



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

Melka Carolina Faria Catelan

Heurísticas para o Problema de Dimensionamento de Lotes
com Máquinas Paralelas Flexíveis

São José do Rio Preto
2018

Melka Carolina Faria Catelan

Heurísticas para o Problema de Dimensionamento de Lotes com
Máquinas Paralelas Flexíveis

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Orientador: Prof. Dr. Silvio Alexandre de Araujo

Co-orientador: Diego Jacinto Fiorotto

São José do Rio Preto
2018

Catelan, Melka Carolina Faria.

Heurísticas para o problema de dimensionamento de lotes com máquinas paralelas flexíveis / Melka Carolina Faria Catelan. -- São José do Rio Preto, 2018

68 p. : il., tabs.

Orientador: Silvio Alexandre de Araujo

Coorientador: Diego Jacinto Fiorotto

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto

1. Matemática. 2. Heurística. 3. Problema de direcionamento de lotes. 4. Flexibilidade de máquinas. I. Título.

CDU – 51

Melka Carolina Faria Catelan

Heurísticas para o Problema de Dimensionamento de Lotes com
Máquinas Paralelas Flexíveis

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Silvio Alexandre de Araújo
UNESP – Câmpus de São José do Rio Preto
Orientadora

Prof^a. Dr^a. Sonia Cristina Poltroniere Silva
UNESP – Câmpus de Bauru

Prof. Dr. Fernando Luiz Pio dos Santos
UNESP – Câmpus de Botucatu

São José do Rio Preto
30 de julho de 2018

*Aos meus amados pais, Neusa e Haroldo.
Ao meu irmão, Julio.
Ao meu noivo Cleber e meus queridos amigos.
Dedico.*

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, pela vida, pelas oportunidades e por tudo que conquistei até hoje.

Ao meu professor e orientador Silvio, pela orientação, dedicação, paciência e pela oportunidade que ele me proporcionou durante toda a elaboração deste trabalho e de outros que possivelmente virão. Obrigada pela compreensão e auxílio em todos os momentos.

Ao meu coorientador Diego, por todo o auxílio, dedicação e compreensão durante toda a elaboração deste trabalho. Obrigada por tudo.

Aos meus pais, Neusa e Haroldo, ao meu irmão Julio e toda minha família pelo apoio, compreensão e carinho em todos os momentos difíceis e por me incentivarem a chegar onde estou, pois se não fossem vocês, eu não sei se chegaria até aqui.

Ao meu noivo Cleber por ser uma pessoa tão íntegra e estar sempre ao meu lado.

Ao pessoal da salinha, pela amizade, pelos momentos de alegria, momentos de estudos e por toda a ajuda que recebi de vocês, em especial a Gislaine por me ajudar sempre que precisei. Pessoas que tenho um carinho muito especial.

Aos funcionários da Unesp por todo o apoio, em especial o Jetúlio e o Tiago.

A CAPES pelos meses de auxílio financeiro.

RESUMO

Este trabalho trata-se do problema de dimensionamento de lotes com máquinas paralelas flexíveis, que consiste basicamente em determinar a quantidade de itens a serem produzidos, em um horizonte de tempo finito, satisfazendo uma demanda, com várias máquinas. Este problema é de origem econômica e envolve custos de produção, estoque e preparação de máquinas. No problema padrão, cada item pode ser produzido em qualquer uma das máquinas, ou seja, têm-se a flexibilidade total de máquinas. No entanto nem sempre é viável ter flexibilidade total das máquinas, devido aos custos. Portanto, pode ser interessante implementar apenas uma flexibilidade limitada. A consideração ou não de uma máquina para produzir um produto específico torna-se uma variável de decisão e há um custo de investimento associado às estas decisões. Os resultados computacionais realizados com o CPLEX mostraram que a formulação é muito difícil, especialmente para instâncias com muitos itens. Assim, neste trabalho foram propostas três heurísticas para o problema, com intuito de buscar boas soluções para o problema em baixos tempos computacionais. As heurísticas foram comparadas ao modelo via pacote de otimização e observou que conforme o número de itens e de máquinas foram aumentando, os resultados obtidos foram melhores.

Palavras-chave: Problemas de Dimensionamento de Lotes, Flexibilidade de Máquinas, Heurísticas.

ABSTRACT

This work deals with the problem of lot-sizing with flexible parallel machines, which basically consists of determining the quantity of items to be produced, in a finite time horizon, satisfying a demand, with several machines. This problem is of economic origin and involves production, inventory and machine preparation costs. In the standard problem, each item can be produced in any of the machines, that is, they have the total flexibility of machines. However, it is not always feasible to have total machine flexibility due to costs. Therefore, it may be interesting to implement only limited flexibility. The consideration or not of a machine to produce a specific product becomes a decision variable and there is an investment cost associated with these decisions. The computational results obtained with CPLEX showed that the formulation is very difficult, especially for instances with many items. Thus, in this work three heuristics were proposed for the problem, in order to find good solutions to the problem in low computational times. The heuristics were compared to the model via optimization package and observed that as the number of items and machines were increasing, the results were better.

Keywords: Lot Sizing Problems, Machine Flexibility, Heuristics.

Lista de Figuras

| | | |
|-----|--|----|
| 3.1 | Configuração de Flexibilidade com 6 itens - Fonte: [1] | 32 |
| 4.1 | Exemplo de Preparação Dedicada | 38 |

Lista de Tabelas

| | | |
|-----|--|----|
| 4.1 | Exemplo | 39 |
| 5.1 | Parâmetros | 44 |
| 5.2 | 6 itens, 6 máquinas e 15 períodos-Dedicado | 45 |
| 5.3 | 6 itens, 6 máquinas e 15 períodos | 46 |
| 5.4 | 12 itens, 12 máquinas e 15 períodos | 47 |
| 5.5 | 12 itens, 12 máquinas e 15 períodos | 48 |
| 5.6 | 24 itens, 24 máquinas e 15 períodos | 49 |
| 5.7 | 24 itens, 24 máquinas e 15 períodos | 50 |

Sumário

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introdução | 17 |
| 2 | Problema de Dimensionamento de lotes | 19 |
| 2.1 | Problema de Dimensionamento de Lotes com Único Item | 20 |
| 2.2 | Problema de Dimensionamento de Lotes com Vários Itens | 24 |
| 2.3 | Problema de Dimensionamento de Lotes com Vários Itens em Máquinas Paralelas | 28 |
| 3 | Problema de Dimensionamento de Lotes com Máquinas Paralelas Flexíveis | 31 |
| 3.1 | Formulação com Flexibilidade da Máquina como uma Variável de Decisão | 34 |
| 4 | Heurísticas para Adicionar Links | 37 |
| 4.1 | Primeira Heurística (HEUR 1) | 37 |
| 4.2 | Segunda Heurística (HEUR 2) | 38 |
| 4.3 | Terceira Heurística (HEUR 3) | 41 |
| 5 | Experimentos Computacionais | 43 |
| 5.1 | Geração de Dados | 43 |
| 5.2 | Resultados Computacionais | 44 |
| 6 | Conclusões e Propostas Futuras | 53 |
| | Referências | 55 |

1 Introdução

Com o avanço da tecnologia, que acelera os processos de evolução e ao mesmo tempo aumenta a competitividade, há uma necessidade de investir em estratégias para que as empresas possam se fortalecer diante do mercado, e uma delas está sendo a aplicação de modelos matemáticos para resolver os problemas que já existem, porém não se consegue resolver. Um dos problemas que se pode observar dentro desse contexto é o problema de dimensionamento de lotes.

Empresas, com o intuito de manter a qualidade e baixar os custos, vêm considerando a possibilidade de investir em um plano de produção que trata da produção, aquisição de recursos e matérias-primas, buscando o mais econômico e atendendo as exigências de qualidade. O investimento em planejamento de produção está sendo um diferencial que faz com que empresas se sobressaiam sobre as outras.

Decisões sobre o processo de produção ao longo de um horizonte de planejamento foi o impulso gerador dos estudos sobre dimensionamento de lotes, que consiste basicamente em determinar a quantidade de itens a serem produzidos, em cada período de um horizonte de tempo finito, satisfazendo restrições de recursos que estão disponíveis para os quais há uma demanda a ser atendida, considerando várias máquinas. Esse problema é de origem econômica e envolve custos de produção, estoque e preparação de máquinas.

O problema de dimensionamento de lotes vêm sendo estudado a mais de sessenta anos e o que levou a esse estudo foi a necessidade entre o equilíbrio do estoque e a preparação das máquinas. Quando se decide iniciar a produção de um item específico, deve-se levar em conta preparação da máquina que será usada. Ao se produzir um lote pequeno, com o intuito de satisfazer apenas a demanda do período, o custo com estoque será menor, porém, isso irá provocar uma nova preparação de máquinas em períodos futuros acarretando um acréscimo do custo. Portanto, podem ocorrer custos tanto quando estoca-se a produção como quando prepara-se as máquinas.

A pesquisa desenvolvida neste trabalho refere-se à problemas que aparecem no contexto do planejamento da produção, onde estão contidas decisões sobre aquisição de recursos e matérias-primas e as decisões sobre a produção de itens.

O problema estudado enfoca o planejamento da produção, em máquinas paralelas com capacidade limitada. A pesquisa foi baseada em Fiorotto et al. [1] que apresentam

uma formulação para o problema de dimensionamento de lotes com máquinas paralelas que considera a possibilidade de investir em flexibilidade.

O objetivo desse trabalho é desenvolver heurísticas para gerar boas soluções em baixos tempos computacionais para o problema de dimensionamento de lotes com máquinas paralelas flexíveis. Foram estudadas formulações da literatura [1] para este problema e foram propostas três heurísticas para o problema, que foram comparadas em um extensivo estudo computacional.

Este trabalho está dividido da seguinte maneira: no Capítulo 2 é feita uma revisão sobre o problema de dimensionamento de lotes e são apresentadas algumas das principais formulações. No Capítulo 3 são apresentados estudos sobre flexibilidade e uma formulação para máquinas paralelas flexíveis. No Capítulo 4 são propostas três heurísticas com o intuito de obter boas soluções com baixos tempos computacionais. O Capítulo 5 apresenta os resultados computacionais e o Capítulo 6 as conclusões e as ideias para trabalhos futuros.

2 Problema de Dimensionamento de lotes

Com base em Fiorotto [2], o objetivo deste capítulo é discutir alguns modelos clássicos para o problema de dimensionamento de lotes. O problema de dimensionamento de lotes é um problema de otimização, tendo origem no planejamento da produção, que consiste em determinar a quantidade a ser produzida de cada item, em cada período de um horizonte de planejamento finito, satisfazendo as restrições e minimizando os custos da produção e estoque. Podemos dividir o problema de dimensionamento de lotes em monoestágio e multiestágio. O sistema de produção é monoestágio quando os itens que serão produzidos são independentes, isto é, nenhum item depende da produção de outro item. O sistema de produção é multiestágio quando os itens que serão produzidos são dependentes, isto é, a produção de determinado item depende da produção de outro item, que é chamado item componente. Nesta pesquisa trabalha-se com o problema de dimensionamento de lotes monoestágio.

Em 1915, surgiram os primeiros estudos relacionados ao dimensionamento de lotes, com o *Economic Order Quantity* (EOQ) [3], o qual consiste em um modelo sem restrições de capacidade e com apenas um item, com a demanda estacionária, isto é, ocorre continuamente com uma razão constante, com tempos contínuos e o horizonte de planejamento infinito. É possível resolver este problema com uma expressão analítica. Depois surgiram alguns modelos que buscavam se enquadrar cada vez mais à realidade.

Na década de 50 surgiu o *Economic Lot Scheduling Problem* (ELSP), tratando-se de uma extensão do modelo EOQ, por considerar restrições de capacidade, vários itens, demanda estacionária, períodos de tempo contínuos e horizonte de planejamento infinito.

Em 1958, surgiu o modelo de Wagner e Whitin [4], que assume um horizonte de planejamento finito, diferenciando-se dos outros que consideravam um horizonte de planejamento infinito, dividido em vários períodos discretos, com uma demanda dinâmica, isto é, a demanda é dada a cada período, podendo variar. Atualmente, os modelos que consideram uma demanda dinâmica ainda são estudados.

Segundo Billington et al. [5], em modelos com restrições de capacidade não é o custo de preparação das máquinas se que torna um fator crítico e sim o tempo de

preparação das máquinas.

Para Trigeiro et al. [6], quando se estende o problema, considerando custos de preparação, não é o mesmo que um problema com tempo de preparação. Segundo o autor quando se modifica o número de preparações no plano de produção, se altera o custo e também o nível de capacidade utilizada, tornando-se difícil de encontrar soluções factíveis para o problema.

No entanto Maes et al. [7] afirma que alguns autores não incluem tempo de preparação em seus modelos, pois estão implicitamente nos custos de preparação.

Em 2014 Holmbom e Segerstedt [8] fornecem uma breve visão geral do *Economic Order Quantity* (EOQ) para o *Economic Lot Scheduling Problem* (ELSP), com o objetivo de descrever o desenvolvimento do campo ELSP a partir da fórmula EOQ para os métodos avançados que são utilizados nos dias atuais. Este artigo mostra as complexidades, dificuldades e possibilidades em um ambiente com vários itens e uma única instalação de produção, com restrição de capacidade e tempo de preparação.

Também em 2014, Glock et al. [9] fazem um levantamento da literatura na área de dimensionamento de lotes, com o intuito de mostrar quais fluxos de pesquisas surgiram a partir do modelo de Harris [3] e quais foram as grandes conquistas alcançadas nas respectivas áreas.

Em Pochet e Wolsey [10] pode-se encontrar uma descrição mais completa sobre diversas características que diferenciam as formulações para o problema de dimensionamento de lotes. Algumas revisões bibliográficas podem ser encontradas em Bahl et al. [11], Maes e Wassenhove [12], Goyal e Gunasekaran [13], Kuik et al. [14], Drexel e Haase [15], Santos [16], Karimi et al. [17], Brahimí et al. [18] e Jans e Degraeve [19].

2.1 Problema de Dimensionamento de Lotes com Único Item

Nesta seção, apresentaremos alguns modelos relacionados ao problema de dimensionamento de lotes para a produção de apenas um único item, cujo objetivo é determinar os períodos em que se tem produção e a quantidade produzida em cada um desses períodos, minimizando o custo total de produção. Pode-se encontrar em Brahimí et al. [18] uma revisão bibliográfica mais recente.

Parâmetros:

$T = \{1, 2, \dots, m\}$ conjunto de períodos;

sc_t : custo de preparação para a produção no período t ;

vc_t : custo unitário de produção no período t ;

hc_t : custo unitário de estoque no período t ;

$sd_{t\tau}$: soma da demanda do período t até o período τ ;

d_t : demanda no período t ;

Variáveis de decisão:

x_t : quantidade produzida no período t ;

y_t : variável binária, indicando a produção ou não no período t ;

s_t : quantidade de estoque no final do período t ;

• Problema de Dimensionamento de Lotes Único Item Sem Restrição de Capacidade

Formulação do Problema:

$$\text{Min} \sum_{t \in T} hc_t s_t + \sum_{t \in T} sc_t y_t + \sum_{t \in T} vc_t x_t \quad (2.1)$$

sujeito a :

$$s_{t-1} + x_t - s_t = d_t \quad \forall t \in T \quad (2.2)$$

$$x_t - sd_{tm} y_t \leq 0 \quad \forall t \in T \quad (2.3)$$

$$y_t \in \{0, 1\} \quad \forall t \in T \quad (2.4)$$

$$x_t \geq 0, s_t \geq 0 \quad \forall t \in T \quad (2.5)$$

A função objetivo (2.1) minimiza a soma dos custos de estoque, preparação e produção dos m períodos. As restrições (2.2) garantem o balanceamento de estoque, ou seja, a quantidade produzida num período mais a quantidade de estoque disponível no início, menos o que sobrar em estoque no fim do período deve ser igual a demanda do período. Já as restrições (2.3) são as restrições de preparo, que permitem a produção no período t somente se houver preparo no período t . As restrições (2.4) e (2.5) são os domínios das variáveis.

Em 1958, os autores Wagner e Whitin [4] desenvolveram um método de solução para esse problema, no qual eles apresentaram um algoritmo de programação dinâmica, onde só produz quando o nível do estoque for zero, que foi baseado em uma propriedade de otimalidade do problema.

Em 1985, Evans [20] propõe um algoritmo que tem a mesma complexidade do algoritmo de Wagner e Whitin [4], no entanto, o algoritmo de Evans [20], se mostrou muito eficiente nos testes computacionais.

Os autores Federgruen e Tzur [21], Wagelmans et al. [22] e Aggarwal e Park [23] apresentaram novos algoritmos para resolver este mesmo problema, porém com menor complexidade. Em relação a este modelo, Zangwill [24] retrata como um problema de fluxo em redes, Barany et al. [25] fazem uma reformulação deste modelo como um problema de localização de facilidades e apresentam um conjunto de desigualdades que retratam o envoltório convexo deste modelo e Eppen e Martin [26] fazem a reformulação do modelo como um problema de caminho mínimo. Denizel et al. [27] analisa a equivalência das reformulações de ambos autores, no qual, ambos descrevem o envoltório convexo deste problema.

Os autores Brahimí et al. [28], fazem uma revisão literária sobre problemas de dimensionamento de lotes com único item, e propõem algumas direções de pesquisa referente as algumas lacunas interessantes a serem preenchidas no problema de dimensionamento de lotes.

- **Problema de Dimensionamento de Lotes com Único Item com Restrição de Capacidade**

Nem sempre é possível admitir que a capacidade de uma produção seja ilimitada ou grande o suficiente para produzir qualquer quantidade, ou seja, em alguns casos o modelo precisa ter restrições de capacidade. Florian e Klein [29] foram um dos primeiros autores a apresentar um problema de dimensionamento de lotes considerando restrições de capacidade, no qual também desenvolveu um algoritmo para resolver este problema. Brahimí et al. [18] fez uma revisão sobre métodos e algoritmos de solução. Podem ser encontradas revisões mais gerais em Karimi et al. [17].

Parâmetro adicional:

Cap_t : capacidade da máquina no período t .

Formulação do Problema:

$$Min \sum_{t \in T} hc_t s_t + \sum_{t \in T} sc_t y_t + \sum_{t \in T} vc_t x_t$$

Karimi et al. [17]

sujeito a:

$$s_{t-1} + x_t - s_t = d_t \quad \forall t \in T \quad (2.7)$$

$$x_t - sd_{tm}y_t \leq 0 \quad \forall t \in T \quad (2.8)$$

$$x_t \leq Cap_t \quad \forall t \in T \quad (2.9)$$

$$y_t \in \{0, 1\} \quad \forall t \in T \quad (2.10)$$

$$x_t \geq 0, s_t \geq 0 \quad \forall t \in T \quad (2.11)$$

A função objetivo (2.6) e as restrições (2.7), (2.8), (2.10) e (2.11) são as mesmas que o modelo (2.1) - (2.5). A restrição (2.9) representa a limitação da capacidade no período t .

• **Problema de Dimensionamento de Lotes com Único Item em Máquinas Paralelas**

Quando se considera um único item, no problema de dimensionamento de lotes em máquinas paralelas, tem-se que, em cada período, várias máquinas estão disponíveis para produzir um único item, cujo objetivo é minimizar os custos de produção, preparação e estoque, de maneira que a demanda seja satisfeita sem atrasos. O item pode ser produzido em qualquer uma das máquinas, no qual seus custos de preparação e produção podem ser distintos, ou seja, as máquinas são não idênticas.

Toledo et al. [30] estendeu a propriedade de Wagner e Whitin [4], que era para apenas uma máquina, para o caso com máquinas paralelas, essa propriedade resultou na caracterização dos pontos extremos do conjunto de soluções do problema e permitiu a generalização dos algoritmos propostos por Evans [20], Wagelmans et al. [22] e Bahl et al. [11].

Parâmetros adicionais:

$J = \{1, \dots, r\}$: conjunto de máquinas;

sc_{jt} : custo de preparação para a produção na máquina j no período t ;

vc_{jt} : custo unitário de produção na máquina j no período t ;

Variáveis de decisão:

x_{jt} : quantidade produzida na máquina j no período t ;

y_{jt} : variável binária, indicando a produção ou não na máquina j no período t ;

Formulação do Problema:

$$\text{Min} \sum_{j \in J} \sum_{t \in T} (sc_{jt}y_{jt} + vc_{jt}x_{jt}) + \sum_{t \in T} hc_t s_t \quad (2.12)$$

sujeito a :

$$s_{t-1} + \sum_{j \in J} x_{jt} - s_t = d_t \quad \forall t \in T \quad (2.13)$$

$$x_{jt} - sd_{tm}y_{jt} \leq 0 \quad \forall j \in J, \forall t \in T \quad (2.14)$$

$$y_{jt} \in \{0, 1\} \quad \forall j \in J, \forall t \in T \quad (2.15)$$

$$x_{jt} \geq 0, s_t \geq 0 \quad \forall j \in J, \forall t \in T \quad (2.16)$$

A função objetivo (2.12) e as restrições (2.13) - (2.16) são as mesmas que o modelo (2.1) - (2.5). Por Toledo et al. [30] pode-se concluir que pelas restrições (2.13) a demanda em cada período t é atendida pela produção do próprio período t em uma ou mais máquinas, ou a demanda em cada período t é atendida pelo estoque do período $t-1$, ou seja se $d_t \geq 0$ pode-se ter $s_{t-1} \geq 0$ e/ou $x_{jt} \geq 0$ para um ou mais $j \in \{1, \dots, r\}$.

Sendo m restrições, então no máximo são m variáveis diferentes de zero em um ponto extremo, conseqüentemente uma das variáveis s_{t-1} ou x_{jt} para uma única máquina $j \in \{1, \dots, r\}$ pode ser positiva.

2.2 Problema de Dimensionamento de Lotes com Vários Itens

Nesta seção considera-se que todos os problemas possuem restrição de capacidade. Observa-se que se a capacidade for ilimitada, pode-se decompor um problema que contém vários itens em problemas que contém apenas um único item. No entanto, quando se consideram as restrições de capacidade, é necessário que se desenvolva métodos específicos para o problema que contém vários itens. Pode-se encontrar em Kuik et al. [14] e Bahl et al. [11] revisões bibliográficas sobre estruturas, modelos e métodos para o problema de dimensionamento de lotes com vários itens em uma única máquina. No artigo de Maes e Wassenhove [12] encontra-se uma revisão mais detalhada, sobre heurísticas, relaxações e métodos para o problema de dimensionamento de lotes com vários itens em uma única máquina. Jans e Degraeve [19] fazem uma revisão sobre métodos de solução. Fiorotto e Araujo [31] consideram o problema de dimensionamento de lote capacitado, com vários itens, tempo de preparação e máquinas paralelas que não estão relacionadas. Eles desenvolveram uma heurística Lagrangiana que obteve limites inferiores de boa qualidade e limites superiores competitivos. Fiorotto et al. [32] consideram o problema de dimensionamento de lotes com restrições de capacidade, com

vários itens, tempo de preparação e máquinas paralelas não relacionadas, e aplicam a decomposição de Dantzig-Wolfe para uma reformulação forte deste problema.

- **Problema de Dimensionamento de Lotes com Vários Itens com Restrição de Capacidade em uma Única Máquina**

Em 1958, Manne [33] paralelo ao trabalho de Wagner e Whitin [4], considera o problema com uma demanda dinâmica, com vários itens e restrições de capacidade. Ele propõe um modelo aproximado de programação linear, tendo como base os possíveis planos de preparação, em que considera explicitamente todos os possíveis planos de produção.

Em 1965, Dzielinski e Gomory [34] usam geração de colunas, na formulação que foi proposta por Manne [33], para lidar com o grande número de variáveis que a formulação continha, ou seja, é aplicada a decomposição de Dantzig-Wolfe [35] ao problema e assim determina-se o limite inferior do problema reformulado. Dzielinski e Gomory [34] também notaram que os subproblemas que devem ser resolvidos para gerar colunas, são equivalentes ao problema que foi estudado por Wagner e Whitin [4].

Em 1971, Lasdon e Terjung [36] reformularam o modelo que foi proposto por Manne [33], que consistia em um modelo de programação linear, e utilizou o método de geração de colunas para resolver este novo problema. São abordados algoritmos desse tipo por Bahl [37], Cattrysse et al. [38], Salomon et al. [39] e Huisman et al. [40].

Os autores Lambrecht e Vandervenen [41], Bitran e Matsuo [42] e Degraeve e Jans [19] discutem a formulação proposta por Manne [33].

Em 2007 os autores Degraeve e Jans [19] apresentam um algoritmo *branch-and-price* e discutem a formulação proposta por Manne [33], mostrando que a decomposição proposta por Manne [33] fornece um bom limite inferior, porém ocorre uma deficiência estrutural que não deixa claro todas as possíveis programações das máquinas, quando o objetivo consiste no problema com restrições de integralidade. O conjunto de soluções possíveis para a formulação de Manne [33] com restrições de integralidade é apenas um subconjunto das soluções possíveis para o original problema inteiro. A origem para esta deficiência, é que a solução para os subproblemas, ou seja, uma nova coluna, consiste em variáveis tanto de produção quanto de preparação, e na formulação de Manne [33], as decisões de produção são determinadas automaticamente pelas decisões de preparação, de acordo com a propriedade de Wagner-Whitin, não deixando claro todas as possíveis programações das máquinas, logo não obtém uma formulação semelhante ao problema original, como o que foi proposto por Dantzig e Wolfe [35].

Será apresentado a seguir um modelo monoestágio com restrições de capacidade, que considera tempo e custo de preparação (*setup*) e uma única máquina.

Parâmetros adicionais:

$I = \{1, \dots, n\}$ conjunto de itens;

d_{it} : demanda do item i no período t ;

$sd_{it\tau}$: soma da demanda para o item i do período t até o período τ ($\tau \geq t$);

hc_{it} : custo unitário de estoque do item i no período t ;

sc_{it} : custo de preparação do item i no período t ;

vc_{it} : custo de produção do item i no período t ;

fc_i custo unitário do estoque inicial para o item i ;

st_{it} : tempo de preparação do item i no período t ;

vt_{it} : tempo de produção do item i no período t ;

Variáveis de decisão:

x_{it} : quantidade produzida do item i no período t ;

y_{it} : variável binária, indicando a produção ou não do item i no período t ;

s_{it} : quantidade de estoque do item i no final do período t ;

s_{i0} : quantidade de estoque inicial do item i ;

Formulação do Problema:

$$\text{Min} \sum_{i \in I} fc_i s_{i0} + \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} (sc_{it} y_{it} + vc_{it} x_{it} + hc_{it} s_{it}) \quad (2.17)$$

sujeito a

$$s_{i,t-1} + x_{it} = d_{it} + s_{it} \quad \forall i \in I, \forall t \in T \quad (2.18)$$

$$x_{ijt} \leq sd_{itm} y_{it} \quad \forall i \in I, \forall t \in T \quad (2.19)$$

$$\sum_{i \in I} (st_{it} y_{it} + vt_{it} x_{it}) \leq Cap_t \quad \forall t \in T \quad (2.20)$$

$$y_{it} \in \{0, 1\}, x_{it} \geq 0 \quad \forall i \in I, \forall t \in T \quad (2.21)$$

$$s_{it} \geq 0, \quad s_{i0} = 0, \quad s_{im} = 0 \quad \forall i \in I, \forall t \in T \quad (2.22)$$

A função objetivo (2.17) minimiza os custos totais de preparação, produção, estoque e estoque inicial. As restrições (2.18) garantem o balanceamento do estoque. Este modelo considera a possibilidade de estoque inicial, para evitar problemas infactíveis, não existindo um preparo para esse estoque, contudo o custo fc_i para este estoque é muito grande, assim a quantidade de estoque inicial s_{i0} terá valor diferente de zero apenas quando o problema tiver solução infactível, Vanderbeck [43]. Temos as restrições de preparo (2.19) e as restrições (2.20) representam a limitação da capacidade de uma

determinada máquina em um determinado período, considerando o tempo gasto para a produção dos itens e a preparação das máquinas. Em (2.21) e (2.22) está definido os domínios das variáveis.

Na literatura podem ser encontrados métodos exatos e heurísticos para resolver problemas de dimensionamento de lotes com uma única máquina, no entanto a maioria desses métodos não considera tempo de preparação, dentre eles: Barany et al. [25], Evans [20], Eppen e Martin [26] e Hindi [44] desenvolveram métodos exatos. Os autores que desenvolveram procedimentos heurísticos são: Chen e Thizy [45], Singh e Rajamani [46] e Kirca e Kokten [47]. Esses procedimentos exatos resolvem apenas problemas pequenos, devido a sua complexidade e os procedimentos heurísticos fornecem soluções para problemas de porte maior.

Os métodos exatos que consideram tempo de preparação são: Diaby et al. [48], que desenvolvem um método *branch-and-bound*. Souza e Armentano [49] que resolvem o problema, utilizando o algoritmo exato de Roy [50], com limitação nas variáveis de produção. Armentano et al. [51] representam o problema como uma rede generalizada e utilizam um algoritmo *branch-and-bound*. Belvaux e Wolsey [52] e Belvaux e Wolsey [53] desenvolvem um pacote, baseado no método *branch-and-cut*, para modelagem e resolução de problemas de dimensionamento de lotes e posteriormente Vyre e Wolsey [54] utilizaram este pacote e reformulações estendidas para resolver o este mesmo problema. Degraeve e Jans [19] e Pimentel et al. [55] desenvolvem métodos *branch-and-price*.

Podemos destacar, dentre várias heurísticas que consideram tempo de preparação não nulo e uma única máquina, os seguintes trabalhos: Trigeiro et al. [6] que desenvolvem um método heurístico que consiste na relaxação das restrições de capacidade, no qual é aplicada a técnica de relaxação Lagrangiana. Posteriormente, se a solução for infactível, é aplicado um método de factibilização, que consiste em transferir a produção entre os períodos na tentativa de factibilizar a solução, (Heurística Lagrangiana), e finalmente, utilizando o método do subgradiente, os multiplicadores duais são atualizados, Held et al. [56], Camerini et al. [57]. Em 1991, Lozano et al. [58] propõem um algoritmo semelhante ao proposto por Trigeiro et al. [6]. Em 2000, Araujo e Arenales [59] com base no método desenvolvido por Trigeiro et al. [6], fizeram uma modificação e com essa modificação eles obtiveram alguns resultados computacionais melhores. Jans e Degraeve [60] apresentaram um método para o problema que considera tempo de preparação, para obter limitantes inferiores. Denizel et al. [27] desenvolvem uma heurística de arredondamento e Sural et al. [61] resolvem o problema também utilizam relaxação Lagrangiana. Araujo et al. [62] estudaram o problema de dimensionamento de lote capacitado com vários itens e consideram tempos de configuração. Tendo como base duas reformulações fortes do problema, eles apresentam uma reformulação transformada e desigualdades válidas que aceleram a geração de colunas e a Relaxação Lagrangiana.

2.3 Problema de Dimensionamento de Lotes com Vários Itens em Máquinas Paralelas

Encontram-se máquinas paralelas em problemas práticos de planejamento, como por exemplo, a indústria farmacêutica [63], produção de chapas plásticas [64], produção de telhas [65], indústria de pneus [60], engarrafamento de líquidos e outros [66] e embalagem [67].

A seguir será apresentada a formulação clássica do problema de dimensionamento de lotes com máquinas paralelas que não estão relacionadas. Esta formulação é baseada na formulação de Trigeiro et al. [6] para o problema de única máquina, e foi proposta em Toledo e Armentano [68].

Parâmetros adicionais:

sc_{ijt} : custo de preparação do item i na máquina j no período t ;
 vc_{ijt} : custo de produção do item i na máquina j no período t ;
 st_{ijt} : tempo de preparação do item i na máquina j no período t ;
 vt_{ijt} : tempo de produção do item i na máquina j no período t ;
 Cap_{jt} : capacidade (em unidade de tempo) da máquina j no período t .

Variáveis de decisão adicionais:

x_{ijt} : quantidade produzida do item i na máquina j no período t ;
 y_{ijt} : variável binária, indicando a produção ou não do item i na máquina j no período t ;

Formulação do Problema:

$$\text{Min} \sum_{i \in I} f c_i s_{i0} + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{t \in T} (sc_{ijt} y_{ijt} + vc_{ijt} x_{ijt}) + \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} hc_{it} s_{it} \quad (2.23)$$

sujeito a

$$s_{i,t-1} + \sum_{j \in J} x_{ijt} = d_{it} + s_{it} \quad \forall i \in I, \forall t \in T \quad (2.24)$$

$$x_{ijt} \leq \min [(Cap_{jt} - st_{ijt}) / vt_{ijt}, sd_{i1m}] y_{ijt} \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \forall t \in T \quad (2.25)$$

$$\sum_{i \in I} (st_{ijt} y_{ijt} + vt_{ijt} x_{ijt}) \leq Cap_{jt} \quad \forall j \in J, \forall t \in T \quad (2.26)$$

$$y_{ijt} \in \{0, 1\}, x_{ijt} \geq 0 \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \forall t \in T \quad (2.27)$$

$$s_{it} \geq 0, \quad s_{i0} = 0, \quad s_{im} = 0 \quad \forall i \in I, \forall t \in T \quad (2.28)$$

A função objetivo (2.23) minimiza os custos de preparação, produção, estoque e os custos de estoque inicial. As restrições (2.24) garantem o equilíbrio do estoque em cada período. A seguir estão as restrições de preparação da máquina (2.25) e o limite de capacidade (2.26). A fim de se tornar a formulação mais forte, limitamos a produção para cada item na restrição (2.25) tanto pela soma da demanda quanto pelo limite máximo possível com a capacidade disponível. Finalmente, (2.27) e (2.28) definem os domínios das variáveis.

Lasdon e Terjung [36] propõem uma heurística para o problema de dimensionamento de lotes com máquinas paralelas idênticas, que não contém tempo de preparação da máquina e que produz apenas um único item em cada máquina e em cada período e que toda capacidade disponível deve ser utilizada durante a produção.

Sung [69] propõe um algoritmo de programação dinâmica para o problema com um único item e sem restrições de capacidade.

Carreno [66] propõe uma heurística para o Economic Lot Scheduling Problem (ELSP), com uma taxa de demanda constante, que considera tempos de preparação para máquinas paralelas e obtém ótimos tempos computacionais para problemas com cem itens e dez máquinas.

Em 1991, Salomon et al. [70] também fizeram um estudo deste problema, que analisa sua complexidade em máquinas idênticas e não idênticas e apresentam alguns algoritmos de solução em que toda capacidade disponível deve ser utilizada durante a produção.

Em 1993, Neto et al. [71] propuseram uma heurística que considera os tempos de preparação das máquinas, com máquinas paralelas não idênticas. Esta heurística parte de uma solução inicial inactível e busca uma solução factível através da transferência da quantidade do que foi produzida entre os períodos e as máquinas e posteriormente é aplicado um passo visando obter uma solução com melhor custo.

O autor Derstroff [72] utiliza a relaxação Lagrangiana para resolver o problema de dimensionamento de lotes com máquinas paralelas. Primeiro ele relaxa as restrições de capacidade, posteriormente os multiplicadores Lagrangianos são atualizados e por fim cria-se uma solução viável que desloca uma determinada quantidade de produção entre períodos e as máquinas.

Em 1998, Ozdamar e Birbil [73] abordam o problema de dimensionamento de lotes com máquinas paralelas em que consideram tempo de preparação e não consideram o custo de preparação. Nesta abordagem cada máquina tem permissão para utilizar uma determinada quantidade de horas extras além da capacidade regular, com um determinado custo. Este modelo não permite que os lotes sejam divididos, isto é, deve ser produzido em uma única máquina a quantidade total da produção de um item em cada período, assim, apenas uma das máquinas paralelas pode ser utilizada para produzir um determinado item específico em cada período. Para resolver este problema são desenvolvidas três heurísticas híbridas semelhantes, e é utilizado um algoritmo de

busca para melhorar as soluções e torná-las factíveis.

Em Toledo et al. [6] é apresentado dois algoritmos *branch-and-bound* para resolver este problema de forma exata, ambos são utilizados para resolver apenas instâncias pequenas. O primeiro algoritmo é baseado numa formulação de programação inteira mista com relaxação Lagrangiana das restrições de capacidade do problema. O segundo foi elaborado a partir da representação do problema como uma rede generalizada e relaxação linear.

Em 1999, os autores Kang et al. [74] consideraram máquinas paralelas em seu problema considerando custo de preparação. Eles propõem um método que se baseia em geração de colunas e *branch-and-bound*. Complementarmente, eles adaptam o método para resolver alguns problemas reais de forma heurística.

Os autores Belvaux e Wolsey [53] descrevem uma modelagem genérica e um sistema de otimização que tem capacidade de resolver uma ampla classe de problemas de dimensionamento de lotes, dentre eles alguns casos especiais que contêm itens diferentes, máquinas paralelas e vários períodos. Os problemas são resolvidos usando rotinas do pacote de software de otimização XPRESS-MP. Também pode ser integrada uma heurística primal no processo de solução. Os autores resolveram vários exemplos com instâncias que foram retiradas da literatura.

Em 2006, os autores Toledo e Armentano [68] consideram várias máquinas em seu problema, com as restrições de capacidade relaxadas. Para a resolução do problema eles propõem uma heurística Lagrangiana. Através da minimização do problema Lagrangiano eles obtêm a solução inicial, que normalmente é infactível, assim para tentar obter soluções factíveis que minimizam os custos é realizado um deslocamento da produção, entre os períodos e as máquinas, que excede a capacidade.

Tempelmeier e Buschkuhl [75] consideram a transferência da preparação em problema multiestágio, com a preparação sendo mantida entre períodos seguintes e também propuseram uma heurística lagrangiana.

O autor Jans [76] propõe restrições novas com o intuito de romper a simetria que está presente devido as máquinas idênticas e sua abordagem foi testada usando uma reformulação de rede para o problema.

Em 2012, Araujo e Fiorotto [77] usaram a relaxação lagrangiana aplicada ao problema de dimensionamento de lotes em máquinas paralelas.

Os autores Fiorotto e de Araujo [31] usam uma reformulação do problema e, em vez das restrições de capacidade, relaxam as restrições de demanda usando relaxação lagrangiana e também propõem uma heurística para encontrar soluções viáveis.

Fiorotto et al. [78] apresentam métodos híbridos utilizando o relaxação lagrangiana e a decomposição de Dantzig-Wolfe e encontram melhores limites inferiores e superiores em relação a Toledo e Armentano (2006) e Fiorotto e de Araujo [31].

3 Problema de Dimensionamento de Lotes com Máquinas Paralelas Flexíveis

Neste capítulo apresenta-se os estudos relacionados a flexibilidade das máquinas com a formulação proposta por Fiorotto et al. [1].

As decisões de dimensionamento de lotes estão relacionadas a curto e médio prazo, já as decisões sobre flexibilidade das máquinas são geralmente decisões à médio e longo prazo. Em geral é difícil tomar decisões sobre flexibilidade, pois o número de preparação para a produção de um produto cresce exponencialmente de acordo com o número de itens e máquinas e é difícil calcular seus benefícios. Considerar uma flexibilidade total pode se tornar muito caro, mostrando a importância de estudar como implementar uma flexibilidade de tal forma que os custos e os lucros sejam equilibrados.

O dimensionamento de lotes é uma competência tática e operacional que interpreta as decisões de planejamento estratégico e as transforma em planos de produção concretos. Enquanto a flexibilidade é uma competência estratégica, no qual empresas podem usá-las para ajustar com precisão o número de máquinas, produtos, serviços e processos. Observando que, em alguns casos, há uma integração entre ambas as decisões e que podem ser tomadas simultaneamente. Com efeito, considerando demandas sazonais, ambas as decisões podem ser tomadas de forma integrada antes do início de cada temporada. Por exemplo, uma cooperativa de várias pequenas empresas que trabalham juntas e que devem tomar uma decisão de qual indústria produzirá cada produto, evitando assim a concorrência e atendendo a demanda.

Na literatura, com exceção Fiorotto et al. [1], não existem estudos que determinam os benefícios da flexibilidade no contexto de dimensionamento de lotes, existindo apenas estudos que consideram um ponto de vista estocástico. Encontram estudos sobre decisões estratégicas em Fine e Freund [79] e Jordan e Graves [80] e estudos de mudanças nas ferramentas em Tang e Denardo [81].

Exemplo de Tipos de Flexibilidade:

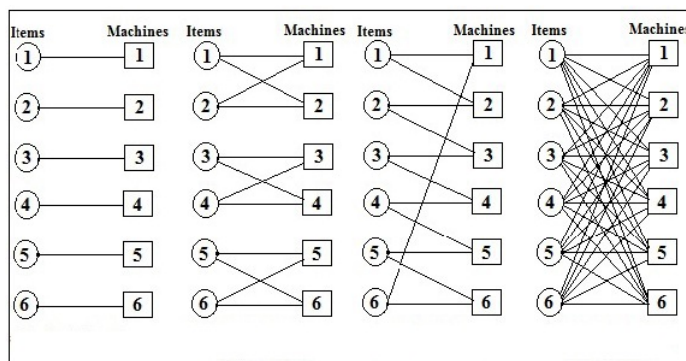


Figura 3.1: Configuração de Flexibilidade com 6 itens - Fonte: [1]

A Figura 3.1 mostra um exemplo com 6 itens, 6 máquinas e 4 tipos diferentes de flexibilidade. Note que a primeira parte da figura mostra o caso dedicado, onde cada item está sendo produzido em apenas uma máquina específica. A segunda e a terceira parte contêm o mesmo número de *links* (mesma quantidade de flexibilidade), no entanto estes *links* foram adicionados de maneira distinta. Na segunda parte tem-se 3 grupos de 2 máquinas e na terceira parte tem-se a cadeia longa. Na última parte da figura tem-se a flexibilidade total, onde todos os itens estão conectados a todas as máquinas.

Os autores Jordan e Graves [80] foram os primeiros que consideraram a concepção e a eficácia de uma quantidade limitada da flexibilidade. Eles analisaram o valor da flexibilidade no processo de fabricação em um modelo estocástico com um único período e um único estágio de produção, no qual várias máquinas são capacitadas para produzir vários produtos diferentes, sendo que cada máquina pode ser dedicada a um único produto ou flexível para produzir vários produtos distintos. Como a demanda é aleatória, o aumento de flexibilidade faz com que a quantidade produzida aumente. Desta forma, a quantidade de itens em atraso pode ser reduzida, diminuindo os custos totais de produção. Neste artigo compreende-se que quase todos os benefícios da flexibilidade podem ser alcançados implementando apenas uma pequena quantidade de flexibilidade, mas de uma maneira inteligente. Os autores referem-se a este como o princípio da cadeia (Figura 3.1 terceira parte), isto é, uma "cadeia" é um grupo de itens e máquinas que estão todos conectados, direta ou indiretamente, por decisões de atribuição de produto. Dentro de uma cadeia, um caminho pode ser rastreado de qualquer item ou máquina para qualquer outro item ou máquina através dos *links* de atribuição do produto. A ideia-chave por trás do encadeamento é que o excesso de capacidade pode ser deslocado ao longo da cadeia. Os benefícios da flexibilidade não vêm apenas de ter mais itens atribuídos por máquina, mas também de criar cadeias mais longas, quanto maior a cadeia de itens e máquinas, maiores são as oportunidades de transferência. Esse princípio ainda não foi explorado em um contexto de dimensionamento de lotes de grande porte. Este artigo abriu novos caminhos para linhas de pesquisa relacionadas ao estudo de flexibilidade. Na literatura sobre sistemas de fabricação,

ainda é uma das estratégias influentes que é estudada e utilizada na prática.

Os autores Sheikhzadeh et al. [82] apresentaram modelos analíticos para a avaliação do desempenho tanto da preparação da flexibilidade encadeada quanto da total. As preparações são comparadas em conjuntos diferentes e concluem que uma única preparação de cadeia longa é sempre superior a múltiplas cadeias menores.

Os autores Graves e Tomlin [83] estenderam o trabalho de Jordan e Graves [80] para cadeias de fornecimento de múltiplos estágios e desenvolvem ideias sobre estratégias para a implementação da flexibilidade do processo. Pode-se concluir que para cadeias com número de estágios e produtos moderado (10 estágios e 20 produtos), cada estágio segue as normas dadas por Jordan e Graves [80].

Os autores Inman et al. [84] mostraram como aplicar o princípio do encadeamento ao treinamento cruzado em linhas de montagem. Eles tentaram várias configurações de flexibilidade e concluíram que a cadeia incompleta, ou seja, sem a ligação entre a primeira tarefa e o último trabalhador, tem um desempenho quase tão bom quanto a cadeia completa.

Os autores Iravani et al. [85] demonstraram que usar a aplicação de treinamento cruzado em sistemas com menos números de ligações pode superar os sistemas com mais números de ligações. Isso mostra o fato de que a arquitetura do sistema é muito importante e é insuficiente determinar se um sistema é mais flexível com base apenas no número de capacidades de cada fonte, no número de fontes que cobrem uma demanda ou no número total de links no sistema.

Muriel et al. [86] desenvolveram modelos analíticos para estudar o impacto da flexibilidade sobre a escassez e estoques de componentes para sistemas de manufatura sob encomenda de múltiplos produtos multiplanta. Eles mostram que enquanto a maioria dos benefícios no aumento das vendas devido à flexibilidade pode ser alcançada com a cadeia longa, como mostrado por Jordan e Graves [80], o estoque de componentes necessários é significativamente reduzido à medida que mais flexibilidade é adicionada. Portanto, se os estoques de componentes são caros, uma flexibilidade pode ser economicamente viável. Finalmente, concluem que as implicações do aumento da flexibilidade no desempenho geral do sistema são amplamente desconhecidas.

Mak e Shen [87] ressaltaram que é fundamental avaliar a compensação entre o custo do investimento em flexibilidade e os benefícios resultantes. Eles mostram que a heurística de encadeamento fortemente defendida às vezes pode ter um desempenho insatisfatório quando os recursos não são perfeitamente flexíveis. Por exemplo, quando a distribuição da demanda e os custos de produção não são homogêneos, o resultado pode ser sensível à seqüência de plantas e produtos. Finalmente, eles indicam que um elemento importante que tem sido ignorado na maioria das pesquisas que consideram flexibilidade no processo é a dinâmica da produção ao longo do tempo. Em problemas de vários períodos, é possível manter os estoques para atenuar os riscos de incompatibilidade, além de utilizar a flexibilidade do processo. A evolução da demanda ao longo

do tempo também pode também complicar as operações.

Simchi-Levi e Wei [88] apresentaram um estudo teórico sobre a efetividade da preparação de cadeia longa. Primeiro eles mostram que a cadeia longa é (em relação às vendas esperadas) ótima entre todos os sistemas com duas flexibilidades. Depois eles mostram que a diferença, entre a taxa de flexibilidade total e a taxa da cadeia longa, aumenta com o número de produtos. Isto sugere que a preparação de cadeia longa é mais eficaz para sistemas com menor tamanho. Além disso, embora a cadeia longa seja a preparação ideal com duas flexibilidades, uma preparação com várias cadeias fechadas, onde cada cadeia conecta um número substancial de plantas e produtos, funciona tão bem quanto à cadeia longa.

Embora vários trabalhos tenham mostrado que a preparação da cadeia longa tem um desempenho muito bom, especialmente para sistemas homogêneos, há dois trabalhos que mostram que nem sempre isso é válido. O trabalho dos autores Gurumurthi e Benjaafar [89] apresentaram resultados numéricos para sistemas de filas, mostrando que em sistemas assimétricos há sempre uma configuração não encadeada que funciona melhor que o encadeamento. Já os autores Andradóttir et al. [90] reforçam que o encadeamento é desejável em ambientes homogêneos e indicam que outras preparações de flexibilidade geralmente apresentam melhor desempenho em ambientes heterogêneos.

Mesmo que o problema de dimensionamento do lotes com máquinas paralelas, com uma quantidade limitada de flexibilidade seja uma extensão natural do pressuposto padrão, e mais realista com o que acontece na prática, apenas pesquisas muito limitadas foram feitas sobre esse tópico. Em sua aplicação na indústria de pneus, Jans e Degraeve [60] discutiram um problema em que nem todos os tipos de pneus podem ser produzidos em todas as máquinas. Xiao [91] propõem uma heurística baseada em hibridização Lagrangiana e recozimento simulado para o problema de escalonamento de lotes em máquinas paralelas capacitado, em que nem todas as máquinas são elegíveis para produzir todos os itens. Além disso, eles consideram que para cada item existe máquina de preferência, aumentando a qualidade dos itens e a confiabilidade da máquina.

3.1 Formulação com Flexibilidade da Máquina como uma Variável de Decisão

Nesta seção será apresentada uma formulação que se baseia na formulação clássica do problema de dimensionamento de lotes com máquinas paralelas flexíveis, considerando a possibilidade de haver atrasos, proposta por Fiorotto et al. [1]. O investimento de atualizar uma máquina para um produto específico torna-se uma variável binária e há um orçamento global sobre as decisões de investimento. Tal modelo também nos permitirá verificar a estrutura da flexibilidade para vários níveis de parâmetros de entrada.

Considerar os seguintes parâmetros adicionais:

Fc_{ij} : custo de flexibilidade para produzir o item i na máquina j ;

$Fmax$: orçamento para investir em flexibilidade;

Variáveis de decisão adicionais:

z_{ij} : variável binária, indicando se a máquina j pode produzir o item i ou não;

b_{it} : quantidade de atraso do item i no final do período t ;

Formulação do Problema:

$$Min \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{t \in T} (sc_{ijt}y_{ijt} + vc_{ijt}x_{ijt}) + \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} (hc_{it}s_{it} + bc_{it}b_{it}) \quad (3.1)$$

sujeito a

$$s_{i,t-1} + b_{it} + \sum_{j \in J} x_{ijt} = d_{it} + s_{it} + b_{i,t-1} \quad \forall i \in I, \forall t \in T \quad (3.2)$$

$$x_{ijt} \leq \min [(Cap_{jt} - st_{ijt}) / vt_{ijt}, sd_{i1m}] y_{ijt} \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \forall t \in T \quad (3.3)$$

$$\sum_{i \in I} (st_{ijt}y_{ijt} + vt_{ijt}x_{ijt}) \leq Cap_{jt} \quad \forall j \in J, \forall t \in T \quad (3.4)$$

$$z_{ij} \geq y_{ijt} \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \forall t \in T \quad (3.5)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} Fc_{ij}z_{ij} \leq Fmax \quad (3.6)$$

$$y_{ijt} \in \{0, 1\}, z_{ij} \in \{0, 1\}, x_{ijt} \geq 0 \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \forall t \in T \quad (3.7)$$

$$s_{it} \geq 0, \quad s_{i0} = 0, \quad s_{im} = 0, \quad b_{it} \geq 0, \quad b_{i0} = 0 \quad \forall i \in I, \forall t \in T \quad (3.8)$$

A função objetivo (3.1) minimiza os custos de preparação, produção, estoque e de atrasos. As restrições (3.2) garantem o equilíbrio do estoque em cada período considerando a possibilidade de atrasos. A seguir estão as restrições de preparação da máquina (3.3) e o limite de capacidade (3.4). A fim de tornar a formulação mais forte, limitamos a produção para cada item na restrição (3.3) tanto pela soma da demanda quanto pelo limite máximo possível com a capacidade disponível. As restrições (3.5) garantem que uma máquina possa ser preparada para produzir um item somente se esta máquina tem a flexibilidade para produzir este item. A restrição (3.6) limita o

orçamento para o investimento em flexibilidade. Finalmente, (3.7) e (3.8) definem os domínios das variáveis. Note que não está no modelo que o atraso do último período deve ser igual a zero, ou seja, considera-se a possibilidade de não satisfazer toda a demanda.

Um primeiro objetivo será implementar e analisar essa formulação (FORM), um segundo objetivo será apresentar três heurísticas com o intuito de determinar os *links* (ligações), cujo critério é determinar qual máquina pode produzir cada item, com a finalidade de buscar melhores resultados computacionais. Por último, comparar a os resultados obtidas pela implementação da formulação com os resultados obtidos das três heurísticas.

4 Heurísticas para Adicionar Links

Nesse capítulo serão apresentadas as três heurísticas para a formulação (3.1) - (3.8) do problema de dimensionamento de lotes com máquinas paralelas flexíveis.

A ideia de propor as heurísticas é devido ao tempo computacional necessário no CPLEX para obter as soluções para essa formulação. O objetivo das heurísticas é determinar os possíveis *links*, entre itens e máquinas que serão adicionados, ou seja, determinar qual máquina pode produzir cada item com o intuito de buscar melhores resultados computacionais. As ideias das heurísticas serão descritas a seguir. Deve-se observar que considera-se o custo de flexibilidade $Fc_{ij} = 1 \forall i \in I, \forall j \in J$, ver restrição (3.6).

4.1 Primeira Heurística (HEUR 1)

O método de resolução da primeira heurística pode ser descrito da seguinte maneira:

Passo 1: Criar a preparação das máquinas.

Cria-se a preparação das máquinas dedicadas como na Figura 4.1. Observando-se que a ordem inicial não é relevante, pois os custos e os tempos de preparação são iguais para produzir em qualquer uma das máquinas, considera-se $Fmax = \text{número de itens}$;

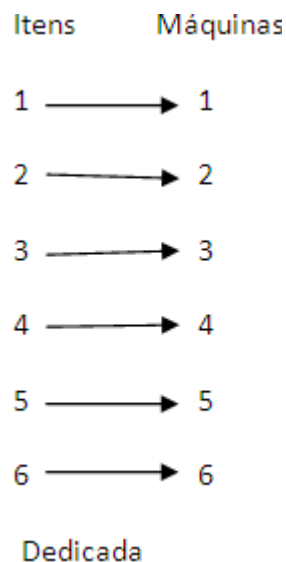


Figura 4.1: Exemplo de Preparação Dedicada

Passo 2: $Fmax = Fmax + 1$. **Determinar o plano de produção.**

Resolvemos o restante do problema (com $Fmax$ variáveis binárias z_{ij} fixo, de acordo com o passo 1 e uma variável livre para ser fixada) usando CPLEX;

Passo 3: Adicionar um *link* na solução atual.

Depois de adicionar o *link* volta-se para o passo 2;

Esse procedimento é feito até adicionar todos os *links*, no qual o número de *links* adicionados é igual a $2n$. Por exemplo para o caso com 6 itens e 6 máquinas, fixam os *links* da configuração dedicada e adiciona mais 6 *links*.

4.2 Segunda Heurística (HEUR 2)

Essa segunda heurística determinará os *link* entre os itens e as máquinas que serão adicionados. A escolha do item será feita pelo maior custo de atraso na solução atual. Para escolher a máquina estimam-se as economias e escolhe a máquina com a maior economia.

A segunda heurística pode ser descrita da seguinte maneira:

Passo 1: Criar a preparação das máquinas.

Cria-se a preparação das máquinas dedicadas como na Figura 4.1. Observando-se que a ordem inicial não é relevante, pois os custos e os tempos de preparação são iguais para produzir em qualquer uma das máquinas;

Passo 2: Determinar o plano de produção.

Resolvemos o restante do problema (com as variáveis binárias z_{ij} fixas, de acordo com o passo 1) usando o CPLEX. Observe que as outras z_{ij} estão fixas em zero.

Passo 3: Verificar a solução.

Verifica-se se há algum item com atraso. Em caso afirmativo, escolhe-se o item com o maior atraso na solução atual, para adicionar um link;

Passo 4: Adicionar um link.

Para escolher a máquina para adicionar um link estimam-se as economias, simulando a inclusão de um link para todas as máquinas e a máquina com maior economia é escolhida. Depois de escolher o link a ser adicionado volta-se para o passo 2.

Esse procedimento é feito até adicionar todos os *links*, no qual o número de *links* adicionados é igual a $2n$.

Será descrito a seguir o processo que será utilizado para a escolha da máquina a ser adicionada:

Para determinar um link a ser adicionado escolhe-se um item e uma máquina. Para a escolha do item primeiro analisa o atraso mais alto na solução atual (como descrito no passo 3). Para a escolha da máquina, primeiro estima-se a economia gerada ao incluir este link em cada uma das máquinas, o que não é simples, pois isso depende de vários fatores, como os custos de produção, a folga das máquinas e os atrasos de cada item.

A seguir é apresentado um exemplo de como o parâmetro $atraso_i$ é calculado.

Na formulação pode-se notar que usando as variáveis de produção x_{ijt} não é possível determinar exatamente a quantidade de pedidos em atraso, pois essa variável determina a quantidade de itens produzidos e não o período em que esses itens serão utilizados. A Tabela 4.1 a seguir mostra um exemplo com um item e três períodos:

Tabela 4.1: Exemplo

| | | | |
|-----------------|----|---|---|
| <i>demanda</i> | 10 | 7 | 5 |
| <i>produção</i> | 5 | 9 | 8 |

Neste exemplo pode-se observar que no primeiro período a demanda é de 10 unidades e a produção é de apenas 5 unidades, ou seja, para o próximo período tem

um atraso de 5 unidades, assim pode-se decidir se no próximo período será produzido primeiro o atraso de 5 unidades e posteriormente serão produzidas as 4 unidades da demanda, que é de 7 unidades, resultando em um atraso de 3 unidades para o próximo período, ou se será produzido primeiro a demanda de 7 unidades e posteriormente será produzido 2 unidades do atraso de 5 unidades, resultando em um atraso de 3 unidades para o próximo período. No último período pode utilizar ambas as ideias, ou seja, satisfazer primeiro a demanda e posteriormente o atraso, ou primeiro satisfazer o atraso e posteriormente a demanda.

Com esse exemplo, observa-se que não é possível calcular a quantidade exata de itens em atraso, por isso esse valor é estimado, assim para aproximar o número de atrasos ($atraso_i$) supõe-se que se a produção é maior que a demanda, primeiro satisfaz a demanda do período e então abre-se a possibilidade de satisfazer os itens atrasados. Portanto, no exemplo, a quantidade de pedidos pendentes é de 5 unidades do período 1.

Será descrito a seguir o processo que foi utilizado para calcular as economias estimadas.

Primeiro será calculado o tempo mínimo necessário para resolver o atraso:

$$\alpha_{ij} = atraso_i * vt_{it} + \frac{atraso_i}{\frac{cap_j - st_{ij}}{vt_{ij}}} * st_{ij}$$

Depois disso, compara-se a capacidade disponível ($folga_j$) de cada máquina para posteriormente calcular o benefício estimado.

$$folga_j = cap - (st_o * y_{ijt} + vt_o * x_{ijt})$$

Se a folga total de uma máquina for maior que a capacidade total necessária para resolver o atraso ($\alpha_{ij} \leq folga_j$), pode eliminar todo o custo de atraso. Denotando por $Q := \frac{cap_j - st_{ij}}{vt_{ij}}$ a quantidade máxima que pode ser produzida por período. O benefício é dado pelo total de atrasos menos o custo total para produzir a quantidade de itens em atrasos:

$$benefício_{ij} = total\ atrasos_i * b_i - atrasos_i * vc_{ij} - \frac{atrasos_i}{Q} * sc_{ij}$$

Por outro lado, se a folga total for menor do que a capacidade de resolver o atraso ($\alpha_{ij} > folga_j$), pode eliminar apenas parte do custo de atraso. Denotando

por $P := \left(\frac{folga_j - \frac{folga_j}{Cap_j} * st_{ij}}{vt_{ij}} \right)$ o montante total aproximado de itens que podem ser produzidos com a folga restante, e assim o benefício será:

$$\text{benefício}_{ij} = P^*(b_i - vc_{ij}) - \frac{P}{Q}$$

Observe que: $\left(\frac{\text{folga}_j - \frac{\text{folga}_j}{\text{Cap}_j} * st_{ij}}{vt_{ij}} \right)$ aproxima a quantidade total de itens que podem ser produzidos com a folga total restante.

Depois de calcular as economias aproximadas adicionando um link em todas as máquinas escolhe-se o link com os maiores benefícios. Então, usa-se CPLEX para resolver o problema com o link adicionado.

4.3 Terceira Heurística (HEUR 3)

Essa terceira heurística tem o mesmo intuito das heurísticas anteriores, determinar os *link* entre os itens e as máquinas que serão adicionados, buscando uma boa solução com um baixo tempo computacional. A escolha do item será feita pelo maior custo de atraso na solução atual. Já a escolha da máquina será feita pela aproximação da relaxação linear da variável z_{ij} .

A heurística para adicionar links pode ser descrita da seguinte forma:

Passo 1: Criar a preparação das máquinas.

Cria-se a preparação das máquinas dedicadas de acordo com a Figura 4.1). Observando-se que a ordem inicial não é relevante, pois os custos e os tempos de preparação são iguais para produzir em qualquer uma das máquinas. Seja $Fmax = \text{número de itens}$.

Passo 2: $Fmax = Fmax + 1$. Determinar o plano de produção.

Resolve-se a formulação (3.1) - (3.8), $Fmax =$ variáveis binárias fixas de acordo com o passo 1 e com um grau de liberdade para uma variável livre ser fixada, relaxando a variável z_{ij} , ou seja, permitindo que ela assuma valores reais $0 \leq z_{ij} \leq 1$.

Passo 3: Verificar a solução.

Verifica-se se há algum item com atraso. Em caso afirmativo escolhe-se o item com maior atraso na solução atual para adicionar um *link* e passe para o passo 4. Caso não tenha itens em atraso, analisa todos os valores relaxados da variável z_{ij} , assim escolhe-se o maior valor da variável z_{ij} , e fixa-se esse item i e a essa máquina j como o *link* a ser adicionado. Depois de escolher o *link* a ser adicionado volta-se para o Passo 2. Depois de adicionar o último *link*, analisa os valores relaxados que restaram da variável z_{ij} , caso tenha valores diferentes de zero, fixa-se esses valores iguais a zero.

Passo 4: *Adicionar um link.*

Para escolher a máquina para adicionar um *link*, escolhe-se a máquina com o maior valor da variável relaxada z_{ij} para o item i fixado. Se para todas as máquinas com o item fixado, a variável z_{ij} for 0, então deixa-se de lado o item que havia sido escolhido e analisa todos os valores relaxados da variável z_{ij} . Assim escolhe-se o maior valor da variável z_{ij} , e fixa-se esse item i e a essa máquina j como o *link* a ser adicionado. Depois de escolher o *link* a ser adicionado volta-se para o Passo 2. Depois de adicionar o último *link*, analisa os valores relaxados que restaram da variável z_{ij} , caso tenha valores diferentes de zero, fixa-se esses valores iguais a zero.

Esse procedimento é feito até adicionar todos os *links*, no qual o número de *links* adicionados é igual a $2n$

5 Experimentos Computacionais

Neste capítulo são apresentados a geração de dados e os resultados computacionais obtidos neste trabalho. Os resultados mostrados são os obtidos pela implementação da formulação (3.1) - (3.8) do Capítulo 3, e pela implementação das três heurísticas do Capítulo 4.

5.1 Geração de Dados

Os dados utilizados neste trabalho são os mesmos que em Fiorotto et al. [1], os quais consistem de uma adaptação, dos dados propostos por Trigeiro [6] para o problema de dimensionamento de lotes com restrição de capacidade, com uma única máquina e com tempo de preparação. Esse conjunto de dados é utilizado em muitos experimentos computacionais na literatura, e tido como, um conjunto de referência.

Para gerar e analisar os exemplares, foram considerados três fatores: variação de capacidade (CAP), limitante superior (L.S.) e tempo computacional em segundos (T(s)). Os limitantes superiores encontrados pela formulação foram fixados em 100% e a partir desses valores, calculou-se os valores referente as heurísticas através da fórmula (5.1):

$$\left(\frac{HEUR}{FORM} \right) * 100 \quad (5.1)$$

Foram testados um total de 480 exemplares, divididas em três conjuntos de classes que consiste de:

- **6 itens, 6 máquinas e 15 períodos:** classes com capacidades de 40 até 100, variando de 10 em 10, e de 110 até 150 variando de 5 em 5. Totalizando 16 classes. Para cada classe foram geradas 20 instâncias, obtendo assim 320 exemplares
- **12 itens, 12 máquinas e 15 períodos:** classes com capacidades de 40 até 100, variando de 10 em 10, e de 110 até 150 variando de 5 em 5. Totalizando 16 classes. Para cada classe foram geradas 5 instâncias, obtendo assim 80 exemplares.

- **24 itens, 24 máquinas e 15 períodos:** classes com capacidades de 40 até 100, variando de 10 em 10, e de 110 até 150 variando de 5 em 5. Totalizando 16 classes. Para cada classe foram geradas 5 instâncias, obtendo assim 80 exemplares.

Nos conjuntos de classes, as classes com capacidade variando de 40 à 90 foram consideradas apertada, de 100 à 135 consideradas média e de 140 à 150 consideradas folgada. Em cada uma das instâncias foram consideradas máquinas paralelas idênticas, ou seja, os custos e tempos de preparação e as capacidades são as mesmas para todas as máquinas, e não foram considerados custos de produção.

Os demais parâmetros utilizados estão descritos na Tabela 5.1 que foram obtidos através de distribuição uniforme em intervalos ou o valor exato:

Tabela 5.1: Parâmetros

| PARÂMETROS | INTERVALOS |
|-------------------------------------|-----------------|
| Tempo de produção vt_{ijt} | 1 |
| Custo unitário de estoque hc_{it} | [1,5] |
| Tempo de preparação st_{ijt} | [10,50] |
| Custo de preparação sc_{ijt} | [400, 1000] |
| Custo de produção vc_{ijt} | 0 |
| Demanda d_{it} | [0,180] |
| Custo unitário de atraso bc_{it} | $100 * hc_{it}$ |

5.2 Resultados Computacionais

Nesta seção são apresentadas a geração de dados e os resultados obtidos com a formulação (FORM) apresentada no Capítulo 3 e as heurísticas (HEUR 1, HEUR 2 e HEUR 3) apresentadas no Capítulo 4.

A formulação e as três heurísticas foram implementadas em C++ usando o concert e o CPLEX 12.6.1 como solucionador. Os testes foram feitos em um computador com processador Intel(R) Core(TM) i7-4790, memória RAM 16GB, com sistema operacional Windows.

Foram criadas flexibilidades de acordo com cada método, para cada um dos conjuntos de instâncias, de modo que o número de links adicionados é o mesmo que o número de itens e de máquinas, isto é, em uma classe com 6 itens foram adicionados 6 links, com 12 itens foram adicionados 12 links e com 24 itens foram adicionados 24 links. A ordem que os itens são adicionados é de acordo com cada heurística. Para a formulação (3.1) - (3.8), foram considerados como ponto de partida o caso dedicado, conforme Figura 4.1.

O tempo computacional foi fixado 60 segundos para o dedicado de acordo com a Figura 4.1 e mais 60 segundos para cada link adicionado, assim para 6 itens e 6 itens o tempo fixado foi de 420 segundos, para 12 itens e 12 máquinas foi de 780 segundos e para 24 itens e 24 máquinas foi de 1500 segundos.

Os resultados apresentados nas tabelas a seguir correspondem a média aritmética dos resultados obtidos para cada classe.

Os dados utilizados para os testes são apresentados a seguir.

• Resultados para 6 itens e 6 máquinas

Na Tabela 5.2 são apresentados os limitantes superiores (colunas L.S.) e o tempo computacional em segundos (colunas T(s)) para a formulação (3.1) - (3.8) (coluna FORM) e para as três heurísticas (colunas: HEUR 1, HEUR 2 e HEUR 3).

Os valores obtidos para o limitante superior da formulação (FORM) foram fixados em 100% e a partir daí, utilizando a fórmula (5.1), foram calculados os valores referentes as três heurísticas. Para a formulação também foram apresentados os valores obtidos para o gap (coluna GAP), que correspondem aos valores (em porcentagem) encontrados pelo CPLEX.

Tabela 5.2: 6 itens, 6 máquinas e 15 períodos-Dedicado

| Cap | FORM | | | HEUR 1 | | HEUR 2 | | HEUR 3 | |
|-------|------|------|-------|--------|------|--------|------|--------|------|
| | L.S. | T(s) | GAP | L.S. | T(s) | L.S. | T(s) | L.S. | T(s) |
| 40 | 100% | 0,44 | 0,02 | 100% | 0,22 | 100% | 0,22 | 100% | 0,11 |
| 50 | 100% | 45 | 0,08 | 100% | 14 | 100% | 10 | 100% | 9 |
| 60 | 100% | 17 | 0,09 | 100% | 15 | 100% | 3 | 100% | 6 |
| 70 | 100% | 113 | 0,14 | 100% | 54 | 101% | 15 | 100% | 20 |
| 80 | 100% | 196 | 0,16 | 100% | 104 | 102% | 36 | 100% | 35 |
| 90 | 100% | 223 | 0,34 | 100% | 162 | 104% | 36 | 100% | 48 |
| 100 | 100% | 369 | 0,84 | 100% | 225 | 105% | 57 | 100% | 51 |
| 110 | 100% | 420 | 2,63 | 100% | 261 | 107% | 114 | 102% | 60 |
| 115 | 100% | 400 | 5,78 | 101% | 271 | 111% | 147 | 101% | 58 |
| 120 | 100% | 420 | 12,75 | 101% | 285 | 119% | 164 | 101% | 60 |
| 125 | 100% | 420 | 12,66 | 102% | 284 | 126% | 155 | 100% | 60 |
| 130 | 100% | 420 | 5,19 | 102% | 264 | 134% | 241 | 101% | 58 |
| 135 | 100% | 399 | 1,67 | 100% | 248 | 101% | 188 | 100% | 52 |
| 140 | 100% | 381 | 0,81 | 100% | 248 | 100% | 228 | 100% | 48 |
| 145 | 100% | 359 | 0,69 | 100% | 267 | 100% | 251 | 100% | 54 |
| 150 | 100% | 382 | 0,52 | 100% | 291 | 100% | 287 | 100% | 53 |
| Média | 100% | 285 | 2,77 | 100% | 187 | 107% | 121 | 100% | 42 |

Na Tabela 5.2, o GAP observado, na média geral, é um valor considerado baixo, em torno de 3%. No entanto quando se considera as classes com capacidades entre 110

e 135, ou seja, quando a capacidade é média, os valores encontrados para o GAP são relativamente alto, chegando até 12,75%. Com a capacidade apertada os valores para o GAP são os melhores e não ultrapassam 1%.

Observando os tempos computacionais, os piores tempos para a FORM também foram encontrados nas classes com capacidade média, ou seja, variando de 110 até 135 quando comparados com a FORM. Todos os tempos computacionais encontrados pelas heurísticas são inferiores, sendo que o tempo computacional da HEUR 3 é inferior ao tempo computacional de todas as outras heurísticas. Na média geral o tempo computacional da HEUR 3 é em torno de 85% menor que o tempo computacional da FORM.

Observando os limitantes superiores, todas as heurísticas tiveram um desempenho igual ou pior que a FORM nas classes com a capacidade média. Nas outras classes, as heurísticas HEUR 1 e HEUR 3 apresentaram os mesmos valores que a FORM, inclusive na média geral. No entanto a HEUR 2 foi ligeiramente pior em algumas dessas classes o que impactou em 7% de aumento para limitante superior na média geral comparando às demais abordagens.

Na Tabela 5.3 são apresentados os atrasos e o número de preparações das máquinas, da formulação (3.1) - (3.8), e as heurísticas HEUR 1, HEUR 2 e HEUR 3.

Tabela 5.3: 6 itens, 6 máquinas e 15 períodos

| Cap | FORM | | HEUR 1 | | HEUR 2 | | HEUR 3 | |
|-------|---------|------------|---------|------------|---------|------------|---------|------------|
| | Atrasos | Preparação | Atrasos | Preparação | Atrasos | Preparação | Atrasos | Preparação |
| 40 | 51889 | 90 | 51889 | 90 | 51912 | 89 | 51857 | 90 |
| 50 | 45093 | 91 | 45093 | 91 | 45167 | 90 | 45092 | 90 |
| 60 | 39555 | 90 | 39555 | 91 | 39746 | 90 | 39547 | 90 |
| 70 | 34128 | 91 | 34129 | 91 | 34300 | 90 | 34147 | 90 |
| 80 | 27582 | 92 | 27587 | 92 | 27755 | 90 | 27625 | 91 |
| 90 | 21115 | 91 | 21119 | 91 | 21213 | 91 | 21171 | 91 |
| 100 | 14965 | 93 | 14975 | 92 | 15119 | 92 | 14962 | 91 |
| 110 | 8539 | 92 | 8591 | 93 | 8669 | 92 | 8571 | 92 |
| 115 | 5341 | 93 | 5421 | 94 | 5544 | 92 | 5373 | 94 |
| 120 | 2455 | 93 | 2506 | 96 | 2732 | 92 | 2500 | 94 |
| 125 | 665 | 93 | 670 | 95 | 692 | 96 | 664 | 94 |
| 130 | 80 | 93 | 87 | 93 | 92 | 91 | 89 | 93 |
| 135 | 1 | 90 | 1 | 90 | 1 | 89 | 1 | 91 |
| 140 | 0 | 87 | 1 | 88 | 0 | 85 | 0 | 88 |
| 145 | 0 | 84 | 0 | 83 | 0 | 83 | 0 | 84 |
| 150 | 0 | 80 | 0 | 81 | 0 | 82 | 0 | 81 |
| Média | 15713 | 90 | 15727 | 91 | 15808 | 90 | 15725 | 90 |

Na Tabela 5.3 , observa-se que os atrasos da FORM e das três heurísticas possuem valores bem altos, sendo que o valor para as heurísticas, na maioria nos casos, são ligeiramente superiores aos atrasos da FORM. Os atrasos da HEUR 3 são inferiores aos atrasos da HEUR 2 em todos os casos, exceto para a classe com capacidade igual a 135. Em relação a HEUR 1 os atrasos são inferiores em todos os casos, exceto para as classes com capacidade igual a 70, 80, 90 e 130. Nas classes com capacidade variando de 40 até 135 as abordagens possuem atrasos, e a partir da classe 140 apenas a HEUR 1 possui atraso. Comparando as preparações da FORM, com as heurísticas, os valores são basicamente os mesmos para todas as classes.

• Resultados para 12 itens e 12 máquinas

Na Tabela 5.4 são apresentados para a formulação (3.1) - (3.8) (coluna FORM) e para as três heurísticas (colunas: HEUR 1, HEUR 2 e HEUR 3) os limitantes superiores (colunas L.S.) e o tempo computacional em segundos (colunas T(s)). Para a formulação também foram apresentados os valores obtidos para o gap (coluna GAP), que correspondem aos valores (em porcentagem) encontrados pelo CPLEX.

Tabela 5.4: 12 itens, 12 máquinas e 15 períodos

| Cap | FORMULATION | | | HEUR 1 | | HEUR 2 | | HEUR 3 | |
|-------|-------------|------|-------|--------|------|--------|------|--------|------|
| | L. S. | T(s) | GAP | L. S. | T(s) | L. S. | T(s) | L. S. | T(s) |
| 40 | 100% | 110 | 0,09 | 100% | 198 | 100% | 191 | 100% | 1,12 |
| 50 | 100% | 14 | 0,09 | 100% | 259 | 100% | 237 | 100% | 1,91 |
| 60 | 100% | 643 | 0,15 | 100% | 409 | 100% | 343 | 100% | 181 |
| 70 | 100% | 780 | 0,28 | 101% | 510 | 102% | 365 | 99% | 58 |
| 80 | 100% | 780 | 0,42 | 101% | 564 | 102% | 431 | 99% | 55 |
| 90 | 100% | 780 | 1,02 | 101% | 592 | 105% | 387 | 99% | 62 |
| 100 | 100% | 780 | 2,43 | 103% | 640 | 106% | 449 | 99% | 62 |
| 110 | 100% | 780 | 6,77 | 104% | 665 | 105% | 487 | 97% | 63 |
| 115 | 100% | 780 | 13 | 114% | 668 | 117% | 537 | 96% | 63 |
| 120 | 100% | 780 | 22 | 102% | 671 | 103% | 508 | 93% | 62 |
| 125 | 100% | 780 | 21 | 102% | 683 | 102% | 441 | 88% | 62 |
| 130 | 100% | 780 | 18,58 | 101% | 865 | 102% | 480 | 99% | 61 |
| 135 | 100% | 780 | 3,3 | 101% | 702 | 103% | 550 | 99% | 61 |
| 140 | 100% | 780 | 2,05 | 100% | 681 | 100% | 580 | 99% | 55 |
| 145 | 100% | 780 | 1,43 | 100% | 692 | 100% | 621 | 100% | 60 |
| 150 | 100% | 780 | 1,11 | 100% | 690 | 100% | 655 | 100% | 39 |
| Média | 100% | 682 | 5,86 | 102% | 593 | 103% | 454 | 98% | 59 |

Observando o tempo computacional da FORM e das três heurísticas na Tabela 5.4, nota-se que as heurísticas tiveram tempos computacionais bastante inferiores compa-

rados a FORM, sendo que o menor tempo computacional é obtido pela HEUR 3, que representam uma redução de 87% quando comparados à FORM, na média geral.

Observando os limitantes superiores, a HEUR 1 e a HEUR 2 tiveram um desempenho inferior com a capacidade média, e com a capacidade igual a 115, comparadas com a FORM, sendo a HEUR 1 14% pior e a HEUR 2 17% pior. A HEUR 3 obteve os melhores resultados com a capacidade média, onde na classe com capacidade igual a 125, ela foi superior em 12% em relação a FORM e para as outras classes foi superior em quase todas. Na média geral a única heurística que teve o L.S. melhor que o da FORM foi a HEUR 3, com 2% melhoria.

O GAP na média geral é um valor baixo, no entanto quando se considera classes com a capacidade variando de 110 à 135, ou seja quando, a capacidade é média, têm-se os piores valores para os GAPS encontrados pelo CPLEX para o problema e para as classes com capacidade folgada e apertada os GAPS são os menores.

Na Tabela 5.5 são apresentados os atrasos e o número de preparações das máquinas, da formulação (3.1) - (3.8), da HEUR 1, HEUR 2 e HEUR 3.

Tabela 5.5: 12 itens, 12 máquinas e 15 períodos

| Cap | FORM | | HEUR 1 | | HEUR 2 | | HEUR 3 | |
|-------|---------|------------|---------|------------|---------|------------|---------|------------|
| | Atrasos | Preparação | Atrasos | Preparação | Atrasos | Preparação | Atrasos | Preparação |
| 40 | 97180 | 180 | 97228 | 180 | 97433 | 172 | 97045 | 180 |
| 50 | 87734 | 180 | 87580 | 182 | 88180 | 180 | 87581 | 181 |
| 60 | 78381 | 191 | 78394 | 183 | 78422 | 186 | 78366 | 181 |
| 70 | 67740 | 182 | 68195 | 182 | 69106 | 184 | 67732 | 183 |
| 80 | 57936 | 192 | 58408 | 186 | 58323 | 182 | 57970 | 182 |
| 90 | 46267 | 192 | 46430 | 188 | 47138 | 189 | 46090 | 187 |
| 100 | 32313 | 184 | 32437 | 182 | 32552 | 186 | 32269 | 182 |
| 110 | 17878 | 184 | 18303 | 184 | 18475 | 185 | 17493 | 182 |
| 115 | 11288 | 190 | 11159 | 184 | 11227 | 185 | 10985 | 183 |
| 120 | 5374 | 192 | 5273 | 193 | 5224 | 185 | 5195 | 189 |
| 125 | 1745 | 192 | 1534 | 190 | 1571 | 188 | 1499 | 190 |
| 130 | 198 | 182 | 176 | 188 | 162 | 183 | 150 | 187 |
| 135 | 6 | 188 | 5 | 179 | 5 | 181 | 4 | 181 |
| 140 | 0 | 185 | 0 | 175 | 3 | 171 | 0 | 175 |
| 145 | 0 | 185 | 0 | 168 | 0 | 170 | 0 | 167 |
| 150 | 0 | 176 | 0 | 162 | 0 | 159 | 0 | 162 |
| Média | 31503 | 186 | 31570 | 182 | 31739 | 180 | 31399 | 181 |

Comparando os valores da Tabela 5.3, para as preparações da FORM, com as heurísticas, os valores obtidos são quase os mesmos para todas as classes.

Nota-se que os atrasos da FORM e das três heurísticas possuem valores bem altos,

sendo que as heurísticas HEUR 1 e HEUR 2, possuem atrasos inferiores a FORM apenas para as classes com capacidade variando de 115 à 135. A HEUR 3 possui atrasos inferiores a FORM para todas as classes, exceto para a classe com capacidade igual a 100. Nas classes com capacidade variando de 40 até 135 a FORM, e as heurísticas HEUR 1 e HEUR 3 possuem atrasos, e na classe com a capacidade igual a 140 apenas a HEUR 2 possui atrasos.

• **Resultados para 24 itens e 24 máquinas**

Na Tabela 5.6 são apresentados os limitantes superiores (colunas L.S.) e o tempo computacional em segundos (colunas T(s)) para a formulação (3.1) - (3.8) (coluna FORM) e para as três heurísticas (colunas: HEUR 1, HEUR 2 e HEUR 3). Para a formulação também foram apresentados os valores obtidos para o gap (coluna GAP), que correspondem aos valores (em porcentagem) encontrados pelo CPLEX.

Tabela 5.6: 24 itens, 24 máquinas e 15 períodos

| Cap | FORM | | | HEUR 1 | | HEUR 2 | | HEUR 3 | |
|-------|-------|------|-------|--------|------|--------|------|--------|------|
| | L. S. | T(s) | GAP | L. S. | T(s) | L. S. | T(s) | L. S. | T(s) |
| 40 | 100% | 822 | 0,11 | 101% | 947 | 101% | 899 | 101% | 76 |
| 50 | 100% | 1500 | 0,27 | 106% | 1131 | 101% | 1048 | 98% | 94 |
| 60 | 100% | 1500 | 0,26 | 100% | 1222 | 109% | 1133 | 97% | 99 |
| 70 | 100% | 1500 | 0,97 | 103% | 1286 | 103% | 1195 | 91% | 114 |
| 80 | 100% | 1500 | 1,60 | 101% | 1337 | 101% | 1245 | 98% | 130 |
| 90 | 100% | 1500 | 3,48 | 107% | 1362 | 103% | 1290 | 97% | 146 |
| 100 | 100% | 1500 | 7,36 | 99% | 1393 | 100% | 1393 | 95% | 160 |
| 110 | 100% | 1500 | 16,49 | 100% | 1406 | 96% | 1405 | 88% | 167 |
| 115 | 100% | 1500 | 38,11 | 99% | 1418 | 86% | 1418 | 50% | 168 |
| 120 | 100% | 1500 | 62,78 | 98% | 1436 | 77% | 1436 | 44% | 64 |
| 125 | 100% | 1500 | 84,33 | 97% | 1441 | 17% | 1441 | 12% | 89 |
| 130 | 100% | 1500 | 64,67 | 98% | 1441 | 53% | 1441 | 40% | 124 |
| 135 | 100% | 1500 | 26,54 | 97% | 1442 | 79% | 1441 | 71% | 65 |
| 140 | 100% | 1500 | 9,66 | 100% | 1442 | 100% | 1442 | 96% | 70 |
| 145 | 100% | 1500 | 2,77 | 99% | 1434 | 98% | 1312 | 98% | 50 |
| 150 | 100% | 1500 | 1,85 | 100% | 1441 | 100% | 1441 | 99% | 40 |
| Média | 100% | 1458 | 20,08 | 100% | 1349 | 89% | 1311 | 80% | 104 |

Observando os limitantes superiores da Tabela 5.6, a HEUR 3 obteve os melhores resultados nas classes com a capacidade média, onde para a capacidade igual a 125, ela foi superior em 88% em relação a FORM. Para as outras classes a HEUR 3 foi superior em quase todas, exceto para a classe com capacidade igual a 40, que no caso foi 1% pior que a FORM. Essa qualidade no L.S. resultou em uma média geral 20%

melhor comparada à FORM. As heurísticas HEUR 1 e HEUR 2 obtiveram os melhores resultados também para a capacidade média, sendo que a HEUR 2 apresentou na maioria dos casos melhores resultados que a HEUR 1, principalmente na classe com capacidade igual a 125. Para o restante das classes, as abordagens obtiveram os mesmos resultados ou resultados inferiores a FORM. Na média geral a HEUR 1 teve o mesmo desempenho que a FORM. A HEUR 2 foi 11% melhor que a FORM.

Analisando o tempo computacional da FORM e das três heurísticas na Tabela 5.6, nota-se que o tempo computacional das três heurísticas é inferior ao tempo computacional da FORM, sendo que o menor tempo computacional é obtido pela HEUR 3. Na média geral, tem-se que uma redução de 71% no tempo computacional da HEUR 3 comparado à FORM.

O GAP na média geral pode ser considerado um valor médio, no entanto quando se considera classes com a capacidade variando de 110 à 135, ou seja, quando a capacidade é média, obtém-se os piores GAPS encontrados pelo CPLEX. Na classe com capacidade igual a 125 obtém-se o GAP mais alto.

Na tabela 5.7 são apresentados os atrasos e as preparações para a formulação (3.1) - (3.8), e para as heurísticas.

Tabela 5.7: 24 itens, 24 máquinas e 15 períodos

| Cap | FORMULAÇÃO | | HEUR 1 | | HEUR 2 | | HEUR 3 | |
|-------|------------|------------|---------|------------|---------|------------|---------|------------|
| | Atrasos | Preparação | Atrasos | Preparação | Atrasos | Preparação | Atrasos | Preparação |
| 40 | 194674 | 362 | 194811 | 360 | 194795 | 360 | 194747 | 359 |
| 50 | 172922 | 361 | 173192 | 360 | 173117 | 360 | 170609 | 361 |
| 60 | 161526 | 361 | 163907 | 362 | 163228 | 362 | 160665 | 360 |
| 70 | 142085 | 361 | 142961 | 360 | 142447 | 361 | 141012 | 360 |
| 80 | 120239 | 366 | 121338 | 366 | 121907 | 365 | 120440 | 365 |
| 90 | 94236 | 362 | 95239 | 363 | 93478 | 364 | 93106 | 278 |
| 100 | 67238 | 363 | 67458 | 364 | 66116 | 363 | 66018 | 362 |
| 110 | 44512 | 662 | 44802 | 369 | 44185 | 369 | 44093 | 368 |
| 115 | 36822 | 352 | 36872 | 357 | 36163 | 350 | 35870 | 357 |
| 120 | 27402 | 356 | 25636 | 350 | 24989 | 360 | 25083 | 350 |
| 125 | 14573 | 33 | 14130 | 360 | 14918 | 368 | 14279 | 361 |
| 130 | 3320 | 359 | 3044 | 357 | 3044 | 358 | 2389 | 357 |
| 135 | 490 | 352 | 492 | 351 | 491 | 334 | 485 | 356 |
| 140 | 85 | 351 | 83 | 352 | 83 | 352 | 37 | 343 |
| 145 | 13 | 340 | 14 | 339 | 12 | 339 | 7 | 333 |
| 150 | 2 | 331 | 2 | 328 | 2 | 329 | 2 | 318 |
| Média | 67509 | 355 | 67749 | 356 | 67436 | 356 | 66803 | 349 |

Na Tabela 5.7 observa-se que os atrasos da formulação e das três heurísticas possuem

valores bem próximos em todas as classes, sendo que os atrasos da HEUR 3 comparados com a FORM são inferiores para a maioria das classes. Já as preparações da FORM e das três heurísticas são quase os mesmos. Conforme foi aumentando a capacidade das máquinas, o número de atrasos foi diminuindo, tanto da formulação como das heurísticas.

Comparando as tabelas 5.2, 5.4 e 5.6, nota-se que a medida que aumenta-se o número de itens e de máquinas, o desempenho das heurísticas são melhores em relação ao desempenho da formulação, principalmente para a HEUR 3, e sendo que para a capacidade média, os resultados foram bem melhores. O tempo computacional das heurísticas é inferior ao tempo computacional da formulação, mas observa-se que a HEUR 3 obteve um tempo computacional bem mais baixo do que as outras heurísticas.

Assim dos resultados computacionais, podemos concluir que os desempenhos da HEUR 2 e da HEUR 3, foram melhorando, conforme aumentou o número de itens e de máquinas.

6 Conclusões e Propostas Futuras

Neste trabalho foram estudados os problemas de dimensionamentos de lotes com máquinas paralelas, enfocando o caso com máquinas paralelas flexíveis e com restrições de capacidade, no qual os itens podem ser produzidos em qualquer uma das máquinas, levando em consideração um tempo de preparação das máquinas.

A pesquisa foi baseada em Fiorotto et al. [1], que apresentam a formulação (3.1) - (3.8), para o problema de dimensionamento de lotes com máquinas paralelas flexíveis e que considera a possibilidade de investir na flexibilidade das máquinas. O objetivo desse trabalho foi desenvolver três heurísticas para essa formulação, com o intuito de conseguir boas soluções em baixos tempos computacionais, visto que em Fiorotto et al. [1] os autores tiveram uma certa dificuldade em obter soluções para o problema.

Primeiramente foi feita a implementação da formulação (3.1) - (3.8).

Em seguida foi implementada uma primeira heurística (HEUR 1) para adicionar os links, que consiste em adicionar um link de cada vez, onde a escolha do item e da máquina a ser adicionada era feita pelo próprio solver.

Posteriormente, foi implementada uma segunda heurística (HEUR 2) para adicionar os links, que consiste na escolha de um item e uma máquina, onde a escolha do item é feita pelo maior custo de itens em atraso na solução atual e a escolha da máquina é feita pela máquina com maior economia, com o número de links adicionados sendo o mesmo número de itens e de máquinas.

Por último foi implementada uma terceira heurística (HEUR 3) para adicionar os links, que consiste na escolha de um item e uma máquina, onde a escolha do item é feita pelo maior custo de itens em atraso na solução atual e a escolha da máquina é feita pela escolha do maior valor, dentre os valores relaxados, da variável z_{ij} .

Após a implementação dos métodos de solução foram realizados os testes computacionais, com a utilização do solver CPLEX 12.6.1.. Os testes foram realizados para 480 instâncias conhecidas da literatura.

As análises foram feitas nos resultados obtidos após adição de todos os links. Analisaram-se os resultados para os limitantes superiores, os tempos computacionais, os atrasos e a preparação e foram apresentados também o GAP da formulação, calculado pelo CPLEX.

A partir dos resultados obtidos conclui-se que conforme aumenta-se o número de

itens e de máquinas, o desempenho das heurísticas foram melhorando em relação ao desempenho da formulação. Das três heurísticas, a HEUR 3 foi a heurística que obteve os melhores resultados, principalmente para a capacidade média. O tempo computacional de todas as heurísticas é inferior ao tempo computacional da formulação, e a HEUR 3 foi a heurística que obteve o menor tempo computacional de todas as heurísticas.

Durante as análises dos resultados, nota-se que para algumas instâncias, a formulação não encontrou resultados satisfatórios quando foram adicionados todos os links.

Como próximos passos tendo em vista melhorar os resultados computacionais e estender esse trabalho sugere-se:

- Testes computacionais para instâncias maiores;
- Melhorar as heurísticas;
- Aplicar os métodos para casos onde o número de itens seja diferente do número de máquinas;
- Considerar outras configurações de flexibilidade das máquinas;

Referências

- [1] FIOROTTO, D. J.; JANS, R.; ARAUJO, S. A. de. Process flexibility and the chaining principle in lot sizing problems. *International Journal of Production Economics*, Elsevier BV, v. 204, p. 244–263, oct 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016>
- [2] FIOROTTO, D. J. Modelos matemáticos e métodos de solução para problemas de dimensionamento de lotes. Universidade Estadual Paulista (UNESP), Tese (Doutorado), 2015.
- [3] HARRIS, F. What quantity to make at once. *The library of factory management*, AW Shaw Company Chicago, v. 5, p. 47–52, 1915.
- [4] WAGNER, H. M.; WHITIN, T. M. Dynamic version of the economic lot size model. *Management Science*, Institute for Operations Research and the Management Sciences (INFORMS), v. 5, n. 1, p. 89–96, oct 1958. Disponível em: <<https://doi.org/10.1287>
- [5] BILLINGTON, P. J.; MCCLAIN, J. O.; THOMAS, L. J. Mathematical programming approaches to capacity-constrained MRP systems: Review, formulation and problem reduction. *Management Science*, Institute for Operations Research and the Management Sciences (INFORMS), v. 29, n. 10, p. 1126–1141, oct 1983. Disponível em: <<https://doi.org/10.1287>
- [6] TRIGEIRO, W. W.; THOMAS, L. J.; MCCLAIN, J. O. Capacitated lot sizing with setup times. *Management science*, INFORMS, v. 35, n. 3, p. 353–366, 1989.
- [7] MAES, J.; MCCLAIN, J. O.; WASSENHOVE, L. N. V. Multilevel capacitated lotsizing complexity and LP-based heuristics. *European Journal of Operational Research*, Elsevier BV, v. 53, n. 2, p. 131–148, jul 1991. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016>
- [8] HOLMBOM, M.; SEGERSTEDT, A. Economic order quantities in production: From harris to economic lot scheduling problems. *International Journal of Production Economics*, Elsevier BV, v. 155, p. 82–90, sep 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016>

- [9] GLOCK, C. H.; GROSSE, E. H.; RIES, J. M. The lot sizing problem: A tertiary study. *International Journal of Production Economics*, Elsevier BV, v. 155, p. 39–51, sep 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016>>
- [10] POCHET, Y.; WOLSEY, L. A. *Production planning by mixed integer programming*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006.
- [11] BAHL, H. C.; RITZMAN, L. P.; GUPTA, J. N. D. OR practice—determining lot sizes and resource requirements: A review. *Operations Research*, Institute for Operations Research and the Management Sciences (INFORMS), v. 35, n. 3, p. 329–345, jun 1987. Disponível em: <<https://doi.org/10.1287>>
- [12] MAES, J.; WASSENHOVE, L. V. Multi-item single-level capacitated dynamic lot-sizing heuristics: A general review. *Journal of the Operational Research Society*, Informa UK Limited, v. 39, n. 11, p. 991–1004, nov 1988. Disponível em: <<https://doi.org/10.1057>>
- [13] GOYAL, S.; GUNASEKARAN, A. Multi-stage production-inventory systems. *European Journal of Operational Research*, Elsevier BV, v. 46, n. 1, p. 1–20, may 1990. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016>>
- [14] KUIK, R.; SALOMON, M.; WASSENHOVE, L. N. van. Batching decisions: structure and models. *European Journal of Operational Research*, Elsevier BV, v. 75, n. 2, p. 243–263, jun 1994. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016>>
- [15] DREXL, A.; HAASE, K. Sequential-analysis based randomized-regret-methods for lot-sizing and scheduling. *The Journal of the Operational Research Society*, JSTOR, v. 47, n. 2, p. 251, feb 1996. Disponível em: <<https://doi.org/10.2307>>
- [16] SANTOS, M. O. dos. *Dimensionamento de Lotes em Máquinas Paralelas com Restrições de Capacidade em Sistemas Multiestágios*. Tese (Doutorado). Disponível em: <<https://doi.org/10.11606>>
- [17] KARIMI, B.; GHOMI, S. F.; WILSON, J. The capacitated lot sizing problem: a review of models and algorithms. *Omega*, Elsevier BV, v. 31, n. 5, p. 365–378, oct 2003. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016>>
- [18] BRAHIMI, N. et al. Single item lot sizing problems. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 168, n. 1, p. 1–16, 2006.
- [19] DEGRAEVE, Z.; JANS, R. A new dantzig-wolfe reformulation and branch-and-price algorithm for the capacitated lot-sizing problem with setup times. *Operations Research*, Institute for Operations Research and the Management Sciences (INFORMS), v. 55, n. 5, p. 909–920, oct 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1287>>

-
- [20] EVANS, J. R. An efficient implementation of the wagner-whitin algorithm for dynamic lot-sizing. *Journal of Operations Management*, Elsevier BV, v. 5, n. 2, p. 229–235, feb 1985. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016>>
- [21] FEDERGRUEN, A.; TZUR, M. A simple forward algorithm to solve general dynamic lot sizing models with n periods in $O(n \log n)$ or $O(n)$ time. *Management Science*, Institute for Operations Research and the Management Sciences (INFORMS), v. 37, n. 8, p. 909–925, aug 1991. Disponível em: <<https://doi.org/10.1287>>
- [22] WAGELMANS, A.; HOESEL, S. van; KOLEN, A. Economic lot sizing: An $O(n \log n)$ algorithm that runs in linear time in the wagner-whitin case. *Operations Research*, Institute for Operations Research and the Management Sciences (INFORMS), v. 40, n. 1-supplement-1, p. S145–S156, feb 1992. Disponível em: <<https://doi.org/10.1287>>
- [23] AGGARWAL, A.; PARK, J. K. Improved algorithms for economic lot size problems. *Operations Research*, Institute for Operations Research and the Management Sciences (INFORMS), v. 41, n. 3, p. 549–571, jun 1993. Disponível em: <<https://doi.org/10.1287>>
- [24] ZANGWILL, W. I. A backlogging model and a multi-echelon model of a dynamic economic lot size production system—a network approach. *Management Science*, Institute for Operations Research and the Management Sciences (INFORMS), v. 15, n. 9, p. 506–527, may 1969. Disponível em: <<https://doi.org/10.1287>>
- [25] BARANY, I.; ROY, T. J. V.; WOLSEY, L. A. Strong formulations for multi-item capacitated lot sizing. *Management Science*, Institute for Operations Research and the Management Sciences (INFORMS), v. 30, n. 10, p. 1255–1261, oct 1984. Disponível em: <<https://doi.org/10.1287>>
- [26] EPPEN, G. D.; MARTIN, R. K. Solving multi-item capacitated lot-sizing problems using variable redefinition. *Operations Research*, Institute for Operations Research and the Management Sciences (INFORMS), v. 35, n. 6, p. 832–848, dec 1987. Disponível em: <<https://doi.org/10.1287>>
- [27] DENIZEL, M. et al. Equivalence of the LP relaxations of two strong formulations for the capacitated lot-sizing problem with setup times. *OR Spectrum*, Springer Nature, v. 30, n. 4, p. 773–785, aug 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007>>
- [28] BRAHIMI, N. et al. Single-item dynamic lot-sizing problems: An updated survey. *European Journal of Operational Research*, Elsevier BV, v. 263, n. 3, p. 838–863, dec 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016>>
- [29] FLORIAN, M.; KLEIN, M. Erratum: Deterministic production planning with concave costs and capacity constraints. *Management Science*, Institute for Operati-

- ons Research and the Management Sciences (INFORMS), v. 18, n. 11, p. 721–721, jul 1972. Disponível em: <<https://doi.org/10.1287>>
- [30] TOLEDO, F. M. B. d. et al. Dimensionamento de lotes em máquinas paralelas. [sn], 1998.
- [31] FIOROTTO, D. J.; ARAUJO, S. A. de. Reformulation and a lagrangian heuristic for lot sizing problem on parallel machines. *Annals of Operations Research*, Springer Nature, mar 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007>>
- [32] FIOROTTO, D. J.; ARAUJO, S. A. de; JANS, R. Hybrid methods for lot sizing on parallel machines. *Computers & Operations Research*, Elsevier BV, v. 63, p. 136–148, nov 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016>>
- [33] MANNE, A. S. Programming of economic lot sizes. *Management Science*, Institute for Operations Research and the Management Sciences (INFORMS), v. 4, n. 2, p. 115–135, jan 1958. Disponível em: <<https://doi.org/10.1287>>
- [34] DZIELINSKI, B. P.; GOMORY, R. E. Optimal programming of lot sizes, inventory and labor allocations. *Management Science*, Institute for Operations Research and the Management Sciences (INFORMS), v. 11, n. 9, p. 874–890, jul 1965. Disponível em: <<https://doi.org/10.1287>>
- [35] DANTZIG, G. B.; WOLFE, P. Decomposition principle for linear programs. *Operations Research*, Institute for Operations Research and the Management Sciences (INFORMS), v. 8, n. 1, p. 101–111, feb 1960. Disponível em: <<https://doi.org/10.1287>>
- [36] LASDON, L. S.; TERJUNG, R. C. An efficient algorithm for multi-item scheduling. *Operations Research*, Institute for Operations Research and the Management Sciences (INFORMS), v. 19, n. 4, p. 946–969, aug 1971. Disponível em: <<https://doi.org/10.1287>>
- [37] BAHL, H. C. Column generation based heuristic algorithm for multi-item scheduling. *IIE Transactions*, Informa UK Limited, v. 15, n. 2, p. 136–141, jun 1983. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080>>
- [38] CATTRYSSE, D.; MAES, J.; WASSENHOVE, L. N. V. Set partitioning and column generation heuristics for capacitated dynamic lotsizing. *European Journal of Operational Research*, Elsevier BV, v. 46, n. 1, p. 38–47, may 1990. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016>>
- [39] SALOMON, M.; KUIK, R.; WASSENHOVE, L. N. V. Statistical search methods for lotsizing problems. *Annals of Operations Research*, Springer Nature, v. 41, n. 4, p. 453–468, dec 1993. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007>>

-
- [40] HUISMAN, D. et al. Combining column generation and lagrangian relaxation. In: *Column Generation*. Springer-Verlag. p. 247–270. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007>>
- [41] LAMBRECHT, M. R.; VANDERVEKEN, H. Heuristic procedures for the single operation, multi-item loading problem. *A I I E Transactions*, Informa UK Limited, v. 11, n. 4, p. 319–326, dec 1979. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080>>
- [42] BITRAN, G. R.; MATSUO, H. The multi-item capacitated lot size problem: error bounds of manne’s formulations. *Management Science*, INFORMS, v. 32, n. 3, p. 350–359, 1986.
- [43] VANDERBECK, F. Lot-sizing with start-up times. *Management Science*, Institute for Operations Research and the Management Sciences (INFORMS), v. 44, n. 10, p. 1409–1425, oct 1998. Disponível em: <<https://doi.org/10.1287>>
- [44] HINDI, K. Computationally efficient solution of the multi-item, capacitated lot-sizing problem. *Computers & Industrial Engineering*, Elsevier BV, v. 28, n. 4, p. 709–719, oct 1995. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016>>
- [45] CHEN, W. H.; THIZY, J. M. Analysis of relaxations for the multi-item capacitated lot-sizing problem. *Annals of Operations Research*, Springer Nature, v. 26, n. 1, p. 29–72, dec 1990. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007>>
- [46] SINGH, N.; RAJAMANI, D. An incremental cost and resource smoothing heuristic for the capacitated lot sizing problem. *Computers & Industrial Engineering*, Elsevier BV, v. 20, n. 4, p. 469–474, jan 1991. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016>>
- [47] KIRCA Ömer; KöKTEN, M. A new heuristic approach for the multi-item dynamic lot sizing problem. *European Journal of Operational Research*, Elsevier BV, v. 75, n. 2, p. 332–341, jun 1994. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016>>
- [48] DIABY, M. et al. Capacitated lot-sizing and scheduling by lagrangean relaxation. *European Journal of Operational Research*, Elsevier BV, v. 59, n. 3, p. 444–458, jun 1992. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016>>
- [49] SOUZA, K. X. X. D.; ARMENTANO, V. A. Multi-item capacitated lot-sizing by a cross decomposition based algorithm. *Annals of Operations Research*, Springer Nature, v. 50, n. 1, p. 557–574, dec 1994. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007>>
- [50] ROY, T. J. V. Cross decomposition for mixed integer programming. *Mathematical Programming*, Springer Nature, v. 25, n. 1, p. 46–63, jan 1983. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007>>

-
- [51] ARMENTANO, V. A.; FRANÇA, P. M.; TOLEDO, F. M. de. A network flow model for the capacitated lot-sizing problem. *Omega*, Elsevier BV, v. 27, n. 2, p. 275–284, apr 1999. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016>>
- [52] BELVAUX, G.; WOLSEY, L. A. bc — prod: A specialized branch-and-cut system for lot-sizing problems. *Management Science*, Institute for Operations Research and the Management Sciences (INFORMS), v. 46, n. 5, p. 724–738, may 2000. Disponível em: <<https://doi.org/10.1287>>
- [53] BELVAUX, G.; WOLSEY, L. A. Modelling practical lot-sizing problems as mixed-integer programs. *Management Science*, Institute for Operations Research and the Management Sciences (INFORMS), v. 47, n. 7, p. 993–1007, jul 2001. Disponível em: <<https://doi.org/10.1287>>
- [54] VYVE, M. V.; WOLSEY, L. A. Approximate extended formulations. *Mathematical Programming*, Springer Nature, v. 105, n. 2-3, p. 501–522, oct 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007>>
- [55] PIMENTEL, C. M. O.; ALVELOS, F. P. e; CARVALHO, J. M. V. de. Comparing dantzig–wolfe decompositions and branch-and-price algorithms for the multi-item capacitated lot sizing problem. *Optimization Methods and Software*, Informa UK Limited, v. 25, n. 2, p. 299–319, apr 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080>>
- [56] HELD, M.; WOLFE, P.; CROWDER, H. P. Validation of subgradient optimization. *Mathematical Programming*, Springer Nature, v. 6, n. 1, p. 62–88, dec 1974. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007>>
- [57] CAMERINI, P. M.; FRATTA, L.; MAFFIOLI, F. On improving relaxation methods by modified gradient techniques. In: *Nondifferentiable Optimization*. Springer Berlin Heidelberg, 1975. p. 26–34. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007>>
- [58] LOZANO, S.; LARRANETA, J.; ONIEVA, L. Primal-dual approach to the single level capacitated lot-sizing problem. *European Journal of Operational Research*, Elsevier BV, v. 51, n. 3, p. 354–366, apr 1991. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016>>
- [59] ARAUJO, S. A. d.; ARENALES, M. N. Problema de dimensionamento de lotes monoestágio com restrição de capacidade: modelagem, método de resolução e resultados computacionais. *Pesquisa Operacional*, SciELO Brasil, v. 20, n. 2, p. 287–306, 2000.
- [60] JANS, R.; DEGRAEVE, Z. Improved lower bounds for the capacitated lot sizing problem with setup times. *Operations Research Letters*, Elsevier BV, v. 32, n. 2, p. 185–195, mar 2004. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016>>

-
- [61] SÜRAL, H.; DENIZEL, M.; WASSENHOVE, L. N. V. Lagrangean relaxation based heuristics for lot sizing with setup times. *European Journal of Operational Research*, Elsevier BV, v. 194, n. 1, p. 51–63, apr 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016>>
- [62] ARAUJO, S. A. de et al. Period decompositions for the capacitated lot sizing problem with setup times. *INFORMS Journal on Computing*, Institute for Operations Research and the Management Sciences (INFORMS), v. 27, n. 3, p. 431–448, aug 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1287>>
- [63] MATTA, R. D.; GUIGNARD, M. The performance of rolling production schedules in a process industry. *IIE Transactions*, Informa UK Limited, v. 27, n. 5, p. 564–573, oct 1995. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080>>
- [64] MERGAUX, J.; WASSENHOVE, L. van. *Production planning with capacity constraints*. Tese (Doutorado) — Master thesis, Division of Industrial Management, Katholieke Universiteit Leuven, Dutch, 1984.
- [65] MATTA, R. D.; GUIGNARD, M. Dynamic production scheduling for a process industry. *Operations Research*, INFORMS, v. 42, n. 3, p. 492–503, 1994.
- [66] CARRENO, J. J. Economic lot scheduling for multiple products on parallel identical processors. *Management Science*, Institute for Operations Research and the Management Sciences (INFORMS), v. 36, n. 3, p. 348–358, mar 1990. Disponível em: <<https://doi.org/10.1287>>
- [67] MARINELLI, F.; NENNI, M. E.; SFORZA, A. Capacitated lot sizing and scheduling with parallel machines and shared buffers: A case study in a packaging company. *Annals of Operations Research*, Springer Nature, v. 150, n. 1, p. 177–192, jan 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007>>
- [68] TOLEDO, F. M. B.; ARMENTANO, V. A. A lagrangian-based heuristic for the capacitated lot-sizing problem in parallel machines. *European Journal of Operational Research*, Elsevier BV, v. 175, n. 2, p. 1070–1083, dec 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016>>
- [69] SUNG, C. S. A single-product parallel-facilities production-planning model. *International Journal of Systems Science*, Informa UK Limited, v. 17, n. 7, p. 983–989, jul 1986. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080>>
- [70] SALOMON, M. et al. Some extensions of the discrete lotsizing and scheduling problem. *Management Science*, Institute for Operations Research and the Management Sciences (INFORMS), v. 37, n. 7, p. 801–812, jul 1991. Disponível em: <<https://doi.org/10.1287>>

- [71] NETO, Z. S. et al. Planejamento da produção em máquinas paralelas sob restrições de capacidade. [sn], 1993.
- [72] DERSTROFF, M. C. *Mehrstufige Losgrößenplanung mit Kapazitätsbeschränkungen*. Physica-Verlag HD, 1995. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007>>
- [73] ÖZDAMAR, L.; BIRBIL, Ş. İ. Hybrid heuristics for the capacitated lot sizing and loading problem with setup times and overtime decisions. *European Journal of Operational Research*, Elsevier BV, v. 110, n. 3, p. 525–547, nov 1998. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016>>
- [74] KANG, S.; MALIK, K.; THOMAS, L. J. Lotsizing and scheduling on parallel machines with sequence-dependent setup costs. *Management Science*, Institute for Operations Research and the Management Sciences (INFORMS), v. 45, n. 2, p. 273–289, feb 1999. Disponível em: <<https://doi.org/10.1287>>
- [75] TEMPELMEIER, H.; BUSCHKÜHL, L. A heuristic for the dynamic multi-level capacitated lotsizing problem with linked lotsizes for general product structures. *OR Spectrum*, Springer Nature, v. 31, n. 2, p. 385–404, feb 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007>>
- [76] JANS, R. Solving lot-sizing problems on parallel identical machines using symmetry-breaking constraints. *INFORMS Journal on Computing*, Institute for Operations Research and the Management Sciences (INFORMS), v. 21, n. 1, p. 123–136, feb 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1287>>
- [77] ARAUJO, S. A. de; FIOROTTO, D. J. Relaxação lagrangiana aplicada ao problema de dimensionamento de lotes em máquinas paralelas: Limitantes inferiores. *TEMA - Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, Brazilian Society for Computational and Applied Mathematics (SBMAC), p. 13–24, apr 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.5540>>
- [78] FIOROTTO, D. J.; ARAUJO, S. A. de; JANS, R. Hybrid methods for lot sizing on parallel machines. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 63, p. 136–148, 2015.
- [79] FINE, C. H.; FREUND, R. M. Optimal investment in product-flexible manufacturing capacity. *Management Science*, Institute for Operations Research and the Management Sciences (INFORMS), v. 36, n. 4, p. 449–466, apr 1990. Disponível em: <<https://doi.org/10.1287>>
- [80] JORDAN, W. C.; GRAVES, S. C. Principles on the benefits of manufacturing process flexibility. *Management Science*, Institute for Operations Research and the Management Sciences (INFORMS), v. 41, n. 4, p. 577–594, apr 1995. Disponível em: <<https://doi.org/10.1287>>

-
- [81] TANG, C. S.; DENARDO, E. V. Models arising from a flexible manufacturing machine, part i: Minimization of the number of tool switches. *Operations Research*, Institute for Operations Research and the Management Sciences (INFORMS), v. 36, n. 5, p. 767–777, oct 1988. Disponível em: <<https://doi.org/10.1287>>
- [82] SHEIKHZADEH, M.; BENJAAFAR, S.; GUPTA, D. Machine sharing in manufacturing systems: Total flexibility versus chaining. *International Journal of Flexible Manufacturing Systems*, Springer, v. 10, n. 4, p. 351–378, 1998.
- [83] GRAVES, S. C.; TOMLIN, B. T. Process flexibility in supply chains. *Management Science*, Institute for Operations Research and the Management Sciences (INFORMS), v. 49, n. 7, p. 907–919, jul 2003. Disponível em: <<https://doi.org/10.1287>>
- [84] INMAN, R. R.; JORDAN, W. C.; BLUMENFELD, D. E. Chained cross-training of assembly line workers. *International Journal of Production Research*, Informa UK Limited, v. 42, n. 10, p. 1899–1910, may 2004. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080>>
- [85] IRAVANI, S. M.; OYEN, M. P. V.; SIMS, K. T. Structural flexibility: A new perspective on the design of manufacturing and service operations. *Management Science*, Institute for Operations Research and the Management Sciences (INFORMS), v. 51, n. 2, p. 151–166, feb 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1287>>
- [86] MURIEL, A.; SOMASUNDARAM, A.; ZHANG, Y. Impact of partial manufacturing flexibility on production variability. *Manufacturing & Service Operations Management*, Institute for Operations Research and the Management Sciences (INFORMS), v. 8, n. 2, p. 192–205, apr 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.1287>>
- [87] MAK, H.-Y.; SHEN, Z.-J. M. Stochastic programming approach to process flexibility design. *Flexible Services and Manufacturing Journal*, Springer Nature, v. 21, n. 3-4, p. 75–91, dec 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007>>
- [88] SIMCHI-LEVI, D.; WEI, Y. Understanding the performance of the long chain and sparse designs in process flexibility. *Operations Research*, Institute for Operations Research and the Management Sciences (INFORMS), v. 60, n. 5, p. 1125–1141, oct 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1287>>
- [89] GURUMURTHI, S.; BENJAAFAR, S. Modeling and analysis of flexible queueing systems. *Naval Research Logistics*, Wiley, v. 51, n. 5, p. 755–782, aug 2004. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002>>
- [90] ANDRADÓTTIR, S.; AYHAN, H.; DOWN, D. G. Design principles for flexible systems. *Production and Operations Management*, Wiley Online Library, v. 22, n. 5, p. 1144–1156, 2013.

- [91] XIAO, J. et al. A hybrid lagrangian-simulated annealing-based heuristic for the parallel-machine capacitated lot-sizing and scheduling problem with sequence-dependent setup times. *Computers & Operations Research*, Elsevier BV, v. 63, p. 72–82, nov 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016>