



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Campus de São José do Rio Preto

Luciana Alcantara de Toledo

Ensino da função exponencial: análise de resultados

São José do Rio Preto
2018

Luciana Alcantara de Toledo

Ensino da função exponencial: análise de resultados

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Rita de Cássia Pavan Lamas

São José do Rio Preto
2018

Toledo, Luciana Alcantara de.

Ensino da função exponencial: análise de resultados /
Luciana Alcantara de Toledo. -- São José do Rio Preto, 2018
122 f. : il., tabs.

Orientador: Rita de Cássia Pavan Lama

Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual
Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e
Ciências Exatas

1. Matemática (Ensino médio) – Estudo e ensino. 2. Função
exponencial. 3. Matemática – Metodologia. I. Universidade
Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de
Biociências, Letras e Ciências Exatas. II. Título.

CDU – 51(07)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Luciana Alcantara de Toledo

Ensino da função exponencial: análise de resultados

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Comissão Examinadora

Prof^a. Dr^a. Rita de Cássia Pavan Lamas
UNESP – São José do Rio Preto
Orientadora

Prof^a. Dr^a. Flávia Sueli Fabiani Marcatto
Universidade Federal de Itajubá – UNIFEI – MG

Prof. Dr. Jéfferson Luiz Rocha Bastos
UNESP – São José do Rio Preto

São José do Rio Preto
17 de Agosto de 2018

Dedico este trabalho a minha tia Maria Madalena e ao meu vô Olavo (in memoriam) que me ensinaram a importância do conhecimento, aos meus pais Maria de Lourdes e Pedro Paulo pelo apoio, incentivo e amor durante toda a minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente a Deus, pelo dom da vida e por ter me dado força para não desistir, iluminado e auxiliando meu caminho através de pessoas bondosas que me ajudaram na elaboração desse trabalho.

Agradeço, em especial, à Prof.^a Dr.^a. Rita pela generosidade, paciência e desprendimento em me orientar contribuindo de forma incomensurável para a minha vida profissional e pessoal. Aproveito para agradecer os demais professores que atuaram no PROFMAT permitindo que esse trabalho pudesse ser realizado. Agradeço a minha banca formada pela professora Dr.^a. Flávia e pelo professor Dr. Jéfferson que me presentearam com lindos ensinamentos no momento da minha defesa, contribuindo de forma significativa para que nosso trabalho pudesse ser finalizado com toda a riqueza do conhecimento compartilhado.

Agradeço aos meus alunos e a escola que tornaram possível a aplicação das atividades propostas que foi essencial para a elaboração e conclusão desse trabalho. Agradeço, também, a todas escolas em que trabalho: Coeso, Anglo Rio Preto, London e All Win por contribuírem na minha construção profissional. E, agradeço, a todos os meus alunos que tiveram paciência e generosidade nessa etapa final. E também, agradeço aos colegas de trabalho que acompanharam as angústias e vibraram junto com o término do processo.

Agradeço a minha família, minha mãe Maria de Lourdes e meu pai Pedro Paulo que me incentivaram e apoiaram incondicionalmente durante todo o processo de elaboração desse trabalho. Em especial, agradeço à minha tia Maria que me incentiva desde criança a jamais desistir de aprender, ensinando-me que o conhecimento é nosso maior tesouro. Obrigada tia, por acreditar em mim, em momentos que nem eu mesma acreditei.

Agradeço às minhas queridas Ana e Maria José que durante todo o processo me ajudaram com palavras de incentivo e confiança no desenvolvimento do trabalho.

Agradeço aos amigos, que me apoiaram e compreenderam minha ausência nessa etapa importante da minha vida.

Agradeço à Elide pelo incentivo e grande ajuda com o fornecimento de material para a realização deste trabalho. As amigas Aline, Michelle e Renata que me ajudaram a organizar as ideias e a escrita, a Danusa que foi minha companheira de trabalho no período do curso possibilitando que eu tivesse remuneração e não perdesse as aulas do PROFMAT.

Obrigado a todos os colegas do PROFMAT

“A Matemática, quando a compreendemos bem, possui não somente a verdade, mas também a suprema beleza. ”
(Bertrand Russel)

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo apresentar as análises dos resultados referentes ao ensino da Função Exponencial com o uso da metodologia de Resolução de Problemas para os alunos do Ensino Médio. Baseando-se na teoria proposta por Onuchic (1999), foram elaboradas quatro atividades envolvendo problemas para introduzir os conceitos referentes a Função Exponencial no primeiro ano e verificar os conhecimentos já adquiridos pelos alunos do segundo e terceiro anos. Os problemas envolvem o crescimento populacional de uma bactéria e a meia-vida de um fármaco. Os alunos do primeiro ano apresentaram melhor desempenho com esta nova abordagem de ensino baseada em soluções de problemas, e no segundo e terceiro anos apresentaram dificuldades com relação ao tópico de funções.

Palavras-chave: Função Exponencial; Resolução de Problemas; Ensino Médio; Matemática.

ABSTRACT

This study evaluated the impact teaching of exponential functions through a problem-solving approach to students in secondary education. Based on the theory proposed by Onuchic (1999), we created four activities involving problems to introduce the concepts related to exponential functions to tenth-grade students and to verify the acquired knowledge of eleventh-grade and twelfth-grade students. The problems involve the population growth of bacteria and the half-life of a drug. All the students welcomed the new didactic proposal. The tenth-grade students were able to understand the new concepts based on problem-solving teaching and eleventh-grade and twelfth-grade students presented difficulties regarding the topic of functions.

Keywords: Exponential Functions; Problem-Solving; Secondary Education; Mathematics.

SUMÁRIO

RESUMO.....	9
CAPÍTULO 1: INTRODUÇÃO.....	13
CAPÍTULO 2: FUNÇÃO EXPONENCIAL	16
2.1 Introdução	16
2.2 O modelo linear.....	17
2.3 Potências	21
2.3.1 Potências de Expoente \mathbb{N} , \mathbb{Z} e \mathbb{Q}	21
2.3.2 Potências de Expoente Irrracional	24
2.4 A Função Exponencial	24
2.5 Gráfico da Função Exponencial.....	30
2.6 Caracterização da Função Exponencial	34
CAPÍTULO 3: FUNÇÃO EXPONENCIAL - ATIVIDADES E RESULTADOS	40
3.1 ANÁLISE DA ATIVIDADE 1 – Introdução ao Conteúdo – Parte 1	42
3.1.1 Análise do Item 1a.....	42
3.1.2 Análise do Item 1b.....	43
3.1.3 Análise do Item 1c.....	45
3.1.4 Análise do Item 1d.....	48
3.1.5 Análise do Item 1e.....	50
3.1.6 Análise do Item 1f.....	51
3.1.7 Análise do Item 1g.....	55
3.1.8 Análise do Item 1h.....	57
3.2 ANÁLISE DA ATIVIDADE 2 – Introdução ao Conteúdo – Parte 2	60
3.2.1 Análise do Item 1a.....	60
3.2.2 Análise do Item 1b.....	62
3.2.3 Análise do Item 1c.....	65
3.2.4 Análise do Item 1d.....	67
3.2.5 Análise do Item 1e.....	70
3.2.6 Análise do Item 2a.....	71
3.2.7 Análise do Item 2b.....	72
3.3 ANÁLISE DA ATIVIDADE 3 – Crescimento e Decrescimento da Função Exponencial	75
3.3.1 Análise da pergunta P1	76

3.3.2 Análise da pergunta P2	78
3.3.3 Análise da pergunta P3	81
3.3.4 Análise da pergunta P4	83
3.3.5 Análise da pergunta P5	84
3.3.6 Análise da pergunta P6	86
3.3.7 Análise da pergunta P7	88
3.4 ANÁLISE DA ATIVIDADE 4 – Exercícios de Função Exponencial	93
3.4.1 Análise do Item 1a.....	93
3.4.2 Análise do Item 1b.....	98
3.4.3 Análise do Item 2.....	101
3.4.4 Análise do Item 3.....	104
3.4.5 Análise do Item 4.....	106
3.4.6 Análise do Item 5.....	108
CONSIDERAÇÕES FINAIS	112
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	114
ANEXO I.....	116
ANEXO II.....	117
ANEXO III.....	119
ANEXO IV	122

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

O Ministério da Educação publicou, em 2006, orientações curriculares para o ensino médio, entre elas;

Ao final do ensino médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do cotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico. (BRASIL, 2006, p.69)

Porém a prática nas salas de aula vem mostrando que esses objetivos não estão sendo alcançados, pois os alunos apresentam dificuldades em conteúdos matemáticos. Isso pode ser uma consequência da forma como estavam sendo preparados para utilizarem a matemática por meio da mecanização dos processos, sem realmente compreender o que estava sendo ensinado. Baseando-se em orientações dessa natureza, pesquisamos alternativas para modificar esse quadro buscando metodologias que pudessem nos proporcionar resultados melhores no processo de ensino-aprendizagem.

A metodologia de Resolução de Problemas foi escolhida para a elaboração das atividades propostas nesse trabalho, referente à Função Exponencial. Em 1942, George Polya passou a ser reconhecido por utilizar o método de Resolução de Problemas e, no ano de 1945, publicou o livro *A arte de resolver problemas* e apresentou uma sequência de quatro fases que julgou ser importante para um melhor desenvolvimento durante a resolução de um problema.

Durante todo o tempo que se dedicou à sua teoria, ministrou aulas e cursos compartilhando suas descobertas. Em um dos cursos que ministrou em Stanford, em 1967, Polya sugere ideias para a elaboração de uma aula que auxiliem no desenvolvimento da aprendizagem através da Resolução de Problema.

Comece com algo que é familiar, ou útil, ou desafiador. Que possua alguma conexão com o mundo ao nosso redor, a partir da perspectiva de alguma aplicação, a partir de uma ideia intuitiva.

Não tenha medo de usar linguagem coloquial quando é mais sugestiva do que a terminologia convencional e precisa. Na verdade, não apresente termos técnicos antes que o estudante possa ver a necessidade para eles.

Não entre muito cedo ou muito em detalhes pesados de uma prova [demonstração]. Dê primeiro uma ideia geral ou apenas o germe intuitivo da prova.

De modo mais geral, perceber que a forma natural de aprender é aprender por etapas: Primeiro, nós queremos ver um esboço do assunto, para perceber alguma fonte de concreto ou algum possível uso. Então, gradualmente, tão cedo quanto nós pudermos ver mais uso e conexões e interesse, ganhamos maior vontade de trabalhar com os dados. (POLYA, 1967 apud Onuchic, 2014, p.23 e 24)

Esse trecho foi retirado do livro *Resolução de Problemas – Teoria e Prática* que tem como principal organizadora Lourdes de la Rosa Onuchic, responsável pela tradução do trecho acima junto aos demais autores. Este livro, juntamente às pesquisas e contribuições de Polya e Onuchic, foi instrumento utilizado como fonte para pesquisa da elaboração das atividades propostas neste trabalho.

Em Onuchic(1999), é descrito um esquema de aula cujo objetivo é o ensino por meio da compreensão e significado utilizando a metodologia de Resolução de Problemas. A aula é composta por sete etapas: 1) formação de grupos; 2) o papel do professor; 3) resultados na lousa; 4) plenária; 5) análise de resultados; 6) consenso e 7) formalização.

As aulas deste trabalho foram ministradas seguindo essas orientações: 1) os alunos foram colocados em grupos para que pudessem discutir e compartilhar os conhecimentos acerca do que era proposto no problema; 2) o professor, autor deste trabalho, orientou e organizou para que os alunos pudessem encontrar caminhos que os levassem a resolução da atividade proposta, lançando questões desafiadoras e, se necessário, problemas secundários que auxiliassem nessa construção; 3) após o término de cada atividade proposta, eram anotados na lousa os resultados obtidos pelos diferentes grupos; 4) os alunos apresentavam seus pontos de vista; 5) eram feitas as análises dos resultados levantando-se as dificuldades, erros e acertos cometidos; 6) após as dúvidas serem discutidas e solucionadas, era finalizado o processo; e 7) conclusão da atividade com a formalização do conteúdo através das definições, identificando as propriedades e as demonstrações.

Neste trabalho, foram propostas quatro atividades. As três primeiras atividades foram baseadas na metodologia de Resolução de Problemas (ONUCHIC, 1999) e a quarta atividade foi para verificação de aprendizagem por meio da resolução de exercícios de vestibulares.

Escolhemos trabalhar com a função exponencial por ser um conteúdo de ampla aplicação. Problemas que envolvem o crescimento populacional, seja de uma bactéria ou humano, o rendimento de um investimento ou dívida com bancos que cobram taxas a juros compostos, a meia-vida de um fármaco ou elemento radioativo são algumas das aplicações das funções exponenciais. Dessa forma, um conteúdo muito relevante já no ensino médio.

O trabalho ficou dividido da seguinte forma: Capítulo 1 – Introdução; Capítulo 2 – Função Exponencial; Capítulo 3 – Função Exponencial: Atividades e Resultados, Considerações Finais e Anexos (I, II, III e IV).

No Capítulo 2, apresentamos a fundamentação teórica da função exponencial. Ao analisar os resultados apresentados pelos alunos durante as atividades propostas, um erro recorrente foi o uso da função linear como tentativa para a resolução dos problemas. Desta forma, nesse capítulo, optamos por apresentar a definição e caracterização da função linear, assim como da função exponencial. Entendemos que essa diferenciação é importante para que os professores que atuam tanto em Ensino Médio ou Superior possam utilizar tais conceitos em determinados problemas de modelagem. Esclarecemos que nas atividades propostas aos alunos foram tratadas as questões teóricas relativas a definição da função exponencial, gráfico de crescimento e decréscimo.

No Capítulo 3, é apresentado a análise das quatro atividades propostas para o ensino referente à função exponencial (definição e propriedades). Utilizamos tabelas para a coleta de dados estatísticos dos resultados obtidos pelos alunos, com as resoluções corretas, parcialmente corretas ou incorretas, além de orientações sobre o que era esperado para cada atividade e as conclusões dessas análises.

Após as Considerações Finais, apresentamos os Anexos I, II, III e IV que se referem às atividades aplicadas em sala de aula com os alunos, com uma média de vinte e um por turma do primeiro, segundo e terceiro anos do Ensino Médio. As atividades foram elaboradas, utilizando como referência os livros didáticos (IEZZI, 2016; PAIVA, 2013).

CAPÍTULO 2

FUNÇÃO EXPONENCIAL

2.1 Introdução

Ao resolver problemas é comum se deparar com modelos matemáticos, como por exemplo, o modelo linear e o modelo exponencial. Desde o início de sua vida escolar o aluno se depara com problemas de modelo linear, como na resolução dos problemas de culinária (proporções em receitas) e compras em supermercado (vantagens ou não de promoções), entre muitos outros, que apresentam seu crescimento ou decréscimo de forma linear. Este modelo linear, que é caracterizado por $y = ax + b$, é muito utilizado, principalmente, nos oito primeiros anos escolares. O segundo modelo, exponencial, aparece discretamente a partir do sexto ano quando o aluno começa a aprender as potenciações e volta como sendo um conteúdo programado no primeiro ano do Ensino Médio como parte obrigatória do currículo até o final do terceiro ano. O modelo exponencial é caracterizado por $y = b \cdot e^{ax}$ e ajuda na resolução de problemas que estudam o crescimento de populações (bactérias), especulações do mercado imobiliário, meias-vidas de fármacos ou elementos radioativos, entre outras aplicações.

A grande dificuldade encontrada pelos alunos é saber diferenciar qual modelo adequado para resolver o problema proposto. Os alunos tendem a aplicar mais o primeiro modelo por aparecer com mais regularidade nas questões e por encontrarem as respostas através das quatro operações elementares, enquanto que para o segundo modelo são necessários ainda os conceitos de potenciação, radiciação, os logaritmos e a própria função exponencial.

Diante disso, apresentaremos nessa seção critérios para reconhecer se uma dada função é do tipo $f(x) = ax + b$ e na seção 2.6 se é do tipo $f(x) = b \cdot e^{ax}$. No entanto, essa fundamentação teórica não foi desenvolvida junto aos alunos sendo indicada para compreensão dos professores com interesse no desenvolvimento desse conteúdo, assim como foi para a autora. Desenvolvemos com os alunos o Teorema 2.4, parte da seção 2.4, principalmente a definição 2.3, Teorema 2.22 e seção 2.5 sem utilizar de todo o rigor apresentado nesse trabalho.

A fundamentação teórica desse capítulo foi baseada em Lima (2007 e 2013) e Guidorizzi (2001).

2.2 O modelo linear

O caso mais simples do modelo linear ocorre na situação clássica da proporcionalidade.

Definição 2.1: Dadas duas grandezas, x e y , diz-se que y é *proporcional* a x quando os valores de y dependem dos valores de x de tal maneira que ao dobrar, triplicar ou, mais geralmente, tomar n vezes a grandeza x , o valor correspondente de y fica dobrado, triplicado, ou mais geralmente, multiplicado por n . Nesse caso, a função $y = f(x)$ que modela o problema tem a propriedade $f(nx) = n \cdot f(x)$, $\forall x$ e $n \in \mathbb{N}$. Quando as grandezas x e y podem assumir valores negativos, a proporcionalidade entre x e y implica a igualdade $f(nx) = n \cdot f(x)$ para todo valor do x e todo número inteiro n .

Os teoremas a seguir estabelecem a teoria matemática que se aplica a esse tipo de problema e foram baseados em Lima (2007). Os símbolos \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{R}_+ , \mathbb{R}_+^* indicam respectivamente os conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais, reais, reais não-negativos e reais positivos.

Lema 2.2. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $f(nx) = n \cdot f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $n \in \mathbb{Z}$. Então $f(rx) = r \cdot f(x)$ para todo $r \in \mathbb{Q}$ e todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, pondo $a = f(1)$, tem-se $f(r) = ar$ para todo $r \in \mathbb{Q}$.

Demonstração:

Dado $r \in \mathbb{Q}$, tem-se $r = \frac{m}{n}$, com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}^*$. Então $nf(rx) = f(nrx) = f(mx) = mf(x)$.

Logo, $f(rx) = \left(\frac{m}{n}\right)f(x) = rf(x)$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Tomando $x = 1$, tem-se $f(r) = f(r \cdot 1) = rf(1) = ra$.

Definição 2.3: Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é *crescente* se $x < y$ então $f(x) < f(y)$. É *decrescente* se $x < y$ então $f(x) > f(y)$. Note que, sendo f crescente, vale também

a recíproca: se $f(x) < f(y)$ então $x < y$. Vale a observação análoga para f decrescente.

Teorema 2.4 (Teorema Fundamental da Proporcionalidade). As seguintes afirmações a respeito de uma função crescente $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são equivalentes:

- (1) $f(nx) = n \cdot f(x)$ para quaisquer $n \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$;
- (2) $f(x) = ax$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$, onde $a = f(1)$;
- (3) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

O número a chama-se *constante de proporcionalidade*.

Demonstração:

Nesta demonstração provaremos as implicações (1) \Rightarrow (2), (2) \Rightarrow (3) e (3) \Rightarrow (1).

Começaremos provando que (1) \Rightarrow (2).

Pelo Lema 2.2, pondo $a = f(1)$, a afirmação (1) implica $f(r) = ar$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. Em particular, $f(0) = a \cdot 0 = 0$. Note que, sendo f crescente, a desigualdade $0 < 1$ implica $0 = f(0) < f(1) = a$.

Suponhamos, por absurdo, que exista algum número real x tal que $f(x) < ax$, logo $\frac{f(x)}{a} < x$ pois $a > 0$. Tomemos um número racional r , com $\frac{f(x)}{a} < r < x$, donde $f(x) < ar = f(r)$. Sendo f crescente, $r < x$ implica $f(r) < f(x)$, uma contradição. Analogamente, não pode existir nenhum real x com $f(x) > ax$ e portanto, $f(x) = ax$ para todo x .

Agora, provaremos que (2) \Rightarrow (3).

Temos: $f(x + y) = a(x + y) = ax + ay = f(x) + f(y)$.

Finalmente, demonstraremos que (3) \Rightarrow (1).

Sendo $f(nx) = f(x + x + \dots + x) = f(x) + f(x) + \dots + f(x) = n \cdot f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Além disso, $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$. Assim, $f(0) = 0$.

Logo, para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$, tem-se que $0 = f(-nx + nx) = f(-nx) + f(nx) = f(-nx) + nf(x)$, ou seja, $f(-nx) = -nf(x)$. Segue-se que $f(nx) = nf(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$.

O Teorema 2.4 vale também para f decrescente, só que nesse caso $a = f(1)$ é negativo (LIMA, 2007).

Quando se lida com grandezas cujas medidas são números positivos, por exemplo, área e massa, tem-se a seguinte versão do Teorema 2.4.

Teorema 2.5. As seguintes afirmações a respeito de uma função $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ são equivalentes:

(1⁺) $f(nx) = n \cdot f(x)$ para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}_+$;

(2⁺) $f(x) = ax$ para qualquer $x \in \mathbb{R}_+$, onde $a = f(1)$;

(3⁺) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}_+$;

Demonstração:

Seja $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $F(0) = 0$, $F(x) = f(x)$ e $F(-x) = -f(x)$ para todo $x > 0$. Cada uma das afirmações (1⁺), (2⁺), (3⁺) para f equivale a uma das afirmações (1), (2) e (3) para F .

Deve-se observar que a função f do teorema acima sendo crescente, tem-se $a = f(1) > 0$. No caso de supor f decrescente vale um resultado análogo, com $a < 0$.

A importância deste teorema está no seguinte ponto: se queremos saber se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função linear basta verificar duas coisas.

Primeira: f deve ser crescente ou decrescente. (Estamos deixando de lado o caso trivial de f identicamente nula.)

Segunda: $f(nx) = n \cdot f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $n \in \mathbb{Z}$. No caso de $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ basta verificar esta última condição para $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.6. Dada uma circunferência de raio r , seja $f(x)$ o comprimento do arco que subtende um ângulo central de medida x (relativamente a uma certa unidade de ângulo). É claro que f é uma função crescente de x e que $f(nx) = nf(x)$, $n \in \mathbb{N}$. Logo, existe uma constante a tal que $f(x) = ax$.

A constante a depende da unidade de ângulo considerada. Se o ângulo é 360° então $f(360) = 2\pi r = 360a$ logo $a = \frac{\pi r}{180}$. Se a unidade de ângulo for o radiano então, $f(2\pi) = 2\pi r$ e $f(2\pi) = 2\pi a$. Assim, $a = r$. Logo, $f(1) = a = r$.

Exemplo 2.7. Ainda numa circunferência de raio r , podemos considerar $g(x)$ como a área de um setor circular que subtende um ângulo central de medida x . Vê-se

imediatamente que g é uma função crescente de x e que $g(nx) = ng(x)$, $n \in \mathbb{N}$. Logo, existe uma constante a tal que $g(x) = ax$. Como o arco de comprimento $2\pi r$ (toda a circunferência) corresponde ao setor de área πr^2 (todo o disco circular) tem-se $\pi r^2 = g(2\pi r) = 2\pi r a$. Segue-se daí que $a = \frac{r}{2}$, donde $g(x) = \frac{xr}{2}$.

A utilização do modelo mais geral, $y = ax + b$, segue do Teorema 2.8.

Teorema 2.8. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monótona e injetiva. Se o acréscimo $\varphi(h) = f(x+h) - f(x)$ depender apenas de h , mas não de x , então f é uma função afim.

Demonstração:

A demonstração deste teorema é uma aplicação do Teorema 2.4 (Teorema Fundamental da Proporcionalidade).

Suponhamos que a função f seja crescente. Então, $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ também é crescente, com $\varphi(0) = f(x+0) - f(x) = 0$. Além disso, para quaisquer, $h, k \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned} \varphi(h+k) &= f(x+h+k) - f(x) \\ &= f((x+k)+h) - f(x+k) + f(x+k) - f(x) \\ &= \varphi(h) + \varphi(k). \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade, pondo-se $a = \varphi(1)$, tem-se $\varphi(h) = ah$ para todo $h \in \mathbb{R}$. Isto quer dizer que $f(x+h) - f(x) = ah$. Chamando $f(0)$ de b , resulta $f(h) = ah + b$, ou seja, $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Observações:

1. Em particular, vemos que se f é crescente e o acréscimo $f(x+h) - f(x)$ depende apenas de h mas não de x , então o quociente $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ não depende de x e nem de h .
2. O Teorema 2.8 vale também quando f é decrescente. A única diferença é que agora se tem $f(x) = ax + b$, com $a < 0$.

3. Às vezes se sabe que uma função f é da forma $f(x) = ax + b$ mas não se conhecem os coeficientes a , b nem é possível (ou conveniente) determinar $f(0)$, $f(1)$ ou $f(2)$. Então basta conhecer $f(x_1)$ e $f(x_2)$ para dois valores distintos x_1, x_2 . Os coeficientes a e b são as soluções do sistema linear $ax_1 + b = f(x_1)$, $ax_2 + b = f(x_2)$ nos quais as quantidades conhecidas são $x_1, x_2, f(x_1)$ e $f(x_2)$.

Exemplo 2.9. Uma partícula se move sobre o eixo E (um eixo é uma reta orientada na qual se fixou uma origem 0 ; a posição de um ponto do eixo é determinada por um número real x , chamado a abscissa desse ponto). Em cada instante t , a abscissa do ponto é $x = f(t)$. Dizemos que se trata de um *movimento uniforme* quando o ponto percorre distâncias iguais em tempos iguais. Isto significa que $f(t+h) - f(t)$ depende somente de h mas não de t . A função f é crescente ou decrescente, conforme o sentido do movimento coincida ou não com a orientação do eixo. Segue-se do Teorema 2.8 que se tem $f(t) = at + b$ onde $a = f(t+1) - f(t)$ (espaço percorrido na unidade de tempo) é, por definição, a velocidade e $b = f(0)$ é a posição do ponto no momento em que começou a contagem do tempo.

2.3 Potências

2.3.1 Potências de Expoente \mathbb{N}, \mathbb{Z} e \mathbb{Q}

Definição 2.10: Seja a um número real positivo. Para todo $n \in \mathbb{N}$, a potência a^n , de base a e expoente n , é definida como o produto de n fatores iguais a a . Assim, define-se: $a^1 = a$ e $a^n = a^{n-1} \cdot a$ se $n \geq 2$.

Princípio da Indução Finita (P.I.F): Seja $P(n)$ uma proposição tal que $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq n_0$. Suponhamos que:

I) $P(n_0)$ é verdadeira;

II) E se $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n_0$ e $P(k)$ é verdadeira, então $P(k+1)$ é verdadeira.

Então, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Propriedades:

(1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$.

Demonstração:

Será utilizado o Princípio da Indução Finita. Seja $P_n: a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, para todo m fixo e $n \in \mathbb{N}$.

I) Para $n = 1$ temos $P_1: a^m \cdot a^1 = a^{m+1}$ é verdadeira.

De fato, por definição temos que $a^1 = a$ e tomando $n = m + 1 \geq 2$ temos que

$$a^n = a^{n-1} \cdot a \Rightarrow a^{m+1} = a^{(m+1)-1} \cdot a = a^m \cdot a^1.$$

II) Suponhamos que para $n = k$, temos $P_k: a^m \cdot a^k = a^{m+k}$ verdadeira.

Provemos que $P_{k+1}: a^m \cdot a^{k+1} = a^{m+k+1}$ é verdadeira.

De fato, de I) e pela hipótese de indução,

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^{k+1} &= a^m \cdot (a^{k+1}) = a^m \cdot (a^k \cdot a^1) = (a^m \cdot a^k) \cdot a^1 = (a^{m+k}) \cdot a^1 \\ &= a^{m+k} \cdot a^1 = a^{m+k+1}. \end{aligned}$$

Portanto, pelo PIF, provamos que $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$.

(2) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$.

Demonstração:

Pela propriedade (1) temos que $a^{m_1} \cdot a^{m_2} \cdot \dots \cdot a^{m_n} = a^{m_1+m_2+\dots+m_n}$ para quaisquer $m_1, m_2, \dots, m_n \in \mathbb{N}$.

Em particular, se $m_1 = m_2 = \dots = m_n = m$, temos a propriedade (2).

Logo, $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

(3) $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$, para todo $m \in \mathbb{N}$.

Demonstração:

Será utilizado o Princípio da Indução Finita. Seja $P_n: (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

I) Para $n = 1$, temos $P_1: (a \cdot b)^1 = a^1 \cdot b^1$ é verdadeira.

De fato, por definição, $a^1 = a$, $b^1 = b$ e $(a \cdot b)^1 = a \cdot b$. Assim,

$$(a \cdot b)^1 = a \cdot b = a^1 \cdot b^1.$$

II) Suponhamos que para $n = k$, $P_k: (a \cdot b)^k = a^k \cdot b^k$ seja verdadeira.

Provemos que $P_{k+1}: (a \cdot b)^{k+1} = a^{k+1} \cdot b^{k+1}$ é verdadeira.

De fato, pela propriedade (1) e pela hipótese de indução,

$$\begin{aligned} (a \cdot b)^{k+1} &= (a \cdot b)^k \cdot (a \cdot b)^1 = (a^k \cdot b^k) \cdot (a^1 \cdot b^1) \\ &= (a^k \cdot a^1) \cdot (b^k \cdot b^1) = a^{k+1} \cdot b^{k+1}. \end{aligned}$$

Portanto, pelo PIF, provamos que $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$, para todo $m \in \mathbb{N}$.

Definição 2.11: Seja a um número real positivo e diferente de 1. Para potência em \mathbb{Z} , define-se que:

I) $a^0 = 1$, se $n = 0$;

II) $a^n = a^{n-1} \cdot a$ se $n \in \mathbb{N}^*$;

III) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ se $n \in \mathbb{N}^*$ e $a \neq 0$.

Definição 2.12 (Raiz enésima Aritmética): Seja a um número real tal que $a \geq 0$ e n um número natural $n > 1$; chama-se raiz enésima aritmética de a , e denotamos por $\sqrt[n]{a}$, o número real e não negativo b , tal que b elevado a enésima potência resulte em a . Simbolicamente,

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a.$$

Considerando que a propriedade $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ continua válida para todo $r, s \in \mathbb{Q}$, $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, em que $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}^*$.

$$(a^r)^n = a^r \cdot a^r \cdot \dots \cdot a^r = a^{r+r+\dots+r} = a^{rn} = a^{(m/n) \cdot n} = a^m.$$

Pela Definição 2.12, $a^r = a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$.

Desta forma, é considerado como definição para $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$,

$$a^r = a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}.$$

2.3.2 Potências de Expoente Irracional

Seja $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, consideramos os conjuntos:

$$A_1 = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < \alpha\} \text{ e } A_2 = \{s \in \mathbb{Q} \mid s > \alpha\}$$

Notemos que todo número de A_1 é menor que qualquer número de A_2 .

Existem dois racionais $r \in A_1$ e $s \in A_2$ tais que $r < \alpha < s$ e a diferença $s - r$ é menor que qualquer número positivo e arbitrário.

Em correspondência aos conjuntos A_1 e A_2 , considerando os conjuntos:

$$B_1 = \{a^r \mid r \in A_1\} \text{ e } B_2 = \{a^s \mid s \in A_2\}$$

Se $a > 1$, todo número de B_1 é menor que qualquer número de B_2 .

Existem dois números $a^r \in B_1$ e $a^s \in B_2$ tais que a diferença $a^s - a^r$ é menor que qualquer número positivo e arbitrário.

Nessas condições, dizemos que a^r e a^s são aproximações por falta e excesso, respectivamente, de a^α e que B_1 e B_2 são classes que definem a^α .

Se $0 < a < 1$, tudo acontece de forma análoga.

As potências de números reais serão desenvolvidas ainda mais segundo a função exponencial na próxima seção. Será mostrada a continuidade dessa função justificando também as aproximações consideradas para os números irracionais.

2.4 A Função Exponencial

Definição 2.13: Seja a um número real positivo e diferente de 1. A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $f(x) = a^x$, é chamada de função exponencial na base a .

Propriedades:

(1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$; para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

(2) $a^1 = a$.

Proposição 2.14: Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = a^x$, então $f(x) \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.**Demonstração:**

Pela propriedade I) da Definição 2.13, $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$. Então, $f(x)$ não pode assumir o valor 0, a menos que seja identicamente nula. Com efeito, se existir algum $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$ então, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = f(x_0 + (x - x_0)) = f(x_0) \cdot f(x - x_0) = 0 \cdot f(x - x_0) = 0,$$

Logo, f será identicamente nula, o que não é possível.

Proposição 2.15: Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = a^x$, então $f(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.**Demonstração:**

Para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2$$

Como $f\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0$ pela Proposição 2.14, $f(x) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0$.

Assim, diante das proposições 2.14 e 2.15, tanto faz dizer que o contradomínio de f é \mathbb{R} como dizer que é \mathbb{R}_+^* .

Lema 2.16. Seja $a \in \mathbb{R}, a > 1$ e $n \in \mathbb{Z}$ então $a^n > 1$, se e somente se, $n > 0$.**Demonstração:**

I) Seja $a \in \mathbb{R}, a > 1$ e $n \in \mathbb{Z}$, se $a^n > 1$ então $n > 0$.

Suponhamos que $n \leq 0$, assim teremos que $-n \geq 0$.

Logo, pela definição $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, ou seja, $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$. E para $n = 0$, $a^0 = 1$.

Portanto, $a^n \leq 1$ para $n \leq 0$, o que contraria a hipótese.

Portanto, $n > 0$ para $a^n > 1$.

II) Seja $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ e $n \in \mathbb{Z}$, se $n > 0$ então $a^n > 1$.

Provaremos pelo Princípio Fundamental da Indução. Desta forma, temos que

P_n : se $n > 0$ então $a^n > 1$. Assim,

1°) P_1 : se $n = 1$ então $a^1 = a > 1$ é verdadeira.

2°) Suponhamos que P_k : se $n = k$ então $a^k > 1$ é verdadeira. Provemos agora, que para $n = k + 1$ então P_{k+1} é verdadeira.

Sabemos que $a > 1$ e $a^k > 1$, portanto como a^k é um número positivo, temos que:

$$a > 1 \Rightarrow a \cdot a^k > 1 \cdot a^k \Rightarrow a^{k+1} > a^k \Rightarrow a^{k+1} > a^k > 1 \Rightarrow a^{k+1} > 1.$$

Logo, pelo PIF, se $n > 0$ então $a^n > 1$.

Desta forma, por I) e II) temos que para $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ e $n \in \mathbb{Z}$ então $a^n > 1$, se e somente se, $n > 0$.

Lema 2.17. Seja $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ e $r \in \mathbb{Q}$ então $a^r > 1$, se e somente se, $r > 0$.

Demonstração:

Considerando $r > 0$ e $r = \frac{m}{n}$ com $m \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}^*$, $a^r = a^{m/n}$.

Como, de $a = (a^{1/n})^n > 1$ e $n > 0$, então $a^{1/n} > 1$. Ainda, se $a^{1/n} > 1$ e $m > 0$, então $(a^{1/n})^m > 1$. Desta forma, pelo Lema 2.16, $(a^{1/n})^m = a^{m/n} = a^r > 1$.

Provemos agora que se $a^r > 1$ então $r > 0$.

Façamos $r = \frac{m}{n}$ com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z}^*$, então:

$$a^r = a^{m/n} = (a^{1/n})^m.$$

Supondo $n > 0$ e considerando que pela primeira parte do lema $a^{1/n} > 1$, temos.

$$a^{1/n} > 1 \text{ e } (a^{1/n})^m > 1$$

Pelo, Lema 2.16, $m > 0$. De $m > 0$ e $n > 0$, $r = \frac{m}{n} > 0$.

Supondo $n < 0$ então $-n > 0$, pelo Lema 2.16, temos:

$$a^{-1/n} > 1 \text{ e } (a^{1/n})^m = (a^{-1/n})^{-m} > 1 \Rightarrow -m > 0 \Rightarrow m < 0.$$

Logo, $r = \frac{m}{n} > 0$.

Lema 2.18. Seja $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ e $r, s \in \mathbb{Q}$ então $a^s > a^r$, se e somente se, $s > r$.

Demonstração:

Pela hipótese temos que $a^s > a^r$, assim

$$a^s > a^r \Rightarrow a^s \cdot a^{-r} > a^r \cdot a^{-r} \Rightarrow a^{s-r} > 1$$

Pelo Lema 2.17, temos que:

$$s - r > 0 \Leftrightarrow s > r.$$

Provemos agora que se $s > r$ então $a^s > a^r$.

$$s > r \Rightarrow s - r > 0.$$

Pelo Lema 2.17, temos que

$$a^{s-r} > 1 \Rightarrow a^s \cdot a^{-r} > 1 \Rightarrow a^s \cdot \frac{1}{a^r} > 1 \Rightarrow \frac{a^s}{a^r} > 1 \Rightarrow a^s > a^r.$$

Lema 2.19. Seja $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ e $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $a^x > 1$, se e somente se, $x > 0$.

Demonstração:

Para x irracional sejam os dois conjuntos:

$$A_1 = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < x\} \text{ e } A_2 = \{s \in \mathbb{Q} \mid s > x\}.$$

E em correspondência os conjuntos de potências de expoentes racionais que definem a^x ,

$$B_1 = \{a^r \mid r \in A_1\} \text{ e } B_2 = \{a^s \mid s \in A_2\}.$$

Provemos que se $x > 0$ então $a^x > 1$.

Seja $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, existem $r \in A_1$ e $s \in A_2$ tal que $0 < r < x < s$.

Como $a > 1$, $r > 0$ temos $s > 0$. Pelo Lema 2.17, $a^r > 1$ e $a^s > 1$.

Pelo Lema 2.18, como $a > 1$ e $r < s$, $1 < a^r < a^s$. Pela definição de potência de expoente irracional temos $1 < a^r < a^x < a^s$.

Logo, $a^x > 1$.

Provemos que se $a^x > 1$ então $x > 0$.

Suponhamos que $x < 0$, assim, $-x > 0$. Logo, $a > 1$ e $-x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ e $-x > 0$.

Pela primeira parte da demonstração temos que $a^{-x} > 1$. Assim,

$$a^{-x} > 1 \Rightarrow a^{-x} \cdot a^x > 1 \cdot a^x \Rightarrow a^0 > a^x \Rightarrow 1 > a^x$$

Logo, $a^x < 1$, o que contraria a hipótese.

Para $x = 0$, $a^0 = 1$. Também contraria a hipótese.

Portanto, $x > 0$.

Teorema 2.20: Sendo $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, $a^b > 1$ se, e somente se, $b > 0$.

Demonstração:

l) Se $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{Q}$, pelo Lema 2.17, $a^b > 1$ se, e somente se, $b > 0$.

II) Se $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, pelo Lema 2.19, $a^b > 1$ se, e somente se, $b > 0$.

Teorema 2.21: Sendo $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$ e $b \in \mathbb{R}$, $a^b > 1$, se e somente se, $b < 0$.

Demonstração:

Se $0 < a < 1$, então

$$a < 1 \Rightarrow \frac{a}{a} < \frac{1}{a} \Rightarrow 1 < \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{a} > 1$$

Seja $c = \frac{1}{a} > 1$, pelo Teorema 2.20,

$$c^{-b} > 1 \Leftrightarrow -b > 0.$$

Assim, tomando $c = \frac{1}{a}$,

$$c^{-b} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-b} = (a^{-1})^{-b} = a^b > 1 \Leftrightarrow b < 0.$$

Teorema 2.22: Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $f(x) = a^x$, $a \in \mathbb{R}$, então para $x, y \in \mathbb{R}$ são válidas as propriedades:

- 1) Para $a > 1$, se $x > y$ então $a^x > a^y$, ou seja, f é crescente.
- 2) Para $0 < a < 1$, se $x < y$ então $a^x > a^y$, ou seja, f é decrescente.

Demonstração:

- 1) Por hipótese, temos que $x > y$ e, conseqüentemente, $x - y > 0$.

Assim, pelo Teorema 2.20, $a^{x-y} > 1$. Logo,

$$a^{x-y} > 1 \Rightarrow a^x \cdot a^{-y} > 1 \Rightarrow a^x \cdot \left(\frac{1}{a^y}\right) > 1 \Rightarrow \frac{a^x}{a^y} > 1 \Rightarrow a^x > a^y.$$

Portanto, se $x > y$ então $a^x > a^y$.

- 2) Por hipótese, temos que $x < y$ e, conseqüentemente, $x - y < 0$.

Assim, pelo Teorema 2.21, $a^{x-y} > 1$. Logo,

$$a^{x-y} > 1 \Rightarrow a^x \cdot a^{-y} > 1 \Rightarrow a^x \cdot \left(\frac{1}{a^y}\right) > 1 \Rightarrow \frac{a^x}{a^y} > 1 \Rightarrow a^x > a^y.$$

Portanto, se $x < y$ então $a^x > a^y$.

Colorário 2.23: Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função exponencial $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, então f é injetora.

Demonstração:

Dados $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, tais que $x_1 \neq x_2$, consideremos $x_1 < x_2$.

Sabemos, pelo Teorema 2.22, parte 1), que se $a > 1$ e $x_1 < x_2$ então $f(x_1) < f(x_2)$.

E pela parte 2), temos que se $0 < a < 1$ e $x_1 < x_2$ então $f(x_1) > f(x_2)$.

Logo, para $a > 1$ e $0 < a < 1$, $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Portanto, f é injetora.

De modo análogo, prova-se que a função f é injetora para $x_1 > x_2$.

2.5 Gráfico da Função Exponencial

Proposição 2.24: A função exponencial é contínua.

Demonstração:

Provaremos que $\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$ para dado $x_0 \in \mathbb{R}$.

Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, e seja $x = x_0 + h$ temos $h = x - x_0$ e a^{x_0} uma constante positiva.

Tomando $|a^h - 1| < \varepsilon/a^{x_0}$ para um h suficientemente pequeno, temos

$$|a^x - a^{x_0}| = |a^{x_0+h} - a^{x_0}| = |a^{x_0}(a^h - 1)| = a^{x_0}|a^h - 1| < \varepsilon.$$

Portanto, $\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$, o que caracteriza a continuidade da função exponencial.

Proposição 2.25: Seja a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, com $f(x) = a^x$ para $a > 1$. Se x cresce indefinidamente então f é ilimitada superiormente.

Demonstração:

Para provar que a função f é ilimitada superiormente quando x cresce indefinidamente basta provar que $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$.

Seja $a = 1 + h$, $h > 0$. Para $n \in \mathbb{N}^*$, utilizando a expansão do binômio de Newton,

$$(1 + h)^n = 1 + \binom{n}{1}h + \binom{n}{2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n}h^n.$$

Daí,

$$(1 + h)^n \geq 1 + \binom{n}{1}h \text{ para } n \geq 1.$$

Ou seja,

$$a^n \geq 1 + nh \text{ para } n \geq 1.$$

Como $h > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + nh) = +\infty$. Logo, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty$.

Portanto, o gráfico de $f(x) = a^x$ é ilimitado superiormente.

Proposição 2.26: Seja a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, com $f(x) = a^x$ para $a > 1$. Se x decresce indefinidamente então os valores de $f(x)$ se aproximam de zero.

Demonstração:

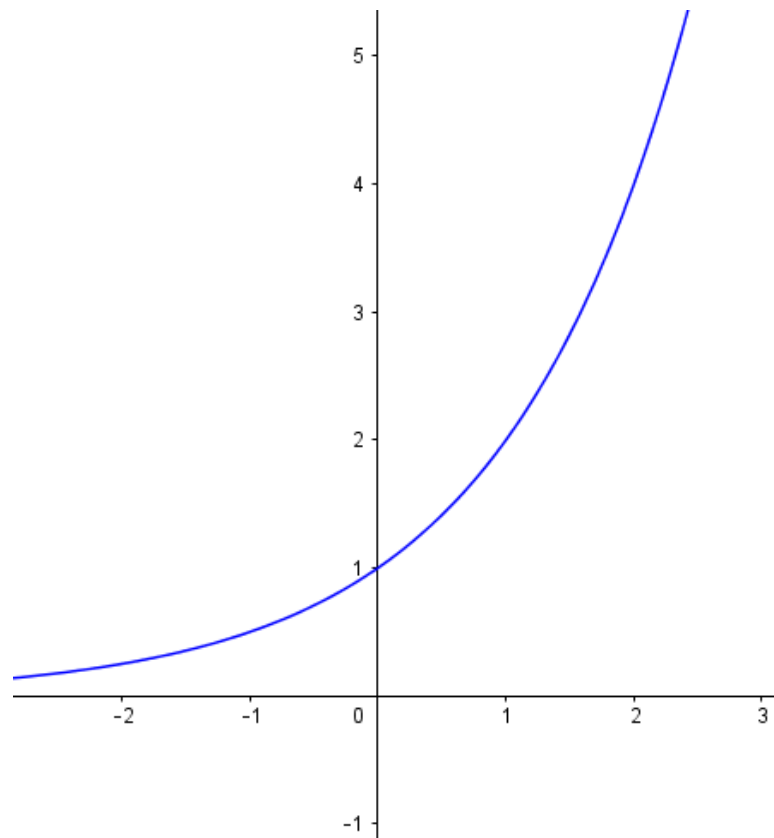
Para provar que a função $f(x)$ tem seus valores se aproximando de zero quando x decresce indefinidamente basta provar que $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$. Assim,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \lim_{u \rightarrow +\infty} a^{-u} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{a^u} \right) = 0.$$

Portanto, como $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$, então o gráfico de $f(x) = a^x$ se aproxima de zero.

Desta forma, para toda função exponencial $f(x) = a^x$ para $a > 1$, com os resultados do Teorema 2.22, proposições 2.24, 2.25 e 2.26 o gráfico da função crescente de f é como representado na Figura 2.1.

Figura 2.1 – Gráfico de $f(x) = a^x$ para $a > 1$.



Fonte: Elaborado pela autora.

Proposição 2.27: Seja a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, com $f(x) = a^x$ para $0 < a < 1$. Se x cresce indefinidamente então os valores de $f(x)$ se aproximam de zero.

Demonstração:

Para provar que a função $f(x)$ tem seus valores se aproximando de zero quando x cresce indefinidamente basta provar que $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$. Assim,

Se $0 < a < 1$ então $\frac{1}{a} > 1$. Da proposição 2.25, temos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^x = +\infty.$$

Logo,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{a^{-x}}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}\right] = 0.$$

Portanto, como $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$ então o gráfico de $f(x) = a^x$ se aproxima de zero quando o x cresce indefinidamente.

Proposição 2.28: Seja a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, com $f(x) = a^x$ para $0 < a < 1$. Se x decresce indefinidamente então f é ilimitada superiormente.

Demonstração:

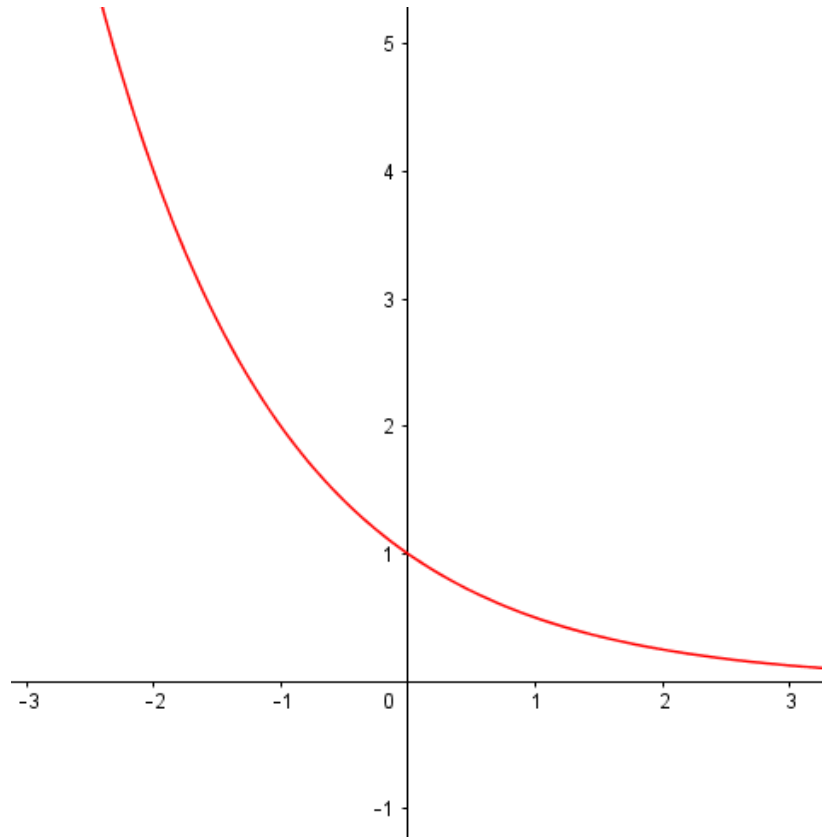
Para provar que a função f é ilimitada superiormente quando x decresce indefinidamente basta provar que $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$. Assim,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{a^{-x}}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}\right] = +\infty.$$

Portanto, como $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$, então o gráfico de $f(x) = a^x$ é ilimitada superiormente.

Desta forma, para toda função exponencial $f(x) = a^x$ para $0 < a < 1$, com os resultados do Teorema 2.22, proposições 2.27 e 2.28 o gráfico da função crescente de f é como representado na Figura 2.2.

Figura 2.2 – Gráfico de $f(x) = a^x$ para $0 < a < 1$.



Fonte: Elaborado pela autora.

2.6 Caracterização da Função Exponencial

Consideremos uma cultura de bactérias, em condições favoráveis, cuja população, num instante t , chamamos de $f(t)$. O problema é determinar o tipo da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ela é crescente. Mas não é razoável admitir que $f(t+h) - f(t)$ dependa apenas de h pois se $t < t'$, a população $f(t')$ sendo maior que $f(t)$ é natural supor que, no mesmo período de tempo h , o acréscimo populacional $f(t'+h) - f(t')$ seja maior que $f(t+h) - f(t)$.

Situação análoga ocorre com o capital aplicado a juros fixos, capitalizados continuamente. Se $g(t)$ é a quantia existente no instante t , para $t < t'$ o rendimento $g(t'+h) - g(t')$ no intervalo de tempo h é maior do que o rendimento $g(t+h) - g(t)$, no mesmo intervalo porém em época anterior, pois o capital acumulado $g(t')$ é maior que $g(t)$.

Assim, nas duas situações acima não se aplica o modelo linear.

Vamos agora verificar as propriedades que caracterizam as funções exponenciais.

Lema 2.29. Fixado o número real positivo $a \neq 1$, em todo intervalo de \mathbb{R}^+ existe uma potência a^r , com $r \in \mathbb{Q}$.

Demonstração:

Dados $0 < \alpha < \beta$, devemos achar $r \in \mathbb{Q}$ tal que a potência a^r pertença ao intervalo $[\alpha, \beta]$, isto é, $\alpha \leq a^r \leq \beta$. Por simplicidade, suporemos a e α maiores que 1. Os demais casos podem ser tratados de modo análogo. Como as potências de expoente natural de números maiores do que 1 crescem acima de qualquer cota prefixada, podemos obter números naturais M e n tais que

$$\alpha < \beta < a^M \text{ e } 1 < a < \left(1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M}\right)^n$$

Da última relação decorrem sucessivamente

$$1 < a^{1/n} < 1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M} \quad \text{e} \quad 0 < a^M \left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) < \beta - \alpha.$$

Logo,

$$\frac{m}{n} \leq M \Rightarrow 0 < a^{\frac{m}{n}} \left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) < \beta - \alpha \Leftrightarrow 0 < a^{\frac{m+1}{n}} - a^{\frac{m}{n}} < \beta - \alpha.$$

Assim, as potências

$$a^0 = 1, a^{1/n}, a^{2/n}, \dots, a^M$$

são extremos de intervalos consecutivos, todos de comprimento menor do que o comprimento $\beta - \alpha$ do intervalo $[\alpha, \beta]$. Como $[\alpha, \beta] \subset [1, a^M]$, pelo menos um desses extremos, digamos $a^{\frac{m}{n}}$ está contido no intervalo $[\alpha, \beta]$.

Uma aplicação desse Lema é a obtenção de a^x para x irracional conforme propriedade a seguir.

Propriedade:

Seja $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ e x um número irracional. Então a^x é o único número real que tem a seguinte propriedade:

$$r < x < s, \text{ com } r, s \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^r < a^x < a^s,$$

ou seja, a^x é obtido por aproximações.

Demonstração:

Não podem existir dois números reais diferentes, digamos $A < B$, para assumir o valor a^x , com a propriedade acima. Se existissem tais A e B teríamos

$$r < x < s, \text{ com } r, s \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^r < A < B < a^s.$$

e então o intervalo $[A, B]$ não conteria nenhuma potência de a com expoente racional, contrariando o Lema 2.29.

Portanto, quando x é irracional, a^x é o (único) número real cujas aproximações por falta são as potências a^r , com r racional menor que x e cujas aproximações por excesso são as potências a^s , com s racional maior que x .

Se $0 < a < 1$, tudo acontece de forma análoga.

Teorema 2.30 (Caracterização da Função Exponencial). Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma função monótona e injetiva (isto é, crescente ou decrescente). As seguintes afirmações são equivalentes:

- (1) $f(nx) = f(x)^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$;
- (2) $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $a = f(1)$;
- (3) $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

Provaremos as implicações $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$.

A fim de mostrar que $(1) \Rightarrow (2)$ observamos inicialmente que a hipótese (1) acarreta que, para todo número racional $r = m/n$, com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, tem-se $f(rx) = f(x)^{m/n} = f(x)^r$. Com efeito, de $nr = m$, podemos escrever

$$f(rx)^n = f(nrx) = f(mx) = f(x)^m.$$

$$\text{Logo } f(rx) = f(x)^{m/n} = f(x)^r.$$

Assim, se pusermos $f(1) = a$, teremos $f(r) = f(r \cdot 1) = f(1)^r = a^r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. Para completar a demonstração $(1) \Rightarrow (2)$ suponhamos, a fim de fixar ideias, que f seja crescente, logo $1 = f(0) < f(1) = a$. Admitamos, por absurdo, que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \neq a^x$. Digamos, por exemplo, que seja $f(x) < a^x$ (o caso $f(x) > a^x$ seria tratado analogamente). Então, pelo Lema 2.29, existe um número racional r tal que $f(x) < a^r < a^x$, ou seja, $f(x) < f(r) < a^x$. Como f é crescente, tendo $f(x) < f(r)$ concluímos que $x < r$. Por outro lado, temos também $a^r < a^x$, logo $r < x$. Esta contradição completa a prova de que $(1) \Rightarrow (2)$. As implicações restantes, $(2) \Rightarrow (3)$ e $(3) \Rightarrow (1)$ são óbvias.

Observação: O Teorema da Caracterização pode ser enunciado de um modo ligeiramente diferente, substituindo a hipótese de monotonicidade pela suposição de que f seja contínua. A demonstração do passo $(1) \Rightarrow (2)$ muda apenas no caso em que x é irracional. Então, tem-se $x = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n$, $r_n \in \mathbb{Q}$, logo pela continuidade de f ,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} = a^x.$$

Dizemos que uma função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é do *tipo exponencial* quando se tem $g(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde a e b são constantes positivas. Se $a > 1$, g é crescente e se $0 < a < 1$, g é decrescente.

Se a função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é do tipo exponencial então, para quaisquer $x, h \in \mathbb{R}$, os quocientes

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{g(x)} = a^h - 1 \quad e \quad \frac{g(x+h)}{g(x)} = a^h$$

dependem apenas de h , mas não de x . Mostraremos agora que vale a recíproca.

Teorema 2.31 (Primeira Caracterização das Funções de tipo Exponencial). Seja $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que, para $x, h \in \mathbb{R}$ quaisquer, o acréscimo relativo $\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x)}$ dependa apenas de h , mas não de x . Então, se $b = g(0)$ e $a = \frac{g(1)}{g(0)}$, tem-se $g(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

Como vimos acima, a hipótese feita equivale a supor que $\varphi(h) = \frac{g(x+h)}{g(x)}$ independe de x . Substituindo, se necessário, $g(x)$ por $f(x) = \frac{g(x)}{b}$, onde $b = g(0)$, obtemos $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ monótona injetiva, com $\frac{f(x+h)}{f(x)}$ independente de x e, agora, com $f(0) = 1$. Então, pondo $x = 0$ na relação $\varphi(h) = \frac{f(x+h)}{f(x)}$, obtemos $\varphi(h) = f(h)$ para todo $h \in \mathbb{R}$. Vemos assim que a função monótona injetiva f cumpre $f(x+h) = f(x) \cdot f(h)$, ou seja, $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Segue-se então do teorema anterior que $f(x) = a^x$. Logo $g(x) = bf(x) = ba^x$.

Outra caracterização das funções de tipo exponencial, que veremos no teorema 2.32, pode mostrar-se bastante útil. Para isto, é necessário, em cada utilização concreta, saber interpretar a condição 2) do enunciado. Essa condição que parece elaborada à primeira vista, tem um significado bastante intuitivo, como mostraremos.

Teorema 2.32 (Segunda Caracterização das Funções de tipo Exponencial). Para cada b e cada t reais, suponhamos dado um número $f(b, t) > 0$ com as seguintes propriedades:

- 1) $f(b, t)$ depende linearmente de b e é monótona injetiva em relação a t ;
- 2) $f(b, s+t) = f(f(b, s), t)$.

Então, pondo $a = f(1, 1)$, tem-se $f(b, t) = b \cdot a^t$.

Demonstração:

A função $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, dada por $\varphi(t) = f(1, t)$, é monótona injetiva e cumpre,

$$\varphi(s+t) = f(1, s+t) = f(f(1, s), t) = f(1, s) \cdot f(1, t) = \varphi(s) \cdot \varphi(t)$$

em virtude de 1) , 2) e $f(1, s) = f(1, s) \cdot 1$.

Pelo Teorema de Caracterização das funções exponenciais, tem-se $\varphi(t) = a^t$, onde $a = \varphi(1) = f(1,1)$. Portanto,

$$f(b, t) = f(b \cdot 1, t) = b \cdot f(1, t) = b \cdot \varphi(t) = b \cdot a^t.$$

A condição 2) do Teorema acima tem seu significado esclarecido quando se nota que $b = b \cdot a^0 = f(b, 0)$, ou seja, que b é o *valor inicial* da grandeza $f(b, t)$ no instante $t = 0$ (pensando em t como o tempo decorrido desde que a grandeza passou do valor $b = f(b, 0)$ para o valor $f(b, t)$). Então 2) diz que, começar com o valor b e deixar passar o tempo $s + t$ é o mesmo que começar com o valor $f(b, s)$ e deixar transcorrer o tempo t .

Observação: Em situações concretas, como nas atividades propostas nos anexos, a segunda caracterização das funções de tipo exponencial é bem mais natural e fácil de ser empregada.

CAPÍTULO 3

FUNÇÃO EXPONENCIAL: ATIVIDADES E RESULTADOS

Neste capítulo serão apresentados os resultados das aplicações das quatro atividades propostas para o ensino da função exponencial aos alunos de uma escola particular do interior de São José do Rio Preto – SP que aconteceram no primeiro semestre de 2018.

As atividades foram aplicadas para os alunos do Ensino Médio. Participaram dessas estatísticas os alunos que estão cursando o primeiro, o segundo e o terceiro ano do Ensino Médio e serão denominados no texto, respectivamente, por 1EM (23 alunos), 2EM (23 alunos) e 3EM (19 alunos).

Os alunos do 1EM tiveram duas aulas semanais durante o ano de 2018, com a professora autora do trabalho, às quintas-feiras no período da tarde. Enquanto que o 2EM e o 3EM tiveram duas aulas semanais, às quartas-feiras no período da manhã. Na quarta-feira os alunos possuem até a sétima aula, por este motivo no mesmo dia de aplicação das atividades no 3EM há uma diminuição da quantidade de alunos pois antecipavam a saída na sexta aula.

A proposta de aula teve como objetivo o ensino de função exponencial utilizando a metodologia de resolução de problemas para os alunos do primeiro ano do ensino médio, pois neste ano é proposto no currículo o tópico de função exponencial. Porém, optou-se por fazer a aplicação em todos os anos para analisar qual seria o impacto de uma aula através de Resolução de Problemas até mesmo para os que já estudaram em algum momento o tópico a ser investigado.

Em todas as atividades propostas, as respostas dos alunos foram classificadas em Plenamente Satisfatória, Satisfatória ou Não Satisfatória. Se a resposta for classificada como “Plenamente Satisfatória” significa que o aluno resolveu a questão apresentando uma solução adequada para o problema proposto. Se a resposta for classificada como “Satisfatória” significa que o aluno resolveu a questão apresentando uma solução próximo da esperada, porém de alguma forma não conseguiu encontrar uma resposta completa para o problema proposto. E ao ser classificada como “Não Satisfatória” significa que o aluno não conseguiu resolver a questão proposta.

As atividades analisadas neste capítulo foram elaboradas a partir de livros didáticos (IEZZI, 2016; PAIVA, 2013), e foram divididas em quatro partes: 1) os alunos

trabalharam com um problema, sobre crescimento populacional de uma bactéria, envolvendo uma função exponencial crescente; 2) na segunda etapa foi utilizado um problema, meia-vida de um fármaco no organismo, envolvendo uma função exponencial decrescente, e um problema sobre valorização de um imóvel; 3) análise do crescimento e decréscimo de uma função exponencial através de estudo dos gráficos e 4) aplicação do conteúdo aprendido em exercícios de aplicação de técnica e de vestibulares.

Para as atividades 1 e 2 que pediam a construção de gráfico no plano cartesiano foi disponibilizado para o aluno uma malha quadriculada para melhor organização e coleta de dados.

As atividades 1 e 2 (Anexos I e II) foram aplicadas em um mesmo dia enquanto que as atividades 3 e 4 (Anexos III e IV) foram aplicadas vinte dias após as duas primeiras atividades. Não foi possível aplicar as atividades em semanas consecutivas porque o conteúdo desenvolvido nesse trabalho era parte do programa do outro professor que dividia as turmas com a professora autora. Desta forma, para não perder os prazos e atrasar o currículo da professora foi necessária uma pausa entre uma atividade e outra. Para cada atividade proposta os alunos tiveram cinquenta minutos de aula para produzir suas respostas, totalizando 200 minutos para as quatro atividades. Neste tempo, tivemos as discussões e formalização do conteúdo após o término das atividades 1, 2 e 3.

Em cada atividade, no primeiro momento o aluno tentou formular, sozinho, suas conclusões acerca dos problemas propostos, e num segundo momento eles são colocados em grupos e verificam se o pensamento inicial coincide com os dos demais e se conseguiram compreender o que fora pedido, conforme sugerido por Onuchic (1999). Durante toda a atividade o professor fica investigando junto aos alunos inquirindo-os a construir suas respostas a partir de seus próprios subsídios de conhecimentos matemáticos. Para finalizar cada etapa o professor formaliza o conteúdo matemático após os resultados obtidos pelos alunos, inclusive os erros, para que se possa esclarecer o novo conteúdo e eliminar possíveis. Utilizando a teoria apresentada no capítulo 2, a professora autora comparou os Teoremas 2.4 e Teorema 2.30 para mostrar a diferença entre as funções linear e função exponencial.

Importante ressaltar que a atividade não tem como objetivo que o grupo todo consiga responder a todas as questões corretamente, mas sim fazer com que os alunos se tornem mais ativos no processo de ensino-aprendizagem procurando fazer

conexões com os conteúdos já aprendidos em anos anteriores e, após as etapas propostas, conseguir elaborar os novos conceitos mesmo que essas conexões aconteçam através dos erros cometidos, que também é uma forma de aprendizado.

Durante a análise das respostas obtidas foram levantados dados sobre as dificuldades para solucionar-las. E também as diferentes formas utilizadas pelos alunos para encontrarem a solução da atividade proposta.

3.1 ANÁLISE DA ATIVIDADE 1 – Introdução ao Conteúdo – Parte 1

A atividade 1 contextualiza por meio de um texto base (Anexo I), uma função exponencial crescente, estudando o crescimento da população de bactérias pelo processo de bipartição e é composta por oito itens (1a até 1h).

3.1.1 Análise do Item 1a

Item 1a: Quantas bactérias teremos na 1ª geração?

Neste item era esperado que o aluno compreendesse que uma bactéria se duplicaria formando a primeira geração.

Tabela 3.1 – Respostas obtidas no item 1a

Ano	Plenamente Satisfatória	Satisfatória	Não Satisfatória	Total
1EM	22	0	1	23
2EM	22	0	1	23
3EM	18	0	1	19

Fonte: Elaborado pela autora

Nas três salas 95% dos alunos obtiveram resposta Plenamente Satisfatória (Tabela 3.1). Dois tipos de registros foram apresentados (Figuras 3.1 a 3.3), nos quais mostram que com a própria leitura o aluno resolveu o problema ou utilizou um diagrama. O aluno que obteve resposta Não Satisfatória apresentou a soma da primeira e segunda geração e outro equívoco foi de escrita, o aluno escreveu como resposta “1/2” não esclarecendo sua resolução tornando-a insatisfatória pois não ficou

claro a ideia se era “meia” bacteriana primeira geração ou referência a primeira geração formando duas bactérias.

Figura 3.1 – Resposta Plenamente Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade 1a

a) Quantas bactérias teremos na 1ª geração?

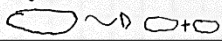
R: teremos 2 bactérias, pois um bactéria se dividirá em duas

$$1 + 1 = 2$$

Fonte: Elaborada pela autora

Figura 3.2 – Resposta Plenamente Satisfatória de um aluno do 2EM na atividade 1a

a) Quantas bactérias teremos na 1ª geração?

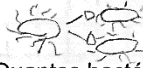
bactérias \rightarrow  1ª geração = 2 bactérias

Fonte: Elaborada pela autora

Figura 3.3 – Resposta Plenamente Satisfatória de um aluno do 3EM na atividade 1a.

a) Quantas bactérias teremos na 1ª geração?

Dois bactérias, pois uma se dividiu em duas, dando origem a 1ª geração.



Fonte: Elaborada pela autora

3.1.2 Análise do Item 1b

Item 1b: Quantas bactérias teremos na 3ª geração?

Neste item era esperado que o aluno compreendesse que as quatro bactérias da segunda geração se bipartiriam formando oito novas bactérias na terceira geração.

No 1EM, 61% dos alunos acertaram a questão (Tabela 3.2) justificando a resolução através de potência ou o diagrama (Figura 3.4 e 3.5), 22% dos alunos apresentaram resultado Satisfatório (Tabela 3.2) pois compreenderam como calcular o número de bactérias de cada geração, porém, ao interpretarem o problema entenderam que era necessário somar as bactérias de todas as gerações obtidas (Figura 3.6) e 17% dos alunos apresentaram solução Não Satisfatória (Tabela 3.2).

No 2EM, 78% dos alunos acertaram a questão justificando em sua maioria através da potenciação, 9% apresentaram respostas Satisfatórias e 13% não

obtiveram nenhum resultado correto sendo a interpretação o motivo do erro. Na Figura 3.7, um aluno do 2EM errou por interpretar que na terceira geração seriam três bactérias se bipartindo formando seis novas bactérias.

No 3EM, 84% dos alunos acertaram a questão, 5% apresentaram respostas parcialmente corretas e 11% não desenvolveram corretamente a questão. Dentre os alunos que registraram uma resposta Não Satisfatória identificamos erro na interpretação pois, leram a pergunta como se fosse o número de bactérias da segunda geração (Figura 3.8). Possivelmente, cometeram o erro citado por irem na lógica do exercício, se a primeira pergunta era sobre a primeira geração a segunda pergunta seria sobre a segunda geração.

Tabela 3.2 – Respostas obtidas no item 1b

Ano	Plenamente Satisfatória	Satisfatória	Não Satisfatória	Total
1EM	14	5	4	23
2EM	18	2	3	23
3EM	16	1	2	19

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.4 – Resposta Plenamente Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade 1b

b) Quantas bactérias teremos na 3ª geração?

$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
 ou
 $2^3 = 8$

8 bactérias

Fonte: Elaborada pela autora

Figura 3.5 – Resposta Plenamente Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade 1b

Fonte da foto: <https://www.bancodasaude.com/noticias/bacteria-pode-ajudar-a-detetar-tumores-no-figado/>

a) Quantas bactérias teremos na 1ª geração?
 2.

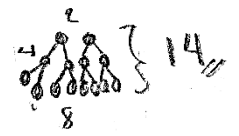
b) Quantas bactérias teremos na 3ª geração?

8

Fonte: Elaborada pela autora

Figura 3.6 – Resposta Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade 1b

b) Quantas bactérias teremos na 3ª geração?

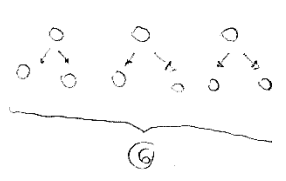


1 geração = 2 bac }
 2 gerações = 4 bac } 14 bac
 3 gerações = 8 bac

Fonte: Elaborada pela autora

Figura 3.7 – Resposta Não Satisfatória de um aluno do 2EM na atividade 1b

b) Quantas bactérias teremos na 3ª geração?



EM GRUPO:
 3ª geração = $2 \cdot 4 = 8$
 $2^3 = 8$

2	→	2^1
4	→	2^2
8	→	2^3
16	→	2^4
32	→	2^5
64	→	2^6
128	→	2^7
256	→	2^8

Fonte: Elaborada pela autora

Figura 3.8 – Resposta Não Satisfatória de um aluno do 3EM na atividade 1b

b) Quantas bactérias teremos na 3ª geração? 4

Li que era 2ª geração

Fonte: Elaborada pela autora

3.1.3 Análise do Item 1c

Item 1c: Quantas bactérias teremos na 10ª geração?

Neste item era esperado que o aluno começasse a elaborar o processo de generalização através das potenciações como um meio mais prático para se chegar ao resultado.

No 1EM, 65% dos alunos obtiveram respostas Plenamente Satisfatórias (Tabela 3.3) e o meio mais utilizado foi a potenciação seguido da multiplicação pelo fato de que o crescimento acontece dobrando a cada geração (Figura 3.9), 4%

registraram uma resposta parcialmente correta (Tabela 3.3) pois na conclusão da situação-problema o aluno somou o número de bactérias de todas as gerações e não somente calculou na décima geração como pedido (Figura 3.10) e 31% não conseguiram concluir o exercício (Tabela 3.3) sendo que a maioria não apresentou justificativa e o que justificou utilizou regra de três como outros alunos dos demais anos (Figura 3.11).

Tabela 3.3 – Respostas obtidas no item 1c

Ano	Plenamente Satisfatória	Satisfatória	Não Satisfatória	Total
1EM	15	1	7	23
2EM	15	2	6	23
3EM	16	1	2	19

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.9 – Resposta Plenamente Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade 1c

c) Quantas bactérias teremos na 10ª geração?

$2^{10} = 1024$

1024 bactérias

$2 \cdot 2 = 4$
 $4 \cdot 2 = 8$
 $8 \cdot 2 = 16$
 $16 \cdot 2 = 32$
 $32 \cdot 2 = 64$
 $64 \cdot 2 = 128$
 $128 \cdot 2 = 256$
 $256 \cdot 2 = 512$
 $512 \cdot 2 = 1024$

1

Fonte: Elaborada pela autora

Figura 3.10 – Resposta Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade 1c

c) Quantas bactérias teremos na 10ª geração?

$2^{10} \leftarrow$ certo
 errado
 mesmo erro

$2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 1024 = 2046$

$\frac{1022}{1024} + \frac{1024}{1024} = \frac{2046}{1024}$

$\frac{128}{254} + \frac{62}{126} + \frac{14}{30} + \frac{512}{1024} + \frac{256}{512} + \frac{128}{256} + \frac{64}{128} + \frac{32}{64} + \frac{16}{32} + \frac{8}{16} + \frac{4}{8} + \frac{2}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} = \frac{2046}{1024}$

Fonte: Elaborada pela autora

Se observarmos a Figura 3.6, do exercício 1b, e a Figura 3.10, do exercício 1c, são respostas de alunos diferentes que apresentaram o mesmo equívoco ao concluir o exercício. Compreenderam corretamente o crescimento da população da bactéria, porém, erraram ao finalizar.

No 2EM, 65% dos alunos obtiveram resposta Plenamente Satisfatória e uma justificativa que chama a atenção é o uso de Progressão Geométrica (P.G.) pois os alunos aprenderam as progressões no primeiro semestre, mesmo período em que foi aplicado as atividades deste trabalho (Figura 3.11), 9% dos alunos apresentaram solução Satisfatória e 26% dos alunos não acertaram o item. Na Figura 3.11, o aluno utilizou erroneamente a regra de três para justificar a resposta e na Figura 3.13 errou a fórmula da PG.

No 3EM, 85% dos alunos acertaram a questão utilizando a ideia de potenciação, 5% obteve solução Satisfatória e 10% não acertou a questão apresentando o mesmo erro do item 1b (Figura 3.8) fizeram leitura como se o exercício agora pedisse a terceira geração e não a décima como proposto.

Figura 3.11 – Resposta Não Satisfatória de um aluno do 2EM na atividade 1c

c) Quantas bactérias teremos na 10ª geração?

$\Delta g = 2B$
 $\Delta 0g = XB$
 $\Delta x = 2.50$
 $\Delta x = 20$
 $x = 20$

$3g = 15$
 $+ 3$
 3

 9

$3g = 15$
 $9g = X$
 $3x = 15 \cdot 9$
 $3x = 135$
 $x = 45$

1

Fonte: Elaborada pela autora

Figura 3.12 – Resposta Plenamente Satisfatória de um aluno do 2EM na atividade 1c

c) Quantas bactérias teremos na 10ª geração?

$2 \cdot x +$

$av = a \cdot r^{n-1}$
 $av = 2^{10} \cdot 2$
 $av = 1024$ bacterias

Fonte: Elaborada pela autora

Figura 3.13 – Resposta Não Satisfatória de um aluno do 2EM na atividade 1c

c) Quantas bactérias teremos na 10ª geração?

$$a_1 + q^{n-1}$$

$$2 + 2^9$$

$$2 + 512 =$$

514 bactérias

$$\frac{1024}{2} = 512$$

X pensamento do grupo: 2^x
 $\therefore 2^{10} = 1024$

Fonte: Elaborada pela autora

3.1.4 Análise do Item 1d

Item 1d: Quantas bactérias teremos na 72ª geração?

Neste item era esperado que o aluno compreendesse que seria muito trabalhoso calcular o número total de bactérias da septuagésima segunda geração através das sucessivas multiplicações. A resposta esperada não era apresentar o número total de bactérias nesta geração, mas uma expressão que pudesse representar essa população na geração pedida.

No 1EM, 58% dos alunos apresentaram resposta Plenamente Satisfatória (Tabela 3.4), como pode ser observado nas Figuras 3.14 e 3.15, 21% apresentaram registro Satisfatório (Tabela 3.4) como na Figura 3.16, cujo aluno compreendeu as potenciações, porém apresentou os cálculos errado, e 21% não conseguiram acertar o item (Tabela 3.4). Dentre os erros apresentados, destacamos o uso da regra de três (Figura 3.17) mesmo erro do item anterior.

Tabela 3.4 – Respostas obtidas no item 1d

Ano	Plenamente Satisfatória	Satisfatória	Não Satisfatória	Total
1EM	13	5	5	23
2EM	12	4	7	23
3EM	14	2	3	19

Fonte: Elaborado pela autora

No 2EM, 53% dos alunos obtiveram resposta Plenamente Satisfatória, 17% dos alunos resposta Satisfatória e 30% respostas Não Satisfatória. Dentre os erros apresentados repete-se o do item anterior, uso incorreto da fórmula da P.G.

No 3EM, 74% dos alunos obtiveram resposta Plenamente Satisfatória, 11% dos alunos resposta Satisfatória e 15% respostas Não Satisfatória.

Figura 3.14 – Resposta Plenamente Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade 1d

d) Quantas bactérias teremos na 72ª geração? → índice 2^{72}

$$1024 \quad 1024 \quad 1024 \quad 1024 \quad 1024 \quad 1024 \quad 1024 \quad .2$$

Fonte: Elaborada pela autora

Figura 3.15 – Resposta Plenamente Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade 1d

d) Quantas bactérias teremos na 72ª geração? 2^{72}

A 72ª geração será: 2^{72} a 72ª geração

nº de bactérias que não crescem a cada divisão

Fonte: Elaborada pela autora

Figura 3.16 – Resposta Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade 1d

d) Quantas bactérias teremos na 72ª geração?

$2048 \cdot 126976 \cdot 126976 \cdot 126976 = n^2$ de 1024

$$\begin{array}{r} 1024 \\ \times 2 \\ \hline 2048 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1024 \\ \times 1024 \\ \hline 4096 \\ 20480 \\ \hline 1048576 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1024 \\ \times 1024 \\ \hline 126976 \end{array}$$

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2$

Fonte: Elaborada pela autora

Figura 3.17 – Resposta Não Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade 1d

d) Quantas bactérias teremos na 72ª geração?

10×768

$72 \times X$

$10x = 55296$

$x = \frac{55296}{10} = 5529,6$ bactérias

Fonte: Elaborada pela autora

3.1.5 Análise do Item 1e

Item 1e: Determine uma lei que relaciona o número de indivíduos gerados por uma bactéria (y), na geração (x).

Neste item era esperado que o aluno pudesse encontrar uma regularidade no cálculo do crescimento populacional por meio das construções dos itens anteriores e conseguir generalizar o número de bactérias y em relação a geração x escrevendo a lei $y = 2^x$.

No 1EM, 57% dos alunos obtiveram uma resposta Plenamente Satisfatória (Tabela 3.5) como na Figura 3.18, 4% apresentaram resposta Satisfatória (Tabela 3.5) o aluno compreendeu a ideia de crescimento exponencial, porém, errou a expressão do expoente (Figura 3.19) e 39% não conseguiram (Tabela 3.5) encontrar a lei corretamente por associarem o crescimento populacional a uma função linear (Figura 3.20).

O 2EM e 3EM apresentaram, respectivamente 22% e 68% das respostas Plenamente Satisfatória, um dado preocupante para o 2EM uma vez que já conheciam o conteúdo, esperava-se que ao menos 50% acertasse esta questão. Em relação as respostas Satisfatória, o 2EM obteve 26% e o 3EM 16%. Novamente nesta questão o 2EM faz referência a P.G., porém não a registra de forma completamente adequada (Figura 3.21). Em relação as questões classificadas como Não Satisfatória, os alunos do 2EM apresentaram 52% de erros e 16% os do 3EM. O erro mais comum identificado foi a associação do crescimento das bactérias ao crescimento linear como exemplificado na Figura 3.20.

Tabela 3.5 – Respostas obtidas no item 1e

Ano	Plenamente Satisfatória	Satisfatória	Não Satisfatória	Total
1EM	13	1	9	23
2EM	5	6	12	23
3EM	13	3	3	19

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.18 – Resposta Plenamente Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade 1e

e) Determine uma lei que relaciona o número de indivíduos gerados por uma bactéria (y), na geração (x).

no de bactérias $y = 2^x$ → geração

Fonte: Elaborada pela autora

Figura 3.19 – Resposta Satisfatória de um aluno 1 EM na atividade 1e

e) Determine uma lei que relaciona o número de indivíduos gerados por uma bactéria (y), na geração (x).

$y = 2^{x+1}$ Erro Corrigido $y = 2^x$

Fonte: Elaborada pela autora

Figura 3.20 – Resposta Não Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade 1e

e) Determine uma lei que relaciona o número de indivíduos gerados por uma bactéria (y), na geração (x).

$2y = x$

Fonte: Elaborada pela autora

Figura 3.21 – Resposta Satisfatória de um aluno do 2EM na atividade 1e

e) Determine uma lei que relaciona o número de indivíduos gerados por uma bactéria (y), na geração (x).

$y = 2 + 2^{x-1}$ 2^x

Fonte: Elaborada pela autora

3.1.6 Análise do Item 1f

Item 1f: Esboce, na folha quadriculada o gráfico dessa situação.

Neste item era esperado que o aluno construísse o gráfico do crescimento populacional da bactéria no plano cartesiano, representando no eixo das ordenadas o

número de bactérias e no eixo das abscissas a geração. Foi anexado à atividade uma folha com uma malha quadriculada para auxiliar nesta construção. Porém, neste item foi possível observar que a maioria dos alunos, de todos os anos, possuem dificuldades em relacionar as coordenadas de um ponto no plano cartesiano e construir o gráfico. Neste item, mostraremos os gráficos referentes aos alunos do 1EM e analisaremos os erros encontrados nos demais anos.

Nas três turmas, nenhum aluno conseguiu reproduzir corretamente o gráfico pedido. Desta forma, 0% dos alunos (Tabela 3.6), apresentaram resposta Plenamente Satisfatória.

Tabela 3.6 – Respostas obtidas no item 1f

Ano	Plenamente Satisfatória	Satisfatória	Não Satisfatória	Total
1EM	0	7	16	23
2EM	0	4	19	23
3EM	0	9	10	19

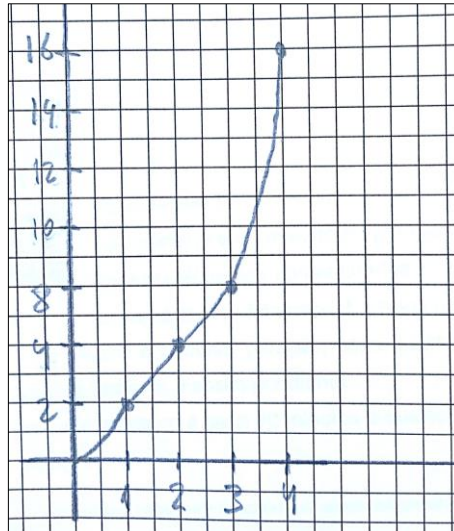
Fonte: Elaborado pela autora

Em relação ao 1EM, 2EM e 3EM tivemos, respectivamente, 30%, 17% e 47% de respostas Satisfatórias (Tabela 3.6) pois registraram alguma construção inadequada. Mais uma vez, o 2EM e o 3EM mostram um resultado aquém do esperado por já terem visto esse conteúdo anteriormente, enquanto que o 1EM apresenta respostas dentro da porcentagem esperada. Nesta classificação tivemos alunos que compreenderam que a função tinha o formato de uma curva (Figura 3.22 e 3.24), porém não marcaram pontos corretamente e/ou traziam o gráfico passando pela origem (Figura 3.22), ainda não indicavam o início da população na geração zero (Figura 3.24). Alunos que marcaram corretamente os pontos, porém não mostraram que a função continuava até 72ª geração e uniram os pontos por meio de segmento de reta (Figura 3.23).

No 1EM, em relação aos 70% dos alunos que não construíram corretamente, temos que 44% não fizeram o gráfico e os 56% que tentaram, os erros mais recorrentes foram: não associar corretamente os pontos, fazer união dos pontos por meio de linhas retas e iniciar o gráfico na origem (Figura 3.25). Outro erro foi a troca dos eixos na construção (Figura 3.26). No 2EM e 3EM, respectivamente, encontramos um total de 83% e 53% respostas Não Satisfatórias (Tabela 3.6).

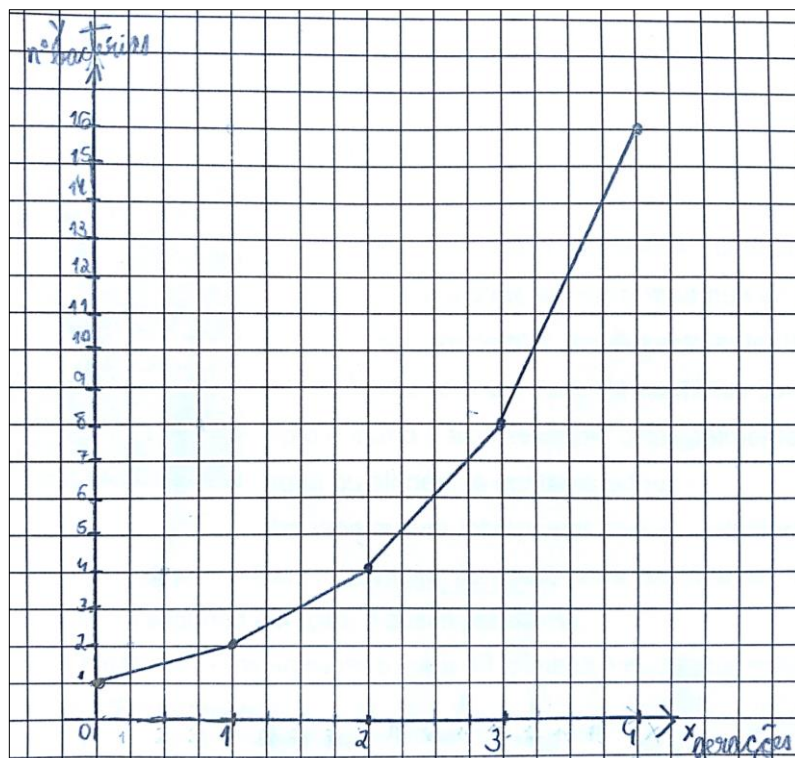
Após a investigação das resoluções propostas concluiu-se que este grupo de alunos possui, na sua maioria, dificuldades em fazer gráficos. Um dado preocupante, uma vez que a ideia de plano cartesiano e gráfico é iniciada no sétimo ano do Ensino Fundamental e segue até o terceiro ano do Ensino Médio.

Figura 3.22 – Resposta Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade 1f



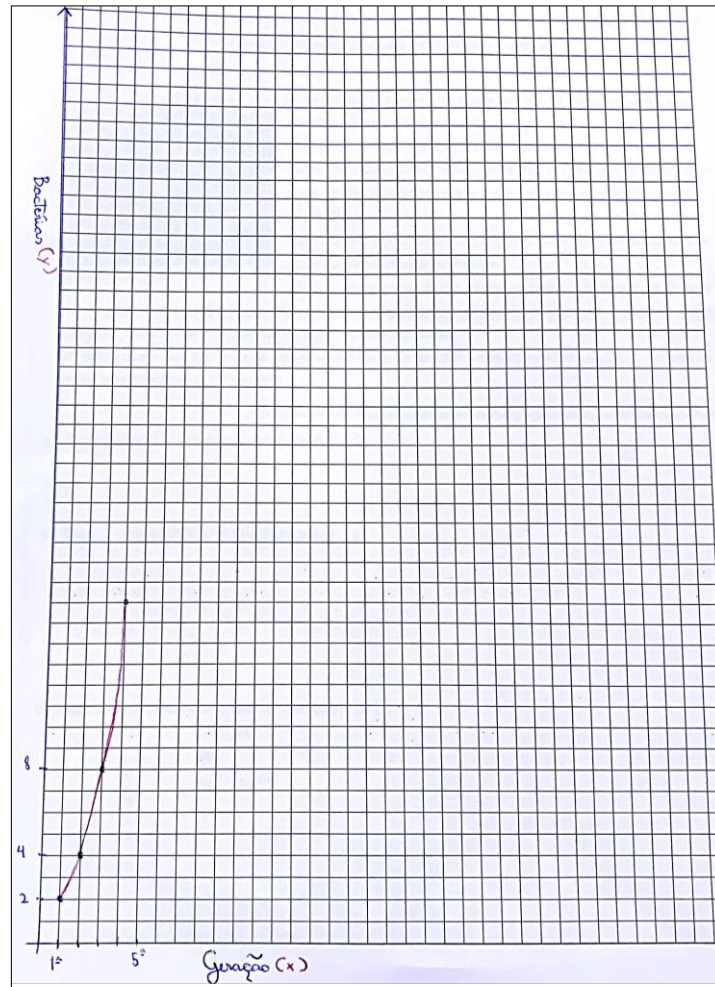
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.23 – Resposta Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade 1f



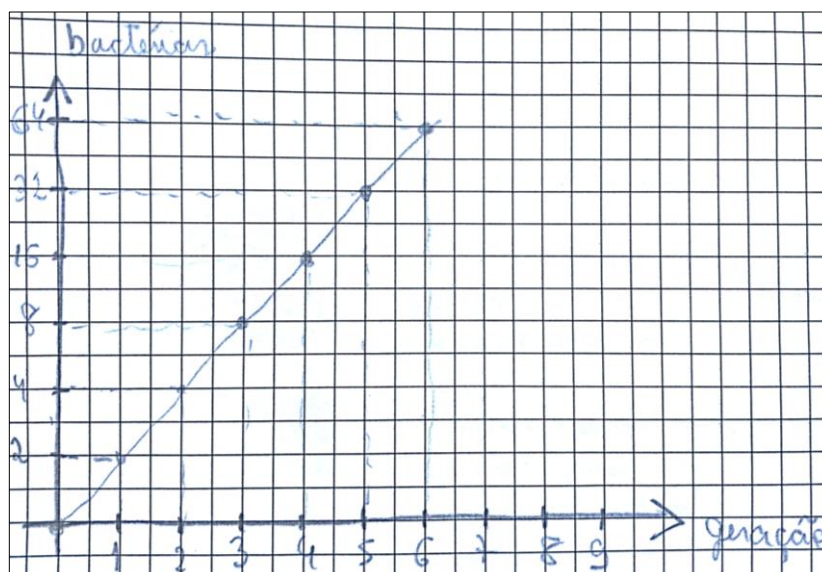
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.24 – Resposta Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade 1f



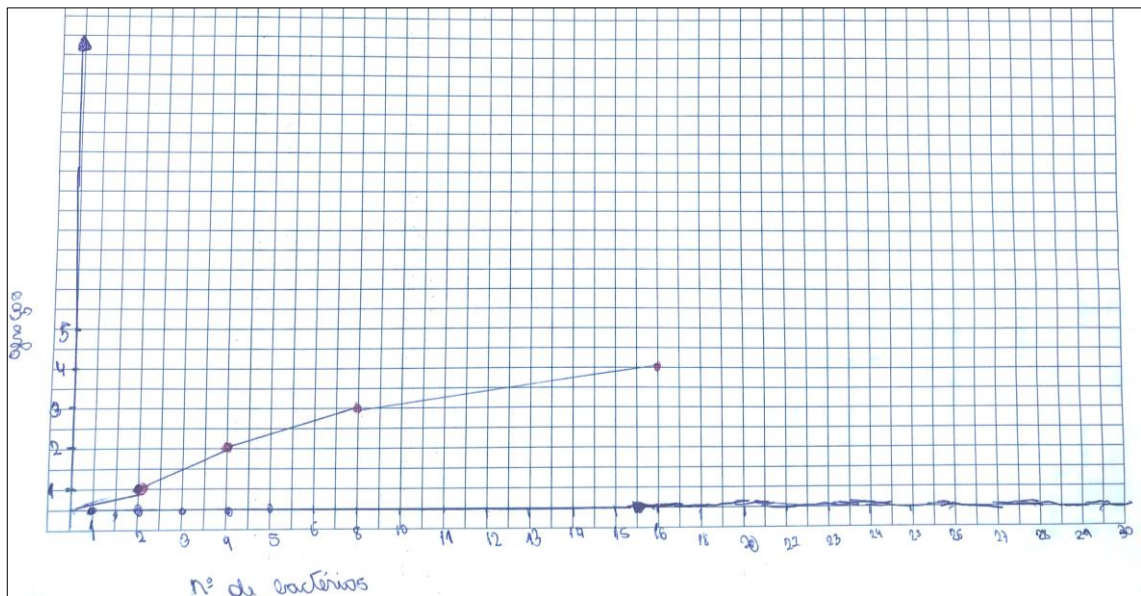
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.25 – Resposta Não Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade 1f



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.26 – Resposta Não Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade 1f



Fonte: Elaborado pela autora

3.1.7 Análise do Item 1g

Item 1g: Sabendo que em determinado momento há 4096 bactérias em que geração de bactérias estaremos?

Este item foi selecionado para analisar se o aluno conseguiria fazer a operação inversa proposta nos itens 1a, 1b, 1c e 1d. Desta vez, foi fornecido o número de bactérias e a pergunta era em que geração isso aconteceria.

Novamente daremos enfoque aos resultados apresentados pelo 1EM. Neste item, este grupo atingiu 65% de acertos (Tabela 3.7). De forma intuitiva utilizaram, mesmo ainda não tendo estudado a teoria, a ideia de equação exponencial (Figura 3.28 e 3.29). Alguns utilizaram o fato de terem o número de bactérias na décima geração e foram multiplicando por dois até chegarem na quantidade pretendida (Figura 3.27). Em relação aos 4% de respostas classificadas como Satisfatória (Tabela 3.7), o aluno apresentou o resultado correto com justificativa errada. Não foi possível compreender se o aluno colocou o resultado correto após discussão em grupo. Entre os 31% dos alunos que registraram respostas Não Satisfatória (Tabela 3.7), o erro mais comum foi associação com a regra de três simples (Figura 3.30). Encontramos um mesmo aluno cometendo o mesmo erro de regra de três em todos

os problemas anteriores até este último, porém, outros alunos também apresentaram essa resolução incorreta.

No 2EM, encontramos 74% de resposta Plenamente Satisfatória, 4% de Satisfatória e 22% de Não Satisfatória. Novamente, este grupo associou a resolução à teoria de P.G. e, como citado em itens anteriores, utilizaram da forma errada.

No 3EM, 95% dos alunos apresentaram respostas Plenamente Satisfatória e 5% Não Satisfatória. Possivelmente, a quase totalidade de acertos se deve ao fato de já terem visto anteriormente a teoria de função exponencial e equações exponenciais.

Um fato que chamou a atenção é que nenhum dos alunos utilizou da construção do gráfico para encontrar essas repostas, todos que procuraram justificar utilizaram a forma algébrica para este registro.

Tabela 3.7 – Repostas obtidas no item 1g

Ano	Plenamente Satisfatória	Satisfatória	Não Satisfatória	Total
1EM	15	1	7	23
2EM	17	1	5	23
3EM	18	0	1	19

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.27 – Resposta Plenamente Satisfatória de um aluno 1EM na atividade 1g

g) Sabendo que em determinado momento há 4096 bactérias em que geração de bactérias estaremos?

R: 12ª geração

Fonte: Elaborada pela autora

Figura 3.28 – Resposta Plenamente Satisfatória de um aluno 1EM na atividade 1g

g) Sabendo que em determinado momento há 4096 bactérias em que geração de bactérias estaremos?

geração 12.

Fonte: Elaborada pela autora

Figura 3.29 – Resposta Plenamente Satisfatória de um aluno 1EM na atividade 1g

g) Sabendo que em determinado momento há 4096 bactérias em que geração de bactérias estaremos?

$4096 = 2^x$
12ª geração

h) Após quanto tempo teremos chegado na 10ª geração de bactérias?

x 20 200 minutos

4096 2
2048 2
1024 2
512 2
256 2
128 2
64 2
32 2
16 2
8 2
4 2
2 2
1 2

12

256
+ 296

512

128
+ 128

256

Fonte: Elaborada pela autora

Figura 3.30 – Resposta Não Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade 1g

g) Sabendo que em determinado momento há 4096 bactérias em que geração de bactérias estaremos?

geração bactérias

1ª 2
x 4096

$2x = 4096$
 $x = \frac{4096}{2} = 2048$

R = na geração 2048ª

4096 2
00 2048
09
16
0

Fonte: Elaborada pela autora

3.1.8 Análise do Item 1h

Item 1h: Após quanto tempo teremos chegado na 10ª geração de bactérias?

Neste item era esperado que o aluno pudesse diferenciar um crescimento linear de um crescimento exponencial.

No 1EM, encontramos 65% de respostas Plenamente Satisfatória (Tabela 3.8) entre as quais destacamos o uso de diagrama na construção (Figura 3.31) e a regra de três simples (Figura 3.32). Um fato preocupante foi a dificuldade que muitos alunos encontraram ao converter as medidas de tempo (Figura 3.32). Como a análise do item era sobre o tempo e não conversão de medida de tempo, esta justificativa incorreta não foi considerado um erro para a resolução da questão. Para o aluno que

apresentou resposta Satisfatória (Figura 3.33) que representa 5% do grupo, observou-se um erro na contagem pois, esqueceu os primeiros vinte minutos da formação da geração zero para a geração um, iniciando sua contagem a partir desta última. E dos 30% dos alunos que apresentaram registro de resposta Não Satisfatória (Tabela 3.8), tivemos 71% dos alunos em questão que não fizeram o exercício. E um erro que aconteceu foi o uso inadequado da regra de três (Figura 3.34).

Tabela 3.8 – Respostas obtidas no item 1h

Ano	Plenamente Satisfatória	Satisfatória	Não Satisfatória	Total
1EM	15	1	7	23
2EM	17	2	4	23
3EM	18	0	1	19

Fonte: Elaborado pela autora

No 2EM, encontramos 74% de respostas Plenamente Satisfatória prevalecendo a justificativa por meio de diagrama, multiplicação ou por meio de regra de três como mostra ideias similares nas Figuras 3.31 e 3.32. Tivemos 9% de respostas Satisfatória e 17% de respostas Não Satisfatória.

No 3EM, encontramos 95% de respostas Plenamente Satisfatória e 5% de respostas Não Satisfatória.

Figura 3.31 – Resposta Plenamente Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade 1h

h) Após quanto tempo teremos chegado na 10ª geração de bactérias?

$$2^0 \frac{20}{20} 2^1 \frac{20}{20} 2^2 \frac{20}{20} 2^3 \frac{20}{20} 2^4 \frac{20}{20} 2^5 \frac{20}{20} 2^6 \frac{20}{20} 2^7 \frac{20}{20} 2^8 \frac{20}{20} 2^9 \frac{20}{20} 2^{10}$$

$$\begin{array}{r} 20 \\ \times 10 \\ \hline 200 \end{array}$$

200 min ou 3h20min

Fonte: Elaborada pela autora

Figura 3.32 – Resposta Plenamente Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade 1h

h) Após quanto tempo teremos chegado na 10ª geração de bactérias? 200 min

ou

tempo	gerações
20 min	1
x	10

$1x = 200$

$x = 200 \text{ min} \rightarrow$

$200 \text{ min} \rightarrow 3 \text{ horas e } 3 \text{ min}$
 $\div 60$

Fonte: Elaborada pela autora

Figura 3.33 – Resposta Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade 1h

h) Após quanto tempo teremos chegado na 10ª geração de bactérias? 3 horas

1 - 20 min - 2 - 20 - 3 - 20 - 4 - 20 - 5 - 20 - 6 - 20 -

7 - 20 - 8 - 20 - 9 - 20 - 10

$\begin{array}{r} 20 \\ \times 9 \\ \hline 180 \end{array}$	$\begin{array}{r} 180 \\ \times 6 \\ \hline 1080 \end{array}$
---	---

Fonte: Elaborada pela autora

Figura 3.34 – Resposta Não Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade 1h

h) Após quanto tempo teremos chegado na 10ª geração de bactérias?

8	2
4	2
2	2
1	2

20 min	72
x	10

$x = \frac{200}{72} \text{ min}$

ideia do grupo $20 \cdot 10 = 200 \text{ min}$

Fonte: Elaborada pela autora

3.2 ANÁLISE DA ATIVIDADE 2 – Introdução ao Conteúdo – Parte 2

A atividade 2 contextualiza por meio de um texto base (Anexo II), uma função exponencial decrescente, estudando a meia-vida do antibiótico amoxicilina que é composta por cinco itens e, uma aplicação de uma função exponencial no mercado imobiliário composta por dois itens. Totalizando a análise de 7 itens.

Após aplicação das atividades 1 e 2, o fechamento destas acontece com a intervenção da professora, após seguir as orientações proposta por Onuchic (1999). Para que os alunos compreendam a finalidade da dinâmica aplicada é formalizada a definição da função exponencial, porém sem justificar, num primeiro momento, o porquê de a base ser maior que zero e diferente de um. Também são levantadas hipóteses sobre as diferentes curvas encontradas como resposta dos gráficos das atividades 1 e 2, para observar se os alunos identificaram as características do crescimento e decrescimento da função. Após esse debate, relembramos os conceitos de função crescente e decrescente, ainda não formalizando o conceito de função exponencial crescente e decrescente que é objeto de estudo da próxima atividade.

Analisaremos, inicialmente, os resultados referentes ao problema 1 da atividade 2 (Anexo II).

3.2.1 Análise do Item 1a

Item 1a: Após 1 hora e 20 minutos (tempo de uma meia-vida) da ingestão da cápsula de amoxicilina qual é a quantidade em miligramas de amoxicilina no organismo?

Neste item era esperado que o aluno, após a leitura do texto, compreendesse que a cada meia-vida do fármaco, o produto diminuía em 50% a quantidade de miligramas no organismo. Para os cálculos era necessário compreender a operação referente a uma redução de 50% de uma quantidade.

No 1EM, encontramos 95% de respostas Plenamente Satisfatória (Tabela 3.9) e 5% de respostas Não Satisfatória (Tabela 3.9). Dentre os alunos que justificaram corretamente 72% não apresentaram o raciocínio, possivelmente por compreender que uma redução de 50% é uma divisão simples por dois sendo feito mentalmente e

14% dos alunos optaram por utilizar a regra de três simples (Figura 3.35). O aluno que não apresentou um dado correto (Figura 3.36) pelo fato de entender que 1,3h que é a meia-vida do fármaco equivale a uma hora e meia (90 minutos), desta forma dividiu por noventa e não por dois como seria correto.

No 2EM e 3EM, tivemos 100% de acertos neste item. A maior parte dos acertos foram justificados por uma divisão simples (Figura 3.37) e é interessante notar que aluno do 3EM começa a desenvolver uma linguagem mais organizada e formalizada (Figura 3.38).

Tabela 3.9 – Respostas obtidas no item 1a

Ano	Plenamente Satisfatória	Satisfatória	Não Satisfatória	Total
1EM	22	0	1	23
2EM	23	0	0	23
3EM	18	0	0	18

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.35 – Resposta Plenamente Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade 1a

1- a)
 a) cada 1h e 20min \rightarrow diminui 50% de 100%

$$\begin{array}{l} 500 \text{ mg} \quad \text{---} 100\% \\ x \quad \quad \quad \text{---} 50\% \end{array}$$

$$100x = 25000$$

$$x = \frac{25000}{100} = 250 \text{ mg}$$

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.36 – Resposta Não Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade 1a

a)

$$\begin{array}{r} 500 \div 90 \\ \hline 5,5 \end{array}$$

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.37 – Resposta Plenamente Satisfatória de um aluno do 2EM na atividade 1a

- a) Após 1 hora e 20 minutos (tempo de uma meia-vida) da ingestão da cápsula de amoxicilina qual é a quantidade em miligramas de amoxicilina no organismo?

$$500 \frac{2}{250} \quad R: 250 \text{ mg}$$

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.38 – Resposta Plenamente Satisfatória de um aluno do 3EM na atividade 1a

- a) Após 1 hora e 20 minutos (tempo de uma meia-vida) da ingestão da cápsula de amoxicilina qual é a quantidade em miligramas de amoxicilina no organismo?

$$\begin{array}{ccc} \text{Início} = \hat{i} & \hat{i} \xrightarrow{\substack{1 \\ \text{meia-} \\ \text{vida}}} & \frac{\hat{i}}{2} \end{array} \quad \begin{array}{l} \hat{i} = 500 \text{ mg} \\ \frac{\hat{i}}{2} = 250 \text{ mg} \end{array}$$

Fonte: Elaborado pela autora

3.2.2 Análise do Item 1b

Item 1b: Complete a tabela abaixo.

Neste item era esperado que o aluno completasse a tabela como a quantidade de miligrama do fármaco após cada decaimento de uma meia-vida. A tabela neste item foi inserida propositalmente, esta era uma das formas esperadas na resolução da atividade anterior o que não aconteceu, pois, prevaleceu a resolução por meio de diagramas e cálculos algébricos. E também serve como ideia intuitiva para montar um gráfico e observar a regularidade do decaimento da quantidade de miligrama do fármaco que pode auxiliar nas etapas adiante quando for necessário definir a lei desta função.

No 1EM, tivemos 95% de acertos nesta questão (Tabela 3.10). Alguns alunos continuaram as resoluções por meio de regra de três (Figura 3.39) e muitos utilizando divisões sucessivas (Figura 3.40). Encontramos 5% de alunos com resposta Satisfatória (Tabela 3.10), este é o mesmo aluno que errou no item anterior. Possivelmente, ao constatar a regularidade da tabela percebeu o equívoco da primeira resposta, porém, não efetuou corretamente as divisões (Figura 3.41).

No 2EM e 3EM, encontramos 83% de respostas Plenamente Satisfatória e 17% de respostas Satisfatória. Nestes anos muitos alunos utilizaram o arredondamento na

resolução (Figura 3.42), recurso utilizado por poucos alunos do 1EM (Figura 3.39), e nas respostas Satisfatória encontramos erros de divisão (Figura 3.43), fator preocupante por se tratar de uma divisão por dois.

Tabela 3.10 – Repostas obtidas no item 1b

Ano	Plenamente Satisfatória	Satisfatória	Não Satisfatória	Total
1EM	22	1	0	23
2EM	19	4	0	23
3EM	15	3	0	18

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.39 – Resposta Plenamente Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade 1b

b)

mg	500	250	125	62,5	31,25	15,62	7,81
nm.v	0	1	2	3	4	5	6

$125 = 100\%$
 $x = 50\%$
 $100x = 6250$
 $x = \frac{6250}{100} = 62,5$

$62,5 = 100\%$
 $x = 50\%$
 $100x = 3125$
 $x = \frac{3125}{100} = 31,25$

$31,25 = 100\%$
 $x = 50\%$
 $100x = 15625$
 $x = \frac{15625}{100} = 15,625$

$15,62 = 100\%$
 $x = 50\%$
 $100x = 781$
 $x = \frac{781}{100} = 7,81$

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.40 – Resposta Plenamente Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade 1b

Quantidade de amoxicilina no organismo (mg)	500	250	125	62,5	31,25	15,625	7,8125
Número de meias-vidas	0	1	2	3	4	5	6

$125 \begin{array}{r} 12 \\ 5 \overline{) 125} \\ \underline{100} \\ 25 \end{array}$

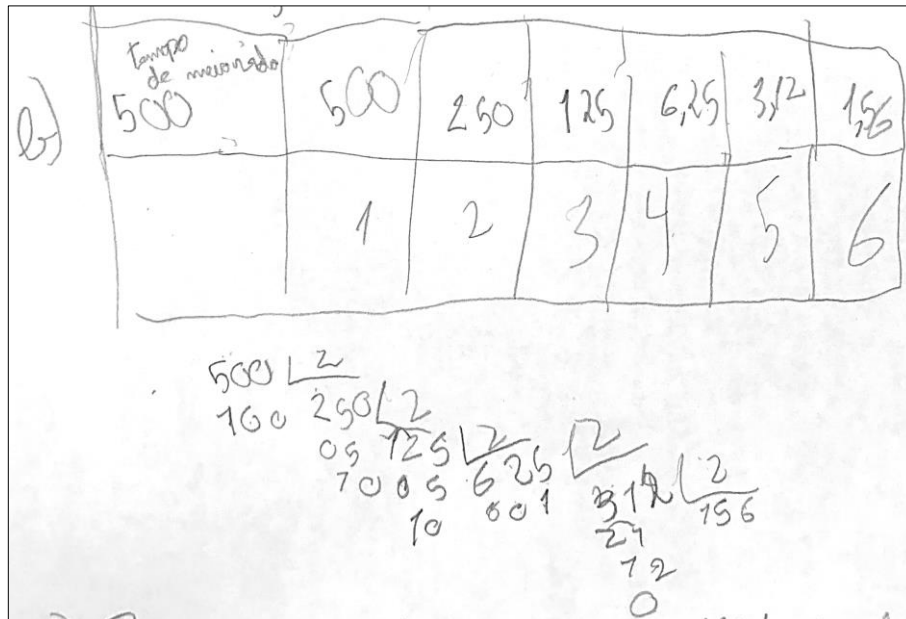
$62,5 \begin{array}{r} 120 \\ 25 \overline{) 120} \\ \underline{50} \\ 70 \\ \underline{50} \\ 20 \end{array}$

$31,25 \begin{array}{r} 1200 \\ 1125 \overline{) 1200} \\ \underline{75} \\ 1250 \\ \underline{1000} \\ 250 \end{array}$

$15,625 \begin{array}{r} 12000 \\ 16250 \overline{) 12000} \\ \underline{2500} \\ 5000 \\ \underline{5000} \\ 0 \end{array}$

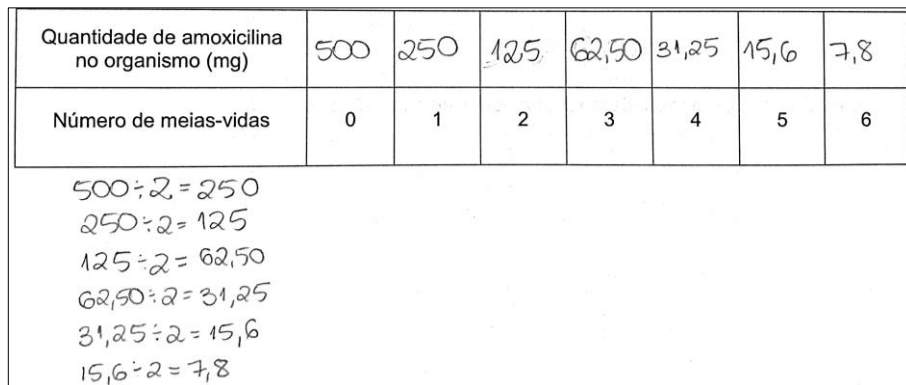
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.41 – Resposta Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade 1b



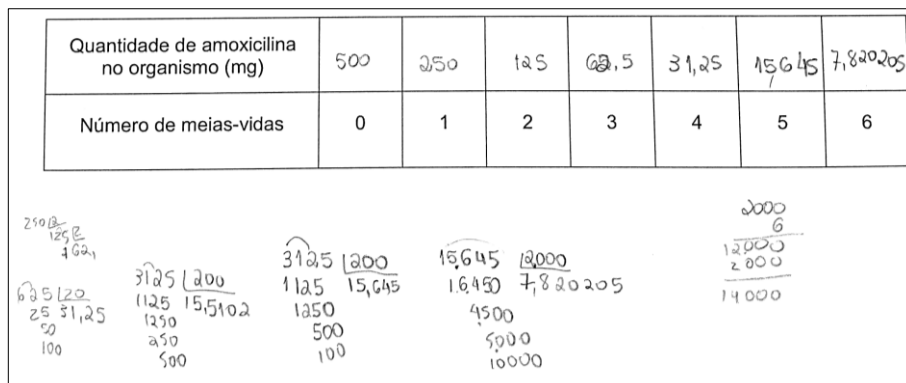
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.42 – Resposta Plenamente Satisfatória de um aluno do 2EM na atividade 1b



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.43 – Resposta Satisfatória de um aluno do 2EM na atividade 1b



Fonte: Elaborado pela autora

3.2.3 Análise do Item 1c

Item 1c: Determine uma lei que relaciona a quantidade (q) de amoxicilina no organismo e o número (n) de meias-vidas.

Neste item era esperado que o aluno conseguisse escrever a relação entre a quantidade de amoxicilina em miligramas (q) em relação a quantidade de meias-vidas (n) escrevendo a lei $q = \frac{500}{2^n}$ ou $q = 500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

A escolha desse item também foi proposital para que o aluno pudesse fazer conexão com a atividade anterior. Ao montar a atividade, parecia óbvio que ao se deparar com essa situação o aluno associaria a resolução do crescimento da bactéria e dessa vez perceberia que ao invés de multiplicar por uma potência de dois, dividiria. Porém, pelos resultados que seguem, percebemos que não foi uma associação direta.

No 1EM, 9% dos alunos apresentaram uma resposta Plenamente Satisfatória (Tabela 3.11) como observamos na Figura 3.44, 13% de respostas Satisfatórias (Tabela 3.11) e 78% não conseguiram encontrar a lei, mesmo fazendo muitas tentativas (Figura 3.45) e outro erro foi fazer uma divisão por dois e não pela potência de dois (Figura 3.46).

Tabela 3.11 – Respostas obtidas no item 1c

Ano	Plenamente Satisfatória	Satisfatória	Não Satisfatória	Total
1EM	2	3	18	23
2EM	0	5	18	23
3EM	3	6	9	18

Fonte: Elaborado pela autora

No 2EM, nenhum aluno acertou a questão, 22% apresentaram uma resposta Satisfatória cuja lei estava certa, porém, com o uso inadequado das incógnitas (Figura 3.47) e 78% das respostas foram Não Satisfatória sendo o uso incorreto da fórmula da P.G. um dos erros identificados (Figura 3.48), interessante notar que o aluno associou a subtração como forma de diminuição e não a divisão.

No 3EM, encontramos apenas 17% dos alunos com respostas Plenamente Satisfatória, 33% respostas Satisfatória e 50% de respostas Não Satisfatória.

Mais uma vez, fomos surpreendidos pelo alto índice de alunos do 2EM e 3EM que não conseguiram escrever a lei da função.

Figura 3.44 – Resposta Plenamente Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade 1c

c) Determine uma lei que relaciona a quantidade (q) de amoxicilina no organismo e o número (n) de meias-vidas.

$$q = \frac{500}{2^n}$$

0	-	500
1	-	250
2	-	125

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.45 – Resposta Não Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade 1c

c) Determine uma lei que relaciona a quantidade (q) de amoxicilina no organismo e o número (n) de meias-vidas.

$$q = \frac{500}{2^n}$$

$$\frac{500}{1} = 255$$

$$\frac{500}{2^2} = 125 \text{ X}$$

$$\frac{500}{3^2} = 61,25$$

$$\frac{500}{2 \cdot 1} = 225$$

$$\frac{500}{2 \cdot 2} = 125 \text{ X}$$

$$\frac{500}{2 \cdot 3} =$$

$$n = \frac{500}{61,25}$$

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.46 – Resposta Não Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade 1c

c) Determine uma lei que relaciona a quantidade (q) de amoxicilina no organismo e o número (n) de meias-vidas.

$$q = \frac{n}{2}$$

$$q = \frac{500}{(n+1) \cdot 2}$$

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.47 – Resposta Satisfatória de um aluno do 2EM na atividade 1c

c) Determine uma lei que relaciona a quantidade (q) de amoxicilina no organismo e o número (n) de meias-vidas.

$$m_f = \frac{m_i}{2^n}$$

↖ *moss final*
↗ *mossa inicial*

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.48 – Resposta Não Satisfatória de um aluno do 2EM na atividade 1c

c) Determine uma lei que relaciona a quantidade (q) de amoxicilina no organismo e o número (n) de meias-vidas.

$q_n = q_1 \cdot (-q^{n-1})$

$q = 2^n$

Fonte: Elaborado pela autora

3.2.4 Análise do Item 1d

Item 1d: Esboce, na folha quadriculada o gráfico dessa situação.

Neste item era esperado que o aluno construísse o gráfico do decaimento da quantidade do fármaco no organismo no plano cartesiano, cujo eixo das ordenadas representa quantidade de miligrama no organismo e o eixo das abscissas o número de meias-vidas. Foi anexado à atividade uma folha com uma malha quadriculada para auxiliar nesta construção.

No 1EM, 9% dos alunos acertaram o gráfico (Tabela 3.12) como mostra a Figura 3.49, 13% dos alunos apresentaram resposta Satisfatória (Tabela 3.12), pois, erraram a construção dos pontos acertando a curva (Figura 3.50), ou fizeram a união dos pontos por meio de uma reta (Figura 3.51) e 87% dos alunos não conseguiram fazer (Tabela 3.12) como observamos na Figura 3.52 em que encontramos erro de definição da ordenada (porcentagem e não miligrama), pontos associados erroneamente e união dos pontos por meio de uma linha reta.

Tabela 3.12 – Respostas obtidas no item 1d

Ano	Plenamente Satisfatória	Satisfatória	Não Satisfatória	Total
1EM	2	3	18	23
2EM	0	3	20	23
3EM	2	4	12	18

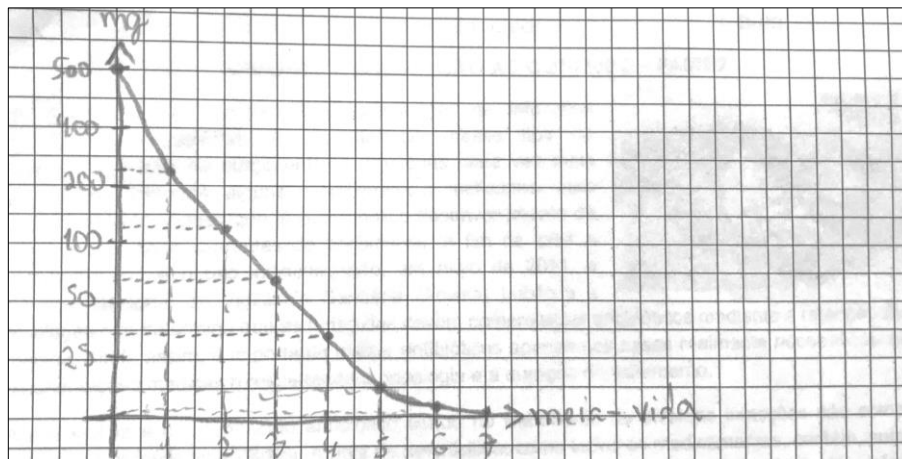
Fonte: Elaborado pela autora

No 2EM, não encontramos nenhuma resposta Plenamente Satisfatória, 13% de respostas Satisfatória e 78% de questões Não Satisfatória.

No 3EM, 11% dos alunos acertaram o gráfico, 22% apresentaram uma resposta Satisfatória e 67% não acertaram.

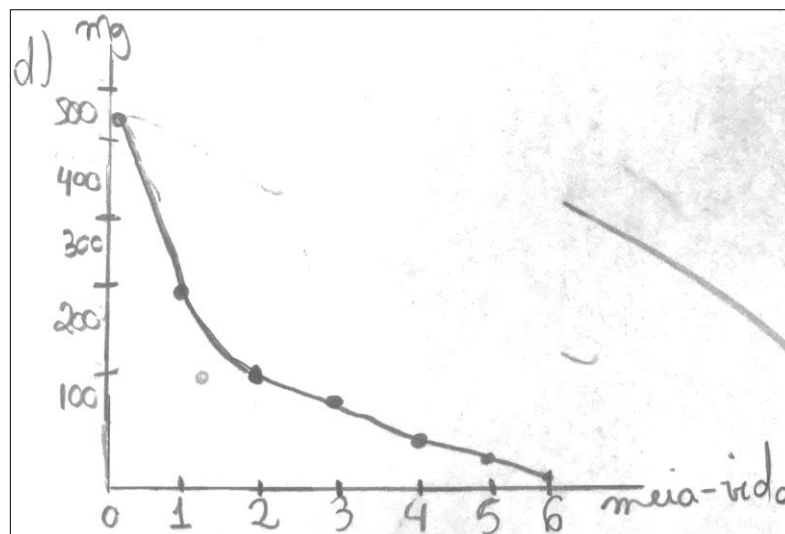
Mais uma vez, nos deparamos com resultados preocupantes para o 2EM e 3EM, pois apresentaram muitos gráficos unindo os pontos por meio de uma linha reta e dificuldade em plotar os pontos no plano cartesiano. Também pelo fato de nenhum aluno do 2EM ter conseguido responder corretamente. Para o 1EM, os resultados estavam dentro do esperado.

Figura 3.49 – Resposta Plenamente Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade 1d



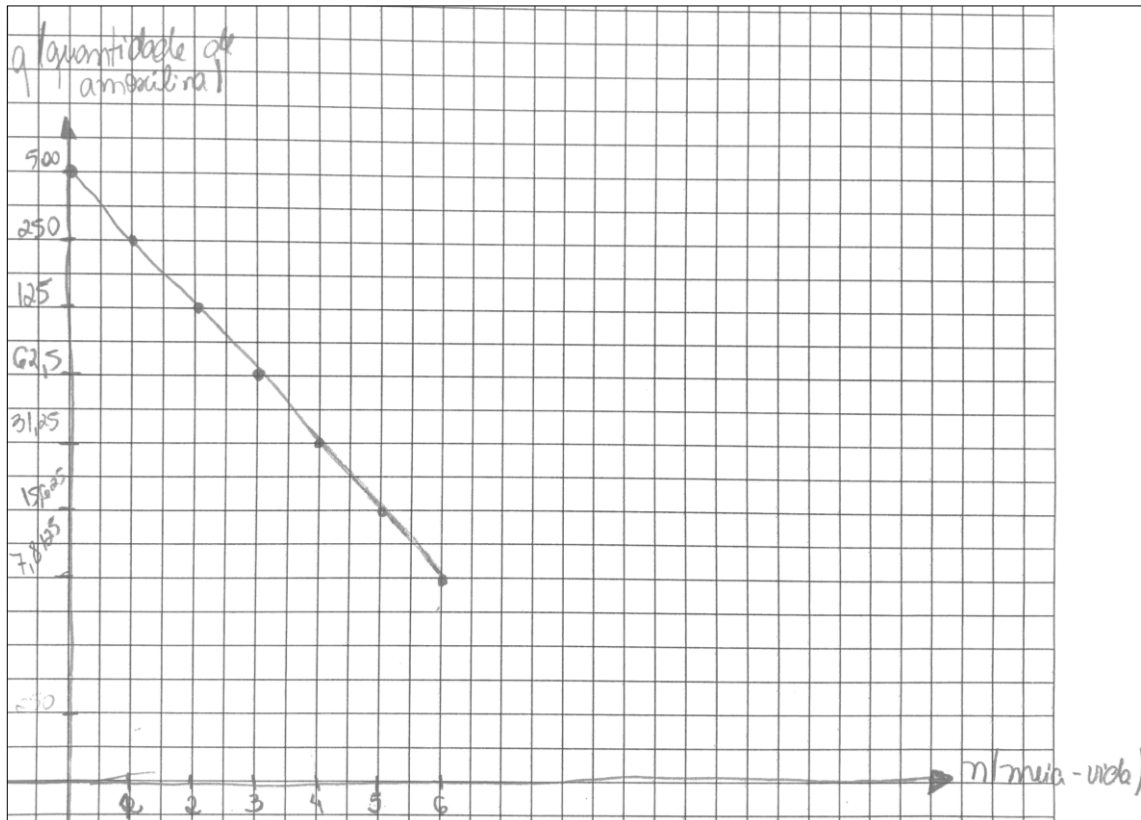
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.50 – Resposta Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade 1d



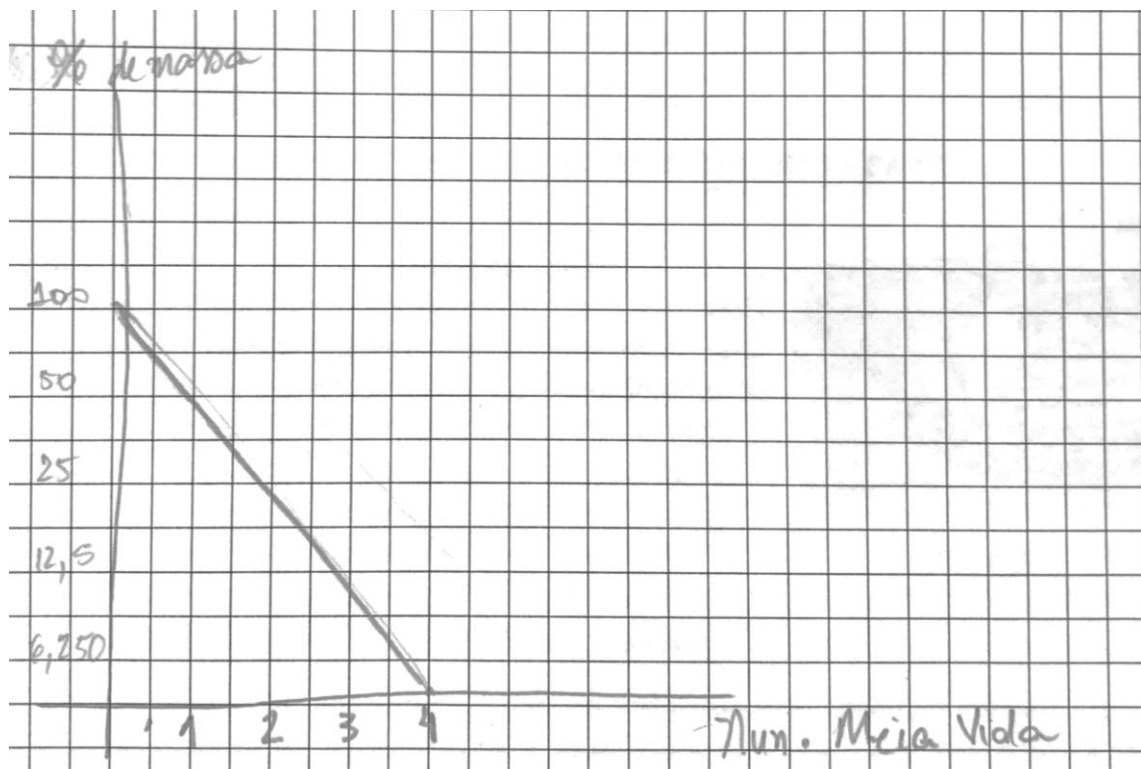
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.51 – Resposta Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade 1d



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.52 – Resposta Não Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade 1d



Fonte: Elaborado pela autora

3.2.5 Análise do Item 1e

Item 1e: Considerando a quantidade de amoxicilina ingerida em uma cápsula, qual a porcentagem desse fármaco presente no organismo após 8 horas de ingestão? Por que é imprescindível respeitar os horários prescritos pelo médico?

Neste item era esperado que os alunos encontrassem a quantidade de miligramas do fármaco no organismo após 8 horas, uma vez que já conheciam a lei com as atividades anteriores. Fariam o cálculo da porcentagem para perceber quão pequena era a quantidade após esse tempo tornando-se necessário a reposição do remédio para a continuidade do tratamento, motivo pelo qual é necessário respeitar os horários. Esta questão também vem mostrar a aplicação matemática no dia-a-dia.

No 1EM, 9% dos alunos acertaram a questão (Tabela 3.13) como mostra a Figura 3.53, 35% apresentaram justificativa Satisfatória (Tabela 3.13) alguns não conseguiram concluir (Figura 3.54), outros não souberam explicar a necessidade de respeitar o horário e 56% não souberam fazer (Tabela 3.13).

Tabela 3.13 – Repostas obtidas no item 1e

Ano	Plenamente Satisfatória	Satisfatória	Não Satisfatória	Total
1EM	2	8	13	23
2EM	0	3	20	23
3EM	3	12	3	18

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.53 – Resposta Plenamente Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade 1e

e) Considerando a quantidade de amoxicilina ingerida em uma cápsula, qual a porcentagem desse fármaco presente no organismo após 8 horas de ingestão? Por que é imprescindível respeitar os horários prescritos pelo médico?

100% ¹ 50% ² 25% ³ 12,5% ⁴ 6,25% ⁵ 3,125% ⁶ 1,5625%

1,5625% de amoxicilina. É imprescindível respeitar os horários pois o médico sabe qual o tempo de meia-vida do medicamento e os horários nos quais o remédio deve ser tomado para que continue fazendo efeito

80 | 13
20 | 6,15
70
5
↓
8h → 6 Tempos de meia vida

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.54 – Resposta Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade 1e

e) Considerando a quantidade de amoxicilina ingerida em uma cápsula, qual a porcentagem desse fármaco presente no organismo após 8 horas de ingestão? Por. que é imprescindível respeitar os horários prescritos pelo médico?

Handwritten student work showing calculations for the percentage of amoxicillin remaining in the body after 8 hours. The student lists the initial amount as 100 mg and the amount remaining as 31.25 mg, resulting in 31.25%.

Handwritten calculations:

$$100 - 25 = 75$$

$$75 - 25 = 50$$

$$50 - 18.75 = 31.25$$

Final result: 31,25%

Fonte: Elaborado pela autora

No 2EM, nenhum aluno acertou a questão, 13% dos alunos obtiveram resposta Satisfatória e 87% apresentaram respostas Não Satisfatória.

No 3EM, 17% dos alunos acertaram, 66% apresentaram resposta Satisfatória e 17% não souberam fazer.

A seguir, analisaremos resultados referentes ao problema 2 da atividade 2, Anexo II.

3.2.6 Análise do Item 2a

Item 2a: Qual o valor desse imóvel na entrega?

Este item foi proposto para observar se os alunos conseguiriam fazer associações com as atividades desenvolvidas até este ponto do trabalho e, sem ter o conteúdo formalizado, ou seja, não fora apresentado a definição de função exponencial até então. Desta forma, foi analisado se os alunos eram capazes de resolver uma questão do cotidiano que envolvesse a função exponencial. No caso, o exemplo utilizado é sobre os valores de um imóvel.

No 1EM, 70% dos alunos acertaram (Tabela 3.14). A maioria não justificou o cálculo por ter interpretado na fórmula que o valor apresentado era o preço inicial, outros pediram ajuda para compreender esse tempo inicial que seria o zero (neste momento foi sugerido que pensassem em uma situação que seria o ponto de partida lembrando o problema da bactéria). Com isso, conseguiram utilizar a lei definida para

o problema (Figura 3.55). No grupo de 30% dos alunos que não souberam (Tabela 3.14) um erro cometido foi considerar o tempo de partida valendo $t = 1$ (Figura 3.56).

No 2EM, 52% dos alunos acertaram a questão, valor bem próximo dos 55% do 3EM que também acertaram. Em relação as respostas Não Satisfatória, 48% dos alunos do 2EM não acertaram enquanto 45% do 3EM não conseguiram.

Tabela 3.14 – Repostas obtidas no item 2a

Ano	Plenamente Satisfatória	Satisfatória	Não Satisfatória	Total
1EM	16	0	7	23
2EM	12	0	11	23
3EM	10	0	8	18

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.55 – Resposta Plenamente Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade 2a

2) Analistas do mercado imobiliário de um município estimam que o valor (v), em reais, de um apartamento nesse município seja dado pela lei $v(t) = 250\,000 \cdot (1,05)^t$, sendo t o número de anos ($t = 0, 1, 2, \dots$) contados a partir da data de entrega do apartamento.

a) Qual o valor desse imóvel na entrega?

$$V(0) = 250\,000 \cdot (1,05)^0$$

$$V(0) = 250\,000 \cdot 1$$

250 000 reais

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.56 – Resposta Não Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade 2a

2) Analistas do mercado imobiliário de um município estimam que o valor (v), em reais, de um apartamento nesse município seja dado pela lei $v(t) = 250\,000 \cdot (1,05)^t$, sendo t o número de anos ($t = 0, 1, 2, \dots$) contados a partir da data de entrega do apartamento.

a) Qual o valor desse imóvel na entrega?

$$250\,000 \cdot 1,05 = 262\,500 \text{ reais}$$

Fonte: Elaborado pela autora

3.2.7 Análise do Item 2b

Item 2b: Qual a valorização, em reais, desse apartamento um ano após a entrega?

Neste item era esperado que o aluno utilizasse a lei definida para o exercício e através de uma diferença encontrasse o valor procurado.

No 1EM, 17% dos alunos apresentaram a resposta Plenamente Satisfatória (Tabela 3.15) como mostra a Figura 3.57, 61% responderam satisfatoriamente (Tabela 3.15) por apenas apresentarem o resultado sem justificativa e por não concluírem o problema encontrando o valor do imóvel após um ano e não calculando a sua valorização (Figura 3.58) e 22% dos alunos não souberam fazer (Tabela 3.15).

No 2EM, 30% souberam responder a questão, 13% apresentaram uma solução Satisfatória, pois não concluíram o problema proposto como observado na Figura 3.58 e 57% dos alunos não souberam fazer.

No 3EM, 22% dos alunos responderam corretamente a questão enquanto que 28% não concluíram a resposta entrando na classificação de respostas Satisfatória e 50% dos alunos não fizeram a questão.

Tabela 3.15 – Respostas obtidas no item 2b

Ano	Plenamente Satisfatória	Satisfatória	Não Satisfatória	Total
1EM	4	14	5	23
2EM	7	3	13	23
3EM	4	5	9	18

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.57 – Resposta Plenamente Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade 2b

b) Qual a valorização, em reais, desse apartamento um ano após a entrega?

$$V(1) = 260000 \cdot (1,05)^1$$

$$V(1) = 250000 \cdot 1,05$$

$$V(1) = 262500$$

12 500 reais

$$\begin{array}{r} 260000 \\ \times 1,05 \\ \hline 1250000 \\ 26000000 \\ \hline 262500,00 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 262500 \\ - 250000 \\ \hline 12500 \end{array}$$

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3 – 58. Resposta Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade 2b

b) Qual a valorização, em reais, desse apartamento um ano após a entrega?

$$V(1) = 2.625.000,5$$

$$V(1) = 250.000 \cdot (1,05)^1$$

$$V(1) = 250.000 \cdot 1,055$$

$$V(1) = 2.625.000$$

Fonte: Elaborado pela autora

Após a finalização das atividades 1 e 2 (Anexo II e III), iniciou-se uma discussão a respeito dos resultados obtidos. A professora orientou os alunos em relação as respostas esperadas para cada atividade. O fechamento da atividade aconteceu com a formalização da definição de exponencial, entretanto não justificando as condições de existência da base por ser essa a análise do estudo da atividade 3 (Anexo III).

Os alunos dos três grupos receberam de forma positiva a nova metodologia através da resolução de problemas, pois perceberam que através dos problemas que foram discutindo e resolvendo eles conseguiam utilizar seus conhecimentos para responderem, e mantiveram-se ativos no processo de ensino-aprendizagem. Na metodologia tradicional, em que há a introdução de um novo conteúdo e na sequência a resolução de exercícios, os alunos são passivos no processo de ensino-aprendizagem e, conseqüentemente, apenas repetidores de conteúdo.

No 1EM, os resultados foram ainda mais surpreendentes porque era o primeiro contato dos alunos com problemas envolvendo função exponencial. Alguns alunos que apresentavam muita dificuldade em conteúdo de potenciação, por exemplo, apesar de não conseguirem resolver corretamente as situações-problema propostas, mostraram-se curiosos para finalizá-las e compreenderem as atividades propostas.

No início dessas duas atividades, os alunos do 1EM não sabiam que se tratava do estudo da função exponencial. Ao longo das atividades, a professora observou e questionou, quando necessário, para auxiliar nas construções. E um dos objetivos das construções era definir o tema proposto. Quando estavam terminando a atividade 1, a professora fez o seguinte questionamento: “Em que conteúdo da matemática aparece a palavra lei?” e os alunos recordaram do estudo das funções. Depois foi

questionado sobre o uso de qual operação que prevaleceu ao longo das atividades e conseguiam concluir que era a potenciação. Na sequência, eram questionados sobre qual era a posição do número de gerações em relação a potenciação obtida para encontrar o número de bactérias. Perceberam que o número de gerações era a posição do expoente. Desta forma, o aluno era incentivado a juntar as ideias: função com a incógnita no expoente, o que formaria? Concluíam que se tratava do estudo das funções exponenciais. Os alunos se mostraram bem surpresos quando eles próprios compreenderam o que estavam estudando.

Os resultados obtidos no 2EM e 3EM foram alarmantes, pois apresentaram resultados aquém do esperado para estes grupos. Foi possível constatar que estes alunos apresentam muita dificuldade em trabalhar com o conteúdo de funções e construção de gráfico. Desta forma, o professor percebeu a necessidade de retomar tais conteúdos para que os alunos pudessem sanar as dificuldades encontradas para não prejudicarem nas construções futuras, por se tratar de tópico de extrema importância e muito presente em situações-problema do cotidiano.

3.3 ANÁLISE DA ATIVIDADE 3 – Crescimento e Decrescimento da Função Exponencial

A atividade 3 (Anexo III) traz o estudo do crescimento e decrescimento da função exponencial por meio de análise de gráficos que foram obtidos com o auxílio do *GeoGebra* e é composta por 7 itens. Os gráficos foram elaborados pela autora e os alunos não manipularam o *GeoGebra* apenas acompanharam as construções demonstradas pela professora.

Antes de iniciar esta atividade retomamos, juntamente com os alunos, o conceito da definição da função exponencial conforme as atividades 1 e 2. Neste momento, também não foi explicado o motivo da restrição da base de uma função exponencial, uma vez que foi a primeira pergunta desta atividade. Após as orientações da atividade, os alunos tentaram responder as perguntas P1 e P2 que eram relacionadas a base da função exponencial.

Lembrando que as atividades 1 e 2 foram feitas em um dia e as atividades 3 e 4 em dia posterior, por conta disso tivemos uma oscilação na quantidade de alunos

que participaram destas últimas atividades. Passamos a contar com 18 alunos no 1EM, 22 alunos do 2EM e 15 alunos no 3EM.

Analisaremos, a seguir, as respostas dos alunos para as perguntas P1 e P2.

3.3.1 Análise da pergunta P1

P1: Por que sendo b um número real a definição propõe que b precisa ser maior que zero e diferente de 1 (um)?

Neste item, era esperado que os alunos pudessem compreender o porquê da restrição da base, porém, já era esperado que o aluno não conseguisse fazer todas as justificativas corretas como, de fato, aconteceu ao analisarmos as respostas, por se tratar de uma questão mais teórica.

No 1EM, 55% apresentaram resultados satisfatórios (Tabela 3.16), os alunos conseguiram observar o comportamento da base zero e um, porém, não conseguiram justificar o que aconteceria com a base quando esta fosse um número negativo (Figuras 3.59 e 3.60), o aluno que chegou mais próximo da resposta não exemplifica tornando claro o que pensou (Figura 3.61). E tivemos 45% dos alunos que apresentaram resposta Não Satisfatória (Tabela 3.16).

Tabela 3.16 – Respostas obtidas na pergunta P1

Ano	Plenamente Satisfatória	Satisfatória	Não Satisfatória	Total
1EM	0	10	8	18
2EM	0	7	15	22
3EM	0	8	7	15

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.59 – Resposta Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade P1

1) (P1) Por que sendo b um número real a definição propõe que b precisa ser maior que zero e diferente de 1?

Se b for 1, independentemente do valor de x , $f(x)$ sempre será 1. Se b for igual a 0, então $f(x)$ sempre será 0. Se $b < 0$, então $f(x)$ sempre alternará entre um número (positivo) e um número negativo para cada aumento no valor de x .

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.60 – Resposta Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade P1

1) (P1) Por que sendo b um número real a definição propõe que b precisa ser maior que zero e diferente de 1?

Se for 0 não vai importar o valor de X , a função sempre vai ser 0
 Se for 1 não vai importar o valor de X , a função sempre vai ser 1

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.61 – Resposta Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade P1

R: porque relaciona apenas 2 números
que sejam reais.

Fonte: Elaborado pela autora

No 2EM e no 3EM não encontramos respostas Plenamente Satisfatória, para as respostas Satisfatória, respectivamente, 32% e 53%. Em ambas salas os alunos apenas conseguiram compreender o comportamento da base sendo zero ou um, poucos alunos do 3EM arriscaram uma justificativa para os valores em que a base representa um número negativo (Figura 3.62), mas nenhuma sala conseguiu justificar, por exemplo, a seguinte situação: “Sendo f de \mathbb{R} em \mathbb{R}_+^* , com $f(x) = (-2)^x$ então calcular $f\left(\frac{1}{2}\right) = (-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{-2}$ e $\sqrt[2]{-2} \notin \mathbb{R}_+^*$ ”. Ou seja, os alunos não conseguiram observar esta situação em particular. O que era esperado para o 1EM, porém o máximo que o 3EM conseguiu mostrar foi a alternância de valores não formando uma curva como é a definição da função exponencial (Figura 3.62).

Figura 3.62 – Resposta Satisfatória de um aluno do 3EM na atividade P1

1) (P1) Por que sendo b um número real a definição propõe que b precisa ser maior que zero e diferente de 1?

Se $b=0$, $f(x)=0$ sempre \rightarrow gráfico é uma reta constante em $f(x)=0$
 Se $b=1$, $f(x)=1$ sempre \rightarrow gráfico é uma reta constante $f(x)=1$
 e não exponencial
 Se $b < 0$, $f(x)$ = alternada \rightarrow gráfico fica parecido com uma onda.

Fonte: Elaborado pela autora

Em relação as respostas Não Satisfatória, encontramos 68% (2EM) e 47% (3EM), mais uma vez nos alertando para uma quantidade um tanto fora do esperado para os resultados destas salas.

3.3.2 Análise da pergunta P2

P2: E por que a função tem seu contradomínio definido como sendo \mathbb{R}_+^* ?

Neste item, investigamos se o aluno conseguiria compreender que a base sendo positiva, por definição, que não seria possível encontrar o contradomínio como sendo o conjunto \mathbb{R} . Uma dúvida que surgiu em muitos alunos foi a não compreensão do significado dos símbolos “*” e o sinal “+” no conjunto definido na pergunta (\mathbb{R}_+^*).

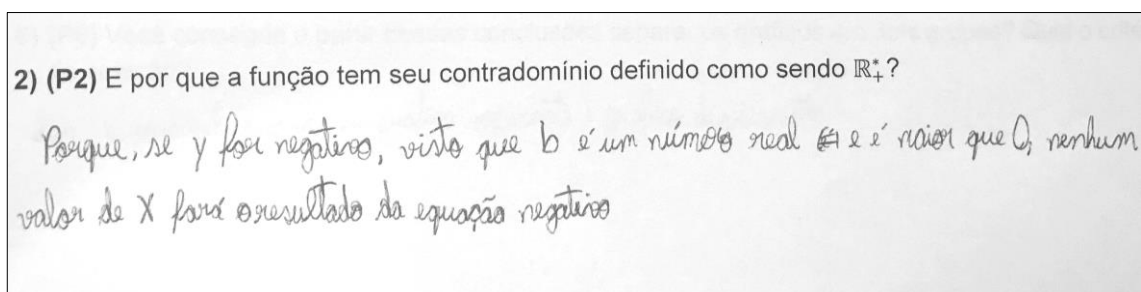
No 1EM, 39% dos alunos apresentaram uma solução Satisfatória (Tabela 3.17) como mostram as Figuras 3.63 e 3.64, enquanto que 61% não souberam responder corretamente (Tabela 3.17).

Tabela 3.17 – Repostas obtidas na pergunta P2

Ano	Plenamente Satisfatória	Satisfatória	Não Satisfatória	Total
1EM	0	7	11	18
2EM	1	2	19	22
3EM	0	4	11	15

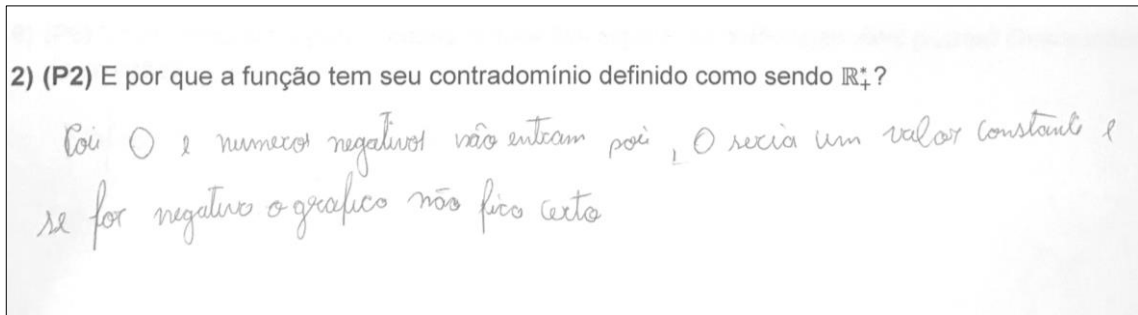
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.63 – Resposta Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade P2



Fonte: Elaborado pela autora

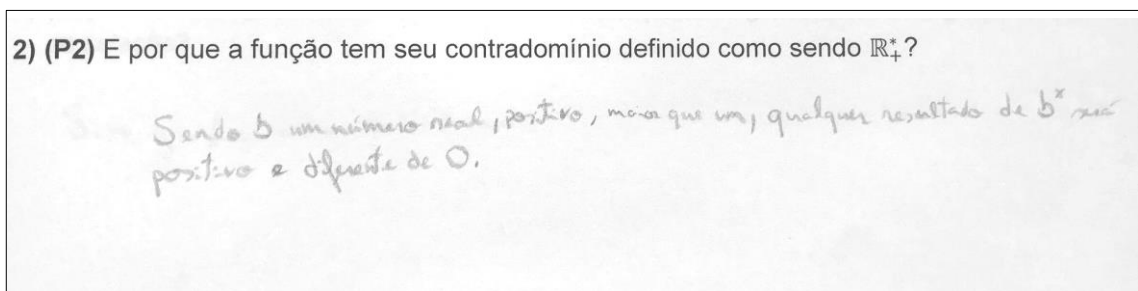
Figura 3.64 – Resposta Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade P2



Fonte: Elaborado pela autora

No 2EM, 5% dos alunos apresentaram resposta Plenamente Satisfatória (Figura 3.65), 10% de respostas Satisfatória e 85% de respostas incorretas.

Figura 3.65 – Resposta Plenamente Satisfatória de um aluno do 2EM na atividade P2



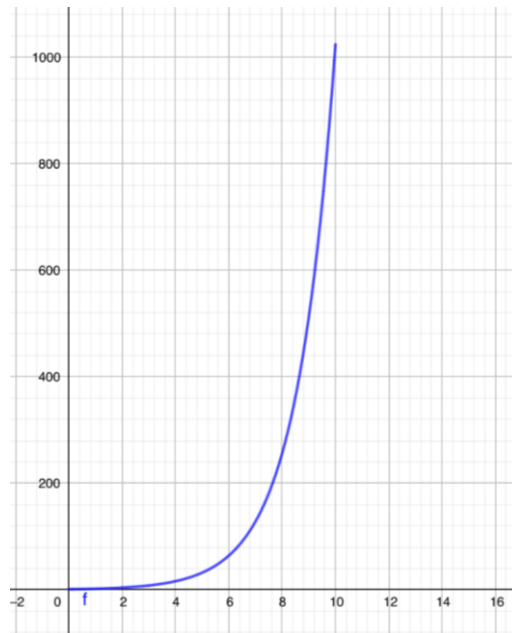
Fonte: Elaborado pela autora

No 3EM, nenhum aluno conseguiu responder corretamente enquanto que 27% apresentaram uma resposta Satisfatória e 73% não souberam responder corretamente.

Após a finalização das perguntas P1 e P2 (Anexo IV), iniciou-se uma retomada de conceitos para que os alunos pudessem recordar a construção dos gráficos que apareceram nas atividades 1 e 2 (Anexo I e II). O primeiro o gráfico solicitado foi sobre o crescimento da população de bactéria (Figura.3.66) e a meia-vida da amoxicilina (Figura 3.67).

A Figura 3.66 é a representação da função $f(x) = 2^x$, que relaciona a quantidade de bactérias (y) em cada geração (x). Este gráfico ilustra a quantidade de bactérias da geração 0 (zero) até a 10ª geração. O correto é seguir até a 72ª geração, porém, a curva seria muito estreita e longa. Para a melhor compreensão e leitura do exercício optou-se por plotar o gráfico desta maneira.

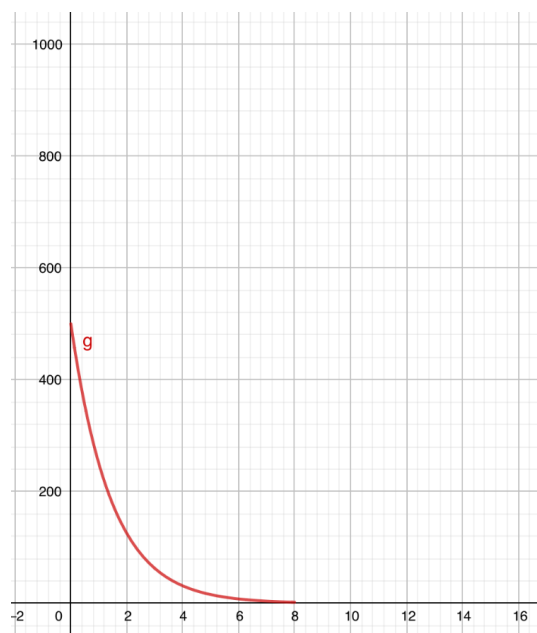
Figura 3.66 – Gráfico da função $f(x) = 2^x$



Fonte: Elaborado pela autora

A Figura 3.67 é a representação da função $g(x) = \frac{500}{2^x}$ que representa a quantidade de amoxicilina (em miligramas) no organismo (y) em relação ao número de meias-vidas (x). O gráfico tem início na posição 0 (ingestão do remédio) e termina na oitava meia vida.

Figura 3.67 – Gráfico da função $g(x) = \frac{500}{2^x}$



Fonte: Elaborado pela autora

Na sequência, os alunos foram orientados a observar os quatro gráficos distintos da atividade 3 (Anexo III) para que pudessem responder às perguntas de P3 a P7.

A seguir, as análises das respostas obtidas em relação as 7 perguntas restantes da atividade.

3.3.3 Análise da pergunta P3

P3: Há diferenças entre as funções representadas nos gráficos acima? (Anexo IV) Se houver qual(is) diferença(s) é possível notar?

Neste item, investigamos se o aluno conseguiria compreender a diferença entre os gráficos que representam uma função crescente ou função decrescente.

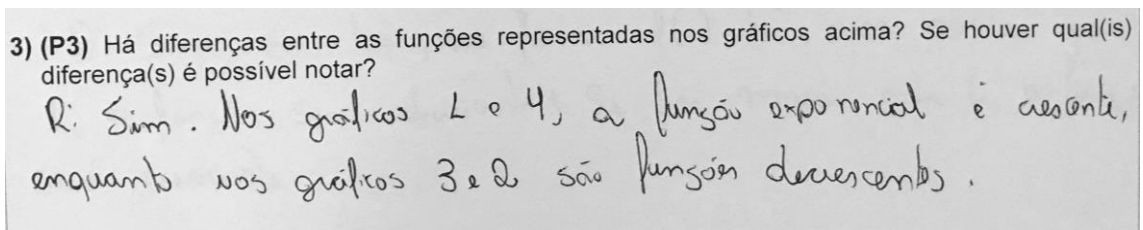
No 1EM, encontramos 39% das respostas Plenamente Satisfatória (Tabela 3.18) como mostra a Figura 3.68, 44% responderam de forma Satisfatória (Tabela 3.18) porque souberam compreender que a função crescia ou decrescia não justificando corretamente esse comportamento (Figuras 3.69 a 3.72) e 17% não souberam responder corretamente (Tabela 3.18).

Tabela 3.18 – Repostas obtidas na pergunta P3

Ano	Plenamente Satisfatória	Satisfatória	Não Satisfatória	Total
1EM	7	8	3	18
2EM	4	13	5	22
3EM	4	5	6	15

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.68 – Resposta Plenamente Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade P3



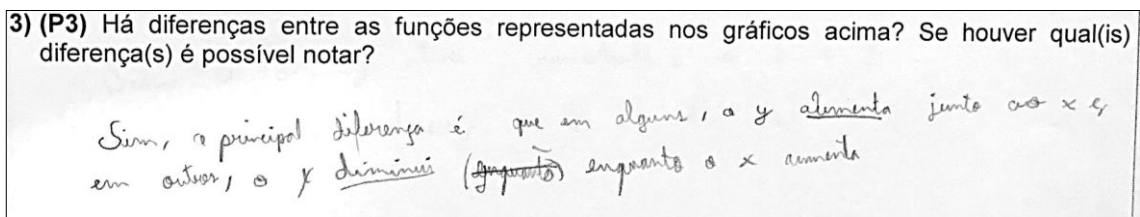
Fonte: Elaborado pela autora

No 2EM, 18% apresentaram resposta Plenamente Satisfatória, 59% resposta Satisfatória e 23% resposta Não Satisfatória.

No 3EM, 27% souberam responder à questão, 33% responderam de maneira incompleta e 40% não conseguiram apresentar uma resposta correta.

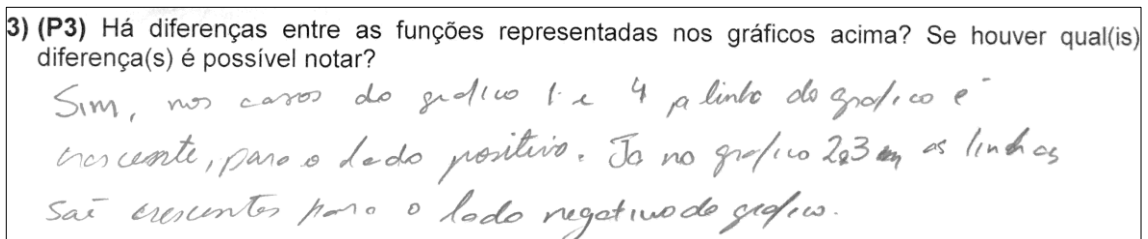
Foi possível encontrar, no 2EM e no 3EM, um equívoco de interpretação. Para fazer esta atividade, antes de apresentar os gráficos de 1 a 4 como do Anexo III, foi lembrado junto aos alunos o gráfico da bactéria (Figura 3.66) e o gráfico do fármaco (Figura 3.67) sugerindo a representação de dois gráficos de comportamentos diferentes: crescente e decrescente. Porém, muitos alunos não souberam fazer essa conexão e ainda analisaram esses dois gráficos que serviram de exemplo e não os que foram propostos para esta atividade.

Figura 3.69 – Resposta Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade P3



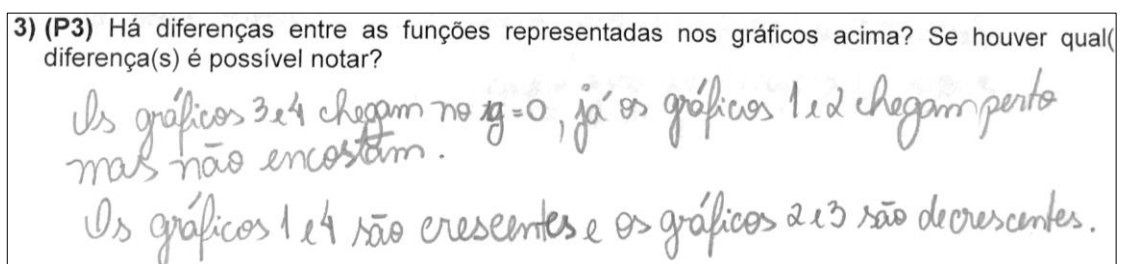
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.70 – Resposta Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade P3

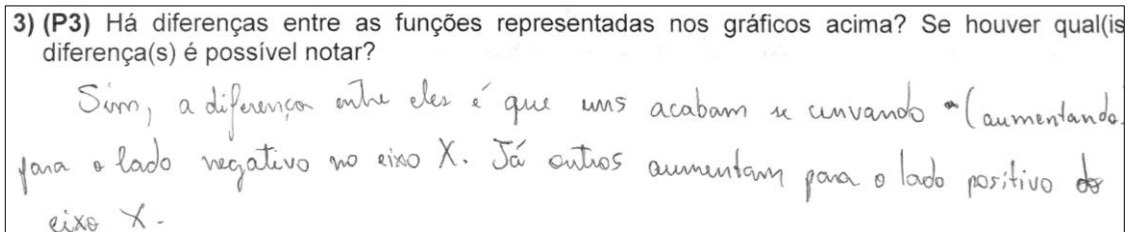


Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.71 – Resposta Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade P3



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.72 – Resposta Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade P3

Fonte: Elaborado pela autora

3.3.4 Análise da pergunta P4

P4: Sabendo que as funções representadas acima são definidas por $y = 0,1^x$; $y = 2^x$; $y = 3^x$ e $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, associe corretamente aos gráficos 1, 2, 3 e 4 sendo, respectivamente, f , g , h e p as funções definidas em cada gráfico.

Neste item, era esperado que o aluno conseguisse identificar e relacionar corretamente cada lei a sua respectiva função. A associação correta das funções com os gráficos 1, 2, 3 e 4, respectivamente, é: $f(x) = 2^x$, $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $h(x) = 0,1^x$ e $p(x) = 3^x$.

No 1EM, 61% dos alunos apresentaram a associação correta das funções (Tabela 3.19) como mostra as Figuras 3.73 e 3.74, 17% acertaram parcialmente (Tabela 3.19) e 22% não conseguiram associar as funções às suas leis (Tabela 3.19).

No 2EM e 3EM, encontramos, respectivamente, 32% e 40% de respostas Plenamente Satisfatória, 14% e 20% de respostas Satisfatória e 54% e 40% de respostas Não Satisfatória. Isso contradiz o que esperávamos, comparando os resultados das três turmas, uma vez que 2EM e 3EM já deveriam conhecer o conteúdo.

Tabela 3.19 – Respostas obtidas na pergunta P4

Ano	Plenamente Satisfatória	Satisfatória	Não Satisfatória	Total
1EM	11	3	4	18
2EM	7	3	12	22
3EM	6	3	6	15

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.73 – Resposta Plenamente Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade P4

4) (P4) Sabendo que as funções representadas acima são definidas por $y = 0,1^x$; $y = 2^x$; $y = 3^x$ e $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Associe corretamente aos gráficos 1, 2, 3 e 4 sendo, respectivamente, f , g , h e p as funções definidas em cada gráfico. $f(x) = 2^x$; $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $h(x) = 0,1^x$; $p(x) = 3^x$

Fonte: elaborado pela autora

Figura 3.74 – Resposta Plenamente Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade P4

(P4) Sabendo que as funções representadas acima são definidas por $y = 0,1^x$; $y = 2^x$; $y = 3^x$ e $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Associe corretamente aos gráficos ~~1~~, ~~2~~, ~~3~~ e ~~4~~ sendo, respectivamente, f , g , h e p as funções definidas em cada gráfico.

Fonte: Elaborado pela autora

3.3.5 Análise da pergunta P5

P5: Qual o critério utilizado para associar as funções como orientado na pergunta P4?

Neste item, era esperado que o aluno justificasse como ele procedeu para associar as funções definidas no item anterior.

No 1EM, 33% dos alunos apresentaram resposta Plenamente Satisfatória (Tabela 3.20), 28% apresentaram resposta Satisfatória (Tabela 3.20) e 39% não souberam justificar (Tabela 3.20). O grupo surpreendeu com as respostas apresentadas. Das respostas que chamaram atenção temos o aluno que justificou por ter feito associação com o gráfico das bactérias e da meia-vida (Figura 3.75), outro já associou a ideia da base influenciar no gráfico (Figuras 3.76 e 3.77), substituir o valor no ponto $x = 1$ (Figura 3.78) e substituir vários pontos (Figura 3.79).

No 2EM e 3EM, encontramos, respectivamente, 18% e 20% de respostas Plenamente Satisfatória, 27% e 53% de respostas Satisfatória e 55% e 27% de

respostas Não Satisfatória. Desta forma, encontramos novamente, um resultado inferior em relação ao 1EM.

Tabela 3.20 – Repostas obtidas na pergunta P5

Ano	Plenamente Satisfatória	Satisfatória	Não Satisfatória	Total
1EM	6	5	7	18
2EM	4	6	12	22
3EM	3	8	4	15

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.75 – Resposta Plenamente Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade P5

5) (P5) Qual o critério utilizado para associar as funções como orientado na questão 4?

R! Para descobrir que f e p são funções crescentes, comparei com o gráfico da qnt. de bactérias e para descobrir as decrescentes, utilizei o gráfico da meia-vida de amoxicilina.

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.76 – Resposta Plenamente Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade P5

5) (P5) Qual o critério utilizado para associar as funções como orientado na questão 4?

Se b for um número ^{menor que 1} fracionário, a linha do gráfico será decrescente. Se b for um número acima de 1, a linha do gráfico será crescente.

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.77 – Resposta Plenamente Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade P5

5) (P5) Qual o critério utilizado para associar as funções como orientado na questão 4?

A maneira como ela se comporta

a que possui maior base tem a maior base

o que possui menor base tem menor base

se for ~~de~~ decrescente tem base < 1

se for crescente tem base > 1

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.78 – Resposta Plenamente Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade P5

5) (P5) Qual o critério utilizado para associar as funções como orientado na questão 4?

Eu substituir o x pela L em todas as funções. Desse modo, o y nos gráficos seria o próprio "b".

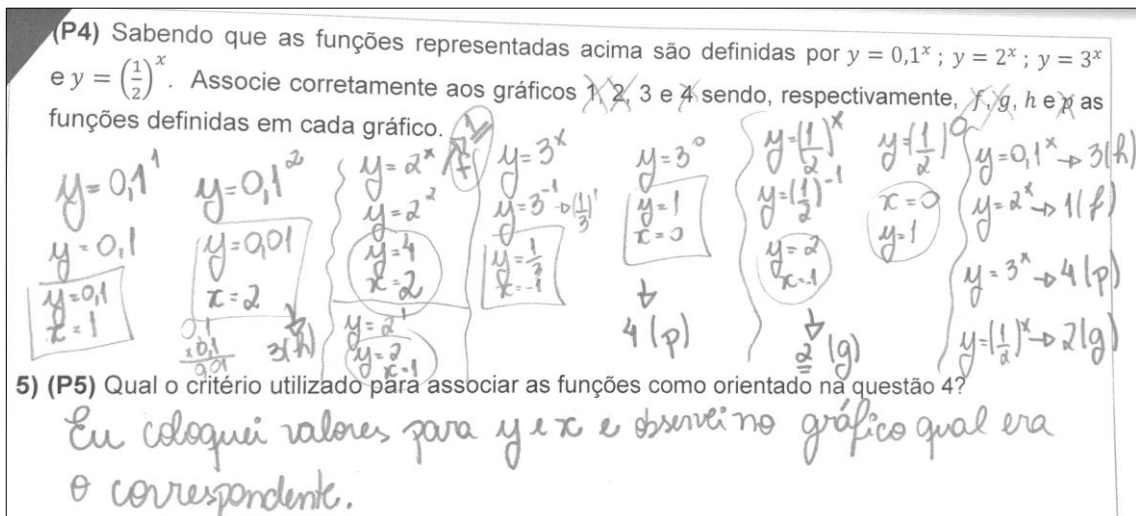
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.79 – Resposta Plenamente Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade P5

(P4) Sabendo que as funções representadas acima são definidas por $y = 0,1^x$; $y = 2^x$; $y = 3^x$ e $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Associe corretamente aos gráficos 1, 2, 3 e 4 sendo, respectivamente, f , g , h e p as funções definidas em cada gráfico.

5) (P5) Qual o critério utilizado para associar as funções como orientado na questão 4?

Eu coloquei valores para y e x e observei no gráfico qual era o correspondente.



Fonte: Elaborado pela autora

3.3.6 Análise da pergunta P6

P6: Você consegue a partir dessas conclusões separar os gráficos em dois grupos? Qual o critério de seleção?

Neste item era esperado que após a análise dos gráficos, os alunos conseguiriam separar as funções em dois grupos: funções crescentes ou funções decrescentes, identificando em que grupo estaria cada gráfico.

No 1EM, 11% dos alunos apresentaram resposta Plenamente Satisfatória (Tabela 3.21) como mostra a Figura 3.80, 78% apresentaram resposta Satisfatória (Tabela 3.21) como mostram as Figuras 3.81 a 3.83, e 11% não souberam responder (Tabela 3.21). Interessante notar que apesar de não responderem corretamente, os alunos já conseguiam associar o tipo de número que a base pode assumir e que pode

resultar um comportamento crescente ou decrescente do gráfico. Neste item conseguiram observar a relação entre número decimal e inteiro na base (Figura 3.81).

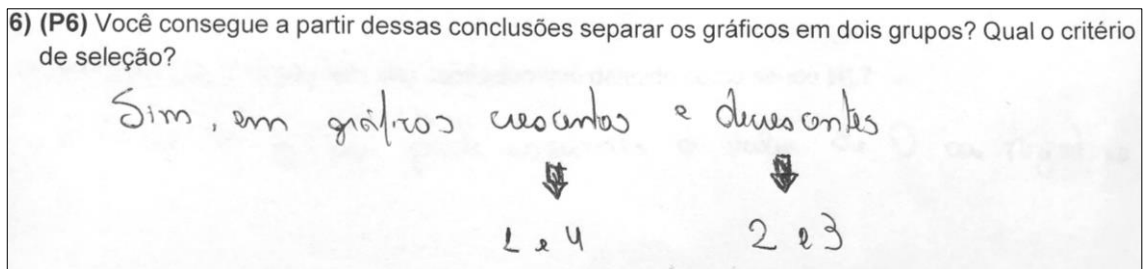
No 2EM e 3EM os resultados foram parecidos, encontramos, respectivamente, 14% e 13% de respostas Plenamente Satisfatória, 59% e 54% de respostas Satisfatória e 27% e 33% de respostas Não Satisfatória.

Tabela 3.21 – Repostas obtidas no item P6

Ano	Plenamente Satisfatória	Satisfatória	Não Satisfatória	Total
1EM	2	14	2	18
2EM	3	13	6	22
3EM	2	8	5	15

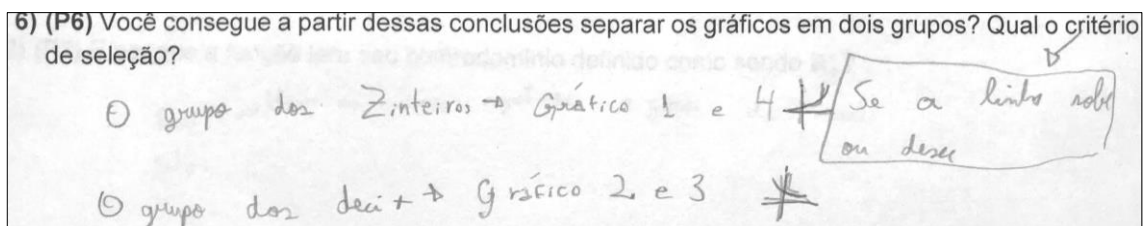
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.80 – Resposta Plenamente Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade P6



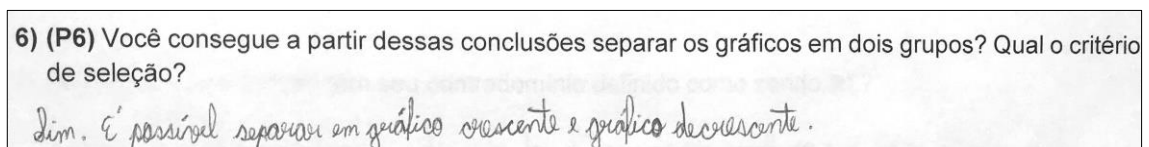
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.81 – Resposta Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade P6



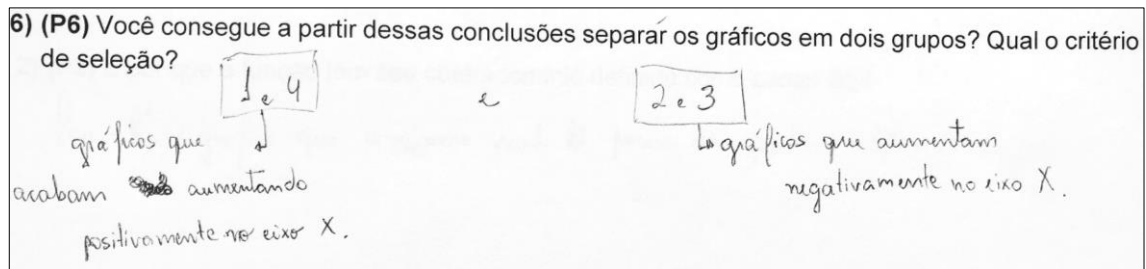
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.82 – Resposta Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade P6



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.83 – Resposta Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade P6



Fonte: Elaborado pela autora

3.3.7 Análise da pergunta P7

P7: Com o critério utilizado na questão 6, é possível criar uma relação entre o gráfico e o tipo de lei que o define?

Neste item, era esperado que após separar os grupos em funções crescentes ou decrescentes eles conseguiriam fazer a relação com o tipo de base em cada situação. Para ajudar nesta construção, bases entre zero e um na forma de fração e outra na forma de número decimal foi proposital, para que nesta pergunta eles pudessem ter mais incentivos a conclusão correta. Mais uma vez, o 1EM surpreende com respostas corretas e nas demais turmas, mesmo tendo estudado o conteúdo, a maioria não conseguiu responder corretamente, como apresentaremos a seguir.

No 1EM, 6% dos alunos apresentaram resposta Plenamente Satisfatória (Tabela 3.22) como mostra a Figura 3.84, 33% apresentaram resposta Satisfatória (Tabela 3.22) como mostram as Figuras 3.85 a 3.88 e 61% apresentaram resposta Não Satisfatória (Tabela 3.22). Dentre os alunos que apresentaram respostas parcialmente corretas destacamos os alunos que conseguiram associar corretamente o tipo de base, porém, usou incorretamente os símbolos matemáticos (Figura 3.85), os que se esqueceram que a base precisa ser maior que zero (Figura 3.86) e também associaram a base em número decimal ou inteiro não atentando ao fato de que um número decimal pode ser maior que um (Figura 3.87 e 3.88).

No 2EM, 18% dos alunos apresentaram resposta Plenamente Satisfatória, 18% de Satisfatória e 64% apresentaram resposta Não Satisfatória.

No 3EM, 27% dos alunos apresentaram resposta Plenamente Satisfatória, 7% Satisfatória e 66% não souberam responder.

Tabela 3.22 – Repostas obtidas na pergunta P7

Ano	Plenamente Satisfatória	Satisfatória	Não Satisfatória	Total
1EM	1	6	11	18
2EM	4	4	14	22
3EM	4	1	10	15

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.84 – Resposta Plenamente Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade P7

7) (P7) Com o critério utilizado na questão 6, é possível criar uma relação entre o gráfico e o tipo de lei que o define?

Decrescente: $0 < b < 1$
 Crescente: $b > 1$

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.85 – Resposta Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade P7

7) (P7) Com o critério utilizado na questão 6, é possível criar uma relação entre o gráfico e o tipo de lei que o define?

se for decrescente base ~~estará~~ ^{estará, no intervalo} $]1, 0]$
 se for crescente base ~~estará~~ ^{estará, no intervalo} $] +\infty, 1[$

Fonte: Elaborado pela autora

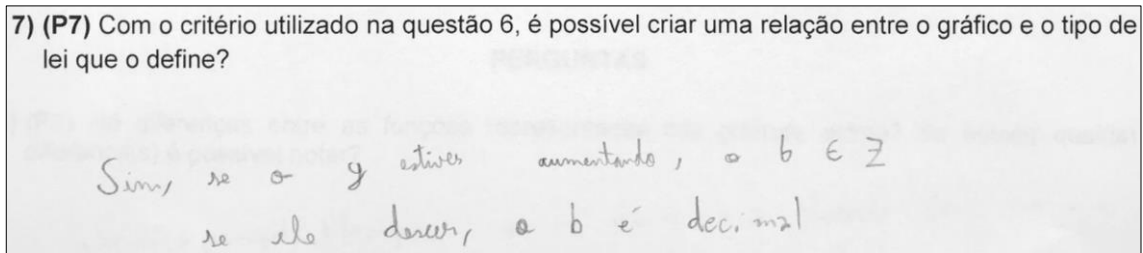
Figura 3.86 – Resposta Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade P7

7) (P7) Com o critério utilizado na questão 6, é possível criar uma relação entre o gráfico e o tipo de lei que o define?

R: Sim, se há, ~~uma~~ forma $f(x) = b^x$, um número que L , a função será decrescente; Se for maior que L , a função será crescente.

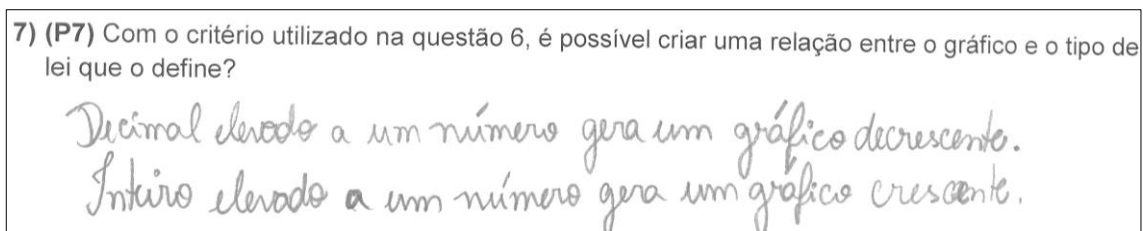
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.87 – Resposta Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade P7



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.88 – Resposta Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade P7



Fonte: Elaborado pela autora

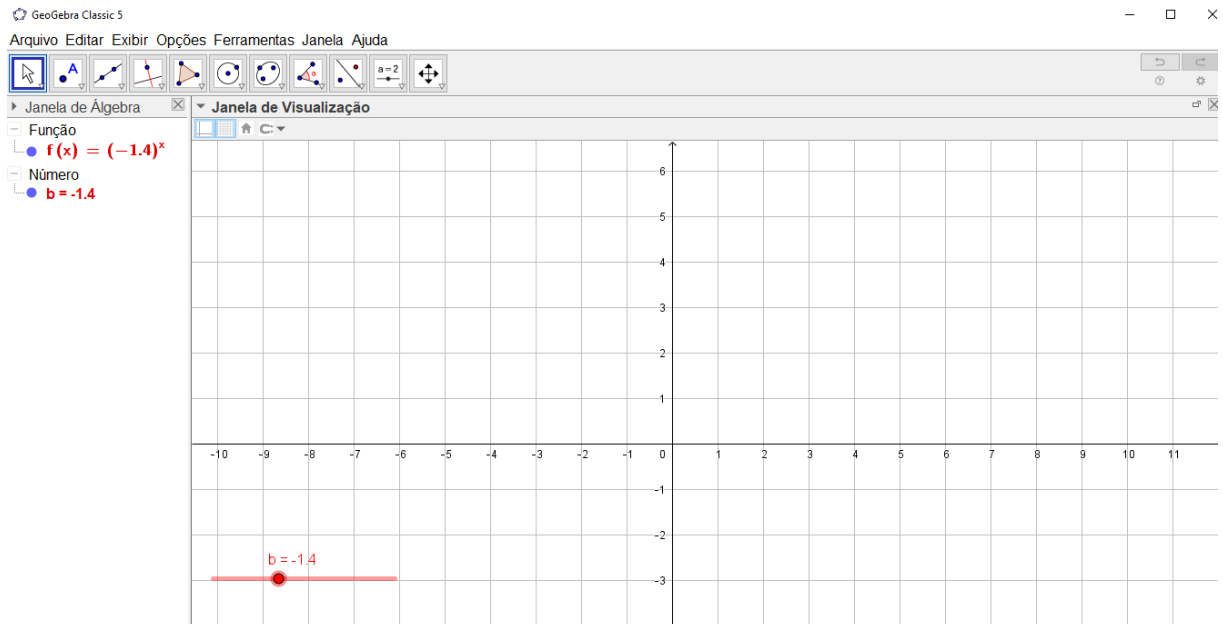
Após a finalização das 7 perguntas, com base no capítulo 2, fizemos o fechamento com a definição formal da função exponencial. Também, apresentamos as propriedades que definem as funções exponenciais crescentes e funções exponenciais decrescentes.

Para que os alunos pudessem compreender melhor o comportamento da base, a professora utilizando o *Software Geogebra*, mostrou por meio de uma animação uma função exponencial quando sua base (b) oscila entre valores: $b < 0$, $b = 0$, $0 \leq b \leq 1$, $b = 1$ e $b \geq 1$ (Figura 3.89 a 3.93).

As imagens que seguem, ilustram, como se comportou a função durante a animação apresentada aos alunos. Este momento foi bem interessante, os alunos se mostraram encantados, principalmente quando o gráfico desaparece para os valores em que a base representa um número negativo (Figura 3.89) e retoma retas ou curvas para valores maiores ou iguais a zero.

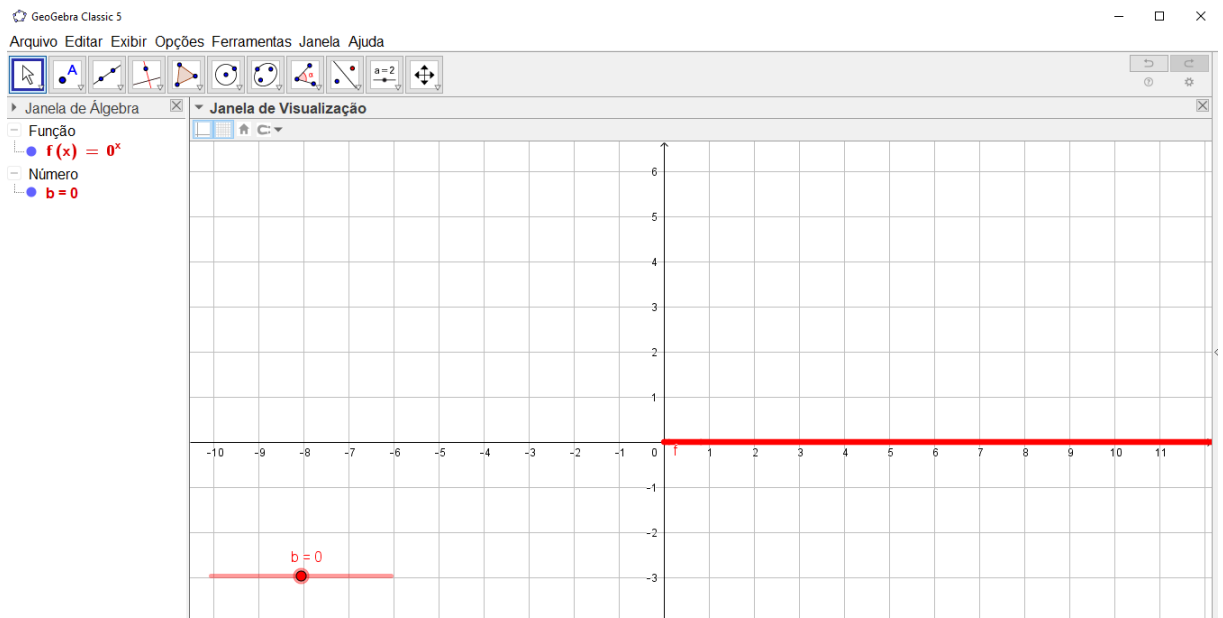
Na animação, o aparecimento dos gráficos aconteceu, primeiramente, para os valores positivos da base foi decrescendo para que o aluno pudesse perceber esse “desaparecimento” da função em valores negativos para a base, nas imagens que seguem, colocaremos em ordem crescente os valores das bases.

Figura 3.89 – Representação da função exponencial quando $b < 0$



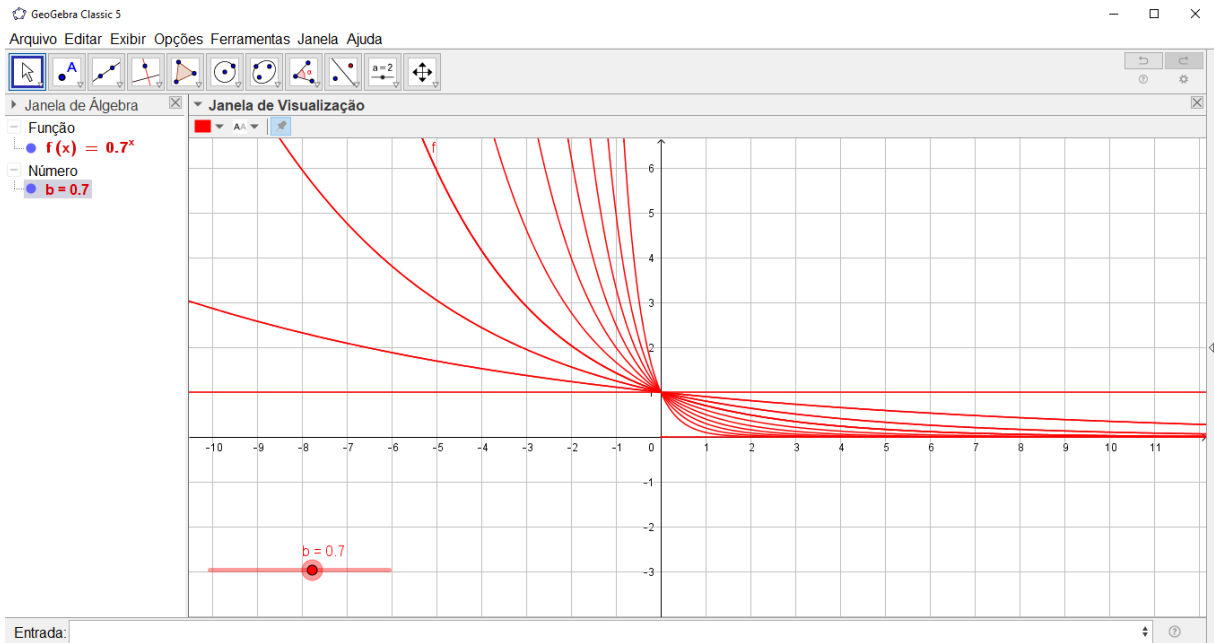
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.90 – Representação da função exponencial quando $b = 0$



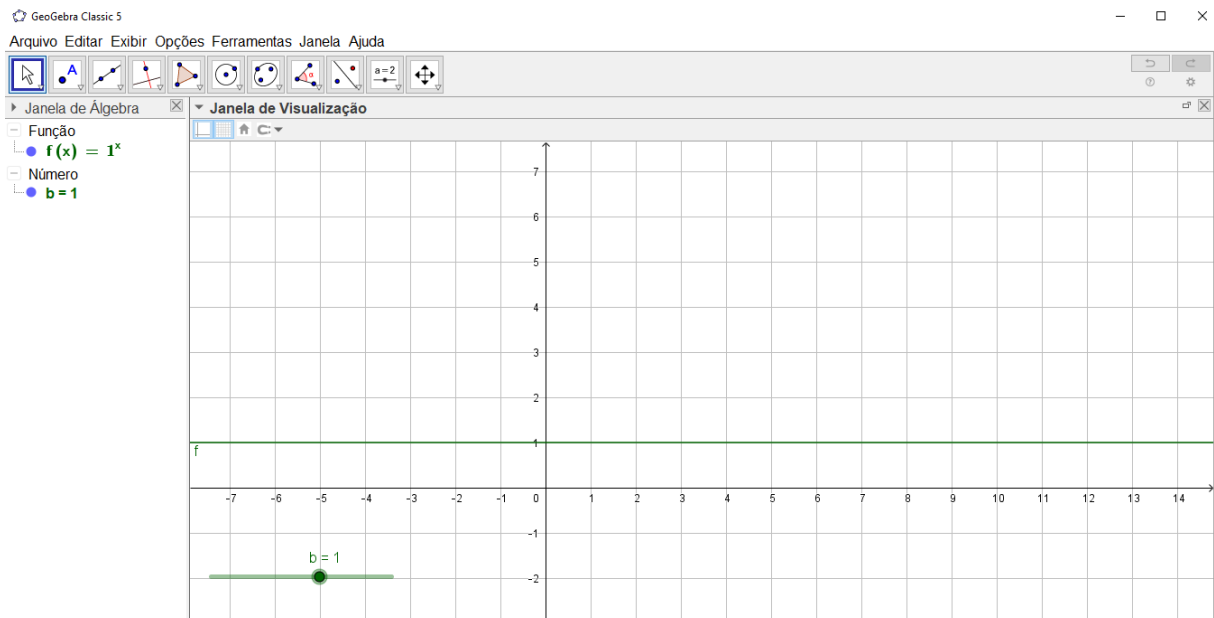
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.91 – Representação da função exponencial quando $0 \leq b \leq 1$



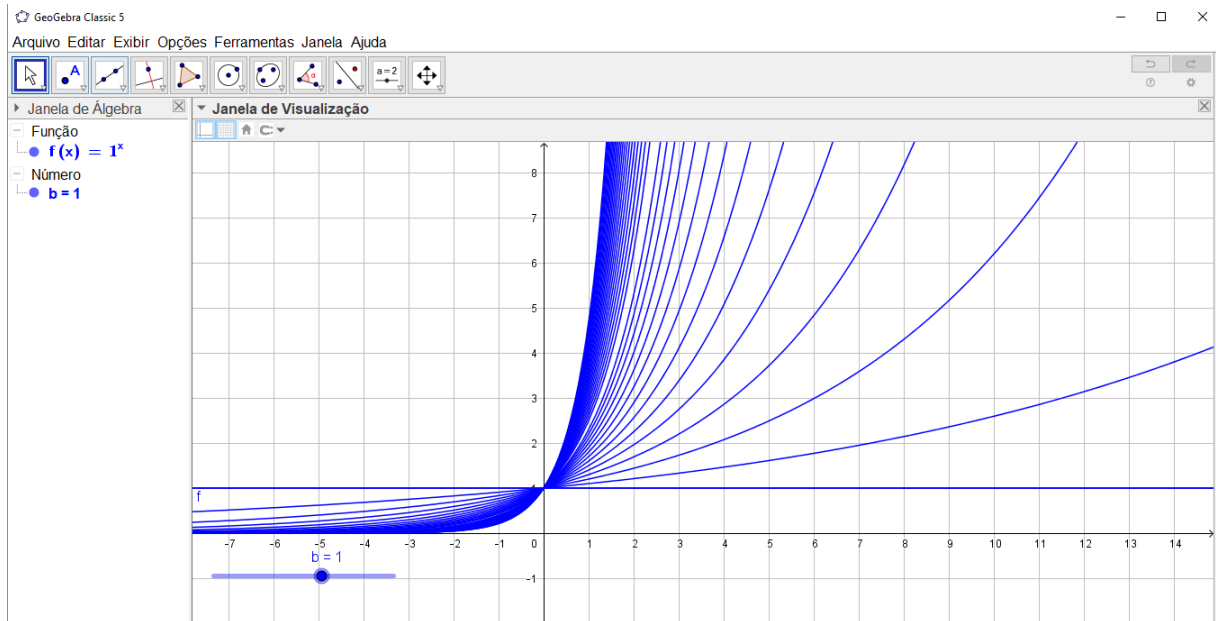
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.92 – Representação da função exponencial quando $b = 1$



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.93 – Representação da função exponencial quando $b \geq 1$



Fonte: Elaborado pela autora

Finalizada a apresentação da animação como descrito nas imagens acima, terminamos a atividade 3. Após as discussões e definições formalizadas com base no capítulo 2, os alunos iniciaram a última atividade proposta referente a aplicação dos conceitos adquiridos.

A seguir, faremos a análise dos resultados obtidos na última etapa, os problemas propostos na atividade 4.

3.4 ANÁLISE DA ATIVIDADE 4 – Exercícios de Função Exponencial

A atividade 4 (Anexo IV) aborda o estudo de 5 exercícios sobre função exponencial sendo um item sobre a construção de gráfico e 4 itens questões de vestibulares.

3.4.1 Análise do Item 1a

Item 1a: Construa o gráfico, determine o conjunto domínio e imagem da função exponencial $f(x) = \left(\frac{5}{4}\right)^x$.

Neste item era esperado que o aluno construísse o gráfico após todas as orientações recebidas conforme as atividades anteriores. Na elaboração desta pergunta houve um erro de digitação. A ideia inicial era que o item 1a seria relacionado a uma função decrescente $f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^x$ e o item 1b uma função crescente $f(x) = 4^x$, porém, a função do item 1a foi digitada com a base inversa da original, fato que só foi percebido na aplicação da atividade, pois os alunos começaram a desenhar intuitivamente o gráfico de forma decrescente ao constatarem que a base estava na forma de fração o que ocasionou um tipo de erro na resolução desta questão. Esta situação não aconteceu na turma do 1EM, aconteceu nos 2EM e 3EM pois as atividades eram aplicadas, primeiramente, nestes dois últimos grupos devido ao horário das aulas.

Outro erro analisado foi o de leitura e interpretação, devido a não leitura da pergunta, o aluno observou a malha quadriculada (Anexo IV) que seria utilizada para a representação do gráfico e não se atentou que era pedido além do desenho que se determinasse o conjunto domínio e a imagem da função exponencial.

Como ao analisar as respostas a maioria dos alunos não responderam corretamente as perguntas do problema proposto, apresentaremos duas tabelas com as estatísticas encontradas. A Tabela 3.23 é referente as respostas obtidas na construção dos gráficos e a Tabela 3.24 se refere as respostas dadas aos conjuntos domínio e imagem.

No 1EM, 33% dos alunos construíram o gráfico corretamente (Tabela 3.23) como mostram as Figuras 3.94 e 3.95, 22% apresentaram uma resposta Satisfatória (Tabela 3.23) pois não apresentaram a continuidade do gráfico (Figura 3.96) e 45% não fizeram corretamente (Tabela 3.23) pois não representaram os pontos corretamente no plano (Figura 3.97). Uma observação importante é que apenas dois alunos apresentaram uma reta como esboço do gráfico da função exponencial (Figura 3.98), desta forma ficou evidente que a maioria compreendeu que o gráfico exponencial tem o formato de uma curva e não reta.

Ainda analisando o 1EM, observamos que 11% responderam de maneira Plenamente Satisfatória (Tabela 3.24) em relação ao conjunto domínio e imagem que fora pedido no problema (Figura 3.95), 5% apresentaram resposta Satisfatória (Tabela 3.24) pois errou apenas o conjunto domínio (Figura 3.96) e 84% não responderam à pergunta.

Tabela 3.23 – Repostas obtidas no item 1a em relação a construção do gráfico

Ano	Plenamente Satisfatória	Satisfatória	Não Satisfatória	Total
1EM	6	4	8	18
2EM	3	6	13	22
3EM	2	6	5	13

Fonte: Elaborado pela autora

No 2EM em relação aos gráficos construídos encontramos 14% dos alunos que acertaram o gráfico, 27% que construíram de maneira incompleta e 59% que erraram a representação pedida. Nenhum aluno apresentou resposta para os conjuntos domínio e imagem, nem parcialmente correta, desta forma 100% dos alunos não responderam à questão. Novamente, encontramos um rendimento abaixo do esperado, comprovando a dificuldade que o grupo enfrenta ao representar gráficos no plano cartesiano.

Tabela 3.24 – Repostas obtidas no item 1a em relação aos conjuntos domínio e imagem

Ano	Plenamente Satisfatória	Satisfatória	Não Satisfatória	Total
1EM	2	1	15	18
2EM	0	0	22	22
3EM	3	1	9	13

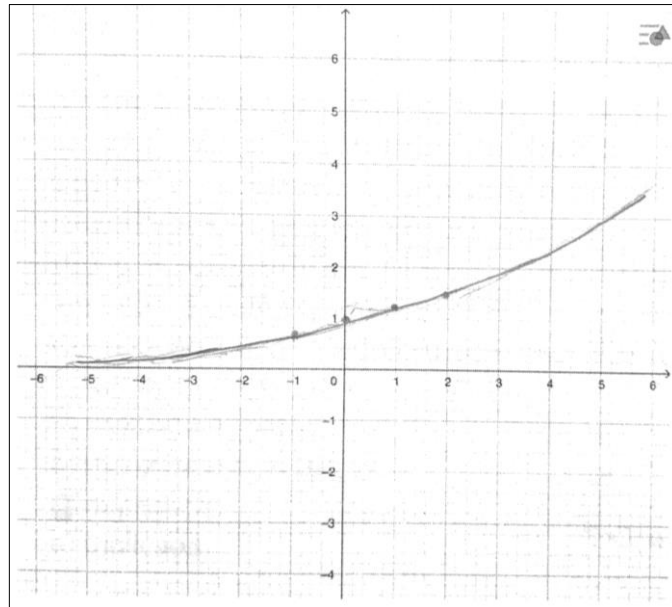
Fonte: Elaborado pela autora

Na análise do 3EM dois alunos se ausentaram nesta etapa final, diminuindo de 15 para 13 alunos, pois a atividade foi aplicada na sétima aula que é última do período da manhã. Desta forma, tivemos alunos que foram embora na sexta aula não concluindo a atividade

Ao construir o gráfico do item 1a, dos alunos do 3EM, 15% apresentaram resposta Plenamente Satisfatória, 46% apresentaram resposta Satisfatória e 39% de Não Satisfatória. Na Figura 3.99 observamos o erro citado no início do texto, o aluno fez um gráfico de uma função decrescente por notar que a base do item 1a estava na forma de fração, porém não verificou que se tratava de uma fração imprópria cujo valor representa um número maior que 1.

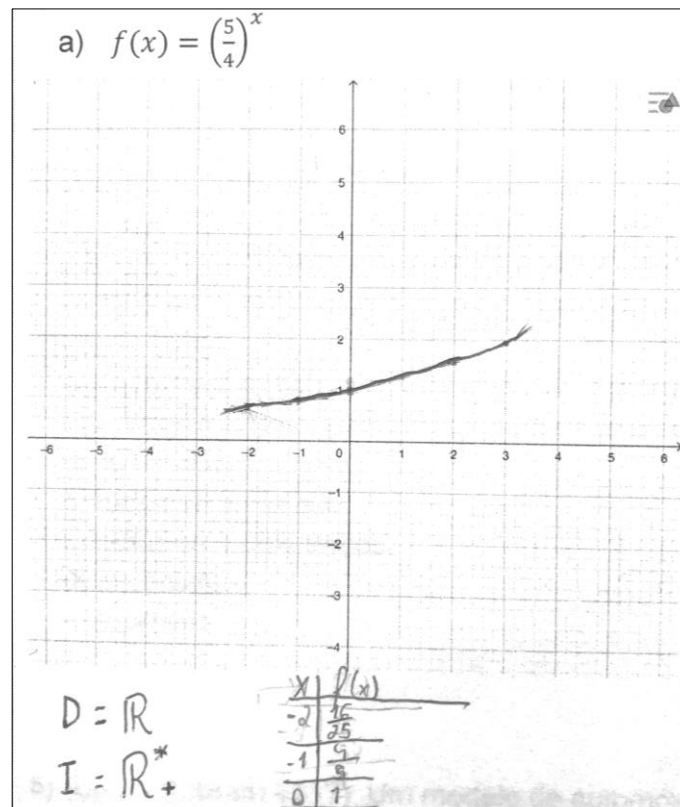
Em relação as respostas sobre conjuntos domínio e imagem, 23% acertaram a pergunta, 8% parcialmente correto e 69% não fizeram a questão.

Figura 3.94 – Resposta Plenamente Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade 1ª



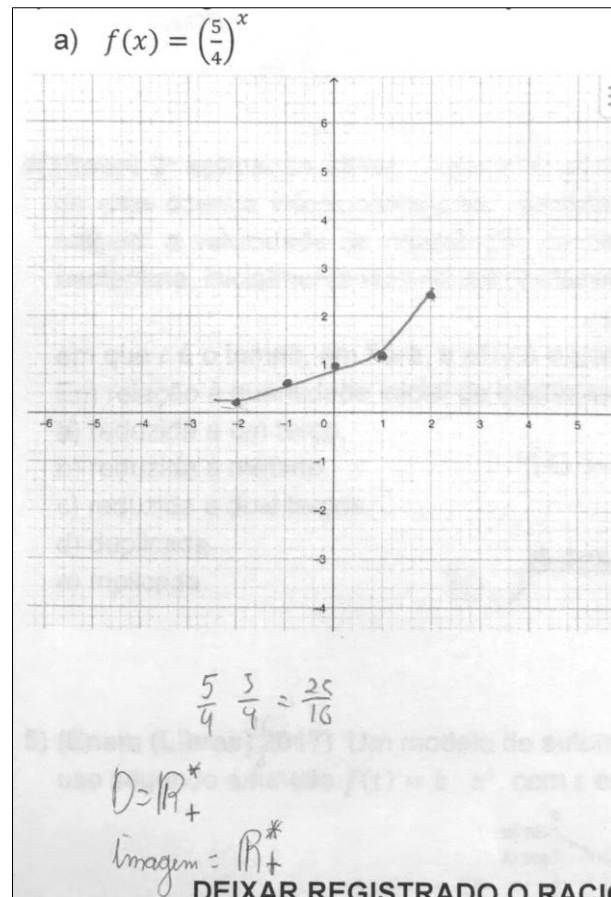
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.95 – Resposta Plenamente Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade 1a



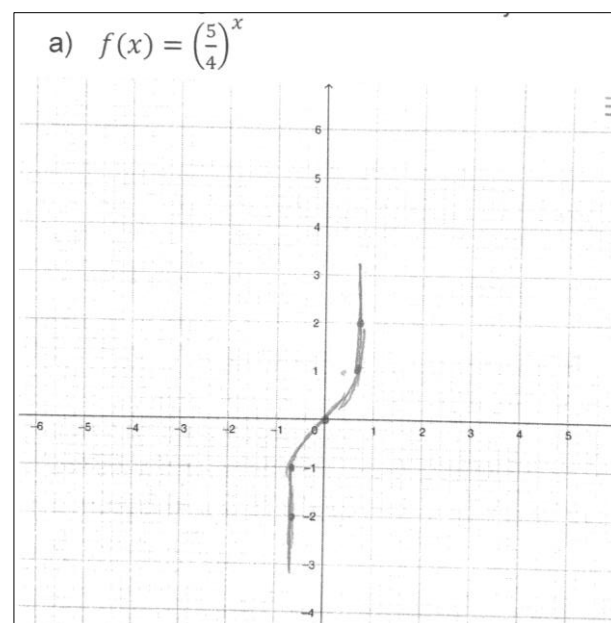
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.96 – Resposta Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade 1a



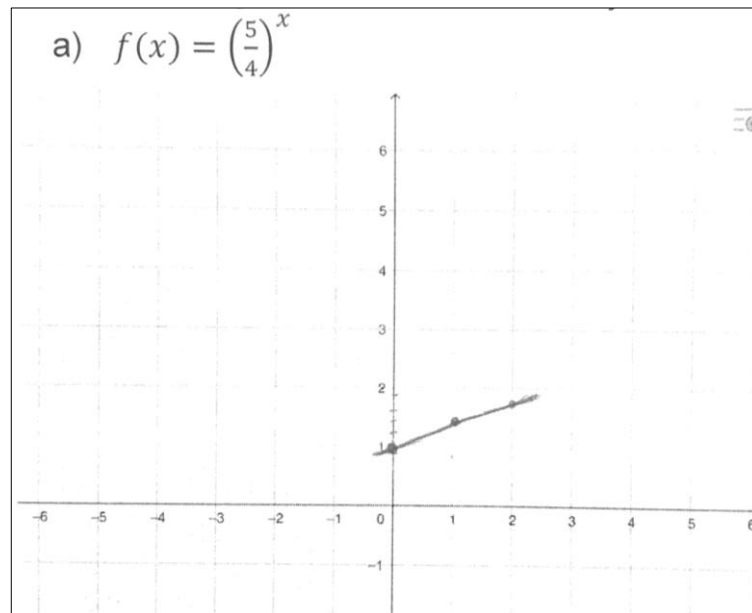
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.97 – Resposta Não Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade 1a



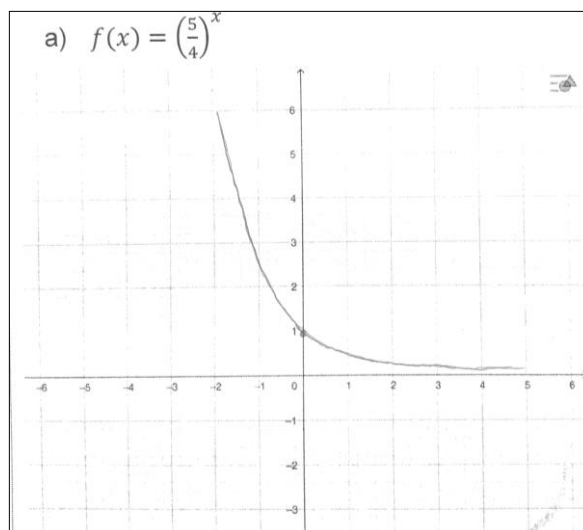
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.98 – Resposta Não Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade 1a



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.99 – Resposta Não Satisfatória de um aluno do 3EM na atividade 1a



Fonte: Elaborado pela autora

3.4.2 Análise do Item 1b

Item 1b: Construa o gráfico, determine o conjunto domínio e imagem da função exponencial $f(x) = 4^x$.

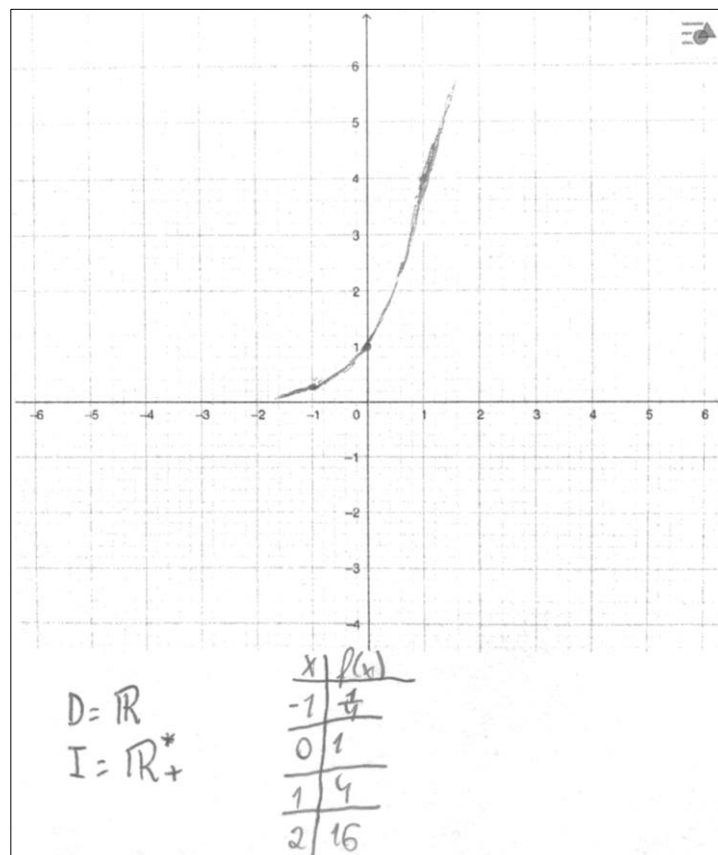
Neste item era esperado que o aluno construísse o gráfico após todas as orientações recebidas conforme as atividades anteriores.

Nesta análise também utilizaremos duas tabelas devido a regularidade dos erros apontados no item 1a. A Tabela 3.25 é referente as respostas obtidas na construção dos gráficos e a Tabela 3.26 se refere as respostas dadas aos conjuntos domínio e imagem.

No 1EM, 33% apresentaram resposta Plenamente Satisfatória (Tabela 3.25) como mostra a Figura 3.100, 33% apresentaram resposta Satisfatória (Tabela 3.25) porque não apresentaram a continuidade da função (Figura 3.101) e 34% não apresentaram a construção correta do gráfico.

Analisando o 1EM em relação as respostas sobre os conjuntos domínio e imagem, 11% dos alunos responderam corretamente (Tabela 3.26) como mostra a Figura 3.100, 5% apresentaram uma resposta Satisfatória (Tabela 3.26) como apresentado na Figura 3.101 o erro apenas do conjunto domínio e 84% não responderam a questão (Tabela 3.26).

Figura 3.100 – Resposta Plenamente Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade 1b



Fonte: Elaborado pela autora

Tabela 3.25 – Repostas obtidas no item 1b em relação a construção do gráfico

Ano	Plenamente Satisfatória	Satisfatória	Não Satisfatória	Total
1EM	6	6	6	18
2EM	3	13	6	22
3EM	4	7	2	13

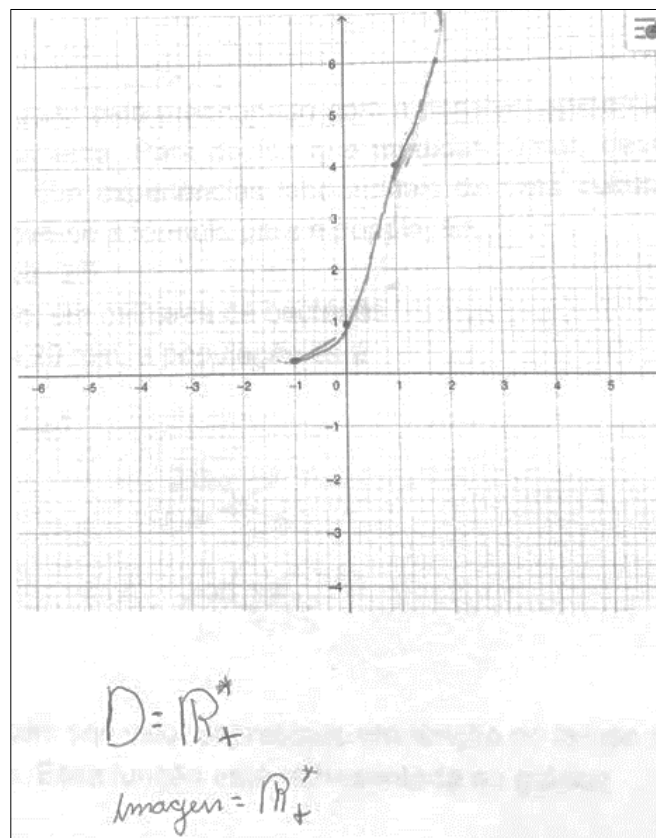
Fonte: Elaborado pela autora

Tabela 3.26 – Repostas obtidas no item 1b em relação aos conjuntos domínio e imagem

Ano	Plenamente Satisfatória	Satisfatória	Não Satisfatória	Total
1EM	2	1	15	18
2EM	0	0	22	22
3EM	3	1	9	13

Fonte: Elaborado pela autora

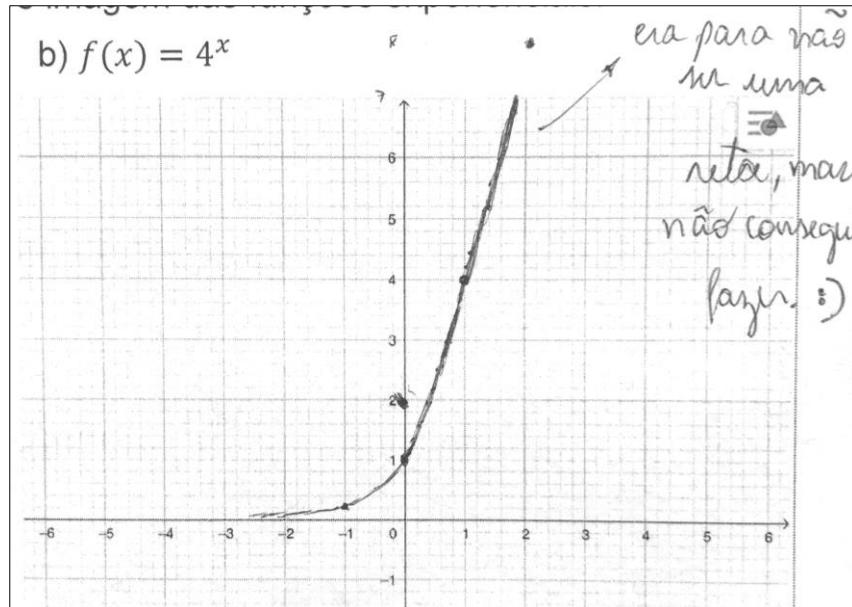
Figura 3.101 – Resposta Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade 1b



Fonte: Elaborado pela autora

Após a correção do item 1a e 1b ficou evidente que os alunos compreenderam, na sua maioria, que o gráfico de uma exponencial não tem formato de uma reta e sim curva (Figura 3.102).

Figura 3.102 – Resposta Plenamente Satisfatória de um aluno do 1EM na atividade 1b



Fonte: Elaborado pela autora

No 2EM, 14% dos alunos conseguiram apresentar o gráfico corretamente, 59% de forma incompleta e 27% não fizeram corretamente. Nenhum dos alunos deste grupo respondeu à pergunta sobre os conjunto domínio e imagem (Tabela 3.26).

No 3EM, 31% dos alunos responderam de forma Plenamente Satisfatória a construção do gráfico (Tabela 3.25), 54% apresentaram uma resposta Satisfatória por não mostrarem a continuidade da função e 15% não fizeram corretamente.

Encontramos 23% dos alunos do 3EM que souberam escrever corretamente os conjuntos domínio e imagem da função (Tabela 3.26), 8% fizeram de forma incompleta e 69% não fizeram.

3.4.3 Análise do Item 2

Item 2: (Pucrs 2017) Uma rede social dobra o número de usuários a cada dia. Uma função que pode dar o número de usuários desta rede em função do número de dias é:

Neste item era esperado que os alunos pudessem resolver um problema que fosse similar ao da bactéria utilizando os conhecimentos adquiridos conforme a aplicação das atividades fazendo associação ao problema que serviu como introdução ao estudo da função exponencial (Anexo I).

Neste problema proposto, tivemos apenas respostas Plenamente Satisfatória ou Não Satisfatória por ser uma questão de múltipla escolha.

No 1EM, 61% dos alunos conseguiram resolver a questão (Tabela 3.27), por se tratar de uma questão de múltipla escolha, teve aluno que substituiu os valores nas funções para se certificar da alternativa correta (Figura 3.103) ou organizaram os crescimentos por meio de diagrama para compreender a lei (Figuras 3.104 e 3.105) Os alunos apresentaram 39% de resposta incorreta (Tabela 3.27) pois, compreenderam que o crescimento dobrava porém associou a uma função linear (Figuras 3.106 e 3.107)

Figura 3.103 – Resposta Plenamente Satisfatória de um aluno do 1EM no item 2

a) $f(n) = 2n$
 b) $f(n) = n^2$
 c) $f(n) = \log_2 n$
 d) $f(n) = 2^n$
 e) $f(n) = 3^n$

$\times f(n) = n^2$ $\times f(n) = 2n$ $\checkmark f(n) = 2^n$
 $f(n) = 1^2$ $f(n) = 2 \cdot 1$ $f(n) = 2^1$
 $f(n) = 1$ $f(n) = 2$ $f(n) = 2$
 $f(n) = 2 \cdot 2$ $f(n) = 2^2$
 $f(n) = 4$ $f(n) = 4$
 $f(n) = 2 \cdot 3$ $f(n) = 2^3$
 $f(n) = 6$ $f(n) = 8$
 $f(n) = 16$

Fonte: Elaborado pela autora

No 2EM, 73% apresentaram resposta Plenamente Satisfatória e 27% respostas Não Satisfatória.

O 3EM, apresentou uma taxa maior de acerto que foi de 85% e 15% de questões incorretas.

Tabela 3.27 – Repostas obtidas no item 2

Ano	Plenamente Satisfatória	Satisfatória	Não Satisfatória	Total
1EM	11	0	7	18
2EM	16	0	6	22
3EM	11	0	2	13

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.104 – Resposta Plenamente Satisfatória de um aluno do 1EM no item 2

2) (Pucrs 2017) Uma rede social dobra o número de usuários a cada dia. Uma função que pode dar o número de usuários desta rede em função do número de dias é

a) $f(n) = 2n$
b) $f(n) = n^2$
c) $f(n) = \log_2 n$
d) $f(n) = 2^n$
e) $f(n) = 3^n$

*n = número de dias.
cada vez que aumentar 1 dia, faz $\times 2$*

*ex: $2^1 \rightarrow 2$ usuários
 $2^2 \rightarrow 4$ usuários
 $2^3 \rightarrow 8$ usuários,*

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.105 – Resposta Plenamente Satisfatória de um aluno do 1EM no item 2

2) (Pucrs 2017) Uma rede social dobra o número de usuários a cada dia. Uma função que pode dar o número de usuários desta rede em função do número de dias é

a) $f(n) = 2n$
b) $f(n) = n^2$
c) $f(n) = \log_2 n$
d) $f(n) = 2^n$
e) $f(n) = 3^n$

*$f(0) = 1$ usuário
 $f(1) = 2$ usuários
 $f(2) = 4$ usuários
 $f(3) = 8$ "*

*$f(n) = 2^n$
 $f(0) = 2^0 = 1$
 $f(1) = 2^1 = 2$
 $f(2) = 2^2 = 4$
 $f(3) = 2^3 = 8$*

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.106 – Resposta Não Satisfatória de um aluno do 1EM no item 2

2) (Pucrs 2017) Uma rede social dobra o número de usuários a cada dia, Uma função que pode dar o número de usuários desta rede em função do número de dias é

a) $f(n) = 2n$
 b) $f(n) = n^2$
 c) $f(n) = \log_2 n$
 d) $f(n) = 2^n$
 e) $f(n) = 3^n$

$1^\circ - 1$
 $2^\circ - 2$
 $\dots \times 2$
 $3^\circ - 4^4$

Para aumentar o número é preciso multiplicar o número anterior por 2.

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.107 – Resposta Não Satisfatória de um aluno do 1EM no item 2

2) (Pucrs 2017) Uma rede social dobra o número de usuários a cada dia. Uma função que pode dar o número de usuários desta rede em função do número de dias é

a) $f(n) = 2n$
 b) $f(n) = n^2$
 c) $f(n) = \log_2 n$
 d) $f(n) = 2^n$
 e) $f(n) = 3^n$

pois de acordo com o número de dias (n), o número de usuários dobra, ou seja, $[2 \cdot n]$.

Fonte: Elaborado pela autora

3.4.4 Análise do Item 3

Item 3: (PUCRS) A cada balanço anual, uma firma tem apresentado um aumento de 10% de seu capital. Considerando Q_0 o seu capital inicial, qual a expressão que fornece esse capital C , ao final de cada ano (t) em que essas condições permanecerem.

Neste item era esperado que o aluno pudesse resolver o problema utilizando os conceitos adquiridos conforme as atividades anteriores. Esta pergunta é similar a questão 2 da atividade 2 (Anexo II) e uma possível justificativa esperada para esta resolução era fazer uma relação entre essas duas atividades.

Nesta questão, houve um erro de digitação pois as alternativas a) e c) ficaram idênticas, porém, isso não alterou o resultado correto que estava na alternativa a.

No 1EM, 44% dos alunos acertaram a questão (Tabela 3.28) como mostra a Figura 3.108 e 56% erraram o problema (Tabela 3.28). Na Figura 3.109 encontramos uma justificativa errada da questão pois representou o cálculo do aumento e não quanto ficaria de fato o capital após o aumento.

Tabela 3.28 – Repostas obtidas no item 3

Ano	Plenamente Satisfatória	Satisfatória	Não Satisfatória	Total
1EM	8	0	10	18
2EM	10	0	12	22
3EM	8	0	5	13

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.108 – Resposta Plenamente Satisfatória de um aluno do 1EM no item 3

3) (PUCRS) A cada balanço anual, uma firma tem apresentado um aumento de 10% de seu capital. Considerando Q_0 o seu capital inicial, qual a expressão que fornece esse capital C , ao final de cada ano (t) em que essas condições permanecerem, é

a) $C = Q_0(1,1)^t$

b) $C = C(1,1)^t$ ✗

c) $C = Q_0(0,1)^t$

d) $C = Q_0(0,1)^t$

e) $C = Q_0(10)^t$

Q_0

$C = 200 (0)$

R: Uma vez que o capital aumentará, teremos 110% e não 10%
(1,1) (0,1)

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.109 – Resposta Não Satisfatória de um aluno do 1EM no item 3

3) (PUCRS) A cada balanço anual, uma firma tem apresentado um aumento de 10% de seu capital. Considerando Q_0 o seu capital inicial, qual a expressão que fornece esse capital C , ao final de cada ano (t) em que essas condições permanecerem, é

a) $C = Q_0(1,1)^t$

b) $C = C(1,1)^t$

c) $C = Q_0(0,1)^t$

d) $C = Q_0(0,1)^t$

e) $C = Q_0(10)^t$

pois, primeiramente 10% é $\frac{10}{100} = 0,1$, então eliminamos o a) b) e). Cada ano aumenta 10% ao capital inicial, ou seja, Q_0 vezes o aumento de 10% do ano.

Fonte: Elaborado pela autora

No 2EM, 45% dos alunos responderam corretamente e 55% não acertaram.

No 3EM, 62% dos alunos acertaram e muitos utilizaram a fórmula de juros compostos (Figura 3.110) e 38% erraram o exercício.

Figura 3.110 – Resposta Plenamente Satisfatória de um aluno do 3EM no item 3

3) (PUCRS) A cada balanço anual, uma firma tem apresentado um aumento de 10% de seu capital. Considerando Q_0 o seu capital inicial, qual a expressão que fornece esse capital C , ao final de cada ano (t) em que essas condições permanecerem, é

(a) $C = Q_0(1,1)^t$
 b) $C = C(1,1)^t$
 c) $C = Q_0(0,1)^t$
 d) $C = Q_0(0,1)^t$
 e) $C = Q_0(10)^t$

O total = capital inicial + os 10% que aumenta por ano
 $C = Q_0 \cdot (1,1)^t$

↳ Juros compostos.
 $M = C_0 \cdot \left(1 + \frac{n}{100}\right)^t$

$M =$ total
 $n =$ a taxa de desconto ou aumento
 $t =$ tempo.
 $C_0 =$ capital inicial

Fonte: Elaborado pela autora

3.4.5 Análise do Item 4

Item 4: (Enem 2ª aplicação 2016) O governo de uma cidade está preocupado com a possível epidemia de uma doença infectocontagiosa causada por bactéria. Para decidir que medidas tomar, deve calcular a velocidade de reprodução da bactéria. Em experiências laboratoriais de uma cultura bacteriana, inicialmente com 40 mil unidades, obteve-se a fórmula para a população:

$$p(t) = 40 \cdot 2^{3t}$$

em que t é o tempo, em hora e $p(t)$ é a população, em milhares de bactérias.

Em relação à quantidade inicial de bactérias, após 20 min, a população será

Neste problema era esperado que o aluno conseguisse interpretar e utilizar a função exponencial para resolver a questão. Para este item, não houve tempo de resolver algo similar, apenas foi orientado sobre as definições das funções por meio das atividades anteriores.

No 1EM, 56% dos alunos acertaram a questão (Tabela 3.29), entre estes que fizeram corretamente encontramos respostas em que o aluno usou a fórmula e apresentou uma escrita mais formalizada (Figura 3.111) e também os que foram

resolvendo sem se preocupar com a lei (Figura 3.112). Tivemos 44% de questões erradas, dentre as resoluções erradas destacamos duas. Na Figura 3.113, o aluno utilizou corretamente a lei da função, contudo, optou por fazer aproximação para o valor do tempo e não conseguiu finalizar os cálculos pois encontrou um número irracional. E na Figura 3.114, encontramos erro no uso da fórmula pois o aluno se esqueceu que o expoente era $3t$ e não t . Interessante notar, nas Figuras 3.113 e 3.114, que os alunos assinalaram a alternativa que representa reduzir a um terço. E provavelmente escolheram essa alternativa porque um terço da hora equivale a vinte minutos.

No 2EM, tivemos 60% de acertos e 40% de erros.

No 3EM, tivemos 85% de respostas Plenamente Satisfatória e 15% de Não Satisfatória.

Tabela 3.29 – Repostas obtidas no item 4

Ano	Plenamente Satisfatória	Satisfatória	Não Satisfatória	Total
1EM	10	0	8	18
2EM	13	0	9	22
3EM	11	0	2	13

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.111 – Resposta Plenamente Satisfatória de um aluno do 1EM no item 4

4) (Enem 2ª aplicação 2016) O governo de uma cidade está preocupado com a possível epidemia de uma doença infectocontagiosa causada por bactéria. Para decidir que medidas tomar, deve calcular a velocidade de reprodução da bactéria. Em experiências laboratoriais de uma cultura bacteriana, inicialmente com 40 mil unidades, obteve-se a fórmula para a população:

$$p(t) = 40 \cdot 2^{3t}$$

em que t é o tempo, em hora, e $p(t)$ é a população, em milhares de bactérias.

Em relação à quantidade inicial de bactérias, após 20 min, a população será

- a) reduzida a um terço.
- b) reduzida à metade.
- c) reduzida a dois terços.
- d) duplicada.
- e) triplicada.

$$20 \text{ min} = \frac{1}{3} \cdot h \quad \left| \quad \begin{array}{l} p(t) = 40 \cdot 2^{3 \cdot \frac{1}{3}} \\ p(t) = 40 \cdot 2^1 \\ p(t) = 80 \end{array} \right.$$

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.112 – Resposta Plenamente Satisfatória de um aluno do 1EM no item 4

Em relação à quantidade inicial de bactérias, após 20 min, a população será

a) reduzida a um terço.
 b) reduzida à metade.
 c) reduzida a dois terços.
 d) duplicada.
 e) triplicada.

20 mins = $\frac{1}{3}$ de 60 $\frac{2}{1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = \frac{1}{1}$

40 mil, 2^t

$40 \cdot 2 = 80 \text{ mil}$

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.113 – Resposta Não Satisfatória de um aluno do 1EM no item 4

Em relação à quantidade inicial de bactérias, após 20 min, a população será

a) reduzida a um terço.
 b) reduzida à metade.
 c) reduzida a dois terços.
 d) duplicada.
 e) triplicada.

40 ml unvolados

$p(t) = 40 \cdot 2^{3 \cdot 0,3}$

$p(t) = 40 \cdot 2^{\frac{9}{10}}$

$p(t) = 40 \cdot \sqrt[10]{2^9}$

$\frac{0,3}{0,9}$

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.114 – Resposta Não Satisfatória de um aluno do 1EM no item 4

Em relação à quantidade inicial de bactérias, após 20 min, a população será

a) reduzida a um terço.
 b) reduzida à metade.
 c) reduzida a dois terços.
 d) duplicada.
 e) triplicada.

40 mil unicas

$40 \cdot 2^{0,333...}$

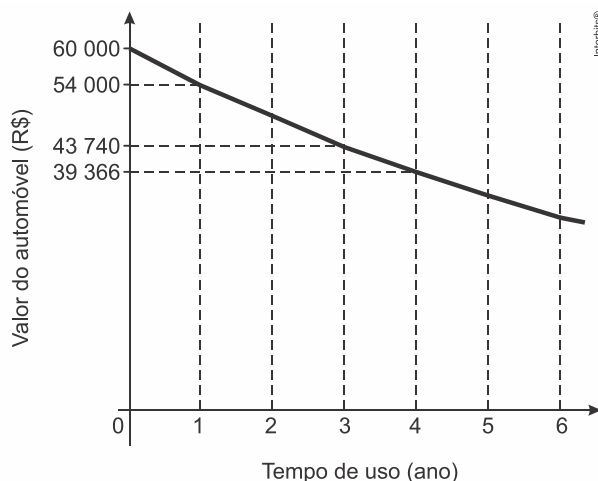
~~20~~
~~60~~

$\frac{20}{20} = 0,33$

Fonte: Elaborado pela autora

3.4.6 Análise do Item 5

Item 5: (Enem (Libras) 2017) Um modelo de automóvel tem seu valor depreciado em função do tempo de uso segundo a função $f(t) = b \cdot a^t$, com t em ano. Essa função está representada no gráfico.



Qual será o valor desse automóvel, em real, ao completar dois anos de uso?

Neste item era esperado que o aluno conseguisse interpretar o gráfico e conseguisse obter a lei da função e resolver o exercício. Para este item também não houve tempo de resolver algo similar, foi apresentado ao aluno com o intuito de observar os possíveis resultados sem maiores explicações ou orientação sobre o conteúdo, baseando somente o conhecimento nas orientações das atividades anteriores analisando qual a resposta apresentada por estes grupos.

No 1EM, 11% dos alunos acertaram a questão (Tabela 3.30) como mostram as Figuras 3.115 e 3.116 e 89% não souberam fazer (Tabela 3.30). Na Figura 3.115, observamos o uso correto da lei que define a função e atribuição de pontos do gráfico, na Figura 3.116 o aluno acertou após ter feito a primeira tentativa de forma equivocada. O percentual alto de questões que apresentaram resposta Não Satisfatória era esperado, uma vez que nada parecido foi resolvido com o grupo. E também entrou nesta porcentagem os alunos que não justificaram a questão apenas assinalando a alternativa correta.

Tabela 3.30 – Respostas obtidas no item 5

Ano	Plenamente Satisfatória	Satisfatória	Não Satisfatória	Total
1EM	2	0	16	18
2EM	5	0	17	22
3EM	6	0	7	13

Fonte: Elaborado pela autora

No 2EM, 23% dos alunos acertaram a questão e 77% erraram. Enquanto que no 3EM, 46% apresentaram resposta Plenamente Satisfatória e 54% de resposta Não Satisfatória.

Figura 3.115 – Resposta Plenamente Satisfatória de um aluno do 1EM no item 5

Qual será o valor desse automóvel, em real, ao completar dois anos de uso?

a) 48000,00
 b) 48114,00
 c) 48600,00
 d) 48870,00
 e) 49683,00

$(0, 60000)$ $(1, 54000)$ $(2, x)$

$60000 = b \cdot a^0$ $54000 = 60000 \cdot a^1$ $60000 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^2 = X$

$60000 = b \cdot 1$ $\frac{54000}{60000} = a$ $60000 \cdot \frac{81}{100} = X$

$b = 60000$ $a = \frac{9}{10}$

$X = 600 \cdot 81$
 $X = 48600$

2

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.116 – Resposta Plenamente Satisfatória de um aluno do 1EM no item 5

Qual será o valor desse automóvel, em real, ao completar dois anos de uso?

a) 48000,00
 b) 48114,00
 c) 48600,00
 d) 48870,00
 e) 49683,00

$X = 60.000 \cdot 0,9^2$
 $X = 48.600,00$

$54.000 = 60.000 \cdot a^1$
 $a = 0,9$

$60.000 = b \cdot a^0$
 $60.000 = 60.000$

$43.740 = b \cdot a^3$ certo

$60.000 = b \cdot a^2 \cdot 1$
 $60.000 = 60.000$

$0,9 \cdot 0,9 = 0,81$
 $60.000 \cdot 0,81 = 48.600,00$

$60.000 - 0 \text{ anos} = 60.000$
 $43.740 - 3 \text{ anos} = 43.740$
 16.260

$16.260 \cdot 3 \text{ meses} = 48.780$
 $X \leftarrow 2 \text{ anos} = 48.600$

$3x = 32.520$
 $x = 10.840$

$54.000 = b \cdot a^1$
 $54.000 = 60.000 \cdot a$
 $a = 0,9$
 $60.000 = b \cdot a^0$
 $60.000 = b$
 $60.000 \cdot 0,9^2 = X$
 $60.000 \cdot 0,81 = X$
 $48.600 = X$

erros

erros

2

Fonte: Elaborado pela autora

Após a análise deste último problema, finalizamos as quatro atividades propostas para o estudo das funções exponenciais (Anexos I, II, III e IV). Essas atividades foram elaboradas em quatro aulas de 50 minutos cada e aplicadas em dois

dias diferentes, uma pausa de vinte dias entre a primeira aplicação e a segunda, nas aulas duplas da professora.

Os resultados encontrados nos mostraram que uma proposta de aula baseada em Resolução de Problemas, como propõe Onuchic(1999), é uma alternativa em relação ao método tradicional de ensino, que gerou resultados satisfatórios como fomos constatando ao longo das análises das atividades.

Nesta última etapa, vimos que é possível que o aluno consiga elaborar resultados corretos sem que o professor tenha utilizado de todas as explicações necessárias, para que esse possa apresentar soluções adequadas para os problemas propostos. É natural, também, encontrar alunos que não consigam desenvolver resultados pertinentes ao que é proposto, por possuírem dificuldades específicas.

Os professores acabam sendo relutantes com as metodologias alternativas a tradicional, talvez porque não foram preparados a utilizarem estes modelos de aulas em sua vida escolar e nem formados em sua graduação para utilizá-los. É preciso uma formação nesta linha. O ensino da matemática através da repetição e mecanização sem se importar com a compreensão é utilizado, até hoje, como sendo o melhor método de ensino. Porém vimos, aplicando essas 4 atividades, que é possível aprender os mesmos conteúdos começando pelo caminho inverso, através do qual o aluno se apropria do conhecimento já adquirido em anos anteriores para conduzi-lo em novas construções e transformações.

Em relação aos resultados obtidos nesta última atividade, o 1EM apresentou resultados satisfatórios, dentro do que era esperado, nos motivando a continuar a elaboração de aulas com a metodologia proposta neste trabalho.

O 2EM foi um grupo que nos chamou a atenção, por ter ficado evidente a dificuldade em resolver e discutir problemas relacionados a função, plano cartesiano e interpretação. Com estes resultados, poderemos retomar os assuntos que não foram bem compreendidos para que possam sanar as dificuldades apresentadas ao longo desse trabalho.

O 3EM mostrou um bom rendimento nestes problemas, possivelmente, por já terem visto os conteúdos analisados nessas questões e por estarem se preparando para as provas de ingresso para as universidades. Porém, assim como o 2EM, em muitos momentos, apresentaram um resultado aquém do esperado.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho foi elaborado e proposto para ensinar parte do estudo da função exponencial por meio da metodologia de Resolução de Problemas, como propõe Onuchic (1999). Infelizmente, por falta de tempo, não foi possível explorar junto aos alunos as variações da função exponencial quando há translação do gráfico, quando a base é o Número de Neper (e), equações e inequações exponenciais.

O desenvolvimento deste trabalho nos proporcionou um grande aprendizado sobre as novas metodologias, principalmente a de Resolução de Problemas, promovendo muitas reflexões acerca da necessidade de ir mesclando o uso de metodologias alternativas com o ensino tradicional. A sua elaboração permitiu que a autora pudesse aprender e aprofundar seus conhecimentos em relação aos conteúdos apresentados e sua prática em sala de aula, rompendo paradigmas de ensinar a matemática iniciando com a teoria e finalizando com a resolução de problemas.

Ao longo do processo, um dos grandes problemas enfrentados pela professora foi o tempo proposto para aplicar as aulas utilizando a metodologia proposta, uma vez que a professora não dispunha de tantas aulas para fazer essa construção. No currículo atual, é esperado que o professor conclua o conteúdo todo de função exponencial (incluindo equação exponencial e inequação exponencial) em, no máximo, quatro aulas. No entanto quatro aulas foram suficientes apenas para fazer uma introdução ao conteúdo com poucas aplicações e sem conseguir fazer a correção com os alunos da última atividade. O que nos faz pensar sobre a necessidade de uma melhor reestruturação dos conteúdos que são obrigatórios durante o período escolar. Infelizmente, há muito conteúdo previsto que acaba sendo explorado muito rapidamente e de forma muito superficial ou mecânica, apenas com o intuito de serem aprovados no vestibular de um curso universitário, ao terminarem o ensino médio. Dessa forma, o aluno acaba não conseguindo compreender a necessidade dos temas estudados por não conseguirem fazer as associações dos assuntos aprendidos com a sua realidade.

Outro problema é o tempo que levamos para elaborar tais aulas, uma vez que a maioria dos materiais didáticos (apostilas de escolas particulares) foram sendo elaborados pensando na construção matemática de forma mecanizada e repetitiva. Os materiais estão mudando muito lentamente se comparado as dificuldades que as

novas gerações vêm apresentando ao se deparar com uma aula totalmente tradicional. Os alunos do século XXI já nascem em um mundo muito mais evoluído, cheio de tecnologias que facilitam a experiência cotidiana, porém, ao esbarrarem num modelo tradicional de ensino, se sentem, na sua maioria, desmotivados por não encontrarem essa mesma facilidade no processo de ensino-aprendizagem.

É importante ressaltar que o ensino deve ser um equilíbrio de metodologias, uma vez que também é importante desenvolver problemas matemáticos, porém não é necessário que seja de forma mecânica. Só é possível aprender quando o que se propõe a ensinar faz algum sentido para o aprendiz. Neste contexto, a metodologia de Resolução de Problemas contribui para uma melhor aprendizagem, porque faz com que o aluno possa compreender e transformar o problema para a sua realidade.

As análises dessas atividades mostraram que o 1EM se adaptou e recebeu bem a nova metodologia, fornecendo-nos resultados sobre a eficácia dessa metodologia. O 2EM e 3EM trouxeram dados importantes sobre as defasagens que podem aparecer no ensino de forma totalmente tradicional, pois o aluno, sendo passivo no processo de ensino-aprendizagem, torna-se acomodado na construção do conhecimento e apenas repetidor do que “aprendeu”, perdendo a possibilidade de aprimorar seu pensamento crítico, o que nos fez refletir sobre a necessidade de reformular as aulas propostas anteriormente a este trabalho.

Ao concluir este trabalho, mesmo sendo a primeira aplicação neste formato de aula da autora e dos alunos, os resultados apresentados foram satisfatórios e surpreendentes, principalmente, para o grupo do 1EM. Dessa forma, percebemos que o aluno se sentiu mais motivado e participativo na dinâmica proposta. Isso incentivou-nos a continuar elaborando aulas utilizando a metodologia de ensino por meio de Resolução de Problemas. Utilizando esta metodologia, estaremos, como propõe Onuchic (1999), ajudando o aluno a entender que ele tanto aprenderá matemática resolvendo problemas como aprenderá matemática para resolver problemas.

Por fim, esperamos que este trabalho possa inspirar outros professores a aplicarem as atividades propostas nesse trabalho, adaptando-as de acordo com as suas realidades ou elaborando novas aulas por meio da Resoluções de Problemas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BANCO DE SAÚDE. **Bactéria pode ajudar a detectar tumores no fígado.** Disponível em: < <https://www.bancodasaude.com/noticias/bacteria-pode-ajudar-a-detetar-tumores-no-figado/>>, acesso em: 13 de jul. 2018.
- BRASIL, Secretaria e Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** Terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental/ Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- BRASIL, MEC, SEB. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio.** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, v.2. Brasília: MEC, SEB, 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>, acesso em 15 jul. 2018.
- KONKERO. **Saiba como retirar remédios gratuitos pelo SUS.** Disponível em: < <https://www.konkero.com.br/financas-pessoais/economizar/saiba-como-retirar-remedios-gratuitos-pelo-sus>>, acesso em: 13 de jul. 2018.
- LIMA, E. L. **Matemática e Ensino.** 3ª.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.
- LIMA, E. L. **Números e Funções Reais.** Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- GEOGEBRA. Disponível em: <<https://www.geogebra.org>>, acesso em: 13 de jul. de 2018.
- GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**, v. 1. Rio de Janeiro: LTC, 2001.
- IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar: conjuntos e funções**, v.1. São Paulo: Atual, 2004.
- IEZZI, G.; DOLCE, O.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar: logaritmos**, v.2. São Paulo: Atual, 2004.
- IEZZI, G.; MURAKAMI, C; MACHADO, N. J. **Fundamentos de Matemática Elementar: limites**, v.8. São Paulo: Atual, 2005.
- IEZZI, G. *et al.* **Matemática: ciência e aplicações.** 9ª ed. São Paulo: Saraiva, v.1, Ensino Médio, 2016.
- MARTINEZ, D. A. **Função exponencial e seu ensino através da Resolução de Problemas.** Dissertação de Mestrado, Unesp. São José do Rio Preto, 2015.
- ONUCHIC, L. De La R. **Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas.** In: BICUDO, M. A. V. (Org.) PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: CONCEPÇÕES E PERSPECTIVAS. São Paulo: Editora UNESP, 1999, p. 199-218.

ONUCCI, L. De La R. *et al.* **Resolução de Problemas: Teoria e Prática.** Jundiaí: Paco Editorial, 2014.

PAIVA, M. **Matemática: Paiva.** São Paulo: Moderna, v.1, Ensino Médio, 2013.

POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas:** Um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro- RJ: Interciência, 1995.

ANEXO I

ATIVIDADE 1: INTRODUÇÃO AO CONTEÚDO – PARTE 1

1) Analise a seguinte situação.

A maioria das bactérias reproduz-se por bipartição, processo pelo qual a bactéria se divide em outras duas.



Bactéria Escherichia coli.

Na imagem ao lado vemos a imagem de uma bactéria *Escherichia coli* é uma bactéria que habita naturalmente no intestino de humanos e de alguns animais, mas que em grandes quantidades pode causar problemas como gastroenterite ou infecção urinária, dependendo se o excesso de bactérias surgiu no intestino ou

no trato urinário e acontecendo, principalmente, quando se consome água ou alimentos contaminados.

Em uma cultura laboratorial, vamos considerar determinada bactéria, que se dividirá em duas, dando origem a primeira geração; cada bactéria da primeira geração sofrerá bipartição, dando origem à segunda geração, e assim por diante.

Admitindo que essas bactérias se bipartissem a cada 20 minutos e que todas sobrevivessem, ao final de um dia elas atingiriam a 72ª geração.

- a) Quantas bactérias teremos na 1ª geração?
- b) Quantas bactérias teremos na 3ª geração?
- c) Quantas bactérias teremos na 10ª geração?
- d) Quantas bactérias teremos na 72ª geração?
- e) Determine uma lei que relaciona o número de indivíduos gerados por uma bactéria (y), na geração (x).
- f) Esboce, na folha quadriculada o gráfico dessa situação. (*Folha em anexo, próxima página*).
- g) Sabendo que em determinado momento há 4096 bactérias em que geração de bactérias estaremos?
- h) Após quanto tempo teremos chegado na 10ª geração de bactérias?

ANEXO II

ATIVIDADE 2: INTRODUÇÃO AO CONTEÚDO – PARTE 2

- 1) Os antibióticos são utilizados no tratamento de infecções causadas por bactérias. A má utilização desse tipo de medicamento leva ao surgimento de bactérias cada vez mais resistentes, tornando alguns medicamentos ineficazes. Isso implica um ciclo vicioso que já ocasionou o desenvolvimento de mais de 200 tipos diferentes de antibióticos. A fim de inibir a



automedicação e o uso indiscriminado, em maio de 2011, a Agência Nacional de Vigilância Sanitária (Anvisa) publicou a resolução que determina que as farmácias devem comercializar antibióticos mediante a retenção da receita médica. Ainda assim, é importante utilizar antibióticos apenas nos casos realmente necessários, seguindo as orientações médicas e respeitando a posologia e a duração do tratamento.

A amoxicilina é um conhecido antibiótico usado no tratamento de diversas infecções não complicadas, receitado por médicos no Brasil. A bula de amoxicilina, como todos os medicamentos, contém, entre outros tópicos, a composição, as informações ao paciente, as informações técnicas e a posologia. Nas informações técnicas, é possível ler que a **meia-vida da amoxicilina após a administração do produto é de 1,3 hora**.

Mas o que essa informação significa?

A cada período de 1,3 hora ou 1 hora e 18 minutos (para facilitar vamos considerar 1 hora e 20 minutos), que quantidade de amoxicilina no organismo decresce em 50% do valor que tinha no início do período.

Considere que um adulto ingeriu uma cápsula de 500mg de amoxicilina e faça o que se pede.

- a) Após 1 hora e 20 minutos (tempo de uma meia-vida) da ingestão da cápsula de amoxicilina qual é a quantidade em miligramas de amoxicilina no organismo?

- b) Complete a tabela abaixo.

Quantidade de amoxicilina no organismo (mg)							
Número de meias-vidas	0	1	2	3	4	5	6

- c) Determine uma lei que relaciona a quantidade (**q**) de amoxicilina no organismo e o número (**n**) de meias-vidas.

- d)** Esboce, na folha quadriculada o gráfico dessa situação. (*Folha em anexo, próxima página*).
- e)** Considerando a quantidade de amoxicilina ingerida em uma cápsula, qual a porcentagem desse fármaco presente no organismo após 8 horas de ingestão? Por que é imprescindível respeitar os horários prescritos pelo médico?
- 2)** Analistas do mercado imobiliário de um município estimam que o valor (v), em reais, de um apartamento nesse município seja dado pela lei $v(t) = 250\,000 \cdot (1,05)^t$, sendo t o número de anos ($t = 0, 1, 2, \dots$) contados a partir da data de entrega do apartamento.
- a) Qual o valor desse imóvel na entrega?
- b) Qual a valorização, em reais, desse apartamento um ano após a entrega?

ANEXO III

ATIVIDADE 3: ESTUDO DAS FUNÇÕES – PARTE 1

Definição (Função Exponencial): Uma função exponencial é toda função f de \mathbb{R} em \mathbb{R}_+^* com a lei $f(x) = b^x$, em que b é um número real dado, $b > 0$ e $b \neq 1$.

PERGUNTAS

- 1) (P1)** Por que sendo b um número real a definição propõe que b precisa ser maior que zero e diferente de 1?
- 2) (P2)** E por que a função tem seu contradomínio definido como sendo \mathbb{R}_+^* ?

ANALISANDO GRÁFICO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

Com base nas conclusões discutidas, observe os gráficos a seguir e responda as perguntas que seguem.

Gráfico 1

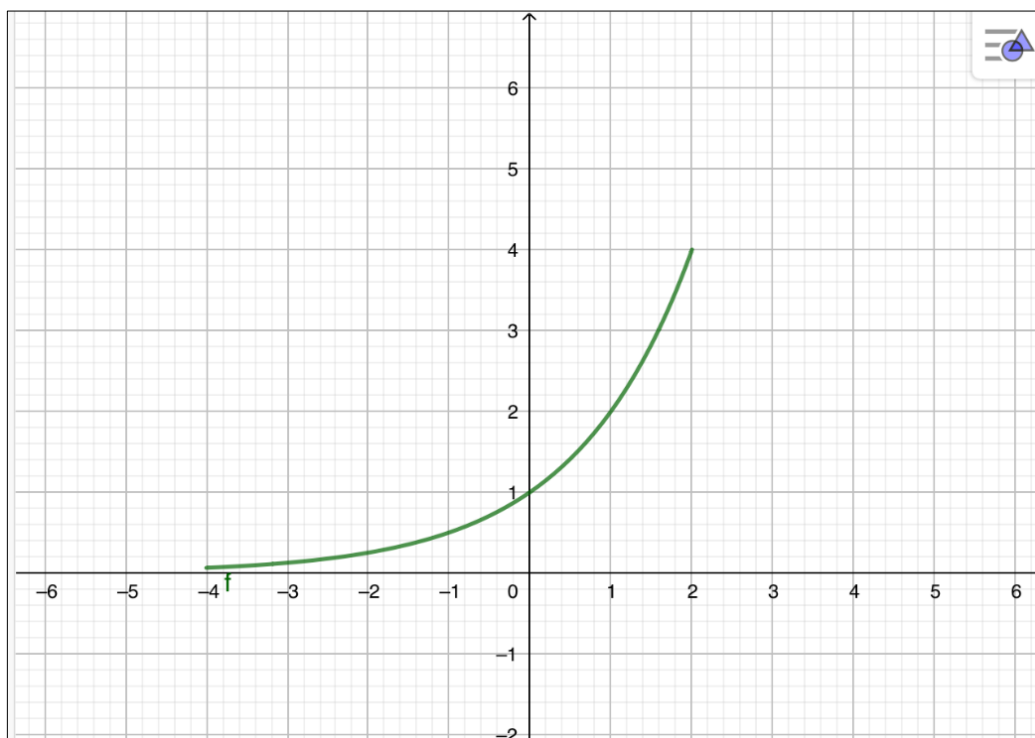


Gráfico 2

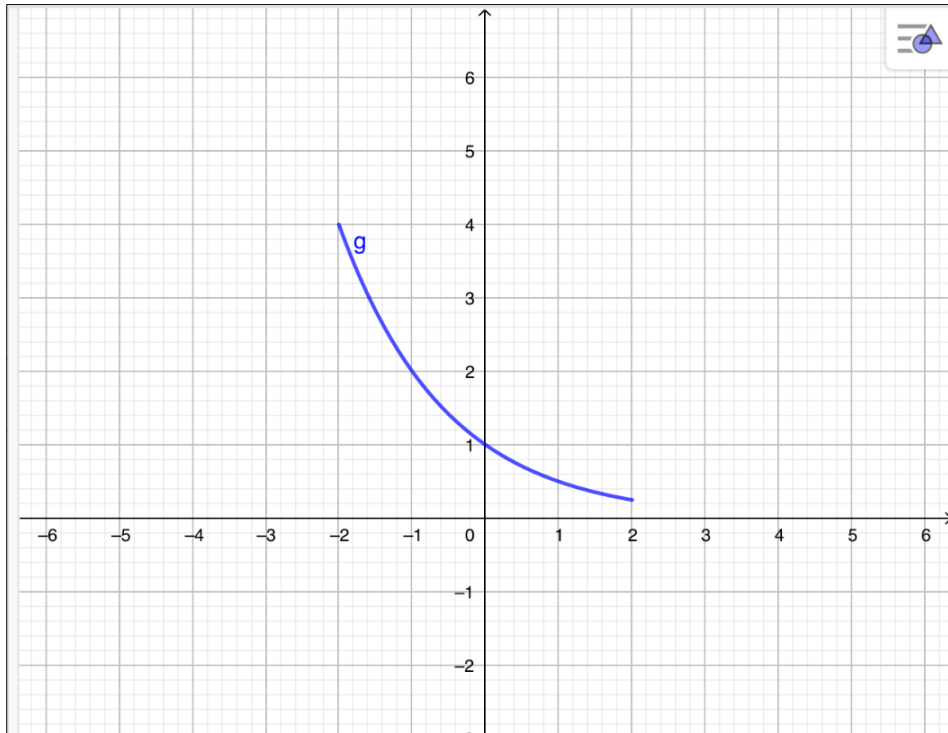


Gráfico 3

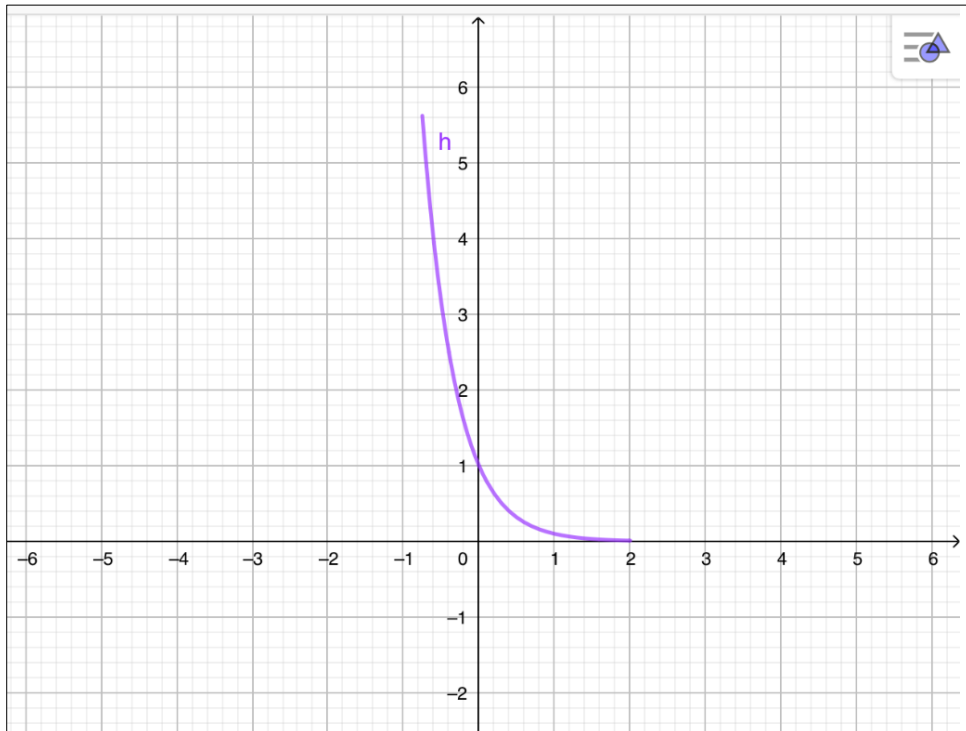
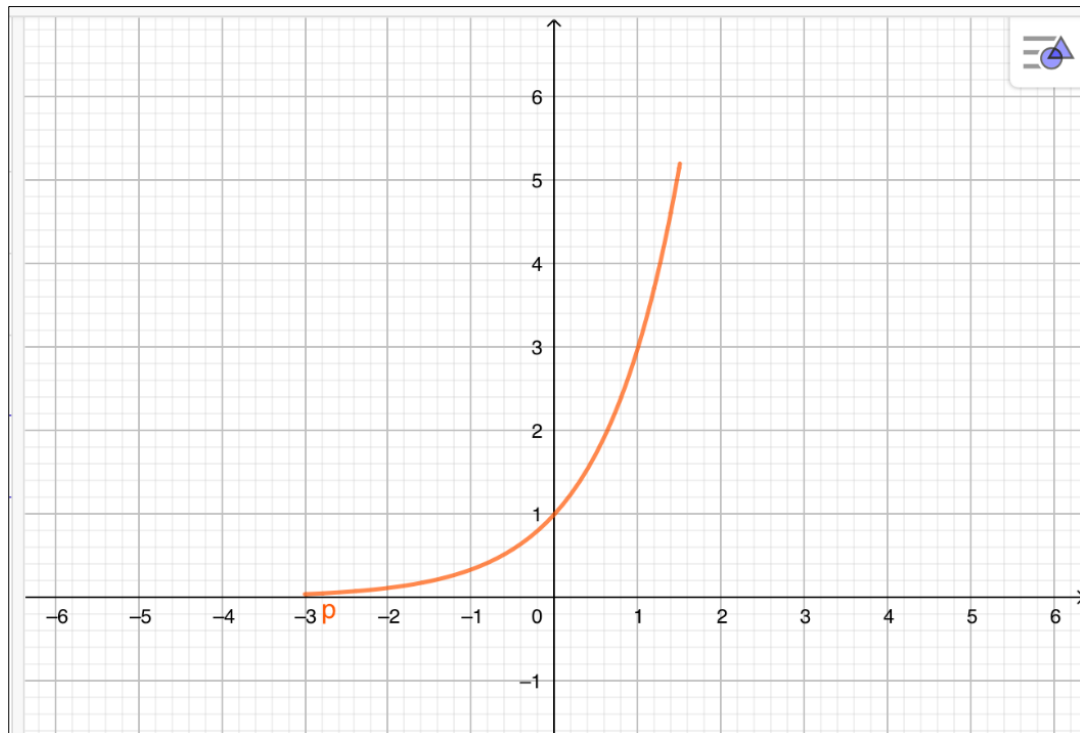


Gráfico 4



PERGUNTAS

- 3) (P3)** Há diferenças entre as funções representadas nos gráficos acima? Se houver qual(is) diferença(s) é possível notar?
- 4) (P4)** Sabendo que as funções representadas acima são definidas por $y = 0,1^x$; $y = 2^x$; $y = 3^x$ e $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, associe corretamente aos gráficos 1, 2, 3 e 4 sendo, respectivamente, f , g , h e p as funções definidas em cada gráfico.
- 5) (P5)** Qual o critério utilizado para associar as funções como orientado na pergunta P4?
- 6) (P6)** Você consegue a partir dessas conclusões separar os gráficos em dois grupos? Qual o critério de seleção?
- 7) (P7)** Com o critério utilizado na questão 6, é possível criar uma relação entre o gráfico e o tipo de lei que o define?

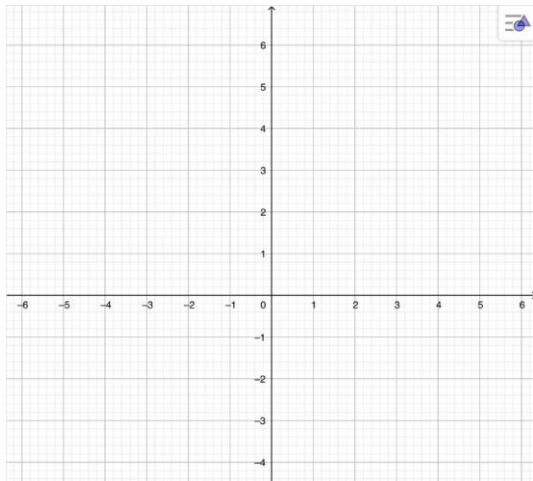
ANEXO IV

ATIVIDADE 4: FUNÇÃO EXPONENCIAL – GRÁFICO E PROPRIEDADES

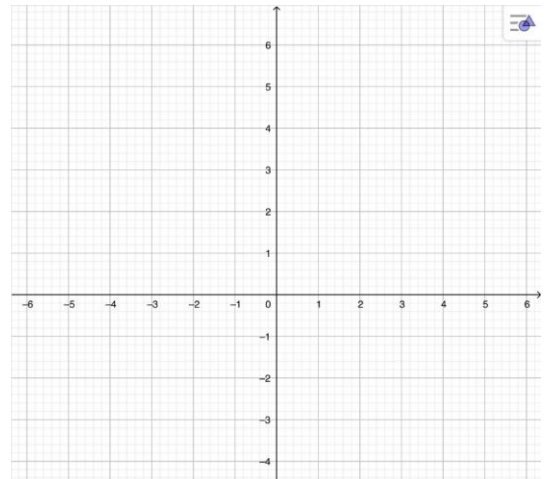
EXERCÍCIOS

1) Construa o gráfico, determine o conjunto domínio e imagem das funções exponenciais.

a) $f(x) = \left(\frac{5}{4}\right)^x$



b) $f(x) = 4^x$



DEIXAR REGISTRADO O RACIOCÍNIO UTILIZADO NA RESOLUÇÃO

2) (Pucrs 2017) Uma rede social dobra o número de usuários a cada dia. Uma função que pode dar o número de usuários desta rede em função do número de dias é

a) $f(n) = 2n$

b) $f(n) = n^2$

c) $f(n) = \log_2 n$

d) $f(n) = 2^n$

e) $f(n) = 3^n$

3) (PUCRS) A cada balanço anual, uma firma tem apresentado um aumento de 10% de seu capital. Considerando Q_0 o seu capital inicial, qual a expressão que fornece esse capital C , ao final de cada ano (t) em que essas condições permanecerem, é

a) $C = Q_0(1,1)^t$

b) $C = C(1,1)^t$

c) $C = Q_0(0,1)^t$

d) $C = Q_0(0,1)^t$

e) $C = Q_0(10)^t$

4) (Enem 2ª aplicação 2016) O governo de uma cidade está preocupado com a possível epidemia de uma doença infectocontagiosa causada por bactéria. Para decidir que medidas tomar, deve calcular a velocidade de reprodução da bactéria. Em experiências laboratoriais de uma cultura bacteriana, inicialmente com 40 mil unidades, obteve-se a fórmula para a população:

$$p(t) = 40 \cdot 2^{3t}$$

em que t é o tempo, em hora, e $p(t)$ é a população, em milhares de bactérias.

Em relação à quantidade inicial de bactérias, após 20 min, a população será

a) reduzida a um terço.

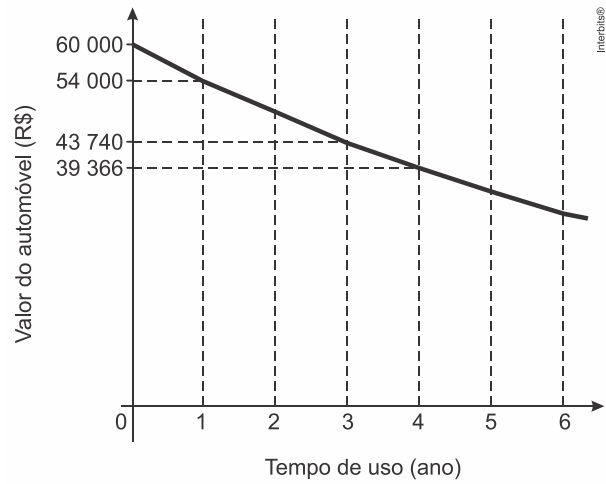
b) reduzida à metade.

c) reduzida a dois terços.

d) duplicada.

e) triplicada.

5) (Enem (Libras) 2017) Um modelo de automóvel tem seu valor depreciado em função do tempo de uso segundo a função $f(t) = b \cdot a^t$, com t em ano. Essa função está representada no gráfico.



Qual será o valor desse automóvel, em real, ao completar dois anos de uso?

- a) 48000,00
- b) 48114,00
- c) 48600,00
- d) 48870,00
- e) 49683,00