

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**  
**"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"**  
**CAMPUS DE GUARATINGUETÁ**

**HERBERT ANTONIO BIAZOTTI**

**Soluções Solitônicas por Aproximantes de Padé via Método Iterativo de Taylor**

Guaratinguetá

2018

**Herbert Antonio Biazotti**

**Soluções Solitônicas por Aproximantes de Padé via Método Iterativo de Taylor**

Dissertação apresentada ao Conselho de Curso de Pós-Graduação em Física da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Mestre em Física na área de partículas e campo.

Orientador: Prof<sup>o</sup> Dr. Denis Dalmazi

Coorientador: Prof<sup>o</sup> Dr. Álvaro de Souza Dutra

Guaratinguetá

2018

B579s Biazotti, Herbert Antonio  
Soluções solitônicas por aproximantes de Padé via método iterativo de Taylor / Herbert Antonio Biazotti. – Guaratinguetá, 2018.  
52 f : il.  
Bibliografia: f. 46

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2018.  
Orientador: Prof. Dr. Denis Dalmazi  
Coorientador: Prof. Dr. Álvaro de Souza Dutra

1. Sólitons. 2. Padé, Aproximante de I. Título.

CDU 511.42 (043)

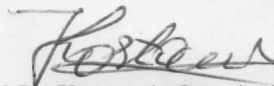
Pâmella Benevides Gonçalves  
Bibliotecária/CRB-8/9203

**HÉRBERT ANTONIO BIAZOTTI**

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
“MESTRE EM FÍSICA”

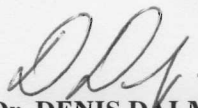
PROGRAMA: FÍSICA

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

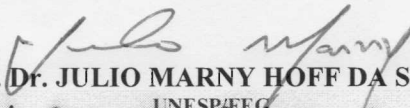


Prof. Dr. Konstantin Georgiev Kostov  
Coordenador

**BANCA EXAMINADORA:**



Prof. Dr. DENIS DALMAZI  
Orientador / UNESP/FEG



Prof. Dr. JULIO MARNY HOFF DA SILVA  
UNESP/FEG



Prof. Dr. RAFAEL AUGUSTO COUCEIRO CORRÊA  
ITA/SJC

Setembro de 2018

## **DADOS CURRICULARES**

### **HERBERT ANTONIO BIAZOTTI**

**NASCIMENTO** 06 de junho de 1986 - São Paulo / SP

**FILIAÇÃO** Antonio Basílio Biazotti  
Cícera Ferreira Biazotti

**2009 / 2014** Bacharelado em Física  
Universidade Estadual Paulista "Júlio de  
Mesquita Filho - UNESP

Ao meu amor, Joice  
Aos meus pais, Antônio e Cicera

## AGRADECIMENTOS

Nossa espécie, homo sapiens, foi a única a sobreviver dentre várias espécies ancestrais. Em parte isso aconteceu devido ao fato de sermos a única espécie que trabalha em colaboração. Este trabalho é fruto de várias colaborações sem as quais eu não teria nem começado o mestrado. Quero agradecer primeiramente a Deus e as seguintes pessoas que foram fundamentais para que este trabalho fosse desenvolvido, são elas: Minha namorada, Joice, pelo amor incondicional; meus pais, Antônio e Cicera pelo amor e apoio financeiro; meus irmãos, Francisco e Aline, pelo apoio; meu orientador, Denis, pelos anos de trabalho e cuidados com os cálculos do projeto; meu coorientador, Álvaro, pelas várias discussões; meu amigo, Rodrigo Bispo, sempre ajudou nas dificuldades da vida acadêmica; o professor Rafael Augusto, pela leitura detalhada do meu trabalho de qualificação; o coordenador do curso, Konstantin; todos os professores da FEG-Unesp que me deram aula; meu professor de Eletrodinâmica do ITA, Wayne de Paula. Quero agradecer também as seguintes instituições: IFT-Unesp, pelos dois semestres que estudei lá; CAPES, pelo financiamento deste trabalho; ITA, pelo semestre que cursei Eletrodinâmica I; Enfim quero agradecer a todos que de alguma forma contribuíram para que este trabalho fosse possível.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001



*"Nenhum homem é uma ilha, isolado em si mesmo;  
todos são parte do continente, uma parte de um todo."(John Donne)*

## RESUMO

Certos sistemas físicos podem ser descritos por uma classe de equações não-lineares. Essas equações descrevem pacotes de onda chamado de sólitons que tem aplicações em diversas áreas, por exemplo, Óptica, Cosmologia, Matéria Condensada e Física de Partículas. Alguns métodos foram desenvolvidos ao longo dos anos para encontrar as soluções dessas equações. Buscaremos essas soluções usando o que chamamos de Método Iterativo de Taylor (MIT), que fornece uma solução aproximada em polinômio de Taylor de forma distinta do que se tem na literatura. Usaremos o MIT para calcular soluções por aproximantes de Padé que são razões entre dois polinômios e fornecem soluções melhores que o polinômio de Taylor que o gerou. Inicialmente resolveremos a equação de um modelo de um campo denominado  $\lambda\phi^4$ . Em seguida resolveremos um modelo com dois campos escalares acoplados e encontraremos uma solução analítica aproximada em casos onde não existe solução analítica, explorando a diversidade das soluções do modelo. Usando essa abordagem por aproximantes de Padé veremos que há algumas vantagens em relação a outros métodos.

**PALAVRAS-CHAVE:** aproximantes de Padé. ondas solitárias. sólitons.

## ABSTRACT

Certain physical systems can be described by a class of non-linear differential equations. Those equations describe wave packets called solitons which have applications in several areas, for example, Optics, Cosmology, Condensed Matter, and Particle Physics. Some methods have been developed over the years to find solutions to these equations. We will look for those solutions using what we call the Taylor Iterative Method (TIM), which provides an approximate solution in terms of a Taylor's polynomial in a unusual way, regarding the present literature. We will use TIM to calculate solutions by Padé approximants, which are ratios between two polynomials and provide better solutions than the Taylor polynomial itself. We first solve the field equation of a model called  $\lambda\phi^4$ . Then we will solve a model with two coupled scalar fields and find an approximate analytic solution in cases where there is no known analytical solution, exploring the diversity of the solutions of the model. We will see that there are some advantages in using the Padè approximants as compared to other methods

**KEYWORDS:** Padè approximants. solitary waves. solitons.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	Soluções do $\lambda\phi^4$ , exata (azul) e polinômio de Taylor (laranja). . . . .	18
Figura 2	Potencial do $\lambda\phi^4$ com $\lambda = a = 1$ . . . . .	21
Figura 3	Solução do $\lambda\phi^4$ com $a = \mu = 1$ em kink(linha) e antikink(pontos). . . . .	24
Figura 4	Gráficos da Solução do $\lambda\phi^4$ por aproximante de Padé (18) (vermelho) e solução exata (azul) com $a = \mu = 1$ . . . . .	26
Figura 5	Gráfico do potencial V com $r = 1$ . . . . .	28
Figura 6	Gráfico da equação de órbita (26) conectando os quatro mínimos do potencial para $r = 4$ e $c_0 = 1/16$ . . . . .	31
Figura 7	Para $c_0 = -3$ e $r = 1$ , os gráficos das soluções por Padé das tabelas dois e três (ponto vermelho) e exata (linha azul). . . . .	36
Figura 8	Para $r = 4$ e $c_0 = 1/30$ temos os gráfico das soluções por Padé das tabelas quatro e cinco (Ponto vermelho) e exata(linha azul). . . . .	37
Figura 9	Para $r = 1$ e $c_0 = -2$ , gráfico das soluções por Padé das tabelas seis e sete (ponto vermelho) e exata(linha azul). . . . .	39
Figura 10	Para $r = 4$ e $c_0 = 1/16$ , gráfico das soluções por Padé das tabelas oito e nove(ponto vermelho) e exata(linha azul). . . . .	41
Figura 11	Para $c_0 = -2.00001$ e $r = 1$ , os gráficos das soluções por Padé das tabelas dez e onze (linha vermelha, região convergente e linha verde, região divergente) são: .	42
Figura 12	Para $r = 6$ e $c_0 = 1/43200$ os gráficos das soluções por Padé das tabelas doze e treze (linha vermelha, região convergente e linha verde, região divergente) são:	44
Figura 13	Para $r = 6$ e $c_0 = 1/432$ os gráficos das soluções por Padé das tabelas quatorze e quinze (linha vermelha, região convergente e linha verde, região divergente) são:	45
Figura 14	Cópia do algoritmo do Mathematica da solução do $\lambda\phi^4$ em Padé via MIT . . .	50
Figura 15	Cópia do algoritmo do Mathematica da solução do modelo de dois campos usando Padé e MIT . . . . .	51

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Solução Exata e por Padé. . . . .	26
Tabela 2 – Coeficientes de Taylor e de Padé de das soluções de (21) com $r = 1$ e $c_0 = -3$ $(\chi(x))$ . . . . .	35
Tabela 3 – Coeficientes de Taylor e de Padé das soluções de (20) com $r = 1$ e $c_0 = -3$ ( $\phi(x)$ ). . . . .	35
Tabela 4 – Coeficientes de Taylor e de Padé das soluções de (21) com $r = 4$ , $c_0 = 1/30$ ( $\chi(x)$ ). . . . .	36
Tabela 5 – Coeficientes de Taylor e de Padé das soluções de (20) com $r = 4$ , $c_0 = 1/30$ ( $\phi(x)$ ). . . . .	37
Tabela 6 – Coeficientes de Taylor e de Padé das soluções de (21) com $r = 1$ , $c_0 = -2$ ( $\chi(x)$ ). . . . .	38
Tabela 7 – Coeficientes de Taylor e de Padé das soluções de (20) com $r = 1$ , $c_0 = -2$ ( $\phi(x)$ ). . . . .	39
Tabela 8 – Coeficientes de Taylor e de Padé das soluções de (21) com $r = 4$ , $c_0 = 1/16$ ( $\chi(x)$ ). . . . .	40
Tabela 9 – Coeficientes de Taylor e de Padé das soluções de (20) com $r = 4$ , $c_0 = 1/16$ ( $\phi(x)$ ). . . . .	40
Tabela 10 – Coeficientes de Taylor e de Padé das soluções de (21) com $c_0 = -2.00001$ , $r = 1$ $\chi(x)$ . . . . .	41
Tabela 11 – Coeficientes de Taylor e de Padé das soluções de (20) com $c_0 = -2.00001$ , $r = 1$ $(\phi(x))$ . . . . .	42
Tabela 12 – Coeficientes de Taylor e de Padé das soluções de (21) com $c_0 = 1/43200$ , $r = 6$ $(\chi(x))$ . . . . .	43
Tabela 13 – Coeficientes de Taylor e de Padé das soluções de (20) com $c_0 = 1/43200$ , $r = 6$ $(\phi(x))$ . . . . .	43
Tabela 14 – Coeficientes de Taylor e de Padé das soluções de (21) com $c_0 = 1/432$ , $r = 6$ ( $\chi(x)$ ). . . . .	44
Tabela 15 – Coeficientes de Taylor e de Padé das soluções de (20) com $c_0 = 1/432$ , $r = 6$ ( $\phi(x)$ ). . . . .	45

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>SOLUÇÕES POR SÉRIE DE TAYLOR E APROXIMANTES DE PADÉ</b> . . .	<b>15</b>
2.1	Introdução . . . . .	15
2.2	Método Iterativo de Taylor . . . . .	15
<b>2.2.1</b>	<b>Introdução</b> . . . . .	<b>15</b>
<b>2.2.2</b>	<b>Exemplos: OHS e <math>\lambda\phi^4</math></b> . . . . .	<b>17</b>
2.3	Aproximantes de Padé . . . . .	18
<b>3</b>	<b>MODELO <math>\lambda\phi^4</math></b> . . . . .	<b>21</b>
3.1	Ondas solitárias, Sólitons, Quadratura e BPS . . . . .	21
3.2	Solução por Aproximante de Padé do Modelo $\lambda\phi^4$ . . . . .	24
<b>4</b>	<b>MODELO DE DOIS CAMPOS ESCALARES</b> . . . . .	<b>27</b>
4.1	Soluções Exatas do Modelo de Dois Campos . . . . .	27
<b>4.1.1</b>	<b>A. Soluções Exatas - Paredes de Bloch Degeneradas (<math>c_0 &lt; c_c</math>)</b> . . . . .	<b>32</b>
<b>4.1.2</b>	<b>B. Soluções Exatas - Paredes de Bloch Críticas (<math>c_0 = c_c</math>)</b> . . . . .	<b>32</b>
4.2	Soluções por Aproximantes de Padé do Modelo de Dois Campos . . . . .	33
<b>4.2.1</b>	<b>Condições Iniciais</b> . . . . .	<b>33</b>
<b>4.2.2</b>	<b>A. Aproximantes de Padé - Paredes de Bloch Degeneradas (<math>c_0 &lt; c_c</math>)</b> . . . . .	<b>34</b>
<b>4.2.3</b>	<b>B. Aproximantes de Padé - Paredes de Bloch Críticas (<math>c_0 = c_c</math>)</b> . . . . .	<b>38</b>
<b>4.2.4</b>	<b>C. Aproximantes de Padé - Para Valores <math>c_0 \approx c_c</math></b> . . . . .	<b>41</b>
4.3	Padé para Casos sem Solução Analítica . . . . .	43
<b>4.3.1</b>	<b>D. Aproximantes de Padé: Paredes de Bloch Degeneradas (<math>c_0 &lt; c_c</math>)</b> . . . . .	<b>43</b>
<b>4.3.2</b>	<b>E. Aproximantes de Padé - Paredes de Bloch Críticas (<math>c_0 = c_c</math>)</b> . . . . .	<b>44</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	<b>46</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>47</b>
	<b>APÊNDICE A – ALGORITMOS DO MATHEMATICA DOS APROXIMANTES DE PADÉ VIA MÉTODO ITERATIVO DE TAYLOR</b> . . . . .	<b>50</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Há um constante interesse da comunidade científica em buscar soluções clássicas de um conjunto de equações diferenciais não-lineares de segunda ordem. Equações desse tipo descrevem os sólitons, objetos de estudo deste trabalho. Os sólitons são pacotes de ondas que se propagam com velocidade uniforme e sua energia não é dissipada mesmo após colisões [1] e [2]. Os sólitons são aplicados em muitos fenômenos da natureza e atualmente há um grande interesse em estudá-los [3]- [18]. Na comunicação, a grandes distâncias, são usadas fibras ópticas com propagação de sinais por sólitons, como foi proposta a transmissão em oceano [19]. Em matéria condensada, os materiais ferromagnéticos podem ser divididos em diferentes regiões chamadas de domínios com diferentes valores esperados dos vetores de magnetização, a rotação desse vetor entre um domínio e outro é feita com energia mínima, para descrever esse fenômeno podemos usar modelos de sólitons [20]. Algumas equações não-lineares desses sólitons tem solução analítica que podem ser resolvidas por um método chamado BPS, baseado em um princípio de mínima energia, esse método foi proposto em [21] e [22]. Começamos o estudo dessas equações não-lineares no capítulo dois, onde é feita uma abordagem inicial usando polinômios de Taylor. Veremos que não conseguimos resolver essas equações de maneira usual e, em vez disso, introduziremos um método alternativo para estudar essas equações não-lineares, o Método Iterativo de Taylor (MIT). O exemplo inicial abordado nesse capítulo é o  $\lambda\phi^4$ , uma teoria de um campo escalar que possui solução independente do tempo do tipo tangente hiperbólica. Buscando soluções em polinômio de Taylor para esse modelo veremos que a série de Taylor tem uma convergência muito lenta, não abrangendo toda região de interesse físico, portanto é necessário buscar outro método de resolução para estudar as ondas solitárias. Usaremos em todo o trabalho uma abordagem de resolução por aproximantes de Padé que são definidos usando o próprio polinômio de Taylor, mas com uma região de convergência muito maior. Os aproximantes de Padé são uma razão entre dois polinômios que são obtidos nesse trabalho usando os polinômios de Taylor, mas podem ser obtidos usando outras séries truncadas, como a série de Fourier, ou de Frobenius. Foi comentado em [23] que é impossível determinar o raio de convergência dos Aproximantes de Padé. Em vez disso, trabalharemos em uma pequena região de convergência em torno de  $x = 0$ . Abordaremos aqui os sistemas físicos invariantes por translação  $x \rightarrow x + b$  e portanto podemos sempre escolher expandir em torno de  $x = 0$ . Para abordar as soluções solitônicas que tem um comportamento assintótico característico usaremos aproximantes de Padé diagonais, isto é, o grau do polinômio do numerador é igual ao grau do denominador. Seguindo a sequência do nosso trabalho, no capítulo três introduziremos o tema usando o modelo  $\lambda\phi^4$  que tem uma solução do tipo onda solitária. Abordaremos esse modelo usando os métodos de quadratura e BPS, então introduziremos a solução por aproximantes de padé e mostraremos que este tem uma convergência muito boa, com um erro percentual baixo. No capítulo quatro estudaremos um modelo mais complexo proposto em [24] que tem dois campos escalares cujas equações de movimento são acopladas, obedecem a uma dinâmica não-linear com solução de sólitons. Seguiremos a mesma abordagem já citada do capítulo três, usaremos quadratura, aproximantes de Padé e BPS. Aplicando esse último método, encontraremos uma equação de órbita que desacopla

as equações do modelo de dois campos, seguindo a abordagem feita em [25]. Então nosso objetivo final nesse capítulo quatro é buscar soluções via aproximantes de Padé para esse modelo de dois campos. Veremos que os aproximantes de Padé são uma ferramenta poderosa para buscar uma solução analítica aproximada até mesmo em casos onde esse modelo só tem solução numérica. Além disso, uma vez determinadas as condições iniciais do problema, não precisamos desacoplar as equações para resolver via aproximante de Padé. Ou seja, a princípio podemos usar os Padés até mesmo quando não conhecemos a equação de órbita que desacopla os campos.



## 2 SOLUÇÕES POR SÉRIE DE TAYLOR E APROXIMANTES DE PADÉ

### 2.1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho buscamos soluções de equações diferenciais ordinárias não-lineares. A resolução dessas equações não-lineares pode ser muito difícil. Ao contrário das lineares, elas não possuem uma teoria geral para a busca de soluções. Aqui buscaremos como solução analítica aproximada os chamados polinômio de Taylor que pode ser definido a partir de um ponto qualquer  $x = a$ . Seja  $f(x)$  uma função que admite  $n$  derivadas no ponto  $x = a$ , um polinômio  $P(x)$  que coincida com  $f(x)$  e suas  $n$ -ésimas derivadas em  $x = a$  satisfaz às  $n + 1$  condições:

$$P(a) = f(a), \quad P'(a) = f'(a), \quad \dots \quad P^{(n)}(a) = f^{(n)}(a), \quad (1)$$

esse polinômio de Taylor de grau menor ou igual a  $n$  em potências de  $(x - a)$  que satisfaz essas condições é único e é definido por<sup>1</sup>:

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)(x - a)^k}{k!}. \quad (2)$$

Um polinômio de Taylor  $P(x)$  gerado por uma função  $f(x)$  é uma aproximação da função que o gerou. Em cálculo numérico muitas vezes é mais fácil trabalhar com o polinômio de Taylor do que com a própria função  $f(x)$ . Se a diferença entre uma função e o seu polinômio de Taylor for suficientemente pequena podemos trabalhar com o polinômio em vez da função. Essa diferença é chamada de erro, definido por:  $E_n(x) = f(x) - P(x)$ . Se  $n$  crescer indefinidamente, o polinômio de Taylor torna-se uma série de potências chamada de série de Taylor definida por:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - a)^n, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}. \quad (3)$$

Dizemos que a série de Taylor é um desenvolvimento de  $f(x)$  em uma série real de potências em torno de  $a$ , que representa a função  $f(x)$  em um intervalo simétrico de convergência  $(a - r, a + r)$ . Este é o intervalo de convergência da série,  $r$  é o raio de convergência da série.

### 2.2 MÉTODO ITERATIVO DE TAYLOR

#### 2.2.1 Introdução

Reservaremos esta seção para abordar um método aproximado alternativo de resolução de equações diferenciais ordinárias lineares e não-lineares por polinômio de Taylor, o qual chamaremos neste trabalho de Método Iterativo de Taylor (MIT). O método fornece uma solução analítica aproximada em geral. Em alguns casos não-lineares veremos que o polinômio de Taylor converge lentamente na região de interesse, ficando limitado em torno de  $x = a$ . Embora tenha essa limitação, essa

<sup>1</sup> Usando a convenção que  $d^0 f(x)/dx^0 = f(x)$

solução em polinômio de Taylor pode ser usada para calcular outra solução aproximada que fornece melhores resultados, os aproximantes de Padé que serão apresentados na próxima seção. Usaremos o MIT no decorrer de todo nosso trabalho, no próximo capítulo veremos a importância desse método. Desenvolvemos um algoritmo no Mathematica para o MIT que possibilitou a busca por soluções aproximadas de equações não-lineares por aproximantes de Padé. Para ilustrarmos o MIT usaremos uma equação diferencial ordinária de segunda ordem com coeficientes  $M$  e  $N$  constantes:

$$f''(x) = Nf'(x) + Mf(x) \quad (4)$$

que possui uma solução em série de Taylor em torno da origem  $x = 0$  do tipo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad (5)$$

essa série converge para a solução  $f(x)$  dentro de um certo intervalo de convergência de raio  $r$ , assim podemos trabalhar com a série dentro desse intervalo ao invés de usar a própria função  $f(x)$ . A equação diferencial pode ser resolvida de maneira usual substituindo a série (5) em (4) e igualando as potências de  $x^n$  para encontrar uma fórmula recursiva que gera todos os coeficientes da série de Taylor como no método de Frobenius. É nesse ponto que o MIT difere da maneira usual de resolução: ao invés de encontrar uma fórmula recursiva para determinar os coeficientes da série, determinamos esses coeficientes da própria equação diferencial por iterações sucessivas da seguinte maneira. A iteração número zero é a própria equação diferencial avaliada em  $x = 0$ , ou seja,  $f''(0) = Nf'(0) + Mf(0)$ . Essa iteração forma o termo de potência  $x^2$  da série de Taylor, o próximo termo,  $x^3$ , primeira iteração, é obtido da própria equação diferencial simplesmente derivando e tomando  $x = 0$ , ou seja,  $f'''(0) = Nf''(0) + Mf'(0)^2$ , aqui percebemos que aparece um termo da iteração zero, portanto,  $f'''(0) = (N^2 + M)f'(0) + MNf(0)$ , a segunda iteração é obtida derivando mais uma vez a equação diferencial em  $x=0$ , então temos  $f^{(IV)}(0) = (N^2 + M)f''(0) + MNf'(0)$ ; novamente substituímos a iteração zero para baixar a ordem, então temos que o termo da potência  $x^4$  é  $f^{(IV)}(0) = (N^2 + M)(Nf'(0) + Mf(0)) + MNf'(0)$ , substituímos os termos encontrados em (5), encontramos com o MIT a solução de (4) até a potência  $x^4$ :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}[Nf'(0) + Mf(0)] + \frac{x^3}{3!}[(N^2 + M)f'(0) + MNf(0)] \\ + \frac{x^4}{4!}[(N^2 + M)(Nf'(0) + Mf(0)) + MNf'(0)]. \quad (6)$$

No fim teremos uma série em termos apenas de duas constantes,  $f'(0)$  e  $f(0)$ , que são as condições iniciais. Quando são especificadas, a solução é única em torno da origem. Essa é a essência do MIT, derivamos a equação diferencial para encontrar a próxima iteração e substituímos a iteração zero para baixar a ordem. Na próxima subseção apresentaremos dois exemplos específicos, um linear e outro não linear.

<sup>2</sup> Usamos a notação  $f'(0)$ , na qual primeiro a função é diferenciada, depois substituímos o ponto  $x = 0$

### 2.2.2 Exemplos: OHS e $\lambda\phi^4$

A seguir vamos exemplificar o método resolvendo a equação de movimento do oscilador harmônico simples (OHS) em uma dimensão e a equação independente do tempo do modelo  $\lambda\phi^4$ . Iniciamos com a equação do OHS que é linear e de segunda ordem no tempo. Abaixo  $\omega$  é a frequência do oscilador harmônico<sup>3</sup>.

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t). \quad (7)$$

A iteração zero é:  $\dot{x}(0) = -\omega^2 x(0)$ , resolvemos as próximas iterações usando (7), temos, iteração 1:  $d^3x(0)/dt^3 = -\omega^2 \dot{x}(0)$ , iteração 2:  $d^4x(0)/dt^4 = \omega^4 x(0)$ , iteração 3:  $d^5x(0)/dt^5 = \omega^4 \dot{x}(0)$ , iteração 4:  $d^6x(0)/dt^6 = -\omega^6 x(0)$ , iteração 5:  $d^7x(0)/dt^7 = -\omega^6 \dot{x}(0)$  então a solução em série de Taylor de (7) é

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) \left( 1 - \frac{1}{2}\omega^2 t^2 + \frac{1}{24}\omega^4 t^4 - \frac{1}{720}\omega^6 t^6 + \dots \right) \\ &+ x'(0) \left( t - \frac{1}{6}\omega^2 t^3 + \frac{1}{120}\omega^4 t^5 - \frac{1}{5040}\omega^6 t^7 + \dots \right) \\ &= A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t), \end{aligned} \quad (8)$$

onde  $x(0) = A$  e  $x'(0)/\omega = B$  são dadas em termos das condições iniciais do problema. Neste exemplo conseguimos intuir a série com infinitos termos e conseguimos encontrar a solução geral exata de (7). Muitas vezes, em problemas mais complexos, usamos o polinômio de Taylor que fornece uma solução aproximada em torno da origem. No exemplo acima havia uma equação diferencial linear. Ao contrário do método de Frobenius, neste trabalho vamos mostrar que o método mostrado acima também vale para equações não-lineares, desde que a equação tenha uma solução em série de Taylor. Para motivar o estudo de fenômenos não-lineares, o exemplo escolhido é uma equação não-linear de segunda ordem do modelo  $\lambda\phi^4$  que será abordado neste trabalho, em  $D = 1 + 1$ , suprimindo a dependência temporal, a equação é

$$\phi''(x) = 2\lambda\phi(x)[\phi(x)^2 - a^2]. \quad (9)$$

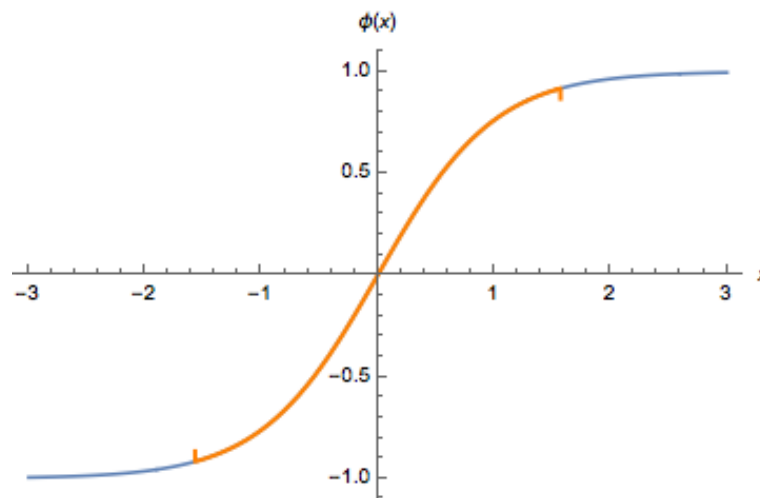
Um capítulo inteiro será reservado para apresentar o modelo em questão,  $\lambda\phi^4$ , então nosso foco nesta seção é a parte matemática. Aplicando o MIT para essa equação não-linear (9), temos que a iteração  $n=0$  é  $\phi''(0) = 2\lambda\phi(0)[\phi(0)^2 - a^2]$ , as outras iterações são  $n = 1: \phi'''(0) = -2\lambda(a^2 - 3\phi(0)^2)\phi'(0)$ ,  $n = 2: \phi^{(IV)}(0) = 4\lambda\phi(0)(a^4\lambda - 4a^2\lambda\phi(0)^2 + 3\lambda\phi(0)^4 + 3\phi'(0)^2)$ . Aqui notamos que os termos começam a aumentar, dando mais trabalho que o caso simples de equação linear do oscilador harmônico. É hora de usarmos o Mathematica. Neste trabalho propomos um algoritmo no Mathematica que calcula o polinômio de Taylor de um conjunto de equações que possuem solução em Taylor. Usando esse algoritmo que criamos para o MIT, Apêndice (A), e as condições iniciais  $\phi(0) = 0$ ,  $\phi'(0) = 1$  e os parâmetros  $a = \lambda = 1$ , a solução de (9) em polinômio de Taylor de ordem 21 é dada por

<sup>3</sup> Usamos a notação simplificada  $dx(t)/dt = \dot{x}(t)$

$$\begin{aligned} \phi_T(x) = & x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} - \frac{1382x^{11}}{155925} + \frac{21844x^{13}}{6081075} \\ & - \frac{929569x^{15}}{638512875} + \frac{6404582x^{17}}{10854718875} - \frac{443861162x^{19}}{1856156927625} + \frac{18888466084x^{21}}{194896477400625}. \end{aligned} \quad (10)$$

De fato identificamos esse polinômio como sendo a série truncada da  $\tanh(x)$ , solução conhecida de (9), com os parâmetros usados. Abaixo temos o gráfico da solução (10) em polinômio de Taylor do  $\lambda\phi^4$  com 5 mil termos na região  $x \in [-1.57, 1.57]$ . Observe que após  $|x| > 1.5$  forma uma quina, começa a divergir da solução exata (azul) de  $\tanh(x)$ . Concluimos que a solução aproximada em polinômio de Taylor tem um raio de convergência muito pequeno.

Figura 1 – Soluções do  $\lambda\phi^4$ , exata (azul) e polinômio de Taylor (laranja).



fonte: Próprio Autor.

O MIT que introduzimos aqui tem várias vantagens. Primeiro, não conseguimos resolver por série de Taylor de maneira usual uma equação diferencial não-linear, ou seja, se buscarmos soluções da forma (5), substituindo em uma equação não-linear, é impraticável igualar as potências de  $x$  para encontrar uma fórmula de recorrência que gere todos os termos da série de Taylor, já com o MIT conseguimos. Segundo, esse método possibilitou a construção de um algoritmo no Mathematica que encontra a solução em polinômio de Taylor sistematicamente. Essa fato nos motivou a buscar outras soluções, os aproximantes de Padé, que abordaremos a seguir.

### 2.3 APROXIMANTES DE PADÉ

Há muitos métodos que fornecem uma solução aproximada das equações da física. Nesta seção será abordado o método por aproximantes de Padé que são razões de polinômios, utilizados recentemente em diversos problemas na literatura, vide por exemplo, [26]- [34]. Esses aproximantes tem importantes propriedades que vão muito além do polinômio de Taylor. O polinômio pode muitas vezes não abranger a região de interesse físico como nas soluções solitônicas, na qual o polinômio de Taylor não consegue descrever adequadamente os sólitons. Os aproximantes de Padé possuem uma convergência mais rápida que o polinômio e um raio de convergência maior, permitindo que o comportamento assintótico das

funções hiperbólicas que aparecem nas soluções solitônicas de equações não-lineares se torne visível. Muitas equações não-lineares de sólitons tem apenas solução numérica, aqui buscamos uma solução analítica aproximada utilizando o Padé. Os aproximantes de Padé, que são obtidos do polinômio de Taylor, conseguem fornecer mais informações sobre o problema. Sejam  $L$  e  $M$ , respectivamente, os graus dos polinômios do numerador e do denominador do Padé. Se  $M$  for zero, o Padé é o próprio polinômio de Taylor, portanto podemos interpretar o polinômio de Taylor como um caso especial do Padé. Este é muito mais geral e mais rico analiticamente do que o polinômio de Taylor. Seja  $\phi(x)$  um polinômio de Taylor de ordem  $N$  expandido em torno de  $x = 0$  dado por

$$\phi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \dots + a_Nx^N \quad (11)$$

os coeficientes do polinômio de Taylor são definidos por  $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ , com  $n = 0, 1, 2, 3, \dots, N$ . O aproximante de Padé obtido desse polinômio é definido por

$$[L/M] = \frac{P_L(x)}{Q_M(x)}, \quad L, M \geq 0 \quad (12)$$

onde  $P_L(x)$  e  $Q_M(x)$  são polinômios de grau  $L$  e  $M$  respectivamente definidos por

$$P_L(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 + p_4x^4 + p_5x^5 + \dots + p_Lx^L, \quad (13)$$

$$Q_M(x) = q_0 + q_1x + q_2x^2 + q_3x^3 + q_4x^4 + q_5x^5 + \dots + q_Mx^M. \quad (14)$$

podemos definir, sem perda de generalidade,  $q_0 = 1$ , os outros coeficientes  $p_i$  ( $i = 0, 1, \dots, L$ ) e  $q_j$  ( $j = 1, 2, \dots, M$ ) são obtidos a partir do polinômio (11) utilizando a condição que a expansão de Taylor do Padé (12) em torno de  $x = 0$  coincida com o polinômio de Taylor (11) até a potência  $x^{L+M}$ , ou seja, as diferenças começam a aparecer na ordem  $x^{L+M+1}$

$$\phi(x) - \frac{P_L(x)}{Q_M(x)} = O(x^{L+M+1}), \quad (15)$$

portanto temos

$$P_L(x) = \phi(x)Q_M(x) + O(x^{L+M+1}), \quad (16)$$

esta equação determina todos os coeficientes do Padé:

$$\begin{aligned} p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 + \dots + p_Lx^L = \\ (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_Nx^N)(1 + q_1x + q_2x^2 + q_3x^3 + \dots + q_Mx^M) + O(x^{L+M+1}). \end{aligned} \quad (17)$$

Desenvolvendo o lado direito até  $x^{L+M}$  e comparando os termos com a mesma potência temos o sistema com  $L + M + 1$  equações

$$\begin{aligned}
 p_0 &= a_0 \\
 p_1 &= a_1 + a_0 q_1 \\
 p_2 &= a_2 + a_1 q_1 + a_0 q_2 \\
 &\vdots \\
 p_L &= a_L + a_{L-1} q_1 + \dots + a_0 q_L \\
 0 &= a_{L+1} + a_L q_1 + \dots + a_{L-M+1} q_M \\
 0 &= a_{L+2} + a_{L+1} q_1 + \dots + a_{L-m+2} q_M \\
 &\vdots \\
 0 &= a_{L+M} + a_{L+M-1} q_1 + \dots + a_L q_M
 \end{aligned} \tag{18}$$

onde  $a_n \equiv 0$  se  $n < 0$  e  $a_j \equiv 0$  se  $j > M$ . Este sistema com  $L + M + 1$  equações determina os coeficientes dos polinômios  $P_L(x)$  e  $Q_M(x)$  em termos dos coeficientes  $a_n$  do polinômio (11) que tem uma ordem  $N$  com a condição

$$N \geq L + M + 1. \tag{19}$$

Primeiro resolvemos um subsistema linear com as últimas  $M$  equações de (18) para encontrar os  $q_n$ , depois substituímos nas primeiras  $L + 1$  equações para encontrar os  $p_n$ , para cada valor de  $L$  e  $M$  os coeficientes  $p_n$  e  $q_n$  são únicos. Utilizando o Mathematica, criamos um programa que calcula essa solução em polinômio de Taylor usando o Método Iterativo de Taylor (MIT), após obter esse polinômio e utilizando o pacote "PadeApproximant" do Mathematica, calculamos a solução analítica aproximada por Padé. No capítulo a seguir aplicamos os aproximantes de Padé em sólitons.

### 3 MODELO $\lambda\phi^4$

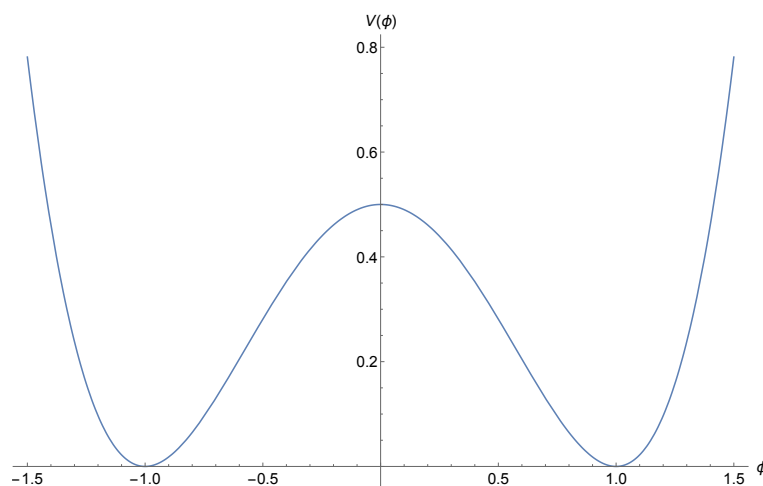
#### 3.1 ONDAS SOLITÁRIAS, SÓLITONS, QUADRATURA E BPS

Em teoria clássica de campos, quando a configuração de campo de um modelo tem energia finita com uma densidade de energia localizada espacialmente, propagando-se sem mudar a velocidade nem a forma, a chamamos de onda solitária [35]. Essas ondas aparecem em teorias de campo não-lineares. Após a colisão dessas ondas solitárias, se a suas formas e velocidades forem mantidas, elas recebem o nome de sólitons [1]- [2]. O caso mais simples dessas ondas solitárias que abordaremos nesta seção são as soluções tipo kink, discutidas, por exemplo, por Vachaspati [1]. Essas soluções são caracterizadas por terem uma densidade de energia que não se dissipa quando o tempo aumenta indefinidamente; além disso, apresentam uma carga topológica conservada. Iniciamos com um modelo em 1+1 dimensões, com um campo escalar  $\phi$ , chamado de  $\lambda\phi^4$  ou  $Z_2$ , devido à simetria  $\phi \rightarrow -\phi$ . Esse modelo apresenta solução tipo kink<sup>1</sup> que é uma onda solitária cuja solução exata foi obtida por [36]. A seguir apresentaremos o modelo e discutiremos dois métodos de resolução da equação de movimento, chamados de quadratura e BPS [21]- [22], ambos baseados na condição de energia finita do sistema. Esses métodos mapeiam a equação de segunda ordem não-linear do modelo em uma equação de primeira ordem, mais fácil de resolver, encontrando a solução por simples integração. O potencial desse modelo  $\lambda\phi^4$  em 1+1 dimensões é definido por

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{2}(\phi^2 - a^2)^2, \quad (1)$$

onde definimos o parâmetro  $a^2 = \frac{\mu^2}{\sqrt{\lambda}}$  com  $\mu$  e  $\lambda$  parâmetros positivos.

Figura 2 – Potencial do  $\lambda\phi^4$  com  $\lambda = a = 1$ .



fonte: Próprio Autor.

O potencial do modelo tem dois mínimos simétricos em  $\phi = \pm a$  com estado fundamental de energia

<sup>1</sup> Traduzido do inglês como dobra ou torção

degenerado. A densidade de lagrangiana, com a métrica  $(+, -)$  é dada por

$$L = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{\lambda}{2} (\phi^2 - a^2)^2. \quad (2)$$

A densidade de lagrangiana é invariante pela transformação  $\phi \rightarrow -\phi$ , portanto o modelo tem uma simetria  $Z_2$ . Cada mínimo está em um vácuo diferente, relacionados por essa simetria. A equação de movimento das soluções independentes do tempo é

$$\phi'' = 2\lambda\phi(\phi^2 - a^2). \quad (3)$$

definimos  $\phi' = \partial_x \phi(x)$ . Há vários métodos para resolver a equação (3), um deles é chamado de BPS, criado por [21] e [22]. O método consiste em completar um quadrado perfeito na energia funcional e impor uma condição para minimizá-la, obtendo uma equação de primeira ordem a partir da equação de segunda ordem. Outro método é chamado de quadratura, na qual a partir da equação de movimento encontramos uma constante de movimento. A seguir o método por quadratura é aplicado de maneira geral, sem especificar o potencial, supondo apenas que  $V(\phi) \geq 0$ , depois é resolvido para o potencial (1). A densidade de lagrangiana de uma teoria de campos em 1+1 dimensões com um campo escalar, sendo  $\mu = 0, 1$ , é dada por

$$L = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi). \quad (4)$$

Para campos independentes do tempo temos a equação de movimento

$$\phi'' = \frac{dV}{d\phi}. \quad (5)$$

A equação (5) é invariante sob transformação  $x \rightarrow x + b$  com  $b$  uma constante arbitrária, portanto se encontrarmos uma solução  $\phi(x)$  dessa equação (5), a função  $\phi(x + b)$  também será solução. A energia total é

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left( \frac{\phi'^2}{2} + V(\phi) \right), \quad (6)$$

então a densidade de energia é dada por

$$\rho = \frac{\phi'^2}{2} + V(\phi). \quad (7)$$

Como  $V(\phi) \geq 0$ , para que a integral convirja é preciso que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi'(x) = 0 \quad e \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} V[\phi(x)] = 0 \quad (8)$$

sejam válidos separadamente. Isso significa que toda solução de energia finita deve tender a um dos vácuos do potencial em  $x \rightarrow \pm\infty$ . Podemos encontrar uma constante de integração multiplicando (5)



por:  $\phi'$ .

$$\phi' \phi'' = \phi' \frac{\partial V}{\partial \phi}, \quad (9)$$

que pode ser escrito como

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2} \phi'^2 - V \right) = 0, \quad (10)$$

portanto

$$\frac{1}{2} \phi'^2 - V = C, \quad (11)$$

onde  $C$  é uma constante de integração. Como  $C$  é a mesma constante para qualquer valor de  $x$ , usando (8) em (11), encontramos  $C = 0$ . Portanto para qualquer valor de  $x$ , as soluções com energia finita devem satisfazer às equações

$$\phi' = \pm \sqrt{2V}. \quad (12)$$

Como  $V(\phi) \geq 0$ , sempre pode ser escrito, sem perda de generalidade, que

$$V(\phi) = \frac{1}{2} W_\phi^2 \quad (13)$$

com  $W_\phi(\phi) = \frac{dW(\phi)}{d\phi}$ , onde  $W(\phi)$  é o chamado superpotencial. O método BPS [21] - [22] consiste em completar um quadrado perfeito em (6) e impor as condições (8)

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[ \frac{1}{2} (\phi' \mp W_\phi)^2 \pm W_\phi \phi' \right]. \quad (14)$$

Para que essa energia  $E$  seja mínima devemos ter (12) que equivale a  $\phi' = \pm W_\phi$ . Portanto, a energia BPS é simplesmente a diferença do superpotencial avaliado entre dois vácuos do potencial:

$$|E_{BPS}| = \int_{-\infty}^{+\infty} dx W_\phi \phi' = |W[\phi(+\infty)] - W[\phi(-\infty)]|. \quad (15)$$

A partir desse método BPS, encontramos soluções da equação de segunda ordem (5) com energia finita e mínima simplesmente resolvendo as equações de primeira ordem (12) por integração.

$$x - x_0 = \pm \int_{\tilde{\phi}_0}^{\tilde{\phi}} \frac{d\phi}{\sqrt{2V(\phi)}}. \quad (16)$$

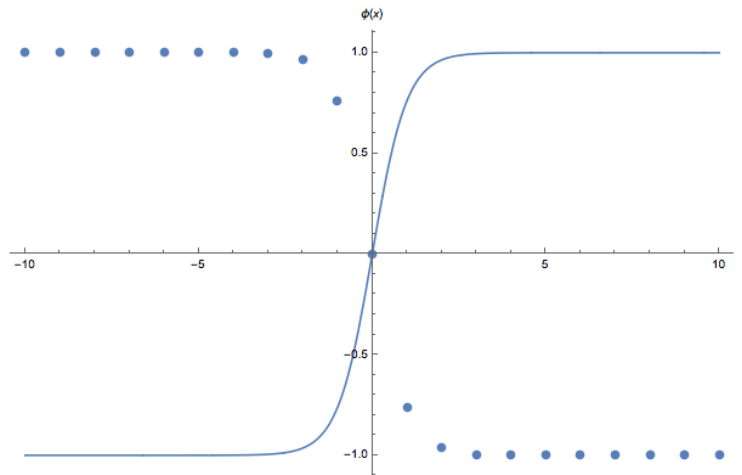
Buscamos uma solução da equação clássica (3) que satisfaça as condições de contorno  $\phi(\pm\infty) = \pm a$ , portanto a solução conecta os mínimos do potencial, levando de um vácuo  $-a$  a outro vácuo  $+a$  com energia finita. Uma solução desse tipo deve ser nula em algum ponto  $x_0$ , ou seja,  $\phi(x_0) = 0$ , mas por conveniência escolhemos  $x_0 = 0$ , uma vez que soluções que se anulam em outros pontos são apenas translações, não são novas soluções. Escolhendo  $\phi(0) = 0$  temos uma solução ímpar  $\phi(-x) = -\phi(x)$ . Substituindo (1) em (16), calculando a integral e invertendo a função para obter  $\phi$  em função de  $x$ ,

encontramos a solução do  $\lambda\phi^4$

$$\phi(x) = \pm a \tanh(\mu x) \quad (17)$$

As soluções com os sinais + e - são chamadas, respectivamente, de kink e antikink. Tais soluções convergem para os mínimos do potencial  $\phi(+\infty) = \pm a$  e  $\phi(-\infty) = \mp a$  respectivamente, levando a configurações de campo com estado fundamental de energia degenerado devido a simetria  $Z_2$ .

Figura 3 – Solução do  $\lambda\phi^4$  com  $a = \mu = 1$  em kink(linha) e antikink(pontos).



fonte: Próprio Autor.

A solução (17) pode ser transladada em torno de um ponto  $b$  qualquer fazendo  $x \rightarrow x - b$ . Por fim, foi apresentado nesta seção o método de quadratura que para um único campo é equivalente ao método BPS. A vantagem de usarmos a energia  $E$  na forma de (14) é que podemos calcular a energia do estado fundamental diretamente a partir dos vácuos do modelo. Outros modelos que tem solução tipo onda solitária podem não ter solução exata, esse fato nos motiva a buscar outros métodos de resolução, diferentes dos apresentados nesta seção. Na próxima seção introduziremos o método geral via aproximantes de Padé.

### 3.2 SOLUÇÃO POR APROXIMANTE DE PADÉ DO MODELO $\lambda\phi^4$

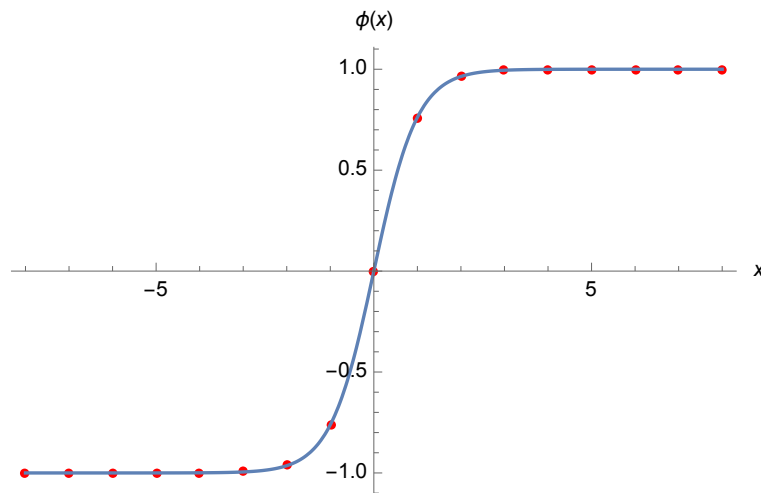
O coração deste trabalho são as soluções por aproximantes de Padé de equações não-lineares de sólitons. Usando o MIT, criamos um algoritmo no Mathematica para encontrar as soluções em polinômio de Taylor, em seguida podemos calcular as soluções em aproximantes de Padé. Vimos no capítulo dois que a solução em polinômio de Taylor do  $\lambda\phi^4$  tem uma convergência muito lenta com um raio de convergência muito pequeno, veja a figura 1. No entanto, partindo desse polinômio, podemos encontrar a solução em aproximantes de Padé do modelo com uma convergência muito maior que o próprio polinômio que gerou o Padé. Essa é uma propriedade interessante do Padé que coincide com o polinômio de Taylor que o gerou até a ordem  $n$  que é o grau do polinômio de Taylor. Embora tenha uma convergência maior que o polinômio, o autor de [23] comenta que é impossível determinar um raio de convergência do Padé, ou seja o maior valor de  $|x|$  que converge para a solução esperada.

Vamos trabalhar em torno da origem,  $x_0 = 0$ . Isso quer dizer que tanto o polinômio de Taylor quando os Padés são gerados em torno desse ponto em todo nosso trabalho. Na seção anterior usamos a condição de contorno  $\phi(\pm\infty) = \pm a$  para encontrar a solução analiticamente, nesta seção veremos que precisamos das condições iniciais  $\phi(0)$  e  $\phi'(0)$  para obter o polinômio de Taylor e a respectiva solução em Padé. Introduziremos nesta seção nosso trabalho específico, soluções de sólitons com aproximantes de Padé. Escolhemos esse modelo,  $\lambda\phi^4$ , mais simples que tem solução exata do tipo onda solitária. Poderia surgir uma questão: Qual a vantagem de trocar uma solução exata por uma solução aproximada, o Padé? Veremos neste trabalho que nem sempre essas equações não-lineares de sólitons tem solução analítica como o  $\lambda\phi^4$ , muitas vezes o modelo tem apenas solução numérica, então vamos obter para esses modelos uma solução analítica aproximada em vez da solução numérica. Uma das vantagens é que temos mais controle dos parâmetros da solução em comparação com a solução numérica. Além do mais, os aproximantes de Padé são absolutamente gerais, necessitando apenas encontrar a solução em polinômio de Taylor, o que requer apenas as condições iniciais. Veremos mais adiante que há sistemas de dois campos cujas equações são acopladas, com nosso algoritmo conseguimos encontrar as soluções em Padé sem desacoplar as equações, desde que encontremos as condições iniciais apropriadas. Outra motivação é que a solução em Padé fornece uma aproximação muito boa como veremos neste capítulo, um erro máximo percentual muito baixo para o modelo em questão. Outra motivação é que podemos trabalhar mais facilmente com o Padé do que com a própria função que é solução da equação, pois o Padé é uma simples razão de polinômios. Na seção anterior encontramos a solução exata do  $\lambda\phi^4$  e sua energia funcional usando os métodos BPS e quadratura. Nesta seção uma solução analítica aproximada é obtida utilizando os aproximantes de padé. Amplamente utilizados na literatura, os aproximantes de Padé fornecem uma boa solução aproximada dentro do seu intervalo de convergência. Dada a equação (3) do  $\lambda\phi^4$ , a solução por Taylor Iterativo com as condições iniciais  $\phi(0) = 0$  e  $\phi'(0) = 1$ . Este polinômio de Taylor de ordem 21 tem uma paridade definida pela condição inicial  $\phi(0) = 0$ . Um Padé de ordem  $L$  por  $M$ , na qual  $L$  é o grau do polinômio do numerador e  $M$  o do denominador, necessita de um polinômio de Taylor de ordem  $L + M + 1$ . No capítulo anterior obtivemos o polinômio de Taylor, equação (10), utilizando o MIT, neste capítulo vamos propor um algoritmo utilizando o MIT em conjunto com o aproximante de Padé, veja apêndice A, portanto conhecendo o polinômio (10) do capítulo anterior e utilizando esse algoritmo (Apêndice A), uma solução analítica aproximada de (3) é o Padé 10 por 10 dado por

$$\phi_p(x) = \frac{x + \frac{8x^3}{57} + \frac{7x^5}{1615} + \frac{4x^7}{101745} + \frac{x^9}{11904165}}{1 + \frac{9x^2}{19} + \frac{28x^4}{969} + \frac{7x^6}{14535} + \frac{x^8}{440895} + \frac{x^{10}}{654729075}}. \quad (18)$$

As condições iniciais  $\phi(0) = 0$  e  $\phi'(0) = 1$  foram usadas no polinômio de Taylor. Alternativamente podemos usar as condições iniciais apenas no Padé e não no polinômio de Taylor no entanto, essa outra abordagem implica um tempo de computação maior para calcular o Padé, pois um polinômio com mais termos consome mais tempo. O Padé 10 por 10 dado em (18) possui polinômios com uma paridade definida pelas condições iniciais (as mesmas usadas no polinômio de Taylor).

Figura 4 – Gráficos da Solução do  $\lambda\phi^4$  por aproximante de Padé (18) (vermelho) e solução exata (azul) com  $a = \mu = 1$ .



fonte: Próprio Autor.

Abaixo comparamos a solução exata  $\phi(x)$  dada em (17) com a solução por aproximante de Padé  $\phi_p(x)$  dada em (18).

Tabela 1 – Solução Exata e por Padé.

x	$\phi(x)$	$\phi_p(x)$
0	0	0
1	0.761594	0.761594
2	0.964028	0.964028
3	0.995055	0.995055
4	0.999329	0.999329
5	0.999909	0.999909
6	0.999988	0.999987
7	0.999998	0.999996
8	0.999999	0.999992

fonte: Próprio Autor.

Observamos na tabela 1 que o Padé fornece uma solução aproximada com um erro percentual máximo de 0.0008% com  $x \in [-8, 8]$ . Usando (1) com  $C = 0$ , ou seja, que  $V(\phi) = \phi^2/2$  em (6) e o Padé (18), a energia é dada por

$$E_{BPS} = \int_{-8}^8 dx (\phi'_p)^2 = 1.33333. \quad (19)$$

A solução exata (17) com  $a = \mu = 1$  leva a  $E_{BPS} = 4/3$ , comparando com (19), observamos que a solução por Padé dentro do intervalo aparente de convergência fornece um ótimo valor de energia.

Enfim, neste capítulo foram definidas as ondas solitárias e os sólitons que são ondas solitárias que mantem sua forma e velocidade após as colisões. Apresentamos também as características das soluções tipo Kink com a introdução do modelo  $\lambda\phi^4$ , depois foi introduzida a ferramenta matemática fundamental usada nesse trabalho, os aproximantes de Padé. No próximo capítulo apresentaremos um modelo de dois campos e calcularemos as soluções da teoria via Padé.

## 4 MODELO DE DOIS CAMPOS ESCALARES

### 4.1 SOLUÇÕES EXATAS DO MODELO DE DOIS CAMPOS

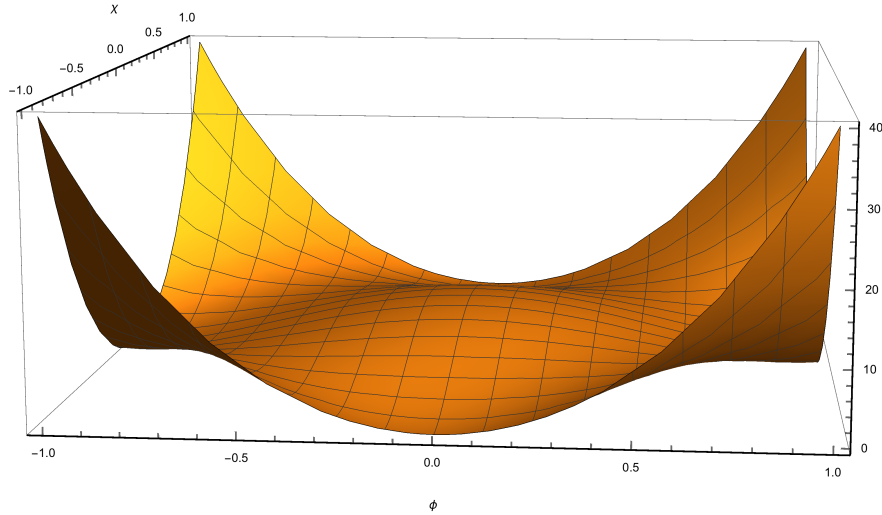
Na natureza muitos fenômenos são modelados com equações diferenciais lineares, por exemplo, fenômenos eletromagnéticos para os quais vale o princípio da superposição, o campo elétrico e o magnético resultantes é a soma de todos os campos do sistema. Na Mecânica Quântica podemos citar a equação de Schrödinger cujas soluções obedecem ao princípio de superposição. No universo encontramos também fenômenos não-lineares, que não obedecem ao princípio da superposição. Neste capítulo abordaremos um modelo que pertence a uma classe de sistemas dinâmicos que possui características particulares, introduzido em [24] em duas dimensões de espaço-tempo. Tal modelo possui dois campos reais  $\phi$  e  $\chi$ , suas equações de movimento são acopladas e não-lineares, não obedecem ao princípio de superposição. Algumas soluções desse modelo de [24] podem ser obtidas pelo método BPS. Baseado na energia funcional, buscamos soluções BPS desse modelo com mínima energia. Conseguimos encontrar, a partir das equações de movimento não-lineares de segunda ordem, um conjunto de equações de primeira ordem acopladas que podem ser vistas como um sistema dinâmico. Dizemos que tais soluções são soluções topológicas de Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield, em homenagem aos autores que criaram o método. Foram obtidas em [25] para o modelo de [24] que levam a uma equação de órbita que relaciona os campos, permitindo desacoplar as equações de movimento. Anos depois, [37] exploraram a diversidade das soluções desse modelo, introduzindo um parâmetro de controle que não aparece na densidade de lagrangiana, chamado  $c_0$ , é um parâmetro que aparece na integração da equação de órbita do modelo de dois campos e altera o tipo de solução, conforme variamos esse parâmetro. Soluções com um certo valor crítico  $c_0 = c_c$  são do tipo kink para ambos os campos, quando  $c_0 < c_c$ , as soluções são lump para  $\chi$  e kink para  $\phi$ . Soluções do tipo lump são aquelas que conectam o mesmo vácuo, por exemplo,  $\phi(-\infty) = \phi(+\infty)$ . Quando  $c_0$  é menor e muito próximo ao  $c_c$ , as soluções mudam radicalmente,  $\phi$  é um duplo kink e  $\chi$  é um lump achatado. Esse modelo, com duas dimensões de espaço-tempo, pode ter aplicação no estudo das chamadas paredes de domínio em matéria condensada. Um material ferromagnético pode ser dividido em diferentes regiões chamadas de domínios, com diferentes valores médios da magnetização. As regiões limites que separam um domínio do outro são chamadas de paredes de domínio [20]. Essas paredes, com largura finita, possuem uma estrutura interna de tal forma que a transição entre um domínio e outro é contínua e minimiza a energia magnética livre, demonstrado por Bloch [38]- [39]. Dentro de um domínio o vetor magnetização é paralelo a uma direção preferencial. Na região de transição, dentro da parede, o vetor magnetização pode girar de forma perpendicular ou paralela a parede. Nesse último caso chamamos de paredes de Bloch. O modelo de dois campos que será abordado neste capítulo tem equações de movimento cujas soluções podem ser aplicadas numa abordagem fenomenológica de tais paredes. Essas soluções, como citamos anteriormente, mudam de acordo com um parâmetro crítico de controle  $c_0$ . As paredes com soluções de  $c_0 = c_c$  são denominadas parede são de Bloch críticas e quando  $c_0 < c_c$  as paredes chamadas de Bloch degeneradas. O potencial desse modelo [24] de dois

campos  $\phi$  e  $\chi$  em 1+1 dimensões é dado por

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2}[r(\phi^2 - 1) + \chi^2]^2 + \frac{1}{2}(2\phi\chi)^2, \quad (1)$$

onde  $r$  é um parâmetro arbitrário.

Figura 5 – Gráfico do potencial  $V$  com  $r = 1$ .



fonte: Próprio Autor.

Para  $r > 0$  os mínimos  $M_n = (\phi, \chi)$  do potencial são

$$\begin{aligned} M_1 &= (-1, 0), & M_2 &= (1, 0) \\ M_3 &= (0, -\sqrt{r}), & M_4 &= (0, \sqrt{r}). \end{aligned} \quad (2)$$

Fazendo  $r = 1$ , observamos no gráfico da (Figura 5) tais mínimos. Definindo  $W_\alpha = \partial W / \partial \alpha$  temos

$$W_\phi = r(\phi^2 - 1) + \chi^2, \quad (3)$$

$$W_\chi = 2\phi\chi, \quad (4)$$

então o potencial (1) é

$$V = \frac{1}{2}(W_\phi^2 + W_\chi^2), \quad (5)$$

onde temos

$$W = \phi\chi^2 + r \left( \frac{\phi^3}{3} - \phi \right). \quad (6)$$

A densidade de lagrangiana com métrica  $(+, -)$  é dada por

$$L = \frac{1}{2}[(\partial_\mu \phi)^2 + (\partial_\mu \chi)^2 - (W_\phi^2 + W_\chi^2)], \quad (7)$$

então as equações de movimento para campos independentes do tempo são acopladas e dadas por

$$\phi''(x) = 4\phi\chi^2 + 2r\phi[r(\phi^2 - 1) + \chi^2] = W_\phi W_{\phi\phi} + W_\chi W_{\chi\phi}, \quad (8)$$

$$\chi''(x) = 4\phi^2\chi + 2\chi[r(\phi^2 - 1) + \chi^2] = W_\chi W_{\chi\chi} + W_\phi W_{\chi\phi}. \quad (9)$$

Soluções dessas equações foram obtidas analiticamente por [25] para  $r = 1$  e  $r = 4$ . A energia funcional da configuração estática é dada por

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx (\phi'^2 + \chi'^2 + W_\phi^2 + W_\chi^2), \quad (10)$$

então a densidade de energia da configuração estática é dada por

$$\rho = \frac{1}{2} (\phi'^2 + \chi'^2 + W_\phi^2 + W_\chi^2). \quad (11)$$

Como essa energia é uma soma de quadrados é preciso que cada um deles tenda a zero separadamente quando  $x \rightarrow \pm\infty$  para que a integral seja convergente:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\phi'(x), \chi'(x)) = (0, 0), \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (W_\phi, W_\chi) = (0, 0), \quad (13)$$

consequentemente

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} V(\phi, \chi) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2} (W_\phi^2 + W_\chi^2) = 0 \quad (14)$$

ou seja, como no caso de um campo, as soluções com energia finita tendem aos vácuos do potencial para  $x \rightarrow \pm\infty$ . Vamos aplicar a quadratura multiplicando (8) por  $\phi'(x)$  e (9) por  $\chi'(x)$ . Somando essas equações temos

$$\phi'\phi'' + \chi'\chi'' = \phi' \frac{\partial V}{\partial \phi} + \chi' \frac{\partial V}{\partial \chi} = \frac{dV}{dx}. \quad (15)$$

A partir dessa expressão temos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} (\phi'^2 + \chi'^2) = \frac{dV}{dx}, \quad (16)$$

portanto temos

$$\frac{1}{2} (\phi'^2 + \chi'^2) - V = C. \quad (17)$$

Usando as condições de energia finita (12), (13) temos que  $C = 0$ , substituindo (5) temos

$$\phi'^2 + \chi'^2 - W_\phi^2 - W_\chi^2 = 0. \quad (18)$$

Por outro lado, completando um quadrado perfeito em (10) temos pelo método BPS

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx [(\phi' \mp W_\phi)^2 + (\chi' \mp W_\chi)^2 \pm 2(W_\phi \phi' + W_\chi \chi')]. \quad (19)$$

Como o último termo de (19) só depende dos valores assintóticos, os dois primeiros termos de (19) são definidos positivos. Para que a energia funcional,  $E$ , seja mínima escolhemos impor as condições de BPS:

$$\phi' = \pm W_\phi = \pm[r(\phi^2 - 1) + \chi^2], \quad (20)$$

$$\chi' = \pm W_\chi = \pm 2\phi\chi. \quad (21)$$

Note que (20) e (21) satisfazem (18), mas essa não é a única possibilidade, ou seja, (20) e (21) não são consequências puras de (18) e agora vemos que quadratura e BPS não são mais equivalentes como no caso do modelo de um campo. A energia mínima é dada por

$$|E_{BPS}| = \int_{-\infty}^{+\infty} dx [(W_\phi \phi' + W_\chi \chi')] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{dW}{dx}, \quad (22)$$

que é simplesmente a diferença do superpotencial avaliado nos extremos de integração

$$|E_{BPS}| = |W[\phi(\infty), \chi(\infty)] - W[\phi(-\infty), \chi(-\infty)]|. \quad (23)$$

Das equações (20) e (21) encontramos

$$\frac{d\phi}{d\chi} = \frac{d\phi/dx}{d\chi/dx} = \frac{W_\phi}{W_\chi} = \frac{r(\phi^2 - 1) + \chi^2}{2\phi\chi}. \quad (24)$$

Definindo a variável  $\rho(x) = \phi(x)^2 - 1$  a equação acima fica

$$\frac{d\rho}{d\chi} - \frac{r\rho}{\chi} = \chi, \quad (25)$$

portanto as soluções dessa equação são

$$\rho(x) = \phi^2 - 1 = c_0 \chi^r - \frac{\chi^2}{r-2}, \quad (r \neq 2) \quad (26)$$

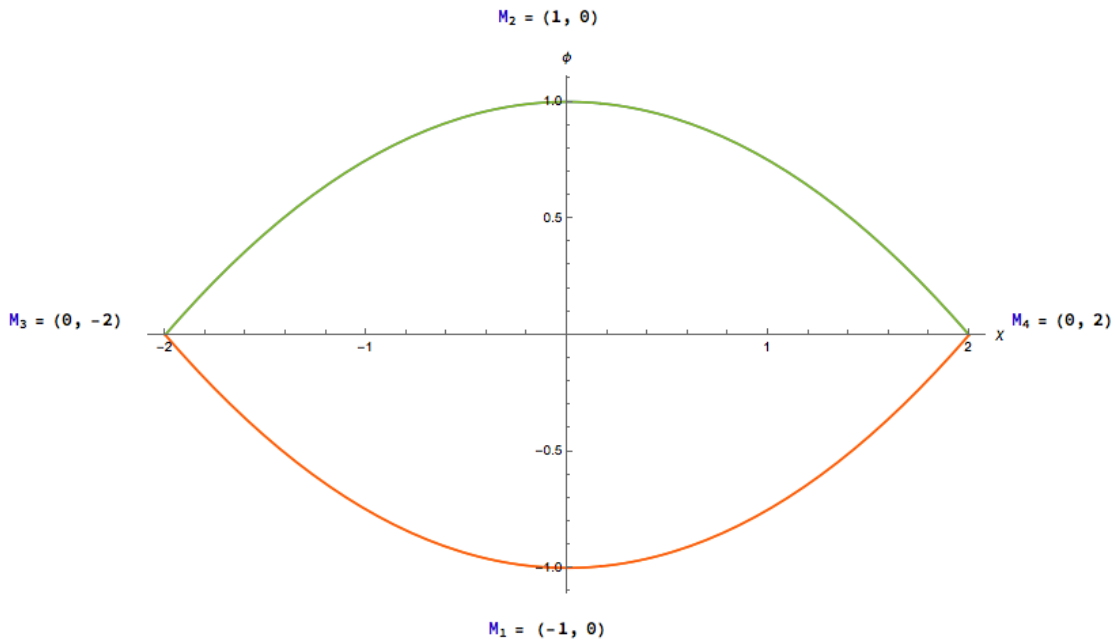
$$\rho(x) = \phi^2 - 1 = \chi^2 [\ln(\chi) + c_1], \quad (r = 2) \quad (27)$$

note que  $c_0$  e  $c_1$  são constantes de integração de (25), a princípio arbitrárias.

Na figura 6 mostramos como a equação de órbita (26) conecta diferentes mínimos do potencial. Para  $r = 4$  e  $c_0 = 1/16$ , os mínimos do potencial  $M_i = (\phi, \chi)$  são  $M_1 = (-1, 0)$ ,  $M_2 = (1, 0)$ ,  $M_3 = (0, -2)$  e  $M_4 = (0, 2)$ .



Figura 6 – Gráfico da equação de órbita (26) conectando os quatro mínimos do potencial para  $r = 4$  e  $c_0 = 1/16$ .



fonte: Próprio Autor.

Substituindo as soluções (26) e (27) na equação (21) desacoplamos essa equação

$$\frac{d\chi}{dx} = \pm 2\chi \sqrt{1 + c_0\chi^r - \frac{\chi^2}{r-2}}, \quad (r \neq 2) \quad (28)$$

$$\frac{d\chi}{dx} = \pm 2\chi \sqrt{1 + \chi^2[\ln(\chi) + c_1]}, \quad (r = 2). \quad (29)$$

As equações (26) e (27) são chamadas de equações de órbita, elas desacoplam as equações (21) e (20). Conhecendo os mínimos do potencial, (2), vamos usar o mínimo  $(\phi, \chi) = (0, \sqrt{r})$  nessa equação de órbita (26) para determinar a constante  $c_0$ , então temos

$$c_0 = \pm \left[ \frac{r}{r-2} - 1 \right] r^{-r/2}. \quad (30)$$

Assim determinamos o parâmetro  $c_0$  em termos de  $r$ . Esse parâmetro funciona como um controle do tipo de solução encontrada. O autor de [25] resolveu analiticamente a equação (28) para  $r = 1$  e  $r = 4$ . Note que nesses casos temos um quadrado perfeito dentro da raiz de 28. Substituindo esses valores de  $r$  em (30), [25] encontrou os valores críticos  $c_c = -2$  e  $c_c = 1/16$  conjectura-se que só existem soluções com energia finita para um certo  $c_0$  menor ou no máximo igual a esses valores críticos. Observe que derivando (20) e (21) mostramos que as equações de segunda ordem (8) e (9) são satisfeitas.

#### 4.1.1 A. Soluções Exatas - Paredes de Bloch Degeneradas ( $c_0 < c_c$ )

Esse primeiro conjunto de soluções de (28) são chamadas de Paredes de Bloch Degeneradas (PBD)

**A1.** Para  $c_0 < -2$  e  $r = 1$ :

$$\chi_{PBD}^{(1)}(x) = \frac{2}{(\sqrt{c_0^2 - 4}) \cosh(2x) - c_0}, \quad (31)$$

$$\phi_{PBD}^{(1)}(x) = \frac{(\sqrt{c_0^2 - 4}) \sinh(2x)}{(\sqrt{c_0^2 - 4}) \cosh(2x) - c_0}. \quad (32)$$

**A2.** Para  $r = 4$  e  $c_0 < 1/16$  temos:

$$\chi_{PBD}^{(2)}(x) = -\frac{2}{\sqrt{(\sqrt{1 - 16c_0}) \cosh(4x) + 1}}, \quad (33)$$

$$\phi_{PBD}^{(2)}(x) = -\frac{(\sqrt{1 - 16c_0}) \sinh(4x)}{(\sqrt{1 - 16c_0}) \cosh(4x) + 1}. \quad (34)$$

Vemos claramente que a contante  $c_0$  possui os valores críticos  $c_c = -2$  e  $c_c = 1/16$ , respectivamente, para soluções finitas. As soluções acima com  $c_0$  menor que o crítico são do tipo kink para um campo e lump para o outro. A energia para essas soluções são degeneradas para qualquer valor de  $c_0$ , a energia é  $E_{PBD} = 4r/3$ . Para valores de  $c_0$  menor que o valor crítico, (31) possui solução tipo lump e (32) tem solução tipo kink. As soluções (33) e (34) são lump e kink, respectivamente. Os formatos típicos de kink e lump aparecem nas curvas contínuas da figura 7 por exemplo.

#### 4.1.2 B. Soluções Exatas - Paredes de Bloch Críticas ( $c_0 = c_c$ )

Para os valores críticos de  $c_0$ , as soluções foram chamadas de Parede de Bloch Críticas (PBC)

**B1.** Para  $r = 1$  e  $c_0 = -2$ :

$$\chi_{PBC}^{(1)}(x) = \frac{1}{2}[1 \pm \tanh(x)], \quad (35)$$

$$\phi_{PBC}^{(1)}(x) = -\frac{1}{2}[\tanh(x) \mp 1]. \quad (36)$$

**B2.** Para  $r = 4$  e  $c_0 = 1/16$ :

$$\chi_{PBC}^{(2)}(x) = \frac{\sqrt{2}[\cosh(x) \pm \sinh(x)]}{\sqrt{\cosh(2x)}}, \quad (37)$$

$$\phi_{PBC}^{(2)}(x) = \frac{1}{2}[\pm 1 - \tanh(2x)]. \quad (38)$$

Para  $c_0$  igual ao crítico as soluções (35) e (36) são ambas do tipo kink. A energia para essas soluções é  $E_{PBC} = 2r/3$ . As soluções (37) e (38) também são do tipo kink. Quando os valores de  $c_0$  estão muito próximos do valor crítico, mas ainda abaixo, uma solução tipo duplo kink aparece se distinguindo das soluções para  $c = c_c$ .

## 4.2 SOLUÇÕES POR APROXIMANTES DE PADÉ DO MODELO DE DOIS CAMPOS

### 4.2.1 Condições Iniciais

Na seção anterior apresentamos o modelo de dois campos  $\phi$  e  $\chi$  [24]. Comentamos que as soluções formam as paredes de domínio e conectam os mínimos do potencial. Usamos a abordagem feita por [25] para obter as soluções analíticas via método BPS e equação de órbita. Vimos também que esse modelo tem solução analítica apenas para alguns valores de parâmetros, para  $r = 1$  e para  $r = 4$ . Vimos anteriormente que esse modelo de dois campos tem duas equações diferenciais não-lineares acopladas. As equações de órbita (26) e (27) obtidas por [25] desacoplam essas equações. As soluções tem mínima energia e conectam os mínimos do potencial. Esta seção é o núcleo do nosso trabalho, na qual aplicaremos nosso conhecimento adquirido no modelo de um campo, usando os aproximantes de Padé. A seguir as equações (20) e (21) para o problema de dois campos são resolvidas por aproximantes de Padé para os casos  $r = 1$  e  $r = 4$ , na qual a solução exata foi apresentada na seção anterior. Primeiramente encontramos a solução em polinômio de Taylor de (20) e (21) e depois usando esses polinômios encontramos a solução das equações por aproximantes de Padé. Comentamos no capítulo três que conhecemos as condições de contorno do  $\lambda\phi^4$  e que precisamos encontrar as condições iniciais para calcular a solução em polinômio de Taylor. No capítulo dois seguimos uma abordagem de encontrar os coeficientes da série de Taylor da própria equação diferencial. Nesta seção vamos seguir essa abordagem para extrair informações da própria equação diferencial, simplesmente impondo condições na derivada primeira do campo. As equações de primeira ordem (20) e (21) são acopladas, cada equação possui uma solução em polinômio de Taylor em termos de duas constantes iniciais  $\phi(0)$  e  $\chi(0)$ . Essas constantes podem ser determinadas impondo condições sobre  $\phi'(0)$  e  $\chi'(0)$ . Como as soluções procuradas são tipo kink ou tipo lump temos que uma solução tipo lump tem derivada primeira nula em alguns pontos que podemos escolher sempre como a origem  $\chi'(0) = 0$ . Já uma solução tipo kink possui derivada primeira máxima na origem, a reta tangente tem a máxima inclinação, portanto fazendo  $\chi''(0) = 0$  encontramos a condição inicial para o kink. Uma vez encontrada uma condição inicial  $\chi(0)$ , ela pode ser substituída na equação de órbita (26) para encontrar a outra condição  $\phi(0)$ . Partindo desse princípio, podemos encontrar todas as condições iniciais a partir das equações de segunda ordem (8) e (9), das equações de primeira ordem, (21) e da equação de órbita (27), basta encontrar as raízes das equações em  $x = 0$ . Podemos dividir as situações encontradas em dois casos possíveis;

**Caso 1.** Quando  $c_0 < c_c$  (PBD) as soluções são kink para  $\phi(x)$  e lump para  $\chi(x)$ . Quando  $c_0 \approx c_c$ , as soluções são duplo kink para  $\phi(x)$  e lump achatado para  $\chi(x)$ . Usando a equação (21) para determinar  $\chi(0)$ , as condições para o lump, temos

$$\chi'(0) = 2\phi(0)\chi(0) = 0. \quad (39)$$

Como o lump liga dois vácuos de forma que  $\chi(+\infty)=\chi(-\infty)$  e deve ter um mínimo ou um máximo em  $x = 0$ , não podemos satisfazer (39) com  $\chi(0) = 0$ , portanto nos resta  $\phi(0) = 0$ , mas usando a equação de órbita (26) isso implica em

$$c_0\chi^r(0) - \frac{\chi^2(0)}{r-2} + 1 = 0, \quad (r \neq 2). \quad (40)$$

As raízes da equação (40) nos fornecem a condição inicial de  $\chi(0)$ . Escolhemos a raiz que estiver em um intervalo entre o mínimos do potencial dados em (2), ou seja,  $0 < |\chi(0)| < \sqrt{r}$ , já que as soluções com mínima energia conectam dois mínimos do potencial. Os sinais  $\pm$  das raízes indicam se o lump está na região positiva ou negativa do sistema de coordenadas, portanto podemos ter uma ou duas condições iniciais com sinais opostos. A raiz  $\chi(0)$  em conjunto com  $\phi(0) = 0$  permite obter as soluções em Taylor e Padé de (20) e (21) nos casos  $c_0 < c_c$  e  $c_0 \approx c_c$ .

**Caso 2.** Quando  $c_0 = c_c$  (PBC) os campos  $\phi(x)$  e  $\chi(x)$  são do tipo duplo kink. Podemos usar as equações (8) e (9) para determinar o campo  $\chi(x)$ , uma vez que o kink tem derivada máxima  $\chi''(0) = 0$  e  $\phi''(0) = 0$  na origem

$$\phi''(0) = 4\phi(0)\chi^2(0) + 2r\phi(0)[r(\phi^2(0) - 1) + \chi^2(0)] = 0, \quad (41)$$

$$\chi''(0) = 4\phi^2(0)\chi(0) + 2\chi(0)[r(\phi^2(0) - 1) + \chi^2(0)] = 0. \quad (42)$$

Substituindo a equação de órbita (26) nas equações (41) e (42) e calculando as raízes dessas equações desacopladas, conseguimos determinar  $\chi(0)$ . A princípio podemos escolher qualquer uma das duas equações (41) e (42), pois ao desacoplá-las, ambas tem dependência dos termos do lado direito apenas de  $\chi(0)$ . Quando essas soluções em kink não tem um máximo na origem, sempre podemos fazer uma translação, pois as soluções para (21) e (20) são invariantes por translação espacial. Após determinar  $\chi(0)$ , usaremos a equação de órbita (26) para determinar  $\phi(0)$ .

#### 4.2.2 A. Aproximantes de Padé - Paredes de Bloch Degeneradas ( $c_0 < c_c$ )

Nesta subseção buscaremos soluções com  $c_0$  menor que o valor crítico  $c_c = -2$  e  $c_c = 1/16$ , portanto usaremos a equação (40) do caso 1 acima.

**A1.** Inicialmente buscamos as condições iniciais para resolver a equação (21) por polinômio de Taylor com  $r = 1$  e  $c_0 = -3$ . Usando esses parâmetros em (40) temos

$$1 - 3\chi(0) + \chi^2(0) = 0. \quad (43)$$

As raízes dessa equação são  $\chi(0) = 2.6180$  e  $\chi(0) = 0.38196$ . Buscamos soluções entre os mínimos de  $\chi(x)$ , portanto temos  $0 < |\chi(0)| < 1$ . Então a única solução é  $\chi(0) = 0.38196$ . A condição para o outro kink é  $\phi(0) = 0$ . Aqui introduziremos nosso algoritmo do Mathematica para o modelo de dois campos, veja no apêndice (A) como obtivemos o polinômio de Taylor de (21) e a respectiva solução em Padé na tabela 2. Usando essas condições iniciais determinadas, as soluções em Taylor e Padé de (21) são

Tabela 2 – Coeficientes de Taylor e de Padé de das soluções de (21) com  $r = 1$  e  $c_0 = -3(\chi(x))$ .

(a) Coeficientes de Taylor

n	$a_n$
0	0.38196
2	-0.32623
4	0.16989
6	-0.066726
8	0.019970
10	-0.0036704
12	-0.00044047
14	0.00082472
16	-0.00048636
18	0.00020510
20	-0.000066447

fonte: Próprio Autor.

(b) Coeficientes de  $P(x)$

n	$p_n$
0	0.38196
2	-0.027107
4	0.00096613
6	-0.000022168
8	$3.3792 \times 10^{-7}$
10	$-2.8503 \times 10^{-9}$

fonte: Próprio Autor.

(c) Coeficientes de  $Q(x)$

n	$q_n$
0	1
2	0.78313
4	0.22661
6	0.019857
8	0.00068885
10	$8.3193 \times 10^{-6}$

fonte: Próprio Autor.

Usando as mesmas condições iniciais e parâmetros da solução anterior, encontramos a solução em Taylor e em Padé de (20)

Tabela 3 – Coeficientes de Taylor e de Padé das soluções de (20) com  $r = 1$  e  $c_0 = -3(\phi(x))$ .

(a) Coeficientes de Taylor

n	$a_n$
1	-0.85410
3	0.16008
5	-0.0074490
7	-0.017639
9	0.012822
11	-0.0060002
13	0.0021472
15	-0.00056426
17	0.000065749
19	0.000037766
21	-0.000034700

fonte: Próprio Autor.

(b) Coeficientes de  $P(x)$

n	$p_n$
1	0.85410
3	0.51866
5	0.079804
7	0.0041273
9	0.000048326

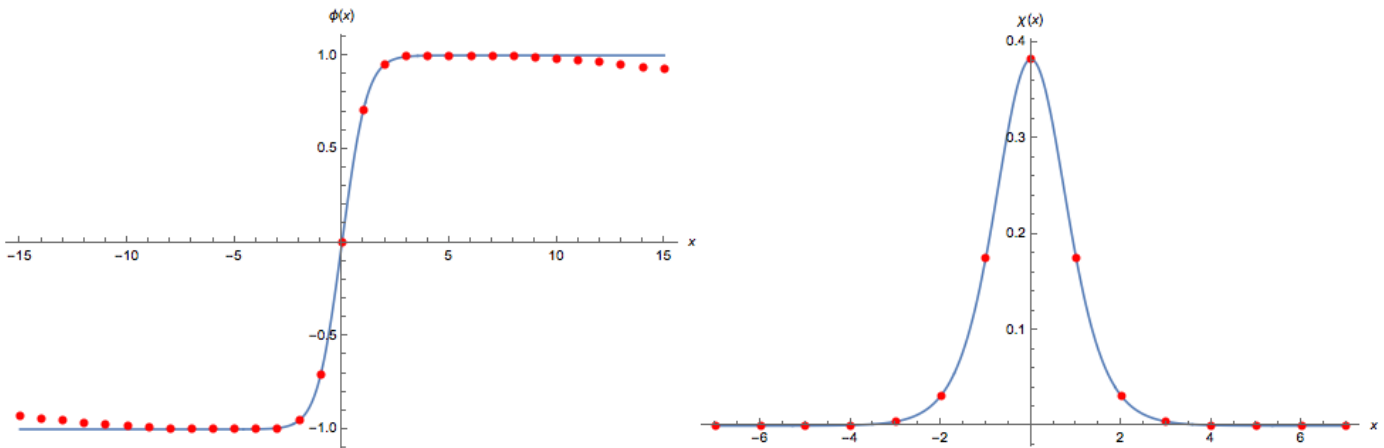
fonte: Próprio Autor.

(c) Coeficientes de  $Q(x)$

n	$q_n$
0	1
2	0.79469
4	0.23367
6	0.021047
8	0.00056440
10	$1.97726 \times 10^{-6}$

fonte: Próprio Autor.

Figura 7 – Para  $c_0 = -3$  e  $r = 1$ , os gráficos das soluções por Padé das tabelas dois e três (ponto vermelho) e exata (linha azul).



fonte: Próprio Autor.

**A2.** Para  $r = 4$  e  $c_0 = 1/30$  usamos (40) então temos

$$1 - \frac{\chi^2(0)}{2} + \frac{\chi^4(0)}{30} = 0. \quad (44)$$

As únicas raízes dessa equação entre os mínimos do potencial são  $\chi(0) = \pm 1.5415$ . Sendo a condição inicial  $\phi(0) = 0$  para o outro kink, obtemos as soluções em Taylor e em Padé de (21):

Tabela 4 – Coeficientes de Taylor e de Padé das soluções de (21) com  $r = 4$ ,  $c_0 = 1/30$  ( $\chi(x)$ ).

(a) Coeficientes de Taylor

n	$a_n$
0	-1.5415
2	2.5027
4	-2.7578
6	2.0184
8	0.11673
10	-3.7748
12	8.3714
14	-12.207
16	12.330
18	-5.0352
20	-12.644

fonte: Próprio Autor.

(b) Coeficientes de  $P(x)$

n	$p_n$
0	-1.5415
2	-5.0130
4	-5.7004
6	-1.8339
8	0.40792
10	-0.034041

fonte: Próprio Autor.

(c) Coeficientes de  $Q(x)$

n	$q_n$
0	1
2	4.8753
4	9.8240
6	9.7264
8	4.4106
10	0.56616

fonte: Próprio Autor.

Utilizando as mesmas condições e constantes, a solução em Taylor e em Padé de (20) é

Tabela 5 – Coeficientes de Taylor e de Padé das soluções de (20) com  $r = 4$ ,  $c_0 = 1/30$  ( $\phi(x)$ ).

(a) Coeficientes de Taylor

n	$a_n$
1	-1.6235
3	0.94217
5	0.50597
7	-3.2926
9	7.1031
11	-10.450
13	10.359
15	-2.6912
17	-16.287
19	46.726
21	-80.695

fonte: Próprio Autor.

(b) Coeficientes de  $P(x)$

n	$p_n$
1	-1.6235
3	-3.8400
5	-2.2101
7	-0.41947
9	-0.018782

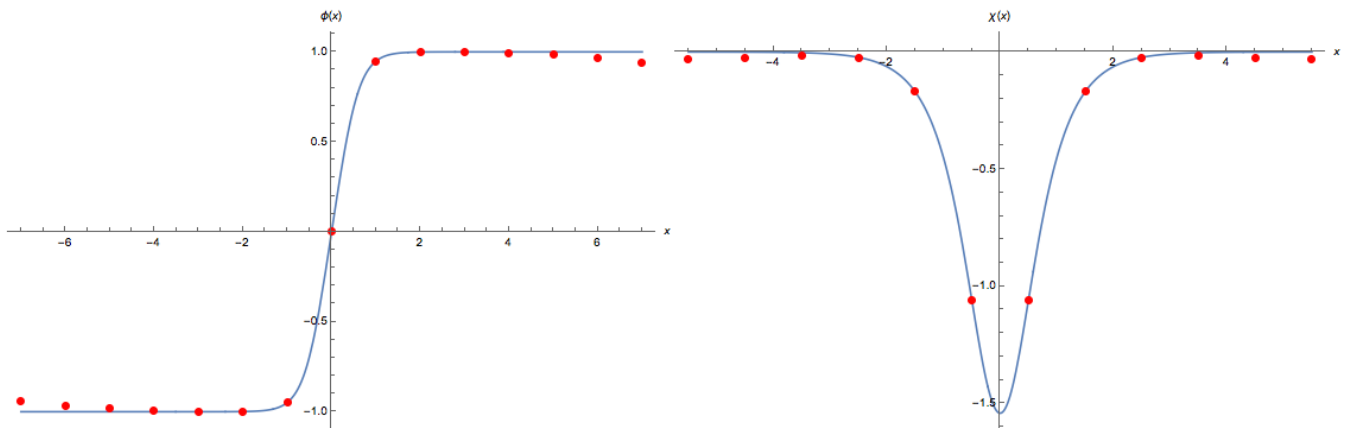
fonte: Próprio Autor.

(c) Coeficientes de  $Q(x)$

n	$q_n$
0	1
2	2.9456
4	3.3824
6	1.1111
8	0.11171
10	0.0015154

fonte: Próprio Autor.

Figura 8 – Para  $r = 4$  e  $c_0 = 1/30$  temos os gráfico das soluções por Padé das tabelas quatro e cinco (Ponto vermelho) e exata (linha azul).



fonte: Próprio Autor.

Observe acima, figura 8, que as soluções em padé (ponto vermelho) convergem para as soluções exatas (linha azul) em uma certa região de convergência. Observe também nessas figuras a região que deixa de ser convergente. Em todos esses caso temos as chamadas Parede de Bloch Degeneradas, que tem soluções que são determinadas por  $c_0$  menor que um valor crítico  $c_c$ . Observamos que tais soluções para  $\phi(x)$  são do tipo kink e para  $\chi(x)$  são do tipo lump.

### 4.2.3 B. Aproximantes de Padé - Paredes de Bloch Críticas ( $c_0 = c_c$ )

Nesta subseção buscaremos soluções de (20) e (21) com  $c_0$  igual ao valor crítico, portanto usaremos as equações (41) e (42) abordadas no caso 2.

**B1.** Para  $r = 1$  e  $c_0 = -2$  substituindo a equação de órbita (26) em (42) para desacoplá-la, então temos

$$1 - 3\chi(0) + 2\chi^2(0) = 0. \quad (45)$$

A única raiz entre os mínimos do potencial é  $\chi(0) = 0.5$ . Substituindo na equação de órbita (26), temos a condição para o outro kink  $\phi(0) = 0.5$ . Utilizando essas condições, as soluções em Taylor e em Padé de (21) para  $\chi(x)$  são dadas na tabela 6.

Tabela 6 – Coeficientes de Taylor e de Padé das soluções de (21) com  $r = 1$ ,  $c_0 = -2$  ( $\chi(x)$ ).

(a) Coeficientes de Taylor

n	$a_n$
0	0.5
1	0.5
3	-0.16666
5	0.066666
7	-0.026984
9	0.010934
11	-0.0044316
13	0.0017960
15	-0.00072791
17	0.00029501
19	-0.00011956
20	$2.3017 \times 10^{-17}$
21	0.000048457

fonte: Próprio Autor.

(b) Coeficientes de  $P(x)$

n	$p_n$
0	0.5
1	1.3226
2	1.0589
3	0.45673
4	0.12709
5	0.024673
6	0.0034522
7	0.00034858
8	0.000024590
9	$1.1061 \times 10^{-6}$
10	$2.4353 \times 10^{-8}$

fonte: Próprio Autor.

(c) Coeficientes de  $Q(x)$

n	$q_n$
0	1
1	1.6453
2	0.47253
3	0.77426
4	0.028361
5	0.045165
6	0.00045223
7	0.00066176
8	$1.9122 \times 10^{-6}$
9	$2.1485 \times 10^{-6}$
10	$9.6254 \times 10^{-10}$

fonte: Próprio Autor.



Utilizando as mesmas condições e constantes anteriores temos as soluções de (20) para  $\phi(x)$ , mostradas na tabela 7

Tabela 7 – Coeficientes de Taylor e de Padé das soluções de (20) com  $r = 1$ ,  $c_0 = -2$  ( $\phi(x)$ ).

(a) Coeficientes de Taylor

n	$a_n$
0	0.5
1	-0.5
3	0.16666
5	-0.066666
7	0.026984
9	-0.010934
11	0.0044316
13	-0.0017960
15	0.00072791
17	-0.00029501
19	0.00011956
20	$5.0145 \times 10^{-17}$
21	-0.000048457

fonte: Próprio Autor.

(b) Coeficientes de  $P(x)$

n	$p_n$
0	0.5
1	1.8473
2	-2.1127
3	1.0367
4	-0.30880
5	0.062575
6	-0.0090232
7	0.00093230
8	-0.000067016
9	$3.0640 \times 10^{-6}$
10	$-6.8485 \times 10^{-8}$

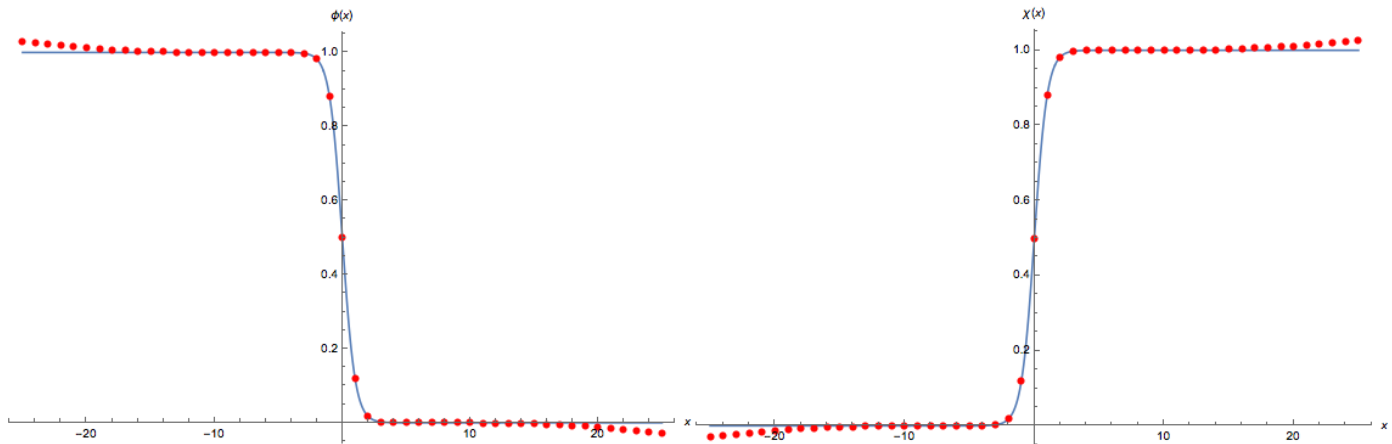
fonte: Próprio Autor.

(c) Coeficientes de  $Q(x)$

n	$q_n$
0	1
1	4.6946
2	0.46909
3	2.2092
4	0.026754
5	0.12887
6	0.00036393
7	0.0018882
8	$8.4190 \times 10^{-7}$
9	$6.1306 \times 10^{-6}$
10	$-7.3646 \times 10^{-10}$

fonte: Próprio Autor.

Figura 9 – Para  $r = 1$  e  $c_0 = -2$ , gráfico das soluções por Padé das tabelas seis e sete (ponto vermelho) e exata (linha azul).



fonte: Próprio Autor.

**B2.** Para  $r = 4$  e  $c_0 = 1/16$ , a condição para o kink é obtida substituindo a equação de órbita (26) em (41), então temos

$$\sqrt{(-4 + \chi(0)^2)^2(-2 + \chi(0)^2)} = 0. \quad (46)$$

As raízes desta equação são a condição para o kink  $\chi(0) = \pm 1.4142$ . Substituindo esta constante na equação de órbita (26) encontramos a solução para o outro kink  $\phi(0) = 0.5$ , portanto usando estas condições a solução em Taylor e em Padé de (21) e (20) são, tabelas 8 e 9:

Tabela 8 – Coeficientes de Taylor e de Padé das soluções de (21) com  $r = 4$ ,  $c_0 = 1/16$  ( $\chi(x)$ ).

(a) Coeficientes de Taylor

n	$a_n$
0	1.4142
1	1.4142
2	-0.70711
3	-1.1785
4	1.0016
5	1.4260
6	-1.4161
7	-1.9207
8	2.0460
9	2.7209
10	-3.0140
11	-3.9672
⋮	
21	31.7695

fonte: Próprio Autor.

(b) Coeficientes de  $P(x)$ 

n	$p_n$
0	1.4142
1	1.5073
2	5.2232
3	4.8661
4	6.7363
5	5.1011
6	3.5396
7	1.8743
8	0.66058
9	0.15117
10	0.018394

fonte: Próprio Autor.

(c) Coeficientes de  $Q(x)$ 

n	$q_n$
0	1
1	0.065853
2	4.1275
3	0.17959
4	5.9870
5	0.094627
6	3.5629
7	-0.065975
8	0.747592
9	-0.041923
10	0.026682

fonte: Próprio Autor.

Tabela 9 – Coeficientes de Taylor e de Padé das soluções de (20) com  $r = 4$ ,  $c_0 = 1/16$  ( $\phi(x)$ ).

(a) Coeficientes de Taylor

n	$a_n$
0	0.5
1	-1.0000
2	-0.000030227
3	1.3333
4	$1.0152 \times 10^{-9}$
5	-2.1333
6	-0.000075231
7	3.4539
8	0.00012283
9	-5.5985
10	0.00025221
11	9.0759
12	0.00048172
⋮	
21	-101.624

fonte: Próprio Autor.

(b) Coeficientes de  $P(x)$ 

n	$p_n$
0	0.5
1	144.44
2	-77.816
3	176.68
4	-657.93
5	938.54
6	-739.73
7	370.03
8	-122.23
9	25.504
10	-2.8097

fonte: Próprio Autor.

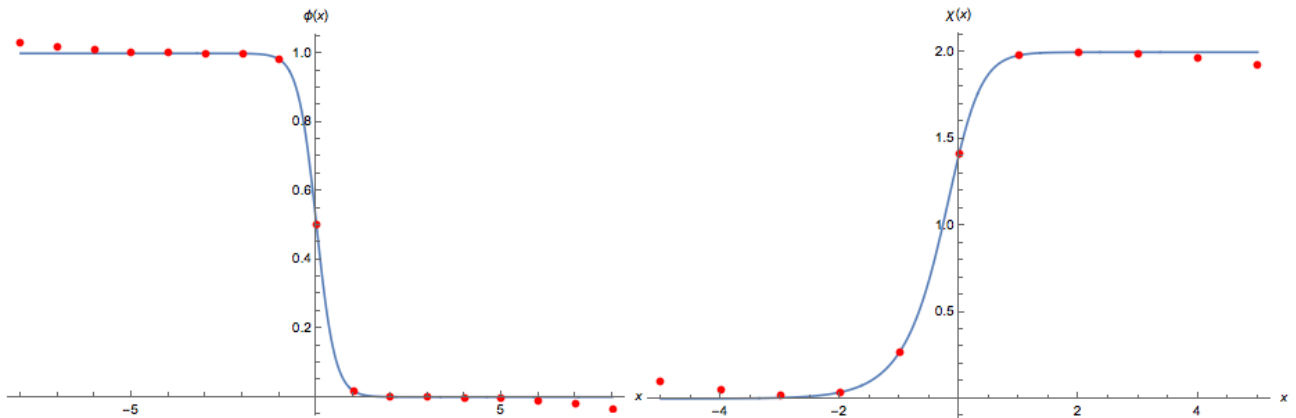
(c) Coeficientes de  $Q(x)$ 

n	$q_n$
0	1
1	290.88
2	426.13
3	1202.9
4	314.50
5	1374.09
6	-698.024
7	316.76
8	-151.65
9	18.563
10	-3.5016

fonte: Próprio Autor.

Notamos que nesses casos, tabelas 8 e 9, as soluções são sempre kink e antikink para ambos os campos  $\phi(x)$  e  $\chi(x)$ . O Padé forneceu uma solução convergente em torno de  $x = 0$ . Devemos destacar que o Padé é uma aproximação da solução em torno dessa origem. Observe também na figura 10 as regiões divergentes. Essa aproximação converge em uma pequena região de interesse físico.

Figura 10 – Para  $r = 4$  e  $c_0 = 1/16$ , gráfico das soluções por Padé das tabelas oito e nove (ponto vermelho) e exata (linha azul).



fonte: Próprio Autor.

#### 4.2.4 C. Aproximantes de Padé - Para Valores $c_0 \approx c_c$

Nesta subseção vamos obter as soluções de (20) e (21) para  $c_0 = -2.00001$ , muito próximo ao valor crítico  $c_c = -2$  com  $r = 1$ , usaremos o caso 1. Com esses parâmetros usando (40)) temos

$$1 - 2.00001\chi(0) + \chi^2(0) = 0. \quad (47)$$

A única raiz que é condição para o nosso problema é  $\chi(0) = 0.996843$ . Sabendo que a condição inicial para o kink é  $\phi(0) = 0$  (caso 1), com essas condições iniciais obtemos os polinômios de Taylor e os Padés das tabelas 10 e 11, cujos gráficos aparecem na figura 11. Então a solução em Taylor e Padé de (20) e (21) são:

Tabela 10 – Coeficientes de Taylor e de Padé das soluções de (21) com  $c_0 = -2.00001$ ,  $r = 1$   $\chi(x)$ .

(a) Coeficientes de Taylor

n	$a_n$
0	0.99684
2	-0.0062846
4	-0.0020552
6	-0.00025315
8	-0.000012275
10	$4.2435 \times 10^{-7}$
12	$1.1391 \times 10^{-7}$
14	$8.3034 \times 10^{-9}$
16	$1.0950 \times 10^{-10}$
⋮	
28	$-2.4962 \times 10^{-14}$

fonte: Próprio Autor.

(b) Coeficientes de  $P(x)$

n	$p_n$
0	0.99684
2	0.77249
4	-0.31252
6	-0.13631
8	0.013158
10	-0.00059636
12	0.000016421
14	$-2.4675 \times 10^{-7}$

fonte: Próprio Autor.

(c) Coeficientes de  $Q(x)$

n	$q_n$
0	1
2	0.78125
4	-0.30653
6	-0.13681
8	0.011916
10	-0.00087385
12	$-3.43195 \times 10^{-6}$
14	$-6.9646 \times 10^{-7}$

fonte: Próprio Autor.

Tabela 11 – Coeficientes de Taylor e de Padé das soluções de (20) com  $c_0 = -2.00001$ ,  $r = 1$  ( $\phi(x)$ ).

(a) Coeficientes de Taylor

n	$a_n$
1	- 0.0063045
3	- 0.0041633
5	- 0.00080111
7	- 0.000064491
9	- $1.0647 \times 10^{-6}$
11	$2.9392 \times 10^{-7}$
13	$3.4215 \times 10^{-8}$
15	$1.5053 \times 10^{-9}$
17	- $6.2111 \times 10^{-11}$
19	- $1.5055 \times 10^{-11}$
21	- $1.0595 \times 10^{-12}$

fonte: Próprio Autor.

(b) Coeficientes de  $P(x)$ 

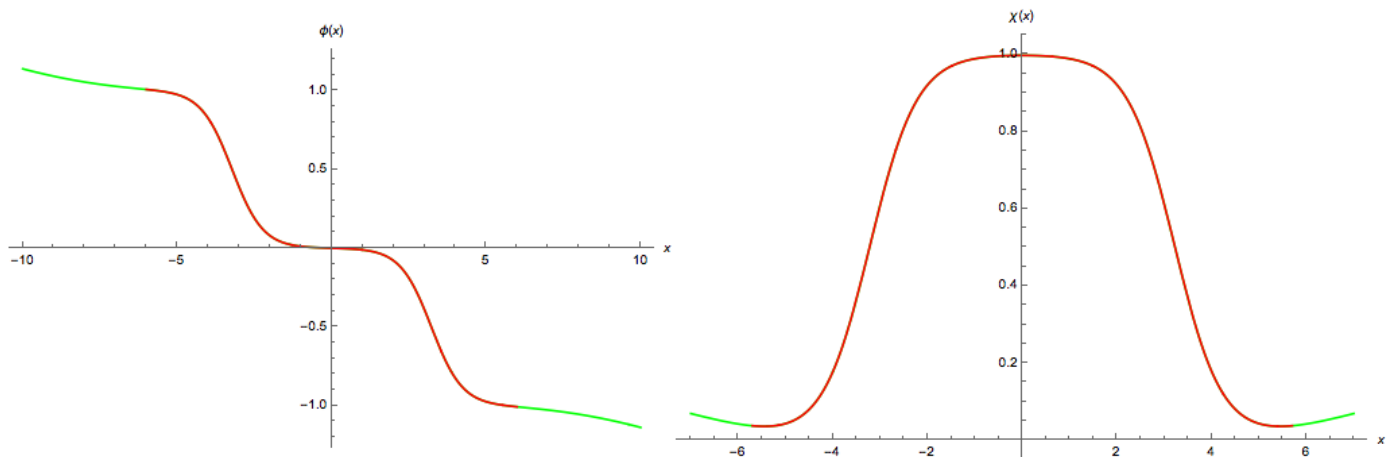
n	$p_n$
1	- 0.0063045
3	- 0.0036795
5	- 0.00051405
7	- 0.000024576
9	- $3.757 \times 10^{-7}$

fonte: Próprio Autor.

(c) Coeficientes de  $Q(x)$ 

n	$q_n$
0	1
2	- 0.076731
4	0.0051386
6	0.000025707
8	$5.6821 \times 10^{-6}$
10	- $4.4702 \times 10^{-9}$

fonte: Próprio Autor.

Figura 11 – Para  $c_0 = -2.00001$  e  $r = 1$ , os gráficos das soluções por Padé das tabelas dez e onze (linha vermelha, região convergente e linha verde, região divergente) são:

fonte: Próprio Autor.

Sabemos que todas as soluções desse modelo conectam dois mínimos do potencial, quando a solução passa perto de um terceiro mínimo, o campo  $\phi(x)$  tem solução tipo duplo kink e o campo  $\chi(x)$  é um lump mais largo.

### 4.3 PADÉ PARA CASOS SEM SOLUÇÃO ANALÍTICA

#### 4.3.1 D. Aproximantes de Padé: Paredes de Bloch Degeneradas ( $c_0 < c_c$ )

Para  $r = 6$  e usando (30), encontramos o valor crítico  $c_c = 1/432$ . Vamos trabalhar com  $c_0 = c_c/100 = 1/43200$ , temos o caso 1, usando esses parâmetros vamos substituir a equação de órbita (26) em (39) então temos

$$1 - \frac{\chi^2(0)}{4} + \frac{\chi^6(0)}{43200} = 0. \quad (48)$$

as únicas raízes entre os mínimos do potencial são  $\chi(0) = \pm 2.00149$ , conhecendo a condição inicial para o outro kink  $\phi(0) = 0$ , temos as seguintes soluções de (20) e (21) em polinômio de Taylor e aproximante de Padé:

Tabela 12 – Coeficientes de Taylor e de Padé das soluções de (21) com  $c_0 = 1/43200$ ,  $r = 6$  ( $\chi(x)$ ).

(a) Coeficientes de Taylor

n	$a_n$
0	2.00149
2	- 3.99106
4	6.60822
6	- 10.6202
8	16.8785
10	- 26.5022
12	40.9204
14	- 61.6889
16	89.7984
⋮	
30	3397.7

fonte: Próprio Autor.

(b) Coeficientes de  $P(x)$

n	$p_n$
0	2.00149
2	- 224.495
4	7493.76
6	19129.9
8	- 9017.38
10	- 30997.8
12	5314.3
14	- 380.643

fonte: Próprio Autor.

(c) Coeficientes de  $Q(x)$

n	$q_n$
0	1
2	- 110.17
4	3521.11
6	16948.1
8	17071.6
10	- 17776.9
12	- 30400.9
14	- 5549.93

fonte: Próprio Autor.

Tabela 13 – Coeficientes de Taylor e de Padé das soluções de (20) com  $c_0 = 1/43200$ ,  $r = 6$  ( $\phi(x)$ ).

(a) Coeficientes de Taylor

n	$a_n$
1	- 1.99405
3	2.62708
5	-4.09623
7	6.30947
9	-9.34509
11	12.9109
13	- 15.575
⋮	
31	352947

fonte: Próprio Autor.

(b) Coeficientes de  $P(x)$

n	$p_n$
1	- 1.99405
3	- 18.9705
5	582.322
7	10980.7
9	37718.6
11	42998.4
13	12491.6
15	350.415

fonte: Próprio Autor.

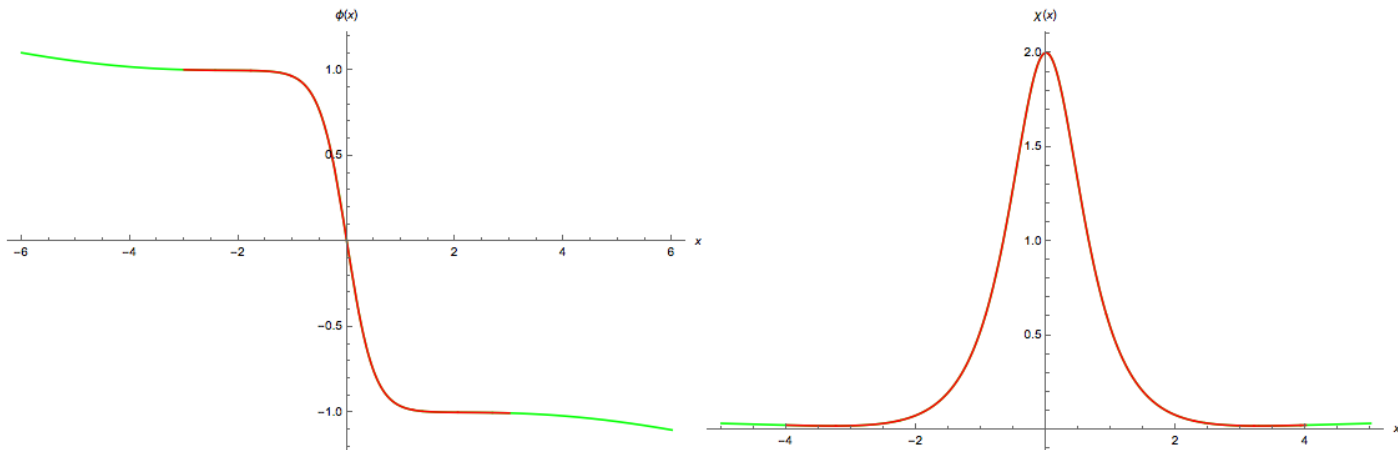
(c) Coeficientes de  $Q(x)$

n	$q_n$
0	1
2	10.831
4	- 279.815
6	- 5894.47
8	- 26077
10	- 44739.8
12	- 28916.7
14	- 3143.46

fonte: Próprio Autor.

Na figura 12 temos os gráficos das tabelas 12 e 13

Figura 12 – Para  $r = 6$  e  $c_0 = 1/43200$  os gráficos das soluções por Padé das tabelas doze e treze (linha vermelha, região convergente e linha verde, região divergente) são:



fonte: Próprio Autor.

#### 4.3.2 E. Aproximantes de Padé - Paredes de Bloch Críticas ( $c_0 = c_c$ )

Para  $r = 6$  e  $c_0 = c_c = 1/432$  podemos usar o caso 2 substituindo (26) em (41), então temos

$$\sqrt{[-6 + \chi^2(0)]^2(12 + \chi^2(0))}[-12 + \chi^4(0)] = 0. \quad (49)$$

As raízes desta equação são  $\chi(0) = \pm 1.86121$ , substituindo na equação de órbita (26) temos  $\phi(0) = 0.479791$ , portanto temos as solução em polinômio de Taylor e aproximante de Padé de (20) (21) das tabelas 14 e 15:

Tabela 14 – Coeficientes de Taylor e de Padé das soluções de (21) com  $c_0 = 1/432$ ,  $r = 6$  ( $\chi(x)$ ).

(a) Coeficientes de Taylor

n	$a_n$
0	1.86121
1	1.78598
2	- 1.29224
3	- 1.78819
4	2.29602
5	2.96646
6	- 4.18831
7	- 5.85927
8	7.91513
9	12.5214
10	- 15.3296
⋮	
31	$3.16908 \times 10^6$

fonte: Próprio Autor.

(b) Coeficientes de  $P(x)$

n	$p_n$
0	1.86121
1	10.0784
2	70.8237
3	198.606
4	1333.51
5	- 3939.89
6	- 13448.8
7	- 36031.8
8	- 83147.1
9	- 104614
⋮	
15	- 2714.63

fonte: Próprio Autor.

(c) Coeficientes de  $Q(x)$

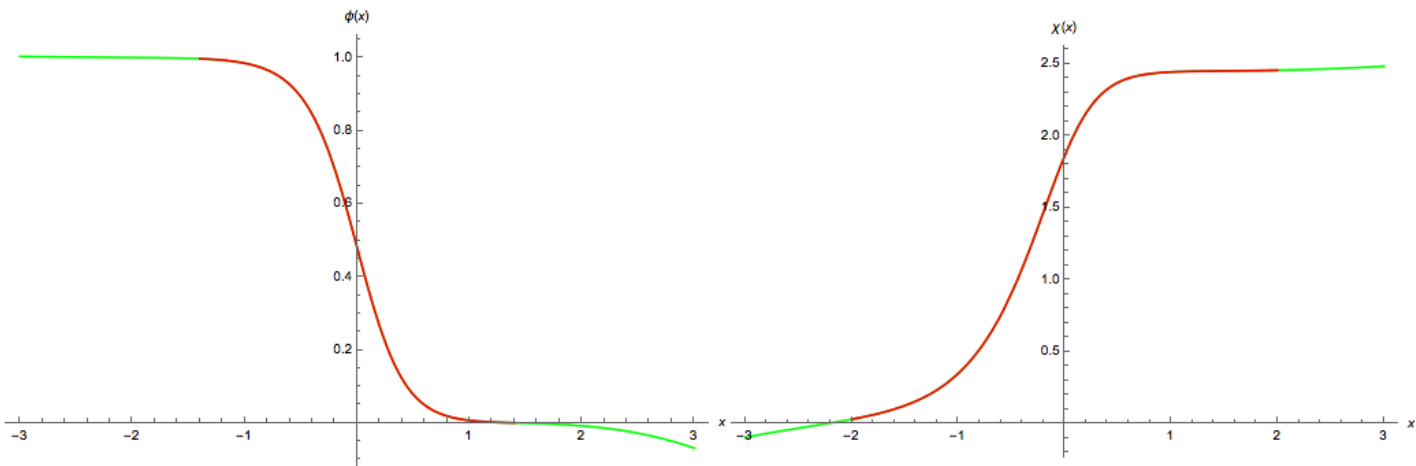
n	$q_n$
0	1
1	4.4554
2	34.4715
3	77.6842
4	668.909
5	- 2678.75
6	- 4163.65
7	- 16718.8
8	- 34956.8
9	- 35775.6
⋮	
15	- 458.605

fonte: Próprio Autor.

Tabela 15 – Coeficientes de Taylor e de Padé das soluções de (20) com  $c_0 = 1/432$ ,  $r = 6$  ( $\phi(x)$ ).

(a) Coeficientes de Taylor		(b) Coeficientes de $P(x)$		(c) Coeficientes de $Q(x)$	
n	$a_n$	n	$p_n$	n	$q_n$
0	0.479791	0	0.479791	0	1
1	- 1.1547	1	- 2.37073	1	- 2.53449
2	- 1.70456 $\times 10^{-15}$	2	29.6529	2	55.7041
3	2.12649	3	- 39.0644	3	48.21
4	0.242761	4	- 998.369	4	- 1954.09
5	- 4.84771	5	8560.66	5	12904.1
6	- 1.23487	6	54120.8	6	143592
7	11.3519	7	- 156369	7	28837.7
8	4.50182	8	383871	8	813959
9	- 26.745	9	- 658750	9	- 77864.1
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	
31	1.91907 $\times 10^8$	15	- 21753.7	15	- 18022.1

fonte: Próprio Autor.                      fonte: Próprio Autor.                      fonte: Próprio Autor.

Figura 13 – Para  $r = 6$  e  $c_0 = 1/432$  os gráficos das soluções por Padé das tabelas quatorze e quinze (linha vermelha, região convergente e linha verde, região divergente) são:

fonte: Próprio Autor.

Na figura 13 temos os gráficos correspondentes dos Padés das tabelas 14 e 15. Para valores de  $r = 1$  e  $r = 4$  comparamos graficamente as soluções analíticas de (20) e (21), figuras sete a dez, com aquelas via aproximantes de Padé para diferentes valores de  $c_0$ . Em todas as soluções, os aproximantes de Padé convergem para a solução exata, em torno de  $x = 0$ . Soluções diferentes são obtidas quando  $c_0$  é menor e muito próximo do crítico, formando o duplo kink e o lump achatado, figura onze. Nas figuras doze e treze em vermelho temos as soluções para  $r = 6$ , neste caso não existem soluções analíticas para compararmos, mas notamos que o mesmo padrão de solução é repetido, quando comparamos com os caso analíticos. Para as parede de Bloch degeneradas  $\phi(x)$  é sempre kink e  $\chi(x)$  é sempre lump, para as parede de Bloch críticas, os campos tem solução tipo kink. No apêndice A apresentamos detalhes do programa que fizemos no Mathematica.

## 5 CONCLUSÃO

No capítulo dois introduzimos o polinômio de Taylor e vimos que nas equações não-lineares não é possível aplicar o método usual de resolução em polinômio de Taylor, o que nos motivou a introduzir o Método Iterativo de Taylor (MIT), que fornece os coeficientes de Taylor da própria equação diferencial. Criamos um algoritmo no Mathematica para usar o MIT. Aplicamos o MIT para a equação linear do OHS e chegamos aos resultados exatos. Em seguida aplicamos esse método para a equação não-linear do  $\lambda\phi^4$ , vimos que a série tem convergência muito lenta e um raio de convergência muito pequeno, não conseguindo abranger as regiões de interesse físico para a solução do modelo que é do tipo onda solitária. Esse fato nos motivou a buscar outros métodos de resolução que resolvessem esse problema de convergência. A partir da série de Taylor truncada até o  $n$ -ésimo termo, definimos os aproximantes de Padé que são razões de dois polinômios que tem uma convergência melhor do que o polinômio de Taylor que o gerou. Os aproximantes de padé coincidem com o polinômio de Taylor até a  $n$ -ésima ordem. Embora o Padé tenha uma região de convergência maior, não é possível em geral determinar o seu raio de convergência. No capítulo três usamos o modelo  $\lambda\phi^4$  para introduzir as ondas solitárias e os sólitons. Em seguida mostramos que um poderoso método, baseado na condição de mínima energia, fornece a solução analítica. No capítulo quatro abordamos um modelo de dois campos cujas equações de movimento são acopladas, resolvemos essas equações por BPS e vimos que as soluções dependem de dois parâmetros,  $r$  e  $c_0$ . Em seguida, resolvemos essas equações de dois campos por aproximantes de Padé para  $r = 1$ ,  $r = 4$  e  $r = 6$ . Aqui percebemos que nosso algoritmo no Mathematica pode a princípio resolver as equações acopladas, sem a necessidade de usar a equação de órbita que desacopla as equações. Usamos a equação de órbita apenas para obter as condições iniciais. Vimos que os aproximantes de Padé fornecem boas soluções aproximadas. O uso do método iterativo de Taylor em conjunto com aproximantes de Padé fornece soluções analíticas aproximadas mesmo para equações diferenciais não-lineares. O aumento do raio de convergência pelo aproximante de Padé torna visível aspectos qualitativos da solução de equações diferenciais que muitas vezes não possuem solução analítica exata. Neste trabalho foi criado um algoritmo no Mathematica para buscar soluções por aproximantes de Padé via MIT. Esse algoritmo pode ser aplicado para um conjunto bem maior de equação lineares e não-lineares em outras áreas.



## REFERÊNCIAS

- 1 VACHASPATI, T. *Kinks and Domain Walls*. New York: [s.n.], 2006.
- 2 RAJARAMAN, R. *Solitons and Instantons*. North-Holland, Amsterdam: [s.n.], 1989.
- 3 TANG, D. Y. et al. Soliton interaction in a fiber ring laser. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 72, p. 016616–1 – 016616–10, Jul 2005. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.72.016616>>.
- 4 NIKOLOV, N. I. et al. Quadratic solitons as nonlocal solitons. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 68, p. 036614–1 – 036614–5, Sep 2003. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.68.036614>>.
- 5 ZHAO, B. et al. Bound twin-pulse solitons in a fiber ring laser. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 70, p. 067602–1 – 067602–4, Dec 2004. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.70.067602>>.
- 6 TANG, D. Y. et al. Soliton modulation instability in fiber lasers. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 80, p. 023806–1 – 023806–7, Aug 2009. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.80.023806>>.
- 7 ADHIKARI, S. K. Stable spatial and spatiotemporal optical soliton in the core of an optical vortex. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 92, p. 042926–1 – 042926–6, Oct 2015. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.92.042926>>.
- 8 TANG, D. Y. et al. Observation of high-order polarization-locked vector solitons in a fiber laser. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 101, p. 153904–1 – 153904–4, Oct 2008. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.101.153904>>.
- 9 TANG, D. Y. et al. Mechanism of multisoliton formation and soliton energy quantization in passively mode-locked fiber lasers. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 72, p. 043816–1 – 043816–9, Oct 2005. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.72.043816>>.
- 10 KHAWAJA, U. A. Interaction forces among two-dimensional bright solitons and many-soliton molecules. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 85, p. 056604–1 – 056604–7, May 2012. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.85.056604>>.
- 11 YULIN, A. V.; KONOTOP, V. V. Generation of spatial solitons by a localized active cluster. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 84, p. 066606–1 – 066606–4, Dec 2011. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.84.066606>>.
- 12 KOMAROV, A.; KOMAROV, K.; SANCHEZ, F. m. c. Quantization of binding energy of structural solitons in passive mode-locked fiber lasers. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 79, p. 033807–1 – 033807–7, Mar 2009. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.79.033807>>.
- 13 KHAWAJA, U. A. Stability and dynamics of two-soliton molecules. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 81, p. 056603–1 – 056603–17, May 2010. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.81.056603>>.
- 14 BELINSKI, V. A. Supergravitational solitons. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 91, p. 125041–1 – 125041–11, Jun 2015. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.91.125041>>.

- 15 TRATNIK, M. V.; SIPE, J. E. Polarization solitons. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 58, p. 1104–1107, Mar 1987. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.58.1104>>.
- 16 GUNASEKARAN, S.; HUSSAIN, U.; KUNDURI, H. K. Soliton mechanics. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 94, p. 124029–1 – 124029–11, Dec 2016. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.94.124029>>.
- 17 YANG, J. Fully localized two-dimensional embedded solitons. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 82, p. 053828–1 – 053828–5, Nov 2010. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.82.053828>>.
- 18 LIU, H.; JIN, H.; DONG, L. Disordered surface gap solitons. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 89, p. 023826–1 – 023826–6, Feb 2014. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.89.023826>>.
- 19 HASEGAWA, A. Numerical study of optical soliton transmission amplified periodically by the stimulated raman process. *Appl. Opt.*, OSA, v. 23, n. 19, p. 3302–3309, Oct 1984.
- 20 CARARA M, A. *Dinâmica de paredes de domínios magnéticos: Um estudo através da Impedanciometria*. Tese (Doutorado) — UFRGS, Porto Alegre, 2001.
- 21 PRASAD, M. K.; SOMMERFIELD, C. M. Exact classical solution for the 't Hooft monopole and the Julia-Zee dyon. *Phys. Rev. Lett.*, v. 35, n. 12, p. 760–762, 1975.
- 22 BOGOMOL'NYI, E. The stability of classical solutions. *Sov. J. Nucl. Phys. (Engl. Transl.); (United States)*, v. 24:4, Oct 1976.
- 23 Leung, C. N.; Wong, Y. Y. Y. Application of Padé interpolation to stationary state problems. *American Journal of Physics*, v. 70, p. 1020–1024, out. 2002.
- 24 BAZEIA, D. et al. Soliton stability in systems of two real scalar fields. *J. Phys.*, A30, p. 8157–8166, 1997.
- 25 DUTRA, A. de S. General solutions for some classes of interacting two field kinks. *Physics Letters B*, v. 626, n. 1, p. 249 – 255, 2005. ISSN 0370-2693.
- 26 OPIE, A. H.; GRINDLAY, J. Thermodynamic limit in the elastic triangle: Padé approximants. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 65, p. 041303–1 – 041303–12, Apr 2002. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.65.041303>>.
- 27 AMORE, P. Alternative implementation of padé approximants. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 76, p. 076001–1 – 076001–17, Oct 2007. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.76.076001>>.
- 28 MROUÉ, A. H.; KIDDER, L. E.; TEUKOLSKY, S. A. Ineffectiveness of padé resummation techniques in post-newtonian approximations. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 78, p. 044004–1 – 044004–13, Aug 2008. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.78.044004>>.
- 29 GUPTA, A. et al. Padé approximants for truncated post-newtonian neutron star models. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 62, p. 044038–1 – 044038–11, Jul 2000. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.62.044038>>.

- 30 SCHÖTT, J. et al. Analytic continuation by averaging padé approximants. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 93, p. 075104–1 – 075104–7, Feb 2016. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.93.075104>>.
- 31 NDILI, F. N. Spiral multicomponent structure in padé-approximant qcd. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 64, p. 014018–1 – 014018–18, May 2001. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.64.014018>>.
- 32 AVILES, A. et al. Precision cosmology with padé rational approximations: Theoretical predictions versus observational limits. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 90, p. 043531–1 – 043531–25, Aug 2014. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.90.043531>>.
- 33 CASALS, M. et al. Padé approximants of the green function in spherically symmetric spacetimes. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 79, p. 124044–1 – 124044–17, Jun 2009. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.79.124044>>.
- 34 CAPRINI, I. et al. Uncertainty estimates of the  $\sigma$ -pole determination by padé approximants. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 93, p. 076004–1 – 076004–11, Apr 2016. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.93.076004>>.
- 35 LEMOS, N. A. *Mecânica Analítica*. São Paulo: [s.n.], 2006.
- 36 CASTELL, L. Exact solutions of the lambda phi-to-the-4 theory. *Phys. Rev.*, D6, p. 536–538, 1972.
- 37 DUTRA, A. de S.; FARIA, A. C. Amaro de; HOTT, M. Degenerate and critical bloch branes. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 78, p. 043526–1 – 043526–9, Aug 2008. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.78.043526>>.
- 38 CULLITY, A. D. *Introduction to magnetic materials*. [S.l.]: Addison-Wesley, 1972.
- 39 CHIKAZUMI, S. *Physics of magnetism*. [S.l.]: Krieger, 1978.

## APÊNDICE A – ALGORITMOS DO MATHEMATICA DOS APROXIMANTES DE PADÉ VIA MÉTODO ITERATIVO DE TAYLOR

Figura 14 – Cópia do algoritmo do Mathematica da solução do  $\lambda\phi^4$  em Padé via MIT

A equação do  $\lambda\phi^4$ , onde  $k[2] = \phi''[x]$  é dada abaixo

$$k[2] = 2\lambda\phi[x] (\phi[x]^2 - a^2)$$

com os parâmetros

$$\lambda = 1$$

$$a = 1$$

Os comandos a seguir geram a série de Taylor iterativamente

```
Table[k[i] = Simplify[D[k[i-1], {x, 1}] /. {phi'[x] -> k[2]}], {i, 3, 21}];
```

$$2\lambda\phi[x] (-a^2 + \phi[x]^2)$$

1

1

```
w = phi[x] + phi'[x] x + Sum[(k[i] / i!) x^i, {i, 2, 21}] /. {phi[x] -> phi[0], phi'[x] -> phi'[0]};
```

Substituindo as condições iniciais na série acima temos

$$H = w /. {\phi[0] \to 0, \phi'[0] \to 1}$$

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} - \frac{1382x^{11}}{155925} + \frac{21844x^{13}}{6081075} - \frac{929569x^{15}}{638512875} + \frac{6404582x^{17}}{10854718875} - \frac{443861162x^{19}}{1856156927625} + \frac{18888466084x^{21}}{194896477400625}$$

Utilizando o polinômio de Taylor anterior temos o Aproximante de padé a seguir

```
J6 = PadeApproximant[H, {x, 0, {10, 10}}]
```

$$1 + \frac{9x^2}{19} + \frac{28x^4}{969} + \frac{7x^6}{14535} + \frac{x^8}{440895} + \frac{x^{10}}{654729075} \bigg/ x + \frac{8x^3}{57} + \frac{7x^5}{1615} + \frac{4x^7}{101745} + \frac{x^9}{11904165}$$

Figura 15 – Cópia do algoritmo do Mathematica da solução do modelo de dois campos usando Padé e MIT

**Parâmetros**

$$r = 1$$

$$c = -3$$

**Condições iniciais**

$$\phi[0] = 0$$

$$\chi[0] = 0.38196601125010515`$$

Equações acopladas onde  $\chi'[x] = k[1]$  e  $\phi'[x] = g[1]$

$$g[1] = r (\phi[x]^2 - 1) + \chi[x]^2$$

$$k[1] = 2 \phi[x] \chi[x]$$

As duas linhas a seguir são o coração do MIT, elas geram a solução em polinômio de Taylor para o campo  $\chi[x]$ , partindo das equações acopladas

```
Table[ k[i] = Simplify[D[k[i - 1], {x, 1}] /. {phi'[x] -> g[1], chi'[x] -> k[1] }], {i, 2, 21}];
```

```
w = chi[x] + Sum[(k[i] / i!) x^i, {i, 1, 21}] /. {phi[x] -> phi[0], chi[x] -> chi[0]}
```

$$0.381966 - 0.326238 x^2 + 0.169894 x^4 - 0.0667265 x^6 + 0.0199705 x^8 - 0.00367045 x^{10} - 0.000440478 x^{12} + 0.000824721 x^{14} - 0.000486363 x^{16} + 0.000205102 x^{18} - 0.0000664476 x^{20}$$

Usando o polinômio anterior, a solução por aproximante de Padé para o campo  $\chi[x]$  é

```
J6 = PadeApproximant[w, {x, 0, {10, 10}}]
```

$$\frac{0.381966 - 0.0271079 x^2 + 0.00096613 x^4 - 0.000022168 x^6 + 3.3792 \times 10^{-7} x^8 - 2.85022 \times 10^{-9} x^{10}}{1. + 0.783133 x^2 + 0.226615 x^4 + 0.0198574 x^6 + 0.00068886 x^8 + 8.31942 \times 10^{-6} x^{10}}$$