



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.007/15

O Modelo de Halos e o Espectro de Potência da Matéria Escura Morna

Jéssica Silvano Martins

Orientador

Dr. Rogério Rosenfeld (IFT-UNESP)

Coorientador

Dra. Flávia Sobreira (FERMILAB)



Agosto 2015

À minha família e amigos

Agradecimentos

É injusto tentar, em apenas uma página, agradecer as pessoas que me ajudaram e me apoiaram até a conclusão dessa dissertação. É muito difícil falar de todos, então já deixo aqui minhas desculpas aos não mencionados.

Meus estudos aprofundados do fascinante mundo da Física começaram na Universidade de Brasília, então agradeço primeiramente a seus professores, por terem sido a base dessa formação. Devo um agradecimento especial ao Dr. Arsen Melikyan, pois sem sua ajuda e conselhos eu dificilmente teria chegado até aqui.

Agradeço também o Instituto de Física Teórica e sua equipe de professores, por proporcionar o início da minha especialização em Física e à CAPES, pelo auxílio financeiro sem o qual esse mestrado não poderia ter sido feito.

Sou muito grata a meus orientadores nesse mestrado, Dr. Rogério Rosenfeld e Dra. Flávia Sobreira, pela paciência, conselhos e principalmente por aceitarem investir em um projeto de apenas um ano.

Apenas um agradecimento não é suficiente para recompensar minha família por tudo que tem feito por mim, mesmo distantes nesses últimos dois anos. Mesmo assim, agradeço a minha mãe, Cilineide, por sempre ter me estimulado a ler, estudar e aprender; a meu pai, Jorge, pelo seu carinho e por me apoiar, desde o início, a estudar Física; e a meu irmão, Jansen, um parceiro, da sua própria maneira, no caminho para realizar um sonho.

Deixo aqui também meus sinceros agradecimentos ao meu querido Heliudson, pela coragem de percorrer essa pequena jornada ao meu lado, com carinho, paciência e horas de discussões acaloradas sobre a Física e as fronteiras do conhecimento. Dizem que percorremos mais rápido um caminho sozinhos, mas vamos mais longe indo com alguém, e creio que isso é verdade. Nos últimos anos seu apoio tem sido muito importante para mim, ao me fazer rir quando eu estava triste e me fazer continuar, quando eu queria desistir.

Por fim, agradeço a todos aqueles que direta ou indiretamente ajudaram na minha formação acadêmica.

Resumo

Neste trabalho revisaremos o formalismo do Modelo de Halos e suas aplicações. No Modelo de Halos, toda a matéria do universo está contida em objetos virializados de matéria escura, resultado de colapso gravitacional. A distribuição de matéria escura nesses halos e como eles estão distribuídos no universo são os principais elementos para caracterizá-los. Mostraremos a teoria que descreve o modelo de halos e testaremos sua eficácia comparando-a com simulações numéricas de formação de estrutura no universo, por meio do espectro de potência.

Faremos também uma adaptação do modelo de halos para a matéria escura morna e mostraremos como esse tipo de matéria suprime a formação de estrutura do universo em pequenas escalas.

Palavras-chave: Modelo de halos; Espectro de potência; Matéria escura morna.

Áreas do conhecimento: Cosmologia

Abstract

In this work we review the formalism of the Halo Model, and its applications. In the Halo Model all the matter of the universe is contained in virialized dark matter halos, as a result of gravitational collapse. The distribution of dark matter within these halos, and how they are distributed in the universe are the main features to characterize them. We'll show the theory that describes the Halo Model and test its efficiency by comparing it to numerical simulations of structure formation in the universe, using the power spectrum.

We'll also do an adaptation of Halo model to warm dark matter, and show how this type of matter suppresses the structure formation of the universe in small scales.

Key-words: Halo model; Power spectrum; Warm dark matter.

Areas of knowledge: Cosmology

Lista de Figuras

1.1	Simulação <i>Millenium Simulation</i> mostrando a evolução temporal da matéria escura em um pedaço do universo. Quanto maior a quantidade de massa em uma inomogeneidade, maior é o halo formado. Figura de [1].	2
2.1	Mapa SDSS do universo. A Terra está no centro da imagem e cada ponto é uma galáxia. É interessante notar como a simulação exibida na figura (1.1) se assemelha a distribuição real de matéria no universo. Figura de [2].	6
2.2	Distância comóvel em função do redshift. Em todos os gráficos $\Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$. A radiação é uma parcela desprezível do universo hoje.	12
3.1	Espectro de potência para a cosmologia Λ CDM: $\Omega_{cdm} = 0.25, \Omega_b = 0.05, \Omega_\Lambda = 0.75$. Tal curva foi obtida usando o código CAMB (ver seção 4.3)	21
4.1	Transformada de Fourier do perfil de densidade de NFW normalizado, plotado em várias massas diferentes.	35
4.2	Espectros de potência não-lineares obtidos via Halofit e Modelo de Halos em $z = 0$ e com $\Omega_b = 0.24, \Omega_{cdm} = 0.76$ nas duas curvas.	39
4.3	Espectro de potência linear ($k^3 P_{linear}(k)$) e não linear através do Halofit ($k^3 P_{halofit}(k)$) e os termos de 1-halo ($k^3 P_{1h}(k)$) e 2-halos ($k^3 P_{2h}(k)$), além do espectro total ($k^3 P_{HMtotal}(k)$) do Modelo de Halos, da matéria escura para $\Omega_M = 1$ e em $z = 0$	40
4.4	Razão entre os espectros de potência não-lineares do Modelo de Halos e do Halofit.	40
5.1	Espectro de potência linear em $z = 0$ para matéria escura morna de massas $m_\chi = 0.25 keV, m_\chi = 0.75 keV$ e $m_\chi = 1.25 keV$. Também é possível ver o espectro de potência linear da matéria escura fria, via CAMB, para comparações.	45
5.2	Espectro de potência não-linear para o campo de densidade da matéria escura morna de três massas diferentes: $m_\chi = 0.25 keV, m_\chi = 0.75 keV$ e $m_\chi = 1.25 keV$	47

Sumário

Resumo	vii
Abstract	ix
Lista de Figuras	xi
1 Introdução	1
2 O Modelo Cosmológico Padrão	3
2.1 Revisão de Relatividade Geral	3
2.2 Modelo Friedmann-Robertson-Walker	5
2.3 Equações de Friedmann	7
2.4 Distâncias	11
3 Formação de Estruturas no Universo	15
3.1 Teoria de perturbação linear	15
3.1.1 Perturbações adiabáticas	17
3.1.2 Perturbações vetoriais	19
3.2 Espectro de Potência	19
3.3 Distorções no espaço dos redshifts	22
4 Modelo de Halos	27
4.1 Colapso Esférico	27
4.2 Características dos Halos	30
4.2.1 Densidade média de halos	30
4.2.2 Perfis de densidade dos halos	33
4.2.3 Bias	34
4.2.4 Halos na formação de estruturas	35
4.3 Testando o Modelo de Halos	38
5 Matéria Escura Morna e a Supressão de Perturbações	43
5.1 Espectro de Potência Linear da WDM	44
5.2 Modelo de Halos para WDM	44
5.2.1 Modificação da função de massa	44
5.2.2 Espectro de Potência não-linear para WDM	46
Conclusões e Perspectivas	49
Apêndice A	51
Referências Bibliográficas	58

1

Introdução

O modelo cosmológico mais aceito hoje, Λ CDM, descreve nosso universo como composto de 4% de matéria bariônica, que compõe os átomos, 20% de matéria escura e 76% de energia escura, cuja natureza sabemos muito pouco.

A energia escura é tida como uma energia de vácuo que age como uma anti-gravidade, fazendo o universo, ao invés de se contrair, expandir cada vez mais rápido, como constatado por observações de supernovas, a partir de 1998. Muitos esforços tem sido feitos para desvendar o que seria de fato a energia escura, como o projeto Dark Energy Survey (DES), que objetiva mapear uma grande área do céu e produzir o maior catálogo atual de dados cosmológicos, que serão usados como base para um estudo mais detalhado da energia escura [3].

A matéria escura também é um mistério e a necessidade de introduzi-la na física veio de desacordos entre teoria e várias observações [4, 5]. Quando observamos a curva de rotação de galáxias, por exemplo, vemos que sua velocidade geralmente é muito maior do que a esperada, como se houvesse uma grande quantidade de massa não-luminosa nessas galáxias. Além disso, para explicar a formação da estrutura em grandes escalas que vemos hoje no universo, deve existir algum tipo de matéria não-bariônica que teria desacoplado cedo do plasma primordial após o Big Bang. Hoje acredita-se que essa matéria exótica seja composta de partículas não-relativísticas e que interagem apenas gravitacionalmente e, possivelmente, via força fraca, por isso seu nome: matéria escura fria. Essas partículas desacoplaram com um campo de densidade praticamente homogêneo, presentes algumas pequenas perturbações originárias da época inflacionária do universo. Tais perturbações crescem devido a instabilidade gravitacional e por fim colapsam em objetos estáveis que chamamos de halos. São para esses halos que a matéria bariônica é posteriormente atraída gravitacionalmente e acaba por condensar em estrelas e galáxias.

O modelo que descreve essa evolução da matéria é conhecido como Modelo de Halos, onde a matéria luminosa que observamos é um traço da matéria escura oculta, não interagente com a radiação. Diversas simulações numéricas já foram feitas para estudar a distribuição e o colapso não-linear da matéria escura. Tais simulações, como na figura (1.1) mostram a matéria escura, inicialmente distribuída suavemente, se agrupando em uma rede complexa de filamentos e nós, como predito pelo Modelo de Halos. Este modelo então se mostra muito útil para tratar o regime não-linear, em escalas de poucos Megaparsecs, da formação de estrutura do universo.

Mas o fato da matéria escura ser não-relativística ainda pode ser questionado por dados recentes. Um novo modelo Λ WDM surge como candidato a uma generalização do Λ CDM, no sentido de que a matéria escura não seria totalmente fria. Nesse novo modelo

1 Introdução

é proposta a matéria escura morna, pois ela reproduz melhor dados observacionais de pequenas escalas em simulações. A matéria escura morna seria mais leve que a fria, o que a permitiria permanecer relativística por mais tempo no início da história do universo, de forma a causar uma já observada supressão na formação de estrutura em pequenas escalas.

No presente trabalho vamos mostrar como se dá a distribuição de matéria escura no Modelo de Halos, assim como a supressão na formação de estruturas pela matéria escura morna, por meio da estatística do espectro de potência sobre o campo de densidade da matéria. No capítulo 2 revisaremos alguns conceitos básicos da teoria da relatividade geral, necessários para derivar o modelo de Friedmann-Robertson-Walker e resolver as equações de Friedmann, que descrevem a evolução do universo.

No capítulo 3 será feito um estudo da teoria de perturbação linear no regime Newtoniano, assim como a definição da função de correlação de dois pontos e do espectro de potência.

No capítulo 4 veremos a teoria do Modelo de Halos. A introdução aos halos será feita com o modelo de colapso esférico da matéria, e em seguida serão apresentadas as principais características dos halos: sua função de massa e perfil de densidade. Mostraremos também a comparação do Modelos de Halos com outro modelo numérico através do espectro de potência não-linear da matéria escura.

A matéria escura morna será tratada no capítulo 5. Modificaremos o Modelo de Halos para esse novo tipo de matéria e mostraremos seus espectros de potência linear e não-linear.

Por fim, apresentaremos nossas conclusões e perspectivas de trabalhos futuros.

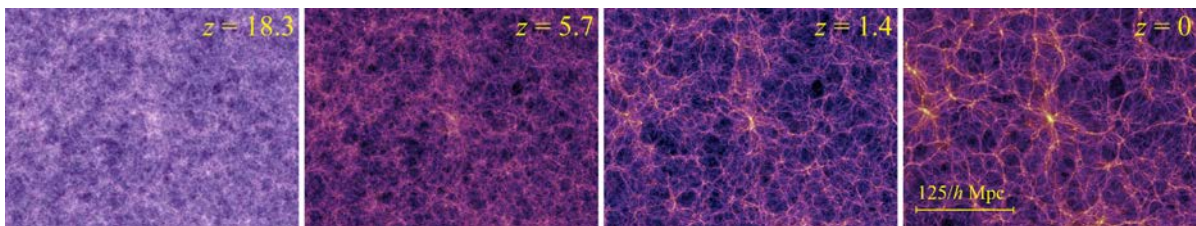


Figura 1.1: Simulação *Millenium Simulation* mostrando a evolução temporal da matéria escura em um pedaço do universo. Quanto maior a quantidade de massa em uma inhomogeneidade, maior é o halo formado. Figura de [1].

2

O Modelo Cosmológico Padrão

A física conhecida hoje é descrita por quatro forças fundamentais: a força forte, a força fraca, o electromagnetismo e a força gravitacional. No entanto, nas escalas de interesse da cosmologia, é a gravidade que domina. Portanto, para entender a formação e distribuição de estrelas, galáxias e aglomerados de galáxias, é preciso primeiro entender as leis que regem tais objetos.

A teoria que melhor descreve a interação gravitacional atualmente é a Teoria da Relatividade Geral. Ela é a base para descrever toda a evolução do universo.

2.1 Revisão de Relatividade Geral

A Teoria da Relatividade Geral foi formulada por Einstein em 1915 partindo da ideia de que todos os corpos sofrem influência da gravidade, e que todos os corpos caem da mesma maneira em um campo gravitacional. Este fato é conhecido como princípio de equivalência, e também pode ser formulado com a afirmação de que todo referencial uniformemente acelerado é localmente equivalente a um campo gravitacional homogêneo. Nessa teoria um corpo com massa distorce o continuum do espaço-tempo ao seu redor, curvando o espaço-tempo nessa região e alterando sua geometria.

As equações de Einstein, que descrevem o espaço-tempo e os objetos que o deformam e nele gravitam, podem ser obtidas através da ação de Einstein-Hilbert ($c = 1$, e usaremos $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1,1,1,1)$):

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{16\pi G} R + L_m \right), \quad (2.1)$$

onde g é o determinante da métrica $g_{\mu\nu}$ do espaço-tempo, G é a constante gravitacional universal, R é a curvatura escalar do espaço-tempo e L_m é a lagrangeana da matéria.

A curvatura escalar é definida como:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} R_{\mu\nu\alpha\beta}, \quad (2.2)$$

onde $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci e $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ é um tensor de posto 4 chamado tensor de Riemann, que quantifica a curvatura do espaço 4-dimensional, e pode ser escrito como [6]:

$$R_{\alpha\beta\gamma}^{\sigma} = \frac{\partial\Gamma_{\alpha\gamma}^{\sigma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial\Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma}}{\partial x^{\gamma}} + \Gamma_{\lambda\beta}^{\sigma}\Gamma_{\alpha\gamma}^{\lambda} - \Gamma_{\lambda\gamma}^{\sigma}\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}, \quad (2.3)$$

onde as quantidades $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$ são conhecidas como símbolos de Christoffel, e podem ser escritos em termos da métrica,

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma} \left(\frac{\partial g_{\sigma\beta}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\sigma\alpha}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\sigma}} \right). \quad (2.4)$$

Podemos escrever o tensor de energia-momento em termos da lagrangeana da matéria usando a relação

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}L_m)}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.5)$$

Variando a ação de Einstein-Hilbert em relação à métrica, chega-se em [7]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (2.6)$$

que são as equações de Einstein para a gravitação.

Existe ainda uma liberdade na formulação das equações de Einstein que mantém a conservação de energia. Essa liberdade está em adicionar um termo proporcional a métrica $g_{\mu\nu}$, já que $\nabla_{\mu}g_{\mu\nu} = 0$ ($\nabla_{\mu}A_{\alpha} = \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial x^{\mu}} - \Gamma_{\mu\alpha}^{\beta}A_{\beta}$). Dessa forma, a Eq.(2.1) pode ser modificada para [6]:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{16\pi G}(R - 2\Lambda) + L_m \right], \quad (2.7)$$

e as equações de Einstein ficam:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (2.8)$$

A constante Λ ficou conhecida como constante cosmológica. As equações de Einstein preveem um universo em expansão ou em contração. No entanto, Einstein acreditava que nosso universo era estático, o que o fez introduzir a constante cosmológica em suas equações, pois ela garantia tal estaticidade. Entretanto, no final da década de 1920, observações feitas por Edwin Hubble revelaram que o universo está de fato em expansão. Hoje a constante cosmológica é encarada como um tipo de energia de vácuo ainda desconhecida, chamada energia escura, que age como uma gravidade repulsiva,

fazendo o universo se expandir aceleradamente. Uma descrição detalhada dos indícios observacionais da expansão acelerada do universo pode ser encontrada em [8].

2.2 Modelo Friedmann-Robertson-Walker

Atualmente é possível fazer grandes e acuradas observações cosmológicas, entre elas mapas de áreas do universo, catalogando um grande número de galáxias. Tais mapas sugerem que a distribuição de matéria e radiação do universo observável é homogênea e isotrópica em escalas acima de 1000 *Mpc*. Na figura (2.1) podemos ver o mapa do Sloan Digital Sky Survey (SDSS) e observar como a distribuição de galáxias é muito semelhante, mesmo em regiões opostas do céu. A homogeneidade da radiação pode ser observada em medidas da radiação cósmica de fundo (CMB), como os mapas WMAP e PLANCK [9].

Mesmo que isso não signifique que o universo como um todo seja homogêneo e isotrópico, implica que ao menos uma região tão grande quanto o nosso volume de Hubble¹ atual seja assim. Então, a priori podemos considerar todo o universo observável como homogêneo e isotrópico em grandes escalas.

Para encontrar a métrica que descreve um espaço homogêneo e isotrópico, primeiro separamos as componentes da métrica:

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + 2g_{0i}dtdx^i + g_{ij}dx^i dx^j. \quad (2.9)$$

Notamos agora que a suposição de isotropia elimina os termos g_{0i} da métrica, caso contrário teríamos uma direção privilegiada no espaço. Escolhendo ainda a coordenada temporal como a de observadores comóveis, temos que $g_{00} = -1$ e a métrica fica:

$$ds^2 = -dt^2 + g_{ij}dx^i dx^j = -dt^2 + \gamma_{ij}dx^i dx^j = -dt^2 + dl^2, \quad \gamma_{ij} = -g_{ij} \quad (2.10)$$

Basta agora determinar γ_{ij} . A imposição de isotropia também implica em simetria esférica e, portanto, a métrica 3-dimensional adquire a forma [10]

$$dl^2 = \tilde{a}^2(t) \left[\lambda^2(r') dr'^2 + r'^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right]. \quad (2.11)$$

A curvatura escalar desta métrica 3-dimensional, calculada pela Eq.(2.2) é

$$R = \frac{3}{2a^2 r'^3} \frac{d}{dr'} \left[r'^2 \left(1 - \frac{1}{\lambda^2} \right) \right]. \quad (2.12)$$

¹Volume de Hubble, ou esfera de Hubble é o volume espacial que a luz consegue alcançar dada a idade do universo calculada a partir da expansão do universo (parâmetro cosmológico H_0). O raio da esfera de Hubble é definido como c/H_0 .

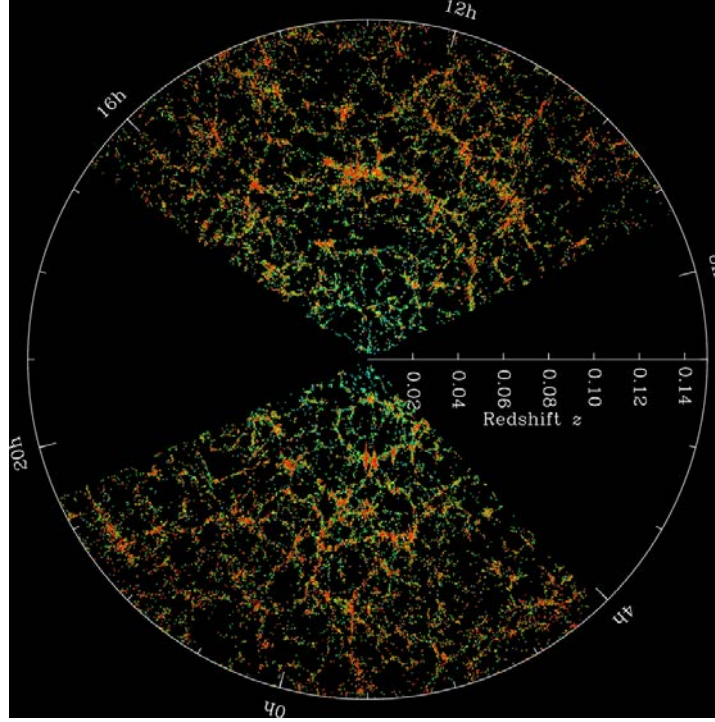


Figura 2.1: Mapa SDSS do universo. A Terra está no centro da imagem e cada ponto é uma galáxia. É interessante notar como a simulação exibida na figura (1.1) se assemelha a distribuição real de matéria no universo. Figura de [2].

A homogeneidade implica que as propriedades geométricas independem de r' e portanto R depende apenas do tempo. Igualando a Eq.(2.12) a uma constante em relação a r' e integrando em r' , obtemos

$$r'^2 \left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right) = c_1(t)r'^4 + c_2(t), \quad (2.13)$$

Para manter a consistência da equação quando $r = 0$, temos que $c_2 = 0$, e chegamos que $\lambda^2 = (1 - c_1 r'^2)^{-1}$. Podemos ajustar r' de forma a absorver o parâmetro $c_1 \neq 0$ a menos de seu sinal, que nomeamos como $k = \pm 1$. Introduzir $r^2 = |c_1|r'^2/k$ e $a^2(t) = c_1 \tilde{a}^2(t)$ conduz à métrica do espaço tempo completa:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right). \quad (2.14)$$

Tal métrica é chamada de métrica Friedmann-Robertson-Walker (FRW) e descreve um universo espacialmente homogêneo e isotrópico em cada instante de tempo t . $a(t)$ é denominado o fator de escala cósmico (ou fator de expansão) da métrica espacial e k pode ser 0, +1, -1, cada um desses valores determinando uma curvatura espacial

diferente (zero, positiva e negativa, respectivamente). De acordo com a métrica FRW, os símbolos de Christoffel não nulos são

$$\begin{aligned}\Gamma_{jk}^i &= \frac{1}{2}\gamma^{il}\left(\frac{\partial\gamma_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial\gamma_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial\gamma_{jk}}{\partial x^l}\right), \\ \Gamma_{ij}^0 &= \frac{\dot{a}}{a}\gamma_{ij}, \\ \Gamma_{0j}^i &= \frac{\dot{a}}{a}\delta_j^i.\end{aligned}\tag{2.15}$$

As componentes não nulas do tensor de Ricci também são facilmente calculadas

$$\begin{aligned}R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a}, \\ R_{ij} &= \left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2k}{a^2}\right]\gamma_{ij}.\end{aligned}\tag{2.16}$$

Portanto, a curvatura escalar é dada por

$$R = 6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right].\tag{2.17}$$

2.3 Equações de Friedmann

Para proceder com a análise do universo segundo a métrica FRW é preciso considerar o conteúdo de matéria e energia, o lado direito das equações de Einstein. Escolhemos modelar a matéria e energia como um fluido perfeito², para manter a consistência com a forma diagonal da métrica e a isotropia do espaço, de forma que o tensor de energia-momento, no sistema de coordenadas comóvel, adquira a forma

$$T_{\nu}^{\mu} = \text{diag}(-\rho, p, p, p)\tag{2.18}$$

onde $\rho = \rho(t)$ é a densidade de energia e $p = p(t)$ a pressão. Antes de colocar o tensor nas equações de Einstein vamos analisar a componente $\nu = 0$ da equação da conservação da energia-momento:

²Fluido perfeito, ou fluido ideal, é um fluido que pode ser completamente descrito por suas densidade e pressão, constantes no espaço.

$$\begin{aligned}\nabla_{\mu}T_0^{\mu} = 0 &= \partial_{\mu}T_0^{\mu} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\mu}T_0^{\lambda} - \Gamma_{\mu 0}^{\lambda}T_{\lambda}^{\mu} \\ &= \frac{\partial\rho}{\partial t} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p).\end{aligned}\tag{2.19}$$

Escolhemos agora uma simples equação de estado que relacione a densidade de energia e a pressão. Geralmente os fluidos ideais de interesse na cosmologia obedecem a equação de estado [11]

$$p = \omega\rho,\tag{2.20}$$

onde ω é conhecido como parâmetro da equação de estado.

A Eq. (2.19) fica então,

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1 + \omega)\frac{\dot{a}}{a}.\tag{2.21}$$

Assumindo que ω é uma constante, podemos integrar essa equação, que resulta em

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)}.\tag{2.22}$$

Os valores assumidos por ω determinam o tipo de fluido ideal. A *matéria* é qualquer conjunto de partículas não-relativísticas e que não colidem entre si, e portanto tem a pressão interna desprezível comparada com a densidade de energia, $p_M = 0$. Essas partículas podem ser de matéria escura ou bariônica. Exemplos de matéria bariônica incluem estrelas e galáxias. Matéria também pode ser chamada de *poeira*, e um universo composto em sua maior parte de matéria é chamado *dominado por matéria*. A densidade de energia nesse caso cai segundo a expressão:

$$\rho_M \propto a^{-3}, \quad \omega = 0.\tag{2.23}$$

Vemos que a densidade de partículas diminui à medida que o universo expande.

Radiação é o nome dado ao tipo de fluido usado para descrever a radiação eletromagnética ou partículas massivas relativísticas. Como sabemos que o traço do tensor de energia-momento eletromagnético é nulo [7], $\omega = 1/3$ para a radiação e temos que a equação de estado fica $p_R = \frac{1}{3}\rho_R$. Um universo constituído em sua maior parte de radiação é chamado *dominado por radiação*, e a densidade de energia nesse caso segue

$$\rho_R \propto a^{-4}.\tag{2.24}$$

Outro tipo de fluido de interesse é a *energia de vácuo*. Nesse caso $\omega = -1$, $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$ e a densidade de energia permanece constante

$$\rho_\Lambda \propto a^0. \quad (2.25)$$

Como a densidade de energia de matéria e radiação decrescem à medida que o universo expande, se houver inicialmente uma quantidade não nula de energia de vácuo ela predominará após um longo tempo, se o universo permanecer em expansão. Se isso ocorrer, dizemos que o universo é *dominado por vácuo*.

Para encontrar as equações dinâmicas que descrevem a evolução do fator de escala $a(t)$ recorreremos às equações de Einstein $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}$. A componente 00 dá a chamada equação de Friedmann

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho. \quad (2.26)$$

As componentes i-i, que são iguais devido à isotropia, resultam em

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = -8\pi Gp. \quad (2.27)$$

A substituição da Eq.(2.26) na Eq.(2.27) resulta em uma equação para a aceleração do fator de expansão

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (2.28)$$

Sabemos que hoje $\dot{a}(t) > 0$, se $\rho + 3p$ foi sempre positivo no passado, então \ddot{a} foi sempre negativo, logo em algum momento do passado a deve ter sido zero. Este evento, chamado de Big Bang, é geralmente definido como o tempo zero e em $a = 0$ a métrica tem uma singularidade.

A taxa de expansão do universo é determinada pelo parâmetro de Hubble $H \equiv \dot{a}/a$. O parâmetro de Hubble não é uma constante e em geral varia com t^{-1} . O tempo de Hubble, ou raio de Hubble, H^{-1} define a escala de tempo da expansão e a constante de Hubble H_0 é o valor atual da taxa de expansão, medido como $H_0 = 67.8 \pm 0.9 \text{ km/s/Mpc}$ [12].

A equação de Friedmann pode ser reescrita como

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho \Rightarrow \frac{k}{H^2 a^2} = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho - 1 \equiv \Omega - 1, \quad (2.29)$$

onde Ω é a razão entre a densidade e a densidade crítica, chamado parâmetro de densidade,

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c}, \quad \rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (2.30)$$

Como $H^2 a^2 \geq 0$, existe uma correspondência entre o sinal de k , que está relacionado com a curvatura do espaço, e o sinal de $\Omega - 1$, da seguinte forma [11]:

$$\begin{aligned} k = +1 &\implies \Omega > 1, & \rho > \rho_c, & \text{Fechado} \\ k = 0 &\implies \Omega = 1, & \rho = \rho_c, & \text{Plano} \\ k = -1 &\implies \Omega < 1, & \rho < \rho_c, & \text{Aberto} \end{aligned}$$

Então o parâmetro de densidade nos diz qual das três geometrias de Robertson-Walker descrevem nosso universo, portanto sua determinação experimental é de crucial importância. Medidas recentes da radiação cósmica de fundo levam a $\Omega = 1.0005 \pm 0.0033$ [12].

Por último, vemos que a evolução do fator de escala, quando o universo é dominado por diferentes formas de energia (diferentes ω) se dá pela solução da equação de Friedmann. Considerando $\rho = \rho_i a^{-3(1+\omega)}$, $\rho_i = \text{constante}$ temos que a Eq.(2.26) para $k = 0$ resulta em:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_i a^{-3(1+\omega)} \Rightarrow \dot{a} = \left(\frac{8\pi G}{3} \rho_i\right)^{1/2} a^{1-\frac{3}{2}(1+\omega)}. \quad (2.31)$$

A solução de tal equação é

$$a = C_1 t^{\frac{2}{3(1+\omega)}}, \quad C_1 = \text{constante} \quad (2.32)$$

Portanto, para um universo dominado por matéria, por exemplo, onde $\omega = 0$, $a \propto t^{2/3}$ e em um universo dominado por radiação $\omega = 1/3$ o fator de escala evolui como $a \propto t^{1/2}$. Para o caso em que $\omega = -1$ voltamos na Eq.(2.31), que fica $\dot{a} = \left(\frac{8\pi G}{3} \rho_i\right)^{1/2} a$, o que implica em $a \propto e^{Ht}$. Esse período de crescimento exponencial do fator de escala é chamado de inflação.

O universo já foi dominado por radiação, após a inflação e até expandir o suficiente para esfriar e passar a ser formado, em sua maioria, por matéria [11]. Hoje acredita-se que o universo não é mais dominado por matéria, mas sim por um tipo de energia de vácuo, a energia escura, que causa sua expansão acelerada e cuja composição é um dos maiores mistérios da Física moderna.

2.4 Distâncias

Medir distâncias em um universo em expansão é uma tarefa complexa na astronomia e essencial para extrair informações de observações, e por isso requer um certo cuidado. Existe, em geral, duas maneiras de medir a distância entre objetos. A distância comóvel é aquela que acompanha a expansão do universo e a distância física, que seria a distância “real” entre objetos, aumenta devido à expansão.

A distância mais utilizada em cosmologia é a distância comóvel entre dois pontos de coordenada comóvel $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, que é a mais fundamental e simples de ser calculada, dada por:

$$d_c = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \quad (2.33)$$

Uma distância comóvel importante é aquela que a luz pôde viajar desde o tempo inicial $t = 0$. Isso pode ser calculado escrevendo a métrica FRW para um fóton como $ds^2 = 0$ (assumindo $dy = dz = 0$ por simplicidade)

$$\eta \equiv \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} \quad (2.34)$$

Por essa distância ser a maior existente no nosso horizonte de eventos, nenhuma informação pode ter se propagado mais longe no cenário comóvel, ela pode ser chamada de horizonte comóvel. Também é possível usar η como uma variável temporal que cresce monotonicamente e chamá-la de tempo conforme. Tal variável é mais conveniente para descrever a evolução temporal do universo do que o tempo coordenado t .

Outra distância comóvel de interesse é a entre um emissor luminoso (por exemplo, uma estrela) e nós, expressa em termos do redshift. Tal distância pode ser escrita reescrevendo a integral na Eq.(2.34) em função do fator de escala a . Dessa forma, a distância comóvel de um objeto é dada por,

$$\chi(a) = \int_{t(a)}^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} = \int_a^1 \frac{da'}{a'^2 H(a')}, \quad (2.35)$$

onde usamos que hoje ($t = t_0$) o fator de escala é definido como 1 e que $\frac{da}{dt} a^{-1} = H$. Em geral, o subscrito/sobrescrito “0” em uma quantidade indica que a mesma está avaliada no tempo atual.

A Eq.(2.35) pode ser colocada em termos de outros parâmetros cosmológicos utilizando-se a equação de Friedmann, considerando um universo plano:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_T = H_0^2 \left(\frac{\rho_M}{\rho_c^{(0)}} + \frac{\rho_R}{\rho_c^{(0)}} + \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c^{(0)}} \right), \quad (2.36)$$

2 O Modelo Cosmológico Padrão

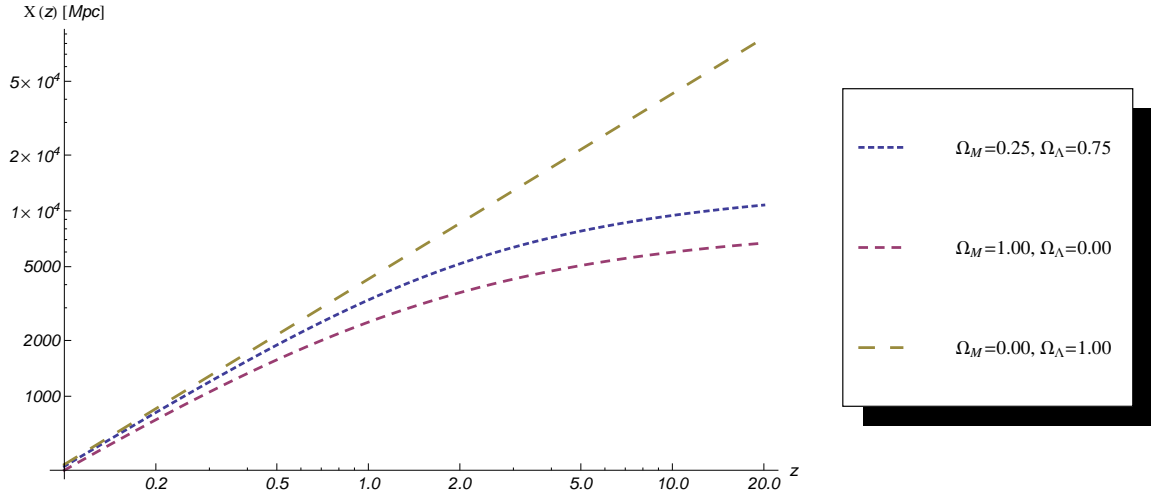


Figura 2.2: Distância comóvel em função do redshift. Em todos os gráficos $\Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$. A radiação é uma parcela desprezível do universo hoje.

onde H_0 é a constante de Hubble atual, ρ_M é a densidade de matéria do universo, ρ_R a densidade de radiação e ρ_Λ a densidade de energia de vácuo, que no modelo Λ CDM, é a densidade de energia escura. Substituindo tal resultado na Eq.(2.35), e lembrando que $\rho_M = \rho_M^{(0)} a^{-3}$, $\rho_R = \rho_R^{(0)} a^{-4}$ e $\rho_\Lambda = \rho_\Lambda^{(0)} a^0$:

$$\chi(a) = \int_a^1 \frac{da'}{a'^2 H_0 \left(\Omega_M^{(0)} a'^{-3} + \Omega_R^{(0)} a'^{-4} + \Omega_\Lambda^{(0)} \right)^{1/2}}. \quad (2.37)$$

A distância comóvel também pode ser escrita em termos do redshift, definido como $a = \frac{1}{1+z}$,

$$\chi(z) = \int_0^z \frac{dz'}{H_0 \left(\Omega_M^{(0)} (1+z')^3 + \Omega_R^{(0)} (1+z')^4 + \Omega_\Lambda^{(0)} \right)^{1/2}}. \quad (2.38)$$

Tal distância em função do redshift pode ser vista na figura (2.2) para vários redshifts e diferentes cosmologias.

Outra maneira muito utilizada de medir distâncias em astronomia é através do ângulo θ que tal objeto, de tamanho físico l conhecido, ocupa na esfera celeste. A distância até tal objeto é então,

$$d_A = \frac{l}{\theta}. \quad (2.39)$$

Para computar tal distância, chamada distância diâmetro angular, em um universo em

expansão, primeiro notamos que o tamanho comóvel do objeto agora será l/a . Como a distância comóvel até um objeto é dada pela Eq.(2.35), então o ângulo $\theta = \frac{l/a}{\chi(a)}$. Comparando com a Eq.(2.39) vemos que a distância diâmetro angular em um universo plano em expansão é

$$d_A^{plano} = a\chi = \frac{\chi}{1+z}. \quad (2.40)$$

Vemos que a distância angular é igual a distância comóvel para pequenos redshifts, ao menos em um universo plano. Em um universo aberto ou fechado a distância diâmetro angular generaliza, em termos da densidade de curvatura $\Omega_k = 1 - \Omega$, para:

$$d_A = \frac{a}{H_0\sqrt{|\Omega_k|}} \begin{cases} \sinh[\sqrt{\Omega_k}H_0\chi], & \Omega_k > 0 \\ \sin[\sqrt{-\Omega_k}H_0\chi], & \Omega_k < 0 \end{cases} \quad (2.41)$$

É interessante notar que ambas as expressões reduzem ao caso plano no limite que a densidade de curvatura vai a zero. Dado que sabemos como se dá a dinâmica do universo, por meio das equações de Einstein, e como extrair informações, como distâncias, da observação de corpos celestes, podemos agora nos debruçar sobre o problema de porque a matéria se agrupa em estruturas como estrelas, galáxias e aglomerados de galáxias.

3

Formação de Estruturas no Universo

O universo era muito homogêneo e isotrópico na época da recombinação, como indicam observações da radiação cósmica de fundo. Porém, as inhomogeneidades no universo atual são claras, manifestadas na forma de galáxias, aglomerados e superaglomerados de galáxias, gerando uma estrutura. A explicação de como uma estrutura não-linear pode se desenvolver a partir de pequenas perturbações iniciais reside na instabilidade gravitacional.

Uma das características naturais da gravidade é a instabilidade gravitacional: matéria é atraída para regiões mais densas, amplificando inhomogeneidades já existentes. Mesmo pequenas regiões densas, da ordem de 10^{-5} com relação ao meio, eventualmente atraem matéria suficiente para formação de estrutura.

Mas para garantir que as pequenas perturbações, originárias de flutuações quânticas na era inflacionária, gerem as estruturas que vemos hoje, é preciso estudar o quanto rápidas tais inhomogeneidades crescem em um universo em expansão. Para tal, utilizamos a teoria de perturbação linear. Sua forma mais geral envolve a teoria da relatividade geral, mas a instabilidade gravitacional na teoria Newtoniana, estudada aqui, produz resultados aplicáveis para matéria não-relativística em escalas que não excedem o horizonte de Hubble, o que é suficiente para nossos propósitos.

3.1 Teoria de perturbação linear

Descreveremos a matéria como um fluido perfeito, já que ela se comporta aproximadamente dessa forma em grandes escalas. Isso significa que em qualquer instante de tempo a matéria será caracterizada por $\rho(\mathbf{x},t)$, a entropia por unidade de massa $S(\mathbf{x},t)$, o potencial gravitacional por $\phi(\mathbf{x},t)$ e campo vetorial de tri-velocidades $\mathbf{V}(\mathbf{x},t)$. As equações que governam tais quantidades são as equações da hidrodinâmica:

- Equação de continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0; \quad (3.1)$$

- Equações de Euler

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \frac{\nabla p}{\rho} + \nabla \phi = 0 \quad (3.2)$$

3 Formação de Estruturas no Universo

- Conservação da entropia

$$\frac{dS(\mathbf{x},t)}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)S = 0; \quad (3.3)$$

- Equação de Poisson

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho, \quad (3.4)$$

que juntas com a equação de estado $p = p(\rho, S)$ formam um conjunto de sete equações para as sete funções desconhecidas descritas anteriormente.

Em um universo homogêneo e isotrópico em expansão a densidade de energia do meio é uma função do tempo, e as velocidades do meio obedecem a lei de Hubble

$$\rho = \rho_0(t), \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}_0 = H(t)\mathbf{x}. \quad (3.5)$$

Substituindo tais expressões na equação de continuidade resulta na já estudada Eq.(2.19) $\dot{\rho}_0 + 3H\rho_0 = 0$. Para estudar a evolução de perturbações no meio primeiro é preciso fazer uma pequena perturbação na distribuição de matéria [13]:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \delta\rho(\mathbf{x},t), & \mathbf{V} &= \mathbf{V}_0 + \delta\mathbf{v}, & \phi &= \phi_0 + \delta\phi, \\ p &= p_0 + \delta p = p_0 + c_s^2\delta\rho. \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde ignoramos perturbações na entropia e c_s é a velocidade de propagação de uma perturbação no meio. As equações da hidrodinâmica lineares para pequenas perturbações ficam

$$\frac{\partial\delta\rho(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \rho_0\nabla\delta\mathbf{v}(\mathbf{x},t) + \nabla(\delta\rho(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{V}_0) = 0, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial\delta\mathbf{v}(\mathbf{x},t)}{\partial t} + (\mathbf{V}_0 \cdot \nabla)\delta\mathbf{v}(\mathbf{x},t) + (\delta\mathbf{v}(\mathbf{x},t) \cdot \nabla)\mathbf{V}_0 + \frac{c_s^2}{\rho_0}\nabla\delta\rho(\mathbf{x},t) + \nabla\delta\phi(\mathbf{x},t) = 0, \quad (3.8)$$

$$\Delta\delta\phi(\mathbf{x},t) = 4\pi G\delta\rho(\mathbf{x},t). \quad (3.9)$$

Para poder aplicar uma transformada de Fourier, e portanto resolver as equações, é preciso primeiro retirar a dependência explícita da coordenada \mathbf{x} de \mathbf{V}_0 . Para tal, é mais conveniente utilizar coordenadas Lagrangeanas \mathbf{q} , que são comóveis com o fluxo de Hubble, ao invés das Eulerianas, que estão relacionadas da seguinte forma:

$$\mathbf{x} = a(t)\mathbf{q}. \quad (3.10)$$

Nessas novas coordenadas a derivada temporal e o gradiente ficam

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\mathbf{x}} &= \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\mathbf{q}} - (\mathbf{V}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{x}}), \\ \nabla_{\mathbf{x}} &= \frac{1}{a} \nabla_{\mathbf{q}}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Substituindo tais relações nas Eqs.(3.7)-(3.9) e introduzindo o contraste de densidade de perturbações $\delta \equiv \delta\rho/\rho_0$, obtemos

$$\frac{\partial\delta(\mathbf{q},t)}{\partial t} + \frac{1}{a} \nabla\delta\mathbf{v}(\mathbf{q},t) = 0, \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial\delta\mathbf{v}(\mathbf{q},t)}{\partial t} + H\delta\mathbf{v}(\mathbf{q},t) + \frac{c_s^2}{a} \nabla\delta(\mathbf{q},t) + \frac{1}{a} \nabla\delta\phi(\mathbf{q},t) = 0, \quad (3.13)$$

$$\Delta\delta\phi(\mathbf{q},t) = 4\pi G a^2 \rho_0 \delta(\mathbf{q},t). \quad (3.14)$$

As derivadas são todas com respeito a \mathbf{q} e a partir de agora iremos omitir essa dependência nas equações. É possível transformar essas equações em uma só equação de segunda ordem para δ . Para isso tomamos a divergência da Eq.(3.13) e usamos a Eq.(3.12) e Eq.(3.14) para eliminar \mathbf{v} e ϕ em termos de δ . O resultado é

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - \frac{c_s^2}{a^2} \nabla^2\delta - 4\pi G\rho_0\delta = 0. \quad (3.15)$$

e descreve as inomogeneidades gravitacionais em um universo em expansão.

3.1.1 Perturbações adiabáticas

Fazendo uma transformação de Fourier em δ :

$$\delta(\mathbf{x},t) = \int \delta_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \quad (3.16)$$

a Eq. (3.15) fica, para cada modo de Fourier,

$$\ddot{\delta}_{\mathbf{k}} + 2H\dot{\delta}_{\mathbf{k}} + \left(\frac{c_s^2 k^2}{a^2} - 4\pi G\rho_0\right) \delta_{\mathbf{k}} = 0. \quad (3.17)$$

O comportamento de cada perturbação depende principalmente da escala espacial, ou do comprimento de onda crítico chamado comprimento de Jeans,

$$\lambda_J^{ph} = \frac{2\pi a}{k_J} = c_s \sqrt{\frac{\pi}{G\rho_0}}. \quad (3.18)$$

Perturbações em escalas muito menores do que o comprimento de Jeans ($\lambda \ll \lambda_J$) são ondas sonoras. Se c_s muda adiabaticamente ($\frac{\dot{c}_s}{c_s} \ll H$), então a solução da Eq.(3.17) é da forma

$$\delta_{\mathbf{k}} \propto \frac{1}{\sqrt{c_s a}} e^{\pm i k \int \frac{c_s dt}{a}}. \quad (3.19)$$

Em escalas muito maiores que a escala de Jeans ($\lambda \gg \lambda_J$) a gravidade domina, e podemos desprezar o termo dependente de k na Eq.(3.17). Portanto, uma das soluções da equação resultante é proporcional ao parâmetro de Hubble $H(t)$, em um universo plano dominado por matéria. Isso pode ser visto substituindo $\delta_d = H(t)$ na Eq.(3.17) com $c_s^2 k^2 = 0$ e verificando que a equação obtida é exatamente a derivada da equação de Friedmann. A solução $\delta_d = H(t)$ é a solução decrescente da equação de perturbação em um universo dominado por matéria, já que H decresce com o tempo.

A outra solução independente da equação diferencial, δ_c pode ser obtida pelo meio do Wronskiano,

$$W \equiv \dot{\delta}_d \delta_c - \delta_d \dot{\delta}_c. \quad (3.20)$$

Derivando o Wronskiano obtemos $\dot{W} = \ddot{\delta}_d \delta_c - \delta_d \ddot{\delta}_c$, e isolando $\ddot{\delta}$ em Eq.(3.17) e substituindo em \dot{W} encontramos que o Wronskiano satisfaz a equação:

$$\dot{W} = -2HW, \quad (3.21)$$

que tem como solução,

$$W = \dot{\delta}_d \delta_c - \delta_d \dot{\delta}_c = \frac{C}{a^2}, \quad C = \text{constante} \quad (3.22)$$

Substituindo o ansatz $\delta_c = \delta_d g(t)$ na expressão do Wronskiano, obtemos para g a equação:

$$g(t) = -C \int \frac{dt}{a^2 \delta_d^2}. \quad (3.23)$$

Portanto, a solução mais geral da Eq.(3.17) para grandes comprimentos de onda é

$$\delta(t) = C_1 H \int \frac{dt}{a^2 H^2} + C_2 H. \quad (3.24)$$

Em um universo plano dominado por matéria, $a \propto t^{2/3}$ e $H \propto t^{-1}$. Nesse caso, fazendo a integral obtemos,

$$\delta(t) = C_1 t^{2/3} + C_2 t^{-1}. \quad (3.25)$$

Apenas o modo crescente das perturbações é importante para t grande, pois é devido a esses modos que há estrutura no universo. A evolução do modo crescente das perturbações pode ser separada em um termo $\delta_c(t) \equiv D(z)$ independente de k , chamado fator de crescimento, e outro $\delta(k,0)$ independente do redshift $\delta(k,z) = D(z)\delta(k,0)$, onde podemos escrever, em geral [14, 15]:

$$D(z) = \frac{H(z)}{H_0} \int_z^\infty dz' (1+z') \left(\frac{H_0}{H(z')} \right)^3. \quad (3.26)$$

3.1.2 Perturbações vetoriais

Soluções triviais com $\delta = 0$ e $\delta S = 0$ podem corresponder a soluções não-triviais do sistema de equações hidrodinâmicas. Nesse caso, as Eqs.(3.12)-(3.14) se reduzem a

$$\nabla \delta \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} + H \delta \mathbf{v} = 0. \quad (3.27)$$

Da primeira dessas equações segue que, para perturbações na forma de ondas planas, $\delta \mathbf{v} \propto \delta \mathbf{v}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{q}}$, a velocidade $\delta \mathbf{v}$ é perpendicular ao número de onda \mathbf{k} . A solução da segunda equação é da forma $\delta \mathbf{v}_{\mathbf{k}} \propto 1/a$. Vemos então que as perturbações vetoriais decaem à medida que o universo expande. Portanto, tais perturbações só podem ter amplitudes significativas atualmente se elas fossem muito grandes no passado, tão grandes que destruiriam a isotropia do universo primordial. Não há lugar para tais perturbações vetoriais grandes em um universo inflacionário, e portanto elas não tem papel na formação de estrutura do universo.

3.2 Espectro de Potência

Lembramos que podemos caracterizar a amplitude parcial da densidade de perturbações pela sua transformada de Fourier

$$\delta(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \delta(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}, \quad \delta(\mathbf{k}, t) = \int d^3x \delta(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}. \quad (3.28)$$

Como $\delta(\mathbf{x})$ é real e tem média zero (universo homogêneo), temos que $\langle \delta(\mathbf{k}, t) \rangle = 0$ e $\delta(-\mathbf{k}, t) = \delta^*(\mathbf{k}, t)$. O espectro de potência é definido via:

$$\langle \delta(\mathbf{k}, t) \delta^*(\mathbf{k}', t) \rangle \equiv (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') P(k) \quad (3.29)$$

As propriedades estatísticas da amplitude de densidade são determinadas pelo conjunto de funções de correlação [16]

$$\xi_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \langle \delta(\mathbf{x}_1) \delta(\mathbf{x}_2) \rangle, \quad \xi_3(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = \langle \delta(\mathbf{x}_1) \delta(\mathbf{x}_2) \delta(\mathbf{x}_3) \rangle, \dots \quad (3.30)$$

onde a média é tomada sobre *ensembles*.

A homogeneidade do espaço implica que a função de correlação de dois pontos (ξ_2), por exemplo, seja invariante sobre translações, e portanto só pode ser função da separação entre os pontos, $\xi_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \xi_2(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$. Por outro lado, isotropia requer que $\xi(\mathbf{x})$ seja invariante sobre rotações também, logo a função de correlação de dois pontos deve ser função apenas do módulo da distância entre os pontos, $\xi_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \xi_2(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|)$.

Podemos computar a função de correlação de dois pontos

$$\xi_2(\mathbf{r}) = \langle \delta(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle, \quad (3.31)$$

em termos do coeficientes de Fourier da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \xi_2(\mathbf{r}) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \langle \delta(\mathbf{k}) \delta^*(\mathbf{k}') \rangle e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} e^{i\mathbf{k}'(\mathbf{x}+\mathbf{r})} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int \int d^3k d^3k' (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') P(k) e^{-i\mathbf{x}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')} e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k P(k) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int dk k^2 P(k) \frac{\sin(kr)}{kr}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Segue então que a função de correlação de dois pontos é a transformada de Fourier do espectro de potência. O espectro de potência tem dimensão de volume, portanto às vezes é útil utilizar uma quantidade adimensional, definida como

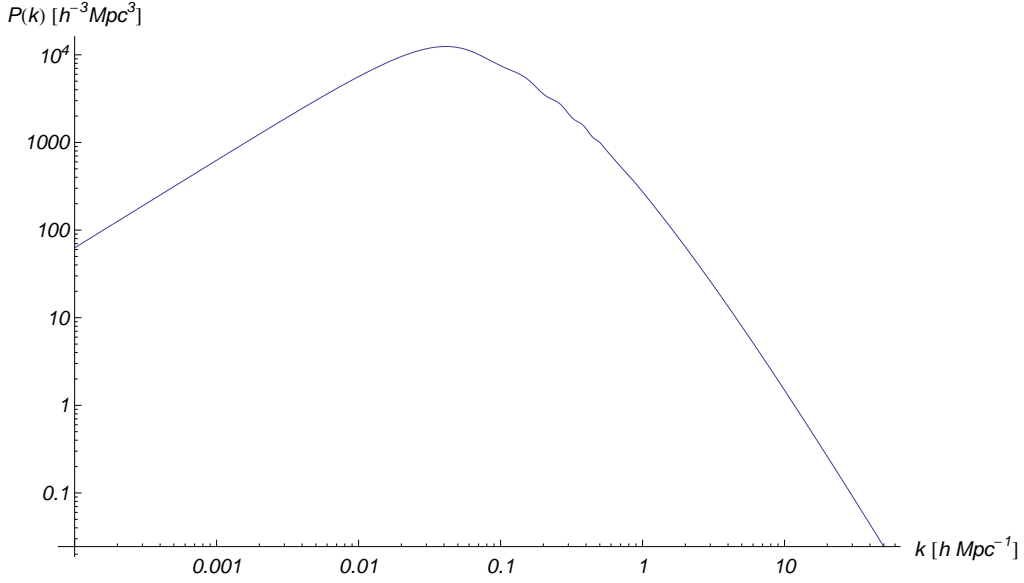


Figura 3.1: Espectro de potência para a cosmologia Λ CDM: $\Omega_{cdm} = 0.25$, $\Omega_b = 0.05$, $\Omega_\Lambda = 0.75$. Tal curva foi obtida usando o código CAMB (ver seção 4.3)

$$\Delta^2(k) = \frac{k^3 P(k)}{2\pi^2} \quad (3.33)$$

Geralmente estamos interessados em medir o espectro de potência da matéria hoje e entender como tal teve origem a partir de um espectro de potência primordial, estabelecido na época da inflação. Lembrando que o potencial $\phi(\mathbf{k})$ e a amplitude de densidade $\delta(\mathbf{k})$ estão relacionados pela equação de Poisson, podemos trabalhar com o potencial ao invés da densidade, e relacionar o potencial atual com o potencial primordial ϕ_p . Esquematicamente, temos que [17]

$$\phi(\mathbf{k}, a) = \phi_p(\mathbf{k}) \times T(k) \times \frac{D(a)}{a}, \quad (3.34)$$

onde $T(k)$ é a função de transferência. A função de transferência é quem descreve a evolução das perturbações quando cruzam o horizonte e através da transição do universo dominado por radiação para dominado por matéria. Por definição ela é dada por

$$T(k) \equiv \frac{\phi(k, a \gg 1)}{\phi_{LS}(k, a \gg 1)}, \quad (3.35)$$

onde ϕ_{LS} indica o potencial em grandes escalas.

Também é na função de transferência que está codificada a forma característica do

espectro de potência. É possível fazer aproximações numéricas da função de transferência, mas apenas uma análise qualitativa visando a curva do espectro de potência, como a vista na figura (3.1), será feita no presente trabalho. Uma descrição mais completa pode ser vista em [18].

Primeiro consideremos modos $k < k_{eq}$, onde k_{eq} é o número de onda de um modo que entra no horizonte na transição radiação-matéria do universo. Portanto, esses modos só entraram no horizonte na época em que o universo é dominado por matéria. Nesse estágio as perturbações crescem de forma aproximadamente linear, já que a gravidade domina nessa escala, o que favorece o aumento das perturbações.

O espectro de potência para pequenos comprimentos de onda, ou seja $k > k_{eq}$, apresenta mais sutilezas. Modos de perturbação que entram no horizonte na era da radiação tem sua amplitude reduzida devido à pressão da radiação. Como o plasma de bárions e radiação antes da recombinação era muito acoplado as perturbações na matéria bariônica apenas oscilavam e não cresciam. No entanto, considerando a matéria escura, já que esta domina sobre a bariônica e as perturbações na radiação são desprezíveis, temos um crescimento logarítmico das perturbações, governado pelas equações de Meszaros¹. Após esse crescimento logarítmico, as perturbações passam a crescer com o fator de escala $\delta_{cdm} \propto a$ depois da era de igualdade radiação-matéria. Modos maiores entram no horizonte cada vez mais cedo na era da radiação, e suas perturbações sofrem maior crescimento logarítmico em comparação com os modos menores. A função de transferência é da forma $T(k) \propto \ln(k/k_{eq})$ e o espectro de potência $P(k) \propto k^n T^2(k) \propto k^{-3} \ln^2(k/k_{eq})$ ². Vemos então que o espectro de potência para $k > k_{eq}$ diminui quanto maior for o modo.

A região em que a curva do espectro de potência muda de crescente para decrescente corresponde aos modos que entram no horizonte na era de transição radiação-matéria, o que ocorre em aproximadamente $k \sim 10^{-2} Mpc^{-1}$.

3.3 Distorções no espaço dos redshifts

A maneira mais direta de se medir o espectro de potência é através de um mapa em redshift, onde a posição angular e o redshift, que daria uma medida da distância radial das galáxias, são gravados. Dessa forma seria possível obter as distâncias angular e radial entre diversas galáxias e nós. No entanto, essa medida da posição radial em função do redshift possui alguns problemas. Um deles é o fato de que a aproximação usual para a distância em termos do redshift [17],

$$\chi_s(\mathbf{z}) = \frac{z}{H_0} \quad (3.36)$$

¹Equações de Maszaros são as equações que descrevem a evolução das perturbações de matéria escura fria, depois que as perturbações na radiação se tornam desprezíveis [17]

²Por falta de um modelo definitivo sobre a origem das perturbações no campo de densidade, geralmente se assume que o espectro de potência primordial é uma potência: $P_{prim}(k) \propto k^n$. Usaremos $n = -3$, que reproduz o espectro de Harrison-Zel'dovich.

só é válida para pequenos redshifts, $z < 1$. Tal problema pode ser evitado se forem feitos mapas em redshift com $z \lesssim 0.1$.

Outro ponto, bem mais problemático, é o fato de que na Eq.(3.36) não é levada em conta a velocidade peculiar, a velocidade com que as galáxias se movem excluindo a expansão do universo, movimento esse atribuído a inomogeneidades.

Em uma região de matéria muito densa, em que o colapso apenas começou, as galáxias ao redor serão atraídas para o centro com certa velocidade (peculiar). Então, se observamos uma galáxia do outro lado dessa região densa, com relação a nós, o espectro dessa galáxia terá um desvio para o vermelho menor do que o seria se ela não estivesse sendo atraída pela região. Analogamente, se analisamos o redshift de uma galáxia do nosso lado da região densa, este será maior devido à velocidade peculiar. Esses fenômenos acabam causando uma distorção nos mapas em redshift próximo a regiões densas, uma alongação (mais galáxias com um redshift “médio”) na direção perpendicular a de observação, onde na verdade (no espaço das coordenadas) tal região é circular. É preciso então modelar essa distorção para que seja possível levá-la em conta e corrigi-la no espectro de potência.

Para resolver esse problema primeiro é importante notar, como fez pela primeira vez Kaiser em 1987, que o número de galáxias em uma dada região, seja no espaço das coordenadas ou dos redshifts, é o mesmo. Ou seja,

$$n_s(\mathbf{x}_s)d^3x_s = n(\mathbf{x})d^3x, \quad (3.37)$$

onde n é a densidade de galáxias em \mathbf{x} no espaço das coordenadas, n_s é a densidade no espaço dos redshift, d^3x é o elemento de volume no espaço das coordenadas $d^3x = dx^2 \sin\theta d\theta d\phi$ e $d^3x_s = dx_s x_s^2 \sin\theta d\theta d\phi$ no espaço dos redshifts. Como a parte angular dos elementos de volume é igual, podemos definir um Jacobiano

$$J \equiv \left| \frac{d^3x}{d^3x_s} \right| = \frac{dx}{dx_s} \frac{x^2}{x_s^2} \quad (3.38)$$

de forma que

$$n_s(\mathbf{x}_s) = n(\mathbf{x})J. \quad (3.39)$$

Podemos computar o Jacobiano se lembrarmos que o redshift observado é dado por:

$$z = H_0 x + \mathbf{v} \cdot \hat{x}, \quad (3.40)$$

onde o primeiro termo é a lei de Hubble e o segundo é a velocidade no direção da medida. Dividindo a Eq.(3.40) por H_0 ,

$$x_s = x + \frac{\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{x}}}{H_0}. \quad (3.41)$$

Com isso podemos substituir x_s no Jacobiano e reescrevê-lo como,

$$J = \left(1 + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{x}}}{H_0} \right] \right)^{-1} \left(1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{x}}}{H_0 x} \right)^{-2}. \quad (3.42)$$

O termo com a derivada na velocidade é da ordem $v'/H_0 \sim kv/H_0$ para uma perturbação em ondas planas. Já o segundo termo é da ordem v/xH_0 e portanto o primeiro termo é maior que o segundo por um fator kx . Como é mais fácil medir os modos de Fourier para pequenos comprimentos de onda ($k \gg 1$), estamos interessados nos casos em que $kx \gg 1$. Desprezando o segundo termo e expandindo o primeiro, obtemos

$$J \simeq \left(1 - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{x}}}{H_0} \right] \right) \quad (3.43)$$

A densidade do número de galáxias nos espaços das coordenadas e dos redshifts é dada por, respectivamente $n = \bar{n}(1 + \delta)$ e $n_s = \bar{n}(1 + \delta_s)$, onde \bar{n} é a densidade média. Substituindo na Eq.(3.39),

$$1 + \delta_s = (1 + \delta) \left(1 - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{x}}}{H_0} \right] \right) \quad (3.44)$$

Mantendo apenas os termos lineares na perturbação ficamos com,

$$\delta_s(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}) - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{x}}}{H_0} \right] \quad (3.45)$$

Vemos, portanto, que a amplitude de densidade no espaço dos redshifts é a amplitude no espaço das coordenadas a menos de uma correção devido à velocidade peculiar.

Consideramos agora que as galáxias a serem mapeadas estão muito distantes, de forma que a direção \mathbf{x} de cada galáxia varie pouco, e essa variação seja quase puramente radial, ou seja, poucas mudanças angulares no plano de observação. Desde que as galáxias estejam próximas umas das outras nesse plano, podemos fazer $\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} \rightarrow \hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{v}$, onde $\hat{\mathbf{z}}$ é o vetor radial que aponta para o centro das galáxias de interesse. Com essa aproximação podemos fazer uma transformada de Fourier na densidade no espaço dos redshift, o que resulta em:

$$\delta_s(\mathbf{k}) = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \left[\delta(\mathbf{x}) - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{z}}}{H_0} \right] \right] \quad (3.46)$$

Fazendo uma transformada de Fourier em $\mathbf{v}(\mathbf{x})$, usando que [17] $\mathbf{v}(\mathbf{k}) = ifH_0\delta(\mathbf{k})\frac{\mathbf{k}}{k^2}$ ($f \equiv \frac{a}{D(a)}\frac{dD(a)}{da}$) e lembrando que $\int \frac{d^3x}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}\delta(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{k})$ obtemos

$$\begin{aligned} \delta_s(\mathbf{k}) &= \delta(\mathbf{k}) - \int \frac{d^3x}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} \left[\int \frac{d^3k'}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k}'\mathbf{x}} \frac{ifH_0\delta(\mathbf{k}')}{H_0} \frac{\mathbf{k}'}{k'^2} \cdot \hat{\mathbf{z}} \right] \\ &= \delta(\mathbf{k}) - if \int \frac{d^3x}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{x}} (i\mathbf{k}' \cdot \hat{\mathbf{x}}) \left[\delta(\mathbf{k}') \frac{\mathbf{k}'}{k'^2} \cdot \hat{\mathbf{z}} \right] \\ &= \delta(\mathbf{k}) + \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^{3/2}} \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \delta(\mathbf{k}') \left[f (\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{z}})^2 \right] \\ &= \delta(\mathbf{k}) + \delta(\mathbf{k}) \left[f (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{z}})^2 \right] \end{aligned} \quad (3.47)$$

Definindo $\mu_{\mathbf{k}} \equiv \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{k}}$, temos então que a correção para a densidade no espaço dos redshifts é

$$\delta_s(\mathbf{k}) = \left[1 + f\mu_{\mathbf{k}}^2 \right] \delta(\mathbf{k}) \quad (3.48)$$

Como $f\mu_{\mathbf{k}}^2 \geq 0$, a densidade aparente no espaço dos redshifts é sempre maior do que no espaço das coordenadas, como era de se esperar. Notamos ainda que uma perturbação perpendicular a linha de visão não sofre distorções no espaço dos redshifts.

4

Modelo de Halos

No capítulo anterior mostramos como se dá a evolução de perturbações do campo de densidade inicial de matéria escura. Essas perturbações, com o passar do tempo, acabam por virar regiões cada vez mais densas, altamente não-lineares e não mais descritas pela teoria de perturbação linear. Tais regiões por fim se estabilizam, formando os chamados halos.

São nesses halos de matéria escura que a matéria bariônica esfria, condensa e acaba formando galáxias. Portanto, entender como ocorre a formação desses halos, suas características e como eles estão distribuídos no espaço é de extrema importância, pois é um primeiro passo para a compreensão das propriedades das galáxias e da estrutura do universo.

Neste capítulo revisaremos o modelo de colapso esférico da matéria, como os halos são distribuídos no universo relativo à sua massa e como a matéria se distribui dentro desses halos.

4.1 Colapso Esférico

À medida que surgem regiões do universo mais densas que a média, surgem também regiões que se expandem mais lentamente que outras. Consequentemente, a amplitude de densidade $\delta(x)$ nessas áreas aumenta, culminando no momento em que essas regiões param de expandir e começam a colapsar. Uma maneira simplificada de estudar essa formação de objetos não-lineares é assumindo que a matéria colapsa de forma aproximadamente esférica. Tal modelo foi estudado primeiramente em 1972, por Gunn e Gott [19].

Vamos considerar inicialmente uma região esférica contendo matéria, e que sua dinâmica se dá de forma newtoniana:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2} \quad (4.1)$$

onde r é o raio da esfera, e M sua massa. A integral dessa equação resulta em uma relação para a energia E do sistema.

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{GM}{r} = E \quad (4.2)$$

4 Modelo de Halos

O primeiro termo da equação é a energia cinética K da esfera, e o segundo, sua energia potencial U . Lembrando que a massa da esfera é conservada e dada por

$$M_i = V_i \rho_i = \frac{4}{3} \pi r_i^3 \bar{\rho}_i (1 + \delta_i), \quad (4.3)$$

onde o índice i indica um tempo inicial e $\bar{\rho}_i = \bar{\rho}(t_i) \simeq \frac{3H_i^2}{8\pi G}$, podemos reescrever a energia potencial como:

$$U = -\frac{(H_i r_i)^2}{2} (1 + \delta_i). \quad (4.4)$$

Temos ainda que a velocidade de expansão da esfera inicialmente segue a lei de Hubble, ou seja, é o raio da esfera vezes a taxa de expansão do universo $\dot{r}_i = r_i H_i$, de forma que a energia cinética inicial fica:

$$K_i = \frac{(r_i H_i)^2}{2}. \quad (4.5)$$

De acordo com essa equação, vemos então que a energia potencial pode ser escrita em termos da cinética segundo a relação $U_i = -K_i (1 + \delta_i)$, de forma que a energia total da esfera é dada por,

$$E = K_i - K_i (1 + \delta_i) = K_i \delta_i. \quad (4.6)$$

Desde que a energia potencial gravitacional seja maior que a cinética ($E < 0, \delta_i > 0$), a esfera irá expandir até um raio máximo r_{max} e depois colapsará. O raio máximo pode ser encontrado ao lembrar que nesse momento $\dot{r} = 0$ e $K = 0$, ou seja, $E = U$ na Eq.(4.2)

$$E = -\frac{G}{r_{max}} \frac{4}{3} \pi r_i^3 \bar{\rho}_i (1 + \delta_i) = -\frac{r_i^3 H_i^2 (1 + \delta_i)}{2r_{max}}. \quad (4.7)$$

Mas temos que $K_i = r_i^2 H_i^2 / 2$, logo

$$E = \frac{r_i}{r_{max}} K_i (1 + \delta_i). \quad (4.8)$$

Por conservação da energia, as Eq.(4.6) e Eq.(4.8) resultam em,

$$\frac{r_{max}}{r_i} = \frac{(1 + \delta_i)}{\delta_i}. \quad (4.9)$$

Vemos que quanto maior for a amplitude de densidade inicial menor será o raio máximo atingido pela esfera antes de colapsar.

Seja agora R o raio da região em algum tempo posterior a t_i . A densidade na região é $(r_i/r)^3 \equiv (1 + \delta)$. No modelo de colapso esférico existe uma relação determinista entre o raio inicial r_i e o raio comóvel posterior r . Em um universo Einstein-de Sitter ($\Omega_m = 1$), podemos escrever uma solução paramétrica da Eq.(4.2) como um cicloide da forma, $r(\theta) = A(1 - \cos\theta)$; $t(\theta) = B(\theta - \sin\theta)$, que resulta na relação [20, 21]:

$$\frac{r(z)}{r_i} = \frac{(1+z)}{(5/3)\delta(z)} \frac{(1 - \cos\theta)}{2}; \quad \frac{1}{1+z} = \left(\frac{3}{4}\right)^{2/3} \frac{(\theta - \sin\theta)^{2/3}}{(5/3)\delta(z)} \quad (4.10)$$

$$\Rightarrow \frac{r_i}{r(z)} = \frac{6^{2/3}}{2} \frac{(\theta - \sin\theta)^{2/3}}{(1 - \cos\theta)}. \quad (4.11)$$

A evolução de uma região esférica que tem amplitude de densidade inicial $\delta_i > 0$ parametrizada desse modo começa em $\theta = 0$. Em $\theta = \pi$ a região atinge seu tamanho máximo $r = r_{max}$ e em $\theta = 2\pi$ o colapso cessa. Em $\theta = \pi$, temos que

$$\frac{r_i}{r(z)} \equiv \frac{r_i}{r_{max}} = \frac{6^{2/3}}{2} \frac{\pi^{2/3}}{(1 - \cos\pi)} \Rightarrow \left(\frac{r_i}{r_{max}}\right)^3 = \left(\frac{3\pi}{4}\right)^2 \approx 5,55 = \frac{\rho_{max}}{\bar{\rho}_{max}}, \quad (4.12)$$

ou seja, quando a região densa se expande ao máximo, sua densidade média é cerca de 5,55 vezes a densidade média do universo nessa mesma época.

Podem parecer, pela Eq.(4.11), que a esfera de matéria colapsa em um raio $r = 0$, mas na verdade a esfera entra em equilíbrio virial para um $r \neq 0$. Podemos estimar a densidade média do objeto virializado da seguinte forma: primeiramente sabemos que no equilíbrio virial, pelo teorema do virial, $K = -U/2$. Pela conservação de energia no máximo da esfera e no seu equilíbrio, temos

$$E_{vir} = U_{vir} + K_{vir} = \frac{1}{2}U_{vir} = U_{max} = E_{max}, \quad \Rightarrow r_{vir} = \frac{1}{2}r_{max}, \quad (4.13)$$

onde r_{vir} é o raio virial do halo, ou seja, o raio que o halo possui quando entra em equilíbrio.

Durante o tempo entre o máximo da esfera e seu colapso o universo tem sua densidade modificada por um fator $(1 + z_{max})^3/(1 + z_{vir})^3$, já que em um universo de EdS, $\bar{\rho} = \bar{\rho}_i a^{-3}$. Tal fator, pela Eq.(4.11), é $(1 + z_{max})^3/(1 + z_{vir})^3 = 2^{2/3 \cdot 3}$, e portanto a densidade média do universo na virialização da esfera é 1/4 da densidade do universo no seu máximo. Temos ainda que o objeto virializado é oito vezes mais denso do que ele era em seu máximo ($r_{vir} = r_{max}/2 \Rightarrow (r_i/r_{vir})^3 = 2^3 (r_i/r_{max})^3$). Portanto, a densidade média da esfera em equilíbrio será:

$$\Delta_{vir} \equiv 8 \times \frac{\rho_{max}}{\bar{\rho}_{max}} \times 4 \times \bar{\rho}_{vir} = \frac{9\pi^2}{16} \times 32 \times \bar{\rho}_{vir} \approx 178\bar{\rho}_{vir}, \quad (4.14)$$

ou seja, a densidade do objeto virializado é aproximadamente 178 vezes a densidade média do universo na época do colapso.

Também é possível obter a densidade inicial crítica δ_{sc} que uma região precisa ter para colapsar. A segunda equação da Eq.(4.10) nos diz que, para um objeto colapsar em z ele deve ter tido uma amplitude de densidade de

$$\frac{1}{1+z} = \left(\frac{3}{4}\right)^{2/3} \frac{(2\pi-0)^{2/3}}{(5/3)\delta_{sc}} \Rightarrow \frac{\delta_{sc}}{1+z} = \frac{3}{5} \left(\frac{3\pi}{2}\right)^{2/3} \approx 1.686. \quad (4.15)$$

Mesmo sendo um modelo simples, o colapso esférico oferece resultados úteis e condizentes com o universo observável, como por exemplo a densidade mínima de uma região para que haja o colapso ou, como será visto a seguir, para que tal região seja considerada um halo.

4.2 Características dos Halos

A aproximação ao problema de formação de estrutura no universo via Modelo de Halos se dá ao assumir que toda a massa do universo está distribuída em estruturas, que chamamos de halos. Se dois halos diferentes podem ser identificados, então é seguro dizer que eles são pequenos comparados com a distância entre eles. Isso sugere que a estatística para a densidade de massa em pequenas escalas é determinada pela distribuição espacial de matéria dentro dos halos, não importando a maneira precisa que os halos estão organizados em grande escala. Por outro lado, em grandes escalas não importam os detalhes da estrutura interna dos halos, e sim sua distribuição espacial. Esse fato, de que a distribuição de massa pode ser estudada em dois passos, com a massa em cada halo e a distribuição espacial dos halos, é o coração do Modelo de Halos.

Assim como nesse modelo pensamos na estatística espacial em dois passos, a física também pode ser separada em dois setores. Em particular, o regime que não é bem descrito pela teoria de perturbação linear (pequenas escalas) é confinado aos halos, que podem ser tratados como objetos virializados descritos na seção anterior.

4.2.1 Densidade média de halos

O resultado mais útil obtido pelo modelo de colapso esférico foi a amplitude de densidade crítica δ_{sc} (Eq.(4.15)) que uma região deve ter para que haja o colapso gravitacional. Tal densidade é independente da massa, o que implica que podemos tratar objetos de massas diferentes utilizando o mesmo modelo. Dessa forma, é possível obter uma aproximação para a densidade numérica de objetos colapsados em função do redshift.

O modelo de Press e Schechter (1974) para obter tal quantidade consiste em supor que a densidade numérica de objetos colapsados, conhecida como função de massa $n(M)$, é obtida a partir da função $F(M; z)$, que é a fração de corpos colapsados em z com massa maior que M através da relação [22]:

$$n(M)dM = -\frac{\rho_0}{M} \frac{dF}{dM} dM. \quad (4.16)$$

Para determinar a fração de objetos $F(M; z)$, primeiro consideramos uma amplitude de densidade $\delta(r, t)$ suavizada por uma função janela $W(r)$, função usada para fazer uma média sobre as flutuações dentro de uma escala R . Aqui será usada a função chamada *top-hat*, definida como

$$W(r) = \begin{cases} (\frac{4\pi}{3} R^3)^{-1} & |r| \leq R, \\ 0 & |r| > R \end{cases} \quad \int d^3r W(r) = 1$$

Lembrando que, de acordo com o Modelo de Halos, regiões em que a densidade de contraste obedece $\delta(r, z) > \delta_{sc} \approx 1,686(1 + z)$ colapsarão em objetos virializados, temos que:

$$\tilde{\delta}(r, t) = \tilde{\delta}(r) D(t) = \int d^3r' \delta(r') W(r' + r) D(t). \quad (4.17)$$

Se uma região com amplitude de densidade maior que δ_{sc} forma um objeto de massa M , então a fração de objetos com massa maior que M será [20]

$$F(M) \equiv \int_{\delta_{sc}}^{\infty} p(\tilde{\delta}(r)) d\tilde{\delta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_R} \int_{\delta_{sc}}^{\infty} \exp\left(-\frac{\tilde{\delta}^2}{2\sigma_R^2}\right) d\tilde{\delta}, \quad (4.18)$$

onde $p(\delta)$ é a probabilidade de um dado ponto no espaço ter a amplitude de densidade δ , que no caso é gaussiana pois as perturbações são consideradas gaussianas. Nesse caso, σ_R é o desvio padrão suavizado, definido como

$$\sigma_R^2 = \frac{1}{2\pi^2} \int P(k) W_F^2(kR) k^2 dk, \quad (4.19)$$

onde $W_F(kR)$ é a transformada de Fourier da função *top-hat*, dada por

$$W_F(x) = \frac{3(\sin(x) - x\cos(x))}{x^3}. \quad (4.20)$$

Substituindo a Eq.(4.18) na Eq.(4.16) obtemos,

$$\begin{aligned} n(M)dM &= -\frac{\rho_0}{M} \frac{d\sigma_R}{dM} \frac{d}{d\sigma_R} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_R} \int_{\delta_{sc}}^{\infty} \exp\left(-\frac{\tilde{\delta}^2}{2\sigma_R^2}\right) d\tilde{\delta} \right] \\ &= -\frac{\rho_0}{M} \frac{d\sigma_R}{dM} \frac{d}{d\sigma_R} \left[\frac{(-1)}{\sqrt{2\pi}\sigma_R} \int_{\infty}^{\delta_{sc}/2\sigma_R} \exp\left(-\frac{\tilde{\delta}^2}{2\sigma_R^2}\right) d\tilde{\delta} \right]. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Fazendo a mudança de variável $x = \tilde{\delta}/2\sigma$, e lembrando que

$$\frac{d}{dx} \int_a^{b(x)} f(z)dz = f(b(x)) \frac{d}{dx} b(x), \quad \text{se } f(a) = 0, \quad (4.22)$$

temos que,

$$\begin{aligned} n(M)dM &= -\frac{\rho_0}{M} \frac{d\sigma_R}{dM} \frac{d}{d\sigma_R} \left(-\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\infty}^{\delta_{sc}/2\sigma_R} e^{-x^2} dx \right) \\ &= -\frac{\rho_0}{M} \frac{d\sigma_R}{dM} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[-\exp\left(-\frac{\delta_{sc}^2}{2\sigma_R^2}\right) \left(-\frac{\delta_{sc}}{\sqrt{2}} \frac{1}{d\sigma_R^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.23)$$

e portanto,

$$n(M)dM = -\frac{\rho_0}{M} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\delta_{sc}}{\sigma_R^2(M)} \right) \left(\frac{d\sigma_R(M)}{dM} \right) \exp\left(-\frac{\delta_{sc}^2}{2\sigma_R^2}\right) dM. \quad (4.24)$$

Há ainda uma sutileza na Eq.(4.18). A integral da fração de massa $\partial F/\partial M$ sobre todas as massas deveria ser 1. Entretanto [20],

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial F}{\partial M} dM = \frac{1}{2}. \quad (4.25)$$

Isso se dá porque a Eq.(4.18) leva em conta os pontos no espaço tais que $\delta > \delta_{sc}$ para um filtro de escala R , pois estes tem massa maior que $M(R)$, porém não leva em conta regiões de subdensidade, onde $\delta < \delta_{sc}$ no mesmo filtro, mas onde poderia haver pontos onde $\delta > \delta_{sc}$ para um outro filtro de escala $R_1 > R$. Tais pontos também teriam massa maior que M , de forma que a Eq.(4.18) subestima $F(M)$ por um fator 1/2. Tal fator pode ser justificado rigorosamente usando métodos estatísticos mais sofisticados, como o Press-Schechter estendido ou a teoria *excursion set* [23, 24]. A densidade numérica de objetos virializados corrigida fica então,

$$n(M)dM = -\frac{\rho_0}{M} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \left(\frac{\delta_{sc}}{\sigma_R^2(M)} \frac{d\sigma_R(M)}{dM} \right) \exp\left(-\frac{\delta_{sc}^2}{2\sigma_R^2}\right) dM \quad (4.26)$$

É útil reescrever a última equação introduzindo a variável ν tal que,

$$\nu \equiv \frac{\delta_{sc}^2}{\sigma_R^2}; \quad \frac{d\nu}{dM} = -\frac{2\nu}{\sigma_R} \frac{d\sigma_R}{dM}. \quad (4.27)$$

De forma que a Eq.(4.26) fica,

$$\frac{Mn(M)}{\rho} dM = \nu f(\nu) \frac{d\nu}{\nu}; \quad \nu f(\nu) = \left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^{1/2} e^{-\frac{\nu}{2}}. \quad (4.28)$$

Apesar de ser obtido por considerações simples e de forma analítica, a função de massa de Press-Schechter concorda razoavelmente com simulações de N-corpos [25], podendo ser usado para tratar desde galáxias anãs até aglomerados de galáxias.

4.2.2 Perfis de densidade dos halos

Outro ponto importante no tratamento dos halos é como a matéria escura se distribui nesses objetos. Assumindo halos esféricos, funções da forma:

$$\rho(r,M) = \frac{\rho_s}{(r/r_s)^\alpha (1+r/r_s)^\beta} \quad e \quad \rho(r,M) = \frac{\rho_s}{(r/r_s)^\alpha [1+(r/r_s)^\beta]}, \quad (4.29)$$

já foram amplamente estudadas em simulações de galáxias elípticas, onde ρ_s é a amplitude do perfil de densidade e r_s define a escala do raio do halo. Fazendo $(\alpha,\beta) = (1,3)$ e $(1,2)$ na expressão da esquerda obtemos os perfis de Hernquist [26] e Navarro-Frenk-White (NFW) [27, 28], respectivamente, enquanto que $(\alpha,\beta) = (3/2,3/2)$ na expressão da direita resulta no perfil M99 [29].

O perfil NFW é um dos mais bem sucedidos na descrição da densidade de halos virializados em simulações numéricas. Nele a densidade média dentro do halo ρ_h pode ser estimada arredondando a densidade do halo para 180 vezes a média do universo e usando [30]:

$$\rho_h = 180\bar{\rho}(z) = \frac{3}{4\pi r_{vir}^3} \int_0^{r_{vir}} 4\pi r^2 dr \rho(r) = 3\rho_s \int_0^1 \frac{x^2 dx}{cx(1+cx^2)}, \quad (4.30)$$

onde $x = r/r_{vir}$, $c \equiv r_{vir}/r_s$, chamado índice de concentração e r_{vir} é o raio virial. Integrando a última equação obtemos que,

$$\rho_s = \frac{180}{3} \bar{\rho} \frac{c^3}{\ln(1+c) - c/(1+c)}. \quad (4.31)$$

No perfil NFW [31],

$$c = \frac{9}{1+z} \left(\frac{M}{M_*} \right)^{-0.13}, \quad (4.32)$$

onde M_* é uma escala de massa característica, escolhida tal que $\nu(m,z) = 1$. Aqui, $M_* \approx 2 \times 10^{13} M_\odot$ [16].

É útil introduzir também o perfil de densidade dos halos normalizado, definido como:

$$u(\mathbf{r}|M) = \frac{\rho(\mathbf{r},M)}{M}, \quad \int u(r|M) d^3r = 1, \quad (4.33)$$

assim como sua transformada de Fourier:

$$u(\mathbf{k}|M) = \frac{\int \rho(\mathbf{r},M) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3r}{\int \rho(\mathbf{r},M) d^3r}. \quad (4.34)$$

Para perfis esféricamente simétricos truncados no raio virial (que é o raio do halo), temos:

$$u(k|M) = \int_0^{r_{vir}} dr 4\pi r^2 \frac{\sin(kr)}{kr} \frac{\rho(r,M)}{M}, \quad \text{notando que} \quad \lim_{k \rightarrow 0} u(k|M) = 1. \quad (4.35)$$

A figura (4.1) mostra a transformada de Fourier do perfil de densidade de Navarro-Frenk-White normalizado, para diversos valores de massa e em $z = 0$. Vemos que, como esperado, quanto maior é a escala de massa considerada, maior é supressão do perfil de densidade, como pode ser verificado pela Eq.(4.35).

4.2.3 Bias

Halos de matéria escura são traços enviesados da distribuição real de matéria escura, pois probabilidade de um halo se formar depende muito do campo de densidade inicial. Esse efeito é importante principalmente em grandes escalas, pois afeta diretamente a distribuição de galáxias. Por esse motivo o *bias* é modelado a partir da função de massa.

Para a função de massa de Press-Schechter temos que o bias adquire a forma:

$$b(M) = 1 + \frac{\nu - 1}{\delta_{sc}}, \quad \nu = \frac{\delta_{sc}^2}{\sigma_R^2} \quad (4.36)$$

Tal bias foi aprimorado por Sheth e Tormen [36] usando sua própria função de massa:

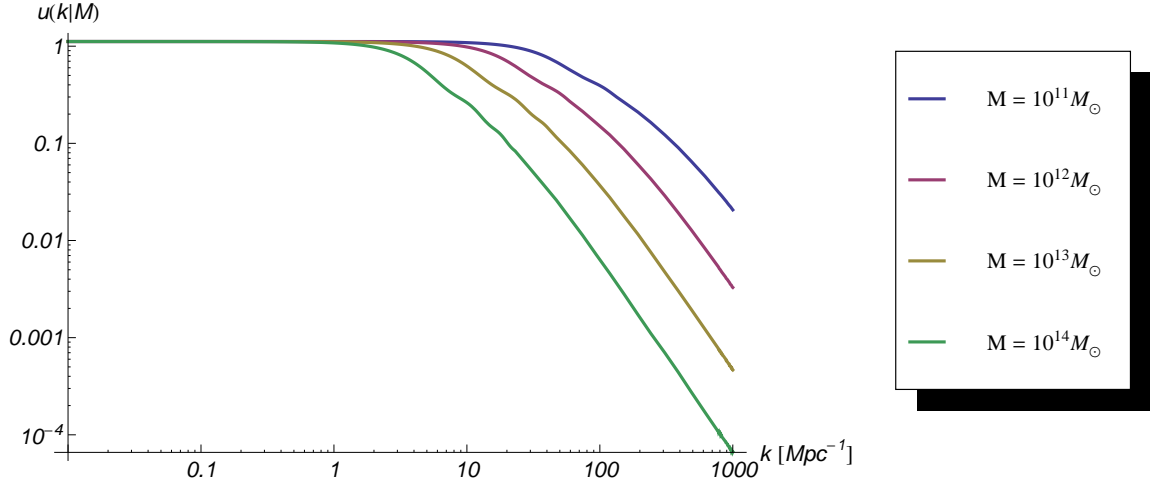


Figura 4.1: Transformada de Fourier do perfil de densidade de NFW normalizado, plotado em várias massas diferentes.

$$b(M) = 1 + \frac{a\nu - 1}{\delta_{sc}} + \frac{2p}{\delta_{sc} [1 + (a\nu)]^p} \quad (4.37)$$

onde $a = 0.75$ e $p = 0.3$ concordam melhor com simulações. Dessa forma a função de correlação de halos pode ser escrita em termos da função de correlação de matéria escura:

$$\xi_{hh}(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, M_1, M_2) = b(M_1)b(M_2)\xi_{dm}(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2) \quad (4.38)$$

4.2.4 Halos na formação de estruturas

No Modelo de Halos toda a matéria está confinada a halos, que por sua vez são caracterizados por sua massa e perfis de densidade. Portanto, a densidade em um ponto \mathbf{r} é dada somando-se as contribuições de cada halo [16]:

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_i \rho(\mathbf{r} - \mathbf{x}_i | M_i), \quad (4.39)$$

onde \mathbf{x}_i é a posição do centro do i -ésimo halo de massa M_i . Podemos reescrever essa equação usando o perfil de densidade normalizado $u(k|M)$:

$$\begin{aligned}
\rho(\mathbf{r}) &= \sum_i M_i u(\mathbf{r} - \mathbf{x}_i | M) \\
&= \sum_i \int dM \int d^3 r' \delta(M - M_i) \delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{x}_i) M u(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \tag{4.40}
\end{aligned}$$

onde a última igualdade segue ao lembrar que $\int \delta(x - y) f(x) dx = f(y)$, onde $\delta(x - y)$ é a função delta de Dirac.

A densidade de halos de massa M é:

$$n(M) \equiv \left\langle \sum_i \delta(M - M_i) \delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{x}_i) \right\rangle, \tag{4.41}$$

onde $\langle \dots \rangle$ denota uma média sobre *ensembles*. A densidade média no ponto \mathbf{r} é, portanto,

$$\begin{aligned}
\bar{\rho} = \langle \rho(\mathbf{r}) \rangle &= \left\langle \sum_i \int dM \int d^3 r' \delta(M - M_i) \delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{x}_i) M u(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right\rangle \\
&= \int dM n(M) M \int d^3 r' u(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\
&= \int dM n(M) M. \tag{4.42}
\end{aligned}$$

A função de correlação de dois pontos pode ser obtida diretamente fazendo:

$$\begin{aligned}
\xi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \langle \delta(\mathbf{r}_1) \delta(\mathbf{r}_2) \rangle \\
&= \left\langle \left(\frac{\rho(\mathbf{r}_1)}{\bar{\rho}} - 1 \right) \left(\frac{\rho(\mathbf{r}_2)}{\bar{\rho}} - 1 \right) \right\rangle = \left\langle \frac{\rho(\mathbf{r}_1) \rho(\mathbf{r}_2)}{\bar{\rho}^2} \right\rangle - 1 \\
&= \frac{1}{\bar{\rho}^2} \left\langle \sum_i M_i u(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_1) \sum_j M_j u(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_2) \right\rangle - 1 \\
&= \frac{1}{\bar{\rho}^2} \left\langle \sum_{i=j} M_i^2 u(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_1) u(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_2) \right\rangle + \\
&\quad + \frac{1}{\bar{\rho}^2} \left\langle \sum_{i \neq j} M_i M_j u(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_1) u(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_2) (1 + \xi_{hh}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)) \right\rangle - 1 \\
&= \frac{1}{\bar{\rho}^2} \left\langle \sum_i \int dM M^2 \delta(M - M_i) \int d^3 r' \delta^3(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}') u(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1) u(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_2) \right\rangle \\
&\quad + \frac{1}{\bar{\rho}^2} \int dM_1 M_1 \int dM_2 M_2 \int d^3 r'_1 u(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}_1) \int d^3 r'_2 u(\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}_2) \times \\
&\quad \times \sum_i \sum_j \left\langle \delta(M_1 - M_i) \delta^3(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_1) \delta(M_2 - M_j) \delta^3(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}'_2) \right\rangle - 1.
\end{aligned}$$

O segundo termo da equação possui a média do produto de duas densidades numéricas por unidade de massa dos halos:

$$\left\langle \sum_i \delta(M_1 - M_i) \delta^3(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_1) \sum_j \delta(M_2 - M_j) \delta^3(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}'_2) \right\rangle = \langle n(\mathbf{r}'_1, M_1) n(\mathbf{r}'_2, M_2) \rangle. \quad (4.43)$$

Temos que, em termos da função de massa $n(M)$

$$\delta n(\mathbf{r}, M) = \frac{n(\mathbf{r}, M) - n(M)}{n(M)} \Rightarrow n(\mathbf{r}, M) = n(M) \delta n(M) + n(M), \quad (4.44)$$

e como $\langle \delta n(M) \rangle = 0$:

$$\langle n(\mathbf{r}'_1, M_1) n(\mathbf{r}'_2, M_2) \rangle = \langle \delta n(\mathbf{r}'_1, M_1) \delta n(\mathbf{r}'_2, M_2) \rangle n(M_1) n(M_2) + n(M_1) n(M_2). \quad (4.45)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \xi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \frac{1}{\bar{\rho}^2} \int dM M^2 n(M) \int d^3 r' u(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1) u(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_2) + \\ &+ \frac{1}{\bar{\rho}^2} \int dM_1 M_1 \int dM_2 M_2 \int d^3 r'_1 u(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}_1) \int d^3 r'_2 u(\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}_2) \times \\ &\times (\langle \delta n(\mathbf{r}'_1, M_1) \delta n(\mathbf{r}'_2, M_2) \rangle n(M_1) n(M_2) + n(M_1) n(M_2)) - 1. \end{aligned}$$

Mas a média $\langle \delta n(\mathbf{r}'_1, M_1) \delta n(\mathbf{r}'_2, M_2) \rangle$ é exatamente a função de correlação entre dois halos de matéria escura nas posições \mathbf{r}'_1 e \mathbf{r}'_2 , e de massas M_1 e M_2 , respectivamente. Denotaremos essa função de correlação como $\xi_{hh}(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2 | M_1, M_2)$. O último termo resulta em $(\int dM n(M) M)^2 = \bar{\rho}^2$, já que $\int u(r|M) d^3 r = 1$, de forma que,

$$\begin{aligned} \xi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \frac{1}{\bar{\rho}^2} \int dM M^2 n(M) \int d^3 r' u(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1) u(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_2) + \\ &+ \frac{1}{\bar{\rho}^2} \int dM_1 M_1 n(M_1) \int dM_2 M_2 n(M_2) \times \\ &\times \int d^3 r'_1 \int d^3 r'_2 u(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}_1) u(\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}_2) \xi_{hh}(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2 | M_1, M_2). \end{aligned}$$

Os pontos da função de correlação podem estar em um mesmo halo, ou em halos diferentes de matéria escura, de forma que podemos separar a função de correlação em dois termos: um que leva a contribuição de apenas um halo ($i = j$), $\xi_{1h}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$, e outro em que entra a contribuição de dois halos ($i \neq j$), $\xi_{2h}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$. Dessa forma, a função de correlação de dois pontos total é escrita como

$$\xi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \xi_{1h}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + \xi_{2h}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \quad (4.46)$$

onde

$$\xi_{1h}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \int dM \frac{M^2}{\bar{\rho}^2} n(M) \int d^3 r' u(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1) u(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_2) \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} \xi_{2h}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) &= \int dM_1 \frac{M_1}{\bar{\rho}} n(M_1) \int dM_2 \frac{M_2}{\bar{\rho}} n(M_2) \times \\ &\times \int d^3 r'_1 \int d^3 r'_2 u(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}_1) u(\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}_2) \xi_{hh}(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2 | M_1, M_2), \end{aligned} \quad (4.48)$$

Como o espectro de potência é a transformada de Fourier da função de correlação, obtemos também $P(k)$ em duas partes:

$$P_h(k) = P_{1h}(k) + P_{2h}(k), \quad (4.49)$$

onde

$$P_{1h}(k) = \frac{1}{\bar{\rho}^2} \int dM M^2 n(M) |u(k|M)|^2 \quad (4.50)$$

$$P_{2h}(k) = \frac{1}{\bar{\rho}^2} \int dM_1 M_1 n(M_1) u(k|M_1) \int dM_2 M_2 n(M_2) u(k|M_2) P_{hh}(k|M_1, M_2), \quad (4.51)$$

e $P_{hh}(k|M_1, M_2)$ é o espectro de potência dos halos de matéria escura. No regime linear $P_{hh}(k|M_1, M_2) \approx b_1(M_1) b_2(M_2) P_{lin}(k)$, onde $P_{lin}(k)$ é o espectro de potência linear. No presente trabalho usaremos $b_1(M_1) = b_2(M_2) = 1$. As integrais são tomadas em valores típicos da massa de halos observados. É usual considerar que esses valores variem de $M \approx 10^{10} M_\odot$ a $M \approx 10^{15} M_\odot$ [16].

Obtemos então o espectro de potência não-linear da matéria escura dependente apenas do espectro de potência linear e dos perfis de massa e densidade, como dita o Modelo de Halos.

4.3 Testando o Modelo de Halos

O Modelo de Halos é baseado em pressupostos bem simples e, até certo ponto, ingênuos sobre a formação de estrutura e colapso de matéria. É preciso então compará-lo com simulações e outros modelos para que fique claro o quanto ele é válido e o que precisa ser revisado e ajustado.

Já foram feitas diversas comparações do Modelo de Halos com simulações numéricas de N-corpos. Algumas podem ser encontradas em [16, 32–34]. Para este trabalho foram

feitas comparações com o modelo Halofit.

Halofit é um ajuste numérico para o espectro de potência não-linear obtido de simulações de N-corpos [35]. Nesse ajuste, o espectro de potência também é separado em termos de 1 e 2-halos, como no Modelo de Halos, porém no Halofit todos os parâmetros são ajustados numericamente. Ele foi implementado no presente trabalho por meio de um pacote de software computacional CAMB (Code for Anisotropies in the Microwave Background). CAMB é um código aberto escrito em FORTRAN 90, inicialmente desenvolvido por Antony Lewis e Anthony Challinor, com o propósito de fornecer o espectro de potência dados os parâmetros cosmológicos¹, através da resolução das equações de Boltzmann².

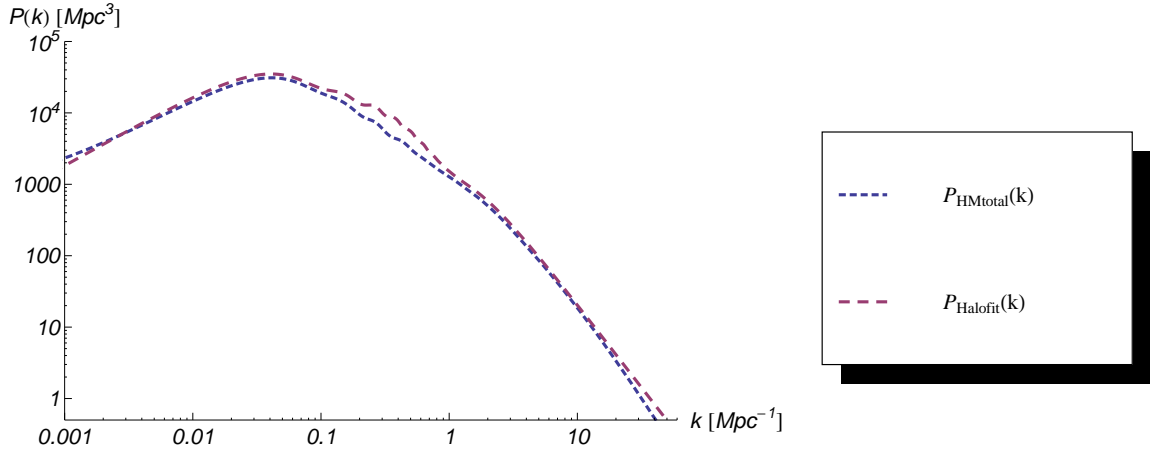


Figura 4.2: Espectros de potência não-lineares obtidos via Halofit e Modelo de Halos em $z = 0$ e com $\Omega_b = 0.24, \Omega_{cdm} = 0.76$ nas duas curvas.

A figura (4.2) exhibe os espectros de potência do campo de densidades da matéria escura calculados, em um universo dominado por matéria, pelos dois modelos: Halofit e Modelo de Halos. O espectro de potência do Modelo de Halos foi obtido por meio de um código próprio em Mathematica, mostrado no Apêndice A. As duas curvas concordam bem tanto em pequenas quanto em grandes escalas.

Os termos de 1-halo e 2-halos do espectro de potência do Modelo de Halos, assim como o termo total, o espectro via Halofit e o espectro de potência linear estão plotados na figura (4.3). Dessa vez são vistos os invariantes $\Delta^2(k)$'s, ao invés da função $P(k)$ em si. Vemos que em grandes escalas, $k \lesssim 0.2 \text{ Mpc}^{-1}$, o espectro de potência do Modelos de Halos é dominado pelo termo de 2-halos, e para $k \gtrsim 1 \text{ Mpc}^{-1}$ é o termo de 1-halo que mais se assemelha ao Halofit, como já era esperado. Vemos também que o espectro de potência linear concorda melhor com o termo de 2-halos e com o Halofit para k 's pequenos.

¹Conjunto de parâmetros que descrevem a dinâmica e composição do universo: $\Omega_{cdm}, \Omega_b, \Omega_\Lambda, \sigma_8, n_s, H_0, \omega, \Delta_R^2$.

²A equação de Boltzmann nos dá a descrição da função de distribuição de um dado componente. O conjunto das equações de Boltzmann para fótons, elétrons, prótons, matéria escura e neutrinos determinam a evolução de perturbações no universo. Para mais detalhes ver [17]

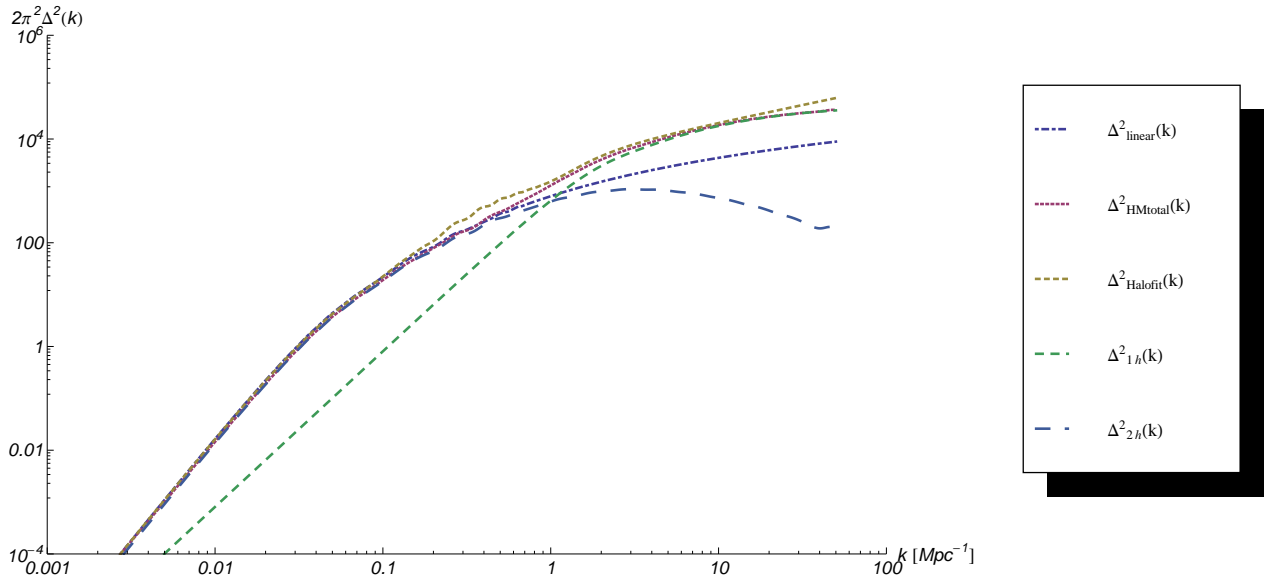


Figura 4.3: Espectro de potência linear ($k^3 P_{linear}(k)$) e não linear através do Halofit ($k^3 P_{halofit}(k)$) e os termos de 1-halo ($k^3 P_{1h}(k)$) e 2-halos ($k^3 P_{2h}(k)$), além do espectro total ($k^3 P_{HMtotal}(k)$) do Modelo de Halos, da matéria escura para $\Omega_M = 1$ e em $z = 0$.

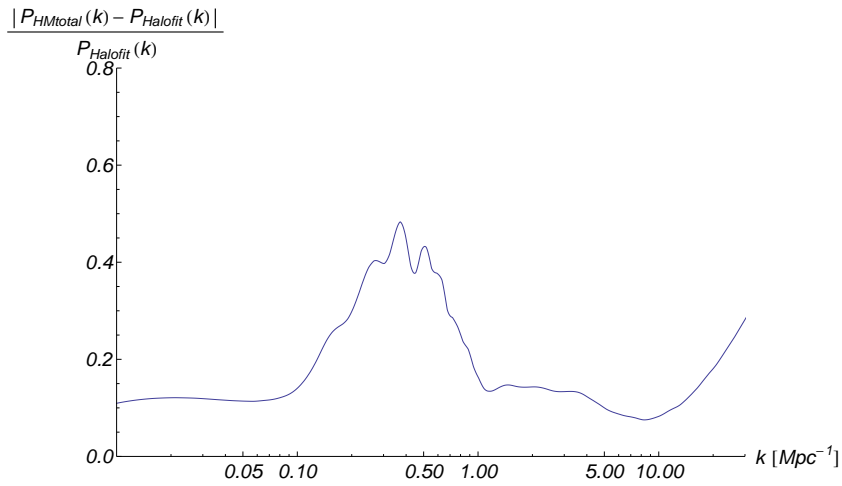


Figura 4.4: Razão entre os espectros de potência não-lineares do Modelo de Halos e do Halofit.

As curvas do espectro de potência não-linear do Halofit e do Modelo de Halos são muito semelhantes e é possível extrair da figura (4.4) o erro percentual entre os dois espectros de potência. Vemos que em escalas com $k \lesssim 0.1 \text{ Mpc}^{-1}$ e $1 < k < 10 \text{ Mpc}^{-1}$ esse erro é cerca de 10%, o que é considerado razoável. Porém, ainda há discrepâncias, principalmente em escalas entre $0.2 \lesssim k \lesssim 0.9 \text{ Mpc}^{-1}$. Essa é exatamente a escala de transição entre os termos de 1 e 2-halos, e ocorre de nenhum dos dois descrever bem essa região. O Modelo de Halos perde sua acurácia para escalas maiores que 10 Mpc^{-1} . O erro percentual entre o Halofit e o Modelo de Halos poderia ser reduzido considerando um modelo de colapso elíptico [36] ao invés do esférico, por exemplo, ou trocando o perfil de densidade, que poderia ser o M99 ao invés do NFW (o espectro de potência é bastante sensível a esse parâmetro). A inclusão de um *bias* diferente de 1 também poderia modificar significativamente o espectro de potência.

5

Matéria Escura Morna e a Supressão de Perturbações

Com os avanços da última década nas áreas de observação e simulações de N-corpos estamos sendo aptos a comparar nossos modelos com dados cada vez mais precisos. Na teoria Λ CDM, a mais bem sucedida até então, a matéria escura é suposta ser composta de partículas pesadas e fracamente interagentes, que desacoplaram muito cedo no início da história do universo¹, mas ainda não se sabe muito sobre ela. Existem ainda diversos conflitos dessa teoria com dados astronômicos, que ocorrem principalmente nas menores escalas cosmológicas.

Um desses conflitos ocorrem em simulações da matéria escura fria, que predizem um número enorme de subhalos em halos de galáxias, enquanto que observações indicam a existência de poucas galáxias satélites em torno da Via Láctea ou da M31 [37]. Outra discrepância está no perfil de densidade dos halos de CDM, que em simulações decresce linearmente para pequenos raios [28, 38], mas quando extraído de curvas de rotação de galáxias é muito mais suave [39, 40].

Uma possível solução para essas anomalias seria reconsiderar a natureza das partículas de matéria escura. Um candidato promissor é a chamada matéria escura morna (WDM). Nesse cenário a partícula de matéria escura é mais leve do que a CDM, e portanto ela permanece relativística tempo suficiente para manter uma velocidade térmica. Devido a essa velocidade as partículas afetam as perturbações iniciais por meio do caminho livre no plasma primordial. Esse caminho livre acaba por suprimir a formação de estrutura em pequenas escalas, o que pode ser observado também como uma queda do espectro de potência para k grande.

O quanto tal supressão da formação de estruturas ocorre depende do tipo e da massa da partícula de matéria escura morna. Os principais candidatos à WDM são os neutrinos estéreis [41] e os gravitinos supersimétricos [42], ambos necessitariam de uma reformulação do modelo padrão.

Será feito aqui um breve estudo da WDM, com destaque no espectro de potência não-linear da matéria escura através de uma modificação do Modelo de Halos, sugerida em [43].

¹Um estudo detalhado sobre a história térmica do universo pode ser visto em [11].

5.1 Espectro de Potência Linear da WDM

Já sabemos que as propriedades estatísticas do campo de densidade de matéria estão codificadas no espectro de potência. No caso da WDM, o espectro de potência inicial da matéria, que surge após a época que o universo era dominado por radiação, é modificado por causa do caminho livre das partículas. Usaremos aqui um ajuste encontrado em [44] para o espectro de potência linear da WDM, que pode ser escrito em termos do espectro de potência linear da CDM:

$$P_{WDM}^{lin}(k) = P_{CDM}^{lin}(k) \left[1 + (\alpha k)^{2\mu}\right]^{-5\mu} \quad (5.1)$$

onde $\mu = 1.12$ [42] e,

$$\alpha = 0.049 \left(\frac{\Omega_\chi}{0.25}\right)^{0.11} \left(\frac{m_\chi}{keV}\right)^{-1.11} \left(\frac{h}{0.7}\right)^{1.22} h^{-1} Mpc. \quad (5.2)$$

Como resultado do trabalho de [42] tem-se que a massa m_χ das partículas de WDM tem que respeitar um mínimo $m_\chi \gtrsim 0.6 keV$. Como estamos interessados em como a matéria escura morna altera a formação de estruturas utilizamos $m_\chi = 0.75 keV$, que está seguramente acima do mínimo permitido e ainda é uma massa pequena o bastante para ter influência na formação de galáxias, já que permite a partícula permanecer relativística por tempo suficiente para isso após a era da radiação. O termo Ω_χ representa a abundância de matéria escura morna no universo, e consideramos aqui toda a matéria escura como morna.

A figura (5.1) mostra o espectro de potência linear da WDM para três massas diferentes: $m_\chi = 0.25 keV$, $m_\chi = 0.75 keV$ e $m_\chi = 1.25 keV$. Vemos que, como esperado, o espectro de potência que sofre maior supressão é o correspondente à WDM de menor massa, $m_\chi = 0.25 keV$.

5.2 Modelo de Halos para WDM

Como já discutido, a supressão observada no espectro de potência ocorre em pequenas escalas, regime em que é preciso recorrer à uma teoria não-linear. O Modelo de Halos, no caso de um espectro de potência suprimido, não reproduz resultados tão precisos quanto o de simulações numéricas para formação de estrutura não-linear. No entanto, ele proporciona um bom entendimento qualitativo dos processos físicos envolvidos, além de não necessitar de muita potência computacional.

5.2.1 Modificação da função de massa

O modelo de Press-Schechter para a função de massa de halos discutido na seção (4.2.1) não reproduz bem simulações numéricas, quando aplicado à WDM [43]. Várias

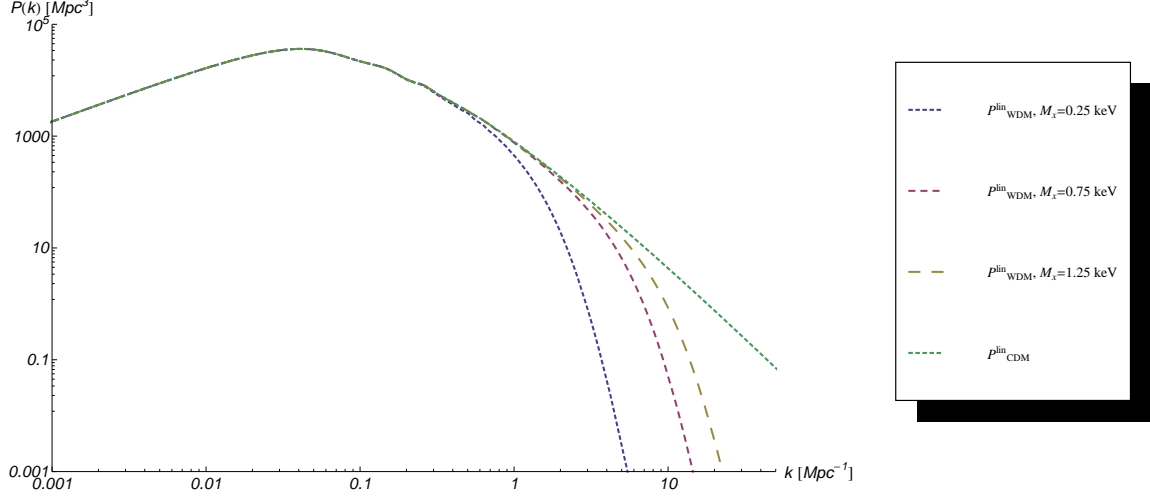


Figura 5.1: Espectro de potência linear em $z = 0$ para matéria escura morna de massas $m_\chi = 0.25 \text{ keV}$, $m_\chi = 0.75 \text{ keV}$ e $m_\chi = 1.25 \text{ keV}$. Também é possível ver o espectro de potência linear da matéria escura fria, via CAMB, para comparações.

soluções para tratar espectros de potência suprimidos já foram propostas [45–49], mas aqui apresentaremos apenas o modelo *sharp-k* [43]. Esse modelo consiste em uma simples modificação no filtro da Eq.(4.19), que ao invés de ser uma função *top-hat* no espaço de configurações, passa a ser um *top-hat* no espaço dos momentos. Tal filtro é chamado de *sharp-k*,

$$W_{SK}(kr) = \Theta(1 - kr), \quad \Theta(1 - x) = \begin{cases} 0, & x > 1 \\ 1, & x < 1 \end{cases} \quad (5.3)$$

O motivo pelo qual o filtro *sharp-k* funciona melhor que o *top-hat* está no comportamento assintótico da Eq.(4.19) para raios pequenos. Com o filtro *top-hat* a integral se torna insensível ao formato do espectro de potência, caso ele decresça mais rápido que k^{-3} , como acontece para WDM. Porém, no caso do filtro *sharp-k* a integral passa a depender naturalmente do formato do espectro de potência para qualquer raio. A variância fica, então

$$\sigma_{SK}^2(R) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{1/R} P_{WDM}^{lin}(k) k^2 dk, \quad (5.4)$$

onde a função $P_{WDM}^{lin}(1/R)$ é o espectro de potência linear da matéria escura morna, obtido na seção anterior.

É importante perceber que o filtro *sharp-k* não possui uma massa bem definida associada

a uma escala R . Isso significa que, a menos da proporcionalidade $M \propto R^3$ devido à simetria esférica do filtro, a massa dos halos não possui restrições. Introduzindo um novo parâmetro livre, podemos reescrever a relação entre a escala e a massa como:

$$M = \frac{4\pi}{3} \bar{\rho} (cR)^3, \quad (5.5)$$

onde $c = 2.5$ é o valor que melhor reproduz simulações [43].

Modificando a função de massa da Eq.(4.26),

$$n_{SK}(M)dM = -\frac{\rho_0}{M} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{\delta_{sc}}{\sigma_{SK}^2(M)} \frac{d\sigma_{SK}(M)}{dM}\right) \exp\left(-\frac{\delta_{sc}^2}{2\sigma_{SK}^2}\right) dM. \quad (5.6)$$

Como,

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{SK}(M)}{dM} &= \frac{d\sigma_{SK}(M)}{dR} \frac{dR}{dM} \\ &= \left[\frac{1}{2\pi^2} \left(-\frac{1}{R^2} \frac{1}{R^2} P_{WDM}^{lin}(1/R) \right) \right] \left[\frac{1}{3} \frac{R}{M} \right]. \end{aligned} \quad (5.7)$$

A função da massa fica então:

$$n_{SK}(M)dM = \frac{\rho_0}{M^2 R^3} \left(\frac{1}{18\pi^5}\right)^{1/2} \left(\frac{\delta_{sc}}{\sigma_{SK}^2(M)}\right) \left(P_{WDM}^{lin}\left(\frac{1}{R}\right)\right) \exp\left(-\frac{\delta_{sc}^2}{2\sigma_{SK}^2}\right) dM. \quad (5.8)$$

Com essa modificação da função de massa podemos agora nos concentrar no espectro de potência para a WDM segundo o Modelo de Halos.

5.2.2 Espectro de Potência não-linear para WDM

O espectro de potência não-linear para a matéria escura morna foi calculado usando um programa semelhante ao utilizado para os resultados do capítulo anterior. As curvas para partículas de três massas diferentes estão na figura (5.2).

Vemos que o espectro de potência não-linear não sofre uma diferença de supressão em pequenas escalas considerável quando consideramos $m_\chi = 0.75 \text{ keV}$ e $m_\chi = 1.25 \text{ keV}$, ao contrário do que ocorre para o espectro de potência linear. Ao considerar uma massa menor, $m_\chi = 0.25 \text{ keV}$, vemos que a supressão para k grande é um pouco maior. No entanto, esse último espectro de potência difere dos outros dois inclusive em grandes escalas, o que nos faz concluir que massas muito pequenas não adequam bem a distribuição do campo de densidade de matéria vista no espectro de potência.

É preciso lembrar que o Modelo de Halos teve apenas sua função de massa modificada no presente trabalho. Um resultado mais acurado talvez necessitasse de uma modificação também do perfil de densidade, como visto em [45].

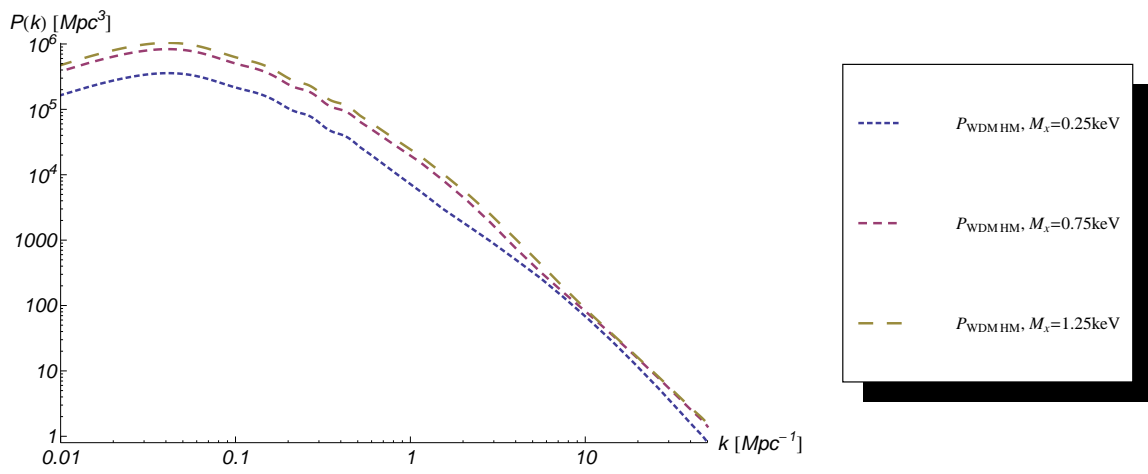


Figura 5.2: Espectro de potência não-linear para o campo de densidade da matéria escura morna de três massas diferentes: $m_\chi = 0.25 \text{ keV}$, $m_\chi = 0.75 \text{ keV}$ e $m_\chi = 1.25 \text{ keV}$.

Conclusões e Perspectivas

No presente trabalho apresentamos uma maneira de estudar o universo em pequenas escalas, em torno de $0.01 Mpc$, por meio do espectro de potência não-linear obtido a partir do Modelo de Halos. Vimos também uma proposta de alternativa para a matéria escura fria: a matéria escura morna, que seria a composição de aproximadamente 20% do nosso universo.

Revisamos a aproximação de colapso esférico da matéria e as principais características do Modelo de Halos: a função de massa e o perfil de densidade dos halos. Com isso, pudemos escrever o espectro de potência não-linear para a matéria escura a partir do espectro de potência linear fornecido pelo código CAMB. Esse processo computacional não demora mais do que alguns minutos. Comparamos então esse espectro de potência não-linear do Modelo de Halos com o do Halofit, pacote usado pelo CAMB para correções não lineares em Λ CDM. As duas curvas são consistentes, com um erro percentual de aproximadamente 10% em algumas escalas, mostrando que o Modelo de Halos é uma aproximação razoável do comportamento do universo em pequenas escalas. Tal erro talvez fosse reduzido ao considerar um modelo de colapso elíptico, um perfil de densidade diferente ou introduzindo um *bias*.

Tendo estabelecido o Modelo de Halos, pudemos então ir além no conceito da matéria escura. Para melhor reproduzir dados observacionais em pequenas escalas, a composição da matéria escura em simulações deveria ser mais leve, de forma a suprimir a formação de estruturas. Adaptamos o Modelo de Halos para uma partícula de massa $m_\chi = 0.75 keV$, introduzindo o filtro *sharp-k* para modificar a função de massa. Os espectros de potência linear e não-linear para a WDM estão no Cap.5. A supressão no espectro de potência linear causada pela matéria escura morna de massas diferentes pode ser observada claramente. No entanto, o espectro de potência não-linear não se mostrou muito sensível à variações na massa, em pequenas escalas.

Ainda há, entretanto, muita coisa para ser estudada e muitos testes a serem feitos. Um importante próximo passo seria utilizar o Modelo de Halos para o tratamento de galáxias e aglomerados de galáxias, e possivelmente com dados reais de catálogos. Para isso seria necessário introduzir um viés, e interessante trabalhar com o espectro de potência bidimensional, ou até a função de correlação angular.

Muita coisa sobre matéria escura morna também não foi abordada aqui. A modificação de outros elementos do Modelo de Halos para a WDM, não só a função de massa, seria um futuro teste relevante, assim como a comparação desse novo modelo com simulações. Pode ser feito ainda um estudo mais amplo sobre outros candidatos promissores à matéria escura, como as partículas massivas fracamente interagentes (WIMP), a matéria escura mista ou a matéria escura interagente e auto-interagente. Esses outros candidatos também seriam submetidos ao Modelo de Halos e à comparação com simulações e dados observacionais. Esse estudo da matéria escura morna poderia ser aprofundado usando também dados do DES, colaboração da qual sou membro.

Apêndice A

Espectro de Potência Halo Model

■ CAMB Input

```
datalin = Import["../powerlin.dat", "Table"];
datanonlin = Import["../powernonlin.dat", "Table"];
Plin = Interpolation[datalin]
Pnonlin = Interpolation[datanonlin]
```

■ Constantes

```
h = 0.7;
ρc = 2.775 h2 1011; (* Msol.Mpc-3 *)
δc = 1.686 (1 + (0)); (* densidade crítica *)
Ma = 2. × 1013; (*Msol*)
```

■ Variáveis Colapso esférico e halo model

```
rvir[M_] :=  $\left(3 \frac{M}{4 \pi 180 \rho c}\right)^{1/3}$  (* raio virial *)
x[M_] := 0.01223  $\left(\frac{M}{Ma}\right)^{0.13} \left(\frac{M}{\rho c}\right)^{1/3}$  (* rs *)
R[M_] :=  $\left(3 \frac{M}{4 \pi \rho c}\right)^{1/3}$ 
W[k_, M_] := 3  $\frac{(\text{Sin}[k R[M]] - k R[M] \text{Cos}[k R[M]])}{(k R[M])^3}$ 
(* transformada de fourier da função janela top-hat *)
σ[M_] :=  $\left(\frac{1}{2 \pi^2} \text{NIntegrate}[h^{-3} P_{\text{lin}}[k] (W[k, M])^2 k^2, \{k, 0.0001, 53.335\}]\right)^{1/2}$ 
(* variância *)
σ[2.9162 × 1014] (* Sigma8 match CAMB *)
sigmatable = Table[{10x, σ[10x]}, {x, 10, 15, 0.1}]
σfunction = Interpolation[sigmatable]
```

■ Função de massa de Press-Schechter

```
Dσ[M_] := D[σfunction[a], a] /. a → M (* derivada da variância *)
```

```

n[M_] :=  $\frac{-\rho c}{M} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{\delta c}{\sigma \text{function}[M]^2}\right) (D\sigma[M])$ 

Exp $\left[\frac{-\delta c^2}{2 \sigma \text{function}[M]^2}\right]$  (* função de massa *)

ntable = Table[{10x, n[10x]}, {x, 10, 15, 0.1}]
nfunction = Interpolation[ntable, Method → "Spline"]

```

■ Perfil de densidade de Navarro-Frenk-White

```

c[M_] :=  $\frac{9}{1 + (0)} \left(\frac{M}{M_a}\right)^{-0.13}$  (* parâmetro de contraste *)

ρs[M_] :=  $\frac{200}{3} \rho c \frac{c[M]^3}{\text{Log}[1 + c[M]] - \frac{c[M]}{1+c[M]}}$ 

ρ[r_, M_] :=  $\frac{\rho s[M]}{\left(\frac{r}{x[M]}\right) \left(1 + \frac{r}{x[M]}\right)^2}$  (* densidade interna dos halos *)

utest[k_, M_] :=  $4 \text{Pi} \rho s[M] \frac{x[M]^3}{M} * \left( \text{Sin}[k x[M]] (\text{SinIntegral}[(1 + c[M]) k x[M]] - \text{SinIntegral}[k x[M]]) - \frac{\text{Sin}[c[M] k x[M]]}{(1 + c[M]) k x[M]} + \text{Cos}[k x[M]] (\text{CosIntegral}[(1 + c[M]) k x[M]] - \text{CosIntegral}[k x[M]]) \right)$ 

(* perfil de densidade normalizado *)

```

■ Espectro de Potência - termo de 1-halo

```

P1h[k_] :=  $\frac{1}{\rho c^2} \text{NIntegrate}[(M)^2 \text{nfunction}[M] (\text{utest}[k, M])^2, \{M, 10^{10}, 10^{15}\}]$ 

p1htable = Table[{10k, P1h[10k]}, {k, -4, 2, 0.1}]
p1hfunction = Interpolation[p1htable, Method → "Spline"]

```

■ Espectro de Potência - termo de 2-halos

```

P2h[k_] :=  $\frac{1}{\rho c^2} \text{NIntegrate}[M1 \text{nfunction}[M1] \text{utest}[k, M1], \{M1, 10^{10}, 10^{15}\}]$ 
 $\text{NIntegrate}[M2 \text{nfunction}[M2] \text{utest}[k, M2], \{M2, 10^{10}, 10^{15}\}] * \text{P1in}[k] h^{-3}$ 

p2htable = Table[{10k, P2h[10k]}, {k, -4, 1.7, 0.1}]
p2hfunction = Interpolation[p2htable, Method → "Spline"]

```

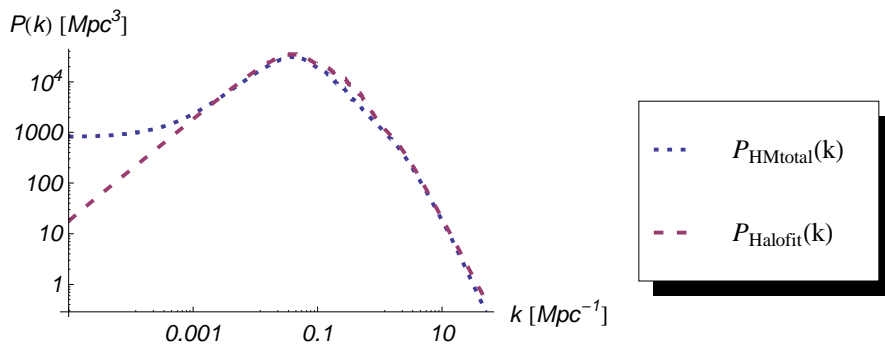
■ Espectro de Potência total

```

ptotable = Table[{10^k, p1hfunction[10^k] + p2hfunction[10^k]}, {k, -4, 1.7, 0.1}]
Ptot = Interpolation[ptotable, Method -> "Spline"]

LogLogPlot[{Ptot[k], h^-3 Pnonlin[k]}, {k, 0.00001, 50},
  PlotStyle -> {{Dashing[Small], Thick}, {Dashing[Medium], Thick}},
  BaseStyle -> {FontSize -> 14},
  LabelStyle -> Directive[Italic, FontFamily -> "Helvetica", FontSize -> 12],
  PlotLegend -> {Style["PHMtotal(k)", 14], Style["PHalofit(k)", 14]},
  LegendPosition -> {1.1, -0.4}, AxesLabel -> {"k [Mpc-1]", "P(k) [Mpc3"]}

```



Referências Bibliográficas

- [1] Mpa-Garching, “The millennium simulation project.”
<http://www.mpa-garching.mpg.de/galform/virgo/millennium/>.
- [2] SDSS, “Science results.” <http://www.sdss.org/science/>.
- [3] D. E. S. Collaboration *et al.*, “The dark energy survey,” *arXiv preprint astro-ph/0510346* (2005) .
- [4] G. Bertone, D. Hooper, and J. Silk, “Particle dark matter: Evidence, candidates and constraints,” *Physics Reports* **405** (2005) no. 5, 279–390.
- [5] V. Luković, P. Cabella, and N. Vittorio, “Dark matter in cosmology,” *International Journal of Modern Physics A* **29** (2014) no. 19, 1443001.
- [6] S. M. Carroll, *Spacetime and geometry. An introduction to general relativity*, vol. 1. Addison Wesley, 2004.
- [7] L. D. Landau, *The classical theory of fields*, vol. 2. Elsevier, 2013.
- [8] D. H. Weinberg, M. J. Mortonson, D. J. Eisenstein, C. Hirata, A. G. Riess, and E. Rozo, “Observational probes of cosmic acceleration,” *arXiv preprint arXiv:1201.2434* (2012) .
- [9] P. Ade, N. Aghanim, C. Armitage-Caplan, M. Arnaud, M. Ashdown, F. Atrio-Barandela, J. Aumont, C. Baccigalupi, A. J. Banday, R. Barreiro, *et al.*, “Planck 2013 results. xv. cmb power spectra and likelihood,” *Astronomy & Astrophysics* **571** (2014) A15.
- [10] L. Ryder, *Introduction to general relativity*. Cambridge University Press, 2009.
- [11] E. W. Kolb and M. S. Turner, “The early universe.,” *Front. Phys., Vol. 69*, **1** (1990) .
- [12] P. Collaboration *et al.*, “Planck 2015 results. xiii. cosmological parameters,” *arXiv preprint arXiv:1502.01589* (2015) .
- [13] V. Mukhanov, *Physical foundations of cosmology*. Cambridge University Press, 2005.
- [14] O. Lahav, P. B. Lilje, J. R. Primack, and M. J. Rees, “Dynamical effects of the cosmological constant,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **251** (1991) no. 1, 128–136.
- [15] S. M. Carroll, W. H. Press, and E. L. Turner, “The cosmological constant,” *Annual review of astronomy and astrophysics* **30** (1992) 499–542.

- [16] A. Cooray and R. Sheth, “Halo models of large scale structure,” *Physics Reports* **372** (2002) no. 1, 1–129.
- [17] S. Dodelson, *Modern cosmology*. Academic press, 2003.
- [18] D. J. Eisenstein and W. Hu, “Baryonic features in the matter transfer function,” *The Astrophysical Journal* **496** (1998) no. 2, 605.
- [19] J. E. Gunn and J. R. Gott III, “On the infall of matter into clusters of galaxies and some effects on their evolution,” *The Astrophysical Journal* **176** (1972) 1.
- [20] T. Padmanabhan, *Structure formation in the universe*. Cambridge university press, 1993.
- [21] P. J. E. Peebles, *The large-scale structure of the universe*. Princeton university press, 1980.
- [22] W. H. Press and P. Schechter, “Formation of galaxies and clusters of galaxies by self-similar gravitational condensation,” *The Astrophysical Journal* **187** (1974) 425–438.
- [23] N. Hiotelis, “Extended press–schechter theory and the density profiles of dark matter haloes,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **344** (2003) no. 1, 149–155.
- [24] A. R. Zentner, “The excursion set theory of halo mass functions, halo clustering, and halo growth,” *International Journal of Modern Physics D* **16** (2007) no. 05, 763–815.
- [25] A. Jenkins, C. Frenk, S. D. White, J. Colberg, S. Cole, A. E. Evrard, H. Couchman, and N. Yoshida, “The mass function of dark matter haloes,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **321** (2001) no. 2, 372–384.
- [26] L. Hernquist, “An analytical model for spherical galaxies and bulges,” *The Astrophysical Journal* **356** (1990) 359–364.
- [27] J. Navarro and S. D. White, “The structure of cold dark matter halos,” in *SYMPOSIUM-INTERNATIONAL ASTRONOMICAL UNION*, vol. 171, pp. 255–258, KLUWER ACADEMIC PUBLISHERS GROUP. 1996.
- [28] J. F. Navarro, C. S. Frenk, and S. D. White, “A universal density profile from hierarchical clustering,” *The Astrophysical Journal* **490** (1997) no. 2, 493.
- [29] B. Moore, T. Quinn, F. Governato, J. Stadel, and G. Lake, “Cold collapse and the core catastrophe,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **310** (1999) no. 4, 1147–1152.
- [30] P. Schneider, *Extragalactic astronomy and cosmology: an introduction*. Springer, 2014.

- [31] J. S. Bullock, T. S. Kolatt, Y. Sigad, R. S. Somerville, A. V. Kravtsov, A. A. Klypin, J. R. Primack, and A. Dekel, “Profiles of dark haloes: evolution, scatter and environment,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **321** (2001) no. 3, 559–575.
- [32] M. Schaller, C. S. Frenk, R. G. Bower, T. Theuns, A. Jenkins, J. Schaye, R. A. Crain, M. Furlong, C. D. Vecchia, and I. McCarthy, “The masses and density profiles of halos in a lcdm galaxy formation simulation,” *arXiv preprint arXiv:1409.8617* (2014) .
- [33] R. E. Smith, J. Peacock, A. Jenkins, S. White, C. Frenk, F. Pearce, P. A. Thomas, G. Efstathiou, and H. Couchman, “Stable clustering, the halo model and non-linear cosmological power spectra,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **341** (2003) no. 4, 1311–1332.
- [34] M. White, L. Hernquist, and V. Springel, “The halo model and numerical simulations,” *The Astrophysical Journal Letters* **550** (2001) no. 2, L129.
- [35] R. Takahashi, M. Sato, T. Nishimichi, A. Taruya, and M. Oguri, “Revising the halofit model for the nonlinear matter power spectrum,” *The Astrophysical Journal* **761** (2012) no. 2, 152.
- [36] R. K. Sheth, H. Mo, and G. Tormen, “Ellipsoidal collapse and an improved model for the number and spatial distribution of dark matter haloes,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **323** (2001) no. 1, 1–12.
- [37] B. Moore, S. Ghigna, F. Governato, G. Lake, T. Quinn, J. Stadel, and P. Tozzi, “Dark matter substructure within galactic halos,” *The Astrophysical Journal Letters* **524** (1999) no. 1, L19.
- [38] J. Diemand, B. Moore, and J. Stadel, “Convergence and scatter of cluster density profiles,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **353** (2004) no. 2, 624–632.
- [39] R. Swaters, R. Sancisi, T. Van Albada, and J. Van Der Hulst, “The rotation curves shapes of late-type dwarf galaxies,” *Astronomy & Astrophysics* **493** (2009) no. 3, 871–892.
- [40] P. Salucci, A. Lapi, C. Tonini, G. Gentile, I. Yegorova, and U. Klein, “The universal rotation curve of spiral galaxies—ii. the dark matter distribution out to the virial radius,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **378** (2007) no. 1, 41–47.
- [41] S. Dodelson and L. M. Widrow, “Sterile neutrinos as dark matter,” *Physical Review Letters* **72** (1994) no. 1, 17.
- [42] M. Viel, J. Lesgourgues, M. G. Haehnelt, S. Matarrese, and A. Riotto, “Constraining warm dark matter candidates including sterile neutrinos and light

- gravitinos with wmap and the lyman- α forest,” *Physical Review D* **71** (2005) no. 6, 063534.
- [43] A. Schneider, “Structure formation with suppressed small-scale perturbations,” *arXiv preprint arXiv:1412.2133* (2014) .
- [44] P. Bode, J. P. Ostriker, and N. Turok, “Halo formation in warm dark matter models,” *The Astrophysical Journal* **556** (2001) no. 1, 93.
- [45] R. E. Smith and K. Markovic, “Testing the warm dark matter paradigm with large-scale structures,” *Physical Review D* **84** (2011) no. 6, 063507.
- [46] A. Schneider, R. E. Smith, A. V. Macciò, and B. Moore, “Non-linear evolution of cosmological structures in warm dark matter models,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **424** (2012) no. 1, 684–698.
- [47] M. Viel, K. Markovič, M. Baldi, and J. Weller, “The non-linear matter power spectrum in warm dark matter cosmologies,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **421** (2012) no. 1, 50–62.
- [48] K. Markovic, “The large-scale structure of warm dark matter,” *PoS* (2013) 067.
- [49] R. M. Dunstan, K. N. Abazajian, E. Polisensky, and M. Ricotti, “The halo model of large scale structure for warm dark matter,” *arXiv preprint arXiv:1109.6291* (2011) .