



Instituto de Física Teórica  
Universidade Estadual Paulista

---

---

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.002/06

## Formalismo de Hamilton-Jacobi para Ações de Primeira Ordem

Mario Cezar Ferreira Gomes Bertin

Orientador

Prof. Dr. *Bruto Max Pimentel Escobar*

Fevereiro de 2006



Ao meu amigo José Cláudio, que ao falecer enquanto eu  
escrevia essas linhas nos deixou com um grande problema:  
Como mudar o mundo sem ele?

## Agradecimentos

À minha família, a principal provedora.

À minha mãe, pela amizade e companheirismo que nos une.

Aos meus amigos João Belther Júnior e Júlio Marny Hoff, pelo tempo de convivência e pelas conversas enriquecedoras sobre a física que não conhecemos.

Ao meu orientador, o professor Bruto Max Pimentel, que me acompanha pela minha aventura científica.

Ao meu amigo Pedro José Pompéia.

Ao CNPq, pelo suporte integral de mais da metade do meu mestrado.

## Resumo

Neste trabalho desenvolvemos o tratamento geral de sistemas singulares pelo formalismo de Hamilton-Jacobi, desenvolvido primeiro por *Carathéodory* para sistemas regulares. Daremos ênfase a sistemas cuja ação é de primeira ordem, ou seja, cuja Lagrangiana é uma função linear nas velocidades. O objetivo principal é, além de apresentar o formalismo de forma apropriada, mostrar a existência da estrutura simplética no espaço de fase desses sistemas ao encontrar parênteses generalizados apropriados, com os quais a quantização canônica se dará de forma natural.

**Palavras Chave:** Sistemas singulares, formalismo de Hamilton-Jacobi.

**Área do conhecimento:** 1.05.03.01-3

## Abstract

In this work we develop the general treatment of singular systems via Hamilton-Jacobi formalism, first developed by *Carathéodory* for regular systems. We will give emphasis on first order action systems, whose Lagrangian is a linear function of the velocities. The main objective is, besides presenting the formalism in an appropriate form, to show the existence of a symplectic structure in the phase space of these systems by finding appropriate generalized brackets, with which the canonic quantization will be given in a natural way.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Mecânica e Geometria</b>	<b>4</b>
1.1 Introdução . . . . .	4
1.2 Formalismo Lagrangiano . . . . .	4
1.2.1 Vínculos na Dinâmica de Newton . . . . .	5
1.2.2 Princípio de D´Alembert . . . . .	8
1.2.3 Equações de <i>Euler-Lagrange</i> . . . . .	8
1.2.4 Vetores . . . . .	11
1.2.5 Covetores . . . . .	14
1.2.6 Formas Diferenciais . . . . .	14
1.2.7 A Derivada de Lie . . . . .	15
1.2.8 Forma das Equações de <i>Euler-Lagrange</i> Independente das Coordenadas	16
1.2.9 Transformação de Coordenadas em $\mathbb{Q}$ . . . . .	18
1.3 Formalismo Hamiltoniano . . . . .	19
1.3.1 Formalismo Simplético Hamiltoniano . . . . .	20
1.3.2 Os Parênteses de Poisson . . . . .	22
1.3.3 Transformações em $\mathbf{T}^*\mathbb{Q}$ . . . . .	23
1.3.4 Propriedades dos Parênteses de Poisson . . . . .	25
Referências . . . . .	26
<b>2 O Formalismo de Hamilton-Jacobi</b>	<b>27</b>
2.1 Introdução . . . . .	27
2.2 O Problema Variacional . . . . .	28
2.3 Condições para Extremos da Ação . . . . .	30
2.3.1 Sistemas Regulares em $\mathbb{Q}^n$ . . . . .	33
2.3.2 Sistemas Singulares Gerais . . . . .	34
2.3.3 Análise das Condições de Extremos . . . . .	36
2.4 Equações Características . . . . .	38
2.4.1 Integrabilidade . . . . .	40
2.5 Equações de Movimento . . . . .	44
2.5.1 Caso Regular . . . . .	45
2.5.2 Caso Singular . . . . .	46

2.6	O Espaço de Fase Generalizado . . . . .	48
	Referências . . . . .	50
<b>3</b>	<b>Ações de Primeira Ordem</b>	<b>51</b>
3.1	Introdução . . . . .	51
3.2	Formalismo de HJ para Lagrangianas Lineares . . . . .	52
	3.2.1 Caso Regular . . . . .	53
	3.2.2 Caso Singular . . . . .	56
3.3	Campos Relativísticos . . . . .	59
3.4	O Campo de Proca . . . . .	60
3.5	O Campo Eletromagnético . . . . .	65
	Referências . . . . .	68
	<b>Considerações Finais</b>	<b>69</b>
<b>A</b>	<b>O Formalismo Hamiltoniano</b>	<b>71</b>
<b>B</b>	<b>Campo Eletromagnético de 1<sup>a</sup> Ordem <i>a la</i> Dirac</b>	<b>79</b>
	Referências . . . . .	83



# Introdução

Em quatro artigos monumentais publicados em 1926<sup>1</sup>, *Schrödinger* inaugura a **Mecânica Ondulatória**, que trata o problema da quantização como um problema de autovalores. Em conjunto com a mecânica de *Heisenberg* e os trabalhos de *Dirac*, esses artigos edificam as bases teóricas da mecânica quântica. Assim como fez *Hamilton* quase um século antes ao desenvolver seu formalismo para a mecânica clássica, *Schrödinger* baseou-se na analogia *óptico-mecânica*, que relaciona a ótica geométrica à mecânica analítica, e assim foi capaz de criar uma nova disciplina que mudaria a história das ciências naturais. Escreve *Schrödinger*, sobre o trabalho de *Hamilton*, ao introduzir seu segundo artigo:

*” Unfortunately this powerful and momentous conception of Hamilton is deprived, in most modern reproductions, of its beautiful raiment as a superfluous accessory, in favour of a more colourness representation of the analitical correspondence.”*

*Schrödinger* refere-se justamente à analogia óptico-mecânica e podemos arriscar dizer o mesmo sobre os trabalhos de *Schrödinger*: essa relação, importante tanto para a mecânica clássica quanto para a quântica, é oculta nos livros modernos de mecânica quântica.

Este trabalho dedica-se em última palavra à investigação de uma parte da analogia óptico-mecânica na mecânica clássica, o **Formalismo de Hamilton-Jacobi, (HJ)**. *Hamilton* fez abundante uso dessa analogia ao desenvolver a mecânica Hamiltoniana e o fez de forma deliberada. A conexão entre a teoria de propagação da luz e a mecânica é antiga e está pautada nos problemas variacionais. O primeiro princípio variacional foi introduzido por *Fermat*, entre 1657 e 1662, o **princípio de tempo mínimo**. A trajetória do raio de luz é tal que o tempo medido entre dois pontos do caminho é mínimo. *Hamilton* percebeu que seu princípio é equivalente ao de *Fermat* quando as trajetórias dos raios de luz em  $\mathbb{R}^3$  são entendidas como as trajetórias dinâmicas no espaço de configuração  $\mathbb{Q}$ .

*Schrödinger* fez uso da mesma associação, mas percebeu que ela não era imediata para a teoria quântica. A mecânica clássica é, no sentido dessa correspondência, análoga à ótica geométrica, mas não à teoria ondulatória da luz. O limite está na capacidade da definição de trajetórias, que só é possível na ótica geométrica, onde consideramos que a trajetória tem dimensões muito maiores que o comprimento de onda. O conceito de trajetória não faz sentido na teoria de *Huygens*, onde o comprimento de onda é grande em relação ao ”caminho da

---

<sup>1</sup>E. Schrödinger - *Collected Papers on Wave Mechanics - Quantisation as a Problem of Proper Values I, II, III e IV*. - Chelsea Pub. Co. New York (1978).

luz”. *Schrödinger* considerou natural que nos sistemas micro-mecânicos a mecânica clássica funcionasse tão bem quanto a ótica geométrica funcionava para os problemas de difração. Haveria, então, uma nova mecânica cuja correspondência óptico-mecânica se dava com a ótica ondulatória. Nasce assim a mecânica ondulatória.

Os princípios variacionais são o elo mais profundo entre a ótica, a mecânica clássica e a mecânica quântica. E o formalismo que liga as três disciplinas na mecânica é o Formalismo de *Hamilton-Jacobi*. É este o ponto de partida de *Schrödinger*, não o formalismo Hamiltoniano, como faz pensar a maioria dos textos atuais em mecânica quântica.

O formalismo de HJ é baseado na analogia entre três disciplinas matemáticas que por algum tempo foram tidas como independentes: a **teoria das equações diferenciais ordinárias (EDO)**, a **teoria das equações diferenciais parciais (EDP)** e o **cálculo variacional**, e essa analogia, como veremos, tem como pano de fundo a geometria diferencial em variedades. Esse quadro de relações que envolve as três disciplinas em um contexto onde reina a geometria faz do formalismo de HJ não só um formalismo para a mecânica, mas também um formalismo matemático, como mostra *Carathéodory*<sup>2</sup>, ao deduzir os principais teoremas pertinentes às teorias de EDO e EDP. *Carathéodory* chamou este sistema de relações pelo sugestivo nome de **quadro completo** (*complete figure*).

Na mecânica analítica o formalismo de HJ é baseado na conhecida equação de mesmo nome. Esta equação é resultado dos trabalhos de *Hamilton* e *Jacobi* na teoria das transformações canônicas. É natural neste ponto de vista que a literatura corrente sobre este formalismo vincule a equação de HJ ao formalismo Hamiltoniano através das transformações canônicas. Nessa ótica a equação de HJ surge ao se considerar o problema de se encontrar uma transformação no espaço de fase  $\mathbf{T}^*\mathbb{Q}$  capaz de levar a resolução das equações dinâmicas de Hamilton à forma mais elementar possível. O formalismo então é tratado meramente como um meio de encontrar soluções para as equações de *Hamilton*. No quadro completo, assim mostraremos, a análise de HJ é independente da abordagem Hamiltoniana da mecânica, mesmo da definição de qualquer tipo de transformação, consistindo em uma teoria completa, autosuficiente e com resultados muito gerais.

O quadro completo nos permite, e esse é o principal ponto de todo o trabalho, tratar sistemas singulares, que consistem em sistemas cuja Lagrangiana possui uma matriz Hessiana singular. Esse tipo de sistema viola a condição necessária para que a formulação Hamiltoniana apareça de forma natural a partir da Lagrangiana, pois torna-se necessária uma análise de vínculos. Como já é bem conhecido, a mecânica quântica é baseada em uma estrutura simplética e essa estrutura não pode ser obtida pelos métodos usuais<sup>3</sup> se o sistema for singular. Assim, por muito tempo desde a fundação da mecânica quântica não houve um formalismo unificado que tratasse de sistemas singulares. *Dirac*<sup>4</sup> foi o primeiro a dar uma

---

<sup>2</sup>C. Carathéodory - *Calculus of Variations and Partial Differential Equations of the First Order* - Holden Day, Inc (1967).

<sup>3</sup>Por exemplo usando os **Parênteses de Poisson** habituais.

<sup>4</sup>P. A. M. Dirac - *Canad. J. Math.* **2**, 129 (1950),

P. A. M. Dirac - *Canad. J. Math.* **3**, 1 (1951),

P. A. M. Dirac - *Proc. Roy. Soc.* **A246**, 326 (1958).

solução satisfatória para este problema, usando um formalismo Hamiltoniano<sup>5</sup>.

A busca por uma estrutura simplética geral para sistemas singulares é naturalmente emergente pelo Formalismo de HJ. Portanto, a importância dessa estrutura teórica não é evidente apenas na discussão heurística sobre as origens da mecânica quântica, mas também na resolução de problemas que afligem a quantização das teorias de campo relativísticas, que são naturalmente singulares. Podemos arriscar dizer que a estrada que leva sistemas clássicos a sistemas quânticos passa inevitavelmente pelo quadro completo que abordaremos aqui.

Escolhemos por apresentar o formalismo sem excessivo rigor matemático, mas ainda assim consideramos a importância da utilização da matemática moderna, que inclui elementos da geometria diferencial em variedades, como ferramenta importante para a síntese e a compreensão mais profunda da teoria tal como será apresentada. Portanto, o trabalho terá ênfase no aspecto geométrico e, para tanto, muitos objetos da geometria devem ser introduzidos. O primeiro capítulo serve a este propósito, além de realizar uma breve síntese das formulações que compõem a disciplina da mecânica clássica. Introduziremos a **Variedade de Configuração**, o **Espaço de Fase**, **vetores**, **covetores** e **formas diferenciais**, bem como outros objetos que consideramos importantes para a compreensão do conteúdo e que também serão úteis no formalismo.

No segundo capítulo apresentaremos a forma mais geral do formalismo de HJ. Em primeiro lugar apresentaremos a dedução do sistema de equações de HJ, a partir do princípio variacional de *Hamilton*. Trabalharemos com sistemas singulares e mostraremos como é possível fazer a análise de vínculos sob esta ótica, encontrando inclusive as estruturas simpléticas apropriadas para escrever as equações de movimento.

No terceiro e último capítulo aplicaremos o formalismo desenvolvido no capítulo anterior para tratar sistemas cuja ação é de primeira ordem nas velocidades generalizadas. Embora pareçam uma particularização, sistemas de ações de primeira ordem são na verdade bastante gerais em Teoria de Campos, pois todos os campos conhecidos podem ser levados a estes por transformações apropriadas. Esses sistemas mostram-se também muito mais simples para a utilização do formalismo de HJ, como veremos. Usaremos o método para encontrar as equações de movimento de dois campos conhecidos: o eletromagnético e o de *Proca*. Para os dois usaremos Lagrangianas na forma de *Palatini*.

As referências bibliográficas serão indicadas por capítulo, não apenas no fim do trabalho, e em notas de rodapé, com a finalidade de tornar a leitura mais dinâmica.

Finalmente, teceremos considerações finais sobre este trabalho. Devem conter, portanto, uma síntese dos principais resultados e direções para possíveis linhas de pesquisa futura. Apresentaremos também dois apêndices. O primeiro contém o formalismo de *Dirac* para sistemas singulares, no qual procuramos utilizar o modelo operacional que motivou a introdução no formalismo de HJ da matriz  $M$ . O segundo apêndice consiste em um exemplo, o campo eletromagnético livre de primeira ordem, da aplicabilidade do método de Dirac. Embora não seja objetivo desse trabalho a comparação entre os métodos, esperamos que algumas semelhanças possam ser notadas de imediato, e assim um futuro estudo mais detalhado de correspondência possa ser iniciado.

---

<sup>5</sup>Ver apêndice A

# Capítulo 1

## Mecânica e Geometria

### 1.1 Introdução

Neste capítulo temos o objetivo de introduzir os elementos e a linguagem que serão utilizados durante todo o texto. Uma passagem pelos formalismos que compõem o cenário da mecânica clássica vem a ser uma maneira de cumprir essa meta. A linguagem é essencialmente geométrica e os elementos são objetos básicos da geometria diferencial como variedades diferenciáveis, funções escalares, vetores e formas diferenciais, que consistem na parte básica de álgebra tensorial em variedades. Passaremos pelos formalismos clássicos, o Lagrangiano e o Hamiltoniano, evidenciando seus aspectos geométricos, principalmente na procura de expressões intrínsecas, independentes de sistemas de coordenadas. A passagem entre os formalismos também será feita em vista de introduzir as variedades e os espaços vetoriais que constituem a estrutura formal dessas teorias.

No objetivo principal dessa dissertação está a idéia de buscar estruturas simpléticas em determinados sistemas dinâmicos, e, por esta razão, um formalismo básico envolvendo a geometria do espaço de fase, inclusive a definição daquilo que vem a ser uma estrutura simplética, deve ser desenvolvido. Ainda evitaremos a abordagem do cálculo variacional, que introduziremos como parte do formalismo de *Hamilton-Jacobi* no capítulo 2.

### 1.2 Formalismo Lagrangiano

Encontrar equações de movimento é o objetivo primeiro da Mecânica Clássica, cuja base teórica foi lançada por *Newton* (1686), no cenário que descrevemos como o **Espaço Euclidiano**  $\mathbb{R}^3$ . As equações de movimento de Newton, considerando-se um sistema de  $N$  partículas descritas em coordenadas cartesianas, tomam a forma<sup>1</sup>

$$m_I \ddot{\mathbf{x}}_I = \mathbf{F}_I, \quad \{I\} = \{1, \dots, N\}. \quad (1.1)$$

---

<sup>1</sup>Ver [1], pp. 48-64.

São  $3N$  equações de segunda ordem nas coordenadas. As equações (1.1) são definidas apenas para referenciais inerciais<sup>2</sup>, o que vem a ser uma característica de todo formalismo clássico não relativístico, mas também têm a indesejável característica de não serem covariantes ao sistema de coordenadas escolhido, o que vem a ser uma característica deste formalismo em particular. Todas as coordenadas das partículas são independentes desde que não existam **vínculos** no sistema. Caso estes vínculos existam e possam ser escritos por forças impressas, as equações de movimento resultarão em relações entre algumas das coordenadas, de modo que estas não serão dinâmicas, ou posto de outra forma, não serão de segunda ordem nessas coordenadas.

### 1.2.1 Vínculos na Dinâmica de Newton

Na mecânica Newtoniana um sistema é completamente descrito com um conjunto de  $3N$  informações, três coordenadas cartesianas de  $N$  partículas. Este mesmo sistema pode ser redesenhado em um espaço euclidiano de  $n = 3N$  dimensões  $\mathbb{R}^n$ , com o uso de coordenadas generalizadas. O cenário no qual as coordenadas generalizadas estão inseridas é a chamada **Variedade de Configuração**  $\mathbb{Q}$ . Novamente os vínculos do sistema representam papel importante na definição dessa variedade. Se existirem vínculos, eles podem ser escritos como  $K$  relações entre as coordenadas generalizadas de modo que os graus de liberdade do sistema são diminuídos para  $P = n - K$ . A dimensão da variedade de configuração corresponde aos graus de liberdade do sistema. Assim, com  $K$  vínculos, a variedade de configuração será  $\mathbb{Q}^P$ , munida de uma métrica *Riemanniana*. Na ausência de vínculos esta variedade coincide com o espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ .

Na presença de vínculos, o sistema descrito por (1.1) perde a liberdade de se mover por todo o espaço  $\mathbb{R}^n$ . Sua variedade de configuração  $\mathbb{Q}$  é reduzida a uma região de  $\mathbb{R}^n$ . Um exemplo de vínculo é aquele no qual o sistema de  $N$  partículas mencionado é restrito a se mover em uma superfície de  $\mathbb{R}^n$ . Podemos escrever essa superfície por equações do tipo

$$f_z(\mathbf{x}_I, t) = 0 \quad \{z\} = \{1, \dots, K < n\}. \quad (1.2)$$

A princípio, podemos pensar que estes vínculos podem ser mantidos por forças impressas. Neste caso, as equações (1.1) tornam-se

$$m_I \ddot{\mathbf{x}}_I = \mathbf{F}_I + \mathbf{C}_I, \quad (1.3)$$

onde  $\mathbf{C}_I$  são as forças que mantêm cada partícula  $m_I$  restrita à superfície descrita por (1.2). Para conhecer o movimento do sistema é necessário conhecer o conjunto das  $3N$  componentes das forças externas e, ainda, as  $3N$  componentes das forças que mantêm os vínculos, mas uma observação atenta mostra que dispomos apenas de  $3N$  equações (1.3) e de  $K$  equações (1.2) tal que  $K < 3N$ . Esta é uma dificuldade que pode ser contornada observando-se um caso de partícula única com um único vínculo. Nesse caso, podemos ignorar o índice  $I$ ,

---

<sup>2</sup>Neste contexto, os referenciais inerciais são aqueles que são relacionados por transformações de Galilei.

$$f(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (1.4)$$

O espaço mais geral desse exemplo é o  $\mathbb{R}^3$ . As equações de movimento tornam-se

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F} + \mathbf{C}, \quad (1.5)$$

que, com a condição (1.4), somam quatro equações para seis incógnitas, as componentes de  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{C}$ . Embora nesse tipo de problema o conhecimento de  $\mathbf{F}$  seja presumido, não o é o conhecimento das componentes de  $\mathbf{C}$ .

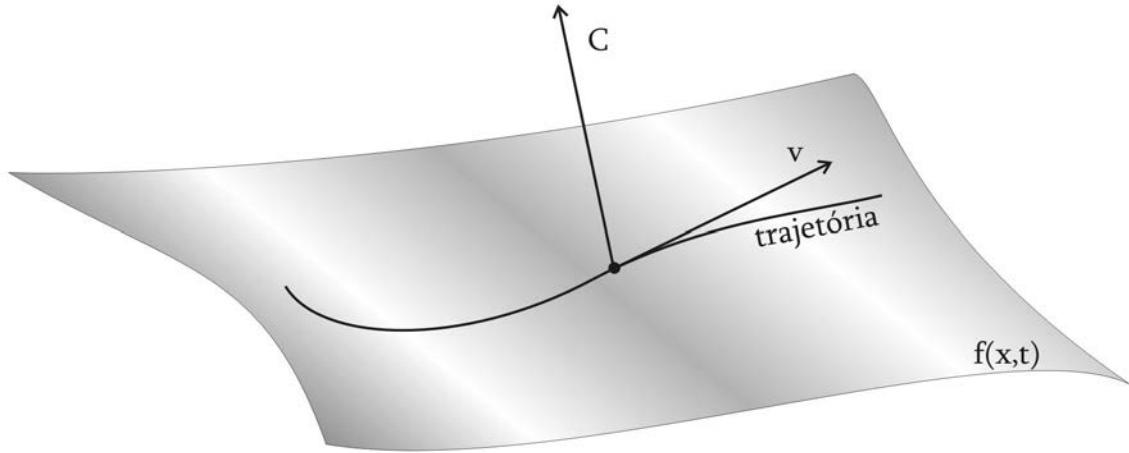


Figura 1.1: Partícula restrita a uma superfície  $f(x, t)$ .

Observe que nesse caso não existe apenas uma força capaz de manter a relação (1.4). De fato, apenas forças normais ponto a ponto à superfície contribuem para manter a partícula presa a ela. Assim, duas das componentes tangenciais de  $\mathbf{C}$  são irrelevantes. Podemos escolher  $\mathbf{C}$  de modo que tenha apenas componentes normais à superfície definida por  $f$ . O argumento pode ser estendido a  $N$  partículas. Devemos, então, escolher as forças  $\mathbf{C}_I$  de modo que sejam normais à superfície (1.2). Uma escolha bastante natural seria<sup>3</sup>

$$\mathbf{C}_I = \sum_{z=1}^K \lambda_z \nabla_I f_z, \quad (1.6)$$

onde  $\nabla_I$  significa o gradiente com respeito à posição  $\mathbf{x}_I$  da  $I$ -ésima partícula e  $\lambda$  é uma constante nas coordenadas, mas possivelmente dependente do tempo. Assim,

$$m_I \ddot{\mathbf{x}}_I = \mathbf{F}_I + \sum_{z=1}^K \lambda_z \nabla_I f_z. \quad (1.7)$$

Se as forças impressas forem não dissipativas, existe um potencial tal que  $\mathbf{F}_I = -\nabla_I V$ , onde  $V = V(\mathbf{x}_I, t)$ . As equações de movimento tomam uma forma final em

---

<sup>3</sup>Dada uma função de  $N$  variáveis  $f(x_N)$ , o gradiente  $\nabla f$  calculado em algum ponto de  $f$  é um vetor normal à superfície neste ponto.

$$m_I \ddot{\mathbf{x}}_I = -\nabla_I V + \sum_{z=1}^K \lambda_z \nabla_I f_z = -\nabla_I \left( V - \sum_{z=1}^K \lambda_z f_z \right). \quad (1.8)$$

Aqui, vemos a motivação elementar do método dos **Parâmetros de Lagrange** (PL) para o tratamento de vínculos. Esses vínculos, descritos por (1.2) são chamados **integráveis**. Nessa dedução, usamos o fato de que os vínculos integráveis podem ser escritos por uma relação entre as coordenadas e implicitamente mostramos que as forças responsáveis por manter um sistema de partículas preso a esses vínculos são não-dissipativas. Vínculos não integráveis, que não podem ser escritos por uma relação entre as coordenadas, são mantidos por forças dissipativas. Nesses casos não podemos escrever (1.6) ou (1.7), mas pode-se mostrar que o método dos PL ainda pode ser utilizado<sup>4</sup>.

No caso específico do nosso problema, somos levados a interpretar os termos  $\sum_z \lambda_z f_z$  como os potenciais responsáveis pelas forças que mantêm o sistema sobre a superfície.

Note que, ao procedermos o produto escalar de (1.8) por  $\dot{\mathbf{x}}_I$  e somando em  $I$ ,

$$\sum_{I=1}^N m_I \ddot{\mathbf{x}}_I \cdot \dot{\mathbf{x}}_I = -\sum_{I=1}^N \nabla_I V \cdot \dot{\mathbf{x}}_I + \sum_{I=1}^N \sum_z \lambda_z \nabla_I f_z \cdot \dot{\mathbf{x}}_I. \quad (1.9)$$

Usaremos agora as identidades

$$\sum_{I=1}^N m_I \ddot{\mathbf{x}}_I \cdot \dot{\mathbf{x}}_I = \frac{d}{dt} \left( \sum_{I=1}^N \frac{m_I \dot{\mathbf{x}}_I^2}{2} \right), \quad (1.10)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \sum_i \nabla_i \phi \cdot \dot{\mathbf{x}}_i. \quad (1.11)$$

Tanto  $V$  quanto  $\sum_z \lambda_z f_z$  podem ser colocados em lugar de  $\phi$  em (1.11), de modo que

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_I \frac{m_I \dot{\mathbf{x}}_I^2}{2} + V \right) = \frac{\partial V}{\partial t} - \sum_z \lambda_z \frac{\partial f_z}{\partial t}, \quad (1.12)$$

onde usamos o fato de que  $\lambda$  é uma função explícita apenas de  $t$  e de que  $df/dt = 0$  na superfície. Esta equação dá lugar à conservação da energia do sistema partícula-superfície:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} - \sum_z \lambda_z \frac{\partial f_z}{\partial t}. \quad (1.13)$$

Ora, a equação (1.13) nos mostra que mesmo um único vínculo explicitamente dependente do tempo executa trabalho sobre a partícula mesmo quando o potencial  $V$  é independente do tempo. Por consequência a energia  $E$  da partícula não é mais conservada. Isto significa que a própria superfície executa trabalho na partícula, o que pode ser bem compreendido quando se observa que, se a superfície se move, as velocidades não são mais tangentes às próprias superfícies e, neste caso, não são ortogonais às forças  $\mathbf{C}_I$ .

<sup>4</sup>Ver [2], pp. 25-7 e 43-9.

### 1.2.2 Princípio de D'Alembert

Temos, então, as equações

$$m_I \ddot{\mathbf{x}}_I = \mathbf{F}_I + \sum_{z=1}^K \lambda_z \nabla_I f_z, \quad (1.14)$$

$$f_z(\mathbf{x}_I, t) = 0, \quad (1.15)$$

que devemos resolver pela eliminação dos parâmetros  $\lambda_z$  de (1.14). Sabemos que  $\sum_z \lambda_z \nabla_I f_z$  é um conjunto de  $N$  vetores normais à superfície definida por (1.15). Então, podemos definir um conjunto de  $N$  vetores  $\tau_I$  tangentes à superfície em cada ponto. Estes vetores obedecem a

$$\sum_{I=1}^N \tau_I \cdot \lambda_z \nabla_I f_z = 0. \quad (1.16)$$

São  $K$  equações para  $3N$  componentes de  $\tau_I$ . Assim, somente  $3N - K$  das componentes são independentes. A relação (1.16) pode ser reescrita com o auxílio de (1.14):

$$\sum_I (m_I \ddot{\mathbf{x}}_I - \mathbf{F}_I) \cdot \tau_I = 0. \quad (1.17)$$

Esta equação é chamada por **Princípio de D'Alembert**<sup>5</sup>. Assim, ficamos com  $3N - K$  relações independentes em (1.17), de modo que transferimos nosso problema de um sistema em  $\mathbb{R}^{3N}$  condicionado a uma superfície (1.15) para um sistema livre em  $\mathbb{Q}^{3N-K}$  com as equações de movimento (1.17). Para encontrarmos as  $3N$  componentes de  $\mathbf{x}_I$  dispomos dessas equações e das condições auxiliares (1.15).

### 1.2.3 Equações de Euler-Lagrange

Os vetores tangentes  $\tau$  são funções vetoriais das coordenadas de  $\mathbb{Q}$  e possivelmente do tempo. Suas  $\tau$  componentes definem um vetor em  $\mathbb{R}^n$ , assim como as  $n$  coordenadas  $\mathbf{x}_I$  definem igualmente um sistema de coordenadas nesse mesmo espaço. Vamos agora introduzir coordenadas generalizadas  $q^i$  onde  $\{i\} = \{1, \dots, n\}$ , relacionadas às coordenadas  $\mathbf{x}_I$  pelas relações mutuamente inversíveis<sup>6</sup>

$$q^i = q^i(\mathbf{x}_I, t) \quad \{i\} = \{1, \dots, n\} \quad (1.18)$$

<sup>5</sup>Historicamente a dedução deste princípio é, obviamente, diferente. Mas uma inspeção mais detalhada mostra que a formulação  $\sum_I (m_I \ddot{x}_I - F_I) \cdot \delta R_I = 0$  é equivalente a (1.17), pois já que os vetores  $\tau$  não apresentam "realidade física", no sentido de que são elementos de uma variedade de configuração que não é o espaço  $\mathbb{R}^3$ , estes podem ser compreendidos como variações virtuais das posições, conceito com o qual o cálculo variacional chega ao mesmo princípio. Esta abordagem está em [2], Cap. IV.

<sup>6</sup>A inversibilidade é atestada pela exigência de que a matriz formada pelos elementos  $\partial q^i / \partial x^j$  seja não singular, onde  $x^j$  são as  $3N$  componentes dos vetores  $\mathbf{x}_I$ .



$$\mathbf{x}_I = \mathbf{x}_I(q^i, t) \quad \{I\} = \{1, \dots, N\}. \quad (1.19)$$

Além disso, assumimos que  $q^i$  sejam funções contínuas e pelo menos duplamente diferenciáveis. Ainda, as derivadas parciais de  $\mathbf{x}_I$  com relação às coordenadas generalizadas são tangentes à superfície, de modo que podemos escrever  $\tau_I$  como combinações lineares<sup>7</sup>

$$\tau_I = \epsilon^i \frac{\partial \mathbf{x}_I}{\partial q^i}. \quad (1.20)$$

Usando (1.20), podemos escrever (1.17) por

$$\sum_I (m_I \ddot{\mathbf{x}}_I - \mathbf{F}_I) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_I}{\partial q^i} = 0. \quad (1.21)$$

Temos:

$$-\sum_I \mathbf{F}_I \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_I}{\partial q^i} = \sum_I \nabla_I V \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_I}{\partial q^i} = \frac{\partial V}{\partial q^i}, \quad (1.22)$$

onde usamos a condição de que as forças impressas são conservativas<sup>8</sup>. Também podemos calcular

$$\sum_I m_I \ddot{\mathbf{x}}_I \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_I}{\partial q^i} = \sum_I m_I \frac{d}{dt} \left( \dot{\mathbf{x}}_I \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_I}{\partial q^i} \right) - \sum_I m_I \dot{\mathbf{x}}_I \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{x}_I}{\partial q^i}, \quad (1.23)$$

onde

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{x}_I}{\partial q^i} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}_I}{\partial q^i \partial q^j} \dot{q}^j + \frac{\partial^2 \mathbf{x}_I}{\partial t \partial q^i} = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_I}{\partial q^i}. \quad (1.24)$$

Para o segundo termo à direita de (1.23), usaremos (1.24):

$$\sum_I m_I \dot{\mathbf{x}}_I \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{x}_I}{\partial q^i} = \sum_I m_I \dot{\mathbf{x}}_I \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_I}{\partial q^i} = \frac{\partial}{\partial q^i} \left( \sum_I \frac{1}{2} m_I \dot{\mathbf{x}}_I^2 \right) = \frac{\partial T}{\partial q^i}, \quad (1.25)$$

onde definimos a função

$$T(\dot{\mathbf{x}}_I) = \sum_I \frac{1}{2} m_I \dot{\mathbf{x}}_I^2, \quad (1.26)$$

que vem a ser a energia cinética do sistema. Para o primeiro termo da direita de (1.23),

$$\sum_I m_I \frac{d}{dt} \left( \dot{\mathbf{x}}_I \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_I}{\partial q^i} \right), \quad (1.27)$$

lembramos que

<sup>7</sup>A partir deste ponto passaremos a empregar a convenção de soma, na qual a ocorrência de índices duplos pressupõem a soma nos valores do índice, salvo em situações como a equação (1.17), em que será explícita a não utilização da convenção.

<sup>8</sup>Encontramos o Princípio de *D'Alembert* a partir de uma análise sobre forças conservativas, mas na verdade ele tem um caráter universal. Vale também para forças não conservativas. No entanto, os princípios variacionais mais modernos exigem que as forças tenham caráter monogênico. Assim, a condição de que as forças impressas sejam conservativas consiste, aqui, em um passo fundamental.

$$\frac{\partial \mathbf{x}_I}{\partial q^i} = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_I}{\partial \dot{q}^i} \quad (1.28)$$

e, portanto, esse termo equivale a

$$\sum_I m_I \frac{d}{dt} \left( \dot{\mathbf{x}}_I \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_I}{\partial \dot{q}^i} \right) = \frac{d}{dt} \left( \sum_I m_I \dot{\mathbf{x}}_I \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_I}{\partial \dot{q}^i} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \right). \quad (1.29)$$

Com os resultados acima, (1.21) toma a forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} + \frac{\partial V}{\partial q^i} = 0, \quad (1.30)$$

onde introduziremos a Função de *Lagrange* ou **Lagrangiana**

$$L(q, \dot{q}, t) = T(\dot{q}) - V(q, t), \quad (1.31)$$

com a qual as equações (1.30) ficam

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0. \quad (1.32)$$

As equações (1.32) são escritas como as equações de *Euler-Lagrange*. A familiaridade entre esta equação e a segunda lei de Newton pode ser mais bem explicitada com a forma

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{q}^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} \dot{q}^j - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} \ddot{q}^j = 0. \quad (1.33)$$

Aqui, definimos

$$a_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}, \quad (1.34)$$

e

$$b_i = b_i(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{q}^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} \dot{q}^j, \quad (1.35)$$

para escrever (1.33) como

$$a_{ij} \ddot{q}^j = b_i, \quad (1.36)$$

que vem a ser uma forma das Equações de Newton em coordenadas generalizadas.

A equação (1.36) tem uma representação matricial. Neste caso podemos escrevê-la

$$A \cdot \ddot{Q} = B,$$

em que  $A$ ,  $Q$  e  $B$  são matrizes. A matriz mais importante desse conjunto é  $A$ , chamada **Matriz Hessiana**. Seus elementos são  $a_{ij}$  de (1.36). Note que a solução para esta equação é direta se  $A$  tiver inversa. Neste caso o sistema é dito **Regular**. Para ser regular, a Lagrangiana do sistema deve satisfazer a condição

$$\det A \neq 0. \quad (1.37)$$

Sistemas regulares são integrados diretamente com (1.36):

$$\ddot{q}^j = (a^{-1})^{ji} b_i. \quad (1.38)$$

Contudo, na inexistência da inversa da matriz Hessiana, caso em que  $\det A = 0$ , algumas coordenadas não serão dinâmicas, pois as equações de *Euler-Lagrange* dessas coordenadas não serão de segunda ordem. Nessas coordenadas as equações de movimento resultarão, como no caso do formalismo Newtoniano, em relações entre coordenadas. Se a matriz Hessiana tem posto  $P^9$ , o número de equações relacionando as coordenadas, vínculos, será  $K = n - P$ . Estes são chamados **Sistemas Singulares**<sup>10</sup>.

Vamos precisar de alguns objetos geométricos a partir deste ponto. Até agora tudo que foi usado em geometria foi a definição da Variedade de Configuração  $\mathbb{Q}$  a partir do espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^n$ . De fato, variedades diferenciáveis podem ser sempre tomadas como sub-variedades de algum  $\mathbb{R}^m$ , embora nem sempre seja evidente o valor de  $m$  para cada caso. No entanto, há um meio consistente de construir variedades a partir de  $\mathbb{Q}$  sem levar em conta o fato de que esta é imersa em alguma variedade de dimensão superior. Isto será necessário principalmente porque usaremos objetos geométricos definidos em espaços diferentes de  $\mathbb{Q}$ , embora a física se dê completamente nesta variedade.

Outro fato é que tanto a função de *Lagrange* quanto as Equações de *Euler-Lagrange* não dependem da escolha de um particular sistema de coordenadas. Esta é a razão da utilização de coordenadas generalizadas. No entanto, as equações (1.32) não são escritas explicitamente independente das coordenadas. Desejamos por argumentos geométricos chegar a uma forma das Equações de *Euler-Lagrange* independente do sistema de coordenadas.

#### 1.2.4 Vetores

Em  $\mathbb{Q}$  podemos definir sistemas de coordenadas. Por ser uma variedade diferenciável não é possível, no geral, construir um único sistema de coordenadas que cubra todo o espaço. O melhor que se pode fazer é definir regiões em  $\mathbb{Q}$  e atribuir sistemas de coordenadas para cada região. Para cobrir toda a variedade os diferentes sistemas de coordenadas podem ser relacionados por transformações de coordenadas. O conjunto de coordenadas que se pode atribuir a  $\mathbb{Q}$  são as coordenadas generalizadas, representadas por  $q^i$ . Genericamente, quando usarmos as coordenadas generalizadas para representar um sistema de coordenadas já escolhido para a variedade, essas serão representadas pelo conjunto  $\{q^i\}$ <sup>11</sup>.

Para cada ponto de  $\mathbb{Q}$  podemos definir um **Espaço Vetorial** que chamaremos  $\mathbf{T}_q\mathbb{Q}$ , cujos elementos são **vetores**<sup>12</sup>. No sistema de coordenadas  $\{q^i\}$ , um vetor em  $\mathbf{T}_q\mathbb{Q}$  se escreve

<sup>9</sup>O posto da matriz Hessiana corresponde ao número de graus de liberdade livres do sistema, ou seja, ao número de seus autovalores não nulos.

<sup>10</sup>Trataremos os sistemas singulares a partir do próximo capítulo pelo método de *Hamilton-Jacobi*. Existem outros formalismos bem conhecidos para os casos singulares. O pioneiro foi Dirac, [3], que utiliza o formalismo Hamiltoniano. Ver apêndice A.

<sup>11</sup>Os argumentos que seguem podem ser automaticamente generalizados para uma variedade  $\mathcal{M}$  geral. Ver [5] Cap. 1.

<sup>12</sup>Ou vetores contravariantes, na literatura clássica.

como<sup>13</sup>

$$u = u^i \frac{\partial}{\partial q^i} = u^i \partial_i, \quad (1.39)$$

onde  $u^i$  são as componentes de  $u$  nesse sistema de coordenadas<sup>14</sup>. Os vetores são explicitamente descritos por suas componentes quando definimos o sistema de coordenadas e sua base. A base escrita dessa forma é chamada base coordenada e, no caso de (1.39), é definida pelo conjunto de vetores  $\{\partial_i\}$ .

Definidos dessa forma, os vetores são operadores do espaço tangente que atuam em funções da variedade em determinado ponto  $q$  e resultam em números reais. Os vetores obedecem à regra de Leibniz,

$$u(fg) = f|_q u(g) + g|_q u(f) \quad (1.40)$$

e são lineares.

Dada uma curva suave  $C(t)$  em  $\mathbb{Q}$ , podemos definir o vetor

$$v \equiv \frac{d}{dt} = \frac{dq^i}{dt} \partial_i \quad (1.41)$$

onde reconhecemos as componentes da velocidade generalizada

$$\dot{q}^i = \frac{dq^i}{dt}. \quad (1.42)$$

Assim, as velocidades são vetores em  $\mathbf{T}_q\mathbb{Q}$  e são tangentes a  $\mathbb{Q}$  a cada ponto da curva  $C(t)$ .

As Equações de *Euler-Lagrange* são equações diferenciais ordinárias de segunda ordem nas coordenadas, como se mostra explicitamente em (1.33), onde as variáveis dinâmicas, ou as posições generalizadas, são elementos de  $\mathbb{Q}$ . É possível escrever essas equações na forma de equações de primeira ordem se considerarmos equivalência entre as coordenadas e as velocidades generalizadas. No entanto, as velocidades não são elementos de  $\mathbb{Q}$ , mas do espaço  $\mathbf{T}_q\mathbb{Q}$ . Podemos construir uma variedade diferenciável cujas coordenadas são as componentes das velocidades. A esta variedade daremos o mesmo símbolo de seu correspondente espaço vetorial,  $\mathbf{T}_q\mathbb{Q}$ . Suas coordenadas serão genericamente representadas pelo conjunto  $\{\dot{q}^i\}$ .

A função Lagrangiana, por exemplo, que é função das coordenadas e das velocidades, é uma função na variedade definida por  $(\mathbf{T}_q\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Q})$ , a **Variedade Tangente**  $\mathbf{T}\mathbb{Q}$  e nela estão contidas as coordenadas e as velocidades<sup>15</sup>. Assim, as coordenadas de  $\mathbf{T}\mathbb{Q}$  serão o conjunto  $\{q^i, \dot{q}^i\}$ .

As Equações de *Euler-Lagrange* escritas em  $\mathbf{T}\mathbb{Q}$  são

<sup>13</sup>Usaremos a partir deste ponto a notação abreviada  $\partial_i \equiv \partial/\partial q^i$ .

<sup>14</sup>Uma transformação de coordenadas modifica as componentes de um vetor de forma bem definida. Dada a transformação  $\{q\} \rightarrow \{q'\}$  que vem a ser um mapa do tipo  $q' = q'(q)$ , temos  $\partial'_i = (\partial q^j / \partial q'^i) \partial_j$  e, por consequência,  $u'^j = (\partial q'^j / \partial q^i) u^i$ .

<sup>15</sup>O tempo continua no papel de parâmetro das curvas em  $\mathbf{T}\mathbb{Q}$ , mas é direta a generalização do formalismo para o tempo como variável dinâmica. Por enquanto vamos ignorar qualquer dependência explícita no tempo da Lagrangiana.

$$\dot{q}^i = \frac{dq^i}{dt} \quad (1.43)$$

$$\frac{d\dot{q}^i}{dt} = (a^{-1})^{ji} b_j, \quad (1.44)$$

onde (1.43) é simplesmente a definição das componentes das velocidades e (1.44) é apenas a equação (1.38), em que pode-se perceber as componentes da matriz Hessiana definidas em (1.34) e as componentes vetoriais de  $B$  definidas por (1.35)<sup>16</sup>.

Na dinâmica em  $\mathbf{T}\mathbb{Q}$  não há diferença entre as coordenadas e as velocidades como há na descrição em  $\mathbb{Q}$ . Assim, é mais conveniente escrever as coordenadas de forma unificada. Para tanto usaremos as variáveis  $\eta$ , onde introduziremos índices gregos que correm de 1 a  $2n$ . A variável  $\eta^\alpha$  com  $\alpha \in \{1, \dots, n\}$  correspondem aos  $q^i$  e  $\alpha \in \{n+1, \dots, 2n\}$  correspondem aos  $\dot{q}^i$ :

$$\{\eta^\alpha\} = \{q^i, \dot{q}^i\} \quad \alpha \in \{1, \dots, 2n\}. \quad (1.45)$$

Ou seja,  $\eta$  são as coordenadas de  $\mathbf{T}\mathbb{Q}$ . Com essas variáveis é possível escrever as equações (1.43) e (1.44) na forma

$$\frac{d\eta^\alpha}{dt} = f^\alpha(\eta). \quad (1.46)$$

A equação (1.46) define um **Campo Vetorial** em  $\mathbf{T}\mathbb{Q}$ , que chamaremos  $\Delta$ . Este campo faz parte de um espaço vetorial definido a partir de  $\mathbf{T}\mathbb{Q}$  ponto a ponto, assim como  $\mathbf{T}_q\mathbb{Q}$  é definido a partir de  $\mathbb{Q}$ . Este espaço também é tangente à variedade de origem (tangente da tangente), de modo que o chamaremos  $\mathbf{T}_\eta^2\mathbb{Q}$ . O campo  $\Delta$  é definido por

$$\Delta \equiv f^\alpha \frac{\partial}{\partial \eta^\alpha} = f^\alpha \partial_\alpha. \quad (1.47)$$

Vamos analisar a evolução de uma variável dinâmica  $F(\eta)$ . Ela pode ser escrita em  $\mathbf{T}\mathbb{Q}$  por

$$\dot{F}(\eta) = \dot{\eta}^\alpha \partial_\alpha F. \quad (1.48)$$

Com o auxílio de (1.46):

$$\dot{F}(\eta) = f^\alpha \partial_\alpha F. \quad (1.49)$$

Podemos escrever finalmente, em vista da definição (1.47),

$$\dot{F} = \Delta(F), \quad (1.50)$$

onde  $\Delta(F)$  significa o vetor  $\Delta$  aplicado em  $F$ . Assim, a equação (1.46) pode ser escrita como

$$\frac{d\eta^\alpha}{dt} = \Delta(\eta^\alpha). \quad (1.51)$$

---

<sup>16</sup>Ver [1], Sec. 2.4.

### 1.2.5 Covetores

Um **covetor**<sup>17</sup>  $u^*$  é linear e age em campos vetoriais em  $\mathbf{T}_\eta^2\mathbb{Q}$  levando-os a funções em  $\mathbf{T}\mathbb{Q}$ . Assim como para cada ponto  $\eta$  de  $\mathbf{T}\mathbb{Q}$  definimos um espaço vetorial, também podemos definir um espaço do qual são elementos os covetores de  $\mathbf{T}\mathbb{Q}$ , o **Espaço Dual**  $\mathbf{T}_\eta^{2*}\mathbb{Q}$ .

$\mathbf{T}_\eta^2\mathbb{Q}$  e  $\mathbf{T}_\eta^{2*}\mathbb{Q}$  são ambos espaços vetoriais relacionados a  $\mathbf{T}\mathbb{Q}$ . Assim, dado um sistema de coordenadas  $\{\eta^\alpha\}$  em  $\mathbf{T}\mathbb{Q}$ , induz-se uma base coordenada  $\{\partial_\alpha\}$  em  $\mathbf{T}_\eta^2\mathbb{Q}$ . O espaço dual também tem uma base,  $\{d\eta^\alpha\}$ , definida por

$$d\eta^\alpha \partial_\beta = \delta_\beta^\alpha, \quad (1.52)$$

onde à direita de (1.52) temos a delta de Kronecker. Assim, podemos escrever um covetor  $u^*$  por<sup>18</sup>

$$u^* = u_\alpha d\eta^\alpha. \quad (1.53)$$

A diferencial de uma função  $F(\eta)$  em  $\mathbf{T}\mathbb{Q}$  é um covetor:

$$dF = \partial_\alpha F d\eta^\alpha. \quad (1.54)$$

A ação de um covetor em um campo vetorial vem a ser uma generalização de um produto escalar. Por exemplo, podemos escrever

$$dF(\Delta) = \partial_\alpha F f^\beta \cdot d\eta^\alpha \partial_\beta = f^\alpha \partial_\alpha F = \frac{d\eta^\alpha}{dt} \partial_\alpha F, \quad (1.55)$$

ou,

$$\dot{F} = \Delta(F) = dF(\Delta). \quad (1.56)$$

### 1.2.6 Formas Diferenciais

As **formas diferenciais** são generalizações dos covetores. Consistem em objetos tensoriais de forma<sup>19</sup>

$$T = T_{ij\dots m} dq^i dq^j \dots dq^m. \quad (1.57)$$

Por exemplo, uma forma de segunda ordem, ou **2-forma**, é escrita por

$$A = a_{ij} dq^i dq^j. \quad (1.58)$$

<sup>17</sup>Na literatura clássica, vetores covariantes.

<sup>18</sup>As componentes dos covetores, a exemplo dos vetores, também se transformam de forma bem definida sob uma transformação de coordenadas. Dada a transformação  $q' = q'(q)$ , temos  $dq'^i = (\partial q'^i / \partial q^j) dq^j$  e, por consequência,  $u'_j = (\partial q^i / \partial q'^j) u_i$ .

<sup>19</sup>As leis de transformação para esses objetos podem ser facilmente obtidas a partir das leis de transformações dos covetores.

Ser de segunda ordem indica que essa forma é escrita, definido um sistema de coordenadas, por um polinômio de segundo grau em  $dq$ . A forma (1.57) tem ordem  $n$  se as componentes de  $T$  tiverem  $n$  índices. Formam um polinômio de grau  $n$  em  $dq$ . Assim como os covetores, as formas atuam sobre vetores.  **$n$ -formas** são operadores  $n$ -lineares. Vamos tomar um exemplo de uma forma de 3ª ordem:

$$Q = Q_{ijk} dq^i dq^j dq^k. \quad (1.59)$$

Essa 3-forma pode atuar em 3 vetores de componentes  $x^i, y^i, z^i$ :

$$Q(X, Y, Z) = Q_{ijk} x^i y^j z^k, \quad (1.60)$$

operação que resulta em um escalar. Então, uma 3-forma mapeia trios de vetores em funções em  $\mathbb{Q}$ . No entanto, podemos fazê-la agir em duplas de vetores:

$$Q(X, Y, \bullet) = Q_{ijk} x^i y^j dq^k, \quad (1.61)$$

que vem a ser um covetor. Se agir sobre um único vetor:

$$Q(X, \bullet, \bullet) = Q_{ijk} x^i dq^j dq^k, \quad (1.62)$$

temos uma 2-forma.

Assim,  $n$ -formas atuam sobre  $m$  vetores, tal que  $m \leq n$ , e resultam em formas de ordem  $n - m$ . Covetores são formas diferenciais de primeira ordem e funções escalares são 0-formas.

### 1.2.7 A Derivada de Lie

A derivada temporal de um objeto ao longo de um campo vetorial recebe o nome de **Derivada de Lie**<sup>20</sup>. Vimos pela equação (1.56) que sendo este objeto uma função em  $\mathbf{TQ}$ , esta derivada é simplesmente a aplicação de um campo vetorial na função. O resultado neste caso é uma função em  $\mathbf{TQ}$ . Definiremos a derivada de Lie por

$$\mathbf{L}_X(f) = X(f), \quad (1.63)$$

onde  $f$  é uma função e  $X$  um campo vetorial. Sejam  $S$  e  $T$  funções, vetores ou covetores ligados a uma variedade diferenciável  $\mathcal{M}$  e  $F$  uma função em  $\mathcal{M}$ , as propriedades da derivada de Lie são:

1.  $\mathbf{L}_X$  é um operador linear:  $\mathbf{L}_X(\lambda_1 S + \lambda_2 T) = \lambda_1 \mathbf{L}_X(S) + \lambda_2 \mathbf{L}_X(T)$  onde  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
2.  $\mathbf{L}_X$  obedece à regra de Leibniz:  $\mathbf{L}_X(T \times S) = \mathbf{L}_X(T) \times S + T \times \mathbf{L}_X(S)$ .
3.  $\mathbf{L}_X(dF) = d(\mathbf{L}_X F)$ .

---

<sup>20</sup>A definição mais formal pode ser encontrada na referência [5], Cap. 4. Entretanto, nos contentaremos com uma definição mais intuitiva, apresentada aqui e em [1], Sec. 3.4.

$$4. \mathbf{L}_X(\partial/\partial x)F = -(\partial/\partial x)(\mathbf{L}_X F)^{21}.$$

Seja um covetor  $u^* = u_\alpha d\eta^\alpha$ . A derivada de Lie deste covetor com relação a um campo vetorial  $\Delta = v^\beta \partial_\beta$  é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_\Delta(u^*) &= \mathbf{L}_\Delta(u_\alpha d\eta^\alpha) = \mathbf{L}_\Delta(u_\alpha) d\eta^\alpha + u_\alpha \mathbf{L}_\Delta(d\eta^\alpha) = \\ &= \Delta(u_\alpha) d\eta^\alpha + u_\alpha d[\Delta(\eta^\alpha)]. \end{aligned} \quad (1.64)$$

Ou seja,

$$\mathbf{L}_\Delta(u^*) = v^\beta (\partial_\beta u_\alpha) d\eta^\alpha + u_\alpha (\partial_\beta v^\alpha) d\eta^\beta, \quad (1.65)$$

que constitui um covetor.

Agora consideremos um campo vetorial definido por

$$\Lambda = w^\alpha \partial_\alpha. \quad (1.66)$$

A derivada de Lie deste campo com relação a  $\Delta$  é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_\Delta(\Lambda)F &= \mathbf{L}_\Delta(w^\alpha \partial_\alpha)F = \mathbf{L}_\Delta(w^\alpha) \partial_\alpha F + w^\alpha \mathbf{L}_\Delta(\partial_\alpha)F = \\ &= \Delta(w^\alpha) \partial_\alpha F - w^\alpha \partial_\alpha(\Delta F). \end{aligned} \quad (1.67)$$

Dessa forma,

$$\mathbf{L}_\Delta(\Lambda)F = v^\beta (\partial_\beta w^\alpha) \partial_\alpha F - w^\alpha (\partial_\alpha v^\beta) \partial_\beta F. \quad (1.68)$$

Esta equação pode ainda ser escrita por

$$\mathbf{L}_\Delta(\Lambda)F = \mathbf{L}_\Delta \mathbf{L}_\Lambda F - \mathbf{L}_\Lambda \mathbf{L}_\Delta F = [\Delta, \Lambda]F. \quad (1.69)$$

A estrutura que aparece à direita de (1.69) é o comutador de Lie. É definido por

$$\mathbf{L}_X(Y) = [X, Y] = XY - YX, \quad (1.70)$$

com  $X$  e  $Y$  campos vetoriais.

### 1.2.8 Forma das Equações de *Euler-Lagrange* Independente das Coordenadas

Vamos partir da equação (1.33):

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{q}^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} \dot{q}^j - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} \ddot{q}^j = 0.$$

---

<sup>21</sup>Esta propriedade pode ser deduzida pela aplicação da derivada de Lie em um produto escalar, usando as propriedades 2 e 3. Note a diferença entre  $\mathbf{L}_X(\partial/\partial x)F$  e  $\mathbf{L}_X(\partial F/\partial x)$ .



Podemos escrevê-la na forma

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial L}{\partial t} dt - \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \left\{ \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial q^j} \dot{q}^j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \ddot{q}^j \right\} dq^i = 0. \quad (1.71)$$

Vamos escrever o campo vetorial definido por (1.47) na forma

$$\Delta(L) = \dot{\eta}^\alpha \partial_\alpha L = \frac{\partial L}{\partial t} + \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial q^i} + \ddot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \mathbf{L}_\Delta(L). \quad (1.72)$$

Assim, (1.71) fica

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial L}{\partial t} dt - \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \{ \mathbf{L}_\Delta(L) \} dq^i = 0. \quad (1.73)$$

No entanto,

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \{ \mathbf{L}_\Delta(L) \} dq^i = \mathbf{L}_\Delta \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) dq^i = \mathbf{L}_\Delta \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} dq^i \right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} dq^i. \quad (1.74)$$

Desta forma temos a equação

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial L}{\partial t} dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} dq^i - \mathbf{L}_\Delta \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} dq^i \right) = 0. \quad (1.75)$$

O objeto alvo da ação da derivada de *Lie* na equação (1.75) é um covetor, o **momento** conjugado. Ele é definido por  $p = p_i dq^i$  cujas componentes são

$$p_i \equiv a_{ij} \dot{q}^j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}. \quad (1.76)$$

Por uma simples diferenciação da equação (1.76) com relação a  $\dot{q}$  notamos que  $a_{ij}$  são as componentes da matriz Hessiana. É hora de elucidar um pouco melhor o papel da matriz Hessiana. Na representação matricial poderíamos escrever  $P = A \cdot \dot{Q}$  no lugar de (1.76). No entanto, em nosso ponto de vista geométrico, os elementos da matriz Hessiana podem ser vistos como componentes de uma 2-forma. A forma Hessiana é definida por

$$A = a_{ij} dq^i dq^j. \quad (1.77)$$

A transformação (1.76) é escrita em sua versão geométrica como

$$p = A(\bullet, \Delta). \quad (1.78)$$

Também podemos identificar nos três primeiros termos de (1.75) a diferencial de  $L$ . Assim, as Equações de *Euler-Lagrange* tornam-se

$$dL - \mathbf{L}_\Delta(p) = 0. \quad (1.79)$$

Fomos, portanto, capazes de escrever as equações de movimento de forma independente do sistema de coordenadas em  $\mathbf{TQ}$ .

### 1.2.9 Transformação de Coordenadas em $\mathbb{Q}$

O motivo pelo qual a derivada de Lie é importante vem a ser o fato de que ela traz informações sobre as simetrias que existem em uma variedade diferenciável, e as simetrias estão sempre ligadas, no caso de sistemas dinâmicos, a constantes do movimento. Por exemplo, dado o campo vetorial  $\Delta$  cujas componentes são definidas pelas equações de movimento (1.46) e uma função escalar  $F$  em  $\mathbf{TQ}$ , se  $\mathbf{L}_\Delta(F) = 0$ ,  $F$  é uma constante do movimento. Ser uma constante de movimento significa geometricamente que a função  $F$  não sofre alteração sobre a trajetória em  $\mathbf{TQ}$  definida pelo campo  $\Delta$ .

O campo dinâmico  $\Delta$  não é o único que pode gerar uma dinâmica em  $\mathbf{TQ}$ . Um campo genérico  $X = x^\alpha \partial_\alpha$  gera sua própria dinâmica, representada pela curvas que são soluções da equação

$$\frac{d\eta^\alpha}{d\epsilon} = x^\alpha. \quad (1.80)$$

Se  $\mathbf{L}_X(F) = 0$ , a função  $F$  não varia sobre a curva que é solução de (1.80).  $X$  não define o movimento do sistema, mas representa um grupo de transformações na variedade. Por exemplo, o grupo de transformações representado por  $\Delta$  é definido por

$$\psi_t^\Delta \eta(0) = \eta(t), \quad (1.81)$$

e é o grupo que determina a evolução temporal das variáveis<sup>22</sup>  $\eta$ . Assim, ser constante do movimento é na verdade ser invariante ao grupo de transformações definido por (1.81).

Se  $\mathbf{L}_X(F) = 0$  para algum campo vetorial  $X$ , então  $F$  é invariante ao grupo de transformações definido por

$$\psi_\epsilon^X \eta = \eta(\epsilon). \quad (1.82)$$

Portanto,  $\psi_\epsilon^X$  é o grupo de transformações que gera em  $\mathbf{TQ}$  a curva solução de (1.80) parametrizada por  $\epsilon$ .

Se a Lagrangiana  $L(\eta)$  for invariante sob um grupo de transformações  $\psi_\epsilon^X$ , ou seja, se

$$\mathbf{L}_X(L) = 0, \quad (1.83)$$

é possível mostrar que

$$\mathbf{L}_\Delta[p(X)] = 0, \quad (1.84)$$

em que  $p$  é o covetor definido por (1.78). Então, a função  $p(X)$  é uma constante do movimento.

Esta é a forma geométrica do **Teorema de Noether**. Encontrar o vetor  $X$  solução de (1.84) significa encontrar as curvas pelas quais a Lagrangiana não se altera. No caso da dinâmica Lagrangiana esse campo é aquele para o qual  $\psi_\epsilon^X$  é o grupo de **Transformações**

---

<sup>22</sup>Os índices  $\Delta$  e  $t$  indicam respectivamente o campo vetorial gerador da transformação e o parâmetro da transformação.

**de Ponto**, que são transformações de coordenadas em  $\mathbb{Q}$ . Essas transformações geram na Lagrangiana uma modificação funcional sempre da forma

$$\bar{L} = L - \Delta(F), \quad (1.85)$$

em que  $F$  é uma função escalar que depende da forma explícita da transformação.

### 1.3 Formalismo Hamiltoniano

Tratar a dinâmica em  $\mathbf{T}\mathbb{Q}$  é interessante do ponto de vista geométrico, mas traz poucas vantagens práticas. Uma delas é que as equações de movimento são de primeira ordem, além do fato de as trajetórias em  $\mathbf{T}\mathbb{Q}$  serem separadas, o que significa que apenas uma trajetória passa por cada ponto da variedade. As soluções formam campos de curvas. No entanto, a forma das equações de movimento depende da Lagrangiana de forma complicada e não há, no geral, uma forma de  $f^\alpha(\eta)$  explícita em  $\eta$ .

Outra grande desvantagem do ponto de vista geométrico é que as Equações de *Euler-Lagrange* escritas na forma (1.71) dependem do covetor  $p$  definido em (1.78) e este depende apenas de parte das coordenadas de  $\mathbf{T}\mathbb{Q}$ .

As equações de movimento tomam, contudo, uma forma adequada no **Formalismo Hamiltoniano**. Este formalismo descreve a dinâmica a partir das variáveis  $(q^i, p_i)$ . Não há meios de chegar ao formalismo Hamiltoniano sem passar pelo Lagrangiano. A passagem consiste em mapear as coordenadas de  $\mathbf{T}_q\mathbb{Q}$  em uma outra variedade, denominada **Variedade Cotangente**  $\mathbf{T}_q^*\mathbb{Q}$ . Esta consiste em uma **Transformação de Legendre**. Essa transformação relaciona as velocidades aos momentos pela ação da 2-forma Hessiana no campo  $\Delta$

$$p = A(\bullet, \Delta) \quad \longrightarrow \quad p_i = a_{ij}\dot{q}^j. \quad (1.86)$$

A partir de (1.86) podemos escrever as velocidades em função dos momentos, mas para tal a Hessiana precisa possuir uma inversa. A condição é dada por (1.37) e é chamada **condição Hessiana**. Se esta condição for satisfeita pela Lagrangiana podemos escrever

$$\dot{q}^i = (a^{-1})^{ij}p_j = \phi^i(q, p). \quad (1.87)$$

Neste capítulo vamos supor que a condição Hessiana é satisfeita. Revisitando as equações (1.43) e (1.44), estas podem ser escritas por

$$\frac{dq^i}{dt} = \phi^i(q^j, p_j), \quad (1.88)$$

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial q^i} L(q^j, \phi^j). \quad (1.89)$$

Devemos substituir as velocidades pelos momentos usando a equação (1.84). Para tanto precisamos calcular

$$\frac{\partial}{\partial q^i} L(q^j, p_j) = \frac{\partial}{\partial q^i} L(q^j, \phi^j) + \frac{\partial \phi^j}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial \phi^j} L(q^j, \phi^j) = \frac{\partial}{\partial q^i} L(q^j, \phi^j) + p_j \frac{\partial \phi^j}{\partial q^i}. \quad (1.90)$$

Assim,

$$\frac{\partial}{\partial q^i} L(q^j, \phi^j) = \frac{\partial}{\partial q^i} L(q^j, p_j) - p_j \frac{\partial \phi^j}{\partial q^i} = \frac{\partial}{\partial q^i} [L(q^j, p_j) - p_j \phi^j]. \quad (1.91)$$

Aqui introduz-se a Função de *Hamilton* ou **Função Hamiltoniana**  $H(q, p)$ :

$$H(q^i, p_i) \equiv p_i \phi^i - L(q^i, p_i). \quad (1.92)$$

A equação (1.91) torna-se

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial}{\partial q^i} H(q^j, p_j). \quad (1.93)$$

Esta é a equação que resulta diretamente das Equações de *Euler-Lagrange*. Há, no entanto, uma segunda equação, e para esta precisamos calcular

$$\frac{\partial}{\partial p_i} L(q^j, p_j) = \frac{\partial \phi^j}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial \phi^j} L(q^j, \phi^j) = p_j \frac{\partial \phi^j}{\partial p_i}, \quad (1.94)$$

ou,

$$\frac{\partial}{\partial p_i} [L(q^j, p_j, t) - p_j \phi^j] = -\phi^i. \quad (1.95)$$

Usando (1.88) e (1.92):

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial}{\partial p_i} H(q^j, p_j). \quad (1.96)$$

A equação (1.96) é uma identidade, assim como era a equação (1.43). Temos assim o sistema de equações

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (1.97)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \quad (1.98)$$

que são as **Equações Canônicas de Hamilton**. Elas possuem a forma desejável para um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Assim, há mais uma vez a introdução de  $2n$  variáveis, desta vez  $q^i$  e  $p_i$ , em vez das originais  $n$  variáveis  $q^i$  de  $\mathbb{Q}$ .

### 1.3.1 Formalismo Simplético Hamiltoniano

A função de *Hamilton* desempenha o mesmo papel da Lagrangiana na dinâmica. Mas diferentemente de  $L$ ,  $H$  é uma função em uma variedade que agrega as coordenadas generalizadas e os momentos generalizados. Esta variedade é o produto direto  $(\mathbf{T}_q^* \mathbb{Q} \otimes \mathbb{Q})$ ,

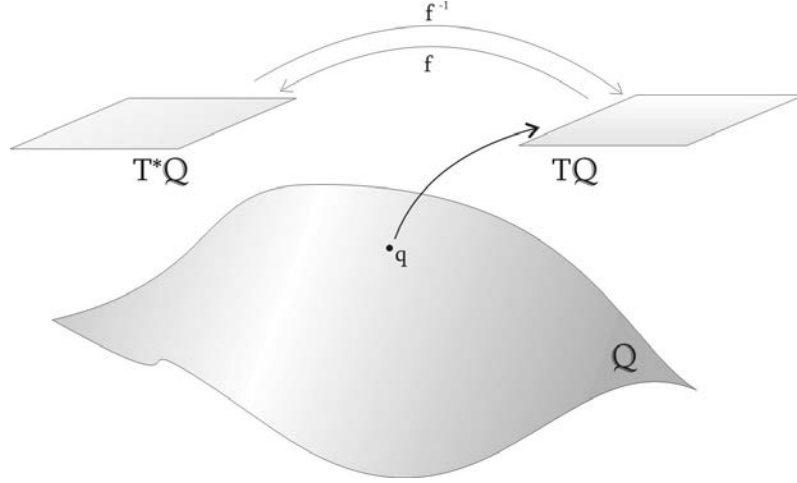


Figura 1.2: A variedade de configuração  $\mathbb{Q}$  e suas variedades tangente  $\mathbf{TQ}$  e contangente  $\mathbf{T}^*\mathbb{Q}$  para um ponto  $q$ . A função  $f$  que leva pontos de  $\mathbf{TQ}$  em  $\mathbf{T}^*\mathbb{Q}$  é representação da transformação de *Legendre*. A inversa  $f^{-1}$  nem sempre é definida para todos os pontos de  $\mathbf{T}^*\mathbb{Q}$ , situação que ocorre quando o sistema possui vínculos.

chamado **Espaço de Fase**  $\mathbf{T}^*\mathbb{Q}$ . Esta variedade tem como pontos as coordenadas e os momentos generalizados.

Assim como na dinâmica Lagrangiana, se os momentos e as coordenadas são simplesmente coordenadas em  $\mathbf{T}^*\mathbb{Q}$ , não há motivos para tratá-los de modo distinto. Introduzimos então as variáveis  $\xi$ ,

$$\{\xi^\alpha\} = \{q^i, p_i\} \quad \alpha \in \{1, \dots, 2n\}. \quad (1.99)$$

Ou seja,  $\xi$  são as coordenadas do espaço de fase e abrigam  $q$  e  $p$ . Com essas variáveis é possível escrever as equações de *Hamilton* na forma

$$\omega_{\alpha\beta} \dot{\xi}^\beta = \partial_\alpha H. \quad (1.100)$$

O objeto cujas componentes são os elementos  $\omega_{\alpha\beta}$  constituem uma forma de segunda ordem em  $\mathbf{T}^*\mathbb{Q}$ . É a **forma simplética** definida por

$$\Omega = \omega_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta. \quad (1.101)$$

As propriedades da forma simplética são:

1. Antissimetria:  $\Omega(X, Y) = -\Omega(Y, X)$ , ou,  $\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}$ .
2. Não degenerescência:  $\Omega(X, Y) = 0$  para qualquer  $X$  se e somente se  $Y = 0$ .
3.  $\Omega\Omega^* = \Omega^2 = -1$ , ou nas componentes,  $\omega_{\alpha\beta} \omega^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma$ .
4.  $\Omega$  é dita fechada:  $d\Omega = 0$ <sup>23</sup>.

<sup>23</sup>A operação  $d$  é, neste caso, uma **derivação exterior**, que não definimos no texto pela razão de que ela só aparecerá aqui. A diferencial de um escalar é um caso particular da derivada exterior.

As propriedades acima qualificam uma estrutura como simplética. A propriedade 2 permite definir o dual da 2-forma simplética por

$$\Omega^* = \omega^{\alpha\beta} \partial_\alpha \times \partial_\beta, \quad (1.102)$$

que vem a ser um tensor do tipo  $(2, 0)$ . Com  $\Omega^*$  a equação (1.100) pode ser reescrita:

$$\dot{\xi}^\alpha = \omega^{\alpha\beta} \partial_\beta H. \quad (1.103)$$

Ora, as equações dinâmicas escritas com a forma (1.103) definem um campo vetorial no espaço de fase  $\mathbf{T}^*\mathbb{Q}$ . Chamaremos este campo de  $\Delta$  e ele é descrito nas coordenadas  $\{\xi^\alpha\}$  por

$$\Delta = \omega^{\alpha\beta} \partial_\beta H \partial_\alpha = \dot{\xi}^\alpha \partial_\alpha. \quad (1.104)$$

Note que podemos escrever as equações (1.100) com o auxílio de  $\Omega$ :

$$\Omega(\bullet, \Delta) - dH = 0, \quad (1.105)$$

onde  $dH = \partial_\alpha H d\xi^\alpha$ . A equação (1.105) representa as equações canônicas escritas independentes das coordenadas.

### 1.3.2 Os Parênteses de Poisson

Mesmo sem resolver as equações de movimento é possível escrever a evolução de uma variável dinâmica  $f(\xi^\alpha)$  em  $\mathbf{T}^*\mathbb{Q}$ :

$$\mathbf{L}_\Delta(f) = \dot{\xi}^\alpha \partial_\alpha f = \Delta(f).$$

Usando (1.103),

$$\mathbf{L}_\Delta(f) = (\partial_\alpha f) \omega^{\alpha\beta} (\partial_\beta H). \quad (1.106)$$

A estrutura que aparece no lado direito de (1.106) é chamada **Parênteses de Poisson**, (PP), definido por

$$\{f, H\} = (\partial_\alpha f) \omega^{\alpha\beta} (\partial_\beta H). \quad (1.107)$$

Desta feita,

$$\mathbf{L}_\Delta(f) = \{f, H\}. \quad (1.108)$$

A equação (1.108) descreve a variação da variável dinâmica  $f(\xi)$  na curva integral solução da equação

$$\dot{\xi}^\alpha = \omega^{\alpha\beta} \partial_\beta H. \quad (1.109)$$

Mas de modo análogo à dinâmica Lagrangiana, o campo  $\Delta$  não é o único gerador de curvas em  $\mathbf{T}^*\mathbb{Q}$ . Dado um campo vetorial  $X = x^\alpha \partial_\alpha$ , ele também gera trajetórias descritas por

$$\frac{d\xi^\alpha}{d\epsilon} = x^\alpha. \quad (1.110)$$

Para que  $X$  seja Hamiltoniano, deve existir uma função  $g(\xi)$  no espaço de fase tal que suas componentes sejam dadas por

$$x^\alpha = \omega^{\alpha\beta} \partial_\beta g(\xi). \quad (1.111)$$

A variação de uma função dinâmica  $f$  sobre a curva é dada por

$$\mathbf{L}_X(f) = X(f) = x^\alpha \partial_\alpha f = (\partial_\alpha f) \omega^{\alpha\beta} (\partial_\beta g). \quad (1.112)$$

Reconhecemos à direta os PP

$$\{f, g\} = (\partial_\alpha f) \omega^{\alpha\beta} (\partial_\beta g). \quad (1.113)$$

Assim,

$$\mathbf{L}_X(f) = \{f, g\}. \quad (1.114)$$

### 1.3.3 Transformações em $\mathbf{T}^*\mathbb{Q}$

Toda função escalar em  $\mathbf{T}^*\mathbb{Q}$  é ligada a um campo vetorial através de uma equação dinâmica com a forma

$$\frac{d\xi^\alpha}{d\epsilon} = \omega^{\alpha\beta} \partial_\beta g = \{\xi, g\}. \quad (1.115)$$

Como já mostrado no caso Lagrangiano, as trajetórias  $\xi = C(\epsilon)$  definidas por (1.115) podem ser construídas com transformações infinitesimais de coordenadas no espaço de fase. O campo vetorial  $X_g$  que é tangente a  $C$  em cada ponto está relacionado a um dado grupo de transformações que mapeia pontos de  $\mathbf{T}^*\mathbb{Q}$  em si mesmo. Algebricamente este trabalho é feito pela operação

$$\psi_\epsilon^{X_g} f = f + \frac{df}{d\epsilon} d\epsilon = \xi + \{f, g\} d\epsilon, \quad (1.116)$$

onde  $f$  é uma função escalar.

Dizemos, em função de (1.116), que  $g$  é geradora do grupo de transformações infinitesimais  $\psi^{X_g}$ . Portanto, toda função escalar é geradora de um grupo de transformações em  $\mathbf{T}^*\mathbb{Q}$ . A Hamiltoniana em particular é geradora da evolução temporal:

$$\psi_t^\Delta f = f + \{f, H\} dt. \quad (1.117)$$

A versão finita desses operadores vem a ser

$$\psi_\epsilon^{Xg} = \exp\{\bullet, g\}\epsilon. \quad (1.118)$$

Assim, as equações (1.116) e (1.117) são aproximações de primeira ordem em  $\epsilon$  da exponencial (1.118).

A ação de uma transformação altera, no geral, a forma de campos vetoriais, covetores e 2-formas<sup>24</sup>. Dado o grupo definido por (1.118), a transformação de um vetor se dá por

$$\bar{X} = \psi X \psi^{-1}. \quad (1.119)$$

Para um covetor:

$$\bar{v}(\bullet) = \psi v(\psi^{-1} \bullet \psi). \quad (1.120)$$

Uma 2-forma se transforma como

$$\bar{\Gamma}(\bullet, \bullet) = \psi \Gamma(\psi^{-1} \bullet \psi, \psi^{-1} \bullet \psi) \equiv \phi \Gamma. \quad (1.121)$$

Vamos supor que a Hamiltoniana seja invariante a um grupo de transformações cujo gerador é uma função escalar  $g$ . Assim,

$$\psi_\epsilon^{Xg} H = H \quad \text{ou} \quad \{H, g\} = 0. \quad (1.122)$$

Isto também significa que

$$\psi_t^\Delta g = g, \quad (1.123)$$

ou seja,  $g$  é uma constante do movimento. Esta é a forma Hamiltoniana do teorema de *Noether*.

Há um grupo especial de transformações para o qual

$$\phi \Omega = \Omega, \quad (1.124)$$

ou seja, não altera a estrutura simplética. É o grupo de **Transformações Canônicas**, (TC). A condição (1.124) reflete-se nos PP e atesta que transformações canônicas mantêm invariantes os PP de quaisquer duas variáveis dinâmicas. Note que essa classe de transformações é mais ampla que as transformações de ponto na dinâmica Lagrangiana, visto que estas permitem apenas transformações nas variáveis  $q$ . Já as transformações que deixam a dinâmica Hamiltoniana invariante permitem transformações de coordenadas em  $\mathbf{T}^*\mathbb{Q}$ , por exemplo a troca de coordenadas por momentos e vice-versa.

Uma TC implica em uma nova função de *Hamilton*, que difere da original pela adição de uma derivada parcial temporal de uma função de  $\mathbf{T}^*\mathbb{Q}$ . Assim,

$$K = H + \partial_t S(t, q). \quad (1.125)$$

---

<sup>24</sup>Ver [1], Sec. 5.3.2.



A função  $S$  é a geradora das transformações canônicas. Esta função tem papel fundamental no formalismo de *Hamilton-Jacobi*, de modo que estudaremos suas propriedades no próximo capítulo.

### 1.3.4 Propriedades dos Parênteses de Poisson

Relacionando funções escalares a campos vetoriais podemos reconhecer a relação entre a matriz 2-forma simplética e os PP

$$\Omega(Y_f, X_g) = \{f, g\}. \quad (1.126)$$

Esta relação é de importância fundamental. É nela que reconhecemos a estrutura simplética no espaço de fase. A partir das propriedades da 2-forma deduzimos as propriedades dos PP. As mais importantes são:

1. Antissimetria:  $\{f, g\} = -\{g, f\}$ .
2. Não degenerescência:  $\{f, g\} = 0$  se e somente se  $f = 0$  ou  $g = 0$ .
3. Identidade de Jacobi<sup>25</sup>:  $\{\{f, g\}, h\} + \{\{h, f\}, g\} + \{\{g, h\}, f\} = 0$ .

Se uma dada variedade possuir uma estrutura que obedeça as três propriedades acima dizemos que ela é imbuída de uma estrutura simplética.

Um resumo apropriado para este capítulo deve enfatizar dois aspectos. O primeiro é que uma trajetória de um sistema Hamiltoniano tem uma forma específica nas equações para o campo tangente (1.103), e que esta forma nos faz reconhecer uma estrutura simplética no espaço de fase. Para sistemas regulares a trajetória no espaço de configuração é diretamente reconhecível a partir da trajetória no espaço de fase, ou seja, as formulações Lagrangiana e Hamiltoniana são completamente equivalentes para esses sistemas.

O segundo aspecto é o papel das transformações canônicas. No próximo capítulo estudaremos o formalismo de *Hamilton-Jacobi* e, embora não tenhamos de utilizar a teoria de TC para este propósito, a descrição histórica desse formalismo, e a encontrada em quase todos os livros em mecânica clássica, passa pelo estudo dessas transformações.

Agora estamos preparados para estudar sistemas cuja matriz Hessiana é singular, ou seja, sistemas cujas relações (1.87) não podem ser escritas para todas as velocidades. Veremos que esses sistemas são vinculados, obrigados a se mover apenas em determinados sub-espacos de  $\mathbb{Q}$ .

---

<sup>25</sup>Esta propriedade vem diretamente do fato de que  $d\Omega = 0$ .

# Referências Bibliográficas

- [1] J. V. José, E. J. Saletan - *Classical Dynamics, A Contemporary Approach* - Cambridge Un. Press, (1998).
- [2] C. Lanczos - *The Variational Principles of Mechanics* - Fourth Edition, Dover Pub. Inc. New York (1986).
- [3] P. A. M. Dirac - *Lectures in Quantum Mechanics* - Yeshiva University, New York (1964).
- [4] L Faddeev, R. Jackiw, - *Phys. Rev. Lett.* **60**, 1692 (1988).
- [5] T. Frankel - *The Geometry of Physics, an Introduction* - Cambridge Un. Press (1997).

## Capítulo 2

# O Formalismo de Hamilton-Jacobi

### 2.1 Introdução

Nesta parte apresentaremos o formalismo de *Hamilton-Jacobi* tal como é desenvolvido por *Carathéodory*<sup>1</sup>, mas de forma generalizada para sistemas singulares. A forma mais comum de se encontrar a teoria de HJ na literatura é a partir da teoria das transformações canônicas desenvolvida por *Jacobi*. Nesta versão<sup>2</sup>, o formalismo Hamiltoniano é um ponto de partida, mas o método é freqüentemente confundido como uma técnica para integrar as equações de *Hamilton*. Este procedimento pode ser ilusivo quanto ao poder de síntese que de fato tem o formalismo de HJ na mecânica clássica. O procedimento de *Carathéodory* é baseado em considerações muito mais profundas, notadamente nos problemas variacionais, e sua natureza mostra claramente a conexão entre as teorias das EDP, das EDO e do cálculo variacional. O método de *Carathéodory* é freqüentemente tratado como o quadro completo do cálculo variacional, justamente porque clarifica todo este sistema de teorias.

A partir do quadro completo pretendemos, neste e no próximo capítulo, estabelecer o tratamento para sistemas singulares. Como já vimos, tais sistemas possuem Lagrangianas cuja matriz Hessiana é singular. Esse tipo de sistema viola a condição (1.37), anulando todo o desenvolvimento do primeiro capítulo entre a mecânica de *Lagrange* e a de *Hamilton*. Os métodos até então conhecidos para a análise de vínculos são os de *Dirac*<sup>3</sup>, na década de 1950, e *Faddeev* e *Jackiw*<sup>4</sup>, na década de 1980. Pretendemos mostrar também que a análise de vínculos, pelo menos para ações de primeira ordem, tende a ser mais simples e menos obscura com o método de HJ.

---

<sup>1</sup>Em [1] e [2]

<sup>2</sup>Ver, por exemplo, [3], [4] e [5].

<sup>3</sup>Ver [6].

<sup>4</sup>Ver [7].

## 2.2 O Problema Variacional

As trajetórias de sistemas dinâmicos no espaço de configuração são dadas por curvas em  $\mathbb{Q}^n$  que são determinadas por campos vetoriais tangentes. Como vimos no capítulo 1, esses campos são denominados campos Lagrangianos se as componentes dos campos forem dadas por equações de *Euler-Lagrange*, expressos na forma (1.46). Neste capítulo usaremos outra abordagem para definir um campo Lagrangiano. É a abordagem dos princípios variacionais.

O princípio variacional no qual nos apoiaremos é o **Princípio de Hamilton**. Consideremos uma curva  $C \in \mathbb{Q}^n$ , cuja forma paramétrica é dada por

$$\dot{q}^i = \dot{q}^i(t). \quad (2.1)$$

Consideraremos  $t$  como o parâmetro da curva e este é relacionado com o tempo na mecânica clássica. Vimos que essa curva é determinada por um campo vetorial dado por

$$\Delta \equiv \dot{q}^i \partial_i, \quad (2.2)$$

cujas componentes  $\dot{q}$  são as velocidades, definidas por equações do tipo

$$\dot{q}^i = \phi^i(t, q). \quad (2.3)$$

Consideremos também uma função Lagrangiana  $L(t, q, \dot{q})$ . Entre dois pontos de  $C$ , dados pelos parâmetros  $t_1$  e  $t_2$ , podemos calcular a integral

$$I_{[C]} = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q, \dot{q}) dt. \quad (2.4)$$

Os colchetes indicam que o valor da integral depende da curva na qual é calculada, ou seja,  $I$  é um funcional: relaciona curvas de  $\mathbb{Q}^n$  a números reais. A integral (2.4) é chamada de **integral fundamental** ou **ação**. Dizemos que  $\Delta$  constitui um campo Lagrangiano se a curva  $C$  for um extremo da integral fundamental, ou seja,  $\delta I = 0$  deve ser satisfeita<sup>5</sup>.

Antes de partir para uma solução do problema variacional é conveniente, para a nossa abordagem, expressá-lo de forma independente do parâmetro. Vamos incluir o tempo como uma variável dinâmica definindo um espaço de configuração estendido  $\mathbb{Q}^{n+1}$  de dimensão  $n+1$ , coberto pelo sistema de coordenadas  $\{q^\alpha\}$  com  $\{\alpha\} = \{0, \dots, n\}$ . Nesse sistema  $t = q^0$  e as demais coordenadas são expressas por  $q^i = q^{\alpha \neq 0}$ .

Vamos definir um novo parâmetro, desta vez arbitrário,  $\tau$ , de modo que a curva  $C$  em  $\mathbb{Q}^{n+1}$  tenha equações paramétricas

$$q^\alpha = q^\alpha(\tau), \quad (2.5)$$

e o campo vetorial que dá origem a  $C$  seja escrito por

$$\Delta \equiv \frac{dq^\alpha}{d\tau} \partial_\alpha, \quad (2.6)$$

---

<sup>5</sup>Ver [2], pp. 198-9, para uma definição rigorosa de extremos de um funcional.

em que

$$\frac{dq^\alpha}{d\tau} = \phi^\alpha(q). \quad (2.7)$$

Ao introduzir uma nova variável  $q^0 = t$ , assumimos que o tempo pode ser escrito em função do parâmetro  $\tau$  através da equação inversível

$$t = t(\tau). \quad (2.8)$$

Assim, a partir de (2.4) escrevemos

$$I = \int L(q^\alpha, q'^\alpha \dot{\tau}) dt, \quad (2.9)$$

em que a linha indica derivação com relação a  $\tau$ . Vamos exigir que a Lagrangiana seja uma função homogênea de primeiro grau em  $q'^6$ , ou seja,

$$L(q, \lambda q') = \lambda L(q, q'). \quad (2.10)$$

Somente assim podemos escrever

$$I = \int L(q^\alpha, q'^\alpha \dot{\tau}) dt = \int \frac{d\tau}{dt} L(q^\alpha, q'^\alpha) dt = \int L(q^\alpha, q'^\alpha) d\tau \quad (2.11)$$

e assim temos a nova integral fundamental

$$I_{[C]} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} L(q, q') d\tau. \quad (2.12)$$

O fato de a Lagrangiana ser homogênea de primeiro grau em  $\mathbb{Q}^{n+1}$  leva a uma consequência muito importante. Há o teorema de *Euler* para funções homogêneas, para o qual uma função homogênea de primeira ordem deve obedecer à condição

$$\frac{\partial L}{\partial q'^\alpha} q'^\alpha = L. \quad (2.13)$$

Note que as derivadas  $\partial L / \partial q'$  são funções homogêneas de grau zero, que são caracterizadas por obedecer à relação:

$$F(q, \lambda q') = F(q, q').$$

A reaplicação do teorema de *Euler*, desta vez considerando funções homogêneas de grau zero, mostra que

$$\frac{\partial L}{\partial q'^\alpha \partial q'^\beta} q'^\beta = 0. \quad (2.14)$$

Aqui podemos definir a forma Hessiana para  $\mathbb{Q}^{n+1}$ :

$$A = a_{\alpha\beta} dq^\alpha dq^\beta, \quad (2.15)$$

---

<sup>6</sup>Sem essa exigência não seremos capazes de definir uma integral fundamental no parâmetro  $\tau$ .

com componentes

$$a_{\alpha\beta} = \frac{\partial L}{\partial q'^{\alpha} \partial q'^{\beta}}. \quad (2.16)$$

A identidade (2.14) requer a singularidade da matriz formada com os elementos da forma Hessiana para este sistema em  $\mathbb{Q}^{n+1}$ . Assim, para Lagrangianas homogêneas de primeiro grau temos

$$\det A = 0. \quad (2.17)$$

Essa condição implica na existência de graus de liberdade vinculados na Lagrangiana. Veremos as conseqüências desse fato mais adiante.

A partir da nova ação (2.12) podemos escrever

$$I = \int L(q^\alpha, q'^\alpha) d\tau = \int \dots \int L(q^\alpha, dq^\alpha) = \int ds, \quad (2.18)$$

Note que definimos um elemento de linha  $ds$  que corresponde ao elemento de linha do espaço de configuração estendido  $\mathbb{Q}^{n+1}$ . Assim, o princípio de ação estacionária procura por geodésias (curvas de distância mínima) entre dois pontos de  $\mathbb{Q}^{n+1}$ . Esse elemento de linha denuncia a presença de uma métrica,

$$ds^2 \equiv g = g_{\alpha\beta} dq^\alpha dq^\beta. \quad (2.19)$$

Nessa formulação a ação é independente da escolha do parâmetro, mas ainda pode depender explicitamente do tempo, caso (2.4) possua essa dependência. Ainda estamos lidando com o caso geral em que  $t$  seja um parâmetro privilegiado. Nas teorias de campo relativísticas essa distinção não pode mais ser assumida, pois a integral fundamental não depende do tempo nessas teorias. A formulação independente do parâmetro é natural para as teorias de campo. Já na mecânica clássica, em que o tempo adquire stáтус absoluto, acabamos por mostrar que uma formulação independente do parâmetro, que preserve o princípio de *Hamilton*, é possível desde que a Lagrangiana seja uma função homogênea de primeiro grau nas velocidades. Tais sistemas são, como demonstrado, condenados a serem singulares.

## 2.3 Condições para Extremos da Ação

Para investigar as condições para que seja obedecido o princípio de *Hamilton*  $\delta I = 0$ , vamos considerar no espaço de configuração a existência de uma família de superfícies definida pela equação

$$S(q) = \sigma, \quad (2.20)$$

em que  $\sigma \in \mathbb{R}$  é o parâmetro que define cada superfície da família e  $S$  é uma função das coordenadas pelo menos duplamente diferenciável e com derivadas contínuas. A curva  $C$

intercepta a família  $S$  e por cada ponto de  $\mathbb{Q}^{n+1}$  passa apenas um de seus membros. Em primeiro lugar, vamos impor que

$$\Delta(S) = q'^{\alpha} \partial_{\alpha} S \neq 0, \quad (2.21)$$

ou seja, em nenhum ponto a família é tangente a  $C$ .

Vamos supor agora uma segunda curva genérica  $\bar{C}$  dada pelas equações

$$q^{\alpha} = \bar{q}^{\alpha}(\tau), \quad (2.22)$$

pertencente a uma vizinhança fechada<sup>7</sup> de  $C$ . Essa curva é freqüentemente chamada curva de comparação. Com relação a  $C$ , a integral fundamental calculada sobre  $\bar{C}$  sofre um acréscimo diferencial dado por

$$dI = Ld\tau. \quad (2.23)$$

Ocorre também um incremento  $d\sigma$ , de modo que

$$d\sigma = \Delta(S)d\tau. \quad (2.24)$$

Uma condição necessária para que  $C$  seja um extremo é a de que  $dI/d\sigma$  seja um extremo em  $q'^{\alpha}$ . Essa condição se expressa por

$$\frac{\partial}{\partial q'^{\alpha}} \left( \frac{dI}{d\sigma} \right) = \frac{\partial}{\partial q'^{\alpha}} \left( \frac{L}{\Delta(S)} \right) = 0. \quad (2.25)$$

Usamos na segunda parte da equação as relações (2.23) e (2.24). A razão  $L/\Delta(S)$  é independente das velocidades. De fato essa razão é uma função escalar que depende do parâmetro da família  $\sigma$ . Por esta razão escrevemos  $L/\Delta(S) = f(\sigma)$ . Note que

$$\frac{\partial}{\partial q'^{\alpha}} \left( \frac{L}{\Delta(S)} \right) = \frac{1}{\Delta(S)} \frac{\partial L}{\partial q'^{\alpha}} - \frac{L}{\Delta(S)^2} \frac{\partial \Delta(S)}{\partial q'^{\alpha}} = \frac{1}{\Delta(S)} \frac{\partial L}{\partial q'^{\alpha}} - \frac{L}{\Delta(S)^2} \partial_{\alpha} S = 0,$$

em que usamos (2.21) no último passo. Assim,

$$\frac{\partial L}{\partial q'^{\alpha}} = \frac{L}{\Delta(S)} \partial_{\alpha} S. \quad (2.26)$$

---

<sup>7</sup>Dada a curva  $C$  definida por (2.1), uma segunda curva  $\bar{C}$ , cujas equações paramétricas são  $q^i = \bar{q}^i(t)$  pertence a uma vizinhança fechada  $(\varepsilon, \eta)$  de  $C$  se, primeiro, para todos os valores de  $t$  no intervalo  $t_1 \leq t \leq t_2$ , forem satisfeitas as condições

$$\left| \bar{q}^i(t) - q^i(t) \right| \leq \varepsilon$$

e, para todo valor de  $t$  no mesmo intervalo para os quais existam as derivadas  $d\bar{q}^i/dt$ , forem também satisfeitas

$$\left| \frac{d\bar{q}^i}{dt} - \dot{q}^i \right| \leq \eta.$$

Esta condição é suficiente apenas para garantir que  $C$  é um extremo da integral  $I = \int f(\sigma)d\sigma$ . Para um extremo da integral (2.12) precisamos de uma condição mais forte. Observe que uma reparametrização da família  $\sigma$  pode ser efetuada por uma função monotônica  $\Psi$ . Por ser monotônica podemos escrever

$$\Psi(S) = \Psi(\sigma) \quad (2.27)$$

e definir

$$\Delta(\Psi) = q'^{\alpha} \partial_{\alpha} \Psi = q'^{\alpha} \partial_{\alpha} S \frac{d\Psi}{d\sigma} = \frac{d\Psi}{d\sigma} \Delta(S) . \quad (2.28)$$

Podemos escolher  $\Psi$  com a forma

$$\Psi = \int_{\sigma_0}^{\sigma} f(\sigma') d\sigma' \quad \longrightarrow \quad \frac{d\Psi}{d\sigma} = f(\sigma)$$

e assim temos no problema correspondente à família equivalente (2.28),

$$\frac{L}{\Delta(\Psi)} = \frac{L}{f(\sigma)\Delta(S)} = 1. \quad (2.29)$$

Com isso demonstramos que existe uma representação da família  $\sigma$  na qual

$$L = \Delta(S). \quad (2.30)$$

Note que esta escolha em particular reduz a condição (2.26) a

$$\frac{\partial L}{\partial q'^{\alpha}} = \partial_{\alpha} S . \quad (2.31)$$

No espaço estendido também podemos definir o campo de covetores dos momentos, cujas componentes são

$$p_{\alpha} \equiv a_{\alpha\beta} q'^{\beta} = \frac{\partial L}{\partial q'^{\alpha}} . \quad (2.32)$$

As equações (2.26) ficam então

$$p_{\alpha} = \partial_{\alpha} S. \quad (2.33)$$

A partir de (2.30) podemos escrever

$$L - q'^{\alpha} \partial_{\alpha} S = 0.$$

Usando as equações (2.33) chegamos à equação

$$p_{\alpha} q'^{\alpha} - L = 0. \quad (2.34)$$

Acabamos de mostrar uma relação muito geral, que vale para Lagrangianas homogêneas de 1º grau. A função de *Hamilton* desse sistema, definida por  $H \equiv p_{\alpha} q'^{\alpha} - L$ , é sempre nula.



### 2.3.1 Sistemas Regulares em $\mathbb{Q}^n$

Como caso particular, vamos analisar o cenário da mecânica clássica em que a Lagrangiana é regular e dependente da parametrização. O posto da Hessiana é  $n$  e, assim, podemos escrever

$$p_0 q'^0 + p_i q'^i - L = 0. \quad (2.35)$$

Nossa escolha de parâmetros é livre. Portanto, vamos fazer a escolha  $\tau = q^0 = t$ . A equação (2.35) fica, então,

$$p_0 + p_i \dot{q}^i - L(t, q, \dot{q}) = 0. \quad (2.36)$$

Temos também as condições

$$p_0 = \partial_t S \quad (2.37)$$

e

$$p_i = \partial_i S. \quad (2.38)$$

Com este procedimento voltamos a analisar a dinâmica a partir de  $\mathbb{Q}^n$ . Nesta variedade voltamos a usar os momentos conjugados

$$p_i = a_{ij} \dot{q}^j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \quad (2.39)$$

cujo Jacobiano é a matriz Hessiana com elementos

$$a_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}. \quad (2.40)$$

O posto dessa matriz é  $n$  e, portanto, podemos escrever

$$\dot{q}^i = \eta^i(t, q, p), \quad (2.41)$$

pois todas as relações (2.39) são inversíveis. Usando (2.39) e (2.41) a equação (2.36) é então reescrita por

$$\partial_t S + \eta^i(t, q, \partial_i S) \partial_i S - L(t, q, \partial_i S) = 0. \quad (2.42)$$

A expressão

$$\eta^i(t, q, \partial_i S) \partial_i S - L(t, q, \partial_i S)$$

é função de  $t$ ,  $q$ , e  $\partial_i S$  e podemos definir a função de *Hamilton*

$$H(t, q, \partial_i S) \equiv \eta^i(t, q, \partial_i S) \partial_i S - L(t, q, \partial_i S). \quad (2.43)$$

Com essa nova função temos a condição

$$\partial_t S + H(t, q, \partial_i S) = 0. \quad (2.44)$$

Esta é a **equação diferencial parcial de *Hamilton-Jacobi*** para sistemas regulares. É importante ressaltar o fato de que a classificação regular refere-se ao espaço  $\mathbb{Q}^n$ . No espaço de configuração estendido o sistema não é regular. Neste caso o único grau de liberdade vinculado está ligado à coordenada  $q^0$ . Podemos interpretar a equação (2.44) como um vínculo, escrevendo

$$p_0 = \partial_0 S, \quad (2.45)$$

em que  $p_0 = -H$ . O fato de as demais coordenadas serem livres implica na possibilidade da definição da função de *Hamilton* (2.43) e, portanto, para encontrar a função  $S$  que define a família (2.20), precisamos resolver uma única EDP. Note também que a existência de um vínculo em  $\mathbb{Q}^{n+1}$  reduz a análise a  $\mathbb{Q}^n$ , que tem uma dimensão a menos. Veremos que esta é uma característica geral dos sistemas singulares, o de permitir a análise em um espaço de configuração reduzido.

### 2.3.2 Sistemas Singulares Gerais

Vamos generalizar o resultado acima para sistemas singulares. Suponha que  $L(q^\alpha, q'^\alpha)$  é uma Lagrangiana homogênea de primeiro grau em  $q'$ . Estamos considerando o sistema no espaço de configuração estendido, em que o tempo é incluso como coordenada. Estamos à procura de uma função  $S(q)$  que define uma família de superfícies em  $\mathbb{Q}^{n+1}$ , construída a partir da trajetória do sistema supondo-a conhecida. Chegamos por um princípio variacional às seguintes condições que devem ser obedecidas pela função  $S$ :

$$p_\alpha = \partial_\alpha S, \quad (2.46)$$

$$\Phi_0 \equiv p_\alpha q'^\alpha - L(q, q') = 0 \quad (2.47)$$

Se a Lagrangiana é homogênea de primeiro grau, a matriz Hessiana cujos elementos são dados por (2.16) é singular, ou seja,  $\det A = 0$ , como mostrado na seção 2.2. Como vimos, basta que um dos momentos não possa ser escrito em função das velocidades para que a condição Hessiana seja violada. No caso de sistemas regulares, por exemplo, mostramos que esses sistemas são singulares em  $\mathbb{Q}^{n+1}$  porque não podemos escrever

$$q'^0 = f(q, p), \quad (2.48)$$

e portanto  $p_0$  não depende da velocidade  $q'^0$ .

A solução foi definir uma equação de vínculo e reduzir o espaço de tal forma a encontramos uma Hessiana inversível. Este espaço reduzido resultou ser de dimensão  $n$ , 1 dimensão menor que  $\mathbb{Q}^{n+1}$ . A Hessiana definida em  $\mathbb{Q}^n$  é uma submatriz da Hessiana mais geral definida em  $\mathbb{Q}^{n+1}$ .

Com base nesse fato, vamos supor no espaço  $\mathbb{Q}^{n+1}$  uma matriz Hessiana singular. Vamos definir o **posto** dessa matriz como o número da dimensão do espaço no qual precisamos chegar para tornar o sistema regular. Essa dimensão é dada pelo número de autovalores não nulos da Hessiana. Como submatriz da Hessiana original temos uma matriz regular de ordem  $m$  que diz respeito aos graus de liberdade físicos da Lagrangiana. Dizemos que seu posto é  $m$ . Assim,  $m$  velocidades podem ser escritas como funções de  $q$  e  $p$ :

$$p_a = a_{ab} q'^b \quad \implies \quad q'^b = \eta^b(q^x, q^a, p^a). \quad (2.49)$$

Os coeficientes  $a_{ab}$  são elementos da submatriz inversível contida na Hessiana. Os índices minúsculos do início do alfabeto latino serão usados de agora em diante para representar graus de liberdade dessa submatriz. Assim,  $\{a, b\} = \{1, \dots, m\}$ .

As demais relações não podem ser invertidas. Isto significa que  $n + 1 - m$  momentos não guardam dependência com as velocidades vinculadas. Temos:

$$p_x = a_{xy} q'^y = -H_x(q^\alpha, \eta^\alpha) = -H_x(q^\alpha, p_a). \quad (2.50)$$

Índices minúsculos do fim do alfabeto latino serão usados para representar graus de liberdade que não pertencem à submatriz inversível:  $\{x, y\} = \{0, m + 1, \dots, n\}$ .

As equações (2.50) são EDP de primeira ordem se usarmos as relações (2.46):

$$\Phi_x \equiv \partial_x S + H_x(q^\alpha, \partial_\alpha S) = 0. \quad (2.51)$$

Aparentemente a definição das funções  $H_x$  não sofre problemas. Podemos simplesmente encontrá-las a partir da Lagrangiana pelas relações

$$H_x = -\frac{\partial L}{\partial q'^x}. \quad (2.52)$$

Contudo, note a equação para a coordenada  $q^0$

$$H_0 = -\frac{\partial L}{\partial q'^0}.$$

Se quisermos definir  $t$  como parâmetro e voltar ao espaço  $\mathbb{Q}^n$ , esta equação torna-se

$$H_0 = -\frac{\partial L}{\partial q'^0} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^0} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{t}}$$

que não tem sentido. Não podemos encontrar  $H_0$  por este caminho.

Vamos voltar a analisar a condição (2.47). Para encontrar  $H_0$  precisamos voltar a  $\mathbb{Q}^n$  onde o tempo é o parâmetro. Assim podemos escrever<sup>8</sup>

$$p_0 + p_a \dot{q}^a + p_z \dot{q}^z - L(t, q^i, \dot{q}^a, \dot{q}^z) = 0. \quad (2.53)$$

Observando essa última relação e o conjunto de relações (2.51),  $p_x + H_x = 0$ , a escolha natural seria

---

<sup>8</sup>Apenas nessa dedução usaremos o índice  $z$  tal que  $\{z\} = \{m + 1, \dots, n\}$ , sem o índice temporal.

$$H_0 = p_a \eta^a(t, q^i, p_b) + p_z \dot{q}^z - L(t, q^i, p_a, \dot{q}^z) = H_0(t, q^i, p_a, \dot{q}^z). \quad (2.54)$$

A dependência de  $\dot{q}^z$  em  $H_0$  definida em (2.54) nos faria desistir dessa escolha, mas o fato é que  $H_0$  não depende de  $\dot{q}^z$ :

$$\frac{\partial H_0}{\partial \dot{q}^z} = p_z - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^z} = 0. \quad (2.55)$$

Assim, podemos escolher  $H_0$  como

$$H_0(q^\alpha, p_\alpha) = p_i \dot{q}^i - L \quad (2.56)$$

e esta deve ser a **Hamiltoniana canônica**. Temos então os vínculos descritos em  $\mathbb{Q}^{n+1}$  de forma unificada por

$$\Phi_x \equiv p_x + H_x = 0, \quad (2.57)$$

em que  $\{x\} = \{0, m+1, \dots, n\}$ .

Os vínculos são  $n - m + 1$  equações. Combinadas com as condições

$$p_\alpha = \partial_\alpha S, \quad (2.58)$$

temos

$$\partial_x S + H_x(q^\alpha, \partial_\alpha S) = 0. \quad (2.59)$$

A este sistema de  $n + 1 - m$  equações damos o nome de **EDP de Hamilton-Jacobi**.

### 2.3.3 Análise das Condições de Extremos

Existem, portanto, duas condições para que a integral fundamental seja estacionária sobre a trajetória  $C$ . A primeira consiste no sistema de  $n + 1$  equações (2.58), que relaciona as componentes do momento conjugado

$$p \equiv A(\bullet, \Delta) = p_\alpha dq^\alpha \quad (2.60)$$

com as componentes do covetor

$$dS = \partial_\alpha S dq^\alpha. \quad (2.61)$$

A diferencial  $dS$  aplicada em um ponto  $P$  sobre uma superfície define uma direção a partir  $P$ . É a direção do **gradiente geodésico** de  $S$ . O sistema (2.58) reflete nas componentes a condição

$$p = dS. \quad (2.62)$$

Com o termo *gradiente geodésico* estamos indicando que curvas que passam pela família  $\sigma$  na direção de seu gradiente, representando extremos da integral fundamental, são curvas

geodésicas em  $\mathbb{Q}^{n+1}$ . Essa terminologia está de acordo com o fato de que o princípio de ação estacionária requer a nulidade da primeira variação da integral (2.18), que representa uma "distância" em  $\mathbb{Q}^{n+1}$ . Ou seja, curvas de extremos representam geodésias no espaço de configuração estendido.

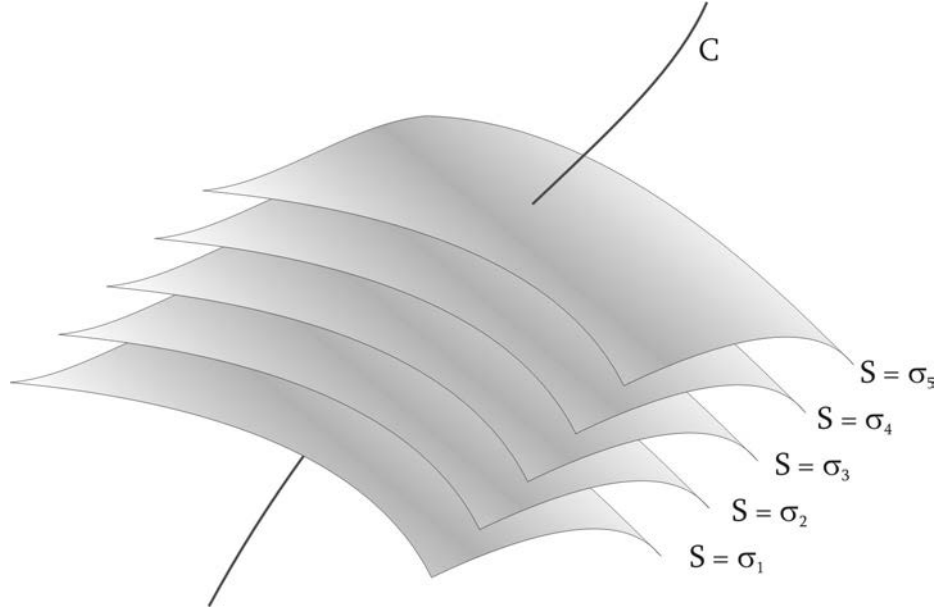


Figura 2.1: Representação da trajetória e das superfícies transversais em  $\mathbb{Q}^{n+1}$ .

Em razão da presença de vínculos, somos obrigados a separar as equações (2.58) de acordo com o posto da matriz Hessiana. Temos portanto  $m$  relações

$$p_a = \partial_a S \quad (2.63)$$

e  $n + 1 - m$  relações

$$p_x = \partial_x S. \quad (2.64)$$

Podemos inverter (2.63) pois a Hessiana reduzida de elementos  $a_{ab}$  é inversível. Escrevemos então,

$$q'^a = (a^{-1})^{ab} \partial_b S = \eta^a(q^\alpha, \partial_b S). \quad (2.65)$$

As demais relações não podem ser invertidas. Em vez disso elas se transformam no sistema de EDP de HJ:

$$\Phi_x(q^y, q^a, \partial_x S, \partial_a S) = 0, \quad (2.66)$$

em que  $\Phi_x = \partial_x S + H_x$ .

A partir de (2.65) podemos definir uma família de curvas em  $\mathbb{Q}^{n+1}$  que chamaremos de **congruência**  $K$ . Essa congruência varre os pontos do espaço de maneira que somente uma curva passa por cada ponto. Todas as curvas são extremos do problema variacional, pois seus

campos tangentes satisfazem (2.62). Dito em outras palavras, essas curvas são soluções de (2.65). A congruência é relacionada à existência da família  $\sigma$ , de modo que dizemos se tratar de uma **congruência pertencente a uma família de superfícies**.

A segunda condição é a igualdade

$$L = \Delta(S). \quad (2.67)$$

Enquanto a primeira condição define unicamente a direção da trajetória do sistema em  $\mathbb{Q}^{n+1}$ , consistindo por isso em uma condição puramente geométrica, a última condição carrega a informação sobre a dinâmica do sistema. Somente com ela podemos definir a função Hamiltoniana canônica, (2.56), referente ao espaço reduzido  $\mathbb{Q}^m$ . Esta função, como mostra a equação de HJ correspondente à coordenada temporal,

$$\partial_0 S + H_0 = 0, \quad (2.68)$$

é a que se liga à equação de evolução temporal do sistema. Lembremo-nos que o problema variacional original era dependente do tempo, de modo que mesmo em uma formulação independente do parâmetro a equação (2.68) é diferente em essência dos demais vínculos. Essa é a manifestação do caráter especial do tempo com relação às demais coordenadas na mecânica clássica. A equação temporal pode ser vista como um vínculo, mas um vínculo com realidade e importância físicas.

Dada a curva  $C$ , solução do problema variacional e das equações (2.65), a integral fundamental calculada sobre dois pontos de  $C$  que interceptam duas superfícies  $S = \sigma_1$  e  $S = \sigma_2$  é dada por

$$I = \int_{P_1}^{P_2} L d\tau = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \Delta(S) d\tau = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma = \sigma_2 - \sigma_1, \quad (2.69)$$

e este valor é o mesmo para todos os membros da congruência entre as mesmas superfícies. Chamamos as superfícies que se caracterizam por esta condição de **geodesicamente equidistantes**.

Assim se dá a redução do espaço de configuração para um espaço de  $m$  graus de liberdade  $\mathbb{Q}^m$ . As equações (2.65) representam as componentes de um campo vetorial tangente em  $\mathbb{Q}^m$  e a solução das EDO (2.65) são as representações paramétricas de  $C$  neste espaço. Contudo essas equações estão vinculadas às EDP (2.66). Então temos o seguinte cenário: para que uma trajetória  $C$  em  $\mathbb{Q}^{n+1}$  satisfaça o princípio de ação estacionária, é necessário que ela pertença a uma congruência  $K$  de curvas que interceptem de forma transversal ( $p = dS$ ) uma família de superfícies  $\sigma$  geodesicamente equidistantes,  $L = \Delta(S)$ .

## 2.4 Equações Características

Somente para uma família de superfícies que obedece ao sistema de equações (2.66) podemos definir um campo de trajetórias que lhe seja ortogonal. Assim, precisamos nos preocupar com a resolução desse sistema em busca da forma do campo de velocidades (2.65). As equações

de HJ são EDP de primeira ordem e assim nos é permitido utilizar o procedimento de *Cauchy*<sup>9</sup> para encontrar sua solução geral. Devemos também nos perguntar se este realmente consiste em um sistema completamente integrável.

Apenas para tornar o formalismo mais abrangente, vamos tratar de um sistema de EDP de primeira ordem um pouco mais geral, supondo que as funções  $H_x$  sejam também funções explicitamente dependente de  $S$ . Temos então as equações

$$\Phi_x(q^y, q^a, p_y, p_a, z) = 0, \quad (2.70)$$

em que

$$\begin{cases} z = S(q^y, q^a) \\ p_a = \partial_a S(q^y, q^b) \end{cases}. \quad (2.71)$$

Procedendo dessa forma, as funções  $\Phi_x$  passam a depender de  $k = n - m + 1$  parâmetros  $q^y$ . Novamente expandimos o espaço de configuração para comportar mais uma variável,  $z = S$ , mas esse artifício é apenas uma forma de generalização.

Vamos construir as diferenciais

$$dz = \partial_a S dq^a + \partial_y S dq^y, \quad (2.72)$$

e

$$dp_a = \partial_a \partial_y S dq^y + \partial_a \partial_b S dq^b, \quad (2.73)$$

a partir de (2.71). De (2.70) podemos tomar a derivada parcial com relação a  $q^a$ . Como resultado,

$$\partial_a \Phi_x + \frac{\partial \Phi_x}{\partial p_y} \partial_y \partial_a S + \frac{\partial \Phi_x}{\partial p_a} \partial_a \partial_b S + \frac{\partial \Phi_x}{\partial z} \partial_a S = 0. \quad (2.74)$$

No entanto, sabemos que  $\Phi_x$  só depende linearmente de  $p_y$ :  $\partial \Phi_x / \partial p_y = \delta_x^y$ . Surge então

$$\partial_a \partial_x S = -\partial_a \Phi_x - \frac{\partial \Phi_x}{\partial p_a} \partial_a \partial_b S - \frac{\partial \Phi_x}{\partial z} \partial_a S. \quad (2.75)$$

Usando (2.75) em (2.73),

$$dp_a = - \left( \partial_a \Phi_y + \frac{\partial \Phi_y}{\partial p_a} \partial_a \partial_b S + \frac{\partial \Phi_y}{\partial z} \partial_a S \right) dq^y + \partial_a \partial_b S dq^b. \quad (2.76)$$

Agora, sabemos a partir das equações de HJ que as funções  $H_y$  podem ser escritas por

$$H_y = \frac{\partial}{\partial q'^y} L(q^i, p^b, q'^x). \quad (2.77)$$

Temos com essa expressão

$$\frac{\partial H_y}{\partial p_a} dq^y = \frac{\partial^2 L}{\partial p_a \partial q'^y} dq^y = \frac{\partial}{\partial q'^y} \frac{\partial L}{\partial p_a} dq^y = dq^a.$$

---

<sup>9</sup>Ver [1], Cap. 3.

Podemos, por consequência, escrever como uma identidade o sistema de EDO

$$dq^a = \frac{\partial H_y}{\partial p_a} dq^y = \frac{\partial \Phi_y}{\partial p_a} dq^y. \quad (2.78)$$

Assim, com a nulidade de dois termos, as equações (2.76) ficam

$$dp_a = - \left( \partial_a \Phi_x + \frac{\partial \Phi_x}{\partial z} \partial_a S \right) dq^y. \quad (2.79)$$

Uma terceira equação pode ser obtida por (2.72). Tomando (2.78),

$$dz = \left( \partial_a S \frac{\partial \Phi_y}{\partial p_a} + \partial_y S \right) dq^y = \left( p_a \frac{\partial \Phi_y}{\partial p_a} - H_y \right) dq^y. \quad (2.80)$$

Definimos então como as **equações características** do sistema de HJ as  $2m+1$  equações

$$\begin{cases} dq^a = \frac{\partial \Phi_y}{\partial p_a} dq^y, \\ dp_a = - \left( \partial_a \Phi_x + \frac{\partial \Phi_x}{\partial z} \partial_a S \right) dq^y, \\ dz = \left( p_a \frac{\partial \Phi_y}{\partial p_a} - H_y \right) dq^y. \end{cases} \quad (2.81)$$

Utilizando-se de um formalismo simplético e usando o fato de que os vínculos que nos interessam na verdade não dependem de  $z$ , escrevemos as duas primeiras equações como

$$d\xi^a = \omega^{ab} \partial_b \Phi_y dq^y = \{\xi^a, \Phi_y\} dq^y, \quad (2.82)$$

em que a estrutura simplética é a mesma daquela que encontramos no capítulo 1<sup>10</sup>. Assim notamos a existência de um espaço de fase  $\mathbf{T}^*\mathbb{Q}^m$  e a mesma estrutura dos parênteses de Poisson:

$$\Omega(X_f, Y_g) = \{f, g\} = (\partial_a f) \omega^{ab} (\partial_b g). \quad (2.83)$$

O sistema (2.82) consiste em um sistema de **Equações Diferenciais Totais** (EDT). Pode-se facilmente mostrar que para sistemas regulares as equações características coincidem com as equações canônicas de *Hamilton*. Assim, no quadro completo de *Carathéodory*, encontramos a ligação que existe entre a teoria das EDP e a teoria das equações diferenciais ordinárias.

### 2.4.1 Integrabilidade

As equações de HJ e as características, bem como suas soluções, desenham o quadro completo. A solução do conjunto de EDP (2.51) é, se única, uma função dependente de parâmetros arbitrários que representa uma família de superfícies. Já as soluções das EDT (2.82) definem toda uma família de curvas dependentes das condições iniciais, que chamamos

<sup>10</sup>Quando usarmos o formalismo simplético, os índices das variáveis dobram de valor, ou seja,  $\{a, b, c\} = \{1, \dots, 2m\}$  em (2.82).



por uma congruência de curvas. As soluções estão ligadas pelo fato de toda curva da congruência ser normal a todo vetor tangente a qualquer superfície da família em qualquer ponto. Queremos que a solução  $S$  exista para um dado campo vetorial definido pelas EDT e procuraremos agora pela condições que nos garantem esse quadro. A questão fundamental é, dada uma congruência gerada por um campo vetorial conhecido, é possível encontrar pelo menos uma família de superfícies que lhe seja ortogonal?

Um exemplo em  $\mathbb{R}^3$  pode ser ilustrativo. Dada uma curva  $C$ , assumiremos que existe uma família de superfícies  $S(\mathbf{x}) = \sigma$  cortada pela curva e que esta seja transversa à família. Dado um ponto  $\mathbf{x}(\tau_0) \equiv \mathbf{x}_0$  sobre a trajetória, podemos definir um plano,  $\Gamma_0$ , gerado a partir de dois vetores linearmente independentes  $\mathbf{X}_z = \chi_z^i \partial_i$ . Sobre este mesmo ponto passa uma superfície  $\sigma_0$  de modo que o plano  $\Gamma_0$  é tangente a esta superfície em  $\mathbf{x}_0$ . Neste caso  $\{i\} = \{1, 2, 3\}$  e  $\{z\} = \{1, 2\}$ . Esses vetores devem ser ortogonais a um vetor  $\mathbf{n}_0$  tangente a  $C$  em  $\mathbf{x}_0$ , ou seja,

$$\mathbf{n}_0 \cdot X_z = 0 . \quad (2.84)$$

Contudo, queremos não apenas que um plano seja ortogonal a  $C$ , mas toda uma família de planos  $\Gamma$ . Neste caso  $\mathbf{n}_0$  é um membro de um campo vetorial  $\mathbf{n}$  e devemos ter que em qualquer ponto sobre a curva a construção acima seja válida. Chamaremos esta família de planos por uma **distribuição**<sup>11</sup>  $\Gamma$ . Neste caso, o campo  $\mathbf{n}$  deve obedecer à condição

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{n} = 0, \quad (2.85)$$

que é a **condição de integrabilidade de Euler**<sup>12</sup>. Esta condição é necessária para garantir a existência de uma família de superfícies  $S(\mathbf{x}) = \sigma$  que seja ortogonal a  $C$ .

Por exemplo, consideremos o campo vetorial dado por

$$\mathbf{n} = x^2 \partial_1 - x^1 \partial_2 + \partial_3 . \quad (2.86)$$

Para este vetor,  $\nabla \times \mathbf{n} = -2\partial_3$  e  $\mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{n} = -2$ , o que indica que não há uma família de superfícies que obedeça (2.85). Por outro lado, se o vetor tiver componentes constantes, o rotacional sempre se anula e, portanto, a condição (2.85) é sempre satisfeita. Podemos mostrar que se a trajetória for uma reta há sempre uma família de superfícies em  $\mathbb{R}^3$  que lhe seja normal.

Temos também o covetor dual a  $\mathbf{n}$ , que chamaremos de  $p$ . No exemplo acima ele é dado por

$$p = x_2 dx^1 - x_1 dx^2 + dx^3 .$$

Caso (2.85) não seja satisfeita, não será possível encontrar a partir da trajetória a distribuição  $\Gamma$  ortogonal a  $C$  em todo ponto. Não há, por conseguinte, um conjunto completo de campos vetoriais que satisfaçam as equações

$$p(\mathbf{X}_z) = p_i \chi_z^i = 0. \quad (2.87)$$

---

<sup>11</sup>Ver [8] p. 166.

<sup>12</sup>Ver [8], Cap. 6.

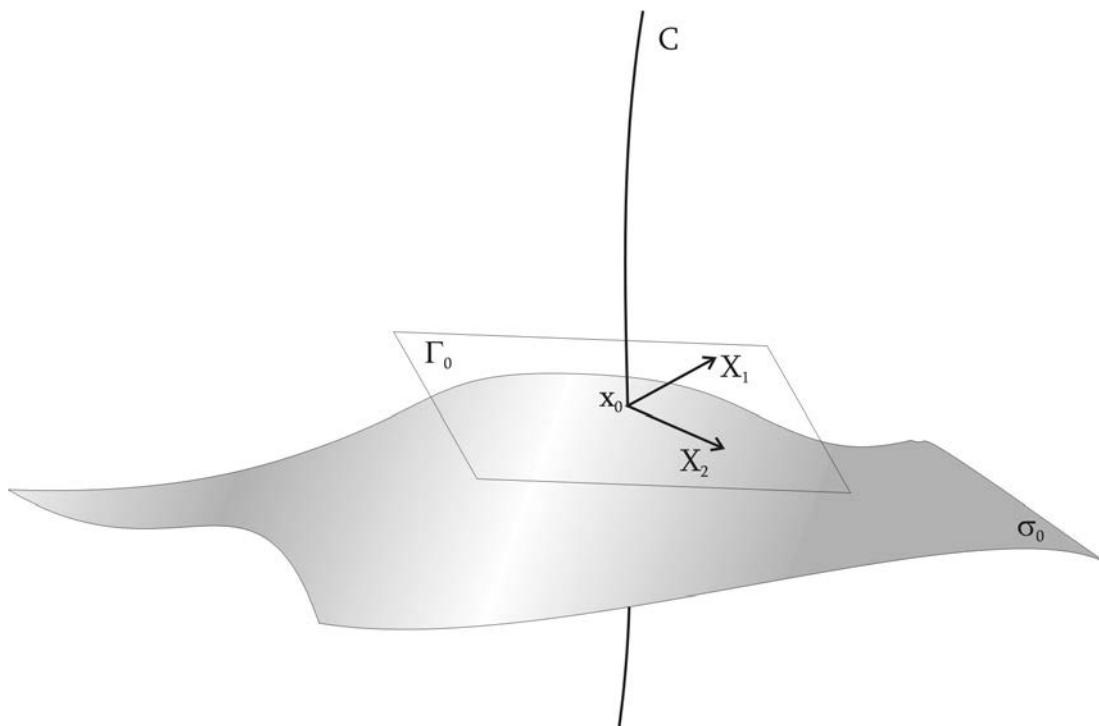


Figura 2.2: A trajetória  $C$ , uma superfície  $\sigma_0$  e o respectivo plano tangente  $\Gamma_0$ . O vetor tangente a  $C$  é ortogonal aos vetores de base que geram a distribuição. A condição de integrabilidade é satisfeita se a figura for estendida a toda família  $\sigma$  e a toda congruência de curvas  $K$ , do qual  $C$  é membro.

Há também a família  $\sigma$ , que sendo transversal a  $C$  obedece à condição  $p = dS$ . Assim, temos de (2.87) o conjunto de EDP

$$\Phi_z \equiv \chi_z^i \partial_i S = 0, \quad (2.88)$$

que são as condições para que os vetores  $\mathbf{X}_z$  sejam tangentes à família  $\sigma$ . A condição de integrabilidade de *Euler* é necessária e suficiente para que a base  $\mathbf{X}_z$  possa ser completa.

Visto que a partir do plano  $\Gamma_0$  podemos encontrar qualquer outro membro da distribuição a partir das equações (2.87), podemos tratar os vetores  $\mathbf{X}_z$  como bases da distribuição  $\Gamma$ . Desejamos agora que essas condições de integrabilidade sejam estendidas para toda a congruência  $K$ , do qual  $C$  é membro. Para tanto, os vetores base tangentes a  $\sigma$  tornam-se também campos vetoriais e estes adquirem a qualidade de geradores de curvas no espaço. As curvas geradas pela base da distribuição são definidas também por parâmetros, tantos quantos forem as equações (2.88), no nosso caso consistindo em duas equações. As características do sistema (2.88) são dadas por

$$dx^i = \chi_z^i du^z, \quad (2.89)$$

em que  $u_1$  e  $u_2$  são os parâmetros mencionados. Se as características consistirem em um conjunto completo de EDT, e este é o caso por construção, as curvas geradas pelos vetores de

base da distribuição permanecem sempre sobre uma superfície de  $\sigma$ . Isto também significa que a derivada de  $Lie \mathbf{L}_{\mathbf{X}_y}(\mathbf{X}_z)$  é um vetor que permanece em  $\sigma_0$ . Assim, este sistema obedece à condição

$$[\mathbf{X}_y, \mathbf{X}_z] \subset \Gamma. \quad (2.90)$$

Portanto o comutador de  $Lie$  entre dois vetores da distribuição é também um vetor pertencente a  $\Gamma$ . Dizemos que este sistema está em **involução**. Assim, a condição necessária e suficiente para que as características consistam em um sistema completo é a involução da distribuição, e esta é também a condição para que a congruência  $K$  e a família  $\sigma$  sejam transversais. Esta condição é conhecida como o **Teorema de Frobenius**<sup>13</sup>.

A extensão para sistemas dinâmicos em espaços de ordem geral é imediata. No formalismo de HJ, as equações (2.88):

$$\chi_z^i \partial_i S = 0 \quad (2.91)$$

são os vínculos da teoria no espaço de fase, e estas estão ligadas ao conjunto de características

$$d\xi^a = \chi_z^a dq^z. \quad (2.92)$$

O índice  $z$  adquire então o conjunto de valores do número de vínculos existentes. A integrabilidade exige que o comutador de  $Lie$  dos campos vectoriais presentes em (2.92) obedeam à equação

$$[\mathbf{X}_x, \mathbf{X}_y] S = C_{xy}{}^z \mathbf{X}_z(S). \quad (2.93)$$

Ou seja, esses campos devem obedecer a uma álgebra de Lie.

Estamos interessados no caso em que  $\chi_z^a = \{\xi^a, \Phi_z\}$ , e então podemos escrever

$$\mathbf{X}_z(S) = \{\xi^a, \Phi_z\} \partial_a S = \{S, \Phi_z\}, \quad (2.94)$$

em que usamos (2.83). Assim,

$$\begin{aligned} [\mathbf{X}_x, \mathbf{X}_y] S &= \mathbf{X}_x \mathbf{X}_y(S) - \mathbf{X}_y \mathbf{X}_x(S) \\ &= \mathbf{X}_x \{S, \Phi_y\} - \mathbf{X}_y \{S, \Phi_x\} \\ &= \{\{S, \Phi_y\}, \Phi_x\} - \{\{S, \Phi_x\}, \Phi_y\} \\ &= \{\{S, \Phi_y\}, \Phi_x\} + \{\{\Phi_y, S\}, \Phi_x\} + \{\{\Phi_x, \Phi_y\}, S\}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$[\mathbf{X}_x, \mathbf{X}_y] S = \{\{\Phi_x, \Phi_y\}, S\}. \quad (2.95)$$

As condições de integrabilidade vêm a ser

$$\{\{\Phi_x, \Phi_y\}, S\} = C_{xy}{}^z \mathbf{X}_z(S) = C_{xy}{}^z \{S, \Phi_z\} = -\{C_{xy}{}^z \Phi_z, S\}, \quad (2.96)$$

---

<sup>13</sup>Ver [8], Sec. 6.1d.

ou,

$$\{\Phi_x, \Phi_y\} = -C_{xy}{}^z \Phi_z = 0. \quad (2.97)$$

Tomando a diferencial dos vínculos e usando as equações (2.82),

$$d\Phi_x = \{\Phi_x, \Phi_y\}dq^y. \quad (2.98)$$

Para que o sistema de equações (2.82) seja completamente integrável devemos exigir, por fim, que

$$d\Phi_x = 0. \quad (2.99)$$

Portanto, encontramos as condições suficientes para que o sistema de EDP de HJ seja integrável completamente e, por conseqüência, essas são as mesmas condições que garantem a existência de uma família de superfícies transversa à trajetória do sistema. Vimos da comparação com o caso em  $\mathbb{R}^3$  que se justifica o fato de as coordenadas ligadas à parte não inversível da Hessiana serem utilizadas como parâmetros. O próximo passo é exigir a validade de (2.99) para todos os vínculos e verificar as conseqüências dessa imposição na dinâmica em  $\mathbf{T}^*\mathbb{Q}^m$ .

## 2.5 Equações de Movimento

Não há razão para esperar que todo sistema satisfaça (2.99) identicamente, ou seja, que os PP dos vínculos sejam nulos. Então as condições de integrabilidade estabelecem na verdade uma relação de dependência entre os parâmetros ligados à parte não inversível da Hessiana. Isto pode ser visto explicitamente se fizermos uma escolha de parâmetro: vamos separar o tempo dos demais parâmetros e definir os índices  $\{x', y', z'\} = \{m+1, \dots, n\}$ . Assim a condição de integrabilidade nos leva ao sistema de equações

$$\begin{cases} d\Phi_{x'} = \{\Phi_{x'}, \Phi_y\}dq^y = \{\Phi_{x'}, \Phi_0\}dt + \{\Phi_{x'}, \Phi_{y'}\}dq^{y'} = 0, \\ d\Phi_0 = \{\Phi_0, \Phi_y\}dq^y = \{\Phi_0, \Phi_{y'}\}dq^{y'} = 0. \end{cases} \quad (2.100)$$

A partir da primeira condição de (2.100) temos

$$\{\Phi_{x'}, \Phi_{y'}\}dq^{y'} = -\{\Phi_{x'}, \Phi_0\}dt. \quad (2.101)$$

Note que esta escolha ressalta uma vez mais o caráter diferenciado do tempo com relação aos demais parâmetros, assim como do vínculo  $\Phi_0$  com relação aos  $\Phi_{x'}$ . Em uma representação matricial das equações (2.96), podemos definir a matriz  $M$  cujos elementos são dados por

$$M_{x'y'} = \{\Phi_{x'}, \Phi_{y'}\}. \quad (2.102)$$

### 2.5.1 Caso Regular

Se  $M$  for regular, ou seja,  $\det(M) \neq 0$ , existe uma matriz  $M^{-1}$  inversa de  $M$  e assim a condição (2.101) pode ser reescrita:

$$dq^{y'} = -(M^{-1})^{y'x'} \{\Phi_{x'}, \Phi_0\} dt. \quad (2.103)$$

Note que a segunda condição de integrabilidade,  $d\Phi_0 = 0$ , é identicamente satisfeita se  $M$  for regular, com a ajuda de (2.103):

$$d\Phi_0 = \{\Phi_0, \Phi_{y'}\} dq^{y'} = -\{\Phi_0, \Phi_{y'}\} (M^{-1})^{y'x'} \{\Phi_{x'}, \Phi_0\} dt, \quad (2.104)$$

em que  $M^{-1}$  é antissimétrica e está contraída com a quantidade simétrica em  $x'$  e  $y'$ ,  $\{\Phi_0, \Phi_{y'}\} \{\Phi_{x'}, \Phi_0\}$ .

As condições de integrabilidade reduzem-se, portanto, à condição (2.103) para  $\det(M) \neq 0$ . Voltemos nossa atenção para as equações de movimento

$$d\xi^a = \{\xi^a, \Phi_y\} dq^y = \{\xi^a, \Phi_0\} dt + \{\xi^a, \Phi_{y'}\} dq^{y'}. \quad (2.105)$$

Usando a condição (2.103),

$$d\xi^a = \left( \{\xi^a, \Phi_0\} - \{\xi^a, \Phi_{y'}\} (M^{-1})^{y'x'} \{\Phi_{x'}, \Phi_0\} \right) dt. \quad (2.106)$$

Vamos analisar a diferencial de uma função dinâmica  $F(\xi^a)$ :

$$dF = \{F, \Phi_y\} dq^y = \{F, \Phi_0\} dt + \{F, \Phi_{y'}\} dq^{y'}. \quad (2.107)$$

Com (2.103),

$$dF = \left( \{F, \Phi_0\} - \{F, \Phi_{y'}\} (M^{-1})^{y'x'} \{\Phi_{x'}, \Phi_0\} \right) dt. \quad (2.108)$$

É evidente em (2.108) a existência de uma estrutura. Vamos chamá-la de **Parênteses Generalizados** (PG) e definí-la por

$$\{F, G\}^* \equiv \{F, G\} - \{F, \Phi_{y'}\} (M^{-1})^{y'x'} \{\Phi_{x'}, G\}. \quad (2.109)$$

A evolução dinâmica pode então ser escrita pelo PG:

$$dF = \{F, \Phi_0\}^* dt. \quad (2.110)$$

Especificamente as equações de movimento podem ser escritas por

$$d\xi^a = \{\xi^a, \Phi_0\}^* dt. \quad (2.111)$$

### 2.5.2 Caso Singular

No caso mais geral em que  $M$  é singular, as condições de integrabilidade não são satisfeitas pelo conjunto de vínculos estabelecido pela Lagrangiana. Ou seja, os colchetes de Lie dos campos vetoriais não serão combinações dos campos. Se esta situação ocorrer, devemos procurar por um espaço no qual as equações de movimento sejam completamente integráveis. Se não for possível encontrar este espaço, estaremos lidando com um sistema não integrável.

Neste trabalho desejamos que os sistemas sejam integráveis. Assim admitiremos a existência de uma submatriz de  $M$  que seja inversível, ou seja, trabalharemos com a hipótese de que  $M$  tenha um posto diferente de zero. Vamos em primeiro lugar relembrar o conjunto de índices que usamos até agora e definir um novo conjunto, referente às partes inversível e não inversível de  $M$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\} = \{0, \dots, n\} \\ \{i, j, k\} = \{1, \dots, n\} \\ \{a, b, c\} = \{1, \dots, m\} \\ \{x, y, z\} = \{0, m+1, \dots, n\} \\ \{x', y', z'\} = \{m+1, \dots, n\} \\ \{a', b', c'\} = \{m+1, \dots, m+p\} \\ \{x'', y'', z''\} = \{m+p+1, \dots, n\} \\ \{\alpha', \beta', \gamma'\} = \{0, m+p+1, \dots, n\}, \end{array} \right.$$

em que  $p$  é o posto de  $M$ . Assim podemos escrever (2.101) por

$$M_{x'y'} dq^{y'} = -\{\Phi_{x'}, \Phi_0\} dt \quad (2.112)$$

ou,

$$M_{x'a'} dq^{a'} + M_{x'y''} dq^{y''} = -\{\Phi_{x'}, \Phi_0\} dt. \quad (2.113)$$

Dois conjuntos de equações podem ser obtidos de (2.113). O primeiro,

$$M_{b'a'} dq^{a'} + M_{b'y''} dq^{y''} = -\{\Phi_{b'}, \Phi_0\} dt. \quad (2.114)$$

$$\begin{aligned} M_{b'a'} dq^{a'} &= -M_{b'y''} dq^{y''} - \{\Phi_{b'}, \Phi_0\} dt \\ &= -\{\Phi_{b'}, \Phi_{y''}\} dq^{y''} - \{\Phi_{b'}, \Phi_0\} dt \\ &= -\{\Phi_{b'}, \Phi_{\alpha'}\} dq^{\alpha'}. \end{aligned}$$

Com a inversibilidade de  $(M_{a'b'})$ , temos

$$dq^{a'} = -(M^{-1})^{a'b'} \{\Phi_{b'}, \Phi_{\alpha'}\} dq^{\alpha'}. \quad (2.115)$$

A partir das equações características obtemos

$$\begin{aligned}
d\xi^a &= \{\xi^a, \Phi_y\}dq^y \\
&= \{\xi^a, \Phi_0\}dt + \{\xi^a, \Phi_{y'}\}dq^{y'} \\
&= \{\xi^a, \Phi_0\}dt + \{\xi^a, \Phi_{y''}\}dq^{y''} + \{\xi^a, \Phi_{a'}\}dq^{a'} \\
&= \{\xi^a, \Phi_{a'}\}dq^{a'} + \{\xi^a, \Phi_{a'}\}dq^{a'} \quad \longleftarrow \text{ usando (2.110),} \\
&= \left( \{\xi^a, \Phi_{a'}\} - \{\xi^a, \Phi_{a'}\}(M^{-1})^{a'b'}\{\Phi_{b'}, \Phi_{a'}\} \right) dq^{a'},
\end{aligned}$$

ou,

$$d\xi^a = \{\xi^a, \Phi_{a'}\}^* dq^{a'}, \quad (2.116)$$

com novos PG definidos por

$$\{F, G\}^* = \{F, G\} - \{F, \Phi_{a'}\}(M^{-1})^{a'b'}\{\Phi_{b'}, G\}. \quad (2.117)$$

Portanto, a evolução temporal de  $F$  pode ser escrita por

$$dF = \{F, \Phi_{a'}\}^* dq^{a'}. \quad (2.118)$$

O segundo conjunto de (2.113) consiste nas equações

$$M_{x''a'}dq^{a'} + M_{x''y''}dq^{y''} = -\{\Phi_{x''}, \Phi_0\}dt. \quad (2.119)$$

com algumas operações:

$$\begin{aligned}
M_{x''a'}dq^{a'} &= -M_{x''y''}dq^{y''} - \{\Phi_{x''}, \Phi_0\}dt \\
&= -\{\Phi_{x''}, \Phi_{y''}\}dq^{y''} - \{\Phi_{x''}, \Phi_0\}dt \\
&= -\{\Phi_{x''}, \Phi_{a'}\}dq^{a'}.
\end{aligned}$$

No lado direito introduziremos (2.115) e o fato de que  $M_{x''a'} = \{\Phi_{x''}, \Phi_{a'}\}$ :

$$\{\Phi_{x''}, \Phi_{a'}\}(M^{-1})^{a'b'}\{\Phi_{b'}, \Phi_{a'}\}dq^{a'} = \{\Phi_{x''}, \Phi_{a'}\}dq^{a'}. \quad (2.120)$$

A equação (2.120), dada a independência dos parâmetros  $q^{a'}$ , dá a condição para que o espaço reduzido exista de fato. As condições de integrabilidade tornam-se assim,

$$\{\Phi_{x''}, \Phi_{a'}\} = \{\Phi_{x''}, \Phi_{a'}\}(M^{-1})^{a'b'}\{\Phi_{b'}, \Phi_{a'}\}, \quad (2.121)$$

ou, separando o tempo dos demais parâmetros:

$$\begin{cases} \{\Phi_{x''}, \Phi_0\} = \{\Phi_{x''}, \Phi_{a'}\}(M^{-1})^{a'b'}\{\Phi_{b'}, \Phi_0\}, \\ \{\Phi_{x''}, \Phi_{y''}\} = \{\Phi_{x''}, \Phi_{a'}\}(M^{-1})^{a'b'}\{\Phi_{b'}, \Phi_{y''}\}. \end{cases} \quad (2.122)$$

A segunda equação de (2.122) mostra simplesmente a relação linear entre linhas e colunas da parte não inversível de  $M$ , ou seja, mostra que  $M$  é singular, o que a torna uma identidade. No entanto a primeira equação tem conteúdo dinâmico. Ela fixa condições sobre os parâmetros e seleciona quais são os graus de liberdade do sistema que não têm conteúdo físico.

## 2.6 O Espaço de Fase Generalizado

As equações características nos dizem a princípio quais são as variáveis dinâmicas do sistema. Elas estabelecem uma separação no espaço de configuração através da separação das variáveis com conteúdo dinâmico daquelas que seriam apenas parâmetros da teoria, ou seja, existe um espaço  $\mathbb{Q}^m$  no qual as variáveis dinâmicas dependem de  $k = n + 1 - m$  parâmetros  $q^y$ . O espaço dos parâmetros é estabelecido pelo sistema de HJ. A relação entre as equações características e os vínculos mostra que  $\mathbb{Q}^m$  e o espaço dos parâmetros são complementares. Vamos nos referir ao espaço dos parâmetros como o espaço complementar de  $\mathbb{Q}^m$ , ou seja,  $\mathbb{C}\mathbb{Q}^k$ .

A estrutura das características mostra que existe um espaço de fase que pode ser construído a partir de  $\mathbb{Q}^m$  e sua estrutura simplética é aquela dos parênteses de *Poisson*. No entanto esta estrutura não é aquela que dá a dinâmica do sistema. Existe, como vimos, um outro espaço de fase relacionado a um outro setor de  $\mathbb{Q}^n$ , ao qual pertence  $\mathbb{Q}^m$ , e a estrutura simplética deste espaço deve ser a dos parênteses generalizados que encontramos em (2.109) e (2.117).

Mostra-se que a estrutura dos PG é antissimétrica, não degenerada e que obedece à identidade de *Jacobi*, obedecendo portanto as condições para que a forma

$$\omega^*(X_F, X_G) = \{F, G\}^*$$

defina uma estrutura simplética, existindo por conseqüência um espaço de fase generalizado. Neste espaço as equações de movimento são condições sobre as componentes do campo tangente  $\Delta$ , exatamente como vimos no capítulo 1. Suas soluções serão curvas em  $\mathbf{T}^*\mathbb{Q}$  generalizado.

Qual é a dimensão do espaço de fase generalizado? As equações características não são as únicas equações de movimento, pois vimos que as condições de integrabilidade sobre o espaço complementar,  $\mathbb{C}\mathbb{Q}^k$ , resultam na descoberta de outras variáveis dinâmicas além daquelas que repousam em  $\mathbb{Q}^m$ . O papel central das condições de integrabilidade é o de reduzir o espaço complementar e revelar todas as variáveis dinâmicas livres do problema. Depois de descobrir as demais coordenadas livres, dadas pelas equações (2.103) e (2.115), e no segundo caso depois de descobrir as condições de redução de  $\mathbb{C}\mathbb{Q}^k$ , (2.122), a dimensão do espaço generalizado fica evidente.

Para que a idéia torne-se mais clara, temos então as equações características que valem para o caso geral em que o posto de  $M$  é  $p \leq k$ :

$$d\xi^a = \{\xi^a, \Phi_{\alpha'}\}^* dq^{\alpha'}, \quad (2.123)$$

em conjunto com as equações

$$d\xi^{\alpha'} = \{\xi^{\alpha'}, \Phi_{\alpha'}\}^* dq^{\alpha'}, \quad (2.124)$$

que foram generalizadas para o formalismo simplético a partir das equações (2.115). Estas devem ser resolvidas sob a condição



$$\{\Phi_{x''}, \Phi_0\} = \{\Phi_{x''}, \Phi_{a'}\}(M^{-1})^{a'b'}\{\Phi_{b'}, \Phi_0\}. \quad (2.125)$$

O primeiro conjunto, (2.123), consiste em  $2m$  equações e sua solução nos fornece  $2m$  variáveis dinâmicas. O segundo conjunto, (2.124), nos fornece  $2p$  equações adicionais. Assim, as variáveis dinâmicas do problema são em número de  $2(m+p)$  e o espaço de configuração das variáveis dinâmicas é  $\mathbb{Q}^{m+p}$ . Usaremos  $\mathbf{T}^*\mathbb{Q}^{m+p}$  como símbolo para o espaço de fase generalizado.

# Referências Bibliográficas

- [1] C. Caratheodory - *Calculus of Variations and Partial Differential Equations of the First Order - Part I* - Holden Day, Inc (1967).
- [2] C. Caratheodory - *Calculus of Variations and Partial Differential Equations of the First Order - Part II* - Holden Day, Inc (1967).
- [3] C. Lanczos - *The Variational Principles of Mechanics* - Fourth Edition, Dover Pub. Inc. New York (1986).
- [4] I. M. Gelfand, S. V. Fomin - *Calculus of Variations* - Dover Pub. Inc. New York (2000).
- [5] J. V. José, E. J. Saletan - *Classical Dynamics, A Contemporary Approach* - Cambridge Un. Press, (1998).
- [6] P. A. M. Dirac - *Lectures in Quantum Mechanics* - Yeshiva University, New York (1964).
- [7] L Faddeev, R. Jackiw, - *Phys. Rev. Lett.* **60**, 1692 (1988).
- [8] T. Frankel - *The Geometry of Physics, an Introduction* - Cambridge Un. Press (1997).

## Capítulo 3

# Ações de Primeira Ordem

### 3.1 Introdução

Ações de primeira ordem aparecem em muitas teorias na física, especialmente nas teorias relativísticas. Esses sistemas são descritos por Lagrangianas lineares nas velocidades

$$L(q, q') = a_\alpha(q)q'^\alpha, \quad (3.1)$$

em que  $\{\alpha\} = \{0, \dots, n\}$  e  $q' \equiv dq'/d\tau$  com  $\tau$  um parâmetro qualquer. Os coeficientes  $a_\alpha$  são funções apenas das coordenadas de  $\mathbb{Q}^{n+1}$  e reforçamos o fato de que o tempo nessa formulação é incluído como variável dinâmica. A integral fundamental desse sistema é simplesmente

$$I = \int a_\alpha q'^\alpha d\tau = \int \int \dots \int a_\alpha dq^\alpha. \quad (3.2)$$

É evidente que esta Lagrangiana é homogênea de primeira ordem em  $q'$ . Assim ela constitui um sistema singular por natureza.

Os exemplos encontrados na natureza mostram que todos os campos conhecidos podem ser transformados em ações de primeira ordem. *Schwinger*<sup>1</sup> mostra que essa característica vem da própria estrutura homogênea dessas Lagrangianas, ou seja, Lagrangianas homogêneas em primeiro grau na variável  $q'$  são redutíveis por transformações de equivalência a Lagrangianas lineares nessas variáveis.

Como exemplos desses campos, podemos citar os campos fermiônicos<sup>2</sup>, que são naturalmente descritos por Lagrangianas lineares. Lagrangianas de campos bosônicos também podem ser descritos por (3.1), como mostra a teoria DKP<sup>3</sup>. Existe também uma Lagrangiana linear para a gravitação, que foi proposta pela primeira vez por *Palatini* (1919)<sup>4</sup>.

Neste capítulo apresentaremos uma formulação geral para o problema de análise de vínculos a partir do formalismo de HJ apresentado no capítulo 2, para sistemas de ações

---

<sup>1</sup>Em [1], [2] e [3].

<sup>2</sup>Por exemplo, o campo de *Dirac* [4].

<sup>3</sup>*Duffin-Kemmer-Petiau*, em [5], [6] e [7].

<sup>4</sup>Em [8].

de primeira ordem. Veremos que Lagrangianas lineares nas velocidades são totalmente vinculadas, ou seja, todos os graus de liberdade do sistema são ligados por equações de vínculo. Este fato simplifica de forma considerável o método que apresentamos anteriormente. Não havendo equações características, o espaço é completamente reduzido e os graus de liberdade dinâmicos do sistema devem aparecer a partir da imposição da integrabilidade do sistema de EDP de HJ.

### 3.2 Formalismo de HJ para Lagrangianas Lineares

Nossa análise começa com o espaço de configuração  $\mathbb{Q}^{n+1}$ , a partir do qual escrevemos a Lagrangiana

$$L = a_\alpha q'^\alpha . \quad (3.3)$$

Consideremos uma segunda função  $\bar{L}$  escrita a partir de  $L$  por uma transformação de lagrangianas equivalentes

$$\bar{L} = L - q'^\alpha \partial_\alpha F \quad (3.4)$$

em que  $F$  é apenas uma função escalar das coordenadas. Com esta transformação  $\bar{L}$  continua linear nas velocidades:

$$\begin{aligned} \bar{L} &= a_\alpha q'^\alpha - q'^\alpha \partial_\alpha F \\ &= (a_\alpha - \partial_\alpha F) q'^\alpha . \end{aligned} \quad (3.5)$$

Assim, a transformação por Lagrangianas equivalentes é análoga à troca de coeficientes

$$a_\alpha \implies a_\alpha - \partial_\alpha F . \quad (3.6)$$

Note que a transformação (3.6) tem a estrutura de uma transformação canônica. Existe portanto uma simetria em (3.3) sob transformações do tipo (3.6). Esperamos, em razão da existência dessa simetria, que as equações de movimento dependam de quantidades invariantes a essas transformações.

A matriz Hessiana desse sistema é não apenas singular, mas tem posto nulo. Os momentos canonicamente conjugados são encontrados por

$$p_\alpha \equiv \frac{\partial L}{\partial q'^\alpha} = a_\alpha . \quad (3.7)$$

Assim, todos os momentos são independentes das velocidades, o que faz com que todos os graus de liberdade do sistema sejam vinculados. Os vínculos são construídos a partir de (3.7),

$$\Phi_\alpha \equiv p_\alpha - a_\alpha = 0 . \quad (3.8)$$

Os vínculos, aliados com a condição de transversalidade

$$p_\alpha = \partial_\alpha S, \quad (3.9)$$

formam  $n + 1$  equações diferenciais parciais de primeira ordem. A equação para o índice 0,  $\Phi_0 = p_0 - a_0 = 0$ , nos mostra qual a Hamiltoniana canônica desse sistema, a qual podemos também calcular por

$$H_0 = p_i \dot{q}^i - L = (p_i - a_i) \dot{q}^i - a_0 = -a_0, \quad (3.10)$$

em que usamos (3.8). Então temos  $H_0 = -a_0$ .

Este desenvolvimento é coerente com a teoria desenvolvida no capítulo 2, sob a qual a nulidade do posto da matriz Hessiana em  $\mathbb{Q}^{n+1}$  deve fornecer  $n + 1$  vínculos. Esses vínculos são o sistema de EDP de *Hamilton-Jacobi* para Lagrangianas lineares nas velocidades. Como a matriz Hessiana tem posto nulo, esperamos não encontrar equações características e assim todos os graus de liberdade do sistema são vinculados. A princípio temos um espaço complementar  $\mathbb{C}\mathbb{Q}^{n+1}$  de  $n + 1$  dimensões. No entanto, vimos que devemos impor as condições de integrabilidade sobre o sistema (3.8), o que implica em calcular a matriz cujos elementos são

$$M_{ij} = \{\Phi_i, \Phi_j\} = \partial_i a_j - \partial_j a_i. \quad (3.11)$$

Note que este objeto é invariante sob as transformações (3.6):

$$\begin{aligned} \overline{M}_{ij} &= \partial_i \bar{a}_j - \partial_j \bar{a}_i \\ &= \partial_i (a_j - \partial_j F) - \partial_j (a_i - \partial_i F) \\ &= \partial_i a_j - \partial_j a_i - \partial_i \partial_j F + \partial_j \partial_i F \\ &= \partial_i a_j - \partial_j a_i = M_{ij}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

### 3.2.1 Caso Regular

Neste ponto a análise recai sobre a matriz  $M$ . Se ela for regular, sabemos pelo desenvolvimento do capítulo 2 que os parênteses generalizados são dados pela relação (2.104), ou seja,

$$\{F, G\}^* = \{F, G\} - \{F, \Phi_i\} (M^{-1})^{ij} \{\Phi_j, G\}. \quad (3.13)$$

Por sua vez, as equações de movimento podem ser escritas por

$$d\xi^i = \{\xi^i, \Phi_0\}^* dt. \quad (3.14)$$

É fácil verificar que, pelo fato de os coeficientes  $a_i$  não dependerem de momentos, as únicas equações relevantes são para as coordenadas  $q^i$ , enquanto os momentos  $p_i$  podem ser obtidos pelos vínculos com a substituição de  $q^i(t)$  nos  $a_i$ . Assim temos que calcular apenas

$$\begin{aligned} \dot{q}^i = \{q^i, \Phi_0\}^* &= \{q^i, \Phi_0\} - \{q^i, \Phi_j\} (M^{-1})^{jk} \{\Phi_k, \Phi_0\} \\ &= -\{q^i, \Phi_j\} (M^{-1})^{jk} \{\Phi_k, \Phi_0\} \\ &= -(M^{-1})^{ik} \{\Phi_k, \Phi_0\}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

em que  $\{q^i, \Phi_0\} = 0$  pois  $\Phi_0$  depende apenas das coordenadas e do momento  $p_0$  e  $\{q^i, \Phi_j\} = \{q^i, p_j\} = \delta_j^i$ , já que  $\Phi_i$  depende linearmente de  $p_i$ . Note também que

$$\{\Phi_k, \Phi_0\} = \{p_k - a_k, p_0 - a_0\} = \{a_0, p_k\} = \partial_k a_0 ,$$

ou seja, as equações de movimento para este sistema são

$$dq^i = -(M^{-1})^{ij} \partial_j a_0 dt . \quad (3.16)$$

Apenas para estabelecer a consistência do formalismo, vamos fazer o teste de integrabilidade e verificar se as equações de movimento são as mesmas. Temos então de testar a condição

$$d\Phi_i = 0. \quad (3.17)$$

Podemos escrever

$$\begin{aligned} d\Phi_i = \{\Phi_i, \Phi_\alpha\} dq^\alpha &= \{\Phi_i, \Phi_0\} dt + \{\Phi_i, \Phi_j\} dq^j \\ &= \{\Phi_i, \Phi_0\} dt + M_{ij} dq^j \quad \leftarrow \text{usando (3.16)} \\ &= \{\Phi_i, \Phi_0\} dt - M_{ij} (M^{-1})^{jk} \partial_k a_0 dt \\ &= \{\Phi_i, \Phi_0\} dt - \delta_i^k \partial_k a_0 dt \\ &= \partial_i a_0 dt - \partial_i a_0 dt = 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Ou seja, esta condição é satisfeita com as equações de movimento (3.16). A segunda condição,  $d\Phi_0 = 0$  como vimos no capítulo 2, é automaticamente satisfeita em razão de  $M$  ser antisimétrica.

Os momentos podem ser calculados a partir das relações de vínculo

$$p_i = a_i(q) , \quad (3.19)$$

em que se inserem as equações (3.16), ou pelos PG

$$dp_i = \{p_i, \Phi_0\}^* dt. \quad (3.20)$$

Como exemplo para este caso, vamos considerar a Lagrangiana de quatro dimensões

$$L = (q^2 + q^3) \dot{q}^1 + q^4 \dot{q}^3 - V \quad (3.21)$$

em que

$$H_0 = V = \frac{1}{2} [(q^3)^2 + 2q^2 q^3 - (q^4)^2] \quad (3.22)$$

é a Hamiltoniana canônica. Assim, define-se os coeficientes

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{2} [(q^4)^2 - 2q^2q^3 - (q^3)^2] \\ a_1 = q^2 + q^3 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = q^4 \\ a_4 = 0 . \end{cases} \quad (3.23)$$

Os vínculos são dados por

$$\Phi_\alpha \equiv \begin{cases} \Phi_0 = p_0 - \frac{1}{2} [(q^4)^2 - 2q^2q^3 - (q^3)^2] \\ \Phi_1 = p_1 - q^2 - q^3 \\ \Phi_2 = p^2 \\ \Phi_3 = p^3 - q^4 \\ \Phi_4 = p^4 , \end{cases} \quad (3.24)$$

em que  $\Phi_\alpha = 0$ .

A matriz  $M$ , calculada de (3.11), vem a ser

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

com determinante -1. A inversa de  $M$  é dada por

$$(M^{-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

Como  $M$  é regular, a trajetória é dada pela equação de movimento

$$\dot{q}^j = (M^{-1})^{ij} \partial_j V. \quad (3.27)$$

Em forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \dot{q}^1 \\ \dot{q}^2 \\ \dot{q}^3 \\ \dot{q}^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ q^3 \\ q^2 + q^3 \\ -q^4 \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

As quatro equações para as velocidades são

$$\begin{cases} \dot{q}^1 = q^3 \\ \dot{q}^2 = q^4 \\ \dot{q}^3 = -q^4 \\ \dot{q}^4 = -q^2 \end{cases}, \quad (3.29)$$

cuja solução vem a ser

$$\begin{cases} q^1 = A \sin t + B \cos t + Ct + D \\ q^2 = -A \cos t + B \sin t \\ q^3 = A \cos t - B \sin t + C \\ q^4 = A \sin t + B \cos t \end{cases}. \quad (3.30)$$

As equações para a variáveis  $p$  podem ser obtidas por substituição de (3.30) nos vínculos ou pelos PG (3.20). O resultado é

$$\begin{cases} p_1 = C \\ p_2 = 0 \\ p_3 = A \sin t + B \cos t \\ p_4 = 0 \end{cases}. \quad (3.31)$$

No caso regular, como pudemos verificar neste exemplo, o número de graus de liberdade é  $n$ , o que concorda com o desenvolvimento da teoria proposta no capítulo 2. Temos um conjunto de  $m$  de equações características e outro conjunto de  $n - m$  equações de movimento dependentes de um único parâmetro. No caso de Lagrangianas lineares  $m = 0$  e, portanto, devemos obter  $n$  equações a partir das condições de integrabilidade, o que foi satisfeito. Assim o espaço dos parênteses generalizados,  $\mathbf{T}^*\mathbb{Q}^n$  para este caso é de dimensão  $2n$ .

### 3.2.2 Caso Singular

Se  $M$  é singular, devemos procurar por uma submatriz inversível de  $M$ . A dimensão dessa submatriz é  $p$ , o posto de  $M$ . Encontrada essa submatriz, basta utilizarmos os parênteses generalizados escritos em (2.112):

$$\{F, G\}^* = \{F, G\} - \{F, \Phi_a\}(M^{-1})^{ab}\{\Phi_b, G\}, \quad (3.32)$$

em que agora usamos  $\{a, b\} = \{1, \dots, p\}$ . As equações de movimento são as mesmas de (2.111),

$$d\xi^a = \{\xi^a, \Phi_{\alpha'}\}^* dq^{\alpha'} \quad \{\alpha'\} = \{0, p+1, \dots, n\}. \quad (3.33)$$

Mais uma vez precisamos resolver apenas as equações



$$\begin{aligned}
dq^a &= \{q^a, \Phi_{\alpha'}\}^* dq^{\alpha'} = \{q^a, \Phi_{\alpha'}\} dq^{\alpha'} - \{q^a, \Phi_b\} (M^{-1})^{bc} \{\Phi_c, \Phi_{\alpha'}\} dq^{\alpha'} \\
&= -\{q^a, \Phi_b\} (M^{-1})^{bc} \{\Phi_c, \Phi_{\alpha'}\} dq^{\alpha'} \\
&= -(M^{-1})^{ab} \{\Phi_b, \Phi_{\alpha'}\} dq^{\alpha'},
\end{aligned} \tag{3.34}$$

com  $\{q^a, \Phi_{\alpha'}\} = 0$  e  $\{q^a, \Phi_b\} = \delta_b^a$ . Nesta equação,

$$\{\Phi_b, \Phi_{\alpha'}\} = \{p_b - a_b, p_{\alpha'} - a_{\alpha'}\} = \{a_{\alpha'}, p_b\} - \{a_b, p_{\alpha'}\} = \partial_b a_{\alpha'} - \partial_{\alpha'} a_b,$$

o que nos deixa com as equações de movimento

$$dq^a = -(M^{-1})^{ab} (\partial_b a_{\alpha'} - \partial_{\alpha'} a_b) dq^{\alpha'}. \tag{3.35}$$

As condições de integrabilidade não podem ser satisfeitas apenas com essas equações. Como vimos, para estabelecer a integrabilidade as equações (3.35) devem ser resolvidas com as condições (2.17). Se a segunda é identicamente satisfeita, temos ainda que encontrar a condição

$$\{\Phi_z, \Phi_0\} = \{\Phi_z, \Phi_a\} (M^{-1})^{ab} \{\Phi_b, \Phi_0\}, \tag{3.36}$$

em que  $\{z\} = \{p+1, \dots, n\}$ . Esta condição torna-se

$$\partial_z a_0 = (\partial_z a_a - \partial_a a_z) (M^{-1})^{ab} \partial_b a_0. \tag{3.37}$$

Note que a condição (3.37) é uma relação entre as coordenadas apenas.

Vamos resolver um segundo exemplo, o da Lagrangiana de três dimensões

$$L = (q^2 + q^3) \dot{q}^1 + k \dot{q}^3 - V. \tag{3.38}$$

Sua Hamiltoniana é

$$H_0 = V = \frac{1}{2} [(q^3)^2 + 2q^2 q^3 - k^2]. \tag{3.39}$$

Os coeficientes e os vínculos dessa Lagrangiana são

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = \frac{1}{2} [k^2 - 2q^2 q^3 - (q^3)^2] \\ a_1 = q^2 + q^3 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = k \end{array} \right. \quad \Phi_{\alpha} \equiv \left\{ \begin{array}{l} \Phi_0 = p_0 - \frac{1}{2} [k^2 - 2q^2 q^3 - (q^3)^2] \\ \Phi_1 = p_1 - q^2 - q^3 \\ \Phi_2 = p^2 \\ \Phi_3 = p^3 - k. \end{array} \right. \tag{3.40}$$

A matriz  $M$  vem a ser

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.41}$$

que é singular, de posto 2. Existe portanto uma matriz de ordem 2 que pode-se escolher por

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow M'^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

Esta escolha em particular faz com que as variáveis livres sejam  $q^1$  e  $q^3$ , e estes são escritos em termos de  $q^2$  e  $t$ . Aparece a equação matricial a partir de (3.35):

$$\begin{pmatrix} dq^1 \\ dq^3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 a_0 - \partial_t a_1 & \partial_1 a_2 - \partial_2 a_1 \\ \partial_3 a_0 - \partial_t a_3 & \partial_3 a_2 - \partial_2 a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dt \\ dq^2 \end{pmatrix}, \quad (3.43)$$

ou,

$$\begin{pmatrix} dq^1 \\ dq^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q^2 + q^3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dt \\ dq^2 \end{pmatrix}. \quad (3.44)$$

As EDT para este sistema são

$$\begin{cases} dq^1 = (q^2 + q^3)dt \\ dq^3 = -dq^2. \end{cases} \quad (3.45)$$

A segunda equação é integrada para resultar em

$$q^3 = -q^2 + C, \quad (3.46)$$

e assim pode-se resolver a primeira,

$$q^1 = Ct + D. \quad (3.47)$$

No entanto, o sistema ainda obedece à condição (3.36):

$$\{\Phi_2, \Phi_0\} = \{\Phi_2, \Phi_a\}(M^{-1})^{ab}\{\Phi_b, \Phi_0\} \quad (3.48)$$

ou,

$$q^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ q^2 + q^3 \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

cujo resultado é apenas  $q^2 = 0$ . Assim, o subespaço de integração do sistema é aquele em que  $q^2 = 0$  para esta escolha da matriz  $M'$ . Assim, a solução vem a ser

$$q^1 = Ct + D \quad \text{e} \quad q^3 = C. \quad (3.50)$$

Já os momentos são escritos por

$$\begin{cases} p_1 = C \\ p_3 = k. \end{cases} \quad (3.51)$$

No caso singular podemos notar que o espaço de fase tem dimensão  $p$ . As variáveis que a princípio eram parâmetros do sistema, pela falta das equações características, separaram-se

em dois conjuntos,  $q^a$  e  $q^{\alpha'}$ . As primeiras são as verdadeiras variáveis dinâmicas e as demais os parâmetros da teoria. A busca pela submatriz regular de  $M$  é na verdade a busca por um espaço no qual o sistema de HJ seja completamente integrável. Notamos também que as condições de integrabilidade fixam os parâmetros  $q^{\alpha'}$  e assim fixam de forma unívoca o espaço de fase  $\mathbf{T}^*\mathbb{Q}^p$  desse sistema.

### 3.3 Campos Relativísticos

Na mecânica clássica não relativística, o espaço de configuração é construído a partir das coordenadas do espaço  $\mathbb{R}^3$ . Num sistema constituído de  $N$  partículas, as  $n = 3N$  coordenadas generalizadas são mapeadas às coordenadas espaciais de cada partícula do sistema. O Princípio de *Hamilton*, que usa uma ação fundamental do tipo  $\int L dt$ , foi usado para descrever sistemas Lagrangianos e, a princípio, a ação é sempre dependente da escolha de uma parametrização, especificamente do tempo. Ainda assim vimos ser possível formular o problema de modo a considerarmos um princípio variacional independente da parametrização quando a Lagrangiana é homogênea de primeira ordem nas velocidades e, nesse procedimento, incluímos o tempo como variável dinâmica em  $\mathbb{Q}^{n+1}$ .

Contudo, esses sistemas são apenas uma parte da mecânica clássica. Nas teorias relativísticas temos dois outros quadros distintos. Podemos falar em primeiro lugar na dinâmica de partículas relativísticas. Por princípio a ação é independente da parametrização, pois o tempo é incluso como coordenada no espaço  $\mathbb{R}^4$  com a métrica de *Minkowski*,  $\mathbb{E}^{3+1}$ . Ainda assim o princípio variacional é essencialmente o mesmo do caso não relativístico, se considerarmos a formulação independente do parâmetro. Nesses sistemas as funções Lagrangianas são, em função da exigência de sua homogeneidade, essencialmente diferentes das não relativísticas. Mesmo assim o espaço de configuração para esse tipo de dinâmica mantém as mesmas características, ou seja, são dadas pelas  $3N$  coordenadas de  $N$  partículas.

O outro quadro das teorias relativísticas são as teorias de campos. Os campos são no geral funções de pontos no espaço-tempo  $\mathbb{E}^{3+1}$ , de modo que as coordenadas desse espaço tornam-se parâmetros do seu respectivo espaço de configuração. Este espaço é constituído tendo os próprios campos como coordenadas. Por exemplo, o eletromagnetismo pode ser formulado a partir do potencial  $A^\mu$ , que consistem a princípio de quatro campos, e estes formam um espaço de configuração de quatro dimensões. Ainda nesse capítulo veremos outra possível construção de  $\mathbb{Q}$  para o caso eletromagnético.

A formulação Lagrangiana para campos é a mesma do caso não relativístico quando sabemos como construir as Lagrangianas dessas teorias. O princípio de Hamilton continua o mesmo para estes sistemas. Consideremos a forma da ação

$$I = \int L(q, \dot{q}) dt , \quad (3.52)$$

em que o parâmetro escolhido é o tempo medido por um observador na origem do sistema de coordenadas. Vamos introduzir a função **densidade Lagrangiana**,  $\mathcal{L}$ , definida a partir da Lagrangiana pela equação integral

$$L(q, \dot{q}) = \int \mathcal{L}(q, \partial_\mu q) d^3x . \quad (3.53)$$

A integral fundamental se escreve por

$$I = \int \mathcal{L}(q, \partial_\mu q) d^4x . \quad (3.54)$$

Assim, a Lagrangiana de um campo deve ser construída como um funcional, mas podemos usar a função densidade Lagrangiana em lugar de  $L$ , observados alguns cuidados. Por exemplo, as equações de *Euler-Lagrange* obtidas pela primeira variação de (3.54) são

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu q^i)} = 0 . \quad (3.55)$$

Consideremos por exemplo o momento conjugado

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} . \quad (3.56)$$

Podemos escrever

$$p_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \int \mathcal{L}(q, \partial_\mu q) d^3x = \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 q^i)} d^3x , \quad (3.57)$$

o que nos faz introduzir também uma densidade de momento

$$\pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 q^i)} . \quad (3.58)$$

Podemos também definir a densidade Hamiltoniana canônica

$$\mathcal{H} = \pi_i \dot{q}^i - \mathcal{L} . \quad (3.59)$$

Assim, usando as densidades em lugar da Lagrangiana e da Hamiltoniana tradicionais, podemos usar o mesmo formalismo desenvolvido para os sistemas não relativísticos em campos. No restante desse capítulo exemplificaremos em campos os resultados que obtivemos na análise de vínculos *via Hamilton-Jacobi*, e para tanto usaremos as densidades no lugar das funções de *Hamilton* e de *Lagrange*.

### 3.4 O Campo de Proca

Como primeira aplicação do formalismo desenvolvido até aqui, vamos analisar a Lagrangiana do campo vetorial real massivo, conhecido como o campo de *Proca*:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A^\nu A_\nu, \quad (3.60)$$

em que

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (3.61)$$

com  $\{\mu, \nu\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ . A métrica é a de *Minkowski* com assinatura  $(-+++)_\eta$ .

As variáveis dinâmicas deste sistema são os campos  $A^\mu$ . Escrita explicitamente em termos desses campos, a Lagrangiana (3.60) é uma função de segunda ordem nas velocidades  $\partial_0 A^\mu$ . Desejamos aplicar o formalismo para ações de primeira ordem, e neste caso devemos fazer algumas alterações na Lagrangiana.

Vamos considerar primeiro os campos  $A^\mu$  e  $F^{\mu\nu}$  independentes, ignorando portanto a dependência entre eles definida pela equação (3.61). Assim a Lagrangiana é escrita por vinte variáveis. Note também que podemos construir uma segunda Lagrangiana equivalente pela adição de termos dependentes de divergências totais:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A^\nu A_\nu + \frac{1}{4} \partial_\mu [A_\nu (F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu})]. \quad (3.62)$$

Com a abertura do divergente no último termo podemos escrever

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} A_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} A_\nu \partial_\mu F^{\nu\mu} + \frac{1}{4} (F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu}) \partial_\mu A_\nu - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A^\nu A_\nu. \quad (3.63)$$

Para adequar esta Lagrangiana ao formalismo de ações de primeira ordem vamos considerar os campos  $A^i$ ,  $F^{0i}$ ,  $F^{i0}$ ,  $A^0$ ,  $F^{00}$  e  $F^{ij}$  e abrir os termos como segue:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} A_i \partial_0 F^{0i} - \frac{1}{4} A_i \partial_0 F^{i0} + \frac{1}{4} (F^{0i} - F^{i0}) \partial_0 A_i - \mathcal{H} \quad (3.64)$$

com

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & -\frac{1}{4} (F^{i0} - F^{0i}) \partial_i A_0 - \frac{1}{4} A_0 \partial_i (F^{i0} - F^{0i}) - \frac{1}{4} (F^{ij} - F^{ji}) \partial_i A_j - \\ & - \frac{1}{4} A_j \partial_i (F^{ij} - F^{ji}) + \frac{1}{4} [F^{00} F_{00} + F^{ij} F_{ij} + F^{0i} F_{0i} + F^{i0} F_{i0}] - \frac{1}{2} m^2 [A^0 A_0 + A^i A_i]. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Usaremos então a Lagrangiana (3.64). Os coeficientes podem ser encontrados através das variáveis  $\{q^i\} \equiv \{A^i, F^{0i}, F^{i0}, A^0, F^{00}, F^{ij}\}$  na Lagrangiana:

$$\begin{cases} a_t = -\mathcal{H}(x) \\ a_i = \frac{1}{4} [F^{0i}(x) - F^{i0}(x)] \\ a_{0i} = \frac{1}{4} A^i(x) \\ a_{i0} = -\frac{1}{4} A^i(x) \\ a_0 = 0 \\ a_{00} = 0 \\ a_{ij} = 0. \end{cases} \quad (3.66)$$

Temos assim o conjunto de vínculos

$$\begin{cases} \Phi_t = p_0 + \mathcal{H}(x) \\ \Phi_i = \Pi_i(x) - \frac{1}{4} [F^{0i}(x) - F^{i0}(x)] \\ \Phi_{0i} = \Pi_{0i}(x) - \frac{1}{4} A_i(x) \\ \Phi_{i0} = \Pi_{i0}(x) + \frac{1}{4} A_i(x) \\ \Phi_0 = \Pi_0(x) \\ \Phi_{00} = \Pi_{00}(x) \\ \Phi_{ij} = \Pi_{ij}(x). \end{cases} \quad (3.67)$$

Vamos construir a matriz  $M$ . Podemos utilizar a equação (3.11) com o parênteses de *Poisson* ou com a forma dos coeficientes:

$$M_{\alpha x, \beta y} = \frac{\partial a_\alpha(y)}{\partial q^\beta(x)} - \frac{\partial a_\beta(x)}{\partial q^\alpha(y)}. \quad (3.68)$$

Caso os PP sejam utilizados, as relações fundamentais são

$$\begin{aligned} \{q^i(x), q^j(y)\} &= \{p_i(x), p_j(y)\} = 0 \\ \{q^i(x), p_j(y)\} &= \delta_j^i \delta(x-y). \end{aligned} \quad (3.69)$$

Os únicos parênteses não nulos são  $\{\Phi_i, \Phi_{0j}\}$ ,  $\{\Phi_i, \Phi_{j0}\}$ ,  $\{\Phi_{0i}, \Phi_j\}$  e  $\{\Phi_{i0}, \Phi_j\}$ . Temos então:

$$M = \frac{1}{2} \delta(x-y) \begin{pmatrix} 0_{3 \times 3} & -\mathbf{1}_{3 \times 3} & \mathbf{1}_{3 \times 3} & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 9} \\ \mathbf{1}_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 9} \\ -\mathbf{1}_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 9} \\ 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 1} & 0_{1 \times 1} & 0_{1 \times 9} \\ 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 1} & 0_{1 \times 1} & 0_{1 \times 9} \\ 0_{9 \times 3} & 0_{9 \times 3} & 0_{9 \times 3} & 0_{9 \times 1} & 0_{9 \times 1} & 0_{9 \times 9} \end{pmatrix}. \quad (3.70)$$

Esta matriz é singular. Em uma primeira inspeção vemos que as variáveis  $A^0$ ,  $F^{00}$ , e  $F^{ij}$  são parte dos parâmetros da teoria. Assim, podemos nos preocupar apenas com a submatriz

$$\overline{M} = \frac{1}{2} \delta(x-y) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.71)$$

na qual omitimos os subscritos que indicam que cada elemento é uma matriz  $3 \times 3$ . Esta matriz continua singular, e pelo cálculo de seus autovalores é fácil verificar que ela possui dois autovalores não nulos, ou seja, seu posto é 2. Escolhendo como variáveis independentes  $A^i$  e  $F^{0i}$  e como parâmetros  $A^0$ ,  $F^{00}$ ,  $F^{i0}$  e  $F^{ij}$ , a submatriz inversível de  $M$  é

$$M' = \frac{1}{2} \delta(x-y) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.72)$$

Sua inversa é dada por

$$M'^{-1} = 2\delta(z-x) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.73)$$

Antes de encontrar as equações de movimento vamos obter as condições de integrabilidade do sistema, a partir da equação (3.37):

$$\partial_z \mathcal{H} = (\partial_z a_a - \partial_a a_z) (M^{-1})^{ab} \partial_b \mathcal{H}. \quad (3.74)$$

Na equação (3.74),  $\{q^a\} \equiv \{A^i, F^{0i}\}$  e  $\{q^z\} \equiv \{F^{i0}, A^0, F^{00}, F^{ij}\}$  e as derivadas são derivações funcionais. Vamos começar com  $q^z = F^{i0}$ . A parte esquerda da equação fica

$$\frac{\partial \mathcal{H}(y)}{\partial F^{i0}(x)} = - \left( \frac{1}{4} \partial_i A_0 - \frac{1}{2} F_{i0} \right) \delta(y-x). \quad (3.75)$$

Precisamos calcular também

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial a_a(w)}{\partial F^{i0}(x)} - \frac{\partial a_{i0}(x)}{\partial q^a(w)} \right) (M'^{-1})^{a_w b_z} \frac{\partial \mathcal{H}(y)}{\partial q^b(z)} &= (M)_{[i0_x j_w]} (M'^{-1})^{[j_w 0_k z]} \frac{\partial \mathcal{H}(y)}{\partial F^{0k}(z)} = \\ &= \delta(x-z) \frac{\partial \mathcal{H}(y)}{\partial F^{0i}(z)} = - \left( \frac{1}{4} \partial_i A_0 + \frac{1}{2} F_{0i} \right) \delta(y-x). \end{aligned} \quad (3.76)$$

Igualando os lados,

$$\frac{1}{4} \partial_i A_0 - \frac{1}{2} F_{0i} = \frac{1}{4} \partial_i A_0 + \frac{1}{2} F_{i0} \quad (3.77)$$

ou seja,

$$F^{i0} = -F^{0i}. \quad (3.78)$$

Se usarmos  $q^z = A^0$  encontramos na esquerda de (3.74)

$$\frac{\partial \mathcal{H}(y)}{\partial A^0(x)} = - \left[ \frac{1}{2} \partial_i (F^{i0} - F^{0i}) + m^2 A_0 \right] \delta(y-x). \quad (3.79)$$

Pode-se mostrar facilmente que a parte direita é nula ( $a_0 = 0$  e os coeficientes  $a_i$  e  $a_{0i}$  não dependem de  $A^0$ ). Assim,

$$\partial_i [F^{i0}(x) - F^{0i}(x)] + 2m^2 A_0 = 0. \quad (3.80)$$

Com  $q^z = F^{00}$  é fácil verificar que a terceira condição é

$$F^{00}(x) = 0. \quad (3.81)$$

Por último, temos que calcular a condição de integrabilidade para  $q^z = F^{ij}$ . Começando pelo lado esquerdo de (3.74),

$$\frac{\partial \mathcal{H}(y)}{\partial F^{ij}(x)} = - \frac{1}{4} (\partial_i A_j - \partial_j A_i - F_{ij}) \delta(y-x). \quad (3.82)$$

O lado direito é nulo, o que resulta na condição

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i. \quad (3.83)$$

Resta apenas encontrar as equações de movimento. Para tanto vamos utilizar a equação (3.35)

$$dq^a = -(M^{-1})^{ab} [\{\Phi_b, \Phi_z\}dq^z + \{\Phi_b, \Phi_t\}dq^0]. \quad (3.84)$$

Temos

$$dA^i = -(M^{-1})^{[i,0j]} [\{\Phi_{0j}, \Phi_z\}dq^z + \{\Phi_{0j}, \Phi_t\}dq^0] \quad (3.85)$$

e

$$dF^{0i} = -(M^{-1})^{[0i,j]} [\{\Phi_j, \Phi_z\}dq^z + \{\Phi_j, \Phi_t\}dq^0]. \quad (3.86)$$

A partir de (3.85) mostra-se que os PP  $\{\Phi_{0j}, \Phi_z\}$  são todos nulos. Precisamos então calcular

$$\partial_0 A^i = -(M^{-1})^{[i,0j]} \{\Phi_{0j}, \Phi_t\} = (M^{-1})^{[i,0j]} \frac{\partial \mathcal{H}(y)}{\partial F^{0j}(x)}, \quad (3.87)$$

ou,

$$\partial_0 A_i = F_{0i} + \partial_i A_0. \quad (3.88)$$

De (3.86),

$$dF^{0i} = -(M^{-1})^{[0i,j]} [\{\Phi_j, \Phi_z\}dq^z + \{\Phi_j, \Phi_t\}dq^0], \quad (3.89)$$

que podemos reescrever por

$$dF^{0i} = dF^{i0} + [\partial_j F^{ij} - \partial_j F^{ji} - 2m^2 A^i] dq^0. \quad (3.90)$$

Usando o fato de  $F_{ij}$  ser antissimétrico, dada (3.83), podemos escrever

$$\partial_0 F^{0i} = -\partial_j F^{ji} - m^2 A^i. \quad (3.91)$$

Assim, as equações de movimento são

$$F_{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 \quad (3.92)$$

e

$$\partial_0 F^{0i} + \partial_j F^{ji} + m^2 A^i = 0. \quad (3.93)$$

Podemos unificar as condições (3.78), (3.81), (3.83) e a equação (3.92) em

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (3.94)$$

Já a equação (3.93) e a condição (3.80), que podemos escrever por



$$\partial_j F^{j0} + m^2 A^0 = 0, \quad (3.95)$$

podem ser unificadas em

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0. \quad (3.96)$$

Encontramos então a já conhecida equação de Proca, (3.96), em conjunto com as condições (3.94).

### 3.5 O Campo Eletromagnético

Para tratar o caso do campo vetorial real sem massa, vamos partir da Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} A_i \partial_0 F^{0i} - \frac{1}{4} A_i \partial_0 F^{i0} + \frac{1}{4} (F^{0i} - F^{i0}) \partial_0 A_i - \mathcal{H} \quad (3.97)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & -\frac{1}{4} (F^{i0} - F^{0i}) \partial_i A_0 - \frac{1}{4} A_0 \partial_i (F^{i0} - F^{0i}) - \frac{1}{4} (F^{ij} - F^{ji}) \partial_i A_j - \\ & - \frac{1}{4} A_j \partial_i (F^{ij} - F^{ji}) + \frac{1}{4} [ F^{00} F_{00} + F^{ij} F_{ij} + F^{0i} F_{0i} + F^{i0} F_{i0} ] . \end{aligned} \quad (3.98)$$

que difere do campo de *Proca* apenas pela ausência do termo de massa  $(1/2)m^2 A^2$ . Novamente separamos as variáveis  $\{q^i\} \equiv \{A^i, F^{0i}, F^{i0}, A^0, F^{00}, F^{ij}\}$  da Lagrangiana e reconhecemos os coeficientes e os vínculos

$$\left\{ \begin{array}{l} a_t = -\mathcal{H}(x) \\ a_i = \frac{1}{4} [F^{0i}(x) - F^{i0}(x)] \\ a_{0i} = \frac{1}{4} A^i(x) \\ a_{i0} = -\frac{1}{4} A^i(x) \\ a_0 = 0 \\ a_{00} = 0 \\ a_{ij} = 0. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_t = p_0 + \mathcal{H}(x) \\ \Phi_i = \Pi_i(x) - \frac{1}{4} [F^{0i}(x) - F^{i0}(x)] \\ \Phi_{0i} = \Pi_{0i}(x) - \frac{1}{4} A_i(x) \\ \Phi_{i0} = \Pi_{i0}(x) + \frac{1}{4} A_i(x) \\ \Phi_0 = \Pi_0(x) \\ \Phi_{00} = \Pi_{00}(x) \\ \Phi_{ij} = \Pi_{ij}(x). \end{array} \right. \quad (3.99)$$

Exatamente como no modelo de Proca.

A matriz  $M$  deve ser, por consequência, a mesma:

$$M = \frac{1}{2} \delta(x-y) \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{1}_{3 \times 3} & \mathbf{1}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 9} \\ \mathbf{1}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 9} \\ -\mathbf{1}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 9} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 1} & \mathbf{0}_{1 \times 1} & \mathbf{0}_{1 \times 9} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 1} & \mathbf{0}_{1 \times 1} & \mathbf{0}_{1 \times 9} \\ \mathbf{0}_{9 \times 3} & \mathbf{0}_{9 \times 3} & \mathbf{0}_{9 \times 3} & \mathbf{0}_{9 \times 1} & \mathbf{0}_{9 \times 1} & \mathbf{0}_{9 \times 9} \end{pmatrix}. \quad (3.100)$$

Escolheremos novamente as variáveis  $A^i$  e  $F^{0i}$  e os parâmetros  $A^0$ ,  $F^{00}$ ,  $F^{i0}$  e  $F^{ij}$ , de forma que estamos interessados na submatriz

$$M' = \frac{1}{2} \delta(x-y) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M'^{-1} = 2\delta(z-x) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.101)$$

As condições de integrabilidade são novamente dadas por

$$\partial_z \mathcal{H} = (\partial_z a_a - \partial_a a_z) (M^{-1})^{ab} \partial_b \mathcal{H}, \quad (3.102)$$

com  $\{q^a\} \equiv \{A^i, F^{0i}\}$  e  $\{q^z\} \equiv \{F^{i0}, A^0, F^{00}, F^{ij}\}$ .

A condição para  $q^z = F^{i0}$  é dada por

$$\frac{\partial \mathcal{H}(y)}{\partial F^{i0}(x)} = (M)_{[i0xjw]} (M'^{-1})^{[jw0kz]} \frac{\partial \mathcal{H}(y)}{\partial F^{0k}(z)}, \quad (3.103)$$

a qual já vimos resultar em

$$F^{i0} = -F^{0i}. \quad (3.104)$$

Para  $q^z = A^0$ :

$$\frac{\partial \mathcal{H}(y)}{\partial A^0(x)} = 0. \quad (3.105)$$

ou,

$$\partial_i [F^{i0} - F^{0i}] = 0. \quad (3.106)$$

Com  $q^z = F^{00}$  temos novamente

$$F^{00} = 0 \quad (3.107)$$

e para  $q^z = F^{ij}$  há a equação

$$\frac{\partial \mathcal{H}(y)}{\partial F^{ij}(x)} = 0, \quad (3.108)$$

o que resulta na mesma condição

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i. \quad (3.109)$$

Das equações de movimento

$$dq^a = -(M^{-1})^{ab} [\{\Phi_b, \Phi_z\} dq^z + \{\Phi_b, \Phi_t\} dq^0] \quad (3.110)$$

temos, para  $q^a = A^i$ ,

$$\partial_0 A^i = (M^{-1})^{[i,0j]} \frac{\partial \mathcal{H}(y)}{\partial F^{0j}(x)}, \quad (3.111)$$

ou,

$$F_{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0. \quad (3.112)$$

Se fizermos  $q^a = F^{0i}$ ,

$$dF^{0i} = -(M^{-1})^{[0i,j]} [\{\Phi_j, \Phi_z\}dq^z + \{\Phi_j, \Phi_t\}dq^0]. \quad (3.113)$$

Esta equação fica

$$\partial_0 F^{0i} = \partial_0 F^{i0} + \partial_j F^{ij} - \partial_j F^{ji}. \quad (3.114)$$

Com (3.109) e (3.112),

$$\partial_0 F^{0i} = -\partial_j F^{ji}. \quad (3.115)$$

Podemos unificar as equações por

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (3.116)$$

e

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (3.117)$$

que são as equações para o campo eletromagnético.

Note que o resultado encontrado para o campo EM é obtido a partir do campo de Proca no limite  $m \rightarrow 0$ . Contudo nem todos os resultados podem ser obtidos por este limite. Por exemplo, ao se tomar o gradiente da equação (3.96), obtemos

$$\partial_\nu (\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu) = 0 \quad \longrightarrow \quad \partial_\nu A^\nu = 0, \quad (3.118)$$

que vem a ser a condição de *Lorenz*. Sabemos que esta condição é apenas uma possível escolha de Gauge para o eletromagnetismo, ou seja, não é obrigatoriamente satisfeita. Assim, embora as equações de campo do EM possam ser deduzidas com o limite de massa nula, pelo menos para este formalismo, ambos os campos consistem em teorias muito diferentes.

A aplicação deste formalismo em ações de primeira ordem mostra também outra característica, talvez a mais importante. A análise de vínculos neste caso é independente da escolha de gauge para teorias que sejam invariantes de gauge. No caso do campo eletromagnético, por exemplo, fomos capazes de encontrar os verdadeiros graus de liberdade do sistema sem que uma escolha particular de gauge precisasse ser feita. Os resultados mostrados neste capítulo estão sintetizados em [9].

# Referências Bibliográficas

- [1] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **82**, 914 (1951).
- [2] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **91**, 713 (1953).
- [3] J. Schwinger, *Lectures on Particles and Field Theory, Vol. 2* - Eds. S. Deser, K. W. Ford; Englewood Cliffs, Prentice-Hall (1965).
- [4] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. London A* **117**, 610 (1928).
- [5] R. Y. Duffin, *Phys. Rev.* **54**, 1114 (1938).
- [6] N. Kemmer, *Proc. Roy. Soc. A* **173**, 91 (1939).
- [7] G. Petiau, *Acad. Roy. de Belg., A. Sci. Mem. Collect* **16** (1936).
- [8] A. Palatini, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* **43**, 203 (1919).
- [9] M. C. Bertin, B. M. Pimentel, P. J. Pompeia, *Mod. Phys. Lett. A* **20**, 2873 (2005).

## Considerações Finais

Neste trabalho tivemos a oportunidade de formular um novo método de tratamento de sistemas singulares, *via* formalismo de *Hamilton-Jacobi*. Nosso principal interesse foi explorar os aspectos geométricos dessa análise, especialmente para interpretar a presença de vínculos em uma teoria como uma redução de graus de liberdade do espaço de configuração. Para sistemas de ações de primeira ordem, nosso foco de estudo, este formalismo resultou em um método consideravelmente simples e direto, com os resultados corretos já esperados. Estudos futuros devem mostrar se a extensão para sistemas de ordem superior, esboçada no capítulo 2, é realmente uma alternativa construtiva ao método de *Dirac*. Se isto for possível, esperamos no mínimo que muitos aspectos obscuros do método Hamiltoniano sejam esclarecidos.

A preferência por uma visão geométrica dos sistemas vinculados exigiu a utilização do quadro completo de *Carathéodory*, principalmente para explicar a relação entre o sistema de EDP de HJ e as equações características e, também, como toda essa relação se dá para um sistema singular. Tratamos os sistemas singulares como generalizações dos sistemas regulares e verificamos que, numa formulação independente do parâmetro, todos os sistemas são vinculados. Esse importante teorema mostra que as teorias vinculadas são gerais e então a importância do estudo desses sistemas torna-se evidente.

Ações de primeira ordem possuem todos os seus graus de liberdade vinculados. Essa característica torna o método muito interessante para esse tipo de Lagrangiana. Vimos que neste caso é a análise das condições de integrabilidade que revela quais os verdadeiros graus de liberdade do sistema. Existe uma certa liberdade na escolha desses graus de liberdade, dada pela liberdade da escolha da matriz  $M$  se esta for singular. No entanto, não está claro ainda o que significa essa liberdade. Nos casos que foram analisados, nosso foco foi encontrar o espaço de fase adequado que descreve as equações de movimento, pois sua estrutura simplética é aquela que deve ser usada para a quantização.

O método se mostrou invariante a escolhas de gauge quando a teoria foi aplicada a Lagrangianas de primeira ordem que manifestaram este tipo de simetria. Mostraremos nos Apêndices como Teorias de Gauge são tratados pelo formalismo de *Dirac* e como as transformações de simetria são relacionadas a *vínculos de primeira classe*. No método Hamiltoniano uma escolha de gauge deve ser feita para revelar os verdadeiros graus de liberdade de uma teoria. Contudo, no formalismo de *Hamilton-Jacobi* nenhuma dificuldade desse tipo emerge. As variáveis dinâmicas e os parâmetros são completamente determinados sem que seja necessário escolher um gauge. O caso do campo eletromagnético de primeira ordem é um

bom exemplo. Não foi objetivo deste trabalho comparar resultados entre os dois formalismos, mas essa diferença no caso de existência de simetrias de gauge será tema de pesquisa futura.

Outro tema de pesquisa futura deve ser a investigação de Lagrangianas com derivadas de ordem superior. Estas também podem, por meio de redefinições de variáveis, ser escritas em termos de Lagrangianas de primeira ordem e, assim, este vem a ser um campo promissor de pesquisa.

## Apêndice A

# O Formalismo Hamiltoniano

No primeiro capítulo vimos que o formalismo Hamiltoniano consiste em uma maneira de descrever um sistema dinâmico Lagrangiano em termos de equações diferenciais de primeira ordem no espaço da fase  $\mathbf{T}^*\mathbb{Q}$ , em vez das Equações de *Euler-Lagrange*, que são geralmente de segunda ordem, no espaço de configuração  $\mathbb{Q}$ . Para descrever um sistema Lagrangiano em termos de uma Hamiltoniana há um passo fundamental, que vem a ser a imposição da condição Hessiana. Dadas as equações que definem as componentes do momento conjugado

$$p_i \equiv A_{ij} \dot{q}^j \quad A_{ij} \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}, \quad (\text{A.1})$$

em que  $A_{ij}$  são as componentes da matriz Hessiana  $A$ , desde que o determinante de  $A$  seja não nulo, podemos escrever

$$\dot{q}^i = (A^{-1})^{ij} p_j = \phi^i(q, p) \quad (\text{A.2})$$

e, assim, chegar às Equações Canônicas de *Hamilton* da maneira usual.

No entanto, se a condição Hessiana não for obedecida por uma determinada classe de Lagrangianas, é possível formular uma versão Hamiltoniana para este sistema?

O primeiro a responder com sucesso a esta pergunta foi *Dirac* [1], em 1950. Ele desenvolveu um **formalismo Hamiltoniano** para sistemas singulares, cujas Lagrangianas possuem matrizes Hessianas de determinante nulo. Este método é conhecido também como **Formalismo de Dirac**. Com este método *Dirac* construiu um programa que leva à quantização de sistemas que apresentam vínculos na Lagrangiana. Outros trabalhos relevantes no início do desenvolvimento da análise de sistemas singulares podem ser lidos em *Anderson & Begmann* [2], *Dirac* [3], *Bergmann & Goldberg* [4], *Dirac* [5] e *DeWitt*<sup>1</sup>, trabalhos que ajudaram a esclarecer e a refinar diversos aspectos do método original. Na década seguinte um tratamento expandido de sistemas Hamiltonianos singulares foi estabelecido por *Dirac*, [7]. Outros aspectos foram tratados por diversos autores desde então, como *Kundt* [8] e *Shanmugadhasan* [9] e [10]. Este Apêndice foi baseado principalmente nas referências [6], [7] e [11].

---

<sup>1</sup>Não publicado. Ver [6], p. 7.

Se o determinante a matriz  $A$  é nulo, isto significa que as equações (A.1) podem resultar em três tipos de equações. Algumas delas podem resultar em relações contendo as coordenadas e as velocidades no lado direito, de maneira que é possível inverter essas equações e expressar, como desejamos, as velocidades em função dos momentos e das coordenadas de forma unívoca. Para esses graus de liberdade, os momentos são relacionados univocamente com as velocidades, ou seja, neste setor há um isomorfismo canônico entre o espaço de fase  $\mathbf{T}^*\mathbb{Q}$  e o fibrado tangente  $\mathbf{T}\mathbb{Q}$ .

O segundo tipo de equação é aquele no qual não existirá velocidades no lado direito de (A.1). Para esses momentos não existem velocidades associadas, de forma que não há um isomorfismo entre  $\mathbf{T}^*\mathbb{Q}$  e  $\mathbf{T}\mathbb{Q}$  para esses graus de liberdade.

Um terceiro tipo de relação é aquele em que uma expressão muito complicada aparece à direita de (A.1), de modo que, ou a relação não é inversível para as velocidades, ou ela possui mais de uma raiz. Nesses casos a Lagrangiana deve ter uma forma muito incomum, como por exemplo, depender de potências superiores ao quadrado das velocidades. Na maioria dos casos de interesse esse tipo de Lagrangiana não ocorre, de modo que podemos ignorar a existência de relações desse tipo neste formalismo. Vamos supor que as Lagrangianas sejam bem comportadas e que somente os dois primeiros casos ocorram.

Vamos supor que estamos lidando com um espaço de configuração de  $n$  dimensões  $\mathbb{Q}^n$  e que as trajetórias dinâmicas sejam parametrizadas pelo tempo  $t$ . Como vimos no Capítulo 2, esta não é exatamente uma restrição. Vamos supor também que  $m \leq n$  relações (A.1) sejam do primeiro tipo, ou seja, para estas podemos escrever

$$\dot{q}^a = (A'^{-1})^{ab} p_b \quad A'_{ab} \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b}. \quad (\text{A.3})$$

Em (A.3)  $\{a, b\} = \{1, \dots, m\}$ . Assim, há uma submatriz  $A'$  contida em  $A$  cujo determinante é não nulo.

As demais relações são do segundo tipo. Para estas podemos apenas escrever

$$p_x = \psi_x(q^i, p_a) \quad \{x\} = \{m + 1, \dots, n\}, \quad (\text{A.4})$$

sendo o lado direito independente das velocidades não inversíveis. Essas relações são chamadas de **Vínculos Primários**. Assim, a existência dessas relações, vamos supor que existam um número  $k$  delas, implica na existência de um conjunto de estados no espaço de fase para o qual (A.1) não tem solução e, portanto, não é possível definir uma função Hamiltoniana para estes estados. Esses estados definem um subespaço de fase de dimensão  $2k$ ,  $\mathbf{T}^*\mathbb{Q}^k$ , no qual nenhuma trajetória dinâmica é um extremo do problema variacional da Lagrangiana em questão. Neste caso, é impossível definir uma Hamiltoniana em  $\mathbf{T}^*\mathbb{Q}^k$ , mas não precisaremos ser capazes de defini-la afinal.

Por outro lado, (A.3) tem solução e é possível definir uma Hamiltoniana na região do espaço de fase na qual esta solução existe. Assim, definimos o subespaço  $\mathbf{T}^*\mathbb{Q}^m$ , cujas coordenadas são as posições e os momentos  $(q^a, p_a)$ . A evolução temporal deste sistema está, então, restrita a uma trajetória em  $\mathbf{T}^*\mathbb{Q}^m$ . Por isso as relações (A.4) são tratadas como vínculos e  $\mathbf{T}^*\mathbb{Q}^m$  é freqüentemente chamada de **superfície primária**.



Quanto à função Hamiltoniana, vamos defini-la a princípio por

$$H_0 = p_i \dot{q}^i - L . \quad (\text{A.5})$$

Já que ela só pode ser definida na superfície primária, não há problemas em (A.5), pois podemos mostrar que na superfície, onde são obedecidas as equações (A.4),  $H_0$  não depende das velocidades  $\dot{q}^x$ :

$$\frac{\partial H_0}{\partial \dot{q}^x} = p_i \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial \dot{q}^x} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^x} = p_x - \psi_x = 0 . \quad (\text{A.6})$$

Se as relações (A.4) são vínculos e, portanto, restringem a dinâmica do sistema a  $\mathbf{T}^*\mathbb{Q}^m$ , vamos escrevê-las como

$$\Phi_x \equiv p_x - \psi_x = 0 \quad (\text{A.7})$$

e as expressões  $\Phi_x = 0$  representam os vínculos primários. No formalismo simplético, as equações de movimento desse sistema em  $\mathbf{T}^*\mathbb{Q}^n$  são dadas por  $(\{\alpha\} = \{1, \dots, 2n\})$

$$\Phi_z = 0 \quad \text{e} \quad \dot{\xi}^\alpha = \{\xi^\alpha, H_0\} . \quad (\text{A.8})$$

Essas equações não podem, entretanto, ser resolvidas nessa forma. Mas podemos incluir os vínculos na Hamiltoniana com multiplicadores de *Lagrange*. Assim, definimos uma segunda Hamiltoniana, denominada **Hamiltoniana primária**,

$$H_P = H_0 + \Phi_x u^x . \quad (\text{A.9})$$

Os parâmetros  $u_x$  são, a princípio, funções indeterminadas e a Hamiltoniana primária é uma função em  $\mathbf{T}^*\mathbb{Q}^n$ . Mas não apenas uma função e sim todo um conjunto de Hamiltonianas parametrizadas por  $u_x$ . Na superfície primária,  $H_P$  coincide com  $H_0$  pois as funções  $\Phi_x$  são nulas nessa região. Dizemos então que  $H_P$  é fracamente igual a  $H_0$ , ou,  $H_P \approx H_0$ . Assim, duas funções são fracamente iguais se elas coincidirem na superfície primária. Com esta definição, devemos reescrever os vínculos como igualdades fracas:

$$\Phi_x \approx 0 . \quad (\text{A.10})$$

Voltando nossa atenção à Hamiltoniana  $H_P$ , notamos que ela não está completamente determinada em razão dos parâmetros  $u_x$ . Nosso desejo é obter uma Hamiltoniana única, então, devemos fazer um esforço para obter os parâmetros de *Lagrange*. Além disso, temos determinada a superfície primária mas não temos certeza de que os vínculos primários sejam suficientes para manter o sistema sobre a superfície. Consideraremos, então, que os vínculos devem se manter sobre a trajetória do sistema em  $\mathbf{T}^*\mathbb{Q}^m$ , ou seja, que a variação dos vínculos no tempo seja nula na superfície. Assim, vamos exigir que  $\dot{\Phi}_x \approx 0$ . A evolução temporal de uma função é gerada agora por  $H_P$ , de modo que

$$\dot{\Phi}_z = \{\Phi_z, H_P\} \approx 0 . \quad (\text{A.11})$$

Essas são chamadas condições de consistência. Usando a definição (A.9),

$$\{\Phi_z, H_P\} = \{\Phi_z, H_0 + \Phi_x u_x\} \approx \{\Phi_z, H_0\} + u_x \{\Phi_z, \Phi_x\} \approx 0 . \quad (\text{A.12})$$

Na expressão anterior omitimos um termo linearmente proporcional aos vínculos, que aparece porque os parâmetros  $u^x$  são funções no espaço de fase. No entanto este termo é fracamente nulo e por esta razão podemos ignorá-lo. Para manter a notação matricial que usamos durante o texto, vamos introduzir a matriz  $M$ , cujos elementos são

$$M_{zx} = \{\Phi_z, \Phi_x\}. \quad (\text{A.13})$$

Temos, assim, uma equação fraca para os parâmetros:

$$M_{zx} u^x \approx - \{\Phi_z, H_0\}. \quad (\text{A.14})$$

As funções  $u_x$  serão completamente determinadas no caso em que o determinante de  $M$  seja não nulo. Neste caso podemos escrever

$$u^x \approx -(M^{-1})^{xz} \{\Phi_z, H_0\}. \quad (\text{A.15})$$

Podemos tomar as equações de movimento e verificar o que ocorre:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}^{\alpha'} &= \{\xi^{\alpha'}, H_P\} \approx \{\xi^{\alpha'}, H_0\} + \{\xi^{\alpha'}, \Phi_x\} u^x \approx \\ &\approx \{\xi^{\alpha'}, H_0\} - \{\xi^{\alpha'}, \Phi_x\} (M^{-1})^{xy} \{\Phi_y, H_0\} , \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

em que  $\{\alpha'\} = \{1, \dots, 2m\}$ .

Esta estrutura de equações é a motivação para a introdução dos parênteses de *Dirac* (PD),

$$\{F, G\}^* = \{F, G\} - \{F, \Phi_x\} (M^{-1})^{xy} \{\Phi_y, G\}. \quad (\text{A.17})$$

Os PD são a estrutura simplética do espaço  $\mathbf{T}^*\mathbb{Q}^m$ , como pode ser facilmente verificado através das propriedades estudadas na seção 1.3.4. Agora o sistema já está restrito a  $\mathbf{T}^*\mathbb{Q}^m$ , o que significa que os vínculos podem ser levados fortemente a zero pois as relações (A.7) são fortemente satisfeitas pela Hamiltoniana  $H_P$ . Assim, ao substituirmos nas equações de movimento os PP pelos PD,  $H_P = H_0$  fortemente e as equações de movimento são escritas por

$$\dot{\xi}^{\alpha'} = \{\xi^{\alpha'}, H_0\}^* . \quad (\text{A.18})$$

Portanto, no caso em que  $M$  é regular, a estrutura Hamiltoniana é definida pela Hamiltoniana Canônica  $H_0$  em conjunto com os Parênteses de *Dirac* (A.17).

Contudo, existirão casos em que  $M$  é singular. Isto implica em três tipos de equações que podem surgir de (A.14). Algumas dessas equações podem ser resolvidas para os seus parâmetros e outra possibilidade é que algumas relações sejam identicamente satisfeitas, ou seja, resultem em  $0 \approx 0$ . Deixaremos ambos os casos para uma análise futura. Nessa fase do formalismo o que nos interessa é a terceira possibilidade: que outras equações resultem em relações simples entre as coordenadas e os momentos. Essas relações devem ser fracamente

satisfeitas e são chamadas de **vínculos secundários**. Quando encontrados, os vínculos secundários devem ser colocados na forma

$$\chi_{x'} \approx 0 , \quad (\text{A.19})$$

em que  $x'$  assume os valores do número desses vínculos. Os vínculos secundários também devem se conservar na trajetória dinâmica, de modo que devemos mais uma vez construir as equações

$$\dot{\chi}_{x'} = \{\chi_{x'}, H_P\} \approx 0 . \quad (\text{A.20})$$

Podemos encontrar novos vínculos, que devem ser testados em suas condições de consistência até que este processo resulte em nenhum vínculo novo. Também pode ocorrer uma contradição com vínculos anteriores e, neste caso, possivelmente a Lagrangiana não é consistente e deve ser descartada. Caso isto não ocorra, por fim, temos em mão um conjunto de vínculos primários, secundários, etc que, agora, podem ser combinados em um único conjunto

$$\Phi_x \approx 0 , \quad (\text{A.21})$$

em que agora o índice  $x$  assume os valores de todos os vínculos, tanto os primários quanto os encontrados nas condições de consistência, e os parâmetros  $u_x$  englobam todos os parâmetros de *Lagrange*.

Construiremos, agora, uma Hamiltoniana total com todo o conjunto de todos os vínculos encontrados:

$$H_T = H_0 + \Phi_x u^x . \quad (\text{A.22})$$

Com o conjunto de vínculos estendido (A.21), podemos definir uma nova matriz

$$C_{xy} \equiv \{\Phi_x, \Phi_y\} . \quad (\text{A.23})$$

Vamos analisar as condições de consistência agora que o conjunto de vínculos está completo. Essas relações podem ser apenas de dois tipos: aquelas que fixam os parâmetros de Lagrange e aquelas que são apenas identicamente nulas. Elas resultam no sistema de equações

$$C_{yx} u^x \approx -\{\Phi_y, H_0\} . \quad (\text{A.24})$$

Novamente, os parâmetros serão completamente determinados se  $C$  for regular:

$$u^x \approx -(C^{-1})^{xy} \{\Phi_y, H_0\} . \quad (\text{A.25})$$

Portanto, as equações de movimento podem novamente ser escritas por

$$\dot{\xi}^\alpha = \{\xi^\alpha, H_T\} = \{\xi^\alpha, H_0\} - \{\xi^\alpha, \Phi_x\} (C^{-1})^{xy} \{\Phi_y, H_0\} , \quad (\text{A.26})$$

que nos faz introduzir os PD

$$\{F, G\}^* = \{F, G\} - \{F, \Phi_x\}(C^{-1})^{xy}\{\Phi_y, G\}. \quad (\text{A.27})$$

Sempre que as equações envolverem os PD, as igualdades fracas podem ser levadas a igualdades fortes. Assim, no caso em que  $C$  é regular, o procedimento Hamiltoniano está completado e as equações de movimento serão

$$\dot{\xi}^\alpha = \{\xi^\alpha, H_0\}^*. \quad (\text{A.28})$$

Se  $C$  for singular, algumas das equações (A.24) podem ser resolvidas para os parâmetros, mas outras resultarão em  $0 \approx 0$ . Vamos supor que o posto da matriz  $C$ , que corresponde ao número de seus autovalores não nulos, seja  $Q$ . Assim, teremos um sistema de  $Q$  equações para  $Q$  parâmetros, sistema que pode ser acoplado em alguns casos. Entretanto, outros parâmetros não podem ser determinados.

Já que o conjunto de vínculos está completo, a singularidade de  $C$  implica no fato de que alguns vínculos possuem Parênteses de Poisson fracamente nulos com todos os demais. Uma função que possui PP nulos com todos os vínculos é chamada **função de primeira classe**. Tais vínculos são denominados **vínculos de primeira classe** e devem ser classificados de modo diferente dos demais vínculos. Esses últimos serão chamados **vínculos de segunda classe**. Se o posto de  $C$  é  $Q$ , podemos escolher uma submatriz  $C'$  de dimensão  $Q$ , regular. Escolhida essa matriz temos que  $Q$  relações (A.24) fornecem  $Q$  parâmetros:

$$u^a \approx -(C'^{-1})^{ab}\{\Phi_b, H_0\} \quad \{a\} = \{1, \dots, Q\}. \quad (\text{A.29})$$

Esses parâmetros são aqueles que acompanham os vínculos de segunda classe na Hamiltoniana total. Vamos reescrever esta Hamiltoniana separando os vínculos de primeira e segunda classes:

$$H_T = H_0 + \Phi_a u^a + \Phi_k u^k, \quad (\text{A.30})$$

em que  $\Phi_a$  são vínculos de segunda classe, com parâmetros dados por (A.29), e  $\Phi_k$  são vínculos de primeira classe. Vamos ver o que ocorre com as equações de movimento. Temos

$$\dot{\xi}^\alpha = \{\xi^\alpha, H_T\} \approx \{\xi^\alpha, H_0\} + \{\xi^\alpha, \Phi_a\}u^a + \{\xi^\alpha, \Phi_k\}u^k.$$

Os parâmetros  $u^a$  são determinados por (A.29), mas os parâmetros  $u^k$  não podem ser fixados pelo formalismo. Assim, temos

$$\dot{\xi}^\alpha \approx \{\xi^\alpha, H_0\} - \{\xi^\alpha, \Phi_a\}(C'^{-1})^{ab}\{\Phi_b, H_0\} + \{\xi^\alpha, \Phi_k\}u^k. \quad (\text{A.31})$$

Vamos definir os PD por

$$\{\xi^\alpha, H_0\}^* \equiv \{\xi^\alpha, H_0\} - \{\xi^\alpha, \Phi_a\}(C'^{-1})^{ab}\{\Phi_b, H_0\}. \quad (\text{A.32})$$

Com esta estrutura em vez dos PP, a Hamiltoniana total pode ser escrita levando os vínculos secundários fortemente a zero e, assim,

$$H_T = H_0 + \Phi_k u^k . \quad (\text{A.33})$$

As equações de movimento tornam-se, então,

$$\dot{\xi}^\alpha = \{\xi^\alpha, H_0 + \Phi_k u^k\}^* \approx \{\xi^\alpha, H_0\}^* + \{\xi^\alpha, \Phi_k\}^* u^k . \quad (\text{A.34})$$

Tanto a Hamiltoniana quanto as equações de movimento ainda apresentam parâmetros indeterminados, tantos quanto for o número de vínculos de primeira classe da teoria, que não podem ser fixados por outras condições de consistência. Assim, terminamos com uma Hamiltoniana que não é univocamente definida. Devemos agora analisar o que significa esta dependência de funções arbitrárias.

Note que a equação (A.34) representa uma transformação canônica. Podemos escrevê-la de modo mais geral como

$$\delta \mathbf{x} = \{\xi^\alpha, H_0\}^* \delta \epsilon + \{\xi^\alpha, \Phi_k\}^* u^k \delta \epsilon , \quad (\text{A.35})$$

e esta expressão indica a variação de um ponto  $\mathbf{x}$  sobre uma trajetória parametrizada por  $\epsilon$ . Esta variação tem duas componentes. A primeira é a evolução gerada pela Hamiltoniana canônica. Ela é a parte física da transformação. O segundo termo, especificamente

$$\{\xi^\alpha, \Phi_k\}^* u^k \delta \epsilon , \quad (\text{A.36})$$

é completamente arbitrário em razão da presença dos parâmetros  $u^k$ . Assim, ela é uma transformação canônica mas não pode ter qualquer influência sobre a trajetória do sistema no espaço de fase, caso contrário seríamos obrigados a abandonar o formalismo, pois qualquer escolha possível desses parâmetros corresponderia a uma Hamiltoniana diferente, e no início do processo começamos com apenas uma Lagrangiana. Esta transformação não representa um deslocamento real no espaço de fase, mas uma transformação em graus de liberdade "internos" ao sistema. Chamamos essas transformações por **Transformações de Gauge**.

As transformações de gauge que conhecemos da teoria de campos são sempre devidos à presença de vínculos de primeira classe nesses sistemas. Como podemos ver de (A.36), são os vínculos de primeira classe que geram essas transformações. Se desejamos obter uma Hamiltoniana única no final do processo, devemos fixar os parâmetros livres. Este processo é o de fixação de gauge.

Para fixar o gauge no formalismo Hamiltoniano podemos impor novos vínculos ao sistema. Devemos escolher um vínculo  $\Psi$  para cada vínculo de primeira classe  $\Phi$  e, o conjunto completo, deve ser de segunda classe. Ao conjunto  $\Phi_k$  vamos adicionar então o conjunto  $\Psi_k$ . O conjunto completo  $\Phi_{k'}$  dá origem a outra Hamiltoniana:

$$H_T = H_0 + \Phi_{k'} u^{k'} . \quad (\text{A.37})$$

Os vínculos, agora de segunda classe, devem obedecer também às condições de consistência:

$$\{\Phi_{k'}, H_T\}^* \approx \{\Phi_{k'}, H_0\}^* + \{\Phi_{k'}, \Phi_{l'}\}^* u^{l'} \approx 0 , \quad (\text{A.38})$$

que resultam em

$$\{\Phi_{k'}, \Phi_{l'}\}^* u^{l'} \approx -\{\Phi_{k'}, H_0\}^* . \quad (\text{A.39})$$

Se o conjunto for realmente de segunda classe, a matriz de elementos  $G_{k'l'} \equiv \{\Phi_{k'}, \Phi_{l'}\}^*$  deve ser regular. Assim, determinamos completamente todos os coeficientes

$$u^{k'} \approx -(G^{-1})^{k'l'} \{\Phi_{l'}, H_0\}^* . \quad (\text{A.40})$$

Os parênteses de Dirac neste caso devem ser redefinidos:

$$\{F, G\}^{**} = \{F, G\}^* - \{F, \Phi_{k'}\}^* (G^{-1})^{k'l'} \{\Phi_{l'}, G\}^* . \quad (\text{A.41})$$

Se  $G$  não for regular significa que o Gauge não é completamente fixado com os vínculos  $\Psi$ . Na prática alguns vínculos que seriam aparentemente de segunda classe podem ser combinados para resultar em vínculos de primeira classe. Pode-se tentar adicionar novos vínculos, o que pode ser um processo por demais arbitrário, ou definir os PD (A.41) com a submatriz inversível de  $G$ . Alguns vínculos de primeira classe ainda existirão e o procedimento deve ser repetido para estes vínculos até que se chegue a um sistema cuja matriz dos vínculos seja inversível.

Este procedimento completa a parte clássica do programa de *Dirac* para quantização de sistemas singulares. No Apêndice B apresentaremos o exemplo do campo eletromagnético pelo formalismo de *Dirac* com uma Lagrangiana de primeira ordem. Neste exemplo o procedimento deve ser melhor esclarecido.

## Apêndice B

# Campo Eletromagnético de 1ª Ordem *a la* Dirac

Como densidade Lagrangiana para o campo eletromagnético vamos usar a função de primeira ordem

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (F^{0\nu} - F^{\nu 0}) \partial_0 A_\nu + \frac{1}{4} A_i \partial_0 F^{0i} - \frac{1}{4} A_i \partial_0 F^{i0} - \mathcal{H}_0 \quad (\text{B.1})$$

$$\mathcal{H}_0 = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{4} (F^{i\nu} - F^{\nu i}) \partial_i A_\nu - \frac{1}{4} A_\nu \partial_i (F^{i\nu} - F^{\nu i}) .$$

A partir desta Lagrangiana identificamos os vínculos primários

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_i = \Pi_i(x) + \frac{1}{4} [F^{0i}(x) - F^{i0}(x)] \\ \Phi_{0i} = \Pi_{0i}(x) - \frac{1}{4} A_i(x) \\ \Phi_{i0} = \Pi_{i0}(x) + \frac{1}{4} A_i(x) \\ \Phi_0 = \Pi_0(x) \\ \Phi_{00} = \Pi_{00}(x) \\ \Phi_{ij} = \Pi_{ij}(x). \end{array} \right. \quad (\text{B.2})$$

Que são fracamente nulos:  $\Phi_a \approx 0$  com  $\{a\} = \{1, \dots, 20\}$  obedecida a ordem das variáveis dinâmicas  $A^i, F^{0i}, F^{i0}, A^0, F^{00}$  e  $F^{ij}$ . Podemos definir a Hamiltoniana

$$\mathcal{H}_P = \mathcal{H}_0 + \Phi_a u^a. \quad (\text{B.3})$$

Por esta Hamiltoniana vamos testar as condições de consistência sobre os vínculos:

$$\{\Phi_a, \mathcal{H}_P\} = \{\Phi_a, \mathcal{H}_0\} + \{\Phi_a, \Phi_b\} u^a \approx 0 \quad (\text{B.4})$$

que resulta na equação

$$M_{ab} u^b = -\{\Phi_a, \mathcal{H}_0\}, \quad (\text{B.5})$$

com  $M_{ab} = \{\Phi_a, \Phi_b\}$ :

$$M = \frac{1}{2} \delta(x-y) \begin{pmatrix} 0_{3 \times 3} & \mathbf{1}_{3 \times 3} & -\mathbf{1}_{3 \times 3} & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 9} \\ -\mathbf{1}_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 9} \\ \mathbf{1}_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 9} \\ 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 1} & 0_{1 \times 1} & 0_{1 \times 9} \\ 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 1} & 0_{1 \times 1} & 0_{1 \times 9} \\ 0_{9 \times 3} & 0_{9 \times 3} & 0_{9 \times 3} & 0_{9 \times 1} & 0_{9 \times 1} & 0_{9 \times 9} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.6})$$

A singularidade de  $M$  implica na existência de vínculos secundários

$$\{\Phi_0, \mathcal{H}_0\} = \frac{1}{2} \partial_i (F^{i0} - F^{0i}) \approx 0 \quad (\text{B.7})$$

$$\{\Phi_{00}, \mathcal{H}_0\} = \frac{1}{2} F^{00} \approx 0 \quad (\text{B.8})$$

$$\{\Phi_{ij}, \mathcal{H}_0\} = \frac{1}{2} (F_{ij} - \partial_i A_j + \partial_j A_i) \approx 0. \quad (\text{B.9})$$

O novo conjunto de vínculos vem a ser

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_i = \Pi_i + \frac{1}{4} [F^{0i} - F^{i0}] \\ \Phi_{0i} = \Pi_{0i} - \frac{1}{4} A_i \\ \Phi_{i0} = \Pi_{i0} + \frac{1}{4} A_i \\ \Phi_0 = \Pi_0 \\ \Phi_{00} = \Pi_{00} \\ \Phi_{ij} = \Pi_{ij} \\ \chi_0 = \frac{1}{2} \partial_i (F^{i0} - F^{0i}) \\ \chi_{00} = \frac{1}{2} F^{00} \\ \chi_{ij} = \frac{1}{2} (F_{ij} - \partial_i A_j + \partial_j A_i) \end{array} \right. \quad (\text{B.10})$$

E a matriz estendida:

$$C = \frac{1}{2} \delta(x-y) \begin{pmatrix} 0_{3 \times 3} & \mathbf{1}_{3 \times 3} & -\mathbf{1}_{3 \times 3} & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 9} & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 9} \\ -\mathbf{1}_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 9} & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 9} \\ \mathbf{1}_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 9} & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 9} \\ 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 1} & 0_{1 \times 1} & 0_{1 \times 9} & 0_{1 \times 1} & 0_{1 \times 1} & 0_{1 \times 9} \\ 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 1} & 0_{1 \times 1} & 0_{1 \times 9} & 0_{1 \times 1} & -\mathbf{1}_{1 \times 1} & 0_{1 \times 9} \\ 0_{9 \times 3} & 0_{9 \times 3} & 0_{9 \times 3} & 0_{9 \times 1} & 0_{9 \times 1} & 0_{9 \times 9} & 0_{9 \times 1} & 0_{9 \times 1} & -\mathbf{1}_{9 \times 9} \\ 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 1} & 0_{1 \times 1} & 0_{1 \times 9} & 0_{1 \times 1} & 0_{1 \times 1} & 0_{1 \times 9} \\ 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 1} & \mathbf{1}_{1 \times 1} & 0_{1 \times 9} & 0_{1 \times 1} & 0_{1 \times 1} & 0_{1 \times 9} \\ 0_{9 \times 3} & 0_{9 \times 3} & 0_{9 \times 3} & 0_{9 \times 1} & 0_{9 \times 1} & \mathbf{1}_{9 \times 9} & 0_{9 \times 1} & 0_{9 \times 1} & 0_{9 \times 9} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.11})$$

Encontramos então uma nova Hamiltoniana



$$\mathcal{H}_T = \mathcal{H}_0 + \Phi_a u^a + \chi_\alpha \lambda^\alpha, \quad (\text{B.12})$$

em que  $\{\alpha\} = \{21, \dots, 31\}$ . Uma nova análise de consistência nos vínculos secundários não levam a novos vínculos. Assim, a singularidade de  $C$  nos diz que existem dois vínculos de primeira classe. Estes são dados por  $\Phi_0$  e  $\chi_0$  e a submatriz inversível de  $C$  é, portanto,

$$C' = \frac{1}{2} \delta(x - y) \begin{pmatrix} 0_{3 \times 3} & \mathbf{1}_{3 \times 3} & -\mathbf{1}_{3 \times 3} & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 9} & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 9} \\ -\mathbf{1}_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 9} & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 9} \\ \mathbf{1}_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 9} & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 9} \\ 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 1} & 0_{1 \times 9} & -\mathbf{1}_{1 \times 1} & 0_{1 \times 9} \\ 0_{9 \times 3} & 0_{9 \times 3} & 0_{9 \times 3} & 0_{9 \times 1} & 0_{9 \times 9} & 0_{9 \times 1} & -\mathbf{1}_{9 \times 9} \\ 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & \mathbf{1}_{1 \times 1} & 0_{1 \times 9} & 0_{1 \times 1} & 0_{1 \times 9} \\ 0_{9 \times 3} & 0_{9 \times 3} & 0_{9 \times 3} & 0_{9 \times 1} & \mathbf{1}_{9 \times 9} & 0_{9 \times 1} & 0_{9 \times 9} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.13})$$

É esta matriz regular que utilizaremos para definir os PD

$$\{F, G\}^* = \{F, G\} - \{F, \Phi_a\} (C'^{-1})^{ab} \{\Phi_b, G\}, \quad (\text{B.14})$$

em que  $\{a, b\} = \{1, \dots, 29\}$ , e  $\Phi_a$  são os vínculos de segunda classe. Com a definição dos parênteses (B.14) os vínculos de segunda classe podem ser levados a zero fortemente e a Hamiltoniana torna-se então

$$\mathcal{H}_T = \mathcal{H}_0 + \Phi_z u^z, \quad (\text{B.15})$$

com  $\Phi_z = \{\Phi_0, \chi_0\}$ . Esses são os vínculos de primeira classe e sua existência implica na dependência da Hamiltoniana de parâmetros arbitrários. Esses vínculos são geradores de transformações de Gauge locais. Fixar os parâmetros de (B.15) implica na fixação do gauge da teoria.

Agora que dispomos dos parênteses de *Dirac*, os vínculos de primeira classe podem ser escritos por

$$\begin{cases} \Phi_0 = \Pi_0, \\ \chi_0 = \partial_i F^{i0} = 2\partial_i \Pi_i. \end{cases} \quad (\text{B.16})$$

Vamos utilizar o Gauge de Radiação para encontrar os graus de liberdade físicos do sistema. A escolha de Gauge é normalmente feita com a imposição de um vínculo para cada vínculo de primeira classe, escolhidos de modo que o conjunto seja de segunda classe. Para o gauge de radiação temos as condições  $A_0 \approx 0$  e  $\partial_i A_i \approx 0$ . Então o novo conjunto de vínculos será

$$\begin{cases} \Phi_1 = \Pi_0, \\ \Phi_2 = A_0 \\ \Phi_3 = 2\partial_i \Pi_i \\ \Phi_4 = (1/2)\partial_i A_i. \end{cases} \quad (\text{B.17})$$

Note que inserimos um fator  $(1/2)$  em  $\Phi_4$ . A inserção de uma constante multiplicativa não altera o vínculo, pois tal constante pode, na Hamiltoniana, ser absorvida pelo parâmetro de *Lagrange* correspondente. Condições de consistência não levam a novos vínculos e, portanto, a matriz formada com os parênteses (B.14) desses vínculos, que são claramente de segunda classe, vem a ser

$$G = \delta(x - y) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\nabla_i^2 \\ 0 & 0 & \nabla_i^2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.18})$$

Sua inversa é dada por

$$G^{-1} = \delta(z - x) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4\pi|x-z|} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4\pi|x-z|} & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.19})$$

Assim, no gauge de radiação definimos novos parênteses generalizados

$$\{F, G\}^{**} = \{F, G\}^* - \{F, \Phi_x\}^* (G^{-1})^{xy} \{\Phi_y, G\}^*, \quad (\text{B.20})$$

com  $(\Phi_x, \Phi_y)$  correspondentes ao conjunto (1.17).

As verdadeiras variáveis dinâmicas são claramente  $A^i$  e  $F^{0i}$  neste gauge, e pode-se ver facilmente que os parênteses de Poisson e os generalizados coincidem para estas variáveis. As equações de movimento para estas variáveis vêm a ser

$$\dot{q}^a = \{q^a, \mathcal{H}_0\}^{**} \implies \begin{cases} \partial_0 A_i = F_{0i} \\ \partial_0 F_{0i} = \partial^j \partial_i A_j - \partial^j \partial_j A_i. \end{cases} \quad (\text{B.21})$$

Outros gauges podem ser escolhidos, por exemplo, o gauge de Lorenz  $\partial_\mu A^\mu \approx 0$ <sup>1</sup>. Este é um exemplo no qual a matriz  $G$  é singular, o que significa que esta escolha não fixa completamente o gauge. Vínculos de primeira classe ainda restarão e o procedimento de escolha de novos vínculos que fixam o gauge deve ser feito.

---

<sup>1</sup>Ver [11], sec. V.3.

# Referências Bibliográficas

- [1] P. A. M. Dirac - *Canad. J. Math.* **2**, 129 (1950).
- [2] J. L. Anderson, P. G. Bergmann - *Phys. Rev.* **111**, 965 (1951).
- [3] P. A. M. Dirac - *Canad. J. Math.* **3**, 1 (1951).
- [4] P. G. Bergmann, I. Goldberg - *Phys. Rev.* **98**, 531 (1955).
- [5] P. A. M. Dirac - *Proc. Roy. Soc.* **A246**, 326 (1958).
- [6] A. Hanson, T. Regge, C. Teitelboim - *Constrained Hamiltonian Systems* (1976).
- [7] P. A. M. Dirac - *Lectures in Quantum Mechanics* Yeshiva University, New York (1964).
- [8] W. Kundt - *Springer Tracts in Modern Physics* **40**, 107 (1966).
- [9] S. Shanmugadhasan - *Proc. Camb. Philos. Soc.* **59**, 743 (1963).
- [10] S. Shanmugadhasan - *J. Math. Phys.* **14**, 667 (1973).
- [11] K. Sundermeyer - *Lecture Notes in Physics* **169** (1982).