

GUSTAVO CHAVES TANAKA

Análise da dinâmica não linear do processo de biodigestão em um biodigestor indiano no espaço de estados via técnica de Lyapunov

BAURU/SP

Junho/2018

GUSTAVO CHAVES TANAKA

Análise da dinâmica não linear do processo de biodigestão em um biodigestor indiano no espaço de estados via técnica de Lyapunov

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de Bauru, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Linha de Pesquisa: Sistemas de Energia.

Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"- Faculdade de Engenharia de Bauru – FEB - Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica

Orientador: Prof. Adj. Antonio Roberto Balbo

Co-Orientadora: Profa. Dra. Célia Aparecida dos Reis

BAURU/SP

Julho/2018

Tanaka, Gustavo Chaves.

Análise da dinâmica não linear do processo de biodigestão em um biodigestor indiano no espaço de estados via técnica de Lyapunov / Gustavo Chaves Tanaka, 2018

60 f.

Orientador: Antonio Roberto Balbo

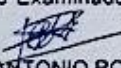
Co-orientadora: Célia Aparecida dos Reis

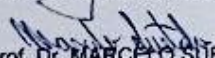
Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia, Bauru, 2018

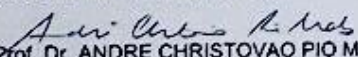
1. Biodigestores. 2. Biodigestor Indiano. 3. Biogás. 4. Dinâmica Não-Linear. 5. Teoria de Lyapunov. I. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia. II. Título.

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE Mestrado de GUSTAVO CHAVES TANAKA, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA, DA FACULDADE DE ENGENHARIA - CÂMPUS DE BAURU.

Aos 07 dias do mês de junho do ano de 2018, às 15:00 horas, no(a) Anfiteatro do DTI / FEB / BAURU, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Prof. Dr. ANTONIO ROBERTO BALBO - Orientador(a) do(a) Departamento de Matemática / Faculdade de Ciências de Bauru - UNESP, Prof. Dr. MARCELO SUETAKE do(a) Departamento de Engenharia Elétrica / Universidade Federal de São Carlos - UFSCar, Prof. Dr. ANDRE CHRISTOVAO PIO MARTINS do(a) Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Bauru - UNESP, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da DISSERTAÇÃO DE Mestrado de GUSTAVO CHAVES TANAKA, intitulada ANÁLISE DA DINÂMICA NÃO LINEAR DO PROCESSO DE BIODIGESTÃO EM UM BIODIGESTOR INDIANO NO ESPAÇO DE ESTADOS VIA TÉCNICA DE LYAPUNOV. Após a exposição, o discente foi arguido oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: APROVADO . Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.


Prof. Dr. ANTONIO ROBERTO BALBO


Prof. Dr. MARCELO SUETAKE


Prof. Dr. ANDRE CHRISTOVAO PIO MARTINS

Dedico aos meus pais Luis e Luiza,

Às minhas irmãs Carla e Camila.

“Ciência é uma equação diferencial. Religião é a condição de contorno.”
(Alan Turing)

AGRADECIMENTOS

À Deus, pela condição da vida e toda a existência, por me ajudar de várias formas através da fé e de seus ensinamentos e por me abençoar com pessoas boas que me ajudam a crescer.

À minha mãe Luiza Maria Chaves Tanaka, por me ensinar, apoiar e acreditar em mim, ao meu pai Luis Tanaka por me sustentar e proporcionar minha educação. As minhas irmãs Carla e Camila pelo carinho e apoio nas minhas decisões.

Ao meu orientador professor Dr. Antonio Roberto Balbo, pela paciência, sabedoria e carinho que me fez sentir seguro e otimista com meu estudo e carreira. Minha co-orientadora professora Dra. Célia Aparecida dos Reis, pelo apoio e ensinamentos teóricos que foram fundamentais para minha formação.

À colaboradora Helenice Florentino da Silva, por me ajudar com suas ideias.

Agradeço aos meus amigos que sempre torceram por mim, em especial ao Vinícius Machado Martinez e Felipe Telles por me ajudarem com minha pesquisa.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e aos professores, pela oportunidade que proporcionou a minha formação.

RESUMO

Atualmente pesquisas sobre a produção de energia com menor impacto ambiental, com maior rendimento energético e, possivelmente, a um custo mínimo de produção, são de interesse mundial. Desta forma, a produção de energia renovável, com estas características, através de biodigestores torna-se uma alternativa relevante. Os biodigestores, em geral, consistem de biorreator que armazena matéria orgânica fresca (substrato ou biomassa) de origem humana, animal ou vegetal. A fermentação anaeróbica destes substratos produz um gás combustível (biogás) que pode ser utilizado como fonte de energia e o material remanescente no biodigestor pode ser usado como biofertilizante. O processo de biodigestão é complexo, pois envolve vários grupos de bactérias e o seu entendimento é importante para promoção de agentes que visam aumentar a eficiência dos biodigestores. Neste trabalho propõe-se um modelo dinâmico não linear para descrever o processo de fermentação da biomassa dentro do biodigestor. Realiza-se também uma análise do modelo mediante a técnica de Lyapunov, a qual possibilitou a investigação de soluções analíticas assintoticamente estáveis e um estudo de seu espaço de fase, que contempla a sua estabilidade assintótica. Simulações numéricas são realizadas para a validação dos resultados obtidos ao modelo proposto.

Palavras-chave: Biodigestores, Biodigestor Indiano, Biogás, Dinâmica Não-Linear, Teoria de Lyapunov.

ABSTRACT

Nowadays, research on energy production with lower environmental impact, with higher energy efficiency and, possibly, at a minimum cost of production, is of worldwide interest. In this way, the production of renewable energy, with these characteristics, through biodigesters becomes a relevant alternative. Biodigesters generally consist of a chamber that stores fresh organic matter (substrate or biomass) of human, animal or plant origin. Anaerobic fermentation of these substrates produces a fuel gas (biogas) that can be used as an energy source and the remaining material in the biodigester can be used as biofertilizer. The biodigestion process is complex because it involves several groups of bacteria and its understanding is important to promote agents that aim to increase the efficiency of biodigesters. This essay proposes a dynamic non-linear model to describe the fermentation process of an Indian biodigester. It is also proposed an analysis of the model using the Lyapunov technique, which became possible the investigation of asymptotically stable analytical solutions and asymptotic stability and a study of its phase space, which contemplates its asymptotic stability. Numerical simulations are performed to convalidate the proposed model.

Key words: Biodigesters, Indian Biodigester, Biogas, Nonlinear Dynamics, Lyapunov Theory.

SUMÁRIO

Introdução.....	1
Capítulo 1 Sistemas autônomos.....	4
1.1. Conceitos básicos: plano de fase, caminhos e pontos críticos.....	4
1.2. Tipos de pontos críticos.....	6
1.3. A estabilidade e a estabilidade assintótica.....	10
1.4. Pontos críticos e caminhos de sistemas não lineares.....	13
1.5. Teoria de Lyapunov para sistemas não lineares.....	17
1.5.1. Linearização de sistemas autônomos.....	17
1.5.2. Método da linearização de Lyapunov.....	18
Capítulo 2 Biodigestores: bioprocessos, tipos e estado da arte.....	20
2.1. Bioprocessos.....	20
2.2. Biodigestores e seus diferentes tipos.....	21
2.3. Estado da arte sobre a pesquisa de biodigestores.....	23
Capítulo 3 Modelo não linear para biodigestão em um biodigestor indiano de modo contínuo e resultados preliminares.....	28
3.1. Modelo Matemático.....	28
3.1.1. Balanço de massa.....	28
3.1.2. Análise do espaço de estado do sistema.....	30
3.1.3. Determinação dos pontos críticos.....	31
3.1.4. Análise da estabilidade assintótica do 1º ponto crítico.....	32
3.1.5. Análise da estabilidade assintótica do 2º ponto crítico.....	32
Capítulo 4 Simulações computacionais.....	35
4.1. Simulação computacional em torno do ponto crítico $P1$	35
4.2. Simulação computacional em torno do ponto crítico $P2$	39
Conclusões.....	43
Trabalhos publicados.....	44
Bibliografia.....	45
Anexo A Aplicação da teoria de Lyapunov a um biodigestor indiano.....	49

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1: Ponto de centro	7
Figura 1.2: Ponto de sela	8
Figura 1.3: Ponto de espiral.....	9
Figura 1.4: Os diferentes tipos de pontos em nó: a) plano de fase autovalores negativos. b) autovalores repetidos. c) autovalor repetido com um autovetor associado.....	9
Figura 1.5: Conceito de estabilidade, mas não assintoticamente estável	10
Figura 1.6: O conceito estabilidade assintótica	11
Figura 1.7: O conceito de instabilidade.....	12
Figura 2.1: Biodigestor indiano.....	22
Figura 2.2: Biodigestor chinês	22
Figura 2.3: Biodigestor canadense	23
Figura 2.4: Documentos (<i>Biodigester</i>) por ano 2008 – 2018	24
Figura 2.5: Documentos (<i>Biodigester, Dynamic Systems</i>) por ano 2008 – 2018	25
Figura 2.6: Documentos (<i>Biodigester, Dynamic Systems, Biogas</i>) por ano 2008 – 2018	26
Figura 4.1: Perfil da concentração de bactérias metanogências ao longo do tempo.....	36
Figura 4.2: Variação da concentração de substrato em relação ao tempo.....	36
Figura 4.3: Perfil da concentração do biogás no decorrer do tempo.....	37
Figura 4.4: Espaço de fase do sistema relacionado ao primeiro ponto crítico.....	38
Figura 4.5: Variação da concentração de bactérias no tempo.....	39
Figura 4.6: Variação do biogás no tempo.....	40
Figura 4.7: Variação da quantidade de substrato no tempo.....	40
Figura 4.8: Espaço de fase do sistema relacionado ao primeiro ponto crítico.....	41
Figura A.1: Biodigestor Modelo Indiano	49
Figura A.2: Relação entre a quantidade de bactérias e a produção de biogás no interior do biodigestor.....	51
Figura A.3: Quantidade de biogás no interior do biodigestor em função do tempo	51
Figura A.4: População de bactérias no interior do biodigestor ao longo do tempo.....	52
Figura A.5: O plano de fase da dinâmica em torno do ponto crítico P_2	53

Introdução

Atualmente o setor produtivo e o meio acadêmico vêm enfatizando suas pesquisas para a produção de energia com o menor impacto ambiental possível. Esta questão é relevante e de interesse ambiental, social e econômico, além de propiciar pesquisas e trabalhos científicos. Esse tema também é de interesse mundial e influencia o mercado energético, fazendo com que empresas de engenharia e corporativas invistam fundos para a melhoria da qualidade energética de sua produção e distribuição destinada à comunidade. Neste contexto a busca por energias renováveis, na qual é incluído o estudo de biodigestores, tem relevância como fonte de energia limpa, pois além de ajudar na preservação do meio ambiente está diretamente associado à produção de bioenergia e biofertilizantes, associado ao fato da possibilidade de utilização deste sistema bioenergético, principalmente em pequenas propriedades rurais (ANDRADE, 2002; BISCARO, 2008; PORTES, 2005; TANAKA et al, 2016, TANAKA et al, 2017).

Existem vários tipos de biodigestores que são comercializados no mercado, cada um construído para uma determinada finalidade. Dentre os modelos existentes na literatura o que será explorado nesse trabalho é o biodigestor indiano, baseando-se nos trabalhos de Balmant (2009), Biscaro (2012), Bassanezi (1988) e Schmidell (2001). No biodigestor indiano a finalidade é a produção alternativa de biogás e biofertilizante, sendo que o biogás pode ser usado para geração de energia elétrica ou para gás de uso doméstico. Ele se diferencia dos outros modelos por conter uma parede divisória no interior do fermentador, a qual ajuda a garantir que a biomassa que já foi fermentada saia do reator, uma vez que a matéria processada pelas bactérias perde densidade e consegue deslizar naturalmente pela tubulação de saída do biodigestor (BISCARO,2008; ANDRADE et al, 2002).

De acordo com Balmant (2009), Biscaro (2008), Khan (2013) e Portes (2005), o processo de fermentação anaeróbica que ocorre no interior do biodigestor pode ser decomposto em quatro estágios, a saber: hidrólise, acidogênese, acetogênese e metanogênese, os quais serão definidos e explorados no texto.

Baseando-se em Balmant (2009), Biscaro (2012), Bassanezi (1988), Khan (2013) e Schmidell (2001), neste trabalho é proposto um modelo matemático não linear de biodigestão em um biodigestor indiano, que relaciona produção biogás, concentração

de bactérias e a variação de substrato dentro do reator, considerando o processo de biodigestão anaeróbica, a ação de bactérias nos substratos ao longo do tempo e a produção de biogás no interior deste.

O modelo matemático que descreve o processo de biodigestão anaeróbica em biodigestores pode ser representado através de um sistema dinâmico de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's), o qual é o foco deste trabalho. Segundo Monteiro (2016) e Silva (2003) o estudo da teoria de sistemas dinâmicos constitui um dos instrumentos importantes da Matemática Moderna, essencial para a análise e resolução de problemas complexos de Engenharia e outras, tais como a Física, Biologia, Economia, Bioengenharia, Astronomia, que descrevem fenômenos que variam com o tempo e que podem ser modelados por sistemas dinâmicos não lineares. Dessa forma, o estudo de sistemas dinâmicos se torna muito importante para este trabalho.

Para a investigação e análise de soluções exatas do modelo proposto realizou-se uma abordagem introdutória de sistemas dinâmicos, estudando-se os conceitos básicos de sistemas dinâmicos autônomos e a investigação de seus pontos críticos de acordo com a teoria de Lyapunov, revista em Monteiro (2006), Silva (2003), Bessa (2011) e Slotine (1991). Os pré-requisitos necessários, em termos de conhecimentos de EDO's, para analisar qualitativamente uma aplicação de sistema dinâmico, neste caso ao modelo de biodigestão proposto, relacionam-se aos tópicos envolvendo: sistemas de EDO's, sistemas autônomos, métodos de soluções, análise de pontos críticos, espaço de fase, teoria da estabilidade e são baseados na teoria de Lyapunov. Estes conceitos foram utilizados para realizar a análise da estabilidade assintótica de seus pontos críticos e a investigação de soluções analíticas assintoticamente estáveis desse modelo.

Para a validação numérica dos resultados obtidos ao modelo proposto, simulações numéricas são realizadas utilizando-se o pacote computacional MATLAB 2011a. Essas possibilitaram a construção e análise do espaço de fase e do histórico no tempo relativo às variáveis de estado do modelo, as quais são, concentração de bactérias, produção de biogás e concentração de substrato. Modelo de biodegestão anaeróbica em um biodigestor indiano.

Os objetivos principais desta pesquisa são: a proposta de um modelo matemático que explora a relação entre concentração de bactérias, produção de biogás e

concentração de substrato, determinação e análise da estabilidade assintótica dos pontos críticos desse modelo, definido como um sistema dinâmico não linear de equações diferenciais, simulação computacional da dinâmica não linear em torno dos pontos críticos, análise do espaço de fase do sistema e contribuir com a modelagem matemática de sistemas bioenergéticos.

O trabalho está organizado da seguinte forma: no Capítulo 1 tem-se a fundamentação da teoria de sistemas dinâmicos utilizada. No Capítulo 2 descreve-se o bioprocessamento no interior de um biorreator, os diferentes tipos de biodigestores e, em seguida, um breve estado da arte sobre modelagem matemática de biodigestores. No Capítulo 3 apresenta-se a descrição de um modelo que representa o processo de biodigestão em um biodigestor indiano. No Capítulo 4 apresentam-se os resultados preliminares como: estudo de um ponto crítico, estabilidade assintótica em torno deste ponto e a análise do espaço de fase. Seguido das considerações finais, trabalhos publicados e referências.

Capítulo 1 Sistemas autônomos

Este Capítulo apresenta uma revisão matemática de sistemas autônomos não lineares de acordo com a literatura, os quais foram utilizados como base para o desenvolvimento desse trabalho. O estudo de EDO's, bem como suas aplicações, proporciona uma grande vantagem em aspectos de desenvolvimento tecnológico e científico. Considerando que, em condições ideais, pode-se modelar qualquer evento, natural ou não, e estudar tal assunto (BASSANEZI, 1988). A maioria dos eventos são de natureza não linear e encontrar uma solução analítica para o seu modelo pode ser uma tarefa complexa e, por vezes, impossível de ser realizada através de um método exato. Em sistemas regidos por um sistema de equações diferenciais não lineares, dependendo das condições, podemos utilizar o método de Lyapunov para obter as soluções analíticas desses modelos (SILVA, 2003; MONTEIRO, 2006; BESSA, 2011). Para esse objetivo são revistos os tópicos matemáticos postos a seguir.

1.1. Conceitos básicos: plano de fase, caminhos e pontos críticos.

Esta seção trata a teoria de sistemas autônomos para dinâmicas bidimensionais e n-dimensional. Com base em Bassanezi (1988), Slotine (1991), Silva (2003); Monteiro (2006) e Bessa (2011),

Definição 1.1.1: Considera-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases}, \quad (1.1)$$

um sistema de equações diferenciais no qual a variável independente t não aparece explicitamente nas funções P e Q é denominado *sistema autônomo*.

Observação: Pode-se provar que dado o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases} \quad \text{no qual } x(t_0) = x_0 \text{ e } y(t_0) = y_0 \quad (1.2)$$

Sendo t_0 , dado, (x_0, y_0) pertencente a um retângulo no plano x e $P(x, y), Q(x, y) \in C^1$, então o sistema (1.2) tem uma única solução:

$$x = f(t), y = g(t), \quad (1.3)$$

Definição 1.1.2: Se $x = f(t)$, $y = g(t)$ em (1.3) são constantes, isto é, $x = f(t) = x_0$, $y = g(t) = y_0$, então as curvas (1.3) são denominadas um *caminho*, ou *órbita* ou *trajetória* do sistema (1.1).

Observação: Considere o sistema (1.2) podemos dividir a primeira linha pela segunda e, eliminando t entre as duas equações deste sistema, obtêm-se:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)} \quad (1.4)$$

A equação (1.4) fornece a *inclinação da reta tangente* ao gráfico dos caminhos do sistema (1.1), passando através do ponto (x, y) , quando $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ são não nulos.

A família a um parâmetro de soluções da equação diferencial (1.4) fornece uma família a um parâmetro de caminhos de (1.1). Em um ponto (x_0, y_0) no qual $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ são nulos, a inclinação da reta tangente ao caminho, quando definida por (1.4), é indeterminada. Tem-se a seguinte definição.

Definição 1.1.3: Dado o sistema autônomo $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y) \end{cases}$, um ponto (x_0, y_0) , nos

quais ambas as funções $F(x_0, y_0) = 0$ e $G(x_0, y_0) = 0$ é denominado um *ponto crítico* ou *ponto de equilíbrio* ou *ponto singular* desse sistema.

Observação: Se (x_0, y_0) é um ponto crítico do sistema, então as funções constantes:

$$\begin{aligned} x &= f(t) = x_0 \\ y &= g(t) = y_0, \end{aligned} \quad (1.5)$$

satisfazem as equações em (1.2). Tal solução é denominada uma *solução de equilíbrio* do sistema. Note que a trajetória de uma solução de equilíbrio consiste de um único ponto e, se o sistema for não linear, pode haver mais de um ponto de equilíbrio ou nenhum.

1.2. Tipos de pontos críticos.

Considera-se o sistema autônomo:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y) \end{cases} . \quad (1.6)$$

Para a introdução dos tipos de pontos críticos desse sistema, serão necessárias as definições a seguir.

Definição 1.2.1: Seja C um caminho do sistema (1.6) dado por $x = f(t)$ e $y = g(t)$, e $(0, 0)$ ponto crítico desse sistema. Diz-se que C *aproxima do ponto crítico $(0, 0)$ quando $t \rightarrow +\infty$* se $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0$.

Observações:

- De forma análoga se define C *aproxima do ponto crítico $(0, 0)$ quando $t \rightarrow -\infty$* ;
- Dizer que C *aproxima do ponto crítico $(0, 0)$ quando $t \rightarrow +\infty$* significa que um ponto se deslocando sobre C , no plano x, y se aproxima de $(0, 0)$ quando $t \rightarrow +\infty$, independente do caminho C tomado.

Definição 1.2.2: Seja C um caminho do sistema (1.6) dado por $x = f(t)$ e $y = g(t)$, que se aproxima do ponto crítico $(0, 0)$ ponto crítico quando $t \rightarrow +\infty$. Diz-se que C *entra no ponto crítico $(0, 0)$ quando $t \rightarrow +\infty$* se $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{g(t)}{f(t)}$ existe ou é $\pm \infty$ quando $t \rightarrow +\infty$.

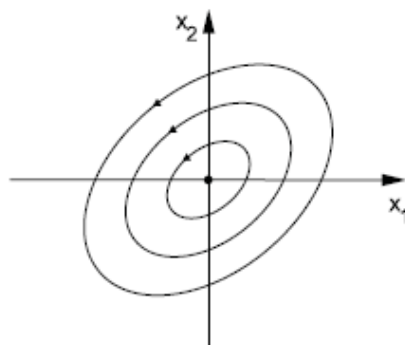
Observação: Observe que o quociente $\frac{g(t)}{f(t)}$ representa a inclinação da reta que passa pelos pontos $(0, 0)$ e $P = (x = f(t), y = g(t))$ sobre o caminho C . Então, dizer que C *entra no ponto crítico $(0, 0)$ quando $t \rightarrow +\infty$* significa que a reta que une os pontos $(0, 0)$ e $P = (f(t), g(t))$ converge para uma direção limite quando $t \rightarrow +\infty$.

Definição 1.2.3: O ponto crítico isolado $(0, 0)$ de um sistema autônomo é dito *centro* se existe uma vizinhança desse ponto que contém um número infinito enumerável de caminhos fechados C_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, cada um dos quais contendo $(0, 0)$ em seu interior, tais que seus diâmetros se aproximam de zero quando $n \rightarrow +\infty$, e $(0, 0)$ não é aproximado por qualquer um desses caminhos para $t \rightarrow \pm \infty$.

Observação: Segundo a definição de centro, $(0,0)$ está circundado por um número infinito de caminhos, arbitrariamente próximos desse ponto, mas de tal forma que ele não é aproximado por nenhum caminho quando $t \rightarrow +\infty$ ou $t \rightarrow -\infty$, isto é, se C_n , é dado por $x_n = f_n(t)$ e $y_n = g_n(t)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, então $\lim_{t \rightarrow +\infty} f_n(t) \neq 0$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) \neq 0$.

A Figura 1.1, a seguir, ilustra um centro.

Figura 1.1: Ponto de Centro

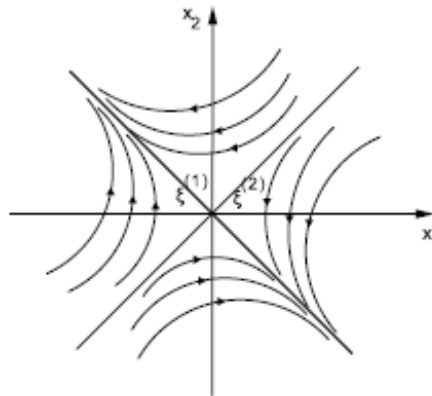


Fonte: Bessa (2011).

Definição 1.2.4: O ponto crítico isolado $(0, 0)$ do sistema (7) é dito um **ponto de sela** se existe uma vizinhança desse ponto na qual valem as seguintes condições:

1. Existem dois caminhos curvilíneos que se aproximam e entram tangencialmente aos autovetores no ponto $(0, 0)$ de direções opostas quando $t \rightarrow +\infty$ e existem dois caminhos retilíneos que se aproximam e entram no ponto $(0, 0)$ de direções opostas quando $t \rightarrow -\infty$;
2. Em cada um dos quatro domínios entre dois quaisquer dos quatro caminhos em (1.1), existem infinitos outros caminhos que estão arbitrariamente próximos de $(0, 0)$, os quais não aproximam de $(0, 0)$ quando $t \rightarrow +\infty$ ou $t \rightarrow -\infty$, os quais se aproximam de um ou outro dos quatro caminhos retilíneos quando $t \rightarrow +\infty$ ou $t \rightarrow -\infty$. A Figura 1.2, a seguir, ilustra um ponto de sela.

Figura 1.2: O ponto de sela (BESSA, 2011).



Fonte: Bessa (2011).

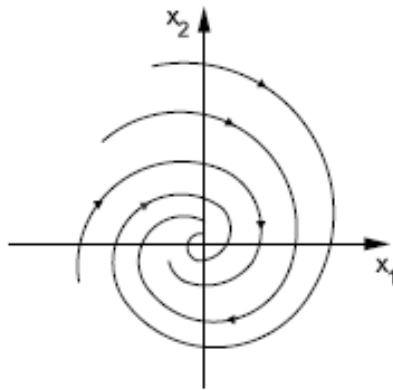
Definição 1.2.5: O ponto crítico isolado $(0, 0)$ do sistema (1.6) é dito um *ponto espiral* ou *ponto focal* se existe uma vizinhança desse ponto tal que todo caminho C nessa vizinhança tem as seguintes propriedades:

1. C é definido $\forall t > t_0$ (ou $\forall t < t_0$), para algum número t_0 ;
2. C aproxima de $(0, 0)$ quando $t \rightarrow +\infty$ (ou quando $t \rightarrow -\infty$);
3. C aproxima de $(0, 0)$ de uma forma em espiral, enrolando em torno desse ponto um número infinito de vezes quando $t \rightarrow +\infty$ (ou quando $t \rightarrow -\infty$).

A Figura 1.3, a seguir, ilustra um ponto em espiral. Note que em um ponto em espiral, uma família infinita de caminhos se aproximam de $(0, 0)$ de maneira em espiral quando $t \rightarrow +\infty$ (ou quando $t \rightarrow -\infty$). Note que esses caminhos se aproximam, mas não entram nesse ponto já que esses caminhos não possuem uma direção limite pelo fato de se enrolarem em torno desse ponto.

]

Figura 1.3: Ponto de espiral.



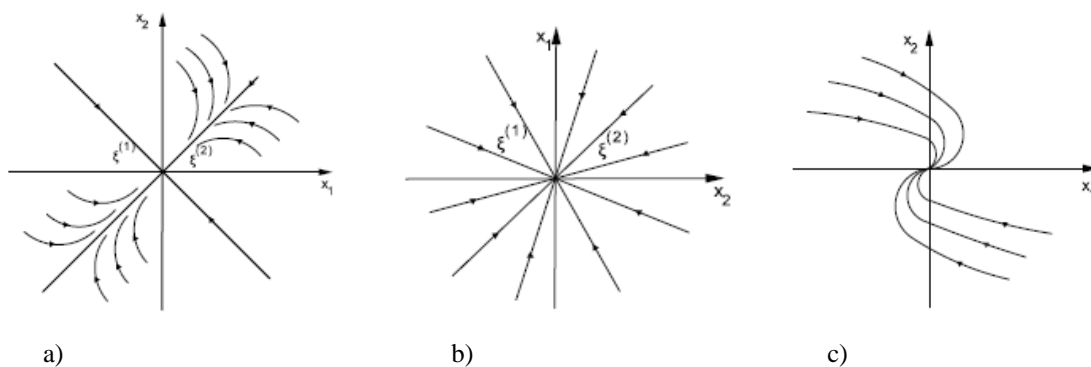
Fonte: Bessa (2011).

Definição 1.2.6: O ponto crítico isolado $(0, 0)$ do sistema (1.6) é dito um **nó** se existe uma vizinhança desse ponto tal que todo caminho C nessa vizinhança tem as seguintes propriedades:

1. C é definido $\forall t > t_0$ (ou $\forall t < t_0$), para algum número t_0 ;
2. C aproxima de $(0, 0)$ quando $t \rightarrow +\infty$ (ou quando $t \rightarrow -\infty$);
3. C entra em $(0, 0)$ quando $t \rightarrow +\infty$ (ou quando $t \rightarrow -\infty$).

A Figura 1.4, a seguir, ilustra um ponto em nó.

Figura 1.4: Os diferentes tipos de pontos em nó: a) plano de fase autovalores negativos. b) autovalores repetidos. c) autovalor repetido com um autovetor associado



Fonte: Bessa (2011).

1.3. A estabilidade e a estabilidade assintótica

Assumindo-se que $(0, 0)$ é ponto crítico isolado do sistema autônomo:

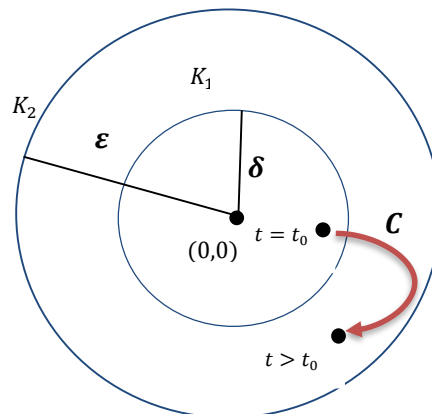
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases}, \quad (1.7)$$

Deseja-se introduzir o conceito de estabilidade desse ponto crítico. Para tal considere um caminho C definido por $x = f(t)$, e $y = g(t)$.

Seja $D(t) = \sqrt{(f(t))^2 + (g(t))^2}$ a distância entre os pontos $(0, 0)$ e $P = (f(t), g(t))$ sobre C .

Definição 1.3.1: O ponto crítico $(0, 0)$ é dito ser *estável* se para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que todo caminho C para qual $D(t_0) < \delta$ para algum t_0 está definido para todo $t \geq t_0$ é tal que $D(t) < \varepsilon$ para todo $t_0 \leq t < +\infty$.

Figura 1.5: Conceito de estabilidade, mas não assintoticamente estável



Fonte: Bessa (2011).

Observação: Como $D(t) = \sqrt{(f(t))^2 + (g(t))^2}$, a desigualdade $D(t_0) < \delta$ para algum valor de t_0 , significa que a distância entre $(0, 0)$ e o ponto P sobre C , é menor que δ em $t = t_0$. Isso significa que:

- em $t = t_0$ P está no interior do círculo K_1 de raio δ e centrado em $(0, 0)$, como mostra a Figura 1.5.
- A desigualdade $D(t_0) < \varepsilon$ para todo $t \geq t_0 < +\infty$ significa que para $t \geq t_0 < +\infty$, P está no interior do círculo K_2 de raio ε e centro $(0, 0)$;

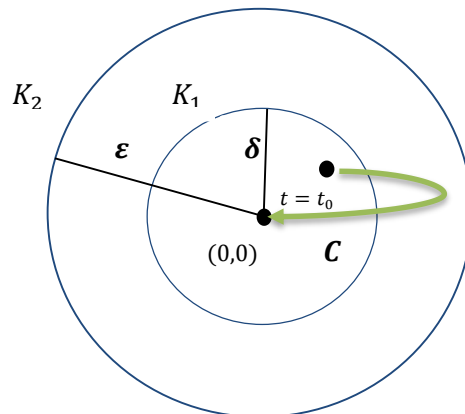
(c) Resumindo, diz-se que $(0, 0)$ é estável se todo caminho C que está no interior do círculo K_1 de raio δ e centrado em $(0, 0)$ em $t = t_0$, permanecerá no círculo K_2 de raio ε e centro $(0, 0)$, para todo $t \geq t_0 < +\infty$.

Definição 1.3.2: O ponto crítico $(0, 0)$ é dito ser *assintoticamente estável* se:

1. Ele é estável;
2. Existe um número $\delta_0 > 0$ tal que se $D(t_0) < \delta_0$ para algum t_0 , então $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0$.

Portanto, dizer que $(0, 0)$ é assintoticamente estável significa que todo caminho C que está no interior do círculo K_1 de raio δ e centrado em $(0, 0)$ em $t = t_0$, permanecerá nesse círculo para todo $t_0 \leq t < +\infty$, isto é P aproxima de $(0, 0)$ quando $t \rightarrow +\infty$. Como mostra a figura 1.6:

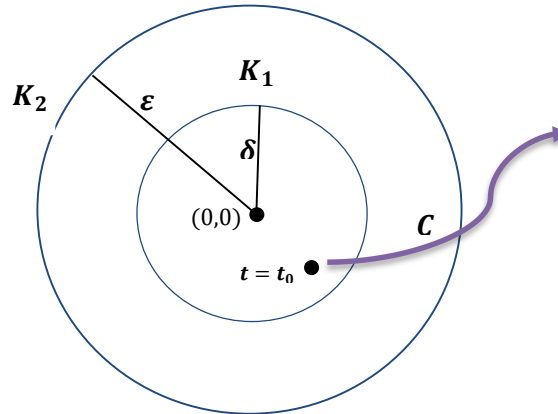
Figura 1.6: O conceito estabilidade assintótica



Fonte: Bessa (2011).

Definição 1.3.3: O ponto crítico $(0, 0)$ é dito ser *instável* se ele não é estável.

Figura 1.7: O conceito de instabilidade



Fonte: Bessa (2011).

Para a análise da natureza do ponto crítico $(0, 0)$ e de sua estabilidade, vamos introduzir alguns resultados que facilitarão tal análise. Inicialmente considera-se um sistema linear autônomo da seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases} \quad (1.8)$$

O sistema (1.8) pode ser escrito na forma matricial, isto é:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ ou } \dot{X} = AX. \quad (1.9)$$

Note que $(0, 0)$ é um ponto crítico de (1.9). Será assumido que a matriz A é não singular, ou seja, $\det(A) \neq 0$. Portanto $(0, 0)$ é o único ponto crítico desse sistema. Pode ser provado que as funções: $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ e $y(t) = c_3 e^{\lambda_1 t} + c_4 e^{\lambda_2 t}$ são soluções do sistema (1.8) e λ satisfaz a equação:

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0. \quad (1.10)$$

A equação (1.10) é dita *equação característica* do sistema (1.8) ou (1.9).

A natureza do ponto crítico $(0, 0)$ pode ser determinada dependendo da natureza das raízes da equação característica (1.10). Esses resultados serão enunciados a seguir.

Teorema 1.1: Natureza do ponto crítico

1. Se as raízes λ_1 e λ_2 são reais, desiguais e de mesmo sinal, então o ponto crítico $(0, 0)$ do sistema (1.8) é um nó;
2. Se as raízes λ_1 e λ_2 são reais, desiguais e de sinais opostos, então o ponto crítico $(0, 0)$ do sistema (1.8) é um ponto de sela;
3. Se as raízes λ_1 e λ_2 são reais e iguais, então o ponto crítico $(0, 0)$ do sistema (1.8) é um nó;
4. Se as raízes λ_1 e λ_2 formam um par complexo conjugado com parte real não nula, então o ponto crítico $(0, 0)$ do sistema (1.8) é um ponto de espiral;
5. Se as raízes λ_1 e λ_2 são imaginários puros, então o ponto crítico $(0, 0)$ do sistema (1.8) é um centro.

Teorema 1.2: Estabilidade assintótica

1. Se ambas as raízes λ_1 e λ_2 são reais e negativas ou complexas conjugadas com parte real negativa, então o ponto crítico $(0, 0)$ do sistema (9) é assintoticamente estável;
2. Se as raízes λ_1 e λ_2 são imaginários puros, então o ponto crítico $(0, 0)$ do sistema (9) é estável, mas não assintoticamente estável;
3. Se qualquer uma das raízes λ_1 e λ_2 são reais e positivas ou se as raízes são complexas conjugadas com parte real positiva, então o ponto crítico $(0, 0)$ do sistema (1.8) é instável.

1.4. Pontos críticos e caminhos de sistemas não lineares.

Considera-se o sistema não linear autônomo da seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases} \quad (1.11)$$

Com ponto crítico isolado $(0, 0)$. Assume-se que P e Q tem a forma:

$$P(x, y) = ax + by + P_1(x, y) \text{ e } Q(x, y) = cx + dy + Q_1(x, y), \quad (1.12)$$

sendo que:

1. a, b, c e d , constantes reais tais que:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0; \quad (1.13)$$

2. $P_1(x, y)$ e $Q_1(x, y)$ tem derivadas parciais de primeira ordem contínuas para todo (x, y) e tais que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{P_1(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{Q_1(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0. \quad (1.14)$$

Então, o sistema (1.8), sob as considerações anteriores toma a forma:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by + P_1(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy + Q_1(x, y) \end{cases}, \quad (1.15)$$

tais que a, b, c e d , satisfazem as condições 1 e 2 anteriores.

Observação: A condição (2) nos diz que os termos não lineares $P_1(x, y)$ e $Q_1(x, y)$ tendem a zero mais rapidamente do que os termos lineares, isto é, $ax + by$ e $cx + dy$.

Se $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ em (20) podem ser expandidos em série de potência em torno de $(0, 0)$, o sistema (16) toma a forma:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial P}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial P}{\partial y}(0,0)y + a_{12}x^2 + a_{22}xy + a_{21}y^2 + \dots \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial Q}{\partial y}(0,0)y + a_{12}x^2 + a_{22}xy + a_{21}y^2 + \dots \end{cases}. \quad (1.16)$$

O sistema (1.11) é da forma dada por (1.8) sendo $P_1(x, y)$ e $Q_1(x, y)$ os termos não lineares de altas ordem no membro direito de (1.11). Nesse sistema, as condições (1) e (2) são satisfeitas e são tais que:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{bmatrix}, \text{ é não singular.} \quad (1.17)$$

Definição 1.4.1: Dado o sistema não linear (1.15), o *sistema linear associado* é dado por:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases}, \quad (1.18)$$

o sistema (1.18) é obtido do sistema não linear (1.15), negligenciando os termos não lineares.

De uma forma geral, como a condição (2) diz que os termos não lineares $P_1(x, y)$ e $Q_1(x, y)$ tendem a zero mais rapidamente do que os termos lineares, isto é, $ax + by$ e $cx + dy$, é de se esperar que o comportamento dos caminhos do sistema (1.18) próximos à origem sejam similares aos caminhos do sistema linear associado.

Em outras palavras, a natureza dos pontos críticos do sistema não linear é similar aos do sistema linear associado. Em geral isto é verdadeiro. Esse resultado será enunciado a seguir.

Considere o sistema não linear autônomo

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by + P_1(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy + Q_1(x, y) \end{cases}, \quad (1.19)$$

tais que a , b , c e d , satisfazem as condições 1. e 2. anteriores e o *sistema linear associado*:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases}, \quad (1.20)$$

Suponha que ambos os sistemas tenham ponto crítico isolado em $(0, 0)$. Sejam λ_1 e λ_2 as raízes da equação característica do sistema linear associado, isto é:

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0. \quad (1.21)$$

Tem-se o seguinte resultado:

Teorema 1.3: Natureza do ponto crítico de sistemas não lineares

1. Se as raízes λ_1 e λ_2 são *reais, desiguais e de mesmo sinal*, então o ponto crítico $(0, 0)$ do sistema linear associado e do sistema não linear é um *nó*;
2. Se as raízes λ_1 e λ_2 são *reais, desiguais e de sinais opostos*, então o ponto crítico $(0, 0)$ do sistema linear associado e do sistema não linear é um *ponto de sela*;
3. Se as raízes λ_1 e λ_2 são *reais e iguais* e não é tal que $a = d \neq 0$ e $b = c = 0$, então o ponto crítico $(0, 0)$ do sistema linear associado e do sistema não linear é um *nó*;
4. Se as raízes λ_1 e λ_2 *formam um par complexo conjugado com parte real não nula*, então o ponto crítico $(0, 0)$ do sistema linear associado e do sistema não linear é um *ponto espiral*;
5. Se as raízes λ_1 e λ_2 são *reais e iguais* e são tais que $a = d \neq 0$ e $b = c = 0$, então embora o ponto crítico $(0, 0)$ do sistema linear associado seja um *nó*, ele pode ser um *nó* ou *ponto em espiral* do sistema não linear;
6. Se as raízes λ_1 e λ_2 são *imaginários puros*, então embora o ponto crítico $(0, 0)$ do sistema linear associado seja um *centro*, ele pode ser um *centro* ou *ponto em espiral* do sistema não linear.

Com relação a estabilidade dos pontos críticos do sistema não linear, tem-se o seguinte resultado:

Teorema 1.4: Estabilidade assintótica para pontos críticos de sistemas não lineares.

1. Se ambas as raízes λ_1 e λ_2 são *reais e negativas ou complexas conjugadas com parte real negativa*, então o ponto crítico $(0, 0)$ do sistema linear associado e do sistema não linear é *assintoticamente estável*;
2. Se as raízes λ_1 e λ_2 são *imaginários puros*, então embora o ponto crítico $(0, 0)$ do sistema linear associado seja *estável*, ele *não é necessariamente um ponto crítico estável* do sistema não linear. Ele pode ser ou *assintoticamente estável* ou *estável* mas *não assintoticamente estável ou instável*;

3. Se qualquer uma das raízes λ_1 e λ_2 são *reais e positivas* ou se as raízes são *complexas conjugadas com parte real positiva*, então o ponto crítico $(0, 0)$ do sistema linear associado e do sistema não linear é *instável*.

1.5. Teoria de Lyapunov para sistemas não lineares

Um dos primeiros a desenvolver estudos sobre sistemas autônomos foi o matemático francês Jules Henri Poincaré (1854-1912), que é responsável pelos conceitos de retrato de fase, análise de pontos críticos e estabilidade.

O matemático e físico russo Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857 – 1918) publicou seu primeiro trabalho sobre estabilidade em 1892 como tese de doutorado, intitulado “The General Problem of Motion Stability” (SILVA, 2013; MONTEIRO 2006).

Segundo Silva (2003), o método da linearização de Lyapunov, também conhecido como primeiro método de Lyapunov, é devido a Poincaré, que divulgou seu trabalho com o nome de linearização de Lyapunov. Este método possibilita investigar localmente a estabilidade assintótica de um sistema não-linear a partir da contraparte linear associada ao sistema original. Para isso basta aproximar o sistema não linear em torno de seus pontos de equilíbrio por série de Taylor, encontrando a matriz Jacobiana, e a sua estabilidade assintótica é definida através do sinal dos autovalores. Trata-se de um resultado de grande relevância prática, pois serve de base para projetos de controladores utilizando modelos linearizados em torno dos pontos de equilíbrio.

Nesta seção trataremos da teoria de Lyapunov para sistemas não lineares, a qual foi utilizada neste trabalho. De acordo Bessa (2015), Silva (2003) e Monteiro (2006). Começando pela linearização de sistemas autônomos descrita a seguir.

1.5.1. Linearização de sistemas autônomos

Seja o sistema

$$\dot{X} = f(X), \text{ no qual } X \in \mathbb{R}^n \text{ e } f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (1.22)$$

Considerando que $f(X)$ seja definida na origem e derivável uma vez, ou seja, de classe C^1 , podemos reescrever o sistema (1.22) como:

$$\dot{X} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{X_e} X + g(X), \quad (1.23)$$

em que $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{X_e}$ representa o primeiro termo do desenvolvimento de $f(X)$ em série de Taylor em torno do ponto de equilíbrio $X_e = 0$ e $g(X)$ representa os termos não lineares.

Por definição, $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ é a matriz Jacobiana de $f(X)$, que será chamada de A :

$$A = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right) & \dots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\right) & \dots & \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right) \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

Reescrevendo o sistema (1.23) temos:

$$\dot{X} = AX + g(X), \quad (1.25)$$

Para linearizar o sistema (1.25) deve-se desprezar os termos não lineares $g(X)$, obtendo apenas:

$$\dot{X} = AX, \quad (1.26)$$

1.5.2. Método da linearização de Lyapunov

O método da linearização de Lyapunov, ou primeiro método de Lyapunov consiste em analisar a matriz A do sistema linearizado (1.26) para concluir sobre a estabilidade do sistema não linear, e afirma que (SILVA, 2003):

Teorema 1.5 Primeiro método de Lyapunov

1. Se o modelo linearizado (1.26) é assintoticamente estável, então o sistema original (1.22) é assintoticamente estável em torno de X_e .
2. Se o modelo linearizado (1.26) é instável, então o sistema original (1.22) é instável em torno de X_e .

A partir do Teorema 1.5 pode-se dizer que, se o modelo linearizado (1.26) é estável, mas não assintoticamente estável, ou seja, algum autovalor de A , em (1.26), tem parte imaginária não nula, nada se pode afirmar sobre o sistema original (1.26).

Para a exemplificação da teoria tratada nesta seção, considera-se a aplicação em um modelo não linear de biodigestor indiano proposta em Bassanezi (1988), que será vista no Apêndice A.

A descrição e detalhamento de biodigestores indiano, chinês e canadense, bem como os seus processos de biodigestão, serão vistas no capítulo 2.

Capítulo 2 Biodigestores: bioprocessos, tipos e estado da arte

Um biodigestor consiste de um reator biológico, ou biorreator, composto por três unidades operacionais: uma câmara de entrada de substrato, a dorna, onde ocorre a biodigestão, e uma câmara para a saída dos produtos e subprodutos. Ele pode ser alimentado por diversos tipos de matéria-prima, incluindo resíduos de origem humana, animal ou vegetal. O principal objetivo da biodigestão é a produção de bioenergia e biofertilizantes (PORTES, 2005; KHAN, 2013).

De acordo com Nogueira (1986) existem dois tipos de biodigestores: os biodigestores em batelada, aqueles que são abastecidos de uma só vez permanecendo fechado até o final do período de fermentação, e os biodigestores contínuos, que são abastecidos regularmente durante o processo fermentativo. Os estágios da biodigestão – bioprocessos – para biodigestores anaeróbicos, são definidos na seção 2.1.

2.1. Bioprocessos

A biodigestão anaeróbica é um processo bioquímico mediado por bactérias capazes de reduzir substratos orgânicos em produtos economicamente comercializáveis, como o ácido acético, o metano e o hidrogênio. Este bioprocessos ocorre na ausência de gás oxigênio e pode ser compreendido pelos seguintes estágios: hidrólise, acidogênese, acetogênese e metanogênese (BISCARO, 2008).

No estágio de hidrólise, as bactérias hidrolíticas secretam enzimas extracelulares que permitem a quebra de grandes moléculas (polissacarídeos, lipídeos e proteínas) em moléculas menores, com a finalidade de transportar estes nutrientes para o interior celular. Após as moléculas serem hidrolisadas pela ação de exoenzimas o bioprocessos atinge a próxima etapa, a chamada acidogênese (BALMANT, 2009; BISCARO, 2008; KHAN, 2013; PORTES, 2005).

Na acidogênese, as moléculas de proteínas, gorduras e carboidratos, hidrolisadas, são transformadas em ácidos graxos voláteis, álcoois, ácido láctico, gás carbônico, hidrogênio, amônia e sulfeto de hidrogênio. Neste processo os solúveis provenientes da hidrólise são convertidos em compostos mais simples que, juntamente

com os ácidos graxos voláteis, são substratos para as bactérias acetogênicas (BALMANT, 2009; BISCARO, 2008; KHAN, 2013; PORTES, 2005).

As reações da acetogênese convertem os produtos gerados na acidogênese em substratos para a fase metanogênica. Tais produtos são o hidrogênio, o dióxido de carbono e o acetato, porém, apenas o hidrogênio e o acetato são utilizados pelas bactérias metanogênicas. O estágio final, ou metanogênese, transforma moléculas de hidrogênio e dióxido de carbono em metano e energia (CH₄) (BALMANT, 2009; BISCARO, 2008; KHAN, 2013; PORTES, 2005).

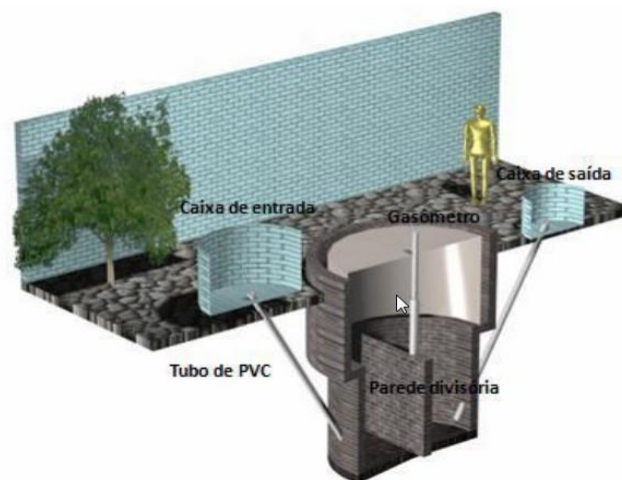
2.2. Biodigestores e seus diferentes tipos

No mercado existem diversos tipos de biodigestores, diferindo entre si pelas dimensões volumétricas, geometria, modo de condução, materiais de construção e finalidades. Os modelos mais usados no Brasil são os: indiano, chinês e canadense (batelada).

A história dos biodigestores é antiga e a Índia foi um dos primeiros países a instalar biodigestores para a produção de biogás, por volta de 1908. Na China a instalação iniciou-se na década de cinquenta. No Brasil, essa implantação começou na década de setenta, sendo a maioria do tipo chinês e indiano (CARIOCA, 1984).

Biodigestor Indiano: Segundo Balmant (2009), este modelo é abastecido continuamente (modo de condução contínua) por resíduos orgânicos. É construído em formato cilíndrico, de alvenaria ou pedra, e seu tanque de fermentação possui uma parede divisória, separando-o em duas câmaras. Na parte superior do tanque é acoplado um gasômetro flutuante confeccionado em aço. Acima do nível do solo há uma caixa de entrada, que comporta os resíduos para o tratamento biológico, e uma caixa de saída, que acomodará o biofertilizante, assim como mostra a Figura 2.1.

Figura 2.1: Biodigestor indiano

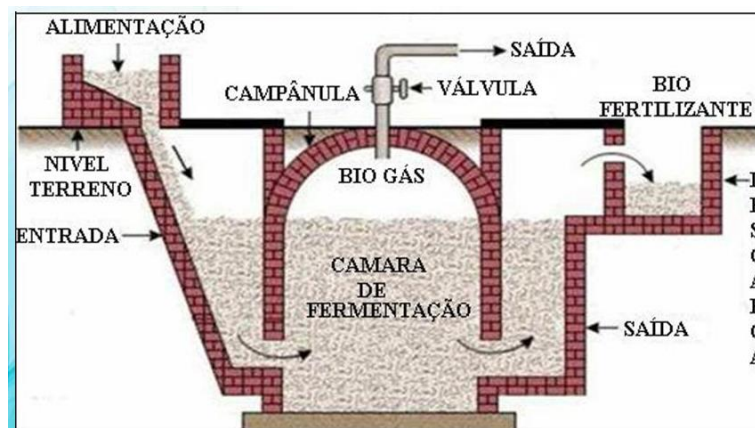


Fonte: Junqueira (2014).

Biodigestor Chinês: Segundo Portes (2005), o biodigestor chinês é constituído de um tanque cilíndrico de alvenaria, duas calotas esféricas, caixa de entrada, caixa de saída e uma boca de inspeção, veja Figura 2.2.

Seu processo de produção se difere do modelo indiano, por trabalhar com pressão variável, com isso ele não possui saída automática do efluente e também apresenta fluxo e refluxo do substrato, pela tubulação de saída (PORTES, 2005).

Figura 2.2: Biodigestor chinês

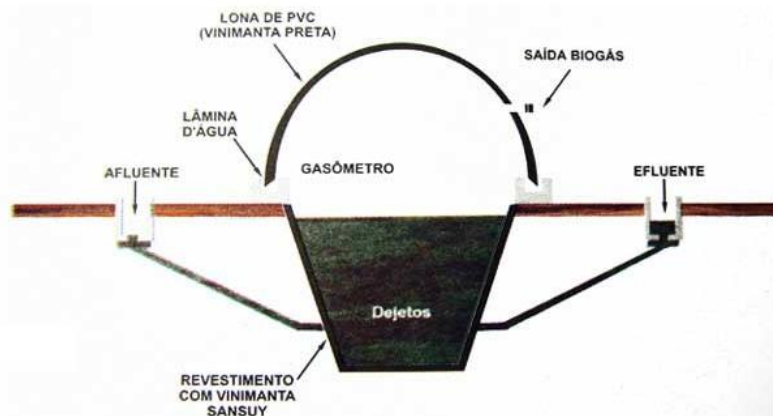


Fonte: Junqueira (2014).

Biodigestor Canadense: O biodigestor canadense (batelada) é formado basicamente por um corpo cilíndrico, um gasômetro flutuante e uma estrutura para guia do gasômetro, que poderá ser adotado um sistema de trave e roldana, tratando-se de um

sistema simples e não exigindo uma preocupação operacional, veja Figura 2.3 (PORTES, 2005).

Figura 2.3: Biodigestor canadense



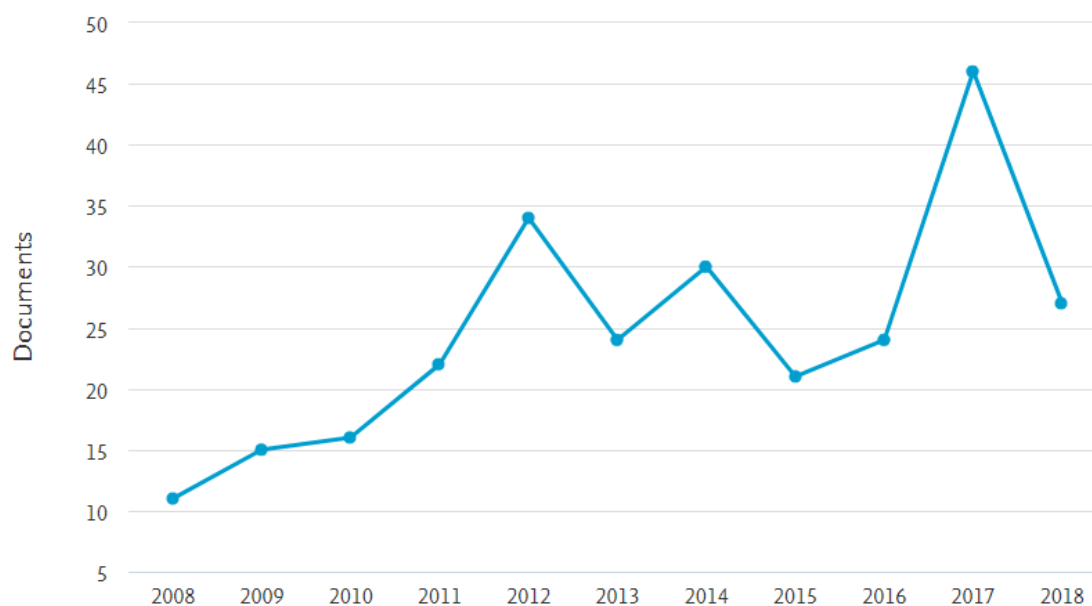
Fonte: Junqueira (2014).

2.3. Estado da arte sobre a pesquisa de biodigestores

Nesta seção apresenta-se um levantamento sobre a pesquisa desenvolvida em biodigestores divulgada através de relatório do banco de dados Scopus (2018). De acordo com o banco de dados do site <https://www.scopus.com>, utilizando o VPN UNESP, ao pesquisar o tema biodigestor (*Biodigester*) foram encontrados 269 documentos (*Documents*). Ao adicionar à pesquisa o tema sistemas dinâmicos (*Dynamics Systems*), foram encontrados apenas 31 documentos. Ao adicionar à pesquisa o tema (*Biodigester- Biogas*), 145 trabalhos foram produzidos nos últimos 10 anos.

A figura 2.4, vista a seguir, mostra o desenvolvimento da pesquisa, sem considerar sistemas dinâmicos e biogás na busca realizada, ao longo dos últimos 10 anos quando a pesquisa focou no tema biodigestor (*Biodigester*). A maioria dos 269 trabalhos focou na produção de biofertilizantes através de biodigestores. Serão destacados os autores mais citados.

Figura 2.4: Documentos (*Biodigester*) por ano 2008 – 2018



Fonte: Scopus (2018).

Na Figura 2.4 observa-se um considerável aumento nos últimos dez anos de publicações relacionados a biodigestores, nota-se que o ano mais expressivo foi 2017. Pode-se dizer que em 2018 o número de documentos é menor, comparado a 2017, pois esse levantamento foi feito no mês de julho de 2018, com isso há grandes chances de se ter um aumento na curva até o fim deste ano, se continuar seguindo esse notório padrão de crescimento.

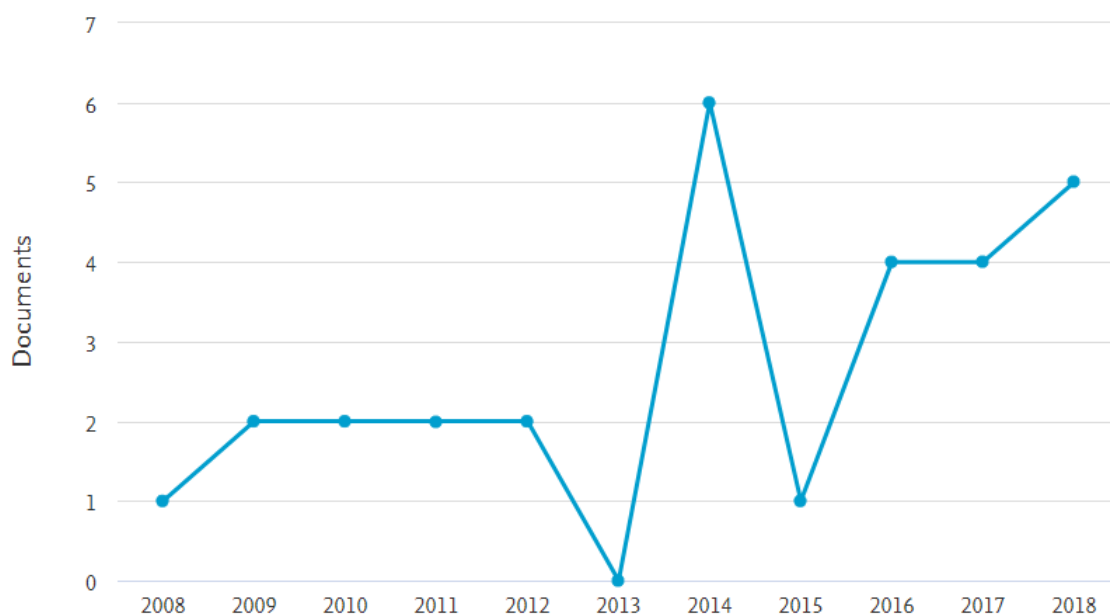
A busca mostrou os trabalhos dos autores mais citados relacionados aos documentos publicados na área de biodigestores utilizando o tema *Biodigester*. De acordo com a pesquisa realizada na Scopus (2018), os autores que mais produziram documentos sobre o tema biodigestor são citados a seguir:

- O autor Preston, T. R. tem mais publicações em relação aos 15 autores encontrados, cerca de 38 documentos. Em seu trabalho mais citado Preston (2011) aborda a eficiência de um biodigestor de fluxo contínuo e as especificações de construção e instalação de biodigestores;
- O estudo mais recente de Preston, T. R., em Yen (2017) retrata o efeito sobre a produção de metano ao adicionar diferentes proporções de espinafre de água doce ao esterco de búfala como substrato em biodigestores;

- O Segundo autor com mais trabalhos relacionados a biodigestor é Chaudhari (2007) com 12 documentos, obtendo em seu trabalho mais citado, 63 citações. Neste trabalho este retrata como a remoção da cor do melão melhora o rendimento do processo de biodigestão anaeróbica;
- Em Chaudhari (2016), documento mais recente do autor, estuda-se a remoção de COD (Chemical Oxygen Demand) e da cor do efluente do biodigestor (BDE - Biochemical Oxygen Demand) de uma destilaria de álcool à base de grãos de arroz usando coagulantes inorgânicos.

Segundo a Scopus (2018), quando se acrescenta o tema sistemas dinâmicos (*Dynamic Systems*) junto à pesquisa sobre biodigestores (*Biodigester*), obtém-se o seguinte relatório de dados dos últimos dez anos, mostrado na figura 2.5, relacionados na produção de biofertilizantes através de biodigestores, utilizados, inclusive para a alimentação e produção de peixes.

Figura 2.5: Documentos (*Biodigester, Dynamic Systems*) por ano 2008 – 2018.



Fonte: Scopus (2018).

Na Figura 2.5 tem-se que o ano de 2014 obteve maior registros de documentos relacionados a biodigestores e sistemas dinâmicos, com 6 documentos publicados. Os

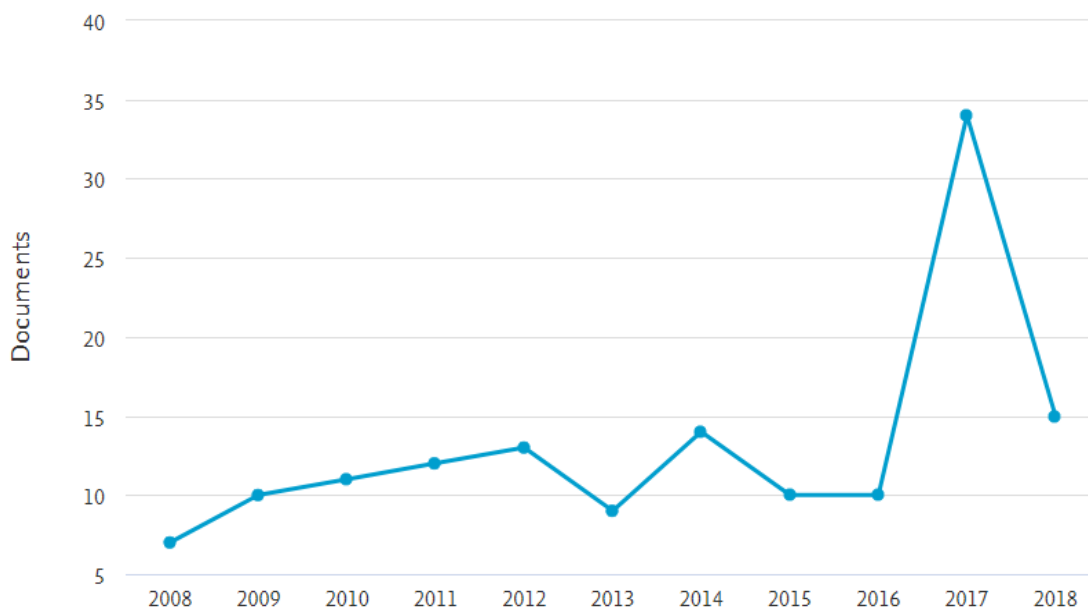
anos anteriores não foram muito expressivos em relação a quantidades de publicações (SCOPUS, 2018).

Os autores com mais publicações nesta área são Christensen, K. V e Preston, T. R. e seus trabalhos são destacados a seguir:

- Christensen (2010) discute as tecnologias de separação usadas para o tratamento de suspensões de animais e os processos físicos e químicos envolvidos na separação dos nutrientes presentes na matéria animal, a fim de melhorar o solo;
- Preston, T. R. em Nouanthavong et al (2012), compara as folhas de Taro e Lentilha como suplementos para tilápia (*Oreochromis niloticus*) cultivada em lagoas abertas adubadas com efluente do biodigestor ou não adubadas;
- Preston, T. R. em Thy et al (2008) trabalharam os efeitos do espinafre e da lentilha-d'água no desempenho do crescimento de peixes em poças de policultura.

Quando se acrescenta o tema Biogás (*Biogas*) junto com Biodigestores (*Biodigester - Biogas*), 145 trabalhos são apontados na base de dados (SCOPUS, 2018). A figura 2.6 apresenta os dados dos últimos dez anos, envolvendo estes temas.

Figura 2.6: Documentos (*Biodigester, Dynamic Systems, Biogas*) por ano 2008 – 2018



Fonte: Scopus (2018).

Segundo Scopus (2018), o ano mais expressivo para pesquisas de biodigestores e biogás foi 2017, com 34 documentos, sendo novamente Preston, T. R. o autor com maior produtividade. Seu trabalho mais recente sobre esse tema foi Yen (2017), em que estuda a produção de biogás a partir de espinafre aquático combinado com estrume de búfalos em um sistema de biodigestores.

O segundo autor que mais produziu foi Ofoefule, A.U., Ofoefule et al (2011), no qual investiga o efeito do tratamento químico e mistura de resíduos na produção de biogás a partir de serapilheira de Kambala (*Chlorophora excelsa*).

Nota-se que os artigos citados nesta seção, retirados do banco de dados Scopus (2018), trabalham com pesquisas de campo e relatos experimentais, sem apresentar um modelo matemático propriamente dito à pesquisa realizada. Isso faz com que a pesquisa realizada neste trabalho se diferencie das demais pelo tratamento matemático de um modelo não linear e dinâmico de biodigestor indiano, o qual é tratado de modo contínuo (volume constante), assim como em Preston (2011). A formulação do modelo também baseou-se em Biscaro (2008), Schmidell (2001) e Portes (2005).

Juntamente com a teoria de sistemas dinâmicos e de Lyapunov, vistas no capítulo 1, as definições apresentadas neste capítulo, em destaque para o biodigestor indiano que possui modo de produção contínuo, serão utilizadas na formulação matemática do modelo proposto neste trabalho e seus resultados preliminares, apresentados no próximo capítulo, quando considera-se a fase metanogênica do processo.

Capítulo 3 Modelo não linear para biodigestão em um biodigestor indiano de modo contínuo e resultados preliminares

Neste capítulo apresenta-se uma descrição do modelo proposto de biodigestão anaeróbica em um biodigestor indiano que se apoia na estrutura e nas condições de um reator de modo contínuo. Também se descreve alguns resultados preliminares deste modelo explorando a teoria de sistemas dinâmicos e o método de Lyapunov vistas no Capítulo 1.

3.1. Modelo Matemático

O modelo proposto neste trabalho considera a dinâmica não linear do processo de biodigestão, o qual relaciona a concentração de bactérias, que produzem o biogás, a quantidade deste gás no interior do biodigestor, e explora a taxa de variação da biomassa existente.

O modelo acoplado proposto a seguir é uma variação daquele apresentado por Tanaka et al (2016), baseando-se no balanço de massa dos componentes do biodigestor: substrato ($s(t)$ - medido em gL^{-1}), produto ($p(t)$ - medido em gL^{-1}) e bactérias ($x(t)$ - medido em gL^{-1}). Esta abordagem se diferencia dos trabalhos de Bassanezi (1988) e Biscaro (2008) pela inserção da variável $s(t)$ e de inserção de uma equação para a variação da concentração de bactérias pelo tempo.

3.1.1. Balanço de massa

Para a elaboração do modelo dinâmico que descreve a variação de concentração de bactérias, a produção de biogás no interior de um biodigestor indiano, bem como o consumo de substrato, parte-se da equação de balanço de massa, considerando o volume constante (SCHMIDELL, 2001).

De acordo com Schmidell (2001) o acúmulo de massa em um sistema é dado pela equação (3.1)

$$\dot{m} = m_e - m_s + m_g - m_c \quad (3.1)$$

em que:

m – massa de um componente do sistema (s, p ou x) expressa por $m = CV$, em que C é a concentração de tal componente e V o volume reacional do biodigestor, medido em L .

m_e – massa que entra na fronteira do biodigestor;

m_s – massa que sai pela fronteira do reator; (3.2)

m_g – massa gerada no interior do sistema;

m_c – massa consumida

Bactérias: como no biodigestor considerado não temos massa de bactérias que entra e nem que se consome, ou seja $m_e = 0$ e $m_c = 0$, tem-se:

$$\dot{m} = -m_s + m_g; \quad (3.3)$$

de acordo com Schmidell (2001) essa equação de balanço de fluxo mássico pode ser escrita como:

$$\frac{dm}{dt} = -Qx + r_g V, \text{ no qual } r_g = \mu x. \quad (3.4)$$

Na equação (3.4) r_g representa a velocidade das bactérias, Q , medido em dia^{-1} , expressa o fluxo, ou vazão (tanto de entrada quanto de saída, pois considera-se um reator de volume constante) e μ é a velocidade específica de crescimento das bactérias, medida em dia^{-1} , a qual pode ser expressa pela equação de Monod como (SCHMIDELL, 2001):

$$\mu = \frac{\mu_M s}{K_s + s}, \quad (3.5)$$

em que μ_M é a velocidade específica máxima de crescimento, medida em dia^{-1} , s é a concentração de substrato e K_s é a constante de saturação para este substrato, medida em gL^{-1} .

De (3.2), (3.4) e (3.5) tem-se que $\frac{d(xV)}{dt} = -Qx + \mu xV$, ou seja:

$$\frac{dx}{dt} = \left(-\frac{Q}{V} + \frac{\mu_M s}{K_s + s}\right)x \quad (3.6)$$

Biogás: o balanço de massa do produto da biodigestão é análogo ao de bactéria, porém os termos de entrada e consumo, tratados na equação (3.1), são nulos. Logo, a equação de balanço tem a forma:

$$\frac{d(pV)}{dt} = -pQ + \frac{\mu x}{Y_p} V ; \quad (3.7)$$

em que p é a concentração do produto (biogás) e Y_p é o coeficiente de rendimento celular de bactérias para produto, medida em gg^{-1} . Rearranjando (3.7) e substituindo (3.5), tem-se:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{Q}{V} p + \frac{\mu_{MS}}{K_s + s} \frac{x}{Y_p}. \quad (3.8)$$

Substrato: analogamente aos demais balanços, a variação do substrato no sistema é tal que:

$$\frac{d(sV)}{dt} = Q(s_0 - s) - r_s V, \quad (3.9)$$

em que r_s representa a velocidade de saída do substrato e, segundo Schmidell (2001), pode ser escrito como:

$$r_s = \frac{\mu x}{Y_s}; \quad (3.10)$$

no qual Y_s representa o rendimento células de bactérias para substrato, medida em gg^{-1} . De (3.5) e (3.9) segue:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{Q}{V} (s_0 - s) - \frac{\mu_{MS}}{K_s + s} \frac{x}{Y_s}. \quad (3.11)$$

Portanto, as equações (3.6), (3.8) e (3.11) compõe um sistema não linear de equações diferenciais capazes de modelar a dinâmica das reações dentro de um biodigestor indiano. Tal sistema é descrito em (3.12)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \left(-\frac{Q}{V} + \frac{\mu_{MS}}{K_s + s} \right) x \\ \frac{dp}{dt} = -\frac{Q}{V} p + \frac{\mu_{MS}}{K_s + s} \frac{x}{Y_p} \\ \frac{ds}{dt} = \frac{Q}{V} (s_0 - s) - \frac{\mu_{MS}}{K_s + s} \frac{x}{Y_s} \end{cases} . \quad (3.12)$$

A análise do modelo proposto, baseada na teoria de Lyapunov apresentada no capítulo 1, é realizada a seguir na seção 3.3.

3.1.2. Análise do espaço de estado do sistema

O objetivo desta seção é apresentar a análise qualitativa da dinâmica não linear de equações definidas na seção 3.2. Tais estudos consideram os pontos críticos desta

dinâmica em duas situações distintas: com condições iniciais nulas e com condições iniciais não nulas.

3.1.3. Determinação dos pontos críticos

Supondo-se as condições iniciais não nulas e $x = \alpha$ para a determinação dos pontos críticos do sistema de equações (3.12), obtém-se um único ponto crítico relativo ao sistema não linear (3.12), a saber:

$$P = \left(\alpha, \frac{\alpha}{Y_p}, \left(s_0 - \frac{\alpha}{Y_s} \right) \right). \quad (3.13)$$

Considerando condições iniciais nulas, isto é, $s_0 = 0$, o sistema de equações (3.12) se escreve como:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \left(-\frac{Q}{V} + \frac{\mu_{MS}}{K_S + S} \right) x \\ \frac{dp}{dt} = -\frac{Q}{V} p + \frac{\mu_{MS}}{K_S + S} \frac{x}{Y_p} \\ \frac{ds}{dt} = -\frac{Q}{V} s - \frac{\mu_{MS}}{K_S + S} \frac{x}{Y_S} \end{cases}, \quad (3.14)$$

Na determinação dos pontos críticos de (3.14), obtém-se:

$$x \left(-\frac{Q}{V} + \frac{\mu_{MS}}{K_S + S} \right) = 0, \quad (3.14-a)$$

$$-\frac{Q}{V} p + \frac{\mu_{MS}}{K_S + S} \frac{x}{Y_p} = 0, \quad (3.14-b)$$

$$-\frac{Q}{V} s - \frac{\mu_{MS}}{K_S + S} \frac{x}{Y_S} = 0. \quad (3.14-c)$$

Através das equações (3.14-a, 3.14-b, 3.14-c), tem-se as seguintes situações:

i) Se, em (3.14-a), $x = \alpha = 0$ então, em (3.14-b):

$$p = 0 \quad (3.15)$$

Se $p = 0$ tem-se que o ponto crítico P é expresso por P_1 em (3.16):

$$P_1 = (0,0,0), \quad (3.16)$$

ii) Se, em (3.14-a), $x = \alpha \neq 0$, então:

$$\frac{Q}{V} = \frac{\mu_{MS}}{K_S + S} e, \text{ em (3.14-c), } s = -\frac{x}{Y_S}. \quad (3.17)$$

Considerando (3.14 - b) e (3.17) tem-se apenas uma possibilidade para $x = \alpha \neq$

0:

$$p = \frac{x}{Y_p} \quad (3.18)$$

Caso contrário, quando $x = \alpha = 0$, tem-se a condição $\frac{Q}{V} = 0$, a qual não se verifica pois Q e V são sempre positivas. Para $x = \alpha \neq 0$ o ponto P_2 é expresso de acordo com as condições (3.17) e (3.18).

$$P_2 = \left(\alpha, \frac{\alpha}{Y_p}, -\frac{\alpha}{Y_s} \right) \quad (3.19)$$

Na próxima seção será realizada a análise da estabilidade assintótica dos dois pontos críticos.

3.1.4. Análise da estabilidade assintótica do 1º ponto crítico

Para a análise da estabilidade assintótica do ponto crítico $P_1 = (0, 0, 0)$, temos a seguinte matriz jacobiana associada ao sistema (3.14):

$$M = \begin{bmatrix} -\frac{Q}{V} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{Q}{V} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{Q}{V} \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

com polinômio característico da forma:

$$Q(\lambda) = \left(-\frac{Q}{V} - \lambda \right)^3. \quad (3.21)$$

Nota-se que o polinômio (3.21) tem raiz, $\lambda = -\frac{Q}{V} < 0$, com multiplicidade 3, concluindo, de acordo com a teoria vista no capítulo 2, que o ponto P_1 é assintoticamente estável.

3.1.5. Análise da estabilidade assintótica do 2º ponto crítico

Para a análise da estabilidade assintótica do ponto crítico $P_2 = \left(\alpha, \frac{\alpha}{Y_p}, -\frac{\alpha}{Y_s} \right)$, considera-se a translação:

$$\begin{aligned} x_1 &= x - \alpha \\ x_2 &= p - \frac{\alpha}{Y_p} \\ x_3 &= s + \frac{\alpha}{Y_s} \end{aligned}, \quad (3.22)$$

que transforma o ponto P_2 na origem de um novo sistema de coordenadas no espaço de estados, e cujo sistema de equações (3.14) tem a forma:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \left(-\frac{Q}{V} + \frac{\mu_M(x_3 - \frac{\alpha}{Y_S})}{K_S + (x_3 - \frac{\alpha}{Y_S})} \right) (x_1 + \alpha) \\ \dot{x}_2 = -\frac{Q}{V} \left(x_2 + \frac{\alpha}{Y_p} \right) + \frac{\mu_M(x_3 - \frac{\alpha}{Y_S})}{K_S + (x_3 - \frac{\alpha}{Y_S})} \frac{(x_1 + \alpha)}{Y_p} \\ \dot{x}_3 = -\frac{Q}{V} \left(x_3 - \frac{\alpha}{Y_S} \right) - \frac{\mu_M(x_3 - \frac{\alpha}{Y_S})}{K_S + (x_3 - \frac{\alpha}{Y_S})} \frac{(x_1 + \alpha)}{Y_S} \end{cases}, \quad (3.23)$$

em que $\dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt}$, $\dot{x}_2 = \frac{dx_2}{dt}$ e $\dot{x}_3 = \frac{dx_3}{dt}$, (x_1, x_2, x_3) é o novo vetor de estados.

O sistema não linear de equações (3.23) é o sistema de equações (3.14) transladado à origem do espaço x_1, x_2, x_3 , que permite a análise do ponto crítico P_2 via técnica de Lyapunov. Para tal, considera-se o sistema linear associado a dinâmica de equações (3.23) a partir do cálculo da matriz jacobiana, baseando-se em (SLOTINE,1991; MONTEIRO, 2006), de acordo com o que segue:

$$N = \begin{bmatrix} -\frac{Q}{V} - \frac{\mu_M \alpha}{Y_p k_s - \alpha} & 0 & \frac{\alpha Y_S^2 K_S \mu_M}{(Y_S k_s - \alpha)^2} \\ -\frac{\mu_M \alpha}{(Y_S k_s - \alpha) Y_p} & -\frac{Q}{V} & \frac{\alpha \mu_M Y_S^2}{Y_p (Y_S k_s - \alpha)^2} \\ \frac{\alpha}{Y_S k_s - \alpha} & 0 & -\frac{Q}{V} - \frac{\mu_M \alpha (Y_S k_s - \alpha - \alpha Y_S)}{(Y_S k_s - \alpha)^2} \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

Desta forma o sistema linear associado a dinâmica (3.23) é expresso por:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \left(-\frac{Q}{V} - \frac{\mu_M \alpha}{Y_p k_s - \alpha} \right) x_1 + \left(\frac{\alpha Y_S^2 K_S \mu_M}{(Y_S k_s - \alpha)^2} \right) x_3 \\ \dot{x}_2 = -\frac{\mu_M \alpha}{(Y_S k_s - \alpha) Y_p} x_1 - \frac{Q}{V} x_2 + \frac{\alpha \mu_M Y_S^2}{Y_p (Y_S k_s - \alpha)^2} x_3 \\ \dot{x}_3 = \frac{\alpha}{Y_S k_s - \alpha} x_1 - \left(\frac{Q}{V} + \frac{\mu_M \alpha (Y_S k_s - \alpha - \alpha Y_S)}{(Y_S k_s - \alpha)^2} \right) x_3 \end{cases}, \quad (3.25)$$

a matriz (3.24) pode ser redefinida, para simplificação dos cálculos, como:

$$N = \begin{bmatrix} -D - F & 0 & Y_S G \\ -\frac{F}{Y_p} & -D & \frac{Y_S G}{Y_p} \\ \frac{F}{Y_S} & 0 & -D - H \end{bmatrix}, \quad (3.26)$$

em que:

$$D = \frac{Q}{V}, F = \frac{\mu_M}{Y_S K_S - \alpha}, G = \frac{\alpha \mu_M K_S Y_S}{(Y_S K_S - \alpha)^2} \text{ e } H = \frac{\alpha \mu_M (K_S Y_S - \alpha - Y_S \alpha)}{(Y_S K_S - \alpha)^2}. \quad (3.27)$$

Com isso, o polinômio característico de (3.26) é dado pela expressão:

$$R(\lambda) = -(D + F + \lambda)(D + \lambda)(D + H + \lambda) + FG(D + \lambda) = 0. \quad (3.38)$$

Para encontrar as raízes do polinômio do terceiro grau de equação (3.38) podemos reduzir o seu grau para 2, uma vez que a primeira raiz $\lambda_1 = -D$ é facilmente encontrada colocando-se o termo $(D + \lambda)$ em evidência na equação (3.38). Logo, tem-se a redução do polinômio (3.38) para um outro do segundo grau, resultante da expressão $-(D + F + \lambda)(D + H + \lambda) + FG = 0$, a qual é equivalente a:

$$R_2(\lambda) = \lambda^2 + (A + B)\lambda + AB - FG = 0, \quad (3.29)$$

no qual $A = D + F$ e $B = D + H$. Tal polinômio do segundo grau possui discriminante:

$$\Delta = (F - H)^2 + 4FG. \quad (3.30)$$

Desta forma, tem-se que as raízes do polinômio (3.29) são:

$$\lambda_2 = \frac{-(A+B) + \sqrt{(F-H)^2 + 4FG}}{2} \text{ e } \lambda_3 = \frac{-(A+B) - \sqrt{(F-H)^2 + 4FG}}{2} \quad (3.31)$$

De acordo com Balmant (2008), os parâmetros K_S , Y_S , Y_p e μ_M são positivos, sendo assim, considerando $\alpha > 0$, tem-se $F, H > 0$ sempre que:

$$Y_S K_S > \alpha(1 + Y_S) > \alpha, \quad (3.32)$$

garantindo que $\Delta > 0$. Além disso, a única condição de $\Delta = 0$ é que $F = H$ e $\alpha = 0$ o que não se satisfaz, pois contradiz a condição (ii) da seção 3.1.

Nota-se que o sistema (3.25) atende as condições de estabilidade assintótica, vistas na teoria do capítulo 1, quando as raízes λ_1, λ_2 e λ_3 são negativas. De acordo com o exposto temos que $\lambda_1, \lambda_3 < 0$ e $\lambda_2 < 0$ desde que a expressão (3.33) se verifique :

$$\sqrt{(F - H)^2 + 4FG} < A + B \Rightarrow GF < AB \quad (3.33)$$

Portanto, se os parâmetros atendem (3.32) e (3.33), então P_2 é ponto crítico assintoticamente estável do sistema de equações (3.25) sendo, via Lyapunov, um ponto crítico assintoticamente estável do sistema não linear original de equações (3.23) (SLOTINE, 1991).

Na próxima seção é realizada as simulações computacionais do modelo (3.14) aplicada aos pontos P_1 , definido em (3.16) e P_2 , em (3.19), através do software MatLab 2011a.

Capítulo 4 Simulações computacionais

Para as simulações computacionais, o modelo apresentado em (3.12) foi implementado em MatLab 2011a, utilizando um notebook Samsung Intel Inside Celeron (Duo Core), com 4GB de memória RAM. Os resultados numéricos foram obtidos considerando-se a fase de metanogênese no processo de biodigestão considerado em relação ao modelo visto no capítulo 3. Para a execução deste foram utilizados os valores dos parâmetros: μ_M , K_S , Y_S , Y_p , Q e V , de acordo com Balmant (2009), com suas respectivas unidades de medida, os quais são apresentados na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 - Valores de parâmetros na fase metanogênese.

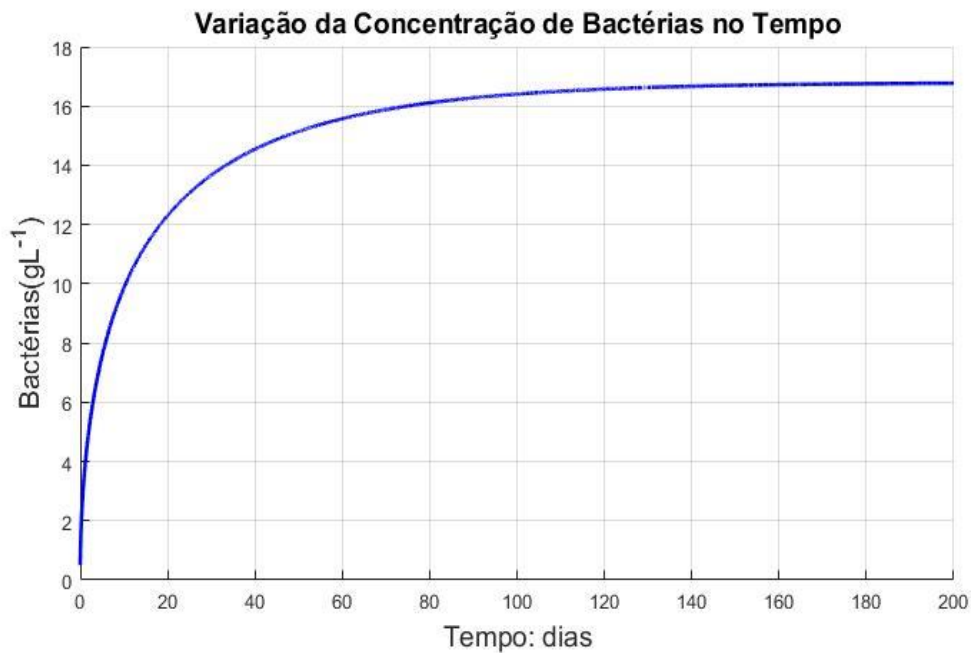
Parâmetro	Descrição	Unidade	Valor
μ_M	Velocidade de crescimento máximo específico	dia^{-1}	0.3283
K_S	Constante de saturação de substrato	gL^{-1}	0.5470
Y_S	Rendimento células de bactérias para substrato	gg^{-1}	2.1885
Y_p	Rendimento celular de bactérias para produto	gg^{-1}	0.4226
Q	Fluxo ou vazão	dia^{-1}	500
V	Volume reacional	L	2000

Fonte: Balmant (2008).

4.1. Simulação computacional em torno do ponto crítico P_1

A simulação computacional do ponto crítico $P_1 = (0,0,0)$ foi feita considerando a condição inicial $\bar{P} = (0.5,0.5,23)$ e os parâmetros da Tabela 4.1, ambos aplicados ao modelo definido em (3.12). A ferramenta computacional empregada foi o pacote ode45 do Matlab 2011a, o qual resolve o sistema não linear com o método Runge-Kutta-Fehlberg com erro de quarta ordem. A partir disso foram geradas as curvas de resposta no tempo vistas nas Figuras 4.1; 4.2; 4.3. Estas figuras mostram o processo de digestão anaeróbica que ocorre no interior do biodigestor, na fase de metanogênese.

Figura 4.1: Perfil da concentração de bactérias metanogênicas ao longo do tempo



Fonte: Autores (2018).

Na Figura 4.1, observa-se que a concentração máxima de bactérias no biodigestor é atingida a partir de 80 dias, se mantendo constante após este tempo. Isto ocorre devido ao fato de que esta é a fase final de produção de biogás, onde não há quantidades viáveis de substrato a serem consumidos, impossibilitando a geração de novos indivíduos no meio.

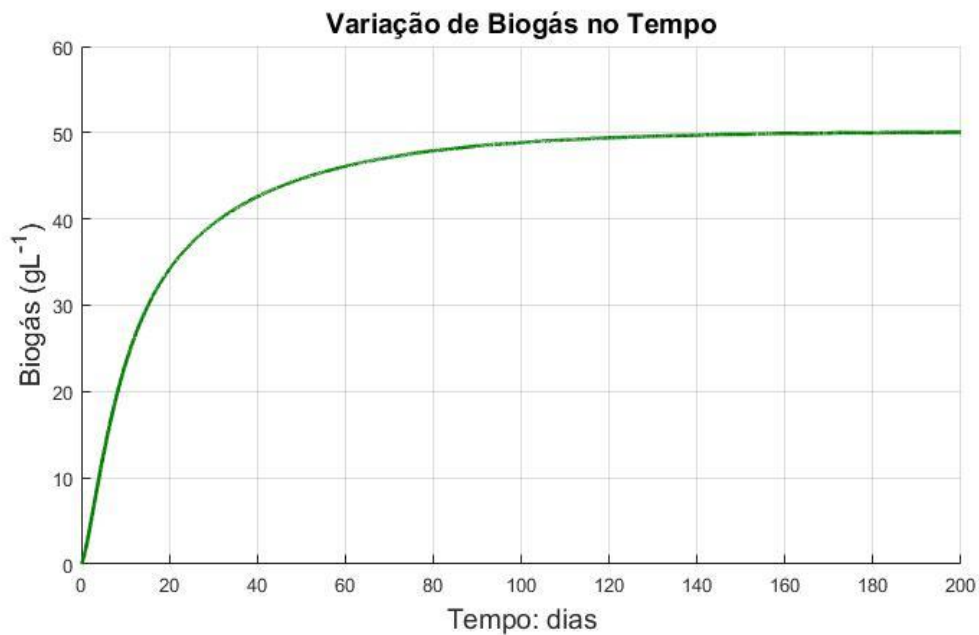
Figura 4.2: Variação da concentração de substrato em relação ao tempo.



Fonte: Autores (2018).

Na Figura 4.2, nota-se o decaimento na concentração de substrato ao longo dos dias de fermentação. Este fenômeno reflete o uso de s pelas bactérias em diversas funções, entre elas a manutenção do metabolismo próprio e a produção de biogás. Quando a população de bactérias atinge a concentração máxima, o consumo de substrato é constante, implicando no comportamento estacionário a partir dos 80 dias.

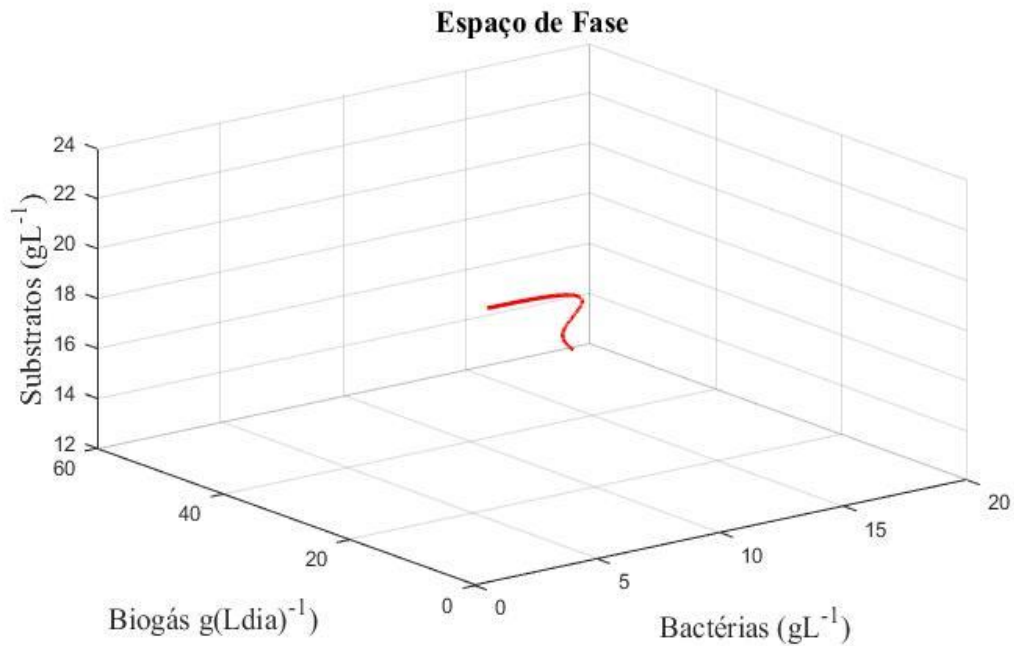
Figura 4.3: Perfil da concentração do biogás no decorrer do tempo.



Fonte: Autores (2018).

Na Figura 4.3, a quantidade de biogás produzido atinge um valor máximo a partir de 100 dias, uma vez que a concentração de substrato não é viável para aumentar sua conversão em produtos. Desta forma, há estagnação no crescimento microbiano e, por conseguinte, na produção de biogás.

Figura 4.4: Espaço de fase do sistema relacionado ao primeiro ponto crítico.



Fonte: Autores (2018).

A Figura 4.4 representa o espaço de fase do sistema (3.12). Percebe-se que a curva converge para o ponto de equilíbrio rapidamente, validando geometricamente a sua estabilidade assintótica.

Através dos parâmetros da Tabela 4.1, tem-se a matriz jacobiana, calculada no ponto de equilíbrio $P_1 = (0,0,0)$, para a análise numérica da estabilidade assintótica, de acordo com a teoria vista no Capítulo 1:

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} -0.2500 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.2500 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & -0.2500 \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

cujas raízes associadas ao polinômio característico são:

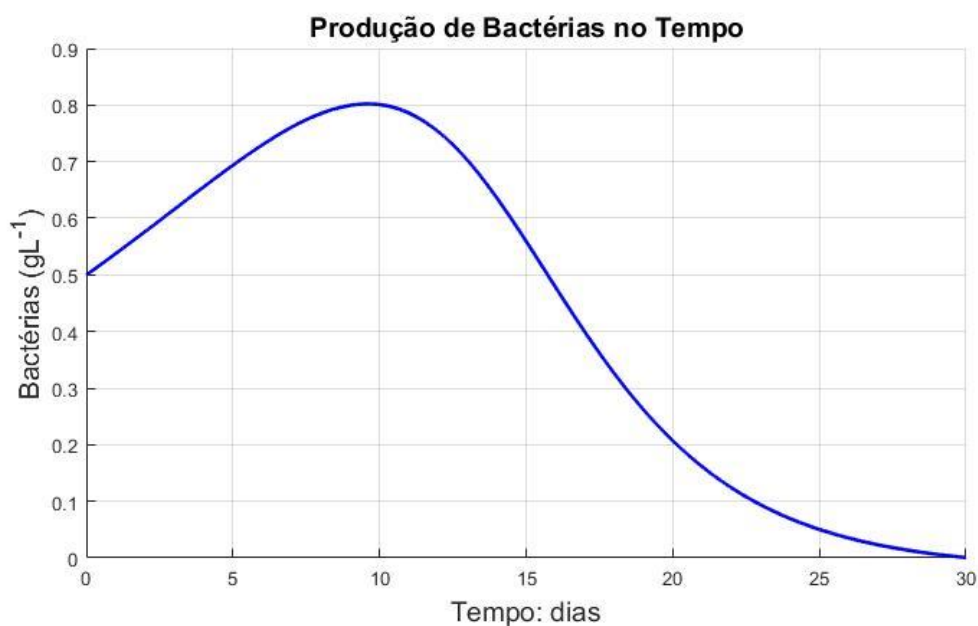
$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -0.2500. \quad (4.2)$$

Desta forma, tem-se que os autovalores (4.2) satisfazem a condição de estabilidade assintótica do Teorema 1.4 do Capítulo 1.

4.2. Simulação computacional em torno do ponto crítico P_2

Utiliza-se o mesmo ponto inicial $\bar{P} = (0.5, 0.5, 23)$ da seção 4.1. para iniciar a simulação em torno do ponto crítico $P_2 = (\alpha, \frac{\alpha}{Y_p}, -\frac{\alpha}{Y_s})$, com $\alpha = 0.02$. Efetua-se então a simulação computacional para o modelo definido em (3.23) os valores dos parâmetros apresentados na Tabela 4.1.

Figura 4.5: Variação da concentração de bactérias no tempo.



Fonte: Autores (2018).

Na Figura 4.5, o crescimento máximo de população de bactérias ocorre no intervalo de $8 < t < 11$ dias, decrescendo rapidamente após este tempo. Isto mostra que, nesse ponto crítico P_2 , a curva se estabiliza mais rapidamente comparada ao ponto P_1 . Seu decrescimento se dá pelo fato de que as bactérias diminuem sua velocidade de crescimento, fazendo com que morram mais bactérias do que são reproduzidas ao longo do tempo.

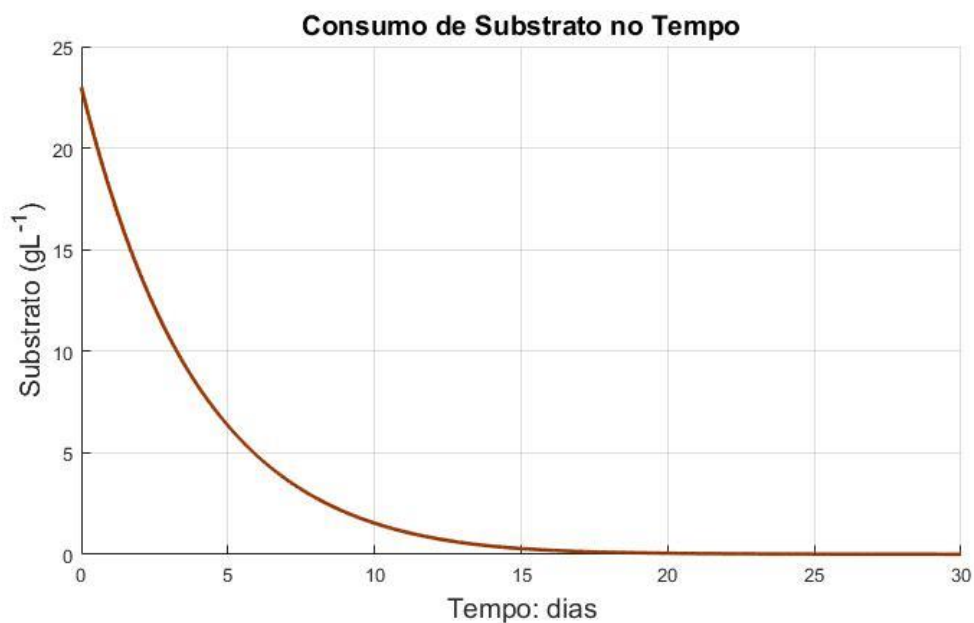
Figura 4.6: Variação do biogás no tempo



Fonte: Autores (2018).

Nota-se que na Figura 4.6, a quantidade de biogás produzido atinge um valor máximo no intervalo $9 < t < 11$ dias e sua forma é semelhante à Figura 4.5, pois as bactérias começam a se desenvolver quase que proporcionalmente a forma que é gerado o biogás.

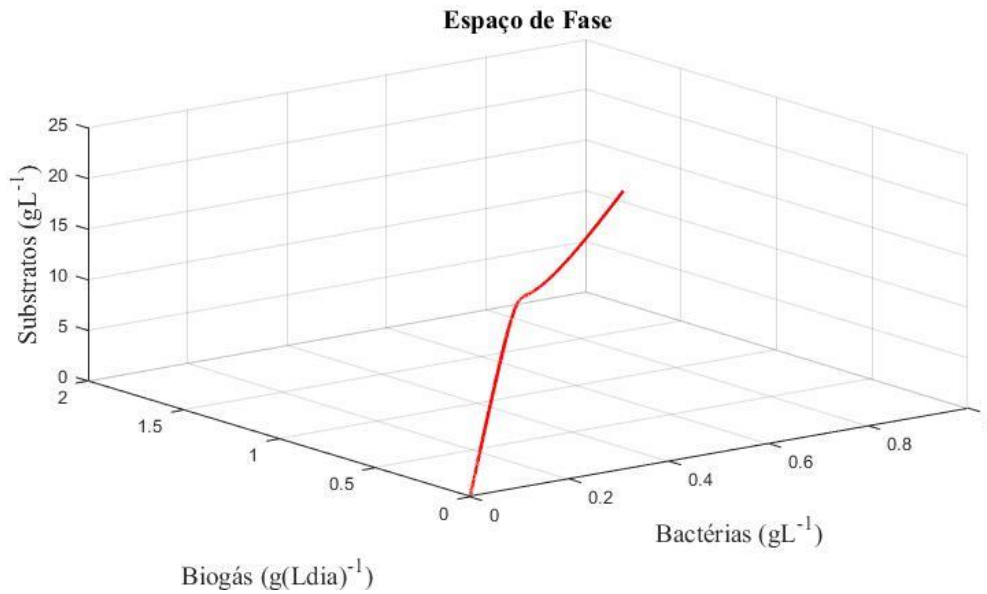
Figura 4.7: Variação da quantidade de substrato no tempo



Fonte: Autores (2018).

Na figura 4.7, a concentração de substrato tende a zero. Isto se dá pelo fato de que, o substrato é consumido de maneira semelhante à Figura 4.2, porém, com maior velocidade.

Figura 4.8: Espaço de fase do sistema relacionado ao primeiro ponto crítico



Fonte: Autores (2018).

A Figura 4.8 representa o espaço de fase do sistema (3.23), percebe-se que a curva converge rapidamente para o ponto de equilíbrio, validando geometricamente a sua estabilidade assintótica nesse caso.

Através dos parâmetros da Tabela 4.1, tem-se a matriz jacobiana, calculada no ponto de equilíbrio $P_2 = (\alpha, \frac{\alpha}{Y_p}, -\frac{\alpha}{Y_s})$, com $\alpha = 0.02$, para a análise numérica da estabilidade assintótica, de acordo com a teoria vista no Capítulo 1:

$$\bar{N} = \begin{bmatrix} -0.2556 & 0.0000 & 0.0124 \\ -0.0132 & -0.2500 & 0.0294 \\ 0.0025 & 0.0000 & -0.2557 \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

cujas raízes associadas ao polinômio característico são:

$$\lambda_1 = -0.2500, \lambda_2 = -0.2611 \text{ e } \lambda_3 = -0.2498. \quad (4.4)$$

Com isso, tem-se que os autovalores (4.4) satisfazem a condição de estabilidade assintótica do Teorema 1.4 do Capítulo 1, uma vez que os parâmetros adotados na Tabela 4.1 atendem às condições (3.32) e (3.33), pois tem-se o valor numérico calculado através da implementação computacional em MatLab 2011a:

$$GF < AB = 3.1658 \times 10^{-5} < 6.53 \times 10^{-2} \quad (4.5)$$

Conclusões

Neste trabalho foi proposto um modelo não-linear de biodigestão para um biodigestor indiano de modo contínuo, baseado em Biscaro (2008), Schmidell (2001) e Portes (2005), cujas equações foram formuladas através do balanço de massa do processo. Descreveu-se a formulação desse modelo relacionando as três componentes fundamentais para o processo de biodigestão anaeróbica, responsável pela produção de biogás e, conseqüentemente, biofertilizantes (BALMANT, 2009), são elas: concentração de bactéria, concentração de substrato e produção de biogás. Esse modelo mostra o processo de produção de biogás no interior do biodigestor indiano nas diversas fases do processo descrito por Biscaro (2008) e Portes (2005).

A partir de um breve estudo da teoria de sistemas dinâmicos não lineares e da técnica de Lyapunov, essa possibilitou a investigação de soluções analíticas assintoticamente estáveis e um estudo do espaço de fase do modelo proposto, que contempla a estabilidade assintótica de seus pontos de equilíbrio (SLOTINE, 1991). De acordo com a investigação feita, determinou-se dois pontos críticos e concluiu-se, baseando na teoria de Lyapunov, que ambos são assintoticamente estáveis, desde que seus parâmetros atendam as condições de estabilidade determinadas.

Através das simulações numéricas realizadas para o modelo proposto, considerando os parâmetros encontrados na literatura, observou-se sua convalidação, uma vez que é capaz de detectar as fases de crescimento e decrescimento da concentração de bactérias e do aumento e diminuição do biogás produzido ao longo do processo, com a conseqüente transformação do substrato em biofertilizante ao longo do tempo. Além disso, foi gerado o espaço de fase e os perfis de variação de cada componente citada em torno dos pontos críticos encontrados, utilizando o *software* Matlab 2011a, como mostrado nas simulações computacionais apresentadas e discutidas no Capítulo 4.

Como continuidade do trabalho e considerando o modelo proposto, será feita a otimização dos parâmetros de controle deste através da técnica de sintonia fina baseando-se em Ogata (1998). Pretende-se também implementar a formulação proposta incluindo ao modelo a equação de balanço de energia do processo de biodigestão em um biodigestor indiano (SCHMIDELL, 2001).

Trabalhos publicados

TANAKA, G. C.; BALBO, A. R.; REIS, C. A.; FLORENTINO, H. *Um modelo matemático de biodigestores, análise de pontos críticos e estabilidade assintótica*. In: *Análise dos pontos críticos de um modelo não linear de um biodigestor indiano*. In: DINCON: Conferência brasileira de dinâmica, controle e aplicações. IBILCE. Rio Preto. 2017.

TANAKA, G. C.; BALBO, A. R.; REIS, C. A.; FLORENTINO, H. *Simulação de um modelo linearizado de otimização inteira 0-1 para a maximização de produção de biogás em propriedades rurais através biodigestores*. In: ERMAC, Bauru. 2017.

TANAKA, G. C.; BALBO, A. R.; REIS, C. A.; FLORENTINO, H. *O uso conjunto de técnicas de análise e controle por linearização exata e de métodos previsor-corretor primal-dual de pontos interiores/exteriores de um modelo não linear de biodigestor*. In: ERMAC, Bauru. 2016.

TANAKA, G. C.; BALBO, A. R.; REIS, C. A.; FLORENTINO, H. *Estudo dos pontos críticos de um modelo não linear que descreve o processo de produção de biogás em um biodigestor indiano*. In: Seminário da pós-graduação em engenharia elétrica, Bauru. 2016.

TANAKA, G. C.; BALBO, A. R.; REIS, C. A.; FLORENTINO, H. *O uso conjunto de técnicas de análise e controle por linearização exata e de métodos previsor-corretor primal-dual de pontos interiores/exteriores de um modelo não linear de biodigestor*. In: Encontro regional de matemática aplicada e computacional, 2016, Bauru. 2016.

TANAKA, G. C.; BALBO, A. R.; REIS, C. A.; FLORENTINO, H. *Análise dos pontos críticos de um modelo não linear de um biodigestor indiano*. In: Workshop do instituto de pesquisa em bioenergia – IPBEN Botucatu. 2016.

TANAKA, G. C.; REIS, C. A. *Análise de uma dinâmica não linear de um biodigestor via técnica de Lyapunov*. In: Semana da licenciatura em matemática: encontro de formação do professor de matemática e tecnologias. Bauru. 2015.

Bibliografia

ANDRADE, M. A. N.; RANZI, T. J. D.; MUNIZ, R. N.; SILVA, L. G. S.; ELIAS, M. J. *Biodigestores rurais no contexto da atual crise de energia elétrica brasileira e na perspectiva da sustentabilidade ambiental*. In: Encontro de Energia no Meio Rural, 4., 2002, Campinas. Anais do evento. Campinas: UNICAMP, 2002. 1 CD ROM.

BALMANT, W., *Concepção, construção e operação de um biodigestor emodelagem matemática da biodigestão anaeróbica*. 2009. 59 f. Dissertação (mestrado em processos térmicos e químicos) - Pós-graduação em Engenharia e Ciência dos Materiais - PIPE. Setor de tecnologia. Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2009.

BASSANEZI, R. C. e FERREIRA JUNIOR, W. C. *Equações diferenciais com Aplicações*. São Paulo: Harbra Ed., 1988. 572 p.

BESSA, G. R. *Teoria da estabilidade de equações diferenciais ordinárias e aplicações: modelo presa-predador e competição entre espécies*. 2011. 95 f. Dissertação (mestrado profissional em matemática) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociência e Ciências Exatas. UNESP, Rio Claro. 2011.

BISCARO, F. V. e SILVA, H. O. F., *Modelagem matemática para determinação da eficiência da redução de ST e SV na biodigestão anaeróbia*. revista energia na agricultura, Botucatu, v. 23, n.3, p.1-15, 2008.

CARIOCA, J. O. B. e ARORA, H. L. *Biomassa: fundamentos e aplicações tecnológicas*. Fortaleza: Universidade Federal do Ceará, 1984. 644 p.

CHAUDHARI, P. K., PRAJAPATI, A. K., MAZUMDAR, B., CHOUDHARY, R. *Treatment of rice grain based biodigester distillery effluent (BDE) using inorganic coagulants*, Indian Journal of Chemical Technology. v. 23, 2016, pp. 491-496.

CHAUDHARI, P. K., MISHRA, I. M., CHAND S., *Decolorization and removal of chemical oxygen demand (COD) with energy recovery: Treatment of biodigester*

effluent of a molasses- based alcohol distillery using inorganic coagulants. Colloids Surf A Physicochem. Eng Asp, 2007, pp. 238–247.

CHRISTENSEN, K. V., CHRISTENSEN, M. L., HJORTH, M., SOMMER, S.G. *Solid-liquid separation of animal slurry in theory and practice*. Agronomy for Sustainable Development, 2010, pp. 153-180,

JUNQUEIRA, S. L. C. D. *Geração de energia através de biogás proveniente de esterco bovino: estudo de caso na fazenda aterrado*. 2014. 46 f. Trabalho de conclusão de curso (Engenharia mecânica) - Departamento de Engenharia Mecânica - Universidade Federal do Rio de Janeiro, UFRJ. Rio de Janeiro, 2014.

KHAN, A. A., STACEY, A. J., SHEPHERD, J. J. *Optimization of Methane Output for an Anaerobic Waste Digester*. ANZIAM J, 54:C523–C539. 2013.

MONTEIRO, L. H. A., *Sistemas dinâmicos*. 2. Ed. São Paulo: Livraria da Física, 2006. 625 p.

NOGUEIRA, L. A. H. *Biodigestão: alternativa energética*. São Paulo: Nobel, 1986. 93 p.

NOUANTHAVONG, T., PRESTON, T. R. *Effect of biodigester effluent, duckweed and leaves from Taro (Colocacia esculenta) on growth of Tilapia (Oreochromis niloticus) in open ponds*, Livestock Research for Rural Development, 2012.

OFOEFULE, A. U., EJIKEME, P. M., IBETO, C. N., AFUAKU, T. *Effect of chemical treatment and waste blending on biogas production from leaf litter of Kambala. (Chlorophoral excels)*, International Journal of Physical Sciences v. 6, 2011. pp. 7811-7815.

OGATA. K. *Engenharia de Controle Moderno*. LTC – Livros Técnicos e Científicos S. A.: 3 ed., 1998.

PRESTON, T. R., BOTERO, R. B. *Biodigestor de bajo costo para la producción de combustible y fertilizante a partir de excretas: Manual para su instalación, operación y utilización*. CIPAV - Centro para la Investigación en Sistemas Sostenibles de Producción Agropecuaria, Cali, Colombia, 2011, 20 p.

PORTES, Z. A. *Aplicativo computacional para projetos de biodigestores rurais*. 2005. 83 f. Dissertação (Mestrado em Agronomia), Faculdade de Ciências Agrônomas, Universidade Estadual Paulista, Botucatu. 2005.

REIS, C. A.; FLORENTIN, H. O.; COLÓN, D.; ROCHA, A. *Análise de um modelo populacional do mosquito transmissor da dengue via linearização exata*. In: SAUSEN, A.; SAUSEN, P.; SAWICKI, S. (Org.) *Pesquisas aplicadas em modelagem matemática*. Ijuí: Ed, UNIJUÍ, 2015, v. 4. 2015. 304 p. ISBN 9788541901840.

SCHMIDELL, W.; LIMA, U. A.; AQUARONE, E.; BORZANI, W. *Biotechnologia Industrial*. Edgard Blücher LTDA.: 2 ed. 2001.

SCOPUS. Base de dados on line. Disponível em <https://www.scopus.com/> > acessado em 30 de julho de 2018.

SILVA, G. V. M.: *Controlo não Linear*, Escola Superior de Tecnologia Setúbal, Setúbal, Portugal, 2003, livro "on line". p. 1-215.

SLOTINE, J. J. E. e LI, W. *Applied nonlinear control*. New Jersey: Prentice Hall, 1991. 459 p.

TANAKA, G. C.; BALBO, A. R.; REIS, C. A.; FLORENTINO, H. *Um modelo matemático de biodigestores, análise de pontos críticos e estabilidade assintótica*. *Análise dos pontos críticos de um modelo não linear de um biodigestor indiano*. In: DINCON: Conferência brasileira de dinâmica, controle e aplicações. IBILCE. Rio Preto. Caderno se resumos. 2017. p. 1-7.

TANAKA, G. C.; BALBO, A. R.; REIS, C. A.; FLORENTINO, H. *O uso conjunto de técnicas de análise e controle por linearização exata e de métodos predictor-corretor*

primal-dual de pontos interiores/exteriores de um modelo não linear de biodigestor. In: ERMAC, Bauru. Caderno de resumos. 2016. p. 160-164.

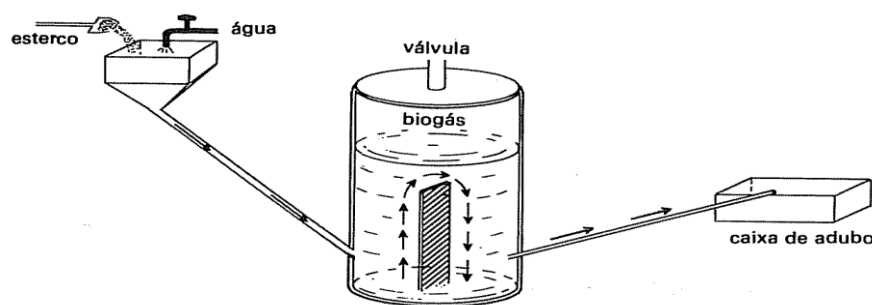
THY, S., BORIN, K., VANVUTH, T., BUNTHA, P., PRESTON, T.R. *Effect of water spinach and duckweed on fish growth performance in poly-culture ponds*, Livestock Research for Rural Development, 2008.

YEN, S., PRESTON, T. R., THUY, N. T. *Biogas production from water spinach combined with manure from buffaloes in an in vitro biodigester system*. Livestock Research for Rural Development, v. 29, 2017.

Anexo A Aplicação da teoria de Lyapunov a um biodigestor indiano

Considera-se uma dinâmica não linear de um biodigestor, o qual relaciona a quantidade de bactérias que produzem o biogás e a quantidade deste gás que permanece no interior do biodigestor (BASSANEZI, 1988; TANAKA et al, 2016). Efetuou-se um estudo quantitativo e qualitativo do plano de fase desta dinâmica não linear, incluindo a determinação e a classificação dos pontos críticos e a análise da estabilidade assintótica em torno destes pontos, conforme a Figura A.1:

Figura A.1: Biodigestor Modelo Indiano



Fonte: Bassanezi (1988).

Segundo Bassanezi (1998), a variação da quantidade de biogás no interior do biodigestor é proporcional à quantidade de bactérias presentes e sua diminuição pode ser traduzida pelo tipo de retirada conforme o seguinte sistema não linear de E.D.O.:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x) - pxy \\ \frac{dy}{dt} = kx - h(x, y) \end{cases}, \quad (\text{A.1})$$

sendo que $x(t)$ é quantidade de bactérias que produzem o biogás, $y(t)$ é quantidade de biogás produzido e que permanece no interior do biodigestor, p , k , são constantes positivas, pxy é responsável pelo fator de inibição das bactérias e $h(y,t)$ é a função que representa o tipo de retirada do biogás.

A. 1. Análise de estabilidade da dinâmica não linear

Assim como em Bassanezi (1998) e Tanaka et al (2016), foram estudadas duas considerações. Na primeira a função que represente o crescimento bacteriano foi tomada como linear, ou seja, $F(x) = \alpha x$, na qual α é uma constante positiva, e a função que representa a retirada de biogás foi nula, ou seja, $h(x, y) = 0$. Obtendo-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - pxy \\ \frac{dy}{dt} = kx \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

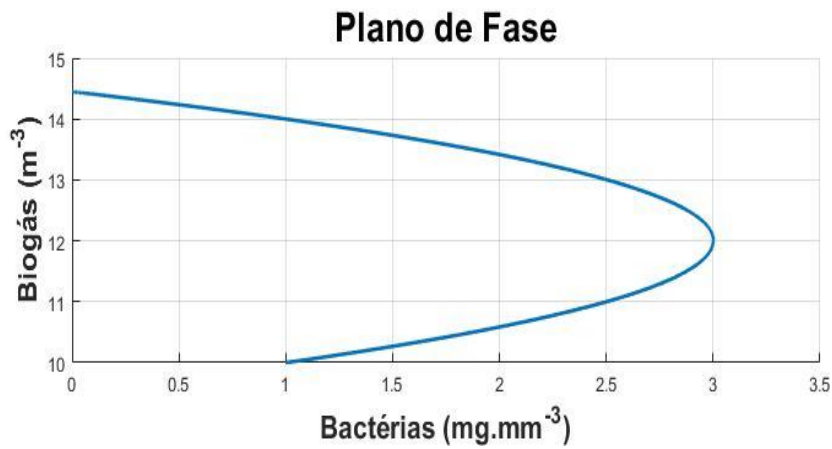
Igualando as equações do sistema (A.2) a zero, nota-se que há infinitos pontos críticos da forma $P = (0, \frac{\alpha}{p})$, que formam, na verdade, uma reta de equilíbrio como mostra a Figura A.1.

Fazendo $\frac{dx}{dy}$ obtemos um relação direta entre a quantidade de bactérias e a produção de biogás no interior do biodigestor:

$$x = \frac{\alpha y}{k} - \frac{y^2 p}{2} + x_0 \quad (\text{A.3})$$

Para a construção do plano de fase em torno de P_1 , obtemos as curvas integrais de (A.2), representadas nas Figuras A.3 e A.4 a partir dos seguintes parâmetros: $\alpha = 5$, $p = 0.5$ e $k = 0.5$;

Figura A.2: Relação entre a quantidade de bactérias e a produção de biogás no interior do biodigestor



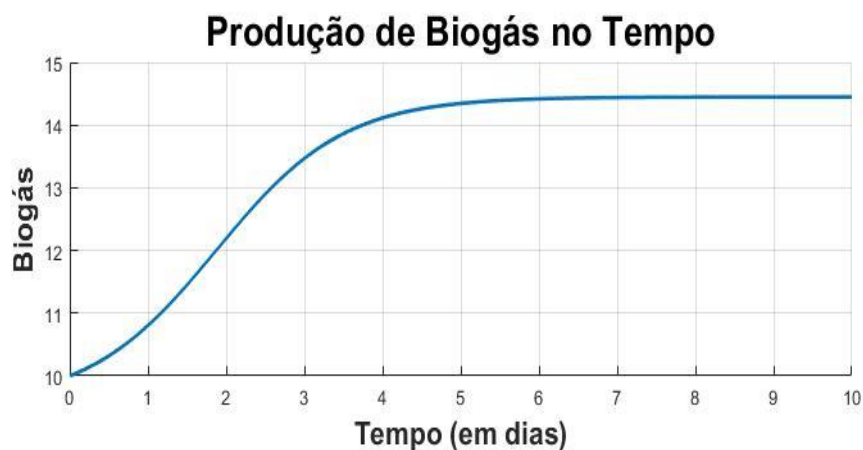
Fonte: Bassanezi (1988).

Substituindo (A.3) em $\frac{dx}{dy}$ de (A.2) obtém-se que a quantidade de gás produzido é expressa por:

$$y(t) = \frac{y_m y_* (1 - e^{-Dt})}{y_* - y_m e^{-Dt}} \quad (\text{A.4})$$

Com $D = \sqrt{\alpha^2 + 2pkx_0}$ e $y_*, y_m > 0$ (y_* valor mínimo e y_m valor máximo de $y(t)$). Como mostra a figura abaixo:

Figura A.3: Quantidade de biogás no interior do biodigestor em função do tempo



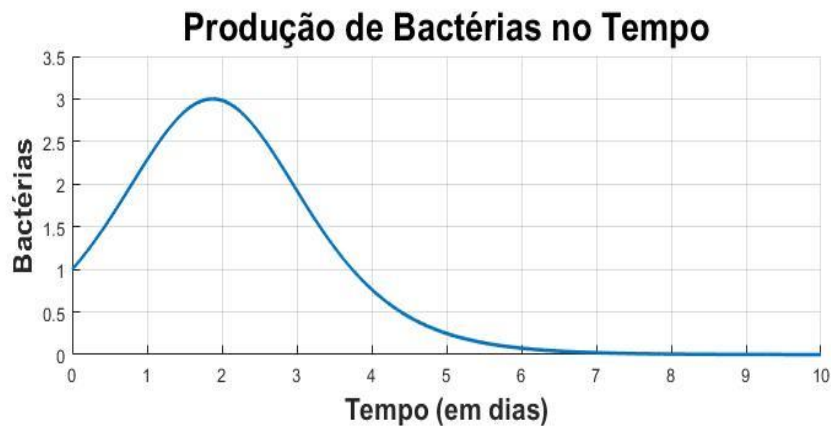
Fonte: Bassanezi (1988).

Além disso, a substituição de (A.4) em $\frac{dx}{dt}$ de (A.2) gera uma função que representa a quantidade de bactérias no interior do biodigestor ao longo do tempo:

$$x(t) = \frac{4x_0De^{-tD}}{[(\alpha-D)+(\alpha+D)e^{-tD}]^2} \quad (\text{A.5})$$

Segue Figura A.4, a representação geométrica de (A.5):

Figura A.4: População de bactérias no interior do biodigestor ao longo do tempo



Fonte: Bassanezi (1988).

De (A.4) e (A.5), prova-se que quando $t \rightarrow +\infty$: $y(t) \rightarrow y_m$ e $x(t) \rightarrow 0$, ou seja, as bactérias tendem a extinção.

Na segunda consideração efetuou-se um estudo baseado na determinação de pontos críticos, construção do plano de fase deste sistema autônomo, classificação destes pontos críticos via métodos de Lyapunov e estudo de estabilidade assintótica. Prova-se que existem dois pontos críticos, a saber, a origem e um ponto deslocado da origem.

Para a determinação dos pontos críticos da dinâmica (A.1), considera-se que há uma retirada de biogás dada por $h(x, y) = \beta y$ (β constante positiva), então:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - pxy = 0 \\ \frac{dy}{dt} = kx - \beta y = 0 \end{cases}, \quad (\text{A.6})$$

em que fornece as soluções $P_1 = (0,0)$ e $P_2 = (\frac{\alpha\beta}{pk}, \frac{\alpha}{p})$.

Para a análise do ponto crítico P_1 , usando o método de Lyapunov, a contraparte linear da dinâmica não linear (A.6) tem polinômio característico dado por:

$$\lambda^2 - (\alpha - \beta)\lambda - \alpha\beta = 0, \quad (\text{A.7})$$

cujas raízes características são $\lambda_1 = \alpha > 0$ e $\lambda_2 = -\beta < 0$. Logo, P_1 é um ponto de sela e, portanto, instável. De (A.7), tem-se que P_1 é assintoticamente estável se, e somente se, $\lambda_1 = \alpha < 0$.

A análise do ponto crítico P_2 , que é realmente o ponto de interesse para análise do biodigestor. Porém, este se situa fora da origem do sistema, o que impede a aplicação do método de Lyapunov.

Para análise da estabilidade de P_2 efetuou-se, por meio de mudança de variáveis, a translação do sistema, a fim de que P_2 se tornasse a origem do sistema.

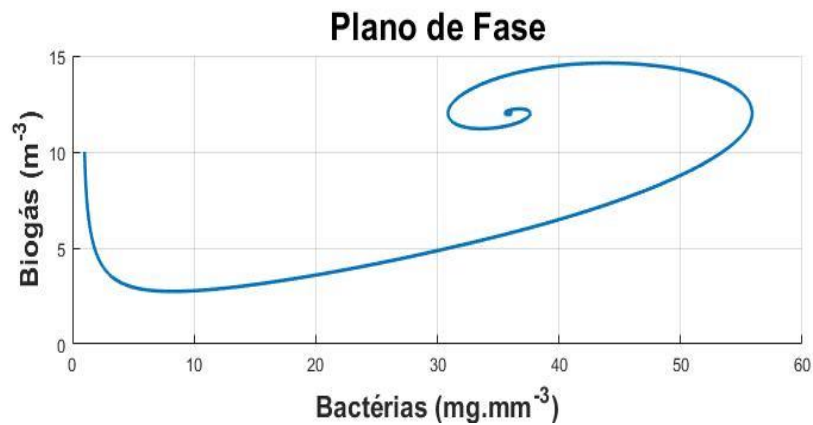
Se tomarmos $x = u + \frac{\alpha\beta}{kp}$ e $y = v + \frac{\alpha}{p}$ no sistema (A.6), temos:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\frac{\alpha\beta}{k}v - pu v \\ \frac{dv}{dt} = ku - \beta v \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

Fazendo a linearização de (A.8), temos a seguinte matriz dos coeficientes:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{\alpha\beta}{k} \\ k & -\beta \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

As raízes da equação característica de (A.9) são $\lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta(\beta - 4\alpha)}}{2} < 0$. Assim, o ponto $P_2 = \left(\frac{\alpha\beta}{pk}, \frac{\alpha}{p}\right)$ será assintoticamente estável, constituirá um nó se $\beta \geq 4\alpha$, ou uma espiral se $\beta \leq 4\alpha$. A Figura A.5, a seguir, mostra o plano de fase da dinâmica não linear (A.38) em torno do ponto $P_2 = \left(\frac{\alpha\beta}{pk}, \frac{\alpha}{p}\right)$, levando-se em conta os seguintes valores de parâmetros: $\alpha = 5$, $p = 0.5$, $k = 1$ e $\beta = 1/4$. Nota-se que P_2 é um ponto em espiral assintoticamente estável. Observa-se que a curva no plano de fase converge para o ponto de equilíbrio $P_2 = \left(\frac{\alpha\beta}{pk}, \frac{\alpha}{p}\right)$. Desta forma, tanto a população de bactérias quanto o biogás no interior do biodigestor tendem a um valor limite.

Figura A.5: O plano de fase da dinâmica em torno do ponto crítico P_2 

Fonte: Bassanezi (1988).

Este estudo quantitativo e qualitativo de uma dinâmica não linear de um biodigestor, o qual relaciona a quantidade de bactérias que produzem o biogás e a quantidade deste gás que permanece no interior do biodigestor, verificou-se que esta dinâmica apresenta dois pontos críticos, a origem sendo instável e um ponto deslocado. Neste caso, observa-se que a população de bactérias e o biogás no interior do biodigestor tendem a um valor limite.