



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

FACULDADE DE CIÊNCIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA A
CIÊNCIA

GIOVANA PEREIRA SANDER

**UM ESTUDO SOBRE A RELAÇÃO ENTRE A CRENÇA DE
AUTOEFICÁCIA NA RESOLUÇÃO DE TAREFAS
NUMÉRICAS E O SENTIDO DE NÚMERO DE ALUNOS DO
CICLO DE ALFABETIZAÇÃO**

**BAURU - SP
2018**

GIOVANA PEREIRA SANDER

**UM ESTUDO SOBRE A RELAÇÃO ENTRE A CRENÇA DE
AUTOEFICÁCIA NA RESOLUÇÃO DE TAREFAS
NUMÉRICAS E O SENTIDO DE NÚMERO DE ALUNOS DO
CICLO DE ALFABETIZAÇÃO**

Tese apresentada ao Programa de Pós Graduação em Educação para a Ciência, da Área de Concentração em Ensino de Ciências e Matemática, da Faculdade de Ciências da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, *Campus* de Bauru, como requisito à obtenção do título de Doutor em Educação para a Ciência.

Orientador: Prof. Dr. Nelson Antonio Pirola.
Co-orientadora: Profa. Dra. Joana Brocardo.

**BAURU - SP
2018**

Sander, Giovana Pereira.

Um estudo sobre a relação entre a crença de autoeficácia na resolução de tarefas numéricas e o sentido de número de alunos do Ciclo de Alfabetização / Giovana Pereira Sander, 2018

345 f.: il.

Orientador: Nelson Antonio Pirola
Co-orientador(a): Joana Brocardo

Tese (Doutorado)-Universidade Estadual Paulista
"Júlio de Mesquita Filho" - *Campus de Bauru*

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA TESE DE DOUTORADO DE GIOVANA PEREIRA SANDER, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA, DA FACULDADE DE CIÊNCIAS - CÂMPUS DE BAURU.

Aos 09 dias do mês de março do ano de 2018, às 13:00 horas, no(a) Anfiteatro da Pós-Graduação da Faculdade de Ciências - UNESP/Bauru, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Prof. Dr. NELSON ANTONIO PIROLA - Orientador(a) do(a) Departamento de Educação / Faculdade de Ciências - UNESP/Bauru, Profa. Dra. MARIA DE FÁTIMA PISTA CALADO MENDES do(a) Departamento de Ciências e Tecnologias / Instituto Politécnico de Setúbal - Escola Superior de Educação, Profa. Dra. MARA SUELI SIMÃO MORAES do(a) Departamento de Matemática / Faculdade de Ciências - UNESP/Bauru, Profa. Dra. MARIA RAQUEL MIOTTO MORELATTI do(a) Departamento de Matemática / Faculdade de Ciências e Tecnologia - UNESP/Presidente Prudente, Profa. Dra. FERNANDA DE OLIVEIRA SOARES TAXA AMARO do(a) Departamento de Desenvolvimento Educacional / Pontifícia Universidade Católica - PUC, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da TESE DE DOUTORADO de GIOVANA PEREIRA SANDER, intitulada "**UM ESTUDO SOBRE A RELAÇÃO ENTRE A CRENÇA DE AUTOEFICÁCIA NA RESOLUÇÃO DE TAREFAS NUMÉRICAS E O SENTIDO DE NÚMERO DE ALUNOS DO CICLO DE ALFABETIZAÇÃO**". Após a exposição, a discente foi arguida oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: APROVADA. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.



Prof. Dr. NELSON ANTONIO PIROLA

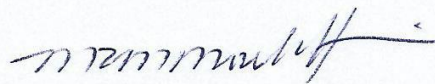
Profa. Dra. MARIA DE FÁTIMA PISTA CALADO MENDES



Profa. Dra. MARA SUELI SIMÃO MORAES



Profa. Dra. MARIA RAQUEL MIOTTO MORELATTI



Profa. Dra. FERNANDA DE OLIVEIRA SOARES TAXA AMARO



GIOVANA PEREIRA SANDER

**UM ESTUDO SOBRE A RELAÇÃO ENTRE A CRENÇA DE
AUTOEFICÁCIA NA RESOLUÇÃO DE TAREFAS
NUMÉRICAS E O SENTIDO DE NÚMERO DE ALUNOS DO
CICLO DE ALFABETIZAÇÃO**

Tese apresentada ao Programa de Pós Graduação em Educação para a Ciência, da Área de Concentração em Ensino de Ciências e Matemática, da Faculdade de Ciências da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, *Campus* de Bauru, como requisito à obtenção do título de Doutor em Educação para a Ciência.

Banca examinadora:

Presidente: Prof. Dr. Nelson Antonio Pirola
Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”
Faculdade de Ciências de Bauru, Departamento de Educação

Examinadora: Profa. Dra. Maria de Fátima Pista Calado Mendes
Instituto Politécnico de Setúbal
Escola Superior de Educação, Departamento de Ciências e Tecnologia

Examinadora: Profa. Dra. Mara Sueli Simão Moraes
Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”
Faculdade de Ciências de Bauru, Departamento de Matemática

Examinadora: Profa. Dra. Maria Raquel Motto Morelatti
Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”
Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente, Departamento de Matemática

Examinadora: Profa. Dra. Fernanda de Oliveira Soares Taxa Amaro
Pontifícia Universidade Católica
Departamento de Desenvolvimento Educacional

Bauru, 09 de março de 2018.

DEDICATÓRIA

À minha mãe!!!

AGRADECIMENTOS

*Se em certa altura,
Tivesse voltado para a esquerda em vez de para a direita;
Se em certo momento
Tivesse dito sim em vez de não, ou não em vez de sim;
(...)
Se tudo isso tivesse sido assim,
Seria outro hoje, e talvez o universo inteiro
Seria insensivelmente levado a ser outro também.
(Álvaro de Campos - Heterónimo de Fernando Pessoa)*

Palavras me faltam para expressar a imensa gratidão que sinto e, sendo assim, cito aqui em forma de agradecimento, algumas pessoas que foram indispensáveis para que este momento se tornasse realidade.

Agradeço aos meus orientadores, Nelson Antonio Pirola e Joana Brocardo, por terem aceitado orientar este trabalho, por tudo que me ensinaram, por acreditarem em mim, pelo apoio em todos os momentos... Eles possibilitaram a realização de dois sonhos, o doutorado e o doutorado sanduíche, num país, numa cidade, que foi amor a primeira vista.

À banca examinadora, Profa. Fátima e Profa. Mara, pelas contribuições desde o momento da qualificação. E também à Profa. Fernanda e Profa. Maria Raquel pelas contribuições que virão.

À minha família, em especial, à minha mãe e a minha irmã, Gabriela, que sempre estiveram ao meu lado e que me apoiaram sempre em minhas decisões.

Ao Dito, meu amigo e parceiro, que contribuiu em momentos de discussão da tese e também pelo companheirismo ao longo dessa jornada.

Aos meus amigos do grupo de Pesquisa em Psicologia da Educação Matemática – GPPEM, em especial, ao Evandro, Diego, Gabriela, Richael, Gilmara, Juliana e Anderson, pelo conhecimento compartilhado e pela amizade e paciência.

Às professoras da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal, Profa. Fátima Mendes, Profa. Catarina Delgado e Profa. Ana Boavida, que muito contribuíram durante a elaboração do projeto de pesquisa.

Aos meus amigos da Pós Graduação, Erik, Samuel, Thalita, Janile, Wander e Helena, por todas as conversas e desabafos; e especialmente, à Agatha, Evandro, Juliana R. e Juliana A. por todas as ajudas diretas a esse trabalho que foram além do papel de amigos.

Aos integrantes do Seminário Permanente em Didática da Matemática, em especial, ao Prof. Dr. João Pedro da Ponte.

Às minha amigas portuguesas Marisa, Joana, Nádia, Helena, Hélia e Cristina, e à Argentina/"Mexicana" Daniela, pelas tardes de estudo compartilhado no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa e pelos cafezinhos.

Aos meus amigos internacionais, Tatiana e Hugo, por todos os incentivos mútuos de estudos, pelas longas madrugadas de dedicação.

Às minhas amigas de vida, Camila, Irina e Karla, sempre me incentivando com minhas decisões e sempre dispostas a conversar quando preciso.

Aos meus amigos brasileiros que compartilharam comigo a experiência mais fantástica que já tive, o doutorado sanduiche na UL, Cília, Klinger e Rosivaldo.

Aos meus amigos luso/brasileiros, Maria, Fabiana e Romeu, que enriqueceram de maneira imensurável a minha vivência em Portugal.

A todas coordenadoras e professoras que me receberam em suas escolas e salas de aula e que possibilitaram a realização dessa pesquisa. Em especial, às minha amigas Ana Carolina, Aleteia e Regina.

Enfim, um agradecimento especial a todas as crianças que participaram dessa pesquisa.

RESUMO

A pesquisa tem por objetivo analisar e compreender a relação entre a percepção sobre a autoeficácia na resolução de tarefas numéricas e o sentido de número dos alunos que estão terminando o Ciclo de Alfabetização (3.º ano do Ensino Fundamental). O quadro teórico integra duas temáticas: a crença de autoeficácia e o sentido de número. A crença de autoeficácia é fundamentada a luz da Teoria Sócio-Cognitiva, teoria esta desenvolvida pelo psicólogo Albert Bandura. O sentido de número é fundamentado por autores que investigam essa temática, incluindo estudos sobre o cálculo mental. Esta investigação é de natureza metodológica mista com a conjunção de dados quantitativos e qualitativos. Os participantes da pesquisa foram 407 alunos de 29 turmas do 3.º ano do Ensino Fundamental de 12 escolas do município de Bauru – São Paulo – Brasil que foram selecionadas por sorteio. Os instrumentos para a coleta de dados foram um questionário, que tinha a finalidade de caracterizar os participantes em termos de idade, gênero, ano de escolaridade bem como sua percepção de desempenho em Matemática de forma geral; uma escala de crença de autoeficácia em tarefas numéricas, que tinha por objetivo mensurar as crenças de autoeficácia dos alunos diante de tarefas numéricas; e as tarefas numéricas, que tinha por finalidade investigar o sentido de número dos alunos. A coleta de dados aconteceu em dois momentos: num primeiro momento, foram aplicados o questionário e a escala de crença de autoeficácia em tarefas numéricas; no segundo momento, foram aplicadas as tarefas numéricas. Os dados evidenciaram que: 1) de maneira geral, os alunos possuem crenças positivas de autoeficácia em tarefas numéricas; 2) as crenças de autoeficácia se diferem quando consideramos os componentes de sentido de número como objeto de crença; 3) o sentido de número dos alunos é mais evidenciado quando se trata de conhecimentos e destrezas com os números; 3) o algoritmo é o método de cálculo mais utilizado pelos alunos em detrimento de outros tipos de cálculos; 4) não foram encontradas correlações significativas entre crença de autoeficácia e sentido de número, bem como crença de autoeficácia e método de cálculo; 5) a ausência de correlações significativas pode ser devido ao fato da natureza das tarefas serem diferentes à das tarefas normalmente utilizadas para o ensino da Matemática. Concluímos na pesquisa que é preciso dar mais atenção ao desenvolvimento de aspectos cognitivos e afetivos no ensino da Matemática. Sobre os aspectos cognitivos, é preciso focar em outros métodos de cálculo, como o cálculo mental e de estimativa, que irão contribuir para o conhecimento e destreza com números e operações e para a aplicação desses aspectos. Ainda, sendo a crença de autoeficácia muito positiva para os alunos, é preciso considerar aspectos afetivos que influenciam na aprendizagem e na confiança dos alunos ao resolver tarefas matemáticas.

Palavras-chave: Sentido de número. Crença de autoeficácia. Desempenho em aritmética.

ABSTRACT

The goal of the research is to analyze and understand the relationship between the perception of self-efficacy in the resolution of numerical tasks and the number of students who are finishing the Literacy Cycle (3rd year of elementary school). The theoretical framework integrates two themes: the self-efficacy beliefs and the number sense. The self-efficacy beliefs is based on the light of Socio-Cognitive Theory, a theory developed by the psychologist Albert Bandura. The number sense is supported by authors who investigate this issue, including studies about mental calculation. This research is of mixed methodological nature with the combination of quantitative and qualitative data. The participants of the research were 407 students from 29 classes of the 3rd year of elementary school from 12 schools in the city of Bauru - São Paulo - Brazil that were selected by random. The instruments for data collection were a questionnaire, which had the purpose of characterizing the participants in terms of age, gender, year of schooling as well as their perception of performance in Mathematics in general; a scale of self-efficacy beliefs in numerical tasks, whose objective was to measure students' self-efficacy beliefs in numerical tasks; and numerical tasks, whose purpose was to investigate the number sense of the students. The data collection happened in two moments: at first, the questionnaire and the scale of self-efficacy beliefs in numerical tasks were applied; in the second moment, the numerical tasks were applied. The data showed that: 1) in general, students have positive self-efficacy beliefs in numerical tasks; 2) self-efficacy beliefs differ when we consider the components of sense of number as an object of belief; 3) the number sense of students is more evident when it comes to knowledge and skills with numbers; 3) the algorithm is the method of calculation most used by the students in detriment of other types of calculations; 4) no significant correlations were found between self-efficacy beliefs and number sense, as well as self-efficacy beliefs and method of calculation; 5) the absence of significant correlations may be due to the fact that the nature of the tasks is different from the tasks normally used for teaching mathematics. We conclude in the research that it is necessary to give more attention to the development of cognitive and affective aspects in the teaching of Mathematics. Regarding the cognitive aspects, it is necessary to focus on other methods of calculation, such as mental and estimation, which will contribute to the knowledge and dexterity with numbers and operations and to the application of these aspects. Also, since the self-efficacy beliefs is very positive for students, it is necessary to consider affective aspects that influence students' learning and confidence in solving mathematical tasks.

Keywords: Number sense. Self-efficacy beliefs. Performance in arithmetic.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Esquematização das relações entre as três classes de determinantes na causalidade de reciprocidade triádica	31
Figura 2 – Representação esquemática da diferença entre a expectativa de eficácia e expectativa de resultado	33
Figura 3 - Interligações das componentes principais do sentido de número	62
Figura 4 – Representação da estratégia linear	73
Figura 5 - Respostas de três crianças à questão “Tinha 45 euros e a minha tia deu-me 36 euros. Com quanto dinheiro fiquei?”	75
Figura 6 – Desenvolvimento do cálculo em coluna (da adição) para o algoritmo	80
Figura 7 – Exemplo do algoritmo da adição	82
Figura 8 – Síntese de possíveis tomadas de decisões a respeito do cálculo a ser utilizado.....	85
Figura 9 – Exemplo de cálculo na linha numérica em adição.....	89
Figura 10 – Exemplo de cálculo por decomposição.....	89
Figura 11 – Desenvolvimento do cálculo da subtração.....	90
Figura 12 – Exemplo de notação horizontal da subtração.....	91
Figura 13 – Exemplo de cálculo na linha numérica em subtração (contar para trás). Exemplo: $74 - 27 = 47$	91
Figura 14 – Exemplo de cálculo na linha numérica em subtração (contar para frente) Exemplo: $326 - 178$	92
Figura 15 – Desenvolvimento do cálculo da multiplicação	95
Figura 16 – Exemplo do método grade na conta 38×7	95
Figura 17 – Exemplo de divisão por subtração repetida. O sinal "arco" indica que a resposta pode ser verificada por meio da multiplicação	97
Figura 18 – Exemplo de divisão longa. O sinal "arco" indica que a resposta pode ser verificada por meio da multiplicação	97
Figura 19 – Exemplo de Divisão curta.....	98
Figura 20 – Modelo de ensino.....	102
Figura 21 – Representação do delineamento adotado nessa investigação	119
Figura 22 – Representação das alternativas a serem assinaladas na escala de crença de autoeficácia em tarefas aritméticas.....	121
Figura 23 – Tarefa Mega-Sena.....	123
Figura 24 – Tarefa Quantos dias você já viveu?	123
Figura 25 – Tarefa Quantos dias João já viveu?	124
Figura 26 – Tarefa Ligue as representações (sem modificações).....	124
Figura 27 – Resolução da tarefa Ligue as representações (sem modificações).....	125
Figura 28 – Tarefa Ligue as representações (modificada)	125
Figura 29 – Tarefa Resolva as expressões (sem modificações)	126
Figura 30 – Resolução da tarefa Resolva as expressões (sem modificações)	127
Figura 31 – Tarefa Resolva as expressões (sem modificações)	127
Figura 32 – Tarefa Calculadora quebrada (sem modificações).....	128
Figura 33 – Resolução da tarefa Calculadora quebrada: “ $1 + 1 = 2$ aí usa esse número e faz 25×50 ”	128
Figura 34 – Tarefa Calculadora quebrada (modificada)	128
Figura 35 – Tarefa A compra de Marisa	129
Figura 36 – Tarefa O campeonato esportivo	130
Figura 37 – Tarefa O campeonato esportivo (modificado)	132

Figura 38 – Representação de uma “régua” com a média obtida na escala de crença de autoeficácia	179
Figura 39 – Representação do desempenho dos alunos	192
Figura 40 – Resolução do aluno 142	194
Figura 41 – Resolução do aluno 313	194
Figura 42 – Resolução do aluno 144	194
Figura 43 – Resolução do aluno 245	196
Figura 44 – Resolução do aluno 310	196
Figura 45 – Resolução do aluno 142	199
Figura 46 – Resolução do aluno 137	199
Figura 47 – Resolução do aluno 308	199
Figura 48 – Resolução do aluno 312	205
Figura 49 – Resolução do aluno 383	205
Figura 50 – Resolução do aluno 149	207
Figura 51 – Resolução do aluno 340	208
Figura 52 – Resolução do aluno 14	208
Figura 53 – Resolução do aluno 165	209
Figura 54 – Resolução do aluno 306	209
Figura 55 – Resolução do aluno 206	213
Figura 56 – Resolução do aluno 159	214
Figura 57 – Resolução do aluno 49	215
Figura 58 – Representação da resolução do aluno 308	222
Figura 59 – Resolução do aluno 23	226
Figura 60 – Resolução do aluno 8	228
Figura 61 – Resolução do aluno 306	230
Figura 62 – Resolução do aluno 188	231
Figura 63 – Resolução do aluno 257	233
Figura 64 – Resolução do aluno 51	236
Figura 65 – Resolução do aluno 322	237
Figura 66 – Resolução do aluno 34	238
Figura 67 – Resolução do aluno 179	239
Figura 68 – Resolução do aluno 306	242
Figura 69 – Resolução do aluno 165	248
Figura 70 – Resolução do aluno 370	254
Figura 71 – Resolução do aluno 251	256
Figura 72 – Resolução do aluno 251	257

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Número de alunos que responderam cada instrumento	135
Tabela 2 - Classificação do Alfa de Cronbach	135
Tabela 3 - Interpretação de r de Pearson	140
Tabela 4 - Distribuição dos participantes segundo o gênero	167
Tabela 5 - Distribuição dos participantes de acordo com a idade	167
Tabela 6 – Distribuição dos participantes por matéria que mais gostam de estudar	168
Tabela 7 – Distribuição dos participantes por matéria que menos gostam de estudar	169
Tabela 8 – Distribuição dos participantes quanto a sua auto-percepção em relação ao seu desempenho em Matemática	170
Tabela 9 - Distribuição dos participantes quanto a sua auto-percepção em relação à aprendizagem em Matemática	170
Tabela 10 - Distribuição dos participantes quanto a sua auto-percepção em relação à compreensão do professor nas aulas de Matemática	171
Tabela 11 - Distribuição dos participantes quanto a sua auto-percepção em relação à compreensão diante de tarefas do tipo problema nas aulas de Matemática	172
Tabela 12 – Distribuição dos participantes quanto à expectativa das notas em Matemática durante o ano letivo	172
Tabela 13 – Distribuição dos participantes de acordo com os conteúdos preferidos	173
Tabela 14 – Distribuição dos participantes de acordo com os conteúdos preteridos	175
Tabela 15 - Distribuição dos participantes de acordo com os motivos que os levam a gostar mais de um conteúdo de Matemática	176
Tabela 16 - Distribuição dos participantes de acordo com os motivos que os levam a gostar menos de um conteúdo de Matemática	177
Tabela 17 - Distribuição dos participantes de acordo com ajuda recebida ao estudar Matemática	178
Tabela 18 - Distribuição dos participantes de acordo com a origem da ajuda recebida ao estudar Matemática	178
Tabela 19 – Estatísticas descritivas da pontuação dos alunos na escala de crença de autoeficácia em tarefas numéricas	181
Tabela 20 – Frequência e porcentagem de respostas da Escala de crença de autoeficácia em tarefas numéricas referentes às tarefas relativas ao componente Conhecimento e destreza com os números	185
Tabela 21 – Frequência e porcentagem de respostas da Escala de crença de autoeficácia nas tarefas referentes ao componente Conhecimento e destreza com os números	186
Tabela 22 – Frequência e porcentagem de respostas da Escala de crença de autoeficácia em tarefas numéricas referentes às tarefas relativas ao componente Conhecimento e destreza com operações ..	187
Tabela 23 – Frequência e porcentagem de respostas da Escala de crença de autoeficácia nas tarefas referentes ao componente <i>Conhecimento e destreza com operações</i>	188
Tabela 24 – Frequência e porcentagem de respostas da Escala de crença de autoeficácia em tarefas numéricas referentes às tarefas relativas ao componente <i>Aplicar o conhecimento e destreza com números e operações em situações de cálculo</i>	189
Tabela 25 – Frequência e porcentagem de respostas da Escala de crença de autoeficácia nas tarefas referentes ao componente Aplicar o conhecimento e destreza com números e operações em situações de cálculo	190
Tabela 26 – Distribuição dos alunos referentes às respostas e aos procedimentos utilizados na tarefa Mega-Sena	193
Tabela 27 – Distribuição dos alunos referentes às respostas apresentadas na tarefa Ligue as representações	195

Tabela 28 – Distribuição dos alunos referentes às respostas apresentadas na tarefa Quantos dias João já viveu?	198
Tabela 29 – Distribuição dos alunos de acordo com seus desempenhos nas operações de adição e de subtração	202
Tabela 30 – Distribuição dos alunos de acordo com seus desempenhos nas operações de multiplicação	206
Tabela 31 – Distribuição dos alunos de acordo com seus desempenhos nas operações de divisão	210
Tabela 32 – Distribuição dos alunos de acordo com as adaptações feitas na tarefa Calculadora quebrada	232
Tabela 33 – Distribuição dos alunos referentes ao método utilizado na tarefa Calculadora quebrada	237
Tabela 34 – Distribuição dos alunos referentes ao procedimento específico utilizados na tarefa Calculadora quebrada.....	238
Tabela 35 – Distribuição dos alunos referentes ao método e procedimento utilizados na tarefa A compra de Marisa	241
Tabela 36 – Distribuição dos alunos referentes ao método e procedimento utilizados na tarefa Quantos dias João já viveu?	246
Tabela 37 – Distribuição dos alunos de acordo com o procedimento utilizado na tarefa O campeonato esportivo.....	251
Tabela 38 – Distribuição dos alunos referentes às respostas apresentadas nas tarefas que solicitavam uma explicação ou uma justificativa	264
Tabela 39 – Correlação entre Resposta e Autoeficácia	270
Tabela 40 – Correlação entre Resposta e Crença de autoeficácia entre os componentes de sentido de número (N = 338).....	271
Tabela 41 – Correlação entre Resposta e Autoeficácia em cada tarefa (N = 338)	272
Tabela 42 – Correlação entre Método e Autoeficácia em cada tarefa (N = 338)	273
Tabela 43 – Distribuição dos alunos referentes às respostas e aos procedimentos utilizados na tarefa Mega-Sena.....	318
Tabela 44 – Distribuição dos alunos referentes às respostas apresentadas na tarefa Ligue as representações	318
Tabela 45 – Distribuição dos alunos referentes às respostas apresentadas na tarefa Quantos dias João já viveu?	318
Tabela 46 – Distribuição dos alunos referentes ao método e procedimento utilizados na tarefa Quantos dias João já viveu?	319
Tabela 47 – Distribuição dos alunos referentes às adaptações utilizadas na tarefa Quantos dias João já viveu?	319
Tabela 48 – Distribuição dos alunos referentes às respostas utilizadas na tarefa.....	319
Tabela 49 – Distribuição dos alunos referentes aos métodos utilizados na tarefa Resolva as expressões no item 27+26	320
Tabela 50 – Distribuição dos alunos referentes aos procedimentos utilizados na tarefa Resolva as expressões no item 27+26	320
Tabela 51 – Distribuição dos alunos referentes às adaptações utilizadas na tarefa Resolva as expressões no item 27+26	321
Tabela 52 – Distribuição dos alunos referentes às respostas apresentadas na tarefa Resolva as expressões no item 72 – 14	321
Tabela 53 – Distribuição dos alunos referentes aos métodos utilizados na tarefa Resolva as expressões no item 72 – 14.....	322

Tabela 54 – Distribuição dos alunos referentes aos procedimentos utilizados na tarefa Resolva as expressões no item 72 – 14	322
Tabela 55 – Distribuição dos alunos referentes às adaptações utilizadas na tarefa Resolva as expressões no item 72 – 14	323
Tabela 56 – Distribuição dos alunos referentes às respostas apresentadas na tarefa Resolva as expressões no item 52×2	323
Tabela 57 – Distribuição dos alunos referentes aos métodos utilizados na tarefa Resolva as expressões no item 52×2	324
Tabela 58 – Distribuição dos alunos referentes aos procedimentos utilizados na tarefa Resolva as expressões no item 52×2	324
Tabela 59 – Distribuição dos alunos referentes aos procedimentos específicos utilizados na tarefa Resolva as expressões no item 52×2	324
Tabela 60 – Distribuição dos alunos referentes às adaptações utilizadas na tarefa Resolva as expressões no item 52×2	325
Tabela 61 – Distribuição dos alunos referentes às respostas apresentadas na tarefa Resolva as expressões no item 25×10	325
Tabela 62 – Distribuição dos alunos referentes aos métodos utilizados na tarefa Resolva as expressões no item 25×10	326
Tabela 63 – Distribuição dos alunos referentes aos procedimentos utilizados na tarefa Resolva as expressões no item 25×10	326
Tabela 64 – Distribuição dos alunos referentes aos procedimentos específicos utilizados na tarefa Resolva as expressões no item 25×10	326
Tabela 65 – Distribuição dos alunos referentes às adaptações utilizadas na tarefa Resolva as expressões no item 25×10	327
Tabela 66 – Distribuição dos alunos referentes às respostas apresentadas na tarefa Resolva as expressões no item 25×12	327
Tabela 67 – Distribuição dos alunos referentes aos métodos utilizados na tarefa Resolva as expressões no item 25×12	328
Tabela 68 – Distribuição dos alunos referentes aos procedimentos utilizados na tarefa Resolva as expressões no item 25×12	328
Tabela 69 – Distribuição dos alunos referentes aos procedimentos específicos utilizados na tarefa Resolva as expressões no item 25×12	328
Tabela 70 – Distribuição dos alunos referentes às adaptações utilizadas na tarefa Resolva as expressões no item 25×12	329
Tabela 71 – Distribuição dos alunos referentes às respostas apresentadas na tarefa Resolva as expressões no item $25 \div 5$	329
Tabela 72 – Distribuição dos alunos referentes aos métodos utilizados na tarefa Resolva as expressões no item $25 \div 5$	330
Tabela 73 – Distribuição dos alunos referentes aos procedimentos utilizados na tarefa Resolva as expressões no item $25 \div 5$	330
Tabela 74 – Distribuição dos alunos referentes aos procedimentos específicos utilizados na tarefa Resolva as expressões no item $25 \div 5$	330
Tabela 75 – Distribuição dos alunos referentes às adaptações utilizadas na tarefa Resolva as expressões no item $25 \div 5$	331
Tabela 76 – Distribuição dos alunos referentes às respostas apresentadas na tarefa Resolva as expressões no item $60 \div 2$	331

Tabela 77 – Distribuição dos alunos referentes aos métodos utilizados na tarefa Resolva as expressões no item $60 \div 2$	332
Tabela 78 – Distribuição dos alunos referentes aos procedimentos utilizados na tarefa Resolva as expressões no item $60 \div 2$	332
Tabela 79 – Distribuição dos alunos referentes aos procedimentos específicos utilizados na tarefa Resolva as expressões no item $60 \div 2$	332
Tabela 80 – Distribuição dos alunos referentes às adaptações utilizadas na tarefa Resolva as expressões no item $60 \div 2$	333
Tabela 81 – Distribuição dos alunos referentes às respostas apresentadas na tarefa Calculadora quebrada	333
Tabela 82 – Distribuição dos alunos referentes ao método utilizado na tarefa Calculadora quebrada	334
Tabela 83 – Distribuição dos alunos referentes aos procedimentos utilizados na tarefa Calculadora quebrada	334
Tabela 84 – Distribuição dos alunos referentes ao procedimento específico utilizados na tarefa Calculadora quebrada.....	334
Tabela 85 - Distribuição dos alunos referentes às adaptações utilizadas na tarefa Calculadora quebrada	335
Tabela 86 – Distribuição dos alunos referentes às respostas apresentadas na tarefa A compra de Marisa	335
Tabela 87 – Distribuição dos alunos referentes ao método e procedimento específico utilizados na tarefa A compra de Marisa	336
Tabela 88 – Distribuição dos alunos referentes às adaptações utilizadas na tarefa A compra de Marisa	336
Tabela 89 – Distribuição dos alunos referentes às respostas apresentadas na tarefa O campeonato esportivo – item 1	337
Tabela 90 – Distribuição dos alunos referentes aos métodos utilizados na tarefa O campeonato esportivo – item 1	337
Tabela 91 - Distribuição dos alunos referentes aos procedimentos utilizados na tarefa O campeonato esportivo – item 1	337
Tabela 92 – Distribuição dos alunos referentes aos procedimentos específicos utilizados na tarefa O campeonato esportivo – item 1.....	338
Tabela 93 – Distribuição dos alunos referentes às adaptações utilizadas na tarefa O campeonato esportivo – item 1	338
Tabela 94 – Distribuição dos alunos referentes às respostas apresentadas na tarefa O campeonato esportivo – item 2.....	339
Tabela 95 – Distribuição dos alunos referentes aos métodos utilizados na tarefa O campeonato esportivo – item 2.....	339
Tabela 96 – Distribuição dos alunos referentes aos procedimentos utilizados na tarefa O campeonato esportivo – item 2.....	339
Tabela 97 – Distribuição dos alunos referentes aos procedimentos específicos utilizados na tarefa O campeonato esportivo – item 2.....	340
Tabela 98 – Distribuição dos alunos referentes às adaptações utilizadas na tarefa O campeonato esportivo – item 2.....	340
Tabela 99 – Distribuição dos alunos referentes ás respostas apresentadas na tarefa O campeonato esportivo – item 3.....	341
Tabela 100 - Distribuição dos alunos referentes aos métodos utilizados na tarefa O campeonato esportivo – item 3.....	341

Tabela 101 - Distribuição dos alunos referentes aos procedimentos utilizados na tarefa O campeonato esportivo – item 3.....	341
Tabela 102 - Distribuição dos alunos referentes aos procedimentos específicos utilizados na tarefa O campeonato esportivo – item 3.....	342
Tabela 103 – Distribuição dos alunos referentes ás adaptações utilizadas na tarefa O campeonato esportivo – item 3.....	342

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Conceitualização da autoeficácia de acordo com diferentes níveis de generalidade.....	42
Quadro 2 – Elementos da estratégia inovadora baseada em sala de aula	51
Quadro 3 – Reflexão do instrutor da sala de aula sobre a intervenção.....	53
Quadro 4 – Quadro de referência para caracterizar o sentido de número	64
Quadro 5 – Exemplo do método expandido em coluna baseado em Thompson (2010) para o cálculo 47 +76	79
Quadro 6 – Exemplos de cálculo por decomposição em subtração	92
Quadro 7 – Resoluções da tarefa Resolva as expressões (sem modificações) - 1	126
Quadro 8 – Resoluções da tarefa Resolva as expressões (sem modificações) - 2.....	127
Quadro 9 – Resoluções da tarefa O campeonato esportivo (sem modificações).....	131
Quadro 10 – Pontuação atribuída para cada alternativa	136
Quadro 11 – Definição e descrição dos campos de categorias para cada tarefa	137
Quadro 12 – Pontos atribuídos aos alunos de acordo com os seus desempenhos nas tarefas	139
Quadro 13 – Exemplos de análise da tarefa Mega-Sena	142
Quadro 14 – Exemplos de análise da tarefa Resolva as expressões – Situação 1	145
Quadro 15 – Exemplos de análise da tarefa Resolva as expressões – Situação 2	145
Quadro 16 – Exemplos de análise da tarefa Resolva as expressões – Situação 3	146
Quadro 17 – Exemplos de análise da tarefa Resolva as expressões – Situação 4	146
Quadro 18 – Exemplos de análise da tarefa Resolva as expressões – Situação 5	148
Quadro 19 – Exemplos de análise da tarefa Resolva as expressões – Situação 6	149
Quadro 20 – Exemplos de análise da tarefa Resolva as expressões – Situação 7	149
Quadro 21 – Exemplos de análise da tarefa Resolva as expressões – Situação 8	150
Quadro 22 – Exemplos de análise da tarefa Quantos dias João já viveu?.....	152
Quadro 23 – Exemplos de análise da tarefa Calculadora quebrada – Situação 1.....	155
Quadro 24 – Exemplos de análise da tarefa Calculadora quebrada – Situação 2.....	156
Quadro 25 – Exemplos de análise da tarefa A compra de Marisa – Situação 1	157
Quadro 26 – Exemplos de análise da tarefa A compra de Marisa – Situação 2.....	158
Quadro 27 – Exemplos de análise da tarefa O campeonato esportivo – Parte 1	160
Quadro 28 – Exemplos de análise da tarefa O campeonato esportivo – Parte 2.....	161
Quadro 29 – Exemplos de análise da tarefa O campeonato esportivo – Parte 3	161
Quadro 30 – Frequência de respostas da Escala de crença de autoeficácia em tarefas numéricas de acordo com os componentes de Sentido de número.....	183
Quadro 31 – Resoluções da tarefa Ligue as representações.....	197
Quadro 32 – Exemplos de alunos que utilizaram resposta não matemática.....	200
Quadro 33 – Resolução do aluno 73 na tarefa Resolva as expressões (adição e subtração)	203
Quadro 34 - Exemplos de adaptações relativas à tarefa Resolva as expressões (adição e subtração) realizadas pelo aluno 305	203
Quadro 35 - Exemplos de adaptações de Prova real relativas à tarefa Resolva as expressões - adição e subtração	204
Quadro 36 – Exemplos da adaptação “alterar a ordem dos termos” relativas à tarefa Resolva as expressões (divisão) realizada pelo aluno de número 87	211
Quadro 37 - Distribuição dos alunos de acordo com os métodos de cálculo realizados na tarefa Resolva as expressões (N = 351).....	212
Quadro 38 – Algoritmo de multiplicação realizado pelo aluno de número 43	215
Quadro 39 – Exemplos da adaptação “multiplicar números e dígitos” realizada no algoritmo da multiplicação	216

Quadro 40 – Exemplos da adaptação “multiplicar números e dígitos” realizada no algoritmo da multiplicação	217
Quadro 41 – Algoritmo de multiplicação realizado pelo aluno de número 115	217
Quadro 42 – Exemplos de divisão longa e divisão curta	218
Quadro 43 – Exemplos da adaptação “divisão representada como outro algoritmo” relativa à tarefa Resolva as expressões (divisão)	219
Quadro 44 – Exemplos do uso de representações pictóricas relativas à tarefa Resolva as expressões (adição).....	220
Quadro 45 – Exemplos de respostas relativas à adaptação decomposição em dezenas e unidades na tarefa Resolva as expressões em adição	221
Quadro 46 – Exemplos de respostas relativas à adaptação “compensar” na tarefa Resolva as expressões em adição	223
Quadro 47 – Exemplos de representações pictóricas relativas à tarefa Resolva as expressões (subtração).....	223
Quadro 48 – Exemplos de respostas relativas à adaptação “decomposição em dezenas e unidades” tarefa Resolva as expressões em subtração	224
Quadro 49 – Exemplos de respostas relativas à adaptação “Representar de forma pictórica” do aluno 156 na tarefa Resolva as expressões em multiplicação	226
Quadro 50 – Exemplos de respostas relativas à adaptação “somadas parciais” na tarefa Resolva as expressões em multiplicação	227
Quadro 51 – Exemplos da adaptação por agrupamento realizada na divisão	229
Quadro 52 – Exemplos de adaptações da tarefa Calculadora quebrada (compreensão do número 25 como uma junção de dígitos)	233
Quadro 53 – Exemplos de adaptações de alunos que utilizaram uma decomposição não decimal na tarefa Calculadora quebrada.....	234
Quadro 54 – Exemplos de adaptações de alunos que utilizaram uma decomposição decimal na tarefa Calculadora quebrada.....	235
Quadro 55 – Exemplos de adaptações de alunos na tarefa Calculadora quebrada.....	236
Quadro 56 – Exemplos de procedimentos específicos de alunos que realizaram cálculos a partir do resultado final na tarefa Calculadora quebrada	239
Quadro 57 – Exemplos de respostas não matemáticas apresentadas na tarefa Calculadora quebrada	240
Quadro 58 – Exemplos de respostas em que foram utilizados métodos de cálculo mental na tarefa A compra de Marisa	243
Quadro 59 – Exemplos de respostas em que foram utilizados métodos de estimativa na tarefa A compra de Marisa	245
Quadro 60 – Exemplos de respostas em que foram utilizados métodos de cálculo mental na tarefa Quantos dias João já viveu?	247
Quadro 61 – Exemplos de alunos que utilizaram método de estimativa.....	249
Quadro 62 – Exemplos de procedimentos de contagem utilizados pelos alunos no item 1 da tarefa O campeonato esportivo.....	252
Quadro 63 – Exemplos de procedimentos envolvendo adição utilizados pelos alunos no item 1 da tarefa O campeonato esportivo.....	253
Quadro 64 – Exemplos de procedimentos que envolvem multiplicação utilizados pelos alunos no item 1 da tarefa O campeonato esportivo	255
Quadro 65 – Exemplos de procedimentos que envolvem contagem utilizados pelos alunos nos itens 2 e 3 da tarefa O campeonato esportivo	258

Quadro 66 – Exemplos de procedimento de contagem utilizados pelos alunos 157 e 245 nos itens 2 e 3 da tarefa O campeonato esportivo	259
Quadro 67 – Exemplos de procedimento de adição utilizados pelos alunos 369 e 303 nos itens 2 e 3 da tarefa O campeonato esportivo.....	260
Quadro 68 – Resolução do aluno 370 nos itens 2 e 3 da tarefa O campeonato esportivo.....	261
Quadro 69 – Exemplos de procedimento que envolve a multiplicação utilizados pelos alunos 136 e 145 nos itens 2 e 3 da tarefa O campeonato esportivo	261
Quadro 70 – Resolução do aluno 74 nos itens 2 e 3 da tarefa O campeonato esportivo.....	262

LISTA DE GRÁFICO

Gráfico 1 - Distribuição de frequência da soma de pontos obtida pelos alunos na escala de autoeficácia em tarefas numéricas.....	180
--	-----

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	22
Motivação.....	22
Pertinência da pesquisa	23
Objetivo e problemas de pesquisa.....	28
Estrutura da tese	28
1 TEORIA SOCIAL COGNITIVA.....	30
1.1 Crença de autoeficácia	32
1.2 Crenças de eficácia coletiva	35
1.3 Fontes de eficácia.....	36
1.4 Crenças de eficácia no contexto escolar.....	38
1.5 Crenças de autoeficácia em Matemática	40
1.6 Estudos sobre crenças de autoeficácia em Matemática e suas (co)relações.....	42
1.7 Crenças de autoeficácia e o ensino da Matemática escolar	50
2 SENTIDO DE NÚMERO	55
2.1 Entendimento sobre sentido de número	55
2.2 Componentes do sentido de número	62
2.3 Interligação entre os diferentes tipos de cálculo	70
2.3.1 Precisando o entendimento de cálculo mental	70
2.3.2 Cálculo em coluna e cálculo algorítmico	78
2.3.3 Cálculo por estimativa.....	83
2.4 Operações aritméticas e o sentido de número	87
2.4.1 Adição	88
2.4.2 Subtração.....	89
2.4.3 Multiplicação.....	93
2.4.4 Divisão	96
2.5 O papel do professor e das tarefas matemáticas para desenvolver o sentido de número e o cálculo mental na aula de matemática.....	99
2.6 Pesquisas sobre sentido de número	104
3 METODOLOGIA	118
3.1 Instrumentos.....	120
3.2 Estudo piloto	122
3.2.1 Descrição dos resultados do estudo piloto	122
3.3 Procedimentos para a coleta e análise dos dados	133
3.4 Categorias para análise do Sentido de número.....	141

3.5 Instrumento para investigar o sentido de número	162
3.5.1 Tarefas que enfatizam o <i>Conhecimento e destreza com os números</i>	162
3.5.2 Tarefas que enfatizam o <i>Conhecimento e destreza com operações</i>	163
3.5.3 Tarefas que enfatizam o <i>Aplicar o conhecimento e destreza com números e operações em situações de cálculo</i>	164
3.6 Participantes	166
3.6.1 Os participantes: idade, gênero, ano de escolaridade e percepção de desempenho em Matemática	166
4 ANÁLISE DOS DADOS	179
4.1 Crença de Autoeficácia em Tarefas Numéricas	179
4.1.1 Crença de autoeficácia: Conhecimento e destreza com os números	185
4.1.2 Crença de autoeficácia: Conhecimento e destreza com operações.....	186
4.1.3 Crença de autoeficácia: Aplicar o conhecimento e destreza com números e operações em situações de cálculo	188
4.2 Aspectos de sentido de número evidenciados	191
4.2.1 Conhecimento e destreza com os números.....	193
4.2.2 Conhecimento e destreza com as operações.....	201
4.2.3 Aplicação do conhecimento e da destreza com os números e as operações em situações de cálculo	231
4.3 Correlação entre sentido de número e crença de autoeficácia em tarefas numéricas.....	270
5 CONCLUSÕES.....	276
5.1 Conclusões do estudo	277
5.1.1 Sentido de número.....	277
5.1.2 Crença de autoeficácia em tarefas numéricas.....	280
5.1.3 Relações entre sentido de número e crença de autoeficácia em tarefas numéricas	280
5.2 Implicações do estudo	281
6 REFERÊNCIAS	287
APÊNDICES.....	298
APÊNDICE I: TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO PARA OS PAIS DOS ALUNOS.....	299
APÊNDICE II: TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO PARA OS PAIS DOS ALUNOS.....	300
APÊNDICE III: TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO PARA OS ALUNOS	301
APÊNDICE IV: TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO PARA AS ESCOLAS.....	302
APÊNDICE V: TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO PARA AS ESCOLAS.....	303

APÊNDICE VI: QUESTIONÁRIO	304
APÊNDICE VII: ESCALA DE CRENÇA DE AUTOEFICÁCIA EM TAREFAS NUMÉRICAS	306
APÊNDICE VIII: TAREFAS NUMÉRICAS	311
APÊNDICE IX: TABELAS PROVENIENTES DAS TAREFAS NUMÉRICAS	318

INTRODUÇÃO

Esta introdução apresenta minhas motivações, os objetivos, as questões que nortearam a investigação, a pertinência da pesquisa e a estrutura da tese.

Motivação

A motivação para este estudo decorreu, primeiramente, pelo contato com os temas investigados, que incluem o sentido de número e a crença de autoeficácia.

O interesse em estudar o tema sentido de número surgiu durante o mestrado, quando cursei o Tópico Especial em Educação Matemática, com o tema de Sentido de Número, com a Profa. Dra. Joana Brocardo, hoje minha co-orientadora. Neste curso, pude compreender o ensino da Matemática escolar de outra forma, sem dar enfoque ao ensino de um algoritmo mecânico e sem sentido. Em consequência, fez-me refletir sobre o que eu sei sobre números e operações e como pretendo ensinar aos meus alunos.

Para esse tema ser melhor estudado por mim, tive a oportunidade de frequentar o Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, em Portugal, pelo Programa de Doutorado Sanduíche no Exterior – PDSE¹. Nesse período, tive contato com especialistas e grupos de pesquisas que investigam o sentido de número, entre eles, o Seminário de Doutoramento em Didática da Matemática, coordenado pelo Prof. Dr. João Pedro da Ponte e Seminários do projeto de investigação sobre o desenvolvimento do Cálculo Numérico Flexível, coordenado pela Profa. Dra. Joana Brocardo. As discussões realizadas contribuíram para a ampliação dos referenciais teóricos e metodológicos de pesquisas que envolvem o sentido de número.

No que se refere à Crença de Autoeficácia, o interesse neste tema surgiu como resultado de minha formação acadêmica. Em estudos que realizei durante a graduação com o Trabalho de Conclusão de Curso - TCC (SANDER, 2010) e durante o mestrado, ambos sob orientação do Prof. Dr. Nelson Antonio Pirola, meu orientador, realizamos estudos e pesquisas que enfatizam a importância e a influência que aspectos afetivos têm sobre o desempenho de estudantes em Matemática, como por exemplo, as atitudes. Além disso, outros estudos (SANDER, 2015; SANDER; PIROLA, 2015) relacionados

¹ Este trabalho foi realizado com amparo da CAPES – Proc. nº 99999.010434/2014-03.

às atitudes foram desenvolvidas com professores que ensinam Matemática, procurando evidências sobre os aspectos afetivos no processo do ensino da Matemática.

Tanto na pesquisa para TCC, como na pesquisa para o mestrado, foi possível observar a confiança como um aspecto que interfere no desempenho de alunos e nas aulas de professores. Porém, como a investigação sobre a confiança não era o meu objetivo, esse aspecto era mencionado, mas não discutido com muita profundidade. Sendo assim, no doutorado, considerei importante investigar a crença de autoeficácia para o ensino e aprendizagem da Matemática.

Os motivos pessoais que interferem no modo como se compreende os aspectos cognitivos e atitudinais que influenciam o ensino e aprendizagem da Matemática escolar levaram-me ao desenvolvimento deste estudo que partiu de uma hipótese de as Crenças de autoeficácia estão relacionadas ao Sentido de número.

Pertinência da pesquisa

No Brasil, com o ingresso das crianças com seis anos no Ensino Fundamental, foi necessário repensar as Diretrizes Curriculares Nacionais desse nível de escolaridade (BRASIL, 2013). As novas Diretrizes passaram a considerar os três primeiros anos do Ensino Fundamental como o Ciclo de Alfabetização a fim de garantir que as crianças fossem alfabetizadas em Língua Portuguesa e em Matemática aos oito anos de idade, ao final do 3.º ano.

Por conta de mudanças na estrutura da Educação Básica, as orientações curriculares no Brasil foram repensadas para integrar essas mudanças. Desde 1997, os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997) eram as diretrizes elaboradas pelo Governo Federal para orientar Estados e Municípios a organizar seus currículos. Sendo assim, os PCN se caracterizavam como *parâmetros*, sem caráter obrigatório. Recentemente, em dezembro de 2017, foi homologada a Base Nacional Comum Curricular – BNCC² (BRASIL, 2017). A BNCC tem caráter normativo e se caracteriza por uma referência para elaboração dos currículos da Educação Básica com caráter obrigatório.

Mendes (2012), em Portugal, realizou um estudo sobre Multiplicação e salienta que o “desenvolvimento do sentido de número”, é frequentemente referido em

² Disponível em < <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/a-base>>

documentos de natureza curricular relacionados a Números e Operações. De acordo com a autora, “desenvolvimento do sentido de número é uma referência central e muito presente em documentos curriculares sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática” (p. 30). Em Portugal, desde 2006, o desenvolvimento do sentido de número ganha foco em publicações e materiais no âmbito de projetos de natureza curricular e em programa de formação contínua em Matemática.

Nos Estados Unidos, o documento Princípios e Normas para a Matemática Escolar (National Council of Teachers of Mathematics - NCTM), publicado em 1989, dedica uma das normas ao sentido de número.

Além desses temas, termos mais abrangentes como numeracia ou literacia matemática também foram identificados por Mendes (2012) em documentos publicados em países como Reino Unido, Austrália ou Nova Zelândia no sentido de compreensão global dos números e de cálculo flexível, aspectos esses que também estão incluídos no sentido de número.

Quando analisamos o PCN e a BNCC, não encontramos conceitos relativos a números e operações que nos remetem ao Sentido de número. As unidades temáticas não têm como preocupação o seu desenvolvimento perspectivando a do cálculo mental. De acordo com o PCN (BRASIL, 1997, p. 76), “pode-se dizer que se calcula mentalmente quando se efetua uma operação, recorrendo-se a procedimentos confiáveis, sem os registros escritos e sem a utilização de instrumentos”. Ou seja, mesmo abordando termos que podem estar relacionados, o PCN apresenta o cálculo mental de modo não integrado com o desenvolvimento do sentido de número.

Para o PCN (1997), o cálculo mental inclui estratégias de cálculo limitadas tendo em vista sua própria natureza. Por conta disso, Nacarato, Mengali e Passos (2011) sustentam a necessidade do distanciamento sobre essa concepção adotada pelo documento em prol do registro escrito.

No que diz respeito ao cálculo, podemos encontrar na BNCC termos como algoritmo, cálculo mental, cálculo por estimativa e estratégias de cálculo. Neste documento a estimativa surge como habilidade a ser desenvolvida a partir do primeiro ano de escolaridade, enquanto que indica o cálculo mental para o segundo ano e o algoritmo para o quarto ano. Contudo, ao buscar o que o documento compreende sobre estes termos, apenas o algoritmo é claramente definido.

Embora se analisem outros tipos de cálculo, tais como cálculo mental, cálculo por estimativa, ou até mesmo “estratégias de cálculo”, não defini-los, clarificá-los, ou

exemplificá-los, corrobora com o foco que é dado aos algoritmos e não aos outros tipos de cálculo.

Mesmo com a transição do PCN para a BNCC, o sentido de número ainda não é apresentado como um aspecto fundamental para o ensino da Matemática ao nível das orientações curriculares oficiais no Brasil.

Em consequência das reformas da Educação Básica, em 2012, foi lançado o Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa – PNAIC. O PNAIC se constitui em um programa de formação continuada de professores alfabetizadores, oferecidos pelo Governo Federal (Ministério da Educação - MEC / Secretaria de Educação Básica – SEB), em parceria com Universidades Públicas, assegurando a disponibilização de materiais pedagógicos e avaliações sistemáticas do percurso de aprendizagem dos alunos (BRASIL, 2012). Essas ações tinham como meta alfabetizar todas as crianças brasileiras, em Língua Portuguesa e em Matemática, até os oito anos de idade (BRASIL, 2015).

Para os cursos de formação continuada oferecidos pelo PNAIC, foram elaborados cadernos de formação para as áreas de Alfabetização em Língua Portuguesa em 2012, Alfabetização em Matemática em 2014 e Alfabetização relacionada a outras áreas em 2015. Nos Cadernos de Alfabetização em Matemática, os conteúdos abordados estão baseados em eixos estruturantes que, por sua vez, foram concebidos com a finalidade de garantir os direitos de aprendizagem em Matemática dos alunos. Os eixos estruturantes são: Números e Operações, Pensamento Algébrico, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação.

Um dos temas abordado no eixo Números e Operações é o de Sentido de Número. Pela primeira vez, o Sentido de número ganha espaço em nível nacional e se faz presente em materiais elaborados pelo Governo Federal - MEC, embora esse tema não seja contemplado nas orientações curriculares atuais, como a BNCC.

O Sentido de Número, aspecto esse que está relacionado à compreensão dos números e das operações, além de ser um tema recente nas pesquisas em Educação Matemática no Brasil, é ainda mais recente quando se trata da prática de sala de aula, em que o ensino da Matemática escolar tem se concentrado no ensino e treino de algoritmos. Ao ingressar no Ensino Fundamental, os alunos deixam de estudar conceitos sobre os números, as operações e suas relações, em prol do ensino de algoritmos, que acabam por ser o foco do que se ensina e aprende. Dar atenção ao sentido de número pode ser uma contribuição para essa mudança de cenário.

Nos cadernos do PNAIC, Spinillo (2014) salienta que um aspecto importante a considerar é que

o sentido de número é uma forma de pensar matematicamente e não somente um conceito ou assunto do currículo a ser ensinado. (...) deve permear o ensino de todos os conteúdos de matemática abordados no ensino fundamental, de forma que as atividades de ensino propostas em sala de aula tenham por objetivo tornar o aluno familiarizado com o mundo dos números e capaz de raciocinar de forma flexível em diversas situações, mesmo sem realizar cálculos precisos e aplicar procedimentos algorítmicos (p. 53).

Spinillo (2014) salienta que para desenvolver Sentido de Número é relevante trabalhar e saber usar os vários conhecimentos acerca dos números e das operações, a saber: a regularidade da sequência numérica, a grandeza de um número, a magnitude relativa dos números, propriedade das operações e o efeito das operações.

A autora também salienta que, embora não seja feita uma menção explícita ao sentido de número em currículos ou orientações curriculares, as descrições de conteúdos de Números e Operações guardam estreita relação com aspectos relacionados ao sentido de número por ela citados. Isso torna possível estabelecer uma ponte entre o que o currículo indica sobre números e operações e o sentido de número.

Pesquisas sobre sentido de número, tais como as de Resnick (1989) e Greeno (1989), salientam também sobre sua relação com crenças e confiança. De acordo com Resnick (1989) o ensino tradicional de Matemática tende a ensinar às crianças que os conhecimentos prévios que elas possuem não são legítimos. A autora salienta que desenvolver a confiança das crianças em seu próprio conhecimento e em seus procedimentos para resolver problemas, é um aspecto que pode contribuir para o desenvolvimento do sentido de número.

Greeno (1989) acrescenta que as discussões de ideias sobre números e quantidades podem resultar em benefícios para as crenças e compreensões sobre o conhecimento matemático dos alunos e de si mesmos, como conhecedores de Matemática. Isso inclui acreditar que eles podem compreender certas competências, inferir relações e construir métodos que não foram ensinados. Tendo em vista que o sentido de número é uma habilidade geral no domínio dos números e quantidades, provavelmente, depende das crenças dos alunos para desenvolver esses conhecimentos.

Desse modo, a confiança nas capacidades matemáticas e as crenças que foram desenvolvendo no âmbito da sua experiência escolar estão intrinsecamente articuladas como aspectos fundamentais no desenvolvimento do sentido de número.

Para investigar a confiança, buscamos respaldo em uma teoria desenvolvida na área da Psicologia, a Teoria Social Cognitiva, desenvolvido por Albert Bandura, e que investiga o constructo da autoeficácia. Essa teoria vem sendo utilizada em pesquisas na área da Educação Matemática, tais como Morais (2015), Dobarro (2007), Souza e Brito (2008), entre outras. Neste trabalho, analisamos a autoeficácia, conceito que Bandura (1997, 1994) define como as crenças que cada um tem nas suas próprias capacidades para produzir certas realizações, a partir da organização e execução de determinados percursos.

O tema sobre autoeficácia tem sido pouco explorado no contexto do ensino e aprendizagem da Matemática escolar. Os principais estudos nessa área estão sendo desenvolvidos nos grupos de pesquisa em Psicologia da Educação Matemática (PEM) da Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP (PSIEM) como os de Neves (2002), Souza (2007), Dobarro (2007) e no Grupo de Pesquisa em Psicologia da Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista - UNESP – campus de Bauru (GPPEM), como Morais e Nascimento (2008), Morais (2015) e Pinheiro e Pirola (2017). De acordo com Brito (2011), estudos como esses, realizados no âmbito da Psicologia da Educação Matemática (PEM) buscam basicamente articular as teorias da Psicologia ao ensino da Matemática.

Por meio dos estudos relacionados à PEM, consideramos importante investigar não apenas aspectos cognitivos que possam interferir no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, mas também aspectos afetivos e atitudinais, tendo em vista que a articulação desses aspectos influencia de modo significativo como se ensina e se aprende Matemática.

É importante destacar que orientações curriculares, como os PCN e BNCC, enfatizam apenas aspectos cognitivos, sem considerar aspectos atitudinais e crenças que podem influenciar no ensino da Matemática. Mais uma vez, o PNAIC contribui com uma mudança de cenário em um de seus cadernos de formação “Alfabetização matemática na perspectiva do letramento” (BRASIL, 2015). Neste caderno, Moraes e Pirola (2015) discutem as atitudes positivas em relação à Matemática e a sua importância para alunos que estão no Ciclo de Alfabetização.

Objetivo e problemas de pesquisa

Pretende-se nesta pesquisa analisar e compreender a relação entre a percepção sobre a crença de autoeficácia na resolução de tarefas numéricas e o sentido de número dos alunos do Ciclo de Alfabetização. Para isso, buscamos responder as seguintes questões de investigação:

1. Como se caracterizam as percepções dos alunos ao final do Ciclo de Alfabetização sobre a sua autoeficácia em tarefas numéricas?
2. Como se caracterizam os aspectos relativos ao sentido de número manifestados pelos alunos ao final do Ciclo de Alfabetização diante a resolução de tarefas numéricas?
3. Que relações se destacam entre o sentido de número e a crença de autoeficácia manifestados por alunos ao final do Ciclo de Alfabetização?

Estrutura da tese

O presente trabalho está estruturado em cinco seções, a saber: na primeira seção é fundamentado o sentido de número, clarificando seu conceito; seus componentes; a interligação entre diferentes tipos de cálculos, tais como o cálculo mental, o algoritmo e o de estimativa; as operações aritméticas e o sentido de número; o papel do professor e das tarefas para o desenvolvimento do sentido de número e do cálculo mental; e finaliza com investigações acerca do sentido de número.

Na segunda seção é discutida a crença de autoeficácia referenciada na Teoria Social Cognitiva; a crença de eficácia coletiva; as fontes de eficácia; as crenças de eficácia no contexto escolar; as crenças de autoeficácia em Matemática e estudos que investigaram suas correlações; e por fim, as crenças de autoeficácia e o ensino da Matemática escolar.

A terceira seção corresponde ao de metodologia. Nela é clarificada de forma detalhada como a pesquisa se desenvolveu, desde os procedimentos utilizados para a elaboração dos instrumentos, do estudo piloto e da coleta de dados, até a análise de dados.

A quarta seção apresenta a análise de dados. Ela está dividida em três subseções: análise das crenças de autoeficácia em tarefas numéricas, análise do sentido de número

e correlações encontradas até o momento entre crenças de autoeficácia e sentido de número.

Por fim, a seção cinco apresenta as conclusões com base nos dados analisados e também as implicações desse estudo.

1 TEORIA SOCIAL COGNITIVA

A Teoria Social Cognitiva (TSC), teoria desenvolvida pelo psicólogo canadense Albert Bandura, busca compreender melhor o comportamento humano. De acordo com Bandura (1997), as pessoas tentam controlar os eventos que influenciam suas vidas, tornando esse controle algo central na vida humana. Na TSC, as pessoas não são vistas apenas como objetos influenciados pelo ambiente externo, mas sim como agentes que operam em sua trajetória de vida.

De acordo com os estudos de Bandura (1999, 2008), as pessoas não são agentes autônomos e tampouco simples receptores de influências ambientais. Elas constroem e adequam pensamentos sobre futuros cursos de ação de acordo com as situações em que estão, avaliam o seu valor funcional e organizam e implantam estrategicamente as opções de ações selecionadas. Ou seja, são planejadores, prognosticadores e autorreguladores de suas vidas, buscando satisfação e abstenção de censuras.

Para Bandura (2008, p. 15), “ser agente significa influenciar o próprio funcionamento e as circunstâncias de vida de modo intencional”. Assim, o ser humano age

- com intencionalidade, tornando a ação premeditada;
- com antecipação, possibilitando imaginar resultados futuros;
- com autorreação, possibilitando transformações em realidade por meio da autorregulação do comportamento; e
- com autorreflexão, que se caracteriza na autoavaliação das próprias ações, pensamentos e comportamentos.

Isso porque as pessoas possuem capacidades, sistema de crenças e capacidades autorreguladoras, o que possibilita ao agente organizar cursos de ação (BANDURA, 1997, 2008).

Azzi et al. (2014) explicam que, na Teoria Social Cognitiva, as características humanas, tais como proatividade, autorregulação e auto-organização resultam de uma relação dinâmica entre o sujeito (fatores pessoais), seu comportamento e o meio em que está o sujeito inserido. Pajares e Olaz (2008) salientam que as influências pessoais, comportamentais e ambientais influenciam tanto o pensamento humano como a ação humana. A forma de interpretar os resultados de seu próprio comportamento faz com

que as pessoas alterem os seus ambientes e os fatores pessoais que possuem e, conseqüentemente, alteram seus comportamentos futuros.

Essa concepção levou Bandura ao desenvolvimento da causalidade de reciprocidade triádica ilustrada no esquema abaixo:

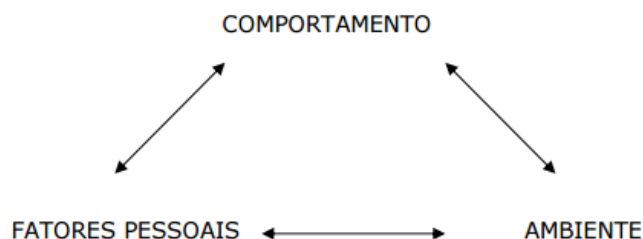


Figura 1 – Esquematização das relações entre as três classes de determinantes na causalidade de reciprocidade triádica

Fonte: Bandura (1986, p. 24)

No modelo de causalidade de reciprocidade triádica, fatores pessoais internos compreendem a cognição, o afeto e eventos biológicos; o comportamento compreende as ações do sujeito; e o ambiente é o meio em que o sujeito está inserido. Pelo modelo representado acima, os fatores pessoais internos, os padrões de comportamento e os eventos ambientais se interagem e determinam as influências um do outro de forma bidirecional (BANDURA, 1986, 1997). Esses fatores são fundamentais para compreender o comportamento.

Azzi et al. (2014) explicam que o modelo de causalidade de reciprocidade triádica considera que uma pessoa não é apenas influenciada pelo ambiente em que está, e tampouco apenas por impulsos internos. Ele representa uma “concepção do ser humano como um sujeito ativo que não vive passivamente à mercê de forças do seu eixo externo, nem de impulsos internos pouco conscientes” (p. 17).

Os autores ainda complementam que, considerando a tríade do funcionamento humano, a área de ação de intervenções para melhoria de desempenho tornou-se ampla. Essas intervenções podem ser propostas em áreas tanto para capacidades e habilidades comportamentais quanto para os processos motivacionais, cognitivos e emocionais, ou ainda ao nível das condições sociais em que esse sujeito vive.

Fundamental ao aspecto de agência humana e também relacionado aos fatores pessoais que os indivíduos possuem são as autocrenças. As autocrenças possibilitam os indivíduos exercerem certo grau de controle sobre seus pensamentos, sentimentos e ações bem como em seus comportamentos. Em outras palavras, as crenças que as

pessoas têm sobre si mesmas influenciam em seu exercício de controle e agência pessoal.

1.1 Crença de autoeficácia

Dentre as autocrenças que influenciam o funcionamento humano, Bandura e seus colaboradores identificaram o elemento fundamental da crença de autoeficácia. Para Bandura (1997, p. 3), “crenças de eficácia pessoal constitui o fator-chave da agência humana”. A autoeficácia influencia no modo de como os indivíduos criam e desenvolvem percepções pessoais sobre si mesmos e isso interfere nos objetivos que perseguem e no controle que exercem sobre o seu próprio ambiente (PAJARES; OLAZ, 2008).

O constructo de autoeficácia é um dos temas abordados na Teoria Sócio-Cognitiva. Bandura (1997; 2008), ao investigar mecanismos autorreguladores pelos quais as pessoas exercem controle sobre a motivação, estilos de pensamento e vida emocional, pesquisou sobre o desenvolvimento e o exercício de agência pessoal a partir de experiências direta como o principal veículo de mudança. As pessoas sempre se esforçam para controlar os eventos que afetam suas vidas. Quando se mantém o controle de alguma situação, se tornam mais capazes de perceber e investir esforços em futuros desejados e impedir aqueles futuros indesejados.

O autor também salienta que uma pessoa não consegue manter o controle de tudo, isso exigiria o domínio de todas as competências da vida humana. Isso faz com que elas diferenciem as áreas em que cultivam sua eficácia, sendo que essa diferenciação ocorre por níveis de desenvolvimento até mesmo dentro de atividades que costumam realizar (BANDURA, 2006).

Bandura (1997, p. 3) define crença de autoeficácia como “a crença na própria capacidade de organizar e executar cursos de ações requeridas para produzir determinadas realizações”. O autor salienta que ela é um dos constructos centrais mais intensos aplicados a diversas esferas do funcionamento humano e que influencia na busca pelo controle e efeitos de ações desejados. Pajares e Olaz (2008, p. 101) também explicam que são essas crenças e percepções que os indivíduos têm sobre suas próprias capacidades que proporcionam a base para a motivação humana, o bem-estar e as realizações pessoais. Isso significa que, se as pessoas acreditarem que não são capazes de produzir certos efeitos em suas ações, elas estarão desmotivadas a realizá-las.

É importante clarificar que as crenças de autoeficácia influenciam numa tomada de decisão antes de alguma ação. Após a ação, outros constructos podem interferir em pensamentos e sentimentos relacionados diretamente a mesma situação na qual o sujeito agiu. Um desses constructos é a expectativa de resposta (ou expectativa de resultado). A expectativa de resposta é definida como uma estimativa de uma pessoa de que ela vai chegar a certos resultados determinados após um dado comportamento. Já a expectativa de eficácia se caracteriza como a convicção de uma pessoa em poder ou conseguir executar, com sucesso, um comportamento necessário para produzir certos resultados desejados (BANDURA, 1977). A figura a seguir ilustra os momentos em que as expectativas de eficácia e expectativas de resultados interferem numa determinada situação.

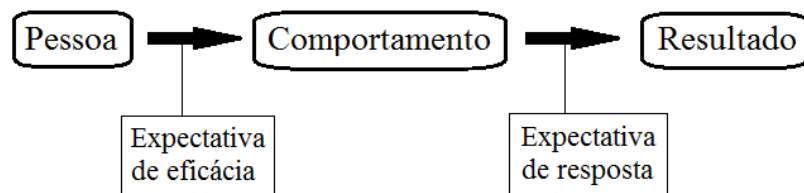


Figura 2 – Representação esquemática da diferença entre a expectativa de eficácia e expectativa de resultado

Fonte: Bandura (1977, p. 193)

As crenças de autoeficácia se diferenciam das expectativas de resultado. Por meio da figura, é possível compreender que a expectativa de eficácia, antecedendo o comportamento, influenciará na tomada de decisão de efetivar (ou não) determinado curso de ação. Agindo ou não de determinada forma haverá algum resultado. A expectativa de resultado, antecedendo o resultado em si, gera uma esperança para saber se o propósito inicial que o levou a esse comportamento foi atingido.

De acordo com Bandura (1977), as pessoas podem acreditar que um determinado curso de ação irá produzir certos resultados, mas, se elas tiverem dúvidas sobre suas capacidades em executar as atividades necessárias, esse curso de ação pode não ser posto em prática. Ou seja, as expectativas de eficácia afetam a escolha de atividades enquanto que as expectativas de resultado afetam a persistência do comportamento nesse curso de ação uma vez que escolhida e iniciada.

Azzi et al. (2014) salientam que as crenças de autoeficácia, independentemente se forem positivas ou negativas em relação a algum domínio ou curso de ação, influenciam em muitos aspectos da vida das pessoas. Quando as crenças são positivas,

elas influenciam de forma produtiva e otimista. Quando são negativas, influenciam de forma pessimista e debilitante. Os autores explicam que a crença de autoeficácia é constituída ao longo da vida pela inter-atuação das dimensões apresentadas no modelo de causalidade de reciprocidade triádica, ou seja, pelas dimensões pessoais (cognitivo, afetivo e biológico), comportamentais (ações do sujeito) e ambientais.

As crenças de autoeficácia também podem variar em três aspectos diante de algo a ser enfrentado, a saber: magnitude, força e generalidade (BANDURA, 1977; AZZI et al., 2014).

A *magnitude* da crença de autoeficácia se refere ao nível de dificuldade e complexidade das tarefas que o indivíduo considera ser capaz de realizar de forma bem sucedida.

A *força* remete ao grau de segurança ou convicção do indivíduo em suas capacidades ao realizar determinadas tarefas.

A *generalidade* refere-se à interpretação de outras tarefas, ao realizar outras atividades, tendo em vista que as expectativas de eficácia podem ser circunstanciais a um domínio específico ou podem ser provenientes de outros domínios mais gerais.

Em outras palavras, diante de determinada tarefa, a crença do sujeito irá variar dependendo da dificuldade da tarefa, da segurança que ele sente para realizá-la e ainda de sua interpretação de resultados de outras tarefas já realizadas.

Bandura (1997; 1994) também discute certos aspectos nos quais as crenças de autoeficácia produzem efeitos, regulando o funcionamento humano através de quatro processos principais: processos cognitivos, processos motivacionais, processos afetivos e processos de seleção.

Nos processos cognitivos, as crenças afetam os padrões de pensamento que podem melhorar ou prejudicar o desempenho. Já os processos motivacionais influenciam a concretização ou não de possíveis cursos de ação e a quantidade de esforço e de tempo a ser utilizados nessa atividade. Os processos afetivos abordam a quantidade de estresse e depressão que as pessoas experimentam ao vivenciar determinadas situações e isso desempenha um papel central na ansiedade e na excitação. Por fim, os processos de seleção estão relacionados às escolhas que as pessoas realizam, ou seja, se escolhem ou se evitam certas tarefas ou situações.

Ou seja, além de influenciar nos cursos de ações que as pessoas optam por prosseguir, a crença de autoeficácia influencia também na intensidade de esforço ao executar uma ação, no tempo investido frente a obstáculos e fracassos, na capacidade de

resistência às adversidades, entre outros aspectos. Ainda, as crenças determinam como as pessoas sentem, pensam, motivam-se e comportam-se (BANDURA, 1994).

A crença de autoeficácia não é o único determinante do comportamento das pessoas. Também é preciso fatores como incentivo e competência para produzir o desempenho desejado. No entanto, com competências e incentivos adequados, as expectativas de eficácia se tornam um dos principais determinantes da escolha de atividades e de cursos de ações, quanto esforço será expandido, e quanto tempo será utilizado para sustentar esse esforço para lidar com situações de estresse das pessoas (BANDURA, 1977).

1.2 Crenças de eficácia coletiva

As crenças de eficácia não são apenas desenvolvidas de forma individual, mas também de forma coletiva. De acordo com Bandura (1997, p. 477), crença de eficácia coletiva é definida como “crença grupal partilhada em suas capacidades conjuntas para organizar e executar os cursos de ações requeridos para produzir determinados níveis de tarefas”. Nas palavras de Guerreiro-Casanova (2014, p. 55),

(...) a crença de eficácia coletiva também é relativa a um contexto ou domínio de ação específico. A especificidade da crença de eficácia coletiva refere-se ao objetivo geral e comum a todos os membros que formam um grupo ou uma instituição.

Para Azzi et al. (2014), o termo “crença compartilhada grupal” se torna a palavra-chave desse conceito, considerando um grupo como um todo no momento de agir e de produzir resultados. Desta forma, há crenças de eficácia coletiva em diferentes tipos de grupo tais como em uma família, em um time de futebol, em uma escola, entre outros grupos.

Azzi et al. (2014) explicam que a crença de eficácia coletiva ocorre pelo julgamento de cada membro do grupo sobre a eficácia coletiva. Ou seja, cada membro do grupo realiza um julgamento sobre a capacidade de interação dos outros membros e a dele mesmo a fim de produzir certas tarefas e também sobre a capacidade de coordenar esforços e agir coletivamente (por exemplo, cumprir tarefas, cronogramas de ação, identificar problemas e desenvolver estratégias de resolução, distribuir recursos, entre outros).

Contudo, cada membro terá sua percepção sobre a eficácia coletiva: quando a percepção de cada membro tiver pouca variação, a crença de autoeficácia coletiva será coesa; quando a percepção de cada membro tiver muita variação, essa crença não será coesa. A ocorrência de variação decorre de aspectos pessoais de cada grupo e poderá influenciar na dinâmica de interação dos membros do grupo e na realização de suas atividades enquanto equipe.

De acordo com os estudos de Azzi et al. (2014), a importância da crença de eficácia coletiva decorre do fato de que, se o grupo for formado por pessoas altamente capacitadas, mas que não conseguem trabalhar no coletivo, o desempenho geral do grupo não será tão bom quanto ao desempenho de um grupo que consegue, mesmo que as pessoas que o compõem não sejam tão capacitadas. A eficácia coletiva é influenciada pela maneira que cada um contribui para o grupo e não apenas de suas capacidades individuais.

1.3 Fontes de eficácia

De acordo com Bandura (1994), a forma mais efetiva de se criar forte senso de eficácia é por meio de experiências bem sucedidas. O sucesso constrói uma forte crença de eficácia e a fracasso a destrói, principalmente se o fracasso ocorrer antes de se desenvolver uma crença positiva de eficácia.

As crenças de autoeficácia e de eficácia coletiva são formadas a partir da interpretação de informações de quatro principais fontes, a saber: experiência direta, experiência vicária, persuasões sociais e estados somáticos e emocionais (BANDURA, 1977; BANDURA, 1997; PAJARES; OLAZ, 2008).

A **experiência direta** interfere no desenvolvimento da crença de eficácia a partir da interpretação do resultado de um comportamento anterior. Ela possui uma especial influência tendo em vista que experiências de sucesso aumentam a crença enquanto que repetidos fracassos a reduz, especialmente se os percalços ocorrerem no início de um curso de ação. Ou seja, quando um resultado de um comportamento é interpretado como um sucesso, a crença de eficácia tende a aumentar e o contrário também ocorre. Depois de repetidos sucessos, impactos negativos provenientes de falhas pode reduzir a autoeficácia.

Ser persistente para melhorar falhas a fim de se obter sucesso pode também contribuir com o desenvolvimento de crenças. Também, pessoas com baixa crença de

eficácia acabam por menosprezar casos de sucessos ao invés de mudarem suas crenças, duvidando ainda de suas capacidades.

A **experiência vicária** também desenvolve a crença de eficácia. Isso acontece por meio da observação de outras pessoas ao executar certas tarefas. Quando as pessoas não acreditam em suas próprias capacidades ou quando tiverem pouca experiência numa determinada área, elas observam pessoas com quem se identificam, tornando-as seus modelos. Os modelos devem possuir atributos semelhantes aos seus para que elas passem a acreditar que o seu desempenho será similar ao desempenho do seu modelo. As pessoas acreditam que, se outras pessoas podem realizar uma tarefa, elas também devem ser capazes de conseguir.

No entanto, se os atributos das pessoas são considerados diferentes ao do observador, elas não serão consideradas como modelos e a influência da experiência vicária é reduzida.

Já a **persuasão verbal** cria e desenvolve crenças de eficácia a partir de julgamentos verbais que os outros fazem. Essa fonte é amplamente utilizada por ser considerada fácil e de pronta disponibilidade.

Porém, esses julgamentos verbais não devem ser elogios vazios e sem sentidos, mas sim elogios e incentivos feitos de forma a cultivar as crenças das pessoas em suas capacidades para atingir o sucesso desejado alcançável. Enquanto que persuasões positivas contribuem com o desenvolvimento da autoeficácia, persuasões negativas a diminui.

Por fim, **estados somáticos e emocionais**, tais como ansiedade, estresse, excitação e estados de humor, também interferem nas crenças de eficácia. Dependendo das circunstâncias, são atribuídos a esses estados valores informativos relativos a competências pessoais. Isso porque, sentir excitação pode debilitar o desempenho e as pessoas são mais propensas a esperar o sucesso quando não há excitação aversiva. O estado fisiológico da pessoa serve como parâmetro para avaliar seu grau de confiança ao pensar numa determinada ação. Pensamentos que provocam medo ou outros sentimentos negativos diante de um obstáculo podem fazer com que a pessoa não tente superá-lo a fim de evitar o fracasso.

Promover o bem-estar emocional e reduzir estados emocionais negativos são formas de desenvolver crenças de eficácia positivas. Bandura (1997) salienta que a formação dessas crenças ocorre pelo processamento de informação que advém de uma ou de várias fontes. Nesse processo, o indivíduo realiza uma autorreflexão sobre essa

informação e, conseqüentemente, a informação contribuirá para o estabelecimento de crenças de eficácia.

De acordo com Bandura (1977) e Pajares e Olaz (2008), a experiência direta é considerada a fonte de eficácia mais eficaz quando comparada com a experiência vicária, persuasões sociais e estados somáticos e emocionais. Isso porque ela fornece uma base experiencial autêntica para as pessoas. No entanto, as pessoas não confiam apenas em uma única fonte de informações sobre o seu nível de eficácia, tornando, então, importante as demais fontes.

Pajares e Olaz (2008, p. 105) explicam que

As fontes de informação para a autoeficácia não se traduzem diretamente em avaliações de competência. Os indivíduos interpretam os resultados dos acontecimentos, e essas interpretações proporcionam as informações que fundamentam seus julgamentos. Os tipos de informações as quais as pessoas prestam atenção e usam para fazer julgamento de eficácia, bem como as regras que empregam para avalia-los e integrá-los, formam a base dessas interpretações. Assim, a seleção, integração e recordação de informações influenciam os julgamentos de autoeficácia.

Ainda, de acordo com Bandura (1977), uma vez estabelecida a crença de eficácia, ela tende a se generalizar para outras situações, sendo essas similares (ou as vezes não tão similares).

1.4 Crenças de eficácia no contexto escolar

Em contexto escolar, as crenças de eficácia são desenvolvidas em vivências relacionadas à educação. Azzi et al. (2014), a partir de seus estudos, exemplificam isso ao salientar que as crenças de autoeficácia do professor se desenvolvem no transcorrer de diversas atividades ligadas à prática pedagógica, tais como na forma de manejar a sua aula, ao propor e mediar tarefas adequadas aos seus alunos, ao mobilizar seus alunos para aprenderem, em reuniões e encontros pedagógicos com a direção, supervisão, colegas de escola e com pais de alunos, entre outros. Ou seja,

a crença de autoeficácia do professor é um autojulgamento realizado considerando o que é exigido dele na situação de ensino em conjunto com as demandas do contexto escolar em que atua, produzindo interpretação da relação entre as dificuldades versus habilidades necessárias para ensinar (AZZI et al., 2014, p. 33).

Bandura (1983) salienta que uma das tarefas designadas ao professor é a de criar ambientes propícios à aprendizagem. Essa tarefa repousa pesadamente sobre seus talentos e sobre sua crença de autoeficácia. De acordo com seus estudos, ambientes de sala são, em parte, determinada por crenças dos professores na sua eficácia instrucional.

Partindo do fato de que a crença de autoeficácia não é estática, as fontes de eficácia, discutidas anteriormente, apresentam grande influência em seu desenvolvimento no contexto escolar. Azzi et al. (2014) apresentam relações que ilustram como essas fontes interferem no âmbito da docência.

No que diz respeito às experiências diretas, essa é a fonte mais efetiva para se criar senso de eficácia. As experiências diretas vivenciadas pelo professor são decorrentes de situações de ensino no qual ele obtém informações sobre suas capacidades em lidar com planejamento, transmissão de conhecimento relativo à disciplina, manejo do comportamento das crianças na sala de aula, avaliações, entre outras. A percepção dos professores sobre suas experiências diretas de ensino constitui na maior fonte de informação de autoeficácia docente, assim como as sensações psicofisiológicas decorrentes dessa experiência, tais como frequência cardíaca, pressão arterial, sudorese, entre outras. Experiências de ensino com êxito, principalmente quando há desafios a serem superados, há exigência de esforços, persistência e conhecimento por parte do professor, contribuem com o fortalecimento de sua crença de autoeficácia.

As experiências vicárias no campo da docência podem ocorrer por meio da observação de outros professores ministrando aulas ou ainda a partir de filmes e vídeos cujo conteúdo seja situações de sala de aula. Observar sua própria prática por meio de gravações também é considerada por Azzi et al. (2014) uma forma de modificar suas próprias crenças de autoeficácia.

No que diz respeito à persuasão social, as crenças de autoeficácia podem ser desenvolvidas por professores a partir de influências de coordenadores, supervisores de ensino e de diretores de escola por serem especialistas em planejar, executar, gerenciar e avaliar diferentes situações de ensino e aprendizagem. Essa influência ocorre a partir de incentivos, orientações, palavras de apoio e avaliações que incentivam o professor a busca pelo êxito em suas tarefas. Outros colegas de trabalho também podem servir de influência no desenvolvimento da crença a partir da persuasão social.

Por fim, os estados fisiológicos e afetivos no contexto da docência podem ser percebidos por diferentes comportamentos: sudorese excessiva, mãos trêmulas, rubor

facial podem ser interpretados de forma positiva como uma maneira de ativação e preparação para uma atividade ou de forma negativa como algo prejudicial em uma atividade. Esse julgamento dependerá de circunstâncias ambientais, de experiências anteriores de ensino, entre outros fatores que serão percebidos e interpretados pelo professor. No que se refere aos estados afetivos, os estados de humor advindos de lembranças seletivas de experiências passadas de sucesso e fracasso influenciam nas crenças de autoeficácia.

As crenças de eficácia coletiva também interferem no contexto escolar. Azzi et al. (2014) salientam que nesse contexto, essas crenças interferem em aspecto que diz respeito ao coletivo de uma escola, tais como implantar estratégias efetivas que possibilitem a reconciliação de conflitos de interesse, desenvolver senso de propósito e mobilizar o apoio da comunidade para melhora educacional.

1.5 Crenças de autoeficácia em Matemática

Inicialmente, os trabalhos desenvolvidos por Bandura acerca de crenças de autoeficácia estiveram voltados para problemas relacionados à fobia e experiências que contribuiriam com a mudança desse sentimento, resultando em um senso de eficácia de enfrentamento positivo. A partir disso, o pesquisador explorou o poder de tratamentos que focam a criação de resiliência em experiências adversas baseando-se na ideia de que “a capacidade de uma experiência adversa de restabelecer as disfunções depende amplamente do padrão de experiências em que se insere, em vez de depender unicamente de suas propriedades” (BANDURA, 2008, p. 31). Com esses estudos, o pesquisador foi desenvolvendo sua teoria sobre a crença de autoeficácia percebida.

Sua teoria aborda as origens das crenças de eficácia, suas estruturas e funções, seus efeitos diversos, os processos que produzem esses efeitos e seus modos de influência. Pesquisas sobre esse tema foram realizadas nas áreas da educação, promoção da saúde e prevenção de doenças, disfunções clínicas, realizações atléticas, entre outras (BANDURA, 2008).

Pajares e Olaz (2008) salientam que, na área da Educação, a crença de autoeficácia é investigada juntamente com realizações acadêmicas, comparações sociais, atribuições de sucesso e fracasso, memória, estabelecimento de objetivos, resolução de problemas, carreira, ensino e formação de professores, entre outros. De modo geral, as pesquisas abordadas pelos autores mostram que essa crença é um

indicador consistente de resultados comportamentais quando comparados com qualquer outro constructo motivacional.

Na área da Educação Matemática, o ensino e aprendizagem da Matemática escolar são tidos como objeto de eficácia. De acordo com Brito e Souza (2015) a crença de autoeficácia, por ser um julgamento pessoal sobre a capacidade voltada para um determinado domínio, não se refere unicamente a um autoconceito geral ou à capacidade de alguém frente a uma variedade de circunstâncias. A crença de autoeficácia se refere ao que alguém acredita sobre sua capacidade em realizar uma tarefa em um domínio específico, como a Matemática.

Os estudos de Torres (2010), por exemplo, revelaram que a crença de autoeficácia em Língua Portuguesa e em Matemática influencia de forma significativa no rendimento dos alunos em ambas as disciplinas, porém, a relação entre a utilização de estratégias de aprendizagem e o rendimento é diferente para cada caso: em Língua Portuguesa, essa relação se mostrou totalmente mediada pela crença enquanto que em Matemática o mesmo não aconteceu.

Por conta de especificidades de diferentes domínios, ao investigar a crença de autoeficácia, pesquisadores vêm focando cada vez mais as particularidades de um objeto de estudo. Para Bandura (1977), o constructo de autoeficácia, por ser microanalítico, depende do contexto, da situação e, mais especificamente, da tarefa a ser realizada.

Torres (2010) apresenta uma adaptação de um quadro elaborado por Pina Neves (2007) no qual aponta a conceitualização da autoeficácia de acordo com diferentes níveis de generalidade:

Quadro 1 – Conceitualização da autoeficácia de acordo com diferentes níveis de generalidade

Definição de constructos progressivamente mais microanalíticos	Níveis de operacionalização	Definição dos diferentes construtos
Autoeficácia geral	Nível mais geral, sem referir um contexto em particular	Crença de que se é capaz de realizar com sucesso determinadas atividades ou tarefas
Autoeficácia acadêmica	Contexto global de realização	Crença de que se é capaz de realizar com sucesso as atividades e tarefas de um modo geral
Autoeficácia em Matemática	Domínio de realização específico	Crença de que se é capaz de realizar com sucesso atividades e tarefas na disciplina de Matemática
Autoeficácia para a realização de um teste de Matemática	Situação de realização específica	Crença de que se é capaz de realizar com sucesso um determinado teste de Matemática
Autoeficácia para a resolução de um problema específico de Matemática	Tarefa específica	Crença de que se é capaz de realizar com sucesso um determinado problema matemático

Fonte: Torres (2010, p. 15)

Podemos perceber pelo quadro que a crença de autoeficácia pode se referir a um domínio mais geral bem como a um domínio mais específico, sendo que cada um, apresentando uma especificidade, se caracterizará como um constructo. Sendo assim, a crença de autoeficácia geral terá um nível de operacionalização também geral. A crença de autoeficácia acadêmica terá um nível voltado para um contexto global acadêmico. Já a crença de autoeficácia em Matemática apresentará um nível de operacionalização específico à Matemática. E assim por diante.

Pensando que, de acordo com Bandura (1977), o constructo de autoeficácia é microanalítico e depende do contexto, da situação e da tarefa a ser realizada, podemos acrescentar no quadro especificidades de conteúdos matemáticos. Isso porque, conteúdos de Álgebra, Geometria, Trigonometria, entre outros, apresentam suas especificidades, abstrações e formas de raciocínio sobre os conteúdos que se diferem uns dos outros. Por conta disso, as crenças de eficácia em relação a determinados conteúdos matemáticos também poderão se diferir.

1.6 Estudos sobre crenças de autoeficácia em Matemática e suas (co)relações

Pesquisas desenvolvidas sobre crença de autoeficácia na área da Educação Matemática vêm enfocando certas particularidades que estão, ou podem estar,

relacionadas a ela, tais como o conhecimento do conteúdo, o desempenho, as atitudes, a influência de professores e pais de alunos, entre outros. Essas pesquisas vêm acontecendo no âmbito nacional e internacional.

Em âmbito nacional, podemos destacar as pesquisas desenvolvidas por Paula (2008), Neves (2002), Dobarro (2007), Machado (2014), Morais (2015) e Brito e Souza (2015). Em âmbito internacional, algumas das pesquisas que podemos destacar foram as desenvolvidas por Delgado (2012) e Rosário et al (2008), em Portugal, Zarch e Kadivar (2006) e Azar et al (2010) no Irã, Ozgen (2013) na Turquia, Kvedere (2014) na Letônia, Pajares e Miler (1994), nos Estados Unidos, Ayotolaa e Adedeji (2009) na Nigéria e Getachew e Birhane (2016) na Etiópia.

Paula (2008) buscou verificar se existem relações entre as atitudes em relação à Matemática apresentadas pelos pais e as atitudes em relação à Matemática, as crenças de autoeficácia em Matemática e o desempenho matemático dos estudantes. Participaram 22 alunos do 5.º ano do Ensino Fundamental, com idades entre 10 e 12 anos e sete pais de alunos selecionados de acordo com o desempenho dos alunos. Segundo a autora, mesmo a literatura apresentando que as crenças de autoeficácia exercem papel importante no desempenho dos alunos, sua investigação não apontou correlação entre essas duas variáveis. Ela mostrou que houve baixa correlação entre atitudes em relação à Matemática e desempenho. Já a relação entre as atitudes dos pais e a crença de autoeficácia dos alunos apontou para uma forte correlação entre essas variáveis e de forma significativa.

Em concordância com esse estudo, destaca-se a pesquisa realizada por Delgado (2012). Seu objetivo foi estudar as relações entre a crença de autoeficácia percebida e o conhecimento de Matemática de alunos do 1.º ano universitário de cursos cujos planos de estudo contêm unidades curriculares de Matemática. Participaram desse estudo 186 alunos. Este estudo refuta a hipótese de relação positiva e significativa entre a autoeficácia percebida e os conhecimentos de Matemática. Contudo, o autor salienta que há indícios em seus dados de que as correlações entre essas variáveis tendem a ampliar com o aumento dos conhecimentos de Matemática.

Essas investigações, apesar dos diferentes níveis de escolarização dos participantes, apresentaram resultados semelhantes no que diz respeito a falta de correlação entre crença de autoeficácia e desempenho apesar do que é apresentado na literatura.

Contudo, há pesquisas que evidenciam uma correlação entre a crença de autoeficácia e o desempenho em Matemática. Ayotolaa e Adedeji (2009), por exemplo, buscaram examinar a relação entre autoeficácia em Matemática e realização em Matemática e suas diferenças entre alunos do gênero masculino e feminino. Participaram do estudo 352 alunos de 20 escolas do Ensino Médio. Os instrumentos utilizados foram escala de autoeficácia matemática e um teste de desempenho. Os resultados mostraram que não há diferença significativa entre a realização em matemática de alunos do gênero masculino e feminino bem como de suas crenças de autoeficácia. Também foi revelado que existe uma forte relação positiva entre a autoeficácia da matemática e realização em matemática.

Na investigação de Moraes (2015) participaram 45 alunos do 9.º ano do Ensino Fundamental e 34 alunos do 3.º ano do Ensino Médio. Ela teve o objetivo investigar se o desempenho dos alunos, quando submetidos a um teste de matemática, se relaciona com suas crenças de autoeficácia e autoeficácia matemática e ainda se o nível escolar dos alunos influencia nessas crenças. Os instrumentos utilizados foram uma escala de crença de autoeficácia, um questionário de autoeficácia matemática, uma prova de Matemática com conteúdos de aritmética e geometria e entrevista semiestruturada com os alunos que apresentaram maior e menor crença de autoeficácia de cada série escolar.

De acordo com a autora, os resultados indicaram que os alunos que possuem maiores crenças de autoeficácia apresentaram melhor desempenho na prova de Matemática e alunos que acreditam mais na sua capacidade em resolver problemas matemáticos possuem melhor desempenho na resolução de problemas. A autora não encontrou diferenças significativas entre as crenças de autoeficácia e desempenho quando feita a análise por série escolar. Por fim, estudo feito por Moraes (2015) mostrou ainda que estudantes com maiores crenças de autoeficácia se dedicam mais aos estudos, procuram novas fontes de pesquisas e possuem hábitos de estudos diários.

Para além da relação entre crença de autoeficácia e desempenho, há estudos que também buscaram prever o desempenho do aluno em Matemática a partir de sua crença de autoeficácia. A pesquisa desenvolvida por Rosário et al (2008), por exemplo, tinha por objetivo analisar o poder preditivo da autoeficácia percebida na Matemática e seu impacto nas notas dos alunos. Essa investigação foi desenvolvida com 794 alunos de turmas de 5.º e 6.º, tendo como foco seus estudos em trabalhos acadêmicos prescritos pelos professores e que devem ser contemplados pelos alunos fora da escola, num horário extra letivo. A hipótese dos autores é que há variáveis motivacionais que

interferem em seu desempenho, sendo uma delas a crença de autoeficácia. Os autores optaram por investigar esse tema no domínio da Matemática tendo em vista seu histórico preocupante de insucesso.

De acordo com seus dados, a autoeficácia percebida na disciplina de Matemática foi ligeiramente superior para os alunos do 5.º ano quando comparada com alunos do 6.º ano e o rendimento acadêmico dos alunos foi considerado positivo visto a totalidade da amostra. Além do mais, a partir de suas análises, os autores concluíram que a autoeficácia percebida na disciplina de Matemática é aquela que assume maior valor preditivo do rendimento acadêmico nesta disciplina.

De forma análoga, Zarch e Kadivar (2006) realizaram um estudo com o objetivo de examinar os efeitos diretos e indiretos da capacidade matemática no desempenho nessa disciplina, especialmente no que se refere à autoeficácia em matemática como preditor e mediador. A pesquisa foi realizada com 848 alunos de 8.ª série. A descoberta deste estudo apoiou a hipótese de que a influência da habilidade matemática no desempenho matemático foi mediada pela autoeficácia em matemática. Para os autores, a autoeficácia é um importante preditor de desempenho e é uma causa primária de sentimentos de autoestima, de utilidade percebida da Matemática e de esforço para identificar, compreender e alterar julgamentos sobre a Matemática. Desta forma, Zarch e Kadivar (2006) salientam sobre a necessidade de identificar mecanismos potenciais que contribuem para habilidade matemática dos alunos.

Pajares e Miler (1994) também buscaram descobrir se as crenças de autoeficácia desempenham o papel de mediação e se essas crenças são preditoras de desempenho mais fortes quando comparadas a outros mecanismos (como o autoconceito). Para essa pesquisa, o domínio de realização foi a Matemática, enfocando os estudos em resolução de problemas. Participaram da pesquisa 350 estudantes de nível superior. Os resultados revelaram que a autoeficácia em matemática era mais preditiva no desempenho em resolução de problemas do que o autoconceito em matemática, a utilidade percebida da matemática, a experiência prévia com matemática ou o gênero. No que diz respeito ao papel mediador da autoeficácia, ela influenciou o efeito do gênero e experiência prévia sobre o autoconceito, a utilidade percebida e a resolução de problemas. Ainda, o gênero e a experiência anterior influenciaram o autoconceito, a utilidade percebida e a resolução de problemas em grande parte através do papel mediador da autoeficácia.

Considerando que essas pesquisas ocorreram com alunos desde o 5.º ano até o Ensino Superior, nota-se que independentemente da faixa-etária a crença de autoeficácia exerce um papel preditor no desempenho dos alunos, pelo menos a partir do 5.º ano.

As pesquisas que dizem respeito a crenças de autoeficácia em Matemática também buscam investigar possíveis relações com outros constructos.

Neves (2002), por exemplo, teve os objetivos de investigar as relações entre as crenças de autoeficácia do aluno e seu desempenho em Matemática; verificar as possíveis relações entre crenças de autoeficácia do aluno e atribuições causais de sucesso ou fracasso no desempenho em Matemática; e verificar as relações entre dois diferentes instrumentos destinados a avaliar as crenças de autoeficácia. Participaram da pesquisa 122 alunos de 3.ª e 4.ª séries do Ensino Fundamental. De acordo com a investigadora, o dados mostraram relações entre autoeficácia e desempenho, bem como entre a auto-percepção e expectativas de desempenho. Os dados não mostraram diferenças significativas entre as crenças de autoeficácia, quando os alunos foram agrupados por gênero e por série escolar; e relações entre autoeficácia e atribuições causais de sucesso e fracasso.

Dobarro (2007) teve como um de seus objetivos investigar a atitude em relação à Matemática e a autoeficácia matemática, considerando-os com constructos afetivos que influenciam o desempenho do sujeito durante a solução de problemas matemáticos. A pesquisa foi realizada com 213 alunos do Ensino Médio de duas escolas. Os dados mostraram que existe uma relação entre o desempenho, a atitude e a autoeficácia em relação à matemática.

Também com alunos do Ensino Médio, mas voltado para o 3.º ano, Machado (2014) buscou identificar e descrever as possíveis relações entre: crenças de autoeficácia matemática, atitudes em relação à Matemática, autoconceito, gênero e desempenho dos estudantes. Os participantes da pesquisa foram 119 alunos de duas escolas. Os dados possibilitaram concluir que existe relações entre as atitudes, autoconceito, autoeficácia matemática e o desempenho escolar dos alunos em alguns itens de Matemática apresentados nos instrumentos. A autora também conclui que há relações significativas entre as atitudes, autoconceito, autoeficácia matemática e o desempenho escolar quanto ao gênero e tipo de escola.

Azar et al. (2010) teve por objetivo testar um modelo conceitual das relações entre autoeficácia, valor da tarefa, objetivos de realização, abordagens de aprendizagem e realização de matemática. O valor da tarefa se caracteriza pela utilidade que o aluno

percebe na tarefa matemática. Os objetivos de realização são orientações específicas que refletem o desejo de adquirir, desenvolver e mostrar competências em um contexto particular. A abordagem de aprendizagem poderia se caracterizar como profunda (conceituada como tendo uma motivação interna, estando o aluno envolvido na tarefa e com um desejo de conhecer algo sobre um tópico em particular) ou superficial (no qual o aluno não está interessado na tarefa em si).

Os participantes da pesquisa foram 280 alunos do 3.º ano do Ensino Médio. De acordo com os autores, os resultados revelaram que há uma relação direta e positiva entre a autoeficácia com as variáveis investigadas. A autoeficácia influenciou de forma negativa os objetivos de evitar a realização de uma tarefa por conta do receio do aluno em se mostrar como incompetentes perante os colegas.

A pesquisa desenvolvida por Ozgen (2013) objetivou investigar as crenças de autoeficácia do aluno do Ensino Médio na literacia matemática bem como explorar suas opiniões sobre as conexões entre a matemática e o mundo real de acordo com seus níveis de crenças de autoeficácia em literacia matemática. O investigador recorreu a métodos quantitativos e qualitativos, utilizando para a coleta de dados uma "Escala de autoeficácia em literacia matemática" e um roteiro de entrevista semiestruturada com 40 alunos do Ensino Médio de quatro anos diferentes (o Ensino Médio na Turquia é dividido em quatro anos). De acordo com sua análise dos dados, os alunos do Ensino Médio tinham, em sua maioria, níveis médios de crenças de autoeficácia em literacia matemática. Ainda, alunos com níveis altos de crenças de autoeficácia em literacia matemática percebem mais relações entre a matemática e o mundo real quando comparados com alunos com crenças de níveis médios. Independentemente das crenças, os alunos apresentaram pontos de vista semelhantes sobre as conexões entre a matemática e o mundo real. As relações que os alunos apontaram nas entrevistas foram no sentido de tornar a vida mais fácil, ser bem sucedido nos exames, interpretar situações, pensar e resolver problemas. Alunos que pensam que a matemática é inútil, que não há relação com o mundo real, salientam que a escola ensina apenas para o ingresso em universidades. De acordo com o autor, embora os alunos que tiveram níveis médios e altos de crenças de autoeficácia em literacia matemática tenham visões positivas sobre as conexões entre a matemática e o mundo real, os resultados sugeriram que estas conexões se limitavam ao uso da matemática em situações e circunstâncias do mundo real e aos conceitos matemáticos em que eles podem utilizar a matemática.

Kvedere (2014) desenvolveu seu estudo com a finalidade de explorar o nível de autoeficácia, de autoconceito e de ansiedade da matemática dos alunos da 9.^a série a fim de descobrir as possíveis interconexões entre essas variáveis. Participaram dessa pesquisa 3077 alunos da 9.^a série de diferentes regiões do país. As variáveis estudadas foram investigadas por escalas de quatro pontos. A análise de dados realizada permitiu que a autora dividisse os alunos em dois grupos, a saber: 1- alunos com auto-matemático positivo, que se caracteriza por maior autoeficácia matemática e autoconceito e menor ansiedade (representado por 1482 alunos); e 2- alunos com auto-matemático negativo, caracterizados por menor autoeficácia matemática e autoconceito e maior ansiedade (representados por 1423). Por fim, a autora salienta que os meninos demonstraram ter um auto-matemático mais positivo do que meninas e alunos que vêm de cidades apresentaram maior auto-matemático negativo do que alunos provenientes de áreas rurais.

Brito e Souza (2015) também apresentam em sua investigação resultados que apontam que tanto a autoeficácia matemática, como a autoeficácia para autorregulação estavam relacionadas ao desempenho na tarefa de solução de problemas com alunos de 5.^o ano.

As crenças de autoeficácia em Matemática, de forma geral, vêm sendo investigada em diversos países. Nesses estudos, os pesquisadores, para além de investigar a crença de autoeficácia em Matemática de forma isolada, buscam relacioná-la com diversas variáveis.

Desta forma, as pesquisas vêm mostrando que a crença de autoeficácia em Matemática possui relação com desempenho dos alunos nesta disciplina, com as atitudes, tanto dos pais como dos alunos em si, com o autoconceito, ansiedade, objetivo de realização, série/ano, tipo de escola, entre outras.

A relação mais investigada pelos pesquisadores desse tema é com o desempenho em Matemática dos alunos, sejam eles da Educação Básica ou do Ensino Superior.

No entanto, há discrepâncias entre os estudos que buscam relacionar autoeficácia e desempenho, bem como com outras variáveis, como por exemplo, gênero, série/ano. Essa discrepância pode ser devido a diversos fatores: ao uso de diferentes tipos de instrumentos de coletas de dados, tais como itens com tarefas matemáticas ou situações de aprendizagem seguidas de uma escala Likert, avaliação no qual o próprio aluno se atribui uma nota, ou escala multidimensional; por se tratar de diferentes perfis de participantes, ora do Ensino Básico (Ensino Fundamental ou Médio), ora do Ensino

Superior; pelos participantes serem de diferentes localidades; ou ainda por abordar diferentes conteúdos matemáticos ou a Matemática de forma geral.

O uso de diferentes tipos de instrumentos ocorre de acordo com os objetivos de cada pesquisa. Porém, para investigar autoeficácia, o tipo de instrumento mais utilizado nas pesquisas são as escalas. Bandura (2006) salienta que escalas de autoeficácia percebida devem ser adaptadas ao domínio particular de funcionamento, que é o objeto de interesse a ser investigado. Na Educação Matemática, a forma com que esse instrumento é elaborado acaba por ser com tarefas (envolvendo diferentes conteúdos e de diferentes formas, dependendo da natureza da tarefa). Ou ainda com situações de aulas, solicitando ao participante que reflita sobre a situação proposta e, para expor como se sente, a forma mais usual é por meio de uma escala.

É importante destacar que as pesquisas realizadas sobre crenças de autoeficácia seguem um caminho de “afilamento”, iniciando por crenças de modo geral, teve como um de seus seguimentos a eficácia acadêmica e, em seguida, deram ênfase em disciplinas, como a Matemática. Ou seja, em Matemática, as pesquisas a focam de uma forma generalizada e também investigam suas relações com outros constructos, como a crença de autoeficácia em resolver problemas. Por ser microanalítica, a crença de autoeficácia pode variar de uma disciplina para outra, bem como de um conteúdo para outro.

A pesquisa aqui desenvolvida, ao investigar as crenças de autoeficácia com alunos do 3.º ano do Ensino Fundamental, tem como domínio de eficácia as tarefas numéricas. Sendo assim, não temos a intenção de generalizar nossas análises e conclusões para o ensino da Matemática, mas sim manter o foco no tema Números e operações. Temos a intenção de realizar microanálises nesse tema tendo em vista que elas poderão evidenciar crenças de autoeficácia específicas para os conteúdos próprios de Números e operações e suas relações com o Sentido de número. Contudo, será possível generalizar para o ensino da Matemática, a partir de hipóteses, que, as diferentes ou semelhantes crenças de autoeficácia em relação a determinado tema nessa disciplina também poderão ocorrer diante de outros temas, como a Geometria ou Grandezas e medidas, por exemplo.

A Matemática é um campo de conhecimento que, além de contemplar diversos conteúdos, desenvolve também destrezas, habilidades e formas de pensar (como por exemplo, os pensamentos algébrico, aritmético e geométrico). Cada peculiaridade da Matemática pode constituir um domínio de eficácia a ser investigado. Essas

investigações, assim como esta pesquisa, irão contribuir para o ensino da Matemática tendo em vista que, de acordo com Souza e Brito (2008), é importante clarificar os diversos fatores que influenciam o desempenho dos alunos.

1.7 Crenças de autoeficácia e o ensino da Matemática escolar

O ensino da Matemática escolar vem focando aspectos cognitivos dos alunos, sem levar em conta outros aspectos que podem influenciar na aprendizagem do aluno.

De acordo com Souza e Brito (2008, p. 194), “muitos professores estão atentos ao desempenho de seus alunos, mas nem sempre têm claro conhecimento dos diversos fatores que o influenciam”.

Brito e Souza (2015) salientam que além do desenvolvimento de habilidades, o processo de ensino-aprendizagem deve compreender a construção de auto percepções favoráveis do estudante. O maior foco nas aulas acaba por ser processos cognitivos, deixando de dar importância aos demais processos, como os processos motivacionais, os processos afetivos e os processos de seleção. É preciso considerar mais os aspectos motivacionais no desempenho em solução de problemas e na aprendizagem em geral tendo em vista que eles possibilitam ao aluno a desenvolver auto-percepções mais favoráveis que sustentem a persistência, o interesse e o envolvimento nos processos de aprendizagem.

É preciso considerar também os processos afetivos, tendo em vista sua influência na ansiedade Matemática. Isso porque as crenças de autoeficácia se mostraram inversas em relação à ansiedade. De acordo com as autoras, dar importância a esses processos se faz necessário, pois, de certa forma, são eles que dirigem a atividade, mobilizando os mecanismos necessários para a ação.

Em concordância com essas considerações, podemos discutir a pesquisa realizada por Getachew e Birhane (2016), na Etiópia. Essa investigação teve o objetivo de descobrir como uma estratégia inovadora baseada em sala de aula influencia a crença de autoeficácia dos alunos e as realizações acadêmicas em um curso de Matemática Aplicada.

A estratégia inovadora desenvolvida por Getachew e Birhane (2016) foi elaborada levando em conta as fontes de eficácia propostas por Bandura (1997): experiência direta, experiência vicária, persuasões sociais e estados somáticos e emocionais. O quadro 2 sintetiza essa estratégia.

Quadro 2 – Elementos da estratégia inovadora baseada em sala de aula

ESTRATÉGIAS	MOMENTO DE IMPLEMENTAÇÃO
Estratégia 1 - EXPERIÊNCIA DIRETA	
Começar a lição com uma revisão	Começo da lição
Compartilhar o objetivo da lição diariamente com os alunos	Começo da lição
Revisar e verificar os objetivos alcançados	Ao final da lição
Pedir que os alunos registrem cada dia, em um calendário, algo novo que eles aprenderam	Ao final da lição
Reforçar os alunos sobre os objetivos que dominaram (podem ser individuais ou em grupo)	Sempre, durante ou depois da lição
Escrever um feedback específico sobre a tarefa ou sobre o trabalho de classe	Sempre, durante ou depois da lição
Promover os alunos que realizam mal alguma tarefa para que eles atribuam suas falhas à falta de esforço	Sempre, durante ou depois da lição
Completar o plano de realização, estabelecendo pequenos objetivos e passando para os difíceis	Sempre, durante ou depois da lição
Ajudar os alunos a registrarem metas alcançadas para o plano de realização	Sempre, durante ou depois da lição
Revisar o plano de realização dos alunos	O tempo todo
Estratégia 2 - EXPERIÊNCIA VICÁRIA	
Modelar pares (organizar os alunos em duplas)	Início da intervenção
Estratégia 3 - PERSUASÕES SOCIAIS	
Incentivar o desempenho dos alunos ou suas capacidades em executar uma tarefa	O tempo todo
Orientar os alunos continuamente, salientando que eles poderiam dominar o conteúdo com esforço	O tempo todo
Estratégia 4 - ESTADOS SOMÁTICOS E EMOCIONAIS	
Evidenciar aos alunos, durante a tarefa ou avaliação, o tipo de atividade que estão realizando	Sempre que houver exercício, teste

Fonte: Getachew e Birhane (2016, p. 126). Traduzida pela autora.

Na estratégia 1, a fonte de autoeficácia em foco é a experiências direta. Nesse sentido, Getachew e Birhane (2016) recomendaram em sua pesquisa que o professor iniciasse o estudo de uma lição com uma revisão de conteúdos já estudados e que compartilhasse com os alunos os objetivos que ele pretende atingir. Ao final da lição, o professor deve revisar e verificar se os objetivos foram alcançados bem como solicitar aos alunos que realizem um registro de algo novo que aprenderam em cada lição. Esse registro era feito num calendário.

As ações que a serem realizadas nos momentos de implementação “sempre”, “durante” e “depois” do ensino da lição dizem respeito a reforçar os objetivos que se pretende atingir com os alunos; apresentar aos alunos um feedback das atividades desenvolvidas na aula; incentivar os alunos que realizaram mal alguma tarefa como se essa falha fosse consequência de uma falta de esforço; dentro de um plano de realização ou um plano de aula, estabelecer pequenos objetivos a serem atingidos e passar para objetivos mais difíceis; e auxiliar os alunos a registrarem metas a serem alcançadas para o plano de realização, fazendo com que o professor não seja o único a estabelecer objetivos diante de uma lição.

Nessa estratégia, o professor também deverá revisar o plano de realização dos alunos durante todo o trabalho com as lições propostas.

Na estratégia 2, a ação a ser desenvolvida pelo professor se refere à modelagem de pares. Essa estratégia está relacionada à fonte de crença de autoeficácia “experiência vicária” e o professor deve formar pares com alunos que possam servir de modelos uns para os outros.

Já na estratégia 3, a fonte de crença de autoeficácia são as persuasões sociais. Nesse sentido, as ações a serem desenvolvidas pelo professor, durante todo o tempo de uma lição, são incentivar os alunos para terem um bom desempenho e desenvolver suas capacidades ao executar uma tarefa e orientar os alunos continuamente a se esforçarem para dominar o conteúdo.

Por fim, na estratégia 4, ao focar os estados somáticos e emocionais, o professor deve expor aos alunos que tipo de avaliação ou tarefa ele está propondo, isso sempre que for propor uma tarefa ou avaliação.

A pesquisa de Getachew e Birhane (2016) decorreu com um professor que lecionava em turmas distintas do mesmo curso de Matemática Aplicada, sendo que uma delas se caracterizou como grupo experimental e a outra como grupo controle, durante sete aulas que ocorreram em quatro semanas. Participaram da pesquisa 63 alunos no grupo experimental e 60 alunos no grupo controle. Os procedimentos utilizados foram um pré-teste, com uma escala de crença de autoeficácia, a intervenção, no caso do grupo experimental e aula normal para o grupo controle; e pós-teste, com a escala de crença de autoeficácia e avaliação do professor. Onde deveria haver uma “avaliação inicial”, foram utilizadas as notas dos alunos de desempenho em outras avaliações feitas pelo mesmo professor, com os mesmos alunos.

O professor realizou uma intervenção com o grupo experimental a partir das ações apresentadas no quadro “Elementos da estratégia inovadora baseada em sala de aula”. Os alunos do grupo experimental também foram orientados a realizarem as ações que lhes cabiam diante das estratégias elaboradas.

Os dados da pesquisa mostraram que, tanto as crenças de autoeficácia como o desempenho dos alunos, em ambos os grupos, eram semelhantes antes do início da intervenção. Após a intervenção no grupo experimental, as crenças continuaram semelhantes, porém, o desempenho dos alunos melhorou significativamente.

O instrutor também apontou várias melhorias que ele percebeu entre os alunos, como resultado da intervenção que foram categorizadas em cinco temas: persistência/esforço, cooperação, domínio do conteúdo, autorregulação e crença de eficácia.

Quadro 3 – Reflexão do instrutor da sala de aula sobre a intervenção

TEMA	ELEMENTO
Persistência / Esforço	<ul style="list-style-type: none"> • Trabalharam arduamente na classe • Participaram da aula ativamente • Quase todos os alunos tentaram resolver os problemas dado • Aumentaram o esforço
Cooperação	<ul style="list-style-type: none"> • Ajudaram-se enquanto faziam as tarefas • Tentaram aprender um com o outro
Domínio do conteúdo	<ul style="list-style-type: none"> • Responderam corretamente à pergunta • Alcançaram o objetivo diário • Fizeram as tarefas corretamente • Quase todos entenderam o tópico
Autorregulação	<ul style="list-style-type: none"> • Utilizaram o plano
Crença de eficácia	<ul style="list-style-type: none"> • Desenvolveram o sentido de "Eu posso fazer"

Fonte: Getachew e Birhane (2016, p. 136). Traduzida pela autora.

Conforme indicado no quadro 3, Getachew e Birhane (2016) salientam que os alunos mostraram melhora significativa no esforço, na cooperação entre si, no domínio do conteúdo ensinado, no uso do tempo efetivamente e na crença de autoeficácia em matemática.

O instrutor também apontou algumas fraquezas relacionadas à intervenção que foram um desafio para os alunos, a saber:

- Gravar o trabalho diário sobre o plano de realização;
- Receber ajuda pelos pares; e
- Trabalhar em pequenos grupos no início do experimento.

As fraquezas foram diminuindo no decorrer da intervenção conforme os alunos se familiarizavam com essas mudanças na aula.

De acordo com os investigadores, a estratégia inovadora influenciou no desempenho acadêmico dos alunos no curso de Matemática Aplicada. Ainda, eles acreditam que se os professores utilizarem essas estratégias regularmente, o desempenho acadêmico em Matemática dos alunos será aprimorado.

A pesquisa desenvolvida por Getachew e Birhane (2016), mesmo não apresentando evidências significativas sobre mudanças de crenças de autoeficácia, apresenta melhoras no desempenho dos alunos em Matemática quando o professor leva em conta as fontes de crença de eficácia. Essa pesquisa corrobora com a fala de Souza e Brito (2008) sobre o professor ter claros os diversos fatores que influenciam o desempenho do aluno sendo uma dessas influências as crenças de autoeficácia.

2 SENTIDO DE NÚMERO

2.1 Entendimento sobre sentido de número

O termo sentido de número enfatiza a necessidade em se mudar o foco da matemática escolar do ensino dos números centrado em cálculos algorítmicos para o ensino dos números e operações com compreensão. Ela está ancorada em vários estudos que identificaram adultos que demonstravam um ótimo desempenho no algoritmo, mas que revelavam um baixo conhecimento de relações aritméticas. Por outro lado, verificaram que crianças que não conseguiam usar adequadamente o algoritmo, revelavam compreender os números suficientemente bem para adequar o seu próprio procedimento de cálculo às situações que lhes eram propostas para resolver (MCINTOSH; REYS; REYS, 1992).

A pesquisa realizada por Zanzali e Ghazali (1999), por exemplo, aponta que alunos dos anos iniciais apresentam uma distância entre a capacidade de calcular usando algoritmos estabelecidos pela escola e ter sentido de número. De acordo com as autoras, as crianças são capazes de calcular muito bem quando solicitados, porém não pareciam mostrar compreensão sobre os números e relações entre eles.

Refutando a ideia de que o cálculo numérico se resume ao algorítmico, as Normas para o Currículo e a Avaliação da Matemática Escolar (NCTM, 1985), elaboradas ao final dos anos 80 do século XX, salientam que há uma grande variedade de capacidades matemáticas que vão além da mera capacidade de cálculo. Essas capacidades estão relacionadas com tudo aquilo que é essencial para que o cidadão possa ter no presente e no futuro uma vida produtiva e com significado e que incluem, ao nível aritmético, a necessidade de ter sentido de número, aspecto considerado pelo NCTM (2000) o ponto-chave para o ensino e aprendizagem dos números e operações.

A fim de explorar as dimensões do sentido do número e suas áreas afins, foi realizada a conferência “*Establishing foundations for research on number sense and related topics*” (SOWDER; SCHAPPELLE, 1989) nos Estados Unidos em 1989. Com a participação de educadores matemáticos e psicólogos cognitivos, essa conferência resultou em reflexões acerca do tema, tais como algumas caracterizações sobre o que é sentido de número, como ensiná-lo, entre outras.

Dos trabalhos aí realizados resultaram em algumas caracterizações de sentido de número, destacam-se os trabalhos de Marshall (1989), Greeno (1989), Case (1989),

Reys (1989), Schoen (1989), Trafton (1989), Markovits (1989), Carpenter (1989), Silver (1989), Sowder (1989) e Resnick (1989).

Marshall (1989) descreve sentido de número como uma riqueza de “ligação” entre os conhecimentos matemáticos. Isso permite, por exemplo, que um aluno que aprendeu as propriedades dos números e algo sobre a adição de números inteiros possa resolver $153 + 148$ adicionando $150 + 150$ e, em seguida, ajustar a resposta de acordo com a diferença entre os números originais e 150.

Greeno (1989) parte da ideia de que o termo sentido de número refere-se a vários recursos importantes, tais como flexibilidade na operação com números e cálculos por estimativa, sendo que este pode envolver também julgamentos e inferências sobre quantidades.

Case (1989) define o sentido de número de crianças como seu conhecimento intuitivo sobre números e transformações numéricas. A autora apresenta hipóteses de algumas propriedades relacionadas com o sentido de número, a saber:

- O sentido de número não é estático, ele se desenvolve de acordo com as atividades matemáticas;
- A atividade matemática está presente em todas as culturas, independentemente se há ou não uma escolaridade formal;
- Consequentemente, o sentido de número é natural e universal;
- Ironicamente, é na execução de tarefas escolares formais o momento em que as crianças são menos propensas a exibir seu sentido de número natural;
- Dizer que sentido de número se desenvolve e que é natural não significa que todos os indivíduos, grupos etários, ou culturas apresentam o mesmo nível de sentido de número;
- Uma das variabilidades em sentido de número dentro de uma cultura é as diferenças internas nas habilidades numéricas, o que também é influenciada pelos tipos e quantidades de atividades matemáticas em que as crianças se envolvem;
- As escolas não estão fazendo o máximo que podiam para promover o desenvolvimento do senso numérico das crianças.

Para Reys (1989) sentido de número não é algo que uma pessoa tem ou não tem, mas sim algo contínuo, que é desenvolvido em diferentes níveis e estes níveis podem expandir para refletir novas experiências e níveis mais elevados de compreensão. Ainda,

uma das características de sentido de número apontada pelo autor é a flexibilidade no trabalho com números.

Schoen (1989) salienta que sentido de número parece ser um termo que se refere a uma abordagem perspicaz e reflexiva para fazer aritmética. Para ter um bom sentido de número os alunos precisam usar em situações apropriadas: o conceito de número, especialmente no que diz respeito à sua grandeza relativa e às suas formas de compor e decompor os números; as relações entre diferentes representações dos números, tais como $1/2 = 0,5 = 50\%$; as propriedades das operações e os efeitos de cada operação sobre os números; os números como medidas de quantidade em ambientes reais, especialmente o homomorfismo entre as operações com os números no mundo da matemática e das quantidades transformadas no mundo real.

Além disso, o sentido de número envolve uma compreensão das propriedades tanto dos números, como das operações; a capacidade de se sentir confortável com o uso de números e operações ao representar e manipular qualquer tipo de quantidades e em qualquer tipo de contextos reais; e ser capaz de se mover facilmente desses contextos e para o mundo da matemática pura; e ter um sistema de monitoramento para verificar a razoabilidade dos seus resultados aritméticos adquiridos em seus cálculos (SCHOEN, 1989).

Trafton (1989) considera que reconhecemos sentido de número quando o vemos, mas é difícil de descrevê-lo e discutir sobre ele precisamente. No entanto, suas ideias sobre sentido de número estão conectadas com o cálculo mental e com a estimativa. Mesmo sem uma definição, o autor aponta algumas características que estão relacionadas com o sentido de número sendo que o primeiro é ter uma boa compreensão do significado de um número. As crianças têm muito contato com números inteiros e são capazes de se conectar com modelos, linguagem oral e símbolos de forma relativamente intuitiva. Isso permite alicerçar o sentido de número das crianças. Por outro lado, frações e números decimais são mais difíceis de construir, fazendo com que as crianças tenham pouca consciência do que $\frac{2}{5}$ e 0,46, por exemplo, representam. Conseqüentemente, pensar sobre os números de forma informal fica limitado até obter uma estrutura conceitual sobre eles e desenvolver o seu sentido de número. Outros componentes apresentados pelo autor são lidar com as relações entre os números e com a sua magnitude relativa.

Para o autor, sentido de número está mais relacionado com intuições e percepções sobre números e quantidades, ao invés de números como algo abstrato ou entidades formais.

Já Markovits (1989) salienta que se alguém que tem sentido de número for submetido a um problema que não pode ser resolvido com (ou apenas com) aplicação de regras, ele conseguirá resolver o problema de forma mais fácil e eficiente fazendo apelo ao seu sentido de número.

Para este autor, um aspecto relacionado ao sentido de número não é o que o aluno é capaz de fazer, mas sim que ele questione o que vem aprendendo na escola, tendo em vista que lá há quase sempre uma resposta correta, um algoritmo correto e não há nenhuma relação entre a matemática e o mundo real. De acordo com Markovits (1989), o ensino da matemática escolar está muito voltado para regras e não permite que os alunos tomem decisões ou façam julgamentos, como se sempre houvesse apenas uma resposta correta para uma situação ou como se houvesse apenas um algoritmo a ser utilizado.

Sendo assim, Markovits (1989) aponta que esse aluno precisa ter em mente que, em uma situação, nem sempre há uma resposta ou um algoritmo, a matemática e a vida real estão relacionadas e é esperado o que ele tome decisões e faça julgamentos.

Carpenter (1989) salienta que não está claro se sentido de número é um conceito unitário, como se alunos com bom sentido de número para operar com números inteiros também terão sentido de número para frações. Contudo, caracteriza sentido de número como uma capacidade de operar com números de forma flexível, como quando as crianças inventam seus próprios algoritmos. Ainda, Carpenter (1989) menciona que tanto sentido de número como a estimativa fazem parte de uma compreensão de conceitos básicos os de números e operações.

Já Silver (1989) associa sentido de número com julgamentos sobre a razoabilidade de números em situações particulares e em movimentos flexíveis dentro do espaço de números e quantidades. Como o próprio termo implica, sentido de número é buscar fazer sentido nos números e na Matemática a partir de ações como estimar antes ou depois de um cálculo, julgar a razoabilidade de um cálculo ou usar o tamanho relativo dos números ou referências numéricas para orientar a atividade quantitativa.

Sowder (1989) caracteriza sentido de número como uma maneira de pensar ao invés de um corpo de conhecimento a ser transmitido aos outros. Isso porque, sentido de

número não é algo finito, um conhecimento que se tem ou não. Para a autora, sentido de número apresenta diferentes níveis e contextos.

A autora apresenta vários significados que podem ser incluídos no sentido de número. Dentre eles estão esquemas gerais de como os números se comportam, juízos de razoabilidade de números como “medida” que são utilizados em situações particulares; flexibilidades no uso de estratégias de cálculo mental e de estimativas; capacidades de usar referências adequadas; tendências de querer "fazer sentido" em situações que envolvem números e quantidades; compreensões e usos corretos de notações decimal e fracionário; reconhecimento do efeito relativo de operar com números; posse de um senso de tamanho do número; constatação de que número e matemática são inerentemente aproximados.

Resnick (1989) acredita ser impossível definir sentido de número tendo em vista que este não é uma coleção de coisas que se sabe a respeito de números ou de competências, mas sim um conjunto de coisas que se pode fazer com os números, de forma não totalmente previsível, em certas circunstâncias, baseado em um corpo de conceitos de número que são inter-relacionados e de conhecimento de números específicos.

A autora apresenta possíveis aspectos que indicam ter sentido do número, a saber: utilizar números já conhecidos como “ponto de referência” para descobrir dados desconhecidos; julgar se um determinado número constitui uma resposta razoável para um determinado problema; buscar respostas numéricas aproximadas (ao invés de calcular respostas exatas); usar a estrutura do sistema de numeração decimal para decompor e recompor números a fim de simplificar os cálculos (especialmente cálculos mentais); buscar "fazer sentido" em situações que envolvem números e quantidades; ter um senso do tamanho relativo dos números e das quantidades a que se referem os números e que isso está relacionado com o contexto em que esse número é utilizado; substituir de forma flexível diferentes representações possíveis de uma quantidade (como por exemplo, 24 para 2 dúzias, um pouco menos de $1/2$ para 0,4).

Segundo Resnick (1989), sentido de número está relacionado também com as seguintes características-chave: sentido de número não é algorítmico; tende a ser complexo; muitas vezes produz múltiplas soluções, cada um com custos e benefícios, ao invés de soluções únicas; envolve julgamentos e interpretações matizadas, abrange a aplicação de vários critérios; muitas vezes envolve incertezas; compreende a

autorregulação do processo de pensamento; envolve a imposição de significado; envolve esforço.

De um modo geral, vários autores consideram difícil definir sentido de número e optam por indicar algumas de suas características como compreender os números e as operações, desenvolver estratégias flexíveis de resolver problemas (nos quais não se pode ou não convém aplicar um algoritmo convencional, tais como, cálculo por estimativa, cálculo mental), realizar julgamentos e inferências, entre outros.

Num estudo realizado sobre o tema, Delgado (2013) indica que o sentido de número surge como resultado da reflexão sobre três aspectos que se entrecruzam: as capacidades e conhecimentos necessários aos cidadãos para lidarem com problemas em seu cotidiano relacionados com números; o que deve ser valorizado quanto ao ensino dos números e das operações; e as perspectivas acerca da aprendizagem da Matemática.

Focando o segundo aspeto anteriormente referido o NCTM (1991) refere que “o sentido do número é uma intuição acerca dos números que se forma a partir dos diversos significados do número” (p. 50). Os números são utilizados em diversas situações do mundo real, como para quantificar, identificar locais, identificar objetos específicos dentro de uma coleção, mencionar objetos e fazer medições.

O conhecimento intuitivo das relações numéricas ajuda as crianças a avaliar a plausibilidade do resultado de cálculos e das soluções propostas para problemas numéricos. Este conhecimento requer um bom sentido de número. Uma criança possui um bom sentido de número quando: (1) compreende os significados do número; (2) desenvolveu múltiplas relações entre os números; (3) reconhece a grandeza relativa dos números; (4) conhece o efeito relativo de operar com os números; (5) desenvolve padrões de medida de objetos comuns e de situações no seu meio ambiente (p. 48).

Já McIntosh, Reys e Reys (1992, p. 4) partem do princípio de que

O sentido de número refere-se ao conhecimento geral que uma pessoa tem acerca de números e das suas operações a par com a capacidade e inclinação para usar esse conhecimento de forma flexível para construir raciocínios matemáticos e desenvolver estratégias úteis para lidar com números e operações. Reflete uma inclinação e uma capacidade de usar números e métodos quantitativos como meio de comunicação, processamento e interpretação de informação. Resulta numa perspectiva de que números são úteis e de que existe uma certa ordem na Matemática.

Estes autores também salientam que o sentido de número se refere ao domínio básico sobre o número que é necessário a todos os adultos e sua aquisição deve ser um dos principais objetivos da Educação Básica.

Baseado em diversos estudos, podemos caracterizar sentido de número como a capacidade de tomar decisões inteligentes baseadas numa sólida compreensão das relações entre os números, suas utilizações e contextos de problemas (GREENES; SCHULMAN; SPUNGIN, 1993; SOWDER; SCHAPPELLE, 1994).

O sentido de número também está relacionado com a capacidade e inclinação para usar esta compreensão de forma flexível, de fazer julgamentos matemáticos e utilizar estratégias úteis desenvolvidas ao lidar com números e operações. Se desenvolve ao longo do tempo e reflete uma inclinação e uma capacidade de utilização de números e métodos quantitativos como um meio de comunicação, processamento, e que a matemática tem certa expectativa de que os números são úteis e têm certa regularidade. Outras características incluem o uso de múltiplas representações de número, o reconhecimento de sua importância relativa e absoluta, a seleção e utilização de referências, decomposição e recomposição de números, a compreensão dos efeitos relativos de operações em números, e de forma flexível e adequada realização de cálculo mental e de estimativa (REYS; YANG, 1998).

Segundo McIntosh, Reys e Reys (1992), o sentido de número é demonstrado conforme o aluno se empenha no pensamento matemático, particularmente, ao escolher, desenvolver e usar métodos de cálculo, inclusive cálculo escrito, cálculo mental, calculadoras e estimativa. O desenvolvimento do sentido de número é um processo evolutivo e gradual que se inicia antes do ensino formal por meio da criação e aplicação de algoritmos inventados que requerem facetas como decomposição/recomposição e compreensão das propriedades dos números.

O NCTM (1985) aponta que o ensino da Matemática deve realçar a capacidade do aluno em aplicar técnicas já utilizadas em novas situações e em selecionar estratégias conhecidas para criar novas estratégias por combinação. Diante dessas capacidades, as dificuldades em realizar cálculos não devem interferir na aprendizagem de estratégias de resolução.

Um aspecto que McIntosh, Reys e Reys (1992) apontam diz respeito ao progressivo abandono dos alunos dos seus métodos próprios e ao uso dos conhecimentos técnicos de Matemática aprendidos na escola, o que, ironicamente, leva a limitar o leque de estratégias usadas. Assim, os métodos aprendidos na escola, como algoritmos tradicionais (de lápis e papel), passam a ser os métodos mais recorridos pelos alunos, pois não é preciso pensar de forma demasiada para executá-lo (ou ainda, porque é o algoritmo mais exigido pelos professores de Matemática).

Os alunos que possuem grande capacidade em usar os algoritmos tradicionais podem não desenvolver o sentido de número. Isso porque, há uma ênfase exagerada nos procedimentos repetitivos e usados de forma sem sentido. Sendo assim, para ter sentido de número é preciso desenvolver conhecimentos e aplicabilidades que envolvam os números, tais como conhecimento e destreza com números, conhecimentos e destrezas com operações e aplicar o conhecimento e destreza com números e operações em situações de cálculo (MCINTOSH; REYS; REYS, 1992).

2.2 Componentes do sentido de número

McIntosh, Reys e Reys (1992, p. 7) apresentam uma proposta de referência para examinar o sentido de número em que parte do princípio de que o sentido de número é

Uma propensão para e uma capacidade de utilizar números e métodos quantitativos como meio de comunicar, processar e interpretar informação. Resulta numa perspectiva de que os números são úteis e de que a Matemática tem uma certa ordem.

Segundo McIntosh, Reys e Reys (1992) sentido de número é um constructo que integra número, operações e definições, como ilustrado na figura a seguir.

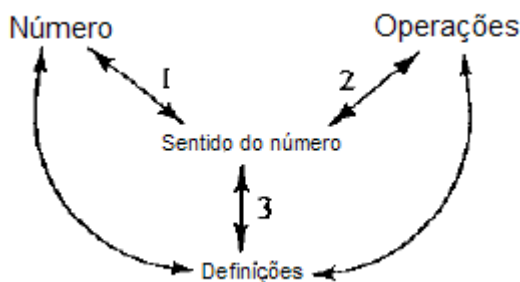


Figura 3 - Interligações das componentes principais do sentido de número

Fonte: McIntosh, Reys e Reys (1992, p. 9)

Essas interligações sugerem um processo de monitoramento que vincula o sentido de número e a metacognição. Sendo assim, uma pessoa com um sentido de número bem desenvolvido busca pensar e refletir sobre números, operações e os resultados produzidos. Este pensamento reflexivo envolverá qualquer um dos componentes do sentido de número de acordo com o contexto.

Ainda, pelas relações apresentadas na figura acima sobre sentido de número, percebemos que, mesmo estando interligado aos números, às operações e às suas

definições, é possível complementar o esquema acrescentando uma interligação entre números e operações. Brocardo (2011) salienta que os números podem ser caracterizados a partir de várias relações: o número 48, por exemplo, também é $50-2$, $100/2-2$, 6×8 , 4×12 , 2×24 , $2\times 2\times 12$, entre outros. Ou seja, caracterizar ou buscar definir um número engloba também uma série de expressões que envolvem operações.

McIntosh, Reys e Reys (1992) apresentam um quadro (quadro 4) em que caracterizam, de forma detalhada, vários componentes de sentido de número, identificados a partir de estudos que realizaram.

A primeira coluna aponta três grandes áreas pelas quais podemos analisar o sentido de número: o conhecimento e a destreza com os números; o conhecimento e a destreza com as operações; e a aplicação do conhecimento e da destreza com os números e as operações em situações de cálculo. As demais colunas se subdividem em diversos componentes relacionados com essas grandes áreas.

Quadro 4 – Quadro de referência para caracterizar o sentido de número

Conhecimento e destreza com os números	Sentido da ordenação dos números	Valor de posição	
		Relações entre tipos de números	
		Ordenação de números do mesmo tipo ou entre tipos de números	
	Múltiplas representações dos números	Gráficas/simbólicas	
		Formas numéricas equivalentes (incluindo decomposição/recomposição)	
		Comparação com números de referência	
	Sentido das grandezas, relativa e absoluta dos números	Comparação com referenciais físicos	
		Comparação com referenciais matemáticos	
	Sistemas de valores de referência	Matemáticos	
		Pessoais	
Conhecimento e destreza com as operações	Compreensão do efeito das operações	Operações com números inteiros	
		Operações com frações/decimais	
	Compreensão das propriedades matemáticas	Comutativa	
		Associativa	
		Distributiva	
		Identities	
		Inversas	
	Compreensão das relações entre as operações	Adição/Multiplicação	
		Subtração/divisão	
		Adição/subtração	
		Multiplicação/divisão	
	Aplicação do conhecimento e da destreza com os números e as operações em situações de cálculo	Compreensão para relacionar o contexto de um problema e os cálculos necessários	Reconhecimento de dados como exatos ou aproximados
			Conscientização que as soluções podem ser exatas ou aproximadas
Conscientização da existência de múltiplas estratégias		Capacidade para criar e/ou inventar estratégias	
		Capacidade para reconhecer estratégias diferentes	
		Capacidade para selecionar uma estratégia eficaz	
Inclinação para usar representações e/ou métodos eficazes		Facilidade com vários métodos (mentais, calculadoras, papel e lápis)	
		Facilidade para escolher números eficazes	
Inclinação para rever os dados e a razoabilidade do resultado		Reconhecer a razoabilidade dos dados	
		Reconhecer a razoabilidade dos cálculos	

Fonte: McIntosh, Reys e Reys (1992, p. 7)

Conhecimento e destreza com os números

Esse componente inclui:

- Sentido de ordenação (regularidade) dos números que diz respeito à compreensão do sistema indo-arábico, de sua organização e de suas características. Por exemplo, o aluno em fase inicial de aprendizagem deve perceber que, com apenas dez algarismos, é possível escrever qualquer número tendo em vista que ele muda de valor dependendo da posição no qual se encontra. Por exemplo, ao aprender a contar até 20, o aluno perceberá padrões inerentes ao sistema de numeração decimal identificando-os de forma oral e gráfica.
- Múltiplas representações dos números que engloba reconhecer que os números podem ser manipulados, compostos ou decompostos, de acordo com certo propósito. Por exemplo, 4×2 é igual a $2 + 2 + 2 + 2$ e é o mesmo que 8. Utilizar “números de referência” também faz parte desse componente, como por exemplo, utilizar $\frac{1}{2}$ como âncora para pensar que $\frac{5}{8}$ é um pouco maior que a metade.
- Sentido da grandeza relativa e absoluta dos números que inclui reconhecer o valor relativo dos números ou quantidades dependendo dos contextos nos quais estão inseridos. Por exemplo, perguntar a uma criança se ela já viveu 1000 dias ou se é possível viver 1000 anos, ou ainda quanto tempo levaria para ela contar até 1000 são questões que envolvem diferentes contextos pessoais que contribuem com a compreensão da quantidade 1000.
- Sistema de números de referência que é desenvolvido a partir de números que proporcionam essenciais marcos mentais para pensar sobre eles e são utilizados para avaliar a grandeza de uma resposta ou ainda para arredondar um número de modo que fique mais fácil processá-lo. Por exemplo, para estimar o peso de alguém, uma pessoa que pesa 50 kg pode basear-se nesse valor para aferir o peso de outra pessoa.

Conhecimento e a destreza com as operações

Esse componente inclui:

- Compreensão do efeito das operações que está associado com os conceitos das operações e como isso se sucede aos vários tipos de números, tais como naturais e racionais. Sendo assim, é importante propor diversas situações em diferentes contextos para que o aluno possa explorar modelos de cada operação e que envolvam diferentes tipos de números. Por exemplo, não só utilizar o modelo da multiplicação como adição repetida, mas também utilizar outros modelos, como o modelo retangular³ ou reta numérica⁴, que contribuam com a compreensão da multiplicação.
- Compreensão das propriedades matemáticas das operações que está associada ao entendimento das propriedades matemáticas, tais como a comutativa, a associativa, a distributiva, as identidades e as inversas, são propriedades que estão relacionadas às operações. Por exemplo, o aluno pode aplicar a propriedade comutativa e distributiva ao multiplicar 36×4 pensando em 4×35 e 4×1 , ou em $140 + 4$, resultando em 144.
- Compreender a relação entre as operações, o que contribui com as possibilidades dos alunos em resolver problemas. Isto é, dependendo de como se sentir mais confortável, o aluno pode recorrer a uma operação que esteja relacionada com o problema ou a outras estratégias, com o uso de outras operações, como a relação inversa de uma operação, para resolver a mesma situação. Por exemplo, na questão “Quantas rodas há em 8 triciclos?”, o aluno pode aplicar o procedimento de contagem das rodas, pode aplicar o procedimento de adições sucessivas ($3+3+3+3+3+3+3+3$), pode agrupar as quantidade (quatro grupos de 2 triciclos cada: $6+6+6+6$), entre outras estratégias.

³ O modelo retangular da multiplicação caracteriza-se pela multiplicação de dada quantidade de linha pela quantidade de coluna de certa situação.

⁴ A reta numérica é uma reta que representa os números seguindo uma sequência e um padrão. As operações são realizadas ao longo da reta como “saltos”, sendo que, na multiplicação, o cálculo pode ser feito da seguinte forma: o tamanho do salto será determinado por um dos fatores e o outro fator determinará a quantidade de saltos. Esse modelo está relacionado ao cálculo linear, uma das estratégias de cálculo mental, posteriormente clarificado por Buys (2008) no subcapítulo 1.3.1.

Aplicação do conhecimento e da destreza com os números e as operações em situações de cálculo

Este componente envolve tomada de decisões sobre qual tipo de resposta é apropriada para situação, qual ferramenta de cálculo é eficiente e acessível, qual ou quais estratégias utilizar, como aplicar as estratégias, rever os dados e os resultados e analisar a sua razoabilidade e se necessário, alterar a estratégia e resolver novamente o problema. Para tomar essas decisões, é preciso que o aluno possa:

- Compreender a relação entre o contexto de um problema e os cálculos necessários que engloba perceber que as situações trazem pistas acerca das operações que podem ser utilizadas na resolução, dos números a serem considerados e do tipo de resultado a ser obtido (aproximado ou exato). Por exemplo, na questão “João gastou R\$2,88 em maçãs, R\$2,38 em bananas e R\$3,76 em laranjas. João pode pagar sua despesa com R\$10,00?” uma estimativa já seria eficaz para resolver a situação.
- Compreensão que existem múltiplas estratégias, que inclui o reconhecimento de que pode haver diferentes formas de resolver certo problema e que quando uma estratégia parece inadequada, é preciso que o aluno busque alternativas de resolução.
- Inclinação para utilizar uma representação ou um método eficiente que diz respeito a estratégias e ferramentas de cálculo podem ser mais eficientes em certas situações que outras. Por exemplo, para somar $8 + 7$ não precisa contar de um em um, pode-se escolher uma estratégia de decomposição como $7 + 7 + 1$.
- Inclinação para rever os dados e o resultado que implica na tendência e na capacidade do aluno analisar os cálculos realizados e os resultados encontrados diante do problema proposto.

A NCTM (1991, p. 50) também apresenta cinco componentes de sentido de número, a saber:

1. Desenvolvimento de significados acerca do número;
2. Exploração das relações entre os números, usando materiais manipuláveis;
3. Compreensão da grandeza relativa dos números;

4. Desenvolvimento de intuições acerca dos efeitos relativos das operações com números;
5. Desenvolvimento de padrões de medida de objetos comuns e de situações no seu ambiente.

Outros autores que também apresentam componentes de sentido de número são Greenes, Schulman e Spungin, (1993) e Yang, Hsu e Huang (2004), Yang, Li e Li (2008) e Yang e Li (2008).

Para Greenes, Schulman e Spungin, (1993), há pelo menos sete habilidades do sentido de número que devem ser desenvolvidas nas séries do ensino fundamental e médio:

1. Reconhecer os vários usos de números: os alunos devem reconhecer que os números são utilizados em diversas maneiras, tais como quantificar, identificar, mensurar e localizar.
2. Reconhecer a adequação dos números: os alunos devem reconhecer que alguns números (inteiro, fração), por sua própria natureza, são mais apropriadas que em determinadas situações.
3. Associar números de várias magnitudes com objetos, eventos e situações reais: a partir do conhecimento sobre vários assuntos e eventos anteriores, os alunos deverão ser capazes de julgar quais números são mais apropriadas para descrever esses assuntos ou eventos.
4. Estimar resultados de cálculos: estimar somas, diferenças, produtos e quocientes é útil para verificar os resultados de cálculos e garantir que as respostas estão corretas.
5. Identificar relações entre números e medidas: os alunos deverão identificar as relações existentes entre eles e entre medições.
6. Reconhecer conjuntos e subconjuntos, ou relações parte-todo: os alunos deverão reconhecer a relação parte-todo para compreender a magnitude dos números.
7. Entender frases que estabelecem relações matemáticas, bem como relações temporais: muitas situações problemas apresentam frases que estabelecem relações matemáticas, tais como "maior que", "menos que", "no máximo", "pelo menos", "cinco vezes mais como", e "para cada" (relações matemáticas) ou frases como "antes", "mais tarde", "antes", "depois", e "a partir de agora" (relações temporais). Compreender essas frases é a chave para resolver a situação.

Yang, Hsu e Huang (2004), Yang, Li e Li (2008) e Yang e Li (2008) apresentam cinco componentes essenciais de sentido de número que elencam a partir de estudos que realizaram:

1. Compreender o significado dos números: implica compreender o sistema base dez, o número (números inteiros, frações e decimais), incluindo o valor de lugar, padrão de números e usando várias maneiras de representar;
2. Reconhecer a magnitude dos números: implica que as crianças podem reconhecer a grandeza relativa de números. Por exemplo, quando os alunos comparam frações, eles não precisam depender dos métodos padrão escrito (tais como encontrar o mínimo múltiplo comum entre os denominadores, tal como sugerido no currículo de matemática). No entanto, eles podem usar maneiras significativas, como comparar o numerador ou o denominador com frações já conhecidas para reconhecer sua grandeza.
3. Usar referências de forma adequada / Ser capaz de compor e decompor de números: implica que se podem usar referências, como 1, $1/2$, 100, ou usar composições e decomposições dos números para resolver problemas de forma flexível e adequada em diferentes situações;
4. Conhecer o efeito relativo da operação em números: significa que o indivíduo deve reconhecer como as quatro operações básicas afetam os resultados;
5. Desenvolver estratégias de estimativa ou estratégias flexíveis e julgar a razoabilidade dos resultados: isso implica que os indivíduos podem aplicar mentalmente estratégias de estimativa para os problemas sem o uso de computação escrita. Ao mesmo tempo, eles também devem ser capazes de julgar a razoabilidade do resultado.

Em suma, os modelos que caracterizam os componentes do sentido de número aqui apresentados são bastante semelhantes e complementares. O modelo de McIntosh, Reys e Reys (1992) é uma proposta mais detalhada, pois aponta quais conhecimentos caracterizam o sentido de número, agrupando-os em forma de categorias e descrevendo-os minuciosamente. Esse modelo nos permite identificar facilmente quais componentes estão relacionados ao conhecimento sobre os números, as operações e a aplicabilidade especificamente. Já os demais modelos apresentados convergem e complementam o

modelo de McIntosh, Reys e Reys (1992) a partir de listas de componentes de sentido de número de forma mais abrangente. Sendo assim, para complementar esse modelo, seria possível acrescentar a relação entre números e medidas, componente este apontado pelo NCTM (1991) e por Greenes, Schulman e Spungin, (1993), bem como os componentes referentes ao reconhecimento dos vários usos de números e a compreensão de frases que estabelecem relações matemáticas e relações temporais (GREENES; SCHULMAN; SPUNGIN, 1993).

2.3 Interligação entre os diferentes tipos de cálculo

Ao operar com números usam-se diferentes estratégias que variam entre o uso de contagem e estratégias pessoais até o uso de estratégias mais formais, como o algoritmo. Heuvel-Panhuizen e Buys (2008) consideram que a aritmética, ramo da Matemática que abrange os números e as operações, pode ser “segmentada” em diferentes aritméticas a partir de quatro tipos de cálculos associados à estratégia utilizada: cálculo mental, cálculo em coluna, cálculo algorítmico e cálculo por estimativa. Para os autores, o cálculo mental é desenvolvido como a forma mais básica de cálculo e constitui a base para progredir para as outras formas de cálculo possíveis.

A seguir, são discutidas as principais características dos diferentes tipos de cálculo, perspectivando o modo de como o cálculo mental pode constituir o ponto de partida para a aprendizagem dos números e operações com significado.

2.3.1 Precisando o entendimento de cálculo mental

De acordo com Heuvel-Panhuizen e Buys (2008), o cálculo mental é um cálculo que ocorre de uma forma flexível e acessível, com o uso de todos os tipos de relações numéricas e propriedades aritméticas. Sowder (1989) complementa ao afirmar que o objetivo do cálculo mental é obter uma resposta exata para um problema a partir da realização de cálculo aritmético, sem o auxílio de dispositivos externos semelhantes aos utilizados em cálculos algorítmicos de papel e lápis. Ainda, Thompson (2010) aponta que se pode utilizar no cálculo mental registros escritos, quando necessário.

Para Heuvel-Panhuizen e Buys (2008), o aspecto chave dessa forma de aritmética é que o cálculo mental ocorre na cabeça (e não de cabeça). Em alguns casos, os resultados intermediários podem ser anotados para que a pessoa não se perca em seu

raciocínio. Não é necessário realizar o cálculo inteiro na cabeça e para isso é possível utilizar vários tipos de estratégias, tais como a linear, a de decomposição e as estratégias variadas.

Buys (2008, p. 122) descreve o cálculo mental como

Uma habilidade matemática elementar que não está estritamente relacionada a uma determinada área dos números ou a determinadas operações. Em primeiro lugar, é uma maneira de se aproximar de números e informações numéricas em que os números estão e lidar de uma maneira acessível e flexível (traduzido pela autora).

Para o autor, o propósito do cálculo mental é que, junto com as habilidades que ele desenvolve, é essencial para manter o controle de situações com números, ser capaz de olhá-la criticamente, e interpretá-la de forma apropriada. Para isso, é de grande importância compreender as propriedades das operações. Sendo assim, o cálculo mental é um cálculo hábil e flexível, baseado em relações numéricas e em características numéricas conhecidas por quem realiza, independentemente se a operação é de adição, subtração, multiplicação, divisão, ou uma combinação destas operações, tampouco o contexto no qual o que número se encontra. Brocardo (2011) complementa que à medida que novos números, operações e propriedades são ensinados, cabe ainda desenvolver o cálculo mental, como por exemplo, nas situações que incluem radiciação, potenciação ou o cálculo do fatorial de um número.

De acordo com Heirdsfield e Cooper (2004), o cálculo mental não está relacionado em apenas ter um conhecimento sobre os números e as operações, mas sim ter um amplo entendimento sobre os números, conhecer sobre fatos numéricos, refletir sobre as estratégias escolhidas em uma operação, conhecer o efeito da operação no número e ter fortes convicções de que estratégias pessoais podem contribuir para a escolha de estratégias mentais eficientes.

Sowder (1988) salienta que esse cálculo apresenta diversas características, sendo apontadas aqui algumas delas: o cálculo mental é flexível (há diferentes formas de calcular $83-26$, por exemplo); é flexível e pode ser adaptado de acordo com a situação (cada situação $83-79$, $83-51$, $83-7$, pode ser calculada mentalmente por diferentes formas); é ativo (pois permite que quem estiver calculando escolha um método, conscientemente ou não); é holístico (lida com os números em sua totalidade ao invés de dígitos individuais); frequentemente é construtivo (começa com o primeiro número, por exemplo, na soma $37 + 28$, o cálculo começa pelo 37); exige compreensão do todo,

sendo que a sua utilização também desenvolve essa compreensão; muitas vezes ele dá uma resposta inicial aproximada (pois os dígitos à esquerda são calculados em primeiro lugar).

Para Buys (2008), o cálculo mental apresenta as seguintes características: é realizado com os números e não com os dígitos; no cálculo mental o número mantém seu valor; usam-se as propriedades elementares das operações e das relações numéricas, tais como: propriedade comutativa ($16 + 47 = 47 + 16$; $28 \times 3 = 3 \times 28$); propriedade distributiva ($13 \times 6 = (10 \times 6) + (3 \times 6)$); relações inversas ($62 - 59 = 3$, porque $59 + 3 = 62$; $420 \div 7 = 60$, porque $7 \times 60 = 420$), e as combinações dessas propriedades; há um apoio de um *feeling* bem desenvolvido em relação aos números e um bom conhecimento de fatos numéricos elementares; e há a possibilidade de usar anotações intermediárias adequadas de acordo com a situação e do tipo de estratégia.

Um aspecto importante discutido sobre o cálculo mental é o tipo de estratégias que podem ser utilizadas. Essas estratégias, mesmo não sendo padronizadas, podem apresentar certas características que possibilitam compreender qual o raciocínio utilizado durante o desenvolvimento do cálculo. Beishuizen, Putten e Mulken (1997), Blöte, Klein e Beishuizen (2000), Heirdsfield e Cooper (2002; 2004), Buys (2008) e Thompson (2010) são autores que discutem essas estratégias.

Buys (2008) aponta três formas básicas de cálculo mental: linear, por decomposição e variada (*varying*)⁵, sendo que, sua aquisição depende de uma compreensão cada vez mais crescente de números e operações.

No cálculo linear, os números são vistos primeiramente como objetos de uma linha numérica onde as operações são realizações de movimentos ao longo da linha: para frente (+) ou para trás (-), para frente repetidamente (\times) ou para trás repetidamente (\div). Ou ainda, o primeiro número aparece como um todo no cálculo e o segundo número é decomposto e altera seu valor de acordo com a operação, como por exemplo: $325 - 249$; $325 - 200 = 125$; $125 - 49 = 76$, ou seja, $325 - 249 = 76$.

No cálculo por decomposição, os números são vistos em sua estrutura decimal onde as operações são realizadas por meio de decomposição e composição dos números. Por exemplo, ao subtrair 225 de 349, podemos calcular $300 - 200 = 100$; $40 - 20 = 20$; $9 - 5 = 4$; $100 + 20 + 5 = 124$.

⁵No capítulo a seguir, caracterizam-se essas estratégias para as operações aritméticas.

Na estratégia variada (*varying*), os números são vistos como objetos que podem ser estruturados em todas as formas baseadas nas propriedades aritméticas e as operações são utilizadas a partir de uma estrutura escolhida e adequada com base nas propriedades. Por exemplo, $325 - 249$; $325 - 200 = 125$; $125 - 50 = 75$; $75 + 1 = 76$.

Heirdsfield e Cooper (2002; 2004), a partir de seus estudos, também elencaram estratégias mentais para cálculos e especificam estratégias que se enquadram nos cálculos apontados por Buys (2008). Na estratégia linear, indicam a estratégia por contagem, em que a partir de um número se adiciona ou subtrai um a um. Esses autores, provavelmente devido ao fato de o cálculo por contagem ser um cálculo muito usado nas aprendizagens iniciais, não o integram na estratégia de cálculo linear em que inclui os “saltos” de 2, de 5 ou de 10 e não os saltos de um.

Para além das estratégias de contagem, por decomposição e linear, Heirdsfield e Cooper (2002; 2004) consideram um conjunto de estratégias que designam por holísticas, subdivididas em compensação e nivelamento. No cálculo por compensação, se adiciona ou subtrai um número nos valores iniciais de forma que fique mais fácil de operar. Por exemplo, em $28 + 35$: adiciona-se 2 em 30 e calcula $30 + 35 = 65$; logo após, subtrai 2, restando 63 como resultado final. Já no nivelamento, subtrai um valor de um dos números a serem operados e o soma no outro número de forma que fique mais fácil de serem operados: $28 + 35$; $30 + 33 = 63$; $52 - 24$; $58 - 30 = 28$. Essas estratégias também podem ser consideradas como especificações da estratégia variada de Buys (2008).

Thompson (2010) também especifica o uso da estratégia linear associada ao uso da linha numérica vazia, como mostra o exemplo a seguir:

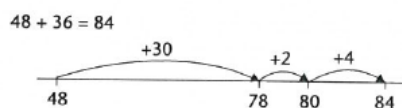


Figura 4 – Representação da estratégia linear

Fonte: Thompson (2010, p. 191)

Blote, Klein, e Beishuizen (2000) apresentam outra designação particular de estratégia linear, o “salto” curto: nesta estratégia, preenche-se a diferença em um ou dois passos, ao invés de subtrair o segundo número do primeiro, como por exemplo: $65 - 59$: $65 \wedge 60 \wedge 59 \rightarrow 5 + 1 = 6$ ou ainda $59 \wedge 60 \wedge 65 \rightarrow 1 + 5 = 6$ (Em “ \wedge ” lê-se “salto para”).

Por fim, as estratégias de cálculo mental destacadas na pesquisa de Beishuizen, Putten e Mulken (1997) para realizar cálculos de adição e de subtração com números até 100 são as estratégias de decomposição e as estratégias de contagem linear (ou método de salto, como foi denominado também pelos autores). Nas estratégias de decomposição as dezenas e as unidades são tratadas separadamente, por exemplo, $46 + 23$ é determinado por $40 + 20 = 60$ e $6 + 3 = 9$, conseqüentemente $60 + 9 = 69$. Na estratégia de contagem linear, as dezenas são contadas para cima ou para baixo a partir do primeiro número (sem decompor a primeira parcela), por exemplo, $46 + 23$ é determinado por $46 + 20 = 66$, $66 + 3 = 69$.

De forma geral, os autores aqui citados (BEISHUIZEN; PUTTEN; MULKEN, 1997; BLOTE; KLEIN; BEISHUIZEN, 2000; HEIRDSFIELD; COOPER, 2002; 2004; BUYS, 2008; THOMPSON, 2010) que discutem estratégias de cálculo mental apontam estratégias do tipo linear e por decomposição. Dentro dessas estratégias, vemos que Heirdsfield e Cooper (2002; 2004) e Thompson (2010) discutem algumas subdivisões dessas estratégias, detalhando-as mais quando comparados com os demais. Heirdsfield e Cooper (2002; 2004) apontam que essas estratégias podem começar tanto pela direita, como pela esquerda, sem perder suas características principais (contagem linear ou decomposição dos números). Já Thompson (2010), na estratégia “linha numérica vazia”, nota-se o registro da estratégia linear, no qual um dos números se mantém enquanto o outro é decomposto para a realização do cálculo. Ainda, a estratégia de decomposição apresenta raciocínios diferentes entre a decomposição dupla (decompõe todos os números) e a decomposição simples (decompõe apenas um dos números) e os registros podem ser feitos na horizontal ou com os números um sob o outro.

Desenvolvimento do cálculo mental

O desenvolvimento do cálculo mental é discutido por Brocardo (2011) ao salientar que, dentro de uma estratégia, há diferentes marcos, como ilustra a imagem a seguir:

45 + 36 $45 + 10 = 55$ $55 + 10 = 65$ $65 + 10 = 75$ $75 + 6 = 81$	45 + 36 $45 + 30 = 75$ $75 + 6 = 81$	45 + 36
---	---	--------------------

Figura 5 - Respostas de três crianças à questão “Tinha 45 euros e a minha tia deu-me 36 euros. Com quanto dinheiro fiquei?”

Fonte: Brocardo (2011, p. 8)

A análise realizada por Brocardo (2011) das respostas das crianças indica que as estratégias utilizadas nas duas primeiras respostas são estratégias lineares e, na terceira resposta, as operações não são evidenciadas, apenas suas relações. Focando nas duas primeiras respostas que indicam um procedimento linear, de acordo com a autora, a segunda resposta pode ser considerada como mais evoluída que a primeira, mesmo sendo a mesma estratégia. Isso porque, o segundo aluno adiciona 30 de uma só vez, enquanto que o primeiro aluno adiciona 10, mais 10, mais 10. Já a terceira resposta é considerada a mais evoluída dentre as três, pois dispensa anotações das operações, registrando-se apenas as ligações feitas para calcular mentalmente ($45 + 30 = 75$; $75 + 6 = 81$).

De acordo com Buys (2008), é possível desenvolver cada estratégia em diferentes níveis. Ao desenvolver essas estratégias de cálculo mental, podem ser introduzidas às formas básicas estratégias mais elaboradas como extensões delas mesmas. Isso não significa que as estratégias inferiores irão desaparecer. Ao invés disso, elas serão absorvidas numa forma mais elevada de modo que, gradualmente, amplie o repertório de estratégias. Com esse repertório mais amplo, será possível escolher qual estratégia utilizar de acordo com o tipo de tarefa e sua própria preferência.

O autor ainda complementa que as crianças não têm de chegar a uma solução de um problema utilizando os mesmos procedimentos de cálculo mental. É natural que no cálculo mental as crianças resolvam as situações de formas diferentes, pois há essa liberdade para seguir seus próprios procedimentos, com certos limites, ao utilizar suas estratégias favoritas. Essa liberdade na escolha da estratégia de cálculo mental também dará indícios do nível de desenvolvimento das crianças.

O desenvolvimento do cálculo mental, de acordo com Buys (2008), é um esboço de como se tornar hábil em cálculo mental. Esse esboço é um processo semelhante ao desenvolvimento da compreensão dos números e das operações com diferentes

domínios em que o desenvolvimento e expansão de estratégias são cada vez mais explorados e dominados: para as crianças se tornarem hábeis em cálculo mental, inicialmente exploram um largo campo de números, tais como contar a partir de uma sequência e utilizar a estratégia linear, métodos que fluem naturalmente a partir da exploração dos números. A partir do momento em que elas ficam suficientemente confiantes e suas compreensões sobre números e relações numéricas aumentam na mesma proporção, esse processo é estendido para as estratégias de decomposição, sendo que algumas crianças já as terão desenvolvido no estágio anterior. Após sentir confiança nessa estratégia e com a compreensão sobre as operações mais aprofundada, há uma maior expansão para as estratégias variadas.

Buys (2008) reforça que esse esboço não insinua que as crianças não utilizam estratégias mais sofisticadas, como a estratégia variada (estratégia apontada pelo próprio autor) mais cedo. Porém, num primeiro momento, o ensino do cálculo mental deve focar-se no desenvolvimento da estratégia linear e no modo de usar essa estratégia com mais eficiência e na redução do cálculo. Apenas quando as crianças dominarem suficientemente essa estratégia é que será dada mais ênfase na estratégia de decomposição e depois, nas estratégias variadas. Caso este processo de desenvolvimento não ocorra nesta ordem e sem uma profundidade suficiente, os alunos mais fracos correm o risco de não compreender as estratégias e misturar os diferentes tipos de abordagens.

No entanto, Brocardo (2011) realça que uma estratégia não refletirá um domínio do cálculo mental quando essa forma de registro for ensinada explicitamente pelo professor de forma algorítmica. Se isso ocorre, a estratégia pode ser interpretada como um cálculo sem sentido para o aluno, aprendido de forma mecânica e que será apenas aplicado em poucas situações.

De acordo com Thompson (2010) o cálculo mental também está relacionado a quatro componentes que, em conjunto, contribuem para o desenvolvimento de uma gama de estratégias. Esses componentes são fatos, habilidades, conhecimentos e atitudes. Os fatos estão relacionados ao conhecimento de relações numéricas específicas, o que inclui dobros e números que complementam outros números em 10, consciência de fatos de adição e de subtração até 20, e conhecimentos das tabuadas de multiplicação e dados de divisão. As habilidades são as técnicas de economia de trabalho, tais como decompor e compor números que facilitam o cálculo. Já os conhecimentos estão relacionados à compreensão das propriedades comutativa,

associativa e distributiva, entre outros aspectos sobre números, como adicionar e subtrair zero não geram efeitos, multiplicar ou dividir por um tampouco gera efeito, entre outros. E as atitudes são entendidas aqui como confiança em utilizar as demais componentes.

O autor também levanta a hipótese de que os indivíduos que são mais bem sucedidos em cálculo mental são suscetíveis de possuir todos esses quatro componentes enquanto que deficiências em qualquer um desses atributos são suscetíveis de ter um efeito adverso sobre o desenvolvimento dessa variedade de estratégias.

Desenvolver o cálculo mental é também um caminho natural por meio de métodos informais escritos para, posteriormente, aprender a utilizar métodos padronizados de cálculo, tal como o algoritmo. Somando a isso, Thompson (2010) aponta outros motivos para se ensinar cálculo mental: na vida real, a maioria dos cálculos é feito na cabeça e não em papel; o cálculo mental contribui com o desenvolvimento do pensamento criativo e independente; ele também promove o sentido número; contribui com o aprimoramento de habilidades de resolução de problemas; e ele é uma base para o desenvolvimento de habilidades de estimativa.

Ainda, como Thompson (2010) salientou que o cálculo mental contribui com o desenvolvimento do sentido de número, podemos complementar que o sentido de número também desenvolve o cálculo mental. Isso porque os números, as relações numéricas, as propriedades das operações, entre outras características de sentido de número, estão intrinsecamente relacionadas com as estratégias de cálculo mental. A estratégia de decomposição, por exemplo, para utilizá-la com eficiência, é preciso conhecer o sistema de numeração decimal para operar com os números.

Brocardo (2011) ainda salienta que, no ensino do cálculo mental, os contextos representam um aspecto importante e não devem ser relegados para segundo plano. Para a autora,

Os contextos são também importantes para ancorar um conjunto de factos numéricos conhecidos e que constituem importantes bases de suporte para o desenvolvimento do cálculo mental: $\frac{1}{4} \times 60$ é 15 por associação com o relógio; 2×24 é igual a 48 por associação com o número de horas que têm 2 dias, $1000 \div 10$ é igual a 100 por associação com as notas de 10 euros que preciso ter para obter 1000 euros (p. 10).

Sendo assim, o ensino de Matemática que visa desenvolver o cálculo mental deve buscar um processo que, inicialmente, dê importância aos contextos e

procedimentos, ligando-os e articulando-os ao sentido de número, às operações e as suas propriedades, e deve evoluir de forma articulada aos contextos e procedimentos para que o uso desses procedimentos se torne mais sofisticados de forma progressiva (BROCARD, 2011).

Brocardo (2011) ainda complementa que esse percurso deve ser concomitante com um trabalho sistemático e intencional a fim de desenvolver o cálculo mental. Isso exige que as tarefas previstas estejam focadas no desenvolvimento desse cálculo, bem como a garantia de que os alunos utilizem esse cálculo sempre que for adequado.

2.3.2 Cálculo em coluna e cálculo algorítmico

O cálculo em coluna é considerado por autores, como Thompson (2010) e Buys (2008) como uma estratégia de cálculo mental porque em ambos se opera sobre os números e não sobre dígitos. Contudo, o cálculo em coluna apresenta certos procedimentos que, mesmo envolvendo outras estratégias de cálculo mental, como a decomposição, podem ser considerados padronizados. Esse cálculo também é considerado como um passo para a aprendizagem do algoritmo.

O cálculo algorítmico é considerado por Buys (2008) como um procedimento de cálculo padronizado que pode ser interpretado como uma estratégia cristalizada e abstraída do cálculo mental. Ou seja, os algoritmos tradicionais de papel e lápis, normalmente ensinados em muitas escolas de forma mecânica e sem sentido podem ser considerados como uma estratégia mais elaborada cuja compreensão é facilitada pelo trabalho com cálculo mental.

O cálculo em coluna é caracterizado por Heuvel-Panhuizen e Buys (2008) pela utilização de procedimentos de cálculo padronizado que abrange certo número de passos fixos organizados verticalmente. Diferentemente dos algoritmos aprendidos nas escolas, mas semelhante ao cálculo mental, esse tipo de cálculo trabalha com valores numéricos e não apenas com dígitos, sendo que, para se calcular de forma eficiente, utiliza-se a estrutura decimal dos números.

Thompson (2010) apresenta duas formas de se calcular em coluna, no qual em uma estratégia os números são operados da esquerda para a direita, iniciando o cálculo pela maior ordem (dezena, centena, unidade de milhar, dependendo dos números envolvidos), e na outra estratégia, começa-se pelas unidades, da direita para a esquerda, como representa o quadro a seguir:

Quadro 5 – Exemplo do método expandido em coluna baseado em Thompson (2010) para o cálculo 47 +76

Da esquerda para a direita	Da direita para a esquerda
47	47
<u>+ 76</u>	<u>+ 76</u>
110	13
<u>13</u>	<u>110</u>
123	123

Fonte: Thompson (2010)

Para Buys (2008), a estratégia cujo procedimento é da esquerda para a direita se caracteriza, na verdade, como uma extensão do cálculo mental e uma forma de introduzir o cálculo em coluna (o que para ele, seria o procedimento da direita para a esquerda), mas ela não é um cálculo em coluna em si. Essa estratégia é utilizada para introduzir o cálculo em coluna tendo em vista que não é muito diferente do cálculo mental para as crianças. Esta forma de cálculo é uma óbvia extensão do cálculo mental para elas e, em particular, da estratégia de decomposição.

Treffers, Nootboom e Goeij (2008) salientam que cálculo em coluna não se caracteriza tanto por ser um método vertical de fazer o registro da operação, mas sim pela estratégia de decomposição, na qual são utilizados os valores posicionais dos números para calcular os resultados provisórios, e o cálculo é feito do número maior para o menor, da esquerda para a direita.

Contudo, para Heuvel-Panhuizen e Buys (2008) o cálculo em coluna possui uma notação fixa, sendo que essa mostra que, quando o cálculo em coluna é utilizado, há uma aplicação de um procedimento padronizado. Para eles, essa forma de cálculo está relacionada com o cálculo mental, porém, nesse cálculo, a estratégia de decomposição pode ser aplicada com maior flexibilidade (no cálculo em coluna, a decomposição é feita pelas unidades, dezenas, centenas... e no cálculo mental, a decomposição pode ser feita também em números que são mais convenientes para a operação). Por conta das semelhanças ao utilizar a estratégia de decomposição, nem sempre é fácil fazer uma distinção adequada entre essas duas formas de cálculo.

Treffers, Nootboom e Goeij (2008) salientam que o cálculo em coluna contribui com o desenvolvimento do cálculo mental e da estimativa tendo em vista à estrutura do cálculo que parte do maior para o menor durante a operação. Nesse sentido,

o cálculo em coluna liga-se naturalmente com as abordagens informais utilizadas por crianças. Junto do cálculo mental, baseado em estratégias lineares ou variadas, é uma das principais formas de trabalho que as crianças aplicam espontaneamente. Ensinar o cálculo em coluna pode ligar a esta tendência e "estilizar" a estratégia de decomposição em uma forma ordenada de escrita do cálculo (p. 149, traduzido pela autora).

Sobre o algoritmo, Heuvel-Panhuizen e Buys (2008) o descrevem como um procedimento padrão no qual se trabalha com dígitos em vez de valores numéricos. Para Treffers, Nooteboom e Goeij (2008), algoritmos são como "receitas" utilizadas em cálculo com dígitos. Ou seja, enquanto que no cálculo em coluna o número é decomposto para ser operado, como por exemplo, 753 é operado com 700, 50 e 3, no algoritmo, esse número, seria operado como 7 (centenas), 5 (dezenas) e 3 (unidades).

O algoritmo também é caracterizado por diversos autores como uma etapa final do cálculo em coluna. Autores como Treffers, Nooteboom e Goeij (2008) e Thompson (2010) discutem procedimentos de ensino dos algoritmos partindo do ensino do cálculo em coluna. Os aspectos que diferenciam o cálculo em coluna do algoritmo é que neste a operação é realizada com dígitos e, normalmente, o cálculo é realizado da direita para a esquerda.

Treffers, Nooteboom e Goeij (2008) ilustram com a figura seguinte o desenvolvimento do cálculo em coluna para o algoritmo:

(a)
$$\begin{array}{r} 463 \\ 302 + \\ \hline 700 \\ 140 \\ 5 \\ \hline 845 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{r} 463 \\ 302 + \\ \hline 5 \\ 140 \\ 700 \\ \hline 845 \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{r} 463 \\ 302 + \\ \hline 845 \end{array}$$

Figura 6 – Desenvolvimento do cálculo em coluna (da adição) para o algoritmo

Fonte: Treffers, Nooteboom e Goeij (2008, p. 147)

Os autores explicam que o cálculo realizado em (a) se caracteriza pelo cálculo em coluna, tendo como primeiro passo o uso de estratégia de decomposição, do maior número para o menor, da esquerda para a direita, no qual os resultados provisórios são somados. Em (b) ocorre uma transição que se caracteriza pela mudança de direção no cálculo dos resultados provisórios para determinar a resposta final, sendo que essa estratégia é utilizada do número menor para o maior, da direita, para a esquerda, e os resultados provisórios são somados por dígitos. Já em (c), a transição consiste na

abreviação dos resultados provisórios do cálculo em coluna, se tornando o algoritmo tradicional da adição. Sendo assim, é possível observar que essa transição ocorre a partir do cálculo com números ($5+140+700$) para cálculo com dígitos ($2+3=5$; $6+8=14$; escreve o 4 em baixo e 1 em cima para lembrar; $1+4+3=8$).

Esse procedimento contribui com a compreensão de termos e técnicas utilizados em cálculos algorítmicos que, quando trabalhados mecanicamente, não fazem sentido. Termos como “vai um” (adição e multiplicação), “empresta (subtração)”, “desce” e “abraça” (divisão) passam a fazer sentido quando se compreende os procedimentos que foram sintetizados ao realizar um cálculo algorítmico. E para isso, o cálculo em coluna, por não ser sintético, expõe esses procedimentos.

Para Thompson (2010), é importante estilizar gradualmente esta notação tida como informal para notação aritmeticamente correta e escrita clara, horizontal ou verticalmente. Isso contribui com uma maior compreensão dos procedimentos do algoritmo que são manifestados de forma resumida.

O autor também enfatiza que uma característica do algoritmo é que essa estratégia de cálculo ignora totalmente o que as crianças podem estar pensando durante a operação. Nas demais estratégias podem ser feitos registros e anotações que servem de apoio para o cálculo mental. Esses registros podem ser considerados como breves comentários sobre os seus pensamentos acontecendo em tempo real, o que não acontece no algoritmo.

Heirdsfield e Cooper (2002; 2004) referem casos de crianças que relatam sobre cálculos realizados a partir de imagem mental do algoritmo de caneta e papel. Esse cálculo é realizado usando o método ensinado em sala de aula, colocando os números um em baixo do outro, como no papel, e realizando a operação da direita para a esquerda. Mas esse cálculo sendo realizado de forma mental, não é considerado cálculo mental, mas sim um algoritmo, pois segue procedimentos padronizados. Nesse caso, o cálculo foi feita “de cabeça” e não “na cabeça”.

Thompson (2010) complementa que é no ensino do algoritmo que se introduz a expressão “vai um”, considerado por ele como um registro abaixo da linha. Contudo, essa expressão deveria ser modificada pelas palavras “vão 10” ou “vão 100”, e não “vai um”, tendo em vista a referência do valor real dos dígitos durante a realização deste cálculo.

$$\begin{array}{r} 366 \\ + 458 \\ \hline 824 \\ 11 \end{array}$$

Figura 7 – Exemplo do algoritmo da adição

Fonte: Thompson (2010, p. 192)

Outra forma de registro é escrever o 1 correspondente ao 10 ou 100 acima do número em operação. Essas formas de registro também variam de acordo com o tipo de operação, seja ela de adição, subtração, multiplicação ou divisão.

Treffers, Nooteboom e Goeij (2008) acrescentam que o uso de algoritmos faz sentido para operar com números inteiros relativamente grandes e com números decimais de múltiplos dígitos, pois esses números são difíceis de manipular mentalmente de uma forma rápida e simples. Mesmo assim, hoje em dia esse tipo de cálculo pode ser realizado com o uso de instrumentos tecnológicos como a calculadora, disponíveis em praticamente todas as situações em que é necessário operar com os números.

Sobre o ensino desses tipos de cálculo, por ser um conteúdo ensinado em muitas escolas como técnicas mecanizadas e sem sentido, pode ser erroneamente interpretado como se não estivessem relacionadas com o sentido de número. De acordo com Brocardo, Serrazina e Kraemer (2003, p. 13):

A procura e utilização de procedimentos algorítmicos é uma faceta importante da Matemática. Sem que isso signifique que o seu ensino se limite a focar os procedimentos e técnicas rotineiros, se queremos proporcionar aos alunos uma verdadeira experiência matemática não podemos ignorar os algoritmos.

Esses autores apontam dois aspectos importantes sobre os algoritmos e suas potencialidades, tais como sua generalidade e sua eficácia. A generalidade do algoritmo está relacionada ao fato de que ele é válido para calcular quaisquer números, ou seja, utilizamos as mesmas regras para calcular tanto $52 - 27$ como $52007978 - 354756$. Quanto à eficácia, desde que se apliquem bem as regras do algoritmo, ele sempre conduzirá a uma resposta certa.

Treffers, Nooteboom e Goeij (2008) também apontam alguns fatos relacionados com o cálculo em coluna e algoritmo: a introdução antecipada do algoritmo pode impedir o desenvolvimento de outros cálculos, tais como cálculo mental, em coluna e até mesmo a estimativa. Ou seja, a ênfase no algoritmo cria um bloqueio para o

desenvolvimento do sentido de número. Ainda, as crianças podem aprender o algoritmo das operações aritméticas relativamente rápido depois que deles se familiarizem com o cálculo em coluna.

Heuvel-Panhuizen e Buys (2008) complementam que o cálculo aritmético deve ser ensinado quando as habilidades básicas de cálculo mental forem suficientemente desenvolvidas. Isso porque o cálculo mental, o cálculo em coluna e o algoritmo estão intimamente ligados e a sua utilização é progressiva. A base é formada a partir de uma vasta exploração dos números, resultando em uma visão cada vez maior para os diferentes significados dos números, sua dimensão e sua estrutura decimal. O cálculo mental decorre diretamente a partir disto. Uma vez que as crianças se sentem totalmente confiantes com esta forma mais elementar de aritmética, cálculo em coluna e o algoritmo podem ser introduzidos como uma forma mais padronizada de cálculo mental.

Ainda, Treffers, Nootboom e Goeij (2008), partindo de seus estudos, apontam duas posições sobre o algoritmo sendo elas a favor e contra a abordagem do algoritmo: os adversários do algoritmo acreditam que a relevância social da habilidade de cálculo algorítmico é nula. Isso porque, para números e casos relativamente difíceis, é possível utilizar uma calculadora; e em casos menos complexos é possível utilizar o cálculo mental. Já os defensores do algoritmo pensam que este argumento prático é muito fraco. Seu argumento está no valor matemático do processo de execução do algoritmo que no valor que isso pode ter para o indivíduo, bem como seu valor potencial preparatório para o ensino secundário no qual há outros algoritmos a serem trabalhados.

Além do mais, o ensino dos algoritmos está presente nos currículos de Matemática e podem ser trabalhados de forma que não seja mecânico e sem sentido para os alunos. Possibilitar que os alunos desenvolvam estratégias de cálculo mental antes de aprender o cálculo em coluna e cálculo algorítmico, contribuirá também com o desenvolvimento do sentido de número dos alunos.

2.3.3 Cálculo por estimativa

No dia a dia há inúmeras situações em que não é necessário realizar um cálculo para se obter um valor exato. Por exemplo, para perceber se uma quantia de dinheiro é suficiente para comprar certa quantidade de um produto basta decidir sobre a ordem da grandeza dos números envolvidos. Isto é, as respostas não têm de ser determinadas com

precisão e o cálculo necessário para isto parece ser mais fácil do que o cálculo exato. Isso economiza uma grande quantidade de trabalho de cálculo (HEUVEL-PANHUIZEN, 2008).

Em concordância, Sowder (1988) salienta que cálculo por estimativa não tem como objetivo uma resposta exata. Ele é o processo de conversão de números exatos para números aproximados e a realização de cálculo mental com esses números a fim de obter uma resposta razoavelmente próxima do resultado de um cálculo exato.

Para Heuvel-Panhuizen e Buys (2008), a estimativa é uma forma de aritmética, na qual são “ignorados” os “detalhes de números”, arredondando-os para o número mais próximo, como um múltiplo de dez, cem, mil, e assim por diante.

O NCTM (1991, p. 45) salienta que a estimativa confronta uma dimensão da matemática no que diz respeito à exatidão. Nela, é possível usar termos como *pouco mais*, *pouco menos*, *cerca de*, *perto de*, *entre*, *um pouco mais*, *um pouco menos*.

A estimativa também está relacionada com o sentido de número (SOWDER, 1989; REYS, R., 1989; GREENO, 1989; NCTM, 1991; HEUVEL-PANHUIZEN, 2008). De acordo com Reys, R. (1989), o cálculo por estimativa é um dos aspectos incluídos no conceito de sentido de número. O NCTM (1991) complementa que a estimativa interage com o sentido de número e com o sentido espacial de forma que as crianças desenvolvem ideias a respeito de conceitos e procedimentos, de flexibilidade ao trabalhar com números e medidas e de razoabilidade dos resultados.

O ensino da estimativa é justificado por diferentes motivos. Por exemplo, Heuvel-Panhuizen (2008) defende que um programa que se concentra exclusivamente em cálculos exatos é totalmente inadequado tendo em vista que este tipo de cálculo nem sempre é necessário, nem sempre é possível e nem sempre é sensato. Também, na prática, há inúmeras situações das quais o resultado obtido por uma estimativa é suficiente para responder à questão em causa.

Para Reys (1989), as razões para se ensinar a estimar são que esta serve como veículo para desenvolvimento do sentido de número e seus conceitos, têm uma utilidade social e corrobora com a compreensão da natureza da matemática. Sowder (1989) salienta que uma razão para se ensinar estimativa é que ela nos ajuda a desenvolver estruturas conceituais do número, tais como a ordem de grandeza do número, o sistema de numeração decimal, a compensação, e assim por diante. Outra razão é que a estimativa é útil na vida cotidiana. Para Bana e Dolma (2006), ela fornece um ponto de referência para julgar a razoabilidade dos resultados. Já para o NCTM (1991),

compreender e ter destrezas no campo da estimativa reforçam as capacidades das crianças ao lidarem com situações do cotidiano que envolvem dados quantitativos. Sendo assim, se a aritmética for limitada a cálculos exatos, haverá lacunas cruciais nas habilidades e nos conhecimentos dos alunos (HEUVEL-PANHUIZEN, 2008).

Heuvel-Panhuizen (2008) aponta que o uso da estimativa contribui com a nossa percepção da realidade numérica de forma relativamente rápida. Em outras palavras, é possível utilizar números fáceis a partir de aproximações ao invés de realizar cálculos com números que requerem grande quantidade de trabalho. Ao realizar cálculos de forma global, as conexões entre os números tornam-se visíveis em um nível superior, amplifica a visão sobre a estrutura dos números e a compreensão das operações.

Brocardo (2011) adapta um esquema de Moor e Brink (2001) e apresenta um esquema que sintetiza possíveis tomadas de decisões a respeito do cálculo a ser utilizado (cálculo mental, algorítmico ou por estimativa) diante um problema:

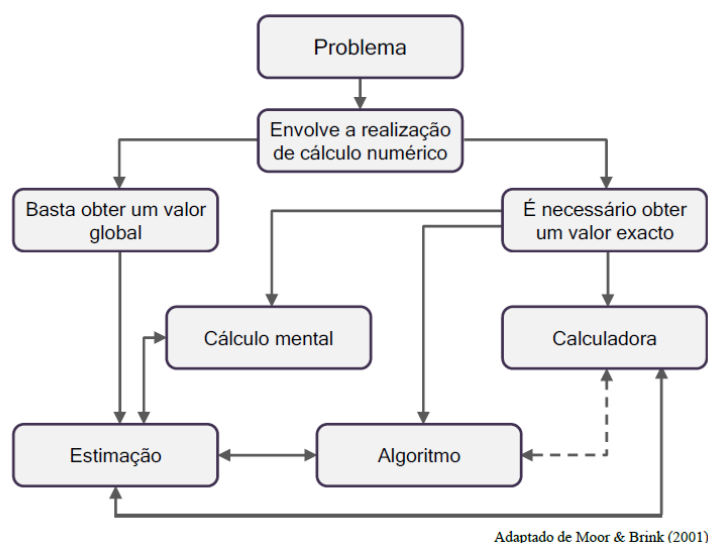


Figura 8 – Síntese de possíveis tomadas de decisões a respeito do cálculo a ser utilizado
 Fonte: Brocardo (2011, p. 5)

Diante de um problema que envolve a realização de um cálculo numérico, devemos verificar a necessidade em se obter um valor exato ou se um valor global é suficiente para atender a situação. Quando da necessidade em se obter um valor exato, podemos recorrer a um cálculo mental, a um cálculo algorítmico ou ainda ao uso da calculadora. Já em casos no qual um valor global satisfaz o problema, podemos recorrer a um cálculo por estimativa.

Ainda, pelo esquema, a estimativa pode estar relacionada com os demais tipos de cálculo: realizar uma estimativa antes de se calcular mentalmente, por algoritmo ou com calculadora, nos permite conjecturar ou prever a grandeza do resultado que será calculado. Ou ainda, realizar uma estimativa após se obter um valor exato por meio de outro cálculo, nos permite avaliar se o resultado obtido está correto ou se ele é coerente com o tipo de resposta almejada pelo problema (Brocardo, 2011).

Contudo, pesquisas como a de Bana e Dolma (2006) mostram que alunos são muito melhores em cálculos exatos quando comparados com o desempenho em cálculos por estimativa. Isso porque há uma quantidade de tempo maior gasto em treinos de cálculos que frequentemente seguem as regras, em vez de serem realizados de uma forma significativa.

Heuvel-Panhuizen (2008) salienta que esse tipo de resultado reflete o trabalho de estimativa que tem sido realizado no ensino de aritmética tendo em vista a longa tradição de cálculo exato.

Aprender a calcular era - e frequentemente ainda é - envolvido por um cuidado no desempenho das operações. Dentro desta última abordagem, os números referem-se sempre quantidades e valores precisos. Não é de se admirar que muitos alunos pensem que a estimativa (onde eles trabalham com números redondos) não é, na verdade, aritmética (HEUVEL-PANHUIZEN, 2008, p. 174).

De acordo com Sowder (1988), o cálculo por estimativa envolve duas habilidades: aproximação e cálculo mental. A habilidade de aproximar depende da capacidade de comparar números. Embora muitas vezes isso possa parecer um processo de arredondamento simples, arredondamento é uma habilidade puramente processual. Aprendemos nas escolas que arredondamos 'para baixo' se o final do número é menor ou igual a 4 e se ele termina de 5 a 9, arredondamos 'para cima'. Sendo assim, muitos alunos iriam arredondar 14 para 10 ao invés de 15 em um problema. A incapacidade de fazer julgamentos de tamanho relativo ao aproximar números é prejudicial para a realização do cálculo de estimativa.

Heuvel-Panhuizen e Buys (2008) também discutem sobre a forma de arredondar os números. Usualmente arredondamos os números para as dezenas, centenas, etc. mais próxima, a estimativa também pode ser calculada pelas aproximações de outros números que sejam considerados fáceis de operar, como múltiplos de vinte e cinco, por

exemplo. Com o uso de números assim, é possível encontrar facilmente uma "solução aproximada".

Heuvel-Panhuizen (2008) aponta que há diferentes tipos de estimativa, sendo que os dois mais importantes são o cálculo com números arredondados e o cálculo com valores estimados. O cálculo com números arredondados é um tipo de estimativa que tem a intenção de encontrar uma resposta global para um problema cujos números presentes na situação são exatos. Os números que são utilizados dependem do conhecimento que o solucionador tem sobre números e relações entre os números. Sendo assim, para realizar esse tipo de cálculo, os números da situação são modificados (arredondados) para dezenas, centenas, milhares, ou outros números fáceis como 25 ou múltiplos de 25, entre outros. Já o cálculo com valores estimados é utilizado em problemas nos quais os dados necessários são incompletos ou não estão disponíveis, como por exemplo: Quanto vão custar 3 pares de sapatos? Esta forma de estimar também requer conhecimentos sobre medidas para serem aplicados em problemas como quantos dias você já viveu ou quantas pessoas podem viver nesse prédio, por exemplo.

A estimativa deve ser abordada ao longo do trabalho de vários temas e não de forma isolada. Deve ser integrada em todos os temas em que é relevante, como por exemplo, "estimar antes de calcular" e "estimar antes de medir" (BANA; DOLMA, 2006). Não podendo ser tratada de forma isolada, Heuvel-Panhuizen e Buys (2008) salientam que a estimativa pode ser introduzida como um desenvolvimento paralelo, de forma a trabalhá-la em diferentes temas da Matemática.

2.4 Operações aritméticas e o sentido de número

O sentido de número tem como algumas de suas características a destreza e flexibilidade nas operações, assim como conhecer suas propriedades e conhecer o efeito relativo das operações com os números (GREENO, 1989; SCHOEN, 1989; NCTM 1991; MCINTOSH; REYS; REYS, 1992; REY; YANG, 1998).

De acordo com Ferreira (2008), o desenvolvimento do sentido do número e das operações também está relacionado com as habilidades de cálculo mental. Por sua vez, o algoritmo, quando trabalhado com sentido, pode ser considerado como um cálculo sintetizado e abstraído do cálculo mental (BUYS, 2008).

Partindo disso, serão discutidas formas de desenvolver os algoritmos das quatro operações aritméticas (adição, subtração, multiplicação e divisão) a partir do cálculo mental e do cálculo em coluna.

O desenvolvimento desses cálculos, como apontam diversos estudos como Mendes e Delgado (2008), Ferreira (2008), Rocha e Menino (2008), deve estar relacionado a contextos apropriados para que apresentem diferentes situações nas quais são utilizadas essas operações.

2.4.1 Adição

A adição está relacionada com situações que envolvem a ideia de juntar e de acrescentar (TREFFERS; BUYS, 2008).

Treffers, Nooteboom e Goeij (2008) apresentam um desenvolvimento da adição que parte do cálculo em coluna até o algoritmo, como foi mostrado na figura 4.

Em (a) e (b) é representado o cálculo em coluna, sendo que em “a) o cálculo inicia-se pelas centenas enquanto que em (b), pelas unidades. Em (c) está representado o algoritmo padrão da adição, considerado também pelos autores como uma abreviatura final de (b). No algoritmo o cálculo é realizado com dígitos e há apenas uma base na qual se encontra o resultado da operação. Para os autores, os métodos de cálculo utilizados em (a) e em (c) são procedimentos padrão, tendo em vista que são ensinados. O que os diferenciam um do outro é o grau de abstração e abreviatura representado no cálculo e que em (a) opera-se com números e em (c) opera-se com dígitos. Já a abordagem em (b) apresenta alguns elementos de (a) e de (c), podendo ser utilizado como um passo intermediário entre eles (TREFFERS; NOOTEBOOM; GOEIJ, 2008).

Para além das estratégias de cálculo em coluna e do algoritmo, Thompson (2010) apresenta em sua abordagem para o desenvolvimento da operação de adição a linha numérica vazia, a decomposição, métodos expandidos em colunas (como o cálculo em coluna), e métodos de coluna ou métodos padrão (como o algoritmo).

De acordo com o autor, na linha numérica vazia, apenas um dos dois números a serem adicionados é decomposto. Um número se mantém fixo (normalmente o maior) e adiciona-se o outro, como mostra a figura a seguir.

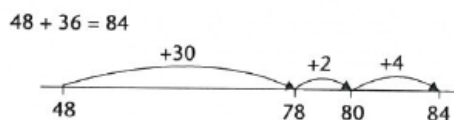


Figura 9 – Exemplo de cálculo na linha numérica em adição

Fonte: Thompson (2010, p. 191)

Na decomposição, espera-se que as crianças registrem suas estratégias mentais horizontalmente usando tanto a decomposição simples (decompondo apenas uma das parcelas) como a decomposição dupla (decompondo duas parcelas). Por exemplo:

$$47 + 76 = 47 + 70 + 6 = 123 \text{ (decomposição simples);}$$

$$47 + 76 = 40 + 70 + 7 + 6 = 110 + 13 = 123 \text{ (decomposição dupla).}$$

Posteriormente, o autor recomenda que o registro seja realizado organizando o cálculo com os números um sob o outro:

$$\begin{array}{r} 47 = 40 + 7 \\ + 76 \quad \underline{70 + 6} \\ \hline 110 + 13 = 123 \end{array}$$

Figura 10 – Exemplo de cálculo por decomposição

Fonte: Thompson (2010, p. 191)

Sobre o algoritmo padrão da adição, Thompson (2010) acrescenta que, por ser extremamente compacto, não fica realmente explícito o que está acontecendo no cálculo, escondendo etapas que envolvem comutatividade, associatividade e distributividade. Já nos demais métodos, são registradas as etapas sucessivas do cálculo, fazendo com que a criança mantenha o controle dos registros de seu raciocínio.

2.4.2 Subtração

A subtração é caracterizada por Thompson (2010) e Treffers e Buys (2008) com as ideias de tirar, determinar a diferença e complementar a adição.

O desenvolvimento do cálculo da subtração, de acordo com Treffers, Nooteboom e Goeij (2008), envolve habilidades básicas que pouco se diferem daquelas envolvidas na adição. Na subtração, as crianças também devem ser capazes de realizar cálculo mental utilizando a linha numérica com números redondos, baseado em seus conhecimentos de subtração elementar até dez.

Contudo, ao contrário do desenvolvimento do cálculo da adição (TREFFERS; NOOTEBOOM; GOEIJ, 2008), o algoritmo da subtração não pode ser derivado a partir de cálculo em coluna, como mostra a figura a seguir:

$$\begin{array}{r}
 \text{(a)} \quad 845 \\
 \underline{382} \quad - \\
 500 \\
 -40 \\
 \underline{\quad 3} \\
 463 \\
 \rightarrow
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \text{(b)} \quad \overset{7}{\cancel{8}}45 \\
 \underline{382} \quad - \\
 463
 \end{array}$$

Figura 11 – Desenvolvimento do cálculo da subtração
 Fonte: Treffers, Nooteboom e Goeij (2008 p. 163)

As operações realizadas em (a) e em (b) são essencialmente diferentes, sendo que em (a) ocorre o cálculo em coluna e em (b) o algoritmo da subtração. Na adição, a diferença entre o cálculo realizado com valores numéricos pode ser transposto para o cálculo realizado com dígitos, o que não ocorre na subtração. Isso porque, na subtração pode acontecer situações de déficits tal como $40 - 80 = -40$. Para que essa transição faça sentido, a melhor maneira de fazer é seguir a analogia do empréstimo, representando com um sinal de menos nos resultados parciais.

Ainda, em (a), mesmo sendo uma subtração, o cálculo não segue apenas um “sentido”, o de diminuir, mas envolve também a adição, dependendo dos números envolvidos na situação ($500 - 40$; $460 + 3$).

Treffers, Nooteboom e Goeij (2008) salientam que no início da aprendizagem do cálculo em coluna da subtração, são utilizadas diversas estratégias de decomposição pelas crianças com anotações dos resultados provisórios, como os seguintes exemplos:

$$845 - 382 \rightarrow 500 - 40 \rightarrow 460 + 3 = 463;$$

$$845 - 382 = 500 - 40 + 3 = 463;$$

$$845 - 382 = 500 - 37 = 463.$$

Para os autores, esse tipo de anotação revela a maneira informal que as crianças aplicam a essa estratégia ao utilizar os sinais de igualdade e da subtração.

O ensino do cálculo em coluna na subtração deve ser feita de forma gradual, estilizando aos poucos as notações informais até chegar a uma notação aritmética correta, tanto na vertical, como na horizontal.

Além do mais, a notação vertical do cálculo na subtração apresenta uma vantagem importante sobre a notação horizontal, tal como é representado na figura 12 com o cálculo de $7538 - 2842$:

$$\begin{array}{r} |5000|-200|-10| 6 | \\ |4696| \end{array}$$

Figura 12 – Exemplo de notação horizontal da subtração

Fonte: Treffers, Nooteboom e Goeij (2008, p. 155)

Essa notação representa $7000 - 2000 = 5000$, $500 - 800 = -300$, $30 - 40 = -10$ e $8 - 2 = 6$, resultando em **4696**.

Thompson (2010) também descreve um procedimento para utilizar no desenvolvimento da operação da subtração, usando a linha numérica vazia, a decomposição e o esquema expandido levando ao método em coluna.

Para utilizar a linha numérica vazia na subtração, o subtraendo é decomposto da forma com que fique mais fácil de operar com os números, como mostra a figura a seguir com o exemplo do cálculo de $74 - 27$.

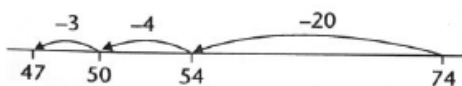


Figura 13 – Exemplo de cálculo na linha numérica em subtração (contar para trás). Exemplo: $74 - 27 = 47$

Fonte: Thompson (2010, p. 193)

O autor também apresenta outra forma de utilizar a linha numérica vazia a partir do método de contagem para cima, no qual envolve a adição do número. Nessa estratégia, adicionam-se valores ao subtraendo até chegar ao minuendo. A soma dos valores adicionados é o resultado da subtração. Esse método também pode ser representado em coluna e com diversas etapas. A figura 14 representa essa estratégia com a conta $326 - 178$.

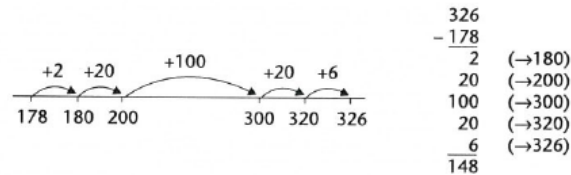


Figura 14 – Exemplo de cálculo na linha numérica em subtração (contar para frente) Exemplo: 326 - 178

Fonte: Thompson (2010, p. 194)

Nessa estratégia, conforme o aluno vai adquirindo maior confiança no cálculo mental, os valores adicionados serão maiores e mais fáceis de serem trabalhados, diminuindo então a quantidade de saltos na linha numérica, como mostra a figura a seguir.

Na estratégia de decomposição, a ênfase dada aqui é na decomposição tanto do minuendo como do subtraendo, como por exemplo: $74 - 27 = 70 + 4 - 20 - 7 = 60 + 14 - 20 - 7 = 40 + 7$.

Passando para o esquema expandido, Thompson (2010) salienta que esse procedimento deve ser inicialmente utilizado em situações que não requerem nenhuma "troca" ou "empréstimo" para depois utilizar situações que as envolvam.

Quadro 6 – Exemplos de cálculo por decomposição em subtração

Ex.: 563-241 (não há “troca”)	Ex.: 563-278 (envolve “troca”)
$\begin{array}{r} 500 + 60 + 3 \\ -200 + 40 + 1 \\ \hline 300 + 20 + 2 \end{array} \text{ leading to } \begin{array}{r} 563 \\ -241 \\ \hline 322 \end{array}$ <p>Figure 14.13</p>	$\begin{array}{r} 500 + 60 + 3 \\ -200 + 70 + 8 \\ \hline 200 + 80 + 5 \end{array} \text{ or } \begin{array}{r} 400 + 150 + 13 \\ -200 + 70 + 8 \\ \hline 200 + 80 + 5 \end{array} \text{ or } \begin{array}{r} 400 \quad 50 \quad 13 \\ 500 + 60 + 3 \\ -200 + 70 + 8 \\ \hline 200 + 80 + 5 \end{array} \text{ leading to } \begin{array}{r} 41513 \\ -278 \\ \hline 285 \end{array}$ <p>Figure 14.14</p>

Fonte: Adaptado de Thompson (2010, p. 196)

O autor ainda aponta que uma dificuldade relacionada à subtração quando envolve troca é fazer a decomposição não normalizada, tal como $73 = 60 + 13$ ou $563 = 400 + 150 + 13$. Ou seja, essa decomposição não é apenas feita em unidades, dezenas, centenas, mas sim em números que levará o aluno a compreender o “empresta” ou a “troca”.

2.4.3 Multiplicação

As ideias relacionadas à de multiplicação, de acordo com os estudos de Mendes e Delgado (2008), abordam o sentido aditivo, o que envolve repetição de medidas e quantidades, o sentido de proporcionalidade e de combinatória.

As autoras explicam que o sentido aditivo da multiplicação, para além da adição repetitiva no qual envolve o uso de modelos de cálculo linear, o uso da linha numérica e o uso de agrupamentos, também está relacionado à multiplicação com ideia de produto e de volume. A ideia de produto envolve a estrutura retangular como modelo dessa ideia, como por exemplo, determinar o número de frutas dispostas em caixas retangulares. Já a ideia de volume aborda o modelo de estrutura tridimensional, como por exemplo, determinar o número de frutas dispostas em caixas retangulares sendo que há mais de uma caixa.

Treffers, Nooteboom e Goeij (2008) e Thompson (2010) apresentam alguns conhecimentos e competências relacionadas com a multiplicação a serem desenvolvidos por meio do cálculo mental antes da aprendizagem do algoritmo, a saber:

- ter *insights* sobre a estrutura elementar da multiplicação por meio da adição repetida (saltos, grupos) e com o modelo retangular;
- conhecer os produtos em que um dos fatores é 10 ($10 \times \dots$ e $\dots \times 10$);
- conhecer as tabuadas de multiplicação e recordá-las rapidamente.
- contar em voz alta de 2 em 2, de 5 em 5, de 10 em 10 e contar em grupos repetidos do mesmo tamanho, como de 3 em 3, 20 em 20, entre outros;
- conhecer múltiplos derivados de 2, 5 e 10;
- recordar dobros de números de um a dez.

Thompson (2010) também apresenta outros conhecimentos mais aprofundados sobre a multiplicação que contribuem no momento de escolher uma estratégia de cálculo para multiplicar, tais como:

- Se 4 setes são 28, logo, 8 setes será o dobro (56);
- Pode-se encontrar 8 setes dobrando sete 3 vezes ($2 \times 7 = 14$; $2 \times 14 = 28$; $2 \times 28 = 56$);
- Se 6 seis são 36, então 7 seis são mais 1 seis (42);

- Multiplicar por 10 permite multiplicar facilmente por 20, 30, 40...; (muitos professores ensinam que multiplicar por 10 tem apenas que colocar um zero e isso pode levar a erros como se multiplicar 4,5 vezes 10 fosse 4,50).
- Encontrar 14×4 reduzindo 14 para sua metade e dobrando o 4, desde que se saiba que 7×8 é 56;
- Para multiplicar por 25, pode-se multiplicar por 100 e depois dividir por 4;
- Pode-se encontrar 14×12 pela multiplicação de 14 por 3, seguida por 2, e, em seguida, novamente por 2 porque $3 \times 2 \times 2$ é igual a 12 (168);
- Pode-se encontrar 19 setes, encontrando 20 setes e, em seguida, subtraindo um sete (133);
- Pode-se encontrar 15 trezes pela adição de 10 trezes mais 5 (metade de 10) trezes (195).

Para desenvolver a multiplicação, Treffers, Nootboom e Goeij (2008) salientam que as estratégias mais comuns, além das estratégias de decomposição, linear e estratégias variadas, são:

- Adição repetida: podendo ser o cálculo em coluna da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda. Muitas vezes o cálculo é escrito na vertical ou na horizontal ou ainda combinado com o dobro;
- Multiplicação com decomposição escrita e calculada de várias maneiras: por exemplo, 7×23 : 7×20 mais 7×3 ou 7×10 mais 7×10 mais 7×3 ou trabalhando na direção oposta.

Esses autores salientam que a abordagem do "vezes" é uma abreviatura do método "mais". Os alunos que multiplicam por meio da adição repetida irá gradualmente perceber que tanto o cálculo como sua notação podem ser abreviados. A tabuada também será utilizada por alguns alunos que já a conhecerem a partir de discussões e acompanhamentos dos professores e dos demais alunos.

O desenvolvimento do cálculo da multiplicação apontado por Treffers, Nootboom e Goeij (2008), assim como na adição, parte do cálculo em coluna até o algoritmo, como mostra a figura a seguir:

$$\begin{array}{r}
 \text{(a)} \quad 46 \\
 \underline{7 \times} \\
 280 \\
 \underline{42} \\
 322
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \text{(b)} \quad 46 \\
 \underline{7 \times} \\
 42 \\
 \underline{280} \quad \downarrow \\
 322
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \text{(c)} \quad 46 \\
 \underline{7 \times} \\
 322
 \end{array}$$

Figura 15 – Desenvolvimento do cálculo da multiplicação

Fonte: Treffers, Nooteboom e Goeij (2008, p. 148)

Assim como na adição, em (a) e em (b) os cálculos são em coluna, sendo que no primeiro, o cálculo se inicia da esquerda para a direita enquanto que no segundo, da direita para a esquerda. Para o cálculo em coluna da multiplicação deve estar claro que o 46 é compreendido como $40 + 6$. Então calculamos 7×40 e 7×6 , somando então os resultados parciais. Já em (c) aplica-se o algoritmo.

Na abordagem sugerida por Thompson (2010), para além do cálculo em coluna e do algoritmo da multiplicação, denominados pelo autor por multiplicação curta expandida e multiplicação curta respectivamente, a multiplicação se inicia pela multiplicação mental utilizando a decomposição a que ele acrescenta o uso do método ‘grade’.

O método ‘grade’ se caracteriza pela estratégia de decomposição, também com o uso da propriedade distributiva, porém, com um registro de cálculo que se assemelham a grades. Nessa notação, a grade é apenas uma estrutura construída em torno dos números no cálculo sem nenhum significado contextual. Por exemplo, na figura 16, há a representação de três formas diferentes de se utilizar o método grade na multiplicação:

×	7		×	30	8		7	30	8	266
30	210		7	210	56		210	56	266	
8	56		7	210	56		210	56	266	
	266			210	56			210	56	266

Figura 16 – Exemplo do método grade na conta 38×7

Fonte: Adaptado de Thompson (2010)

De acordo com o autor, na multiplicação mental há o uso da propriedade da distributiva (com a adição) ao decompor os fatores, como por exemplo, $14 \times 3 = (10 + 4) \times 3 = (10 \times 3) + (4 \times 3) = 30 + 12 = 42$. Para o primeiro exemplo, o autor aconselha colocar o número com mais dígitos na coluna da esquerda para facilitar a soma dos produtos parciais e preparar as crianças para o algoritmo da multiplicação. O autor também salienta que utilizar esse método como se fosse calcular a área, apresentaria

contexto significativo. Utilizar um papel quadriculado, o cálculo envolveria encontrar o número de quadrados em um retângulo 38 por 7. Algumas formas de dividir o 38 seria $10 + 10 + 10 + 8$, $20 + 10 + 8$ ou $8 + 30$. Isso permite que as crianças controlem o tamanho dos retângulos internos menores enquanto trabalham o que contribui com o desenvolvimento da confiança ao realizar esse tipo de manipulação para o cálculo.

2.4.4 Divisão

Rocha e Menino (2008) classificam os problemas de divisão em contextos de partilha e de medida. Já para Thompson (2010), a divisão compreende as ideias também de partilha e de agrupamento. A divisão em contexto de partilha remete a ideia de repartir em partes iguais. O contexto de agrupamento se refere à ideia de grupos, como se os valores envolvidos na operação fossem representados em filas, pacotes, caixas ou situações de objetos agrupados. No contexto de medida, o divisor apresenta a ideia da medida (número de elementos) de cada subconjunto e o quociente o número de subconjuntos formados.

Ao desenvolver os conhecimentos relacionados à divisão, as crianças se tornam conscientes de diversos aspectos elencados por Thompson (2010), a saber: uma forma de encontrar $36 \div 4$ (um quarto de 36), por exemplo, é reduzir para metade e, em seguida, reduzir para metade novamente; se $12 \div 3$ é igual a 4, então $12 \div 4$ é igual a 3; se $12 \div 3$ é 4, então $24 \div 3$ é o dobro e $6 \div 3$ é a metade; se $12 \div 3$ é 4, então $24 \div 6$ e $48 \div 12$ também são; $96 \div 4$ é o mesmo que $16 \div 4$ mais $80 \div 4$; saber como dividir por 10 permite às crianças dividir facilmente por outras dezenas, como 20, 30, 40.

Treffers, Nooteboom e Goeij (2008), ao discutirem sobre as habilidades básicas que as crianças deverão ter adquirido para aprenderem o cálculo em coluna da divisão são:

- Compreender e ser capaz de aplicar a regra de zero em problemas de multiplicação e divisão;
- Ser capaz de dobrar e reduzir pela metade os números;
- Saber a tabuada;
- Ser capaz de aplicar o cálculo em coluna da multiplicação para estimar o maior número possível de “divisões”.

Para esses autores, o processo de desenvolvimento da divisão envolve quatro formas de operar: multiplicação, subtração sucessiva, divisão longa (cálculo em coluna) e a divisão curta (algoritmo).

O cálculo da divisão por meio da multiplicação se caracteriza por uma combinação da soma de produtos parciais resultando no dividendo. Por exemplo, se se pretende dividir 420 por 12, é possível multiplicar o divisor por números fáceis de se trabalhar até que a soma dos produtos resultem em 420, tais como $10 \times 12 = 120$; $20 \times 12 = 240$; $30 \times 12 = 360$; $5 \times 12 = 60$. Assim, pode-se utilizar a situações $30 \times 12 = 360$ e $5 \times 12 = 60$, somando 30 e 5 e resultando em 35.

Na subtração repetida, é utilizada a tabuada de multiplicação (o que ajuda a fazer estimativa dos produtos parciais) sendo que os resultados parciais são subtraídos sequencialmente a partir do total. Por exemplo: $420 \div 12$:

The image shows two handwritten mathematical representations for the division $420 \div 12 = 35$. On the left, a vertical subtraction process is shown: 420 minus 240 (labeled $20 \times$), then 180 minus 120 (labeled $10 \times$), then 60 minus 60 (labeled $5 \times$), resulting in 0. A bracket on the right side of these steps indicates the total multiplier is $35 \times$. On the right, a multiplication table for 12 is shown, with rows for $1 \times 12 = 12$, $2 \times 12 = 24$, $4 \times 12 = 48$, $8 \times 12 = 96$, $10 \times 12 = 120$, and $5 \times 12 = 60$.

Figura 17 – Exemplo de divisão por subtração repetida. O sinal "arco" indica que a resposta pode ser verificada por meio da multiplicação

Fonte: Treffers, Nooteboom e Goeij (2008, p. 160)

Já a divisão longa (cálculo em coluna) pode ser vista como um precursor perspicaz para divisão curta (algoritmo). O processo de divisão é reduzido e não há a ajuda da tabuada para fazer estimativa. Exemplo: $420 \div 12$:

The image shows a handwritten long division for $420 \div 12 = 35$. The dividend 420 is written above a horizontal line. The divisor 12 is written to the left of the line. The quotient 30 is written above the line, and 360 is written below it, with a horizontal line under 360. The remainder 60 is written below 360. The quotient 5 is written below the line, and 60 is written below it, with a horizontal line under 60. The final remainder 0 is written below 60. A bracket on the right side of the quotient 30 and 5 indicates the total result is 35.

Figura 18 – Exemplo de divisão longa. O sinal "arco" indica que a resposta pode ser verificada por meio da multiplicação

Fonte: Treffers, Nooteboom e Goeij (2008, p. 160)

Um aspecto apontado pelos autores é que na divisão longa, as crianças aprendem a estimar a resposta de forma global, sendo que isso é uma habilidade de ordem mais elevada quando comparada com uma simples aprendizagem de um procedimento de cálculo algorítmico.

Por fim, na divisão curta (algoritmo), a estimativa não tem uma função tão importante. No exemplo $6394 \div 12$, o processo começa com divisão de $63 \div 12 = 5$; o 5 é escrito no canto superior direito. Por exemplo:

$$\begin{array}{r} 12 \overline{) 6394} \setminus 5 \dots \\ \underline{60} \\ 39 \\ \underline{36} \\ 30 \\ \underline{30} \\ 0 \end{array}$$

Figura 19 – Exemplo de Divisão curta⁶
Fonte: Treffers, Nooteboom e Goeij (2008, p. 161)

Thompson (2010) também apresenta uma série de estratégias de divisão a ser desenvolvida de forma gradual, a saber: divisão mental, método expandido e divisão longa.

A divisão mental é um procedimento no qual se utiliza a decomposição e mantém o divisor. Por exemplo: $87 \div 3 = (60 + 27) \div 3 = (60 \div 3) + (27 \div 3) = 20 + 9 = 29$. Contudo, esse procedimento apresenta duas dificuldades: a primeira é que a distributiva é limitada: nas demais operações pode-se decompor todos os números envolvidos. Na divisão, apenas o dividendo é decomposto: $84 \div 7 = (70 \div 7) + (14 \div 7) \neq (84 \div 4) + (84 \div 3)$. Esta situação deve ser muito explorada no ensino da divisão para não levar o aluno ao erro. Já a segunda dificuldade está relacionada ao tipo de decomposição realizada no número. As decomposições não devem ser normalizadas (em dezenas e unidades), tais como $73 = 60 + 13$. A melhor forma de realizar essa divisão é decompor o dividendo em valores divisíveis pelo divisor. Dependendo da decomposição, o procedimento pode ser um pouco "confuso", como por exemplo: $87 \div 3 = (50 + 37) \div 3 = (50 \div 3) + (37 \div 3) = 16\frac{2}{3} + 12\frac{1}{3} = 29$.

O método expandido e a divisão longa apresentam as mesmas características da subtração repetida e do cálculo em coluna respectivamente, porém, Thompson (2010) os discutem com uma designação diferente.

⁶ No Brasil, o algoritmo da divisão é registro de forma diferente, porém os procedimentos do cálculo são os mesmos.

Em suma, a aprendizagem das quatro operações aritméticas está intrinsecamente relacionada com o desenvolvimento do cálculo mental, do cálculo em coluna e do algoritmo, independentemente se é uma adição, subtração, multiplicação ou divisão. Cada operação apresenta ideias e propriedades diferentes, e ao mesmo tempo relacionadas, e diversas formas de se trabalhar.

Thompson (2010) apresentou outras denominações para algumas estratégias de cálculo que estavam relacionadas pelas particularidades de cada operação. Contudo, se analisarmos as características das estratégias e dos cálculos discutidos principalmente por Heuvel-Panhuizen e Buys (2008), mesmo com outras designações, as estratégias para se desenvolver as operações se resumem em estratégia linear, por decomposição e estratégias variadas.

Thompson (2010) e Treffers, Nooteboom e Goeij (2008) sugerem um meio de se ensinar as quatro operações aritméticas de forma que esteja em concomitância com o desenvolvimento do sentido do número e do cálculo mental, salientando que os professores não devem deixar de incentivar os alunos a desenvolver também suas próprias estratégias de cálculo.

2.5 O papel do professor e das tarefas matemáticas para desenvolver o sentido de número e o cálculo mental na aula de matemática

Além da relevância em se discutir o sentido de número, é importante se discutir também como desenvolvê-lo nas aulas de Matemática, sendo que isso é intrinsecamente relacionado com o cálculo mental. De acordo com Brocardo et al. (2009, p. 18),

O desenvolvimento do sentido de número surge muito associado à aquisição de destrezas de cálculo mental, porque estas destrezas requerem um bom conhecimento e compreensão dos números e das relações entre eles.

Desta forma, é importante discutir aspectos relevantes numa aula de matemática que contribuem com o desenvolvimento do sentido de número e do cálculo mental.

De acordo com Brocardo et al. (2009), um desses aspectos está relacionado ao papel do professor. Os autores salientam sobre desafios do professor voltado para mudanças de prática de ensino. Essa mudança se refere a uma concepção de ensino no qual o professor “dá a matéria” e passa a assumir um papel de facilitador da

aprendizagem dos alunos, envolvendo ouvir as explicações dos alunos e interrogar o porquê resolvem determinadas tarefas de uma forma e não de outra, permitindo que eles expliquem sua forma de pensar aos seus colegas. Além de contribuir com o desenvolvimento de competências como comunicação e argumentação, essa mudança de papel faz com o que o professor perceba *o que e como* seu aluno pensa para fazê-lo progredir na aprendizagem.

Para dar voz aos alunos, a prática do professor deve ser de forma a facilitar o diálogo. Globalmente, não são adequadas perguntas formuladas pelos professores que tendem a requerer respostas “sim” ou “não”, nas quais as entonações da voz dos próprios professores, muitas vezes, já indicam as respostas. Uma forma que contribui com a mudança do papel do professor, segundo Brocardo et al. (2009), é ele solicitar que os alunos justifiquem ou ainda expliquem suas respostas, pois assim, irá perceber as dificuldades e os raciocínios dos alunos. O professor pode também solicitar que os alunos reexpliquem as respostas ou ainda que outro aluno explique o que compreendeu do que seu colega explicou. Isso faz com que os alunos atribuam importância para o que seus colegas dizem, tendo em vista que não é apenas o que é dito pelo professor que é importante.

Os autores também apresentam uma variedade de questões que contribuem com essa troca de ideias entre os alunos, a saber: *“Alguém gostava de fazer uma pergunta? Quem concorda com o que disse o vosso colega? Quem discorda? Por quê?”* (BROCARDÓ et al., 2009, p. 9).

Pensando em normas sociais que buscam o desenvolvimento do sentido de número, Mendes (2012) salienta que os alunos devem ser colocados perante tarefas desafiadoras, serem questionados sobre suas estratégias, explicando-as, justificando-as e argumentando para seus colegas. Isso também contribui com a compreensão de ideias e com discussões sobre alternativas e processos de soluções.

Mendes (2012), referindo as ideias de Smith, Hughes, Engle e Stein, (2009) e Stein, Engle, Smith e Hughes (2008), apresenta cinco práticas para o professor que pretende promover a aprendizagem dos alunos e que portanto são importantes para desenvolver o sentido de número:

(1) Antecipar respostas dos alunos em tarefas cognitivamente exigentes: isso pressupõe que o professor se coloque no lugar dos alunos para construir expectativas em como os alunos irão resolver a tarefa; como serão suas estratégias, tanto as corretas como as incorretas e em diferentes níveis; como serão suas representações e como isso

se relaciona com os conceitos matemáticos, com os procedimentos e com as práticas associadas à aprendizagem dos alunos. Essa prática auxilia o professor a reconhecer e a compreender os aspectos que ele precisa prestar maior atenção, quando estiver com as resoluções concretas dos alunos durante as aulas de Matemática.

(2) Monitorar as respostas dos alunos durante a fase de resolução das tarefas: essa prática tem por finalidade identificar o potencial de aprendizagem matemática em determinadas estratégias e representações utilizadas pelos alunos para, posteriormente, serem compartilhadas com os demais no momento de discussão. Nesse momento, a antecipação realizada na etapa anterior serve como base para o professor questionar os alunos sobre sua resolução, ajudando-os a construírem argumentos sobre seu modo de pensar e a compreender aspectos matemáticos que estão em causa.

(3) Selecionar determinados alunos (ou grupo de alunos) para apresentar as suas resoluções durante o momento de discussão e sumarização: a partir do monitoramento, o professor seleciona alunos ou grupos de alunos para partilhar suas resoluções com os demais tendo em conta um aspecto particular, uma ideia, uma estratégia ou uma representação importante para realçar. Assim, o que os alunos apresentam e o conteúdo matemático envolvido é controlado pelo professor.

(4) Sequenciar de forma intencional as apresentações das respostas dos alunos: esta sequência deve ser organizada de forma a atingir os objetivos do professor para a discussão, a partir de diferentes critérios, como por exemplo: utilizar um critério de frequência, iniciando as apresentações pelas estratégias mais utilizadas pelos alunos e depois as menos utilizadas; utilizar os níveis de dificuldade das estratégias, iniciando pelas mais fáceis e depois as mais difíceis; ou ainda utilizar um critério de acerto/erro, iniciando a apresentação por uma resolução incorreta a fim de esclarecer os equívocos e progredir para estratégias mais eficazes.

(5) Ajudar a turma a estabelecer conexões matemáticas entre as diferentes resoluções dos alunos e as ideias matemáticas: essa prática permite o professor ajudar os alunos a perceberem que a mesma ideia matemática pode estar relacionada a duas estratégias diferentes, que essas estratégias podem estar relacionadas, a perceberem padrões matemáticos e a conscientizar sobre as consequências do uso de determinadas estratégias em certos problemas.

Yang (2003) elabora um esquema a fim de ajudar o professor a integrar o desenvolvimento do sentido de número em suas atividades matemáticas:

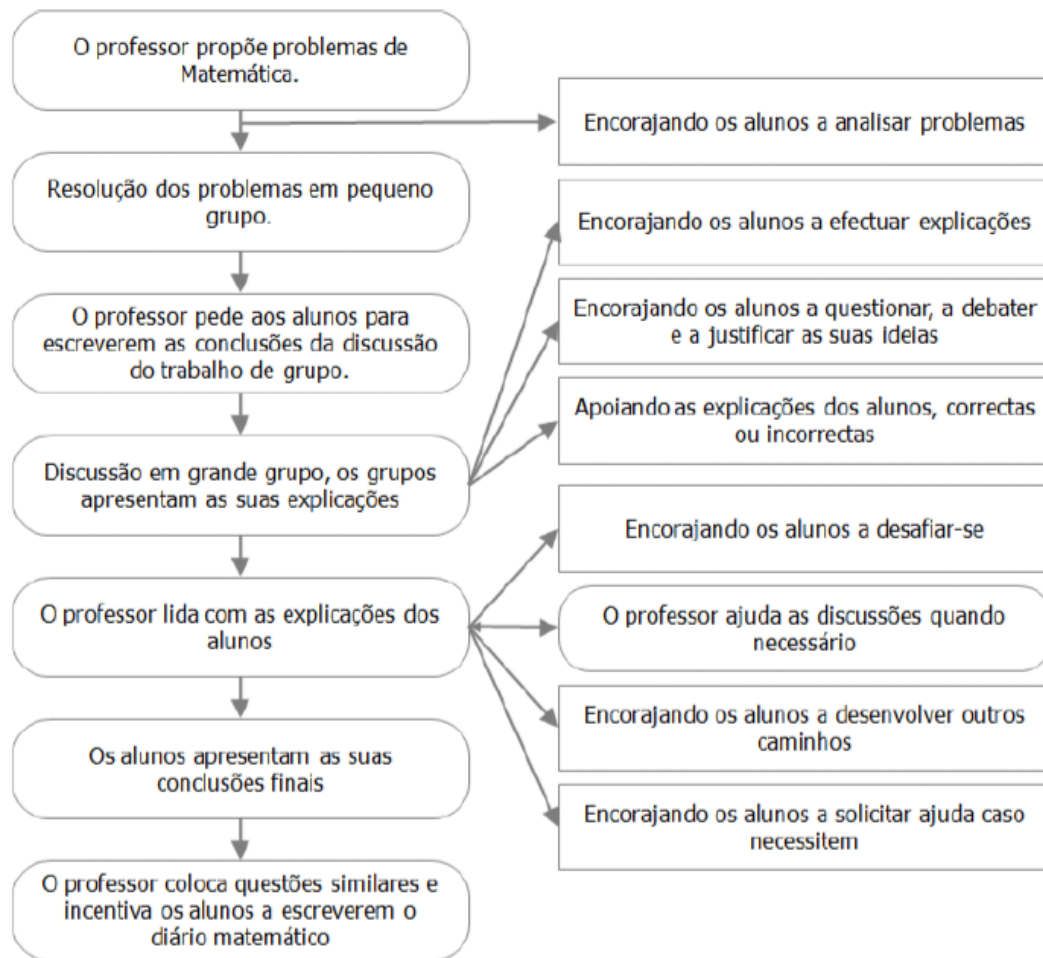


Figura 20 – Modelo de ensino

Fonte: Yang (2003, p. 121), traduzido por Mendes (2012, p. 36)

O esquema elaborado por Yang (2003) está dividido em dois aspectos: a primeira “coluna” apresenta ações do professor e dos alunos em uma aula de matemática; e a segunda “coluna” são ações intrínsecas do professor para um tipo de aula cuja finalidade é desenvolver o sentido de número. Sendo assim, a aula parte da proposta de problema de matemática, o que implica uma tarefa desafiadora. Em grupos pequenos, os alunos resolvem os problemas e escrevem suas conclusões. Em grupos grandes, os alunos apresentam suas explicações, o professor lida com essas explicações, os alunos apresentam suas conclusões finais e o professor os questiona e os incentiva a escrever um diário matemático. Concomitante a isso, o professor encoraja os alunos a analisar o problema, a efetuar explicações, questionamentos, justificativas, a se desafiarem, a desenvolverem outros caminhos para a resolução, entre outros. Ou seja, Yang (2003) buscou criar um ambiente com atividades que incentivavam uma discussão

significativa, de exploração, elaboração de pensamento e raciocínio a fim de desenvolver o sentido numérico.

Contudo, de acordo com os estudos de Mendes (2012), para poder orientar as experiências dos seus alunos é fundamental que o professor tenha desenvolvido seu próprio sentido de número e que tenha uma sólida compreensão sobre o que é e como ele se desenvolve.

Outro aspecto a ser refletido quando se pretende desenvolver o sentido de número são as tarefas a serem trabalhadas nas aulas de matemática. De acordo com Mendes (2012, p. 42) “a ideia de tarefa surge associada à sua construção e seleção, de acordo com a intencionalidade visada”. Esta intencionalidade envolve atividades de investigação, inquirição, comunicação, uso de estratégias diversificadas, uso de diferentes tipos de cálculo (cálculo mental, algorítmico, ou por estimativa), entre outras.

Um aspecto relacionado às tarefas salientado por Brocardo et al. (2009) é quanto à natureza das tarefas matemáticas propostas aos alunos, sendo que elas devem ser de naturezas diversificadas. Ponte (2005) discute sobre diferentes tarefas, como por exemplo, problema, exercício, investigação e exploração, sendo que elas se caracterizam pelas suas estruturas e por diferentes níveis de desafio. O exercício se caracteriza por uma tarefa fechada, ou seja, está claro onde se pretende chegar, e com pouco desafio; o problema também é uma tarefa fechada, porém, com desafio elevado. Já a investigação e a exploração são tarefas abertas, pois onde se pretende chegar é indeterminado, mas a investigação possui um alto nível de desafio, enquanto que a exploração apresenta um nível baixo de desafio.

Porém, segundo Brocardo et al. (2009), ao pensar na natureza das tarefas, o objetivo maior deve estar vinculado ao de desenvolver o sentido de número. É preciso que esses objetivos sejam trabalhados de maneira explícita, com desafios e discussões sobre as resoluções das tarefas que promovam o cálculo mental.

Outro aspecto relacionado às tarefas salientado por Brocardo et al. (2009) e Mendes (2012) para contribuir com o desenvolvimento do sentido de número são os contextos das tarefas matemáticas apresentadas aos alunos. De acordo com os estudos de Mendes (2012), esses contextos devem ser adequados, relacionados com situações do dia-a-dia dos alunos e que envolvam números dos contextos reais. Brocardo et al. (2009) acrescentam que quando os contextos são conhecidos pelos alunos, o processo de aprendizagem é facilitado, os alunos demonstram maior entusiasmo na tarefa, discutem o contexto e apresentam estratégias para resolverem a questão.

Contudo, não basta que os contextos sejam apenas conhecidos ou que signifiquem algo para aluno. O contexto precisa atribuir um significado para o conteúdo em específico. Por exemplo, utilizar um contexto de partilha de uma barra de chocolate para dez crianças favorece mais o ensino de frações do que de números decimais, mesmo que os possíveis valores envolvidos possam ser representados em forma de fração ou número decimal ($\frac{1}{10} = 0,10 = 0,1$). Isso porque, usualmente, o contexto de partilha é relacionado à números fracionados, no qual o objeto é dividido. Para o ensino de números decimais, um contexto mais apropriado seria, por exemplo, medidas de comprimento, ou de volume, nos quais a unidade é dividida em dez partes iguais. É importante que os contextos favoreçam a aprendizagem dos conteúdos matemáticos a serem trabalhados, sendo então um ponto de partida e a fonte de aprendizagem da matemática (BROCARD et al., 2009, p. 10).

Em suma, há duas reflexões imprescindíveis quando o objetivo é desenvolver o sentido de número, e consequentemente, o cálculo mental nas aulas de Matemática e elas estão voltadas para o professor e as tarefas matemáticas. O papel do professor, para desenvolver e compreender o sentido de número, passa a dialogar mais com seus alunos, interrogando sobre suas estratégias de resolução das tarefas, e permitindo que os alunos exponham suas estratégias, as expliquem, argumentem e justifiquem para os demais colegas. E as tarefas, consideradas como um meio para a realização da atividade matemática, devem ser de diferentes naturezas e apresentarem diversos contextos significativos, voltados tanto para o cotidiano dos alunos como sendo pertinentes para os conteúdos matemáticos trabalhados em sala de aula.

2.6 Pesquisas sobre sentido de número

O sentido de número é um objeto de estudo que ganhou espaço em pesquisas realizadas em diversos países, focadas num ensino em oposição ao ensino tradicional, centrado no treino de algoritmos. Nunes, Carraher e Schliemann (1988), em seu livro intitulado “Na vida dez, na escola zero” discutem sobre o uso da Matemática na vida diária de jovens e de trabalhadores e mostram situações de crianças em que o conhecimento matemático formal não foi desenvolvido de forma adequada, porém, são capazes de colocar em prática conhecimentos matemáticos construídos pela experiência. Semelhantemente, McIntosh, Reys e Reys (1992) apresentam situações em que crianças

realizam cálculos mentais corretamente e salientam que não compreendem os algoritmos ensinados pela professora; e adultos que, ao calcular com algoritmos, não percebem as relações numéricas presentes na situação na qual se encontram. Essas situações evidenciaram a necessidade de investigar o sentido de número e outras pesquisas mostram como isso vem acontecendo.

Dadas as inúmeras investigações desenvolvidas acerca do tema, elencamos pesquisas que contribuíram para o desenvolvimento deste estudo, em particular no que diz respeito a elaboração de instrumentos e análise dos dados, bem como pesquisas que contribuem com reflexões sobre o sentido de número.

O propósito das pesquisas voltadas para o sentido de número tem sido variado. Algumas estão centradas no diagnóstico do sentido de número dos alunos de forma mais abrangente (YANG; LI, 2008; FACUN; NOOL, 2012) ou, por vezes, de forma mais específica, testando modelos de componentes do sentido de número (BOOTH; SIEGLER, 2008; SPINILLO; QUEIROZ; DUARTE, 2008; BOAVIDA; GONÇALVES; OLIVEIRA, 2009; MOHAMED; JOHNNY, 2011; POWELL; FUNCHS, 2012; POWELL; FUNCHS, 2013; HOFFMAN, 2016). Outras focam aspectos relativos a abordagens tradicionais de cálculo e cálculo mental (CARPENTER; et al., 1998). Identificam-se, igualmente, pesquisas que focam o cálculo flexível (SERRAZINA; RODRIGUES, 2014; RATHGEB-SCHNIERER; GREEN, 2015). Outros estudos têm como propósito desenvolver instrumentos para avaliar sentido de número (BESWICK; MUIR; MCINTOSH, 2004; YANG; LI; LI, 2008; NOSWORTHY; et al., 2013) enquanto que outros buscaram promover o sentido de número por meio de experiências de ensino (YANG; HSU; HUANG, 2004; FERREIRA, 2012; MORAIS; SERRAZINA, 2013; MENDES, 2012; DELGADO, 2013). Por fim, há estudos que visaram investigar conteúdos matemáticos, como Grandezas e Medidas e Tratamento da informação a partir do sentido de número (SPINILLO; MARTINS, 2015; CAMPOS; WODEWOTZKI, 2016).

No que se refere ao diagnóstico do sentido de número dos alunos de forma mais abrangente, Facun e Nool (2012) tiveram por objetivo avaliar o sentido de número de 47 alunos do 6.º ano por meio de testes objetivos nos quais os alunos tinham que justificar suas escolhas. Sua pesquisa evidenciou que esses alunos desenvolveram pouco o sentido de número, apresentando um baixo índice de acerto das tarefas. Mais especificamente, os alunos não foram capazes de fazer julgamentos matemáticos

apropriados, como por exemplo, determinar se as informações apresentadas na tarefa são suficientes para poder resolvê-las. Os alunos também demonstraram que não compreendem frações, números decimais e operações com números racionais e ainda que não utilizam estratégias úteis e eficientes para o gerenciamento de situações numéricas, como estimativas e relações numéricas. De acordo com os autores, o baixo desempenho dos alunos, que evidencia um baixo sentido de número, pode ser atribuído à ênfase dada pelos professores em exercícios e práticas, sem uma compreensão profunda de conceitos matemáticos.

Os autores salientam que professores de matemática devem conseguir identificar o nível de sentido número dos alunos para poder ajuda-los a desenvolver uma compreensão profunda de conceitos e processos matemáticos. Consideram, ainda, que o sentido de número pode ser avaliado por meio de testes de diagnóstico apropriados.

Yang e Li (2008) tiveram o objetivo principal de investigar o desempenho relativo do sentido do número entre meninos e meninas e ainda diagnosticar dificuldades de aprendizagem ou deficiências no desenvolvimento de sentido de número. Participaram da pesquisa 808 alunos de 3.º ano que responderam a um teste de 25 itens de múltipla escolha para avaliar o sentido de número e eles também tinham que explicar a escolha pela alternativa. O teste incluía cinco componentes: compreender o significado de números e operações; usar múltiplas representações de números e operações; ser capaz de compor e decompor números; julgar a razoabilidade dos resultados de cálculo; e reconhecer o tamanho do número relativo. Os resultados obtidos pelos investigadores indicaram que os alunos não apresentaram desempenho positivo em cada um dos cinco componentes do sentido do número sendo que o pior desempenho foi em julgar a razoabilidade dos resultados de cálculo. Ainda, não houve uma diferença significativa entre o desempenho de meninos e meninas em sua capacidade de resolver problemas de sentido de número. Isso exigiria que os exercícios de "exercícios e práticas" em matemática não deveriam ser ensinados e o ensino do sentido do número para as crianças deveria começar o mais cedo possível.

Um estudo sobre sentido de número que foca aspectos mais específicos foi o de Booth e Siegler (2008) que investigaram se a qualidade das representações de grandeza do número com alunos do 1.º ano está correlacionada com uma forma preditiva e causal da aprendizagem da aritmética. As representações da ordem de grandeza do número das crianças em um pré-teste realizado por eles estavam correlacionadas com o conhecimento aritmético e com respostas a problemas aritméticos desconhecidos. A

representação da magnitude numérica também está relacionada à sua proficiência aritmética e memória de curto prazo para números. Além disso, as representações da magnitude do número não são apenas positivamente relacionadas a uma variedade de tipos de conhecimento numérico, mas também preditivas de sucesso na aquisição de novas informações numéricas, em particular, respostas a problemas aritméticos.

A investigação realizada por Spinillo, Queiroz e Duarte (2008) teve o objetivo de examinar a compreensão do efeito de operações sobre quantidades a partir da resolução de problemas de adição e subtração. Participaram dessa pesquisa 122 crianças de Alfabetização, 1.º e 2.º anos (6 a 8 anos). A essas crianças foi solicitado que resolvessem duas tarefas sendo que a primeira examinava a ideia de que adicionar (ou retirar) aumenta (ou diminui) a quantidade inicial e a segunda examinava a compreensão de que operações sucessivas podem aumentar ou diminuir uma quantidade inicial ou podem não alterar a quantidade inicial. De acordo com as investigadoras, houve diferenças entre o desempenho dos alunos nas tarefas e entre os anos de escolaridade das crianças. Na segunda tarefa, as crianças de 2.º ano demonstraram melhor desempenho, inclusive ao explicar como pensaram ao resolver a tarefa. Já na primeira tarefa, as crianças demonstraram maior compreensão, inclusive as que estavam na Alfabetização.

Powell e Funchs (2012) discutem um conjunto de habilidades como competências numéricas que se iniciam na Educação Infantil bem como um exemplo de intervenção para alunos com dificuldades. As autoras focam sua discussão nas competências de contagem, comparação de números, compreensão dos símbolos e conceitos de adição e subtração, que são competências críticas de um programa numérico inicial voltado para alunos em dificuldades. As discussões realizadas pelas autoras são em torno das dificuldades de alunos do 1.º ano sendo que suas experiências com números são provenientes do cotidiano e da Educação Infantil. De acordo com as autoras, é importante dar atenção aos alunos que não possuem habilidades nas competências numéricas iniciais e elencar formas para superar essas dificuldades. Os estudos das investigadoras apontam que, para sanar essas dificuldades, é preciso: (a) instrução explícita o conhecimento conceitual e habilidade processual, (b) uma sequência de instrução significativa e relevante, (c) revisão de tópicos previamente ensinados, (d) prática de tópicos atuais e (e) trabalho de fluência em combinações de números de adição e subtração. Ainda, o foco da instrução deve ser determinado pelas necessidades dos alunos.

Um dos objetivos do estudo desenvolvido por Mohamed e Johnny (2011) foi explorar os tipos de dificuldades enfrentadas pelos alunos em compreender números em problemas numéricos. Para isso, realizaram uma pesquisa com 261 alunos de escola primária e utilizaram um teste de lápis e papel. Também realizaram entrevistas, com o uso de um roteiro que envolvia a compreensão e resolução oral de tarefas, com os alunos que acertaram 80% do teste, mais 5 alunos selecionados aleatoriamente. As entrevistas foram organizadas seguindo as seguintes fases: leitura, compreensão, estratégia para resolução (no original, *strategy know-how*) e solução. As dificuldades dos alunos foram evidenciadas nas fases de compreensão, estratégia e solução. Embora as questões do teste abrangessem situações cotidianas, os alunos apresentaram dificuldades, demonstrando que estão acostumados a questões do tipo padrão (usualmente utilizados em sala de aula). As dificuldades foram em combinar suas experiências com conteúdos matemáticos, raciocinar, construir novo esquema a partir do conhecimento aprendido anteriormente e os alunos também se mostraram incapaz de resolver os problemas de forma independente. Além disso, os alunos tiveram dificuldades em compreender conceitos básicos de fração (que também foi abordado na investigação). Outra dificuldade que chamou a atenção dos investigadores foi a dependência dos alunos nos cálculos de papel e lápis, inclusive para fazer estimativas.

Com base nesse relatório, parece que a maioria dos alunos é muito dependente do cálculo escrito e a habilidade do sentido do número não é agudizada.

Hoffman (2016) desenvolveu uma experiência que visava investigar o sentido de número, no que diz respeito à contagem, com alunos de 5.º ano. Sua experiência envolvia tarefas nas quais os alunos eram questionados sobre a quantidade de alunos que estudavam em sua escola, como descobrir isso e para que isso seria relevante. De acordo com a autora, essa experiência envolveu alunos em tarefas significativas envolvendo contagem e o desenvolvimento de diferentes estratégias de cálculos, o que facilitou o desenvolvimento do sentido de número.

Já a pesquisa de Boavida, Gonçalves e Oliveira (2009) teve o objetivo principal de compreender como alunos do 1.º ano de escolaridade mobilizam aspectos do sentido de número na resolução de problemas numéricos de adição e subtração. A partir de uma proposta pedagógica, os aspectos que se destacaram como facilitadores da resolução dos problemas propostos e que contribuíram para o desenvolvimento do sentido de número foram: (1) o contexto das tarefas que favoreceu o interesse e envolvimento do aluno pela sua familiaridade; além disso, facilitou a estruturação pelo aluno das quantidades

envolvidas nas tarefas; (2) as experiências de contagem, o que contribuiu para a compreensão dos números e da aritmética; (3) o uso de modelos lineares a partir de reta numérica e fio de contas e também modelos de agrupamento, como dedos das mãos e representações de moedas; (4) a discussão coletiva de estratégias de resolução, o que contribuiu para que os alunos compreendessem e comparassem suas estratégias, analisassem a sua eficácia e também para que refletissem sobre porque resolveram as tarefas daquela forma.

Relacionado ao sentido de número e aos seus componentes, algumas pesquisas focam aspectos relativos a abordagens tradicionais de cálculo escrito e cálculo mental. Carpenter et al. (1998) realizaram um estudo longitudinal de 3 anos a fim de examinar o papel que as estratégias inventadas desempenham no desenvolvimento da compreensão da adição e subtração multidígitas. O estudo foi realizado com 82 alunos do 1.º ao 3.º ano que foram entrevistados individualmente 5 vezes em uma variedade de tarefas envolvendo conceitos de número na base-dez e problemas de adição e subtração. O foco principal da análise tratou as distinções entre alunos que usaram algoritmos padrão antes de usar estratégias inventadas e estudantes que usaram estratégias inventadas antes ou simultaneamente com seu uso de algoritmos padrão. Os dados evidenciaram que os alunos podem inventar estratégias para adicionar e subtrair e também ilustram o que essa invenção oferece e o papel que diferentes conceitos desempenham nesse invento. Os alunos que usaram estratégias inventadas (cerca de 90%) antes de aprenderem algoritmos padrão demonstraram um melhor conhecimento dos conceitos do número e foram mais bem-sucedidos em ampliar seus conhecimentos para novas situações do que os alunos que inicialmente aprenderam algoritmos padrão. Ainda, os autores salientam que se pode esperar que o uso de estratégias inventadas reduza a ocorrência de erros sistemáticos baseados estritamente nas aplicações de procedimentos simbólicos.

Para além do cálculo mental, Serrazina e Rodrigues (2014) discutem uma investigação inserida no Projeto “Pensamento numérico e cálculo flexível: Aspectos críticos” tendo como foco o *design* de tarefas que levam em conta o conhecimento atual sobre números e operações. As autoras se apoiam em Thompson (1993) ao salientar que “o pensamento flexível está focado no desenvolvimento conceptual e refere-se a um pensamento que pode ser flexivelmente adaptado tanto a tarefas familiares como a novas tarefas. O seu foco não é a estratégia de cálculo, mas o raciocínio quantitativo” (pp. 110-111).

Serrazina e Rodrigues (2014) tiveram como objetivo articular o conhecimento sobre a evolução dos conhecimentos numéricos dos alunos, a caracterização das suas trajetórias de aprendizagem e o suporte profissional dos professores para práticas que favoreçam essa evolução. Para tanto, apresentaram uma tarefa elaborada para trabalhar de modo flexível a estrutura aditiva e seus diferentes níveis de desempenho bem como discutiram os aspectos considerados na elaboração dessa tarefa, a saber: enquadramento teórico, resultados empíricos obtidos em entrevistas clínicas realizadas com 4 alunos individualmente (dois do 1.º ano e dois do 2.º ano), momento este no qual foram propostas as tarefas.

A tarefa proposta abordava uma partição flexível, decompondo de todas as maneiras possíveis a quantidade 9.

Com a tarefa, foi observado dois níveis de desenvolvimento:

Nível 1. Os alunos registram várias decomposições utilizando a propriedade comutativa sem exaustão.

Nível 2. Os alunos relacionam a adição e a subtração e utilizam a propriedade comutativa de forma consciente e exaustiva e ainda justificam ter apresentado todas as possibilidades com a sistematicidade e generalização da propriedade.

No entanto, houve diferenças nas resoluções dos alunos no que se refere ao ano escolar em que estão. Todos os alunos recorreram a propriedade comutativa, mas com intencionalidades distintas. Os alunos do 1.º ano listaram todos os pares considerando o contexto da tarefa, pois, aparentemente, usaram alguma organização na apresentação dos pares ao escreverem, de uma forma quase consistente, os pares comutativos (por exemplo, $2+7$, $7+2$). Já os alunos do 2.º ano abstraíram o contexto, procuraram a soma 9 através de uma soma de duas parcelas e recorreram a propriedade comutativa (que já conheciam) para justificar suas repostas. Assim, resolveram a tarefa em termos matemáticos (pois se $4+5$ é igual $5+4$, apresentar apenas uma expressão já indica o número 9), mas não na forma como a tarefa foi proposta.

Ainda, a tarefa foi considerada adequada para a turma de 1.º ano, porém, para se trabalhar com alunos mais velhos, seria preciso modificações, tais como incluir números com uma ordem de grandeza superior a 20 e apresentar a tarefa com outros contextos como, por exemplo, os passageiros de um ônibus de dois andares.

Rathgeb-Schnierer e Green (2015), com base em uma interpretação teórica da flexibilidade no cálculo mental, centraram-se nos padrões de classificação e raciocínio dos alunos do ensino fundamental e médio. A coleta de dados foi realizada por meio de

uma entrevista com 72 alunos de 2.º e 4.º ano, americanos e alemães, incorporando 12 problemas de adição e subtração de dois dígitos em pequenos cartões. Esses alunos eram encorajados a classificar os problemas como “fáceis” ou “difíceis” e a justificar essa classificação. Além do mais, as entrevistas eram dirigidas ao reconhecimento de características dos problemas, padrões de números e relações. Os dados mostraram que havia uma maior variedade de argumentos para problemas fáceis do que para os mais difíceis. Os investigadores também identificaram três formas de raciocínio: raciocínio flexível, que se caracteriza por múltiplas razões relacionadas, predominantemente, às características dos números; raciocínio rígido, que se refere a uma única razão referente ao procedimento de solução; e raciocínio mesclado, que condiz com razões múltiplas quando se referem às características dos problemas e a um motivo quando se refere ao procedimento de solução. Por fim, os investigadores sugerem que os alunos que raciocinam pensando nas características dos números envolvidos nos cálculos são mais flexíveis do que os alunos que não o fazem.

Para se investigar o sentido de número, ou ainda avaliá-lo em sala de aula, é preciso instrumentos, sendo que isso também é foco de pesquisas. Beswick, Muir e McIntosh (2004) desenvolveram um instrumento em conjunto com a Universidade de Ciências da Malásia (Universiti Sains Malaysia - USM) a fim de avaliar aspectos do sentido de número com crianças dos anos iniciais do Ensino Básico. O instrumento foi organizado em quatro módulos abordando os seguintes aspectos: (i) contagem, (ii) valor de posição, (iii) operações adição e a subtração e (iv) operações multiplicação e divisão, sendo que, nesse estudo, a discussão esteve focada no módulo referente à contagem. De acordo com os investigadores, o instrumento apresentou potencial de fornecer informações para ajudar os professores a entender melhor o pensamento de seus alunos e assim melhorar o seu ensino.

Yang, Li e Li (2008) desenvolveram uma escala computadorizada de sentido de número (CNST) para avaliar o desempenho de estudantes que completaram o 3.º ano. Participaram desse estudo 808 alunos de escolas primárias. A escala foi elaborada a partir dos seguintes componentes de sentido de número: compreender os significados de números e operações; reconhecer o tamanho relativo do número; ser capaz de compor e decompor números; reconhecer o efeito relativo das operações nos números; julgar a razoabilidade dos resultados de cálculo. Ao resolver o item da escala, os alunos tinham que justificar sua escolha. Por conta das justificativas, foi preciso elaborar categorias para fazer a análise:

- 1) A resposta e o motivo correspondente estão corretos,
- 2) A resposta está correta, mas o motivo correspondente está incorreto;
- 3) A resposta está incorreta, mas o motivo correspondente está correto,
- 4) A resposta e o motivo correspondente estão incorretos.

Os resultados das análises estatísticas e análise de conteúdo indicaram que esta escala de sentido de número computadorizado demonstra boa confiabilidade e validade. Além disso, o modelo de sentido de número utilizado foi apoiado empiricamente e teoricamente através de análise fatorial confirmatória e revisão da literatura.

Seguindo outro modelo, Nosworthy et al. (2013) desenvolveram um instrumento de papel e lápis para avaliar rapidamente a capacidade das crianças em comparar a ordem de grandeza dos números representadas de forma simbólicas e não-simbólicas (representações pictóricas) bem como avaliar o grau em que o desempenho explica as diferenças individuais. Usando este instrumento, 160 crianças de 1.º ao 3.º ano foram solicitadas a identificar dentre dois números de um dígito qual tinha a maior ordem de grandeza em um curto período de tempo. Os dados mostraram que alunos do 1.º ano foram significativamente melhores em representações não simbólicas em comparação com representações simbólicas, o que sugere aos investigadores que as criança mais novas têm fortes representações pré-existentes da ordem de grandeza do número e que elas desenvolvem as representações simbólicas gradualmente . Já os alunos do 2.º e 3.º anos não demonstraram diferenças entre as condições. Ainda, os dados indicaram que o desempenho dos alunos melhorou à medida que crescem.

Para além de diagnosticar, alguns investigadores vêm pesquisando o desenvolvimento do sentido de número e aspectos que corroboram para esse desenvolvimento. Nesse sentido, Yang, Hsu e Huang (2004) realizaram uma pesquisa em quatro turmas de duas escolas de Taiwan com aluno de 6.º ano, sendo duas turmas experimentais e outras duas de controle. Os objetivos desta investigação foram examinar a diferença entre as classes experimentais e de controle no que se refere à realização de testes e entrevistas realizadas durante as aulas. Houve um pré-teste, pós-teste e teste de retenção de sentido do número de papel e lápis bem como entrevistas realizadas nesses mesmos momentos sendo que as questões das entrevistas abordavam o sentido do número. As turmas de controle seguiram o método de ensino padrão. As turmas experimentais desenvolveram atividades de sentido do número por meio do modelo de ensino orientado a processos para ajudar as crianças a desenvolver o sentido

do número. Essas atividades foram divididas em cinco unidades para uso dos professores: a primeira unidade, com 11 tarefas, focava no desenvolvimento de conceitos básicos de número decimal e fracionário; a segunda unidade, com 16 tarefas, enfatizou a capacidade de comparar as magnitudes do número; a terceira unidade, com 10 aulas, focou um uso adequado de números de referência; a quarta, com 8 tarefas, centrava-se na estimativa; e a quinta unidade, com 8 tarefas, nos efeitos das operações nos números. As análises dos dados mostraram que houve diferenças estatisticamente significativas entre os testes de grupo em classes experimentais para o pós-teste e retenção em comparação com o pré-teste. No entanto, não houve diferença estatisticamente significativa para os testes realizados com as classes de controle. Ainda, os dados indicaram que as mudanças feitas para as aulas experimentais a fim de desenvolver o sentido de número foram evidentes após a instrução e comparadas com os alunos nas aulas de controle. De acordo com os investigadores, houve pouca evolução nos alunos das aulas de controle após as instruções. Esses dados demonstraram que o ensino focado no sentido de número é eficaz e útil para o seu desenvolvimento.

Ferreira (2012) analisou as estratégias e os procedimentos de cálculo utilizados por uma turma de alunos 2.º ano de escolaridade em uma experiência de ensino, concentrando sua análise em quatro alunos, em contexto de resolução de problemas de adição e subtração de números inteiros positivos e a sua contribuição para o desenvolvimento do sentido de número dos alunos. De acordo com seu estudo, a experiência de ensino propiciou o desenvolvimento de grande diversidade de estratégias para resolver os problemas trabalhados, nos quais havia uma relação entre a estratégia do aluno e o significado do problema. Esse desenvolvimento também esteve relacionado com a diversidade de problemas propostos, pela seleção de resoluções para serem discutidas durante as aulas, o que não foi feito de forma aleatória, e pelo ambiente social em que os alunos estiveram envolvidos. Por fim, os componentes de sentido de número, tais como o desenvolvimento da compreensão do significado dos números e das operações, o reconhecimento da grandeza relativa dos números e o reconhecimento da razoabilidade dos resultados e a sua aplicação nos cálculos apresentados foram desenvolvidos de forma integrada nos alunos.

Morais e Serrazina (2013) referem um estudo de caso desenvolvido por Moraes com uma turma do 1.º ano e focaram uma das análises em três alunos. Neste artigo, elas discutem as estratégias utilizadas por uma dessas alunas em diferentes situações problemas de subtração. O trabalho com a resolução de problemas seguiu os seguintes

momentos: i) apresentação do problema: o problema era lido por um aluno e era feito os esclarecimentos necessários; ii) resolver o problema em pares; iii) apresentação e discussão das estratégias de resolução mais significativas para toda a classe: as estratégias discutidas não era selecionadas de forma aleatória; e iv) visão geral e identificação das estratégias mais eficientes. Uma terceira e última cadeia de problemas foi resolvida individualmente e fora da sala de aula por três alunos que constituíram os estudos de caso, no início da segunda série.

De acordo com seus dados, a aluna traduziu os problemas com as ideias de comparar e de completar como uma expressão $a+?=B$ e utilizou com maior frequência estratégias aditivas do tipo linear (A10) sendo que, de acordo com a literatura utilizada em sua pesquisa, essa é uma das estratégias que é mais utilizadas para esse tipo de problema de subtração.

Na sua pesquisa Mendes (2012) buscou compreender o modo como alunos do 3.º ano evoluem na aprendizagem da multiplicação numa perspectiva de desenvolvimento do sentido de número, no âmbito de uma trajetória de aprendizagem bem como descrever e analisar as potencialidades das tarefas e sequências de tarefas propostas na aprendizagem da multiplicação. A pesquisa seguiu na modalidade de experiência de ensino ao longo de um ano letivo e teve a participação de uma turma do 3.º ano e da sua professora. A investigadora concluiu que os alunos, ao resolverem tarefas de multiplicação, utilizaram diversos procedimentos. Por exemplo, para realizar o mesmo cálculo, houve procedimentos mais utilizados que outros e houve alunos que tiveram preferência por determinados procedimentos. As características das tarefas, tais como contextos, números e sua articulação e sequência das tarefas, e o ambiente da aula também contribuíram com a evolução dos procedimentos, mas não de forma linear, pois as evoluções dos alunos se distinguiam umas das outras.

Outras pesquisas que propõem o desenvolvimento do sentido de número não têm como foco principal os alunos, focando os professores. Delgado (2013) teve o objetivo de analisar as práticas de dois professores nos momentos de seleção/construção, preparação e exploração de tarefas que visavam o desenvolvimento do sentido de número dos alunos. De forma mais específica, buscou identificar e compreender os aspectos que os professores valorizam, os desafios que encontram nesse momento relativo às tarefas e as suas preocupações com aspectos do sentido de número que sobressaem. Este estudo decorreu no âmbito de um projeto colaborativo de desenvolvimento curricular e envolveu dois professores do 1.º ciclo e a investigadora.

Sua pesquisa evidenciou que as principais preocupações destes professores nos momentos de selecionar e elaborar tarefas centram-se no desenvolvimento do raciocínio matemático e, em particular, no cálculo mental. No que diz respeito a preparação das tarefas, a investigadora destacou importância que passam a atribuir à definição e compreensão dos seus objetivos e à antecipação de estratégias de resolução dos alunos. Em sala de aula, surgiu também a preocupação em selecionar e ordenar estratégias dos alunos para discussão.

Powell e Funchs (2013), a partir de seus estudos, salientam que antes de estudar álgebra, geometria, frações e problemas de cálculo, os alunos devem ter uma sólida compreensão dos números. No entanto, houve outro tipo de pesquisa que surgiu focando as relações entre os conteúdos matemáticos e que visaram investigar esses conteúdos, como Grandezas e Medidas e Tratamento da informação a partir do sentido de número.

Campos e Wodewotzki (2016) tinham o objetivo de identificar e compreender as contribuições que o ensino de Estatística traz para a promoção do desenvolvimento do sentido de número de uma turma de alunos do 1.º ano. O foco da investigação era o desenvolvimento do sentido de número a partir de diferentes tarefas na perspectiva da Educação Estatística com tarefas investigativas que abordava conteúdos estatísticos, como gráfico de coluna, tabela e pictograma. Os dados mostraram que a investigação corroborou com o desenvolvimento do sentido de ordenação dos números, que houve relação entre os tipos de números presentes nas tarefas e com o reconhecimento de equivalência entre quantidades, principalmente quando os alunos faziam gráfico de coluna e tinham que interpretá-los.

Spinillo e Martins (2015) investigaram o conhecimento de crianças sobre medidas a partir da noção de princípios invariantes e sentido numérico. Sua pesquisa foi desenvolvida com 40 crianças de 6 a 8 anos, que foram divididas em dois grupos: o primeiro grupo era composto por alunos do 1.º ano do Ensino Fundamental e o segundo grupo por alunos do 3.º ano. Esses alunos foram solicitados a realizar duas tarefas que envolviam fazer julgamentos acerca de situações de medidas de volume, massa, distância e comprimento, com unidades convencionais e não convencionais e de forma individual. As pesquisadoras analisaram duas tarefas sendo que a primeira abordava a habilidade de identificar unidades apropriadas para medir diferentes grandezas, e a segunda tarefa focava a compreensão acerca das relações inversas entre o tamanho da unidade e o número de unidades necessário para medir uma dada magnitude de um

objeto. Os resultados dessa pesquisa mostraram que essas crianças, independentemente da idade, possuem um sentido sobre medida que se manifestou de diferentes formas diante de diferentes grandezas e ainda que elas compreendiam mais, mesmo que de maneira intuitiva, as relações inversas entre o tamanho e o número de unidades do que a relação entre a unidade e a magnitude do objeto a ser medido. As investigadoras também salientam que essas crianças têm dificuldade em explicar como pensaram, sendo que essa explicação fazia parte da resolução das tarefas.

Analisando globalmente estas pesquisas, é possível perceber que elas vêm ocorrendo com diferentes níveis de ensino e abordando conjuntos numéricos como números naturais e racionais.

As pesquisas convergem no sentido de que, ao investigar ou desenvolver sentido de número, seja de formal global ou especificando seus componentes, o papel da tarefa e a forma como ela é elaborada são essenciais. Principalmente no que diz respeito ao “explicar como pensou”, pois saber explicar como resolveu uma tarefa demonstra que o aluno resolve uma tarefa de forma consciente, o que está de acordo com o próprio conceito de sentido de número. Ou seja, se sentido de número é trabalhar com números e operações com compreensão, saber explicar como resolveu uma tarefa numérica revela ter sentido de número.

Outro aspecto que se destaca nas investigações é relativo ao ensino do algoritmo. As pesquisas vêm evidenciando que o ensino de técnicas e algoritmos para alunos muito novos interferem no desenvolvimento do sentido de número. Assim, as crianças aprendem essas técnicas e deixam de compreender aspectos fundamentais sobre números e operações. Conseqüentemente, os alunos se tornam dependentes do algoritmo e ainda, quando a técnica é mal compreendida, isso também não é percebido. Principalmente por não haver um julgamento quanto a razoabilidade do resultado, sendo esse um indicativo de sentido de número.

O sentido de número não se refere apenas ao eixo temático de Números e Operações, pois os números estão intrinsecamente relacionados com todos os conteúdos matemáticos. Sendo assim, pesquisas também têm evidenciando como esses conteúdos podem contribuir para o desenvolvimento do sentido de número.

Por fim, as pesquisas evidenciaram tendências ao nível da investigação sobre sentido de número. A forma como as pesquisas foram “agrupadas” aqui dá indícios dessas tendências: abordagens tradicionais de cálculo e cálculo mental; diagnóstico do sentido de número; diagnóstico dos componentes do sentido de número; instrumentos

para investigar e/ou desenvolver sentido de número; experiências de ensino para desenvolver sentido de número; flexibilidade do cálculo mental; e desenvolver sentido de número por meio de outros conteúdos matemáticos.

São inúmeras as pesquisas sobre sentido de número o que torna muito difícil discuti-las aqui. No entanto, é importante destacar que essas pesquisas se complementam e não se contrariam sobre o que é sentido de número e sobre aspectos necessários para desenvolvê-lo.

3 METODOLOGIA

Esta investigação é de natureza metodológica mista com a conjugação das abordagens quantitativas e qualitativas. De acordo com Morais e Neves (2007), as características da metodologia mista revelam potencialidades a serem aplicadas em contextos de investigação educacional. Em concordância, Dal-Farra e Lopes (2013) salientam que esses métodos podem contribuir com pesquisas feitas na área da Educação de forma significativa tendo em vista a grande quantidade de informações de diferentes origens relativas aos alunos, professores e escolas.

O uso de múltiplas abordagens, como qualitativa e quantitativa, possibilita uma contribuição mútua das potencialidades de cada abordagem envolvida desde que sejam consideradas as particularidades inerentes aos princípios subjacentes a cada uma delas e com respostas mais abrangentes aos problemas de pesquisa formulados (DAL-FARRA; LOPES, 2013).

Morais e Neves (2007) assumem que métodos quantitativos e qualitativos não são incompatíveis e podem ser utilizadas de formas sequenciais ou simultâneas, tendo em vista a função da natureza das questões de investigação levantadas e dos dados que se pretendem obter. Para Dal-Farra e Lopes (2013), a construção do processo desse tipo de pesquisa envolve escolhas relativas à sequência de coleta de dados quantitativos e qualitativos; a prioridade a ser dada à coleta e à análise desses dados; e o momento de integração dos dados.

Este trabalho consiste em uma pesquisa de caráter exploratório e não experimental que buscou analisar e compreender a percepção sobre a crença de autoeficácia na resolução de tarefas numéricas dos alunos ao final do Ciclo de Alfabetização, o sentido de número e caracterizar e refletir sobre a relação entre crença de autoeficácia e sentido de número.

Para isso, buscamos responder as seguintes questões de investigação:

1. Como se caracterizam as percepções dos alunos do 3.º ano sobre a sua autoeficácia em tarefas numéricas?
2. Como se caracterizam os aspectos relativos ao sentido de número manifestados pelos alunos do 3.º ano diante a resolução de tarefas numéricas?

3. Que relações se destacam entre o sentido de número e a crença de autoeficácia manifestados por alunos do 3.º ano?

Para responder aos problemas apresentados e atingir o objetivo proposto, assumimos aqui uma metodologia de investigação mista a ser representada na figura seguinte.

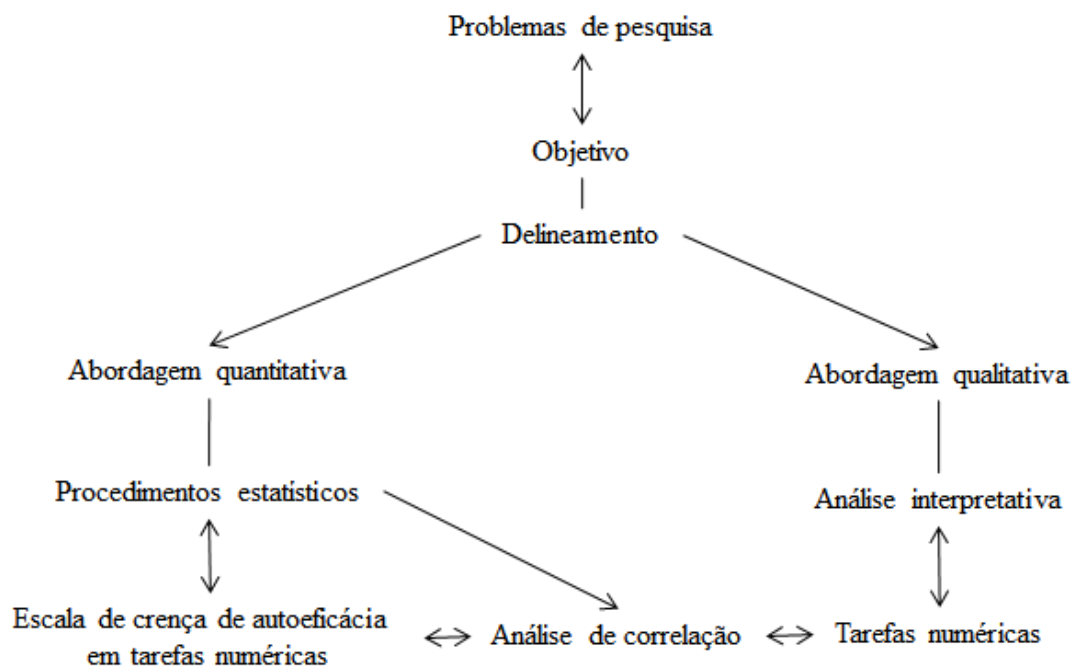


Figura 21 – Representação do delineamento adotado nessa investigação

Fonte: Autoria própria

O delineamento dessa investigação, partindo dos problemas de pesquisa e do objetivo, utiliza uma abordagem quantitativa e qualitativa. Na abordagem quantitativa, foram utilizadas análises estatísticas descritivas que visaram descrever e sumarizar os dados obtidos por meio da Escala de crença de autoeficácia em tarefas numéricas. Os dados obtidos pelo instrumento Tarefas numéricas também foram quantificados a fim de perceber a frequência de desempenho e de procedimentos utilizados na resolução das tarefas que compõe o instrumento.

Utilizamos também uma abordagem qualitativa, por meio de análises interpretativas das resoluções dos alunos no instrumento Tarefas numéricas. Essa análise, para além de quantificações, evidencia os aspectos de sentido de número e as formas de resolver as tarefas que se destacaram no instrumento.

As especificidades dos instrumentos, da coleta dos dados e do tratamento serão detalhadas nas subseções 3.1 e 3.3.

3.1 Instrumentos

Os instrumentos utilizados foram um Questionário, uma Escala de crença de autoeficácia em tarefas numéricas e Tarefas numéricas. Os instrumentos foram previamente testados a fim de averiguar necessidade de adequações. O estudo piloto relativo aos instrumentos Escala de crença de autoeficácia em tarefas numéricas e Tarefas numéricas será discutido na subseção 3.2.

Questionário. Este instrumento (apêndice VI) tem por objetivo caracterizar os participantes em termos de idade, gênero, ano de escolaridade bem como sua percepção de desempenho em Matemática de forma geral. Esse questionário foi construído com base em outros instrumentos já existentes na literatura, tais como o “Questionário do aluno” desenvolvido por Neves (2002), “Questionário Informativo” de Brito (1996) e o “Questionário de Auto-Percepção do Desempenho em Matemática” desenvolvido por Alves (1999).

Tarefas numéricas. Este instrumento (apêndice VIII) contém sete tarefas (e um total de 15 itens) com finalidade de investigar aspectos relativos ao sentido de número que podem ser manifestados pelos alunos ao final do Ciclo de Alfabetização (3.º ano) diante a resolução de tarefas numéricas. As tarefas foram elaboradas a partir dos componentes apresentados por McIntosh, Reys e Reys (1992) sobre conhecimento e destreza com os números e com as operações, bem como situações de cálculo em que esses conhecimentos se aplicam. Denominamos as tarefas como *Mega-Sena*, *Quantos dias João já viveu?*, *Ligue as representações*, *Resolva as expressões*, *Calculadora quebrada*, *A compra de Marisa* e *O campeonato esportivo*.

Na elaboração das tarefas foi levada em conta a grandeza dos números envolvidos em cada uma e os valores numéricos que propiciam a evidência de sentido de número tais como recurso padrão ou relação numérica especial, como relação dobro e metade, números que somam dez ou números que terminam em nove (RATHGEB-SCHNIERER; GREEN, 2015).

Na subseção 3.4 são apresentadas as categorias elaboradas para analisar o sentido de número.

Escala de crença de autoeficácia em tarefas numéricas. Esta escala (apêndice VII) visava mensurar as crenças de autoeficácia em tarefas numéricas dos alunos que estavam no final do Ciclo de Alfabetização. De acordo com Brito (1996, p. 218), “uma escala é um conjunto de itens que mede uma entidade comum”.

A escala foi estruturada com as tarefas presentes no instrumento Tarefas numéricas. A cada tarefa os alunos responderam se acreditavam que poderiam resolvê-las antes de efetivamente a resolver. Importante ressaltar que nesse instrumento os alunos não resolviam as tarefas. As tarefas foram resolvidas de fato apenas no instrumento Tarefas numéricas. Aqui, os alunos, junto com a pesquisadora, liam as tarefas e respondiam sobre sua crença em resolvê-las.

Para responder sobre a crença que têm em sua capacidade, assinalaram uma das alternativas: “NÃO POSSO RESOLVER NADA”, “POSSO RESOLVER COM MUITA AJUDA”, “POSSO RESOLVER COM POUCA AJUDA” ou “POSSO RESOLVER TOTALMENTE” representados com expressões faciais⁷ como mostra a figura a seguir:

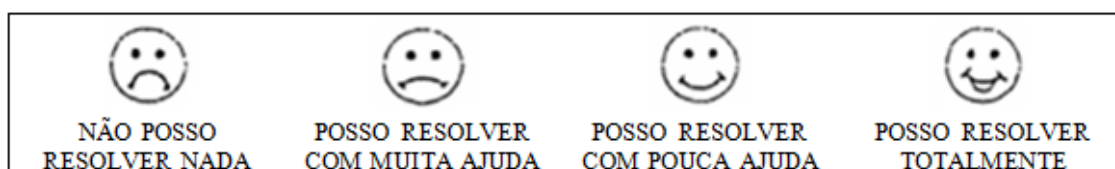


Figura 22 – Representação das alternativas a serem assinaladas na escala de crença de autoeficácia em tarefas aritméticas

Fonte: Autoria própria

As legendas das expressões faciais estão de acordo com a literatura (PAJARES; OLAZ, 2008) no qual é explicado que a crença de autoeficácia deve ser avaliada com frases, como por exemplo, “posso”, que expressa uma capacidade, e não com sentenças como “vou”, que expressa uma intenção. Ainda, utilizar o termo “ajuda” nas legendas das expressões faciais intermediárias após os advérbios “muita” e “pouca” denota uma crença na falta de capacidade e, por isso, irá precisar de alguma intervenção para realizar as tarefas apresentadas, podendo ser muita ajuda ou pouca ajuda.

⁷ As expressões faciais utilizadas nesse trabalho foram extraídas de Neves (2002).

3.2 Estudo piloto

Foi realizado um estudo piloto com a finalidade de testar e validar os instrumentos e verificar a sua viabilidade o que acarretou em alterações da primeira versão dos instrumentos para utilizá-los na pesquisa final.

O pré-teste dos instrumentos foi realizado pela pesquisadora com uma turma do 3.º ano de uma escola pública do município de Bauru – São Paulo composta por 21 alunos.

Primeiramente, os alunos responderam ao questionário e à escala de crença de autoeficácia em tarefas numéricas. Após um intervalo de 20 minutos, os alunos resolveram as tarefas numéricas. Os enunciados dos instrumentos foram lidos pela pesquisadora e explicados aos alunos, em caso de dúvidas. A aplicação dos instrumentos durou aproximadamente três horas.

3.2.1 Descrição dos resultados do estudo piloto

As tarefas presentes nos instrumentos testados foram *Mega-Sena*, *Quantos dias você já viveu?*, *Ligue as representações*, *Resolva as expressões*, *Calculadora quebrada*, *A compra de Marisa* e *O campeonato esportivo*.

No que se refere à escala de crença de autoeficácia em tarefas numéricas, a análise estatística foi executada por meio do programa SPSS (Statistical Package for Social Sciences). A consistência da escala no pré-teste foi considerada altamente satisfatória devido ao valor do alpha de Cronbach resultante ($\alpha = 0,905$).

No que diz respeito às tarefas numéricas, os alunos apresentaram grandes dificuldades em certas tarefas o que acarretou em algumas modificações. O critério para essas modificações foi o desempenho dos alunos nas tarefas sendo que o baixo desempenho esteve relacionado aos valores numéricos presentes nas tarefas. Desta forma, ao modificar as tarefas, alteramos os valores e mantivemos os contextos. Essas tarefas serão apresentadas em sua primeira versão, junto aos desempenhos dos alunos, seguido da versão modificado, se for o caso.

3.3.1.1 Tarefa Mega-Sena

JOÃO ESTAVA ASSISTINDO A UM SORTEIO DA MEGA-SENA NA TELEVISÃO E SAÍRAM OS SEGUINTE NÚMEROS:



OS NÚMEROS SORTEADOS FORAM MOSTRADOS NA TELA EM ORDEM CRESCENTE. ESCREVA ESSES NÚMEROS NOS CÍRCULOS ABAIXO NA ORDEM EM QUE FORAM APRESENTADOS.



Figura 23 – Tarefa Mega-Sena

Fonte: Autoria própria

Na tarefa *Mega-Sena*, os alunos tiveram um bom desempenho. Apenas quatro alunos não conseguiram resolver a tarefa, parecendo colocar os números de forma aleatória. A tarefa foi aplicada no estudo sem alterações.

3.3.1.2 Quantos dias você já viveu?

VOCÊ JÁ VIVEU MAIS OU MENOS QUE 1000 DIAS? EXPLIQUE COMO PENSOU.

Figura 24 – Tarefa Quantos dias você já viveu?

Fonte: Autoria própria

Na tarefa “Quantos dias você já viveu?” apenas seis alunos indicaram que viveram mais de 1000 dias. Os argumentos utilizados para explicar como pensaram foram baseados no número de anos que já viveram e no fato de que um ano tem 365 dias: “*Mais porque 1 ano tem 365 dias e eu já tenho 8 anos*”, “*Eu acho que vivi mais por que um 364 si somar nove vezes dá mais*”, “*Mais porque eu nasci em dois mil e sete e eu to em dois mil e dezesseis por isso*”. “*Mais do que 1000 dias por que um ano tem 365 dias (e somou oito vezes 365)*”. Seis alunos responderam que viveram menos que 1000 dias apresentando explicações que demonstraram que eles não tinham sentido da grandeza relativa dos números envolvidos, como por exemplo: “*Eu tinha pensado que eu vivi 2000 dias, porque eu tenho 8 anos*”, “*335 dias porque eu vivi bastante*”, “*eu acho que eu vivi menos de que 1000 porque eu nasci em 2008 de abril dia 08*”. Um aluno ainda tentou calcular 8×365 , mas, por não conseguir fazer a conta, não terminou

de resolver a tarefa. Ainda, nove alunos não responderam e tampouco tentaram responder.

Essa tarefa foi modificada para a tarefa *Quantos dias João já viveu?* em que os valores numéricos presentes na situação são menores:

JOÃO TEM DOIS ANOS DE IDADE. ELE JÁ VIVEU MAIS QUE 400 DIAS? EXPLIQUE COMO PENSOU.

Figura 25 – Tarefa Quantos dias João já viveu?

Fonte: Autoria própria

3.3.1.3 Ligue as representações

MARIA OLHOU PARA AS SEGUINTE REPRESENTAÇÕES NUMERICAS E LIGOU AS QUE REPRESENTAVAM O MESMO NÚMERO, COMO MOSTRA A FIGURA ABAIXO:



OLHE AGORA PARA AS SEGUINTE REPRESENTAÇÕES E LIGUE AS QUE REPRESENTAM OS MESMOS NUMEROS:



FAÇA O MESMO COM AS REPRESENTAÇÕES ABAIXO:



Figura 26 – Tarefa Ligue as representações (sem modificações)

Fonte: Autoria própria

Na primeira parte da tarefa na qual são apresentados apenas números naturais, 16 alunos ligaram corretamente as representações correspondentes; três alunos erraram, sendo que dois deles ligaram corretamente apenas duas representações; 2 alunos não fizeram a tarefa.

Na segunda parte da tarefa, nenhum aluno conseguiu representar números com números decimais. Nesta etapa, 16 alunos que tentaram resolvê-la, erraram e 5 alunos não a fizeram. Ainda, foi possível observar em algumas tentativas que oito alunos ligaram algumas representações corretamente, porém, é difícil afirmar se foi ao acaso ou se os alunos compreendiam realmente essas representações. Por exemplo:

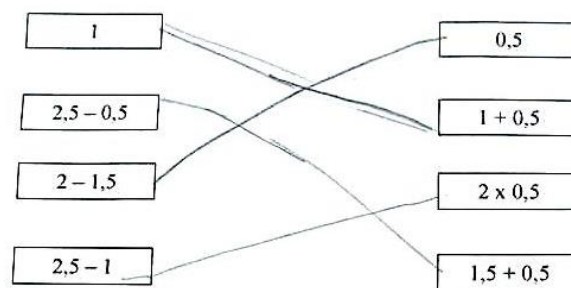


Figura 27 – Resolução da tarefa Ligue as representações (sem modificações)

Fonte: Acervo do autor

Sendo assim, a segunda parte da tarefa foi retirada e ela foi apresentada da seguinte forma:

MARIA OLHOU PARA AS SEGUINTE REPRESENTAÇÕES NUMERICAS E LIGOU AS QUE REPRESENTAVAM O MESMO NUMERO, COMO MOSTRA A FIGURA ABAIXO:



OLHE AGORA PARA AS SEGUINTE REPRESENTAÇÕES E LIGUE AS QUE REPRESENTAM OS MESMOS NUMEROS:



Figura 28 – Tarefa Ligue as representações (modificada)

Fonte: Autoria própria

3.3.1.4 Resolva as expressões

RESOLVA DE DUAS MANEIRAS DIFERENTES AS SEGUINTE EXPRESSÕES:

$27 + 26$	50×62	$60 \div 4$
$72 - 14$	$60 \div 2$	25×120
25×4		

Figura 29 – Tarefa Resolva as expressões (sem modificações)

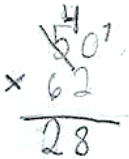
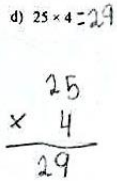
Fonte: Autoria própria

De forma geral, na tarefa *Resolva as expressões*, nenhum aluno completou a tarefa. Quando resolviam a expressão, faziam apenas de uma única maneira recorrendo ao algoritmo, sendo que houve casos do aluno utilizar o algoritmo de forma incorreta.

Os itens em que os alunos tiveram um desempenho melhor, apenas com o uso do algoritmo, foram nas expressões com adição e de subtração ($27 + 26$ e $72 - 14$). Nos demais itens, foi possível perceber uma tentativa de resolver, de rascunhar alguma conta, mas sem resolvê-las efetivamente.

Nas expressões que apresentavam uma multiplicação, alguns alunos buscaram resolver a partir da adição ou subtração, ou seja, operar, de alguma forma, com os valores apresentados. Nos exemplos a seguir, os alunos tentaram fazer o algoritmo da subtração e da adição onde deveria calcular 50×62 e 25×4 .

Quadro 7 – Resoluções da tarefa Resolva as expressões (sem modificações) - 1

1.º exemplo	2.º exemplo
	

Fonte: Acervo do autor

Outros alunos, como no exemplo a seguir, tentaram utilizar a soma de parcelas iguais para resolver.

e) 25×120

f) $60 \div 2$

Figura 30 – Resolução da tarefa Resolva as expressões (sem modificações)

Fonte: Acervo do autor

Por fim, nas divisões, os alunos que tentaram resolver utilizaram um “algoritmo”. Armaram uma conta semelhante aos algoritmos de adição, subtração e de multiplicação. Outros dois usaram uma representação pictórica, fazendo “risquinhos” para dividir as quantidades apresentadas igualmente.

Quadro 8 – Resoluções da tarefa Resolva as expressões (sem modificações) - 2

Conta de divisão como um algoritmo	Divisão de forma pictórica

Fonte: Acervo do autor

A tarefa *Resolva as expressões* foi modificada em apenas algumas expressões, sendo apresentada da seguinte forma:

RESOLVA DE DUAS MANEIRAS DIFERENTES AS SEGUINTES EXPRESSÕES:

a) $27 + 26$	b) $72 - 14$
c) 52×2	d) 25×10
e) 25×12	f) $25 \div 5$
g) $60 \div 2$	

Figura 31 – Tarefa Resolva as expressões (sem modificações)

Fonte: Autoria própria

3.3.1.5 Calculadora quebrada

ANA PRECISA CALCULAR 25×50 , MAS A TECLA DO NÚMERO 2 DE SUA CALCULADORA ESTÁ QUEBRADA. COMO ELA PODE FAZER ESSA OPERAÇÃO COM ESSA CALCULADORA?



Figura 32 – Tarefa Calculadora quebrada (sem modificações)

Fonte: Autoria própria

A tarefa Calculadora quebrada, na forma como ela foi inicialmente pensada, nenhum aluno conseguiu resolvê-la. Nela, alguns alunos fizeram a decomposição, ou tentaram decompor, o número 25, porém, sem concluir a tarefa. Contudo, a forma de decompor o número para, supostamente, calcular na calculadora foi feita em dígitos. Ao invés de decompor 25 em “20 mais 5”, alguns alunos decompunham em “2 e 5”, como mostra a figura a seguir:

$1 + 1 = 2$ AI
 USA ESE NÚME
 RO EFAS
 25 X 50

Figura 33 – Resolução da tarefa Calculadora quebrada: “ $1 + 1 = 2$ aí usa esse número e faz 25×50 ”

Fonte: Acervo do autor

Os alunos já haviam demonstrado dificuldades em encontrar o produto de dois fatores compostos por dois dígitos. Nesta tarefa, mesmo a estratégia de resolução sendo a decomposição do número 25 para que não seja preciso “pressionar” o número 2 na calculadora, pensamos em alterar o número 50 para 5 para que os alunos pudessem focar numa outra estratégia para realizar a multiplicação com valores mais baixos.

Sendo assim, a tarefa *Calculadora quebrada* ficou modificada da seguinte forma:

ANA PRECISA CALCULAR 25×5 , MAS A TECLA DO NÚMERO 2 DE SUA CALCULADORA ESTÁ QUEBRADA. COMO ELA PODE FAZER ESSA OPERAÇÃO COM ESSA CALCULADORA?



Figura 34 – Tarefa Calculadora quebrada (modificada)

Fonte: Autoria própria

3.3.1.6 A compra de Marisa

MARISA QUER COMPRAR ESTA CAMISETA E ESTE SAPATO PARA DAR A SUA IRMÃ DE PRESENTE DE ANIVERSARIO E TEM APENAS 50 REAIS NA CARTEIRA. MARISA TEM DINHEIRO SUFICIENTE PARA COMPRAR A CAMISETA E O SAPATO? POR QUE?



Figura 35 – Tarefa A compra de Marisa

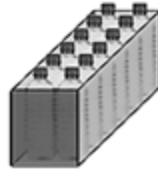
Fonte: Autoria própria

Na tarefa *A compra de Marisa*, metade dos alunos acertou respondendo à pergunta. Contudo, nem todos os alunos justificaram suas respostas como solicitado no problema, indicando apenas corretamente o resultado. Dos demais alunos, ou eles erraram a resposta ou não tentaram resolver a tarefa.

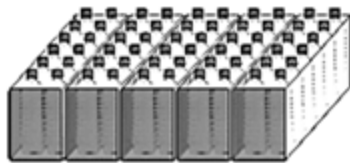
Mesmo alguns alunos não tendo conseguido resolver a tarefa, pensamos que ela estava adequada para os alunos e optamos por não modificá-la.

3.3.1.7 O campeonato esportivo

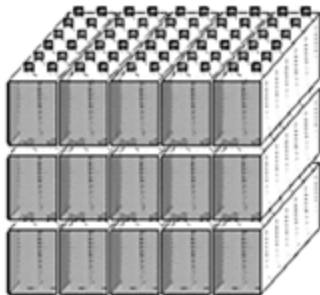
NO CAMPEONATO ESPORTIVO DA CIDADE DE BAURU, FORAM REALIZADOS JOGOS DE DIFERENTES MODALIDADES. A ORGANIZAÇÃO DO EVENTO DISPONIBILIZOU, AOS ATLETAS, EMBALAGENS COM DOZE GARRAFAS DE AGUA CADA, COMO A DA FIGURA.



1. AOS JOGADORES DE TENIS FORAM OFERECIDAS AS EMBALAGENS REPRESENTADAS NA FIGURA ABAIXO. QUANTAS GARRAFAS DE ÁGUA LHEIS FORAM OFERECIDAS? EXPLIQUE COMO PENSOU.



2. AOS JOGADORES DE FUTEBOL FORAM OFERECIDAS AS EMBALAGENS DE GARRAFAS DE ÁGUA REPRESENTADAS NA FIGURA SEGUINTE. QUANTAS GARRAFAS DE AGUA LHEIS FORAM OFERECIDAS? EXPLIQUE COMO PENSOU.



3. COMO SE ESGOTARAM AS EMBALAGENS DE 12 GARRAFAS, A AGUA OFERECIDA AOS JOGADORES DE XADREZ VEIO EM EMBALAGENS DE 6 GARRAFAS. A ELAS FORAM OFERECIDAS 30 EMBALAGENS. QUANTAS GARRAFAS DE AGUA LHEIS FORAM OFERECIDAS? EXPLIQUE COMO PENSOU.

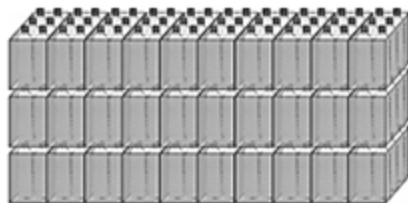


Figura 36 – Tarefa O campeonato esportivo

Fonte: Adaptado de Mendes et al. (2010)

Na tarefa *O campeonato esportivo*, as estratégias utilizadas, de forma geral, foram a contagem (ora das próprias garrafas, ora os alunos faziam risquinhos ou bolinhas para contar) e também o algoritmo.

Quadro 9 – Resoluções da tarefa O campeonato esportivo (sem modificações)

3. COMO SE ESGOTARAM AS EMBALAGENS DE 12 GARRAFAS À ÁGUA ORTOMOLTA 100

Fonte: Acervo do autor

Por conta das estratégias utilizadas pelos alunos, principalmente no que diz respeito a contagem, a possibilidade de errar se torna maior. Por conta disso, optamos nessa tarefa por alterar os valores apresentados na situação: ao invés de 12 ou 6 garrafas por embalagem, ficaram 4 ou 2 garrafas.

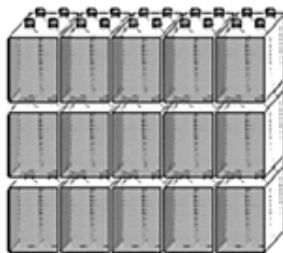
NO CAMPEONATO ESPORTIVO DA CIDADE DE BAURU, FORAM REALIZADOS JOGOS DE DIFERENTES MODALIDADES. A ORGANIZAÇÃO DO EVENTO DISPONIBILIZOU, AOS ATLETAS, EMBALAGENS COM QUATRO GARRAFAS DE ÁGUA CADA, COMO A DA FIGURA.



1. AOS JOGADORES DE TENIS FORAM OFERECIDAS AS EMBALAGENS REPRESENTADAS NA FIGURA ABAIXO. QUANTAS GARRAFAS DE ÁGUA LHEIS FORAM OFERECIDAS? EXPLIQUE COMO PENSOU.



2. AOS JOGADORES DE FUTEBOL FORAM OFERECIDAS AS EMBALAGENS DE GARRAFAS DE ÁGUA REPRESENTADAS NA FIGURA SEGUINTE. QUANTAS GARRAFAS DE ÁGUA LHEIS FORAM OFERECIDAS? EXPLIQUE COMO PENSOU.



3. COMO SE ESGOTARAM AS EMBALAGENS DE 4 GARRAFAS, A ÁGUA OFERECIDA AOS JOGADORES DE XADREZ VEIO EM EMBALAGENS DE 2 GARRAFAS. A ELES FORAM OFERECIDAS 30 EMBALAGENS. QUANTAS GARRAFAS DE ÁGUA LHEIS FORAM OFERECIDAS? EXPLIQUE COMO PENSOU.

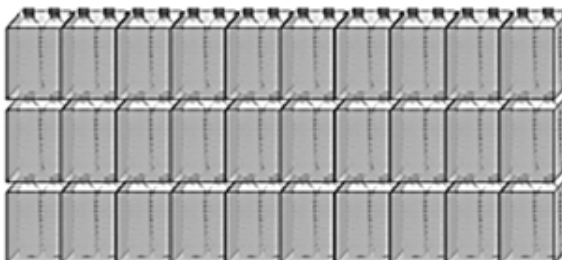
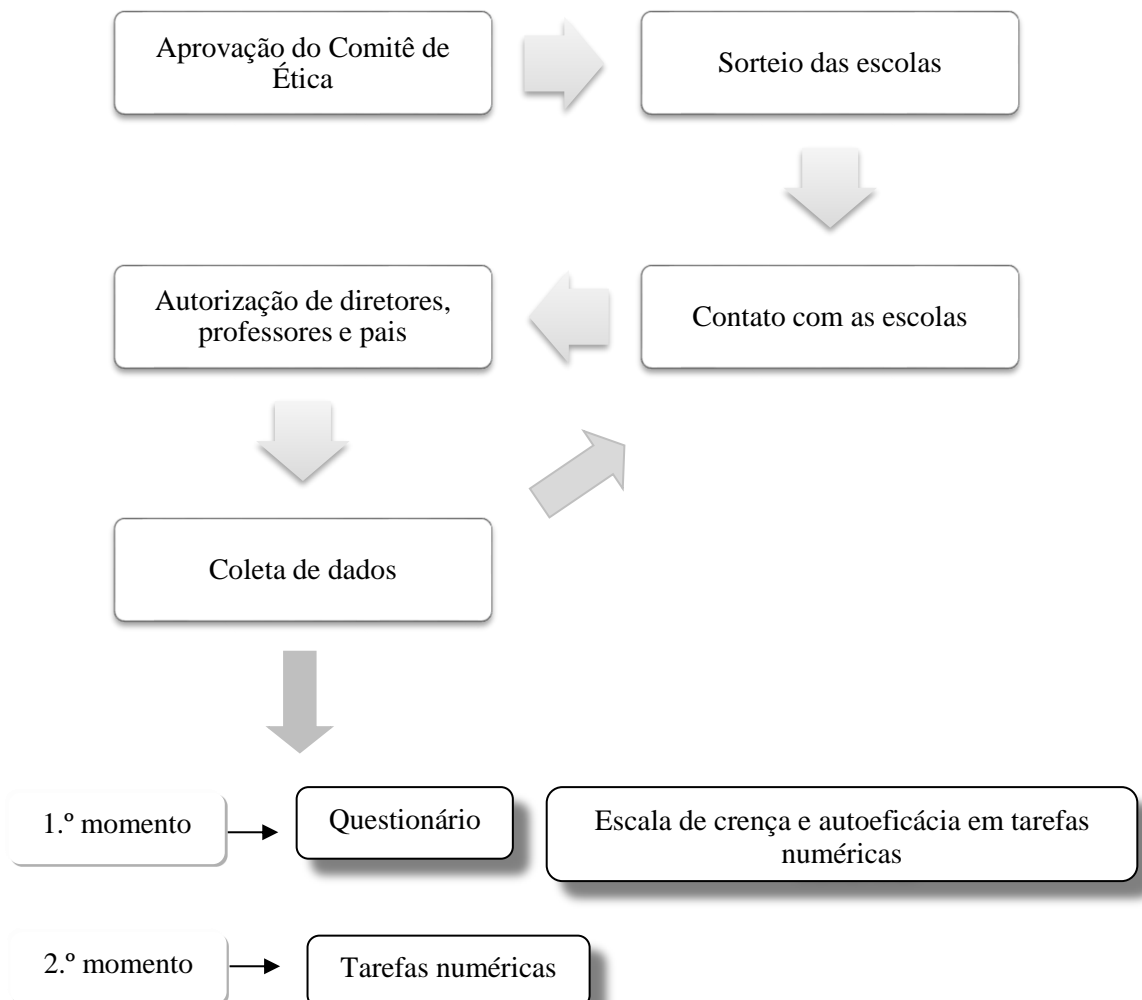


Figura 37 – Tarefa O campeonato esportivo (modificado)

Fonte: Autoria própria

3.3 Procedimentos para a coleta e análise dos dados

A coleta de dados pode ser representada da seguinte forma:



Esta pesquisa foi cadastrada na Plataforma Brasil e obteve o certificado⁸ com parecer⁹ de pesquisa aprovada pelo Comitê de Ética e Pesquisa (CEP) por estar em conformidade com os parâmetros legais, metodológicos e éticos analisados.

Para a coleta dos dados, primeiramente, foi realizado um sorteio com todas as escolas públicas, municipais e estaduais de Bauru – São Paulo. Essas escolas receberam

⁸ Certificado de Apresentação para Apreciação Ética (CAAE): 61215716.0.0000.5398.

⁹ Número do parecer: 1.820.697.

um número, e, através de um programa que ordena os números de forma aleatória¹⁰, reorganizamos a ordem das escolas.

O contato com as escolas foi feito com os diretores e/ou coordenadores do Ciclo I do Ensino Fundamental. Esses profissionais, quando do interesse, agendavam um horário com a pesquisadora para discutir melhor o objetivo da pesquisa, os procedimentos a serem utilizados e autorização de pais, alunos e professores. Nessa visita inicial à escola, a pesquisadora entregava os documentos necessários para a realização da pesquisa (termos de consentimento livre esclarecido para a escola e para os pais dos alunos e termos de assentimento para os alunos – apêndices do I ao V) e os dias para a coleta dos dados eram agendados. Sendo assim, enquanto em uma escola já era realizada a coleta de dados, em outra escola ainda era feito esse contato inicial.

Esse contato com as escolas foi feito até atingirmos um número suficiente de alunos para a pesquisa, sendo que havíamos estimado, no mínimo, 300 alunos. Ao final da coleta de dados foram totalizados 407 alunos de 29 turmas do final do 3.º ano do Ensino Fundamental de 12 escolas públicas distintas.

A pesquisa final esteve dividida em dois momentos. O primeiro momento constituiu na aplicação dos instrumentos Questionário e Escala de crença de autoeficácia em tarefas numéricas e o segundo momento, a aplicação do instrumento Tarefas numéricas, com os alunos participantes da pesquisa. Todos os instrumentos foram lidos pela investigadora junto com os alunos.

A coleta de dados ocorreu no final do ano letivo, ao longo de 4 meses, de acordo com a disponibilidade das escolas e dos professores. Muitos professores tinham preferência para receber a pesquisadora em dias em que não haveria aulas de Artes ou Educação física. Houve professores que também sugeriram que a coleta de dados fosse realizada antes do recreio por acreditarem que os alunos estariam mais calmos e se concentrariam melhor na pesquisa e/ou por haver maior período de tempo antes do intervalo do que depois.

Ainda, tendo em vista que a coleta esteve dividida em dois momentos, em dias distintos, muitos alunos que participaram do primeiro momento acabaram por não participar do segundo momento (ou vice-versa). Isso acarretou numa diferença ao número de participantes que responderam aos instrumentos.

¹⁰ O programa utilizado pôde ser acessado pela página <<https://www.invertexto.com/numeros-aleatorios>>

No período da coleta de dados, as escolas também estavam realizando avaliações externas de caráter obrigatório, como a Avaliação Nacional de Alfabetização (ANA) e o Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP). Isso acarretou na diminuição do tempo que as escolas disponibilizaram para a realização da pesquisa. Sendo assim, em duas escolas, foi preciso priorizar a aplicação da Escala de crença de autoeficácia e Tarefas numéricas em detrimento do Questionário.

A tabela 1 apresenta o número de alunos que responderam a cada instrumento de coleta de dados:

Tabela 1 – Número de alunos que responderam cada instrumento

Momento	1.º momento		2.º momento
Instrumento	Questionário	Escala A. E.	Tarefas S. N.
Número de alunos	338	388	351

Fonte: Autoria própria

Para análise dos dados obtidos pela Escala de crença de autoeficácia em tarefas numéricas foram realizadas análises estatísticas executadas por meio do software estatístico Statistical Package for Social Sciences (SPSS). Primeiramente, foi feita uma análise de confiabilidade da Escala calculando o coeficiente Alfa de Cronbach.

O coeficiente Alfa de Cronbach é uma forma de estimar a confiabilidade de um questionário aplicado em uma pesquisa. Ele mede a correlação entre respostas em um instrumento por meio da análise das respostas dadas pelos participantes, apresentando uma correlação média entre os itens, podendo variar de 0 a 1. A Tabela 2 apresenta a classificação do alfa de Cronbach calculado com o software estatístico SPSS, avaliando as respostas dos exercícios efetuados nesta pesquisa.

Tabela 2 - Classificação do Alfa de Cronbach





Valor de Alfa	Classificação
Acima de 0,9	Excelente
0,8 --- 0,9	Bom
0,7 --- 0,8	Aceitável
0,6 --- 0,7	Questionável
0,5 --- 0,6	Ruim
0,0 --- 0,5	Inaceitável

Fonte: Macêdo (2011, p. 35)

Quanto maior o alfa de Cronbach, maior é a homogeneidade dos itens da escala e maior é a consistência com que medem a mesma dimensão ou constructo teórico. A consistência interna estima a confiabilidade de um instrumento de pesquisa porque quanto menor é a variabilidade de um mesmo item numa amostra, menor é o erro de medida que ele possui. Assim, quanto maior for o alfa de Cronbach, mais consistente e, conseqüentemente, mais confiável é o instrumento de pesquisa.

Utilizamos, ainda, o método somativo, usualmente aplicado em escalas do tipo Likert. Para cada resposta dada, foram atribuídos pontos que variavam de 1 a 4, a saber:

Quadro 10 – Pontuação atribuída para cada alternativa

Expressão facial	Legenda	Pontuação
	Não posso resolver nada	1
	Posso resolver com muita ajuda	2
	Posso resolver com pouca ajuda	3
	Posso resolver totalmente	4

Fonte: Autoria própria

Uma das análises realizadas foi somar os pontos obtidos por cada aluno e, com os resultados, calcular uma média aritmética. Assim, foi estipulado que os alunos cuja pontuação estivesse acima da média, demonstravam crenças de autoeficácia em tarefas numéricas favoráveis (ou positivas) e os alunos cuja pontuação estivesse abaixo da média, as crenças de autoeficácia eram consideradas desfavoráveis (ou negativas). Uma análise semelhante a essa foi feita por Brito (1996) e por Moron (1998) ao investigar as atitudes em relação à Matemática por meio de uma escala do tipo Likert.

A soma dos pontos dos alunos poderia variar de 15 a 60 pontos, pois o instrumento era composto por 15 itens.

Essa análise também foi realizada para cada componente de sentido de número a fim de analisar as especificidades da crença em cada componente. As tarefas foram agrupadas de acordo com o componente que a tarefa propunha investigar. As tarefas *Mega-Sena*, *Quantos dias João já viveu?* e *Ligue as representações* estão relacionadas ao componente Conhecimento e destreza com os números; a tarefa *Resolva as expressões* está relacionada ao Conhecimento e destreza com operações; e as tarefas *Calculadora quebrada*, *A compra de Marisa* e *O campeonato esportivo* estão relacionadas ao componente Aplicar o conhecimento e destreza com números e operações em situações de cálculo.

Desta forma, para cada componente também foi calculada uma média aritmética, sendo que, os alunos que obtiveram pontuação acima da média demonstraram crenças de autoeficácia no referido componente de sentido de número positivas e os alunos cujos pontos ficaram abaixo da média apresentaram crenças de autoeficácia negativas.

Para análise dos dados provenientes das Tarefas numéricas, foram criados campos de categorias que abordam a forma de como os alunos resolveram as tarefas (variáveis qualitativas). Tendo em vista a natureza das tarefas, os aspectos analisados foram diferentes em alguns itens, como mostra o quadro a seguir (quadro 11):

Quadro 11 – Definição e descrição dos campos de categorias para cada tarefa

Tarefa		Campos de categorias
Mega-Sena		Resposta Procedimento
Quantos dias João já viveu?		Resposta Método Procedimento Adaptações
Ligue as representações		Resposta
Resolva as expressões	Adição e subtração	Resposta Método Procedimento Adaptações
	Multiplicação e divisão	Resposta Método Procedimento Proc. específico Adaptações
Calculadora quebrada		Resposta Método Procedimento Proc. específico Adaptações
A compra de Marisa		Resposta Método Procedimento Adaptações
O campeonato esportivo		Resposta Método Procedimento Proc. específico Adaptações

Fonte: Autoria própria

O quadro 11 mostra que os campos de categorias são praticamente diferentes para cada tarefa. Isso porque as tarefas são diferentes. As tarefas que requerem cálculos

apresentam mais campos de categorias para que esses cálculos possam ser descritos. A seguir será apresentada a descrição de cada campo de categoria:

- Resposta: desempenho do aluno caracterizado pela resposta totalmente certa, parcialmente certa ou errada (as possíveis classificações das respostas podem ser diferentes de acordo com cada tarefa, como mostra o quadro 12);
- Método: tipo de cálculo utilizado para resolver a tarefas (algoritmo, cálculo mental, estimativa, outro);
- Procedimento: modo de resolver determinada tarefa. Quando envolve cálculo, qual estratégia de cálculo foi utilizada (operação iterada, decomposição, linear, variada);
- Procedimento específico: quando um procedimento é amplo e ele pode ser descrito de forma mais precisa (como uma situação multiplicativa ser resolvida por meio da adição);
- Adaptações: quando um procedimento é utilizado de forma diferenciada (uma divisão realizada por agrupamento, ora a representação dos agrupamentos serem feitas por números, ora com um recurso pictórico).

Os detalhes de cada categoria serão discutidos adiante (seção 3.5) junto com a apresentação e descrição das resoluções das tarefas dos alunos, tendo em vista que as categorias são resultados de suas resoluções.

Com o instrumento Tarefas numéricas também analisamos o desempenho dos alunos de forma geral. Para a análise do campo de categorias “Respostas”, em todas as tarefas, foram atribuídos pontos aos alunos que avaliavam o seu desempenho. O quadro a seguir indica os pontos atribuídos aos alunos de acordo com seus desempenhos nas tarefas.

Quadro 12 – Pontos atribuídos aos alunos de acordo com os seus desempenhos nas tarefas

Tarefas	Respostas	Pontos
Mega - Sena	Certo	1
	Errado	0
Ligue as representações	Acertou tudo	3
	Acertou duas	2
	Acertou uma	1
	Errou tudo	0
Resolva as expressões	Resolve de duas maneiras diferentes (acertou tudo)	3
	Resolve de uma maneira (acertou uma)	1
	Resolve de duas maneiras, mas não são diferentes	2
	Não resolve (Errou tudo)	0
Quantos dias João já viveu? Calculadora quebrada A compra de Marisa O campeonato esportivo	Acertou tudo	4
	Errou resposta/acertou explicação	3
	Acertou resposta/errou explicação	2
	Acertou resposta/não justificou	1

Fonte: Autoria própria

Os pontos dos alunos foram somados e calculamos uma média aritmética que representasse o desempenho geral dos alunos nas tarefas numéricas. Os pontos somados poderiam variar de 0 a 49 pontos, pois a tarefa Resolva as expressões era composta por sete itens e a tarefa O campeonato esportivo por 3 itens. As demais tarefas eram compostas por apenas um item.

Para investigar se há relações entre o sentido de número e a crença de autoeficácia manifestados pelos alunos ao final do Ciclo de Alfabetização foram realizadas análises correlacionais entre os instrumentos Escala de crença de autoeficácia em tarefas numéricas e Tarefas numéricas, utilizando o coeficiente de correlação de Pearson. Esse coeficiente também pode ser representado por ‘r de Pearson’ ou apenas pela letra ‘r’.

Essas análises também foram realizadas por meio do software estatístico SPSS com a finalidade de investigar correlações entre algumas variáveis. Se duas variáveis são correlacionadas, então não são independentes: quando os escores de uma variável mudam, os escores da outra variável também mudam, de maneira previsível. As correlações podem ser positivas, negativas ou zero. Correlações positivas ocorrem quando valores altos de uma variável tendem a ser associados a valores altos de outra variável ou quando valores baixos de uma variável tendem a ser associados a valores baixos de outra variável. Correlações negativas ocorrem quando valores altos de uma

variável são associados a valores baixos de outra variável. A correlação também pode ser zero quando há ausência de relacionamento linear entre as variáveis.

O coeficiente de correlação é uma medida do grau de relação linear entre duas variáveis quantitativas que pode variar entre os valores -1 e 1, com as seguintes interpretações: o valor 0 (zero) significa que não há relação linear; o valor 1 indica uma relação linear perfeita; e o valor -1 também indica uma relação linear perfeita porém inversa, ou seja, quando uma das variáveis aumenta a outra diminui. Utilizamos o r de Pearson como coeficiente de correlação paramétrico e os valores obtidos podem ser interpretados da seguinte forma:

Tabela 3 - Interpretação de r de Pearson

Valor de r (+ ou -)	Correlação
0,00 a 0,29	Desprezível
0,30 a 0,49	Fraca
0,50 a 0,69	Moderada
0,70 a 0,89	Forte
0,90 a 1,00	Muito forte

Fonte: Mukaka (2012)

Sendo assim, quanto mais próximo o valor do coeficiente de correlação de Pearson estiver de 1 ou -1, mais forte é a associação linear entre as duas variáveis analisadas.

Essa análise também indica se a correlação encontrada é estatisticamente significativa ou fruto do mero acaso. Com base no tamanho da amostra e dos resultados encontrados na análise, o método de Pearson indica o nível de confiança no resultado encontrado. O SPSS sinaliza esse nível de confiança com um asterisco (*) as correlações com um grau de confiança de 95% e com dois asteriscos (**) um grau de confiança de 99%.

Sendo assim, a correlação será caracterizada pela interpretação do r de Pearson, seguindo os níveis apresentados na tabela 3, e pelo grau de confiança.

Do instrumento Escala de crença de autoeficácia em tarefas numéricas, a variável analisada é a crença de autoeficácia. Das Tarefas numéricas, as variáveis analisadas foram Resposta e Método. As correlações investigadas foram:

- Crença de autoeficácia x Resposta
- Crença de autoeficácia x Método

As análises de correlação foram realizadas de duas formas: as variáveis Crença de autoeficácia e Resposta, primeiramente, foram analisadas de forma geral, ou seja, foram relacionadas às respostas dos alunos nas tarefas numéricas (o que representa o desempenho dos alunos no instrumento como um todo) com a pontuação total obtida na Escala de crença de autoeficácia. Posteriormente, essa análise foi feita para cada componente de sentido de número, seguida de cada tarefa separadamente. As variáveis Crença de autoeficácia e Método também foram analisadas separadamente, de acordo com cada tarefa.

Essa análise foi realizada apenas com os participantes que responderam aos instrumentos Escala de crença de autoeficácia em tarefas numéricas e Tarefas numéricas, totalizando 338 alunos. Nestes instrumentos era solicitado que os alunos se identificassem com seus nomes, o que possibilitou calcular o coeficiente de correlação de Pearson. Para a análise dos dados, os alunos são identificados por meio de números ao invés de seus nomes reais.

O software estatístico SPSS verificou que não houve inconsistências ligadas à normalidade da distribuição que impedisse a realização das análises de correlações entre as diversas variáveis. Isso indica que o método de Pearson pôde ser utilizado nas análises.

3.4 Categorias para análise do Sentido de número

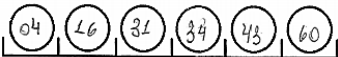
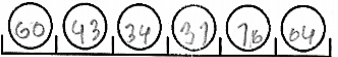

O sentido de número foi analisado a partir das respostas dos alunos ao instrumento Tarefas numéricas, identificando de que modo elas evidenciam o conhecimento e a destreza com os números e com as operações, bem como com a aplicação do conhecimento e destreza com números e operações em situações de cálculo.

As categorias foram criadas a partir das resoluções das tarefas dos alunos e serão apresentadas e exemplificadas de modo a clarificar como os dados foram analisados. As categorias “em branco” e “outros” dizem respeito a situações em que o aluno não resolveu a tarefa, quando não é possível compreender o que foi feito, ou ainda, quando o aluno trabalhou com os números da tarefa de forma sem sentido (como por exemplo, ao ter que calcular 25×12 , o aluno calcula $25 + 12$).

Na tarefa *Mega-Sena* era solicitado aos alunos que escrevessem os números sorteados numa situação de mega-sena em ordem crescente. Os campos de categorias analisados foram “resposta” e “procedimento”. A resposta poderia estar “certa” ou “errada” e os procedimentos poderiam ser “ordem crescente”, quando o aluno resolve a tarefa corretamente e “ordem decrescente” ou “ordem aleatória” quando o aluno resolve de forma equivocada.

O quadro a seguir apresenta exemplos de como as respostas dos alunos foram categorizadas:

Quadro 13 – Exemplos de análise da tarefa Mega-Sena

	1	2	3
Situação			
Resposta	Certo	Errado	Errado
Proc.	Ordem crescente	Ordem decrescente	Ordem aleatória

Fonte: Autoria própria

Na situação 1, o aluno resolve a tarefa corretamente, escrevendo os números na ordem crescente (4 – 16 – 31 – 34 – 43 – 60). Nas situações 2 e 3, os alunos resolvem erroneamente, escrevendo os números em ordem decrescente (60 – 43 – 34 – 31 – 16 – 4) e em ordem aparentemente aleatória (34 – 60 – 31 – 16 – 43 – 4).

Na tarefa *Ligue as representações* há apenas um campo de categorias referente à “resposta”, pois os alunos tinham que ligar as representações correspondentes. As categorias de resposta explicitam o que foi feito ao resolver a tarefa. Dessa forma, as respostas podem ser:

- Acertou tudo: as três ligações estão corretas;
- Acertou duas: duas ligações estão corretas (sendo que o aluno pode deixar de fazer uma das ligações);
- Acertou uma: uma ligação está correta;
- Errou tudo: nenhuma ligação está correta.

Na tarefa *Resolva as expressões* o campo de categoria “resposta” era analisado de forma geral, averiguando as formas de como os cálculos foram realizados em cada item. Os campos “método”, “procedimento”, “procedimento específico” e “adaptações” foram analisados duas vezes, contemplando os dois cálculos feitos em cada item a fim de averiguar de forma mais detalhada como os alunos pensaram nos cálculos.

Tendo em vista os aspectos específicos de cada operação e as suas relações, houve algumas diferenças no processo de análise das operações: a adição e a subtração foram analisadas via “resposta”, “método”, “procedimento” e “adaptações” enquanto que para a multiplicação e a divisão, foi acrescentado o campo de categorias “procedimento específico”. As categorias referentes à “resposta” e ao “método” são as mesmas para as quatro operações.

As categorias referentes à resposta são:

- Resolve de duas maneiras diferentes: o aluno resolve a mesma operação utilizando métodos e/ou procedimentos de cálculo diferentes um do outro;
- Resolve de duas maneiras que não são diferentes: o aluno resolve a mesma operação, duas vezes, utilizando o mesmo método e/ou procedimento;
- Resolve de uma maneira: o aluno resolve apenas uma vez a operação ou resolve de forma equivocada uma das operações feitas;
- Não resolve: o aluno não resolve ou tenta resolver, mas erra.

As categorias referentes ao método são:

- Algoritmo: o aluno calcula por meio de dígitos;
- Cálculo mental: calcula valores globais dos números.

As categorias referentes ao procedimento para adição e subtração são:

- Iterado: quando se usa um algoritmo;
- Decomposição: quando há a decomposição decimal dos dois termos;
- Salto: quando há a decomposição decimal de apenas um termo para calcular;
- Variada (*varying*): quando o aluno calcula com os números a partir de suas estruturas e propriedades aritméticas.

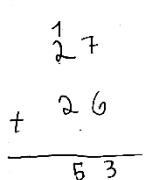
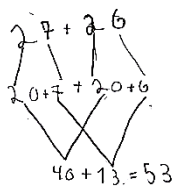
As categorias referentes às adaptações para adição e subtração são:

- Sem adaptações: principalmente quando o aluno calcula por meio de um algoritmo;
- Encurtar, por decomposição dos termos num múltiplo de 10 e o resto: recurso utilizado no procedimento de decomposição;
- Encurtar, por decomposição de um termo num múltiplo de 10 e o resto: recurso utilizado no procedimento de salto;

- Decompor/recompor com fatos, tirando partido da estrutura dobro/metade, decomposição de 50 e decomposições de números com dois dígitos em $50 + \dots$: recurso utilizado no procedimento de variadas;
- Representar de forma pictórica: quando o aluno resolve a operação com o uso de imagens para contar ou fazer agrupamentos, como registros de pequenos riscos ou círculos ao representar valores numéricos;
- Alterar a ordem dos termos: quando o aluno recorre ao mesmo método utilizado anteriormente no item, porém, inverte as ordens das parcelas (na adição), ou do minuendo com o subtraendo (na subtração);
- Representar “na horizontal”: quando o aluno, primeiramente, recorre ao algoritmo e, no segundo momento, apenas reescreve a expressão com a resposta, igual ao do enunciado, como se esse procedimento remetesse a outra maneira de calcular;
- Mudar termos e/ou operação para chegar ao resultado obtido anteriormente: quando o aluno, primeiramente, recorre a algum método de cálculo e, posteriormente, realiza uma conta com números e/ou operação diferentes da solicitada para que o resultado seja igual ao da primeira conta;
- Fazer a prova real: quando o aluno utiliza um procedimento que tem a finalidade de conferir se uma conta foi feita corretamente por meio da operação oposta, como se esse fosse outro modo de se fazer a mesma conta;
- Inverter algarismo para subtrair o menor do maior: na subtração, $72 - 14$, subtrair 2 de 4 e 1 de 7, pois “se tira o menor do maior”.

Os quadros a seguir apresentam exemplos de como as respostas dos alunos foram categorizadas em situações de adição e de subtração:

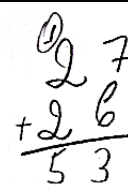
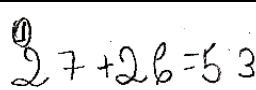
Quadro 14 – Exemplos de análise da tarefa Resolva as expressões – Situação 1

			
Resposta	Resolve de duas maneiras		
Método	Algoritmo	Cálculo mental	
Procedimento	Iterado	Decomposição	
Adaptações	Sem	Encurtar, por decomposição de um termo num múltiplo de 10 e o resto	

Fonte: Autoria própria

Na situação 1, o aluno utiliza dois métodos diferentes, assim como solicitava a tarefa. Primeiramente ele utiliza um algoritmo e em seguida, um cálculo mental pelo procedimento de decomposição.


Quadro 15 – Exemplos de análise da tarefa Resolva as expressões – Situação 2

			
Resposta	Resolve de duas maneiras, mas não são diferentes		
Método	Algoritmo	Algoritmo	
Procedimento	Iterado	Iterado	
Adaptações	Sem	Representação na horizontal	

Fonte: Autoria própria

Nessa situação, ambos os métodos utilizados foram algorítmicos. Na primeira maneira, a representação do algoritmo é a convencional. Na segunda forma, o aluno reescreva a conta de forma horizontal e coloca o resultado.

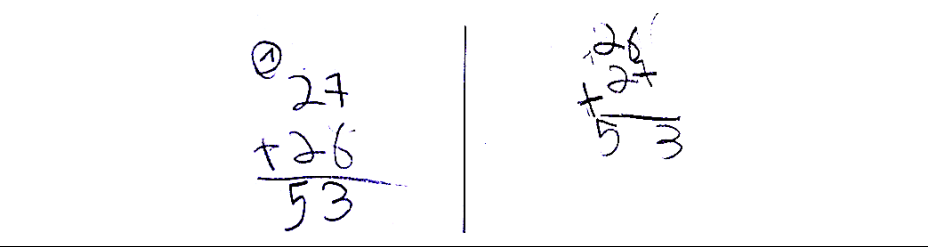
Quadro 16 – Exemplos de análise da tarefa Resolva as expressões – Situação 3

		
Resposta	Resolve de duas maneiras, mas não são diferentes	
Método	Algoritmo	Algoritmo
Procedimento	Iterado	Iterado
Adaptações	Sem	Mudar os termos para chegar ao resultado obtido anteriormente

Fonte: Autoria própria

Na situação 3, novamente, o aluno primeiramente utiliza o algoritmo convencional da adição, chegando ao resultado 53. Na segunda forma, nota-se que o aluno utiliza números e operações diferentes do apresentado na tarefa a fim de obter o mesmo resultado da primeira expressão e, ao fazer isso, utiliza o mesmo método de cálculo, o algoritmo.

Quadro 17 – Exemplos de análise da tarefa Resolva as expressões – Situação 4

		
Resposta	Resolve de duas maneiras, mas não são diferentes	
Método	Algoritmo	Algoritmo
Procedimento	Iterado	Iterado
Adaptações	Sem	Alterar a ordem dos termos

Fonte: Autoria própria

Por fim, nessa situação, assim como na anterior, o aluno utiliza os mesmos métodos e procedimentos como se fossem formas diferentes de calcular. Na primeira maneira ele opera com os valores na ordem como estava presente na tarefa. Contudo, no segundo momento, o aluno inverte ordem das parcelas recorrendo à propriedade comutativa da adição.

As categorias referentes ao procedimento para as tarefas de multiplicação e divisão diferenciam-se dos procedimentos utilizados na adição e na subtração. Por exemplo, para resolver 52×2 , num primeiro momento, seria possível utilizar o algoritmo da multiplicação e, num segundo momento, poderia adicionar calculando $52 + 52$. Sendo assim, as categorias presentes nas resoluções dos alunos são:

- Contagem: quando o aluno conta de um em um ou por agrupamentos;
- Adição;
- Subtração;
- Multiplicação;
- Divisão.

Os procedimentos específicos relativos à multiplicação e divisão são:

- Iterado: quando se utiliza o algoritmo convencional (da multiplicação ou da divisão);
- Adicionar: quando o aluno realiza uma multiplicação com soma de parcelas iguais;
- Usar uma decomposição não decimal de um dos fatores;
- Usar a decomposição decimal de um dos fatores;
- Usar a divisão longa¹¹: quando o aluno subtrai do dividendo, produtos parciais do divisor com o quociente (pois a divisão ainda não foi finalizada).
- Fazer agrupamentos: quando o aluno faz agrupamentos para facilitar a contagem.

As categorias referentes às adaptações para multiplicação e divisão foram:

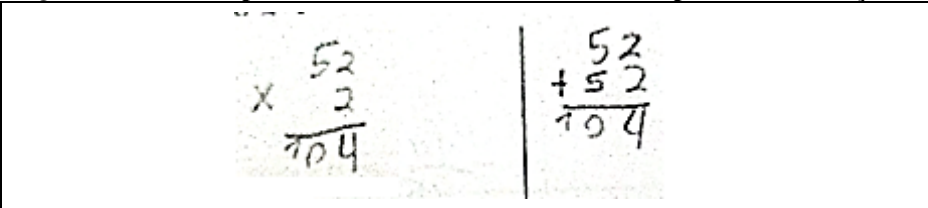
- Sem adaptações;
- Encurtar, por decomposição de um termo num múltiplo de 10 e o resto;
- Decompor/recompor com fatos, tirando partido da estrutura dobro/metade, decomposição de 50 e decomposições de números com dois dígitos em $50 + \dots$;
- Alterar a ordem dos termos;
- Representar “na horizontal”;
- Representar de forma pictórica;

¹¹ Para Treffers, Nootboom e Goeij (2008), a divisão longa é considerada o cálculo em coluna da divisão, podendo ser vista como um precursor perspicaz para divisão curta, o algoritmo. Contudo, notamos que, mesmo utilizando os mesmos modos de calcular, os alunos trabalham com os números na forma de dígitos e não em sua totalidade. Sendo assim, a divisão longa está sendo trabalhada de forma algorítmica.

- Prova real;
- Fazer somas parciais: quando o aluno adiciona sucessivamente o valor do multiplicando ao resultado parcial a quantidade de vezes indicado pelo multiplicador ($25 \times 12 = 25 + 25 = 50 + 25 = 75 + 25 = 100 + 25 \dots$);
- Divisão representada como outro algoritmo: quando o aluno representa o algoritmo da divisão igual ao da adição, subtração e multiplicação.

Os quadros a seguir apresentam exemplos de como as respostas dos alunos foram categorizadas em situações de multiplicação e de divisão:

Quadro 18 – Exemplos de análise da tarefa Resolva as expressões – Situação 5

		
Resposta	Resolve de duas maneiras	
Método	Algoritmo	Algoritmo
Procedimento	Multiplicação	Adição
Proc. Específico	Iterado	Iterado
Adaptações	Sem	Sem

Fonte: Autoria própria

Na situação 5, o aluno realiza a operação de duas maneiras diferentes, assim como foi solicitado na tarefa. Mesmo utilizando métodos algoritmos, os métodos em si são diferentes, pois num momento é o algoritmo da multiplicação e no outro da adição.

Quadro 19 – Exemplos de análise da tarefa Resolva as expressões – Situação 6

Resposta	Resolve de duas maneiras	
Método	Algoritmo	Algoritmo
Procedimento	Multiplicação	Adição
Proc. Específico	Iterado	Iterado
Adaptações	Sem	Várias adições

Fonte: A autoria própria

Nesta situação, assim como na situação 5, o aluno utiliza algoritmos, sendo que no primeiro momento utiliza o algoritmo de multiplicação e no segundo momento, o de adição. Contudo, para calcular 25×12 por meio da adição, o aluno não realiza somas de parcelas iguais, como por exemplo, $25 + 25 + 25 + 25 \dots$, mas sim, adiciona sucessivamente a partir de várias adições de duas parcelas. Ou seja, o aluno, primeiramente, soma $25 + 25$ e obtém 50; em seguida, calcula $50 + 25$ resultando em 75; e assim, o aluno adiciona 25 no resultado obtido na soma anterior, 12 vezes.

Quadro 20 – Exemplos de análise da tarefa Resolva as expressões – Situação 7

Resposta	Resolve de duas maneiras	
Método	Algoritmo	Cálculo mental
Procedimento	Divisão	Divisão
Proc. Específico	Iterado	Divisão longa
Adaptações	Sem	Disposição vertical

Fonte: A autoria própria

Na situação 7, os métodos utilizados pelo aluno foram algoritmo e cálculo mental. Nota-se que, apesar das semelhanças entre os registros, no segundo momento, o aluno apresenta maior quantidade de etapas do cálculo, e ainda, para obter o resultado total, foi preciso somar os resultados parciais (15 + 15).

Quadro 21 – Exemplos de análise da tarefa Resolva as expressões – Situação 8

Resposta	Resolve de duas maneiras	
Método	Cálculo mental	Cálculo mental
Procedimento	Divisão	Contagem
Proc. Específico	Outro	Fazer agrupamentos
Adaptações	Divisão representada como outro algoritmo	Representar de forma pictórica

Fonte: Autoria própria

Nesta situação, o aluno realiza o cálculo de duas formas diferentes. No primeiro momento, o aluno procura utilizar um cálculo mental e o representa como os algoritmos de adição, subtração e multiplicação. No segundo momento, o aluno representa o 60 com “risquinhos” e o divide em dois grupos de 30.

A tarefa *Quantos dias João já viveu?* solicita ao aluno que responda se João já havia vivido mais que 400 dias sendo que ele tinha dois anos de idade e ainda, que explique como pensou. Para responder a pergunta, os alunos podem recorrer a cálculos por estimativa, se apoiando em respostas globais, sem necessariamente utilizar cálculos exatos provenientes de um algoritmo ou cálculo mental. Ainda, houve alunos que responderam a questão baseando-se em julgamentos pessoais, sem o uso de métodos e procedimentos matemáticos. Por conta disso, foram adicionadas categorias de análise que abordam esses métodos e procedimentos.

As categorias de resposta explicitam o que foi feito ao resolver a tarefa. Desta forma, as categorias são:

- Acertou tudo: acertou resposta e a explicação;

- Acertou resposta/errou explicação (ou explicação incompleta): quando o aluno acerta a resposta, mas erra a explicação, ou ainda, não explica de modo completo que João já viveu em mais de 400 dias;
- Errou resposta/acertou explicação: quando o aluno erra a resposta, mas acerta a explicação;
- Acertou resposta/não explicou: o aluno acerta a resposta, mas não explica como pensou. Houve casos de alunos apresentarem o cálculo que embasa sua resposta, mas o aluno não explicou como pensou;
- Errou tudo: o aluno erra resposta e explicação.

As categorias referentes ao método são:

- Algoritmo
- Cálculo mental
- Estimativa: quando o aluno reflete/opera com os números de forma global;
- Resposta não matemática: quando o aluno explica como pensou, mas essa explicação não está baseada em raciocínio matemático e sim em julgamentos e inferências pessoais.

As categorias referentes ao procedimento são:

- Iterado
- Decomposição
- Salto
- Variada
- Inferências pessoais: a partir de julgamentos o aluno explica como pensou para resolver a tarefa sem se basear em cálculos matemáticos;
- Por aproximação: o aluno reconhece a grandeza do número 400 a partir da quantidade de dias que tem um ano.

As categorias referentes às adaptações são:

- Sem: quando o aluno opera com as quantidades de dias do ano de forma algorítmica;
- Uso de fatos conhecidos: o aluno entende que 365 (dias do ano) é relativamente próximo a 400;

- Somar quantidade de dias dos meses: ao invés de utilizar a quantidade de dias de um ano para responder a questão (já que é preciso responder se João já viveu mais que uma determinada quantidade de dias), o aluno trabalhar com quantidade de meses do ano;
- Calcular valores do enunciado: quando o aluno apenas opera com os dados presentes no enunciado.

Quadro 22 – Exemplos de análise da tarefa Quantos dias João já viveu?

<i>Situação 1</i>	<u>SIM, PORQUÉ UM ANO TEM 300 POUCOS DIAS.</u>
Resposta	Acertou resposta / Errou
Método	Estimativa
Procedimento	Por aproximação
Adaptações	Uso de fatos conhecidos
<i>Situação 2</i>	<p>Sim. Porque ele viveu 2 meses que dá 730 dias.</p> $\begin{array}{r} 1 \\ 1 \\ 365 \\ +365 \\ \hline 730 \end{array}$
Resposta	Acertou tudo
Método	Algoritmo
Procedimento	Iterado
Adaptações	Sem
<i>Situação 3</i>	NÃO, PORQUE ELE É UMA CRIANÇA.
Resposta	Errou tudo
Método	Resposta não matemática
Procedimento	Inferência pessoal
Adaptações	Sem

Fonte: Autoria própria

Na situação 1, o aluno resolveu a tarefa corretamente, sem precisar recorrer a cálculos exatos. Em sua resposta, ele não salientou a quantidade exata de dias do ano

para responder à tarefa, o que sugere uma estimativa para responder a pergunta. No entanto, sua explicação se mostra incompleta, pois ele não explica que João já viveu mais de 400 dias.

Na situação 2, o aluno recorre ao algoritmo da adição e opera com valores exatos. Nota-se que, nas duas situações, as respostas estão certas e corretamente justificadas. O que diferencia as duas situações são os métodos e procedimentos utilizados para resolver a tarefa.

Já na situação 3, o aluno responde à tarefa a partir de um julgamento pessoal que consiste em 400 dias ser muito tempo e que uma criança ainda não teria vivido tanto.

A tarefa *Calculadora quebrada* solicita ao aluno que explique como calcular 25×5 em uma calculadora cujo botão do número 2 estava quebrado. Por se tratar de uma situação multiplicativa, nessa tarefa também são analisadas as categorias referentes aos “procedimentos” e “procedimentos específicos” adotados na tarefa *Resolva as expressões* nas situações de multiplicação e divisão.

Tal como na tarefa *Quantos dias João já viveu?*, houve alunos que responderam a questão sem o uso de métodos e procedimentos matemáticos.

As categorias de resposta explicitam o que foi feito ao resolver a tarefa. Dessa forma, as respostas podem ser:

- Acertou tudo;
- Acertou resposta/errou explicação;
- Errou resposta/acertou explicação;
- Acertou resposta/não explicou;
- Errou tudo.

As categorias referentes ao método são:

- Algoritmo
- Cálculo mental
- Resposta não matemática.

As categorias referentes ao procedimento são:

- Contagem;
- Adição;

- Subtração;
- Multiplicação;
- Divisão.

As categorias referentes ao procedimento específico são:

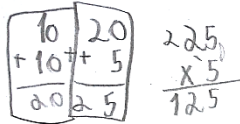
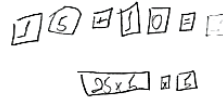
- Iterado: quando o aluno calcula de forma algorítmica, ou mesmo não realizando um algoritmo em si, por se tratar de uma situação que envolve calculadora, houve alunos que responderam a tarefa a partir de dígitos, interpretando o “2” do número 25 como $1+1$.
- Usar produtos conhecidos;
- Adicionar sucessivamente;
- Usar uma decomposição não decimal de um dos fatores;
- Usar a decomposição decimal de um dos fatores;
- Realizar cálculos a partir do resultado: quando o aluno, sabendo que o resultado a ser encontrado na tarefa é 125, realiza cálculos para obter esse resultado, sem se ater no número 25;
- Inferência pessoal: a partir de julgamentos, o aluno explica outras formas de fazer o cálculo, mas sem utilizar a calculadora apresentada no enunciado.

As categorias referentes às adaptações são:

- Sem: quando o aluno faz um algoritmo ignorando o fato de não poder utilizar o número 2 nessa situação;
- $10 + 10 = 20$; $20 + 5 = 25$: quando o aluno decompõe o número 25 de forma decimal;
- $35 - 10 = 25$ ou $30 - 5 = 25$; $75 - 50$; $15 + 10 = 25$: quando o aluno decompõe o número 25 de forma não decimal;
- $5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 \dots$: quando o aluno adiciona sucessivamente;
- Usar a tabuada (5×5): uso de produtos conhecidos;
- Decompor o algarismo 2 do número 20 em $1 + 1$: quando o aluno registra que, para formar o número 25 sem pressionar o algarismo 2 na calculadora, deve-se apenas pressionar “ $1 + 1$ ” seguido do algarismo 5;
- Fazer com outra calculadora / no papel.

Os quadros a seguir apresentam exemplos de como as respostas dos alunos foram categorizadas.

Quadro 23 – Exemplos de análise da tarefa Calculadora quebrada – Situação 1

	1	2
Situação		<p>Ela pode apertar as teclas 1-5-+-10-2 e ir para 25 depois ela aperta as teclas x e 5 e está pronto</p> 
Resposta	Acertou tudo	Acertou tudo
Método	Cálculo mental	Cálculo mental
Procedimento	Adição	Adição
Proc. específico	Usar a decomposição decimal de um dos fatores	Usar uma decomposição não decimal de um dos fatores
Adaptações	$10 + 10 = 20$; $20 + 5 = 25$	$15 + 10 = 25$

Fonte: Autoria própria

Este quadro representa situações de acerto nos quais os alunos utilizaram o mesmo método, o de cálculo mental, e procedimentos específicos diferentes. Na situação 1, o aluno utilizou a decomposição decimal de um dos fatores, entendendo o 25 como $20 + 5$ e, por não poder pressionar o botão do algarismo 2, decompôs o 20 em $10 + 10$. A situação 2 representa uma situação semelhante, porém, o aluno usou uma decomposição não decimal de um dos fatores, pois não decompôs o 25 em sua estrutura decimal, mas sim em $15 + 10$.

Quadro 24 – Exemplos de análise da tarefa Calculadora quebrada – Situação 2

	5	6
Situação	$1+1=25 \times 5=125$	sem ^{com} calculadora ^{outra}
Resposta	Errou tudo	Errou tudo
Método	Outro	Resposta não Matemática
Procedimento	Outro	Outro
Proc. específico	Outro	Outro
Adaptações	Decompor o algarismo 2 do número 20 em 1 + 1	Fazer com outra calculadora/ no papel

Fonte: Autoria própria

Neste quadro, os exemplos são de resoluções erradas. Na situação 5, o aluno entende o 25 como 2 e 5 e não como $20 + 5$. Desta forma, para ele, calcular 25×5 numa calculadora sem apertar o número 2 bastaria apertar $1 + 1$. Já na situação 6, o aluno sugere que se use outra calculadora.

A tarefa *A compra de Marisa* solicitava ao aluno que explicasse se, com 50 reais, Marisa poderia comprar dois presentes, sendo um de 29 reais e outro de 25 reais.

As categorias referentes à resposta são:

- Acertou tudo;
- Acertou resposta/errou explicação;
- Errou resposta/acertou explicação;
- Acertou resposta/não explicou;
- Errou tudo.

As categorias referentes ao método são:

- Algoritmo;
- Cálculo mental;
- Estimativa;
- Resposta não matemática.

As categorias referentes ao procedimento são:

- Iterado;
- Decomposição;

- Salto;
- Variada;
- Inferências pessoais;
- Por aproximação.

As categorias referentes às adaptações são:

- Sem;
- Trabalhar com os números de forma global;
- Somar os preços: quando o aluno soma os valores dos presentes e responde a questão;
- Subtrair sucessivamente: quando o aluno subtrai os preços do total de dinheiro que Marisa tinha;
- Subtrair um preço do outro: quando o aluno subtrai o preço de um presente do outro.

Os quadros a seguir apresentam exemplos de como as respostas dos alunos foram categorizadas.

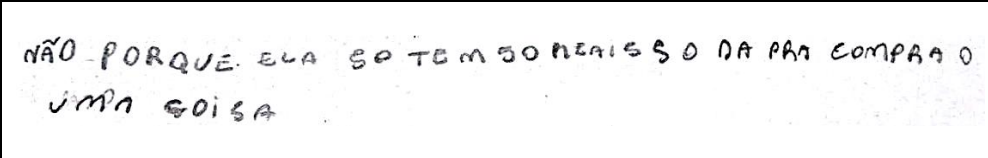
Quadro 25 – Exemplos de análise da tarefa A compra de Marisa – Situação 1

<p><i>não. Porque a camiseta e o sapato juntos custam 54 reais</i></p> $\begin{array}{r} 25 \\ + 29 \\ \hline 54 \end{array}$	
Resposta	Acertou tudo
Método	Algoritmo
Procedimento	Iterado
Adaptações	Sem

Fonte: Autoria própria

Neste exemplo, o aluno recorre a um algoritmo, somando os valores dos presentes para justificar se Marisa poderia comprar tudo com 50 reais.

Quadro 26 – Exemplos de análise da tarefa A compra de Marisa – Situação 2

	
Resposta	Acertou tudo
Método	Estimativa
Procedimento	Estimativa
Adaptações	Trabalha com os números de forma global

Fonte: Autoria própria

Já neste exemplo, o aluno não realiza nenhum cálculo no papel. Porém, por responder que com 50 reais seria possível comprar apenas um dos presentes, é possível perceber que ele entendeu que os dois presentes juntos ficariam mais que 50 reais.

A tarefa *O campeonato esportivo* é dividida em três itens, sendo que a resolução de um poderia contribuir com a resolução dos demais itens. Ela solicitava aos alunos que, em geral, respondessem quantas garrafas de água havia nas figuras e explicassem como haviam pensado.

As categorias referentes à resposta são:

- Acertou tudo;
- Acertou resposta/errou explicação;
- Errou resposta/acertou explicação;
- Acertou resposta/não explicou;
- Errou tudo.

As categorias referentes ao método são:

- Algoritmo;
- Cálculo mental;
- Resposta não matemática.

As categorias referentes ao procedimento são:

- Contagem/agrupamento;
- Adição;
- Subtração;

- Multiplicação;
- Divisão.

As categorias referentes ao procedimento específico são:

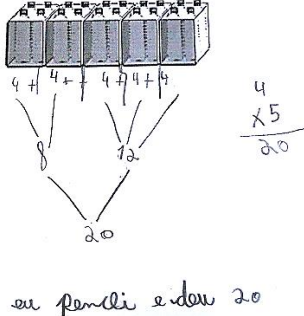
- Iterado;
- Contar por saltos;
- Fazer agrupamentos;
- Adicionar sucessivamente;
- Usar produtos conhecidos.

As categorias referentes às adaptações são:

- Sem;
- Representar de forma pictórica;
- Contar de 1 em 1;
- Contar de 2 em 2;
- Contar de 4 em 4;
- Contar de 5 em 5;
- Contar de 6 em 6;
- Adicionar/agrupar de 20 em 20;
- Agrupar por colunas de 12 em 12;
- Agrupamento irregular (12+8);
- $2 \times 10 \times 3$;
- Somar termos presentes no enunciado.

Os quadros a seguir apresentam exemplos de como as respostas dos alunos foram categorizadas.


Quadro 27 – Exemplos de análise da tarefa O campeonato esportivo – Parte 1

	1	2	3
Situação	$\begin{array}{r} 40 \\ + 4 \\ + 4 \\ + 4 \\ + 4 \\ + 4 \\ \hline 20 \end{array}$		<p>TEM 20 GARRAFAS EU CONTEI</p>
Resposta	Acertou resposta / não justificou	Acertou tudo	Acertou tudo
Método	Algoritmo	Cálculo mental	Cálculo mental
Procedimento	Adição	Agrupamento	Contagem
Proc. específico	Iterado	Fazer agrupamentos	Contar por saltos
Adaptações	Sem	Agrupamento irregular	Contar de 1 em 1

Fonte: Autoria própria

Na situação 1, o aluno recorreu ao algoritmo da adição de cinco parcelas, sendo que cada parcela representa uma embalagem, e ainda utiliza as quantidades de garrafas de cada embalagem como valor de cada parcela. Já o aluno da situação 2, em um momento, parte da quantidade de garrafas em cada embalagem, faz agrupamentos, um de 8 garrafas (duas embalagens) e outro de 12 garrafas (três embalagens). Juntando tudo, conclui que há 20 garrafas. Outro método utilizado foi o algoritmo da multiplicação. Para explicar como pensou, o aluno apenas escreveu que contou, chegando ao resultado de 20 garrafas. Na situação 3, o aluno afirma que há 20 garrafas e explica que utilizou o procedimento de contagem.

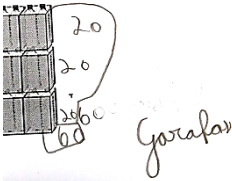
Quadro 28 – Exemplos de análise da tarefa O campeonato esportivo – Parte 2

	1	2
Situação		<p>QUATRO LINES FORAM OPERACIONAIS</p> <p>15. Se há 15 embalagens com 4 garrafas e 4×15 é igual a 60 então a 60 garrafas.</p>
Resposta	Errou resposta, acertou explicação	Acertou tudo
Método	Cálculo mental	Algoritmo
Procedimento	Contagem	Multiplicação
Proc. específico	Contar por saltos	Iterado
Adaptações	Representar de forma pictórica	Sem

Fonte: Autoria própria

Nesta etapa da tarefa, os alunos podem utilizar o resultado obtido na primeira etapa ou outras estratégias para resolução, tendo em vista que as embalagens estarem sobrepostas e em maior quantidade dificulta a contagem. No entanto, na situação 1, o aluno representa as embalagens e as garrafas com “risquinhos” e faz a contagem, porém, de forma equivocada. Na situação 2, o aluno realiza um algoritmo da multiplicação, sendo que há 15 embalagens, com 4 garrafas em cada uma.

Quadro 29 – Exemplos de análise da tarefa O campeonato esportivo – Parte 3

	1	2
Situação		<p>R-60 EU FIZ A CONTA</p> <p>30 x 2 60</p>
Resposta	Acertou resposta/não justificou	Acertou tudo
Método	Algoritmo	Algoritmo
Procedimento	Adição	Multiplicação
Proc. específico	Fazer agrupamentos	Iterado
Adaptações	Adicionar/agrupar de 20 em 20	Sem

Fonte: Autoria própria

Nesta parte da tarefa, na situação 1, o aluno faz agrupamentos de 20, sendo que em cada fileira há 20 garrafas. Já na situação 2, o aluno utiliza o algoritmo da multiplicação e explica que pensou apresentando o algoritmo.

3.5 Instrumento para investigar o sentido de número

O instrumento elaborado para investigar o sentido de número de alunos do 3.º ano do Ensino Fundamental foi baseado no “Quadro de referência para considerar o sentido de número” (MCINTOSH; REYS; REYS, 1992, p. 7). Sendo assim, os componentes investigados foram: Conhecimento e destreza com os números; Conhecimento e destreza com operações; e Aplicar o conhecimento e destreza com números e operações em situações de cálculo.

Para investigar esses componentes, foram utilizadas tarefas numéricas que abordam, pelo menos, um aspecto específico de cada componente. As tarefas foram embasadas e adaptadas de trabalhos desenvolvidos sobre sentido de número e cálculo mental, tais como Mendes et al. (2010), McIntosh, Reys e Reys (1992) e Oliveira (2013).

A seguir, serão apresentadas as tarefas numéricas bem como os componentes e os aspectos de sentido de número investigados.

3.5.1 Tarefas que enfatizam o *Conhecimento e destreza com os números*

Para investigar o componente “Conhecimento e destreza com os números”, foram utilizadas as seguintes tarefas:

- **Mega-Sena:** Nesta tarefa, objetiva-se investigar o sentido da ordenação dos números, aspecto fulcral da compreensão do sistema decimal de posição (MCINTOSH; REYS; REYS, 1992). Para investigar esse aspecto, é solicitado ao aluno que organize de forma crescente os números apresentados. Os dígitos utilizados nos números são 0, 1, 3, 4 e 6 que, ora constituem a unidade, ora constituem a dezena. Organizar esses números exige o conhecimento de que, no sistema de numeração decimal, com apenas dez símbolos, é possível escrever qualquer número e que, dependendo da ordem em que o símbolo estiver, corresponderá a um certo valor numérico. Assim, espera-se que os alunos ordenem os números apresentados em 04 – 16 – 31 – 34 – 43 – 60.

- **Ligue as representações:** Esta tarefa foca as múltiplas representações para os números, o que inclui reconhecer que eles podem ser representados de diversas formas (MCINTOSH; REYS; REYS, 1992). Aqui, são utilizados os números 25×4 e $75 + 25$ para representar o 100; $51 - 49$ e $91 - 89$ para representar o 2; e $33 + 33$ e 66 para representar o 66.

Os critérios para escolha desses números foram a composição e decomposição de forma não decimal, ou seja, não estão representados por um múltiplo de 10 e o resto (25×4 e $75 + 25$); tirando partido da estrutura dobro/metade ($33 + 33$ e 66); ou ainda por serem números fáceis de se operar tendo em vista que são números ‘próximos’ ($51 - 49$ e $91 - 89$) o que pode induzir a ‘pensar’ nos números e a não usar o algoritmo. Um possível procedimento a ser utilizado é o de completar: 49 para 51 faltam 2; 89 para 91 faltam 2). Também poderiam arredondar um dos números e depois compensar.

- **Quantos dias João já viveu?:** Esta tarefa está relacionada ao sentido da grandeza relativa e absoluta dos números e consiste na capacidade de reconhecer o valor ou uma quantidade relativamente a outro número ou quantidade e a capacidade de perceber o valor ou grandeza geral de um dado número ou quantidade (MCINTOSH; REYS; REYS, 1992). Nesta tarefa, é possível perceber se os alunos, partindo do fato de que um ano tem 365 dias (366 dias em ano bissexto) poderão pensar sobre a grandeza do número 400 a partir de um contexto pessoal.

3.5.2 Tarefas que enfatizam o *Conhecimento e destreza com operações*

Para investigar o componente “conhecimento e destreza com operações”, foi utilizada a seguinte tarefa:

- **Resolva as expressões:** A partir dessa tarefa é possível investigar aspectos relativos a esse componente no que se refere em compreender o efeito relativo das operações, compreender propriedades matemáticas e compreender a relação entre as operações (MCINTOSH; REYS; REYS, 1992). Sendo assim, mesmo que num primeiro momento os alunos optem por resolver as expressões de forma algorítmica, por ter que resolvê-las de outra maneira diferente, pode-se evidenciar particularidades sobre o efeito das operações com números naturais, propriedades matemáticas, tais como

comutativa, associativa e distributiva e ainda a relação existente entre à adição, subtração, multiplicação e divisão.

Ainda, esta tarefa evidenciará os tipos de cálculos utilizados pelos alunos diante das operações aritméticas, se é cálculo mental, cálculo algorítmico ou algum outro tipo de cálculo. Quando utilizado o cálculo mental, também serão evidenciadas as estratégias que os alunos utilizam, podendo variar entre estratégia linear, por decomposição e estratégia variada (*varying* no original) (BUYS, 2008).

3.5.3 Tarefas que enfatizam o *Aplicar o conhecimento e destreza com números e operações em situações de cálculo*

Para investigar o componente “Aplicar o conhecimento e destreza com números e operações em situações de cálculo”, foram utilizadas as seguintes tarefas:

- **Calculadora quebrada:** Esta tarefa está relacionada à aplicação do conhecimento e destreza com números no que diz respeito à facilidade para escolher números eficazes diante de um contexto (MCINTOSH; REYS; REYS, 1992). Desta forma, as possibilidades para representar o número 25 sem utilizar o algarismo 2 seriam decomposição/recomposição não decimal (por exemplo $15+10$ ou $30-5$); decomposição/recomposição decimal ($10 + 10 + 5$); uso de produtos conhecidos (5×5); entre outros.

- **A compra de Marisa:** Esta tarefa tem a finalidade de verificar se os alunos compreendem o contexto do problema e identificam uma estratégia para resolvê-lo (MCINTOSH; REYS; REYS, 1992). Mesmo havendo a possibilidade da tarefa ser resolvida com um cálculo exato, não é necessário que isso ocorra. Um cálculo por estimativa seria mais apropriado tendo em vista que o mais importante é a grandeza da resposta nessa situação (SOWDER, 1988; HEUVEL-PANHUIZEN, 2008; BYS, 2008).

Note-se que os valores envolvidos na tarefa são fáceis de serem operados tendo em vista a relação entre eles de dobro e metade: se o dobro de 25 é 50 e 29 é um pouco mais de 25, 25 mais “um pouco mais de 25” será um pouco mais de 50.

- **O campeonato esportivo:** Esta sequência de tarefas nos permite investigar a noção de que existem múltiplas estratégias para resolver uma situação, o que implica

nos alunos perceberem que, se uma estratégia parece inadequada, eles têm de formular e aplicar uma estratégia alternativa para obter a resposta (MCINTOSH; REYS; REYS, 1992).

Mendes et al. (2010) apresentam algumas possibilidades de resolução que os alunos podem realizar para resolver as três questões. Tendo em vista que os valores presentes nas tarefas foram alterados, aqui serão apresentadas as mesmas possibilidades de forma adaptada.

Para resolver a primeira questão, os alunos poderão utilizar a estratégia da contagem e contar de um em um; adicionar o número 4 cinco vezes ($4+4+4+4+4$); adicionar o número 10 ou o número 2 sucessivamente ($10+10$ ou $2+2+2+2+2+2+2+2+2+2$), sendo que, na imagem, há 10 fileiras com 2 garrafas de água em cada uma; calcular 5 vezes 4; e ainda calcular 2 vezes 10 ou 10 vezes 2 a partir do método grade.

Para resolver a segunda questão, algumas das possibilidades estão relacionadas com a resposta obtida na primeira questão. Sendo assim, os alunos poderão fazer 3 vezes 20, pois são 3 “camadas” de embalagens e essa operação pode ser feita de forma $3 \times 2 \times 10$ ou $3 \times 10 + 3 \times 10$. Se os alunos optarem por escolher uma estratégia a partir da observação da imagem; poderão pensar no triplo de garrafas de uma “camada” e calcular $3 \times (2 \times 10)$ ou $3 \times (10 \times 2)$; poderão adicionar o número de garrafas de cada “camada” e calcular $2 \times 10 + 2 \times 10 + 2 \times 10$ ou $10 \times 2 + 10 \times 2 + 10 \times 2$; ou ainda pensar em 3 “camadas” de 5 embalagens de 4 garrafas e calcular $3 \times 5 \times 4$. Se os alunos optarem por não relacionar essa questão com a anterior, eles poderão pensar em 15 embalagens de 4 garrafas e calcular 15×4 das seguintes maneiras: recorrendo à decomposição do 4 em $2 + 2$, calculado $15 \times 2 + 15 \times 2$; recorrendo à decomposição decimal do 15 em $10 + 5$ e calcular $10 \times 4 + 5 \times 4$; ou ainda transformando o 15 em 3×5 e calcular $3 \times 5 \times 4$.

Já na terceira questão, os alunos poderão usar estratégias semelhantes às utilizadas nas questões anteriores. Outras resoluções que podem ser feitas decorrem do modo de como as embalagens de garrafas estão organizadas na imagem apresentada na tarefa. Assim, os alunos poderão pensar em 3 “camadas” de 20 garrafas e fazer 3×20 ; ou ainda pensar que há 10 colunas de 3 embalagens empilhadas, com 2 garrafas cada uma e fazer $10 \times 3 \times 2$; e por fim, os alunos poderão pensar que há 30 embalagens com 2 garrafas cada uma e multiplicar 30×2 ou $3 \times 10 \times 2$.

Outra possibilidade de resolução é os alunos perceberem que, comparado com a questão anterior, o número de embalagens é o dobro e o número de garrafas por

embalagem é a metade. Assim, podem pensar que, se 15 embalagens de 4 garrafas têm um total de 60 garrafas, então 30 embalagens de 2 garrafas também terá um total de 60 garrafas ($15 \times 4 = 30 \times 2$).

3.6 Participantes

Os participantes dessa pesquisa foram 407 alunos de 29 turmas do final do 3.º ano do Ensino Fundamental de 12 escolas públicas distintas. A escolha pelo 3.º ano ocorreu por se caracterizar como o último ano do Ciclo de Alfabetização sendo que, ao final desse ciclo, espera-se que todas as crianças brasileiras estejam alfabetizadas, inclusive em Matemática, com habilidades e competências em Números e Operações com números naturais desenvolvidas e consolidadas.

As escolas pertencem ao município de Bauru – São Paulo – Brasil e foram selecionadas por sorteio. Por sua vez, as escolas ofereciam quantas e quais turmas poderiam participar levando em consideração a disponibilidade dos professores.

A subseção a seguir apresenta os dados obtidos por meio do questionário e irá descrever as características dos alunos que participaram dessa pesquisa.

3.6.1 Os participantes: idade, gênero, ano de escolaridade e percepção de desempenho em Matemática

Dentre os participantes dessa pesquisa, responderam ao questionário apenas 336 alunos. Isso porque, no período da coleta de dados, as escolas estavam em processos de avaliações externas, como a Avaliação Nacional de Alfabetização (ANA) e Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP) e o agendamento para a realização das coletas de dados ficou prejudicado.

O questionário teve por objetivo caracterizar os participantes em termos de idade, gênero, ano de escolaridade bem como sua percepção de desempenho em Matemática de forma geral.

Os dados aqui apresentados foram obtidos por meio do questionário em relação aos 336 participantes, sendo 150 do gênero masculino (44,64%) e 182 participantes do gênero feminino (54,17%) e 4 participantes não responderam, como descrito na tabela a seguir:

Tabela 4 - Distribuição dos participantes segundo o gênero

Gênero	Participantes	
	N	%
Masculino	150	44,64
Feminino	182	54,17
Não respondeu	4	1,19
Total	336	100

Fonte: Autoria própria

Os participantes que foram submetidos ao estudo têm a seguinte distribuição por faixa etária (Tabela 5):

Tabela 5 - Distribuição dos participantes de acordo com a idade

Idade	Participantes	
	N	%
7 anos	1	0,30
8 anos	175	52,08
9 anos	121	36,01
10 anos	12	3,57
Não respondeu	27	8,04
Total	336	100

Fonte: Autoria própria

A idade dos participantes varia entre sete a dez anos. A distribuição dos participantes por faixa etária está concentrada entre oito e nove anos de idade, sendo que há 175 (52,08%) de alunos com oito anos e 121 (36,01%) com nove anos. Houve apenas um participante com sete anos e 12 alunos (3,57%) com mais de dez anos. De acordo com diretores e coordenadores das escolas, esses últimos participantes são alunos que ficaram retidos no Ciclo de alfabetização por terem dificuldades de aprendizagem.

Quando questionados sobre qual a matéria que mais gostam de estudar, 183 (54,46%) dos participantes citaram a Matemática. Em seguida, estiveram as matérias de Educação física, com 78 participantes (23,21) e de Língua Portuguesa, com 23 participantes (6,85%). Ainda, houve 6 participantes (1,79%) cujas respostas foram desconsideradas por não responderem à pergunta ou por estarem ilegíveis e 4 (1,19%)

que não responderam à questão. Segue abaixo a tabela que representa disciplinas que os alunos mais gostam.

Tabela 6 – Distribuição dos participantes por matéria que mais gostam de estudar

Matérias	Participantes	
	N	%
Matemática	183	54,46
Ed. Física	78	23,21
Língua Portuguesa	23	6,85
Artes	18	5,36
Ciências	13	3,87
História	5	1,49
Inglês	3	0,89
Informática	3	0,89
Ilegível / Desconsiderada	6	1,79
Não respondeu	4	1,19
Total	336	100

Fonte: Autoria própria

Quando questionados sobre qual a matéria que menos gostam de estudar, 145 (43,15%) dos participantes citaram Língua Portuguesa. Em seguida, estiveram as matérias de Inglês, com 34 participantes (10,12) e de Ciências, com 33 participantes (9,82%). Dentre os participantes, 25 alunos (7,44%) salientaram não gostar de Matemática. Ainda, houve 14 participantes (4,17%) cujas respostas foram desconsideradas por não responderem à pergunta ou por estarem ilegíveis e 14 participantes (4,17%) não responderam à questão. A tabela abaixo representa a distribuição dos participantes por matéria que mais gostam de estudar.

Tabela 7 – Distribuição dos participantes por matéria que menos gostam de estudar

Matérias	Participantes	
	N	%
Língua Portuguesa	145	43,15
Inglês	34	10,12
Ciências	33	9,82
Artes	29	8,63
Matemática	25	7,44
História	13	3,87
Ed. Física	12	3,57
Geografia	12	3,57
Nenhuma	5	1,49
Ilegível / Desconsiderada	14	4,17
Não respondeu	14	4,17
Total	336	100

Fonte: Autoria própria

No questionário, também houve questões sobre a auto-percepção que os alunos têm sobre o seu próprio desempenho e aprendizagem em Matemática, compreensão das explicações do professor em Matemática, sobre a compreensão de problemas matemáticos dados em sala de aula e também sobre as expectativas que eles têm sobre suas próprias notas em Matemática.

No que diz respeito à auto-percepção que os alunos têm sobre o seu próprio desempenho em Matemática, foi possível verificar, por meio da análise de dados, que os participantes se auto-percebiam, em sua maioria, com desempenho matemático muito bom e bom, sendo que 161 (47,92%) dos alunos acreditam ter um desempenho muito bom em Matemática e 113 (33,63%) dos alunos acreditavam ter um bom desempenho. Dentre os participantes, 45 alunos (13,39%) acreditavam ter um desempenho regular, 5 (1,49%) dos alunos acreditavam ter um desempenho mal e 10 (2,98%) muito mal, como mostra a tabela a seguir.

Tabela 8 – Distribuição dos participantes quanto a sua auto-percepção em relação ao seu desempenho em Matemática

Auto-percepção do aluno	Participantes	
	N	%
Muito bem.	161	47,92
Bem	113	33,63
Regular	45	13,39
Mal	5	1,49
Muito mal	10	2,98
Não respondeu	2	0,60
Total	336	100

Fonte: Autoria própria

Em relação à auto-percepção que os participantes têm da sua própria aprendizagem em Matemática, foi possível verificar que os alunos, em sua maioria, apresentaram uma auto-percepção positiva, sendo que 156 aluno (46,43%) acreditam aprender Matemática de forma fácil e rapidamente, sem nenhum esforço e 145 (43,15%) dos alunos aprendem Matemática facilmente, gastando um pouco de tempo e de esforço. Quanto aos demais, 21 alunos (6,25%) aprendem Matemática com dificuldade, gastando tempo e esforço, 13 alunos (3,87%) consideram que não conseguem aprender Matemática e apenas um aluno não respondeu a essa questão. Esses dados estão representados na tabela a seguir:

Tabela 9 - Distribuição dos participantes quanto a sua auto-percepção em relação à aprendizagem em Matemática

Auto-percepção do aluno	Participantes	
	N	%
Fácil e rapidamente, sem nenhum esforço	156	46,43
Facilmente, gastando um pouco de tempo e de esforço	145	43,15
Difícilmente, gastando tempo e esforço	21	6,25
Não consigo aprender matemática	13	3,87
Não respondeu	1	0,30
Total	336	100

Fonte: Autoria própria

Quanto à compreensão que os alunos têm diante das explicações do professor nas aulas de Matemática, 156 (46,43%) dos alunos salientaram sempre entender as explicações do professor e 125 (37,2%) afirmaram entender as explicações do professor na maioria das vezes. Já os demais, 40 alunos (11,9%) salientaram que poucas vezes entendem as explicações do professor e 12 alunos (3,57%) nunca entendem as explicações do professor. Apenas 3 alunos (0,89%) não responderam a essa questão.

Tabela 10 - Distribuição dos participantes quanto a sua auto-percepção em relação à compreensão do professor nas aulas de Matemática

Compreensão do aluno	Participantes	
	N	%
Eu sempre entendo as explicações do professor	156	46,43
Na maioria das vezes eu entendo as explicações do professor	125	37,20
Poucas vezes eu entendo as explicações do professor	40	11,90
Eu nunca entendo as explicações do professor	12	3,57
Não respondeu	3	0,89
Total	336	100

Fonte: Autoria própria

Relativamente à compreensão dos alunos diante de problemas matemáticos dados em sala de aula, 187 alunos (55,65%) acreditam que sempre entendem os problemas dados durante as aulas de Matemática e 117 alunos (34,82%) acreditam que quase sempre entendem. Quanto aos demais, nove alunos (2,68%) salientaram que quase nunca entendem os problemas dados em aula e 14 alunos (4,17%) afirmaram que nunca entendem os problemas. Nove alunos (2,68%) não responderam a essa questão.

Tabela 11 - Distribuição dos participantes quanto a sua auto-percepção em relação à compreensão diante de tarefas do tipo problema nas aulas de Matemática

Compreensão do aluno	Participantes	
	N	%
Sim, sempre entendo os problemas dados em aula	187	55,65
Não, nunca entendo os problemas dados em aula	14	4,17
Quase sempre entendo os problemas dados em aula	117	34,82
Quase nunca entendo os problemas dados em aula	9	2,68
Não respondeu	9	2,68
Total	336	100

Fonte: Autoria própria

Em relação às expectativas dos participantes quanto às suas notas em Matemática durante o ano letivo, 160 alunos (47,62%) salientaram obter notas iguais à da maioria da classe e 131 alunos (38,99%) acreditavam obter notas acima da maioria da classe. Apenas 38 alunos (11,31%) acreditam que suas notas não são abaixo das notas da maioria da classe, conforme mostra a tabela 12.

Tabela 12 – Distribuição dos participantes quanto à expectativa das notas em Matemática durante o ano letivo

Expectativas quanto às notas em Matemática	Participantes	
	N	%
Superiores às notas da maioria da classe	131	38,99
Iguais à nota da maioria da classe	160	47,62
Menores que a nota da maioria da classe	38	11,31
Não respondeu	7	2,08
Total	336	100

Fonte: Autoria própria

Outras questões presentes no questionário se referem aos conteúdos de Matemática preferidos e preteridos pelos participantes e os motivos pelos quais os alunos gostam mais ou menos desses conteúdos.

As tabelas 13 e 14 apresentam as respostas dos alunos. A categoria “Ilegível / Desconsiderada” engloba respostas dos alunos que não dizem respeito à Matemática.

Tabela 13 – Distribuição dos participantes de acordo com os conteúdos preferidos

Blocos	Conteúdos	Participantes	
		N	%
Números e operações	Adição	77	22,92
	Contas	69	20,54
	Multiplicação	45	13,39
	Divisão	30	8,93
	Subtração	9	2,68
	Números	16	4,76
	Tabuada	6	1,79
	Calculadora	5	1,49
	Contas de composição	2	0,60
Geometria	Formas geométricas	2	0,60
	Quadrado	1	0,30
	Retângulo	1	0,30
Estatística	Gráficos	2	0,60
	Tabelas	1	0,30
Grandezas e medidas	Calendário	1	0,30
Gerais	Atividades	3	0,89
	Problemas	8	2,38
Outros	Gosta de tudo	7	2,08
	Nenhum	4	1,19
	Ilegível/Desconsiderada	33	9,82
	Não respondeu	14	4,17
Total		336	100

Fonte: Autoria própria

É possível observar pela tabela 13 que os participantes citaram tanto conteúdos como outros aspectos ensinados nas aulas de Matemática. No que diz respeito aos conteúdos, os que pertencem ao bloco Números e operações foram os mais citados. Dentre eles, os preferidos pelos alunos foram a adição (22,92%) e a multiplicação (13,39%). A divisão (8,93%) e a subtração (2,68) foram os conteúdos menos citados. Em Geometria, os conteúdos mencionados foram formas geométricas de forma geral, o

quadrado e o retângulo; em Estatística, foram mencionados gráficos e tabelas; e em Grandezas e medidas, o calendário.

Nesta questão, houve alunos (8 alunos – 2,38%) que também citaram que gostavam de problemas nas aulas de Matemática, pois também podem aprender de forma diferenciada. Outros alunos (5 alunos – 1,49%) responderam que gostam de calculadora, pois há contas que não conseguem resolver na cabeça, na mão, por desenho ou por qualquer outra forma. Ainda, sete alunos (2,08%) salientaram que gostam de tudo em Matemática, que a "Matemática é mais legal de todas e a mais fácil", enquanto que apenas quatro alunos (1,19%) responderam que não gostam de nada nessa disciplina.

Tabela 14 – Distribuição dos participantes de acordo com os conteúdos preteridos

Blocos	Conteúdos	Participantes	
		N	%
Números e operações	Divisão	69	20,54
	Subtração	54	16,07
	Multiplicação	37	11,01
	Adição	17	5,06
	Números	16	4,76
	Contas	11	3,27
	Tabuada	10	2,98
Geometria	Mosaico	3	0,89
	Tangram	2	0,60
	Triângulo	2	0,60
	Quadrado	2	0,60
	Polígonos	1	0,30
Estatística	Gráficos	1	0,30
Grandezas e Medidas	Quilos	2	0,60
	Calendário	1	0,30
	Dinheiro	2	0,60
Geral	Problemas	3	0,89
Outros	De alguns conteúdos	2	0,60
	Tudo / Não gosta de nada	6	1,79
	Nenhuma / Gosta de tudo	22	6,55
	Ilegível/Desconsiderada	47	13,99
	Não respondeu	26	7,74
Total		336	100

Fonte: A autoria própria

Nota-se pela tabela 14, que os conteúdos preteridos dos alunos participantes fazem parte do bloco de conteúdos de Números e operações. Dentre eles, a divisão foi a mais citada, com 20,54% dos participantes (69 alunos), seguida de subtração (16,07% e multiplicação (11,01%). Conteúdos de outros blocos, como Geometria, Estatística e Grandezas e Medidas, também foram citados, mas em menor quantidade.

A tabela a seguir representa os motivos que justificam os alunos a gostarem de determinados conteúdos de Matemática.

Tabela 15 - Distribuição dos participantes de acordo com os motivos que os levam a gostar mais de um conteúdo de Matemática

Motivos que os levam a gostar mais de um conteúdo	Participantes	
	N	%
É mais legal/ muito bom / divertido/ “da hora” / mais gostoso de aprender	83	24,70
É fácil / Não precisa fazer tanto esforço	41	12,20
É possível aprender	17	5,06
Foi o conteúdo que mais entendeu / aprendeu mais rápido	8	2,38
Por ser melhor / Por saber mais	6	1,79
Acha difícil / É mais complicado	5	1,49
Faz pensar / Tem que refletir	5	1,49
É interessante	4	1,19
Facilita o que tem que fazer	3	0,89
Por ser importante	2	0,60
Por receber ajuda em casa	2	0,60
“Porque gosto”	15	4,46
Ilegível / Desconsiderada	23	6,85
Não respondeu	122	36,31
Total	336	100

Fonte: Autoria própria

Os motivos que levam os alunos a gostarem mais de algum conteúdo de Matemática, 83 alunos (24,7%) indicam que é por acreditar que esse conteúdo é o mais legal ou divertido. Em seguida, 41 alunos (12,2%) salientaram que gostavam mais de determinado conteúdo por ser fácil. Outros motivos citados foram os conteúdos possíveis de serem aprendidos (5,06%), ou que foi o conteúdo que mais entendeu (2,38%), ou por ser melhor em determinado conteúdo (1,79%), entre outros motivos.

A tabela a seguir representa os motivos que justificam os alunos a não gostar de determinados conteúdos de Matemática.

Tabela 16 - Distribuição dos participantes de acordo com os motivos que os levam a gostar menos de um conteúdo de Matemática

Motivos que os levam a gostar menos de um conteúdo	Participantes	
	N	%
Porque é difícil / tenho dificuldade / É complicado (de fazer, de copiar)	62	18,45
É chato / sem graça / enjoativo / irritante / dá tédio / "Porque é a coisa mais chata do mundo" / cansa	42	12,5
Porque não gosto / odeio / não gosto mais	15	4,46
Fica confusa / Não entende bem	9	2,68
Muita coisa para fazer (problema / Preciso escrever muito, "Porque é duas contas em uma (divisão) / tem que fazer composição, tirar, emprestar	7	2,08
Não consegue fazer / aprender / Porque sempre erra a resposta	7	2,08
Requer muito esforço / deixa com dor de cabeça / gasta a memória	6	1,79
Por ser ruim	2	0,6
Demorou para conseguir aprender	3	0,89
É muito fácil / "É a coisa mais fácil do mundo" / Tem que pensar menos / Ficaram fáceis	6	1,79
Tudo é muito bom / gosto de tudo	8	2,38
Ilegível/ Desconsiderada	31	9,23
Não respondeu	138	41,07
Total	336	100

Fonte: Autoria própria

Os motivos que levaram os alunos a não gostarem de algum conteúdo de Matemática, em sua maioria, com 62 alunos (18,45%), é por acreditarem que o conteúdo é difícil, ou por sentir dificuldade. Em seguida, 42 alunos (12,5%) salientaram o fato de ser chato ou sem graça. Outros motivos citados foram que são conteúdos que não compreenderam bem (2,68%), que sempre erram a resposta (2,08%), ou que requer muito esforço (1,79%). Também houve alunos (1,79%) que salientaram que não gostam de determinado conteúdo por acharem que é muito fácil ou ainda alunos que reforçaram que gostam de tudo em Matemática (2,38%).

No questionário também foi perguntado aos participantes se recebem ajuda ao estudar Matemática em casa. Como pode ser visto na tabela a seguir, 241 alunos (71,73%) relatam receber ajuda e 94 alunos (27,98%) afirmaram não receber.

Tabela 17 - Distribuição dos participantes de acordo com ajuda recebida ao estudar Matemática

Ajuda recebida	Participantes	
	N	%
Recebe ajuda	241	71,73
Não recebe ajuda	94	27,98
Não respondeu	1	0,30
Total	336	100

Fonte: Autoria própria

A tabela 18 apresenta a distribuição dos participantes de acordo com a origem da ajuda recebida ao estudar Matemática.

Tabela 18 - Distribuição dos participantes de acordo com a origem da ajuda recebida ao estudar Matemática

Origem da ajuda recebida	Participantes	
	N	%
Somente o pai	36	10,71
Somente a mãe	83	24,70
Somente os irmãos	12	3,57
Tanto o pai como a mãe	58	17,26
É ajudado(a) por todas as pessoas da casa	31	9,23
Outras pessoas da família (por exemplo: tios, primos)	11	3,27
É ajudado(a) por outros (por exemplo: colegas, vizinhos, amigos)	8	2,38
Não respondeu	2	0,89
Total	241	100

Fonte: Autoria própria

Quando perguntado sobre quais as pessoas que auxiliam nas tarefas de Matemática, 83 alunos (24,7%) salientaram receber ajuda somente da mãe, 36 alunos (10,71%) afirmaram receber somente do pai e 58 alunos (17,26%) recebem tanto do pai como da mãe. Os demais alunos relataram receber ajuda dos irmãos, de todas as pessoas que vivem em casa, de outras pessoas da família ou de outras pessoas.

4 ANÁLISE DOS DADOS

Este capítulo está dividido em três subcapítulos. O primeiro subcapítulo apresenta os dados referentes à crença de autoeficácia em tarefas numéricas. O segundo apresenta aspectos evidenciados do sentido de número. Por fim, o terceiro subcapítulo mostra as correlações realizadas entre dados obtidos pela Escala de crença de autoeficácia em tarefas numérica e pelo instrumento Tarefas numéricas.

4.1 Crença de Autoeficácia em Tarefas Numéricas

Dentre os participantes desta pesquisa, responderam à Escala de crença de autoeficácia em tarefas numéricas 388 alunos. Na escala, a pontuação dos alunos pode variar de 15 a 60 pontos, sendo que essa pontuação variou entre a mínima e a máxima de pontos, com média igual a 49,03 e desvio padrão 9,61.

A figura a seguir representa uma “régua” que indica os valores mínimo e máximo que podem ser obtidos pela escala e a média obtida pelos participantes da pesquisa.



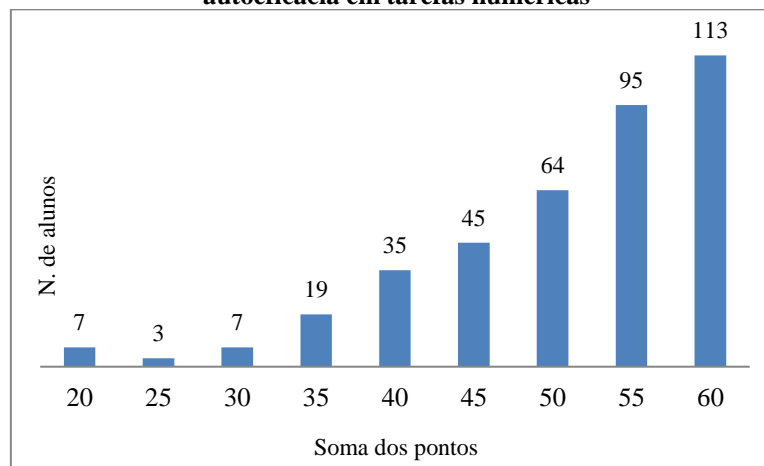
Figura 38 – Representação de uma “régua” com a média obtida na escala de crença de autoeficácia
Fonte: Autoria própria

Isso indica que, de forma geral, os alunos acreditam na sua autoeficácia para resolver de modo adequado tarefas numéricas.

Foi estipulado que os alunos cuja pontuação estava acima da média, demonstravam crenças de autoeficácia em tarefas numéricas positivas e os alunos cuja pontuação estava abaixo da média, crenças de autoeficácia negativas. Desta forma, obtivemos que 221 participantes (56,96%) apresentam tendência a crenças de autoeficácia em tarefas numéricas positivas, enquanto que 167 participantes (43,04%) apresentaram tendências negativas.

O gráfico a seguir representa a distribuição de frequência da soma de pontos obtida pelos alunos na escala de autoeficácia em tarefas numéricas.

Gráfico 1 - Distribuição de frequência da soma de pontos obtida pelos alunos na escala de autoeficácia em tarefas numéricas



Fonte: Autoria própria

Podemos observar no gráfico que a crença de autoeficácia dos alunos em resolver tarefas numéricas é positiva sendo que as maiores frequências são nos intervalos de 55 e 60.

Em consonância com esses dados podemos destacar os estudos de Neves (2002), Dobarro (2007), Paula (2008), Machado (2014) e Morais (2015), nos quais indicam que os alunos vêm apresentando, de forma geral, crenças favoráveis em relação à Matemática, sejam eles situações de aula, resolução de tarefas matemáticas, como situações problemas, resolução de itens de avaliação, entre outros.

A atribuição de valores de 1 a 4 às respostas dos alunos referentes às indicações de crença expressas nas respostas dadas às tarefas propostas na escala possibilitou uma análise descritiva da pontuação dos alunos. Os dados referentes às pontuações estão apresentados na tabela 19.

Tabela 19 – Estatísticas descritivas da pontuação dos alunos na escala de crença de autoeficácia em tarefas numéricas

TAREFAS	N. de alunos	PONTUAÇÃO			
		Mínimo	Máximo	Média	Desvio padrão
Mega-Sena	388	1	4	3,58	0,72
Quantos dias João já viveu?	386	1	4	3,15	1,01
Ligue as representações	386	1	4	3,30	0,87
27 + 26	385	1	4	3,58	0,79
72 – 14	383	1	4	3,42	0,87
52 × 2	382	1	4	3,28	0,97
Resolva as expressões					
25 × 10	377	1	4	3,20	0,97
25 × 12	281	1	4	3,16	0,98
25 ÷ 5	382	1	4	2,95	1,08
60 ÷ 2	381	1	4	2,90	1,12
Calculadora quebrada	386	1	4	3,23	0,93
A compra de Marisa	385	1	4	3,87	0,98
O campeonato esportivo (1)	382	1	4	3,57	0,83
O campeonato esportivo (2)	386	1	4	3,50	0,82
O campeonato esportivo (3)	379	1	4	3,43	0,92

Fonte: Autoria própria

Ao se realizar o teste de confiabilidade na escala nesta amostra foi possível verificar que há uma boa consistência interna entre os itens do instrumento (mesmo com as modificações do pré-teste) resultando num α de Cronbach de 0,934.

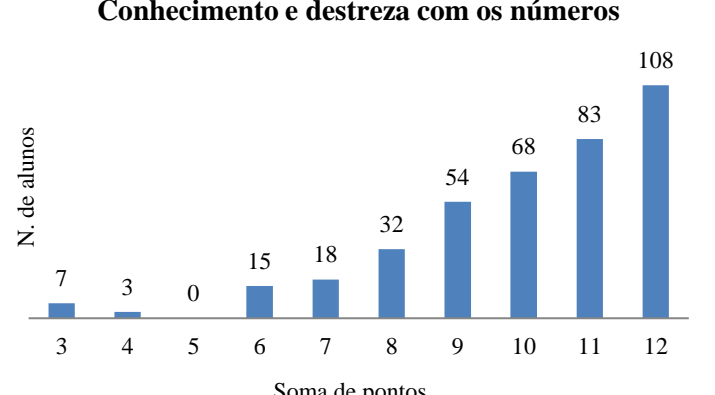
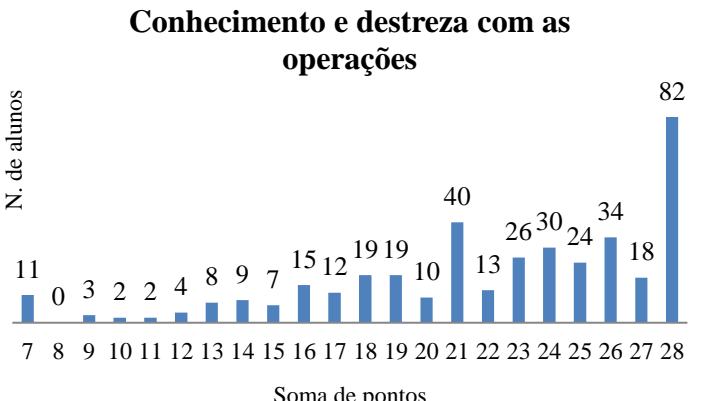
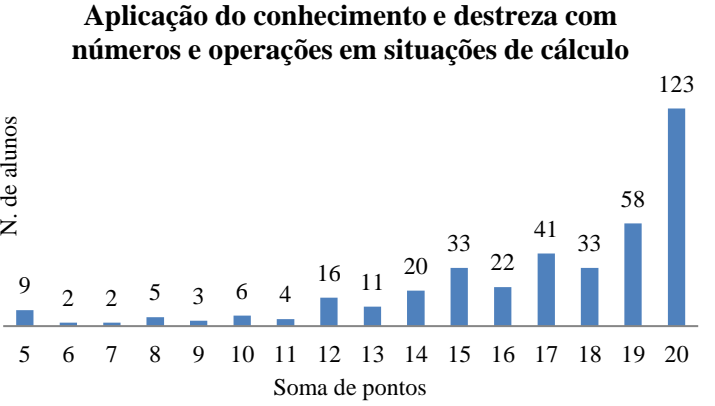
Outra análise realizada foi a partir do agrupamento das tarefas de acordo com o componente de sentido de número que a tarefa propunha investigar. As tarefas *Mega-Sena*, *Quantos dias João já viveu?*, *Ligue as representações* estão relacionadas ao componente Conhecimento e destreza com os números; a tarefa *Resolva as expressões* está relacionada ao Conhecimento e destreza com operações; e as tarefas *Calculadora quebrada*, *A compra de Marisa* e *O campeonato esportivo* estão relacionadas ao componente Aplicar o conhecimento e destreza com números e operações em situações de cálculo.

Para cada componente, também foi calculada uma média aritmética, sendo que os alunos que obtiveram pontuação acima da média demonstraram crenças de

autoeficácia no referido componente de sentido de número positivas e os alunos cujos pontos ficaram abaixo da média apresentaram crenças de autoeficácia negativas.

O quadro a seguir apresenta as crenças de autoeficácia dos alunos de acordo com os componentes de Sentido de número. Para cada componente, é apresentado o número de tarefas/itens que aborda cada componente, a amplitude de pontuação que cada aluno poderia obter, a pontuação máxima e mínima, a média de pontos calculada para cada componente, o desvio padrão e a distribuição dos participantes em crenças positivas e negativas. Ainda, é apresentado um gráfico de distribuição dos participantes de acordo com os pontos obtidos em cada componente de Sentido de número.

Quadro 30 – Frequência de respostas da Escala de crença de autoeficácia em tarefas numéricas de acordo com os componentes de Sentido de número

<p style="text-align: center;">Conhecimento e destreza com os números</p>  <table border="1" style="margin-top: 10px;"> <thead> <tr> <th>Soma de pontos</th> <th>N. de alunos</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>3</td><td>7</td></tr> <tr><td>4</td><td>3</td></tr> <tr><td>5</td><td>0</td></tr> <tr><td>6</td><td>15</td></tr> <tr><td>7</td><td>18</td></tr> <tr><td>8</td><td>32</td></tr> <tr><td>9</td><td>54</td></tr> <tr><td>10</td><td>68</td></tr> <tr><td>11</td><td>83</td></tr> <tr><td>12</td><td>108</td></tr> </tbody> </table>	Soma de pontos	N. de alunos	3	7	4	3	5	0	6	15	7	18	8	32	9	54	10	68	11	83	12	108	<p>Número de itens: 3 Amplitude: 9 Mínimo: 3 Máximo: 12 Média: 10 Desvio padrão: 2,0</p>																								
Soma de pontos	N. de alunos																																														
3	7																																														
4	3																																														
5	0																																														
6	15																																														
7	18																																														
8	32																																														
9	54																																														
10	68																																														
11	83																																														
12	108																																														
<p style="text-align: center;">Conhecimento e destreza com as operações</p>  <table border="1" style="margin-top: 10px;"> <thead> <tr> <th>Soma de pontos</th> <th>N. de alunos</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>7</td><td>11</td></tr> <tr><td>8</td><td>0</td></tr> <tr><td>9</td><td>3</td></tr> <tr><td>10</td><td>2</td></tr> <tr><td>11</td><td>2</td></tr> <tr><td>12</td><td>4</td></tr> <tr><td>13</td><td>8</td></tr> <tr><td>14</td><td>9</td></tr> <tr><td>15</td><td>7</td></tr> <tr><td>16</td><td>15</td></tr> <tr><td>17</td><td>12</td></tr> <tr><td>18</td><td>19</td></tr> <tr><td>19</td><td>19</td></tr> <tr><td>20</td><td>10</td></tr> <tr><td>21</td><td>40</td></tr> <tr><td>22</td><td>13</td></tr> <tr><td>23</td><td>26</td></tr> <tr><td>24</td><td>30</td></tr> <tr><td>25</td><td>24</td></tr> <tr><td>26</td><td>34</td></tr> <tr><td>27</td><td>18</td></tr> <tr><td>28</td><td>82</td></tr> </tbody> </table>	Soma de pontos	N. de alunos	7	11	8	0	9	3	10	2	11	2	12	4	13	8	14	9	15	7	16	15	17	12	18	19	19	19	20	10	21	40	22	13	23	26	24	30	25	24	26	34	27	18	28	82	<p>Número de itens: 7 Amplitude: 21 Mínimo: 7 Máximo: 28 Média: 22,13 Desvio padrão: 5,38</p>
Soma de pontos	N. de alunos																																														
7	11																																														
8	0																																														
9	3																																														
10	2																																														
11	2																																														
12	4																																														
13	8																																														
14	9																																														
15	7																																														
16	15																																														
17	12																																														
18	19																																														
19	19																																														
20	10																																														
21	40																																														
22	13																																														
23	26																																														
24	30																																														
25	24																																														
26	34																																														
27	18																																														
28	82																																														
<p style="text-align: center;">Aplicação do conhecimento e destreza com números e operações em situações de cálculo</p>  <table border="1" style="margin-top: 10px;"> <thead> <tr> <th>Soma de pontos</th> <th>N. de alunos</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>5</td><td>9</td></tr> <tr><td>6</td><td>2</td></tr> <tr><td>7</td><td>2</td></tr> <tr><td>8</td><td>5</td></tr> <tr><td>9</td><td>3</td></tr> <tr><td>10</td><td>6</td></tr> <tr><td>11</td><td>4</td></tr> <tr><td>12</td><td>16</td></tr> <tr><td>13</td><td>11</td></tr> <tr><td>14</td><td>20</td></tr> <tr><td>15</td><td>33</td></tr> <tr><td>16</td><td>22</td></tr> <tr><td>17</td><td>41</td></tr> <tr><td>18</td><td>33</td></tr> <tr><td>19</td><td>58</td></tr> <tr><td>20</td><td>123</td></tr> </tbody> </table>	Soma de pontos	N. de alunos	5	9	6	2	7	2	8	5	9	3	10	6	11	4	12	16	13	11	14	20	15	33	16	22	17	41	18	33	19	58	20	123	<p>Número de itens: 5 Amplitude: 15 Mínimo: 5 Máximo: 20 Média: 16,9 Desvio padrão: 3,61</p>												
Soma de pontos	N. de alunos																																														
5	9																																														
6	2																																														
7	2																																														
8	5																																														
9	3																																														
10	6																																														
11	4																																														
12	16																																														
13	11																																														
14	20																																														
15	33																																														
16	22																																														
17	41																																														
18	33																																														
19	58																																														
20	123																																														
<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <thead> <tr> <th colspan="4">Participantes</th> </tr> <tr> <th colspan="2">Positiva</th> <th colspan="2">Negativa</th> </tr> <tr> <th>N.</th> <th>%</th> <th>N.</th> <th>%</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>259</td> <td>66,75</td> <td>129</td> <td>33,25</td> </tr> </tbody> </table>		Participantes				Positiva		Negativa		N.	%	N.	%	259	66,75	129	33,25																														
Participantes																																															
Positiva		Negativa																																													
N.	%	N.	%																																												
259	66,75	129	33,25																																												
<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <thead> <tr> <th colspan="4">Participantes</th> </tr> <tr> <th colspan="2">Positiva</th> <th colspan="2">Positiva</th> </tr> <tr> <th>N.</th> <th>%</th> <th>N.</th> <th>%</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>214</td> <td>55,15</td> <td>174</td> <td>44,85</td> </tr> </tbody> </table>		Participantes				Positiva		Positiva		N.	%	N.	%	214	55,15	174	44,85																														
Participantes																																															
Positiva		Positiva																																													
N.	%	N.	%																																												
214	55,15	174	44,85																																												
<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <thead> <tr> <th colspan="4">Participantes</th> </tr> <tr> <th colspan="2">Positiva</th> <th colspan="2">Positiva</th> </tr> <tr> <th>N.</th> <th>%</th> <th>N.</th> <th>%</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>255</td> <td>65,72</td> <td>133</td> <td>34,28</td> </tr> </tbody> </table>		Participantes				Positiva		Positiva		N.	%	N.	%	255	65,72	133	34,28																														
Participantes																																															
Positiva		Positiva																																													
N.	%	N.	%																																												
255	65,72	133	34,28																																												

Fonte: Autoria própria

Para investigar o componente Conhecimento e destreza com os números foram utilizadas três tarefas e a pontuação obtida pelos alunos na escala poderia variar de 3 a 12 pontos. Nesse componente, a média de pontos dos alunos foi de 10, resultando que 66,75% dos alunos participantes apresentaram crenças de autoeficácia positivas nesse componente e 33,25% de alunos apresentam crenças negativas.

Para o componente Conhecimento e destreza com operações foi utilizada uma única tarefa composta por 7 itens, sendo que os pontos dos alunos nesse componente

poderiam variar de 7 a 28. A média de pontos dos alunos nesse componente foi de 22,13 sendo que 55,15% dos alunos apresentaram crenças de autoeficácia positivas e 44,85% de alunos crenças de autoeficácia negativas.

No componente Aplicar o conhecimento e destreza com números e operações em situações de cálculo foram utilizadas três tarefas, com o total de 5 itens e os pontos dos alunos poderiam variar de 5 a 20. A média obtida foi de 16,9, sendo que 65,72% dos alunos apresentaram crenças de autoeficácia positivas e 34,28% de alunos apresentaram crenças negativas nesse componente.

É importante observar também nos gráficos presentes no quadro que, quando comparamos um componente com o outro, percebemos que os alunos demonstraram crenças de autoeficácia mais positivas em Conhecimento e destreza com os números, seguido de Aplicar o conhecimento e destreza com números e operações em situações de cálculo e Conhecimento e destreza com operações. Isso indica que, quando se trata de tarefas sobre números, os alunos sentem maior confiança para resolvê-las. Ainda, tarefas com contexto podem favorecer a crença de autoeficácia dos alunos tendo em vista que a tarefa sem contexto, utilizada para avaliar o Conhecimento e destreza com operações apresentou as menores crenças.

Blöte, Klein e Beishuizen (2000) consideram importante utilizar contextos realistas nas tarefas, o que corrobora com a melhor compreensão da tarefa em si. De acordo com sua pesquisa “a avaliação dos procedimentos dos alunos foi mais flexível em relação ao contexto do que aos problemas de expressão numérica” (BLÖTE; KLEIN; BEISHUIZEN, 2000, p. 244). Se tarefas com contexto contribui com maior flexibilidade para serem resolvidas, os alunos também podem se sentir mais confiantes para resolver essas tarefas tendo em vista as possibilidades de resolução.

Outro aspecto a ser considerado nesses dados é o fato de que crença de autoeficácia é microanalítica (BANDURA, 1977). Nos estudos de Torres (2010) é discutido que a crença de autoeficácia pode se referir a um domínio mais geral, como por exemplo, a crença de autoeficácia acadêmica, como também domínios mais específicos, como a crença de autoeficácia em Matemática.

Se considerarmos uma microanálise da crença de autoeficácia em tarefas numéricas para cada componente de Sentido de número, cada componente representará um domínio da crença, com suas características e especificidades. Assim, diante de cada domínio, os alunos apresentaram uma crença de autoeficácia específica, sendo que a crença em Conhecimento e destreza com números foi mais positiva, seguida de

Aplicação do conhecimento e destreza com números e operações em situações de cálculo e Conhecimento e destreza com operações.

4.1.1 Crença de autoeficácia: Conhecimento e destreza com os números

A tabela a seguir apresenta a frequência e porcentagem das respostas dos alunos na escala de acordo com cada tarefa do componente Conhecimento e destreza com os números.

Tabela 20 – Frequência e porcentagem de respostas da Escala de crença de autoeficácia em tarefas numéricas referentes às tarefas relativas ao componente Conhecimento e destreza com os números





Tarefas (itens)	Média da pontuação	Crença de autoeficácia			
		Positiva		Negativa	
		N.	%	N.	%
Mega-Sena	3,58	267	68,81	121	31,19
Quantos dias João já viveu?	3,15	187	48,2	201	51,8
Ligue as representações	3,30	198	51,03	190	48,97

Fonte: Autoria própria

No que se refere ao componente de sentido de número Conhecimento e destreza com os números, a análise das crenças de autoeficácia das tarefas numéricas nos mostram que os alunos demonstraram maior crença de autoeficácia quando solicitados a ordenar os números seguindo uma determinada ordem. Essa crença diminui quando solicitamos aos alunos que pensassem sobre sua capacidade em resolver tarefas que focassem as múltiplas representações para os números e a grandeza relativa e absoluta dos números.

A tabela a seguir apresenta a frequência e a porcentagem de respostas na escala de crença de autoeficácia das tarefas relativas ao componente de sentido de número Conhecimento e destreza com os números.

Tabela 21 – Frequência e porcentagem de respostas da Escala de crença de autoeficácia nas tarefas referentes ao componente Conhecimento e destreza com os números

									Não responderam	
	Não posso resolver nada		Posso resolver com muita ajuda		Posso resolver com pouca ajuda		Posso resolver totalmente		N.	%
	N.	%	N.	%	N.	%	N.	%	N.	%
Mega-Sena	11	2,84	21	5,41	89	22,94	267	68,81	0	0
Quantos dias João já viveu?	44	11,34	40	10,31	115	29,64	187	48,20	2	0,52
Ligue as representações	21	5,41	42	10,82	126	32,47	198	51,03	1	0,26

Fonte: Autoria própria

Nota-se pela tabela 21 que a tarefa *Mega-Sena*, tarefa esta que solicita aos alunos organizem determinados números em ordem crescente, foi a que os alunos demonstraram crença de autoeficácia mais positiva, sendo que 68,81% dos alunos acreditaram que conseguiam resolver essa tarefa totalmente. Essa porcentagem diminui quando é solicitado aos alunos que respondessem se eles acreditam que conseguem resolver as demais tarefas sobre números. Diante dessas tarefas, reconhecer e ligar corretamente diferentes representações de números aos seus correspondentes na tarefa *Ligue as representações*, e reconhecer a grandeza de um número na tarefa *Quantos dias João já viveu?*, os alunos responderam que precisariam de ajuda para resolvê-las.

Percebe-se ainda que na tarefa *Quantos dias João já viveu?* há um aumento na quantidade de alunos que acreditam que não conseguem resolver nada quando comparado com as outras tarefas.

4.1.2 Crença de autoeficácia: Conhecimento e destreza com operações

A tabela a seguir apresenta a frequência e porcentagem das respostas dos alunos na escala de acordo com cada tarefa do componente Conhecimento e destreza com operações.

Tabela 22 – Frequência e porcentagem de respostas da Escala de crença de autoeficácia em tarefas numéricas referentes às tarefas relativas ao componente Conhecimento e destreza com operações

Tarefas (itens)	Média da pontuação	Crença de autoeficácia			
		Positiva		Negativa	
		N.	%	N.	%
27 + 26	3,58	280	72,16	108	27,84
72 – 14	3,42	238	61,34	150	38,66
52 × 2	3,28	211	54,38	177	45,62
25 × 10	3,20	188	48,45	200	51,55
25 × 12	3,16	179	46,13	209	53,87
25 ÷ 5	2,95	265	68,30	123	31,7
60 ÷ 2	2,90	259	66,75	129	33,25





Fonte: Autoria própria

No que se refere ao componente de sentido de número Conhecimento e destreza com operações, a análise das crenças de autoeficácia das tarefas nos mostram que à medida que o nível de dificuldade das operações aumenta as crenças de autoeficácia em resolvê-las de duas maneiras diferentes diminuem.

Ainda, é possível notar que quando distribuimos os alunos entre crenças de autoeficácia positivas e negativas, apenas nas operações 25×10 e 25×12 , operações essas com fatores compostos por dois algarismos, encontramos um maior número de alunos com crenças negativas. Nas demais, há mais alunos com crenças de autoeficácia positivas que negativas.

A tabela a seguir apresenta a frequência e a porcentagem das respostas dos alunos na escala de crença de autoeficácia das tarefas relativas ao componente de sentido de número Conhecimento e destreza com operações.

Tabela 23 – Frequência e porcentagem de respostas da Escala de crença de autoeficácia nas tarefas referentes ao componente *Conhecimento e destreza com operações*

									Não responderam	
	Não posso resolver nada		Posso resolver com muita ajuda		Posso resolver com pouca ajuda		Posso resolver totalmente		N.	%
	N.	%	N.	%	N.	%	N.	%	N.	%
27 + 26	17	4,38	21	5,41	67	17,27	280	72,16	3	0,77
72 – 14	21	5,41	34	8,76	90	23,2	238	61,34	5	1,29
52 × 2	35	9,02	35	9,02	101	26,03	211	54,38	6	1,55
25 × 10	36	9,28	40	10,31	113	29,12	188	48,45	11	2,84
25 × 12	41	10,57	35	9,02	126	32,47	179	46,13	7	1,8
25 ÷ 5	58	14,95	59	15,21	111	28,61	154	39,69	6	1,55
60 ÷ 2	68	17,53	54	13,92	107	27,58	152	39,18	7	1,8

Fonte: Autoria própria

De acordo com a tabela 23, observamos que em uma mesma tarefa na qual era solicitado que os alunos resolvessem as expressões apresentadas de duas maneiras diferentes, os alunos manifestaram crenças distintas em cada item. Na coluna “Não posso resolver nada” nota-se que a quantidade de alunos aumenta gradativamente em cada item, do mesmo modo que na coluna “Posso resolver totalmente” a quantidade de alunos diminui gradativamente. Conforme a operação envolvida fica relativamente mais difícil ou os números presentes no cálculo se tornam maiores, aumenta a crença dos alunos de que eles não conseguem resolver a tarefa. O mesmo praticamente acontece nas colunas intermediárias.

4.1.3 Crença de autoeficácia: Aplicar o conhecimento e destreza com números e operações em situações de cálculo

A tabela a seguir apresenta a frequência e porcentagem das respostas dos alunos na escala de acordo com cada tarefa do componente Aplicar o conhecimento e destreza com números e operações em situações de cálculo.

Tabela 24 – Frequência e porcentagem de respostas da Escala de crença de autoeficácia em tarefas numéricas referentes às tarefas relativas ao componente *Aplicar o conhecimento e destreza com números e operações em situações de cálculo*

Tarefas (itens)	Média da pontuação	Crença de autoeficácia			
		Positiva		Negativa	
		N.	%	N.	%
Calculadora quebrada	3,23	189	48,71	199	51,29
A compra de Marisa	3,87	245	63,14	143	36,86
O campeonato esportivo (1)	3,57	278	71,65	110	28,35
O campeonato esportivo (2)	3,50	254	65,46	134	34,54
O campeonato esportivo (3)	3,43	246	63,4	142	36,6





Fonte: Autoria própria

No que se refere ao componente de sentido de número Aplicar o conhecimento e destreza com números e operações em situações de cálculo, a análise das crenças de autoeficácia das tarefas nos mostraram que as médias dos pontos das respostas dos alunos não se alteram muito de uma tarefa para outra.

Também é possível notar que a tarefa cujos alunos revelaram crenças de autoeficácia mais positiva é a d’*O campeonato esportivo*, sendo que, a cada item da mesma tarefa, conforme o nível de dificuldade “aumenta”, esse valor diminui. Ainda, a tarefa a *Calculadora quebrada* apresentou mais alunos com crenças negativas quando comparado com alunos com crenças positivas.

A tabela a seguir apresenta a frequência e a porcentagem das respostas dos alunos na escala de crença de autoeficácia das tarefas relativas ao componente de sentido de número Aplicar o conhecimento e destreza com números e operações em situações de cálculo.

Tabela 25 – Frequência e porcentagem de respostas da Escala de crença de autoeficácia nas tarefas referentes ao componente Aplicar o conhecimento e destreza com números e operações em situações de cálculo

	 Não posso resolver nada		 Posso resolver com muita ajuda		 Posso resolver com pouca ajuda		 Posso resolver totalmente		Não responderam	
	N.	%	N.	%	N.	%	N.	%	N.	%
Calculadora quebrada	33	8,51	35	9,02	129	33,25	189	48,71	2	0,52
A compra de Marisa	39	10,05	24	6,19	77	19,85	245	63,14	3	0,77
O campeonato esportivo (1)	22	5,67	18	4,64	64	16,49	278	71,65	6	1,55
O campeonato esportivo (2)	20	5,15	22	5,67	90	23,20	254	65,46	2	0,52
O campeonato esportivo (3)	30	7,73	22	5,67	81	20,88	246	63,40	9	2,32

Fonte: Autoria própria

A tabela 25 indica que na tarefa *Calculadora quebrada* a quantidade de alunos que acreditam que podem resolver a tarefa totalmente é menor se comparada com as demais tarefas. Já na tarefa *A compra de Marisa* houve mais alunos que acreditavam que não conseguiriam resolver nada.

Na tarefa *O campeonato esportivo*, composta por três itens que solicitava aos alunos que indicassem quantas garrafas haviam nas figuras apresentadas, as estratégias que os alunos poderiam utilizar variavam da mais simples (contagem das garrafas) até estratégias mais sofisticadas (cálculos com valores obtidos a partir da figura ou do item anterior da mesma tarefa). Nessa tarefa, as crenças de autoeficácia dos alunos diminuíram de um item para o outro no que diz respeito à coluna “Posso resolver totalmente”. Nota-se ainda que, na coluna “Não posso resolver nada”, o item 3 é o que apresenta maior quantidade de alunos quando comparado com os demais itens dessa mesma tarefa, sendo que esse item, diferente dos outros dois, apresenta no enunciado os valores apresentados na figura.

Síntese

A crença de autoeficácia em tarefas numéricas foi avaliada por meio da escala. De forma geral, os alunos demonstraram que acreditam em sua capacidade para resolver as tarefas apresentadas de forma adequada.

Ao analisar as crenças de acordo com os componentes de Sentido de número, observamos que os alunos acreditam mais em sua capacidade para resolver tarefas que envolvem conhecimento e destreza com os números, seguida da aplicação do conhecimento e destreza com números e operações em situações de cálculo e, com uma menor crença de autoeficácia, conhecimento e destreza com operações. Ou seja, resolver expressões matemáticas, de duas maneiras diferentes, foi a tarefa em que os alunos demonstraram menor crença de autoeficácia.

Analisar as crenças dos alunos de acordo com cada tarefa também nos evidenciou que os valores numéricos presentes nos enunciados e os contextos das tarefas podem interferir em suas crenças.

Valores altos podem apresentar maiores desafios para os alunos, pois as estratégias de resolução conhecidas por eles podem não ser consideradas práticas ou eficazes como seriam com valores baixos. Isso requer conhecer outras estratégias ou ter um conhecimento mais elaborado e flexível sobre números e cálculos para desenvolver maior confiança diante de tarefas com valores altos.

Os contextos das tarefas também podem influenciar as crenças dos alunos tendo em vista que o contexto, além de corroborar com a compreensão da tarefa em si, corrobora também com a flexibilidade de resolução quando comparado com a resolução de tarefas de expressões numéricas (BLÖTE; KLEIN; BEISHUIZEN).

4.2 Aspectos de sentido de número evidenciados

O Sentido de número foi investigado mediante o instrumento Tarefas numéricas e foram analisadas as resoluções de 351 alunos do 3.º ano do Ensino Fundamental.

O desempenho geral dos alunos foi analisado mediante o campo de categoria “resposta”. Neste campo, cada aluno obteve uma pontuação sendo que a soma desses pontos pode variar entre 0 e 49 para cada aluno. Os pontos de todos os alunos foram somados e, com o resultado, calculamos a média aritmética que resultou em 16,67.

A figura a seguir representa uma “régua” que indica as pontuações, mínima e máxima, que podem ser obtidas com as tarefas e a média dos alunos que participaram da pesquisa.



Figura 39 – Representação do desempenho dos alunos

Fonte: Autoria própria

Pode-se dizer que o desempenho dos alunos nas tarefas numéricas foi baixo tendo em vista que a média obtida pela pontuação dos alunos se encontra abaixo do ponto médio da régua, que seria o valor 24,5.

A caracterização dos aspectos do sentido de número evidenciados pelos alunos ao resolverem as tarefas numéricas foi realizada a partir dos estudos de McIntosh, Reys e Reys (1992). Os autores apresentam um quadro de referência para considerar o sentido de número compreendendo seus componentes e suas relações. Esses componentes são denominados Conhecimento e destreza com os números, Conhecimento e destreza com as operações e Aplicação do conhecimento e da destreza com os números e as operações em situações de cálculo.

Utilizamos esses componentes e suas características como base para a análise realizada nessa pesquisa. Ademais, no que se refere ao componente Conhecimento e destreza com as operações, para além dos aspectos desse componente apresentados por de McIntosh, Reys e Reys (1992), tais como compreender o efeito das operações, das propriedades matemáticas e a relação entre as operações, analisamos também os métodos de cálculo utilizados pelos alunos. Isso porque, o sentido de número também está relacionada às habilidades de cálculo mental (FERREIRA, 2008). Para isso, recorreremos ao estudo de Buys (2008) para analisar as formas de cálculo mental, caracterizando-os como linear, por decomposição ou variado.

A análise dos dados sugeriu a necessidade de especificar características das resoluções dos alunos, tais como resposta, método de cálculo, procedimento e adaptações. Esses aspectos foram tabulados e são apresentados em tabelas (apêndice IX). Aqui, buscamos apresentar e relacionar os componentes do sentido de número apresentados pelos alunos do 3.º ano do Ensino Fundamental que participaram da pesquisa recorrendo as tabelas presentes no apêndice IX quando necessário para evidenciar aspectos do Sentido de número.

4.2.1 Conhecimento e destreza com os números

No que diz respeito ao componente Conhecimento e destreza com os números, McIntosh, Reys e Reys (1992) abordam os seguintes aspectos que foram analisados: Sentido da ordenação dos números; Múltiplas representações dos números; Sentido da grandeza relativa e absoluta dos números; e Sistemas de valores de referência.

Essa seção está dividida em três subseções a fim de evidenciar os aspectos relativos ao conhecimento e destreza com os números apresentados nas resoluções das tarefas *Mega-Sena*, *Quantos dias João já viveu?* e *Ligue as representações*. O sentido da grandeza relativa e absoluta dos números e sistemas de valores de referência foram discutidos na mesma subseção, pois foram evidenciados na tarefa *Quantos dias João já viveu?*

Sentido da ordenação dos números

Os procedimentos utilizados pelos alunos, bem como suas respostas, estão apresentados na tabela 26.

Tabela 26 – Distribuição dos alunos referentes às respostas e aos procedimentos utilizados na tarefa Mega-Sena

	RESPOSTA		PROCEDIMENTO		
	N.	%	N.	%	
Certo	203	57,83	Ordem crescente	203	57,83
Errado	147	41,88	Ordem decrescente	90	25,64
			Ordem aleatória	57	16,24
Em branco	1	0,28	Em branco	1	0,28
Total	351	100	Total	351	100

Fonte: Autoria própria

Pela tabela, podemos notar que a maioria dos alunos, representado por 57,83%, resolveu a tarefa corretamente, como exemplifica a resolução do aluno 142 na figura 40.



Figura 40 – Resolução do aluno 142

Fonte: Acervo do autor

Os alunos que não acertaram a tarefa correspondem a 41,88% dos participantes, sendo que esses apresentaram os números em ordem decrescente (25,64%) ou apresentaram os números em ordem aleatória (16,24%). Embora ambas as respostas estejam erradas, os alunos que, como o aluno 313 (figura 41) resolveram a tarefa apresentando os números em ordem decrescente, demonstraram que sabem organizar os números de alguma forma, sendo que aqui, poderiam apenas não compreender o significado de “ordem crescente”,

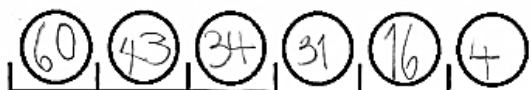


Figura 41 – Resolução do aluno 313

Fonte: Acervo do autor

Podemos considerar que o aluno sabe ordenar os números, embora confundindo a designação de ‘crescente’ com ‘decrescente’.

Outros alunos, como o 144 (figura 42), parecem não ter ainda compreendido o significado de ordenar um conjunto de números apresentando, aparentemente, os números numa ordem que parece aleatória.



Figura 42 – Resolução do aluno 144

Fonte: Acervo do autor

Na pesquisa realizada por Mendes (2012), o sentido da ordenação dos números naturais até 100 dos alunos de 3.º ano que participaram de sua investigação parecia consolidado. De acordo com a investigadora, no início da investigação os alunos utilizavam procedimentos de cálculo por contagem ou procedimentos aditivos que evidenciaram aspectos desse componente.

Embora sua pesquisa seja de contexto português, no Brasil, esse conhecimento deve ser desenvolvido no primeiro ano do Ensino Fundamental (BNCC – BRASIL, 2017, p. 276).

Múltiplas representações dos números

A tarefa *Ligue as representações* tinha por objetivo investigar as múltiplas representações para os números, o que inclui reconhecer que eles podem ser representados de diversas formas (MCINTOSH; REYS; REYS, 1992). Para investigar esse aspecto, foi solicitado aos alunos que ligassem representações que correspondiam aos mesmos números.

Nessa tarefa foram analisadas as respostas dos alunos apresentadas na tabela 27.

Tabela 27 – Distribuição dos alunos referentes às respostas apresentadas na tarefa *Ligue as representações*

RESPOSTA	N.	%
Acertou tudo	257	73,22
Acertou duas	1	0,28
Acertou uma	64	18,23
Errou tudo	18	5,13
Em branco	11	3,13
Total	351	100

Fonte: Autoria própria

Podemos observar que a maioria dos alunos (73,22%) resolveu a tarefa corretamente enquanto que 18,23% dos alunos acertaram apenas uma ligação. A figura a seguir exemplifica a resolução correta desta tarefa que foi realizada pelo aluno de número 245.

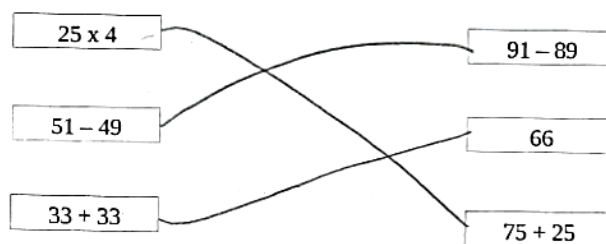


Figura 43 – Resolução do aluno 245

Fonte: Acervo do autor

O aluno de número 310 foi o único aluno a acertar a correspondência de duas representações. Em sua resolução, ele deixa de fazer uma das ligações, como mostra a figura 44.

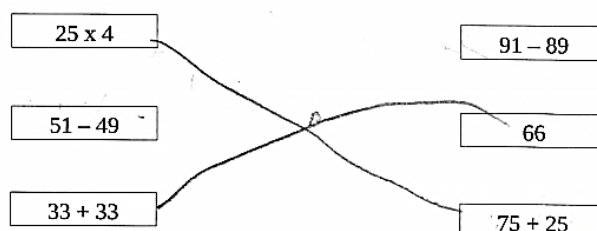


Figura 44 – Resolução do aluno 310

Fonte: Acervo do autor

Apenas 5,13% dos alunos não acertaram nenhuma ligação e 3,13% dos alunos não resolveram a tarefa.

Um aspecto a ser destacado nessa tarefa é o modo como alguns alunos a resolveram. Os alunos de número 83 e 156, por exemplo, apresentam os cálculos realizados para fazer as correspondências sendo que, de acordo com Brocardo (2011), os números podem ser caracterizados a partir de relações que envolvem operações. O quadro 31 ilustra essas resoluções.

Quadro 31 – Resoluções da tarefa Ligue as representações

Aluno 83

Aluno 156

Fonte: Acervo do autor

Nas resoluções, os alunos realizaram cálculos para perceber as correspondências entre os números apresentados. Nota-se que os cálculos evidenciados são algorítmicos apesar dos valores envolvidos serem fáceis de calcular. Nas representações 51–49 e 91–89, por exemplo, o aluno de número 83 poderia pensar na ideia da subtração de “falta para”, até porque os minuendos são números próximos dos subtraendos. Já o aluno de número 156 demonstra a necessidade de calcular 33+33 sem estabelecer relações de dobro e metade entre os números. Ainda, ambos os alunos fazem cálculos algorítmicos para as representações do número 100. Podemos considerar o número 25 como um número relativamente fácil de operar por ser um quarto de cem, metade de 50, entre outros aspectos.

Os números que compõem a tarefa poderiam induzir os alunos a pensarem sobre os números sem ter a necessidade em realizar cálculos, principalmente algorítmicos. No entanto, os alunos optaram por realizar cálculos algorítmicos das expressões apresentadas para representar números.

Sentido da grandeza relativa e absoluta dos números e Sistemas de valores de referência

A tarefa *Quantos dias João já viveu?* está relacionada ao sentido da grandeza relativa e absoluta dos números. Este aspecto consiste na capacidade de reconhecer um valor ou uma quantidade relativamente a outro número ou quantidade e na capacidade de perceber o valor ou grandeza geral de um dado número ou quantidade. Esta tarefa também está relacionada ao sistema de números de referência, o que constitui o uso de números de referência como marcos mentais que contribuem com o ‘pensar sobre os números’ (MCINTOSH; REYS; REYS, 1992).

Com essa tarefa, foi possível perceber se os alunos, partindo do fato de que um ano tem 365 dias (366 dias em ano bissexto), poderiam pensar sobre a grandeza do número 400 tendo como referência o número de dias do ano, ou seja, um contexto pessoal. A tabela 28 apresenta as respostas dos alunos na tarefa.

Tabela 28 – Distribuição dos alunos referentes às respostas apresentadas na tarefa *Quantos dias João já viveu?*

RESPOSTA	N.	%
Acertou tudo	46	13,11
Errou resposta/acertou explicação	2	0,57
Acertou resposta/errou explicação (ou explicação incompleta)	26	7,41
Acertou resposta/não explicou	56	15,95
Errou tudo	175	49,86
Em branco	46	13,11
Total	351	100

Fonte: Autoria própria

Quando analisamos as respostas dos alunos, observamos que 49,86% deles erraram a tarefa, 7,41% acertaram a resposta, porém erraram a explicação ou a deixaram incompleta e 15,95% acertaram a resposta, porém, não explicaram como haviam chegado àquela conclusão. Esses alunos, mesmo tendo acertado algum aspecto da tarefa, demonstraram que ainda não conseguem reconhecer um valor relativamente a outro, perceber um valor geral de um número, ou ainda, não conseguem explicar como

pensaram para resolver a tarefa. Apenas 13,11% dos alunos acertaram totalmente a tarefa e 13,11% a deixaram essa tarefa em branco.

A resposta do aluno 142 exemplifica a categoria “errou resposta/acertou a explicação”.

NÃO POR QUE UM ANO TEM 365 DIAS

Figura 45 – Resolução do aluno 142

Fonte: Acervo do autor

Nessa situação, o aluno, ao afirmar que João não viveu mais que 400 dias, mesmo sabendo que um ano tem 365 dias, parece não relacionar um valor a outro.

Já o aluno 137, por exemplo, acertou a resposta, mas errou a explicação.

SIM porque um ano tem 628 e dois anos
1.256.

Figura 46 – Resolução do aluno 137

Fonte: Acervo do autor

Essa situação, possivelmente por não saber corretamente quantos dias tem um ano, faz com que o aluno não tenha os conhecimentos necessários para resolver a tarefa. Contudo, mesmo tendo o valor 628 como quantidade de dias de um ano, o aluno mostrou que era necessário apresentar em sua explicação a quantidade de dias exatos referentes a dois anos, sendo que, em apenas um ano, João já teria vivido mais que 400 dias.

O aluno 308, tal como o 137, também acertou a resposta e errou a explicação. A figura 47 apresenta a sua resolução.

SIM PORQUE UM ANO TEM 363 DIAS

$$\begin{array}{r} 1 \\ 363 \\ + 363 \\ \hline 726 \end{array}$$

Figura 47 – Resolução do aluno 308

Fonte: Acervo do autor

Nesta situação, o aluno errou por dois dias o número de dias que constitui um ano, sendo que essa diferença se torna pequena em relação ao número de dias do ano.

Tendo em vista que para resolver a tarefa também podemos recorrer a algum cálculo, foram analisados métodos e procedimentos de calcular (descritos adiante na subseção 4.3.3). No entanto, foi possível observar que 29,91% dos alunos utilizaram um método não matemático para resolver a tarefa. Esse método envolveu procedimentos que abrangem inferências pessoais para resolver a tarefa baseadas na compreensão que os alunos têm sobre o sentido da grandeza relativa e absoluta dos números. O quadro 31 apresenta exemplos de como esses alunos resolveram a tarefa.

Quadro 32 – Exemplos de alunos que utilizaram resposta não matemática

Aluno 357	NÃO POR QUE NEM EU VIVI
Aluno 341	NÃO PORQUE É MUITO PEQUENO
Aluno 148	NÃO PORQUE NINGUÉM CONSEGUIE VIVER ESSE TANTO
Aluno 144	NÃO, PORQUE ELE É UMA CRIANÇA.
Aluno 140	NÃO PORQUE NÃO SE PODE VIVER 400 DIAS

Fonte: Acervo do autor

As inferências apresentadas pelos alunos indicam que eles não compreenderam a grandeza relativa do número 400 a partir de um contexto pessoal. Aparentemente, para eles, 400 representa um valor alto, o que impossibilita alguém de dois anos de idade (ou até mais) poder ter vivido esse tempo.

A tarefa *Quantos dias João já viveu?* foi adaptada dos estudos de McIntosh, Reys e Reys (1992, p. 11) no qual exemplificam o sentido da grandeza relativa e absoluta dos números com a noção que um aluno de 3.º ano pode ter sobre a ordem de grandeza do número 1000 a partir de contextos pessoais, como por exemplo se ele já

tinha vivido mais ou menos que 1000 dias. Isso demonstra que os alunos que participaram da pesquisa possuem dificuldades para pensar sobre os números.

A pesquisa desenvolvida por Hoffman (2016) com alunos de 5.º ano evidencia que os alunos realizavam julgamentos irrealistas sobre a quantidade de alunos que estudavam em sua escola, sem fazer estimativas, a partir da quantidade de alunos da sala deles. Ao longo da investigação, esse julgamento foi se aprimorando a partir de questionamentos que levassem os alunos a pensarem sobre os números. Sendo assim, levantar questões a respeito dos números é uma forma de desenvolver o sentido da grandeza dos números.

Importante salientar que as inferências pessoais decorrentes das repostas não matemáticas caracterizam o número 400 como um valor alto. Não houve respostas nessa categoria que indicassem esse número como um valor baixo. Desta forma, é possível inferir que os alunos que utilizaram esse método para resolver a tarefa ainda não sabiam nem tinham a noção de quantos dias tem um ano.

4.2.2 Conhecimento e destreza com as operações

No que diz respeito ao componente Conhecimento e destreza com as operações, McIntosh, Reys e Reys (1992) abordam os seguintes aspectos que foram analisados: Compreender o efeito das operações; Compreender propriedades matemáticas; e Compreender a relação entre operações. Na tarefa *Resolva as expressões*, ao resolver as expressões de duas maneiras diferentes nos permitiu analisar também o desempenho e as estratégias de cálculo realizados pelos alunos no primeiro e no segundo momento dos cálculos tais como os métodos, os procedimentos e adaptações, aspectos esses que foram evidenciando o conhecimento e a destreza com as operações.

Desempenho

Nesta subseção apresentamos os resultados referentes ao desempenho dos alunos e as resoluções que evidenciam como eles resolveram as expressões de maneira que deveriam ser diferentes, mas que de fato não o eram.

A seguir, é apresentada a tabela que resume o desempenho dos alunos em expressões de adição e de subtração. Esse desempenho se refere às respostas dos alunos quando resolvem os cálculos de duas maneiras diferentes.

Tabela 29 – Distribuição dos alunos de acordo com seus desempenhos nas operações de adição e de subtração

RESPOSTA	27 + 26		72 - 14	
	N.	%	N.	%
Resolve de duas maneiras diferentes	51	14,53	13	3,70
Resolve de duas maneiras, mas não são diferentes	102	29,06	115	32,76
Resolve de uma maneira	101	28,77	39	11,11
Não resolve	73	20,80	142	40,46
Em branco	24	6,84	42	11,97
Total	351	100	351	100

Fonte: Autoria própria

No que diz respeito à adição, podemos observar que 14,53% dos alunos conseguiram resolver de duas maneiras diferentes enquanto que 29,06% dos alunos resolveram de duas maneiras que não são diferentes e 28,77 resolveram de uma única maneira. Na subtração, apenas 3,70% dos alunos resolveram de duas maneiras diferentes, 32,76% resolveram de duas maneiras que não são diferentes e 11,11% resolveram de apenas uma maneira.

De forma geral, os aspectos que diferenciaram as maneiras de resolver as expressões, quando de fato eram diferentes, foram por conta dos métodos e procedimentos utilizados, tais como o método algorítmico e o cálculo mental, assim como seus procedimentos, que serão discutidos adiante.

Os alunos que calcularam de duas maneiras, mas que não foram diferentes, recorreram a adaptações do cálculo, a saber: representação “na horizontal”, mudar os valores dos termos e/ou a operação para chegar ao mesmo resultado obtido no primeiro cálculo, fazer a “prova real” e alterar a ordem dos termos.

A adaptação de representação “na horizontal” foi realizada no segundo momento do cálculo (para diferenciar do primeiro) por 16,24% dos alunos na adição e por 15,38% na subtração, nos quais eles reescreveram a expressão apresentada junto com a resposta, como se essa representação também fosse outra forma de calcular. A resolução do aluno de número 73, apresentada no quadro 33, ilustra essas situações:

Quadro 33 – Resolução do aluno 73 na tarefa Resolva as expressões (adição e subtração)

$27 + 26$	$72 - 14$
$\begin{array}{r} \overset{1}{2}7 \\ + 26 \\ \hline 53 \end{array}$	$\begin{array}{r} \overset{6}{7}2 \\ - 14 \\ \hline 58 \end{array}$
$27 + 26 = 53$	$672 - 14 = 58$

Fonte: Acervo do autor

O aluno de número 73, primeiramente, calculou por meio de um algoritmo as expressões de adição e de subtração. No segundo momento, seu cálculo foi realizado como a expressão dada na tarefa e com registros que tratam os números como dígitos, semelhantemente ao algoritmo. Nota-se que o aluno acrescenta as mesmas técnicas de cálculo com reserva como “vai um” na adição e “empresta” na subtração, o que correspondem à composição e decomposição das dezenas no algoritmo. Ou seja, o aluno, mesmo não utilizando o algoritmo por não usar uma disposição vertical, de fato, calcula com dígitos.

Mudar os valores dos termos e/ou a operação das expressões apresentadas para chegar ao mesmo resultado obtido no primeiro cálculo foi utilizado por 4,56% dos alunos em adição e por 6,27% na subtração e pode ser exemplificado pelas resoluções do aluno 305 (ver quadro 34).

Quadro 34 - Exemplos de adaptações relativas à tarefa Resolva as expressões (adição e subtração) realizadas pelo aluno 305

$27 + 26$	$72 - 14$
$\begin{array}{r} \overset{1}{2}7 \\ + 26 \\ \hline 53 \end{array}$	$\begin{array}{r} \overset{6}{7}2 \\ - 14 \\ \hline 58 \end{array}$
$\begin{array}{r} \overset{1}{1}7 \\ + 36 \\ \hline 53 \end{array}$	$\begin{array}{r} \overset{7}{8}2 \\ - 24 \\ \hline 58 \end{array}$

Fonte: Acervo do autor

Na adição, podemos notar que o aluno de número 305, ao calcular pela segunda vez, subtraiu 10 na primeira parcela e compensou adicionando 10 na segunda parcela. Na subtração, ele adicionou 10 no minuendo e no subtraendo para manter o resultado obtido na primeira conta.

Apesar dessa adaptação não constituir uma outra maneira de calcular as expressões dadas na tarefa, esses alunos demonstraram conhecimento sobre as múltiplas representações dos números e sobre as operações. Esses registros correspondem a cálculos, já não focadas na expressão inicial em si, de representar o mesmo número.

Fazer uma “prova real”, como se fosse outra forma de fazer a mesma operação, foi efetuado por 1,71% dos alunos na adição e por 2,56% na subtração. O quadro 35 apresenta exemplos dessa adaptação.

Quadro 35 - Exemplos de adaptações de Prova real relativas à tarefa Resolva as expressões - adição e subtração

<p>Aluno 63</p> $\begin{array}{r} 27 \\ + 27 \\ \hline 54 \end{array}$	$\begin{array}{r} 483 \\ - 26 \\ \hline 27 \end{array}$ $\begin{array}{r} 483 \\ - 27 \\ \hline 26 \end{array}$
<p>Aluno 136</p> $\begin{array}{r} 72 \\ - 14 \\ \hline 58 \end{array}$	$\begin{array}{r} 158 \\ + 14 \\ \hline 72 \end{array}$

Fonte: Acervo do autor

No quadro 35, podemos notar que os alunos de números 63 e 136, primeiramente, calcularam mediante o algoritmo as expressões de adição e de subtração, respectivamente. Em seguida, operaram com o resultado e um dos termos da primeira expressão a operação oposta. O aluno 63 optou por fazer a prova real com os dois termos da primeira expressão, ou seja, calculou $27+26$ num primeiro momento e, em seguida, calculou $53-26$ e $53-27$.

Apesar dessa adaptação não se referir a outro cálculo da expressão apresentada na tarefa, esses alunos demonstraram compreender certa relação entre as operações de adição e de subtração.

Alterar a ordem dos termos foi uma adaptação utilizada por 14,81% dos alunos na adição utilizando, então, a propriedade comutativa dessa operação, mas mantendo o mesmo método de cálculo, o algoritmo. A resolução do aluno 312 apresentado na figura 48 exemplifica essa situação.

$$\begin{array}{r} 1 \\ 27 \\ + 26 \\ \hline 53 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 26 \\ + 27 \\ \hline 53 \end{array}$$

Figura 48 – Resolução do aluno 312

Fonte: Acervo do autor

Esses alunos, mesmo utilizando o mesmo método de cálculo, demonstraram, compreender uma das propriedades matemáticas da adição, aspecto esse que também está relacionada ao sentido de número.

Contudo, alterar a ordem dos termos foi uma adaptação também utilizada por 5,70% dos na subtração, como mostra a figura a seguir.

$$\begin{array}{r} 72 \\ - 14 \\ \hline 62 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ - 72 \\ \hline 62 \end{array}$$

Figura 49 – Resolução do aluno 383

Fonte: Acervo do autor

Podemos observar na figura que o aluno de número 383 altera a ordem dos termos como se a propriedade comutativa também valesse na subtração.

Além disso, em seu primeiro cálculo, o aluno buscou utilizar o algoritmo, porém, por não conseguir subtrair 4 de 2 nas unidades, o aluno inverteu. Ele calculou 4 menos 2, 2 e em seguida, calculou com as dezenas. Nota-se que, ao fazer o mesmo procedimento no segundo cálculo, o aluno obtém o mesmo resultado, como se a propriedade comutativa também fosse válida para a subtração. Ao fazer isso, o aluno demonstrou que não compreendeu o sentido dessa operação.

Nenhuma adaptação foi utilizada por 85,47% dos alunos na adição no primeiro momento do cálculo e por 41,60% no segundo momento. Na subtração, 62,39% dos alunos não utilizaram adaptações no primeiro momento do cálculo enquanto que apenas 1,99% dos alunos não utilizaram no segundo momento.

Por fim, na adição, 20,80% dos alunos não resolveram a expressão corretamente enquanto que 6,84% deixaram esse item da tarefa em branco. Na subtração, 40,46% dos alunos não a resolveram corretamente enquanto que 11,97% deixaram esse item da tarefa em branco.

A tabela seguinte apresenta a distribuição dos alunos de acordo com as respostas para as expressões com multiplicação.

Tabela 30 – Distribuição dos alunos de acordo com seus desempenhos nas operações de multiplicação

RESPOSTA	52 × 2		25 × 10		25 × 12	
	N.	%	N.	%	N.	%
Resolve de duas maneiras diferentes	38	10,83	18	5,13	14	3,99
Resolve de duas maneiras, mas não são diferentes	107	30,48	28	7,98	11	3,13
Resolve de uma maneira	71	20,23	21	5,98	7	1,99
Não resolve	85	24,22	212	60,4	221	62,96
Em branco	50	14,25	72	20,51	98	27,92
Total	351	100	351	100	351	100

Fonte: Autoria própria

Podemos perceber pelas respostas dos alunos que o desempenho correto na multiplicação diminui conforme os números envolvidos nas expressões aumentam. Isso demonstra a dificuldade dos alunos em multiplicar dependendo dos valores dos fatores, o que resultou num baixo desempenho. Mendes (2012) discute sobre as dificuldades de alunos, também do 3.º ano, em multiplicar com números “grandes”. A experiência de ensino que a investigadora desenvolveu em sua pesquisa mostra que essa dificuldade reduziu com as tarefas multiplicativas propostas que visavam desenvolver o sentido de número. Essas tarefas, ao corroborar com o uso de procedimentos baseados nas propriedades dessa operação, contribuíram com o cálculo da multiplicação, inclusive quando os números a serem calculados eram “grandes”.

Um aspecto que não foi evidenciado foi a relação entre as expressões 25×10 e 25×12 . Os alunos calcularam essas expressões de forma independentes. De fato, elas podem ser vistas assim, mas, a diferença entre essas expressões é apenas 25×2 . Ou seja, se o aluno sabe calcular 25×10 , para calcular 25×12 bastava somar 50 no resultado obtido no item anterior.

Outro fato que demonstra o baixo desempenho dos participantes na multiplicação está relacionado com a quantidade de alunos que não resolveram a tarefa ou que deixaram a tarefa em branco. A percentagem de alunos nessas categorias aumentou conforme os valores dos fatores também aumentaram, indicando, mais uma

vez, que os valores envolvidos na operação da multiplicação interferem no nível de dificuldade dos alunos, mesmo que a diferença nos valores de uma expressão para outra seja pequena.

Os alunos que calcularam de duas maneiras, mas que não foram diferentes, recorreram às mesmas adaptações utilizadas na adição e na subtração.

Um exemplo da adaptação de somas parciais é a resolução do aluno de número 149 na expressão 25×12 apresentada na figura 50, que recorre ao uso de somas parciais para obter o resultado.

The figure shows a student's handwritten calculation for 25×12 . The student has written 12 separate addition problems, each adding 25 to the previous result. The calculations are arranged in three columns. The first column shows the initial steps: 25 , 50 , 75 , 100 , 125 , 150 , 175 , and 200 . The second column continues: 225 , 250 , 275 , and 300 . The final result, 300 , is written on the right side of the work.

Figura 50 – Resolução do aluno 149

Fonte: Acervo do autor

Nota-se pela figura que o aluno não fez uma única adição de parcelas iguais. Este procedimento consiste num único cálculo no qual as parcelas têm o mesmo valor e somam-se primeiramente as unidades, seguido das dezenas e assim por diante. O aluno 149, primeiramente soma $25+25$, resultando em 50; em seguida, soma 25 ao resultado obtido e assim sucessivamente. Desta forma, suas somas são sempre de duas parcelas. Ele calcula assim 12 vezes e obtém o resultado de 25×12 .

Um exemplo do procedimento de adição sucessiva, mas sem recorrer à adaptação de somas parciais, é encontrado na resolução do aluno de número 340 na figura a seguir.

Figura 51 – Resolução do aluno 340

Fonte: Acervo do autor

Podemos notar que o aluno, nos dois momentos de calcular 52×2 , utilizou o algoritmo de adição, sendo que, primeiramente, somou duas vezes o 52 e em seguida somou 2 cinquenta e duas vezes.

Mudar termos e/ou operação para chegar ao mesmo resultado obtido anteriormente foi uma adaptação realizada por 3,70% dos alunos nas expressões 52×2 e 25×10 e por 2,85% em 25×12 , assim como mostra a figura a seguir.

Figura 52 – Resolução do aluno 14

Fonte: Acervo do autor

Mais uma vez, apesar dos alunos não demonstrarem que calculam de duas maneiras diferentes as expressões de multiplicação, demonstraram que são capazes de representar números a partir de outros termos e, algumas vezes, outra operação. As operações utilizadas por esses alunos foram de adição e subtração, assim como na pesquisa de Mendes (2012).

Ainda sobre essa adaptação, nos chama a atenção a resolução do aluno de número 165 que, ao fazer essa adaptação, não recorreu a valores aleatórios, como mostra a figura 54.

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 10 \\ \hline 250 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{r} 50 \\ \times 5 \\ \hline 250 \end{array}$$

Figura 53 – Resolução do aluno 165

Fonte: Acervo do autor

Pode-se observar na figura que, primeiramente, o aluno calcula 25 vezes 10; em seguida, calcula 50 vezes 5. Nessa adaptação, ao escolher os valores dos termos no segundo cálculo, ele opta por calcular 50 (que é o dobro de 25) vezes 5 (que é a metade de 10). Desta forma, ao dobrar o valor de um dos fatores e multiplica-lo pela metade do segundo fator, o aluno obtém o mesmo valor do primeiro cálculo.

Essa resolução caracteriza um dos conhecimentos que Thompson (2010) discute acerca da multiplicação que contribui no momento de escolher uma estratégia de cálculo. Esse conhecimento se refere ao fato de que, o dobro do valor de um dos fatores vezes a metade do outro fator, é igual ao produto inicial.

Alterar a ordem dos termos foi uma adaptação realizada por 6,55% dos alunos nas expressões 52×2 e 25×10 e por 6,84% em 25×12 , assim como mostra a figura a seguir.

$$\begin{array}{r} 52 \\ \times 2 \\ \hline 104 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{r} 9 \\ \times 52 \\ \hline 108 \\ \hline 104 \end{array}$$

) 25×10

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 10 \\ \hline 20 \\ \hline 250 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{r} 10 \\ \times 25 \\ \hline 250 \end{array}$$

Figura 54 – Resolução do aluno 306

Fonte: Acervo do autor

O aluno de número 306, nas duas situações, calcula usando o algoritmo da multiplicação nos dois momentos de cálculo. Porém, no segundo momento, ele inverte a ordem dos fatores para calcular. Nota-se que para calcular 2×52 , o aluno registra todas as etapas do cálculo. Já para calcular 10×25 , ele apenas coloca o resultado. Isso pode ser

devido ao fato de já ter calculado 25×10 num primeiro momento, ou por saber que quando multiplicamos por 10, “basta acrescentar um zero”.

Ainda, na expressão 52×2 , 14,53% utilizaram a representação da expressão na horizontal e 1,99% dos alunos fizeram a prova real. Nessa expressão, 72,08% dos alunos, num primeiro momento do cálculo, não utilizaram nenhuma adaptação, enquanto no segundo momento, 10,83% fizeram o mesmo.

Em 25×10 , 11,97% representaram a operação na horizontal, 1,14% dos alunos calcularam a prova real e 31,62% dos alunos, no primeiro momento, não fizeram adaptações no primeiro cálculo e no segundo, 8,26% não fizeram adaptações.

Por fim, em 25×12 , 11,97% representaram a operação na horizontal; 0,85% dos alunos fizeram a prova real e 25,93% dos alunos, no primeiro momento, não fizeram adaptações no cálculo e no segundo momento, 6,55% não fizeram adaptações.

A tabela seguinte apresenta a distribuição dos alunos de acordo com as respostas para a divisão.

Tabela 31 – Distribuição dos alunos de acordo com seus desempenhos nas operações de divisão

RESPOSTA	25 ÷ 5		60 ÷ 2	
	N.	%	N.	%
Resolve de duas maneiras diferentes	26	7,41	17	4,84
Resolve de duas maneiras, mas não são diferentes	88	25,07	69	19,66
Resolve de uma maneira	21	5,98	12	3,42
Não resolve	96	27,35	122	34,76
Em branco	120	34,19	131	37,32
Total	351	100	351	100

Fonte: Autoria própria

Na divisão, de modo geral, o desempenho dos alunos foi relativamente melhor na expressão $25 \div 5$. Ainda assim, podemos observar que poucos alunos resolveram as operações de duas maneiras diferentes. Tendo em vista que mais da metade dos alunos erraram esses itens da tarefa ou os deixaram em branco, demonstraram a dificuldade que eles têm em realizar cálculos de divisão.

O melhor desempenho na expressão $25 \div 5$ pode ser devido ao fato dela ter valores fáceis de se calcular tendo em vista a tabuada do 5.

As adaptações utilizadas pelos alunos na divisão, ao buscarem calcular de duas formas diferentes, mas que não são efetivamente diferentes, de forma geral, foram as seguintes: representar a expressão na horizontal; mudar os termos e/ou a operação para chegar ao mesmo resultado obtido anteriormente; calcular a prova real; e alterar a ordem dos termos.

Alterar a ordem dos termos para calcular foi realizada por 0,85% dos alunos na expressão $25 \div 5$ e por 0,57% em $60 \div 2$, como mostra a resolução do aluno de número 87 no quadro 36.

Quadro 36 – Exemplos da adaptação “alterar a ordem dos termos” relativas à tarefa Resolva as expressões (divisão) realizada pelo aluno de número 87

$25 \div 5 = 5$	$5 \div 25 = 5$	$60 \div 2 = 30$	$2 \div 60 = 30$
-----------------	-----------------	------------------	------------------

Fonte: Acervo do autor

Nas resoluções apresentadas, o aluno calcula 87, primeiramente, calcula $25 \div 5$, obtendo 5 e $60 \div 2$, obtendo 30. No segundo momento dos cálculos ele inverte a ordem dos termos, como se não fosse alterar os resultados. Essa adaptação corresponde a uma generalização incorreta da propriedade comutativa da Matemática. Utilizar a propriedade comutativa na subtração e na divisão demonstra uma generalização equivocada da propriedade, além de uma falta de compreensão do cálculo e da operação em si.

Além do mais, na expressão $25 \div 5$, 6,84% dos alunos utilizaram o cálculo na horizontal; 3,70% mudaram os termos e/ou a operação para chegar ao mesmo resultado obtido anteriormente; 1,42% calcularam a prova real; e 38,46% dos alunos, num primeiro momento, não utilizaram nenhuma adaptação, enquanto no segundo momento, 2,56% fizeram o mesmo.

Por fim, em $60 \div 2$, 5,98% representaram o cálculo na horizontal; 3,70% dos alunos mudaram os termos e/ou operação para chegar ao resultado obtido anteriormente; 2,56% dos alunos calcularam a prova real; e 34,47% dos alunos, num primeiro momento do cálculo, não utilizaram nenhuma adaptação, enquanto no segundo momento, 2,28% fizeram o mesmo.

Algoritmo e cálculo mental: aspectos que se destacam

O quadro 37 apresenta a distribuição dos alunos de acordo com o método de cálculo utilizado em cada expressão da tarefa. Consideramos aqui o número total de alunos que responderam ao instrumento de pesquisa Tarefas numéricas, o que corresponde a 351 alunos (ou seja, 351 iguala-se a 100%). Porém, esse quadro mostra apenas os alunos que realizaram algum tipo de cálculo. Isto é, alunos que não realizaram a tarefa, que deixaram a tarefa em branco, não são apresentados. Mesmo não sendo apresentados, esses alunos ainda fazem parte da amostra analisada. Os alunos que realizaram um único cálculo são representados apenas pelo cálculo realizado.

Tendo em vista que a tarefa solicitava duas maneiras diferentes de calcular as expressões apresentadas, a coluna “C. 1” representa o primeiro cálculo realizado pelos alunos e a coluna “C. 2” representa o segundo cálculo.

**Quadro 37 - Distribuição dos alunos de acordo com os métodos de cálculo realizados na tarefa
Resolva as expressões (N = 351)**

		ALGORITMO		CÁLCULO MENTAL		OUTRO	
		C. 1	C. 2	C. 1	C. 2	C. 1	C. 2
27 + 26	N.	301	146	15	47	11	33
	%	85,75	41,60	4,27	13,39	3,13	9,40
72 - 14	N.	274	123	10	22	25	41
	%	78,06	35,04	2,85	6,27	7,12	11,68
52 × 2	N.	253	136	1	7	47	33
	%	72,08	38,75	0,28	1,99	13,39	9,40
25 × 10	N.	223	118	2	5	54	39
	%	63,53	33,62	0,57	1,42	15,38	11,11
25 × 12	N.	200	107	2	4	51	34
	%	56,98	30,48	0,57	1,14	14,53	9,69
25 ÷ 5	N.	134	47	27	26	70	53
	%	38,18	13,39	7,69	7,41	19,94	15,10
60 ÷ 2	N.	122	46	31	19	67	53
	%	34,76	13,11	8,83	5,41	19,09	15,10

Fonte: Autoria própria

O quadro 37 indica que o algoritmo foi o método de cálculo mais utilizado pelos alunos, independentemente da operação apresentada. Ainda, quando observamos as colunas relativas ao algoritmo, podemos notar que ele foi ainda mais utilizado no primeiro momento do cálculo.

Um estudo longitudinal desenvolvido por Carpenter et al. (1998) aponta que os alunos que utilizam estratégias inventadas em situações de cálculo, estratégias essas com procedimentos provenientes do cálculo mental, antes de aprenderem um algoritmo padrão, demonstraram um melhor conhecimento sobre o conceito do número e foram mais bem-sucedidos em ampliar seus conhecimentos para novas situações do que os alunos que inicialmente aprenderam algoritmos padrão.

Se considerarmos o desempenho dos alunos apresentados nas tabelas 29, 30 e 31 e o quadro 37, podemos observar que o algoritmo foi o método de cálculo com maior frequência ao mesmo tempo em que o desempenho dos alunos foi baixo. Esses dados representam o argumento de Carpenter et al. (1998) quando salientam que os alunos que utilizam algoritmos antes de desenvolverem outros tipos de estratégias de cálculo possuem uma limitação no qual não podiam utilizá-los com flexibilidade para resolver problemas. Esses dados são importantes, pois, de acordo com os autores, as estratégias utilizadas pelos alunos que tiveram o maior sucesso na aplicação do seu conhecimento de forma flexível devem servir de modelo para a aprendizagem de todos os alunos.

A seguir, apresentaremos aspectos que se destacaram durante a análise dos dados, tais como erros provenientes dos cálculos bem como acertos.

O algoritmo, caracterizado por Heuvel-Panhuizen e Buys (2008) como um procedimento padrão em que o cálculo é feito com dígitos e não com valores numéricos, quando mal compreendido, pode ocasionar em erros de cálculo.

Na adição, um exemplo desse equívoco é a resolução do aluno de número 206, que apresentou em seu registro aspectos a serem evidenciados na figura a seguir.

a) $27 + 26$

413

$$\begin{array}{r} 27 \\ +26 \\ \hline 413 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 + 26 \\ \hline 413 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ +26 \\ \hline 413 \end{array}$$

Figura 55 – Resolução do aluno 206

Fonte: Acervo do autor

Ao calcular mediante o algoritmo, o aluno 206 soma as unidades 6 e 7 e escreve 13 onde se registra o resultado. Em seguida, soma as dezenas e escreve 4 ao lado do 13 como se $27+26$ fosse igual a 413. Ele repete esse erro ao utilizar a propriedade comutativa da adição, calculando $26+27$.

Esse aluno não compreendeu os procedimentos utilizados no algoritmo quando ocorre reserva (usualmente falado em sala de aula como “vai um”).

A resolução do aluno de número 159 apresenta uma representação do algoritmo que pode favorecer a compreensão do algoritmo como mostra a figura a seguir.

Figura 56 – Resolução do aluno 159

Fonte: Acervo do autor

Em seu cálculo, o aluno soma 6 e 7 e escreve o número 13 ao lado do cálculo. No algoritmo em si, ele mostra por meio de setas que o valor 3 é resultado das unidades enquanto que a dezena “sobe” para ser calculados com as dezenas. Em seguida, soma as dezenas e seu cálculo resulta em 53.

Na subtração, um equívoco recorrente do algoritmo é subtrair o menor dígito do maior, sem levar em consideração o valor global dos termos envolvidos, como também pode ser observado na figura 50. Essa adaptação foi realizada por 15,67% dos alunos no primeiro momento de calcular e por 1,99% no segundo momento.

Erros assim podem ser provenientes de falas como “na subtração, se tira o menor número, do maior”. Como no algoritmo trabalhamos com dígitos, ao invés de números, o aluno pode generalizar essa explicação para todo o procedimento do cálculo, entendendo que cada algarismo é apenas um dígito em que se é permitido subtrair o menor dígito do maior.

Uma resolução referente à subtração que se destacou foi a do aluno de número 49. Ao subtrair, o aluno, primeiramente, calculou mediante o algoritmo corretamente. Porém, no segundo cálculo, o aluno apresenta registros que, apesar de não ser um algoritmo, representa um cálculo sobre dígitos, como mostra a figura a seguir.

Figura 57 – Resolução do aluno 49

Fonte: Acervo do autor

Ao calcular pela segunda vez, o aluno apresenta três “linhas” de cálculo: na primeira linha, ele escreve a expressão dada no item da tarefa; na segunda linha, ele escreve o número 72 separado por dígitos, risca o número 7 e escreve 6 (mostrando a decomposição do número) e acrescenta a dezena no número 2, formando 12 unidades; em seguida, subtrai 4 de 12, que resulta em 8; na terceira linha, ele repete a decomposição do 7, que passa a ser 6 e subtrai 1, resultando e 5. Enfim, mostra que os resultados parciais desses cálculos são os dígitos que irão compor o resultado da expressão dada, que é 58.

Podemos perceber na resolução desse aluno que, mesmo não utilizando o algoritmo da subtração, ele utiliza os mesmos procedimentos padronizados do algoritmo, principalmente no fato de calcular com dígitos e não com valores numéricos. Neste caso, apenas o registro do aluno no papel foi feita de forma diferente, mas seu cálculo continua sendo de forma algorítmica.

Os algoritmos utilizados nas operações de multiplicação, ao calcular 52×2 , 25×10 e 25×12 , foram os de adição e multiplicação. Em seus cálculos, foram utilizadas certas adaptações a serem destacadas.

O algoritmo da multiplicação, quando os fatores são compostos por dois ou mais dígitos, normalmente, é trabalhado da forma como o aluno de número 43 calculou:

Quadro 38 – Algoritmo de multiplicação realizado pelo aluno de número 43

25×10	25×12
$\begin{array}{r} 25 \\ \times 10 \\ \hline 00 \\ 25 \\ \hline 250 \end{array}$	$\begin{array}{r} 25 \\ \times 12 \\ \hline 50 \\ 25 \\ \hline 300 \end{array}$

Fonte: Acervo do autor

Assim, os fatores são vistos como dígitos sendo que cada dígito do segundo fator multiplica cada dígito do primeiro fator. Calcular dessa forma, entendemos os números como uma junção de dígitos nos quais um dígito multiplica outro dígito. Contudo, houveram alunos que calcularam usando números e dígitos. Para clarificar esta situação, apresentamos os exemplos no quadro a seguir.

Quadro 39 – Exemplos da adaptação “multiplicar números e dígitos” realizada no algoritmo da multiplicação

Aluno 168	Aluno 23
<p>d) 25×10</p> $\begin{array}{r} 5 \\ 25 \\ \times 10 \\ \hline 250 \end{array}$	<p>e) 25×12</p> $\begin{array}{r} 6 \\ 25 \\ \times 12 \\ \hline 300 \end{array}$

Fonte: Acervo do autor

Para calcular 25×10 , o aluno de número 168 multiplica 10 vezes 5, que é 50; escreve o zero na resposta e “sobe” 5; em seguida multiplica 10 vezes 2, que é 20, mais 5, 25; assim o cálculo resulta em 250. Da mesma forma, o aluno de número 23 calcula 25×12 multiplicando 12 vezes 5 e em seguida, 12 vezes 2. Nota-se que apenas o número 25 é visto pelos alunos como a junção de dígitos 2 e 5. Já os números 10 e 12 são visto em seus valores globais. Essa adaptação do algoritmo da multiplicação foi utilizada por 10,83% dos alunos em 25×10 e por 6,27% em 25×12 .

Brocardo (2011) discute sobre marcos no desenvolvimento do cálculo mental baseados em relações evidenciadas pelos alunos em seus registros. De forma análoga, podemos perceber esse cálculo como um marco no desenvolvimento do algoritmo, no qual o cálculo não é realizado apenas sobre dígitos, mas sim com número, em seu valor global, que multiplica os dígitos que compõem outro número.

Contudo, essa forma de calcular, quando mal compreendida, também gera erros, como mostra o quadro a seguir.

Quadro 40 – Exemplos da adaptação “multiplicar números e dígitos” realizada no algoritmo da multiplicação

<p>25×10</p> <p>Aluno 228</p> $\begin{array}{r} 25 \\ \times 10 \\ \hline 2050 \end{array}$	<p>25×12</p> <p>Aluno 105</p> $\begin{array}{r} 25 \\ \times 12 \\ \hline 2460 \end{array}$
---	---

Fonte: Acervo do autor

Nas resoluções apresentadas no quadro 40 podemos observar que os alunos, ao multiplicar, acabam por cometer o mesmo equívoco apresentado na figura 55, na adição. O aluno 228 multiplica 10 vezes 5 e escreve 50 no resultado; em seguida multiplica 10 por 2 e escreve 20; assim, obtém 2050 como resultado. Igualmente calcula o aluno de número 105 em 25×12 .

Outro erro proveniente da falta de compreensão do cálculo algorítmico da multiplicação foi multiplicar dígitos correspondentes. Na adição e subtração calculamos unidade com unidade, dezena com dezena e assim por diante. Desta forma, houve alunos que generalizaram esse procedimento para o algoritmo da multiplicação, como mostra o quadro a seguir.

Quadro 41 – Algoritmo de multiplicação realizado pelo aluno de número 115

$\begin{array}{r} 25 \\ \times 10 \\ \hline 20 \end{array}$	$\begin{array}{r} 25 \\ \times 12 \\ \hline 30 \end{array}$
---	---

Fonte: Acervo do autor

Nota-se que o aluno de número 115 multiplica apenas os dígitos correspondentes. Em 25×10 ele multiplica zero vezes 5 que é igual a zero; 1 vezes 2 é igual a 2; assim, o resultado, para ele, seria 20. O mesmo acontece em 25×12 : 2 vezes 5 é igual a 10; escreve zero na resposta e “sobe” 1; 1 vezes 2, é 2, mais 1, 3, obtendo 30 como resultado. Essa adaptação do algoritmo da multiplicação foi utilizado por 21,08% dos alunos em 25×10 no primeiro momento do cálculo e por 0,28% no segundo; e por 24,79% em 25×12 .

Na divisão, ao calcular $25 \div 5$ e $60 \div 2$ por meio do algoritmo, os alunos utilizaram a divisão longa e a divisão curta, como mostram as resoluções dos alunos de números 347 e 36 no quadro a seguir.

Quadro 42 – Exemplos de divisão longa e divisão curta

<p>$60 \div 2$</p> <p>Aluno 36</p> $\begin{array}{r} \overset{\wedge}{60} \quad \overset{12x}{30} \\ \underline{-6} \quad \overset{30}{30} \\ 00 \\ \underline{-0} \\ 0 \end{array}$	<p>$25 \div 5$</p> <p>Aluno 347</p> $\begin{array}{r} 25 \overline{) 5} \\ \underline{0} \quad 5 \end{array}$
---	--

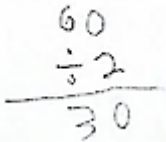
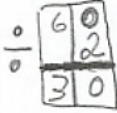
Fonte: Acervo do autor

O aluno 36, em $60 \div 2$, calcula por meio de algoritmo, porém com um algoritmo que se caracteriza por uma divisão longa. No entanto, nota-se que ele opera por dígitos, dividindo primeiramente o 6 e em seguida o zero, obtendo 30 como resultado. A divisão longa foi utilizada em $25 \div 5$ por 31,62% dos alunos no primeiro momento de calcular e por 5,41% dos alunos no segundo momento. Em $60 \div 2$, 28,49% dos alunos calcularam assim no primeiro momento e 4,84% no segundo momento.

Já o aluno de número 347, em $25 \div 5$, calcula utilizando o algoritmo da divisão que se caracteriza por uma divisão curta. Nota-se que esse procedimento é semelhante ao procedimento da divisão longa, sendo que nela, não é evidenciada a multiplicação do quociente com o divisor e a subtração para obter o resto. A divisão curta teve menor frequência quando comparada a divisão longa, sendo que foi utilizada em $25 \div 5$ por 5,98% dos alunos no primeiro momento de calcular e por 7,69% dos alunos no segundo momento. Em $60 \div 2$, 6,55% dos alunos calcularam assim no primeiro momento e 7,98% no segundo momento.

Além do mais, na divisão, houve alunos que também representaram o cálculo da divisão como a um algoritmo de outra operação. O quadro a seguir exemplifica resoluções de alunos que representaram a divisão usando uma disposição idêntica à do algoritmo de adição, subtração e multiplicação.

Quadro 43 – Exemplos da adaptação “divisão representada como outro algoritmo” relativa à tarefa Resolva as expressões (divisão)

Aluno 135	Aluno 245
	

Fonte: Acervo do autor

Os alunos de números 135 e 245 representaram a divisão colocando o sinal de divisão onde, normalmente, se apresenta os demais sinais, seguido do sinal de igualdade. O aluno 245, além da representação semelhante a do aluno 135, acrescenta em seu registro traços que normalmente são utilizados para organizar números em ordens, facilitando que o aluno registre o cálculo com “unidade embaixo de unidade, dezena embaixo de dezena, etc.” para calcular nas outras operações. Embora seja claro que o aluno não tenha utilizado o algoritmo da divisão, podemos levantar a hipótese de que ela tenha pensado no número 60 como dígitos e operado como “6 dividido por 2 é igual a 3 e 0 dividido por 2 é igual a 0” registrando como resultado final 30.

Em $25 \div 5$ esta adaptação foi realizada por 2,56% dos alunos no primeiro momento do cálculo e por 1,14% no segundo momento. Em $60 \div 2$, 3,42% dos participantes utilizaram essa adaptação no primeiro momento e 0,85% no segundo momento.

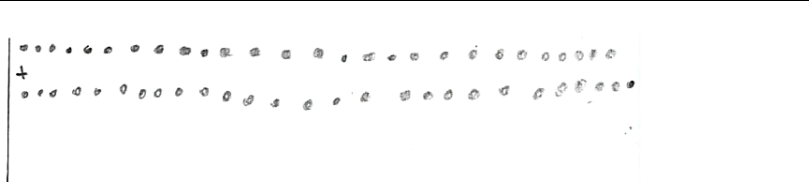
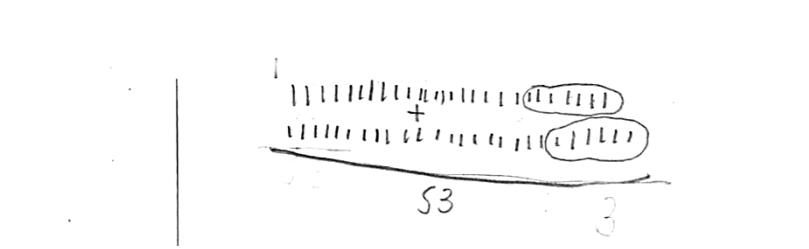
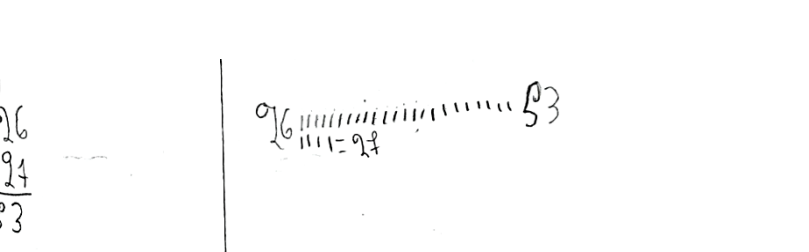
No que diz respeito ao cálculo mental, podemos verificar no quadro 36 que ele foi pouco utilizado, tendo maior frequência nas operações de adição e divisão. Quando os alunos recorriam a esse método, era no segundo momento de se operar, excetuando-se na divisão por uma pequena diferença entre as frequências do primeiro e segundo cálculo. Esses dados reforçam a ideia de que os alunos recorrem mais ao método algorítmico em situações de cálculo, não utilizando outros métodos.

Na adição e na subtração, os alunos que utilizaram o cálculo mental apresentaram diferentes adaptações tais como o uso de uma representação pictórica, encurtar por decomposição de um termo num múltiplo de 10 e o resto, encurtar por decomposição dos dois termos num múltiplo de 10 e o resto e compensação.

O uso de representações pictóricas foi utilizado por 1,42% dos alunos no primeiro momento de calcular e por 6,84% dos alunos no segundo momento. Essa

adaptação foi utilizada para realizar contagens. Os alunos de números 233, 156 e 81 exemplificam essa situação no quadro a seguir.

Quadro 44 – Exemplos do uso de representações pictóricas relativas à tarefa Resolva as expressões (adição)

<p>Aluno 233</p> $\begin{array}{r} 1 \\ 27 \\ + 26 \\ \hline 53 \end{array}$	
<p>Aluno 156</p> $\begin{array}{r} 1 \\ 27 \\ + 26 \\ \hline 53 \end{array}$	
<p>Aluno 81</p> $\begin{array}{r} 1 \\ 26 \\ + 27 \\ \hline 53 \end{array}$	

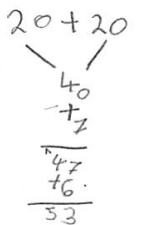
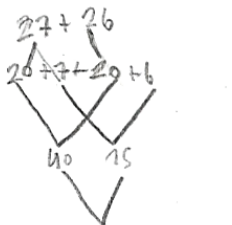
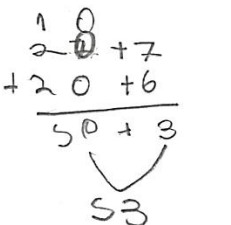
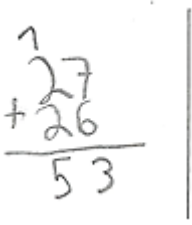
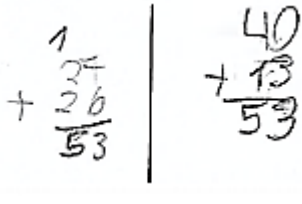
Fonte: Acervo do autor

O aluno de número 233 representou as quantidades envolvidas com pequenos círculos para depois contá-los. O aluno 156, ao fazer o mesmo tipo de registro, destaca as quantidades que representam os valores 7 e 6, as unidades dos valores a serem somados. Após contar, escreve 3 no resultado e acrescenta mais um pequeno traço acima dos 40 riscos para contar mais 1 dezena. Nota-se que, mesmo operando com os valores presentes na expressão, o aluno registra também uma dezena dando indícios de calcular com dígitos também. Já o aluno 81, para fazer a contagem, escreve o número 26 e faz 27 pequenos riscos. Desta forma, sua contagem começa do número 26 e os risquinhos o ajudam a contar mais 27, resultando em 53.

Embora os alunos tenham utilizado o mesmo procedimento, podemos observar que a forma de como o aluno de número 81 realiza a contagem é mais evoluída que a dos demais alunos. Isso porque sua contagem é feita a partir de uma das parcelas ao invés de contar todas as quantidades envolvidas na operação. Seu procedimento é semelhante ao cálculo realizado em linhas numéricas com saltos de um em um.

A adaptação de encurtar por decomposição dos dois termos em dezenas e unidades foi utilizada por apenas 1,99% dos alunos no primeiro momento de calcular e por 6,84% dos alunos no segundo momento. Essa adaptação foi utilizada para realizar o procedimento de decomposição. O quadro 45 apresenta exemplos dessa adaptação.

Quadro 45 – Exemplos de respostas relativas à adaptação decomposição em dezenas e unidades na tarefa Resolva as expressões em adição

<p>Aluno 23</p> 	<p>Aluno 41</p> 
<p>Aluno 43</p> 	<p>Aluno 82</p> 
<p>Aluno 308</p> 	

Fonte: Acervo do autor

No quadro 45, em todas as resoluções apresentadas, os alunos decompõem os números 27 e 26 num múltiplo de 10, no caso o 20, mais o resto. O aspecto em que essas resoluções se diferem é a forma como eles registraram seus cálculos. O aluno de número 41, primeiramente, registra seu cálculo como a um “esquema”, evidenciando a composição dos números como a uma soma das dezenas e das unidades e depois a soma dos resultados parciais. No segundo cálculo, utiliza o mesmo procedimento, mas registrando de uma forma mais elaborada.

O aluno de número 43 também representa seu cálculo de forma elaborada, mas, ao invés de escrever o número 13 como resultado parcial, escreve 3 como resultado da soma das unidade e acrescenta 10 para somar às dezenas. Já o aluno 82, ao invés de

“subir” 10, “sobe” 1 e escreve o resultado total. Nota-se que a resolução deste aluno seria um algoritmo se não fosse por ele também calcular sobre os números ao invés de calcular dígitos.

O aluno de número 23, também registrando um certo “esquema” de seu cálculo, soma primeiramente as dezenas resultando em 40. Deste resultado soma 7 e depois 6. Este procedimento se assemelha ao procedimento de salto, porém, como o aluno decompôs os dois termos num múltiplo de 10 mais o resto, ficou caracterizado como o procedimento de decomposição.

Já o aluno 308 aparentemente utilizou um algoritmo. Porém, podemos notar que os valores somados correspondem aos resultados parciais de $20+20$ e $6+7$, como mostra a figura a seguir.

$$\begin{array}{r}
 27 \\
 + 26 \\
 \hline
 40 \\
 + 13 \\
 \hline
 53
 \end{array}
 \quad \leftarrow \quad
 \begin{array}{r}
 40 \\
 + 13 \\
 \hline
 53
 \end{array}$$

Figura 58 – Representação da resolução do aluno 308

Fonte: Acervo do autor

Desta forma, podemos observar que o registro do aluno se assemelha ao cálculo em coluna que, segundo Thompson (2010) e Buys (2008), se caracteriza como um cálculo mental, porém, a decomposição dos termos é representada de forma padronizada.

A adaptação de compensar foi utilizada por 0,85% dos alunos no primeiro momento de calcular e por 1,42% dos alunos no segundo momento. Essa adaptação foi utilizada para realizar o procedimento variado. O quadro 46 apresenta exemplos dessa adaptação.

Quadro 46 – Exemplos de respostas relativas à adaptação “compensar” na tarefa Resolva as expressões em adição



Aluno 394	Aluno 85
$\begin{array}{l} a) 27 + 26 = 53 \\ 27 + 26 = 53 \\ 25 + 28 = 53 \end{array}$	$23 + 30 = 53$

Fonte: Acervo do autor

O aluno de número 394, no segundo momento de cálculo (correspondente à terceira linha), para somar $27+26$, subtrai 1 de 26 e o adiciona no 27, calculando $25+28$. Esta adaptação provavelmente foi feita para facilitar o cálculo, pois ela pode ser vista como $25+25+3$ já que 28 é igual a $25+3$. Sendo assim, $25+25$ é 50, mais 3, 53. Semelhantemente, o aluno 85, no primeiro cálculo, subtrai 3 de 26 e adiciona em 27 para resultar em 30. Desta forma, soma $23+30$ tendo em vista a praticidade em somar múltiplos de 10.

Na subtração, a representação de forma pictórica foi utilizada por 1,42% dos alunos no primeiro momento de calcular e por 3,99% dos alunos no segundo momento. Os alunos de números 82 e 168 exemplificam essa situação no quadro a seguir.

Quadro 47 – Exemplos de representações pictóricas relativas à tarefa Resolva as expressões (subtração)


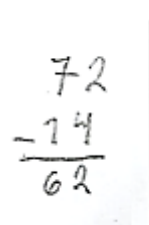
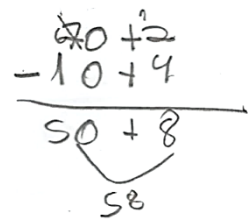
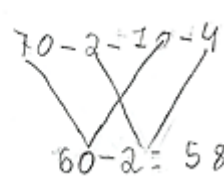
<p>Aluno 82</p> $\begin{array}{r} 62 \\ -14 \\ \hline 58 \end{array}$	
<p>Aluno 168</p> $\begin{array}{r} 62 \\ -14 \\ \hline 58 \end{array}$	

Fonte: Acervo do autor

O aluno de número 82 apresenta em sua resolução a ideia da subtração que é a de tirar. Neste sentido, o aluno faz 72 pequenos traços e risca 14 para poder contar o restante e resultar em 58. Já o aluno 168 apresenta a ideia de “falta para” da subtração. Desta forma, por meio de uma representação pictórica, o aluno conta quanto falta para chegar ao 72 partindo do número 14.

A adaptação de encurtar por decomposição dos termos em dezenas e unidades foi utilizada por 0,28% dos alunos no primeiro momento de calcular e por 1,42% dos alunos no segundo momento. O quadro 48 apresenta exemplos desses métodos em subtração.

Quadro 48 – Exemplos de respostas relativas à adaptação “decomposição em dezenas e unidades” tarefa Resolva as expressões em subtração

<p>Aluno 13</p> 	<p>Aluno 36</p> 
<p>Aluno 43</p> 	<p>Aluno 227</p> 

Fonte: Acervo do autor

A adaptação utilizada requer a decomposição dos números sendo que sua representação é feita a partir de uma adição, como por exemplo, o número 72 pode ser representado por 70+2. No entanto, por se tratar de uma subtração, os alunos 13 e 227 generalizaram a representação dos números 72 e 14 a partir de uma decomposição equivocada com subtração. Desta forma, o aluno 13 subtrai 10 de 70 e, posteriormente, 2 de 4, resultando em 62. Já o aluno 227 resolve corretamente e representa que 70 menos 10 é igual a 60; 2 menos 4 que é -2. Assim, 60 - 2 é igual a 58.

A resolução do aluno de número 227 é semelhante à resolução de problemas de uma participante do 1.º ano da pesquisa desenvolvida por Moraes e Serrazina (2013). Nessa pesquisa, a aluna demonstrou compreender a operação de subtração (inclusive a

não comutatividade) e não demonstrou dificuldade em utilizar o procedimento de decomposição nessa operação, aspecto esse que, de acordo com Thompson (2000), é relacionada aos alunos mais proficientes em cálculo.

O aluno 36, mesmo representando de forma correta os termos da expressão, ao invés de subtrair 4 de 2, subtrai 2 de 4 e soma os resultados parciais resultando em 62, assim como ocorreu no algoritmo da subtração. Beishuizen (2009) salienta que esse procedimento (denominado por ele como estratégia 1010) pode causar conflitos em cálculos quando o valor da unidade do minuendo é menor que a unidade do subtraendo, como acontece em $72-14$. Isso porque os alunos têm dificuldade em resolver $2-4$ e calculam erroneamente $4-2$. Essa dificuldade não está no procedimento de decomposição em si, mas sim no rearranjo correto dos números. O autor acrescenta que a estratégia N10 (denominada nessa pesquisa como procedimento de salto) é mais eficiente nessas situações, pois é menos suscetível a esses erros.

Ademais, o levantamento bibliográfico realizado por Morais e Serrazina (2013), juntamente com sua pesquisa empírica, apontam que, para além da preferência dos alunos em estratégias do tipo N10 (procedimento de salto) em cálculos de subtração, o sucesso nessa operação é maior quando comparada com o uso da estratégia do tipo 1010 (procedimento de decomposição).

O aluno 43 também representa os termos corretamente e ainda, representa seu cálculo de forma mais elaborada. Nota-se que, ao decompor uma dezena de 70 para compor 12 unidades, o aluno opera sobre dígitos. No entanto, de forma geral, o aluno calcula com números sendo que, sua forma de representar o cálculo, evidencia e simplifica procedimentos que serão utilizados no algoritmo. Ou seja, a forma como o aluno representou a retirada de uma dezena para formar o número 12 para poder subtrair 4 clarifica o cálculo com reserva da subtração usualmente conhecido como “empresta”.

A adaptação de compensar foi utilizada por 0,57% dos alunos no primeiro momento de calcular e por 0,85% dos alunos no segundo momento. A resolução do aluno 23 exemplifica essa adaptação na figura a seguir.

Figura 59 – Resolução do aluno 23

Fonte: Acervo do autor

Em seu primeiro cálculo, o aluno 23 subtrai 10 de 70 e posteriormente subtrai 4, obtendo 56. Em seguida adiciona 2. Essa adição se refere ao fato de que o valor inicial do minuendo ser 72, mas, o aluno começou subtraindo de 70 tendo em vista que operar números múltiplos de 10 é mais fácil.

Na multiplicação, a representação pictórica foi utilizada por 14,53% dos alunos em 52×2 ; por 1,14% dos alunos em 25×10 e por 0,85% dos alunos em 25×12 . A frequência do uso dessa adaptação diminui conforme os valores dos fatores aumentam, demonstrando que esse recurso fica difícil dependendo dos valores envolvidos na multiplicação. As resoluções do aluno de número 156 exemplificam essa adaptação.

Quadro 49 – Exemplos de respostas relativas à adaptação “Representar de forma pictórica” do aluno 156 na tarefa Resolva as expressões em multiplicação

52×2	$\begin{array}{r} 52 \\ \times 2 \\ \hline 104 \end{array}$	
25×10	$\begin{array}{r} 25 \\ \times 10 \\ \hline 250 \end{array}$	

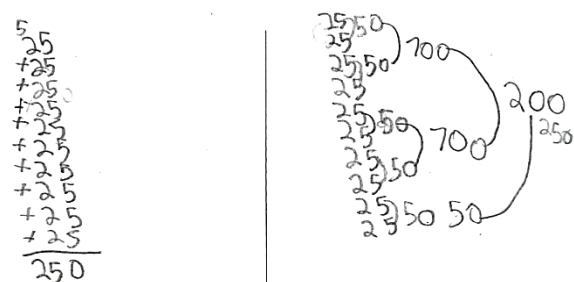
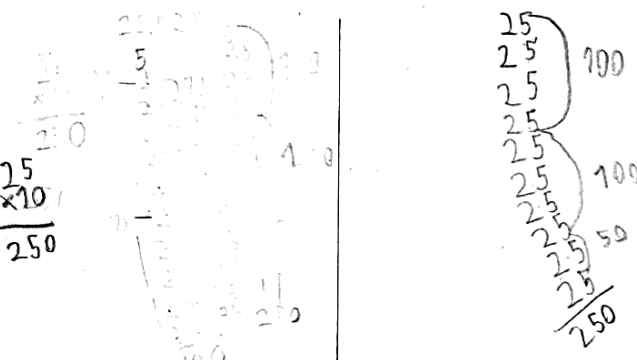
Fonte: Acervo do autor

Nota-se que o aluno representa a quantidade de um dos fatores por meio de conjuntos e, dentro de cada conjunto, representa o outro fator com pequenos círculos.

Desta forma, ele utiliza essa representação como recurso para auxiliá-lo em sua contagem.

As somas parciais foram utilizadas por 0,57% dos alunos em 25×10 e por 0,85% dos alunos em 25×12 , como mostra o quadro a seguir.

Quadro 50 – Exemplos de respostas relativas à adaptação “somadas parciais” na tarefa Resolva as expressões em multiplicação

<p>Aluno 82</p> 	<p>Aluno 87</p> 
---	--

Fonte: Acervo do autor

Nos exemplos apresentados, podemos observar a mesma adaptação utilizada na mesma expressão, porém, com um aspecto diferente. O aluno de número 82 seguiu quatro etapas para calcular:

- 1- fez agrupamentos de dois 25 em cada, obtendo cinco grupos de 50;
- 2- fez dois agrupamentos de 50, obtendo 100 e resta um grupo de 50;
- 3- fez um agrupamento de dois 100, obtendo 200 e resta um grupo de 50;
- 4- fez um agrupamento de 200 e 50, obtendo 250.

Já o aluno 87 iniciou seus agrupamentos na segunda etapa do aluno 82 e não apresentou outros agrupamentos para obter o resultado do cálculo. Desta forma, o aluno 87 demonstra uma manipulação dos números de forma mais evoluída, sem a

necessidade de operar com agrupamentos até obter o resultado tendo em vista que fica fácil somar 100s e 50.

Uma resolução a ser destacada é a do aluno de número 8 ao calcular 25×10 . A figura a seguir apresenta sua resolução.

$$\begin{array}{l}
 25 \times 9 = 225 \\
 25 \times 1 = 25 \\
 \hline
 225 \\
 + 25 \\
 \hline
 250
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 50 \\
 75 \\
 100 \\
 125 \\
 150 \\
 175 \\
 200 \\
 225 \\
 250
 \end{array}$$

Figura 60 – Resolução do aluno 8

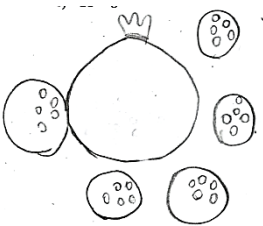
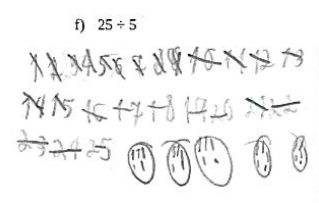
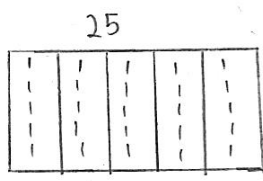
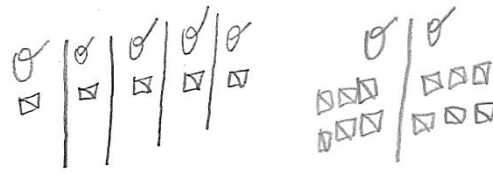
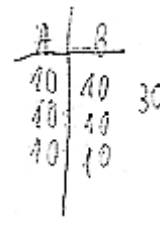
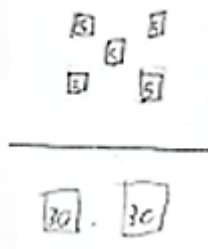
Fonte: Acervo do autor

Em sua resolução, supostamente, por não conseguir multiplicar com fatores compostos por dois dígitos, o aluno decompõe 10 em $9+1$. Assim, utilizando a propriedade distributiva, multiplica 25 por 9 e 25 por 1 e soma os resultados parciais. Embora os campos de categorias referentes à operação de multiplicação não englobe (diretamente) os procedimentos de cálculo mental de decomposição, salto e variadas, nota-se que o aluno calcula utilizando o procedimento *variados*, sendo que, para Buys (2008), nessa estratégia, os números e as operações podem ser estruturados a partir de suas propriedades.

O método de cálculo mental foi mais utilizado nas operações de divisão. Durante a coleta de dados, muitos professores salientavam não ter trabalhado muito com esse conteúdo até o período da coleta. Dessa forma, podemos perceber que os alunos, por ainda não saberem muito como operar com o algoritmo da divisão, recorreram a algum procedimento relacionado ao método de cálculo mental. Esses dados são representados em $25 \div 5$ por 7,69% dos alunos no primeiro momento de se operar e por 7,41% no segundo momento, e em $60 \div 2$ por 8,83% de participantes no primeiro momento e 5,41% no segundo momento.

A representação pictórica foi uma adaptação utilizada para representar agrupamentos. Essa adaptação foi utilizada por 3,99% dos alunos em $25 \div 5$ no primeiro momento de calcular e por 5,13% no segundo momento; e por 3,42% dos alunos em $60 \div 2$ nos dois momentos de calcular essa expressão. Esse recurso pode ser utilizado de diferentes formas, como mostra o quadro a seguir.

Quadro 51 – Exemplos da adaptação por agrupamento realizada na divisão

<p>Aluno 239</p> 	<p>Aluno 340</p> <p>f) $25 \div 5$</p> 
<p>Aluno 71</p> 	<p>Aluno 156</p> 
<p>Aluno 155</p> 	<p>Aluno 149</p> 

Fonte: Acervo do autor

Nota-se que as representações dos agrupamentos podem demonstrar certa evolução. De forma geral, os alunos representaram os divisores como os grupos ou conjuntos e neles representaram os dividendos já divididos. O aspecto que diferencia um aluno do outro é o modo como apresentaram os dividendos: o aluno de número 239 fez um conjunto maior contendo 25 pequenos círculos, sendo que, ao distribuir esses elementos entre 5 conjuntos menores, apagava-os do conjunto maior, como uma forma de controle de sua distribuição. O aluno 340 apresenta um procedimento semelhante, porém, representa o dividendo com números do 1 ao 25 ao invés de pequenos círculos, e os riscou ao colocar pequenos riscos nos conjuntos menores.

O aluno de número 71 apresenta a distribuição do dividendo também com riscos, mas com certa organização e sem precisar representar inicialmente a quantidade do dividendo. Igualmente, o aluno de número 156 apresenta o dividendo de forma organizada, porém, sua representação facilita a contagem, pois, os elementos de cada agrupamento estão organizados de 5 em 5.

Já o aluno 155 apresenta os agrupamentos por meio de números ao invés de outros recursos pictóricos, como pequenos círculos ou riscos. Ele faz a divisão do valor 60 de 10 em 10 até concluir que o resultado da expressão é 30. Por fim, o aluno 149 representa, também com números, a quantidade total de elementos em cada agrupamento demonstrando uma evolução da representação feita pelo aluno 155.

A ideia de divisão presente nessas representações é, de acordo com Thompson (2010), a de agrupamento, ou seja, se refere à ideia de grupos, como se os valores envolvidos na operação fossem representados em filas, pacotes, caixas ou situações de objetos agrupados. Nesse sentido, podemos observar uma evolução da representação dessa ideia na qual há a necessidade de registrar a distribuição dos elementos que correspondem ao dividendo, para uma representação apenas dos elementos agrupados, mas ainda em forma icônica, seguido de uma representação com números que correspondem às quantidades de cada grupo.

Outra adaptação utilizada, porém, por apenas um aluno, foi o uso da tabuada para fazer cálculos parciais, como mostra a figura a seguir.

$$\begin{array}{r}
 60 \overline{) 120} \\
 \underline{-30} \\
 30 \\
 \underline{-30} \\
 00
 \end{array}$$

Figura 61 – Resolução do aluno 306

Fonte: Acervo do autor

O aluno de número 306, ao fazer a divisão, multiplica 15 por 2 resultando em 30, subtrai esse valor de 60 e repete esse procedimento. No final, soma os resultados parciais para encontrar o resultado da divisão.

Nota-se que o aluno não escolheu números aleatórios para fazer os cálculos parciais, mas sim o número 15, que corresponde à metade do resultado final e a um quarto do dividendo. Apesar de Treffers, Nooteboom e Goeij (2008) salientarem que no cálculo em coluna não há ajuda da tabuada para fazer estimativas, o aluno, aparentemente, apoia-se em fatos conhecidos sobre os números envolvidos na operação, provenientes da tabuada, para calcular.

Outra adaptação também utilizada por apenas um aluno foi a decomposição com fatos, tirando partido da estrutura dobro/metade, como mostra a resolução do aluno de número 188.

Porque
assenta! 30 + 30 = 60

Figura 62 – Resolução do aluno 188

Fonte: Acervo do autor

Em sua resolução, o aluno 188 não apresenta quanto é 60 dividido por 2. No entanto, é possível perceber que o aluno entende que o resultado é 30, pois justifica que 30 mais 30 é 60. Nesse sentido, o aluno demonstrou ter compreensão entre as operações de divisão com multiplicação e de multiplicação com adição.

Por fim, no quadro 36 (Distribuição dos alunos de acordo com os métodos de cálculo realizados na tarefa *Resolva as expressões*), além dos métodos de algoritmo e cálculo mental, há a categoria “outro”. Esta categoria corresponde a resoluções dos alunos cujos métodos de cálculo não ficaram claros ou quando a representação que usaram não fazia sentido diante das expressões apresentadas na tarefa.

4.2.3 Aplicação do conhecimento e da destreza com os números e as operações em situações de cálculo

No que diz respeito ao componente Aplicação do conhecimento e da destreza com os números e as operações em situações de cálculo, McIntosh, Reys e Reys (1992) abordam os seguintes aspectos que foram analisados: Compreender a relação entre o contexto do problema e o cálculo necessário; Noção que existem múltiplas estratégias; Inclinação para usar uma representação e/ou um método eficiente; e Inclinação para rever os dados e a razoabilidade do resultado.

Essa seção está dividida em quatro subseções a fim de evidenciar os aspectos relativos à aplicação do conhecimento e da destreza com os números e as operações apresentados nas resoluções das tarefas *Calculadora quebrada*, *A compra de Marisa*, *Quantos dias João já viveu?* e *O campeonato esportivo*.

Inclinação para usar uma representação e/ou um método eficiente

A tarefa *Calculadora quebrada* tinha por objetivo investigar a escolha de números eficazes diante de um contexto partindo do princípio de que os números podem ser representados de diversas formas (MCINTOSH; REYS; REYS, 1992). Para investigar esse aspecto, foi solicitado aos alunos que representassem o número 25 sem utilizar o algarismo 2. A tabela 32 apresenta as adaptações feitas pelos alunos para resolver a tarefa. Essas adaptações evidenciaram as escolhas de números que representam o valor 25.

Tabela 32 – Distribuição dos alunos de acordo com as adaptações feitas na tarefa Calculadora quebrada

ADAPTAÇÕES	N.	%
Sem	59	16,81
10 + 10 = 20; 20 + 5 = 25	12	3,42
35 - 10 = 25 ou 30 - 5 = 25; 75 - 50; 15 + 10 = 25	35	9,97
5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5...	5	1,42
Uso da tabuada (5 x 5)	31	8,83
Fazer cálculos que resultam em 125	5	1,42
Decompor 20 em 1 + 1	42	11,97
Fazer com outra calculadora / fazer no papel	16	4,56
Outro	72	20,51
Em branco	74	21,08
Total	351	100

Fonte: Autoria própria

De acordo com a tabela 32, 16,81% dos alunos não recorreram a nenhuma adaptação. Ou seja, esses alunos calcularam 25×5 sem levar em consideração o que a tarefa estava propondo. A figura a seguir, realizada pelo aluno de número 257, ilustra essa situação.

Handwritten equation: $25 \times 5 = 125$

Figura 63 – Resolução do aluno 257

Fonte: Acervo do autor

Também podemos observar pela tabela 32 que 11,97% dos alunos apresentaram como solução da tarefa a representação do número 25 na calculadora, sem utilizar o algarismo 2, como 1+1 e pressionando o algarismo 5 em seguida. O quadro 52 exemplifica esse forma de resolução.

Quadro 52 – Exemplos de adaptações da tarefa Calculadora quebrada (compreensão do número 25 como uma junção de dígitos)

Aluno 75

FAÇA $1+1=2$ AÍ PEGUE O RESULTADO
E FAÇA 25×5 PRONTO.

Aluno 198

ESSA OPERAÇÃO COM ESSA CALCULADORA? É SO
ela calcular três menos um
e dá o número dois

Fonte: Acervo do autor

Das resoluções apresentadas, podemos observar que os alunos demonstraram compreender o número 25 como a junção dos dígitos 2 e 5. Para o aluno de número 75 é preciso apenas apertar as teclas “1+1=” para formar o dígito 2. Já o aluno de número 198, ao invés de descrever com uma adição, apresenta a formação do dígito 2 como “3–1”.

Embora o número 25 seja representado pela junção dos dígitos 2 e 5 e o número 2 possa ser representado por 1+1 ou 3-1, o contexto apresentado na tarefa com o uso de calculadora compreende essas resoluções como incorretas.

Uma adaptação adequada para representar o número 25 seria uma decomposição ou composição na base não decimal do número, como por exemplo, 35–10 ou 15+10, realizadas por 9,97% dos alunos. O quadro 53 apresenta exemplos dessas resoluções.

Quadro 53 – Exemplos de adaptações de alunos que utilizaram uma decomposição não decimal na tarefa Calculadora quebrada

Aluno 306

Ela pode apertar as teclas 1-5-+-10-= e isso dá 25 depois ela aperta as teclas x e 5 e está pronto

$1 \ 5 \ + \ 1 \ 0 \ =$
 25×5

Aluno 133

$$\begin{array}{r} 14 \\ + 11 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 25 \\ \times 5 \\ \hline 125 \end{array}$$

Aluno 156

$$\begin{array}{r} 2 \\ 15 \\ \times 5 \\ \hline 75 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ \times 5 \\ \hline 50 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 75 \\ + 50 \\ \hline 125 \end{array}$$

Aluno 43

$$\begin{array}{r} 15 \\ + 10 \\ \hline 25 \end{array} + \begin{array}{r} 15 \\ + 10 \\ \hline 25 \end{array} + \begin{array}{r} 15 \\ + 10 \\ \hline 25 \end{array} + \begin{array}{r} 15 \\ + 10 \\ \hline 25 \end{array} + \begin{array}{r} 15 \\ + 10 \\ \hline 25 \end{array} = 125$$

Fonte: Acervo do autor

Nos exemplos apresentados, os alunos demonstraram como compor o número 25 sem utilizar o algarismo 2 a partir de sua base não decimal. Nota-se que os alunos 306 e 133, primeiramente, formam o número 25 para depois multiplicá-lo por 5. O aluno 43 realiza uma soma sucessiva de 15+10, cinco vezes. Já o aluno 156 multiplica 15 por 5 e 10 por 5 para depois somar os resultados parciais.

Embora os alunos tenham utilizado a mesma adaptação para perceber o número 25, o aluno de número 156, ao invés de compor o número, decompõe 25 em $10+15$ e utiliza a propriedade distributiva da multiplicação para resolver a tarefa.

Quando comparamos a resolução do aluno 306 com a do aluno 43 percebemos que eles compõem o número 25 da mesma forma, como $10+15$. No entanto, o aluno 43 recorre a uma adição ao invés de simplesmente multiplicar o primeiro resultado por 5 tendo em vista que a multiplicação também é vista como uma soma de parcelas iguais.

Outra adaptação adequada para representar o número 25 diante do contexto da calculadora compreende a decomposição na base decimal do número, realizada por 3,42% dos participantes, como é exemplificado no quadro 54.

Quadro 54 – Exemplos de adaptações de alunos que utilizaram uma decomposição decimal na tarefa Calculadora quebrada

Aluno 303	
Aluno 109	$10 + 10 + 5 = 25 \times 5 = 125$

Fonte: Acervo do autor

Nas imagens apresentadas no quadro, percebemos que o aluno de número 303 compõe o número 25 como $10 + 10 = 20$ somando logo após $20 + 5$ resultando em 25. Já o aluno 109 acaba por realizar uma única adição de $10+10+5$ para compor o 25 ao invés de obter resultados parciais, diminuindo a quantidade de cálculos para compor o número desejado.

Os alunos 138 e 296 compõem o número 25 a partir de suas relações com o número 5 utilizando as operações de multiplicação e de adição, respectivamente. O quadro 55 clarifica essas relações.

Quadro 55 – Exemplos de adaptações de alunos na tarefa Calculadora quebrada

Aluno 296	Aluno 138
$\begin{array}{r} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ + 5 \\ \hline 25 \end{array}$	$\begin{array}{r} 5 \\ \times 5 \\ \hline 25 \end{array}$

Fonte: Acervo do autor

Nota-se que a resolução do aluno 296 utiliza um procedimento aditivo, com soma de parcelas iguais, para compor o número 25, somando o valor 5 cinco vezes. De forma mais abstraída, o aluno de número 138 recorre a multiplicação para essa composição, sendo que estratégia pode estar relacionada ao conhecimento que o aluno tem sobre a tabuada. O uso da tabuada foi uma adaptação utilizada por 8,83% dos alunos nessa tarefa.

Essas adaptações que envolvem a composição do número 25 também dão indícios do conhecimento e destreza com os números, mais especificamente à múltiplas representações dos números.

Na adaptação de adição de parcelas iguais, ao invés de utilizar essa adaptação para compor o número 25, assim como o aluno de número 296, os alunos apresentam um meio de chegar ao resultado final de 25×5 . Ou seja, somam o número 5 vinte e cinco vezes. Essa adaptação foi realizada por 1,42% dos alunos, como mostra a figura a seguir.

The image shows a vertical column of 25 '5's. A plus sign is placed in the middle of the column. At the bottom, a horizontal line is drawn, and the number '125' is written below it, indicating the sum of 25 fives.

Figura 64 – Resolução do aluno 51

Fonte: Acervo do autor

Essa resolução também remete a forma como a multiplicação é compreendida tendo em vista sua propriedade comutativa. Se $25 \times 5 = 25 \times 5$, as representações dessas operações não são iguais. Em 25×5 , assim como foi feito pelo aluno de número 51, somamos o número 5 vinte e cinco vezes. Já em 5×25 , podemos representar por $25 + 25 + 25 + 25 + 25$, ou seja, 25 cinco vezes, como apresenta o aluno 322.

$$\begin{array}{r}
 25 \\
 25 \\
 25 \\
 25 \\
 + 25 \\
 \hline
 125
 \end{array}$$

Figura 65 – Resolução do aluno 322

Fonte: Acervo do autor

Para além de uma representação conveniente por não poder apertar a tecla de número 2 da calculadora, o aluno 51 representou o que foi solicitado na tarefa, o número 5 vinte e cinco vezes.

Ter que compor o número 25 sem utilizar o algarismo 2, nos permite investigar também a facilidade que os alunos têm com vários métodos de cálculo, sendo que este também é um aspecto relacionado à inclinação para usar uma representação e/ou um método eficiente (MCINTOSH; REYS; REYS, 1992). A tabela 33 apresenta a distribuição dos alunos de acordo com o método de cálculo utilizado na tarefa *Calculadora quebrada*.

Tabela 33 – Distribuição dos alunos referentes ao método utilizado na tarefa Calculadora quebrada

MÉTODO	N.	%
Algoritmo	100	28,49
Cálculo mental	85	24,22
Resposta não matemática	16	4,56
Outro	76	21,65
Em branco	74	21,08
Total	351	100

Fonte: Autoria própria

A tabela 33 indica que os métodos utilizados pelos alunos para resolverem a tarefa *Calculadora quebrada* foram diversificados. O algoritmo foi utilizado por

28,49% dos alunos; o cálculo mental por 24,22%; 4,56% utilizaram respostas não matemática e 21,65% dos alunos utilizaram outros métodos.

A tabela 34 apresenta os procedimentos específicos para a resolução da tarefa *Calculadora quebrada*.

Tabela 34 – Distribuição dos alunos referentes ao procedimento específico utilizados na tarefa Calculadora quebrada

PROCEDIMENTOS ESPECÍFICOS	N.	%
Iterado	92	26,21
Realizar cálculos a partir do resultado	7	1,99
Usar produtos conhecidos	32	9,12
Adicionar sucessivamente	6	1,71
Usar uma decomposição/recomposição não decimal de um dos fatores	35	9,97
Usar a decomposição decimal de um dos fatores	12	3,42
Inferências pessoais	16	4,56
Outro	77	21,94
Em branco	74	21,08
Total	351	100

Fonte: Autoria própria

Nota-se pela tabela 34 que o procedimento mais utilizado foi procedimentos iterados. Neste procedimento, os alunos ignoraram o que foi solicitado na tarefa e apenas calcularam 25×5 , como exemplifica a resolução do aluno 34.

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 5 \\ \hline 125 \end{array}$$

Figura 66 – Resolução do aluno 34

Fonte: Acervo do autor

Os procedimentos de cálculo mental apresentados pelos alunos se apoiaram no uso de produtos conhecidos, utilizado por 9,72% dos alunos, adição sucessiva, por 1,71%, uso de decomposição/recomposição não decimal do número 25, com 9,97%, e o

uso da decomposição na base decimal, com 3,42% dos participantes (exemplos desses procedimentos foram apresentados anteriormente nos quadros 52, 53 e 54).

Outro procedimento utilizado por 1,99% dos participantes para resolver a tarefa foi realizar cálculos a partir do resultado final da operação 25×5 , como mostra o quadro a seguir.

Quadro 56 – Exemplos de procedimentos específicos de alunos que realizaram cálculos a partir do resultado final na tarefa Calculadora quebrada

Aluno 21	Aluno 79
$\begin{array}{r} 225 \\ \times 5 \\ \hline 125 \end{array}$	$\begin{array}{r} 775 \\ +70 \\ \hline 125 \end{array}$

Fonte: Acervo do autor

Nos procedimentos apresentados, o aluno de número 21 apresenta primeiramente o cálculo para saber quanto é 25×5 para depois apresentar um cálculo que poderia ser feito para resolver a tarefa. Já o aluno 79 apresentou um cálculo que não evidencia formas de compor o número 25, sugerindo que a base para suas resoluções foi a de resultar em 125.

Esse procedimento apresentado no quadro 55 é semelhante ao procedimento utilizado pelo aluno de número 179, como ilustra a figura a seguir.

Somando

$$50 + 75$$

Figura 67 – Resolução do aluno 179

Fonte: Acervo do autor

Pela figura podemos observar que o aluno de número 179 salienta que, para calcular 25×5 , basta somar 50 e 75. Embora esse procedimento seja semelhante ao procedimento apresentado no quadro 55, o aluno utiliza números cujas relações com o número 25 são evidentes: o 50 é 2×25 e o 75 é 3×25 . Sendo assim, esse procedimento nos remete a um cálculo mental no qual o aluno evidencia a soma dos resultados parciais de outros cálculos.

Também podemos observar que, mais uma vez, os alunos demonstraram conhecimento sobre as múltiplas representações dos números, sendo que aqui, o número representado de diversas maneiras foi o 125.

Ainda, 4,56% dos alunos recorreram a respostas não matemáticas baseando-se em inferências pessoais para resolver a tarefa, como mostra o quadro a seguir.

Quadro 57 – Exemplos de respostas não matemáticas apresentadas na tarefa Calculadora quebrada

Aluno 380: “É SÓ ELA ARRUMAR (a calculadora).”

SÓ ELA A ARRUMAR

Aluno 339: “Fazendo no papel com ajuda da mamãe.”

Fazendo no papel com ajuda da mamãe.

Aluno 330: “APERTA O NÚMERO MESMO ASSIM OU FAÇA NUM PAPEL A CONTA.”

APER TA O NÚMERO
MESMO ASSIM
OU FAÇA NUM PAPEL
A CONTA

Aluno 250: “sim, com outra calculadora.”

sim com outra
calculadora

Aluno 167: “PEDIR AJUDA PARA ALGUÉM.”

PEDIR AJUDA PARA ALGUÉM

Aluno 98: “ELA FAZ A CONTA NORMAL NO PAPEL.”

ELA FAZ A CONTA NORMAL NO PAPEL

Fonte: Acervo do autor

Ao contrário dos alunos que simplesmente calcularam 25×5 , sem levar em conta a proposta da tarefa, os alunos representados no quadro 56 compreenderam que essa

operação deveria ser feita sem utilizar o algarismo 2. Porém, por não perceberem uma forma de calcular, recorreram a respostas não matemáticas a fim de apresentar uma solução para a tarefa. Para eles, utilizar outros recursos como “fazer no papel”, “usar outra calculadora”, “pedir ajuda” seria o suficiente para resolver o problema.

Compreender a relação entre o contexto do problema e o cálculo necessário

A tarefa *A compra de Marisa* tinha por objetivo verificar se os alunos compreendem a relação entre o contexto da tarefa e o cálculo necessário (MCINTOSH; REYS; REYS, 1992). Para investigar esse aspecto, foi solicitado aos alunos que respondessem se, com 50 reais, Marisa poderia comprar um produto de 25 reais e outro de 29 reais. Sendo assim, a tarefa poderia ser resolvida com valores globais, recorrendo a uma estimativa ou com valores exatos, realizando um cálculo mental ou um algoritmo.

A tabela 35 apresenta a distribuição dos alunos de acordo com o método e o procedimento utilizados para resolver a tarefa.

Tabela 35 – Distribuição dos alunos referentes ao método e procedimento utilizados na tarefa A compra de Marisa

	MÉTODO		PROCEDIMENTO		
	N.	%	N.	%	
Algoritmo	204	58,12	Iterado	204	58,12
Cálculo mental	7	1,99	Decomposição	2	0,57
			Salto	0	0
			Variada	5	1,42
Estimativa	19	5,41	Por aproximação	19	5,41
Resposta não matemática	17	4,84	Inferências pessoais	17	4,84
Outro	70	19,94	Outro	70	19,94
Em branco	34	9,69	Em branco	34	9,69
Total	351	100	Total	351	100

Fonte: Autoria própria

A tabela 35 indica que o método e o procedimento mais utilizados pelos alunos foram o algoritmo e procedimentos iterados, representados por 58,12% dos

participantes cada. Essas situações podem ser exemplificadas pelo caso do aluno de número 306, como mostra a figura a seguir.

não. Porque a camiseta e o sapato juntos custam 54 reais

$$\begin{array}{r} 25 \\ + 29 \\ \hline 54 \end{array}$$

Figura 68 – Resolução do aluno 306

Fonte: Acervo do autor

Na figura, o aluno de número 306 utilizou um método algorítmico para resolver a tarefa e procedimento iterado. Somando os valores da camiseta e do sapato por meio de um algoritmo, pôde concluir que Marisa não teria dinheiro suficiente para comprar as mercadorias.

O método de cálculo mental, método este que tal como o algoritmo, permite obter um resultado exato, foi utilizado apenas por 1,99% dos alunos nessa tarefa. O quadro 58 apresenta algumas dessas resoluções.

Quadro 58 – Exemplos de respostas em que foram utilizados métodos de cálculo mental na tarefa A compra de Marisa

Aluno 36

$$\begin{array}{r} 29 + 25 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 20+9 \quad 20+5 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 40+14 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 54 \end{array}$$

R: Não, porque o total vai dar 54 e ela só tem 50 reais.

Aluno 43

não
Porque deu mais de 50 reais.

$$\begin{array}{r} 20+9 \\ + 20+5 \\ \hline 50+14 \\ \hline 54 \end{array}$$

Aluno 51

NÃO TEM DINHEIRO SUFICIENTE, PORQUE 25+25 É
SÓ A CAMISETA CUSTA 29 REAIS ENTÃO NÃO
DA PRA COMPRAR.

$$\begin{array}{r} 29 \\ + 25 \\ \hline 54 \end{array}$$

Aluno 127

não da porque a camiseta é 29,00
e sapato 25,00 não da se fosse 25,00 camiseta
lá daro

Aluno 237

não, porque se lá for mais de 25,00 reais e 29,00 reais

Fonte: Acervo do autor

Os alunos de número 36 e 43, ao realizarem um cálculo mental, utilizam o procedimento de decomposição. Neste procedimento, os alunos decompõem os valores

em sua base decimal e realizam cálculos intermediários. Nota-se que o aluno 43 apresenta um registro que contém características que se assemelham ao cálculo em coluna e ao algoritmo. Em seu cálculo, o aluno evidencia a decomposição dos números em sua base decimal ao invés de abstraí-la para fazer o cálculo em coluna, mas mantém uma representação semelhante. Ainda, ao somar $5+9$, o aluno registra as 4 unidades no resultado e acrescenta 10 para somar com as dezenas. Esse procedimento se assemelha ao algoritmo da adição com reserva quando registramos o “vai 1”. Nesse caso, o aluno registrando “vão 10”, irá contribuir com a compreensão do cálculo algorítmico.

Os demais exemplos apresentados no quadro 58 (resoluções dos alunos de números 51, 127 e 237) ilustram cálculos mentais nos quais os alunos utilizam a relação de dobro e metade ao salientar que não será possível comprar a camiseta e o sapato tendo em vista que só o sapato custa a metade do dinheiro que Marisa tem para gastar. Importante destacar que essa relação parece ser muito clara para esses alunos, pois eles também poderiam salientar que se o sapato custasse 21 reais, ou alterar os valores da compra cuja soma resultasse em 50, também seria possível para Marisa realizar essa compra.

Podemos observar também que o aluno de número 51 também apresenta um cálculo algorítmico. No entanto, mesmo com esse cálculo, sua justificativa na resposta predomina as relações de dobro e metade entre os valores 25 e 50.

Já o método de estimativa e, em consequência, o procedimento por aproximação, foi utilizado por 5,41% dos alunos e pode ser exemplificado pelos casos apresentados no quadro 59.

Quadro 59 – Exemplos de respostas em que foram utilizados métodos de estimativa na tarefa A compra de Marisa

Aluno 145	<p>NÃO. PORQUE MARISA SÓ TEM 50 REAIS. E A CAMISETA É 29 E O SAPATO 25</p>
Aluno 179	<p>Não, por que os dois da mais que 50 reais</p>
Aluno 322	<p>NÃO PORQUE A CAMISETA É O SAPATO É MAIS QUE SIMQUENTA</p>

Fonte: Acervo do autor

Nos exemplos apresentados, os alunos explicam, de forma global, que os preços da camiseta e do sapato juntos valem mais que 50 reais, sem haver a necessidade de registrar no papel algum cálculo.

A tarefa *Quantos dias João já viveu?*, mesmo estando relacionada (inicialmente) aos aspectos de sentido da grandeza relativa e absoluta dos números e ao sistema de números de referência também nos possibilita analisar a compreensão que os alunos apresentaram sobre a relação entre o contexto do problema e o cálculo necessário. Desta forma, foi possível perceber se os alunos, para responder se João, com dois anos de idade, já havia vivido mais que 400 dias, recorreram a um cálculo com valores exatos ou com valores globais. A tabela 36 apresenta os métodos e procedimentos utilizados pelos alunos ao resolver a tarefa.

**Tabela 36 – Distribuição dos alunos referentes ao método e procedimento utilizados na tarefa
Quantos dias João já viveu?**

	MÉTODO		PROCEDIMENTO		
	N.	%	N.	%	
Algoritmo	70	19,94	Iterado	70	19,94
Cálculo mental	1	0,28	Decomposição	0	0
			Salto	0	0
			Variada	1	0,28
Estimativa	29	8,26	Por aproximação	29	8,26
Resposta não matemática	105	29,91	Inferências pessoais	105	29,91
Outro	100	28,49	Outro	100	28,49
Em branco	46	13,11	Em branco	46	13,11
Total	351	100	Total	351	100

Fonte: Autoria própria

Para dizer se João já havia vivido mais que 400 dias, os alunos recorreram a cálculos, sendo que 19,94% deles calcularam de forma algorítmica, como mostra o quadro 60.

Quadro 60 – Exemplos de respostas em que foram utilizados métodos de cálculo mental na tarefa Quantos dias João já viveu?

Aluno 1

Sim. Porque ele viveu 2 anos que dá 730 dias.

$$\begin{array}{r} 1 \\ 365 \\ +365 \\ \hline 730 \end{array}$$

Aluno 151

$$\begin{array}{r} 11 \\ 365 \\ + 365 \\ \hline 730 \end{array} \quad \begin{array}{r} 11 \\ 365 \\ \times 2 \\ \hline 730 \end{array}$$

SIM, PORQUE CADA ANO TEM 365 DIAS

Aluno 326

SIM, PORQUE SE VOCÊ CONTAR 2 ANOS

VAI DAR 732.

31 DIA
29 FE
31 MAR
30 ABIL
31 MAIO
30 JUNHO
31 JULHO
31 AGOSTO
30 SETEMBRO
30 OUTUBRO
30 NOVEMBRO

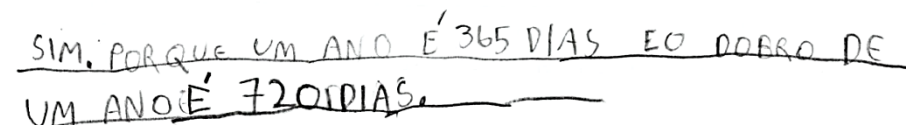
$$\begin{array}{r} 366 \\ + 366 \\ \hline 732 \end{array}$$

Fonte: Acervo do autor

Nesses exemplos, podemos observar que o aluno de número 1 realiza o algoritmo da adição e baseia sua explicação nesse cálculo, salientando que 2 anos corresponde a 730 dias. O aluno 151 apresenta o algoritmo da adição e da multiplicação, mas baseia sua explicação no fato de que um ano tem 365 dias. Já o aluno 326, provavelmente por não saber a quantidade de dias em um ano, soma as quantidades de

dias dos meses, resultando em 366 e, em seguida, soma $366+366$ ¹². Para explicar como pensou, baseia-se também nesses cálculos. Nota-se que nessas resoluções, os alunos salientam sobre a quantidade de dias exatos em dois anos, como se, por ter vivido 2 anos, João teria vivido exatamente 730 ou 732 dias.

O método de cálculo mental foi utilizado por apenas um aluno, o de número 165, como mostra a figura 69.



SIM. PORQUE UM ANO É 365 DIAS E O DOBRO DE UM ANO É 720 DIAS.

Figura 69 – Resolução do aluno 165

Fonte: Acervo do autor

Nessa resolução, apesar de não evidenciar registros de cálculos e de ter errado a quantidade de dias correspondentes a dois anos, o aluno baseia sua explicação na relação de dobro e metade para resolver a tarefa. Além do mais, sua justificativa também é baseada em valores exatos, aspecto esse que, de acordo com Sowder (1989) também caracteriza o cálculo mental.

Embora os métodos algorítmicos e de cálculo mental sejam eficazes para resolver a tarefa, a situação proposta não requeria uma resposta exata, pois poderia ser respondida baseando-se num valor global.

A estimativa é também um método para resolver a tarefa *Quantos dias João já viveu?* sendo o seu procedimento a aproximação dos valores envolvidos. Recorreram a esse método e procedimento apenas 8,26% dos alunos. O quadro 61 apresenta exemplos de alunos que utilizaram esses métodos e procedimentos.

¹² A coleta de dados foi realizada em 2016, um ano bissexto.

Quadro 61 – Exemplos de alunos que utilizaram método de estimativa

S I T U A Ç Ã O 1	<p>Aluno 183</p> <p>SIM, POR QUE VIVEU 365 DIAS DUAS VEZES</p> <p>Aluno 43</p> <p>Resposta: Sim</p> <p>Eu pensei que 1 ano tem 365 dias e vezes 2 é mais que 400 dias.</p>
S I T U A Ç Ã O 2	<p>Aluno 299</p> <p>Ele já viveu mais do que 400 dias em um ano tem mais comenos 300 dias dois anos tem 600 e poucos dias.</p> <p>Aluno 147</p> <p><u>SIM, PORQUE UM ANO TEM 300 E POUCOS DIAS.</u></p> <p>Aluno 18</p> <p>Dim: por que 1 ano tem mais de 300 dias e 300 mais 300 é 600 dia e poucos dias.</p>
S I T U A Ç Ã O 3	<p>Aluno 127</p> <p><u>Sim por que o ano tem mais de 200 dias.</u></p>

Fonte: Acervo do autor

Os exemplos apresentados são de alunos que utilizaram o mesmo método e procedimento para resolver a tarefa. No entanto, é possível observar algumas diferenças relacionadas aos tipos de estimativas discutidos por Heuvel-Panhuizen (2008).

Na situação 1, os alunos 43, 183 realizaram o cálculo para obter um valor global, baseando-se no valor 365. Nesta situação, os alunos estimam que duas vezes 365 terá como resultado um valor maior que 400.

Nas situações 2 e 3, os alunos fazem estimativas arredondando os valores calculados. Heuvel-Panhuizen e Buys (2008) salientam sobre a forma de arredondar os valores envolvidos, que pode ser feito arredondando para a dezena ou centena mais próxima. Nota-se que na situação 2, os alunos 18, 147 e 299 basearam suas explicações arredondando o número 365 para 300. Neste caso, a centena mais próxima é 400 e, se os alunos tivessem feito assim, não seria necessário um cálculo em si, apenas pensar sobre a grandeza do número.

Já o aluno de número 127, na situação 3, elaborou sua explicação a partir do número 400: João tem dois anos, então divide 400 por 2 resultando em 200; se um ano tem mais que 200 dias, então João já viveu mais que 400 dias.

A categoria “resposta não matemática”, a que corresponde 29,91% dos alunos, está relacionada ao sentido da grandeza relativa e absoluta dos números, aspecto esse referente ao componente Conhecimento e destreza com os números, analisado anteriormente (subcapítulo 4.3.1).

Ainda, a tabela 36 indica que tanto os métodos como os procedimentos apresentados na categoria “outro”, representada 28,49% dos alunos, contempla a resposta dos alunos que não apresentaram uma explicação de como pensou para resolver a tarefa, respondendo apenas “sim” ou “não”.

Noção de que existem múltiplas estratégias

A tarefa *O campeonato esportivo* solicitava aos alunos que indicassem quantas garrafas haviam sido distribuídas aos jogadores e era possível recorrer a diversas estratégias para resolvê-la.

A tabela 37 apresenta os procedimentos utilizados pelos alunos nos três itens da tarefa. Esses procedimentos nos permitem observar alguns aspectos das estratégias utilizadas pelos alunos para resolver cada item.

Tabela 37 – Distribuição dos alunos de acordo com o procedimento utilizado na tarefa O campeonato esportivo

PROC. ENVOLVENDO	1		2		3	
	N.	%	N.	%	N.	%
Contagem	240	68,38	215	61,25	209	59,54
Adição	14	3,99	12	3,42	18	5,13
Multiplicação	53	15,10	57	16,24	65	18,52
Outro	23	6,55	41	11,68	35	9,97
Em branco	21	5,98	26	7,41	24	6,84
Total	351	100	351	100	351	100

Fonte: Autoria própria

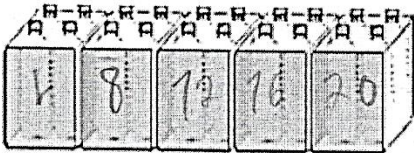
Pela tabela podemos observar que os procedimentos utilizados pelos alunos não variaram muito entre um item e outro da tarefa *O campeonato esportivo* sendo que o procedimento de contagem foi o mais recorrente. Isso mostra que, ao optar por um procedimento, os alunos o utilizavam nos três itens.

No primeiro item da tarefa, as garrafas estavam todas visíveis e foi apresentada uma quantidade de garrafas relativamente baixa (20 garrafas). Nesse item, os procedimentos utilizados pelos alunos envolviam contagem, representados por 68,38% dos participantes, adição, com 3,99%, e multiplicação, com 15,1% dos participantes. Os quadros 62, 63 e 64 apresentam exemplos de resolução desse item da tarefa.

Quadro 62 – Exemplos de procedimentos de contagem utilizados pelos alunos no item 1 da tarefa O campeonato esportivo

Aluno 405
 em esta embalagem tem 20 garrafas
 eu contei um em um

Aluno 130
 20.
 Eu consegui o resultado
 contando de 2 em 2.

Aluno 238

 tem 20 garrafas de água

Aluno 151
 20 SIMPLES É SÓ CONTAR DE 4 EM 4.

Fonte: Acervo do autor

Nos exemplos presentes no quadro, vimos resoluções de alunos que utilizaram o procedimento de contagem para obter a quantidade de garrafas apresentadas. A ordem em que as resoluções estão apresentadas no quadro pode nos remeter a uma evolução do procedimento de contagem.

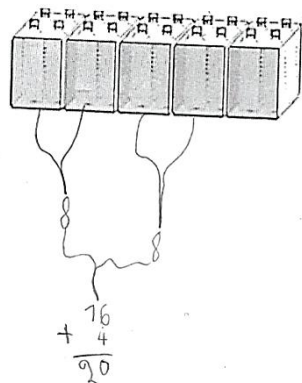
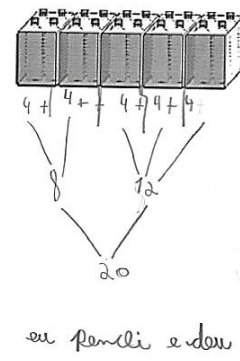
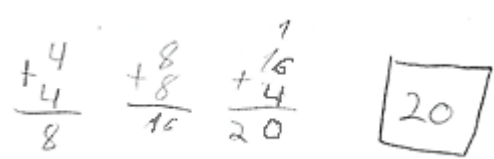
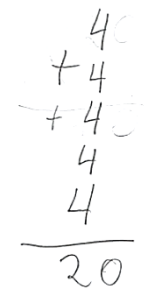
O cálculo por contagem se inicia pela contagem 1 a 1, assim como foi feito pelo aluno de número 405, e pode evoluir pela contagem de valores maiores. O aluno de número 130 explica que chegou ao resultado contando de dois em dois. O aluno 338, apesar de não ter explicado como obteve o valor 20, mostra na resolução que escreveu o número 4 na primeira embalagem, 8 na segunda, e assim por diante até chegar ao 20, indicando que contou de quatro em quatro. Já o aluno 151 apenas salienta que contou de quatro em quatro.

De acordo com Ferreira (2008), o cálculo por contagem corresponde ao primeiro nível de cálculo de adição e subtração sendo que pode ser utilizado, inicialmente, recursos como dedos das mãos, objetos, entre outros. No primeiro item da tarefa *O campeonato esportivo*, nota-se que os alunos do quadro 62 recorreram à imagem apresentada para efetuar a contagem. Fazer contagens com valores maiores que um

como, por exemplo, de 4 em 4, pode evidenciar o desenvolvimento de uma base para a evolução dos procedimentos de cálculo que irá corroborar com a adição de parcelar iguais e, posteriormente, para a compreensão da multiplicação.

O quadro 63 apresenta os procedimentos que envolvem adição no primeiro item da tarefa *O campeonato esportivo*.

Quadro 63 – Exemplos de procedimentos envolvendo adição utilizados pelos alunos no item 1 da tarefa O campeonato esportivo

<p>Aluno 81</p> 	<p>Aluno 303</p> 
<p>Aluno 120</p> 	<p>Aluno 309</p> 

Fonte: Acervo do autor

O quadro ilustra diversas estratégias de resolução que envolvem a adição. O aluno 81 faz dois agrupamentos de 8 e os somam, resultando em 16; em seguida adiciona 4 para obter 20. Semelhantemente, o aluno 303 realiza somas parciais, com agrupamentos irregulares, somando 8 mais 12.

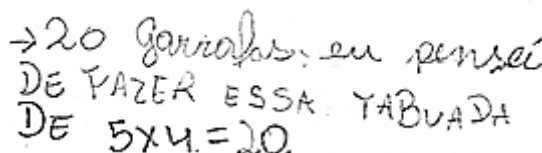
Esses procedimentos podem ser considerados como cálculo por estruturação. Ferreira (2008) explica que esse procedimento corresponde a um cálculo no qual o aluno não recorre a contagem 1 a 1, mas sim a procedimentos de saltos e de decomposição. Embora esses alunos não tenham evidenciado o uso desses procedimentos, podemos perceber o uso de agrupamentos que partem naturalmente diante do contexto da tarefa, tendo em vista que as embalagens representam agrupamentos de 4 garrafas. A partir do agrupamento inicial apresentado na imagem, os

alunos diminuem as quantidades de grupos ao mesmo tempo em que aumentam as quantidades de elementos em cada um. Isso ocorre de forma irregular, pois a quantidade de elementos em cada grupo é diferente (o aluno 81 apresenta agrupamentos de 8 e 4 garrafas e o aluno 303 de 8 e 12 garrafas).

Já o aluno de número 309 realizou uma adição de parcelas iguais. Esse procedimento, de acordo com Brocardo, Delgado e Mendes (2009), corresponde ao procedimento de contagem da multiplicação, que é o primeiro nível de cálculo dessa operação e inclui a repetição formal da adição.

O aluno de número 120 soma $4+4$, em seguida $8+8$ e depois $16+4$. Apesar de não ser uma adição de parcelas iguais, mas sim, vários cálculos, com adições sucessivas de mesmo valor, é possível que esse aluno evolua seu registro para uma adição de parcelas iguais, que irá caracterizar um cálculo por contagem da multiplicação. Brocardo, Delgado e Mendes (2009, p. 11) salientam que “propor problemas aos alunos, em que o contexto faça emergir a utilização dos diferentes modelos, sobretudo de agrupamentos e rectangular, deve ser um objectivo do trabalho a desenvolver em torno da operação de multiplicação”.

O pensamento multiplicativo foi utilizado por apenas 0,85% dos alunos, como mostra a figura 70.



→ 20 garrafas, eu pensei
DE FAZER ESSA TABUADA
DE $5 \times 4 = 20$.

Figura 70 – Resolução do aluno 370

Fonte: Acervo do autor

Na figura, o aluno de número 370 salienta que pensou em fazer a tabuada para responder quantas garrafas de água foram distribuídas. De acordo com Brocardo, Delgado e Mendes (2009, p. 11), “o cálculo formal corresponde ao cálculo do produto entre dois números, recorrendo a diferentes relações numéricas e a produtos já conhecidos”. Nesse caso, ao referir que utilizou a tabuada o aluno demonstra que já tinha conhecimento do produto de 5×4 .

O quadro 64 apresenta os procedimentos que envolvem multiplicação e o cálculo algorítmico dessa operação.

Quadro 64 – Exemplos de procedimentos que envolvem multiplicação utilizados pelos alunos no item 1 da tarefa O campeonato esportivo

Aluno 36

$$\begin{array}{r} 5 \\ \times 4 \\ \hline 20 \end{array}$$

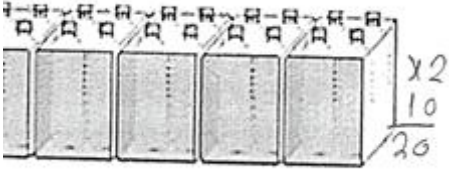
Eu peguei o tanto de caixas que tem e depois multipliquei pelo 4 o tanto de garrafas que tem.

Aluno 145

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 4 \\ \hline 20 \end{array}$$

20, PORQUE EU FIZ A CONTA

Aluno 236



$5 \times 4 = 20$

Aluno 326

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 5 \\ \hline 20 \end{array} \quad \begin{array}{r} 25 \\ \times 4 \\ \hline 20 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{O RESULTADO} \\ \text{É} \\ 20 \end{array}$$

Fonte: Acervo do autor

Pelo quadro 64, observamos que os procedimentos utilizados pelos alunos de números 36, 145, 236 e 326 envolvem o algoritmo da multiplicação. Com exceção do aluno 326, os alunos não demonstraram o uso de relações e propriedades da multiplicação. No entanto, nota-se que o aluno 326, ao utilizar a propriedade comutativa da multiplicação, o faz de forma sem sentido diante do contexto da tarefa. Em outras palavras, salientar que 4×5 é igual a 5×4 não apresenta uma relação direta com a tarefa apresentada que explique que há 20 garrafas de água.

Ainda, podemos notar que, ao contrário do aluno 36, os cálculos apresentados pelo aluno 326 há reservas desnecessárias, assim como a resolução do aluno de número 145. Esses alunos calculam 4 vezes 5, 20; “deixa” o zero e “sobe” 2, como se houvesse outros dígitos a serem multiplicados; em seguida, apenas escreve o 2 no resultado.

Já o aluno de número 236, ao invés de calcular 4×5 , calcula 2×10 tendo em vista a organização das garrafas na imagem: há duas linhas com 10 garrafas em cada.

Nos segundo e terceiro itens da tarefa *O campeonato esportivo* as quantidades de garrafas eram as mesmas, porém, a disposição e os agrupamentos das garrafas eram diferentes. Ferreira (2008) salienta que, dependendo das situações, os valores envolvidos são cada vez maiores, como ocorre na tarefa. Conseqüentemente, fica difícil resolver essas situações sem recorrer a outras estratégias que não a contagem. No entanto, podemos observar que os procedimentos escolhidos pelos alunos para resolverem esses itens foram semelhantes aos procedimentos escolhidos para resolver o primeiro. No segundo item, os procedimentos envolviam contagem, com 61,25% dos participantes, adição, 3,42% e multiplicação, com 16,24%; e no terceiro item, os procedimentos envolviam 59,54% em contagem, 5,13% com adição e 18,52% com multiplicação.

Esses dados nos mostram que as estratégias escolhidas pelos alunos não variaram muito de um item para o outro, independentemente da quantidade e da disposição das garrafas. A disposição das garrafas e a quantidade poderiam interferir na escolha de uma estratégia que utiliza um procedimento envolvendo contagem. Porém, essa estratégia, que corresponde à um cálculo por contagem, foi a mais utilizada pelos alunos nos três itens da tarefa.

O aluno 251, por exemplo, para poder utilizar o procedimento envolvendo contagem, representa a imagem disponível na tarefa de forma a ficar visível para contar. No entanto, a contagem do aluno resulta numa quantidade errada de garrafas, como mostra a figura a seguir.

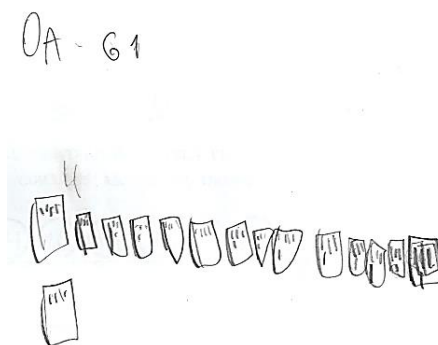


Figura 71 – Resolução do aluno 251
Fonte: Acervo do autor

No item seguinte da tarefa, esse aluno realiza o mesmo procedimento envolvendo contagem recorrendo a mesma adaptação, a de representar as garrafas de forma pictórica para facilitar a contagem. Porém, desta vez, o aluno escreve o número acima da embalagem que corresponde naquele momento da contagem, o que contribui para que ele obtenha a resposta correta.

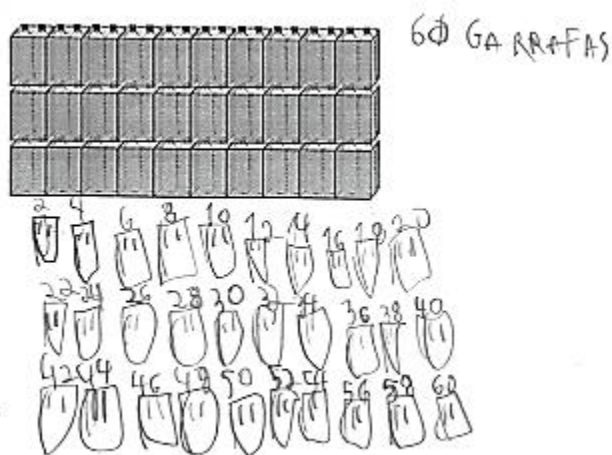


Figura 72 – Resolução do aluno 251

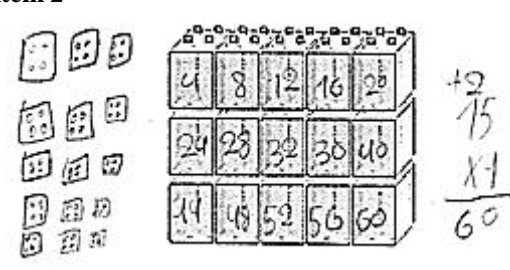
Fonte: Acervo do autor

Esse procedimento também foi utilizado pelos alunos 177 e 354 nos itens 2 e 3 da tarefa *O campeonato esportivo*, como mostra o quadro 65.

Quadro 65 – Exemplos de procedimentos que envolvem contagem utilizados pelos alunos nos itens 2 e 3 da tarefa O campeonato esportivo

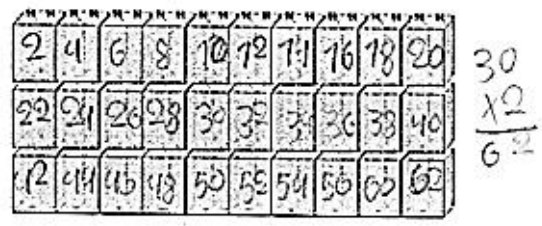
Aluno 177

Item 2



$$\begin{array}{r} +2 \\ 15 \\ \times 4 \\ \hline 60 \end{array}$$

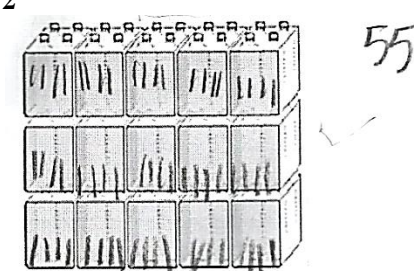
Item 3



$$\begin{array}{r} 30 \\ \times 2 \\ \hline 60 \end{array}$$

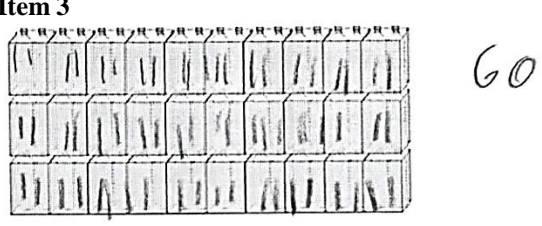
Aluno 354

Item 2



55

Item 3



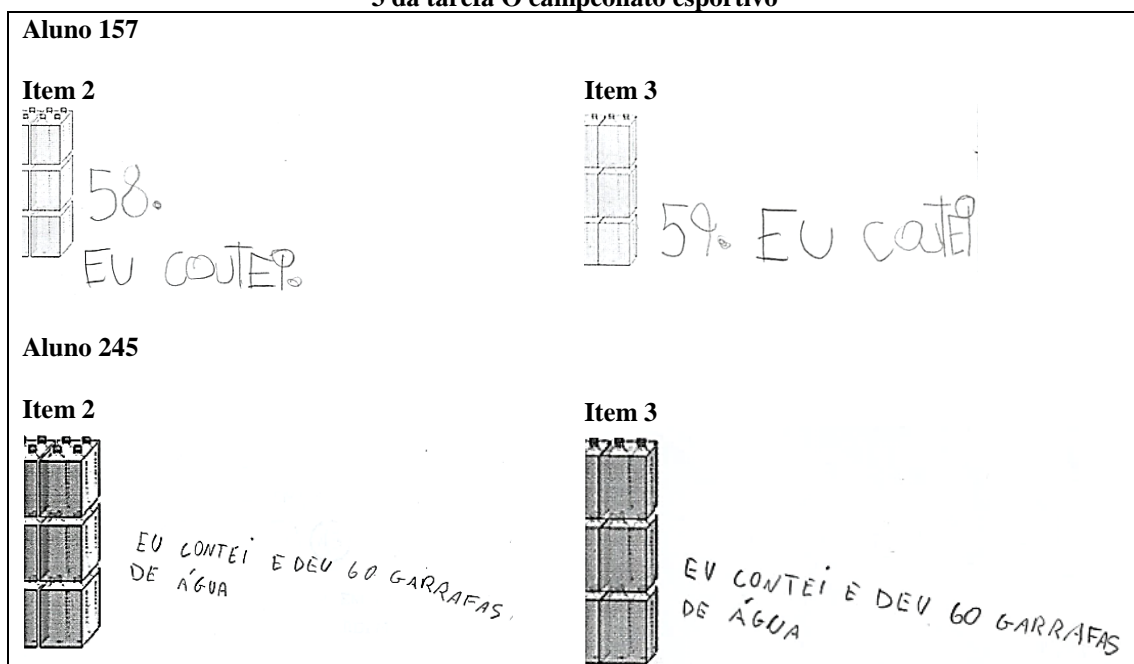
60

Fonte: Acervo do autor

Semelhantemente ao aluno de número 251, os alunos cujas resoluções estão no quadro representam procedimentos que envolvem a contagem. Nota-se que o aluno 177 buscou uma forma de representar as garrafas ao lado da ilustração da tarefa e mesmo com a resposta da tarefa, utilizou também um cálculo algoritmo de multiplicação. O aluno de número 354 representa na própria ilustração pequenos riscos para facilitar sua contagem sendo que, no item 2, erra sua contagem e apresenta uma quantidade errada de garrafas. O aluno 177, além de utilizar uma representação pictórica e o algoritmo, também utiliza a imagem, mas escreve os números na ilustração para não errar. Embora esse procedimento possa corroborar com a contagem, o aluno, além de errar (escreveu 56 e em seguida 60), o cálculo algorítmico realizado também está errado, tendo como resultado 62. Desta forma, podemos entender que o procedimento utilizado por ele para responder à tarefa foi a contagem.

Já os alunos de números 157 e 245, mesmo utilizando o procedimento envolvendo contagem, não recorreram a adaptações como a recursos pictóricos para contar quantas garrafas há ao todo.

Quadro 66 – Exemplos de procedimento de contagem utilizados pelos alunos 157 e 245 nos itens 2 e 3 da tarefa O campeonato esportivo



Fonte: Acervo do autor

O procedimento de contagem, embora seja eficaz, não é o melhor procedimento a ser utilizado dependendo da quantidade de objetos num determinado conjunto. O aluno de número 157, por exemplo, erra o número de garrafas por poucas unidades. Já o aluno 245 utiliza esse procedimento com sucesso.

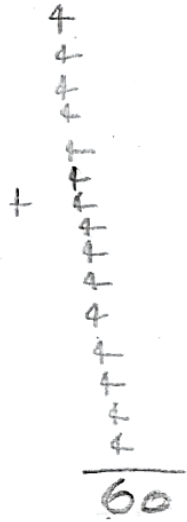
Contudo, é preciso realçar que esse procedimento, apesar de se constituir como base para o desenvolvimento do cálculo, mais da metade dos alunos do 3.º ano que participaram dessa pesquisa optaram pelo cálculo por contagem nos três itens dessa tarefa. Isso demonstra uma evolução pequena dos procedimentos de cálculo desses alunos tendo em vista que, embora seja a base do cálculo, a contagem não é um procedimento potente.

O procedimento envolvendo adição, apesar de ser o procedimento utilizado com menor frequência nos itens 2 e 3 da tarefa, apresentaram algumas diferenciações quanto ao seu uso.

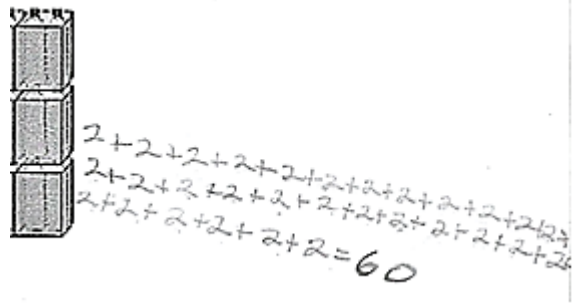
Quadro 67 – Exemplos de procedimento de adição utilizados pelos alunos 369 e 303 nos itens 2 e 3 da tarefa O campeonato esportivo

Aluno 369

Item 2

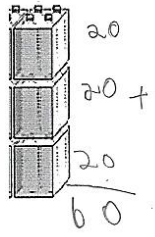


Item 3

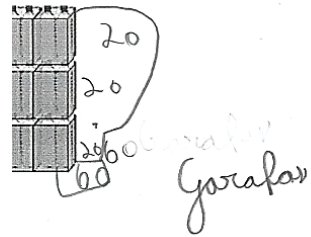


Aluno 303

Item 2



Item 3



Fonte: Acervo do autor

O aluno de número 369 opta por somar as garrafas de cada embalagem, ou seja, no segundo item ele soma o valor 4 quinze vezes e no terceiro item, soma 2 trinta vezes. Já o aluno 303 baseou-se no fato de que em cada linha de embalagens havia 20 garrafas de água em cada e soma o valor 20 três vezes. Nota-se que esses cálculos representam o cálculo por contagem da multiplicação apresentado por Brocardo, Delgado e Mendes (2009), embora o aluno de número 303 represente cálculos mais evoluídos se comparado com os cálculos do aluno 369. Isso porque o aluno 303 apresenta menos parcelas que o aluno de número 369.

O cálculo estruturado da multiplicação, assim como no item 1 da tarefa, também não foi utilizado com muita frequência. Esse cálculo foi utilizado por apenas 0,57% dos alunos no item 2 e por 0,85% dos alunos no item 3. O aspecto que evidenciou esse tipo

de cálculo foi a explicação dos alunos de que recorreram a tabuada para explicar que conhecem os produtos das operações 15×4 e 30×2 , como mostra o quadro a seguir.


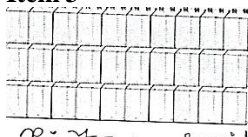
Quadro 68 – Resolução do aluno 370 nos itens 2 e 3 da tarefa O campeonato esportivo

Item 2	Item 3
<p>EU PENSEI DE FAZER ESSA TABUADA PARA EU SABER QUANTAS GARRAFAS TEM NO TOTAL.</p> <p>$15 \times 4 = 60$</p>	<p>$30 \times 2 = 60$</p> <p>EU PENSEI DE FAZER A TABUADA</p>

Fonte: Acervo do autor

O quadro 68 apresenta exemplos de procedimentos que envolvem a multiplicação para resolver os itens 2 e 3 da tarefa *O campeonato esportivo*.

Quadro 69 – Exemplos de procedimento que envolve a multiplicação utilizados pelos alunos 136 e 145 nos itens 2 e 3 da tarefa O campeonato esportivo

Aluno 113	
<p>Item 2</p>  <p>$\begin{array}{r} 20 \\ \times 3 \\ \hline 60 \end{array}$</p> <p>R: Foram oferecidas 60 garrafas de água para cada jogador de futebol.</p>	<p>Item 3</p>  <p>$\begin{array}{r} 30 \\ \times 2 \\ \hline 60 \end{array}$</p> <p>R: Foram oferecidas 60 garrafas para cada jogador.</p>
Aluno 136	
<p>Item 2</p> <p>$\begin{array}{r} 2 \\ 15 \\ \times 4 \\ \hline 60 \end{array}$</p> <p>R-é só pegar a tabuada do 4, e multiplicar por 15.</p>	<p>Item 3</p> <p>$\begin{array}{r} 30 \\ \times 2 \\ \hline 60 \end{array}$</p> <p>R- peguei a tabuada do 2, e multipliquei por 30.</p>

Fonte: Acervo do autor

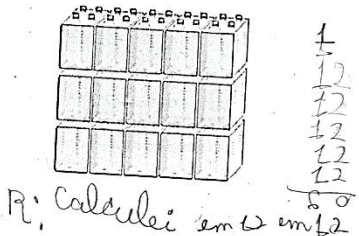
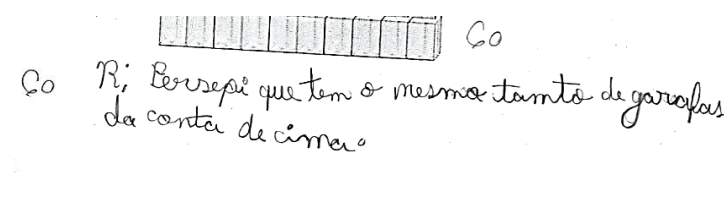
O aluno 136 baseou seu cálculo no item 2 da tarefa, no número de embalagens multiplicado pelo número de garrafas em cada embalagem por meio de um algoritmo e enfatiza o uso da tabuada para explicar como resolveu a tarefa. Já o aluno 113 multiplica o número de garrafas em cada linha (20 garrafas) pela quantidade de linhas (3

linhas). Esta forma de resolver o item pode estar relacionada ao primeiro item no qual, se resolvido corretamente, já se sabe quantas garrafas há em cada linha.

O item 3 da tarefa foi resolvido por esse alunos multiplicando 2×30 . Essa resolução pode ser devido ao fato de que esses dados foram apresentados no enunciado.

Os valores presentes na tarefa também permitiam que os alunos recorressem aos resultados obtidos no item anterior ou ainda a fatos matemáticos, como relação dobro e metade, para resolver as situações. No entanto, com exceção do aluno de número 74, nenhum aluno evidenciou ter recorrido a esse fato. O quadro 70 apresenta a resolução desse aluno para os itens 2 e 3 da tarefa *O campeonato esportivo*.

Quadro 70 – Resolução do aluno 74 nos itens 2 e 3 da tarefa O campeonato esportivo

Item 2	Item 3
	

Fonte: Acervo do autor

O aluno de número 74, no item 2 da tarefa *O campeonato esportivo*, realiza uma soma de parcelas iguais de valor 12 e salienta que contou de 12 em 12. Este valor corresponde a quantidade de garrafas em cada coluna de embalagem. No item 3, o aluno apenas coloca a resposta e explica que percebeu que tem a mesma quantidade de garrafas da conta anterior. No entanto, mesmo o aluno apresentar uma relação entre as quantidades de garrafas entre s itens 2 e 3, ele não explica como percebeu que tem a mesma quantidade.

A categoria “outros” corresponde a resoluções que não foram possíveis compreender e a categoria “em branco” correspondem a alunos que não resolvem e não tentaram resolver a tarefa. A quantidade de alunos nessas categorias também não representa uma diferença significativa de um item para o outro.

Inclinação para rever os dados e a razoabilidade do resultado

A inclinação para rever os dados e a razoabilidade do resultado consiste em reconhecer a razoabilidade dos dados e do cálculo (MCINTOSH; REYS; REYS, 1992).

As tarefas que solicitam em seu enunciado que o aluno explicasse como pensou ou que justificasse sua resposta pode nos oferecer dados sobre essa inclinação. Essas tarefas são: *Quantos dias João já viveu?*; *Calculadora quebrada*; *A compra de Marisa*; e *O campeonato esportivo*. A tabela a seguir apresenta a distribuição dos alunos de acordo com suas respostas nessas tarefas.

Tabela 38 – Distribuição dos alunos referentes às respostas apresentadas nas tarefas que solicitavam uma explicação ou uma justificativa

TAREFAS	Quantos dias João já viveu?		Calculadora quebrada		A compra de Marisa		O campeonato esportivo					
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
RESPOSTA	N.	%	N.	%	N.	%	N.	%	N.	%	N.	%
Acertou tudo	46	13,11	37	10,54	158	45,01	127	36,18	124	35,33	186	52,99
Errou resposta/ acertou explicação	2	0,57	1	0,28	1	0,28	0	0	0	0	0	0
Acertou resposta/ errou explicação (ou explicação incompleta)	26	7,41	0	0	12	3,42	1	0,28	0	0	3	0,85
Acertou resposta/ não explicou	56	15,95	50	14,25	67	19,09	76	21,65	64	18,23	96	27,35
Errou tudo	175	49,86	189	53,85	79	22,51	123	35,04	137	39,03	45	12,82
Em branco	46	13,11	74	21,08	34	9,69	24	6,84	26	7,41	21	5,98
Total	351	100	351	100	351	100	351	100	351	100	351	100

Fonte: Autoria própria

A categoria “acertou tudo” compreende que o aluno acertou tanto a resposta como a explicação/justificativa. Nesta categoria, encontramos 13,11% dos alunos na tarefa *Quantos dias João já viveu?*, 10,54%, na *Calculadora quebrada*, 45,01% na tarefa *A compra de Marisa* e no *O campeonato esportivo*, 36,18%, 35,33% e 52,99% nos itens 1, 2 e 3, respectivamente.

Nas demais categorias, os alunos erraram a resposta e/ou explicação/justificativa ou ainda apresentou uma explicação incompleta.

Também podemos notar na tabela 38 que houve alunos, em todas essas tarefas, que acertaram as respostas, ou o valor numérico que poderia satisfazer a questão, mas as apresentaram de forma incompleta, sem uma explicação ou justificativa. Nesta categoria, encontramos 15,95% dos alunos na tarefa *Quantos dias João já viveu?*, 14,25%, na *Calculadora quebrada*, 19,09% na tarefa *A compra de Marisa* e no *O campeonato esportivo*, 21,65%, 18,23% e 27,23% nos itens 1, 2 e 3, respectivamente. Por terem acertado as respostas, eles demonstram ter condições de responder toda a tarefa de forma também correta.

McIntosh, Reys e Reys (1992, p. 16) salientam que

as pessoas com sentido de número examinam as respostas à luz do problema original (considerando os números incluídos e também as questões colocadas), para determinar se as respostas ‘fazem sentido’.

Isso é, esses alunos, mesmo tendo acertado a resposta, sem rever o enunciado e responder totalmente a tarefa, mostraram não apresentar uma inclinação para rever os dados e os resultados.

Síntese

Os aspectos do componente de sentido de número Conhecimento e destreza com os números foram evidenciados por meio das tarefas *Mega-Sena*, *Ligue as representações* e *Quantos dias João já viveu?*.

Relativamente ao sentido da ordenação dos números, os alunos evidenciaram, em sua maioria, que compreendem que os números podem ser organizados seguindo uma determinada ordem.

O mesmo acontece com as múltiplas representações de números naturais e menores que 100. Os registros dos alunos evidenciaram que reconhecem formas

numéricas equivalentes e o uso de cálculos corroboram com esses reconhecimentos. No entanto, quando os alunos evidenciavam algum cálculo para perceber as representações numéricas equivalentes, utilizavam cálculos algoritmos.

Esse aspecto também foi evidenciado nas tarefas *Resolva as expressões e Calculadora quebrada*. Na primeira tarefa, isso foi evidenciado pelos alunos que mudaram os termos e/ou operações para chegar a um valor que correspondia ao resultado de um cálculo já realizado. Já na segunda tarefa, esse aspecto foi evidenciado pelos alunos que representaram o número 25 a partir de sua base decimal, de uma base não decimal e por procedimentos multiplicativos, como o uso da tabuada.

Os aspectos de sentido da grandeza relativa e absoluta dos números e ao sistema de valores de referência foram pouco evidenciados pelos alunos, pois poucos demonstraram reconhecer o valor relativo de um número (400) comparando-o com outro número (365). O número 365 consiste aqui como um número de referência importante tendo em vista que ele constitui a quantidade de dias do ano. Apesar disso, muitos alunos não evidenciaram esses aspectos de sentido de número.

O desempenho dos alunos relativos à resolução da tarefa *Resolva as expressões* revelaram que, de forma geral, o componente Conhecimento e destreza com as operações é baixo. As tabelas que apresentam as respostas dos alunos mostraram que poucos calculam de duas maneiras diferentes as expressões presentes na tarefa. Os melhores desempenhos foram na adição e na multiplicação, mais especificamente em 52×2 . À medida que os valores aumentavam e/ou mudava a operação, o desempenho dos alunos diminuía, levando-os a calcular de duas maneiras que não eram diferentes, ou ainda, de apenas uma maneira. Essa dificuldade também levou os alunos a não conseguirem resolver de nenhuma maneira ou a deixar a tarefa em branco.

Também foi possível perceber os aspectos desse componente nas resoluções dos alunos, apesar da baixa frequência com que isso ocorreu.

A compreensão do efeito das operações com números naturais foi evidenciada por alguns alunos que também utilizaram a adição para fazer cálculos de multiplicação, sendo que, segundo McIntosh, Reys e Reys (1992) esse modelo corrobora com a criança para pensar a multiplicação de forma concreta.

Contudo, houve resoluções que demonstraram que os alunos não compreendem ainda o efeito das operações. Na adição, por exemplo, os alunos que, ao calcular com algoritmo, não fizeram a reserva e obtiveram como resultado o valor 413. A soma de dois números naturais, de fato, resultará num valor maior que as parcelas, porém, esse

valor maior deve ser coerente. Semelhantemente, os alunos que responderam que 25×12 é igual a 30. Em ambos os casos, compreender o efeito das operações requer também que os alunos pensem sobre os resultados dos cálculos. O valor 413 é maior que as parcelas somadas, mas é muito maior a ponto de não fazer sentido ser esse o resultado da expressão apresentada. O valor 30, igualmente, não faz sentido como resultado da operação 25×12 por ser um valor baixo, inclusive por ser um valor próximo ao 25.

No que diz respeito à compreensão das propriedades matemáticas, a propriedade mais utilizada foi a comutativa. Essa propriedade, quando utilizada pelos alunos, foi em cálculos de adição, multiplicação e, de forma equivocada, na subtração e na divisão. Porém, quando os alunos a utilizavam, geralmente, eram em situações em que calculavam por meio de algoritmos. Sendo assim, o uso dessa propriedade acarretou numa interpretação das resoluções dos alunos como que ‘resolve de duas maneiras’, mas que não são diferentes, pois utilizavam apenas em algoritmos.

O uso da propriedade comutativa em expressões de subtração e de divisão, além de demonstrar uma generalização equivocada dessa propriedade para as operações aritméticas, demonstrou que os alunos também não pensaram no sentido das operações em si. Nessas operações, a ordem de como os termos são apresentados nas expressões interferem na forma de se calcular e no resultado final, não bastando apenas aplicar técnicas de forma mecânica.

Ademais, apenas um aluno utilizou a propriedade distributiva da multiplicação. Essa propriedade foi utilizada para calcular mentalmente a expressão 25×10 , no qual, por não conseguir multiplicar números de dois dígitos, o aluno decompôs um dos fatores e recorreu a propriedade com sucesso.

A compreensão das relações entre as operações foi evidenciada apenas nas situações em que os alunos utilizavam adição para realizar uma operação de multiplicação. Quando os alunos calculavam a “prova real” demonstraram indícios dessa compreensão, pois apresentam a operação inversa da operação. No entanto, demonstram também que não compreenderam de fato o seu uso que é o de verificar se o cálculo está correto.

Outro aspecto evidenciado pela tarefa é que o algoritmo é o método mais utilizado pelos alunos, independentemente da operação. É importante destacar o modo de como alguns alunos realizaram o cálculo de multiplicação com fatores compostos por dígitos sendo que esses alunos perceberam um dos fatores como um valor global para multiplicar dígitos do outro fator.

O cálculo mental também foi utilizado, mas com menor frequência. As situações nas quais os alunos recorreram ao cálculo mental foram, com maior frequência, nas operações de adição e de divisão. Não podemos afirmar ao certo o porquê do uso do cálculo mental na adição, mas, sobre a divisão, podemos inferir que por falta de destreza em procedimentos algorítmicos, os alunos recorreram a estratégias pessoais de cálculo.

Aspectos do componente de sentido de número Aplicação do conhecimento e da destreza com os números e as operações em situações de cálculo foram evidenciados por meio das tarefas *Calculadora quebrada*, *A compra de Marisa*, *Quantos dias João já viveu?* e *O campeonato esportivo*.

Relativamente à inclinação para usar uma representação e/ou um método eficiente, poucos alunos evidenciaram que possuem facilidade em escolher números apropriados para a situação.

Contudo, foi possível observar como a tarefa *Calculadora quebrada* foi relevante para evidenciar esse aspecto. Na tarefa *Ligue as representações*, os alunos fizeram correspondências entre os números sendo que alguns deles registraram um cálculo algorítmico para saber qual ligação realizar. Já na tarefa *Calculadora quebrada*, os alunos evidenciaram mais o conhecimento a respeito dos números, sendo que, por conta do que a tarefa solicitava, os alunos utilizaram cálculos mentais para representar o número desejado.

Nesse sentido, vale destacar Brocardo et al. (2009) e Mendes (2012) quando salientam sobre a importância da natureza e do contexto da tarefa para o desenvolvimento do sentido de número. Nessa pesquisa, não tivemos o objetivo de desenvolver o sentido de número, porém, consideramos importante a natureza e o contexto das tarefas para avaliar o sentido de número, pois eles parecem ter influenciado nas resoluções dos alunos.

No que diz respeito ao aspecto de compreender a relação entre o contexto do problema e o cálculo necessário, metade dos alunos optaram por resolver também mediante um algoritmo. Os registros dos alunos evidenciaram que, mesmo em contextos nos quais um cálculo por estimativa seria adequado para resolver a tarefa, foram utilizados cálculos com valores exatos, mais especificamente o algoritmo. Poucos alunos utilizaram o cálculo mental para resolver a tarefa. Mesmo que o algoritmo também permita o acerto do aluno nas tarefas, esse método de resolução não garante o sucesso dos alunos ao resolver os problemas. Ainda, alguns alunos também

apresentaram respostas não matemáticas consideradas como inadequadas para resolver as tarefas.

No que se refere à noção de que existem múltiplas estratégias, quase metade dos alunos optou por uma única estratégia, o procedimento de contagem na tarefa *O campeonato esportivo*, sendo que este procedimento só é eficaz quando os valores envolvidos na situação forem relativamente baixos. Números maiores podem fazer com que os alunos se percam na contagem acarretando em erros.

Sobre a inclinação para rever os dados e a razoabilidade do resultado, a maioria dos alunos demonstrou não verificar se os resultados obtidos satisfaziam as perguntas dos enunciados tendo em vista que muitos registros dos alunos respondiam parcialmente às tarefas.

Compreender múltiplas estratégias assim como rever os dados e os resultados encontrados compreendem reflexões metacognitivas sobre os processos de escolha de estratégia de resolução da tarefa e monitoramentos desses processos. De acordo com McIntosh, Reys e Reys (1992), essas reflexões são vinculadas ao sentido de número.

Importante destacar que a tarefa *O campeonato esportivo* se refere a uma situação de cálculo no qual os alunos poderiam utilizar diversas estratégias de resolução. No entanto, em sua maioria, os alunos optaram por procedimentos de contagem. Já na tarefa *Resolva as expressões*, o método de cálculo mais frequente foi o algoritmo.

Essas tarefas evidenciaram estratégias que marcam o desenvolvimento do cálculo sendo que os extremos dessa evolução foram as mais utilizadas. A contagem, sendo um ponto de partida do cálculo teve muita frequência na tarefa *O campeonato esportivo* para alunos do 3.º ano. Mesmo quando esse procedimento não era eficiente diante das imagens da tarefa, os alunos providenciaram uma forma para fazê-lo.

Para o outro extremo do desenvolvimento do cálculo, o algoritmo, os alunos que utilizaram esse método também demonstraram dificuldades, pois aplicação de uma sequência de técnicas requer compreensão dos processos usados e uma experiência repetida de domínio dessas técnicas.

Partindo desses dados, é possível levantar a hipótese de que o ensino do cálculo aritmético, no Brasil, inicia-se com contagem e há um salto para o ensino do algoritmo. Por os alunos evidenciarem relações numéricas e propriedades matemáticas pouco formalizadas, mostraram também que, inclusive, o cálculo mental foi trabalhado com

eles de forma mecanizada e sem sentido, assim como muitas vezes ocorre com o algoritmo.

Os dados nos mostraram que, para se ter sucesso no cálculo numérico, é preciso ter conhecimento sobre os números, sobre as operações, sobre as propriedades das operações e sobre os cálculos em si. De acordo com Serrazina, Brocardo e Kraemer (2003), não faz sentido ensinar o algoritmo de uma operação a um aluno que ainda não compreendeu o sentido dessa operação, sendo que, para entender esse sentido, é preciso ter conhecimento sobre o número e sobre a operação. Berton e Itacarambi (2009) salientam que os algoritmos permitem tratar as operações de forma mecanizada, com passos definidos a serem seguidos e sem precisar pensar muito. Ou seja, quando ensinado precocemente, sem o desenvolvimento de conhecimentos sobre números e operações, os alunos tratam as expressões dessa forma: mecânica e sem pensar muito sobre o cálculo, o que pode acarretar nos erros que ocorreram.

4.3 Correlação entre sentido de número e crença de autoeficácia em tarefas numéricas

A verificação de relações entre aspectos de sentido de número e crenças de autoeficácia foram realizadas com 338 alunos, considerando as seguintes variáveis:

- Autoeficácia / Resposta
- Autoeficácia / Método

A tabela 39 apresenta a correlação entre as resposta dos alunos nas tarefas numéricas e as crenças de autoeficácia de forma geral.

Tabela 39 – Correlação entre Resposta e Autoeficácia

Variáveis relacionadas	Correlação de Pearson	N.
Resposta / Autoeficácia	0,440**	338

** . Correlação significativa com grau de confiança de 99% .

Fonte: Autoria própria

A análise demonstrou que existe uma correlação fraca, positiva e significativa entre a crença de autoeficácia e a resposta dos alunos, sendo que a classificação r de Pearson resultou num valor entre 0,30 e 0,49. Isso significa que, embora a correlação seja considerada fraca, os alunos avaliaram sua confiança em responder às tarefas de forma consistente e esse julgamento tem uma correlação fraca com o acerto real.

A tabela 40 mostra as correlações entre as respostas dos alunos em cada componente de sentido de número, indicando o desempenho e a crenças de autoeficácia também para cada componente.

Tabela 40 – Correlação entre Resposta e Crença de autoeficácia entre os componentes de sentido de número (N = 338)

	CORRELAÇÃO DE PEARSON
Conhecimento e destreza com os números	0,306**
Conhecimento e destreza com operações	0,371**
Aplicação o conhecimento e destreza com números e operações em situações de cálculo	0,309**

** . Correlação significativa com grau de confiança de 99%.

Fonte: Autoria própria

A análise de correlações mostrou que, ao distinguir cada componente de sentido de número, o valor de r de Pearson continua com uma característica de correlação fraca, positiva e significativa, pois resultaram em valores entre 0,30 e 0,49.

Embora a diferença de um componente para o outro seja pequena, podemos notar que a correlação entre as respostas e a crença de autoeficácia em Conhecimento e destreza com operações foi maior quando comparado com os demais componentes. Vale ressaltar que os alunos demonstraram crenças de autoeficácia “menos positivas” nesse componente, bem como tiveram um desempenho ruim na tarefa *Resolva as expressões*.

A tabela 41 mostra as correlações entre as respostas dos alunos em cada tarefa, indicando o desempenho e a crenças de autoeficácia também para cada tarefa.

Tabela 41 – Correlação entre Resposta e Autoeficácia em cada tarefa (N = 338)

Componentes de Sentido de número	Tarefa	Correlação de Pearson	N.	
Conhecimento e destreza com números	Mega-Sena	0,167**	337	
	Quantos dias João já viveu?	0,254**	293	
	Ligue as representações	0,180**	326	
Conhecimento e destreza com operações		$27 + 26$	0,208**	314
		$72 - 14$	0,097	294
		52×2	0,230**	286
	Resolva as expressões	25×10	0,136*	261
		25×12	0,166**	242
		$25 \div 5$	0,213**	222
		$60 \div 2$	0,160*	212
Aplicação o conhecimento e destreza com números e operações em situações de cálculo	Calculadora quebrada	0,161**	266	
	A compra de Marisa	0,209**	302	
	O campeonato esportivo	Item 1	0,115*	316
		Item 2	0,194**	313
		Item 3	0,095	309

** . Correlação significativa com grau de confiança de 99%.

* . Correlação significativa com grau de confiança de 95%.

Fonte: Autoria própria

A análise de correlações demonstrou que existe uma correlação desprezível e positiva entre a crença de autoeficácia e a resposta dos alunos em todas as tarefas, sendo que a classificação r de Pearson resultou num valor entre 0,0 e 0,29.

A tabela 42 mostra as correlações entre os métodos de cálculo utilizados pelos alunos em cada tarefa e as crenças de autoeficácia. Na tarefa *Resolva as expressões*, por solicitar dois cálculos diferentes, foram feitas análises para cada tipo de cálculo. Assim, indicamos na tabela como C1 para o primeiro cálculo realizado pelos alunos e C2 para o segundo cálculo.

Tabela 42 – Correlação entre Método e Autoeficácia em cada tarefa (N = 338)

Componentes de Sentido de número	Tarefa		Correlação de Pearson	N.		
Conhecimento e destreza com números	Mega-Sena		-	-		
	Quantos dias João já viveu?		0,146*	293		
	Ligue as representações		-	-		
Conhecimento e destreza com operações	27 + 26	C1	0,164**	314		
		C2	0,182**	218		
	72 – 14	C1	0,142*	294		
		C2	0,211**	180		
	52 × 2	C1	0,153**	286		
		C2	0,131	170		
	25 × 10	C1	0,141*	261		
		C2	0,035	154		
	25 × 12	C1	0,158*	242		
		C2	0,047	142		
	25 ÷ 5	C1	0,170	222		
		C2	0,173	125		
	60 ÷ 2	C1	0,061	212		
		C2	0,076	118		
	Aplicação o conhecimento e destreza com números e operações em situações de cálculo	Calculadora quebrada		0,060	266	
		A compra de Marisa	Item 1	0,091	316	
			O campeonato esportivo	Item 2	0,054	313
			Item 3	0,052	309	

** . Correlação significativa com grau de confiança de 99%.

* . Correlação significativa com grau de confiança de 95%.

Fonte: Autoria própria

Os resultados da tabela 42 nos permite observar que as correlações entre os métodos de cálculo utilizados pelos alunos e autoeficácia são desprezíveis tendo em vista que, em todas as tarefas, as classificações r de Pearson resultaram em valores menores que 0,29.

Além disso, nas tarefas *Quantos dias João já viveu?* e no primeiro cálculo dos itens 72-14, 25×10, 25×12, essa correlação se mostrou levemente significativa. Em 27+26, nos dois momentos de cálculo, no segundo cálculo de 72-14 e no primeiro cálculo de 52×2, houve uma correlação significativa.

Ao contrário do que esses dados evidenciaram, as pesquisas desenvolvidas com alunos de Ensino Fundamental e Ensino Médio indicam que há relações entre a crença

de autoeficácia e o desempenho (BRITO; SOUZA, 2015; NEVES, 2002; MACHADO, 2014; MORAIS, 2015; DOBARRO, 2007). Ou seja, quanto maior for a confiança que os alunos tiveram na própria capacidade para resolver tarefas matemáticas melhor foi o seu desempenho.

No entanto, essas pesquisas foram realizadas com alunos de níveis de escolarização mais elevadas, com exceção da pesquisa de Neves (2002). Esta pesquisa foi realizada com alunos de 3.^a e 4.^a séries, sendo que os alunos nessa escolaridade, hoje, estariam nos 4.^o e 5.^o anos do Ensino Fundamental. Nela, o desempenho dos alunos evidenciou uma correlação com a crença de autoeficácia. Embora os participantes de sua investigação tenham faixa etária próxima as dos alunos do 3.^o ano, o que poderia resultar em dados semelhantes, as tarefas presentes no instrumento de Neves (2002) apresentam características diferentes.

No instrumento, para analisar a crença de autoeficácia foi uma escala composta por problemas, como por exemplo, “Comprei 4 pacotes de figurinhas. Cada pacote contém 5 figurinhas. Quantas figurinhas eu comprei?”, “Qual o preço de um ingresso para assistir o show “Sandy e Junior” se 7 ingressos custaram R\$ 35,00?”.

Já o instrumento utilizado nessa investigação, a escala de autoeficácia em tarefas numéricas, solicitava aos participantes que explicassem como pensou ou que justificassem suas respostas. Solicitar que os alunos expliquem ou justifiquem suas respostas, além de evidenciar aspectos de sentido de número, foi algo que interferiu no desempenho geral dos alunos, pois ele não foi considerado apenas como “certo” ou “errado”. Em outras palavras, se na escala utilizada nessa pesquisa solicitasse apenas que o aluno respondesse a tarefa, sem explicar ou justificar como a resolveu, o desempenho dos alunos teria sido melhor. Nesse sentido, poderia haver uma correlação entre desempenho e crença de autoeficácia.

Contudo, as evidências de sentido de número seriam menores, pois, de acordo com Brocardo et al. (2009) solicitar que os alunos justifiquem ou expliquem suas respostas possibilita a percepção sobre as dificuldades e os raciocínios dos alunos. Nas palavras de Ferreira (2008, p. 136),

considero que não se pode só ficar pelo desenho e que o registro matemático da situação e também a explicitação pelos alunos da forma como estão a pensar são muito importante. De outro modo, é difícil o professor perceber como os alunos pensam e como estão evoluindo.

Desta forma, observamos que a crença de autoeficácia em tarefas numéricas e o desempenho dos alunos em tarefas que avaliam o sentido de número possuem uma correlação fraca e positiva.

Outra forma de investigar relações entre crença de autoeficácia e sentido de número seria por meio de uma escala, ainda em desenvolvimento, elaborada por Ulusoy e Şahiner (2017) na Turquia. Em seus estudos, os investigadores apresentam uma escala de autoeficácia para o sentido de número.

A escala é do tipo Likert, voltada para alunos de 6.º ano, é composta por expressões que remetem ao sentido de número. Por exemplo: "Quando eu quero fazer a operação $162+98$, eu tenho que escrever os números na linha inferior e nada mais", "Eu só posso marcar a localização aproximada do número 78 em uma régua com uma marca de posição de zero e 100", "Eu posso estimar o número de bolas em uma jarra de maneiras diferentes". Nesta escala, os alunos são solicitados a ler essas expressões e a marcar o grau de concordância na escala do tipo Likert.

Embora uma escala como essa represente uma forma de mensurar a crença de autoeficácia para o sentido de número, não significará que as situações apresentadas serão as escolhas de estratégias para resolver uma tarefa. Na expressão "Eu posso estimar o número de bolas em uma jarra de maneiras diferentes", por exemplo, diante de uma situação em que o aluno precise salientar sobre a quantidade de bolas num jarro, ele pode optar por calcular o valor exato de bolas ao invés de estimar, ou utilizar uma estratégia de estimativa que pode não ser a mais adequada para a situação. Neste sentido, o instrumento não evidenciará sentido de número como em um instrumento que de fato solicite que o aluno resolva a tarefa.

Os instrumentos que elaboramos e validamos nesta pesquisa consegue avaliar duas dimensões: a crença de autoeficácia em resolver tarefas numéricas e também o sentido de número dos alunos.

Em suma, a correlação entre o desempenho do aluno e sua crença de autoeficácia em tarefas numéricas, de forma geral e também especificando os componentes de sentido de número, foram caracterizadas como fracas, positivas e significativas. Já a correlação entre essas variáveis, quando analisadas pelas tarefas individualmente, foram consideradas desprezíveis.

Quanto à correlação entre o método de cálculo e a crença de autoeficácia em tarefas numéricas também foi caracterizada como desprezível, mas de forma não significativa.

5 CONCLUSÕES

A presente pesquisa teve como foco investigar dois temas distintos, o sentido de número e a crença de autoeficácia e a eventual relação entre os dois. Esses temas possuem especificidades sendo que a primeira está relacionada à Didática da Matemática e a segunda, à Psicologia da Educação Matemática. Esses dois temas têm sido investigados de forma particularizada e, como mostrado na revisão da literatura, não há estudos que buscam as articulações entre eles, o que tornou esta pesquisa bastante desafiadora. Embora esses temas tenham grande foco em investigações na Educação Matemática, suas relações são relevantes, pois o ensino da Matemática deve levar em consideração tanto os aspectos conceituais e metodológicos como os afetivos que interferem no ensino e aprendizagem dessa disciplina.

Tomando por base os questionamentos iniciais feitos neste trabalho, essa pesquisa teve o objetivo de analisar e compreender a relação entre a percepção sobre a crença de autoeficácia na resolução de tarefas numéricas e o sentido de número dos alunos ao final do Ciclo de Alfabetização.

A opção metodológica dessa investigação caracterizou-se numa metodologia mista utilizando uma abordagem quantitativa e qualitativa.

Os instrumentos utilizados na pesquisa foram o “questionário”, a “escala de crença de autoeficácia em tarefas numéricas” e “tarefas numéricas”. O questionário tinha por objetivo caracterizar os participantes em termos de idade, gênero, ano de escolaridade bem como sua percepção de desempenho em Matemática. A escala de crença de autoeficácia em tarefas numéricas foi construída e validada, pois não se encontrou na literatura nenhum instrumento que pudesse avaliar as crenças dos alunos diante de tarefas numéricas; e as tarefas numéricas tinham por objetivo investigar aspectos relativos ao sentido de número.

No período da coleta de dados, as escolas estavam realizando avaliações externas de caráter obrigatório, como a Avaliação Nacional de Alfabetização (ANA) e o Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP). Isso acarretou na diminuição do tempo que as escolas disponibilizaram para a coleta dos dados, na priorização da aplicação dos instrumentos “escala de crença de autoeficácia em tarefas numéricas” e “tarefas numéricas” e na diferenciação da quantidade de alunos que responderam cada instrumento.

Assim, foram analisados os dados obtidos por meio do questionário, respondidos por 338 alunos, da escala de crença de autoeficácia em tarefas numéricas, respondido por 388 alunos e foram apresentadas as respostas de 351 alunos nas tarefas numéricas. Para investigar as relações entre sentido de número e crenças de autoeficácia em tarefas numéricas, foram realizadas análises de correlações dos dados obtidos pela escala e pelas tarefas de 338 alunos.

Este capítulo inclui as conclusões do estudo realizado e, para finalizar, uma reflexão decorrente do trabalho desenvolvido. As conclusões estão organizadas em seções de acordo com os problemas de pesquisa que buscamos responder.

5.1 Conclusões do estudo

5.1.1 Sentido de número

Relativamente aos aspectos de sentido de número manifestados pelos alunos ao final do Ciclo de Alfabetização diante a resolução de tarefas numéricas, os dados evidenciaram que a grande maioria dos alunos não tem sentido de número, sendo que os procedimentos de resolução das tarefas estiveram ligados à aplicação de algoritmos.

De um modo geral os alunos apenas mostraram compreender que os números podem ser organizados seguindo uma determinada ordem e também que há múltiplas representações para os números, aspectos estes relacionados ao componente conhecimento e destreza com os números. Contudo, não mostraram ter sentido da grandeza relativa e absoluta dos números e tampouco sistemas de valores de referência que lhes permitissem calcular e estimar.

Os alunos também não evidenciaram os demais componentes de sentido de número que dizem respeito ao conhecimento e destreza com operações e aplicar o conhecimento e destreza com números e operações em situações de cálculo tendo em vista que apresentaram um baixo desempenho nas tarefas numéricas.

De um modo global, os erros que os alunos cometeram na resolução das tarefas propostas que, além de mostrarem falta de sentido de número, podem ser considerados como reflexo de um ensino centrado no algoritmo. Por exemplo, na operação de subtração, alguns alunos operam sobre dígitos, sem contemplar o número em seu valor global. O aluno subtrai o menor dígito do maior ao invés de subtrair o menor número do maior. Equívocos como este são, possivelmente, provenientes de falas como “na

subtração, se tira o *menor do maior*". Essa fala também pode gerar dificuldades para compreender as operações com números inteiros negativos tendo em vista que essa "regra" vale apenas para operações com números naturais.

A maioria dos alunos mostrou, igualmente, que não compreenderam o sentido das operações e/ou as propriedades matemáticas ao inverter a ordem dos termos nas operações de subtração e divisão, tendo em vista que o resultado final de cálculos, nessas operações, será diferente se alterarmos a ordem dos termos.

O ensino precoce do algoritmo também contribui com uma visão sobre os números de que eles são compostos apenas por dígitos, limitando também a flexibilidade do aluno em representar números por meio de composições a partir de dezenas e unidades ou até mesmo de estruturas de dobro/metade, entre outras.

A representação dos números deve ser feita a partir das operações, para desenvolver uma flexibilidade de representações numéricas com compreensão. Assim, diante de uma situação ou de uma tarefa, e a partir de um repertório de possibilidades, o aluno poderá escolher representações adequadas e convenientes para resolvê-la.

Embora de forma pontual, alguns alunos mostraram criatividade¹³ a partir dos conhecimentos e destrezas que desenvolveram ao realizar cálculos algorítmicos.

Um desses aspectos se refere aos alunos que, diante de uma tarefa na qual tinham que calcular de duas maneiras diferentes, por saberem calcular por meio do algoritmo, apresentaram cálculos cujas representações também remetem ao algoritmo, tais como a representação do cálculo "na horizontal" e representação do algoritmo de forma pictórica. Isso denota que os alunos buscaram outras formas de representação do cálculo algorítmico sendo este o modelo de cálculo que eles mais conhecem.

Também houve alunos que, na falta de um modelo de cálculo para operação de divisão, se basearam em algoritmos de adição, subtração e multiplicação como modelo para representar o seu cálculo. Para além de um uso excessivo de regras algorítmicas aplicadas nas operações aritméticas, esses alunos demonstraram que sabem dividir, mas que, por não saberem representar seu cálculo no papel, recorreram a esses modelos.

Um aspecto relacionado ao cálculo mental evidenciado pelos alunos refere-se a sua aplicação mais frequente na adição. O procedimento mais utilizado nesse cálculo, principalmente por ter que calcular de duas maneiras diferentes na tarefa, foi o de

¹³ Segundo Kruteskii (1976), a criatividade é composta de vários componentes e, entre eles, o preponderante é a flexibilidade de pensamento, ou seja, usar formas diferenciadas de estratégias que fogem ao padrão convencional de resolução de problemas.

decomposição. Nesse procedimento, os alunos evidenciaram diferentes registros do mesmo procedimento. Ou seja, essa forma de calcular não parece estar mecanizada, sendo que os alunos mostraram compreensão tanto na decomposição dos termos presentes na expressão, bem como ao registrar a reserva.

Para além das características de algoritmo e de cálculo mental nos quais as formas de perceber o número enquanto um valor global ou uma junção de dígitos será fundamental, houve alunos que calcularam com números e dígitos simultaneamente na mesma expressão. Possivelmente, os alunos recorreram às técnicas do algoritmo para multiplicar, porém, considerando um dos fatores como um número com um valor global e não como a junção de dígitos.

O uso da propriedade comutativa e de soma de parcelas iguais em situações multiplicativas também pode ser considerado como formas criativas que os alunos encontraram de resolver a tarefa sendo que estas estratégias, quando aplicadas corretamente, remetem ao conhecimento e destreza com operações.

Outro aspecto que mostra a criatividade dos alunos para resolver as tarefas refere-se às múltiplas representações de números naturais menores que 100. Os registros de alguns alunos evidenciaram que reconhecem formas numéricas equivalentes e o uso de cálculos corroboram com esses reconhecimentos.

Os aspectos de sentido da grandeza relativa e absoluta dos números e ao sistema de valores de referência foram pouco evidenciados pelos alunos, pois poucos demonstraram reconhecer o valor relativo de um número (400) comparando-o com outro número (365). Apesar disso, muitos alunos não evidenciaram esses aspectos de sentido de número, ou por não ter desenvolvido esse componente, ou por não saber quantos dias há em um ano. Ainda, o uso de respostas não matemáticas apresentadas na tarefa *Quantos dias João já viveu?* mostrou pouco conhecimento em sentido da grandeza relativa e absoluta dos números.

Apesar disso, a criatividade de certos alunos, por não saber quantos dias constitui um ano, os levaram a buscar meios para resolver a tarefa. Com o uso de um calendário que estava exposto na sala de aula, esses alunos somaram as quantidades de dias dos meses para saber quantos dias há no ano e resolver a tarefa.

Em suma, os aspectos relativos ao sentido de número manifestados pelos alunos ao final do Ciclo de Alfabetização diante a resolução de tarefas numéricas estão estritamente relacionados ao ensino exacerbado do algoritmo, porém, alguns alunos

foram além disso manifestando diferentes características relacionadas aos componentes do sentido de número.

De um modo global a forma como os alunos resolveram as tarefas sugere que o ensino da Matemática, no Brasil, vem focando a aprendizagem de técnicas algorítmicas em detrimento de outros conhecimentos e destrezas relativos aos números e operações. Os resultados confirmam que uma simples aplicação de técnicas, sem a real compreensão dos procedimentos utilizados, não garante o sucesso dos alunos ao calcular.

5.1.2 Crença de autoeficácia em tarefas numéricas

Globalmente as crenças de autoeficácia em tarefas numéricas dos alunos ao final do Ciclo de alfabetização mostraram-se positivas de maneira acentuada.

Quando relativizamos as crenças de autoeficácia aos componentes de sentido de número que as tarefas focavam, notamos que os alunos se sentem mais capazes em resolver tarefas referentes ao componente conhecimento e destreza com os números seguida de tarefas com situações de cálculo em que se aplica o conhecimento e destreza com números e operações. E por último, o componente conhecimento e destreza com operações. Ou seja, resolver expressões matemáticas, de duas maneiras diferentes, foi a tarefa em que os alunos demonstraram menor crença de autoeficácia.

Desta forma, os aspectos relativos às percepções dos alunos ao final do Ciclo de Alfabetização sobre a sua crença de autoeficácia em tarefas numéricas são crenças muito positivas, mas que se alteram devido às operações envolvidas no cálculo, bem como os valores numéricos presentes nas tarefas.

5.1.3 Relações entre sentido de número e crença de autoeficácia em tarefas numéricas

Os dados evidenciaram uma correlação fraca, positiva e significativa entre o sentido de número do aluno e sua crença de autoeficácia em tarefas numéricas, independentemente se foi analisada de forma geral, ou especificando os componentes de sentido de número. Já a correlação entre essas variáveis, quando analisadas pelas tarefas individualmente, bem como a correlação entre o método de cálculo e a crença de autoeficácia em tarefas numéricas, foram consideradas desprezíveis.

Importante realçar que, como salientado anteriormente, os alunos evidenciaram crenças de autoeficácia muito positivas, porém, um baixo sentido de número. Essa discrepância entre “o que se acredita” e “o que se sabe” explica a correlação fraca entre as variáveis investigadas nesse trabalho.

Por conta disso, podemos levantar a hipótese de que a falta de uma correlação forte entre o sentido de número e a crença de autoeficácia em tarefas numéricas pode estar relacionado ao fato de que os alunos que participaram dessa investigação terem habitualmente uma experiência em que conseguem resolver as tarefas numéricas propostas pelo seu professor. Por isso, ao analisar as tarefas que lhe foram propostas têm a expectativa de sabê-las resolver bem. No entanto, ao terem de fato de fazê-lo, como muitas delas não se enquadram no tipo de tarefas que podem ser resolvidas recorrendo ao uso do algoritmo, erram mais do que esperavam.

Também podemos colocar a hipótese de que os alunos, por estarem apenas no 3.º ano de escolaridade, podem não ter vivenciado muitas experiências de insucesso, sendo que os tipos de experiências influenciam nas crenças de autoeficácia.

5.2 Implicações do estudo

Esse estudo aborda dois temas, o sentido de número e as crenças de autoeficácia em tarefas numéricas, e pode contribuir para o desenvolvimento de outras investigações bem como sugerir indicações para a prática do professor na sala de aula.

Sentido de número

No que se refere ao sentido de número, as tarefas que compõem o instrumento tarefas numéricas podem ser utilizadas nas salas de aula e podem contribuir com avaliação do sentido de número. Essas tarefas foram pensadas e adaptadas a partir de tarefas apresentadas na literatura.

As sequências de tarefas elaboradas para desenvolver o sentido de número ou os instrumentos utilizados para avaliá-lo foram pensadas em contextos diferentes do contexto brasileiro. Mesmo no Brasil, os contextos se diferem muito de uma região para outra. Tendo em vista a importância dos contextos para o desenvolvimento do sentido de número, é importante ter em conta que eles podem ser adaptados em tarefas de

acordo com a realidade de cada escola a fim de contribuir para o desenvolvimento do sentido de número, assim como fizemos para essa investigação.

A pesquisa aqui apresentada, desenvolvida numa abordagem metodológica mista, realizou análises interpretativas das resoluções das tarefas resolvidas pelos alunos. Essa análise apresentou um panorama de como os alunos registram seus procedimentos de resolução. Uma abordagem mais qualitativa, embora não apresente um panorama amplo, permite aprofundar a investigação em termos de coleta e análise dos dados. O método do “pensar em voz alta”, por exemplo, que consiste num método no qual é solicitado ao aluno que verbalize o modo de como está pensando durante a resolução de uma tarefa (UTSUMI, 2000), pode evidenciar aspectos de sentido de número que não foi possível perceber pelo método misto ou pela análise interpretativa. Neste sentido, respostas que foram desconsideradas nessa pesquisa por não ser possível compreender como o aluno resolveu, nesse método ele poderia ser questionado ou teria a oportunidade de explicar de outra forma como pensou e assim, evidenciar sentido de número.

Desta forma, uma possível forma de dar continuidade a essa investigação seria o uso de um método do “pensar em voz alta” a fim de compreender com maior profundidade conhecimentos e destrezas que os alunos vêm desenvolvendo.

O foco do ensino da Matemática, no Brasil, está voltado para o algoritmo, mesmo que os documentos oficiais, de forma superficial, preconizem o uso do cálculo mental nas aulas de Matemática. A ideia corrente entre os professores é que um aluno só sabe calcular, ou está alfabetizado matematicamente, quando realiza cálculos algorítmicos corretamente. As estratégias pessoais de cálculo começam a se desenvolver com o uso de recursos pictóricos que representam as quantidades a serem contadas para realizar um cálculo. Em seguida, as crianças “aprendem” o algoritmo, sem muitas vezes desenvolver conceitos ou destrezas sobre os números e as operações em si. O ensino precoce do algoritmo limita o desenvolvimento de outras estratégias de cálculo do aluno, como o cálculo mental e por estimativa, que contribuem com a compreensão do próprio número, das operações e de suas aplicações. Além do mais, o uso do algoritmo não vem garantindo o sucesso nos cálculos, pois os alunos não compreendem de fato os procedimentos utilizados nele e como os números se “comportam” nesse processo.

A Base Nacional Curricular Comum (BRASIL, 2017) vem propondo que a alfabetização matemática do aluno ocorra até o 2.º ano do Ensino Fundamental. Embora

considerem que o cálculo com algoritmo seja uma habilidade a ser desenvolvida a partir do 4.º ano de escolaridade, corre-se o risco dele ser ensinado ainda mais cedo para os alunos a fim de considerar que as crianças estejam alfabetizadas.

Desta forma, pensar sobre as tarefas a serem trabalhadas em sala de aula é importante quando se pretende desenvolver conhecimentos e destrezas com números e operações, independentemente do nível de escolarização, e o instrumento utilizado nessa investigação assim como os instrumentos apresentados na literatura podem contribuir para isso.

Uma característica em comum nessas tarefas é o fato de que elas solicitam que os alunos expliquem como pensaram e/ou justifiquem suas respostas. Embora muitos professores utilizem livros didáticos específicos, ou apostilas, com diversas tarefas para serem aplicadas, acrescentar esse aspecto nas tarefas presentes nesses materiais podem também contribuir para o desenvolvimento do sentido de número.

Esse objetivo também pode ser alcançado com a própria postura do professor durante as aulas. Solicitar que os alunos socializem suas resoluções com os colegas e que expliquem para eles como as resolveram pode ampliar as possibilidades de resoluções dos alunos, discutir sobre as estratégias mais eficazes e ajudá-los a compreender os erros.

Também é importante considerar a relevância de cursos de formação inicial e continuada que abordam o sentido de número, bem como o cálculo mental e a estimativa para professores a fim de clarificar esses conceitos, suas características e possíveis práticas.

O professor ensina o que sabe. Se em toda sua formação, desde o Ensino Básico até o Ensino Superior, houve maior foco na aprendizagem de técnicas algorítmicas, esse professor terá maior foco nessas técnicas ao ensinar números e operações aos seus alunos.

Por conta disso, se faz necessário investigar o sentido de número de professores bem como suas concepções acerca do ensino e aprendizagem de Números e Operações a fim de elaborar cursos que tenham a finalidade de desenvolver o sentido de número. Além de conhecimento e desenvolvimento de destrezas com números e operações, um curso assim poderia abordar o desenvolvimento de modelos de cálculo, como o método de cálculo mental e seus procedimentos linear, de decomposição e variadas, bem como de cálculo por estimativa.

Além disso, uma formação que tenha essa finalidade também pode abordar a elaboração de materiais que contribuem com o desenvolvimento do cálculo mental. O colar de contas¹⁴, por exemplo, é um material manipulável, composto por conjuntos de “bolinhas” de duas cores, agrupadas de cinco em cinco ou de dez em dez, e pode servir como base para o cálculo mental no procedimento linear. Ou seja, esse material pode contribuir para o desenvolvimento de outros modelos de cálculo que vão além do algoritmo.

Em Portugal foi realizada a Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º ciclos entre 2007 e 2010 que promoveu a elaboração de materiais que contribuem com o desenvolvimento do sentido de número, no qual aborda, dentre diversos materiais, o colar de contas.

No Brasil, o Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa – PNAIC – aborda o sentido de número, porém, suas discussões não são muito aprofundadas. Diante de diferentes cadernos de formação e de diversos conteúdos a serem discutidos, cada um de extrema relevância para o ensino da Matemática, o sentido de número perde o foco durante as formações.

A formação inicial, tampouco, vem contribuindo para a formação em Matemática de futuros professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental. De acordo com Curi (2004), a formação do professor polivalente tem um caráter generalista fundada nos Fundamentos da Educação e sem considerar a necessidade de abordar conhecimentos sobre os conteúdos que ele irá ensinar. A concepção presente em cursos de formação em Pedagogia percebida pela autora é de que o professor polivalente não precisa saber Matemática, precisa apenas saber como ensiná-la.

Uma formação de professores para desenvolver o sentido de número requer maior tempo e aprofundamento tendo em vista suas especificidades. Conceitos e habilidades relacionados aos Números e Operações bem como outros conteúdos matemáticos, tais como Grandezas e Medidas, Estatística/Tratamento da Informação e Geometria, poderiam ser abordados na perspectiva do Sentido de número. Embora cada conteúdo matemático tenha suas especificidades, todas elas envolvem conhecimentos e destrezas com números e operações. O sentido de número não seria “mais um conteúdo a ser ensino”, mas sim um caminho, com um objetivo a ser atingido, ao ensinar Matemática.

¹⁴ O material que aborda o colar de contas pode ser encontrado no site <http://www.aprendermatematica.uevora.pt/numeros_tarefas/1ciclo/Modelo_do_colar_de_contas1.pdf>.

Crença de autoeficácia

A escala de crença de autoeficácia em tarefas numéricas, também validada nesta pesquisa, é um instrumento que pode ser utilizado em outras investigações bem como em sala de aula para o professor avaliar o quanto seus alunos se sentem confiantes diante de tarefas.

Durante a coleta de dados, quando os professores ficavam presentes na sala, muitos deles se surpreendiam quando seus alunos se expressavam em voz alta que acreditavam que conseguiam resolver a tarefa apresentada. Tendo em vista que os dados foram coletados ao final do período letivo, esses professores poderiam conhecer as crenças e os sentimentos dos alunos sobre os conteúdos que trabalharam, e não apenas seus desempenhos.

O professor pode conhecer as crenças e os sentimentos de seus alunos questionando, antes mesmo de dar início à resolução das tarefas. O uso de um instrumento como a escala contribui em mensurar quantitativamente suas crenças e sentimentos, mas isso pode acontecer de forma qualitativa, com uso de termos como “sim” ou “não”, “muito” ou “pouco”, entre outros.

O importante é que o professor conheça aspectos cognitivos e afetivos dos seus alunos tendo em vista que isso interfere em sua aprendizagem.

No entanto, é possível perceber também no cotidiano das escolas uma grande preocupação com o desempenho dos alunos em avaliações em larga escala realizada pelo Governo Federal e Estadual, tais como a ANA, o SARESP, a Prova Brasil e ainda avaliações realizadas pelos municípios. Os alunos são submetidos a diversas avaliações desde os anos iniciais do Ensino Fundamental que os professores, além de ensinar os conteúdos escolares, procuram preparar seus alunos para esses tipos de avaliações. Contudo, essas avaliações abordam apenas aspectos cognitivos dos alunos, diminuindo a importância das crenças e atitudes que os alunos vêm desenvolvendo na escola. Conseqüentemente, o foco do ensino, incluindo o ensino da Matemática, é voltado para aspectos cognitivos.

A literatura evidenciou, embora com poucas pesquisas, que planejar aulas levando em conta as crenças e os sentimentos contribui com o desempenho dos alunos.

Nesta investigação, os alunos apresentaram crença de autoeficácia positiva. Isso leva a reflexão, não de como podemos desenvolver crenças favoráveis ao ensino da

Matemática, mas como podemos utilizar esse aspecto a favor do ensino de modo que leve os alunos a compreender o conceito de número, a desenvolver diversas estratégias de cálculo e aplicar esses conhecimentos quando necessário e da melhor forma.

Assim, para além de uma investigação como a de Getachew e Birhane (2016), com o objetivo de desenvolver crenças de autoeficácia positivas, é pertinente investigar meios de, a partir de crenças positivas, desenvolver conhecimentos e destrezas em Matemática que darão base cognitiva para uma real percepção de autoeficácia e que propicie um bom desempenho na realização de tarefas matemáticas.

A formação promovida pelo PNAIC também aborda as atitudes em relação à Matemática no qual Moraes e Pirola (2015) discutem a importância das atitudes positivas para alunos que estão no Ciclo de Alfabetização. Nesta perspectiva em que aspectos afetivos são discutidos numa formação continuada, as crenças de autoeficácia podem ser abordadas também devido ao seu papel preditor de desempenho.

Assim como investigações que abordam as atitudes em relação à Matemática em cursos de formação inicial (PIROLA; SANDER; TORTORA, 2013) bem como em curso de formação continuada (SANDER, 2014), para além de uma abordagem cognitiva, investigar crenças de autoeficácia em Matemática com professores e futuros professores assume relevância tendo em vista sua interferência no desempenho ao realizar tarefas, bem como na prática docente.

Para finalizar

Importante destacar nesse trabalho, e assim farei de uma forma mais pessoal, refere-se ao fato de que professores, coordenadores e diretores me receberam em suas escolas, em suas salas de aulas com muita prontidão. Ouve-se muito na academia, em cursos de pós-graduação, sobre dificuldades em desenvolver pesquisas nas escolas e que isso é consequência de práticas na qual o investigador realiza sua coleta de dados e não apresenta uma devolutiva para os envolvidos.

Neste sentido, o próximo passo deste trabalho será promover ambientes que permitam a discussão de fundamentos, dados e conclusões que emergiram nessa pesquisa, principalmente para os profissionais que possibilitaram que ela fosse realizada.

6 REFERÊNCIAS

- ALVES, E. V. **Um estudo exploratório dos componentes da habilidade matemática requeridos na solução de problemas aritméticos por estudantes do Ensino Médio.** 1999. F. Dissertação (Mestrado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas. 1999.
- AYOTOLA, A.; ADEDEJI, T. The relationship between mathematics self-efficacy and achievement in mathematics. In: **Procedia Social and Behavioral Sciences.** v. 1, pp. 953–957. World Conference Education Science. 2009.
- AZAR, H. K.; LAVASANI, M. G.; MALAHMADI, E.; AMANI, J. **The role of self-efficacy, task value, and achievement goals in predicting learning approaches and mathematics achievement.** In: **Procedia Social and Behavioral Sciences.** v. 5, pp. 942–947. 2010.
- AZZI, Roberta Gurgel et al. Crenças de eficácia pessoal e coletiva. In: AZZI, Roberta G.; VIEIRA, Diana A. (Org.). **Crenças de eficácia em contexto coletivo.** São Palo: Casa do Psicólogo, 2014. Cap. 1. p. 15-40.
- BANA, J.; DOLMA, P. The relationship between the estimation and computation abilities of Year 7 students. In: PUTT, I.; FARAGHER, R.; MCLEAN, M. (Eds.), **Proceedings of the 27th annual conference of the Mathematic Education Research Group of Australasia.** v. 1. Townsville, Austrália: Merga. 2006. p. 63-70.
- BANDURA, A. Self-efficacy. In: RAMACHAUDRAN, V. S. (Ed). **Encyclopedia of human behavior.** v. 4, pp. 71-81. New York: Academic Press, 1994. (Reprinted in H. Friedman [Ed.], *Encyclopedia of mental health.* San Diego: Academic Press, 1998).
- BANDURA. A. **Self-efficacy:** toward a unifying theory of behavioral change. *Psychological Review*, 1977.
- BANDURA, A. Self-efficacy determinants of anticipated fears and calamities. **Journal of Personality and Social Psychology**, 1983.
- BANDURA, A. **Social foundations of thought and action:** a social cognitive theory, 1986.
- BANDURA, A. **Selfy-Efficacy:** the exercise of control. New York: W. H. Freeman and Company, 1997.
- BANDURA, A. Social cognitive theory: An agentic perspective. **Asian Journal of Social Psychology.** v. 2, pp. 21-41, 1999.
- BANDURA, A. Guide for constructing self-efficacy scales. In: PAJARES, F.; URDAN, T. (Eds.), **Self-Efficacy Beliefs of Adolescents.** Greenwich: Published by Information Age Publishing, pp. 307-337, 2006.

BANDURA, A. O exercício da agência humana pela eficácia coletiva. In BANDURA, A.; AZZI, R. G.; POLYDORO, S. (Eds.). **Teoria social cognitiva: Conceitos básicos** Porto Alegre: Artmed, 2008, pp. 115-122.

BEISHUIZEN, M.; PUTTEN, C. M.; MULKENT, F. Mental arithmetic and strategy use with indirect number problems up to on hundred. **Learning and Instruction**. Grã-Bretanha: Pergamon, v.7, n. 1. 1997. p. 87-106.

BESWICK, K.; MUIR, T.; MCINTOSH, A. Developing an instrument to assess the number sense of young children. **International Education Research Conference Paper Abstracts**. AARE 2004. Melbourne, Australia. p. 1-12. 2004.

BOAVIDA, A. M.; GONÇALVES, A.; OLIVEIRA, H. Sentido de Número e resolução de problemas de adição e subtração no 1.º ano de escolaridade. In: FERNANDES, L.; MARTINHO, H.; VISEU F. (Orgs.), **Actas do XX Seminário de Investigação em Educação Matemática**, Braga: Instituto de Educação e Psicologia, Universidade do Minho. 2009. p. 278-291.

BOOTH, J.; SIEGLER, R. Numerical Magnitude Representations Influence Arithmetic Learning. **Child development**, v. 79, n. 4, pp. 1016-1031, 2008.

BRASIL, MEC/CNE. Ministério da Educação e do Desporto – Secretaria de Ensino Fundamental. **Elementos conceituais e metodológicos para definição dos direitos de aprendizagem e desenvolvimento do Ciclo de Alfabetização (1º, 2º e 3º ANOS) do Ensino Fundamental** / Secretaria da Educação Fundamental. Brasília: D.F., 2012.

BRASIL, MEC/SEF. Ministério da Educação e do Desporto – Secretaria de Ensino Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática** / Secretaria da Educação Fundamental. Brasília: D.F., 1997.

BRASIL, MEC/SEB. Ministério da Educação e do Desporto – Secretaria de Educação Básica. **Diretrizes Curriculares Nacionais para Educação Básica**. Brasília: D. F., 2013.

BRASIL, MEC/SEB. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Proposta preliminar. Segunda versão revista. Brasília: MEC, 2016.

BRASIL, MEC/SEB. Ministério da Educação. **Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa**. Interdisciplinaridade no ciclo de alfabetização. Caderno de Apresentação / Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. – Brasília: MEC, SEB, 2015.

BRITO, M. R. F. **Um estudo sobre as atitudes em relação à Matemática em estudantes de 1º e 2º graus**. 1996. 383 f. Tese (Livre Docência) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1996.

BRITO, M. R. F. Psicologia da Educação Matemática: Um ponto de vista. **Educar em Revista**, Curitiba, v. 1, p. 29-45, 2011.

BRITO, M. R. F.; SOUZA, L. F. N. I. Autoeficácia na solução de problemas matemáticos e variáveis relacionadas. **Temas em psicologia**. 2015, v. 23, n. 1, pp. 29-47. doi: 10.9788/TP2015.1-03.

BROCARD, J.; SERRAZINA, L.; KRAEMER, J. Algoritmos e sentido do número. **Educação e Matemática**, v. 75, pp. 11-15. 2003.

BROCARD, J. Uma linha de desenvolvimento do cálculo mental: começando no 1.º ano e continuando até ao 12.º ano. In: **Actas do PROFMAT**, 2011. Lisboa. Lisboa: APM 2011. Disponível em: www.apm.pt/files/_CP03_4e713771384fc.pdf. Acesso em: 19 abr. 2016.

BROCARD, J., DELGADO, C., MENDES F., ROCHA, I., CASTRO, J., SERRAZINA, L., RODRIGUES, M. Desenvolvendo o sentido do número. In: Equipa do Projecto DSN, **Desenvolvendo o sentido do número: Perspectivas e exigências curriculares**. Lisboa: APM, 2009. p. 7-28.

BUYS, K. Mental Arithmetic. In: HEUVEL-PANHUIZEN, M.; BUYS, K.; TREFFERS, A. (Ed.), **Children learning Mathematics: A learning-Teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school**. Holanda: Sense publishers. 2008. p. 173-202.

CAMPOS, S. G. V. B.; WODEWOTZKI, M. L. L. Pictograma e sentido de número: saberes em movimento. **Em Teia - Revista de Educação Matemática e Tecnologia Iberoamericana**, v. 7, n. 1, 2016.

CARPENTER, T. P.; FRANKE, M. L.; JACOBS, V. R.; FENNEMA E.; EMPSON, S. B. A

longitudinal study of invention and understanding in children's multidigit addition and subtraction. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 29, n. 1, pp. 3-20. 1998.

CARPENTER, T. P. Number sense and other non sense. In: SOWDER, J.; SCHAPPELLE, B. (Ed.), **Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference**, San Diego, California: San Diego State University, Center for Research in Mathematics and Science Education. 1989. p. 89-91.

CASE, R. Fostering the development of children's number sense. In: SOWDER, J.; SCHAPPELLE, B. (Ed.), **Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference**, San Diego, California: San Diego State University, Center for Research in Mathematics and Science Education. 1989. p. 57-64.

CURI, E. **Formação de professores polivalentes: uma análise de conhecimentos para ensinar Matemática e de crenças e atitudes que interferem na constituição desses conhecimentos**. 2004. 278 f. tese (Doutorado) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2004.

DAL-FARRA, R. A.; LOPES, P. T. C. **Métodos mistos de pesquisa em Educação: pressupostos teóricos**. Nuances: estudos sobre Educação, v. 24, n. 3, pp. 67-80, 2013.

DELGADO, A. J. M. **Percepção de auto-eficácia e conhecimento de matemática no 1.º ano universitário.** 2012. 50 f. Dissertação (Mestrado Integrado em Psicologia). Faculdade de Psicologia, Universidade de Lisboa. Lisboa. 2012.

DELGADO, C. R. S. C. A. **As práticas do professor e o desenvolvimento do sentido de número:** Um estudo no 1.º ciclo. 2013. 562 f. Tese (Doutorado em Educação – Didática da Matemática). Instituto de Educação, Universidade de Lisboa. Lisboa. 2013.

DOBARRO, V. R. **Solução de problemas e tipos de mente matemática:** relações com as atitudes e crenças de auto-eficácia. 2007. 229 f. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas. Campinas. 2007.

FACUN, R. D.; NOOL, N. R. Assessing the Number Sense of Grade 6 Pupils. **International Conference on Education and Management Innovation.** Singapore: IPEDR, v. 30, 2012.

FERREIRA, E. A adição e a subtração no contexto do sentido do número. In: BROCARD, J.; SERRAZINA, L.; ROCHA, I. **O sentido do número: Reflexões que entrecruzam teoria e prática,** Lisboa: Escolar Editora. 2008. p. 135-157.

FERREIRA, E. G. **O desenvolvimento do sentido de número no âmbito da resolução de problemas de adição e subtração no 2.º ano de escolaridade.** 2012. 587 f. Tese (Doutoramento em Educação. Instituto de Educação, Universidade de Lisboa. Lisboa. 2012.

GEORGE, D.; MALLERY, P. **SPSS for Windows Step by Step: A Simple Guide and Reference,** 11.0 Update. 4. Boston, 2002.

GETACHEW, K.; BIRHANE, A. Improving students' self-efficacy and academic performance in Applied Mathematics through innovative classroom-based strategy at Jimma University, Ethiopia. In: **Tuning Journal for Higher Education,** University of Deusto, v. 4, n. 1, 2016, pp. 119-143.

GREENO, J. G. Some conjectures about number sense. In: SOWDER, J.; SCHAPPELLE, B. (Ed.), **Establishing foundations for research on number sense and related topics:** Report of a conference, San Diego, California: San Diego State University, Center for Research in Mathematics and Science Education. 1989. p. 43-56.

GREENES, C., SCHULMAN, L., SPUNGIN, R. Developing sense about numbers. **Arithmetic Teacher.** v. 40. n. 5, p. 279-284. 1993.

GUERREIRO-CASANOVA, D. C. Crenças de eficácia coletiva em contexto educativo. In: AZZI, R. G.; VIEIRA, D. A. (Org.), **Crenças de eficácia em contexto educativo.** São Paulo: Casa do Psicólogo. 2014. p. 55-66.

HEIRDSFIELD, A. M.; COOPER, T. J.; IRONS, C. J. Traditional pen-and- paper vs mental approaches to computation: the lesson of Adrien. In: **Proceedings of the Australian Association for Research in Education Conference,** Melbourne, Australia, 1999. 1-13.

HEIRDSFIELD, A. M.; COOPER, T. J. Flexibility and inflexibility in accurate mental addition and subtraction: Two case studies. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 21, p. 57-74. 2002.

HEIRDSFIELD, A. M.; COOPER, T. J. Factors affecting the process of proficient mental addition and subtraction: case studies of flexible and inflexible computers. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 23, n. 4, p. 443-463. 2004.

HEUVEL-PANHUIZEN, M. Estimation. In: HEUVEL-PANHUIZEN, M.; BUYS, K.; TREFFERS, A. (Ed.), **Children learning Mathematics: A learning-Teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school**. Holanda: Sense publishers. 2008. p. 173-202.

HEUVEL-PANHUIZEN, M.; BUYS, K. Big lines. In: HEUVEL-PANHUIZEN, M.; BUYS, K.; TREFFERS, A. (Ed.), **Children learning Mathematics: A learning-Teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school**. Holanda: Sense publishers. 2008. p. 95-100.

HOFFMAN, B. V. S. O sentido de número em atividades significativas: avaliação e construção, In: **ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, 12, 2016, São Paulo. Anais do XII ENEM. São Paulo: Universidade Cruzeiro do Sul, 2016. 1-14.

KVEDERE, L. Mathematics Self-Efficacy, Self-Concept and Anxiety Among 9th Grade Students in Latvia. In: **5th World Conference on Educational Sciences - WCES 2013**. Procedia - Social and Behavioral Sciences. v. 116, pp. 2687-2690. 2014.

MACÊDO, D. G. **Análise dos antecedentes à resistência a sistemas empresariais: uma abordagem explano-exploratória**. 2011. 166 Escola Brasileira de Administração Pública de Empresas, Centro de Formação Acadêmica e Pesquisa, FGV.

MACHADO, M. C. **Gênero e desempenho em itens da prova de matemática do exame nacional do ensino médio (ENEM): relações com as atitudes e crenças de autoeficácia matemática**. 2014. 224 f. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas. Campinas. 2014.

MARKOVITS, Z. Reactions to the Number Sense Conference. In: SOWDER, J.; SCHAPPELLE, B. (Ed.), **Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference**, San Diego, California: San Diego State University, Center for Research in Mathematics and Science Education. 1989. p. 78-81.

MARSHALL, S. P. Retrospective Paper: Number Sense Conference. In: SOWDER, J.; SCHAPPELLE, B. (Ed.), **Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference**, San Diego, California: San Diego State University, Center for Research in Mathematics and Science Education. 1989. p. 40-42.

MCINTOSH, A.; REYS, B. J.; REYS, R. E. Uma proposta de quadro de referência para examinar o sentido básico de número. **For the Learning of Mathematics**, v. 12, n. 3, p. 1-17. 1992.

MENDES, F.; DELGADO, C. A aprendizagem da multiplicação e o desenvolvimento do sentido de número. **O sentido do número: Reflexões que entrecruzam teoria e prática**. pp. 159-182. Lisboa: Escolar Editora. 2008.

MENDES, F.; BROCARD, J.; DELGADO, C.; TORRES, F. **Números e Operações - 3.º ano: Números naturais, Operações com números naturais, Números racionais não negativos**. 2010.

MENDES, F. **A aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número: Um estudo com alunos do 1.º ciclo**. 2012. 591 f. Tese (Doutorado em Educação – Didática da Matemática). Instituto de Educação, Universidade de Lisboa. Lisboa. 2012.

MOHAMED, M.; JOHNNY, J. **Difficulties in number sense among students**. 2011. Disponível em https://www.researchgate.net/profile/Jacinta_Johnny/publication/261562452_Difficulties_in_Number_Sense_Among_Students/links/0a85e534b456ebc2dd000000.pdf > Visualizado em 25/01/2018.

MORAES, M. S. S.; PIROLA, N. A. Atitudes positivas em relação à Matemática. **Pacto nacional pela alfabetização na idade certa: Alfabetização matemática na perspectiva do letramento**. Brasília: MEC – SEB. 2015.

MORAIS, A. M.; NEVES, I. P. Fazer investigação usando uma abordagem metodológica mista. **Revista Portuguesa de Educação**. v. 20, n. 2, pp. 75-104, 2007.

MORAIS, C.; SERRAZINA, L. Mental computation strategies in subtraction problem solving. In: UBUIZ, B.; HASER, C.; MARIOTTI, M. A. (Eds), **Proceedings of CERME 8**. Ankara, Turkey: Middle East Technical University, CERME. 2013. p. 333-342.

MORAIS, J. A. R. S. **Crenças de autoeficácia matemática: um estudo com alunos do ensino fundamental e médio**. 2015. 124 f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência). Faculdade de Ciências, UNESP, Bauru, 2015.

MORON, C. F. **Um estudo exploratório sobre as concepções e as atitudes dos professores de Educação Infantil em relação à Matemática**. 1998. 148 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1998.

MUKAKA, M.M. Statistics Corner: A guide to appropriate use of Correlation coefficient in medical research. **Malawai Medical Journal**. v. 24, n. 3, pp. 69-71, 2012.

NACARATO, A. M.; MENGALI, B. L. S.; PASSOS, C. L. B. **A matemática nos anos iniciais do ensino fundamental: tecendo fios do ensinar e do aprender**. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

NCTM. National Council of Teachers of Mathematics. **Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar**. Lisboa: APM. 1991.

NCTM. National Council of Teachers of Mathematics. **Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar**. Lisboa: APM. 1985.

NCTM. National Council of Teachers of Mathematics. **Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar**. Lisboa: APM. 2000.

NEVES, L. F. **Um Estudo sobre as relações entre a percepção e as expectativas dos professores de dos Alunos e o Desempenho em Matemática**. Dissertação (Mestrado em Educação). 2002. 150 f. Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas. Campinas. 2002.

NOSWORTHY, N.; BUGDEN, S.; ARCHIBALD, L.; EVANS, B.; ANSARI, D. A two-minute paper-and-pencil test of symbolic and nonsymbolic numerical magnitude processing explains variability in primary school children's arithmetic competence. 2013. **Plos One**, v. 8, n. 7, pp. 1-12.

NUNES, T.; CARRAHER, D.; SCHLIEMANN, A. D. **Na vida dez, na escola zero**. São Paulo: Editora Cortez, 1988.

OLIVEIRA, N. M. F. **Desenvolver o cálculo mental no contexto da resolução de problemas de adição e subtração**: um estudo com alunos do 2.º ano de escolaridade. 2013. 153f. Dissertação (Mestrado em Educação – Didática da Matemática). Instituto de Educação, Universidade de Lisboa. 2013.

OZGEN, K. Self-Efficacy beliefs in mathematical literacy and connections between Mathematics and real world: The Case Of High School Students. In: **Journal of International Education Research** – Fourth Quarter. v. 9, n. 4, pp. 305-316. 2013.

PAJARES, F.; MILLER, M. D. The role of self-efficacy and self-concept beliefs in mathematical problem-solving. A path analysis. In: **Journal of Educational Psychology**. v. 86, pp. 193-203. 1994.

PAJARES, F.; OLAZ, F. Teoria Social Cognitiva e auto-eficácia: uma visão geral. In: BANDURA, A.; AZZI, R. G.; POLYDORO, S. **Teoria Social Cognitiva: Conceitos Básicos**. Porto Alegre: Artmed, 2008. p. 97-114.

PAULA, K. C. M. **A família, o desenvolvimento das atitudes em relação à Matemática e a crença de auto-eficácia**. 2008. 186 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas. Campinas. 2008.

PINHEIRO, A. C. ; PIROLA, N. A. O uso das TIC no ensino de Matemática: uma investigação sobre as crenças de autoeficácia. In: **XIII Encontro Paulista de Educação Matemática**, 2017, São Paulo. Anais do XIII EPEM, 2017. v. 1.

PIROLA, N. A.; SANDER, G. P.; TORTORA, E. Formação inicial de professores que ensinam Matemática na Educação Básica e as atitudes em relação a essa disciplina. In: CIRÍACO, K. T.; BEZERRA, G. F. (Orgs.). **Educação Básica, formação de professores e inclusão**: práticas e processos educacionais em diferentes cenários. 1ed. Curitiba: CRV. 2013.p. 23-33.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. In: GTI (Ed.), **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, 2005. p. 11-34.

POWELL, S. R.; FUNCHS, L. S. Early Numerical Competencies and Students with Mathematics Difficulty. **Focus Except Child**. v. 44, n. 5, pp. 1-16. 2012.

RATHGEB-SCHNIERER, E.; GREEN, M. Cognitive flexibility and reasoning patterns in american and german elementary students when sorting addition and subtraction problems. In: **Ninth Congress of European Research in Mathematics Education**. Czech Republic. 2015.

RESNICK, L. Defining, assessing and teaching number sense. In: Sowder, J.; SCHAPPELLE, B. (Ed.), **Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference**. San Diego: San Diego State University, Center for Research in Mathematics and Science Education. 1989. pp. 35-39.

ROCHA, I., MENINO, H. A aprendizagem da divisão nos primeiros anos, perspectivas metodológicas e curriculares. **O sentido do número: Reflexões que entrecruzam teoria e prática**. Lisboa: Escolar Editora. pp. 135-157. 2008.

REYS, B. Conference on Number Sense: Reflections. In: SOWDER, J.; SCHAPPELLE, B. (Ed.), **Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference**, San Diego, California: San Diego State University, Center for Research in Mathematics and Science Education. 1989. p. 70-72.

REYS, R. Some Personal Reflections on the Conference on Number Sense, Mental Computation, and Estimation. In: SOWDER, J.; SCHAPPELLE, B. (Ed.), **Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference**, San Diego, California: San Diego State University, Center for Research in Mathematics and Science Education. 1989. p. 65-66.

REYS, R. E.; YANG, D. C. Relationship between computational performance and number sense among sixth- and eighth-grade students in Taiwan. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 29, n. 2, pp. 225-237. 1998.

ROSÁRIO P.; BALDAQUE M., Mourão R., NUÑEZ C., GONZÁLEZ-PIENDA, P., VALLE A., JOLY, C. Trabalho de casa, auto-eficácia e rendimento escolar. **Revista Semestral da Associação Brasileira de Psicologia Escolar e Educacional (ABRAPEE)** v. 12, n. 1, jan./Jun. 2008, p. 23-35.

SANDER, G. P. **Um estudo sobre resolução de problemas e suas relações com a afetividade**. 2010. 170 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Faculdade de Ciências, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Bauru, 2010.

SANDER, G. P. **Pró-letramento: um estudo sobre a resolução de problemas e as atitudes em relação à Matemática apresentadas por professores do primeiro ciclo do Ensino Fundamental**. 2015. 216 f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência) – Faculdade de Ciências, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Bauru, 2015.

SANDER, G. P.; PIROLA, N. A. Um estudo sobre o trabalho com resolução de problemas após um curso de formação continuada em Matemática com professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental. **Revista Internacional de Aprendizaje en Ciencia, Matemáticas y Tecnología**, v. 1, p. 1-12, 2015.

SERRAZINA, L.; RODRIGUES, M. A. Tarefa como instrumento de desenvolvimento da flexibilidade de cálculo. In: *Investigação em Educação Matemática: Tarefas Matemáticas*, 2014, Sesimbra. **EIEM 2014**. Sesimbra: Hotel do Mar, 2014. p. 109-120.

SILVER, E. A. On Making Sense of Number Sense. In: SOWDER, J.; SCHAPPELLE, B. (Ed.), **Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference**, San Diego, Califórnia: San Diego State University, Center for Research in Mathematics and Science Education. 1989. p. 92-96.

SCHOEN, H. L. Reaction to the Conference on Number Sense. In: SOWDER, J.; SCHAPPELLE, B. (Ed.), **Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference**, San Diego, California: San Diego State University, Center for Research in Mathematics and Science Education. 1989. p. 67-69.

SMITH, M. S.; HUGHES, E. K.; ENGLE, R. A.; STEIN, M. K. Orchestrating discussions. **Mathematics Teaching in the Middle School**, v. 14, n. 9, pp. 549-556. 2009.

SOUZA, L. F. N. I. **Auto-regulação da aprendizagem e a matemática escolar**. 2007. 202 f. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas. Campinas. 2007.

SOUZA, L. F. N. I.; BRITO, M. R. F. Crenças de auto-eficácia, autoconceito e desempenho em matemática. **Estudos de Psicologia**, Campinas, v. 25, n. 2, pp. 193-201, 2008.

SOWDER, J. Introduction. In: SOWDER, J.; SCHAPPELLE, B. (Ed.), **Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference**, San Diego, California: San Diego State University, Center for Research in Mathematics and Science Education. 1989. p. 67-69.

SOWDER, J.; SCHAPPELLE, B. (Ed.), **Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference**, San Diego, California: San Diego State University, Center for Research in Mathematics and Science Education. 1989.

SOWDER, J.; SCHAPPELLE, B. Number sense-making. **Arithmetic Teacher**, v. 41, n. 6, pp. 342-345. 1994.

SOWDER, J. Mental computation and number comparison: their roles in the development of number sense and computational estimation. In: HIEBERT, J.; BEHR, M. J. (Ed.) **Number concepts and operations in the middle grades**. Lawrence Erlbaum Associates, v. 2, pp. 182-197, 1988.

SPINILLO, A. G.; QUEIROZ, T. V.; DUARTE, I. V. Sentido numérico em crianças: o efeito das operações sobre os números. In: Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2, 2008, Recife. **Anais do 2.ª SIPEMAT**. Recife: Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2008. 1-7.

SPINILLO, A. G. Sentido de número na Educação Matemática. In: Ministério da Educação. **Pacto nacional pela alfabetização na idade certa: Quantificação, registros e agrupamentos**. Brasília: MEC – SEB. 2014.

SPINILLO, A. G.; MARTINS, R. M. F. B. Os Princípios Invariantes da Noção de Medida Investigados a partir da Perspectiva de Sentido Numérico. **Temas em Psicologia**, v. 23, n. 1, pp. 97-109. 2015.

STEIN, M. K.; ENGLE, R. A.; SMITH, M. S.; HUGHES, E. K. Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. **Mathematical Thinking and Learning**, v. 10, n. 4, pp. 313-340. 2008.

THRELFALL, J. Are mental calculation strategies really strategies? In: BILLS, L. (Ed.) **Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics**. v. 18, n. 3, pp. 71-76. 1998.

TORRES, D. I. P. **Estratégias de aprendizagem e auto-eficácia acadêmica: contributos para a explicação do rendimento em Língua Portuguesa e em Matemática**. 2010. 87 f. Dissertação (Mestrado em Psicologia da Educação e Intervenção Comunitária). Faculdade de Ciências Sociais e Humanas, Universidade Fernando Pessoa. Porto. 2010.

TRAFTON, P. Reflections on the Number Sense Conference. In: SOWDER, J.; SCHAPPELLE, B. (Ed.), **Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference**, San Diego, California: San Diego State University, Center for Research in Mathematics and Science Education. 1989. p. 74-77.

TREFFERS, A., BUYS, K. Grade 2 (and 3) – calculation up to 100. In: HEUVEL-PANHUIZEN, M.; BUYS, K.; TREFFERS, A. (Ed.), **Children learning Mathematics: A learning-Teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school**. Holanda: Sense publishers. 2008. p. 61-88.

TREFFERS, A., NOOTEBOOM A., GOEIJ E. Column calculation and algorithms. In In: HEUVEL-PANHUIZEN, M.; BUYS, K.; TREFFERS, A. (Ed.), **Children learning Mathematics: A learning-Teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school**. Holanda: Sense publishers. 2008. p. 147-172.

THOMPSON, I. Getting your head around mental calculation. In: THOMPSON, I. (Ed.) **Issues in teaching numeracy in primary schools, 2nd edn**. pp. 161-173. Maidenhead: Open University Press, 2010.

ULUSOY, Ç. A.; ŞAHINER, Y. Sayı Duyusuna Yönelik Özyeterlik Ölçeği' nin Geliştirilmesi. **Eğitim Dergisi**, Kastamonu, v. 25, n. 1, p. 17-32, 2017.

YANG, D. C. Teaching and learning number sense - an intervention study of fifth grade students in Taiwan. **International Journal of Science and Mathematics Education**, v. 1, n. 1, pp. 115-134. 2003.

YANG, D. C.; HSU, C. J.; HUANG, M. C. A study of teaching and learning number sense for sixth grade students in Taiwan. **International Journal of Science and Mathematics Education**, v. 2, pp. 407-430, 2004.

YANG, D. C.; LI, M. F.; LI, W. J. Development of a computerized number sense scale for 3-rd graders: reliability and validity analysis. **International Electronic Journal of Mathematics Education**, v. 3, n. 2, pp. 110-124, 2008.

YANG, D. C.; LI, M. F. An investigation of 3rd-grade Taiwanese students' performance in number sense. **Educational Studies**, v. 34, n. 5, pp. 443-455, 2008.

ZANZALI, N. A. A.; GHAZALI, M. Assessment of school children's number sense. **Paper presented at the meeting of the International Conference on Mathematics Education into the 21st Century: Societal Challenges, Issues and Approaches**. Cairo, Egypt. 1999.

ZARCH, M. K.; KADIVAR, P. The Role of Mathematics self-efficacy and Mathematics ability in the structural model of Mathematics performance. In: **Proceedings of the 9th WSEAS International Conference on Applied Mathematics**, Istanbul, Turkey, May 27-29, pp. 242-249. 2006.

APÊNDICES

APÊNDICE I: TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO
PARA OS PAIS DOS ALUNOS

IDENTIFICAÇÃO DA PESQUISA DE DOUTORADO	
Pesquisa: Um estudo sobre a relação entre a autoeficácia na resolução de tarefas numéricas e o sentido de número de alunos do ciclo de alfabetização	
Orientador de Projeto: Prof. Dr. Nelson Antonio Pirola Co-orientadora: Profa. Dra. Joana Brocardo	Instituição / Departamento: UNESP/Bauru – Departamento de Educação
Telefone: (14) 31036081	Endereço Eletrônico: npirola@uol.com.br
Participante responsável: Giovana Pereira Sander	Instituição / Departamento: UNESP/Bauru – Departamento de Educação
Telefone: (14) 99903-9183	Endereço Eletrônico: giovanapsander@gmail.com
<p>Justificativa: O sentido de número surge por conta da necessidade em se mudar o foco da matemática escolar do ensino dos números centrado em cálculos algorítmicos para o ensino dos números e operações com compreensão. Desenvolver sentido de número pode contribuir com a crença da criança em sua própria capacidade e em seu conhecimento sobre Matemática.</p>	
<p>Objetivo: O presente trabalho tem por objetivo analisar e compreender a relação entre a percepção sobre a autoeficácia na resolução de tarefas numéricas e o sentido de número dos alunos do Ciclo de Alfabetização.</p>	
<p>Metodologia: Serão aplicados um questionário informativo, uma escala de crença de autoeficácia em tarefas numéricas e tarefas numéricas. O questionário informativo irá caracterizar os alunos em termos de idade, gênero, bem como sua percepção de desempenho e afetividade em Matemática de forma geral. A escala de crença de autoeficácia em tarefas numéricas contém 7 tarefas que abordam o conhecimento e destreza com números, operações e situações de cálculo e em cada tarefa os alunos deverão responder se acreditam que conseguem resolvê-la. Já as tarefas numéricas contêm as tarefas presentes na escala de crença de autoeficácia com a finalidade de serem resolvidas.</p>	
<p>Outras informações: As identificações dos alunos serão mantidas em sigilo, estando apenas presente na publicação deste trabalho, os resultados obtidos nesta pesquisa.</p>	

APÊNDICE II: TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO
PARA OS PAIS DOS ALUNOS

IDENTIFICAÇÃO DO VOLUNTÁRIO
Nome do responsável:
RG:
Nome do aluno:
<p>Declaro ter sido informado(a) de maneira clara e detalhada sobre as justificativas, os objetivos e a metodologia da pesquisa de Doutorado “Um estudo sobre a relação entre a autoeficácia na resolução de tarefas numéricas e o sentido de número de alunos do ciclo de alfabetização”, bem como as atividades envolvidas. Estou ciente de que a privacidade de meu filho(a) será respeitada, ou seja, seu nome ou qualquer outro dado ou elemento que possa, de qualquer forma, lhe identificar serão mantidos em sigilo.</p> <p>Estou ciente de que posso recusar a participação de meu filho(a), retirar meu consentimento ou interromper sua participação a qualquer momento, sem precisar justificar.</p> <p>Estou ciente de que a participação é voluntária e a recusa em participar não irá acarretar qualquer penalidade. Tenho ciência também de que os dados oriundos da pesquisa poderão ser publicados, mantendo-se a identificação do meu filho(a) em sigilo.</p> <p>A realização da pesquisa não oferecerá riscos ao participante. A aplicação dos instrumentos será feita durante o período de aulas, com prévia autorização da escola e do professor responsável pela turma, acarretando prejuízos mínimos à rotina escolar dos alunos.</p> <p>Estou ciente de que meu filho(a) não será identificado(a) em nenhuma publicação, palestra, curso, etc., que possam resultar deste trabalho.</p> <p>Declaro que concordo com a participação de meu filho(a), como voluntário(a), da pesquisa acima descrita.</p> <p>Recebi uma cópia deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido e me foi dada a oportunidade de ler e esclarecer as minhas dúvidas.</p> <p align="right">Bauru, __/__/____</p> <p align="right">_____</p> <p align="right">Assinatura</p>

APÊNDICE III: TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO
PARA OS ALUNOS

IDENTIFICAÇÃO DO VOLUNTÁRIO
Nome do participante:
Responsável:
RG:
<p>Você está sendo convidado(a) como voluntário(a) a participar da pesquisa “Um estudo sobre a relação entre a autoeficácia na resolução de tarefas numéricas e o sentido de número de alunos do ciclo de alfabetização”. Seus pais permitiram que você participe e poderão retirar o consentimento ou interromper a sua participação a qualquer momento. Você não precisa participar da pesquisa se não quiser, é um direito seu, não terá nenhum problema se desistir. Você pode dizer “sim” e participar e, a qualquer momento, pode dizer “não” e desistir que ninguém vai ficar furioso. Ninguém saberá que você está participando da pesquisa, não falaremos a outras pessoas, nem daremos a estranhos as informações que você nos der. Os resultados da pesquisa vão ser publicados, mas sem identificar as crianças que participaram da pesquisa.</p> <p>A realização da pesquisa não oferecerá riscos a você. Você não terá nenhum custo, nem receberá qualquer vantagem financeira.</p> <p>A aplicação dos instrumentos será feita durante o período de aulas, com prévia autorização da escola e do professor responsável pela turma, acarretando prejuízos mínimos à rotina escolar.</p> <p>Declaro que fui informado(a) dos objetivos da presente pesquisa, de maneira clara e detalhada e esclareci minhas dúvidas.</p> <p>Tendo o consentimento do meu responsável já assinado, declaro que concordo em participar dessa pesquisa. Recebi o termo de assentimento e me foi dada a oportunidade de ler e esclarecer as minhas dúvidas.</p> <p style="text-align: right; margin-right: 100px;">Bauru, __/__/____</p> <p style="text-align: center; margin-top: 20px;">_____</p> <p style="text-align: right; margin-right: 50px;">Assinatura</p>

APÊNDICE IV: TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO
PARA AS ESCOLAS

IDENTIFICAÇÃO DA PESQUISA DE DOUTORADO	
Pesquisa: Um estudo sobre a relação entre a autoeficácia na resolução de tarefas numéricas e o sentido de número de alunos do ciclo de alfabetização	
Orientador de Projeto: Prof. Dr. Nelson Antonio Pirola Co-orientadora: Profa. Dra. Joana Brocardo	Instituição / Departamento: UNESP/Bauru – Departamento de Educação
Telefone: (14) 31036081	Endereço Eletrônico: npirola@uol.com.br
Participante responsável: Giovana Pereira Sander	Instituição / Departamento: UNESP/Bauru – Departamento de Educação
Telefone: (14) 99903-9183	Endereço Eletrônico: giovanapsander@gmail.com
<p>Justificativa: O sentido de número surge por conta da necessidade em se mudar o foco da matemática escolar do ensino dos números centrado em cálculos algorítmicos para o ensino dos números e operações com compreensão. Desenvolver sentido de número pode contribuir com a crença da criança em sua própria capacidade e em seu conhecimento sobre Matemática.</p>	
<p>Objetivo: O presente trabalho tem por objetivo analisar e compreender a relação entre a percepção sobre a autoeficácia na resolução de tarefas numéricas e o sentido de número dos alunos do Ciclo de Alfabetização.</p>	
<p>Metodologia: Serão aplicados um questionário informativo, uma escala de crença de autoeficácia em tarefas numéricas e tarefas numéricas. O questionário informativo irá caracterizar os alunos em termos de idade, gênero, bem como sua percepção de desempenho e afetividade em Matemática de forma geral. A escala de crença de autoeficácia em tarefas numéricas contém 7 tarefas que abordam o conhecimento e destreza com números, operações e situações de cálculo e em cada tarefa os alunos deverão responder se acreditam que conseguem resolvê-la. Já as tarefas numéricas contêm as tarefas presentes na escala de crença de autoeficácia com a finalidade de serem resolvidas.</p>	
<p>Outras informações: As identificações dos alunos serão mantidas em sigilo, estando apenas presente na publicação deste trabalho, os resultados obtidos nesta pesquisa.</p>	

APÊNDICE V: TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO
PARA AS ESCOLAS

IDENTIFICAÇÃO DO VOLUNTÁRIO
Nome do(a) diretor(a)/coordenador(a):
RG:
Nome da escola:
<p>Declaro ter sido informado(a) de maneira clara e detalhada sobre as justificativas, os objetivos e a metodologia da pesquisa de Doutorado “Um estudo sobre a relação entre a autoeficácia na resolução de tarefas numéricas e o sentido de número de alunos do ciclo de alfabetização”, bem como as atividades envolvidas. Estou ciente de que a privacidade dos alunos será respeitada, ou seja, seus nomes ou qualquer outro dado ou elemento que possa, de qualquer forma, lhes identificar serão mantidos em sigilo.</p> <p>Estou ciente de que posso recusar a participação dos alunos, retirar meu consentimento ou interromper suas participações a qualquer momento, sem precisar justificar.</p> <p>Estou ciente de que a participação é voluntária e a recusa em participar não irá acarretar qualquer penalidade. Tenho ciência também de que os dados oriundos da pesquisa poderão ser publicados, mantendo-se a identificação dos alunos em sigilo.</p> <p>A realização da pesquisa não oferecerá riscos aos participantes. A aplicação dos instrumentos será feita durante o período de aulas, com prévia autorização da escola e do professor responsável pela turma, acarretando prejuízos mínimos à rotina escolar dos alunos.</p> <p>Estou ciente de que os alunos não serão identificados em nenhuma publicação, palestra, curso, etc., que possam resultar deste trabalho.</p> <p>Declaro que concordo com a participação dos alunos, como voluntários(as), da pesquisa acima descrita.</p> <p>Recebi uma cópia deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido e me foi dada a oportunidade de ler e esclarecer as minhas dúvidas.</p> <p style="text-align: right; margin-right: 100px;">Bauru, __/__/____</p> <hr style="width: 50%; margin-left: auto; margin-right: 0;"/> <p style="text-align: right; margin-right: 50px;">Assinatura</p>

APÊNDICE VI: QUESTIONÁRIO

Prezado aluno:

Solicitamos a sua colaboração no sentido de responder a este material. É muito importante que você responda da maneira mais sincera possível.

Desde já agradecemos a sua valiosa colaboração.

Nome: _____

Idade: _____ Gênero: () M () F

Nas perguntas abaixo, escolha a alternativa que mais se aproxime de sua realidade:

1 – Qual a matéria que você mais gosta? (apenas uma) _____

2 – Qual a matéria que você menos gosta? (apenas uma) _____

3 - Em matemática, este ano, eu acredito que estou me saindo:

1 - () Muito bem.

2 - () Bem.

3 - () Regular.

4 - () Mal.

5 - () Muito mal.

4 - Eu aprendo matemática:

1 - () Fácil e rapidamente, sem nenhum esforço.

2 - () Facilmente, gastando um pouco de tempo e de esforço

3 - () Dificilmente, gastando tempo e esforço.

4 - () Não consigo aprender matemática

5 - Quando o professor dá uma explicação de matemática:

1 - () Eu sempre entendo as explicações do professor.

2 - () Na maioria das vezes eu entendo as explicações do professor.

3 - () Poucas vezes eu entendo as explicações do professor.

4 - () Eu nunca entendo as explicações do professor.

6 – Você consegue entender os problemas matemáticos dados em sala de aula?

1 – () Sim, sempre entendo os problemas dados em aula

2 – () Não, nunca entendo os problemas dados em aula

3 – () Quase sempre entendo os problemas dados em aula

4 – () Quase nunca entendo os problemas dados em aula

7 – Em casa, você recebe ajuda quando estuda Matemática ou quando faz suas tarefas de Matemática?

() Sim () Não

8 – Em caso afirmativo, assinale quem ajuda nas tarefas de Matemática:

1 – () Somente o pai

2 – () Somente a mãe

3 – () Somente os irmãos

4 – () Tanto o pai como a mãe

5 – () É ajudado(a) por todas as pessoas da casa

6 – () Outras pessoas da família (por exemplo: tios, primos)

7 – () É ajudado(a) por outros (por exemplo: colegas, vizinhos, amigos)

9 – Suas notas de Matemática geralmente são:

1 – () Acima da nota da maioria da classe

2 – () Iguais à nota da maioria da classe

3 – () Menores que a nota da maioria da classe

10 – Dentre os conteúdos em Matemática que você já estudou, qual você mais gostou?

Por quê? _____

11 – Dentre os conteúdos em Matemática que você já estudou, qual você menos gostou?





Por quê? _____

APÊNDICE VII: ESCALA DE CRENÇA DE AUTOEFICÁCIA EM TAREFAS NUMÉRICAS

Nome: _____

Em seguida, você irá ler uma lista com várias tarefas de Matemática.

Por favor, **sem tentar resolver**, indique o quanto você acredita que poderá resolver essas tarefas com sucesso.

			
NÃO POSSO RESOLVER NADA	POSSO RESOLVER COM MUITA AJUDA	POSSO RESOLVER COM POUCA AJUDA	POSSO RESOLVER TOTALMENTE

Mega-Sena

JOÃO ESTAVA ASSISTINDO A UM SORTEIO DA MEGA-SENA NA TELEVISÃO E SAÍRAM OS SEGUINTE NÚMEROS:

(34) (60) (04) (31) (43) (16)

OS NÚMEROS SORTEADOS FORAM MOSTRADOS NA TELA EM ORDEM CRESCENTE. ESCREVA ESSES NÚMEROS NOS CÍRCULOS ABAIXO NA ORDEM EM QUE FORAM APRESENTADOS.

○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○

VOCÊ ACHA QUE CONSEGUE RESOLVER ESSA TAREFA? (PINTE A CARINHA QUE MOSTRA O QUANTO VOCÊ SE SENTE CONFIANTE PARA RESOLVÊ-LA).










Quantos dias você já viveu?

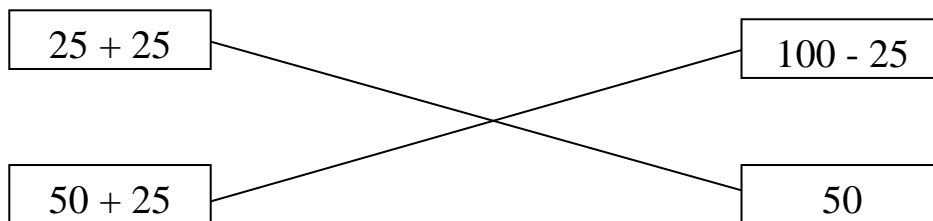
JOÃO TEM DOIS ANOS DE IDADE. ELE JÁ VIVEU MAIS QUE 400 DIAS? EXPLIQUE COMO PENSOU.

VOCÊ ACHA QUE CONSEGUE RESOLVER ESSA TAREFA? (PINTE A CARINHA QUE MOSTRA O QUANTO VOCÊ SE SENTE CONFIANTE PARA RESOLVÊ-LA).

Ligue as representações

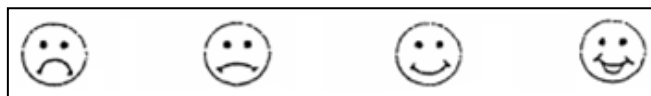
MARIA OLHOU PARA AS SEGUINTE REPRESENTAÇÕES NUMÉRICAS E LIGOU AS QUE REPRESENTAVAM O MESMO NÚMERO, COMO MOSTRA A FIGURA ABAIXO:



OLHE AGORA PARA AS SEGUINTE REPRESENTAÇÕES E LIGUE AS QUE REPRESENTAM OS MESMOS NÚMEROS:



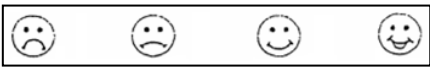
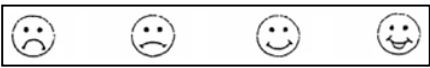


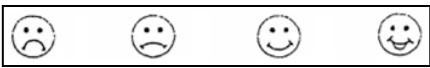
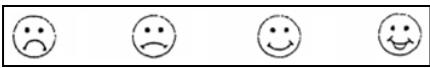
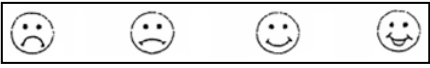
VOCÊ ACHA QUE CONSEGUE RESOLVER ESSA TAREFA? (PINTE A CARINHA QUE MOSTRA O QUANTO VOCÊ SE SENTE CONFIANTE PARA RESOLVÊ-LA).



Resolva as expressões

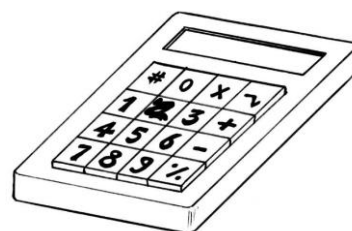
RESOLVA DE DUAS MANEIRAS DIFERENTES AS SEGUINTE EXPRESSÕES:

(PINTE A CARINHA QUE MOSTRA O QUANTO VOCÊ SE SENTE CONFIANTE PARA RESOLVÊ-LA).

a) $27 + 26$ 	b) $72 - 14$ 
c) 52×2 	d) 25×10 
e) 25×12 	f) $25 \div 5$ 
g) $60 \div 2$ 	

Calculadora quebrada

ANA PRECISA CALCULAR 25×5 , MAS A TECLA DO NÚMERO 2 DE SUA CALCULADORA ESTÁ QUEBRADA. COMO ELA PODE FAZER ESSA OPERAÇÃO COM ESSA CALCULADORA?

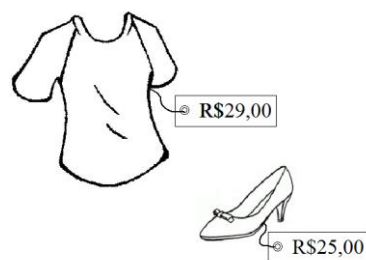


VOCÊ ACHA QUE CONSEGUE RESOLVER ESSA TAREFA? (PINTE A CARINHA QUE MOSTRA O QUANTO VOCÊ SE SENTE CONFIANTE PARA RESOLVÊ-LA).



A compra de Marisa

MARISA QUER COMPRAR ESTA CAMISETA E ESTE SAPATO PARA DAR A SUA IRMÃ DE PRESENTE DE ANIVERSÁRIO E TEM APENAS 50 REAIS NA CARTEIRA. MARISA TEM DINHEIRO SUFICIENTE PARA COMPRAR A CAMISETA E O SAPATO? POR QUÊ?



VOCÊ ACHA QUE CONSEGUE RESOLVER ESSA TAREFA? (PINTE A CARINHA QUE MOSTRA O QUANTO VOCÊ SE SENTE CONFIANTE PARA RESOLVÊ-LA).

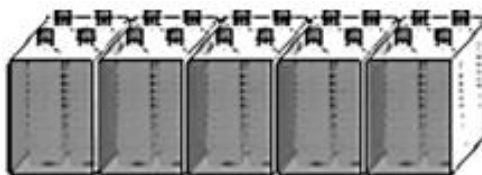


O campeonato esportivo

NO CAMPEONATO ESPORTIVO DA CIDADE DE BAURU, FORAM REALIZADOS JOGOS DE DIFERENTES MODALIDADES. A ORGANIZAÇÃO DO EVENTO DISPONIBILIZOU, AOS ATLETAS, EMBALAGENS COM DOZE GARRAFAS DE ÁGUA CADA, COMO A DA FIGURA.



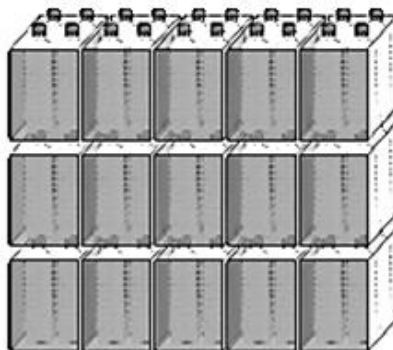
1. AOS JOGADORES DE TÊNIS FORAM OFERECIDAS AS EMBALAGENS REPRESENTADAS NA FIGURA ABAIXO. QUANTAS GARRAFAS DE ÁGUA LHEIS FORAM OFERECIDAS? EXPLIQUE COMO PENSOU.



VOCÊ ACHA QUE CONSEGUE RESOLVER ESSA TAREFA? (PINTE A CARINHA QUE MOSTRA O QUANTO VOCÊ SE SENTE CONFIANTE PARA RESOLVÊ-LA).



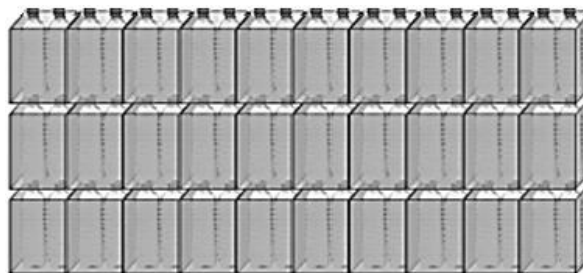
2. AOS JOGADORES DE FUTEBOL FORAM OFERECIDAS AS EMBALAGENS DE GARRAFAS DE ÁGUA REPRESENTADAS NA FIGURA SEGUINTE. QUANTAS GARRAFAS DE ÁGUA LHE FORAM OFERECIDAS? EXPLIQUE COMO PENSOU.



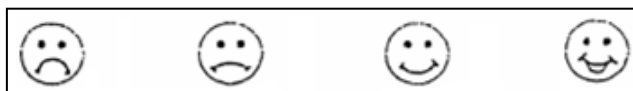
VOCÊ ACHA QUE CONSEGUE RESOLVER ESSA TAREFA? (PINTE A CARINHA QUE MOSTRA O QUANTO VOCÊ SE SENTE CONFIANTE PARA RESOLVÊ-LA).



3. COMO SE ESGOTARAM AS EMBALAGENS DE 12 GARRAFAS, A ÁGUA OFERECIDA AOS JOGADORES DE XADREZ VEIO EM EMBALAGENS DE 6 GARRAFAS. A ELES FORAM OFERECIDAS 30 EMBALAGENS. QUANTAS GARRAFAS DE ÁGUA LHE FORAM OFERECIDAS? EXPLIQUE COMO PENSOU.



VOCÊ ACHA QUE CONSEGUE RESOLVER ESSA TAREFA? (PINTE A CARINHA QUE MOSTRA O QUANTO VOCÊ SE SENTE CONFIANTE PARA RESOLVÊ-LA).



APÊNDICE VIII: TAREFAS NUMÉRICAS

Nome: _____

Resolva as tarefas a seguir.

Mega-Sena

JOÃO ESTAVA ASSISTINDO A UM SORTEIO DA MEGA-SENA NA TELEVISÃO E SAÍRAM OS SEGUINTE NÚMEROS:

(34) (60) (04) (31) (43) (16)

OS NÚMEROS SORTEADOS FORAM MOSTRADOS NA TELA EM ORDEM CRESCENTE. ESCREVA ESSES NÚMEROS NOS CÍRCULOS ABAIXO NA ORDEM EM QUE FORAM APRESENTADOS.

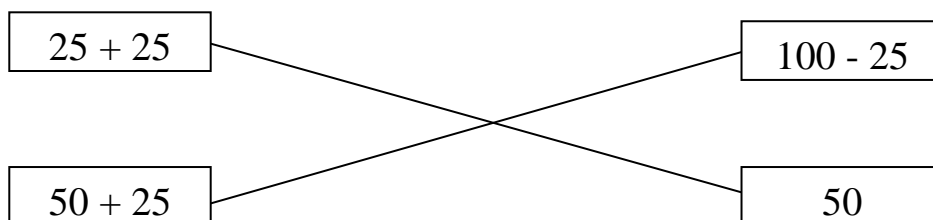
○	○	○	○	○	○
---	---	---	---	---	---

Quantos dias você já viveu?

JOÃO TEM DOIS ANOS DE IDADE. ELE JÁ VIVEU MAIS QUE 400 DIAS? EXPLIQUE COMO PENSOU.

Ligue as representações

MARIA OLHOU PARA AS SEGUINTE REPRESENTAÇÕES NUMÉRICAS E LIGOU AS QUE REPRESENTAVAM O MESMO NÚMERO, COMO MOSTRA A FIGURA ABAIXO:



OLHE AGORA PARA AS SEGUINTE REPRESENTAÇÕES E LIGUE AS QUE REPRESENTAM OS MESMOS NÚMEROS:



Resolva as expressões

RESOLVA DE DUAS MANEIRAS DIFERENTES AS SEGUINTE EXPRESSÕES:

$27 + 26$	
-----------	--

 $72 - 14$

 52×2

 25×10

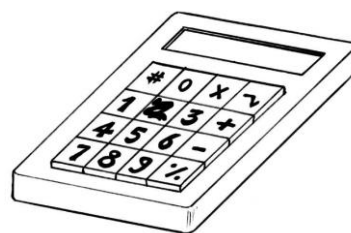
 25×12

 $25 \div 5$

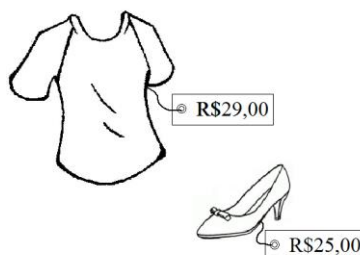
 $60 \div 2$

Calculadora quebrada

ANA PRECISA CALCULAR 25×5 , MAS A TECLA DO NÚMERO 2 DE SUA CALCULADORA ESTÁ QUEBRADA. COMO ELA PODE FAZER ESSA OPERAÇÃO COM ESSA CALCULADORA?

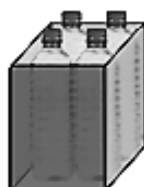
**A compra de Marisa**

MARISA QUER COMPRAR ESTA CAMISETA E ESTE SAPATO PARA DAR A SUA IRMÃ DE PRESENTE DE ANIVERSÁRIO E TEM APENAS 50 REAIS NA CARTEIRA. MARISA TEM DINHEIRO SUFICIENTE PARA COMPRAR A CAMISETA E O SAPATO? POR QUÊ?

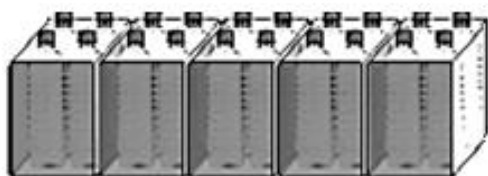


O campeonato esportivo

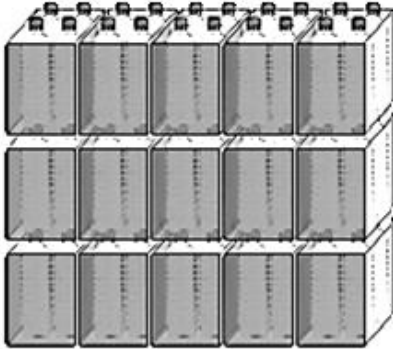
NO CAMPEONATO ESPORTIVO DA CIDADE DE BAURU, FORAM REALIZADOS JOGOS DE DIFERENTES MODALIDADES. A ORGANIZAÇÃO DO EVENTO DISPONIBILIZOU, AOS ATLETAS, EMBALAGENS COM QUATRO GARRAFAS DE ÁGUA CADA, COMO A DA FIGURA.



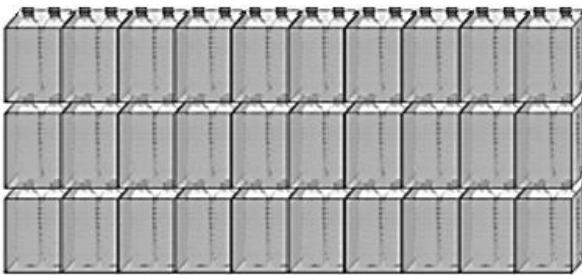
1. AOS JOGADORES DE TÊNIS FORAM OFERECIDAS AS EMBALAGENS REPRESENTADAS NA FIGURA ABAIXO. QUANTAS GARRAFAS DE ÁGUA LHEAS FORAM OFERECIDAS? EXPLIQUE COMO PENSOU.



2. AOS JOGADORES DE FUTEBOL FORAM OFERECIDAS AS EMBALAGENS DE GARRAFAS DE ÁGUA REPRESENTADAS NA FIGURA SEGUINTE. QUANTAS GARRAFAS DE ÁGUA LHES FORAM OFERECIDAS? EXPLIQUE COMO PENSOU.



3. COMO SE ESGOTARAM AS EMBALAGENS DE 4 GARRAFAS, A ÁGUA OFERECIDA AOS JOGADORES DE XADREZ VEIO EM EMBALAGENS DE 2 GARRAFAS. A ELES FORAM OFERECIDAS 30 EMBALAGENS. QUANTAS GARRAFAS DE ÁGUA LHES FORAM OFERECIDAS? EXPLIQUE COMO PENSOU.



APÊNDICE IX: TABELAS PROVENIENTES DAS TAREFAS NUMÉRICAS

Mega-Sena

Tabela 43 – Distribuição dos alunos referentes às respostas e aos procedimentos utilizados na tarefa Mega-Sena

	RESPOSTA		PROCEDIMENTO		
	N.	%	N.	%	
Certo	203	57,83	Ordem crescente	203	57,83
Errado	147	41,88	Ordem decrescente	90	25,64
			Ordem aleatória	57	16,24
Em branco	1	0,28	Em branco	1	0,28
Total	351	100	Total	351	100

Fonte: Autoria própria

Ligue as representações

Tabela 44 – Distribuição dos alunos referentes às respostas apresentadas na tarefa Ligue as representações

RESPOSTA	N.	%
Acertou tudo	257	73,22
Acertou duas	1	0,28
Acertou uma	64	18,23
Errou tudo	18	5,13
Em branco	11	3,13
Total	351	100

Fonte: Autoria própria

Quantos dias João já viveu?

Tabela 45 – Distribuição dos alunos referentes às respostas apresentadas na tarefa Quantos dias João já viveu?

RESPOSTA	N.	%
Acertou tudo	46	13,11
Errou resposta/acertou explicação	2	0,57
Acertou resposta/errou explicação	26	7,41
Acertou resposta/não explicou	56	15,95
Errou tudo	175	49,86
Em branco	46	13,11
Total	351	100

Fonte: Autoria própria

Tabela 46 – Distribuição dos alunos referentes ao método e procedimento utilizados na tarefa Quantos dias João já viveu?

	MÉTODO		PROCEDIMENTO		
	N.	%	N.	%	
Algoritmo	70	19,94	Iterado	70	19,94
Cálculo mental	1	0,28	Decomposição	0	0
			Salto	0	0
			Variada	1	0,28
Estimativa	29	8,26	Por aproximação	29	8,26
Resposta não matemática	105	29,91	Inferências pessoais	105	29,91
Outro	100	28,49	Outro	100	28,49
Em branco	46	13,11	Em branco	46	13,11
Total	351	100	Total	351	100

Fonte: Autoria própria

Tabela 47 – Distribuição dos alunos referentes às adaptações utilizadas na tarefa Quantos dias João já viveu?

ADAPTAÇÕES	N.	%
Sem	150	42,74
Uso de fatos conhecidos	25	7,12
Somar quantidade de dias dos meses	6	1,71
Calcular valores do enunciado	27	7,69
Outro	97	27,64
Em branco	46	13,11
Total	351	100

Fonte: Autoria própria

Resolva as expressões

Tabela 48 – Distribuição dos alunos referentes às respostas utilizadas na tarefa Resolva as expressões no item 27+26

RESPOSTA	N.	%
Resolve de duas maneiras diferentes	51	14,53
Resolve de uma maneira	102	29,06
Resolve de duas maneiras, mas não são diferentes	101	28,77
Não resolve	73	20,80
Em branco	24	6,84
Total	351	100

Fonte: Autoria própria

Tabela 49 – Distribuição dos alunos referentes aos métodos utilizados na tarefa Resolva as expressões no item 27+26

MÉTODO	Cálculo 1		Cálculo 2	
	N.	%	N.	%
Algoritmo	301	85,75	146	41,60
Cálculo mental	15	4,27	47	13,39
Outro	11	3,13	33	9,40
Em branco	24	6,84	125	35,61
Total	351	100	351	100

Fonte: Autoria própria

Tabela 50 – Distribuição dos alunos referentes aos procedimentos utilizados na tarefa Resolva as expressões no item 27+26

PROCEDIMENTO	Cálculo 1		Cálculo 2	
	N.	%	N.	%
Iterado	301	85,75	146	41,60
Decomposição	6	1,71	20	5,70
Salto	0	0	0	0
Variada	3	0,85	4	1,14
Outro	16	4,56	55	15,67
Em branco	24	6,84	125	35,61
Total	351	100	351	100

Fonte: Autoria própria

Tabela 51 – Distribuição dos alunos referentes às adaptações utilizadas na tarefa Resolva as expressões no item 27+26

ADAPTAÇÕES	Cálculo 1		Cálculo 2	
	N.	%	N.	%
Sem	300	85,47	11	3,13
Encurtar, por decomposição de um termo num múltiplo de 10 e o resto	0	0	0	0
Decompor/recompor com fatos, tirando partido da estrutura dobro/metade, decomposição de 50 e decomposições de números com dois dígitos em 50 + ...	0	0	0	0
Compensação	3	0,85	5	1,42
Alterar a ordem dos termos	0	0	52	14,81
Representação na horizontal	1	0,28	57	16,24
Mudar termos e/ou operação para chegar ao resultado obtido anteriormente	0	0	16	4,56
Fazer a prova real	0	0	6	1,71
Encurtar, por decomposição dos termos num múltiplo de 10 e o resto	7	1,99	20	5,70
Representar de forma pictórica	5	1,42	24	6,84
Inverter algarismo para subtrair o menor do maior	0	0	0	0
Outro	11	3,13	35	9,97
Em branco	24	6,84	125	35,61
Total	351	100	351	100

Fonte: Autoria própria

Tabela 52 – Distribuição dos alunos referentes às respostas apresentadas na tarefa Resolva as expressões no item 72 – 14

RESPOSTA	N.	%
Resolve de duas maneiras diferentes	13	3,70
Resolve de uma maneira	115	32,76
Resolve de duas maneiras, mas não são diferentes	39	11,11
Não resolve	142	40,46
Em branco	42	11,97
Total	351	100

Fonte: Autoria própria

Tabela 53 – Distribuição dos alunos referentes aos métodos utilizados na tarefa Resolva as expressões no item 72 – 14

MÉTODO	Cálculo 1		Cálculo 2	
	N.	%	N.	%
Algoritmo	274	78,06	123	35,04
Cálculo mental	10	2,85	22	6,27
Outro	25	7,12	41	11,68
Em branco	42	11,97	165	47,01
Total	351	100	351	100

Fonte: Autoria própria

Tabela 54 – Distribuição dos alunos referentes aos procedimentos utilizados na tarefa Resolva as expressões no item 72 – 14

PROCEDIMENTO	Cálculo 1		Cálculo 2	
	N.	%	N.	%
Iterado	274	78,06	123	35,04
Decomposição	2	0,57	7	1,99
Salto	0	0	1	0,28
Variada	2	0,57	5	1,42
Outro	31	8,83	50	14,25
Em branco	42	11,97	165	47,01
Total	351	100	351	100

Fonte: Autoria própria

Tabela 55 – Distribuição dos alunos referentes às adaptações utilizadas na tarefa Resolva as expressões no item 72 – 14

ADAPTAÇÕES	Cálculo 1		Cálculo 2	
	N.	%	N.	%
Sem	219	62,39	7	1,99
Encurtar, por decomposição de um termo num múltiplo de 10 e o resto	0	0	3	0,85
Decompor/recompor com fatos, tirando partido da estrutura dobro/metade, decomposição de 50 e decomposições de números com dois dígitos em 50 + ...	0	0	0	0
Compensação	2	0,57	3	0,85
Alterar a ordem dos termos	0	0	20	5,70
Representação na horizontal	1	0,28	54	15,38
Mudar termos e/ou operação para chegar ao resultado obtido anteriormente	0	0	22	6,27
Fazer a prova real	0	0	9	2,56
Encurtar, por decomposição dos termos num múltiplo de 10 e o resto	1	0,28	5	1,42
Representar de forma pictórica	5	1,42	14	3,99
Inverter algarismo para subtrair o menor do maior	55	15,67	7	1,99
Outro	26	7,41	42	11,97
Em branco	42	11,97	165	47,01
Total	351	100	351	100

Fonte: Autoria própria

Tabela 56 – Distribuição dos alunos referentes às respostas apresentadas na tarefa Resolva as expressões no item 52 × 2

RESPOSTA	N.	%
Resolve de duas maneiras diferentes	38	10,83
Resolve de uma maneira	107	30,48
Resolve de duas maneiras, mas não são diferentes	71	20,23
Não resolve	85	24,22
Em branco	50	14,25
Total	351	100

Fonte: Autoria própria

Tabela 57 – Distribuição dos alunos referentes aos métodos utilizados na tarefa Resolva as expressões no item 52 × 2

MÉTODO	Cálculo 1		Cálculo 2	
	N.	%	N.	%
Algoritmo	253	72,08	136	38,75
Cálculo mental	1	0,28	7	1,99
Outro	47	13,39	33	9,40
Em branco	50	14,25	175	49,86
Total	351	100	351	100

Fonte: Autoria própria

Tabela 58 – Distribuição dos alunos referentes aos procedimentos utilizados na tarefa Resolva as expressões no item 52 × 2

PROC. ENVOLVENDO	Cálculo 1		Cálculo 2	
	N.	%	N.	%
Contagem	1	0,28	1	0,28
Adição	9	2,56	44	12,54
Subtração	0	0	5	1,42
Multiplicação	244	69,52	87	24,79
Divisão	0	0	6	1,71
Outro	47	13,39	33	9,4
Em branco	50	14,25	175	49,86
Total	351	100	351	100

Fonte: Autoria própria

Tabela 59 – Distribuição dos alunos referentes aos procedimentos específicos utilizados na tarefa Resolva as expressões no item 52 × 2

PROC. ESPECÍFICO	Cálculo 1		Cálculo 2	
	N.	%	N.	%
Iterado	244	69,52	100	28,49
Adicionar sucessivamente	9	2,56	35	9,97
Usar produtos conhecidos	0	0	1	0,28
Usar uma decomposição não decimal de um dos fatores	0	0	0	0
Usar a decomposição decimal de um dos fatores	1	0,28	4	1,14
Divisão longa	0	0	1	0,28
Fazer agrupamentos	0	0	1	0,28
Outro	47	13,39	34	9,69
Em branco	50	14,25	175	49,86
Total	351	100	351	100

Fonte: Autoria própria

Tabela 60 – Distribuição dos alunos referentes às adaptações utilizadas na tarefa Resolva as expressões no item 52×2

ADAPTAÇÕES	Cálculo 1		Cálculo 2	
	N.	%	N.	%
Sem	253	72,08	38	10,83
Encurtar, por decomposição de um termo num múltiplo de 10 e o resto	0	0	5	1,42
Decompor/recompôr com fatos, tirando partido da estrutura dobro/metade, decomposição de 50 e decomposições de números com dois dígitos em 50 + ...	1	0,28	0	0
Mudar termos e/ou operação para chegar ao resultado obtido anteriormente	0	0	13	3,7
Alterar a ordem dos termos	0	0	23	6,55
Usar a tabuada para fazer estimativa (subtração sucessiva)	0	0	0	0
Representação na horizontal	0	0	51	14,53
Representar de forma pictórica	0	0	4	1,14
Somas parciais	0	0	0	0
Divisão representada como outro algoritmo	0	0	0	0
Prova real	0	0	7	1,99
Outro	47	13,39	35	9,97
Em branco	50	14,25	175	49,86
Total	351	100	351	100

Fonte: Autoria própria

Tabela 61 – Distribuição dos alunos referentes às respostas apresentadas na tarefa Resolva as expressões no item 25×10

RESPOSTA	N.	%
Resolve de duas maneiras diferentes	18	5,13
Resolve de uma maneira	28	7,98
Resolve de duas maneiras, mas não são diferentes	21	5,98
Não resolve	212	60,4
Em branco	72	20,51
Total	351	100

Fonte: Autoria própria

Tabela 62 – Distribuição dos alunos referentes aos métodos utilizados na tarefa Resolva as expressões no item 25 × 10

MÉTODO	Cálculo 1		Cálculo 2	
	N.	%	N.	%
Algoritmo	223	63,53	118	33,62
Cálculo mental	2	0,57	5	1,42
Outro	54	15,38	39	11,11
Em branco	72	20,51	189	53,85
Total	351	100	351	100

Fonte: Autoria própria

Tabela 63 – Distribuição dos alunos referentes aos procedimentos utilizados na tarefa Resolva as expressões no item 25 × 10

PROC. ENVOLVENDO	Cálculo 1		Cálculo 2	
	N.	%	N.	%
Contagem	0	0	2	0,57
Adição	12	3,42	28	7,98
Subtração	0	0	3	0,85
Multiplicação	213	60,68	86	24,5
Divisão	0	0	4	1,14
Outro	54	15,38	39	11,11
Em branco	72	20,51	189	53,85
Total	351	100	351	100

Fonte: Autoria própria

Tabela 64 – Distribuição dos alunos referentes aos procedimentos específicos utilizados na tarefa Resolva as expressões no item 25 × 10

PROC. ESPECÍFICO	Cálculo 1		Cálculo 2	
	N.	%	N.	%
Iterado	211	60,11	100	28,49
Adicionar sucessivamente	11	3,13	17	4,84
Usar produtos conhecidos	0	0	0	0
Usar uma decomposição não decimal de um dos fatores	1	0,28	0	0
Usar a decomposição decimal de um dos fatores	0	0	1	0,28
Divisão longa	0	0	0	0
Fazer agrupamentos	0	0	4	1,14
Outro	56	15,95	40	11,4
Em branco	72	20,51	189	53,85
Total	351	100	351	100

Fonte: Autoria própria

Tabela 65 – Distribuição dos alunos referentes às adaptações utilizadas na tarefa Resolva as expressões no item 25×10

ADAPTAÇÕES	Cálculo 1		Cálculo 2	
	N.	%	N.	%
Sem	111	31,62	29	8,26
Encurtar, por decomposição de um termo num múltiplo de 10 e o resto	0	0	1	0,28
Decompor/recompôr com fatos, tirando partido da estrutura dobro/metade, decomposição de 50 e decomposições de números com dois dígitos em $50 + \dots$	1	0,28	1	0,28
Mudar termos e/ou operação para chegar ao resultado obtido anteriormente	0	0	13	3,7
Alterar a ordem dos termos	0	0	23	6,55
Usar a tabuada para fazer estimativa (subtração sucessiva)	0	0		0
Representação na horizontal	0	0	42	11,97
Representar de forma pictórica		0	4	1,14
Somas parciais	0	0	2	0,57
Multiplicar dígitos “correspondentes”	74	21,08	1	0,28
Multiplicar dígitos e números	38	10,83	0	0
Divisão representada como outro algoritmo	0	0	0	0
Prova real	0	0	4	1,14
Outro	55	15,67	42	11,97
Em branco	72	20,51	189	53,85
Total	351	100	351	100

Fonte: Autoria própria

Tabela 66 – Distribuição dos alunos referentes às respostas apresentadas na tarefa Resolva as expressões no item 25×12

RESPOSTA	N.	%
Resolve de duas maneiras diferentes	14	3,99
Resolve de uma maneira	11	3,13
Resolve de duas maneiras, mas não são diferentes	7	1,99
Não resolve	221	62,96
Em branco	98	27,92
Total	351	100

Fonte: Autoria própria

Tabela 67 – Distribuição dos alunos referentes aos métodos utilizados na tarefa Resolva as expressões no item 25 × 12

MÉTODO	Cálculo 1		Cálculo 2	
	N.	%	N.	%
Algoritmo	200	56,98	107	30,48
Cálculo mental	2	0,57	4	1,14
Outro	51	14,53	34	9,69
Em branco	98	27,92	206	58,69
Total	351	100	351	100

Fonte: Autoria própria

Tabela 68 – Distribuição dos alunos referentes aos procedimentos utilizados na tarefa Resolva as expressões no item 25 × 12

PROC. ENVOLVENDO	Cálculo 1		Cálculo 2	
	N.	%	N.	%
Contagem	1	0,28	1	0,28
Adição	5	1,42	29	8,26
Subtração	0	0	3	0,85
Multiplicação	196	55,84	76	21,65
Divisão	0	0	2	0,57
Outro	51	14,53	34	9,69
Em branco	98	27,92	206	58,69
Total	351	100	351	100

Fonte: Autoria própria

Tabela 69 – Distribuição dos alunos referentes aos procedimentos específicos utilizados na tarefa Resolva as expressões no item 25 × 12

PROC. ESPECÍFICO	Cálculo 1		Cálculo 2	
	N.	%	N.	%
Iterado	194	55,27	86	24,5
Adicionar sucessivamente	5	1,42	20	5,7
Usar produtos conhecidos	0	0	0	0
Usar uma decomposição não decimal de um dos fatores	0	0	0	0,
Usar a decomposição decimal de um dos fatores	0	0	1	0,28
Divisão longa	0	0	0	0
Fazer agrupamentos	1	0,28	3	0,85
Outro	53	15,1	35	9,97
Em branco	98	27,92	206	58,69
Total	351	100	351	100

Fonte: Autoria própria

Tabela 70 – Distribuição dos alunos referentes às adaptações utilizadas na tarefa Resolva as expressões no item 25×12

ADAPTAÇÕES	Cálculo 1		Cálculo 2	
	N.	%	N.	%
Sem	91	25,93	23	6,55
Encurtar, por decomposição de um termo num múltiplo de 10 e o resto	0	0	1	0,28
Decompor/recompor com fatos, tirando partido da estrutura dobro/metade, decomposição de 50 e decomposições de números com dois dígitos em 50 + ...	0	0	0	0
Mudar termos e/ou operação para chegar ao resultado obtido anteriormente	0	0	10	2,85
Alterar a ordem dos termos	0	0	24	6,84
Usar a tabuada para fazer estimativa (subtração sucessiva)	0	0	0	0
Representação na horizontal	1	0,28	42	11,97
Representar de forma pictórica	0	0	3	0,85
Somas parciais	0	0	3	0,85
Multiplicar dígitos “correspondentes”	87	24,79	0	0
Multiplicar dígitos e números	22	6,27	0	0
Divisão representada como outro algoritmo	0	0	0	0
Prova real	0	0	3	0,85
Outro	52	14,81	36	10,26
Em branco	98	27,92	206	58,69
Total	351	100	351	100

Fonte: Autoria própria

Tabela 71 – Distribuição dos alunos referentes às respostas apresentadas na tarefa Resolva as expressões no item $25 \div 5$

RESPOSTA	N.	%
Resolve de duas maneiras diferentes	26	7,41
Resolve de uma maneira	88	25,07
Resolve de duas maneiras, mas não são diferentes	21	5,98
Não resolve	96	27,35
Em branco	120	34,19
Total	351	100

Fonte: Autoria própria

Tabela 72 – Distribuição dos alunos referentes aos métodos utilizados na tarefa Resolva as expressões no item 25 ÷ 5

MÉTODO	Cálculo 1		Cálculo 2	
	N.	%	N.	%
Algoritmo	134	38,18	47	13,39
Cálculo mental	27	7,69	26	7,41
Outro	70	19,94	53	15,10
Em branco	120	34,19	225	64,10
Total	351	100	351	100

Fonte: Autoria própria

Tabela 73 – Distribuição dos alunos referentes aos procedimentos utilizados na tarefa Resolva as expressões no item 25 ÷ 5

PROC. ENVOLVENDO	Cálculo 1		Cálculo 2	
	N.	%	N.	%
Contagem	6	1,71	16	4,56
Adição	0	0	3	0,85
Subtração	0	0	7	1,99
Multiplicação	1	0,28	7	1,99
Divisão	154	43,87	40	11,4
Outro	70	19,94	53	15,1
Em branco	120	34,19	225	64,1
Total	351	100	351	100

Fonte: Autoria própria

Tabela 74 – Distribuição dos alunos referentes aos procedimentos específicos utilizados na tarefa Resolva as expressões no item 25 ÷ 5

PROC. ESPECÍFICO	Cálculo 1		Cálculo 2	
	N.	%	N.	%
Iterado	21	5,98	27	7,69
Adicionar sucessivamente	0	0,00	0	0,00
Usar produtos conhecidos	1	0,28	1	0,28
Usar uma decomposição não decimal de um dos fatores	0	0	0	0
Usar a decomposição decimal de um dos fatores	1	0,28	0	0
Divisão longa	111	31,62	19	5,41
Fazer agrupamentos	17	4,84	21	5,98
Outro	80	22,79	58	16,52
Em branco	120	34,19	225	64,10
Total	351	100	351	100

Fonte: Autoria própria

Tabela 75 – Distribuição dos alunos referentes às adaptações utilizadas na tarefa Resolva as expressões no item 25 ÷ 5

ADAPTAÇÕES	Cálculo 1		Cálculo 2	
	N.	%	N.	%
Sem	135	38,46	9	2,56
Encurtar, por decomposição de um termo num múltiplo de 10 e o resto	0	0	0	0
Decompor/recompor com fatos, tirando partido da estrutura dobro/metade, decomposição de 50 e decomposições de números com dois dígitos em 50 + ...	0	0	0	0
Mudar termos e/ou operação para chegar ao resultado obtido anteriormente	0	0	13	3,7
Alterar a ordem dos termos	0	0	3	0,85
Usar a tabuada para fazer estimativa (subtração sucessiva)	0	0	0	0
Representação na horizontal	3	0,85	24	6,84
Representar de forma pictórica	14	3,99	18	5,13
Somas parciais	0	0	0	0
Divisão representada como outro algoritmo	9	2,56	4	1,14
Prova real	0	0	5	1,42
Outro	70	19,94	50	14,25
Em branco	120	34,19	225	64,1
Total	351	100	351	100

Fonte: Autoria própria

Tabela 76 – Distribuição dos alunos referentes às respostas apresentadas na tarefa Resolva as expressões no item 60 ÷ 2

RESPOSTA	N.	%
Resolve de duas maneiras diferentes	17	4,84
Resolve de uma maneira	69	19,66
Resolve de duas maneiras, mas não são diferentes	12	3,42
Não resolve	122	34,76
Em branco	131	37,32
Total	351	100

Fonte: Autoria própria

Tabela 77 – Distribuição dos alunos referentes aos métodos utilizados na tarefa Resolva as expressões no item 60 ÷ 2

MÉTODO	Cálculo 1		Cálculo 2	
	N.	%	N.	%
Algoritmo	122	34,76	46	13,11
Cálculo mental	31	8,83	19	5,41
Outro	67	19,09	53	15,10
Em branco	131	37,32	233	66,38
Total	351	100	351	100

Fonte: Autoria própria

Tabela 78 – Distribuição dos alunos referentes aos procedimentos utilizados na tarefa Resolva as expressões no item 60 ÷ 2

PROC. ENVOLVENDO	Cálculo 1		Cálculo 2	
	N.	%	N.	%
Contagem	4	1,14	10	2,85
Adição	1	0,28	4	1,14
Subtração	1	0,28	8	2,28
Multiplicação	1	0,28	7	1,99
Divisão	146	41,6	35	9,97
Outro	67	19,09	54	15,38
Em branco	131	37,32	233	66,38
Total	351	100	351	100

Fonte: Autoria própria

Tabela 79 – Distribuição dos alunos referentes aos procedimentos específicos utilizados na tarefa Resolva as expressões no item 60 ÷ 2

PROC. ESPECÍFICO	Cálculo 1		Cálculo 2	
	N.	%	N.	%
Iterado	23	6,55	28	7,98
Adicionar sucessivamente	0	0,00	1	0,28
Usar produtos conhecidos	1	0,28	0	0
Usar uma decomposição não decimal de um dos fatores	0	0	0	0
Usar a decomposição decimal de um dos fatores	0	0	0	0
Divisão longa	100	28,49	17	4,84
Fazer agrupamentos	15	4,27	14	3,99
Outro	81	23,08	58	16,52
Em branco	131	37,32	233	66,38
Total	351	100	351	100

Fonte: Autoria própria

Tabela 80 – Distribuição dos alunos referentes às adaptações utilizadas na tarefa Resolva as expressões no item 60 ÷ 2

ADAPTAÇÕES	Cálculo 1		Cálculo 2	
	N.	%	N.	%
Sem	121	34,47	8	2,28
Encurtar, por decomposição de um termo num múltiplo de 10 e o resto	0	0	1	0,28
Decompor/recompôr com fatos, tirando partido da estrutura dobro/metade, decomposição de 50 e decomposições de números com dois dígitos em 50 + ...	1	0,28	0	0
Mudar termos e/ou operação para chegar ao resultado obtido anteriormente	1	0,28	13	3,70
Alterar a ordem dos termos	0	0	2	0,57
Usar a tabuada para fazer estimativa (subtração sucessiva)	1	0,28	1	0,28
Representação na horizontal	4	1,14	21	5,98
Representar de forma pictórica	12	3,42	12	3,42
Somas parciais	0	0	0	0
Divisão representada como outro algoritmo	12	3,42	3	0,85
Prova real	0	0	9	2,56
Outro	68	19,37	49	13,96
Em branco	131	37,32	232	66,1
Total	351	100	351	100

Fonte: Autoria própria

Calculadora quebrada

Tabela 81 – Distribuição dos alunos referentes às respostas apresentadas na tarefa Calculadora quebrada

RESPOSTA	N.	%
Acertou tudo	37	10,54
Errou resposta/acertou explicação	1	0,28
Acertou resposta/errou explicação	0	0
Acertou resposta/não explicou	50	14,25
Errou tudo	189	53,85
Em branco	74	21,08
Total	351	100

Fonte: Autoria própria

Tabela 82 – Distribuição dos alunos referentes ao método utilizado na tarefa Calculadora quebrada

MÉTODO	N.	%
Algoritmo	100	28,49
Cálculo mental	85	24,22
Resposta não matemática	16	4,56
Outro	76	21,65
Em branco	74	21,08
Total	351	100

Fonte: Autoria própria

Tabela 83 – Distribuição dos alunos referentes aos procedimentos utilizados na tarefa Calculadora quebrada

PROCEDIMENTO ENVOLVENDO	N.	%
Contagem	0	0
Adição	77	21,94
Subtração	15	4,27
Multiplicação	90	25,64
Divisão	1	0,28
Outro	94	26,78
Em branco	74	21,08
Total	351	100

Fonte: Autoria própria

Tabela 84 – Distribuição dos alunos referentes ao procedimento específico utilizados na tarefa Calculadora quebrada

PROCEDIMENTOS ESPECÍFICOS	N.	%
Iterado	92	26,21
Realizar cálculos a partir do resultado	7	1,99
Usar produtos conhecidos	32	9,12
Adicionar sucessivamente	6	1,71
Usar uma decomposição/recomposição não decimal de um dos fatores	35	9,97
Usar a decomposição decimal de um dos fatores	12	3,42
Inferências pessoais	16	4,56
Outro	77	21,94
Em branco	74	21,08
Total	351	100

Fonte: Autoria própria

Tabela 85 - Distribuição dos alunos referentes às adaptações utilizadas na tarefa Calculadora quebrada

ADAPTAÇÕES	N.	%
Sem	59	16,81
$10 + 10 = 20$; $20 + 5 = 25$	12	3,42
$35 - 10 = 25$ ou $30 - 5 = 25$; $75 - 50$; $15 + 10 = 25$	35	9,97
$5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5...$	5	1,42
Uso da tabuada (5 x 5)	31	8,83
Fazer cálculos que resultam em 125	5	1,42
Decompor o 20 em 1 + 1	42	11,97
Fazer com outra calculadora / fazer no papel	16	4,56
Outro	72	20,51
Em branco	74	21,08
Total	351	100

Fonte: Autoria própria

A compra de Marisa

Tabela 86 – Distribuição dos alunos referentes às respostas apresentadas na tarefa A compra de Marisa

RESPOSTA	N.	%
Acertou tudo	158	45,01
Errou resposta/acertou explicação	1	0,28
Acertou resposta/errou explicação	12	3,42
Acertou resposta/não explicou	67	19,09
Errou tudo	79	22,51
Em branco	34	9,69
Total	351	100

Fonte: Autoria própria

Tabela 87 – Distribuição dos alunos referentes ao método e procedimento específico utilizados na tarefa A compra de Marisa

	MÉTODO		PROCEDIMENTO		
	N.	%	N.	%	
Algoritmo	204	58,12	Iterado	204	58,12
Cálculo mental	7	1,99	Decomposição	2	0,57
			Salto	0	0
			Variada	5	1,42
Estimativa	19	5,41	Por aproximação	19	5,41
Resposta não matemática	17	4,84	Inferências pessoais	17	4,84
Outro	70	19,94	Outro	70	19,94
Em branco	34	9,69	Em branco	34	9,69
Total	351	100	Total	351	100

Fonte: Autoria própria

Tabela 88 – Distribuição dos alunos referentes às adaptações utilizadas na tarefa A compra de Marisa

ADAPTAÇÕES	N.	%
Sem	213	60,68
Trabalha com os números de forma global	19	5,41
Fazer relações de dobro e metade	4	1,14
Encurtar por decomposição	2	0,57
Subtrações sucessivas (subtrair preços do total de dinheiro)	4	1,14
Subtrair um preço do outro	4	1,14
Outro	71	20,23
Em branco	34	9,69
Total	351	100

Fonte: Autoria própria

*O campeonato esportivo***Tabela 89 – Distribuição dos alunos referentes às respostas apresentadas na tarefa O campeonato esportivo – item 1**

RESPOSTA	N.	%
Acertou tudo	186	52,99
Errou resposta/acertou explicação	0	0
Acertou resposta/errou explicação	3	0,85
Acertou resposta/não explicou	96	27,35
Errou tudo	45	12,82
Em branco	21	5,98
Total	351	100

Fonte: Autoria própria

Tabela 90 – Distribuição dos alunos referentes aos métodos utilizados na tarefa O campeonato esportivo – item 1

MÉTODO	N.	%
Algoritmo	63	17,95
Cálculo mental	244	69,52
Outro	23	6,55
Em branco	21	5,98
Total	351	100

Fonte: Autoria própria

Tabela 91 - Distribuição dos alunos referentes aos procedimentos utilizados na tarefa O campeonato esportivo – item 1

PROC. ENVOLVENDO	N.	%
Contagem	240	68,38
Adição	14	3,99
Subtração	0	0,00
Multiplicação	53	15,1
Divisão	0	0
Outro	23	6,55
Em branco	21	5,98
Total	351	100

Fonte: Autoria própria

Tabela 92 – Distribuição dos alunos referentes aos procedimentos específicos utilizados na tarefa O campeonato esportivo – item 1

PROC. ESPECÍFICO	N.	%
Iterado	57	16,24
Contar por saltos	233	66,38
Fazer agrupamentos	9	2,56
Adicionar sucessivamente	5	1,42
Usar produtos conhecidos	3	0,85
Outro	23	6,55
Em branco	21	5,98
Total	351	100

Fonte: Autoria própria

Tabela 93 – Distribuição dos alunos referentes às adaptações utilizadas na tarefa O campeonato esportivo – item 1

ADAPTAÇÕES	N.	%
Sem (4 x 5; 15 x 4; 30 x 2)	59	16,81
Estabelecer relações com o item anterior	0	0
Representar de forma pictórica	0	0
Contar de 1 em 1	189	53,85
Contar de 2 em 2	8	2,28
Contar de 4 em 4	41	11,68
Contar de 5 em 5	0	0
Contar de 6 em 6 (ou mais)	0	0
Agrupamento irregular (12+8)	9	2,56
Adicionar/agrupar de 20 em 20	0	0
Agrupar por colunas (12 em 12)	0	0
Multiplicação retangular	1	0,28
2x10x3	0	0
Somou termos presentes no enunciado	0	0
Outro	23	6,55
Em branco	21	5,98
Total	351	100

Fonte: Autoria própria

Tabela 94 – Distribuição dos alunos referentes às respostas apresentadas na tarefa O campeonato esportivo – item 2

RESPOSTA	N.	%
Acertou tudo	124	35,33
Errou resposta/acertou explicação	0	0
Acertou resposta/errou explicação	0	0
Acertou resposta/não explicou	64	18,23
Errou tudo	137	39,03
Em branco	26	7,41
Total	351	100

Fonte: Autoria própria

Tabela 95 – Distribuição dos alunos referentes aos métodos utilizados na tarefa O campeonato esportivo – item 2

MÉTODO	N.	%
Algoritmo	68	19,37
Cálculo mental	216	61,54
Outro	41	11,68
Em branco	26	7,41
Total	351	100

Fonte: Autoria própria

Tabela 96 – Distribuição dos alunos referentes aos procedimentos utilizados na tarefa O campeonato esportivo – item 2

PROC. ENVOLVENDO	N.	%
Contagem	215	61,25
Adição	12	3,42
Subtração	0	0
Multiplicação	57	16,24
Divisão	0	0
Outro	41	11,68
Em branco	26	7,41
Total	351	100

Fonte: Autoria própria

Tabela 97 – Distribuição dos alunos referentes aos procedimentos específicos utilizados na tarefa O campeonato esportivo – item 2

PROC. ESPECÍFICO	N.	%
Iterado	59	16,81
Contar por saltos	204	58,12
Fazer agrupamentos	15	4,27
Adicionar sucessivamente	4	1,14
Usar produtos conhecidos	2	0,57
Outro	41	11,68
Em branco	26	7,41
Total	351	100

Fonte: Autoria própria

Tabela 98 – Distribuição dos alunos referentes às adaptações utilizadas na tarefa O campeonato esportivo – item 2

ADAPTAÇÕES	N.	%
Sem (4 x 5; 15 x 4; 30 x 2)	57	16,24
Estabelecer relações com o item anterior	0	0,00
Representar de forma pictórica	3	0,85
Contar de 1 em 1	147	41,88
Contar de 2 em 2	5	1,42
Contar de 4 em 4	35	9,97
Contar de 5 em 5	5	1,42
Contar de 6 em 6 (ou mais)	2	0,57
Agrupamento irregular (12+8)	2	0,57
Adicionar/agrupar de 20 em 20	25	7,12
Agrupar por colunas (12 em 12)	2	0,57
Multiplificação retangular	1	0,28
2x10x3	0	0,00
Somou termos presentes no enunciado	0	0,00
Outro	41	11,68
Em branco	26	7,41
Total	351	100

Fonte: Autoria própria

Tabela 99 – Distribuição dos alunos referentes ás respostas apresentadas na tarefa O campeonato esportivo – item 3

RESPOSTA	N.	%
Acertou tudo	127	36,18
Errou resposta/acertou explicação	0	0,00
Acertou resposta/errou explicação	1	0,28
Acertou resposta/não explicou	76	21,65
Errou tudo	123	35,04
Em branco	24	6,84
Total	351	100

Fonte: Autoria própria

Tabela 100 - Distribuição dos alunos referentes aos métodos utilizados na tarefa O campeonato esportivo – item 3

MÉTODO	N.	%
Algoritmo	80	22,79
Cálculo mental	213	60,68
Outro	34	9,69
Em branco	24	6,84
Total	351	100

Fonte: Autoria própria

Tabela 101 - Distribuição dos alunos referentes aos procedimentos utilizados na tarefa O campeonato esportivo – item 3

PROC. ENVOLVENDO	N.	%
Contagem	209	59,54
Adição	18	5,13
Subtração	0	0,00
Multiplicação	65	18,52
Divisão	0	0,00
Outro	35	9,97
Em branco	24	6,84
Total	351	100

Fonte: Autoria própria

Tabela 102 - Distribuição dos alunos referentes aos procedimentos específicos utilizados na tarefa O campeonato esportivo – item 3

PROC. ESPECÍFICO	N.	%
Iterado	72	20,51
Contar por saltos	202	57,55
Fazer agrupamentos	11	3,13
Adicionar sucessivamente	3	0,85
Usar produtos conhecidos	3	0,85
Outro	36	10,26
Em branco	24	6,84
Total	351	100

Fonte: Autoria própria

Tabela 103 – Distribuição dos alunos referentes às adaptações utilizadas na tarefa O campeonato esportivo – item 3

ADAPTAÇÕES	N.	%
Sem (4 x 5; 15 x 4; 30 x 2)	70	19,94
Estabelecer relações com o item anterior	1	0,28
Representar de forma pictórica	1	0,28
Contar de 1 em 1	144	41,03
Contar de 2 em 2	39	11,11
Contar de 4 em 4	10	2,85
Contar de 5 em 5	0	0
Contar de 6 em 6 (ou mais)	1	0,28
Agrupamento irregular (12+8)	2	0,57
Adicionar/agrupar de 20 em 20	21	5,98
Agrupar por colunas (12 em 12)	0	0
Multiplicação retangular	2	0,57
2x10x3	0	0
Somou termos presentes no enunciado	2	0,57
Outro	34	9,69
Em branco	24	6,84
Total	351	100

Fonte: Autoria própria