unesp UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

EMANUELY ALENCAR DE MELO DE PAULA

Modelagem matemática na educação matemática:
uma experiência com tecnologias digitais

Guaratinguetá - SP
2017

Emanuely Alencar de Melo de Paula

Modelagem matemática na educação matemática:
uma experiência com tecnologias digitais

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Elisangela Pavanelo

Guaratinguetá - SP
2017

P324m Paula, Emanuely Alencar de Melo de

Modelagem matemática na educação matemática: uma experiência com tecnologias digitais / Emanuely Alencar de Melo de Paula – Guaratinguetá, 2017.

64 f. : il.

Bibliografia: f. 54-56

Trabalho de Graduação em Licenciatura em Matemática – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2017.

Orientadora: Profª Drª Elisangela Pavanelo

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Modelos matemáticos.
3. Tecnologia educacional. I. Título

CDU 51

Luciana Máximo

Bibliotecária/CRB-8 3595

unesp UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

EMANUELY ALENCAR DE MELO DE PAULA

ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO PARTE DO REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE **"GRADUADO EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA"**

APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

p/ Profa. Dra. Vivian Martins Gomes
Coordenadora

BANCA EXAMINADORA:

Profa. Dra. Elisangela Pavanelo
Orientador/UNESP-FEG

Profa. Dra. Rosa Monteiro Paulo
UNESP-FEG

Profa. Dra. Fabiane Mondini
UNESP-FEG

Dezembro de 2017

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus, pois sem a fé Nele esse sonho não estaria sendo realizado, agradeço por não ter me deixado desistir nos momentos difíceis, me dando força, coragem e sabedoria para seguir o caminho da vitória!

Agradeço a minha mãe Maria das Graças, mulher guerreira e batalhadora, que criou a mim e minha irmã como mulheres também guerreiras e batalhadoras, além de honestas, verdadeiras e determinadas.

Ao meu esposo Rafael que sempre esteve ao meu lado e acreditou em mim, me incentivando e contribuindo para que o meu sonho fosse realizado.

À minha orientadora, Professora Doutora Elisangela Pavanelo, pela paciência, carinho, dedicação e competência. Espero ter correspondido ao seu grande empenho e confiança.

À todos meus professores, em especial aos Professores Doutores Rosa Monteiro Paulo, Antônio Carlos de Souza e Fabiane Mondini pela contribuição significativa na minha formação acadêmica e pelas lições deixadas ao longo dos anos de graduação.

À todos meus colegas do curso de Licenciatura em Matemática, em especial aos meus amigos e companheiros de curso: Ananda Varlesse, Mauricio de Paula, Viviane Silva, Ursula Melo, Guilherme Maciel, Carolina Yumi e Gean Carlos, que tornaram os dias de aprendizado na faculdade mais felizes e ajudaram de alguma maneira na constituição deste trabalho.

“Como ser educador sem uma utopia?”
Ubiratan D‟Ambrosio

RESUMO

O uso da modelagem matemática é um desafio para professores e alunos. Entre os professores existe uma necessidade de adaptação a novos métodos de ensino, já entre os alunos de serem estimulados por essas novas formas de aprender matemática. Aqui apresentamos o relato e análise de um trabalho envolvendo a modelagem matemática em conjunto com Tecnologia Digital, por meio do desenvolvimento de uma atividade com um grupo de alunos no contra turno de uma escola da rede Estadual de Ensino. O principal objetivo do trabalho foi proporcionar ao aluno uma oportunidade de compreender que a Matemática faz parte do seu dia a dia, numa tentativa de abordar o conteúdo de funções quadráticas de maneira prática. Desenvolvida com abordagem qualitativa, através de um estudo de caso, nossa pesquisa verificou como se mostra o entendimento dos alunos sobre funções quadráticas e o que pode ser feito para obter melhores resultados utilizando a modelagem matemática com Tecnologia Digital. Verificamos que uma atividade dessa natureza contribui para o entendimento dos alunos sobre funções quadráticas, porém a tecnologia por si só não proporciona melhoras, existe então, a necessidade de um trabalho efetivo do professor na condução do processo de modelagem matemática.

PALAVRAS-CHAVE: Modelagem matemática. Tecnologias digitais. Ensino de matemática.

ABSTRACT

The use of mathematical modeling is a challenge for teachers and students. Among teachers there is a need for adaptation to new teaching methods, already among students being stimulated by these new ways of learning mathematics. Here we present the report and analysis of a work involving the mathematical modeling in conjunction with Digital Technology, through the development of an activity with a group of students, in the counter shift, of a school of the State Education Network. The main objective of the work was to provide the student with an opportunity to understand that Mathematics is part of their daily life, in an attempt to approach the content of quadratic functions in a practical way. Developed with a qualitative approach, through a case study, our research verified how students' understanding of quadratic functions is shown and what can be done to obtain better results using mathematical modeling with digital technology. We verified that an activity of this nature contributes to the students' understanding of quadratic functions, but the technology itself does not provide improvements, there is then the need for an effective work of the teacher in the conduction of the mathematical modeling process.

KEYWORDS: Mathematical modeling. Digital technologies. Ensino de matemática.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE IMAGENS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Entendo que modelagem matemática é uma forma para responder as incansáveis contestações que ouvimos dos nossos alunos, como "por que tenho que aprender isso?" ou "em que momento da minha vida vou usar isso?".

A modelagem matemática rompe com a ideia do ensino tradicional, quando os conteúdos determinam o problema. Na modelagem a partir dos problemas podemos determinar os conteúdos a serem estudados.

O presente trabalho buscou responder a seguinte pergunta norteadora: "Como se mostra o entendimento dos alunos sobre funções quadráticas, a partir de uma atividade de modelagem matemática com tecnologias digitais?".

A partir desse questionamento analisamos se, através da modelagem, com o uso de Tecnologias, os alunos relacionam o conteúdo trabalhado com seu cotidiano e se identificam com a atividade proposta e a contribuição dela para seu aprendizado.

A atividade foi relacionada com o lançamento de objetos, onde esse movimento é filmado e analisado no software Tracker. Os dados obtidos forram inseridos no software GeoGebra para o ajuste da curva, que caracteriza uma função matemática representada graficamente por uma parábola.

O objetivo do trabalho ao fazer uso do Tracker é que os alunos explorem intuitivamente o conceito de função quadrática, através da relação do movimento filmado por eles com situações do seu dia a dia, e que isso gere interesse na aprendizagem do conteúdo matemático. O uso do software GeoGebra possibilitou a exploração dos conceitos de função quadrática, como o estudo das raízes, vértice e a relação entre seus coeficientes.

A pesquisa foi desenvolvida a partir de uma abordagem qualitativa, por meio de um estudo de caso, tornando possível analisar o produzido e atingir os objetivos mencionados. Essa opção deu-se por entendermos que, segundo Ponte (2006), o estudo de caso é encarado quando se estuda uma experiência inovadora na qual se analisam a aprendizagem de um ou mais alunos, conforme é nossa intenção.

O trabalho está estruturado em 5 capítulos, começando pela revisão de literatura referente a modelagem matemática e Tecnologias Digitais, seguido da metodologia de pesquisa utilizada, descrição e análise dos dados e finalizado com as considerações finais.

2 SOBRE A MODELAGEM MATEMATICA, A MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E NO ENSINO DE MATEMÁTICA

2.1 ALGUMAS IDEIAS ACERCA DA MODELAGEM MATEMÁTICA

Existem diferentes concepções em relação à modelagem matemática, ela tanto pode ser entendida como uma metodologia de ensino e aprendizagem de Matemática, como também como um método para o desenvolvimento de pesquisa científica. (SANTOS, 2013, p. 26). Podemos observar no decorrer dos anos um crescimento no número de contribuições, de diferentes autores, sobre o tema. Existem atualmente trabalhos, tanto de relato de experiências áticas, como de cunho teórico, envolvendo estudos bibliográficos, referente à modelagem matemática.

Bicudo e Klüber (2011) apontam que quando o foco está na modelagem matemática ou na construção de modelos matemáticos, as concepções predominantes são as de Bassanezi e Biembengut, e quando o foco está no processo de ensino e aprendizagem, as concepções de Burak e Barbosa acabam sendo enfatizadas.

Biembengut e Hein (2003, p. 12), destacam que modelagem é "o processo que envolve a obtenção de um modelo". E que modelo é "um conjunto de símbolos e relações matemáticas que procura traduzir, de alguma forma, um fenômeno em questão ou problema de situação real". De acordo com esses autores a utilização da modelagem matemática é uma forma de se desenvolver uma pesquisa, ou seja, a busca por um modelo que seja possível de ser utilizado para realizar previsões e tomar decisões.

Bicudo e Klüber (2011) destacam que, Bienbengut segue uma linha de estudo com foco na construção de modelos, enquanto Barbosa foca no processo de ensino e aprendizagem.

Barbosa (2004, p.3) assume que a "modelagem é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a problematizar e investigar, por meio da matemática, situações com referência na realidade".

Pode-se dizer que a modelagem matemática tem sua origem na Matemática Aplicada, desde os tempos mais remotos.

Como afirma Bassanezi (2015, p.10) "pode se dizer que a atividade de aplicar matemática é tão antiga quanto a própria Matemática. Muitas ideias matemáticas surgiram a partir de problemas práticos, assim como a Matemática já desenvolvida passou a ser usada em situações novas e diversas ."

Os povos primitivos sentiam a necessidade de contabilizar seus bens e pertences, (animais e alimentos), faziam isso através do uso de pedras ou algo que relacionasse a quantidade de seus objetos.

Para Biembemgut e Hein (2003, p.7):

> A modelagem matemática, arte de expressar por intermédio de linguagem matemática situações-problema do nosso meio, tem estado presente desde os tempos mais primitivos. Isto é, a modelagem é tão antiga quanto a própria Matemática, surgindo de aplicações na rotina dos povos antigos.

Para Meyer, Caldeira e Malheiros (2011, p.78). "o trabalho com a modelagem no ensino da Matemática teve inicio no século XX, quando matemáticos puros e aplicados discutiam métodos para se ensinar Matemática". Para esses autores a modelagem se originou na Matemática Aplicada até sua chegada plena à Educação Matemática. Ao afirmarem que "[..] pesquisadores matemáticos preocupados tomaram emprestada a ideia da Matemática Aplicada e colocaram-na no outro tripé chamado de „Educação Matemática‟".

Segundo Barbosa (1999) a modelagem matemática é um método da Matemática Aplicada, usada em grande variedade de problemas econômicos, biológicos, geográficos, de engenharia entre outros. Seu objetivo é reduzir um fenômeno proveniente da situação real em termos matemáticos. Esta estrutura matemática que descreve as características do fenômeno de forma mais fiel possível em relação à realidade denomina-se modelo.

Este método foi transportado para o terreno do ensino e aprendizagem como uma das formas de utilizar a realidade nas aulas de matemática. (BARBOSA, 1999, p. 69).

Podemos encontrar três autores, considerados fundamentais para o impulso e a consolidação da modelagem matemática no ensino brasileiro.

O primeiro é Aristides Camargos Barreto, que utilizou a modelagem em suas aulas na graduação da PUC-Rio de Janeiro-RJ desde a década de 1970, fazendo uso em suas aulas de modelos matemáticos de músicas com o objetivo de motivar seus alunos na aprendizagem de Matemática; temos também Ubiratan D‟ Ambrósio, representante brasileiro na comunidade internacional de Educação Matemática, que nas décadas de 1970 e 1980 promoveu cursos e coordenou projetos na Universidade de Campinas(SP) - UNICAMP que impulsionaram a formação de grupos em matemática aplicada, biomatemática e em modelagem; e o terceiro é Rodney Carlos Bassanezi, que além de atuar nesses cursos e projetos da UNICAMP, tornou-se o principal disseminador da modelagem matemática pois, ao adotá-la em suas práticas de sala aula (graduação, pós-graduação lato e stricto sensu e cursos de formação continuada) conquistou número significativo de adeptos por todo o Brasil. (BIEMBENGUT; SCHMITT; VIEIRA, 2008)

De acordo com os dados destacados, há pelo menos três décadas o Brasil discute os processos de ensino e aprendizado, a partir do trabalho com modelagem na Educação Matemática. Essas discussões têm trazido contribuições para o modo de realizar esse trabalho em sala de aula, apontando formas de propor problemas do cotidiano para o ensino de Matemática.

A modelagem matemática pode ser uma forma de despertar o interesse dos alunos pela matemática, muitas vezes vista como uma disciplina que apresenta grandes dificuldades. Através da modelagem os sujeitos do processo, os alunos, tem a oportunidade de perceber práticas vivenciadas no seu dia a dia na sala de aula, fazendo com que a disciplina seja entendida como parte de sua realidade, e com isso contribuir com o prazer em aprendê-la.

Autores como Biembengut e Hein (2003) defendem a obtenção de um modelo matemático para que uma atividade de modelagem matemática seja melhor aproveitada. Os autores destacam que “a modelagem matemática é uma arte, ao formular, resolver e elaborar expressões que valham não apenas para uma solução particular, mas que também sirvam, posteriormente, como suporte para outras aplicações e teorias”. (BIEMBENGUT e HEIN, 2003, p.13).

Biembengut e Hein (2003, p.12) destacam que “um modelo pode ser formulado utilizando-se expressões numéricas ou fórmulas, diagramas, gráficos ou representações geométricas, equações algébricas, tabelas, programas computacionais etc.”.

Segundo Bassanezi (2015, p.13)

> Se a modelagem matemática vai ser utilizada em sala de aula com a finalidade de motivar os alunos a incorporar certos conteúdos matemáticos ou a valorizar a própria matemática, muitas vezes, a validação dos modelos não é um critério fundamental para sua qualificação. Por outro lado, se o interesse recai nos resultados fornecidos pelo modelo, então a sua validação é indispensável.

As etapas da modelagem matemática por si só já trazem contribuições para o trabalho em sala de aula, pois não necessariamente se tem que obter um modelo pronto e acabado. A necessidade de se chegar a um modelo surge quando o objetivo da aula é realizar predições, ou utilizar os dados obtidos para alguma tomada de decisão.

Para Burak (1992, p. 62) a modelagem matemática é um “conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer predições e a tomar decisões”.

Em se tratando das concepções, Burak (1992), em sua tese, entende a modelagem matemática como um "conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer predições e a tomar decisões".

Em Klüber e Burak (2008) é descrito a forma como Burak entendia a modelagem matemática em seu primeiro trabalho em 1987. Neste trabalho ele conservava ideias fixas, como a obrigatoriedade da construção de modelos e as etapas propostas nos mesmos moldes da ciência moderna, que priorizava o método em relação aos objetos a serem estudados. (KLÜBER e BURAK, 2008, p.20).

Segundo Meyer, Caldeira e Malheiros (2011) a modelagem, possui um objetivo comum: estudar, resolver e compreender um problema da realidade, ou de outra(s) área(s) do conhecimento utilizando para isso a Matemática e, obviamente, outras disciplinas e ideias.

Deixando a influencia da Matemática Aplicada, Burak concebe uma ideia de modelagem matemática mais social, pensando nos integrantes do processo.

Assim, "um mérito do trabalho de Burak era a preocupação em considerar a modelagem como um conjunto de procedimentos que não fosse apenas técnico, mas que ocorresse de uma forma mais aberta e contextualizada, dando significado aos conteúdos matemáticos". (KLÜBER e BURAK, 2008, p.20).

Ainda em Klüber e Burak (2008, p.20), pode-se destacar:

> Na tese, Burak (1992) acrescenta dois princípios básicos em sua concepção de modelagem matemática: 1) o interesse do grupo; e 2) a obtenção de informações e dados do ambiente, onde se encontra o interesse do grupo. Essa fase já possui maiores influências das ciências humanas e do próprio método etnográfico, que se distancia da epistemologia da matemática aplicada. Procura levar em conta os sujeitos, o ambiente social, cultural e outras variáveis.

Para Klüber e Burak (2008, p.25) "essa essência da modelagem é advinda das ciências naturais (matemática aplicada), nas quais os pesquisadores têm o objetivo de modelar situações empíricas que são sempre aproximativas para explicar fenômenos mensuráveis".

Desse modo, a modelagem matemática pode ser tratada a partir do enfoque no ensino, como "um caminho para despertar no aluno o interesse por tópicos matemáticos que ele ainda desconhece, ao mesmo tempo que aprende a arte de modelar matematicamente". (BIEMBENGUT e HEIN, 2003, p.18).

2.2 MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Autores como Burak (1992) veem a modelagem como um conjunto de procedimentos que têm como objetivo explicar matematicamente situações do cotidiano. Para ele, a modelagem possibilita uma inversão do modelo tradicional[1] de ensino, quando os conteúdos determinam o problema. Na modelagem os problemas determinam os conteúdos a serem estudados. (EM)

Barbosa (2001) compreende a modelagem como um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a questionar e ou investigar situações com referências à realidade por meio da Matemática.

A modelagem matemática contribui com o trabalho interdisciplinar na sala de aula, uma vez que pode ser aplicada em outras áreas do conhecimento, além das ciências exatas, também nas ciências humanas e biológicas. Como afirma Meyer, Caldeira e Malheiros (2011, p.85), "a modelagem também pode criar possibilidades interdisciplinares na sala de aula, fato considerado importante (ou, até essencial) entre as questões de ensino e aprendizagem, mostrando que, no caso, a modelagem não é uma ciência isolada das outras".

Barbosa (2004), em seu artigo "Modelagem Matemática: O que é? Por que? Como?", coloca a modelagem matemática como um ambiente de aprendizagem, onde procura encontrar seu lugar próprio na educação matemática. Ela então é compreendida como uma oportunidade para os alunos indagarem diferentes situações por intermédio da matemática, sem procedimentos fixados previamente.

Nesse sentido, os conceitos matemáticos são abordados de acordo com o desenvolvimento das atividades, por isso não exige necessariamente a criação de um modelo matemático, principalmente para os alunos de nível fundamental e médio, que nem sempre têm conhecimento matemático suficiente para tal atividade. (KLÜBER e BURAK, 2008).

Barbosa (2004) destaca cinco argumentos que justificam a utilização da modelagem matemática como metodologia de ensino de Matemática: motivação, facilitação da aprendizagem, preparação para utilizar a matemática em diferentes áreas, desenvolvimento de habilidades gerais de exploração e compreensão do papel sócio cultural da matemática.

[1] É um ensino baseado na memorização e na reprodução do que faz o professor. O aluno do ensino tradicional tem um papel passivo, com poucas responsabilidades. (VIDAL, 2002, p. 47)

Para o autor o último argumento é o mais relevante, e onde foca o desenvolvimento de suas pesquisas. Desse modo, ele acredita que a modelagem matemática pode levar o aluno a uma reflexão sócio cultural, proporcionando a este aluno um papel ativo na sociedade.

Tendo em vista os argumentos destacados por Barbosa (2004), para o presente trabalho, o argumento mais importante é a facilitação da aprendizagem, onde buscaremos analisar os resultados obtidos, para verificarmos se as atividades envolvendo modelagem matemática, como foram propostas, podem contribuir para o processo de aprendizado dos alunos.

2.3 MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DE MATEMÁTICA

De acordo com a concepção de Barbosa (2004) as atividades que envolvem problematização, e como consequência investigação, por parte dos alunos que estão presentes no processo de modelagem matemática, torna menos "engessado" o ensino tradicional. Visto que o estilo de aula muda, não sendo mais algo tido como certo e imutável, mas sim aberto a novas discussões, novas dúvidas. O aluno deixa então de ser um sujeito passivo, e passa a agir ativamente junto ao professor de forma reflexiva.

Fica evidente, que Barbosa (2004) em seu artigo, defende o não uso de atividades prontas, fora do contexto social de seus alunos. O autor busca a problematização junto com seus alunos, incentivando o interesse comum na resolução, o que proporciona momentos de reflexão e criticidade.

O que vai ao encontro com o que diz os PCN: "a atividade matemática escolar não é „olhar para coisas prontas e definitivas‟, mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade". (BRASIL, p.19).

O ambiente é concebido como um "convite" feito aos alunos, o que pode ocasionar que eles não se envolvam nas atividades. Sendo assim, os interesses dos educandos devem ir ao encontro da proposta colocada pelo professor. (KLÜBER e BURAK, 2008).

A modelagem oportuniza que professor, aluno e ambiente interajam, construindo conhecimentos em conjunto, não havendo imposição da mera transmissão, mas sim diálogo e convite. É claro que isso ocorre quando há convergência dos interesses dos alunos ante a proposta do professor. (KLÜBER e BURAK, 2008, p.30).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) também abordam que "o significado da atividade matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas, entre ela e seu cotidiano e das conexões que ele percebe entre os diferentes temas matemáticos”. (BRASIL, 1998, p.29).

De acordo com essa ideia, a modelagem busca, então, transformar matematicamente os acontecimentos do dia a dia, proporcionando compreensão por meio da construção e análise de dados coletados e ilustrados em forma de tabelas ou gráficos, por exemplo.

Esse modo de compreender a matemática relacionada ao contexto no qual os sujeitos estão inseridos também é destacado nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), que defendem:

> Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que serão essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação. (BRASIL, 2000, p. 111).

Entende-se, com isso, que a modelagem pode proporcionar um fazer interdisciplinar e contextualizado em sala de aula, colaborando com que momentos de aprendizagens dentro da escola sejam levados para a vida.

A proposta de se ensinar Matemática por meio da modelagem tem por objetivo aproximar a Matemática que se estuda na sala de aula com a Matemática do cotidiano[2].

Atividades cotidianas que envolvem conhecimentos matemáticos estão presentes na vida de todos nós e tais atividades nos fazem interagir na sociedade. Meyer, Caldeira e Malheiros (2011) apontam que os alunos: quando vêm para a escola, o cotidiano deles vem junto com eles, ou seja, o que eles são, foram, gostam ou não, de que eles têm medo, tudo está ali na hora de se dar o aprendizado, junto com eles na aula de Matemática.

O que vai ao encontro ao que os Parâmetros Curriculares Nacionais abordam:

> Os alunos trazem para a escola conhecimentos, ideias e intuições, construídos através das experiências que vivenciam em seu grupo sociocultural. Eles chegam à sala de aula com diferenciadas ferramentas básicas para, por exemplo, classificar, ordenar, quantificar e medir. Além disso, aprendem a atuar de acordo com os recursos, dependências e restrições de seu meio. (BRASIL, 1998 p.25).

Segundo Meyer, Caldeira e Malheiros (2011) a modelagem se constitui em uma estratégia pedagógica motivadora, que pode despertar o interesse do aluno pela Matemática, relacionando-a com as necessidades cotidianas de suas comunidades.

---

[2] Que ocorre todo(s) o(s) dia(s); particular do dia a dia; diário. (DICIONÁRIO ONLINE DE PORTUGUÊS)

Segundo Barbosa (2004) existe diferentes maneiras de organizar e conduzir atividades de modelagem matemática no ambiente escolar, desde apresentar uma situação estruturada até solicitar que os alunos formulem problemas a partir de temas genéricos escolhidos por eles. O autor refere-se ainda a um aspecto central quando se trabalha com modelagem matemática, que é o fato de que as atividades devem se sustentar na vida das pessoas, envolvendo dados empíricos reais.

Barbosa (2004) trata dos "casos" em que pode ocorrer a modelagem matemática. Ele enumera 3 casos:

Caso 1: o professor é a pessoa mais ativa no processo, onde ele mesmo formula um problema, baseado no contexto da realidade de seus alunos. O professor traz praticamente pronto sua atividade, cabendo aos alunos encontrar a solução do problema, ou seja, investigarem e buscarem ferramentas para resolver o problema. O que é considerado uma das partes mais importantes no processo de modelagem.

Caso 2: o aluno está mais integrado à atividade de modelagem matemática. O professor formula o problema, e depois disso os alunos interagem ativamente junto ao professor nas outras etapas da atividade, ou seja, participa na coleta de dados e na busca por ferramentas para a resolução do problema. O professor como mediador passa a auxilia-los no melhor caminho a ser seguido para a finalização da atividade.

Caso 3: o aluno desde o começo participa ativamente, desde a discussão para escolha do problema a ser resolvido, coleta de dados, busca por ferramentas para solucionar o problema.

Este último é o caso mais arriscado de ser desenvolvido, considerado o mais difícil ao professor, pois ele não possui total domino da atividade, e não têm conhecimento prévio do que irá surgir em sala de aula, começando pelo tema a ser escolhido pelos alunos, que podem ser qualquer um que achem interessante, intrigante, ou que façam parte de seu cotidiano e sua realidade. Seguido pela falta de cronograma fixo, o professor então deve se adaptar ao que for surgindo, sempre pronto em caso de imprevistos e preparado para conduzir a atividade de forma satisfatória. Com isso, demanda maior preparação, tempo e estudo por parte do professor, para que consiga conduzir a atividade para seu objetivo principal, que é o conteúdo a ser tratado em sala de aula.

Os casos se diferenciam em relação ao compartilhamento das tarefas na atividade de modelagem entre Professor e alunos.

Quadro 1 - Tarefas no processo de modelagem

	Caso 1	Caso 2	Caso 3
Formulação do problema	Professor	Professor	Professor/aluno
Simplificação	Professor	Professor/aluno	Professor/aluno
Coleta de dados	Professor	Professor/aluno	Professor/aluno
Solução	Professor/aluno	Professor/aluno	Professor/aluno

Fonte: Barbosa (2004)

Essa classificação feita por Barbosa (2004) mostra que professor e aluno podem se envolver de diferentes maneiras ao programar a modelagem matemática em sala de aula.

Em Barbosa (2001) são destacadas as diversas formas de se implementar modelagem matemática na sala de aula:

- A modelagem pode servir como motivação para introduzir novos conceitos ou aplicar conhecimentos já adquiridos;
- A escolha de um tema e a formulação do problema não matemático a ser modelado podem ficar sob responsabilidade do professor ou do aluno;
- A modelagem pode estar integrada a um programa pré definido ou pode se constituir numa atividade extra.

Com base nos casos e nas formas de desenvolver atividades de modelagem apresentados por Barbosa (2004, 2001), o presente trabalho traz características do Caso 1, pois tem como objetivo principal aplicar conhecimentos adquiridos anteriormente pelos alunos. O professor, neste trabalho é o responsável pela formulação e a simplificação do problema proposto. Mas, ao mesmo tempo apresenta características do Caso 2, pois os alunos são responsáveis pela coleta dos dados e pela solução do problema.

2.4 MODELAGEM MATEMÁTICA E TECNOLOGIAS DIGITAIS

Segundo Borba e Penteado (2001) a discussão sobre o uso de tecnologia informática na educação teve inicio no final da década de 70.

Com a chegada da informática na sala de aula, os professores se sentiam desconfortáveis ao saberem que teriam que lidar com possíveis mudanças em sua prática docente tradicional, que fatalmente ficaria imune à presença da tecnologia informática. (BORBA E PENTEADO, 2001, p. 54).

Boba e Penteado (2001, p.17) destacam que “o computador deve estar inserido em atividades essenciais, tais como aprender a ler, escrever, compreender textos, entender gráficos, contar, desenvolver noções espaciais etc.”.

A inserção dos computadores em sala de aula é importante independentemente da disciplina que será estudada, essa tecnologia capaz de instigar a curiosidade e consequentemente a busca pelo aprendizado, transforma tanto alunos quanto professores, contribuindo para um ambiente escolar diferente do que estão acostumados.

Para os autores “é preciso que a chegada de uma mídia qualitativamente diferente, como a informática, contribua para modificar as praticas do ensino tradicional vigentes”. (BORBA E PENTEADO, 2001, p. 51).

Borba e Penteado (2001) destacam que uma mídia não inviabiliza a outra, ou seja, as novas mídias que surgem, não necessariamente, nos obrigam a deixar de usar mídias mais antigas, como o lápis e o papel por exemplo. Entendemos então que seja necessário avaliar o que se deseja enfatizar e qual a mídia mais adequada para atender a esse propósito.

> A modelagem pode ser e já foi bastante praticada no Brasil e em outros países sem o uso da mídia informática. Entretanto, a sinergia é imensa entre uma proposta que enfatiza a pesquisa por parte do aluno e uma mídia que facilita tal empreitada. Softwares de Geometria Dinâmica como o Geometricks (2000) ou o Cabri, softwares de funções como os presentes nas calculadoras gráficas ou softwares que permitem o trabalho com funções, tabelas e estatística como o Excel, tornam-se importantes aliados em investigações abertas como as empreendidas em uma abordagem ligada à Modelagem Matemática. (BORBA E PENTEADO, 2001, p. 44).

Araujo[3] (2003 apud MEYER, CALDEIRA, MALHEIROS, 2011, p. 116), afirma que as tecnologias podem estar a serviço da modelagem matemática, já que, para a autora parece haver uma incorporação natural das Tecnologias Digitais nesse contexto.

Como, a modelagem matemática traz a interdisciplinaridade para dentro da sala de aula, visto que se pode matematizar situações de diferentes áreas do conhecimento, a ideia da inserção das Tecnologias Digitais no ambiente escolar, tem sido vista por Borba e Penteado (2001, p.63) como “um potencializador das ideias de se quebrar a hegemonia das disciplinas e impulsionar a interdisciplinaridade.”

---

[3] ARAÚJO, J. L. **Situações reais e computadores: os convidados são igualmente bem-vindos?** In: Bolema – Boletim de Educação Matemática, ano 16, n.19, p. 1 a 18, 2003 apud MEYER, J. F. C. A; CALDEIRA, A. D; MALHEIROS, A. P. S. Modelagem em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2011. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

Meyer, Caldeira e Melheiros (2011, p. 116) acreditam que com o aumento da presença das tecnologias no cotidiano escolar, “as possibilidades de experimentação e investigação de determinadas situações podem ser otimizadas, viabilizando a realização de simulações e previsões”. [Entendemos que] “a visualização, aspecto importante para a compreensão de determinados conceitos matemáticos e que pode ser facilitada pela presença das TICs, pode também colaborar com o desenvolvimento da modelagem.” (MEYER, CALDEIRA, MALHEIROS, 2011, p. 116).

Jacobini[4] (2004 apud MEYER, CALDEIRA, MALHEIROS, 2011, p.117), destaca que as Tecnologias Digitais, atualmente, “são imprescindíveis para as atividades de modelagem, quer no contexto da Matemática Aplicada, quer no educacional”.

Existem conceitos matemáticos que podem se tornar difíceis de serem explorados com lápis e papel, como a confecção de diferentes gráficos, por exemplo, é facilmente executado pelos computadores, onde além de proporcionarem uma melhor visualização, os alunos e professores ganham tempo para explorar e discutir os conceitos estudados.

Desse modo, entendemos que o principal objetivo do uso de tecnologias digitais para o trabalho com modelagem matemática na sala de aula são possibilidades de coleta, organização e suporte na exploração dos dados para a solução de um problema proposto. Neste trabalho as tecnologias contribuíram desde a coleta dos dados, por meio do celular, instrumento utilizado pelos alunos para gravar um movimento elaborado por eles. Depois disso, a videoanálise com o software Tracker, que auxiliou na organização dos dados, fornecendo automaticamente, tanto os valores de distância, como a quantidade de quadros por segundo empregadas pela câmera digital usada e dados de posição e tempo do objeto filmado. O terceiro recurso tecnológico utilizado nesse processo de modelação foi o Geogebra que, a partir do dados fornecidos pelo Tracker, gerou a função parabólica que aproximou os pontos obtidos.

[4] JACOBINI, O. R. **A Modelagem Matemática como instrumento de ação politica na sala de aula**. 2004. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, Rio Claro, 2004 apud MEYER, J. F. C. A; CALDEIRA, A. D; MALHEIROS, A. P. S. Modelagem em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2011. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

3 METODOLOGIA DE PESQUISA

A pesquisa surge da necessidade do pesquisador em responder uma dúvida ou inquietação. O que direciona a pesquisa é a busca por respostas capazes de sanar a indagação inicial.

Em Educação, e em particular na Educação Matemática, têm-se tornado cada vez mais comum os estudos de caso de natureza qualitativa. (PONTE, 2006, p.9).

Para falar em pesquisa qualitativa, Bicudo esclarece o sentido de qualitativo.

> No senso comum, o qualitativo é entendido como o oposto do quantitativo. Um falando de qualidade e tendo a ver com o subjetivo, com o sentimento, com opiniões acerca das coisas do mundo. O outro, quantificando aspectos objetivos sobre essas mesmas coisas. (BICUDO, 2006, p. 101).

Borba (2004, p.2) destaca que a "pesquisa qualitativa prioriza procedimentos descritivos na medida em que sua visão de conhecimento explicitamente admite a interferência subjetiva, o conhecimento como compreensão que é sempre contingente, negociada e não é verdade rígida".

Bogdan e Biklen[5], (1994, apud BORBA et al, 2006, p.24), apresentam uma caracterização de pesquisa qualitativa, afirmando que:

1. Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal;
2. A investigação qualitativa é descritiva;
3. Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos;
4. Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva;
5. O significado é de importância vital na abordagem qualitativa.

Entendemos que a pesquisa qualitativa pode assumir diferentes abordagens e procedimentos, variando sempre de acordo com objetivos definidos no trabalho. Este trabalho foi desenvolvido a partir de uma abordagem qualitativa, por meio do estudo de caso, pois analisamos uma situação que não pode ser mensurada. Buscamos analisar os resultados apresentados no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática, com

---

[5] BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Tradução M.J. Alvarez, S. B. Santos e T. M. Baptista. Porto: Porto Editora, 1994 apud BORBA, M. C; ARAUJO, J. L. (organizadores). FIORENTINI, D.; GARNICA, A. V. M.; BICUDO, M. A. V. **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2006. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

tecnologias digitais, envolvendo função quadrática. Para isso, buscamos responder à seguinte pergunta: "Como se mostra o entendimento dos alunos sobre funções quadráticas, a partir de uma atividade de modelagem matemática com tecnologias digitais?". O principal objetivo da pesquisa é proporcionar ao aluno uma oportunidade de compreender que a Matemática faz parte do seu dia a dia, numa tentativa de abordar o conteúdo de funções quadráticas de maneira prática e interdisciplinar.

Nas sessões subsequentes serão discutidas suas definições e procedimentos metodológicos.

3.1 ESTUDO DE CASO

Segundo Ponte (2006) na Educação Matemática, os estudos de caso têm sido usados para investigar questões de aprendizagem dos alunos bem como do conhecimento e das práticas profissionais de professores, programas de formação inicial e contínua de professores, projetos de inovação curricular, novos currículos, etc.

Para Ponte (2006, p.) um estudo de caso:

> Visa conhecer uma entidade bem definida como uma pessoa, uma instituição, um curso, uma disciplina, um sistema educativo, uma política ou qualquer outra unidade social. O seu objetivo é compreender em profundidade o "como" e os "porquês" dessa entidade, evidenciando a sua identidade e características próprias, nomeadamente nos aspectos que interessam ao pesquisador.

Yin[6] (1984, apud PONTE, 2006, p.7) destaca que um estudo de caso é uma investigação de natureza empírica. Baseia-se fortemente em trabalho de campo ou em análise documental. Estuda uma dada entidade no seu contexto real, tirando todo o partido possível de fontes múltiplas de evidência como entrevistas, observações, documentos e artefatos.

Um caso funciona, sobretudo, como um exemplo, mostrando como certa realidade que nunca tinha sido vista, pode afinal existir em certas condições, ou mostrando como funciona uma situação particularmente bem sucedida. (PONTE, 2006, p.4).

Não é a intenção deste trabalho generalizar as concussões obtidas, pois é um caso particular a ser observado e relatado tendo como base a realidade dos fatos, mas a partir do seu estudo entendemos ser possível identificar perspectivas importantes sobre o trabalho de modelagem matemática com tecnologias.

---

[6] Yin, R. (1984). Case study research: Design and methods. Newbury Park, CA: Sage apud PONTE, J. P. **Estudos de caso em educação matemática**. Bolema. Rio Claro, v., - 25, n, p. 105-132, 2006.

Em síntese, o estudo de caso não é utilizado quando se quer conhecer propriedades gerais de toda uma população. Pelo contrário, usa-se para compreender a especificidade de uma dada situação ou fenómeno, para estudar os processos e as dinâmicas da prática, com vista à sua melhoria. (PONTE, 2006, p.16).

Acreditamos que se o estudo de caso for bem sucedido, pode contribuir tanto para os alunos, que são os maiores beneficiados, quanto para os professores, que poderão tomar como base as ideias discutidas, aperfeiçoando-as para o seu trabalho em sala de aula.

Stake[7] (1988 apud PONTE, 2006, p.9) fala sobre como os resultados de um estudo de caso podem ser dados:

> O seu relato assume com frequência a forma de uma narrativa cujo objetivo é contar uma história que acrescente algo de significativo ao conhecimento existente e seja tanto quanto possível interessante e iluminativa (Stake, 1988). Isso resulta da natureza própria do estudo de caso – chamar a atenção para o que há de interessante, original e surpreendente na situação estudada, objetivo que pode ser muito bem servido por um relato narrativo.

O presente trabalho tem como objetivo possibilitar a compreensão de que a Matemática faz parte do cotidiano de todos nós, numa tentativa de abordar o conteúdo de funções quadráticas de maneira concreta. Buscando responder a seguinte questão norteadora: “Como se mostra o entendimento dos alunos sobre funções quadráticas, a partir de uma atividade de modelagem matemática com tecnologias digitais?”.

Caracteriza-se um estudo de caso, pois buscamos investigar questões sobre a aprendizagem dos alunos, ou seja, buscamos verificar se a partir de uma atividade de modelagem matemática com tecnologias digitais a compreensão dos alunos sobre conteúdos de funções quadráticas pode ser melhorada. Para tanto, foi realizada uma análise das respostas obtidas a partir da aplicação de uma avaliação diagnóstica no início da atividade e um questionário no final.

A avaliação diagnóstica foi realizada com o objetivo de identificarmos o que os alunos conseguiam relatar sobre funções quadráticas e quais as eventuais dúvidas que surgiam quando se discutia esse conteúdo. Já os questionários aplicados no final tinham como objetivo analisar se a atividade desenvolvida abriu oportunidade para o aluno explorar o significado de funções quadráticas e compreendê-la.

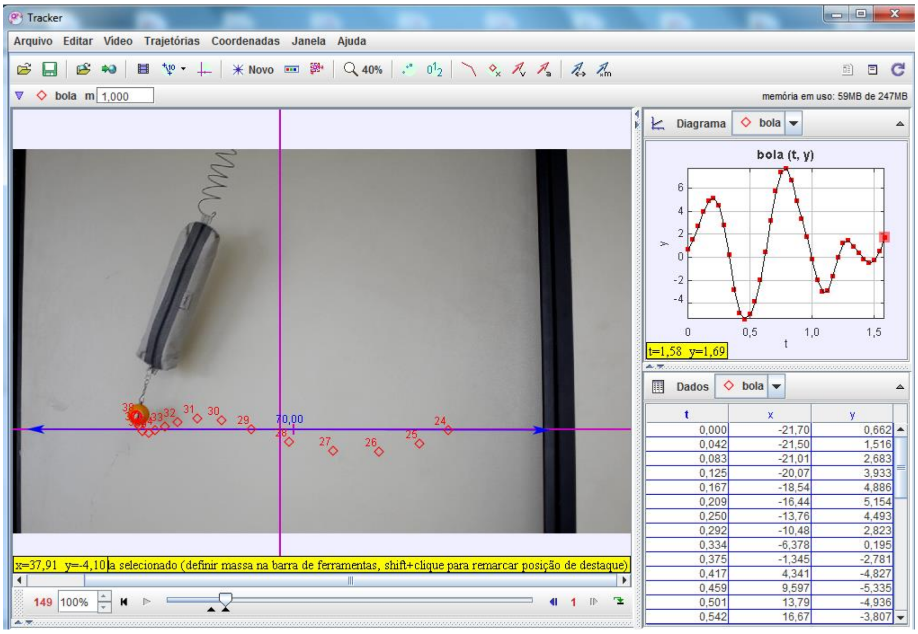
Para o desenvolvimento da atividade utilizamos computadores com acesso a dois softwares livres, o Tracker e o GeoGebra.

[7] Stake, R. (1988). Case study methods in educational research: Seeking sweet water. In R. M. Jaeger (Ed.), Complementary methods for research in education, Washington, DC: AERA apud PONTE, J. P. **Estudos de caso em educação matemática**. Bolema. Rio Claro, v., - 25, n, p. 105-132, 2006.

"O Tracker é um programa muito utilizado em experimentos de física, que possibilita através de qualquer vídeo que tenha um referencial de medida, a extração da medida de qualquer outro objeto que apareça na imagem. Inclusive pode-se obter grandezas como velocidade, aceleração, intensidade, posição, ângulos e outros componentes". (Dugato e Martins, 2013, p.3).

Neste trabalho o Tracker foi importante, pois possibilitou a organização da filmagem feita pelos alunos do movimento de interesse. Ao transferirmos o arquivo de vídeo para o Tracker, fazemos a marcação dos pontos quadro a quadro, com podemos obter a marcação de dezenas de pontos experimentais. A seguir apresentamos, a título de exemplo, a tela inicial do Tracker realizando a exploração de um vídeo. Na parte esquerda da tela, aparece recorte da filmagem realizada e notam-se as marcações (triângulos sobrepostos) representando o movimento quadro a quadro do movimento da bolinha. À direita, observa-se um gráfico da posição horizontal (x) em relação ao tempo (t) e, também, uma tabela (abaixo) com os valores das posições horizontal, vertical (y) e tempo.

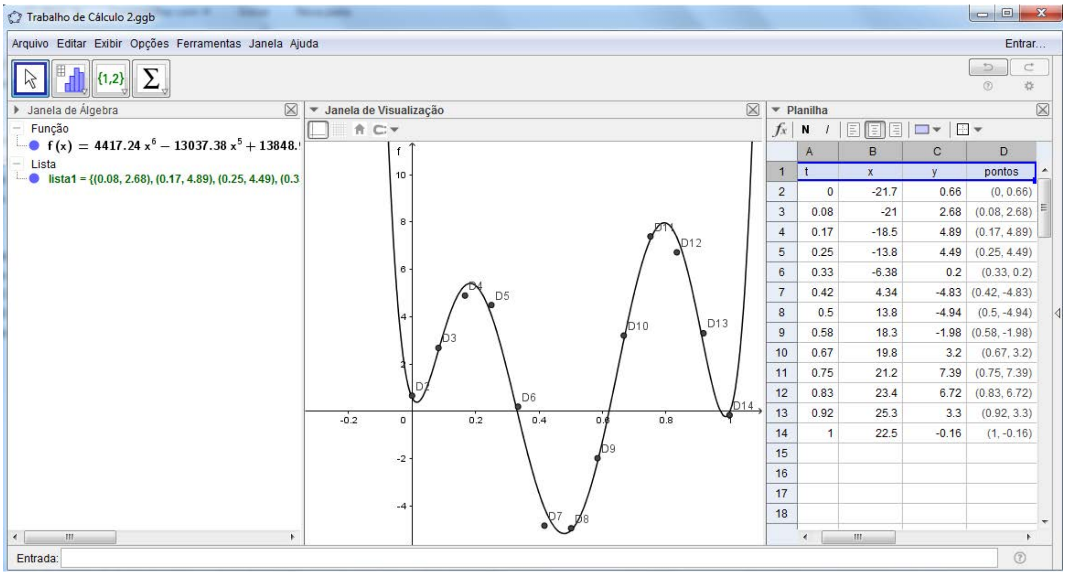
Imagem 1 – Tela inicial do Tracker



Fonte: Próprio autor

As tabelas fornecidas pelo Tracker podem ser copiadas e manipuladas por meio de programas específicos destinados ao tratamento de dados experimentais. Neste trabalho optamos por utilizar o Geogebra que é um programa de matemática dinâmica utilizado para todos os níveis de ensino que reúne Geometria, Álgebra e Cálculo em um único pacote. (SOUSA, 2014, p. 17).

Imagem 2 – Tela inicial do GeoGebra



Fonte: Próprio autor

Desse modo, o GeoGebra permite que as tabelas fornecidas pelo Tracker sejam analisadas para realização de ajustes de curvas e obtenção das respectivas funções, como podemos observar na figura acima. À direita temos as tabelas de pontos obtidas no Tracker, no centro o ajuste da curva a partir dos pontos e à esquerda a função obtida que representa o movimento.

A partir desta ideia, toda a montagem experimental pode ser realizada com a participação dos estudantes, desde a gravação do vídeo do movimento, até a obtenção da função que representa esse movimento, proporcionando a oportunidade do estudo de um conceito importante para o Ensino Básico, o de funções.

Presente no currículo de Matemática da Educação Básica, o ensino de funções deve, segundo os Parâmetros Curriculares do Ensino Médio:

> […] garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações-problema de matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática. (BRASIL, 2000, p. 257).

O estudo de funções é de real importância, tendo inicio de forma intuitiva no fim do Ensino Fundamental passando por todo ensino médio, conteúdo que não é facilmente assimilado pelos alunos.

Como destaca Magarinus (2013),

> “Dentre os conteúdos matemáticos estudados na Educação Básica, o estudo de funções é, sem dúvida, um dos mais importantes. Sua relevância pode ser justificada

> pelo fato de que o conceito de função estabelece relações com vários outros conceitos matemáticos e pode ser aplicado no estudo de fenômenos em diversas áreas do conhecimento.” (MAGARINUS, 2013, p.11).

O estudo de caso ocorreu por meio de uma atividade de modelagem matemática que proporcionou aos alunos investigarem a presença de funções quadráticas em atividades cotidianas.

3.2 CENÁRIO DA PESQUISA

A Escola Estadual Joaquim Vilela de Oliveira Marcondes foi criada em 1955, localizada na Avenida Presidente Vargas, 1375, bairro Nova Guará, cidade de Guaratinguetá – SP. De acordo com sua revista[8] interna, a Escola Estadual Joaquim Vilela de Oliveira Marcondes tem como principal objetivo a oferta de um ensino de qualidade que permita aos seus alunos, através da aquisição de ampla cultura geral, constituir uma visão de mundo autônoma, abrangente e sustentada em conhecimentos e valores, preparando-os para a vida produtiva em sociedade.

A escola possui 559 alunos no Ensino Fundamental II e Ensino Médio, nos turnos matutino, vespertino e noturno, e conta atualmente com 24 professores, um diretor, dois vice-diretores, uma Coordenadora Pedagógica e uma Gerente de Organização Escolar.

A escola possui parcerias com diversas instituições, o que proporciona aos estudantes várias oportunidades de desenvolvimento intelectual e social, através de projetos de leitura, música, cinema, produção de vídeos, informática, estudo de línguas, esportes e pesquisa científica.

A presente pesquisa foi desenvolvida no contra turno, com um grupo de 13 alunos, do 1º ano do Ensino Médio com idades entre 14 e 16 anos, todos estudam no período matutino e nenhum deles exerce atividade profissional.

Os alunos participaram espontaneamente através do convite feito pelo Diretor da escola, sem nenhuma promessa de notas ou qualquer outro benefício na disciplina cursada por eles em horário regular.

A atividade de modelagem com Tecnologias Digitais foi desenvolvida ao longo de 6 (seis) encontros, uma vez na semana, com duração de 2 horas cada um. Os encontros se deram no laboratório de informática da escola, onde estão alocados 12 computadores.

---

[8] Revista da Escola Estadual Joaquim Vilela de Oliveira Marcondes do ano de 2017.

Fotografia 1: Laboratório de informática da Escola

Fonte: Próprio Autor

A seguir um quadro resumo dos encontros que compuseram a atividade de modelagem matemática:

Quadro 2 – Cronograma dos encontros

Encontros	Descrição
1º	Apresentação do curso e realização da avaliação diagnóstica
2º	Apresentação do software Tracker
3º	Apresentação do software GeoGebra e discussão acerca de ideias matemática que envolvem o conteúdo de funções e de como obter uma função no GeoGebra através dos dados obtidos no Tracker.
4º	Análise no GeoGebra, e obtenção da função a partir dos dados do 2° encontro analisados no Tracker.
5º	Análise no Tracker e GeoGebra do movimento gravado pelos alunos e aplicação do primeiro questionário.
6º	Exploração dos coeficientes de uma função quadrática qualquer no GeoGebra e aplicação do segundo e terceiro questionários.

Fonte: Próprio autor

4 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

4.1 DESCREVENDO OS ENCONTROS REALIZADOS

A atividade de modelagem foi desenvolvida com 13 alunos. No primeiro encontro entregamos uma avaliação diagnóstica individual aos alunos, com o objetivo de conhecê-los melhor, tanto acerca do conhecimento sobre tecnologia, como sobre alguns conceitos que envolvem o conteúdo de funções[9]. Apesar da avaliação ser individual não nos opusemos que os alunos discutissem as questões e trocassem informações entre eles.

Fotografia 2 – Alunos respondendo à avaliação diagnóstica no 1º encontro.

Fonte: Próprio autor

Fotografia 3 – Alunos respondendo à avaliação diagnóstica no 1º encontro.

Fonte: Próprio autor

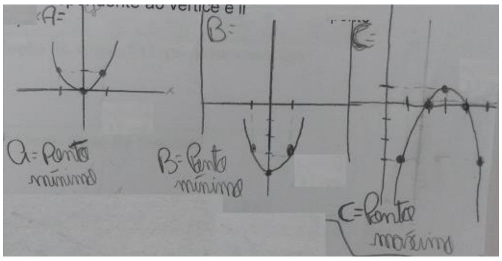
As imagens abaixo ilustram a resolução dos alunos para duas das questões da avaliação diagnóstica. Enumeramos de 1 a 13 os respectivos alunos para facilitar indicação nas questões abordadas. Inicialmente destacamos as respostas para a questão 4: "Determine em cada

[9] A avaliação diagnóstica se encontra, na íntegra, nos apêndices do trabalho.

função o ponto correspondente ao vértice e indique se é ponto máximo ou ponto mínimo:” item (a): $y = x^2$, item (b): $y = x^2 – 4$, item (c): $f(x) = - x^2 + 6x - 8$

Aluno 1:

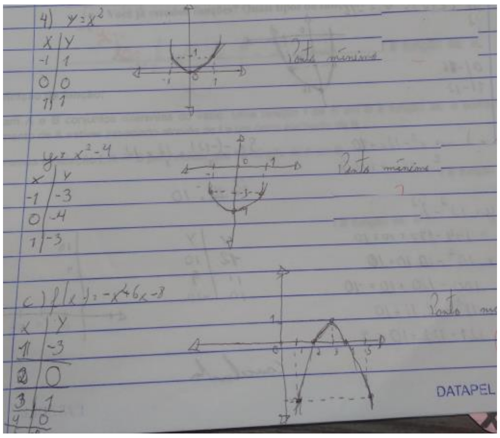
Imagem 3 – Respostas à questão 4



Fonte: Próprio autor

Aluno 2:

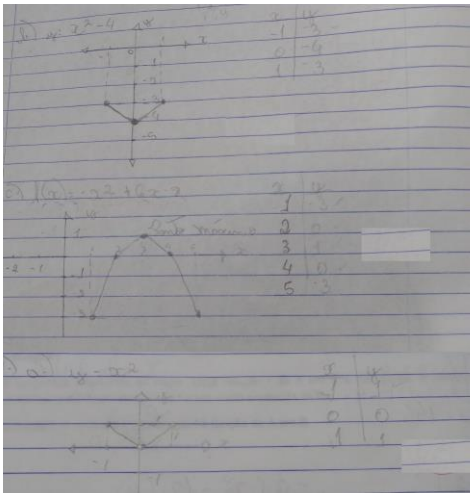
Imagem 4 – Resposta à questão 4



Fonte: Próprio autor

Aluno 3:

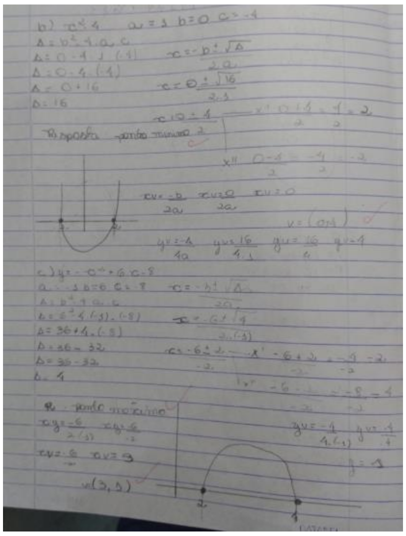
Imagem 5 – Resposta à questão 4



Fonte: Próprio autor

Aluno 4:

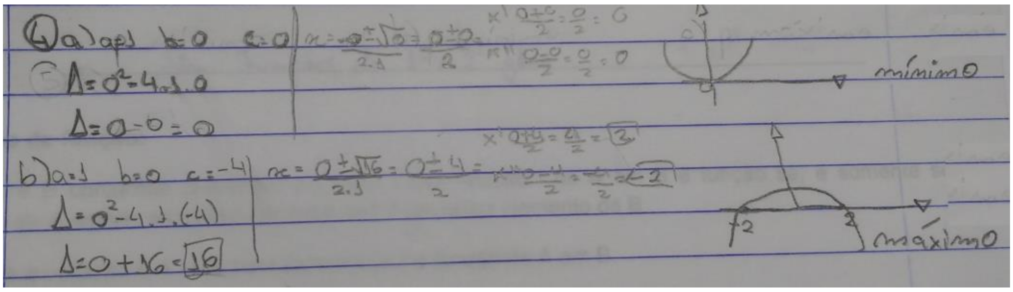
Imagem 6 – Resposta à questão 4



Fonte: Próprio autor

Aluno 8:

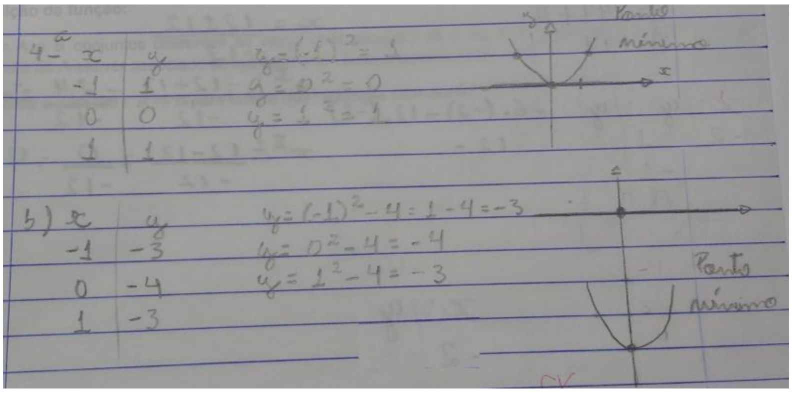
Imagem 7 – Resposta à questão 4



Fonte: Próprio autor

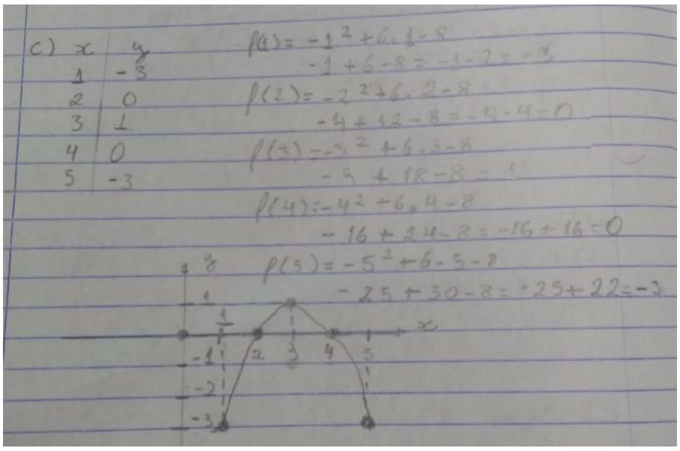
Aluno 9:

Imagem 8 – Resposta à questão 4 (a) e (b)



Fonte: Próprio autor

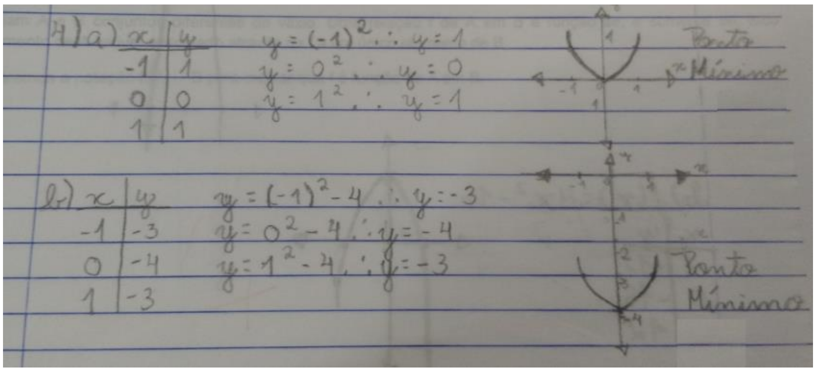
Imagem 9 – Resposta à questão 4 (c)



Fonte: Próprio autor

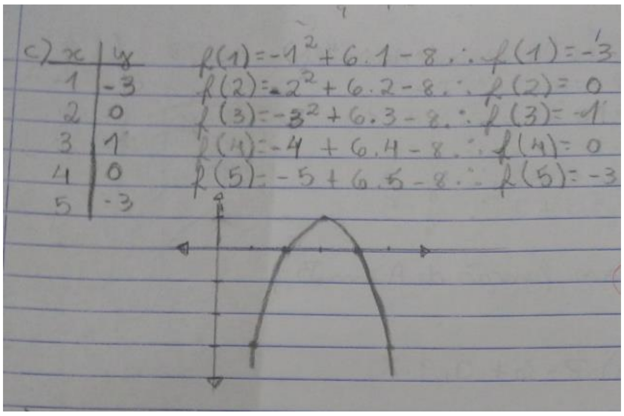
Aluno 12:

Imagem 10 – Resposta à questão 4 (a) e (b)



Fonte: Próprio autor

Imagem 11 – Resposta à questão 4 (c)



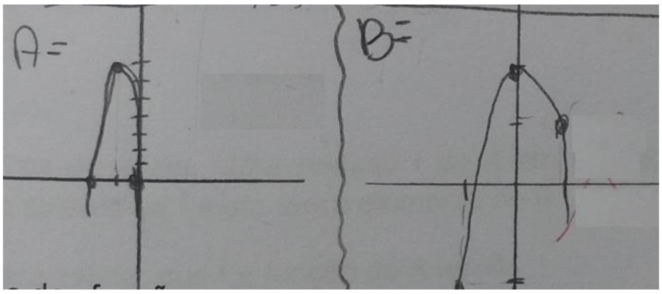
Fonte: Próprio autor

Os alunos numerados por 5, 6, 7, 10, 11 e 13 não responderam de forma satisfatória[10] a questão 4.

A seguir destacamos as respostas dadas à questão 5: “Construa o gráfico das funções:”, item (a) $y = - 6x^2 – 12x$, e item (b) $f(x) = 4x^2 – 16$.

Aluno 1:

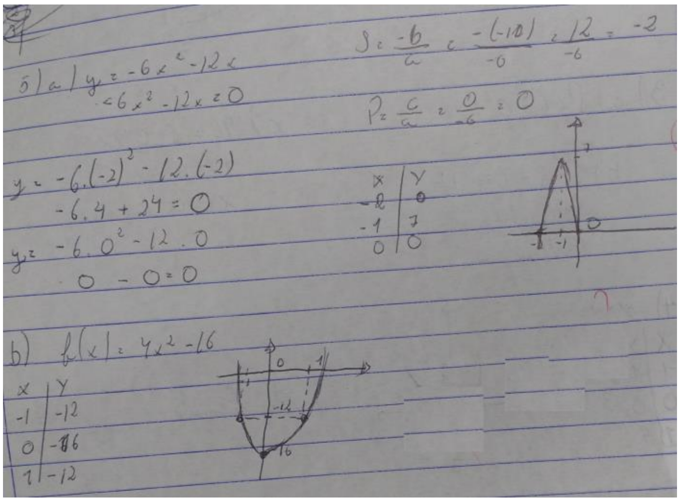
Imagem 12 – Resposta à questão 5



Fonte: Próprio autor

Aluno 2:

Imagem 13 – Resposta à questão 5

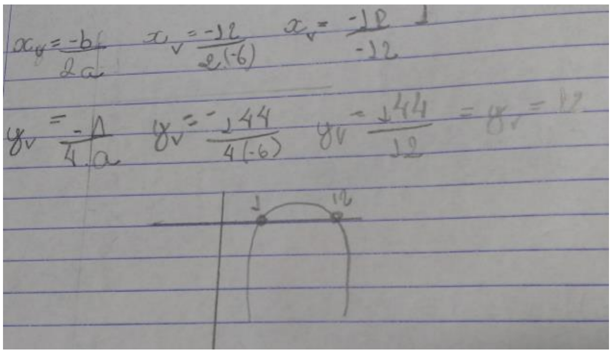


Fonte: Próprio autor

[10] Entendemos como uma resposta satisfatória, uma resposta coerente, suficiente, aceitável de acordo com o enunciado da questão. E insatisfatório que não possuía nenhum ponto aceitável de acordo com o enunciado.

Aluno 5:

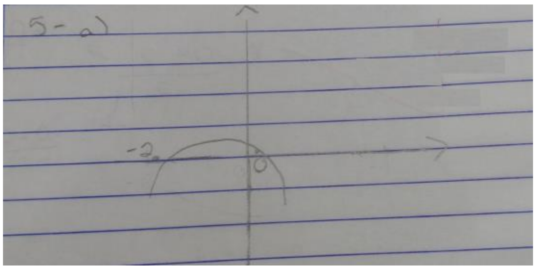
Imagem 14 – Resposta à questão 5 (a)



Fonte: Próprio autor

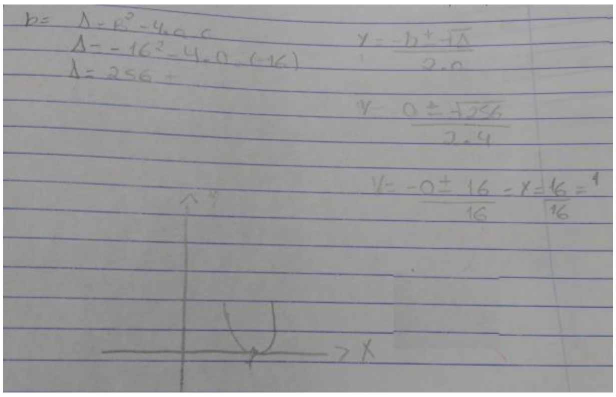
Aluno 6:

Imagem 15 – Resposta à questão 5 (a)



Fonte: Próprio autor

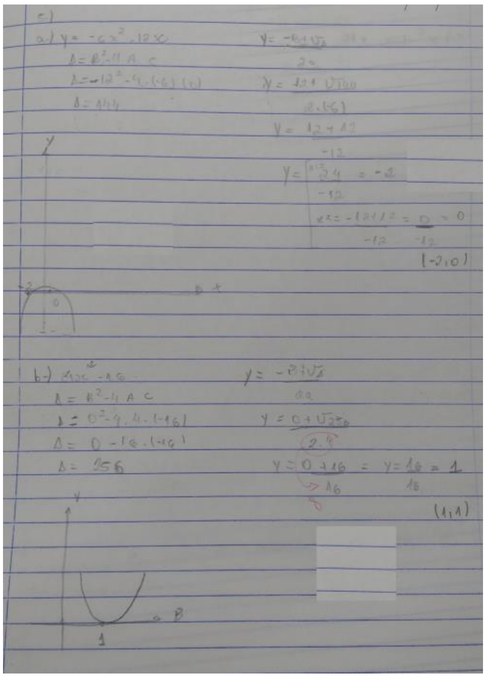
Imagem 16 – Resposta à questão 5 (b)



Fonte: Próprio autor

Aluno 7:

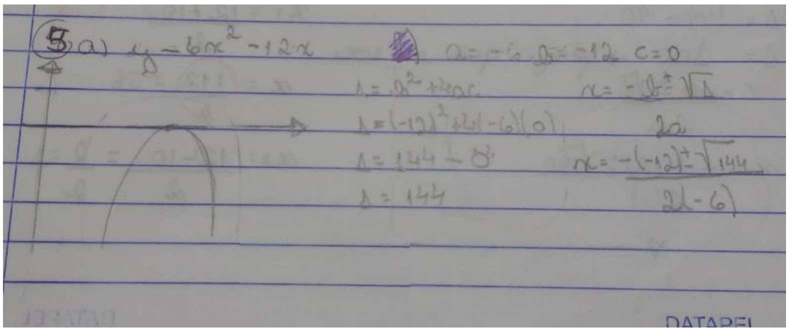
Imagem 17 – Resposta à questão 5



Fonte: Próprio autor

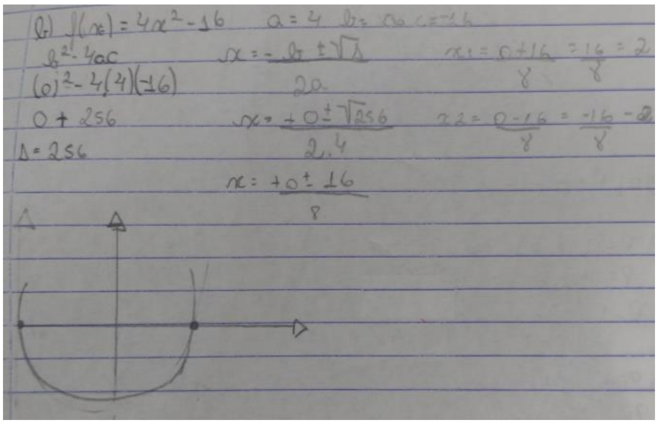
Aluno 10:

Imagem 18 – Resposta à questão 5 (a)



Fonte: Próprio autor

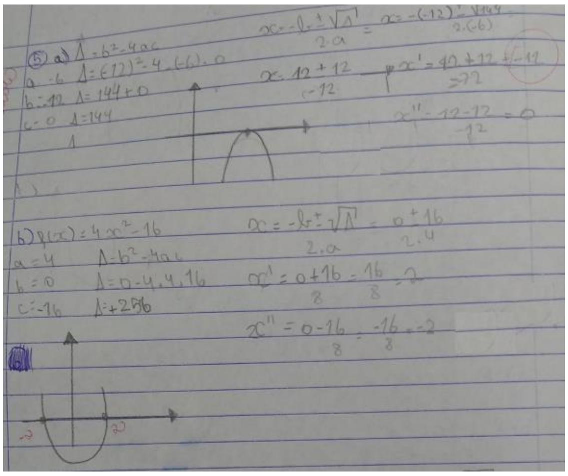
Imagem 19 – Resposta à questão 5 (b)



Fonte: Próprio autor

Aluno 11:

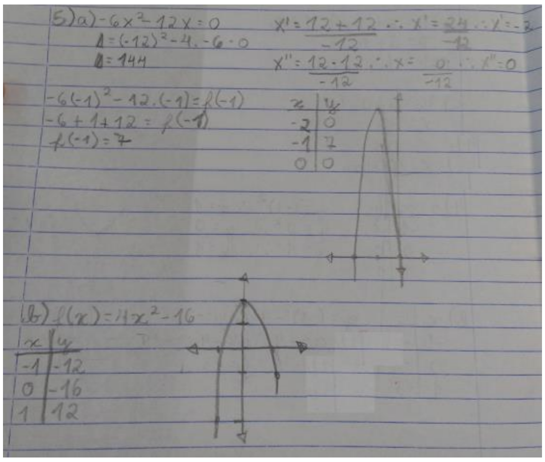
Imagem 20 – Resposta à questão 5



Fonte: Próprio autor

Aluno 12:

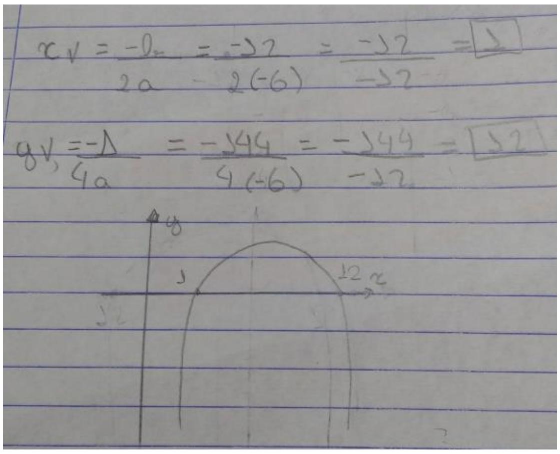
Imagem 21 – Resposta à questão 5



Fonte: Próprio autor

Aluno 13:

Imagem 22 – Resposta à questão 5 (a)



Fonte: Próprio autor

Os alunos numerados por 3, 4, 8 e 9 não responderam essa questão.

A partir do segundo encontro esses 13 alunos foram divididos em 5 duplas e 1 trio, tendo como pressuposto que atividades que envolvem Matemática tem melhor resultado quando os alunos interagem e discutem juntos como resolver um problema.

Assim como destaca Almeida, Silva e Vertuan (2016) “a modelagem matemática em sala de aula pode ser vista como uma atividade essencialmente cooperativa, em que a cooperação e a interação entre os alunos e entre professor e aluno têm um papel importante na construção do conhecimento”. (p.33).

Desse modo, desenvolvemos uma breve apresentação dos passos básicos de como utilizar o software Tracker, abordando as ferramentas que seriam necessárias para uma análise de vídeos. Para efeito de melhor interação com essa tecnologia, disponibilizamos dois vídeos prontos, de movimentos diferentes, para que os alunos realizassem a análise de acordo com o que foi apresentado na oficina.

Pra auxilio na manipulação do software, disponibilizamos também um tutorial e uma apresentação em slide destacando e exemplificando cada uma das ferramentas que seriam utilizadas na análise dos vídeos.

Fotografia 4 – Alunos assistindo ao tutorial

Fonte: Próprio autor

Fotografia 5 – Alunos interagindo com o software Tracker

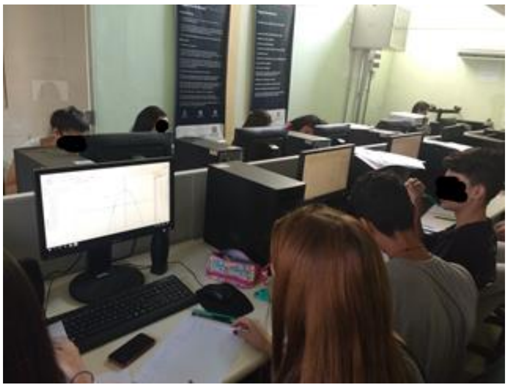
Fonte: Próprio autor

Ao final da atividade, pedimos para que cada grupo salvasse o arquivo com a análise realizada no Tracker para que utilizássemos os dados na continuação do trabalho. Para concluir esse encontro, discutimos os resultados obtidos pelos alunos e perguntamos quais conclusões eles poderiam tirar da situação estudada e o que a análise daquele movimento significava para eles. Um dos alunos percebeu e compartilhou com a turma, "que a matemática em forma de função está no nosso cotidiano, nos movimentos que executamos diariamente".

O terceiro encontro foi iniciado com uma breve revisão sobre o conceito de funções. Para tanto, entregamos aos alunos um material impresso destacando pontos importantes em relação ao estudo de funções lineares e quadráticas e suas representações gráficas. Esse estudo foi todo desenvolvido com o software GeoGebra. Foi apresentada aos alunos a ideia de controles deslizantes para discutir os coeficientes da função, e também como obter as raízes e o vértice da parábola através do software.

Nesse momento, apresentamos também como obter a função matemática, a partir dos dados coletados do Tracker, que representava o movimento analisado.

Fotografia 6 – Alunos interagindo com o GeoGebra



Fonte: Próprio Autor

Mostramos como, por meio dos dados obtidos na análise do Tracker no encontro anterior, usaríamos o Geogebra para a obtenção da função referente ao movimento que eles iriam criar.

No quarto encontro abordamos alguns conceitos sobre funções, vistos no encontro anterior, com o objetivo que os alunos tirassem eventuais dúvidas. Discutimos a análise feita no GeoGebra e como os vídeos gravados que foram analisados no Tracker representavam movimentos parabólicos. Enfatizamos, então, conceitos envolvendo o gráfico das funções quadráticas e o cálculo das suas raízes e vértices, a partir da exploração no software.

Ficou combinado que no próximo encontro (quinto) os alunos trariam um vídeo gravado de algum movimento escolhido por eles. Todos filmaram o vídeo utilizando seus próprios celulares.

No quinto encontro os alunos analisaram, as imagem filmadas, a partir do Tracker, e os dados obtidos nessa análise, no GeoGebra e com isso, geraram a função que representava o movimento filmado. Todos os vídeos gravados foram de algum tipo de lançamento de objetos, logo os respectivos movimentos foram parabólicos.

Por meio das análises realizadas nesses softwares os alunos responderam um primeiro questionário referente ao estudo de funções quadráticas, tendo como base a função criada por eles. Além de perguntas referentes às raízes, vértices e o cálculo do discriminante "Delta", também foi perguntado o que a função criada por eles representava.

Fotografia 7 – Alunos realizando a análise no Tracker do movimento gravado por eles

Fonte: Próprio Autor

Fotografia 8 – Alunos ajustando no GeoGebra uma parábola para o movimento analisado

Fonte: Próprio Autor

Fotografia 9 – Alunos ajustando no GeoGebra uma parábola para o movimento analisado

Fonte: Próprio Autor

A seguir, destacamos as questões que fizeram parte desse estudo, bem como as respostas das duplas de alunos.

1º Questionário:

Questão 1: O que é função? O que a sua função representa?

Dupla 1 – "Função é uma relação entre x e y. Representa a distância em que a mochila percorre".

Dupla 2 - "função é uma relação definida por duas variáveis (x,y)".

Dupla 3 – "função é o que determina a relação de dois elementos, em que cada valor de x corresponde a um valor de y".

Dupla 4 – "função é a relação de conjunto que representa um movimento. Representa uma parábola de um movimento com a bola".

Trio – "Relação entre duas variáveis (x,y), x é independente, y dependente. Ela representa um movimento".

Questão 3: O que são raízes, o que elas representam?

Dupla 1 – "o ponto em que corta a reta x, representa o ponto inicial e final da ação do objeto".

Dupla 2 - "raiz é o ponto que intercepta o eixo x, representa o ponto inicial e final da ação do do objeto".

Dupla 3 – "raízes são o ponto mais alto do y".

Dupla 4 – "as raízes representam o ponto que toca o eixo x".

Trio – "pontos de intersecção, crescentes ou não, que cruza o eixo x".

No último encontro foram entregues outros dois questionários, um referente ao estudo dos coeficientes da forma geral da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ onde era proposto que eles variassem os coeficientes através de controles deslizantes no GeoGebra, e com essa exploração responder o que ocorria com o gráfico da função. Nessa atividade os alunos foram estimulados a explorar o "papel" de cada coeficiente e a construção de uma parábola.

A seguir apresentaremos as respostas dos questionários entregues neste dia

2º Questionário:

Questão 1: O que acontece com a parábola se variamos o coeficiente "a"?

Dupla 1 – “a concavidade muda para baixo ou para cima”.

Dupla 2 – “a concavidade muda para baixo ou para cima”.

Dupla 3 – “ela fica positiva ou negativa de acordo com os números e quando fica em zero fica uma reta”.

Dupla 4 – “ela poderá variar o tamanho e onde se encontrará a parábola”.

Dupla 5 – “a concavidade muda, quando o “a” é negativo a concavidade é para baixo”.

Trio – “se o “a” for negativo, a parábola será para baixo”.

Questão 2: Quando a função possuirá ponto máximo? E ponto mínimo?

Dupla 1 – “quando o *a* for – e quando o *a* for +”.

Dupla 2 – “quando o *a* for negativo. Quando o *a* for positivo”.

Dupla 3 – “quando variamos os valores de *c*”.

Dupla 4 – “quando o *a* for positivo será ponto mínimo. E se o *a* for negativo será ponto máximo”.

Dupla 5 – “ponto máximo, “*a*” positivo. Ponto mínimo, “*a*” negativo”.

Trio – “ponto máximo „*a*‟. Ponto mínimo „– *a*’ ”.

Questão 3: O que acontece com a parábola se variamos o coeficiente “c”?

Dupla 1 – “o *y* da parábola aumenta ou diminui”.

Dupla 2 – “varia o corte no eixo *y*”.

Dupla 3 – “quando variamos o *c* a parábola tem um ponto mínimo e um ponto máximo”.

Dupla 4 – “determina a profundidade da parábola podendo ser menor ou maior. Determinando o ponto de intersecção do *y*”.

Dupla 5 – “a parábola aumenta ou diminui”

Trio – “verificamos se contem raízes e os valores dela”.

Questão 4: E se o coeficiente “c” for zero? O que você observa no gráfico?

Dupla 1 – “que uma raiz vai ser 0, e a outra será um numero positivo ou negativo”.

Dupla 2 – “a parábola corta o eixo x”.

Dupla 3 – “que a parábola fica negativa”.

Dupla 4 – “que tanto o *x* e o *y* serão igual a zero”.

Dupla 5 – “a primeira raiz será zero ou menor”

Trio – “observamos que delta = 0 duas raízes com apenas um valor ”.

Questão 5: Ao variar o coeficiente “b” o que acontece com a parábola?

Dupla 1 – “a distância do x aumenta ou diminui”.

Dupla 2 – “as raízes ficam positivas ou negativas (de acordo com o eixo x)”.

Dupla 3 – “depende dos valores de c para que o b possa cortar o eixo y e ficar positivo ou negativo”.

Dupla 4 – “determina onde a parábola ficará toda para cima ou para baixo ou tocar o eixo x. A parábola não passará do 1. Alterando o corte da parábola (eixo y)”.

Dupla 5 – “o vértice sobe ou desce”.

Trio – “se é raiz positiva ou negativa”.

Questão 6: E se o coeficiente “b” for zero? O que você observa no gráfico?

Dupla 1 – “que terá só uma raiz”.

Dupla 2 – “a parábola é cortada no meio”.

Dupla 3 – “o vértice vai sempre cortar no eixo y”.

Dupla 4 – “ou o vértice será 1. E a parábola será menor”.

Dupla 5 – “o vértice fica no valor de c”.

Trio – “não há raiz por não cortar o eixo x”.

O questionário de cunho dissertativo tinha como objetivo obter indícios sobre a impressão dos alunos em relação à participação no curso e sua opinião sobre a experiência vivida. A seguir apresentaremos as perguntas feitas, assim como as respostas transcritas na íntegra das duplas de alunos:

Questão 1: Como foi pra você o estudo de funções com os softwares Tracker e Geogebra?

Dupla 1 – “nos sentimos bem com que nós aprendemos, nos ajudou em relação a aula de matemática”.

Dupla 2 – “nós nos sentimos lisonjeadas por estar participando deste curso legal que o diretor nos proporcionou”.

Dupla 3 – “gostamos bastante, achamos que nos ajudam a visualizar melhor as funções”.

Dupla 4 – “eu achei interessante, observando a importância de cada letra e de cada função. Estudei e aprendi muita coisa, foi um estudo bem completo das funções. Sendo também educativo, exigindo atenção e raciocínio lógico. Aprendendo também que a matemática pode estar em nosso dia-dia, sendo até mesmo em movimentos ou ações simples. A professora teve paciência, isto ajudou em situações nas quais tínhamos dificuldades".

Dupla 5 – "o curso foi muito bom em relação aos aplicativos, softwares que ainda não conhecia e passei a conhecer e aprender sobre".

Trio – "achamos interessantes, pois é uma grande novidade para nós, pois não sabíamos da existência desses aplicativos que interagem com movimentos reais".

Questão 2: Você se identificou com algum momento do curso em especial? Se sim, qual foi ele e por quê? Se não nos diga o por que.

Dupla 1 – "o momento mais positivo foi quando a professora explicou no quadro os fundamentos das fórmulas e dos gráficos".

Dupla 2 – "sim, foi quando a professora recordou algumas coisas nos mínimos detalhes".

Dupla 3 – "nós podemos interagir com outras pessoas de outra turma, criando um ciclo de amizade maior. E nos deu a oportunidade de aprender matérias novas".

Dupla 4 – "sim quando nós aprendemos usar os programas para fazer os gráficos da função".

Dupla 5 – "sim, quando eu e minha dupla, fizemos e gravamos o movimento, pois já tínhamos noção do que era uma parábola e que iriamos analisar, pois somente comprovou que a matemática pode estar em coisas inimagináveis que fazemos no nosso dia-dia".

Trio – "quando colocamos nosso movimento para ser analisado. Porque foi uma novidade em saber que o movimento real pode virar uma conta de matemática".

Questão 3: Se você pudesse mudar alguma coisa nas aulas de Matemática, o que mudaria?

Dupla 1 – "deveria ter mais atividades interativas, juntando a matéria com jogos e trabalhos em grupo, e o mais importante usar mais aparelhos eletrônicos, como celulares, computadores e apps".

Dupla 2 – "que a professora use menos linguagem matemática".

Dupla 3 – "mudaria a maneira da aula, poderia ser mais legal, como trabalhar com o computador que é mais fácil de aprender".

Dupla 4 – "teria mais informática e aulas práticas com dinâmicas nos exercícios".

Dupla 5 – "poderia ter mais tecnologia, poderia também ensinar a mexer com programas interessantes, mudando a dinâmica das aulas, tendo também mais ligação entre o dia-dia e a matemática já que é algo que não percebemos e nem imaginamos".

Trio – “mudaríamos a professora e o modo de ensino, deveria trabalhar mais com o computador”.

Fotografia 10 – Alunos respondendo ao 1º questionário com o auxilio do GeoGebra

Fonte: Próprio Autor

Fotografia 11 – Alunos respondendo ao 2º questionário do último encontro.

Fonte: Próprio Autor

4.2 ANÁLISE DOS RESULTADOS

A seguir apresentaremos uma análise das respostas aos questionários aplicados durante a atividade de modelagem, a partir da descrição dos dados realizada.

A partir da análise das respostas obtidas na avaliação diagnóstica, foi possível observar que todos os alunos gostavam de Tecnologias Digitais, como celulares, computadores e vídeo games. Outro dado interessante foi que, apesar de alegarem o gosto por tecnologia, dentre os 13 alunos apenas 2 conheciam o software GeoGebra e nenhum o software Tracker.

Em relação às questões sobre funções, os alunos as resolveram sozinhos, eventualmente tirando pequenas dúvidas. Os 13 alunos estavam sentados em grupos, porém a resposta a esse questionário foi entregue individualmente.

Quadro 3- Respostas à avaliação diagnóstica.

Questões	Respostas Satisfatórias	Respostas Insatisfatórias	Não Responderam
1	2	11	0
2	11	2	0
3	9	4	0
4			
a)	7	6	0
b)	3	10	0
c)	4	8	1
5			
a)	3	5	5
b)	1	6	6
6			
a)	8	0	5
b)	5	4	4
c)	1	6	6
	37,7 %	**43,3 %**	**19%**

Fonte: Próprio autor

Percebemos que entre os alunos geralmente havia uma discussão sobre como se resolver as atividades propostas e os conceitos envolvidos, essa colaboração os auxiliava na conclusão da atividade.

A maior dificuldade identificada nas respostas dos alunos foi na representação gráfica das funções. No que se refere à função quadrática, eles não procuravam calcular as raízes e especificar o vértice para esboçar o gráfico, eles utilizavam a técnica de atribuir aleatoriamente valores para a variável x, que se chama entre eles de "tabelinha". O que, em alguns momentos, resultava em gráficos que não interceptavam o eixo x, mesmo existindo raízes reais, por exemplo.

Deste questionário destacamos as questões 4 e 5, pois, em suas respostas, mostram o entendimento que os alunos possuem sobre construção de gráficos de funções.

O objetivo com essas questões era o de observar como eram feitas as construções dos gráficos e se os alunos relacionavam essa construção com pontos importantes de uma parábola como o vértice, as raízes e o ponto de intersecção com o eixo coordenado "y".

Dentre os sete alunos que responderam a questão 4, cinco deles (1, 2, 3, 9 e 12) construíram as parábolas pelo método da "tabelinha", onde ora acertavam por acaso as valores das raízes e do vértice, e ora o esboço do gráfico ficava incompleto por não haver a interceptação com o eixo coordenado “x” nos valores exatos, correspondentes às raízes que muitas vezes nem eram indicados na construção.

Outros dois alunos, (4 e 8), até fizeram o cálculo das raízes da função, assim como obtiveram os valores do seu vértice, porém ao traçarem o esboço do gráfico, não utilizaram esse tipo de informação nas construções dos gráficos.

O restante dos alunos enumerados por 5, 6, 7, 10, 11 e 13, não responderam satisfatoriamente essa questão. Eles não esboçaram os gráficos nem calcularam os vértices, apenas indicaram se o ponto do vértice era máximo ou mínimo, sendo que apenas os alunos 10 e 11 acertaram essa classificação.

Apenas o aluno 4 respondeu corretamente o que pedia a questão 4. Mesmo que o seu esboço esteja incompleto, ele calculou o valor do ponto do vértice e fez a correta indicação de máximo e mínimo. Os outros alunos apenas esboçaram o gráfico para que pudessem visualizar se a parábola possuiria ponto máximo ou mínimo.

O mesmo ocorreu com a questão 5, apesar de termos tentado “induzir” os alunos, a partir da sequência de atividades, a utilizarem na construção dos gráficos o vértice e as raízes da função, alguns permaneceram com a “tabelinha” de pontos e outros não relacionaram corretamente as informações das questões 4 e 5, ainda representando de maneira incorreta os pontos considerados importantes para a construção de uma parábola.

Com isso, percebemos que os alunos não utilizam a informação de vértice, raízes ou termo constante como uma característica importante para a construção de gráficos.

A seguir apresentaremos a análise dos questionários aplicados no quinto encontro. Esses questionários foram com base no movimento filmado pelos alunos, que foi analisado no Tracker e posteriormente no GeoGebra.

Pudemos notar, por meio das discussões geradas entre as duplas, que os alunos identificaram que os pontos da parábola que interceptam o eixo coordenado x, são suas raízes, que o cálculo do vértice é importante para a construção de gráficos e que o termo constante “c” indicará onde a parábola intercepta o eixo coordenado y.

O primeiro questionário foi referente à função criada por eles, tendo como base a análise no Tacker e GeoGebra. Nessa ocasião os alunos já estavam divididos em duplas. Nesse questionário uma das duplas não entregou suas respostas logo o quadro a seguir conta com as respostas de apenas 5 duplas.

Quadro 4 – Respostas ao primeiro questionário.

Questões	**Respostas Satisfatórias**	**Respostas Insatisfatórias**
1	5	0
2	5	0
3	3	2
4	5	0
5	4	1
6	5	0
7	5	0
8	3	2
9	4	1
10	5	0
	88 %	**12%**

Fonte: Próprio autor

Para esse questionário destacamos as questões 1 e 3, pois buscamos notar se os alunos conseguiram relacionar o conceito de função com o movimento do seu cotidiano gravado por eles, e se essa relação contribui para o entendimento de funções quadráticas. Enumeramos por duplas 1, 2, 3, 4 e um trio de alunos.

Na questão 1, percebemos que as duplas 1, 4 e o trio conseguiram relacionar a função quadrática com o movimento filmado por eles. As outras duplas responderam satisfatoriamente o que é função, porém não relacionaram com o movimento filmado.

Na questão 3, apenas as duplas 1 e 2 conseguiram relacionar o movimento realizado por eles com o conceito de raízes da função respondendo que as raízes correspondem à distância que o objeto percorreu.

O segundo questionário tratou da exploração de uma função quadrática qualquer a partir de um trabalho no GeoGebra, onde os alunos variavam seus coeficientes e respondiam o que percebiam com as alterações no gráfico dessa função.

Quadro 5 – Respostas ao segundo questionário.

Questões	Respostas Satisfatórias	Respostas Insatisfatórias
1	6	0
2	3	3
3	4	2
4	4	2
5	5	1
6	4	2
	72,2 %	**27,8 %**

Fonte: Próprio autor

Para a questão 1, no geral as duplas visualizaram o que ocorre com o coeficiente “a” da função. Com destaque, por exemplo, à dupla 3 que apontou que quando a=0 o gráfico é representado por uma reta. Aqui não sabemos se essa dupla relaciona esse fato com a função linear.

Para a questão 2, observamos, pelas respostas apresentadas, que os alunos relacionaram o coeficiente “a” da função quadrática com os valores de máximo e mínimo.

Mas ainda, 2 das duplas o fizeram de maneira incorreta, relacionando apenas a palavra “máximo” com o valor de “a” positivo e “mínimo” com o valor de “a” negativo.

Umas dessas duplas foi a 5, onde fazia parte o “aluno 1” que respondeu corretamente a questão 4 da avaliação diagnostica referente a ponto máximo e mínimo. Comparando as duas respostas, podemos entender que para a resposta desse segundo questionário, o aluno não “variou” o coeficiente “a” através dos controles deslizantes, de modo que não visualizasse a representação gráfica correspondente. Isso nos leva a entender que a visualização seja do esboço feito à mão ou do gráfico gerado pelo software, facilita o entendimento desse conceito de máximo e mínimo de função quadrática.

Não podemos dizer o mesmo para o outro grupo, que é o trio de alunos, pois os alunos responderam de maneira insatisfatória a avaliação diagnóstica, mostrando que mesmo com o uso do software esse conceito não foi entendido satisfatoriamente.

Temos ainda a resposta da dupla 3 (quando variamos os valores de c). Podemos perceber, quando usamos o controle deslizante em “c”, que o gráfico “sobe” e “desce”, em relação ao eixo y. A dupla pode ter relacionado esse fato com a ideia de máximo e mínimo da função.

Para a questão 3, podemos perceber que alguns alunos mostraram entender a relação desse coeficiente com a construção do gráfico, por exemplo, as duplas 1 e 5 responderam que "a parábola aumenta ou diminui", referindo-se, possivelmente, a intersecção com o eixo y, se o "c" é positivo essa intersecção "sobe" e se for negativo "desce".

As duplas 2 e 4 responderam que "varia o corte no eixo y, determinando o ponto de intersecção". Porém, as respostas dadas pela dupla 3 e o trio, revelam o cuidado que devemos ter no trabalho com tecnologia digital. Percebemos que os alunos da dupla 3, ao utilizar o controle deslizante para o coeficiente "c", confirmaram sua hipótese equivocada da questão anterior. E o trio afirma algo em relação à posição da parábola, porém mantendo fixo os outros coeficientes, ocorrendo que se o "c" for maior que zero a função não possui raízes reais, ao contrário de que se o "c" for menor que zero, a parábola intercepta o eixo "x" e possuirá raízes reais. Logo a partir das atividades desenvolvidas eles não conseguiram compreender o "papel" verdadeiro desses coeficientes e a relação entre eles. As respostas mostram a visão que os alunos possuem sobre o que está ocorrendo com o gráfico da função. Não podemos negar que o que eles estão observando está lá, mas a interpretação do que eles "veem" pode estar equivocada.

Para a questão 4, percebemos, nas respostas apresentadas, uma tentativa de relacionar o c=0, com uma das raízes. O que esperávamos das respostas foi um pouco do que foi apresentado pela dupla 1: "que uma raiz vai ser 0, e a outra será um número positivo ou negativo". As outras duplas não conseguiram expressar de uma maneira matematicamente satisfatória o que o ocorre quando o coeficiente "c" é zero.

Entendemos que a questão 5 se mostrava a mais complicada de responder, visto que a variação do coeficiente "b" é a de mais difícil compreensão, pois ele depende do valor do coeficiente "c", sendo "b" o coeficiente linear da função sua variação descreve outra parábola, oposta à original, tendo como limite o ponto de intersecção do eixo y. Esperávamos que os alunos respondessem algo relacionado com isso. O que de certa forma foi observado pelas duplas 1,2,3, 5 e o trio ao dizerem que o vértice sobe ou desce, ou que a distância do vértice ao eixo x aumenta ou diminui e que as raízes podem ser positivas ou negativas dependendo dos valores que são atribuídos a "b".

Mas faltou o "porquê" desse movimento, e sobe ou desce em relação a quem? O que faz esse valor subir ou descer?

Para a questão 6, as duplas 3 e 5 perceberam que o vértice vai estar no ponto de intersecção do eixo y, ou seja, o valor de "c". Enquanto a dupla 2 respondeu que "a parábola é cortada no meio", tendo a noção de que com b=0 o eixo "y" passa a ser o eixo de simetria da parábola.

Porem as duplas 1, 4 e o trio, provavelmente não variou o coeficiente "c" quando o "b" era zero, onde provavelmente a posição de interceptação com o eixo "y" se encontrava em um ponto imóvel. Com isso eles não perceberam que, mesmo quando b=0, a função pode ter mais de uma raiz real.

Percebemos, ao analisar a correção dos três questionários[11] que envolviam os conceitos de função, uma evolução dos alunos nas respostas apresentadas. Observamos que na avaliação diagnóstica 37% das respostas foram classificadas como satisfatórias, 43% insatisfatórias e 19% dos alunos deixaram alguma questão em branco. Nos questionários seguintes, além da porcentagem de acerto ter crescido consideravelmente, para 88% e 72,2% respectivamente, não observamos respostas em branco. Isso pode indicar uma intensão positiva dos alunos em relação às questões apresentadas.

Por meio das respostas dadas ao último questionário, de cunho dissertativo, percebemos que os alunos se identificaram com a atividade de modelagem matemática usando Tecnologias Digitais, mostrando entusiasmo e interesse para que as aulas de matemática acontecessem com mais frequência fazendo uso do computador e outras tecnologias. Importante salientar que em nenhum momento dissemos que a atividade seria desenvolvida por meio dessa metodologia e mesmo assim em diversas respostas verificamos relações com as ideias de modelagem matemática.

[11] A avaliação diagnóstica e os dois questionários que foram desenvolvidos posteriormente.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo da pesquisa, fomos embasados pela seguinte pergunta norteadora "Como se mostra o entendimento dos alunos sobre funções quadráticas, a partir de uma atividade de modelagem matemática com tecnologias digitais?". O objetivo deste trabalho era analisar se atividades que envolvem modelagem matemática com uso de tecnologias digitais contribuem para o entendimento do conteúdo de funções.

Comparando os quadros de porcentagem percebemos que a atividade de modelagem matemática fazendo uso das tecnologias digitais, contribuiu para o entendimento dos alunos sobre conceitos de funções quadráticas. Porém, ao analisar o teor das respostas apresentadas pelos alunos, percebemos que não foi suficiente para que os alunos conseguissem perceber a relação entre todos os coeficientes de uma função.

O estudo realizado no Tracker contribuiu para que os alunos relacionassem um conceito matemático com algo da realidade deles, visto que como algumas das respostas ao questionário dissertativo, eles não imaginavam que existia matemática em situações de seu cotidiano. O GeoGebra contribuiu para a para realização dos ajustes de curvas e obtenção das respectivas funções matemáticas, e a partir da variação dos coeficientes da função a construção de parábolas simultaneamente. O que seria difícil de visualizar apenas com lápis e papel.

Deve-se levar em consideração o modo pelo qual esses conteúdos são ensinados em sala de aula, pois alguns alunos mesmo após a atividade mostraram ainda não compreender pontos importantes relacionados ao conceito de funções. Por exemplo, a questão "O que são raízes, o que elas representam?", foi respondida pela dupla 3: "raízes são o ponto mais alto do y", mostrando que a dupla não tinha compreendido o que significava raízes de uma função.

Isso nos leva ao questionamento: Como são ensinados esses conteúdos em sala de aula? Se esse modo fosse outro, obteríamos melhores resultados com essa mesma atividade?

Voltando o foco no desenvolvimento de nossa atividade, é certo que poderíamos ter seguido por outros caminhos, os questionários poderiam possuir uma diferente formulação, para que os alunos fossem conduzidos a obter um melhor entendimento sobre o conceito de função.

Uma coisa é certa, o uso do computador por si só não traz um beneficio significativo, sendo imprescindível a presença e o papel do professor. Mas qual seria esse papel?

Entendemos que seria necessário após uma atividade desse tipo, retomar as discussões das respostas com a turma, indicando seus erros e buscando outra estratégia que proporcione aos alunos possibilidades de entender de maneira significativa a relação entre os coeficientes de uma função, por exemplo. As tecnologias digitais sozinhas não são capazes de ensinar, é preciso que exista condução e discussão mediada pelo professor, sempre buscando melhores caminhos para alcançar o objetivo desejado.

Consideramos que o entendimento dos alunos acerca da função quadrática após o trabalho feito teve um salto de significado. Não se trata de olhar para o modo pelo qual o conteúdo é trabalhado em sala de aula ou para alternativas que fossem melhores ou pior. O principal aspecto que se mostra neste trabalho é o que observamos nas respostas dos alunos. Isto é, nota-se que há dúvidas em relação ao que eles dizem. Essas dúvidas podem ser interpretações nossas, ou seja, nós não compreendemos o modo pelo qual eles estavam "vendo" o que acontecia no movimento do gráfico e, portanto, seria essencial deixá-los falar, ou poderia até mesmo ser em virtude do modo pelo qual a tarefa foi conduzida. Isso exigiria a retomada do que foi feito.

Desse modo, o maior desafio em um trabalho desse tipo não é a repetição da atividade, mas sim de explorar uma criatividade do professor para propor situações que permitissem aos alunos sair desse equívoco e compreenderem o que lhes estava sendo proposto.

Em resposta a pergunta norteadora, no desenvolvimento da atividade verificou-se que é possível despertar o interesse dos alunos para a matemática e contribuir para o entendimento de funções quadráticas, mas que isso depende de muitos fatores, desde o professor planejar e conduzir suas aulas, despertar nos alunos uma pré-disposição para as aulas de matemática e a escola oferecer suporte apropriado aos professores.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, J. C. Modelagem na educação matemática: contribuições para o debate teórico. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24., 2001, Caxambu. **Anais**... Rio Janeiro: ANPED, 2001. Disponível em <http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/funcoes_modelagem/modulo_I/modelagem_barbosa.pdf>. Acesso em: 21 nov. 2017.

BARBOSA, J. C. Modelagem matemática: O que é? por que? como? **Veritati**, n. 4, p. 73-80, 2004. Disponível em <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/2010/Matematica/artigo_veritati_jonei.pdf>. Acesso em: 21 nov. 2017.

BARBOSA, J. C. **O que pensam os professores sobre modelagem matemática?**. Zetetikê – CEMPEM – FE/UNICAMP. v. 7, n. 11. 1999. Disponível em <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646835/13736>. Acesso em: 24 nov. 2017.

BASSANEZI, R. C. **Modelagem matemática:** teoria e prática. São Paulo: Contexto, 2015.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN N. **Modelagem matemática no ensino**. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2003.

BIEMBENGUT, M. S; SCHMITT, A. L. F.; VIEIRA, E. M. Um panorama das produções brasileiras de modelagem matemática no ensino. In: ENCONTRO PARANAENSE DE MODELAGEM EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 3., Curitiba, 2008. **Anais eletrônicos...** Disponível em: <http://www.unicentro.br/editora/anais/iiiepmem/comunicacoes/CC_198-214.pdf >. Acesso em: 24 nov. 2017.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e educação matemática**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2001. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

BORBA, M. C. A pesquisa qualitativa em educação matemática. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 27.ed., 2004, Caxambu. **Anais eletrônicos...** Disponível em: <http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/artigos/borba/borba-minicurso_a-pesquisa-qualitativa-em-em.pdf>. Acesso em: 25 out. 2017.

BICUDO, M. A. V.; KLÜBER, T. E. Pesquisa em modelagem matemática no Brasil: a caminho de uma meta compreensão. **Cadernos de Pesquisa**. v. 41, n. 144. 2011. Disponível em <http://www.scielo.br/pdf/cp/v41n144/v41n144a14.pdf>. Acesso em: 15 out. 2017.

BICUDO, M. A. V. **Pesquisa qualitativa em educação matemática.** 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática. (3º e 4º ciclos do ensino fundamental). Brasília: MEC, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 20 nov. 2016.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais:** ensino médio. Brasília: MEC, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>. Acesso em: 20 nov. 2016.

BURAK, D. **Modelagem matemática:** ações e interações no processo de ensino aprendizagem. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1992. Disponível em: <http://repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/252996>. Acesso em: 20 nov. 2017.

CAIRES, J. B. S.; NASCIMENTO, J. C. Um estudo de funções polinomiais de 1º e 2º graus em ambiente informatizado. **Revista de eventos Pedagógicos**. v.3, n.3, p. 390-409. 2012. Disponível em: <http://sinop.unemat.br/projetos/revista/index.php/eventos/article/viewFile/946/677>. Acesso em: 20 nov. 2017.

D"AMBROSIO, U. **Educação matemática:** da teoria à prática. 10 ed. Campinas: Papirus, 2003.

D"AMBROSIO, U. Prefácio. In: BORBA, M.; ARAUJO, J. L. (Org.). **Pesquisa qualitativa em educação matemática.** 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2006. p. 11-21.

DUGATO, D. A.; MARTINS, M. M. Software Tracker para ensinar física e matemática. In: ENCONTRO ESTADUAL DE ENSINO DE FÍSICA, 5., 2013, Porto Alegre. **Anais eletrônicos...** Disponível em: <http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:XREmSm8yPGQJ:www.if.ufrgs.br/mpef/5eeefis/sistema/busca_publicacao.php%3Ftrabalho%3D379+&cd=1&hl=pt-BR&ct=clnk&gl=br&client=opera>. Acesso em: 20 nov. 2017.

FIORENTINI, D.; GARNICA, A. V. M.; BICUDO, M. A. V. **Pesquisa qualitativa em educação matemática.** 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2006. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

KLÜBER, T. E. ; BURAK, D. Concepções de modelagem matemática: contribuições teóricas. **Educação Matemática e Pesquisa**, São Paulo, v. 10, n. 1, p. 17-34, 2008. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/viewFile/1642/1058>. Acesso em: 20 nov. 2017.

MAGARINUS, R**. Uma proposta para o ensino de funções através da utilização de objetos de aprendizagem.** 2013. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2013. Disponível em: <https://ufsmprofmat.weebly.com/uploads/9/3/5/6/9356672/dissertao_renata_magarinus.pdf>. Acesso em: 20 out. 2017.

MEYER, J. F. C. A; CALDEIRA, A. D; MALHEIROS, A. P. S. **Modelagem em educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2011. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

PONTE, J. P. **Estudos de caso em educação matemática**. Bolema. Rio Claro, 2006. Disponível em: <http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/3007/1/06-Ponte(BOLEMA-Estudo%20de%20caso).pdf> . Acesso em: 24 out. 2017.

SANTOS, P.A.S. **Um estudo da modelagem matemática na educação matemática e seu potencial para o desenvolvimento do pensamento crítico**. 2013. 61f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2013. Disponível em: < https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/121032/000736734.pdf?sequence=1>. Acesso em: 20 out. 2017.

SOUSA, R. M. **O uso do GeoGebra no ensino de função quadrática**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal do Oeste do Pará. Santarém/PA, 2014. Disponível em: <http://docplayer.com.br/22523355-O-uso-do-geogebra-no-ensino-de-funcao-quadratica.html>. Acesso em: 20 nov. 2017.

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática:** uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002.

BORBA, M. C. **Softwares e Internet na sala de aula de Matemática**. In: X Encontro Nacional de Matemática. Salvador, BA, 2010. Disponível em <http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/artigos/borba/marceloxenen.PDF>. Acesso em 20 nov. 2017.

BURAK, D. **Modelagem matemática:** uma metodologia alternativa para o ensino de matemática na 5ª série. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista Júlio Mesquita Filho, UNESP. Rio Claro – SP, 1987. Disponível em <http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:zgpe7gxsfXYJ:www.sbem.com.br/files/ix_enem/Comunicacao_Cientifica/Trabalhos/CC02581108991T.doc+&cd=1&hl=pt-BR&ct=clnk&gl=br&client=opera>. Acesso em 20 out. 2017.

KLÜBER, T. E. ; BURAK, D.; **Modelagem matemática:** uma experiência concreta**.** In: IV Conferência Nacional sobre Modelagem e Educação Matemática, 2005, Feira de Santana – BA: UEFS, 2005. Disponível em <https://sites.google.com/site/tiagokluber/CNMEM_2005_Tiago.pdf>. Acesso em 20 out. 2017.

PEREZ, J. F. **O trabalho com modelagem matemática na sala de aula**: o significado da pesquisa na perspectiva do aluno. 2010. 122 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2010. Disponível em <http://www.sumare.edu.br/mkt/raes12a/modelagem-matematica.pdf>. Acesso em 20 nov. 2017.

ROZAL, E. D. **Modelagem matemática e os temas transversais na educação de jovens e adultos**. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas). Universidade Federal do Pará. Belém – PA, 2007. Disponível em <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/2010/Matematica/dissertacao_edilene_farias_rozal.pdf>. Acesso em 20 out. 2017.

VIDAL, E. **Ensino à distância vs ensino tradicional**. Universidade Fernando Pessoa. Porto, 2002. Disponível em: <http://homepage.ufp.pt/lmbg/monografias/evidal_mono.pdf>. Acesso em: 21 nov. 2017.

APÊNDICE A – Avaliação Diagnóstica

Quero saber mais sobre você!

- **Nome:**

___

- **Idade:**

___

- **Gênero:**

___

- **Período em que estuda:**

___

- **Trabalha (sim ou não):**

___

- **Conhece, ou já trabalhou com o Geogebra? Se sim descreva um pouco sobre a atividade que você aprendeu.**

___

- **Gosta de tecnologias? Quais?**

___

- **Já trabalhou com a produção de vídeos? O que sabe sobre isso?**

___

- **Você já estudou funções? Quais tipos de funções?**

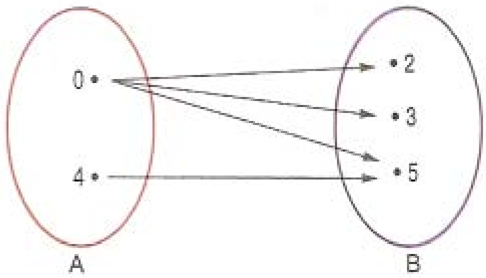
___

Definição de função:
Sejam A e B conjuntos diferentes do vazio. Uma relação f de A em B é função se, e somente se, todo elemento de A estiver associado através de f a um único elemento de B.
Usaremos a notação f: A → B para indicar que f é função de A em B.

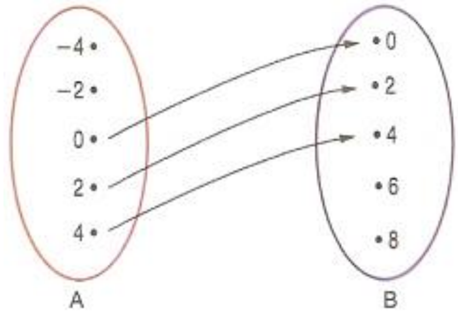
Atividades

1) Verifique quais relações abaixo representam funções.

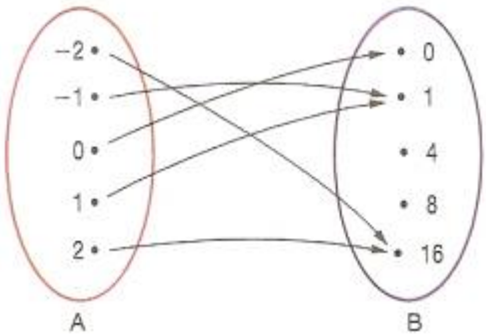
a)



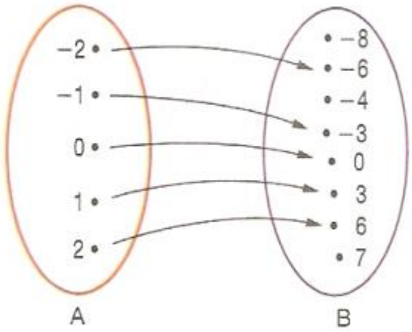
b)



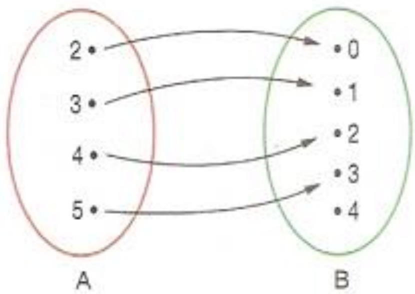
c)



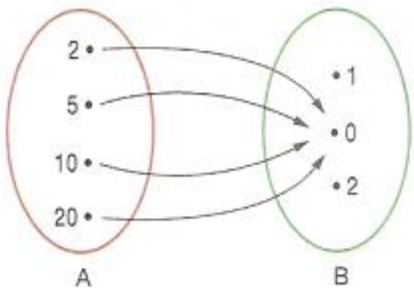
d)



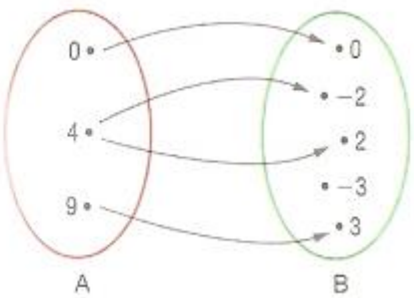
e)



f)



g)



2) Dados A = { -3, -2, 0, 3 } e B = { - 1, 0, 1, 2, 4, 5, 7 } e uma relação expressa pela fórmula ***y = x + 2***, com x pertencendo a A e y pertencendo a B. Faça um diagrama e verifique se f é uma função de A em B.

3) O preço a ser pago por uma corrida de táxi inclui uma parcela fixa de R$ 6,00 , denominada bandeirada, mais uma parcela variável de R$ 0,90 por km rodado.
Determine:

a) A função que representa o preço **P** de uma corrida em função de **x** quilômetros rodados.

b) O preço de uma corrida de 12 km.

c) A distância percorrida por um passageiro que pagou R$ 96,00 pela corrida.

4) Determine em cada função o ponto correspondente ao vértice e indique se é ponto é máximo ou ponto mínimo:
a) $y = x^2$
b) $y = x^2 - 4$
c) $f(x) = -x^2 + 6x - 8$

5) Determine as raízes das funções:
a) $f(x) = 3x^2 - 6x + 3$
b) $y = 6x^2 - 12x$
d) $f(x) = -x^2 + 1$

6) Construa o gráfico das funções:
a) $y = -6x^2 - 12x$
b) $f(x) = 4x^2 - 16$
c) $y = x^2 - 12x + 10$

APÊNDICE B - 1º Questionário

Nome:____

Nome:____

- ❖ Tendo como base o seu vídeo analisado no Tracker e a análise feita no GeoGebra da sua função, responda:

1. O que é função? O que sua função representa?

2. Quais as raízes da sua função?

3. O que são raízes, o que elas representam?

4. Observando o gráfico resultante do seu movimento, qual a distancia máxima atingida pelo objeto?

5. Qual o vértice da sua função? O que ele representa?

6. Sua função possui ponto de mínimo ou ponto de máximo? Por quê?

7. Qual a altura máxima atingida pelo seu objeto?

8. Em que ponto sua função corta o eixo y? O que isso significa?

9. Qual o valor do discriminante Δ (Delta)? O que isso significa?

10. Esboce o gráfico da sua função

APÊNDICE C – 2º Questionário

Nome:____

Nome:____

❖ Tendo como base a análise no GeoGebra, através dos controles deslizantes, em relação à função quadrática na sua forma geral $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$, responda:

1. O que acontece com a parábola ao se variamos o coeficiente “a”?

2. Quando essa função possuirá ponto máximo? E ponto mínimo?

3. O que acontece com a parábola ao se variamos o coeficiente “c”?

4. E se o coeficiente “c” for 0 (zero)? O que você observa no gráfico?

5. Ao se variar o coeficiente “b” o que acontece com a parábola?

6. E se o coeficiente “b” for 0 (zero)? O que você observa no gráfico?

APÊNDICE D – Questionário Dissertativo

Nome:____

Nome:____

❖ Em relação ao curso

1. Como foi pra você o estudo de funções com os softwares Tracker e Geogebra?

2. Você se identificou com algum momento do curso em especial? Se sim, qual foi ele e por quê? Se não nos diga o por que.

3. Se você pudesse mudar alguma coisa nas aulas de Matemática, o que mudaria?