, 0); 4x^3 + 27y^2 = 0\}$). Ver Figura 3.5. Note que, para $r = 3$, $S_F \subset \mathbb{R}^4$.

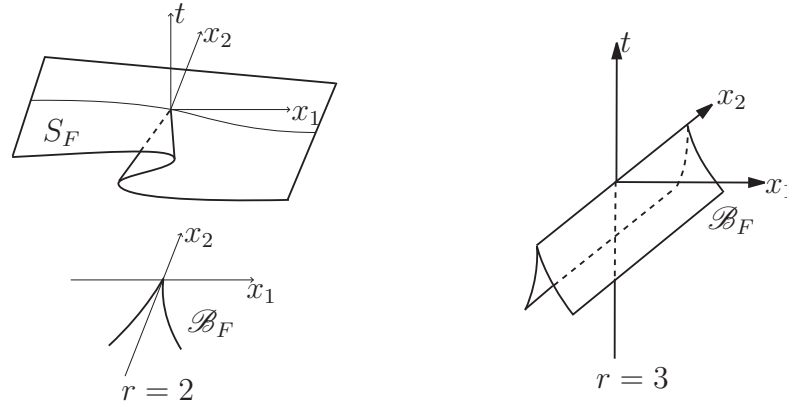


Figura 3.5: Conjuntos singular e bifurcação de uma singularidade A_3 .

□

Exemplo 3.1.33 Desdobramentos p-versais de uma singularidade A_4 ($r \geq 3$)

Considere $F : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (0, 0)) \rightarrow \mathbb{R}$ o desdobramento p-versal de $f(t) = \frac{1}{5}t^5$ em 0 dado por $F(t, x) = \frac{1}{5}t^5 + x_1t + \frac{1}{2}x_2t^2 + \frac{1}{3}x_3t^3$. Então o conjunto bifurcação é

$$(\mathcal{B}_F, 0) = \{x \in (\mathbb{R}^r, 0); \exists t \in (\mathbb{R}, 0); t^4 + x_1 + x_2t + x_3t^2 = 4t^3 + x_2 + 2x_3t = 0\}.$$

Para $r = 3$, esse conjunto é chamado de rabo de andorinha e é dado na Figura 3.6.

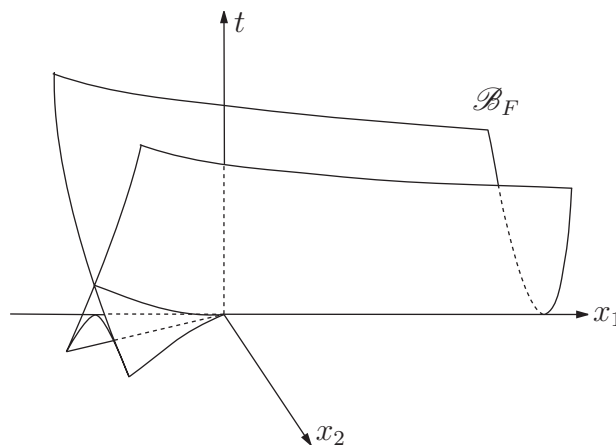


Figura 3.6: Conjunto bifurcação de uma singularidade A_4 (rabo de andorinha).

□

3.2 Desdobramentos versais

Nesta seção, faremos uma adaptação dos resultados anteriores para o caso versal (ou seja, para o caso em que os germes envolvidos não são germes de funções potenciais). As demonstrações de tais resultados são similares com suas devidas adaptações, por isto não as apresentaremos.

Definição 3.2.1 *Seja $G : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s, (t_0, y_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ um desdobramento a s -parâmetros do germe de função $g = G_{y_0}$. Considere*

$$\begin{cases} a : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0)) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ onde } a(t, x_0) = t \\ b : (\mathbb{R}^r, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^s, y_0), \text{ onde } b(x_0) = y_0 \end{cases}$$

em que a e b são germes de aplicações. O desdobramento a r -parâmetros $F : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ de g dado por

$$F(t, x) = G(a(t, x), b(x))$$

é dito **induzido de G** . Se todo desdobramento de g é induzido de G , dizemos que G é um **desdobramento versal de g em t_0** .

Exemplo 3.2.2 (Este exemplo trata-se do exercício proposto 6.19(6), p.151 de [7]) Omitindo os germes de funções c e c_1 no Exemplo 3.1.7, concluímos que *todo desdobramento de uma singularidade A_0 é versal*. \square

Teorema 3.2.3 (Teorema do Desdobramento Versal) ([7], p. 149) *Seja $g : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(t) = \pm t^{k+1}$, com $k \geq 1$. Então o desdobramento $G : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k, (0, 0)) \rightarrow \mathbb{R}$ de g dado por*

$$G(t, x) = \pm t^{k+1} + x_k t^{k-1} + \cdots + x_2 t + x_1$$

é versal.

Veremos que o desdobramento G dado no teorema anterior é um desdobramento versal com menor número de parâmetros (ver Critério 2 (Teorema 3.2.5)), então G também é chamado *desdobramento miniversal* de $\pm t^{k+1}$ em 0.

No que segue, consideramos $F : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ um desdobramento de $f : (\mathbb{R}, t_0) \rightarrow \mathbb{R}$, onde f é uma singularidade A_k ($k \geq 1$).

Teorema 3.2.4 (Critério 1) ([7], p. 149) *O desdobramento F é versal se, e somente se, todo polinômio real $p(t)$ de grau menor ou igual a $k - 1$ pode ser escrito na forma:*

$$p(t) = \sum_{i=1}^r c_i \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(t_0, x_0) + j^{k-1} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x_0) \right) (t_0) \right),$$

onde c_i é uma constante real.

Teorema 3.2.5 (Critério 2) ([7], p. 149) *Seja*

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(t_0, x_0) + j^{k-1}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x_0)\right)(t_0) = \alpha_{0i} + \alpha_{1i}t + \alpha_{2i}t^2 + \cdots + \alpha_{(k-1)i}t^{k-1},$$

para $i = 1, \dots, r$. Então F é versal se, e somente se, a matriz dos coeficientes $(\alpha_{ji})_{k \times r}$ tem posto k (isso requer que $k \leq r$).

Exemplo 3.2.6 Consideremos o desdobramento a 4-parâmetros de $f(t) = t^4$ dado por $F(t, x) = t^4 + x_1t^3 + x_2t^2 + x_3t + x_4$. Como f é uma singularidade A_3 (em 0), temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_1}(0, 0) + j^2\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(t, 0)\right)(0) &= 0 & ; & & \frac{\partial F}{\partial x_2}(0, 0) + j^2\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}(t, 0)\right)(0) &= t^2; \\ \frac{\partial F}{\partial x_3}(0, 0) + j^2\left(\frac{\partial F}{\partial x_3}(t, 0)\right)(0) &= t & ; & & \frac{\partial F}{\partial x_4}(0, 0) + j^2\left(\frac{\partial F}{\partial x_4}(t, 0)\right)(0) &= 1. \end{aligned}$$

Logo, escrevendo $\frac{\partial F}{\partial x_i}(0, 0) + j^2\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, 0)\right)(0) = \alpha_{0i} + \alpha_{1i}t + \alpha_{2i}t^2$, para $i = 1, 2, 3, 4$, então a matriz (α_{ji}) dada no Critério 2 é

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

a qual possui posto 3. Portanto, F é um desdobramento versal de f em 0. \square

Teorema 3.2.7 (Critério 3) ([7], p. 149) *O desdobramento F é versal se, e somente se, os $(k-1)$ -jatos de $\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x_0)$ em t_0 com constante (como no critério acima) geram o espaço vetorial real $\mathbb{R}[t]/\mathcal{M}^k = \mathbb{R}\{1, t, \dots, t^{k-1}\}$.*

3.2.1 Conjunto zero e discriminante

Nesta subseção definimos os conjuntos zero e discriminante de um desdobramento e estudamos suas estruturas locais em termos do tipo de singularidade do germe desdobrado e do número de parâmetros do desdobramento. Assim como para os conjuntos singular e bifurcação, muitos objetos podem ser vistos como conjuntos zero ou discriminante de um determinado desdobramento como, por exemplo, a ortotômica de uma curva plana. Logo, a fim de estudar a estrutura local desses objetos (a menos de difeomorfismos) basta estudar a estrutura local dos conjuntos zero e discriminante.

Definição 3.2.8 *Seja $F : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ um desdobramento de $f = F_{x_0}$. O conjunto zero de F é o germe de conjunto*

$$(M_F, (t_0, x_0)) = \{(t, x) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0)); F(t, x) = 0\},$$

e o conjunto discriminante de F é o germe de conjunto

$$(\mathcal{D}_F, x_0) = \{x \in (\mathbb{R}^r, x_0); \exists t \in (\mathbb{R}, t_0), \text{ onde } F(t, x) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = 0\}.$$

Observação 3.2.9 Assim como no caso p -versal, estamos interessados em estudar a estrutura local dos conjuntos $(M_F, (t_0, x_0))$ e (\mathcal{D}_F, x_0) , onde o germe desdobrado $f = F_{x_0}$ é uma singularidade A_k em (t_0) . No entanto, este estudo só faz sentido se tivermos $(t_0, x_0) \in (M_F, (t_0, x_0))$ e $x_0 \in (\mathcal{D}_F, x_0)$. Neste caso, o tipo de singularidade do germe desdobrado não nos fornece se o ponto $(t_0, x_0) \in (M_F, (t_0, x_0))$. No entanto, se $k = 0$, mesmo supondo que $(t_0, x_0) \in (M_F, (t_0, x_0))$ temos

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t_0, x_0) = \frac{dF_{x_0}}{dt}(t_0) = f'(t_0) \neq 0,$$

ou seja, $x_0 \notin (\mathcal{D}_F, x_0)$.

Por essa razão, neste caso, estudamos a estrutura local dos conjuntos zero e discriminante de desdobramentos de singularidades $A_{\geq 1}$.

Exemplo 3.2.10 Neste exemplo, calculamos o conjunto discriminante do germe da família de funções altura estendida e verificamos se essa família é um desdobramento versal. Este exemplo trata-se da seção 7.7, p. 165 de [7].

Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular parametrizada por comprimento de arco. Consideremos o germe da família de funções altura de γ :

$$\begin{aligned} H : (I \times S^1, (t_0, u_0)) &\rightarrow \mathbb{R} \\ H(t, u) &= \langle \gamma(t), u \rangle. \end{aligned}$$

e o germe da família de funções altura estendida $\overline{H} : (I \times S^1 \times \mathbb{R}, (t_0, u_0, c_0)) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $\overline{H}(t, u, c) = H(t, u) - c = \langle \gamma(t), u \rangle - c$.

Considere o germe $\varphi : (I \times \mathbb{R}^2, (t_0, x_0)) \rightarrow (I \times S^1 \times \mathbb{R}, (t_0, u_0, c_0))$ dado por $\varphi(t, x) = (t, (\cos x_1, \sin x_1), x_2)$ e $F : (I \times \mathbb{R}^2, (t_0, x_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $F(t, x) = \overline{H} \circ \varphi(t, x) = \langle \gamma(t), (\cos x_1, \sin x_1) \rangle - x_2$. Tomando $a(t, x) = t$ e $b(x) = (\cos x_1, \sin x_1, x_2)$, concluímos que F é induzido de \overline{H} .

Encontremos o conjunto discriminante de \overline{H} . Note que

$$\begin{aligned} \overline{H} = 0 &\Leftrightarrow c = \langle \gamma(t), u \rangle; \\ \overline{H} = \frac{\partial \overline{H}}{\partial t} = 0 &\Leftrightarrow c = \langle \gamma(t), u \rangle \text{ e } u = \pm N(t). \end{aligned}$$

Assim, o conjunto discriminante é

$$(\mathcal{D}_{\overline{H}}, (u_0, c_0)) = \{(\pm N(t), \pm \langle \gamma(t), N(t) \rangle); t \in (I, t_0)\}.$$

Considere t_0 correspondente de (u_0, c_0) . Como $r = 2$, então o tipo de singularidade do germe desdobrado deve ser A_1 ou A_2 . Encontremos condições para o germe de função $h = \overline{H}_{(u_0, c_0)}$ ser singularidade A_1 ou A_2 (em t_0). Em (t_0, u_0, c_0) , temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \overline{H}}{\partial t^2} = 0 &\Leftrightarrow \kappa(t_0) = 0; \\ \frac{\partial^2 \overline{H}}{\partial t^2} = \frac{\partial^3 \overline{H}}{\partial t^3} = 0 &\Leftrightarrow \kappa(t_0) = 0 \text{ e } \kappa'(t_0) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, h é uma singularidade A_1 (em t_0) se, e somente se, $\kappa(t_0) \neq 0$, ou seja, γ não possui uma inflexão em t_0 . Ainda mais, h é uma singularidade A_2 (em t_0) se, e somente se, $\kappa(t_0) = 0$ e $\kappa'(t_0) \neq 0$, ou seja, γ possui uma inflexão ordinária em t_0 .

Verifiquemos se \overline{H} é um desdobramento versal quando h é uma singularidade A_1 ou A_2 (em t_0). Como F é induzido de \overline{H} então, utilizando o Corolário 3.1.6 adaptado para o caso versal, concluímos que se F é versal, então \overline{H} também é. Logo, basta verificar se F é um desdobramento versal.

Utilizando o germe de difeomorfismo φ podemos mostrar facilmente que $f = F_{x_0}$ é uma singularidade A_k (em t_0) se, e somente se, h é uma singularidade A_k (em t_0), para $k = 1, 2$, onde $\varphi(t_0, x_0) = (t_0, u_0, c_0)$. Suponhamos $x_0 = (a, b)$.

Observe que

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(t_0, x_0) = \langle \gamma(t_0), (-\sin a, \cos a) \rangle \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial x_2}(t_0, x_0) = -1.$$

Logo, se F_{x_0} é uma singularidade A_1 (em t_0), então a matriz dada no Critério 2 (Teorema 3.2.5) é

$$\begin{pmatrix} \langle \gamma(t_0), (-\sin a, \cos a) \rangle & -1 \end{pmatrix},$$

que tem posto 1. Portanto, F é um desdobramento versal e, conseqüentemente, \overline{H} também é.

Se F_{x_0} é uma singularidade A_2 (em t_0), então a matriz dada no Critério 2 (Teorema 3.2.5) é

$$\begin{pmatrix} \langle \gamma(t_0), (-\sin a, \cos a) \rangle & -1 \\ \langle T(t_0), (-\sin a, \cos a) \rangle & 0 \end{pmatrix},$$

cujos determinantes são $-\langle T(t_0), (-\sin a, \cos a) \rangle$ que é diferente de 0 pois, como F_{x_0} é uma singularidade A_2 (em t_0), então $\frac{\partial F}{\partial t}(t_0, x_0) = \langle T(t_0), (\cos a, \sin a) \rangle = 0$, ou seja, $(-\sin a, \cos a) = \pm T(t_0)$. Portanto, F é um desdobramento versal e, conseqüentemente, \overline{H} também é. \square

A seguinte proposição equivale à Proposição 3.1.28 do caso p-versal.

Proposição 3.2.11 *Se $F : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ é um desdobramento versal de $f = F_{x_0}$ em t_0 , com $f(t_0) = 0$, então o conjunto zero de F é um germe de variedade suave de*

dimensão r , ou seja, para todo representante de F , existe uma vizinhança U de (t_0, x_0) em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r$ tal que $M_F \cap U$ é uma variedade suave de dimensão r .

Considere $F : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ e $G : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_1, x_1)) \rightarrow \mathbb{R}$ desdobramentos versais a r -parâmetros de $f = F_{x_0}$ em t_0 e $g = G_{x_1}$ em t_1 , respectivamente. Suponhamos que f e g são singularidades A_k , $k \geq 1$, (em t_0 e t_1 , respectivamente). Supondo que $(t_0, x_0) \in (M_F, (t_0, x_0))$ e $(t_1, x_1) \in (M_G, (t_1, x_1))$ então, pela proposição anterior, para todo representante de F e de G , existem vizinhanças U de (t_0, x_0) e V de (t_1, x_1) em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r$ tais que $M_F \cap U$ e $M_G \cap V$ são variedades suaves de dimensão r .

Teorema 3.2.12 ([7], p. 150) **(Unicidade dos conjuntos zero e discriminante)**

Com as notações acima, para todo representante de F e de G , as vizinhanças U e V podem ser escolhidas tais que exista um difeomorfismo $\phi : U \rightarrow V$ dado por $\phi(t, x) = (a(t, x), b(x))$, para aplicações $a : U \rightarrow \mathbb{R}$ e $b : \pi(U) \rightarrow \pi(V)$, com $a(t_0, x_0) = t_1$, $b(x_0) = x_1$, π a projeção no espaço dos parâmetros e satisfazendo as seguintes condições.

- (i) $\phi(M_F \cap U) = M_G \cap V$;
- (ii) b é um difeomorfismo e $b(\mathcal{D}_F \cap \pi(U)) = \mathcal{D}_G \cap \pi(V)$.

Ou seja, os conjuntos zero $(M_F, (t_0, x_0))$ e $(M_G, (t_1, x_1))$ são localmente difeomorfos, o mesmo valendo para os conjuntos discriminante (\mathcal{D}_F, x_0) e (\mathcal{D}_G, x_1) .

Concluimos do teorema anterior que para estudarmos propriedades do conjunto discriminante de um desdobramento versal de uma singularidade A_k , as quais são preservadas por difeomorfismos, basta estudarmos o conjunto discriminante de um desdobramento versal de t^{k+1} . Note que agora requer-se que $r \geq k$.

3.2.2 Desdobramentos versais de singularidades A_1, A_2 e A_3

Nesta subseção estudamos os conjuntos discriminante e zero de singularidades A_k , para valores pequenos de k e r , mais precisamente, para $3 \geq r \geq k$.

Novamente, como no caso p -versal, estudamos singularidades $A_{\geq 1}$ devido ao fato de que para uma singularidade A_0 somente o conjunto zero poderia ser interessante. No entanto, como vimos, a estrutura local do conjunto zero é suave.

Exemplo 3.2.13 Desdobramentos versais de uma singularidade A_1 ($r \geq 1$)

Seja $F : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (0, 0)) \rightarrow \mathbb{R}$ o desdobramento versal de $f(t) = t^2$ em 0 dado por $F(t, x) = t^2 + x_1$. Então, para cada r , os conjuntos zero e discriminante de F são os conjuntos singular e bifurcação de uma singularidade A_2 , respectivamente (ver Figura 3.4). Portanto, o conjunto discriminante $(\mathcal{D}_F, 0)$ é, para $r = 1$, um ponto em \mathbb{R} ; para $r = 2$, uma reta em \mathbb{R}^2 ; para $r = 3$, um plano em \mathbb{R}^3 . \square

Exemplo 3.2.14 Desdobramentos versais de uma singularidade A_2 ($r \geq 2$)

Seja $F : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (0, 0)) \rightarrow \mathbb{R}$ o desdobramento versal de $f(t) = t^3$ em 0 dado por $F(t, x) = t^3 + x_1 + x_2 t$. Então, para cada r , os conjuntos zero e discriminante de F são os conjuntos singular e bifurcação de uma singularidade A_3 , respectivamente (ver Figura 3.5). Portanto, o conjunto discriminante $(\mathcal{D}_F, 0)$ é, para $r = 2$, uma cúspide em \mathbb{R}^2 , para $r = 3$, uma cuspidal edge em \mathbb{R}^3 . \square

Exemplo 3.2.15 Desdobramentos versais de uma singularidade A_3 ($r \geq 3$)

Seja $F : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (0, 0)) \rightarrow \mathbb{R}$ o desdobramento versal de $f(t) = t^4$ em 0 dado por $F(t, x) = t^4 + x_1 + x_2 t + x_3 t^2$. Então, para cada r , os conjuntos zero e discriminante de F são os conjuntos singular e bifurcação de uma singularidade A_4 (ver Figura 3.6). Portanto, o conjunto discriminante $(\mathcal{D}_F, 0)$ é, para $r = 3$, a superfície rabo de andorinha em \mathbb{R}^3 . \square

Na próxima seção, veremos algumas aplicações da teoria estudada até o momento no estudo da estrutura local de alguns “objetos” da matemática já conhecidos, como algumas curvas planas e espaciais e algumas superfícies singulares.

3.3 Aplicações

Neste seção, veremos aplicações da teoria abordada nas seções anteriores deste capítulo ao estudo da estrutura local de alguns subconjuntos do espaço Euclidiano. Utilizando as propriedades genéricas abordadas no Capítulo 2 podemos considerar o estudo da estrutura local de tais conjuntos quanto a genericidade.

Para aplicar a teoria de desdobramentos no estudo da estrutura local de determinado conjunto, encontraremos um desdobramento p -versal apropriado (resp., versal) cujo conjunto bifurcação (resp., discriminante) é o conjunto que queremos estudar. Dessa forma, encontrando a dimensão r do espaço de parâmetros ($1 \leq r \leq 3$) e as condições para o germe desdobrado ser singularidade A_k , com $2 \leq k \leq 4$ (resp. $1 \leq k \leq 3$), obtemos que o conjunto em questão é localmente difeomorfo a um daqueles apresentados nos Exemplos 3.1.31, 3.1.32 e 3.1.33 (resp., Exemplos 3.2.13, 3.2.14 e 3.2.15). Nossa principal referência para esta seção é o Capítulo 7 do livro [7], outras referências utilizadas foram [4], [5], [8], [9], [6] e [13].

Separamos nosso estudo em aplicações relacionadas a curvas planas e espaciais.

As curvas consideradas nesta seção são supostas regulares, tal suposição não é muito restritiva pois, como vimos na Proposição 1.2.11 do Capítulo 1, adicionando termos lineares às componentes de qualquer curva $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^s$, $s = 2, 3$, quase sempre obtemos uma curva regular.

Para outras aplicações ver [7], Exemplos (1) e (3) de [4] e para aplicações no estudo de equações diferenciais ver [6]. Neste trabalho utilizamos conceitos e resultados sobre

desdobramentos de funções reais, a partir dos quais obtemos aplicações no estudo da estrutura local de subconjuntos do espaço Euclidiano relacionados com curvas planas e espaciais. Para um estudo mais geral, envolvendo desdobramentos de aplicações de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^m e resultados relacionados a geometria de superfícies ou hipersuperfícies ver [13].

3.3.1 Curvas planas

Estudamos nesta seção algumas aplicações da teoria de desdobramentos ao estudo de curvas planas, usando as funções distância ao quadrado, altura e outras.

Evoluta

Esta aplicação pode ser encontrada também em [5] e [9].

Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular com curvatura não nula. Podemos verificar facilmente que a evoluta de γ é uma curva regular em t_0 se, e somente se, $\kappa'(t_0) \neq 0$, ou seja, fora de vértices e de inflexões de ordem maior. Assim, fora desses pontos, a evoluta é, localmente, difeomorfa a um segmento de reta. Na proposição a seguir estudamos, além do caso regular, a estrutura local da evoluta nos pontos onde ela deixa de ser uma curva regular.

Recordemos que uma cúspide ordinária em \mathbb{R}^2 é uma curva difeomorfa a curva parametrizada por (t^2, t^3) . A Figura 3.7 mostra uma elipse, a qual possui quatro vértices ordinários, sua evoluta, possuindo quatro cúspides ordinárias, uma parábola, com um vértice ordinário, e sua evoluta, com uma cúspide ordinária. Note que as cúspides são pontos correspondentes aos vértices da curva. Será que isso sempre ocorre? A resposta para essa questão é dada na proposição a seguir.

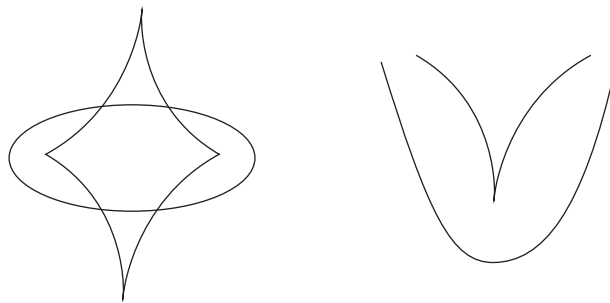


Figura 3.7: Elipse, parábola e suas evolutas.

Os itens (i) e (ii) da proposição abaixo podem ser encontrados em [7], p. 161. A proposição a seguir também trata-se do resultado (6.5), p. 545 de [9].

Proposição 3.3.1 *Sejam $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular com curvatura não nula e x um ponto da evoluta de γ correspondente ao valor de parâmetro t . Então, localmente em x , a evoluta é difeomorfa a:*

- (i) uma reta, se a curva não possui um vértice em t ;
- (ii) uma cúspide ordinária, se a curva tem um vértice ordinário em t .

Além disso, se γ é uma curva compacta, então esse estudo é genérico.

Demonstração. Podemos supor γ parametrizada por comprimento de arco. Seja F o germe da família de funções distância ao quadrado dada na Equação (3.3) e $x \in \mathbb{R}^2$ ponto da evoluta de γ correspondente a t . Considere o estudo feito no Exemplo 3.1.26, para $r = 2$.

Se $\gamma(t)$ não é um vértice, então $f = F_x$ é uma singularidade A_2 (em t). Como F é desdobramento p-versal de f , então segue do Teorema 3.1.30 que o conjunto bifurcação de F (e, portanto, a evoluta de γ) é localmente difeomorfo ao conjunto bifurcação de um desdobramento p-versal de $g(t) = t^3$, a qual é uma reta em \mathbb{R}^2 (conforme Exemplo 3.1.31).

Se $\gamma(t)$ é um vértice ordinário, então $f = F_x$ é uma singularidade A_3 (em t) e, com os mesmos argumentos anteriores, tomando $g(t) = t^4$ e o Exemplo 3.1.32, concluímos que a evoluta de γ é localmente difeomorfa a uma cúspide ordinária em \mathbb{R}^2 .

Além disso, se γ é uma curva compacta então, pelo Teorema 2.2.8, o estudo feito anteriormente é genérico. \square

Pela proposição anterior, se a curvatura de γ tem um ponto crítico não degenerado em t_0 (ou seja, γ tem um vértice ordinário em t_0), então a evoluta de γ tem uma cúspide no respectivo ponto. Podemos nos perguntar sobre a relação geométrica entre a cúspide e a curva γ . A observação a seguir responde a tal questão e trata-se do exercício proposto 7.4(1), p. 162, em [7].

Observação 3.3.2 *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva com um vértice ordinário em t_0 e $\kappa(t_0) > 0$. A cúspide presente na evoluta “tende” a $\gamma(t_0)$ quando κ tem um máximo em t_0 , e o oposto ocorre quando κ tem um mínimo em t_0 .*

De fato, se κ tem um máximo em t_0 então como os pontos da evoluta são da forma $x(t) = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)}N(t)$ e $\frac{1}{\kappa(t_0)}$ é mínimo, concluímos que $x(t_0)$ está mais próximo de $\gamma(t_0)$ do que pontos da evoluta próximos de $x(t_0)$, ou seja, a cúspide presente na evoluta “tende” ao ponto correspondente da curva. De modo análogo, se $\kappa(t_0)$ é mínimo, então $\frac{1}{\kappa(t_0)}$ é máximo, o que conclui a observação.

Na Figura 3.7 podemos ver geometricamente a observação anterior para a parábola e a elipse.

Exemplo 3.3.3 (Exercício 7.4(2), proposto em [7], p. 162) Mostremos que existe uma outra família de germes de funções $F : (I \times \mathbb{R}^2, (t_0, x_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ associada a uma curva regular plana $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, com curvatura não nula, tal que a evoluta de γ é também o conjunto bifurcação de F .

De fato, para cada $x \in (\mathbb{R}^2, x_0)$ e $t \in (I, t_0)$, considere F dada por

$$F(t, x) = \langle (x - \gamma(t)), N(t) \rangle,$$

a qual fornece, em valor absoluto, a distância de x a reta tangente à γ em t .

Considere γ parametrizada por comprimento de arco. Em (t, x) , temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = 0 &\Leftrightarrow x(t) = \gamma(t) + \lambda N(t), \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R}; \\ \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(t, x) = 0 &\Leftrightarrow x(t) = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)} N(t). \end{aligned}$$

Logo, o conjunto bifurcação é:

$$(\mathcal{B}_F, x_0) = \{x \in (\mathbb{R}^2, x_0); \exists t \in (I, t_0); x = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)} N(t)\},$$

o qual é o germe da evoluta de γ em x_0 .

Portanto, na demonstração da proposição anterior poderíamos trocar o germe da família de funções distância ao quadrado por esta família de germes de funções F e o resultado seria o mesmo. \square

Dual

Esta aplicação pode ser encontrada também em [5] e [9].

Nesta seção estudamos a estrutura local da curva dual de uma curva regular, a qual definimos a seguir, utilizando o germe da família de funções altura.

Definição 3.3.4 *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular. O subconjunto de $S^1 \times \mathbb{R}$ dado pelos pontos $(N(t), \langle \gamma(t), N(t) \rangle)$, para $t \in I$, é chamado de **curva dual** de γ .*

Exemplo 3.3.5 Considere $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (t, t^3)$. Fazendo alguns cálculos concluímos que

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{1}{\sqrt{1+9t^4}}(1, 3t^2); \\ N(t) &= \frac{1}{\sqrt{1+9t^4}}(-3t^2, 1); \\ \langle \gamma(t), N(t) \rangle &= \frac{-2t^3}{\sqrt{1+9t^4}}. \end{aligned}$$

Portanto, a curva dual de γ é dada por

$$\frac{1}{\sqrt{1+9t^4}}(-3t^2, 1, -2t^3).$$

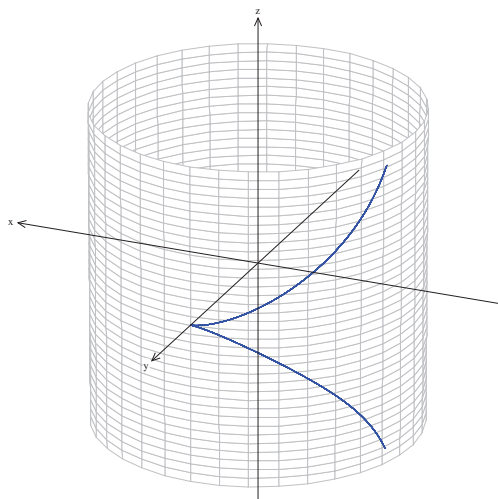


Figura 3.8: Curva dual de (t, t^3) .

Ver Figura 3.8.

□

A cada reta orientada no plano, podemos associar um ponto de $S^1 \times \mathbb{R}$ e vice-versa, de forma que o ponto $(u, c) \in S^1 \times \mathbb{R}$ é associado a reta dada pelos pontos x tais que $\langle x, u \rangle = c$, onde a direção desta reta é obtida rotacionando o vetor u em $\frac{\pi}{2}$ no sentido horário. Ver Figura 3.9. Assim, (u, c) e $(-u, -c)$ correspondem a mesma reta, mas com orientações opostas.

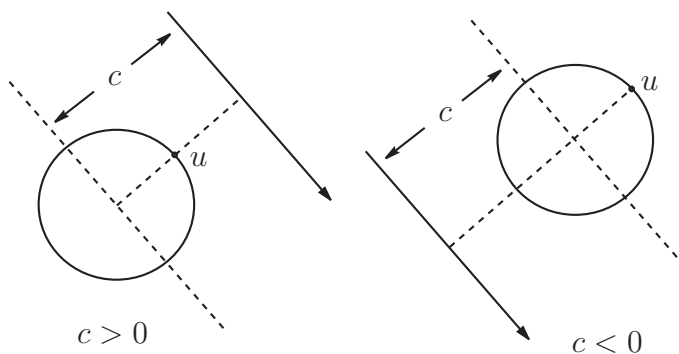


Figura 3.9: Associação entre retas orientadas no plano e pontos de $S^1 \times \mathbb{R}$.

Utilizando esta associação, poderíamos nos perguntar que subconjunto de $S^1 \times \mathbb{R}$ corresponde ao conjunto de todas as retas tangentes à γ . Claramente tal conjunto é a curva dual de γ . A seguir apresentamos a estrutura local da curva dual de uma curva regular plana. Os itens (i) e (ii) da proposição abaixo podem ser encontrados em [7], p. 166. Esta proposição também trata-se do resultado (6.4), p. 545 de [9].

Proposição 3.3.6 *Sejam $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular e x um ponto da curva dual*

de γ correspondente ao valor de parâmetro t . Então, localmente em x , a curva dual é difeomorfa à:

- (i) uma reta em \mathbb{R}^2 , se a curva γ não possui uma inflexão em t ;
- (ii) uma cúspide ordinária em \mathbb{R}^2 , se a curva γ possui uma inflexão ordinária em t .

Além disso, se γ é uma curva compacta, então este estudo é genérico.

Demonstração. Utilizando o estudo feito no Exemplo 3.2.10, o Teorema 3.2.12 e os Exemplos 3.2.13 e 3.2.14 o resultado segue.

Além disso, se γ é compacta, então, pelo Teorema 2.2.8, este estudo é genérico. \square

Paralelas

Aqui consideramos duas aplicações, uma sobre o estudo da curva paralela e outro da superfície paralela, a qual definiremos a seguir.

Sejam $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular e d um número real. A curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\alpha(t) = \gamma(t) + dN(t)$ é chamada **paralela** a γ à uma distância d (para d negativo cometemos um abuso falando em “distancia d ”, mas o sinal de d destinge a paralela obtida no sentido $+N$ ($d > 0$) da obtida no sentido $-N$ ($d < 0$)).

Podemos mostrar facilmente que α é regular em t se, e somente se, $\alpha(t)$ não é centro de curvatura de γ em t , ou seja, não pertence à evoluta de γ em t (ver Figura 3.10). Na proposição a seguir apresentamos, além deste caso, a estrutura local da paralela na vizinhança de centros de curvatura de γ . Para propriedades de paralelas, ver [7] e [15].

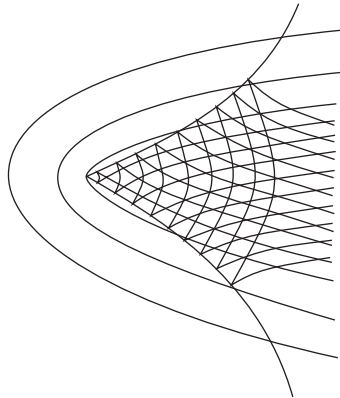


Figura 3.10: Paralelas e evoluta da parábola.

Proposição 3.3.7 ([7], p. 168 e 169) *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular.*

- (i) *Sejam x um ponto da paralela a γ à uma distância d e t correspondente a x . Então, a paralela a γ à uma distância d é, numa vizinhança de x , difeomorfa a:*

- (a) *uma reta, se x não é centro de curvatura de γ em t .*

- (b) *uma cúspide ordinária, se x é centro de curvatura de γ em t e γ não tem vértice em t .*

(ii) A paralela a γ a uma distância d , para quase todo d , tem somente singularidades cúspides ordinárias.

Demonstração. (i) O item (a) pode ser mostrado facilmente. Provemos o item (b).

Podemos supor γ parametrizada por comprimento de arco. Seja $F : (I \times \mathbb{R}^2, (t_0, x_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$F(t, x) = \langle (x - \gamma(t)), (x - \gamma(t)) \rangle - r^2,$$

para algum $r > 0$ fixado. Calculando a derivada de F em relação a t , concluímos que o conjunto discriminante de F é

$$(\mathcal{D}_F, x_0) = \{x \in (\mathbb{R}^2, x_0); x = \gamma(t) \pm rN(t)\},$$

sendo, portanto, o germe da união das paralelas a γ a uma distância r e $-r$.

Encontremos condições para o germe desdobrado $f = F_{x_0}$ ser singularidade A_2 (em t_0), sendo este valor de parâmetro correspondente a $x_0 \in (\mathcal{D}_F, x_0)$. Suponhamos que $\kappa(t_0) \neq 0$. Temos:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(t_0, x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = \gamma(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)}N(t_0),$$

sendo, portanto, essa a condição para F_{x_0} ser singularidade $A_{\geq 2}$ (em t_0).

Calculando a terceira derivada de F em relação a t e supondo que F_{x_0} é uma singularidade $A_{\geq 2}$ (em t_0), temos

$$\frac{\partial^3 F}{\partial t^3}(t_0, x_0) = -2\frac{\kappa'(t_0)}{\kappa(t_0)} \neq 0 \Leftrightarrow \kappa'(t_0) \neq 0.$$

Concluímos assim que F_{x_0} é uma singularidade A_2 (em t_0) se, e somente se, $x_0 = \gamma(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)}N(t_0)$ e $\kappa'(t_0) \neq 0$.

Supondo que F_{x_0} é uma singularidade A_2 (em t_0), mostremos que F é um desdobramento versal de F_{x_0} . Considere $\gamma(t) = (X(t), Y(t))$ e $x = (x_1, x_2)$. Então $F(t, x_1, x_2) = (x_1 - X(t))^2 + (x_2 - Y(t))^2 - r^2$. Calculando as derivadas de F em relação a x_1 e x_2 , obtemos

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(t, x) = 2(x_1 - X(t)); \quad \frac{\partial F}{\partial x_2}(t, x) = 2(x_2 - Y(t)).$$

Assim, supondo $x_0 = (a, b)$, a matriz dada no Critério 2 (Teorema 3.2.5) é

$$\begin{pmatrix} 2(a - X(t_0)) & 2(b - Y(t_0)) \\ -2X'(t_0) & -2Y'(t_0) \end{pmatrix},$$

cujos determinante é igual a $4\langle (x_0 - \gamma(t_0)), N(t_0) \rangle = \pm \frac{4}{\kappa(t_0)} \neq 0$ uma vez que $f = F_{x_0}$ é uma singularidade A_2 (em t_0). Portanto, F é desdobramento versal de $f = F_{x_0}$ em t_0 .

Conseqüentemente, usando o Teorema 3.2.12 e o Exemplo 3.2.14, concluímos que em

tais condições (x_0 é centro de curvatura de γ em t_0 e $\kappa'(t_0) \neq 0$) o conjunto discriminante de F tem uma cúspide ordinária em x_0 , ou seja, a paralela de γ , que passa pelo centro de curvatura de γ em t_0 , tem uma cúspide ordinária em tal ponto, desde que γ não possua um vértice em t_0 .

(ii) Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ a paralela de γ a uma distância d e A o conjunto de todos $d \in \mathbb{R}$, tais que $d \neq 0$ e $\frac{1}{d}$ não é valor crítico da função curvatura κ de γ . Pelo Teorema 1.1.11 (Teorema de Sard), $\mathbb{R} - A$ tem medida nula.

Seja $d \in A$. Para concluir a proposição basta mostrarmos que a paralela a γ que dista d , tem somente cúspides ordinárias.

Se $\frac{1}{d}$ pertence a imagem de κ , ou seja, se existe $t_0 \in I$ tal que $\kappa(t_0) = \frac{1}{d}$, então $\kappa'(t_0) \neq 0$ (já que $\frac{1}{d}$ não é valor crítico de κ) isto é, γ não tem um vértice em t_0 . Logo, pelo item (i), a paralela a γ que dista $d = \frac{1}{\kappa(t_0)}$ tem uma cúspide ordinária em $x = \gamma(t) + dN(t)$.

Se $\frac{1}{d}$ não pertence a imagem de κ , ou seja, se $d \neq \frac{1}{\kappa(t)}$ para todo $t \in I$, então $\alpha'(t) = T(t) + dN'(t) = (1 - d\kappa(t))T(t) \neq 0$, ou seja, a paralela de γ que dista d não tem nenhuma singularidade. \square

Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular com curvatura não nula. Chamamos de **superfície paralela** de γ o subconjunto S de \mathbb{R}^3 dado por

$$S = \{(x, r) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^*; \exists t \in I \text{ tal que } x = \gamma(t) \pm rN(t)\},$$

onde $\mathbb{R}_+^* = \{\lambda \in \mathbb{R}; \lambda > 0\}$.

Logo, S consiste de todas as curvas paralelas a γ empilhadas na forma de uma ou duas superfícies em \mathbb{R}^3 . Se $(x, r) \in S$ e t é tal que $x = \gamma(t) \pm rN(t)$, dizemos que t é correspondente a (x, r) . A Figura 3.11 mostra o círculo unitário, algumas paralelas (à esquerda) e sua superfície paralela S (à direita).

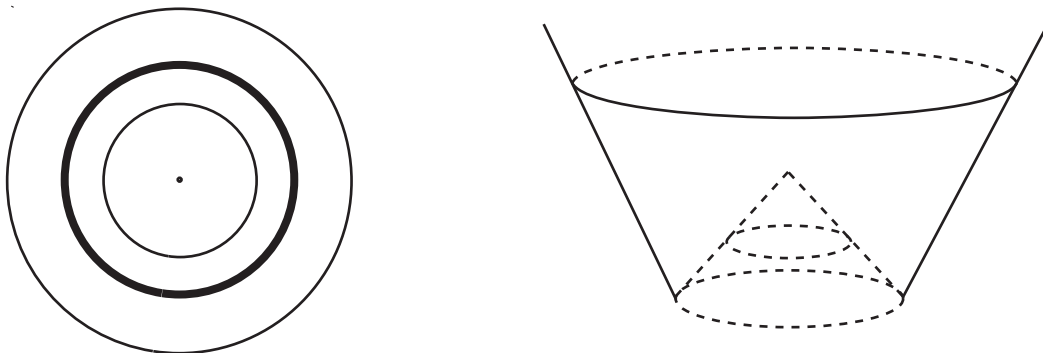


Figura 3.11: O círculo unitário e sua superfície paralela.

Os itens (i), (ii) e (iii) da proposição abaixo podem ser encontrados em [7], p. 169. Com as notações acima, temos:

Proposição 3.3.8 *Sejam $(x, r) \in S$ e t correspondente a (x, r) . Então S é, numa vizinhança de (x, r) , difeomorfo a:*

- (i) *um plano, se x não é centro de curvatura de γ em t ;*
- (ii) *uma cuspidal edge, se x é centro de curvatura de γ em t e γ não tem vértice em t ;*
- (iii) *um rabo de andorinha, se x é centro de curvatura de γ em t e γ tem um vértice ordinário em t .*

Além disso, se γ é uma curva compacta, então este estudo é genérico.

Demonstração. Consideremos o germe da família de funções distância ao quadrado estendida $G : (I \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^*, (t_0, x_0, r_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$G(t, x, r) = \langle (x - \gamma(t)), (x - \gamma(t)) \rangle - r^2.$$

Encontremos o conjunto discriminante de G . Calculando a derivada de G com relação a t , temos

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t, x, r) = 0 \Leftrightarrow 2\langle (x - \gamma(t)), T(t) \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \gamma(t) + \lambda N(t),$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Assim,

$$G(t, x, r) = \frac{\partial G}{\partial t}(t, x, r) = 0 \Leftrightarrow x = \gamma(t) + \lambda N(t) \text{ e } \lambda = \pm r.$$

Portanto, o conjunto discriminante de G é

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_G, (x_0, r_0)) &= \{(x, r) \in (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^*, (x_0, r_0)); \exists t \in (I, t_0) \text{ de modo que } x = \gamma(t) \pm rN(t)\} \\ &= (S, (x_0, r_0)), \end{aligned}$$

com S a superfície paralela de γ .

Procuramos por condições para que o germe desdobrado $g = G_{(x_0, r_0)}$ seja uma singularidade A_1 , A_2 ou A_3 (em t_0).

Suponhamos que $\kappa(t_0) \neq 0$. Em (t_0, x_0, r_0) , temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = 0 &\Leftrightarrow x_0 = \gamma(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)}N(t_0); \\ \frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = \frac{\partial^3 G}{\partial t^3} = 0 &\Leftrightarrow x_0 = \gamma(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)}N(t_0) \text{ e } \kappa'(t_0) = 0; \\ \frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = \frac{\partial^3 G}{\partial t^3} = \frac{\partial^4 G}{\partial t^4} = 0 &\Leftrightarrow x_0 = \gamma(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)}N(t_0), \kappa'(t_0) = 0 \text{ e } \kappa''(t_0) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, para $g = G_{(x_0, r_0)}$, concluímos que:

- g é uma singularidade A_1 (em t_0) se, e somente se, $x_0 = \gamma(t_0) + \lambda N(t_0)$ e $\lambda \neq \frac{1}{\kappa(t_0)}$;

- g é uma singularidade A_2 (em t_0) se, e somente se, $x_0 = \gamma(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)}N(t_0)$ e $\kappa'(t_0) \neq 0$;
- g é uma singularidade A_3 (em t_0) se, e somente se, $x_0 = \gamma(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)}N(t_0)$, $\kappa'(t_0) = 0$ e $\kappa''(t_0) \neq 0$.

Encontremos as condições para G ser desdobramento versal de g em cada um dos casos de singularidade de g . Para isso, considere $\gamma(t) = (X(t), Y(t))$, $x = (x_1, x_2)$ e $x_0 = (a, b)$. Logo, $G(t, x_1, x_2, r) = (x_1 - X(t))^2 + (x_2 - Y(t))^2 - r^2$.

Em (t, x_1, x_2, r) , temos:

$$\frac{\partial G}{\partial x_1} = 2(x_1 - X(t)); \quad \frac{\partial G}{\partial x_2} = 2(x_2 - Y(t)); \quad \frac{\partial G}{\partial r} = -2r.$$

Se g é uma singularidade A_1 (em t_0), então a matriz dada no Critério 2 (Teorema 3.2.5) é

$$\begin{pmatrix} 2(a - X(t_0)) & 2(b - Y(t_0)) & -2r_0 \end{pmatrix},$$

a qual tem posto 1, já que $r_0 \neq 0$. Portanto, G é desdobramento versal de g em t_0 .

Se g é uma singularidade A_2 (em t_0), então a matriz dada no Critério 2 (Teorema 3.2.5) é

$$\begin{pmatrix} 2(a - X(t_0)) & 2(b - Y(t_0)) & -2r_0 \\ 2X'(t_0) & 2Y'(t_0) & 0 \end{pmatrix},$$

a qual tem a submatriz de ordem 2

$$\begin{pmatrix} 2(a - X(t_0)) & 2(b - Y(t_0)) \\ 2X'(t_0) & 2Y'(t_0) \end{pmatrix}$$

com determinante não nulo, como feito na demonstração da Proposição 3.3.7. Portanto, G é desdobramento versal de g em t_0 .

Se g é uma singularidade A_3 (em t_0), então a matriz dada no Critério 2 (Teorema 3.2.5) é

$$\begin{pmatrix} 2(a - X(t_0)) & 2(b - Y(t_0)) & -2r_0 \\ 2X'(t_0) & 2Y'(t_0) & 0 \\ X''(t_0) & Y''(t_0) & 0 \end{pmatrix},$$

cujos determinante é

$$4r_0(-X'(t_0)Y''(t_0) + Y'(t_0)X''(t_0)) = 4r_0\langle T(t_0), N'(t_0) \rangle = -4r_0\kappa(t_0) \neq 0.$$

Portanto, G é desdobramento versal de g em t_0 .

Consequentemente, o resultado segue do Teorema 3.2.12 e dos Exemplos 3.2.13, 3.2.14 e 3.2.15.

Além disso, se γ é compacta, então, pelo Teorema 2.2.8, este estudo é genérico. \square

Observamos que podemos definir superfícies paralelas de uma superfície regular de maneira similar à definição para curvas e estudar sua estrutura local usando o mesmo raciocínio que foi feito acima. Ver [12] para detalhes.

Ortotômica

Esta aplicação também pode ser encontrada no Exemplo (2) de [4], p. 45.

Definição 3.3.9 *Seja γ uma curva regular plana. A curva α definida por $\alpha(t) = 2\langle\gamma(t), N(t)\rangle N(t)$ é chamada de **ortotômica de γ** .*

Exemplo 3.3.10 Considere $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (t, t^3 + 1)$. Fazendo alguns cálculos concluímos que

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{1}{\sqrt{1+9t^4}}(1, 3t^2); \\ N(t) &= \frac{1}{\sqrt{1+9t^4}}(-3t^2, 1); \\ \langle\gamma(t), N(t)\rangle &= \frac{1-2t^3}{\sqrt{1+9t^4}}. \end{aligned}$$

Portanto, a ortotômica de γ é dada por

$$\alpha(t) = \frac{2(1-2t^3)}{\sqrt{1+9t^4}}(-3t^2, 1) = \frac{2}{\sqrt{1+9t^4}}(-3t^2 + 6t^5, 1 - 2t^3).$$

Ver Figura 3.12.

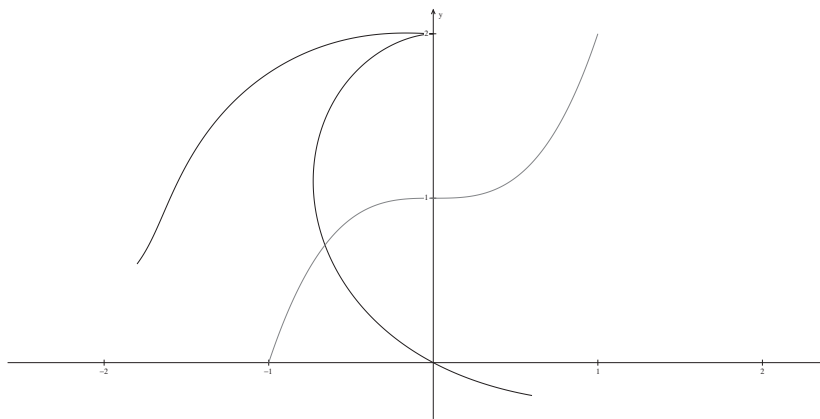


Figura 3.12: A curva $(t, t^3 + 1)$ e sua ortotômica(em negrito).

□

Considerando a base ortonormal $\{T(t), N(t)\}$, a projeção de $\gamma(t)$ na direção da normal é $\langle\gamma(t), N(t)\rangle N(t)$. Logo, o ponto da ortotômica em t é obtido fazendo a reflexão da

origem em relação a reta tangente à γ em t . Daí, também podemos dizer que a curva α é a ortotômica de γ relativa a origem.

A proposição a seguir faz um estudo sobre a estrutura local da ortotômica e engloba o exercício proposto 7.14(1), p. 172, do livro [7].

Proposição 3.3.11 *Sejam γ uma curva regular plana e x um ponto da ortotômica de γ correspondente ao valor de parâmetro t . Suponhamos que a reta tangente à γ em t não passa pela origem. Então, localmente em x , a ortotômica é difeomorfa a:*

- (i) *uma reta em \mathbb{R}^2 , se γ não possui uma inflexão em t ;*
- (ii) *uma cúspide ordinária em \mathbb{R}^2 , se γ possui uma inflexão ordinária em t .*

Além disso, se γ é uma curva compacta, então este estudo é genérico.

Demonstração. Consideremos $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada por comprimento de arco e a família de germes de funções

$$F : (I \times \mathbb{R}^2, (t_0, x_0)) \rightarrow \mathbb{R} \text{ dada por } F(t, x) = \langle x, x \rangle - 2\langle \gamma(t), x \rangle.$$

Note que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = 0 &\Leftrightarrow x = \lambda N(t), \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R}; \\ F(t, x) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2\langle \gamma(t), N(t) \rangle N(t). \end{aligned}$$

Portanto, o conjunto discriminante de F é

$$(\mathcal{D}_F, x_0) = \{x \in (\mathbb{R}^2, x_0); \exists t \in (I, t_0) \text{ de modo que } x = 2\langle \gamma(t), N(t) \rangle N(t) \text{ ou } x = 0\},$$

ou seja, é o germe da ortotômica de γ unido com $\{0\}$.

Procuramos por condições para que o germe desdobrado F_{x_0} seja uma singularidade A_1 ou A_2 (em t_0). Como $r = 2$ então, quando o germe desdobrado F_{x_0} é uma singularidade A_3 (em t_0), o desdobramento F não é versal. Observe que $\langle \gamma(t_0), N(t_0) \rangle \neq 0$ se, e somente se, a reta tangente à γ em t_0 não passa pela origem.

Em (t_0, x_0) , temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0 &\Leftrightarrow \kappa(t_0) = 0; \\ \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{\partial^3 F}{\partial t^3} = 0 &\Leftrightarrow \kappa(t_0) = 0 \text{ e } \kappa'(t_0) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, F_{x_0} é uma singularidade A_1 (em t_0) se, e somente se, $\kappa(t_0) \neq 0$, ou seja, γ não possui uma inflexão em t_0 . Ainda mais, F_{x_0} é uma singularidade A_2 (em t_0) se, e somente se, $\kappa(t_0) = 0$ e $\kappa'(t_0) \neq 0$, ou seja, γ tem uma inflexão ordinária em t_0 .

Verifiquemos se F é desdobramento versal de F_{x_0} em cada um dos casos de singularidade de F_{x_0} . Para isso, consideramos $\gamma(t) = (X(t), Y(t))$, $x = (x_1, x_2)$ e $x_0 = (a, b)$. Logo, $F(t, x) = x_1^2 - 2X(t)x_1 + x_2^2 - 2Y(t)x_2$ e, além disso,

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x_1}(t_0, x_0) + j^1\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(t, x_0)\right)(t_0) &= 2a - 2X(t_0) - 2X'(t_0)t; \\ \frac{\partial F}{\partial x_2}(t_0, x_0) + j^1\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}(t, x_0)\right)(t_0) &= 2b - 2Y(t_0) - 2Y'(t_0)t.\end{aligned}$$

Portanto, se F_{x_0} é uma singularidade A_1 (em t_0), então a matriz dada no Critério 2 (Teorema 3.2.5) é

$$\begin{pmatrix} 2(a - X(t_0)) & 2(b - Y(t_0)) \end{pmatrix},$$

a qual tem posto 1 pois, caso contrário, $F(t_0, x_0) = -\langle x_0, x_0 \rangle \neq 0$ e, conseqüentemente, $x_0 \notin (\mathcal{D}_F, x_0)$, o que não ocorre. Portanto, F é desdobramento versal de F_{x_0} em t_0 .

Se F_{x_0} é uma singularidade A_2 (em t_0), então a matriz dada no Critério 2 (Teorema 3.2.5) é

$$\begin{pmatrix} 2(a - X(t_0)) & 2(b - Y(t_0)) \\ -2X'(t_0) & -2Y'(t_0) \end{pmatrix},$$

cujo determinante é $4\langle(x_0 - \gamma(t_0)), N(t_0)\rangle \neq 0$, pois, caso contrário, x_0 pertenceria a reta tangente à γ em t_0 , e como x_0 é a reflexão de 0 com relação a esta reta, então esta reta passaria pela origem, o que contradiz a hipótese. Portanto, F é desdobramento versal de F_{x_0} em t_0 .

Logo, como o conjunto discriminante de F é o germe da união da origem com a ortotômica de γ , o resultado segue do Teorema 3.2.12 e dos Exemplos 3.2.13 e 3.2.14.

Além disso, se γ é uma curva compacta, então, pelo Teorema 2.2.8, este estudo é genérico. \square

3.3.2 Curvas espaciais

Fazemos nesta seção um estudo análogo ao que fizemos anteriormente, agora com aplicações relacionadas a curvas espaciais.

Conjunto focal

Esta aplicação pode ser encontrada em [8].

Definição 3.3.12 *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular com curvatura não nula. Definimos o **conjunto focal** de γ como sendo o lugar geométrico dos centros de esferas que tem contato de ordem maior ou igual a 3 com γ .*

Utilizando os cálculos feitos na Proposição 2.1.17 (i), concluímos que o conjunto focal de uma curva regular $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, com curvatura κ não nula, é dado por $\{\gamma(t) + \frac{N(t)}{\kappa(t)} + \mu B(t); t \in I \text{ e } \mu \in \mathbb{R}\}$.

Exemplo 3.3.13 Considere $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(t), \sin(t), t)$. Através de alguns cálculos, temos

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin(t), \cos(t), 1); \\ N(t) &= (-\cos(t), -\sin(t), 0); \\ B(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin(t), -\cos(t), 1); \\ \kappa(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Portanto, o conjunto focal de γ é dado por

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos(t) + \mu \sin(t), -\sin(t) - \mu \cos(t), t + \mu).$$

Ver Figura 3.13.

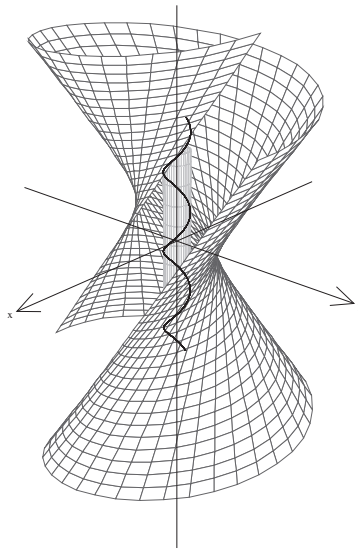


Figura 3.13: A curva $\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(t), \sin(t), t)$ e seu conjunto focal.

□

Considere $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco, com curvatura não nula, e $F : (I \times \mathbb{R}^3, (t_0, x_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ o germe da família de funções distância ao quadrado dada no Exemplo 3.1.26, para $r = 3$. Como feito naquele exemplo, o conjunto singular consiste do germe da união dos planos normais a γ , ou seja, $(S_F, (t_0, x_0)) = \{(t, \gamma(t) + \lambda N(t) + \mu B(t)); t \in (I, t_0), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$. Tal conjunto é chamado de *fibrado*

normal de γ . O conjunto bifurcação de F dado por $(\mathcal{B}_F, x_0) = \{\gamma(t) + \frac{N(t)}{\kappa(t)} + \mu B(t); t \in (I, t_0) \text{ e } \mu \in \mathbb{R}\}$ é exatamente o germe do conjunto focal de γ .

A proposição a seguir faz um estudo sobre a estrutura local do conjunto focal de γ , a qual, juntamente com o Exemplo 3.1.26, trata-se dos exercícios propostos 7.6(1), 7.6(2) e 7.6(3), p. 163, do livro [7] e também da Proposição (3.1) de [8].

Proposição 3.3.14 *Sejam $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular, x_0 um ponto do conjunto focal de γ e t_0 correspondente a x_0 . Então, localmente em x_0 , o conjunto focal de γ é difeomorfo a:*

- (i) *um plano em \mathbb{R}^3 , se F_{x_0} é uma singularidade A_2 (em t_0) (isto é, se x_0 não é centro de curvatura esférica ou se $\tau(t_0) = 0$ enquanto $\kappa'(t_0) \neq 0$).*
- (ii) *uma cuspidal edge em \mathbb{R}^3 , se F_{x_0} é uma singularidade A_3 (em t_0).*
- (iii) *um rabo de andorinha em \mathbb{R}^3 , se F_{x_0} é uma singularidade A_4 (em t_0) e $\tau(t_0) \neq 0$.*

Demonstração. Basta usar o estudo feito no Exemplo 3.1.26, para $r = 3$, o Teorema 3.1.30 e os Exemplos 3.1.31, 3.1.32 e 3.1.33. \square

Conjunto de valores críticos da aplicação de Gauss

Esta aplicação pode ser encontrada em [8].

Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco, com curvatura não nula, e consideremos $H : (I \times S^2, (t_0, u_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ o germe da família de funções altura dada no Exemplo 3.1.27. Podemos mostrar facilmente que o conjunto singular consiste de todos os pontos $(t, u) \in (I \times S^2, (t_0, u_0))$ com $u \in (S^2, u_0)$ normal a curva γ em t . Tal conjunto é chamado de *fibrado normal unitário* de γ . A projeção natural do fibrado normal unitário em S^2 é chamada **aplicação de Gauss** de γ .

Pela relação entre os conjuntos singular e bifurcação, concluímos que o conjunto de valores críticos da aplicação de Gauss de γ coincide com o conjunto bifurcação de H .

Exemplo 3.3.15 Considere a mesma curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada no Exemplo 3.3.13 (ou seja, $\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(t), \sin(t), t)$). Utilizando os dados obtidos em tal exemplo, concluímos que o conjunto de valores críticos da aplicação de Gauss de γ é dado por

$$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin(t), -\cos(t), 1).$$

Ver Figura 3.14. \square

A proposição a seguir faz um estudo sobre a estrutura local do conjunto de valores críticos da aplicação de Gauss de γ , a qual, juntamente com o Exemplo 3.1.27, trata-se do exercício proposto 7.6(4), p. 163, do livro [7] e também de parte da Proposição (1.1) de [8].

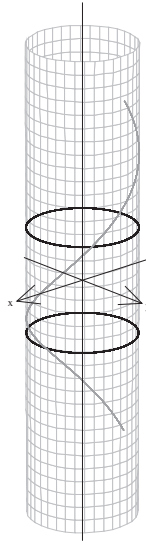


Figura 3.14: A curva $\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(t), \sin(t), t)$ e o conjunto de valores críticos de sua aplicação de Gauss.

Proposição 3.3.16 *Sejam $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular, x um ponto do conjunto de valores críticos da aplicação de Gauss de γ e t_0 correspondente a x . Então, localmente em x , o conjunto de valores críticos da aplicação de Gauss de γ é difeomorfo à:*

- (i) *uma reta em \mathbb{R}^2 , se $\tau(t_0) \neq 0$;*
- (ii) *uma cúspide ordinária em \mathbb{R}^2 , se $\tau(t_0) = 0$, mas $\tau'(t_0) \neq 0$.*

Além disso, se γ é uma curva compacta, então este estudo é genérico.

Demonstração. Basta usar o estudo feito no Exemplo 3.1.27, o Teorema 3.1.30 e os Exemplos 3.1.31 e 3.1.32.

Além disso, se γ é uma curva compacta, então, pelo Corolário 2.3.4, este estudo é genérico. \square

Dual

Esta aplicação pode ser encontrada também em [8].

Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular com curvatura não nula. Note que um plano orientado em \mathbb{R}^3 pode ser determinado por um vetor unitário u e um número c , através da equação $\langle x, u \rangle = c$. De fato, dado um plano orientado em \mathbb{R}^3 , cuja equação é $\alpha x + \beta y + \delta z = \lambda$, a qual pode ser vista como $\langle (\alpha, \beta, \delta), (x, y, z) \rangle = \lambda$, podemos determiná-lo por $u = (\alpha, \beta, \delta)$ e $c = \lambda$. Além disso, é fácil ver que u é um vetor ortogonal ao plano tratado. Assim, (u, c) e $(-u, -c)$ dão o mesmo plano, só que com orientações opostas. Desse modo, o conjunto dos planos em \mathbb{R}^3 está relacionado biunivocamente com $S^2 \times \mathbb{R}$.

Dado $t_0 \in I$ considere um plano orientado tangente à γ em t_0 e ortogonal a um vetor unitário u , cuja equação é $\langle x - \gamma(t_0), u \rangle = 0$. Assim, o conjunto dos planos orientados

tangentes à γ pode ser identificado com

$$\{(u, c) \in S^2 \times \mathbb{R}; \exists t \in I \text{ tal que } \langle \gamma(t), u \rangle = c \text{ e } \langle T(t), u \rangle = 0\},$$

o qual é chamado o **dual** de γ .

Exemplo 3.3.17 Considere a mesma curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada no Exemplo 3.3.13 (ou seja, $\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(t), \sin(t), t)$). Utilizando os dados obtidos em tal exemplo, concluímos que o dual de γ é dado por

$$\begin{aligned} & \left(-\cos(s)\cos(t) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(s)\sin(t), -\cos(s)\sin(t) - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(s)\cos(t), \right. \\ & \left. \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(s), -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(s) + \frac{1}{2}t\sin(s)\right). \end{aligned}$$

□

A proposição a seguir faz um estudo da estrutura local do dual e trata-se do exercício proposto 7.10, p. 167, do livro [7] e também de parte da Proposição (1.1) de [8].

Proposição 3.3.18 *Sejam $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular com curvatura não nula e x um ponto do dual de γ correspondente ao valor de parâmetro t . Então, localmente em x , o dual de γ é difeomorfo a:*

- (i) *um plano em \mathbb{R}^3 , se x corresponde a um plano tangente à γ em t que não é osculador;*
- (ii) *uma cuspidal edge em \mathbb{R}^3 , se x corresponde ao plano osculador de γ em t , onde $\tau(t) \neq 0$.*
- (iii) *um rabo de andorinha em \mathbb{R}^3 , se x corresponde ao plano osculador de γ em t , onde $\tau(t) = 0$ e $\tau'(t) \neq 0$.*

Além disso, se γ é uma curva compacta, então este estudo é genérico.

Demonstração. Suponhamos $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizada por comprimento de arco e consideremos o germe da família de funções altura estendida $\overline{H} : (I \times S^2 \times \mathbb{R}, (t_0, u_0, c_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\overline{H}(t, u, c) = H(t, u) - c = \langle \gamma(t), u \rangle - c.$$

Podemos mostrar facilmente que o conjunto discriminante de \overline{H} é

$$(\mathcal{D}_{\overline{H}}, (u_0, c_0)) = \{(u, c) \in (S^2 \times \mathbb{R}, (u_0, c_0)); c = \langle \gamma(t), u \rangle \text{ e } \langle T(t), u \rangle = 0\},$$

o qual é o germe do dual de γ .

Como $(u_0, c_0) \in (\mathcal{D}_{\overline{H}}, (u_0, c_0))$ e t_0 é correspondente de (u_0, c_0) , então $u_0 = \lambda N(t_0) + \mu B(t_0)$, para algum $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $c_0 = \langle \gamma(t_0), u_0 \rangle$. Encontremos condições para

o germe desdobrado $h = \overline{H}_{(u_0, c_0)}$ ser singularidade A_1, A_2 ou A_3 (em t_0). Em (t_0, u_0, c_0) , temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \overline{H}}{\partial t^2} = 0 &\Leftrightarrow u_0 = \pm B(t_0); \\ \frac{\partial^2 \overline{H}}{\partial t^2} = \frac{\partial^3 \overline{H}}{\partial t^3} = 0 &\Leftrightarrow u_0 = \pm B(t_0) \text{ e } \tau(t_0) = 0; \\ \frac{\partial^2 \overline{H}}{\partial t^2} = \frac{\partial^3 \overline{H}}{\partial t^3} = \frac{\partial^4 \overline{H}}{\partial t^4} = 0 &\Leftrightarrow u_0 = \pm B(t_0), \tau(t_0) = 0 \text{ e } \tau'(t_0) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, h é uma singularidade

- A_1 (em t_0) se, e somente se, $u_0 = \lambda N(t_0) + \mu B(t_0)$, com $\lambda \neq 0$, ou seja, (u_0, c_0) corresponde a um plano tangente à γ em t_0 que não é osculador.
- A_2 (em t_0) se, e somente se, $u_0 = \pm B(t_0)$ e $\tau(t_0) \neq 0$, ou seja, (u_0, c_0) corresponde ao plano osculador de γ em t_0 , onde $\tau(t_0) \neq 0$.
- A_3 (em t_0) se, e somente se, $u_0 = \pm B(t_0)$, $\tau(t_0) = 0$ e $\tau'(t_0) \neq 0$, ou seja, (u_0, c_0) corresponde ao plano osculador de γ em t_0 , onde $\tau(t_0) = 0$ e $\tau'(t_0) \neq 0$.

Verifiquemos se \overline{H} é um desdobramento versal quando h é uma singularidade A_1, A_2 ou A_3 (em t_0). Para tal, considere a parametrização local de S^2 , $\theta : (\mathbb{R}^2, y_0) \rightarrow (S^2, u_0)$ dada por $\theta(x_1, x_2) = (x_1, x_2, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2})$. Considere também $\varphi : (I \times \mathbb{R}^3, (t_0, y_0, c_0)) \rightarrow (I \times S^2 \times \mathbb{R}, (t_0, u_0, c_0))$ dada por $\varphi(t, x_1, x_2, x_3) = (t, \theta(x_1, x_2), x_3) = (t, (x_1, x_2, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}), x_3)$ e $x_0 = (y_0, c_0)$. Assim, seja $F : (I \times \mathbb{R}^3, (t_0, x_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$F(t, x) = \overline{H} \circ \varphi(t, x) = \langle \gamma(t), (x_1, x_2, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}) \rangle - x_3.$$

Logo, tomando $a(t, x) = t$ e $b(x) = (x_1, x_2, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}, x_3)$ na definição de ser induzido, podemos concluir que F é induzido de \overline{H} . Portanto, se mostrarmos que F é versal, então, pelo Corolário 3.1.6 adaptado para o caso versal, \overline{H} também será versal. Dessa forma, basta mostrar que F é versal.

Observe que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_1}(t, x) &= \left\langle \gamma(t), \left(1, 0, -\frac{x_1}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}}\right) \right\rangle; \\ \frac{\partial F}{\partial x_2}(t, x) &= \left\langle \gamma(t), \left(0, 1, -\frac{x_2}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}}\right) \right\rangle; \\ \frac{\partial F}{\partial x_3}(t, x) &= -1. \end{aligned}$$

Sem perda de generalidade, podemos supor $\gamma(t_0) = 0$, $T(t_0) = (1, 0, 0)$, $N(t_0) = (0, 1, 0)$ e $B(t_0) = (0, 0, 1)$.

Assim, se F_{x_0} é uma singularidade A_1 (em t_0), então a matriz dada no Critério 2

(Teorema 3.2.5) é

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que tem posto 1. Portanto F é um desdobramento versal e, conseqüentemente, \overline{H} também é.

Se F_{x_0} é uma singularidade A_2 (em t_0), então a matriz dada no Critério 2 (Teorema 3.2.5) é

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que tem posto 2. Logo, F é um desdobramento versal e, conseqüentemente, \overline{H} também é.

Se F_{x_0} é uma singularidade A_3 (em t_0), então a matriz dada no Critério 2 (Teorema 3.2.5) é

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa(t_0) & 0 \end{pmatrix},$$

cujos determinante é $-\kappa(t_0) \neq 0$. Portanto, F é um desdobramento versal e, conseqüentemente, \overline{H} também é.

Portanto, usando o Teorema 3.2.12 e os Exemplos 3.2.13, 3.2.14 e 3.2.15, o resultado segue.

Além disso, se γ é uma curva compacta, então, pelo Corolário 2.3.4, este estudo é genérico. \square

Tangente desenvolvível

Esta aplicação trata-se do exercício proposto 7.15, p. 178, do livro [7]. Além disso, pode ser encontrada no Exemplo (4) do artigo [4], p. 46.

Definição 3.3.19 *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular. Chamamos de **tangente desenvolvível** de γ o conjunto formado pela união de todas as retas tangentes à γ .*

Exemplo 3.3.20 Considere a mesma curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada no Exemplo 3.3.13 (ou seja, $\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(t), \sin(t), t)$). Utilizando os dados obtidos em tal exemplo, concluímos que a tangente desenvolvível de γ é dado por

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(t) - \lambda \sin(t), \sin(t) + \lambda \cos(t), t + \lambda).$$

Ver Figura 3.15.

\square

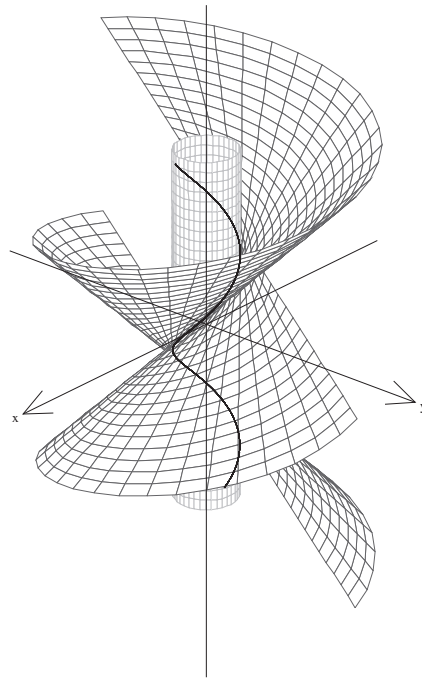


Figura 3.15: A curva $\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(t), \sin(t), t)$ e sua tangente desenvolvível.

Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco, com curvatura não nula, e consideremos

$$F : (I \times \mathbb{R}^3, (t_0, x_0)) \rightarrow \mathbb{R} \text{ dado por } F(t, x) = \langle (x - \gamma(t)), B(t) \rangle.$$

Então F é um desdobramento a 3-parâmetros de $f = F_{x_0}$.

Encontremos o conjunto discriminante de F . Note que, em (t, x) , temos

$$\begin{aligned} F = 0 &\Leftrightarrow x = \gamma(t) + \lambda T(t) + \mu N(t) \text{ com } \lambda, \mu \in \mathbb{R}; \\ F = \frac{\partial F}{\partial t} = 0 &\Leftrightarrow x = \gamma(t) + \lambda T(t) + \mu N(t) \text{ com } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \mu\tau(t) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, o conjunto discriminante de F é

$$(\mathcal{D}_F, x_0) = \{x \in (\mathbb{R}^3, x_0); \exists t \in (I, t_0) \text{ com } x = \gamma(t) + \lambda T(t) + \mu N(t), \text{ onde } \mu = 0 \text{ se } \tau(t) \neq 0\},$$

para $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ou seja, o discriminante de F consiste do germe de todos os planos osculadores à γ nos pontos de torção nula e de todas retas tangentes à γ (ou seja, a tangente desenvolvível de γ).

Encontremos as condições para o germe desdobrado F_{x_0} ser uma singularidade $A_{\geq 2}$ (em t_0). Fazendo alguns cálculos, temos

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(t, x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \mu\tau'(t) = 0, \text{ se } \tau(t) = 0 \text{ ou} \\ \lambda\tau(t) = 0; \text{ se } \mu = 0 \end{cases}.$$

Logo, temos as seguintes situações:

- (I) $x_0 = \gamma(t_0)$, se $\tau(t_0) \neq 0$ (nesse caso, $\mu = \lambda = 0$);
- (II) $x_0 = \gamma(t_0) + \lambda T(t_0)$, se $\tau(t_0) = 0$ e $\tau'(t_0) \neq 0$ (nesse caso, $\mu = 0$);
- (III) $x_0 = \gamma(t_0) + \lambda T(t_0) + \mu N(t_0)$, se $\tau(t_0) = \tau'(t_0) = 0$.

Portanto, se tais situações não ocorrem, então o germe desdobrado F_{x_0} é uma singularidade A_1 (em t_0) e, como $B(t_0) \neq 0$, então podemos verificar facilmente que F é um desdobramento versal neste caso. Daí, pelo Teorema 3.2.12 e o Exemplo 3.2.13, concluímos que (\mathcal{D}_F, x_0) é um germe de uma variedade suave de dimensão 2 (localmente difeomorfo a um plano). Logo, como o germe da tangente desenvolvível de γ faz parte do germe (\mathcal{D}_F, x_0) , então a tangente desenvolvível de γ é, localmente, uma variedade suave de dimensão 2 se as situações descritas acima não ocorrem.

Falta analisar a estrutura local do conjunto discriminante de F em tais situações. Em cada um dos três casos anteriores investiguemos sobre o tipo de singularidade do germe desdobrado. Para isso, utilizaremos as seguintes derivadas (omitimos as variáveis t e x para simplificar as expressões):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 F}{\partial t^3} &= \lambda(2\tau'\kappa + \tau\kappa') + \mu(-\tau'' + \tau\kappa^2 + \tau^3) + \tau\kappa; \\ \frac{\partial^4 F}{\partial t^4} &= \lambda(2\tau''\kappa + 3\tau'\kappa' + \tau\kappa'' + \kappa\tau'' - \tau\kappa^3 - \kappa\tau^3) + \mu(3\kappa^2\tau' + 3\kappa\kappa'\tau - \tau''' + 6\tau^2\tau') \\ &\quad + 3\kappa\tau' + 2\kappa'\tau. \end{aligned}$$

Usando essas derivadas e os três casos anteriores, temos os seguintes casos de singularidades de F_{x_0} :

- (i) se $\tau(t_0) \neq 0$, temos $\lambda = \mu = 0$, e então

$$\frac{\partial^3 F}{\partial t^3}(t_0, x_0) = \kappa(t_0)\tau(t_0) \neq 0,$$

uma vez que $\kappa(t_0) \neq 0$. Portanto, neste caso, F_{x_0} é uma singularidade A_2 (em t_0).

- (ii) se $\tau(t_0) = 0$, $\tau'(t_0) \neq 0$ e $\lambda \neq 0$, temos $\mu = 0$, e então

$$\frac{\partial^3 F}{\partial t^3}(t_0, x_0) = 2\kappa(t_0)\lambda\tau'(t_0) \neq 0.$$

Portanto, neste caso, F_{x_0} é uma singularidade A_2 (em t_0).

- (iii) se $\tau(t_0) = 0$, $\tau'(t_0) \neq 0$ e $\lambda = 0$, temos $\mu = 0$, e então

$$\frac{\partial^3 F}{\partial t^3}(t_0, x_0) = 2\kappa(t_0)\lambda\tau'(t_0) = 0;$$

$$\frac{\partial^4 F}{\partial t^4}(t_0, x_0) = 3\kappa(t_0)\tau'(t_0) \neq 0.$$

Portanto, neste caso, F_{x_0} é uma singularidade A_3 (em t_0).

(iv) se $\tau(t_0) = \tau'(t_0) = 0$, $\tau''(t_0) \neq 0$ e $\mu \neq 0$, então

$$\frac{\partial^3 F}{\partial t^3}(t_0, x_0) = -\mu\tau''(t_0) \neq 0.$$

Portanto, neste caso, F_{x_0} é uma singularidade A_2 (em t_0).

(v) se $\tau(t_0) = \tau'(t_0) = 0$, $\tau''(t_0) \neq 0$, $\mu = 0$ e $\lambda \neq 0$, então

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 F}{\partial t^3}(t_0, x_0) &= -\mu\tau''(t_0) = 0; \\ \frac{\partial^4 F}{\partial t^4}(t_0, x_0) &= 3\kappa(t_0)\lambda\tau''(t_0) \neq 0. \end{aligned}$$

Portanto, neste caso, F_{x_0} é uma singularidade A_3 (em t_0).

(vi) se $\tau(t_0) = \tau'(t_0) = 0$, $\tau''(t_0) \neq 0$, $\mu = 0$ e $\lambda = 0$, então

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 F}{\partial t^3}(t_0, x_0) &= -\mu\tau''(t_0) = 0; \\ \frac{\partial^4 F}{\partial t^4}(t_0, x_0) &= 3\kappa(t_0)\lambda\tau''(t_0) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, neste caso, F_{x_0} é uma singularidade $A_{\geq 4}$ (em t_0).

(vii) se $\tau(t_0) = \tau'(t_0) = 0$, $\tau''(t_0) = 0$, $\tau'''(t_0) \neq 0$ e $\mu \neq 0$, então

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 F}{\partial t^3}(t_0, x_0) &= -\mu\tau''(t_0) = 0; \\ \frac{\partial^4 F}{\partial t^4}(t_0, x_0) &= -\mu\tau'''(t_0) \neq 0. \end{aligned}$$

Portanto, neste caso, F_{x_0} é uma singularidade A_3 (em t_0).

(viii) se $\tau(t_0) = \tau'(t_0) = 0$, $\tau''(t_0) = 0$, $\tau'''(t_0) = 0$ e $\mu \neq 0$, então

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 F}{\partial t^3}(t_0, x_0) &= -\mu\tau''(t_0) = 0; \\ \frac{\partial^4 F}{\partial t^4}(t_0, x_0) &= -\mu\tau'''(t_0) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, neste caso, F_{x_0} é uma singularidade $A_{\geq 4}$ (em t_0).

(ix) se $\tau(t_0) = \tau'(t_0) = 0$, $\tau''(t_0) = 0$ e $\mu = 0$, então

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 F}{\partial t^3}(t_0, x_0) &= 0; \\ \frac{\partial^4 F}{\partial t^4}(t_0, x_0) &= 0.\end{aligned}$$

Portanto, neste caso, F_{x_0} é uma singularidade $A_{\geq 4}$ (em t_0).

Mostremos que somente no caso (i) temos F um desdobramento versal de F_{x_0} . Para isso, consideremos $\gamma = (X, Y, Z)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $B = (b_1, b_2, b_3)$. Assim, temos

$$F(t, x_1, x_2, x_3) = b_1(x_1 - X) + b_2(x_2 - Y) + b_3(x_3 - Z).$$

Logo, calculando as derivadas parciais de F em relação a x_1, x_2 e x_3 e seus jatos com constante, podemos ver que a segunda linha da matriz dada no Critério 2 (Teorema 3.2.5) terá as componentes do vetor B' , e nos casos em que $\tau = 0$, teremos $B' = -\tau N = 0$, ou seja, a matriz referida não terá posto máximo nos casos em que $\tau = 0$. Portanto, resta-nos verificar o caso (i), neste caso, a matriz dada no Critério 2 (Teorema 3.2.5) é

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 \end{pmatrix},$$

como B é unitário, então B' é ortogonal a B . Assim, as duas linhas da matriz anterior são linearmente independentes e, conseqüentemente, tal matriz tem posto 2. Portanto, F é desdobramento versal de F_{x_0} , quando $\tau \neq 0$.

Portanto, usando o Teorema 3.2.12 e o Exemplo 3.2.14, concluímos que o conjunto discriminante de F é, localmente nos pontos onde $\tau(t) \neq 0$, difeomorfo a uma cuspidal edge. No entanto, como τ é contínua, então existe uma vizinhança de t em que τ é não nula. Logo, para tal vizinhança, \mathcal{D}_F é a tangente desenvolvível de γ e, conseqüentemente, a tangente desenvolvível de γ é localmente nos pontos onde $\tau(t) \neq 0$, difeomorfa a uma cuspidal edge.

3.3.3 Lema de Transversalidade de Thom e desdobramentos

Em todos os casos abordados neste trabalho tomamos um desdobramento $F : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0)) \rightarrow \mathbb{R}$, encontramos as condições para o germe desdobrado ser singularidade A_k , com $k \leq r + 1$ para o caso p-versal e $k \leq r$ para o caso versal e verificamos se tal desdobramento é p-versal ou versal. Considere o caso p-versal (o caso versal pode ser tratado de modo análogo) e as seguintes perguntas: O desdobramento F contém somente singularidades $A_{\leq r+1}$? Existe um desdobramento a r -parâmetros que possui apenas singularidades $A_{\leq r+1}$? São muitos? Existe um desdobramento a

r -parâmetros que além de possuir somente singularidades $A_{\leq r+1}$, também desdobra-as p -versalmente? Além disso, dado F como acima, existe um desdobramento próximo de F com tais propriedades?

Tais questões são respondidas pelas duas próximas proposições, as quais tratam-se dos exercícios propostos 8.20(5) e 8.20(6), p.220, do livro [7].

Proposição 3.3.21 *Considere os germes $F : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ e $\phi : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{r+2}, (t_0, x_0, u_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$\phi(t, x, u) = F(t, x) + u_1 t + u_2 t^2 + \cdots + u_{r+2} t^{r+2}.$$

Então, para quase todo $u \in (\mathbb{R}^{r+2}, u_0)$ e para todo $x \in (\mathbb{R}^r, x_0)$, $\phi_{(x,u)}$ é uma singularidade $A_{\leq r+1}$ (em t_0).

Demonstração. Considere $G : V \rightarrow \mathbb{R}^{r+2}$ dada por

$$G(t, x, u) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \dots, \frac{\partial^{r+2} \phi}{\partial t^{r+2}} \right)(t, x, u),$$

onde V é um aberto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{r+2}$ contendo (t_0, x_0, u_0) .

Note que

$$G(t, x, u) = \left(\frac{\partial F}{\partial t} + u_1 + \cdots + (r+2)u_{r+2} t^{r+1}, \dots, \frac{\partial^{r+2} F}{\partial t^{r+2}} + (r+2)!u_{r+2} \right)$$

em (t, x) e que $\phi_{(x,u)}$ tem singularidade $A_{>r+1}$ em t se, e somente se, $G(t, x, u) = 0$.

Como a matriz jacobiana de G em (t, x, u) possui uma submatriz (relativa à variável u) de ordem $r+2$ cujo determinante é não nulo, então G é uma submersão. Assim, pela Observação 1.2.2 (ii), G é transversal a $\{0\}$ e, pelo Lema de Transversalidade de Thom 1.2.9, para quase todo $u \in \pi_3(V)$, G_u é transversal a $\{0\}$, onde $\pi_3 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{r+2} \rightarrow \mathbb{R}^{r+2}$ é a projeção natural dada por $\pi_3(t, x, u) = u$.

Como $\dim(\pi(V)) + \dim\{0\} = \dim(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r) < \dim \mathbb{R}^{r+2}$, onde $\pi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{r+2} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r$ é a projeção natural dada por $\pi(t, x, u) = (t, x)$, então segue da Observação 1.2.2(i) que $G_u(\pi(V)) \cap \{0\} = \emptyset$, ou seja, para quase todo $u \in \pi_3(V)$, não existe $(t, x) \in \pi(V)$ tal que $G(t, x, u) = 0$, concluindo assim o resultado. \square

Desse modo, existem germes de famílias $\tilde{F} = \phi_u$ arbitrariamente próximas de F que contém somente singularidades $A_{\leq r+1}$.

Dado um germe de função $f : (\mathbb{R}, t_0) \rightarrow \mathbb{R}$, podemos definir uma família de germes de funções $\phi : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, (t_0, u_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ que perturbe f da seguinte maneira: $\phi(t, u_1, u_2) = f(t) + u_1 t + u_2 t^2$. Pode ser mostrado, usando ideias análogas às da demonstração da proposição anterior, que para quase todo $u \in (\mathbb{R}^2, u_0)$, o germe de função $\phi_u : (\mathbb{R}, t_0) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma singularidade A_1 (em t_0).

Proposição 3.3.22 *Seja $F : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, t_0, x_0) \rightarrow \mathbb{R}$. Então existem famílias de germes \tilde{F} arbitrariamente próximas de F tal que:*

- (i) \tilde{F} tem apenas singularidades $A_{\leq r+1}$;
- (ii) Sempre que \tilde{F}_x é uma singularidade A_k ($k \leq r+1$) (em t), \tilde{F} é um desdobramento p -versal de \tilde{F}_x em t .

Demonstração. Pela Proposição 3.3.21, para quase todo $u \in \pi_3(V)$, ϕ_u tem somente singularidades $A_{\leq r+1}$. Agora considere $k \leq r+1$ e $\phi_u^k : \pi(V) \rightarrow \mathbb{R}^k$ dada por

$$\phi_u^k(t, x) = \left(\frac{\partial \phi_u}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^k \phi_u}{\partial t^k} \right)$$

em (t, x) . Seja $H : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ dada por

$$H(t, x, u) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^k \phi}{\partial t^k} \right).$$

De modo análogo ao feito na Proposição 3.3.21 mostra-se que H é uma submersão. Logo, pela Observação 1.2.2(ii), H é transversal $\{0\}$ e, portanto, pelo Lema de Transversalidade de Thom 1.2.9, para quase todo $u \in \pi_3(V)$, H_u é transversal a $\{0\}$. Assim, $H_u = \left(\frac{\partial \phi_u}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^k \phi_u}{\partial t^k} \right) = \phi_u^k$ é transversal a $\{0\}$, ou seja, 0 é valor regular de ϕ_u^k .

No entanto, se 0 é valor regular de ϕ_u^k , então, para todo $(t, x) \in \pi(V)$ tal que $\phi_u^k(t, x) = 0$, a matriz jacobiana de ϕ_u^k em (t, x)

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial^2 \phi_u}{\partial t \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \phi_u}{\partial t \partial x_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \frac{\partial^k \phi_u}{\partial t^{k-1} \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^k \phi_u}{\partial t^{k-1} \partial x_r} \\ \frac{\partial^{k+1} \phi_u}{\partial t^{k+1}} & \frac{\partial^{k+1} \phi_u}{\partial t^k \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^{k+1} \phi_u}{\partial t^k \partial x_r} \end{pmatrix}$$

tem posto k .

Supondo que $\phi_{(x,u)}$ tem singularidade A_k em t , então $\frac{\partial^{k+1} \phi_{u,x}}{\partial t^{k+1}}(t) = \frac{\partial^{k+1} \phi_u}{\partial t^{k+1}}(t, x) \neq 0$. Desse modo, o bloco indicado tem posto $k-1$.

Multiplicando a i -ésima linha da matriz indicada por $\frac{1}{i!}$ (o que não altera o posto da matriz) obtemos a matriz dada no Critério 2 (Teorema 3.1.12) de ϕ_u em (t, x) , a qual tem posto $k-1$. Logo, por tal critério, ϕ_u é desdobramento p -versal de $\phi_{(x,u)}$ em t . \square

Teorema do Desdobramento p-Versal: caso analítico

Nosso objetivo nesta seção é apresentar a demonstração do Teorema do Desdobramento p-Versal 3.1.8 para famílias e funções analíticas. A referência para este estudo é o Capítulo 10 de [7], que possui a demonstração do teorema citado como seu principal objetivo. Além de [7], utilizamos [1] e [3]. Segundo os autores de [7], J.W.Bruce e P.J.Giblin, o trabalho envolvido nesta demonstração é bastante substancial e bem mais complicado do que qualquer outro naquele livro. A demonstração para famílias e funções reais do teorema requer técnicas mais sofisticadas, como, por exemplo, o Teorema de Preparação de Malgrange, e pode ser encontrada em [3].

Assim, o resultado que iremos provar é:

Teorema do Desdobramento p-Versal 3.1.8.A: *Sejam $g : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ o germe de função dado por $g(t) = \pm t^{k+1}$ e $G : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k-1}, (0, 0)) \rightarrow \mathbb{R}$ o desdobramento de g dado por $G(t, x) = \pm t^{k+1} + x_{k-1}t^{k-1} + \dots + x_2t^2 + x_1t$. Então, todo desdobramento analítico $F : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (0, 0)) \rightarrow \mathbb{R}$ de g é p-induzido de G através de germes de aplicações analíticas.*

Faremos a demonstração para $g(t) = t^{k+1}$, uma vez que o caso $g(t) = -t^{k+1}$ é análogo.

Dado um desdobramento analítico $F : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (0, 0)) \rightarrow \mathbb{R}$ de $g(t) = t^{k+1}$, usando a Observação 3.1.2, queremos encontrar germes de aplicações analíticas $a : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$, $b : (\mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{k-1}, 0)$ e $c : (\mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ tais que $a(t, 0) = t$ e

$$F(a(t, x), x) = G(t, b(x)) + c(x) . \quad (4.1)$$

A demonstração seguirá dois passos:

Passo 1. Dados um número natural p e germes de polinômios homogêneos $a_j : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$, $b_j : (\mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{k-1}, 0)$ e $c_j : (\mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$, de grau j em x_1, \dots, x_r , $0 \leq j \leq p$, onde os coeficientes dos polinômios a_j são séries de potências em t ,

definimos:

$$a^p(t, x) = a_0(t, x) + \cdots + a_p(t, x), \quad b^p(x) = b_0(x) + \cdots + b_p(x) \text{ e } c^p(x) = c_0(x) + \cdots + c_p(x).$$

Para cada natural p , mostraremos que existem germes de aplicações a^p, b^p e c^p , satisfazendo

$$\begin{cases} F(a^p(t, x), x) \equiv_{p+1} G(t, b^p(x)) + c^p(x) \\ a^p(t, 0) = t \end{cases} \quad (4.2)$$

onde \equiv_{p+1} significa que os dois lados diferem por termos de grau $\geq p+1$ na variável $x = (x_1, \dots, x_r)$.

Passo 2. Mostraremos que as sequências a^p, b^p, c^p convergem, isto é, que existem germes de aplicações analíticas a, b, c , tais que

$$\begin{aligned} a(t, x) &= a_0(t, x) + \cdots + a_p(t, x) + \cdots \\ b(x) &= b_0(x) + \cdots + b_p(x) + \cdots \\ c(x) &= c_0(x) + \cdots + c_p(x) + \cdots \end{aligned}$$

O teorema segue dos passos acima, uma vez que concluímos (4.1) a partir de (4.2), aplicando o limite com p tendendo ao infinito e usando o fato de F e G serem contínuas.

A seguir, introduzimos algumas notações e resultados necessários para a prova dos passos 1 e 2.

Notações: • Para $\epsilon > 0$, denotamos por D_ϵ o disco fechado no plano complexo, ou seja, $D_\epsilon = \{t \in \mathbb{C}; |t| \leq \epsilon\}$. Para $m \geq 2$, o conjunto $\{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{C}^m; |x_i| \leq \epsilon, 1 \leq i \leq m\}$ será denotado por D_ϵ^m .

• Suponhamos $h : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^r, (0, 0)) \rightarrow \mathbb{C}$ (resp. $h : (\mathbb{C}^r, 0) \rightarrow \mathbb{C}$) um germe de aplicação analítica e denotemos por v o multi-índice (i_1, \dots, i_r) , onde i_j é um natural, $j = 1, \dots, r$. Seja $h_v(t)$ (resp. h_v) o coeficiente de $x_1^{i_1} \cdots x_r^{i_r} = x^v$ na expansão em série de potências de h . Além disso, definimos $|v|$ como sendo o número $i_1 + \cdots + i_r$.

• Sejam h um germe em 0 de função analítica em $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^r$ (resp. em 0 em \mathbb{C}^r) contendo $D_\epsilon \times \{0\}$ e g um germe em 0 de função analítica em \mathbb{C}^r . Se $\sup_{t \in D_\epsilon} |h_v(t)| \leq |g_v|$ (resp. $|h_v| \leq |g_v|$), para todo v , então escrevemos $h \ll g$.

• Para um germe de função analítica h com contradomínio sendo \mathbb{C}^k , isto é, $h = (h_1, \dots, h_k)$, escrevemos $h \ll g$ quando cada $h_i \ll g$, $i = 1, \dots, k$, onde h_i e g são como no item anterior.

Exemplo 4.0.23 Considere os germe de funções analíticas complexas $\sin z, \cos z$ e e^z .

Fazendo a expansão de tais germes como série de potências, temos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \frac{z^9}{9!} - \dots \\ \operatorname{cos} z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} - \frac{z^{10}}{10!} + \dots \\ e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^6}{6!} + \frac{z^7}{7!} + \dots\end{aligned}$$

Logo, observando cada coeficiente dessas séries, concluímos que $\operatorname{sen} z \ll e^z$ e $\operatorname{cos} z \ll e^z$, mas, não temos $\operatorname{sen} z \ll \operatorname{cos} z$ nem $\operatorname{cos} z \ll \operatorname{sen} z$. \square

A observação a seguir traz uma propriedade da relação \ll que será utilizada na demonstração do Passo 2.

Observação 4.0.24 *Sejam h e g germes de funções analíticas em r variáveis complexas, com*

$h(x) = \sum h_v x^v$. Então, $h_v x^v \ll g(x)$, para todo v se, e somente se, $h(x) \ll g(x)$. De fato, suponhamos que $h_v x^v \ll g(x)$, para todo v . Como $h_v x^v$ é o único termo que possui x^v em $h(x)$, então quando efetuarmos a soma $\sum h_v x^v$ nenhum termo irá se juntar a outro, ou seja, $\sum h_v x^v \ll g(x)$, ou ainda, $h(x) \ll g(x)$. A recíproca é imediata. Tome por exemplo,

$$h(x, y, z) = x^2 y + 3x - 2xyz + 4z^2 \quad \text{e} \quad g(x, y, z) = 2x^2 y + 4x + 3xyz + 4z^2 + 3x^3.$$

Note que $x^2 y \ll g$, $3x \ll g$, $-2xyz \ll g$ e $4z^2 \ll g$ e, dessa forma, $h \ll g$.

Sabendo que dois germes de funções analíticas H e G tem a propriedade de $H \ll G$, podemos nos perguntar o que acontece se compormos germes de funções analíticas com a mesma propriedade. O próximo resultado trata desta questão.

Lema 4.0.25 ([7], p. 244) *Sejam $H, G : (\mathbb{C}^m, 0) \rightarrow \mathbb{C}$ e $h_i, g_i : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, $1 \leq i \leq m$, germes de funções analíticas tais que $H \ll G$ e $h_i \ll g_i$, $1 \leq i \leq m$, e suponha que os coeficientes na expansão em série de potências de G e g_i são todos reais não-negativos. Então*

$$H(h_1, \dots, h_m) \ll G(g_1, \dots, g_m) \tag{4.3}$$

Demonstração. Considere $H(x) = \sum H_v x^v$, $G(x) = \sum G_v x^v$, $h_i(y) = \sum h_{i\eta_i} y^{\eta_i}$ e $g_i(y) = \sum g_{i\eta_i} y^{\eta_i}$.

Sabemos que $H \ll G$ e $h_i \ll g_i$, ou seja, $|H_v| \leq |G_v| = G_v$, para todo v e $|h_{i\eta_i}| \leq |g_{i\eta_i}| = g_{i\eta_i}$, para todo η_i e $1 \leq i \leq m$.

Queremos comparar os coeficientes de y^ω de ambos os lados de (4.3), para cada ω . Seja \bar{h}_ω o coeficiente de y^ω do lado esquerdo e \bar{g}_ω o do lado direito.

Note que o termo $\bar{h}_\omega y^\omega$ é obtido através de produtos e potências, provindos de H , de termos de grau menor ou igual aos componentes de y^ω presentes nas expansões em séries de potências das h_i 's. Dessa forma, os termos das expansões em séries de potências das h_i 's que contribuem para o termo $\bar{h}_\omega y^\omega$ satisfazem $|\eta_i| \leq |\omega|$, $1 \leq i \leq m$ (porém, não são todos os termos que satisfazem $|\eta_i| \leq |\omega|$ que contribuem para o termo $\bar{h}_\omega y^\omega$).

Como $h_i(0) = 0$, $1 \leq i \leq m$, então nenhuma das h_i 's possui termo constante em sua expansão em série de potências. Assim, os termos de H que contribuem para o termo $\bar{h}_\omega y^\omega$ satisfazem $|v| \leq |\omega|$. De fato, seja H_v tal que $|v| > |\omega|$. Como as h_i 's não tem constante, então seus termos tem no mínimo grau 1. Dessa forma, $H_v(h(y))^v$ contribuirá com termos cuja soma dos graus é de no mínimo $|v| > |\omega|$, ou seja, não contribuirá para $\bar{h}_\omega y^\omega$.

Portanto, para cada multi-índice ω , podemos obter um polinômio p_ω , cujas variáveis são os coeficientes F_v e $f_{i\eta_i}$ que podem contribuir para o termo $\bar{f}_\omega y^\omega$, ou seja, todos F_v e $f_{i\eta_i}$ tal que $|v| \leq |\omega|$ e $|\eta_i| \leq |\omega|$, $1 \leq i \leq m$, da seguinte forma: Para cada v satisfazendo $|v| \leq |\omega|$, analisemos a parcela $F_v(f_1(y), \dots, f_m(y))^v$.

Se o produto $(f_1(y), \dots, f_m(y))^v$ possui o termo y^ω , analisamos quais coeficientes $f_{i\eta_i}$ foram utilizados e de que forma eles compõem o termo final. Assim, teremos uma parcela do polinômio p_ω .

Se o produto $(f_1(y), \dots, f_m(y))^v$ não possui o termo y^ω não precisamos analisá-lo.

Fazendo o procedimento acima para todo v tal que $|v| \leq |\omega|$, obtemos o polinômio p_ω .

Note que da forma com que p_ω foi construído, temos $p_\omega(H_v, h_{i\eta_i}) = \bar{h}_\omega$ e $p_\omega(G_v, g_{i\eta_i}) = \bar{g}_\omega$.

Além disso, a forma com que p_ω foi construído deixa claro que todos os seus coeficientes são 1, ou seja, p_ω é um polinômio de coeficientes reais não-negativos.

Note que para todo polinômio $p : \mathbb{C}^s \rightarrow \mathbb{C}$ com coeficientes reais não-negativos e para quaisquer números $c_1, \dots, c_s, d_1, \dots, d_s$ com $|c_i| \leq d_i$, $1 \leq i \leq s$, temos $|p(c_1, \dots, c_s)| \leq p(d_1, \dots, d_s)$ pois, escrevendo $p(z_1, \dots, z_s) = \sum p_v z^v$, concluímos que

$$|p(c)| = \left| \sum p_v c^v \right| \leq \sum p_v |c^v| \leq \sum p_v d^v = p(d).$$

Assim, para cada multi-índice ω , o polinômio p_ω tem coeficientes reais não-negativos e, por hipótese, $|H_v| \leq G_v$ e $|h_{i\eta_i}| \leq g_{i\eta_i}$. Então $|\bar{h}_\omega| = |p_\omega((H_v, h_{i\eta_i}))| \leq p_\omega(G_v, g_{i\eta_i}) = \bar{g}_\omega$, para todo ω , ou seja, $H(h_1, \dots, h_m) \ll G(g_1, \dots, g_m)$. \square

Exemplo 4.0.26 Considere $H, G : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ e $h_i, g_i : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $1 \leq i \leq 3$ dados por

$$H(x, y, z) = 2x - 3xy + 5xz + iy - 2iz^2;$$

$$\begin{aligned}
G(x, y, z) &= 3x + 5xy + 7xz + 3y + 2z^2 + 2yz; \\
h_1(t, s) &= 2t^2 - 4ts; \\
h_2(t, s) &= 2s - 4ts^2; \\
h_3(t, s) &= ts - 3t^2s^2; \\
g_1(t, s) &= 3t^2 + 4ts; \\
g_2(t, s) &= 4s + 4ts^2; \\
g_3(t, s) &= 2ts + 3t^2s^2.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
H(h_1, h_2, h_3)(t, s) &= 2is - 8ts + 4t^3 - 12t^2s + (24 - 4i)ts^2 + 10t^3s \\
&\quad - (20 + 2i)t^2s^2 + 24t^3s^2 - 48t^2s^3 - 30t^4s^2 + (60 + 12i)t^3s^3
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
G(g_1, g_2, g_3)(t, s) &= 12s + 9t^2 + 12ts + 60t^2s + 108ts^2 + 42t^3s + 64t^2s^2 + 60t^3s^2 \\
&\quad + 120t^2s^3 + 63t^4s^2 + 108t^3s^3 + 24t^3s^4 + 18t^4s^4.
\end{aligned}$$

Encontremos os valores dos polinômios p_ω para H, h_i e G, g_i com $i = 1, 2, 3$, para diferentes multi-índices ω e, utilizando o método abordado na demonstração do lema acima, concluiremos sobre o polinômio p_ω .

Tomemos $\omega_1 = (0, 1), \omega_2 = (1, 1), \omega_3 = (1, 2)$ e $\omega_4 = (2, 2)$. Então,

$$\begin{aligned}
p_{\omega_1}(2, i, 2) &= 2i \\
p_{\omega_1}(3, 3, 4) &= 12 \\
p_{\omega_2}(2, -3, 5, i, -2i, 0, 2, -4, 2, 1) &= -8 \\
p_{\omega_2}(3, 5, 7, 3, 2, 2, 3, 4, 4, 2) &= 12 \\
p_{\omega_3}(2, -3, 5, i, -2i, 0, 2, -4, 2, -4, 1) &= 24 - 4i \\
p_{\omega_3}(3, 5, 7, 3, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 2) &= 108 \\
p_{\omega_4}(2, -3, 5, i, -2i, 0, 2, -4, 2, -4, 1, -3) &= -20 - 2i \\
p_{\omega_4}(3, 5, 7, 3, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 2, 3) &= 64.
\end{aligned}$$

e, assim,

$$\begin{aligned}
p_{\omega_1}(u_1, u_2, u_3) &= u_2u_3 \\
p_{\omega_2}(u_1, \dots, u_{10}) &= u_1u_8 \\
p_{\omega_3}(u_1, \dots, u_{11}) &= u_2u_8u_9 + u_4u_{10} + u_6u_9u_{11}
\end{aligned}$$

$$p_{\omega_4}(u_1, \dots, u_{12}) = u_3 u_8 u_{11} + u_5 u_{11}^2.$$

□

Corolário 4.0.27 ([7], p. 245) *Sejam $h_i, g_i : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, $i = 1, 2$, germes de funções analíticas tais que $h_1 \ll g_1$, $h_2 \ll g_2$ e suponha que os coeficientes na expansão em série de potências de g_1 e g_2 são reais não-negativos. Então $h_1 h_2 \ll g_1 g_2$.*

Demonstração. Basta tomar $H, G : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow \mathbb{C}$ dadas por $H(x_1, x_2) = G(x_1, x_2) = x_1 x_2$ e usar o lema anterior. □

Para demonstrar os próximos resultados, precisaremos de dois teoremas da análise complexa, os quais enunciamos a seguir.

Teorema 4.0.28 (Fórmula de Cauchy para j -ésima derivada) ([1], p. 120) *Seja h uma função analítica em $\gamma \cup \text{int}(\gamma)$, onde γ é um caminho fechado, simples e orientado positivamente. Então,*

$$h^{(j)}(z) = \frac{j!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h(x)}{(x-z)^{j+1}} dx,$$

para todo $z \in \text{int}(\gamma)$ e para todo $j \in \mathbb{N}$.

Teorema 4.0.29 (Teorema do Módulo Máximo) ([1], p. 134) *Sejam $U \subset \mathbb{C}$ um aberto e conexo e $f : \bar{U} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica (onde \bar{U} denota o fecho de U). Então, $|f|$ possui máximo e o valor máximo é alcançado em algum $t_0 \in \text{fr}(U)$ (onde $\text{fr}(U)$ denota a fronteira do conjunto U), ou seja,*

$$\max_{t \in \bar{U}} |f(t)| = \max_{t \in \text{fr}(U)} |f(t)|.$$

A próxima proposição será utilizada para a demonstração do próximo lema, o qual será bastante útil no método de comparação que utilizaremos na demonstração do Passo 2.

Proposição 4.0.30 (Inequação de Cauchy) ([7], p. 245) *Sejam $\epsilon \in (0, 1)$ e h um germe de função analítica em D_{ϵ}^n , com $h(x) = \sum h_v x^v$ e considere $M > 0$ tal que $\sup_{x \in D_{\epsilon}^n} |h(x)| \leq M$. Então, $|h_v| \leq M \epsilon^{-|v|}$.*

Demonstração. Provemos por indução sobre n .

(i) Para $n = 1$: Note primeiramente que, por hipótese, h é analítica em D_{ϵ} , o qual pode ser visto como $\gamma \cup \text{int}(\gamma)$, onde $\gamma(s) = (\epsilon \cos s, \epsilon \sin s) = \epsilon e^{is}$ é caminho fechado, simples e orientado positivamente.

Supondo $h(x_1) = \sum_{j=0}^{\infty} h_j x_1^j$, concluímos que $h_j = \frac{h^{(j)}(0)}{j!}$. Logo, aplicando o Teorema 4.0.28, temos

$$h_j = \frac{h^{(j)}(0)}{j!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h(x_1)}{x_1^{j+1}} dx_1.$$

Note que $|\frac{1}{2\pi i}| = \frac{1}{2\pi}$ e o comprimento de arco $L(\gamma)$ de γ é dado por

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} |\gamma'(s)| ds = \epsilon \int_0^{2\pi} |ie^{is}| ds = \epsilon \int_0^{2\pi} ds = 2\pi\epsilon.$$

Assim,

$$\begin{aligned} |h_j| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{h(x_1)}{x_1^{j+1}} dx_1 \right| \leq \frac{1}{2\pi} \sup_{|x_1|=\epsilon} \left| \frac{h(x_1)}{x_1^{j+1}} \right| L(\gamma) \leq \epsilon \sup_{|x_1|=\epsilon} |h(x_1)| \sup_{|x_1|=\epsilon} \left| \frac{1}{x_1^{j+1}} \right| \\ &\leq \epsilon M \epsilon^{-(j+1)} = M \epsilon^{-j}, \end{aligned}$$

para todo natural j , como queríamos.

(ii) Suponhamos o resultado válido para $n - 1$ variáveis e mostremos para n variáveis.

Considere h com n variáveis. Então, separando as potências da variável x_1 , concluímos que $h(x) = \sum_{j=0}^{\infty} h_j(x_2, \dots, x_n) x_1^j$, onde $h_j(x_2, \dots, x_n)$ é série de potências em $x_2, \dots, x_n \in D_{\epsilon}$. Pelo primeiro passo da indução, temos $|h_j(x_2, \dots, x_n)| \leq M \epsilon^{-j}$. Note que h_j depende de $n - 1$ variáveis e $\sup_{x \in D_{\epsilon}^n} |h_j(x)| \leq M \epsilon^{-j}$. Então, o resultado segue aplicando a hipótese de indução à h_j . \square

Lema 4.0.31 ([7], p. 245) *Dado $\epsilon \in (0, 1)$, existe uma constante $L > 0$ tal que todo germe de função $\theta(t)$, analítica em D_{ϵ} , pode ser escrita, de modo único, da forma*

$$\theta(t) = \alpha(t)(k+1)t^k + \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j t^j$$

com $\alpha(t)$ analítica em D_{ϵ} e $|\beta_j|, \sup_{t \in D_{\epsilon}} |\alpha(t)| \leq LM$, $0 \leq j \leq k - 1$, onde $M = \sup_{t \in D_{\epsilon}} |\theta(t)|$.

Demonstração. Usando a série de Taylor de $\theta(t)$ em torno da origem, podemos expressar θ , de modo único, da forma $\alpha(t)(k+1)t^k + \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j t^j$. Além disso, como $\sup_{t \in D_{\epsilon}} |\theta(t)| \leq M$, então, pela Proposição 4.0.30, os coeficientes β_j satisfazem $|\beta_j| \leq M \epsilon^{-j}$ para $0 \leq j \leq k - 1$. Logo, para cada $t \in D_{\epsilon}$, temos

$$|(k+1)t^k \alpha(t)| = |\theta(t) - \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j t^j| \leq |\theta(t)| + \sum_{j=0}^{k-1} |\beta_j t^j| \leq M + \sum_{j=0}^{k-1} M \epsilon^{-j} \epsilon^j = (k+1)M.$$

Aplicando o Teorema 4.0.29 para o germe de função $(k+1)t^k\alpha(t)$ e depois para $\alpha(t)$, temos

$$\sup_{t \in D_\epsilon} |(k+1)t^k\alpha(t)| = \sup_{|t|=\epsilon} |(k+1)t^k\alpha(t)| = (k+1)\epsilon^k \sup_{|t|=\epsilon} |\alpha(t)| = (k+1)\epsilon^k \sup_{t \in D_\epsilon} |\alpha(t)|.$$

Daí $(k+1)\epsilon^k \sup_{t \in D_\epsilon} |\alpha(t)| \leq (k+1)M$, ou seja, $\sup_{t \in D_\epsilon} |\alpha(t)| \leq M\epsilon^{-k}$. Logo, tomando $L = \epsilon^{-k} > 0$, o lema está provado. \square

Sejam e, d, E, D números reais positivos e considere as seguintes séries de potências:

$$A(x) = \frac{e}{4d} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d^j}{j^2} (x_1 + \cdots + x_r)^j \text{ e } B(s, x) = \frac{E}{D} \sum_{j=1}^{\infty} D^j (s + x_1 + \cdots + x_r)^j.$$

O lema a seguir traz algumas propriedades das séries A e B que serão utilizadas na prova da convergência do Passo 2. Além disso, sua demonstração contém a resolução do exercício proposto 10.10, p. 249, do livro [7].

Lema 4.0.32 ([7], p. 246) (i) *A série de potências A (resp. B) converge em uma vizinhança de 0 em \mathbb{C}^r (resp. $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^r$);*

(ii) *Para todo natural $p \geq 2$, vale $(A(x))^p \ll (\frac{3e}{d})^{p-1} A(x)$.*

Demonstração. (i) Considere as seguintes séries de potências $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{d^j}{j^2} t^j$ e $\sum_{j=1}^{\infty} D^j t^j$.

Usando o teste da razão, temos

$$\left| \frac{\frac{d^{n+1}}{(n+1)^2} t^{n+1}}{\frac{d^n}{n^2} t^n} \right| = \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 d|t| \longrightarrow d|t| \quad \text{e} \quad \left| \frac{D^{n+1} t^{n+1}}{D^n t^n} \right| = D|t|.$$

Logo, as séries são convergentes para $d|t| < 1$ e $D|t| < 1$, respectivamente, ou seja, elas são analíticas em $0 \in \mathbb{C}$, com raios de convergência $\frac{1}{d}$ e $\frac{1}{D}$, respectivamente.

Note que A e B são compostas de múltiplos das séries acima com a aplicação soma e, portanto, analíticas na origem, ou ainda, convergentes em uma vizinhança da origem.

(ii) Considere $A_1(t) = \frac{e}{4d} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(dt)^j}{j^2}$. Note que $(A_1(t))^2 = \left(\frac{e}{4d}\right)^2 \sum_{j=2}^{\infty} \lambda_j (dt)^j$, com

$$\lambda_j = \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k^2(j-k)^2}.$$

Seja c_v o coeficiente binomial de x^v em $(x_1 + \cdots + x_r)^{|v|}$. Assim, o coeficiente de x^v em $(A(x))^2$ é $\left(\frac{e}{4d}\right)^2 c_v \lambda_{|v|} d^{|v|}$.

Faremos a demonstração por indução sobre p .

(1) Para $p = 2$, mostremos que $(A(x))^2 \ll \left(\frac{3e}{d}\right) A(x)$, ou seja, $\left(\frac{e}{4d}\right)^2 c_v \lambda_{|v|} d^{|v|} \leq \left(\frac{3e}{d}\right) \left(\frac{e}{4d}\right) c_v \frac{d^{|v|}}{|v|^2}$, para todo v , isto é, $\lambda_{|v|} \leq 12|v|^{-2}$, para todo v , ou ainda, $\lambda_j \leq \frac{12}{j^2}$, para todo $j \geq 2$.

Provaremos esta última desigualdade ao final dessa demonstração por se tratar de uma prova um pouco extensa e que aqui ofuscara o objetivo da demonstração do lema.

(2) Suponhamos $(A(x))^p \ll (\frac{3e}{d})^{p-1} A(x)$ e mostremos que $(A(x))^{p+1} \ll (\frac{3e}{d})^p A(x)$.

Usando o Corolário 4.0.27, a hipótese de indução e o primeiro passo da indução, temos

$$(A(x))^{p+1} = (A(x))^p A(x) \ll (\frac{3e}{d})^{p-1} A(x) A(x) \ll (\frac{3e}{d})^p A(x),$$

como queríamos.

Mostremos agora que $\lambda_j \leq \frac{12}{j^2}$, para todo $j \geq 2$. Para isso considere $f : (0, j) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{x^2(j-x)^2}$. Assim, $\lambda_j = f(1) + f(2) + \dots + f(j-1)$. Observe que $f(x) = f(j-x)$.

Note primeiramente que f é decrescente em $[1, \frac{j}{2}]$ e crescente em $[\frac{j}{2}, j-1]$. De fato, calculando a derivada de f , obtemos

$$f'(x) = \frac{-4x^3 + 6jx^2 - 2j^2x}{x^4(j-x)^4}.$$

Assim, para estudar o sinal de $f'(x)$ basta estudar o sinal de $x(-4x^2 + 6jx - 2j^2)$. Daí, concluímos que f' é negativa em $(0, \frac{j}{2})$ e positiva em $(\frac{j}{2}, j)$ e, conseqüentemente, que f é decrescente em $[1, \frac{j}{2}]$ e crescente em $[\frac{j}{2}, j-1]$.

Mostremos primeiramente que para provar que $\lambda_j \leq \frac{12}{j^2}$, para todo $j \geq 2$, basta provar que $\int_1^{j-1} f(x)dx + 2f(1) \leq \frac{12}{j^2}$, para todo $j \geq 2$.

Suponhamos que $\int_1^{j-1} f(x)dx + 2f(1) \leq \frac{12}{j^2}$ e mostremos que $\lambda_j \leq \frac{12}{j^2}$. Separamos tal prova em dois casos, um com j par e outro com j ímpar.

Para j par, temos $\frac{j}{2} \in \mathbb{Z}$. Assim, considere a partição $P = \{1, 2, \dots, \frac{j}{2}, \dots, j-1\}$ do intervalo $[1, j-1]$. Como f decresce em $[1, \frac{j}{2}]$ e cresce em $[\frac{j}{2}, j-1]$, então

$$f(2) + f(3) + \dots + f(\frac{j}{2}) + f(\frac{j}{2} + 1) \dots + f(j-2) \leq \int_1^{j-1} f(x)dx,$$

ou seja,

$$\lambda_j - f(1) - f(j-1) \leq \int_1^{j-1} f(x)dx.$$

Como $f(x) = f(j-x)$, então da última desigualdade concluímos que

$$\lambda_j \leq \int_1^{j-1} f(x)dx + 2f(1) \leq \frac{12}{j^2}.$$

A Figura 4.1 esboça esse processo geometricamente. Para encontrar a cota inferior da integral $\int_1^{j-1} f(x)dx$, somamos as áreas dos retângulos hachurados.

Para j ímpar, temos $\frac{j}{2} \notin \mathbb{Z}$. Assim, considere a partição $P = \{1, 2, \dots, \frac{j-1}{2}, \frac{j+1}{2}, \dots,$

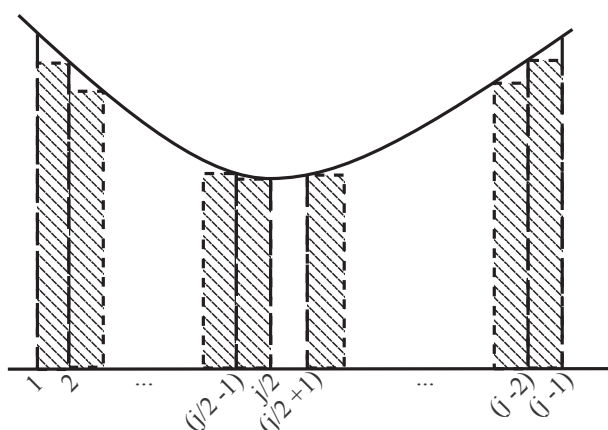


Figura 4.1: Cota inferior da integral para j par.

$j - 1$ do intervalo $[1, j - 1]$. Como f decresce em $[1, \frac{j}{2}]$ e cresce em $[\frac{j}{2}, j - 1]$, então

$$f(2) + f(3) + \cdots + f\left(\frac{j-1}{2}\right) + f\left(\frac{j+1}{2}\right) \cdots + f(j-2) \leq \int_1^{j-1} f(x)dx,$$

ou seja,

$$\lambda_j - f(1) - f(j-1) \leq \int_1^{j-1} f(x)dx.$$

Novamente como $f(x) = f(j-x)$, então da última desigualdade concluímos que

$$\lambda_j \leq \int_1^{j-1} f(x)dx + 2f(1) \leq \frac{12}{j^2}.$$

A Figura 4.2 esboça esse processo geometricamente. Para encontrar a cota inferior da integral $\int_1^{j-1} f(x)dx$, somamos as áreas dos retângulos hachurados.

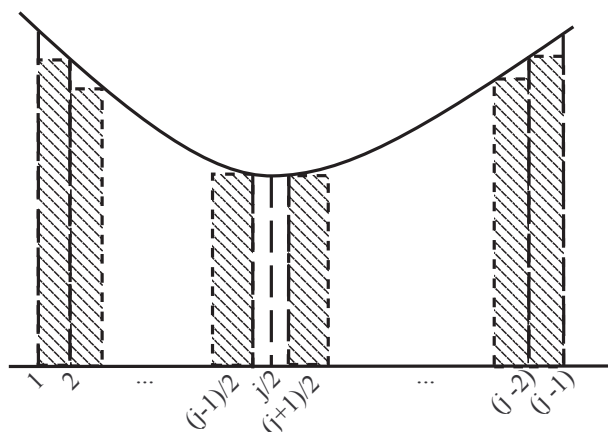


Figura 4.2: Cota inferior da integral para j ímpar.

Portanto, resta-nos provar que $\int_1^{j-1} f(x)dx + 2f(1) \leq \frac{12}{j^2}$, para $j \geq 2$.

Note primeiramente que $\frac{1}{x(j-x)} = \frac{1}{jx} + \frac{1}{j(j-x)}$. Assim,

$$f(x) = \frac{1}{x^2(j-x)^2} = \frac{1}{j^2x^2} + \frac{2}{j^3}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{j-x}\right) + \frac{1}{j^2(j-x)^2}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \int_1^{j-1} f(x)dx &= \frac{1}{j^2} \left[\int_1^{j-1} \frac{1}{x^2} dx + \frac{2}{j} \left(\int_1^{j-1} \frac{1}{x} dx + \int_1^{j-1} \frac{1}{j-x} dx \right) + \int_1^{j-1} \frac{1}{(j-x)^2} dx \right] \\ &= \frac{2}{j^2} \left[1 + \frac{2}{j} \ln(j-1) - \frac{1}{j-1} \right] \\ &= \frac{4}{j^2} \left(\frac{j-2}{2(j-1)} + \frac{2}{j} \ln(j-1) \right). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Mostremos agora que $\ln(j-1) \leq \frac{j^2}{2(j-1)}$.

Considerando j um número real maior ou igual a 2, concluímos que

$$(\ln(j-1))' = \frac{1}{j-1}, \quad \left(\frac{j^2}{2(j-1)}\right)' = \frac{j^2-2j}{2(j-1)^2} \quad \text{e} \quad \left(\frac{j^2-2j}{2(j-1)^2}\right)' = \frac{1}{(j-1)^3}.$$

Note que $\frac{1}{j-1}$ é decrescente e como $\frac{1}{(j-1)^3} > 0$, então $\frac{j^2-2j}{2(j-1)^2}$ é crescente, para $j \geq 2$, ou seja, $\frac{j^2}{2(j-1)}$ cresce mais rapidamente do que $\ln(j-1)$. Além disso, como $\ln(4-1) \leq \frac{4^2}{2(4-1)}$ e, para $j \geq 4$, temos $\frac{1}{j-1} < \frac{j^2-2j}{2(j-1)^2}$, então, concluímos que $\ln(j-1) \leq \frac{j^2}{2(j-1)}$, para $j \geq 4$ real, em particular, para $j \geq 4$ inteiro. Logo, basta verificar para $j = 2$ e $j = 3$.

Para $j = 2$, temos $\ln(2-1) = 0 \leq 2 = \frac{2^2}{2(2-1)}$.

Para $j = 3$, temos $\ln(3-1) \cong 0,6931 \leq 2,25 = \frac{3^2}{2(3-1)}$.

Portanto, concluímos que $\ln(j-1) \leq \frac{j^2}{2(j-1)}$, para $j \geq 2$ inteiro.

Assim,

$$\frac{j-2}{2(j-1)} + \frac{2}{j} \ln(j-1) \leq 1$$

e, usando isso na equação (4.4), concluímos que

$$\int_1^{j-1} f(x)dx = \frac{4}{j^2} \left(\frac{j-2}{2(j-1)} + \frac{2}{j} \ln(j-1) \right) \leq \frac{4}{j^2}.$$

Como $j \geq 2$, então $\frac{2(j-1)}{j} \geq 1$, ou seja, $\frac{4(j-1)^2}{j^2} \geq 1$, ou ainda, $f(1) = \frac{1}{(j-1)^2} \leq \frac{4}{j^2}$.

Portanto,

$$\int_1^{j-1} f(x)dx + 2f(1) \leq \frac{4}{j^2} + 2\frac{4}{j^2} = \frac{12}{j^2}.$$

□

O lema abaixo é um resultado de comparação necessário para a prova da convergência do Passo 2.

Lema 4.0.33 ([7], p. 247) *Seja $F : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^r, (0, 0)) \rightarrow \mathbb{C}$ um germe de função analítica em uma vizinhança de $(0, 0)$ que contém $D_{2\epsilon} \times D_\epsilon^r$. Existe uma escolha adequada dos números reais positivos D e E tal que $F(t + s, x) - F(t, 0) \ll B(s, x)$.*

Demonstração. Considere $H(t, s, x) = F(t + s, x) - F(t, 0)$ e $M = \sup_{(t, s, x) \in D_\epsilon \times D_\epsilon \times D_\epsilon^r} |H(t, s, x)|$.

Suponhamos $H_t(s, x) = F(t + s, x) - F(t, 0) = \sum g_{j_v}(t) s^j x^v$.

Note que, para cada $t \in D_\epsilon$, temos $\sup_{(s, x) \in D_\epsilon \times D_\epsilon^r} |H_t(s, x)| \leq M$. Logo, pela Proposição 4.0.30 aplicada a H_t , concluímos que $|g_{j_v}(t)| \leq M \epsilon^{-(|v|+j)}$, para cada $t \in D_\epsilon$.

Seja $c_{j,v}$ o coeficiente binomial de $s^j x^v$ em $(s + x_1 + \dots + x_r)^{j+|v|}$. Dessa forma, o coeficiente de $s^j x^v$ em $B(s, x)$ é $ED^{j+|v|-1} c_{j,v}$.

Logo, mostrar que $H(t, s, x) \ll B(s, x)$ equivale a mostrar que $\sup_{t \in D_\epsilon} |g_{j_v}(t)| \leq ED^{j+|v|-1} c_{j,v}$, para todo j e todo v .

Tomando $D \geq \frac{1}{\epsilon}$, $E \geq \frac{M}{\epsilon}$ e usando que $c_{j,v} \geq 1$, temos

$$ED^{j+|v|-1} c_{j,v} \geq \frac{M}{\epsilon} \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{j+|v|-1} \geq M \epsilon^{-(j+|v|)} \geq |g_{j_v}(t)|,$$

para todo $t \in D_\epsilon$, ou seja,

$$\sup_{t \in D_\epsilon} |g_{j_v}(t)| \leq ED^{j+|v|-1} c_{j,v}.$$

□

Finalmente podemos nos encaminhar para a demonstração dos passos 1 e 2.

Demonstração do Passo 1:

Faremos a demonstração da existência dos germes de aplicações a^p , b^p e c^p por indução sobre p .

(i) Para $p = 0$. Procuramos polinômios $a_0(t, x)$, $b_0(x)$ e $c_0(x)$ constantes na variável x . Sejam $a_0(t, x) = t$, $b_0(x) = 0$ e $c_0(x) = 0$.

Assim,

$$G(t, b_0(x)) + c_0(x) = G(t, 0) = g(t) = F(t, 0) = F(a_0(t, 0), 0) \equiv_1 F(a_0(t, x), x),$$

ou seja, as aplicações $a^0(t, x) = t$, $b^0(x) = 0$ e $c^0(x) = 0$ satisfazem a Equação (4.2) para $p = 0$.

(ii) Suponhamos que existam a^p , b^p e c^p satisfazendo (4.2). Mostremos que existem a_{p+1} , b_{p+1} e c_{p+1} , tal que $a^{p+1} = a^p + a_{p+1}$, $b^{p+1} = b^p + b_{p+1}$ e $c^{p+1} = c^p + c_{p+1}$ satisfazem a Equação (4.2) para $p + 1$, ou seja, que

$$F(a^p(t, x) + a_{p+1}(t, x), x) - G(t, b^p(x) + b_{p+1}(x)) - c^p(x) - c_{p+1}(x) \equiv_{p+2} 0. \quad (4.5)$$

Para cada x fixado, pela Fórmula de Taylor, temos

$$F(u + v, x) = F(u, x) + v \frac{\partial F}{\partial t}(u, x) + \frac{v^2}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(u, x) + \dots$$

Assim,

$$F(a^p(t, x) + a_{p+1}(t, x), x) = F(a^p(t, x), x) + a_{p+1}(t, x) \frac{\partial F}{\partial t}(a^p(t, x), x) + F_1(t, x),$$

onde todos os termos de $F_1(t, x)$ tem grau $\geq 2(p+1) \geq p+2$ na variável x . Como estamos interessados em termos de grau $\leq p+1$ na variável x , podemos eliminar o termo $F_1(t, x)$. Além disso, como $a_{p+1}(t, x)$ tem grau $p+1$ em x , então devemos considerar apenas o termo constante, em relação a x , de $\frac{\partial F}{\partial t}(a^p(t, x), x)$, o qual é $\frac{\partial F}{\partial t}(a^p(t, 0), 0) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, 0) = g'(t) = (k+1)t^k$.

Logo,

$$F(a^p(t, x) + a_{p+1}(t, x), x) \equiv_{p+2} F(a^p(t, x), x) + (k+1)t^k a_{p+1}(t, x).$$

Usando o mesmo raciocínio para G , obtemos

$$G(t, b^p(x) + b_{p+1}(x)) \equiv_{p+2} G(t, b^p(x)) + b_{p+1}(x) \frac{\partial G}{\partial u}(t, b^p(x)).$$

Note que, usando a expressão de G , obtemos $\frac{\partial G}{\partial u}(t, b^p(x)) = \begin{pmatrix} t \\ \vdots \\ t^{k-1} \end{pmatrix}$, a qual é constante em x . Logo,

$$G(t, b^p(x) + b_{p+1}(x)) \equiv_{p+2} G(t, b^p(x)) + \sum_{j=1}^{k-1} (b_{p+1}(x))_j t^j.$$

Assim, (4.5) é equivalente à

$$[F(a^p(t, x)(t, x), x) - G(t, b^p(x)) - c^p(x)] + (k+1)t^k a_{p+1}(t, x) - \sum_{j=1}^{k-1} (b_{p+1}(x))_j t^j - c_{p+1}(x) \equiv_{p+2} 0. \quad (4.6)$$

Pela hipótese de indução, $F(a^p(t, x), x) - G(t, b^p(x)) - c^p(x)$ não tem termos de grau $< p+1$ em x . No entanto, pode ter termos de grau $p+1$.

Seja $\theta(t)$ o coeficiente do termo de grau $p+1$, em x , de $F(a^p(t, x), x) - G(t, b^p(x)) - c^p(x)$, o qual é uma série de potências em t . Comparando os coeficientes dos termos de grau $p+1$, em x , (cuja soma deve ser nula) de

$$[F(a^p(t, x)(t, x), x) - G(t, b^p(x)) - c^p(x)] + (k+1)t^k a_{p+1}(t, x) - \sum_{j=1}^{k-1} (b_{p+1}(x))_j t^j - c_{p+1}(x),$$

a solução de (4.6) se reduz ao problema de escrever uma série de potências qualquer $\theta(t)$ na forma:

$$\theta(t) = (k+1)t^k \alpha(t) + \sum_{j=1}^{k-1} \beta_j t^j + \delta, \quad (4.7)$$

para $\alpha(t)$ uma série de potências e β_j, δ constantes, $1 \leq j \leq k-1$.

No entanto, no Lema 4.0.31 vimos que isso sempre ocorre e, além disso, de modo único, ou seja, existem (e são unicamente determinados) a^{p+1}, b^{p+1} e c^{p+1} tal que (4.2) é válido para $p+1$. \square

Demonstração do Passo 2:

Mostremos a convergência das séries $\sum_{p=0}^{\infty} a_p(t, x)$, $\sum_{p=0}^{\infty} b_p(x)$ e $\sum_{p=0}^{\infty} c_p(x)$. Munido dos lemas apresentados, podemos provar a convergência das séries acima usando o método de comparação. Para tal prova precisamos trabalhar com séries de potências complexas, mas o processo feito no passo 1 produz séries de potências reais de um desdobramento real F , ou seja, quando F é um desdobramento real, os germes de aplicações a^p, b^p e c^p terão coeficientes reais, para todo $p \in \mathbb{N}$.

Afirmção: Existe uma escolha adequada dos números reais positivos d e e tal que

$$a^p(t, x) - t, b^p(x), c^p(x) \ll A(x),$$

para todo natural p .

Suporemos a afirmação verdadeira e faremos sua prova no final desta demonstração. Logo, segue da afirmação acima que

$$\sum_{p=0}^{\infty} a_p(t, x) - t, \sum_{p=0}^{\infty} b_p(x), \sum_{p=0}^{\infty} c_p(x) \ll A(x).$$

Além disso, pelo item (i) do Lema 4.0.32, $A(x)$ é convergente em uma vizinhança da origem. Então, pelo método de comparação, segue que $\sum_{p=0}^{\infty} a_p(t, x) - t$, $\sum_{p=0}^{\infty} b_p(x)$ e $\sum_{p=0}^{\infty} c_p(x)$ são convergentes em uma vizinhança da origem, ou seja, existem aplicações a, b e c tal que $\sum_{p=0}^{\infty} a_p(t, x) = a(t, x)$, $\sum_{p=0}^{\infty} b_p(x) = b(x)$ e $\sum_{p=0}^{\infty} c_p(x) = c(x)$. Para concluir a demonstração do Passo 2, resta provar a afirmação feita acima.

Demonstração da afirmação: Suponhamos $\sum_{p=0}^{\infty} a_p(t, x) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v(t) x^v$, $\sum_{p=0}^{\infty} b_p(x) = \sum_{v=0}^{\infty} b_v x^v$ e $\sum_{p=0}^{\infty} c_p(x) = \sum_{v=0}^{\infty} c_v x^v$. Note que $a_v(t)$ é série de potências em t , b_v é um vetor de $k-1$ entradas e c_v um número.

Mostremos primeiramente que $a^1(t, x) - t, b^1(x), c^1(x), \pi_i(x) \ll A(x)$, onde $\pi_i(x)$ é a projeção na i -ésima coordenada, ($1 \leq i \leq r$), ou seja, mostremos a afirmação para $p = 1$ juntamente com $\pi_i(x) \ll A(x)$.

Recordemos da demonstração do passo 1 que $a_0(t, x) = t, b_0(x) = 0$ e $c_0(x) = 0$. Assim, $a^1(t, x) - t = a_0(t, x) + a_1(t, x) - t = a_1(t, x)$, $b^1(x) = b_0(x) + b_1(x) = b_1(x)$ e $c^1(x) = c_0(x) + c_1(x) = c_1(x)$.

Note que, por definição, $a_1(t, x), b_1(x)$ e $c_1(x)$ são polinômios homogêneos de grau 1 em x . Logo,

$$a^1(t, x) - t = \sum_{j=1}^r (a_1(t))_j x_j, \quad b^1(x) = \sum_{j=1}^r (b_1)_j x_j \quad \text{e} \quad c^1(x) = \sum_{j=1}^r (c_1)_j x_j.$$

Como $A(x) = \frac{e}{4d} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d^j}{j^2} (x_1 + \cdots + x_r)^j$, então os termos de $A(x)$ com grau 1 são os obtidos quando fazemos $j = 1$, ou seja, $\frac{e}{4}(x_1 + \cdots + x_r)$. Assim, o coeficiente dos termos de grau 1 é $\frac{e}{4}$.

Portanto, basta escolhermos e tal que $\frac{e}{4} \geq \max_{1 \leq j \leq r} \{ \sup_{t \in D_\epsilon} |(a_1(t))_j|, |(b_1)_j|, |(c_1)_j|, 1 \}$, para que os coeficientes de $a^1(t, x) - t, b^1(x), c^1(x)$ e $\pi_i(x)$ (note que neste último o coeficiente é 1) sejam menores ou iguais, em módulo, aos de $A(x)$.

Mostremos agora que $a_v(t)x^v, b_v x^v, c_v x^v \ll A(x)$, para todo v com $|v| \geq 1$. Faremos tal demonstração por indução sobre $|v|$.

(i) Para $|v| = 1$. Acima provamos que $a^1(t, x) - t, b^1(x), c^1(x) \ll A(x)$, ou ainda, $a_1(t, x), b_1(x), c_1(x) \ll A(x)$. Note que a_1, b_1 e c_1 são polinômios homogêneos de grau 1 em x , ou seja, eles contém todos os termos de $\sum a_v(t)x^v, \sum b_v x^v$ e $\sum c_v x^v$, com $|v| = 1$, respectivamente.

Assim, usando a Observação 4.0.24 concluímos que $a_v(t)x^v, b_v x^v, c_v x^v \ll A(x)$, para todo v com $|v| = 1$.

(ii) Considere $p \geq 1$. Suponhamos que $a_v(t)x^v, b_v x^v, c_v x^v \ll A(x)$, para todo v com $|v| = p$ e mostremos para $|v| = p + 1$.

Note primeiramente que, denotando a parte linear em s e x de $F(t + s, x) - F(t, 0)$ por $\mathcal{L}(t, s, x)$, a parte linear de B por $\mathcal{L}_B(s, x)$ e usando o Lema 4.0.33, temos

$$F(t + s, x) - F(t, 0) - \mathcal{L}(t, s, x) \ll B(s, x) - \mathcal{L}_B(s, x) = \frac{E}{D} \sum_{j=2}^{\infty} D^j (s + x_1 + \cdots + x_r)^j. \quad (4.8)$$

Tomando $s = a^p(t, x) - t$ no lado esquerdo da Equação (4.8), concluímos que

$$[F(t + (a^p(t, x) - t), x) - F(t, 0) - \mathcal{L}(t, a^p(t, x) - t, x)]_v = F(a^p(t, x), x)_v,$$

onde o índice v denota o coeficiente de x^v na expressão indicada.

Note que $a^p(t, x) - t = a_0(t, x) + a_1(t, x) + \cdots + a_p(t, x) - t = a_1(t, x) + \cdots + a_p(t, x)$. Logo, usando a hipótese de indução e a Observação 4.0.24, temos $a^p(t, x) - t \ll A(x)$.

Para cada $t \in D_\epsilon$ fixado, seja

$$H(s, x) = F(t + s, x) - F(t, 0) - \mathcal{L}(t, s, x), \quad G(s, x) = B(s, x) - \mathcal{L}_B(s, x),$$

$$h_1(x) = a^p(t, x) - t, \quad h_i(x) = \pi_{i-1}(x) \quad (2 \leq i \leq r+1) \quad \text{e} \quad g_i(x) = A(x) \quad (1 \leq i \leq r+1).$$

Vimos que $a^p(t, x) - t \ll A(x)$ e $\pi_j(x) \ll A(x)$, para $1 \leq j \leq r$, onde $\pi_j(x)$ é a projeção na j -ésima coordenada. Dessa forma, $h_i \ll g_i$, para $1 \leq i \leq r+1$ e ainda $h_1(0) = a^p(t, 0) - t = 0$, $h_i(0) = \pi_{i-1}(0) = 0$ e $g_i(0) = A(0) = 0$. Pela Equação (4.8), temos $H \ll G$. Além disso, como E, D, e, d e os coeficientes binomiais são números reais positivos, concluímos que os coeficientes de G e g_i são reais não-negativos, para $1 \leq i \leq r+1$. Portanto, pelo Lema 4.0.25, temos

$$F(a^p(t, x), x) - F(t, 0) - \mathcal{L}(t, a^p(t, x) - t, x) \ll \frac{E}{D} \sum_{j=2}^{\infty} D^j ((r+1)A(x))^j,$$

para cada $t \in D_\epsilon$.

Como

$$[F(t + (a^p(t, x) - t), x) - F(t, 0) - \mathcal{L}(t, a^p(t, x) - t, x)]_v = F(a^p(t, x), x)_v,$$

então, pela relação anterior,

$$F(a^p(t, x), x)_v x^v \ll \frac{E}{D} \sum_{j=2}^{\infty} D^j ((r+1)A(x))^j.$$

Usando o item (ii) do Lema 4.0.32, concluímos que

$$F(a^p(t, x), x)_v x^v \ll \frac{E}{D} \sum_{j=2}^{\infty} D^j (r+1)^j \left(\frac{3e}{d}\right)^{j-1} A(x).$$

Note que a série $\sum_{j=2}^{\infty} D^j (r+1)^j \left(\frac{3e}{d}\right)^{j-1} A(x)$ é a soma dos termos de uma progressão geométrica, cujo primeiro termo é $\frac{D^2(r+1)^2 3eA(x)}{d}$ e a razão é $\frac{3D(r+1)e}{d}$. Assim, se $0 < \frac{3D(r+1)e}{d} < 1$, tal série converge para $\frac{3D^2(r+1)^2 eA(x)}{d - 3D(r+1)e}$.

Por outro lado, como $G(t, b^p(x)) = t^{k+1} + \sum_{j=1}^{k-1} (b^p(x))_j t^j$ e $|v| = p+1$, então

$G(t, b^p(x))_v = 0$. Portanto,

$$[F(a^p(t, x), x) - G(t, b^p(x))]_v x^v \ll \frac{3ED(r+1)^2 eA(x)}{d - 3D(r+1)e}. \quad (4.9)$$

Comparando os coeficientes de x^v na Equação (4.6), temos

$$[F(a^p(t, x), x) - G(t, b^p(x))]_v = (k+1)t^k(-a_v(t)) + \sum_{j=1}^{k-1} (b_v)_j t^j + c_v.$$

Assim, pelo Lema 4.0.31 (inclusive a unicidade na forma com que escrevemos a série $\theta(t)$), existe $L > 0$ tal que $\sup_{t \in D_\epsilon} |a_v(t)|, |(b_v)_j|, |c_v| \leq LM$, para $1 \leq j \leq k-1$, onde $M = \sup_{t \in D_\epsilon} |[F(a^p(t, x), x) - G(t, b^p(x))]_v|$.

Por outro lado, segue da Equação (4.9) que

$$|[F(a^p(t, x), x) - G(t, b^p(x))]_v| \leq \left| \frac{3ED(r+1)^2 eA_v}{d - 3D(r+1)e} \right|,$$

então $M \leq \left| \frac{3ED(r+1)^2 eA_v}{d - 3D(r+1)e} \right|$. Logo,

$$\sup_{t \in D_\epsilon} |a_v(t)|, |(b_v)_j|, |c_v| \leq \left| \frac{3LED(r+1)^2 eA_v}{d - 3D(r+1)e} \right|,$$

para $1 \leq j \leq k-1$ e todo v com $|v| = p+1$. Além disso, segue do Lema 4.0.31 que L independe de v .

Tomando o número real positivo d suficientemente grande de modo que satisfaça:

$$0 < \frac{3D(r+1)e}{d} < 1 \quad \text{e} \quad 0 < \frac{3ED(r+1)^2 e}{d - 3D(r+1)e} < \frac{1}{L},$$

concluimos que $\sup_{t \in D_\epsilon} |a_v(t)|, |(b_v)_j|, |c_v| \leq A_v$, para $1 \leq j \leq k-1$ e todo v com $|v| = p+1$, ou seja, $a_v(t)x^v, b_v x^v, c_v x^v \ll A(x)$, para todo v com $|v| = p+1$.

Portanto, por indução, provamos que

$$a_v(t)x^v, b_v x^v, c_v x^v \ll A(x)$$

para todo v , onde $|v| \geq 1$.

Assim, usando a Observação 4.0.24, concluimos que

$$a^p(t, x) - t, b^p(x), c^p(x) \ll A(x),$$

para todo natural p , o que conclui a prova da afirmação e, conseqüentemente, do Passo

2.

□

Observação 4.0.34 (i) O caso $p = 0$ ou $|v| = 0$ não foi abordado nas induções por se tratar de um caso trivial, já que $a_0(t, x) - t = 0$, $b_0(x) = 0$ e $c_0(x) = 0$.

(ii) Usamos durante toda demonstração $a^p(t, x) - t$ ao invés de $a^p(t, x)$, pois o termo $a^p(t, x) = a_0(t, x) + a_1(t, x) + \cdots + a_p(t, x) = t + a_1(t, x) + \cdots + a_p(t, x)$ possui uma componente constante em relação a x ($a_0(t, x) = t$) e, no entanto, $A(x)$ não possui termo constante em relação a x , ou seja, não temos $a^p(t, x) \ll A(x)$.

Referências Bibliográficas

- [1] AHLFORS, L. V. *Complex Analysis*. 2nd. ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1966.
- [2] ARNOLD, V. I. Wavefronts evolution and equivariant Morse Lemma, *Commun. Pure and Appl. Math.*, 29 (1976), 557-582.
- [3] BRÖCKER, Th. ; LANDER, L. *Differentiable Germs and Catastrophes*, London Math. Soc. Lecture Note Series 17, Cambridge University Press, 1975.
- [4] BRUCE, J. W. On Singularities, envelopes and elementary differential geometry, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, Great Britain, 89 (1981) 43-48.
- [5] BRUCE, J. W. Isotopies of generic plane curves, *Glasgow Math. J.*, 24 (1983) 195-206.
- [6] BRUCE, J. W. A note on first order differential equations of degree greater than one and wavefront evolution, *Bull. London Math. Soc.*, 16 (1984), 139-144.
- [7] BRUCE, J. W. ; GIBLIN, P. J. *Curves and Singularities: a geometrical introduction to singularity theory*. 2nd. ed. Cambridge University Press, 1992.
- [8] BRUCE, J. W. ; GIBLIN, P. J. Generic isotopies of space curves, *Glasgow Math. J.*, 29 (1987) 41-63.
- [9] BRUCE, J. W. ; GIBLIN, P. J. Generic Geometry, *Mathematical Association of America*, vol. 90, N^o.8 (1983), 529-545.
- [10] CARMO, M. P. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, 3^a.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.
- [11] FRANCISCO, A. P. ; MARTINS L. F. Uma ferramenta para o estudo local de curvas e superfícies no espaço Euclidiano, *Revista Eletrônica Paulista de Matemática CQD*. vol. 2, N.2. 2013. Disponível em: <http://www2.fc.unesp.br/revistacqd/v2n2/v2n2_art1.pdf>. Acesso em: 24 fev. 2015.

-
- [12] FUKUI, T. ; HASEGAWA, M. Singularities of parallel surfaces, *Tohoku Math. J.*, 64 (2012), 387-408.
- [13] FUSTER, M. C. R. ; IZUMIYA, S. ; RUAS, M. A. S. ; TARI, F. *Differential Geometry from Singularity Theory Viewpoint*. ed. World Scientific Publishing Co Pte Ltd, Singapore, 2015.
- [14] GIBSON, C. G. *Singular points of smooth mappings*. London: Pitman, 1979.
- [15] GIBSON, C. G. *Elementary Geometry of Differentiable Curves: an Undergraduate Introduction*, Cambridge University Press, 2001.
- [16] GLUBITSKY, M. ; GUILLEMIN, V. *Stable Mappings and Their Singularities*. New York: Springer-Verlag, 1973.
- [17] HIRSCH, M. W. *Differential Topology*, Graduate Texts in Math. 33, Springer-Verlag, New York, 1976.
- [18] LIMA, E. L. *Análise Real*, vol.2. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.
- [19] LIMA, E. L. *Variedades Diferenciáveis*, Rio de Janeiro: IMPA, 2009
- [20] MILNOR, J. W. *Topology from the Differentiable Viewpoint*, The University Press of Virginia, Charlottesville, 1965.

Autorizo a reprodução xerográfica para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, 25 / 02 / 2015

Alse Paulo Francisco

Assinatura