

JOSÉ RENATO CAMPOS

**PROBLEMAS DE CONTROLE ÓTIMO INTERVALAR E
INTERVALAR FUZZY**

Ilha Solteira

2018



JOSÉ RENATO CAMPOS

PROBLEMAS DE CONTROLE ÓTIMO INTERVALAR E INTERVALAR FUZZY

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Estadual Paulista - UNESP - Campus de Ilha Solteira, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica. Área de Concentração: Automação.

Prof. Dr. Edvaldo Assunção
Orientador

Ilha Solteira
2018



FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

C198p Campos, José Renato.
Problemas de controle ótimo intervalar e intervalar fuzzy / José Renato Campos. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2018
105 f. : il.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia.
Área de conhecimento: Automação, 2018

Orientador: Edvaldo Assunção
Inclui bibliografia

1. Problemas de controle ótimo intervalar. 2. Problemas de controle ótimo intervalar fuzzy. 3. Aritmética intervalar. 4. Programação dinâmica. 5. Incerteza generalizada. 6. Conjuntos fuzzy.

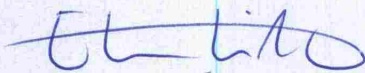
CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA TESE: Problemas de Controle Ótimo Intervalar e Intervalar Fuzzy

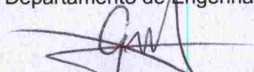
AUTOR: JOSÉ RENATO CAMPOS

ORIENTADOR: EDVALDO ASSUNÇÃO

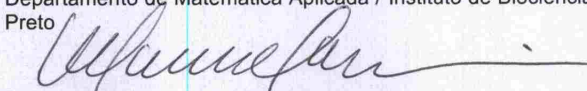
Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Doutor em ENGENHARIA ELÉTRICA, área: Automação pela Comissão Examinadora:



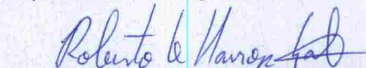
Prof. Dr. EDVALDO ASSUNÇÃO
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira



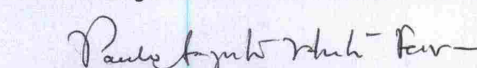
Prof. Dr. GERALDO NUNES SILVA
Departamento de Matemática Aplicada / Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas de São José do Rio Preto



Prof. Dr. MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira



Prof. Dr. ROBERTO KAWAKAMI HARROP GALVÃO
Divisão de Engenharia Eletrônica / Instituto Tecnológico de Aeronáutica - ITA



Prof. Dr. PAULO AUGUSTO VALENTE FERREIRA
Departamento de Sistemas e Energia / Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP

Ilha Solteira, 26 de outubro de 2018

A todos que acreditaram e estiveram comigo durante este trabalho.

DEDICO.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar eu agradeço à Deus por tudo. Agradeço também à Nossa Senhora Aparecida que sempre esteve ao meu lado.

Essa tese de doutorado foi um grande desafio. Desde a graduação almejava a obtenção do título e por uma série de razões desisti de cursar o doutorado tempos atrás. Para minha felicidade, o retorno ao doutorado e todos os muitos e longos anos de estudo para a conclusão foram todos bem aproveitados pois tive a oportunidade de conhecer e conviver com pessoas fantásticas. Era impressionante que todas elas sempre estavam dispostas a apoiar e ajudar. Elas estavam na USP de São Carlos, na FATEC de Jales, no IF de Birigui, na UNESP de São José do Rio Preto e de Ilha Solteira, e também no IF de Votuporanga. Agradeço particularmente à Ulcilea A. S. Leal e ao Gino G. M. Huamán pois sem eles essa tese não teria acontecido.

Essa tese também não seria possível sem a grande ajuda dos professores que sempre me acompanharam e auxiliaram. Todos eles sempre muito dispostos a ajudar e a contribuir nos momentos mais difíceis. Agradeço ao professor Edvaldo Assunção por toda confiança, paciência e contribuição. Ao professor Geraldo N. Silva que sempre apoiou, ajudou e acreditou no meu trabalho desde a iniciação científica até o doutorado. Agradeço também ao professor Weldon A. Lodwick por estar sempre disposto a ajudar, e pela participação significativa em minha formação no doutorado. Ao professor Marcelo C. M. Teixeira agradeço pelas excelentes dicas e contribuições durante o desenvolvimento de todo o trabalho. Agradeço ao professor Valeriano A. Oliveira pelos questionamentos realizados nos muitos seminários apresentados na UNESP de São José do Rio Preto.

Agradeço especialmente à minha família, a minha esposa Lidiane e ao meu filho Lucas por todos os momentos maravilhosos e incentivo, a minha mãe Denir e ao meu irmão José Ricardo que sempre me apoiam e deram suporte desde à graduação. Agradeço também a minha avó Antonia por toda a preocupação dela com os meus estudos. À minha sogra Olivia e ao meu sogro Natalino por também terem contribuído para a realização desse trabalho.

Termino agradecendo ao IFSP, à UNESP e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

“A incerteza que nos cerca.”

José Renato Campos

“Acreditar é ter fé naquilo que ninguém prova, é dispensar certeza que geralmente comprova.”

Bráulio Bessa

RESUMO

Neste trabalho estudamos problemas de controle ótimo intervalar e intervalar fuzzy. Em particular, propomos problemas de controle ótimo via teoria de incerteza generalizada e teoria dos conjuntos fuzzy. Dentre os vários tipos de incerteza generalizada utilizamos apenas a intervalar. Embora as abordagens do processo de solução dos problemas de controle ótimo intervalar e intervalar fuzzy sejam similares, as premissas iniciais para o uso e identificação de aplicação delas em problemas práticos são distintas assim como é distinto o processo de tomada de decisão. Assim, propomos inicialmente o problema de controle ótimo intervalar em tempo discreto. A primeira proposta de solução para o problema de controle ótimo intervalar em tempo discreto é construída usando a aritmética intervalar restrita de níveis simples juntamente com a técnica de programação dinâmica. As respostas do problema de controle ótimo intervalar contêm as possibilidades de soluções viáveis, e para implementar uma solução viável para o usuário final usamos a solução que minimiza o arrependimento máximo nos exemplos numéricos. A segunda proposta de solução para o problema de controle ótimo intervalar em tempo discreto é realizada com a aritmética intervalar restrita uma vez que essa aritmética intervalar é mais geral do que a aritmética intervalar restrita de níveis simples pois não considera os intervalos envolvidos nas operações variando de forma dependente. Exemplos numéricos também foram construídos e ilustram o método de solução. Por fim estudamos o problema de controle ótimo intervalar fuzzy em tempo discreto via aritmética fuzzy restrita de níveis simples. Desta forma inicialmente definimos funções intervalares fuzzy para permitir lidar com a dinâmica de uma equação de diferença intervalar fuzzy. Além disso, a programação dinâmica intervalar fuzzy é desenvolvida para obter a solução intervalar fuzzy ótima. Alguns exemplos numéricos ilustram a teoria e fornecem ao usuário uma solução prática por meio do método de defuzzificação chamado centro de gravidade.

Palavras-chave: Problemas de controle ótimo intervalar. Problemas de controle ótimo intervalar fuzzy. Aritmética intervalar. Programação dinâmica. Incerteza generalizada. Conjuntos fuzzy.

ABSTRACT

In this work we study the interval optimal control problem and fuzzy interval optimal control problem. In particular, we propose optimal control problems via theory of generalized uncertainty and fuzzy set theory. Among the various types of generalized uncertainty we use only the interval uncertainty. Although the approaches to solve the interval optimal control problem and fuzzy interval optimal control problem are similar, the input data for problems with generalized uncertainty and flexibility are distinct as is distinct the decision-making process. Thus, we initially propose the discrete-time interval optimal control problem. The first solution method to solve the discrete-time interval optimal control problem is constructed using single-level constrained interval arithmetic coupled with a dynamic programming technique. The optimal interval solution contains the real-valued optimal solutions, and to implement a feasible solution to the user we use the minimax regret criterion in numerical examples. The second solution method to solve the discrete-time interval optimal control problem is done with the constrained interval arithmetic since this interval arithmetic is more general than the single-level constrained interval arithmetic because it does not have its intervals varying of dependent form in interval operations. Numerical examples have also been constructed and illustrate the method of solution. Finally, we study the discrete-time fuzzy interval optimal control problem via single-level constrained fuzzy arithmetic. Thus, fuzzy interval functions are established and allow us to evaluate the dynamic of the fuzzy interval difference equation. Moreover, the fuzzy interval dynamic programming is developed to obtain the optimal fuzzy interval solution. Some numerical examples illustrate the theory and provides the practical solution to the user using a defuzzification process called center of gravity.

Keywords: Interval optimal control problem. Fuzzy interval optimal control problem. Interval arithmetic. Dynamic programming. Generalized uncertainty. Fuzzy Sets.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Trajectoria intervalar X_1 para o Exemplo 5.	27
Figura 2	Trajectoria intervalar X_2 para o Exemplo 5.	28
Figura 3	Trajectoria intervalar X_1 para o Exemplo 6.	28
Figura 4	Trajectoria intervalar X_2 para o Exemplo 6.	29
Figura 5	Estado intervalar X para o Exemplo numérico 2.4.1 com a solucao que minimiza o arrependimento máximo.	41
Figura 6	Controle intervalar U para o Exemplo numérico 2.4.1 com a solucao que minimiza o arrependimento máximo.	41
Figura 7	Estado intervalar X_1 para o Exemplo numérico 2.4.2 com a solucao que minimiza o arrependimento máximo.	42
Figura 8	Estado intervalar X_2 para o Exemplo numérico 2.4.2 com a solucao que minimiza o arrependimento máximo.	43
Figura 9	Controle intervalar U_1 para o Exemplo numérico 2.4.2 com a solucao que minimiza o arrependimento máximo.	43
Figura 10	Controle intervalar U_2 para o Exemplo numérico 2.4.2 com a solucao que minimiza o arrependimento máximo.	44
Figura 11	Trajectoria intervalar X_1 para o Exemplo 15.	53
Figura 12	Trajectoria intervalar X_2 para o Exemplo 15.	54
Figura 13	Trajectoria intervalar X_1 para o Exemplo 16.	55
Figura 14	Trajectoria intervalar X_2 para o Exemplo 16.	55
Figura 15	Trajectoria intervalar X_1 para o Exemplo 17.	56
Figura 16	Trajectoria intervalar X_2 para o Exemplo 17.	57
Figura 17	Trajectoria intervalar X_1 para o Exemplo 17: 130 períodos.	57
Figura 18	Estado intervalar X para o Exemplo numérico 3.4.1.	67
Figura 19	Controle intervalar U para o Exemplo numérico 3.4.1.	67

Figura 20	Estado intervalar X_1 para o Exemplo numérico 3.4.2.	68
Figura 21	Estado intervalar X_2 para o Exemplo numérico 3.4.2.	69
Figura 22	Controle intervalar U_1 para o Exemplo numérico 3.4.2.	69
Figura 23	Controle intervalar U_2 para o Exemplo numérico 3.4.2.	70
Figura 24	Estado intervalar X_1 para o Exemplo numérico 3.4.3 com a solução que minimiza o arrependimento máximo.	71
Figura 25	Estado intervalar X_2 para o Exemplo numérico 3.4.3 com a solução que minimiza o arrependimento máximo.	72
Figura 26	Controle intervalar U para o Exemplo numérico 3.4.3 com a solução que minimiza o arrependimento máximo.	72
Figura 27	Gráfico fuzzy para o Exemplo 18.	77
Figura 28	Trajectoria intervalar fuzzy x_1 para o Exemplo 23.	82
Figura 29	Trajectoria intervalar fuzzy x_2 para o Exemplo 23.	82
Figura 30	Trajectoria intervalar fuzzy x_1 para o Exemplo 24.	83
Figura 31	Trajectoria intervalar fuzzy x_2 para o Exemplo 24.	83
Figura 32	Funcional intervalar fuzzy ótimo para o Exemplo numérico 4.4.1.	93
Figura 33	Estado intervalar fuzzy x para o Exemplo numérico 4.4.1.	93
Figura 34	Controle intervalar fuzzy u para o Exemplo numérico 4.4.1.	94
Figura 35	Estado intervalar fuzzy x_1 para o Exemplo numérico 4.4.2.	95
Figura 36	Estado intervalar fuzzy x_2 para o Exemplo numérico 4.4.2.	96
Figura 37	Controle intervalar fuzzy u_1 para o Exemplo numérico 4.4.2.	96
Figura 38	Controle intervalar fuzzy u_2 para o Exemplo numérico 4.4.2.	97

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Valores da variável de estado intervalar X e controle intervalar U via SLCIA.	64
Tabela 2	Valores da variável de estado intervalar X e controle intervalar U via CIA.	66

LISTA DE SIGLAS E ABREVIACOES

AI	Análise Intervalar
CIA	Constraint Interval Arithmetic
EPCOID	Exemplo de Problema de Controle timo Intervalar em Tempo Discreto
EPCOID1	Exemplo de Problema de Controle timo Intervalar em Tempo Discreto Associado
LMIs	Linear Matrix Inequalities
PCOID	Problema de Controle timo Intervalar em Tempo Discreto
PCOID1	Problema de Controle timo Intervalar em Tempo Discreto Associado Usando SLCIA
PCOID2	Problema de Controle timo Intervalar em Tempo Discreto Associado Usando CIA
PD	Programao Dinâmica
SIA	Standard Interval Arithmetic
SLCIA	Single Level Constraint Interval Arithmetic

LISTA DE SÍMBOLOS

K_C^n	Espaço de conjuntos não-vazios compactos e convexos do \mathbb{R}^n
$\mathbb{I}(\mathbb{R})$	Conjunto dos intervalos fechados e limitados da reta real
A, B	Elementos de $\mathbb{I}(\mathbb{R})$
X, U	Elementos de $\mathbb{I}(\mathbb{R})^n$
$\oplus, \ominus, \otimes, \odot$	Operações aritméticas intervalares
\leq_{SL}	Relação de ordem conforme a aritmética intervalar restrita de níveis simples
F, G, C	Funções intervalares
D_F	Domínio de uma função intervalar F
CD_F	Contradomínio de uma função intervalar F
C_{ad}	Conjunto dos controles admissíveis em \mathbb{R}^m
S_{ad}	Conjunto dos estados admissíveis em \mathbb{R}^n
U_{ad}	Conjunto dos controles intervalares admissíveis em $\mathbb{I}(\mathbb{R})^m$
X_{ad}	Conjunto dos estados intervalares admissíveis em $\mathbb{I}(\mathbb{R})^n$
Λ	Intervalos próprios presentes em um problema intervalar e que foram reescritos de acordo com a aritmética intervalar restrita
\leq_{CIA}	Relação de ordem conforme a aritmética intervalar restrita
$\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$	Conjunto de todos os números fuzzy
\leq_F	Relação de ordem conforme a aritmética intervalar fuzzy restrita de níveis simples
a, b	Elementos de $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$
x, u	Elementos de $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}^n$
f, g, c	Funções intervalares fuzzy
$\tilde{\oplus}, \tilde{\ominus}, \tilde{\otimes}, \tilde{\odot}$	Operações aritméticas intervalares fuzzy
$U_{ad}^{\mathcal{F}}$	Conjunto dos controles intervalares fuzzy admissíveis em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}^m$
$X_{ad}^{\mathcal{F}}$	Conjunto dos estados intervalares fuzzy admissíveis em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}^n$

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
2	PROBLEMAS DE CONTROLE ÓTIMO INTERVALAR EM TEMPO DISCRETO	21
2.1	CONCEITOS BÁSICOS	21
2.1.1	Aritmética intervalar	21
2.1.2	Funções intervalares	24
2.1.3	Equações a diferenças intervalares	26
2.1.4	Conjuntos admissíveis	29
2.2	O PROBLEMA DE CONTROLE ÓTIMO INTERVALAR EM TEMPO DISCRETO	30
2.3	A PROGRAMAÇÃO DINÂMICA INTERVALAR	33
2.3.1	O princípio de otimalidade intervalar	33
2.3.2	O algoritmo de programação dinâmica intervalar	34
2.4	EXEMPLOS NUMÉRICOS	37
2.4.1	Exemplo numérico 2.4.1	37
2.4.2	Exemplo numérico 2.4.2	41
2.5	COMENTÁRIOS	44
3	PROBLEMAS DE CONTROLE ÓTIMO INTERVALAR EM TEMPO DISCRETO USANDO A ARITMÉTICA INTERVALAR RESTRITA	46
3.1	CONCEITOS BÁSICOS	46
3.1.1	Aritmética intervalar	46
3.1.2	Relação de ordem entre intervalos	47
3.1.3	Conjunto de incertezas	48

3.1.4	Funções intervalares via CIA	49
3.1.4.1	Funções intervalares $F : \mathbb{I}(\mathbb{R})^n \rightarrow \mathbb{I}(\mathbb{R})$	50
3.1.5	Equações a diferenças intervalares via CIA	52
3.1.5.1	Equações a diferenças intervalares lineares	56
3.1.6	Conjuntos admissíveis via CIA	58
3.2	ABORDAGEM DO PROBLEMA DE CONTROLE ÓTIMO INTERVALAR EM TEMPO DISCRETO VIA CIA	58
3.3	ABORDAGEM DA PROGRAMAÇÃO DINÂMICA INTERVALAR VIA CIA	60
3.3.1	O princípio de otimalidade intervalar via CIA	60
3.3.2	O algoritmo de programação dinâmica intervalar via CIA	61
3.4	EXEMPLOS NUMÉRICOS	63
3.4.1	Exemplo numérico 3.4.1	63
3.4.1.1	<i>O problema intervalar</i>	63
3.4.1.2	<i>Solução via SLCIA</i>	64
3.4.1.3	<i>Solução via CIA</i>	64
3.4.1.4	<i>Solução gráfica e comparações das soluções</i>	67
3.4.2	Exemplo numérico 3.4.2	68
3.4.3	Exemplo numérico 3.4.3	70
3.5	COMENTÁRIOS	73
4	PROBLEMAS DE CONTROLE ÓTIMO INTERVALAR FUZZY EM TEMPO DISCRETO	74
4.1	CONCEITOS BÁSICOS	74
4.1.1	Aritmética fuzzy restrita de níveis simples	74
4.1.2	Relação de ordem entre números fuzzy	77
4.1.3	Funções intervalares fuzzy	77
4.1.4	Equações a diferenças intervalares fuzzy	81

4.1.5	Conjuntos admissíveis fuzzy	84
4.2	O PROBLEMA DE CONTROLE ÓTIMO INTERVALAR FUZZY EM TEMPO DISCRETO	84
4.3	A PROGRAMAÇÃO DINÂMICA INTERVALAR FUZZY	88
4.3.1	O princípio de otimalidade intervalar fuzzy	88
4.3.2	O algoritmo de programação dinâmica intervalar fuzzy	89
4.4	EXEMPLOS NUMÉRICOS	91
4.4.1	Exemplo numérico 4.4.1	91
4.4.2	Exemplo numérico 4.4.2	94
4.5	COMENTÁRIOS	97
5	CONCLUSÕES	99
5.1	PERSPECTIVAS FUTURAS	99
5.2	PARTICIPAÇÃO EM TRABALHOS	99
5.2.1	Artigos em periódicos	100
5.2.2	Artigos em congressos	100
5.2.3	Apresentação em congresso	100
5.2.4	Prêmio	100
	REFERÊNCIAS	101
	APÊNDICE A - IMPLEMENTAÇÃO DO ALGORITMO DE PROGRAMAÇÃO DINÂMICA	106

1 INTRODUÇÃO

Problemas de otimização tiveram origem no cálculo das variações no final do século XVII com o problema da braquistócrona proposto por John Bernoulli (1667–1748) e a teoria de controle teve início nos anos 30 em estudos de problemas de Engenharia Elétrica e Mecânica (PINCH, 1997; CERDÁ, 2001). Nos anos 50, com os métodos de otimização de Bellman em 1957 (BELLMAN, 1957) e de Pontryagin em 1958 (PONTRYAGIN, 1958; PONTRYAGIN et al., 1962), temos hoje o que é chamado de teoria moderna de controle ou teoria de controle ótimo. As técnicas mais comuns para a solução dos problemas de controle ótimo são a programação dinâmica e o princípio do máximo de Pontryagin, e as aplicações desta teoria são as mais diversas.

Atualmente, para abordar problemas de controle ótimo com incerteza utilizamos a estocasticidade (BERTSEKAS, 1976; KENNEDY, 1986), a incerteza generalizada representada por intervalos (LEAL, 2015; CAMPOS et al., 2017) ou a teoria de conjuntos fuzzy (FILEV; ANGELOV, 1992; DINIZ; BASSANEZI, 2013; NAJARIYAN; FARAH, 2013). Já o estudo de problemas de controle com incertezas paramétricas (BOYD et al., 1994) e, em particular, problemas de projeto de controladores para planta intervalar (LORDELO, 2004; LORDELO; FERREIRA, 2005; PRADO, 2006) são diferentes do estudo de problemas de controle ótimo propostos nesse trabalho.

Problemas envolvendo estocasticidade supõem conhecidas as funções de distribuição de probabilidade e são exaustivamente estudados na literatura (BELLMAN, 1957; BELLMAN; DREYFUS, 1962; BERTSEKAS, 1976; KENNEDY, 1986; BERTSEKAS, 1995).

Os problemas de controle ótimo intervalar foram propostos recentemente (LEAL, 2015; CAMPOS et al., 2016a; CAMPOS et al., 2017; CAMPOS et al., 2018) e consideram a ausência de informação nos parâmetros. Intervalos podem ser usados para representar essa ausência de informação nos modelos matemáticos. Segundo Phillips (1981) intervalos foram utilizados por Arquimedes para representar aproximações do número π , mas foi somente com o trabalho de Moore (1959) que as aritméticas intervalares ganharam destaque. Inicialmente Moore (1959) estudou intervalos como forma de realizar aproximações computacionais uma vez que os computadores empregam aritméticas chamadas de ponto flutuante. Em seguida diversos avanços ocorreram e aplicações da aritmética intervalar padrão, do inglês *Standard Interval Arithmetic*

(SIA), podem ser encontradas em Moore (1979), Rohn (1989), Hansen (1992) e Jaulin et al. (2001). Por outro lado, mesmo com o grande avanço, a aritmética intervalar padrão proposta por Moore (1959) apresenta alguns problemas quando realizamos operações entre intervalos. Um problema imediato é que a aritmética intervalar padrão não possui inverso aditivo e distributividade. Outro problema da SIA é a sobrestimação (CHALCO-CANO; LODWICK; BEDE, 2014).

Principalmente preocupados em ter uma álgebra de intervalos em que são válidas as propriedades de inverso aditivo, distributividade e ainda outras propriedades, alguns autores criaram novas aritméticas intervalares (MARKOV, 1977; KAUCHER, 1980); no entanto, outros problemas surgiram. A aritmética intervalar de Markov (1977) apresenta problema quando lidamos com intervalos simétricos. Já a aritmética intervalar proposta por Kaucher (1980) lida com intervalos impróprios ou intervalos podem ser interpretados como intervalos com comprimento negativo.

A aritmética intervalar proposta por Lodwick (1999) e Lodwick (2007) reescreve um intervalo como uma função real e assim, propriedades antes indesejadas em outras aritméticas como o inverso aditivo ou a distributividade, passam a ser válidas. Essa aritmética é conhecida como aritmética intervalar restrita, do inglês *Constraint Interval Arithmetic (CIA)*; e a CIA é uma aritmética intervalar próxima ao espaço dos números reais quando comparada com outras aritméticas intervalares existentes. Segundo Lodwick (2012), a CIA possui uma rica estrutura algébrica.

Recentemente, Chalco-Cano, Lodwick e Bede (2014) propuseram uma nova aritmética intervalar denominada aritmética intervalar restrita de níveis simples, do inglês *Single Level Constraint Interval Arithmetic (SLCIA)*. A SLCIA considera sempre o mesmo nível para todos os intervalos envolvidos nas operações, isto é, opera com os intervalos nível a nível. Logo, a SLCIA é uma particularização da CIA; além disso, a SLCIA é utilizada em Costa et al. (2017) e Fard e Ramezanzadeh (2017) e pode ser utilizada também para estudar os problemas práticos apresentados em Assunção et al. (2007) e Buzachero (2010). Portanto, nesse trabalho abordamos inicialmente o problema de controle ótimo intervalar em tempo discreto usando a aritmética intervalar restrita de níveis simples.

Para resolver o problema de controle ótimo intervalar em tempo discreto usamos a programação dinâmica. A Programação Dinâmica (PD), introduzida por Bellman, determina a solução ótima de um problema de multi-estágios decompondo-o em estágios, sendo que cada estágio corresponde a um subproblema. A vantagem dessa decomposição é que o processo de otimização em cada estágio se torna uma tarefa mais simples em termos de cálculo do que lidar com todos os estágios simultaneamente. Além disso, um modelo de PD é uma equação recursiva que liga os diferentes estágios do problema de maneira que garante que a solução ótima viável de cada estágio também é ótima e viável para o problema inteiro (TAHA, 2008). Segundo Taha

(2008), a natureza combinatória dos cálculos em programação dinâmica também impossibilita o desenvolvimento de um código geral de computador que possa lidar com todos os problemas, e isso talvez justifique a ausência de softwares comerciais. Além disso, o esforço computacional cresce exponencialmente em função do número de iterações e quantidade de variáveis do problema, e então para problemas complexos os cálculos computacionais podem ser excessivos (KENNEDY, 1986).

A solução intervalar ótima fornece a amplitude da incerteza e assim, para viabilizar uma implementação da solução por um usuário, propomos a solução que minimiza o arrependimento máximo (do inglês *minimax regret solution* ou *minimum of maximum regret*). Logo, encontramos o menor do maior arrependimento entre todas as soluções admissíveis ótimas e uma entrada de controle pontual é fornecida para o usuário realizar a tomada de decisão na prática.

Algumas aplicações do problema de controle ótimo intervalar em tempo discreto utilizando a aritmética intervalar restrita de níveis simples podem ser encontradas em Campos et al. (2015), Campos et al. (2016a), Campos et al. (2016b) e Campos et al. (2017). Por outro lado, a aritmética intervalar restrita de níveis simples nem sempre é adequada para a modelagem matemática de diversos problemas reais. Com o objetivo de estender a solução do problema de controle ótimo intervalar em tempo discreto com uma aritmética intervalar mais geral do que a SLCIA, propomos também um método de solução para o problema de controle ótimo intervalar em tempo discreto utilizando CIA (CAMPOS et al., 2018). Na proposta de solução novamente utilizamos a técnica de programação dinâmica (BERTSEKAS, 1995; TAHA, 2008).

Assim, propomos a solução do problema de controle ótimo intervalar via aritmética intervalar restrita, sendo que essa abordagem via CIA é importante pois não considera o mesmo nível quando realizamos operações intervalares mas, ao mesmo tempo, exige grande esforço computacional.

Problemas de controle ótimo fuzzy supõem conhecidas as funções de pertinência e podem ser encontrados em Filev e Angelov (1992), Li et al. (2000), Zhao e Zhu (2010), Farhadinia (2014) e Najariyan e Farahi (2015). Em Filev e Angelov (1992) o problema de controle ótimo fuzzy considera o funcional e a condição de transversalidade incertos, sendo que a solução é realizada utilizando a programação matemática fuzzy (BELLMAN; ZADEH, 1970; ZIMMERMANN, 1983). Em Li et al. (2000) o problema de controle ótimo fuzzy considera o sistema realimentado e o processo de solução é feito por LMIs (do inglês, *Linear Matrix Inequality*). Já o problema de controle ótimo fuzzy apresentado em Zhao e Zhu (2010) usa o conceito de credibilidade (LIU; LIU, 2002; LIU, 2004) e obtém condições necessárias e suficientes para a existência do controle ótimo. O trabalho apresentado em Farhadinia (2014) obtém condições necessárias de otimalidade para o problema de controle ótimo fuzzy usando o princípio do mínimo de Pontryagin. Najariyan e Farahi (2015) usam a derivada generalizada de Hukuhara e o princípio do máximo de Pontryagin para resolver o problema de controle ótimo fuzzy com

condições de contorno fuzzy e regido por uma equação diferencial fuzzy. Problemas de controle fuzzy também são encontrados na literatura. Teixeira, Assunção e Avellar (2003) consideram o modelo fuzzy de Takagi-Sugeno e obtêm condições de estabilidade para sistemas não lineares. De modo mais geral, Driankov, Hellendoorn e Reinfrank (1996) e Passino e Yurkovich (1998) também abordam problemas de controle fuzzy.

Nesse trabalho propomos o problema de controle ótimo intervalar fuzzy em tempo discreto cuja solução é realizada com a aritmética fuzzy restrita de níveis simples. Esse estudo é possível pois a aritmética fuzzy restrita de níveis simples é uma aritmética intervalar sobre os seus r -níveis. Segundo Kaufmann e Gupta (1985) e Chalco-Cano, Lodwick e Bede (2014), uma vez que as operações algébricas fuzzy são funções contínuas, o princípio da extensão de Zadeh pode ser aplicado a essas operações para produzir a aritmética intervalar sobre os r -níveis uma vez que os r -níveis de números fuzzy são intervalos. Além disso, a aritmética fuzzy restrita de níveis simples permite calcular funções com todas as variáveis no contexto fuzzy.

A programação dinâmica intervalar fuzzy desenvolvida nesse trabalho torna o processo de otimização mais simples e permite obter a solução intervalar fuzzy ótima para o problema de controle ótimo intervalar fuzzy em tempo discreto.

O problema de controle ótimo intervalar fuzzy é importante pois considera a incerteza em seus parâmetros e variáveis, o que significa que ele é útil para descrever fenômenos naturais com incerteza e imprecisão intrínseca. A solução do problema de controle ótimo intervalar fuzzy também fornece ao usuário uma tomada de decisão realística, sendo que essa é obtida de acordo com a escolha do método de defuzzificação. Assim, o problema de controle ótimo intervalar fuzzy fornece uma alternativa para resolver problemas práticos e complexos do mundo real.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira. No Capítulo 2 inicialmente apresentamos os conceitos preliminares para resolver o problema de controle ótimo intervalar em tempo discreto via SLCIA. Assim apresentamos conceitos da aritmética intervalar restrita de níveis simples, assim como de funções intervalares, de equações a diferenças intervalares e de conjuntos admissíveis. Em seguida o problema de controle ótimo intervalar em tempo discreto é proposto de forma inédita juntamente com o conceito de solução usando SLCIA. O algoritmo de programação dinâmica intervalar também é proposto e a demonstração via SLCIA é construída. Exemplos numéricos ilustram a teoria.

No Capítulo 3 mostramos os conceitos preliminares para resolver o problema de controle ótimo intervalar via CIA. Assim, definimos uma nova relação de ordem entre intervalos. O conceito de funções intervalares para essa aritmética também é exposto. As definições de equações a diferenças intervalares e de conjuntos admissíveis também são expostos para essa aritmética. O algoritmo de programação dinâmica intervalar também é avaliado e a apresentação de alguns exemplos numéricos ilustram o capítulo.

No Capítulo 4 propomos o problema de controle ótimo intervalar fuzzy em tempo discreto. A solução do PCOIFD é feita usando a aritmética fuzzy restrita de níveis simples. Assim, construímos o conceito de funções intervalares fuzzy que permite realizar operações com todas as variáveis no contexto fuzzy. Além disso, definimos uma relação de ordem entre números fuzzy assim como definimos equações a diferenças intervalares fuzzy e conjuntos admissíveis fuzzy. A programação dinâmica intervalar fuzzy é proposta e finalizamos o capítulo com alguns exemplos numéricos.

No último capítulo apresentamos as conclusões, as perspectivas de trabalhos futuros e as publicações decorrentes desse trabalho.

2 PROBLEMAS DE CONTROLE ÓTIMO INTERVALAR EM TEMPO DISCRETO

Neste capítulo, formulamos o problema de controle ótimo intervalar no espaço de intervalos e em tempo discreto. A solução para o problema de controle ótimo intervalar em tempo discreto (PCOID) é obtida usando a aritmética intervalar restrita de níveis simples e a técnica de programação dinâmica. A resposta do PCOID contém as soluções reais ótimas possíveis. Desta forma, implementamos uma solução viável para o usuário usando a solução que minimiza o arrendimento máximo. Os exemplos ilustram a teoria.

2.1 CONCEITOS BÁSICOS

Nesta seção apresentamos os fundamentos necessários para o desenvolvimento desse trabalho. Particularmente descrevemos conceitos relacionados à aritmética intervalar restrita de níveis simples.

2.1.1 Aritmética intervalar

Conforme Stefanini e Bede (2009) o espaço intervalar pode ser denotado por K_C^n , sendo que K_C^n é o espaço de conjuntos não vazios compactos e convexos do \mathbb{R}^n . Se $n = 1$ denotamos por $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ o conjunto dos intervalos fechados e limitados da reta real. Aqui consideramos somente intervalos fechados como o descrito abaixo:

$$A = [\underline{a}, \bar{a}] = \{a \in \mathbb{R} : \underline{a} \leq a \leq \bar{a}\}.$$

A aritmética intervalar proposta por Moore (1966) acarretava em, dados dois elementos $A, B \in K_C^n$ e $s \in \mathbb{R}$, as operações usuais serem definidas por $A + B = \{a + b | a \in A, b \in B\}$ e $sA = \{sa | a \in A\}$. Entretanto, essas operações não possuem propriedades desejadas tais como inverso aditivo e multiplicativo ou distributividade. Para resolver essas limitações, Lodwick (1999) e Lodwick (2007) propôs a aritmética intervalar restrita.

A aritmética intervalar restrita reescreve um intervalo $A = [\underline{a}, \bar{a}]$ como uma função real $A^I(\lambda_a)$, sendo que $A^I(\lambda_a) = (1 - \lambda_a)\underline{a} + \lambda_a\bar{a}$, $0 \leq \lambda_a \leq 1$. Assim, as operações com a aritmética intervalar restrita validam as propriedades indesejadas citadas anteriormente.

A partir da aritmética proposta por Lodwick (1999) e Lodwick (2007), Chalco-Cano, Lodwick e Bede (2014) propuseram a SLCIA na qual todos os intervalos envolvidos nas operações variam de forma dependente (AI paramétrica), isto é, se um valor do

intervalo é fixado em 2/3 de distância do extremo inferior, todos os demais intervalos estariam fixos os mesmos 2/3 de distância dos extremos inferiores.

Algumas das principais características desta aritmética são apresentadas a seguir.

Definição 1 (CHALCO-CANO; LODWICK; BEDE, 2014). *Seja $A = [\underline{a}, \bar{a}] \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$ um intervalo. Então*

a) *Uma função contínua $A : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\min_{0 \leq \lambda \leq 1} A(\lambda) = \underline{a} \text{ e } \max_{0 \leq \lambda \leq 1} A(\lambda) = \bar{a}$$

é chamada função restrita associada a A ;

b) *Associada ao intervalo A , definimos a função restrita convexa crescente (função afim) $A : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ por*

$$A(\lambda) = (1 - \lambda)\underline{a} + \lambda\bar{a}, 0 \leq \lambda \leq 1.$$

As operações aritméticas da SLCIA são descritas pela definição abaixo.

Definição 2 (CHALCO-CANO; LODWICK; BEDE, 2014). *Sejam $A = [\underline{a}, \bar{a}]$ e $B = [\underline{b}, \bar{b}]$ dois intervalos, $\circ \in \{\oplus, \ominus, \otimes, \oslash\}$ a operação aritmética em $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ e $*$ uma operação aritmética em \mathbb{R} . Então*

a) *Definimos a função restrita associada aos intervalos $A \circ B$ por $(A * B)(\lambda) = A(\lambda) * B(\lambda)$, sendo que $A(\lambda)$ e $B(\lambda)$ são funções restritas convexas crescentes associadas a A e B , respectivamente;*

b) *As operações da aritmética restrita de níveis simples $A \circ B$ em $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ são dadas pelo intervalo*

$$A \circ B = \left[\min_{0 \leq \lambda \leq 1} (A(\lambda) * B(\lambda)), \max_{0 \leq \lambda \leq 1} (A(\lambda) * B(\lambda)) \right],$$

desde que o mínimo e máximo existam.

Observação 1. *Neste trabalho definimos as operações aritméticas baseadas nas funções restritas convexas crescentes, mas a mesma construção poderia ser feita usando as funções restritas convexas decrescentes. Além disso, escrevemos simplesmente funções restritas convexas ao invés de funções restritas convexas crescentes.*

Observação 2. *As operações básicas via aritmética intervalar restrita de níveis simples são denotadas por \oplus, \ominus, \otimes e \oslash para a soma, a subtração, a multiplicação e a divisão, respectivamente.*

Exemplo 1. Considere os intervalos $A = [2, 3]$ e $B = [4, 6]$. Pela aritmética intervalar restrita de níveis simples as funções restritas convexas $A(\lambda) = 2 + \lambda$ e $B(\lambda) = 4 + 2\lambda$, para todo $\lambda \in [0, 1]$, estão associadas a A e B , respectivamente. Para obter $C = B \ominus A$, sendo que $C = [\underline{c}, \bar{c}]$, resolvemos os seguintes problemas de otimização:

$$\underline{c} = \min\{(4 + 2\lambda) - (2 + \lambda), 0 \leq \lambda \leq 1\} = 2;$$

$$\bar{c} = \max\{2 + \lambda, 0 \leq \lambda \leq 1\} = 3.$$

Logo, o intervalo C que representa o resultado da operação é $[2, 3]$.

Observação 3 (CHALCO-CANO; LODWICK; BEDE, 2014). *A existência de mínimo e máximo está condicionada à expressão $A(\lambda) * B(\lambda)$ – dependente de λ – ser contínua. Caso contrário, devemos utilizar os conceitos de ínfimo e supremo.*

Observação 4. *Segundo Chalco-Cano, Lodwick e Bede (2014), ao realizar operações com intervalos via SLCIA, se primeiro calculamos as composições de todas as operações das funções restritas convexas e então tomamos o mínimo e máximo do resultado destas operações em relação ao parâmetro λ , e se calculamos iterativamente os resultados tomando o mínimo e máximo dos resultados das operações individualmente, obtemos resultados diferentes.*

Desta forma, para lidar com esta situação indeterminada, Chalco-Cano, Lodwick e Bede (2014) demonstram que devemos realizar todas as operações no espaço das expressões e então retornar para o espaço intervalar; isto é, devemos realizar as operações com todas as expressões simultaneamente e não avaliando componente a componente. Assim, temos que $A \oplus (-A) = \{0\}$ para qualquer intervalo A . Mais detalhes podem ser encontrados em Chalco-Cano, Lodwick e Bede (2014).

Observação 5 (CHALCO-CANO; LODWICK; BEDE, 2014). *Para $A, B \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$, se $0 \in B$ então $A \otimes B \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$ não é definida.*

A seguir ilustramos o conceito de relação de ordem entre intervalos apresentado em Leal (2015) uma vez que ele é importante para a comparação de intervalos que representam a solução intervalar do problema de controle ótimo intervalar. Assim, a relação de ordem é definida abaixo.

Definição 3 (LEAL, 2015). *Sejam $A = [\underline{a}, \bar{a}]$ e $B = [\underline{b}, \bar{b}]$ dois intervalos. A relação de ordem entre os intervalos A e B , segundo a aritmética intervalar restrita de níveis simples, denotada por \leq_{SL} , é definida por*

$$A \leq_{SL} B \text{ se e somente se } A(\lambda) \leq B(\lambda) \text{ para todo } \lambda \in [0, 1].$$

Além disso, $A <_{SL} B$ se e somente se $A \leq_{SL} B$ e $A \neq B$. Aqui $A(\lambda)$ e $B(\lambda)$ são as funções restritas convexas associadas a A e B , respectivamente.

Observação 6. A igualdade intervalar ‘=’ é interpretada conforme Chalco-Cano, Lodwick e Bede (2014). De acordo com Chalco-Cano, Lodwick e Bede (2014), dois intervalos $A, B \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$ são iguais se as funções restritas convexas associadas a A e B são iguais.

Observação 7 (LEAL, 2015). A relação de ordem para a aritmética intervalar de níveis simples é uma relação de ordem parcial, ou seja, a relação é reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

Observação 8. A desigualdade intervalar $A \leq_{SL} B$ significa que A é ‘não dominado’ por B .

Detalhes e comparações desta relação de ordem com outras existentes podem ser obtidas em Leal (2015). A próxima subseção aborda conceitos de funções intervalares.

2.1.2 Funções intervalares

Definições de funções intervalares podem ser encontradas em diversos trabalhos (MOORE, 1966; NÓBREGA, 2010; HUAMÁN, 2014; LEAL, 2015) e aqui definimos o conceito de função intervalar seguindo as ideias apresentadas em Huamán (2014) e Leal (2015).

Definição 4. Seja $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ o conjunto de todos os intervalos reais próprios. Uma função F é chamada de função intervalar se o seu domínio e o seu contradomínio são subconjuntos de $\mathbb{I}(\mathbb{R})$, isto é, $F : D_F \subseteq \mathbb{I}(\mathbb{R}) \rightarrow CD_F \subseteq \mathbb{I}(\mathbb{R})$ sendo D_F o domínio e CD_F o contradomínio de F .

A Definição 4 aplica-se a todas as aritméticas intervalares, podendo inclusive gerar diferentes respostas em seu contradomínio de acordo com a aritmética utilizada. Em particular, para a SLCIA, se queremos avaliar $F : \mathbb{I}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{I}(\mathbb{R})$ em $X \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$ temos que a expressão resultante é dada por

$$F(X) = \left[\min_{0 \leq \lambda \leq 1} F(X(\lambda)), \max_{0 \leq \lambda \leq 1} F(X(\lambda)) \right]$$

desde que o mínimo e máximo existam. Além disso, chamamos $F(X(\lambda))$, $0 \leq \lambda \leq 1$, de função restrita associada a função intervalar $F(X)$.

O exemplo a seguir ilustra a abordagem proposta.

Exemplo 2. Considere a função intervalar $F : \mathbb{I}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{I}(\mathbb{R})$ dada por $F(X) = 1 \ominus X$, $X = [\underline{x}, \bar{x}]$. A função restrita associada a F é dada por $F(X(\lambda)) = 1 - X(\lambda)$, sendo que $X(\lambda) = \underline{x} + (\bar{x} - \underline{x})\lambda$, para todo $\lambda \in [0, 1]$.

Logo, o valor de $F(X)$ é dado por

$$F(X) = \left[\min_{0 \leq \lambda \leq 1} 1 - X(\lambda), \max_{0 \leq \lambda \leq 1} 1 - X(\lambda) \right]$$

desde que o mínimo e máximo existam.

A observação abaixo, apresentada em Leal (2015), ajuda a esclarecer o processo correto de obter a função restrita associada.

Observação 9 (LEAL, 2015). *O cálculo do intervalo resultante $F(X)$ é obtido via $F(X(\lambda))$, $0 \leq \lambda \leq 1$, sendo que a função restrita associada $F(X(\lambda))$ é obtida fazendo $F(X(\lambda)) := f(X(\lambda))$, sendo que f é a função real a ser estendida e $X(\lambda)$ é a função restrita associada a X . Para o Exemplo 2, a função real $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é escrita como $f(x) = 1 - x$.*

Seguindo os conceitos para cálculos de expressões intervalares (vide Seção 2.1.1), as operações com funções intervalares são dadas de acordo com a definição a seguir.

Definição 5 (LEAL, 2015). *Sejam F e G duas funções intervalares, $\circ \in \{\oplus, \ominus, \otimes, \odot\}$ a operação aritmética em $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ e $*$ a operação aritmética em \mathbb{R} . As operações aritméticas entre as funções F e G são dadas por*

$$(F \circ G)(X) = F(X) \circ G(X) = \left[\min_{0 \leq \lambda \leq 1} F(X(\lambda)) * G(X(\lambda)), \max_{0 \leq \lambda \leq 1} F(X(\lambda)) * G(X(\lambda)) \right]$$

desde que o mínimo e máximo existam.

Abaixo seguem alguns exemplos.

Exemplo 3. Considere as funções intervalares $F_1, G_1 : \mathbb{I}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{I}(\mathbb{R})$ dadas por $F_1(X) = 1 \ominus X$ e $G_1(X) = X$. Realizar a operação $(F_1 \oplus G_1)(X)$ implica em realizar as operações

$$(F_1 \oplus G_1)(X) = \left[\min_{0 \leq \lambda \leq 1} (1 - X(\lambda)) + X(\lambda), \max_{0 \leq \lambda \leq 1} (1 - X(\lambda)) + X(\lambda) \right] = [1, 1].$$

Exemplo 4. Considere as funções intervalares $F_2, G_2 : \mathbb{I}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{I}(\mathbb{R})$ dadas por $F_2(X) = 1 \ominus X$ e $G_2(X) = X$. Realizar a operação $(F_2 \otimes G_2)(X)$ acarreta em realizar as operações

$$\begin{aligned} (F_2 \otimes G_2)(X) &= \left[\min_{0 \leq \lambda \leq 1} (1 - X(\lambda)) \times X(\lambda), \max_{0 \leq \lambda \leq 1} (1 - X(\lambda)) \times X(\lambda) \right] \\ &= \left[\min_{0 \leq \lambda \leq 1} X(\lambda) - X^2(\lambda), \max_{0 \leq \lambda \leq 1} X(\lambda) - X^2(\lambda) \right] \end{aligned}$$

desde que o mínimo e máximo existam.

A seguir seguem algumas observações.

Observação 10. *Em Huamán (2014) e Leal (2015) podem ser encontrados diversos conceitos de AI via SLCIA. Dentre eles destacamos o conceito de função intervalar.*

Observação 11. *Funções intervalares $F : \mathbb{I}(\mathbb{R})^n \rightarrow \mathbb{I}(\mathbb{R})$ são definidas de maneira análoga; e a Definição 5 continua válida. Note ainda que $\mathbb{I}(\mathbb{R})^n$ é o produto de $\mathbb{I}(\mathbb{R}) \times \mathbb{I}(\mathbb{R}) \times \dots \times \mathbb{I}(\mathbb{R})$ realizado n vezes.*

2.1.3 Equações a diferenças intervalares

Equações a diferenças são importantes para descrever a modelagem matemática de inúmeros problemas quando as grandezas envolvidas variam em determinados instantes regularmente espaçados. Além disso, é mais fácil resolver problemas em tempo discreto do que em tempo contínuo pois neste segundo caso, em geral, necessitamos de conceitos matemáticos mais bem elaborados.

Nesse capítulo propomos o conceito de equações a diferenças intervalares que é útil na abordagem do problema de controle ótimo intervalar em tempo discreto. A definição de equação a diferença intervalar juntamente com alguns exemplos seguem abaixo.

Definição 6 (CAMPOS et al., 2017). *Sejam $X_k \in \mathbb{I}(\mathbb{R})^n$ e $F_k : \mathbb{I}(\mathbb{R})^n \rightarrow \mathbb{I}(\mathbb{R})^n$ uma função intervalar. A equação a diferença intervalar possui a forma $X_{k+1} = F_k(X_k)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, sendo que k é o índice em tempo discreto e X_k é a trajetória intervalar do sistema que resume as informações no tempo k , informações estas relevantes para obter a sequência dos cálculos. Além disso, a equação a diferença intervalar está sujeita à condição inicial intervalar $X_0 \in \mathbb{I}(\mathbb{R})^n$.*

Segundo Lodwick e Jenkins (2013) a resolução de problemas intervalares se assemelha ao processo de solução dado pela transformada de Laplace, onde transformamos um intervalo em uma função real com inclinação não negativa no intervalo $[0, 1]$, resolvemos o problema no espaço de expressões e em seguida retornamos para o espaço de intervalos utilizando a minimização e a maximização no conjunto compacto $[0, 1]$ desde que o mínimo e máximo existam. O ponto principal desta transformação é que o chamado problema associado que ‘equivaler’ ao problema original, pode ser bem mais simples de ser resolvido por possuir mais propriedades. Além disso, posteriormente podemos retornar à solução do problema originalmente proposto (CAMPOS et al., 2016b).

Conforme Chalco-Cano, Lodwick e Bede (2014), escrevendo as respectivas funções restritas associadas à equação a diferença intervalar com condição inicial, representamos a equação a diferença por $X_{k+1}(\lambda) = F_k(X_k(\lambda))$ para todo $\lambda \in [0, 1]$ e $k = 0, 1, \dots, N-1$. A condição inicial fica $X_0(\lambda) \in \mathbb{R}^n$ para todo $\lambda \in [0, 1]$.

A simulação de equações a diferenças corresponde à aplicação do raciocínio descrito por Lodwick e Jenkins (2013) e que ilustramos nos exemplos a seguir.

Exemplo 5 (CAMPOS et al., 2017). Considere a equação a diferença intervalar dada por

$$\begin{cases} X_{1k+1} = [0,5, 1] \otimes X_{1k} \oplus 0,4 X_{2k} \\ X_{2k+1} = 0,1 \otimes X_{1k} \oplus 0,5 \otimes X_{2k} \end{cases}$$

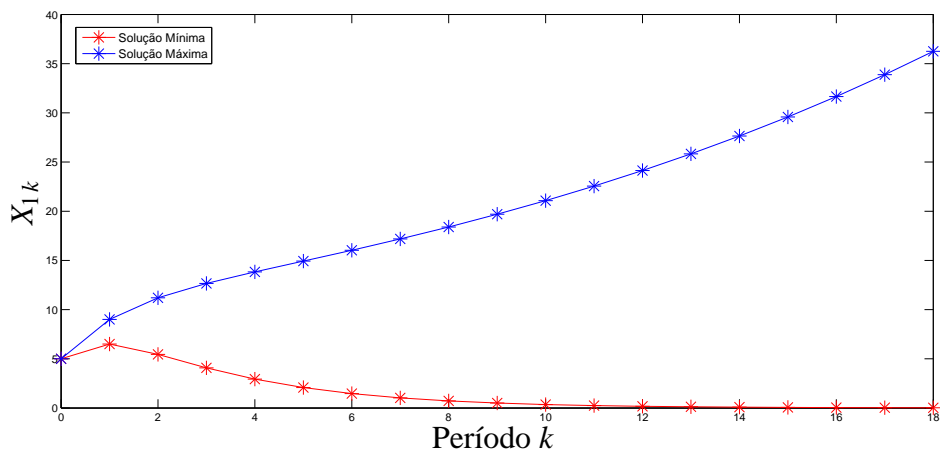
para $k = 0, 1, \dots, 18$ e com condições iniciais intervalares $X_{10} = 5$ e $X_{20} = 10$ (intervalos degenerados). O objetivo é simular a equação a diferença intervalar. Desta forma, reescrevendo a equação a diferença intervalar conforme SLCIA obtemos o seguinte problema associado:

$$\begin{cases} X_{1k+1}(\lambda) = \frac{(1+\lambda)}{2} X_{1k}(\lambda) + 0,4 X_{2k}(\lambda) \\ X_{2k+1}(\lambda) = 0,1 X_{1k}(\lambda) + 0,5 X_{2k}(\lambda) \end{cases}$$

com condições iniciais $X_{10}(\lambda) = 5$ e $X_{20}(\lambda) = 10$ para todo $\lambda \in [0, 1]$ e $k = 0, 1, \dots, 18$.

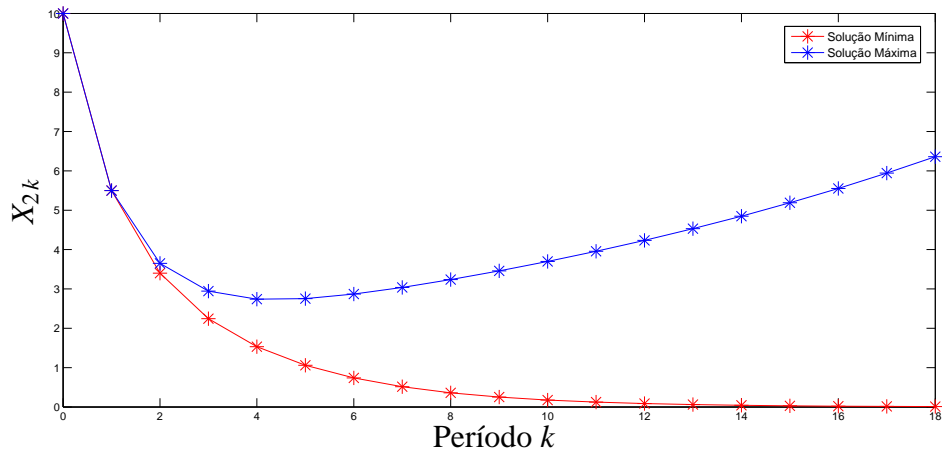
Logo, parametrizamos em λ a equação a diferença intervalar e em seguida simulamos a equação parametrizada para todas as iterações; posteriormente tomamos o valor mínimo e máximo para todo $\lambda \in [0, 1]$ em todos os estágios analisados. Este é o processo de solução para resolver problemas intervalares descrito por Lodwick e Jenkins (2013) e permite simular a equação a diferença intervalar. Representamos as soluções intervalares nos gráficos pelos valores mínimos e máximos; e os pontos que representam a solução intervalar são ligados por segmentos apenas para facilitar a visualização da evolução temporal. A Figura 1 mostra a trajetória intervalar X_1 e a Figura 2 representa a trajetória intervalar X_2 para o Exemplo 5.

Figura 1 - Trajetória intervalar X_1 para o Exemplo 5.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 2 - Trajetória intervalar X_2 para o Exemplo 5.



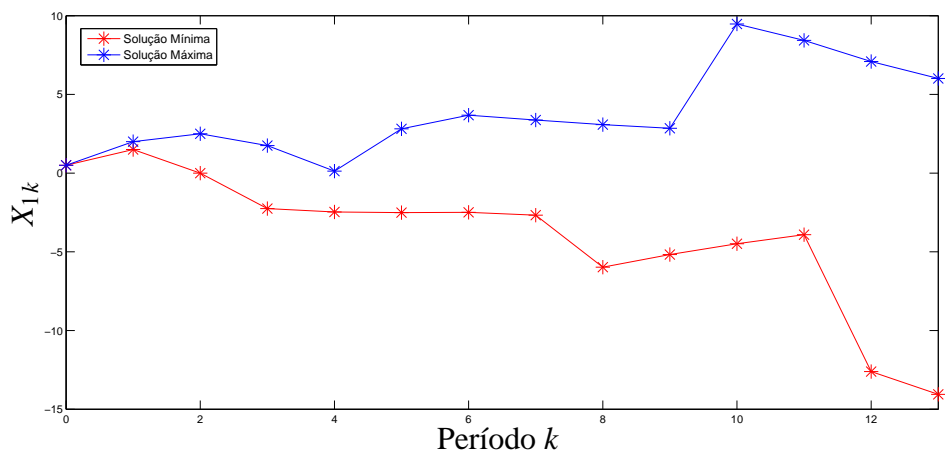
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Exemplo 6. Neste exemplo consideramos a equação a diferença intervalar descrita por

$$\begin{cases} X_{1k+1} = [1, 2] \otimes X_{1k} \oplus X_{2k} \\ X_{2k+1} = \ominus 2 \otimes X_{1k} \ominus 0,5 \otimes X_{2k} \end{cases}$$

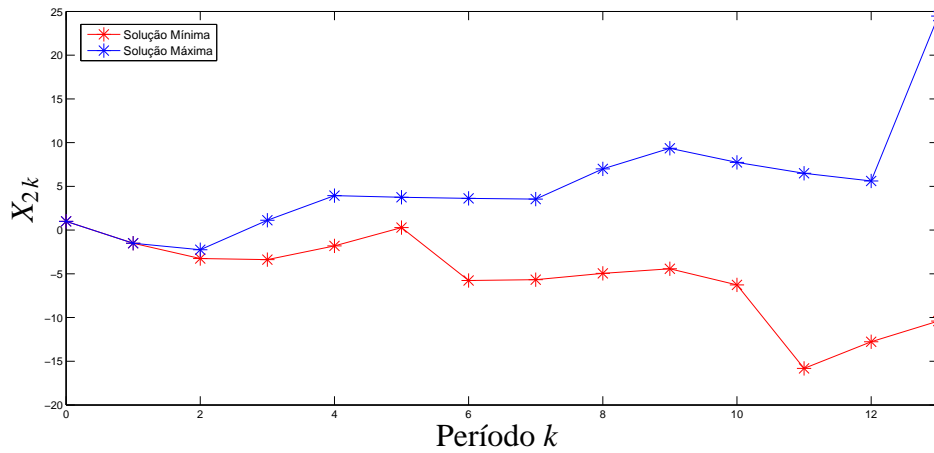
para $k = 0, 1, \dots, 13$ e com condição inicial intervalar $X_{10} = 0,5$ e $X_{20} = 1$. O processo de solução é descrito anteriormente e representamos a ilustração gráfica para o Exemplo 6 nas Figuras 3 e 4.

Figura 3 - Trajetória intervalar X_1 para o Exemplo 6.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 4 - Trajetória intervalar X_2 para o Exemplo 6.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

A seguir apresentamos o conceito de conjuntos admissíveis que são fundamentais para a elaboração e a solução do problema de controle ótimo intervalar.

2.1.4 Conjuntos admissíveis

Em problemas de controle ótimo em tempo discreto clássicos estamos interessados em minimizar ou maximizar um funcional sujeito a uma equação a diferença $\bar{x}_{k+1} = \bar{f}_k(\bar{x}_k, \bar{u}_k)$ e com condição inicial igual a \bar{x}_0 , $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, sendo que \bar{x}_k representa o vetor de estado n -dimensional e \bar{u}_k representa o vetor de controle m -dimensional para $k = 0, 1, \dots, N-1$. Ainda, em nosso trabalho a função \bar{f}_k representa a equação dinâmica do problema de controle ótimo no espaço dos números reais.

Para esse problema de controle ótimo clássico denotamos por $C_{ad} \subseteq \mathbb{R}^m$ o conjunto dos controles admissíveis. Já o conjunto de vetores de estado admissíveis é definido por

$$S_{ad} = \{\bar{x}_k \in \mathbb{R}^n \mid \bar{x}_{k+1} = \bar{f}_k(\bar{x}_k, \bar{u}_k) \text{ com a condição inicial } \bar{x}_0, \bar{u}_k \in C_{ad} \text{ e } k = 0, 1, \dots, N-1\}.$$

É importante notar que esses conjuntos admissíveis não possuem restrições adicionais tais como restrições físicas que poderiam limitar, por exemplo, a magnitude do controle. Abaixo ilustramos os conceitos de conjuntos intervalares admissíveis para o problema de controle ótimo intervalar em tempo discreto.

Denotamos por $U_{ad} \subseteq \mathbb{I}(\mathbb{R})^m$ o conjunto dos controles intervalares admissíveis. Assim, de acordo com a SLCIA, para todo $U_k \in U_{ad}$ a função restrita associada $U_k(\lambda)$ pertence a \mathbb{R}^m para todo $\lambda \in [0, 1]$.

A seguir estabelecemos a definição de estados intervalares admissíveis.

Definição 7 (CAMPOS et al., 2017). *Seja $F_k : \mathbb{I}(\mathbb{R})^n \times \mathbb{I}(\mathbb{R})^m \rightarrow \mathbb{I}(\mathbb{R})^n$ uma função intervalar. Dizemos que o conjunto de estados intervalares X_{ad} é admissível se $X_k \in \mathbb{I}(\mathbb{R})^n$ satisfaz a equação a diferença intervalar $X_{k+1} = F_k(X_k, U_k)$ com condição inicial intervalar X_0 e $U_k \in U_{ad}$, para $k = 0, 1, \dots, N-1$.*

Do ponto de vista da aritmética intervalar restrita de níveis simples, $X_k \in X_{ad}$ implica que a equação $X_{k+1}(\lambda) = F_k(X_k(\lambda), U_k(\lambda))$ com condição inicial $X_0(\lambda)$ e $U_k(\lambda) \in \mathbb{R}^m$ deva ser satisfeita para todo $\lambda \in [0, 1]$ e $k = 0, 1, \dots, N-1$.

2.2 O PROBLEMA DE CONTROLE ÓTIMO INTERVALAR EM TEMPO DISCRETO

O problema de controle ótimo intervalar em tempo discreto é um problema com incerteza generalizada (LODWICK, 2012; LODWICK; THIPWIWATPOTJANA, 2017). Nesta tese entendemos a incerteza generalizada como qualquer incerteza nos dados de entrada que surge pela falta de informação ou falta de especificação ou ainda imprecisão. A seguir apresentamos o problema de controle ótimo intervalar em tempo discreto (CAMPOS et al., 2017) e a definição de solução intervalar ótima. Portanto, o problema estudado é totalmente intervalar e então estamos lidando com funções cujo domínio e contra-domínio são intervalos. Além disso, o problema de controle ótimo intervalar envolve um funcional intervalar. O final da seção apresenta o problema associado e uma proposição que mostra a equivalência de solução do problema intervalar e associado.

Sejam $G_N : \mathbb{I}(\mathbb{R})^n \rightarrow \mathbb{I}(\mathbb{R})$, $G_k : \mathbb{I}(\mathbb{R})^n \times \mathbb{I}(\mathbb{R})^m \rightarrow \mathbb{I}(\mathbb{R})$ e $F_k : \mathbb{I}(\mathbb{R})^n \times \mathbb{I}(\mathbb{R})^m \rightarrow \mathbb{I}(\mathbb{R})^n$ funções intervalares. Estamos interessados em minimizar o funcional intervalar dado por

$$\min C(X, U) := G_N(X_N) \oplus \sum_{k=0}^{N-1} G_k(X_k, U_k)$$

e que é regido pela equação a diferença intervalar

$$X_{k+1} = F_k(X_k, U_k), \quad (1)$$

sendo que $X_k \in \mathbb{I}(\mathbb{R})^n$ denota o estado intervalar no período k e $U_k \in \mathbb{I}(\mathbb{R})^m$ o controle intervalar no período k para $k = 0, 1, \dots, N-1$. Note que N (horizonte de otimização) corresponde ao número de vezes em que o controle intervalar é aplicado e a equação a diferença intervalar (1) está sujeita à condição inicial intervalar $X_0 \in \mathbb{I}(\mathbb{R})^n$. A função G_N é o custo final do processo de controle.

Denotamos o problema descrito anteriormente por problema de controle ótimo intervalar em tempo discreto. Os candidatos à solução do problema de controle ótimo intervalar

em tempo discreto são os vetores intervalares admissíveis $(X,U) \in X_{ad} \times U_{ad}$, sendo que $X = (X_0, X_1, \dots, X_N)$ e $U = (U_0, U_1, \dots, U_{N-1})$. Além disso, $(X,U) \in X_{ad} \times U_{ad}$ é chamado de processo intervalar admissível.

A avaliação do funcional intervalar $C(X,U)$ para diferentes processos intervalares (X,U) deve ser realizada de acordo com a relação de ordem apresentada na Definição 3. O conceito de solução intervalar ótima para o PCOID segue da definição a seguir.

Definição 8 (CAMPOS et al., 2017). *Seja $(X,U) \in X_{ad} \times U_{ad}$ um processo intervalar admissível. Dizemos que $(X^*, U^*) \in X_{ad} \times U_{ad}$, sendo $X^* = (X_0^*, X_1^*, \dots, X_N^*)$ e $U^* = (U_0^*, U_1^*, \dots, U_{N-1}^*)$, é solução intervalar ótima para o problema de controle ótimo intervalar em tempo discreto se não existem vetores intervalares admissíveis (X,U) de modo que $C(X,U) <_{SL} C(X^*, U^*)$. O custo $C(X^*, U^*)$ é chamado de custo intervalar ótimo para o problema de controle ótimo intervalar em tempo discreto.*

Diante do exposto, e conforme Lodwick e Jenkins (2013) e Chalco-Cano, Lodwick e Bede (2014), resolver o PCOID implica em resolver o problema de controle ótimo intervalar em tempo discreto associado, e que é denotado por PCOID1. Escrevendo as respectivas funções restritas associadas para cada expressão intervalar do PCOID, temos que o PCOID1 é dado por

$$\min C(X(\lambda), U(\lambda)) := G_N(X_N(\lambda)) + \sum_{k=0}^{N-1} G_k(X_k(\lambda), U_k(\lambda))$$

e que é regido pela equação a diferença

$$X_{k+1}(\lambda) = F_k(X_k(\lambda), U_k(\lambda)), \quad (2)$$

sendo que $X_k(\lambda) \in \mathbb{R}^n$ denota o estado e $U_k(\lambda) \in \mathbb{R}^m$ o controle para $k = 0, 1, \dots, N-1$ e para todo $\lambda \in [0, 1]$. Note que N corresponde ao número de vezes em que o controle é aplicado e a equação dinâmica (2) está sujeita à condição inicial, que poderá ser um número real ou um intervalo reescrito conforme SLCIA. Para todo $\lambda \in [0, 1]$ fixado, temos um problema clássico de otimização convencional a ser resolvido; aqui utilizamos a programação dinâmica como técnica de solução.

A seguir propomos o conceito de solução para o PCOID1.

Definição 9 (CAMPOS et al., 2017). *Seja $(X(\lambda), U(\lambda)) \in S_{ad} \times C_{ad}$ um processo admissível para todo $\lambda \in [0, 1]$. Dizemos que $(X^*(\lambda), U^*(\lambda))$ é solução ótima para o PCOID1 se não existem $(X(\lambda), U(\lambda))$ admissíveis de modo que $C(X(\lambda), U(\lambda)) < C(X^*(\lambda), U^*(\lambda))$ para todo $\lambda \in [0, 1]$. Desta forma, o custo ótimo é dado por $C(X^*(\lambda), U^*(\lambda))$.*

Resolvendo o PCOID1 devemos retornar a solução para o espaço dos intervalos. Fazemos isso de acordo com a definição a seguir.

Definição 10 (CAMPOS et al., 2017). *Retornamos a solução para o espaço dos intervalos fazendo*

$$X^* = \left[\min_{0 \leq \lambda \leq 1} X^*(\lambda), \max_{0 \leq \lambda \leq 1} X^*(\lambda) \right]$$

desde que o mínimo e máximo existam. Além disso, X^* representa o estado intervalar ótimo.

Da mesma forma, definimos o controle intervalar ótimo por

$$U^* = \left[\min_{0 \leq \lambda \leq 1} U^*(\lambda), \max_{0 \leq \lambda \leq 1} U^*(\lambda) \right]$$

desde que o mínimo e máximo existam.

O funcional intervalar ótimo é conseqüentemente definido como

$$C(X^*, U^*) = \left[\min_{0 \leq \lambda \leq 1} C(X^*(\lambda), U^*(\lambda)), \max_{0 \leq \lambda \leq 1} C(X^*(\lambda), U^*(\lambda)) \right]$$

desde que o mínimo e máximo existam. Além disso, $C(X^*, U^*)$ é chamado de custo intervalar ótimo.

A seguir expomos um resultado fundamental para o capítulo. Este resultado mostra a equivalência de solução do PCOID e PCOID1.

Proposição 1 (CAMPOS et al., 2017). *O processo intervalar ótimo admissível $(X^*, U^*) \in X_{ad} \times U_{ad}$ é solução do PCOID se, e somente se, $(X^*(\lambda), U^*(\lambda)) \in S_{ad} \times C_{ad}$, para todo $\lambda \in [0, 1]$, for solução do PCOID1.*

Prova 1. De fato, seja (X^*, U^*) o processo intervalar ótimo admissível do PCOID e suponha que $(X^*(\lambda), U^*(\lambda))$ – funções restritas associadas – não seja ótima para o PCOID1. Então existe um processo admissível $(X(\lambda), U(\lambda))$ tal que

$$C(X(\lambda), U(\lambda)) < C(X^*(\lambda), U^*(\lambda))$$

para todo $\lambda \in [0, 1]$ e que equivale a escrever $C(X, U) <_{SL} C(X^*, U^*)$ via SLCIA. Isto contradiz o fato de (X^*, U^*) ser o processo intervalar ótimo admissível para o PCOID.

Reciprocamente, seja $(X^*(\lambda), U^*(\lambda))$ o processo ótimo admissível para o PCOID1 e suponha que (X^*, U^*) não seja ótima para o PCOID. Logo, existe um processo intervalar admissível (X, U) tal que

$$C(X, U) <_{SL} C(X^*, U^*)$$

o que implica em

$$C(X(\lambda), U(\lambda)) < C(X^*(\lambda), U^*(\lambda))$$

para todo $\lambda \in [0, 1]$. Isto contradiz o fato de $(X^*(\lambda), U^*(\lambda))$ ser o processo ótimo admissível para o PCOID1.



Para concluir a seção seguem as observações.

Observação 12. *De maneira análoga ao problema de minimização, temos os conceitos e as definições para o problema de maximização.*

Observação 13. *Se as funções a serem minimizadas a cada estágio k são parametrizadas em λ e estritamente convexas para todo $\lambda \in [0, 1]$, então a solução é ótima para o PCOID1 e consequentemente temos a solução ótima para o PCOID de acordo com a Proposição 1. Além disso, a convexidade da solução do PCOID1 garante a unicidade da solução do PCOID1 para todo $\lambda \in [0, 1]$ fixado e consequentemente a unicidade da solução intervalar para o PCOID.*

Observação 14. *As expressões resultantes – ou respostas na forma parametrizada – no PCOID1 a cada estágio, em função de λ , devem ser contínuas para garantir a existência de mínimo e máximo e assim obter a solução intervalar para o PCOID.*

2.3 A PROGRAMAÇÃO DINÂMICA INTERVALAR

A seguir reescrevemos o princípio de otimalidade que fundamenta a programação dinâmica. Em particular, o princípio de otimalidade estende a sua validade quando lidamos com intervalos e utilizamos a aritmética intervalar restrita de níveis simples.

2.3.1 O princípio de otimalidade intervalar

A técnica de programação dinâmica utiliza o princípio de otimalidade para a sua execução. Especificamente, e de forma intuitiva, o princípio de otimalidade nos diz que *se o processo de controle (ou decisão) é ótimo para todos os períodos (e desde o período inicial), então o processo é ótimo se tomar períodos subsequentes*. No contexto intervalar e utilizando SLCIA como aritmética intervalar, o princípio de otimalidade continua válido uma vez que para todo $\lambda \in [0, 1]$ fixado, o problema analisado é um problema convencional (CAMPOS et al., 2017).

De outra forma, propomos o princípio de otimalidade intervalar:

“Sejam $X_0, X_1, X_2, \dots, X_{N-1}, X_N$ intervalos. Se $X_0 X_1 X_2 \dots X_{N-1} X_N$ é a trajetória intervalar ótima de X_0 a X_N , então $X_{N-1} X_N$ é a trajetória intervalar ótima de X_{N-1} a X_N .”

A declaração acima nos diz que se $X_0 X_1 X_2 \dots X_{N-1} X_N$ é a trajetória intervalar ótima então não existe uma outra trajetória intervalar de X_0 a X_N , por exemplo $X_0 X_1 X_2 \dots X_{N-1} X X_N$, de modo que o funcional intervalar $J : \mathbb{I}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{I}(\mathbb{R})$ satisfaça

$J_{X_0X_1\dots X_{N-1}XX_N} <_{SL} J_{X_0X_1\dots X_{N-1}X_N}$. Aqui os funcionais intervalares $J_{X_0X_1\dots X_{N-1}XX_N}$ e $J_{X_0X_1\dots X_{N-1}X_N}$ representam as variações dos custos intervalares de X_0 a X_N .

Para provar a declaração do princípio de otimalidade intervalar utilizamos a aritmética intervalar restrita de níveis simples. Assim, o funcional intervalar $J_{X_0X_1\dots X_{N-1}X_N}$ é reescrito como $J_{X_0X_1\dots X_{N-1}X_N}(\lambda)$ para todo $\lambda \in [0, 1]$. O mesmo ocorre com o funcional intervalar $J_{X_0X_1\dots X_{N-1}XX_N}$.

Suponhamos então que $X_{N-1}X_N$ não é a trajetória intervalar ótima de X_{N-1} a X_N . Logo, existe uma outra trajetória intervalar $X_{N-1}XX_N$ de modo que, escrita conforme SLCIA, obtemos

$$J_{X_{N-1}XX_N}(\lambda) < J_{X_{N-1}X_N}(\lambda), \lambda \in [0, 1].$$

Utilizando a desigualdade acima nós obtemos que

$$\begin{aligned} J_{X_0X_1\dots X_{N-1}X_N}(\lambda) &= J_{X_0X_1\dots X_{N-1}}(\lambda) + J_{X_{N-1}X_N}(\lambda) > J_{X_0X_1\dots X_{N-1}}(\lambda) + J_{X_{N-1}XX_N}(\lambda) \\ &= J_{X_0X_1\dots X_{N-1}XX_N}(\lambda) \end{aligned}$$

para todo $\lambda \in [0, 1]$ fixado e, portanto, segue que

$$J_{X_0X_1\dots X_{N-1}XX_N} <_{SL} J_{X_0X_1\dots X_{N-1}X_N}.$$

Isso contradiz a hipótese de $J_{X_0X_1\dots X_{N-1}X_N}$ ser a trajetória intervalar ótima de X_0 a X_N .

A seguir expomos o algoritmo de programação dinâmica intervalar para o problema de controle ótimo intervalar. A exposição do algoritmo é baseada em Bertsekas (1995) e Cerdá (2001).

2.3.2 O algoritmo de programação dinâmica intervalar

O teorema a seguir resolve o problema de controle ótimo intervalar proposto. Este teorema é denominado algoritmo de programação dinâmica intervalar.

Teorema 1 (CAMPOS et al., 2017). *Seja $J_k : \mathbb{I}(\mathbb{R})^n \rightarrow \mathbb{I}(\mathbb{R})$ um funcional intervalar e $k = 0, 1, \dots, N$. Para cada condição inicial intervalar X_0 , o custo intervalar ótimo $J^*(X_0)$ do problema de controle ótimo intervalar em tempo discreto é igual a $J_0(X_0)$, sendo que a função J_0 é dada pelo último passo do seguinte algoritmo, que evolui de modo reverso no tempo de $N - 1$ até 0:*

Passo N :

$$J_N(X_N) = G_N(X_N).$$

Passo k :

$$J_k(X_k) = \min_{U_k \in U_{ad}} (G_k(X_k, U_k) \oplus J_{k+1}(F_k(X_k, U_k))),$$

para $k = N - 1, \dots, 1, 0$.

Passo 0:

$$J^*(X_0) = J_0(X_0).$$

Além disso, se U_k^* minimiza o lado direito da equação do passo k , o conjunto $\{U_0^*, U_1^*, \dots, U_{N-1}^*\}$ é o controle intervalar ótimo para o problema dado.

Prova 2. Para provar o algoritmo de programação dinâmica intervalar vamos reescrevê-lo de acordo com a SLCIA.

A condição inicial intervalar X_0 é reescrita como uma função restrita associada $X_0(\lambda)$ para todo $\lambda \in [0, 1]$. O custo intervalar ótimo $J^*(X_0)$ também é reescrito conforme a sua função restrita associada e assim temos $J^*(X_0(\lambda))$. Do mesmo modo, todas as outras funções ou expressões intervalares são reescritas conforme SLCIA.

Logo, o PCOID é reescrito de acordo com a aritmética intervalar restrita de níveis simples, isto é, para a condição inicial $X_0(\lambda)$, para todo $\lambda \in [0, 1]$, o custo ótimo $J^*(X_0(\lambda))$ do problema é igual a $J_0(X_0(\lambda))$, sendo que a função J_0 é dada pelo último passo do seguinte algoritmo, que evolui de modo reverso no tempo de $N - 1$ até 0:

Passo N :

$$J_N(X_N(\lambda)) = G_N(X_N(\lambda)), \lambda \in [0, 1].$$

Passo k :

$$J_k(X_k(\lambda)) = \min_{U_k(\lambda) \in C_{ad}} (G_k(X_k(\lambda), U_k(\lambda)) + J_{k+1}(F_k(X_k(\lambda), U_k(\lambda))))$$

para todo $\lambda \in [0, 1]$ e $k = N - 1, \dots, 1, 0$.

Passo 0:

$$J^*(X_0(\lambda)) = J_0(X_0(\lambda)), \lambda \in [0, 1].$$

Agora, se $U_k^*(\lambda)$ minimiza o lado direito da equação do passo k , o conjunto $\{U_0^*(\lambda), U_1^*(\lambda), \dots, U_{N-1}^*(\lambda)\}$, para todo $\lambda \in [0, 1]$, é o controle ótimo para o problema.

Prosseguindo com a demonstração, denotamos o conjunto de controles admissíveis por $\{U_0(\lambda), U_1(\lambda), \dots, U_{N-1}(\lambda)\}$ para todo $\lambda \in [0, 1]$ e denotamos por $\{U_k(\lambda), U_{k+1}(\lambda), \dots, U_{N-1}(\lambda)\}$, para todo $\lambda \in [0, 1]$, o conjunto de controles admissíveis do instante k ao instante final $N - 1$.

Logo, para $k = 0, 1, \dots, N - 1$, seja $J_k^*(X_k(\lambda))$, para todo $\lambda \in [0, 1]$, o custo ótimo para os $(N - k)$ -estágios do problema que se inicia no estado $X_k(\lambda)$ e período k e termina no período N . De outra forma, escrevemos

$$J_k^*(X_k(\lambda)) = \min_{\{U_k(\lambda), U_{k+1}(\lambda), \dots, U_{N-1}(\lambda)\}} \left(G_N(X_N(\lambda)) + \sum_{i=k}^{N-1} G_i(X_i(\lambda), U_i(\lambda)) \right), \lambda \in [0, 1].$$

Para $k = N$, definimos $J_N^*(X_N(\lambda)) = G_N(X_N(\lambda))$, para todo $\lambda \in [0, 1]$.

A continuação da demonstração segue pelo princípio de indução, cujo objetivo é mostrar que as funções de custo ótimo J_k^* são exatamente as funções J_k calculadas pelo algoritmo de programação dinâmica para todo k . É cabível o uso do princípio de indução matemática nesta demonstração envolvendo a SLCIA uma vez que, para todo $\lambda \in [0, 1]$, temos um problema clássico.

Assim, temos que $J_N^*(X_N(\lambda)) = G_N(X_N(\lambda)) = J_N(X_N(\lambda))$ para todo $\lambda \in [0, 1]$. Isto consequentemente acarreta $J_N^*(X_N) = G_N(X_N) = J_N(X_N)$.

Pelo princípio de indução, suponhamos que a hipótese de indução valha para $k + 1$, ou seja, suponhamos que a função custo ótimo J_{k+1}^* seja dada exatamente pela função J_{k+1} calculada pelo algoritmo de programação dinâmica, ou seja, temos

$$J_{k+1}^*(X_{k+1}(\lambda)) = J_{k+1}(X_{k+1}(\lambda)), \lambda \in [0, 1].$$

Vamos mostrar que a hipótese é válida para k .

Para $X_k(\lambda)$ fixo, $X_k(\lambda) \in S_{ad}$, para todo $\lambda \in [0, 1]$, temos pela definição que

$$\begin{aligned} J_k^*(X_k(\lambda)) &= \min_{\{U_k(\lambda), U_{k+1}(\lambda), \dots, U_{N-1}(\lambda)\}} \left(G_N(X_N(\lambda)) + \sum_{i=k}^{N-1} G_i(X_i(\lambda), U_i(\lambda)) \right) \\ &= \min_{U_k(\lambda), \{U_{k+1}(\lambda), \dots, U_{N-1}(\lambda)\}} \left(G_k(X_k(\lambda), U_k(\lambda)) + G_N(X_N(\lambda)) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=k+1}^{N-1} G_i(X_i(\lambda), U_i(\lambda)) \right) \end{aligned}$$

para todo $\lambda \in [0, 1]$.

Como o termo $G_k(X_k(\lambda), U_k(\lambda))$ não depende do conjunto de controle $\{U_{k+1}(\lambda), \dots, U_{N-1}(\lambda)\}$, segue que

$$\begin{aligned} J_k^*(X_k(\lambda)) &= \min_{U_k(\lambda) \in C_{ad}} G_k(X_k(\lambda), U_k(\lambda)) \\ &\quad + \min_{\{U_{k+1}(\lambda), \dots, U_{N-1}(\lambda)\}} \left(G_N(X_N(\lambda)) + \sum_{i=k+1}^{N-1} G_i(X_i(\lambda), U_i(\lambda)) \right) \end{aligned}$$

para todo $\lambda \in [0, 1]$.

Segue da definição de custo ótimo e do princípio de otimalidade, isto é, da própria definição

de $J_{k+1}^*(X_{k+1}(\lambda))$, que a partir do instante $k + 1$ obtemos

$$J_k^*(X_k(\lambda)) = \min_{U_k(\lambda) \in C_{ad}} (G_k(X_k(\lambda), U_k(\lambda)) + J_{k+1}^*(F_k(X_k(\lambda), U_k(\lambda))))$$

para todo $\lambda \in [0, 1]$. Isto nos mostra que

$$J_k^*(X_k) = \min_{U_k \in U_{ad}} (G_k(X_k, U_k) \oplus J_{k+1}^*(F_k(X_k, U_k))).$$

Sendo válida a hipótese de indução para $k + 1$, obtemos

$$J_k^*(X_k(\lambda)) = \min_{U_k(\lambda) \in C_{ad}} (G_k(X_k(\lambda), U_k(\lambda)) + J_{k+1}(F_k(X_k(\lambda), U_k(\lambda)))) = J_k(X_k(\lambda))$$

para todo $\lambda \in [0, 1]$. Assim obtemos $J_k^*(X_k) = J_k(X_k)$.

Isto completa a demonstração.

□

2.4 EXEMPLOS NUMÉRICOS

A seguir apresentamos dois exemplos totalmente intervalares e suas respectivas soluções. Além disso, esses exemplos também apresentam a solução que minimiza o arrependimento máximo. Especificamente, o primeiro aborda o controle de temperatura de um forno e algumas etapas do processo de solução são apresentadas. Já o segundo é um exemplo numérico com duas equações dinâmicas e dois controles.

2.4.1 Exemplo numérico 2.4.1

Certo material atravessa uma sequência de cinco fornos. Denotamos por $X_0 = 40^\circ C$ a temperatura inicial do material (temperatura ambiente), X_k , $k = 1, \dots, 5$, o estado intervalar que representa a temperatura do material na saída do forno k e U_{k-1} , $k = 1, \dots, 5$, o controle intervalar que representa a temperatura do forno no período k . Desta forma assumimos que $N = 5$. A equação a diferença intervalar é dada por

$$X_{k+1} = [0,2, 0,8] \otimes X_k \oplus 0,5 \otimes U_k, k = 0, \dots, 4. \quad (3)$$

Para o modelo intervalar analisado, a perda de temperatura do material na saída do forno de um estágio para o outro é incerta e representada pelo intervalo $[0,2, 0,8]$ ao invés de um número real e fixo. Este intervalo mostra uma grande incerteza em relação a perda de temperatura do material e pode ser oriunda da falta de conhecimento do modelador.

O objetivo do problema é aproximar X_5 de um valor desejado de temperatura $T = 150^\circ C$,

gastando o mínimo de energia, sendo que a função custo intervalar tem a forma

$$\min C(X,U) := 500 \otimes (X_5 \ominus 150)^2 \oplus \sum_{k=0}^4 U_k^2. \quad (4)$$

Aproximar X_5 ao valor $T = 150^\circ C$ significa que a distância entre ambos é dada pelo $\max_{0 \leq \lambda \leq 1} |X_5(\lambda) - 150|$, conforme a definição de distância entre intervalos dada em Chalco-Cano, Lodwick e Bede (2014). O valor 500 que aparece no funcional representa uma penalização para o modelo. Além disso, esperamos um menor custo para o funcional se a perda de temperatura do material é pequena. Este problema é chamado de EPCOID.

O problema apresentado é uma adaptação do modelo proposto em Bertsekas (1995). Aqui ele é um modelo intervalar e com mais períodos a serem analisados; além disso, particularizamos alguns valores numéricos que correspondem aos intervalos degenerados.

Para resolver o EPCOID reescrevemos o mesmo de acordo com a SLCIA. O problema fica

$$\min C(X(\lambda), U(\lambda)) := 500 (X_5(\lambda) - 150)^2 + \sum_{k=0}^4 U_k(\lambda)^2$$

sujeito a

$$X_{k+1}(\lambda) = (0,2 + 0,6\lambda)X_k(\lambda) + 0,5U_k(\lambda), \quad k = 0, \dots, 4,$$

sendo que $X_k(\lambda)$ é a variável de estado com condição inicial igual a $40^\circ C$ e para todo $\lambda \in [0, 1]$. O controle é $U_k(\lambda)$ e o custo é $C(X(\lambda), U(\lambda))$. Abaixo ilustramos algumas etapas do processo de solução para esse exemplo. O problema associado é denominado EPCOID1.

A implementação e a adaptação do algoritmo de programação dinâmica para resolver o EPCOID1, em função do parâmetro λ , foram realizadas no software MATLAB 7.4 e MAPLE 15 (ver detalhes no Apêndice A). Relembremos que o algoritmo de programação dinâmica é executado de modo reverso no tempo e gera todas as repostas para as variáveis de estado e controle em função de λ assim como a função custo. Usando a condição inicial avançamos no tempo de acordo com a equação dinâmica e obtemos as repostas para as variáveis de estado, controle e custo. Por fim realizamos a otimização em λ , $\lambda \in [0, 1]$, para retornar a solução para o espaço dos intervalos.

O cálculo das variáveis de controle intervalar U_0 e U_1 e o cálculo da variável de estado intervalar X_1 são mostrados abaixo.

Para a condição inicial $X_0 = 40^\circ C$ temos que o valor $U_0(\lambda)$ é

$$\begin{aligned} U_0(\lambda) &= -4(78732\lambda^9 + 236196\lambda^8 + 314928\lambda^7 + 244944\lambda^6 + 122472\lambda^5 \\ &\quad - 3756051\lambda^4 - 5053428\lambda^3 - 2529954\lambda^2 - 562392\lambda - 46871) \\ &\quad \div (6561\lambda^8 + 17496\lambda^7 + 38637\lambda^6 + 50058\lambda^5 + 86670\lambda^4) \end{aligned}$$

$$+ 82512\lambda^3 + 178002\lambda^2 + 101724\lambda + 410026).$$

O valor intervalar U_0 , obtidos os valores mínimo e máximo de $U_0(\lambda)$ com o software MAPLE 15, corresponde aos valores 0,4572 e 45,0821; e então a solução intervalar é dada por $[0,4572, 45,0821]$.

Para encontrar a variável de estado intervalar X_1 , substituímos a condição inicial igual a $40^\circ C$ e assim obtemos $X_1(\lambda)$ igual a

$$\begin{aligned} X_1(\lambda) &= 150(2916\lambda^7 + 6804\lambda^6 + 14904\lambda^5 + 67905\lambda^4 \\ &+ 100260\lambda^3 + 59502\lambda^2 + 78528\lambda + 22493) \\ &\div (6561\lambda^8 + 17496\lambda^7 + 38637\lambda^6 + 50058\lambda^5 + 86670\lambda^4 \\ &+ 82512\lambda^3 + 178002\lambda^2 + 101724\lambda + 410026). \end{aligned}$$

Esta expressão $X_1(\lambda)$ deve ser minimizada e maximizada. Os valores mínimo e máximo de $X_1(\lambda)$ são 8,2286 e 54,5411, respectivamente. Na forma de intervalos, escrevemos $[8,2286, 54,5411]$. Esse intervalo é o estado intervalar ótimo X_1 no estágio 2.

Substituímos os valores de $X_1(\lambda)$ na expressão $U_1(\lambda)$. Assim, o valor de $U_1(\lambda)$ é

$$\begin{aligned} U_1(\lambda) &= -20(26244\lambda^8 + 69984\lambda^7 + 81648\lambda^6 + 54432\lambda^5 \\ &+ 22680\lambda^4 - 1259577\lambda^3 - 1264617\lambda^2 - 421779\lambda - 46871) \\ &\div (6561\lambda^8 + 17496\lambda^7 + 38637\lambda^6 + 50058\lambda^5 + 86670\lambda^4 \\ &+ 82512\lambda^3 + 178002\lambda^2 + 101724\lambda + 410026). \end{aligned}$$

Devemos obter os valores mínimo e máximo para a expressão $U_1(\lambda)$. O valor mínimo para $U_1(\lambda)$ é 2,2862 e o valor máximo é 56,3527.

Para o cálculo de $X_2(\lambda)$ substituímos os valores de X_0 e $X_1(\lambda)$. Em seguida, devemos minimizar e maximizar a expressão resultante. Esse mesmo processo é realizado para encontrar os demais valores de estado e de controle intervalares.

O funcional intervalar é obtido realizando a minimização e maximização da função dada por

$$\begin{aligned} C(\lambda) &= 16(944784\lambda^{10} + 3149280\lambda^9 + 4723920\lambda^8 \\ &+ 4199040\lambda^7 + 2449440\lambda^6 - 90145224\lambda^5 - 151602840\lambda^4 \\ &- 101198160\lambda^3 - 33743520\lambda^2 - 5624520\lambda + 2196890641) \\ &\div (6561\lambda^8 + 17496\lambda^7 + 38637\lambda^6 + 50058\lambda^5 + 86670\lambda^4 \\ &+ 82512\lambda^3 + 178002\lambda^2 + 101724\lambda + 410026). \end{aligned}$$

O funcional intervalar ótimo é $[30133,8966, 85726,8814]$.

Portanto, a solução do problema de controle ótimo intervalar em tempo discreto fornece o estado intervalar ótimo e o controle intervalar ótimo assim como o custo intervalar ótimo. Para permitir ao usuário uma implementação prática da solução, entre os diversos métodos de tomada de decisão sob incerteza usaremos aquele que minimiza o arrependimento máximo (MORRISON; GREENBERG, 2008). A abordagem via mínimo arrependimento visa ‘mitigar’ os efeitos da incerteza uma vez que o mínimo arrependimento fornece uma solução que minimiza o arrependimento máximo.

Abaixo descrevemos o processo prático para obter a solução que minimiza o arrependimento máximo para o problema de controle ótimo intervalar análogo ao apresentado em Thipwiwatpotjana (2010).

Desta forma, para obter a solução que minimiza o arrependimento máximo inicialmente olhamos para a solução do problema de controle ótimo intervalar em tempo discreto dado pelo funcional intervalar (4), equação dinâmica intervalar (3) e condição inicial intervalar igual a $40^\circ C$. A seguir escolhemos o menor valor do custo intervalar ótimo desse problema, 30133,8966, e o introduzimos em um novo funcional intervalar. Especificamente, o novo funcional intervalar é escrito como

$$\min \left(500 \otimes (X_5 \ominus 150)^2 \oplus \sum_{k=0}^4 U_k^2 \ominus 30133,8966 \right). \quad (5)$$

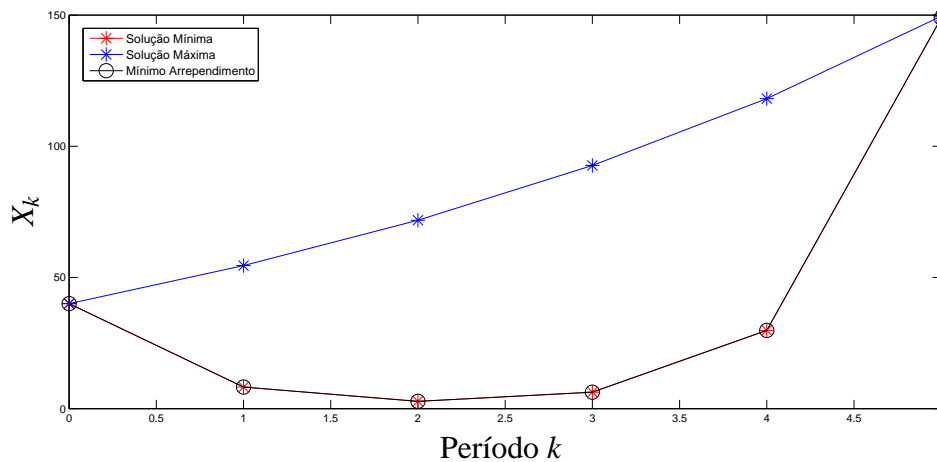
Agora resolvemos o problema de controle ótimo intervalar considerando o novo funcional intervalar (5) e a equação a diferença intervalar (3) juntamente com a condição inicial fixada em $40^\circ C$. Resolvendo esse problema de controle ótimo intervalar escolhemos o maior valor do custo intervalar ótimo, 55592,9848, chamado de valor do mínimo arrependimento. Além disso, o valor do mínimo arrependimento é obtido de acordo com as trajetórias descritas nas Figuras 5 e 6. Interpretamos essa informação como segue: ‘quando escolhemos a decisão que minimiza o arrependimento máximo no pior caso, o pior ao qual podemos nos arrepender baseado nessa decisão gera um custo de no máximo 55592,9848’. O custo dado pela solução que minimiza o arrependimento máximo é dado por 85726,8814.

As Figuras 5 e 6 também mostram a solução gráfica para a variável de estado intervalar X e variável de controle intervalar U , respectivamente.

Observação 15. Para o Exemplo numérico 2.4.1, as funções a serem minimizadas em função de $U_k(\lambda)$ a cada estágio k são estritamente convexas e portanto garantem um mínimo para o PCOID, conforme Observação 13.

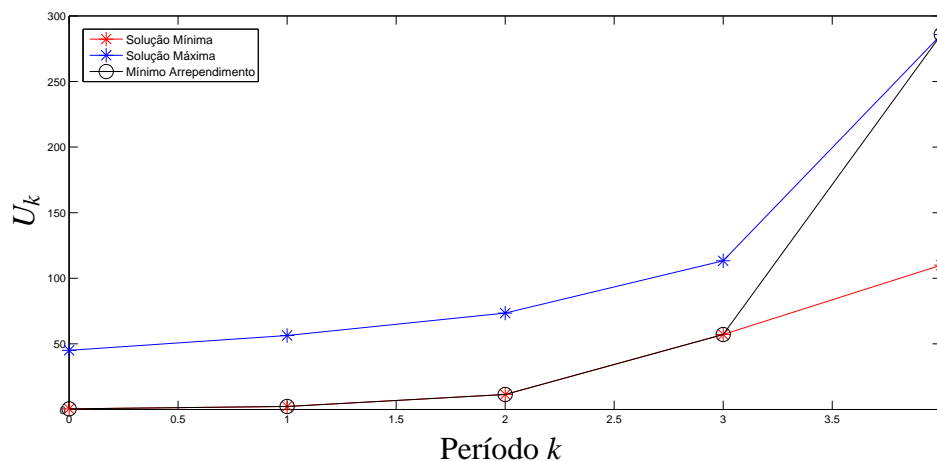
Observação 16. As funções a serem minimizadas e maximizadas em função de λ – para o estado X , o controle U e o custo C – são contínuas para todo $\lambda \in [0, 1]$, o que garante a

Figura 5 - Estado intervalar X para o Exemplo numérico 2.4.1 com a solução que minimiza o arrependimento máximo.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 6 - Controle intervalar U para o Exemplo numérico 2.4.1 com a solução que minimiza o arrependimento máximo.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

existência de mínimo e máximo pela Observação 14.

Observação 17. Com o propósito de obter soluções intervalares menos conservadoras, o modelador pode tentar obter mais informações sobre o problema e então refinar os intervalos utilizados para gerar novas simulações.

2.4.2 Exemplo numérico 2.4.2

Neste exemplo analisamos um problema de natureza puramente numérica com o intuito de avaliar a possibilidade de resolver problemas mais complexos com uma ou mais variáveis de estado ou sinais de controle. Além disso, para a tomada de decisão sob incerteza, na prática

pretendemos fornecer ao usuário a implementação da solução que minimiza o arrependimento máximo. Assim, o problema de controle ótimo intervalar em tempo discreto é dado por

$$\min C(X,U) := \sum_{k=0}^N X_{1k}^2 \oplus 0,2 \otimes X_{2k}^2 \oplus U_{1k}^2 \oplus U_{2k}^2$$

sujeito a

$$\begin{cases} X_{1k+1} = [-0,5, 1,0] \otimes X_{1k} \ominus 0,2 \otimes X_{2k} \ominus 0,5 \otimes U_{1k} \ominus 0,2 \otimes U_{2k} \\ X_{2k+1} = 0,5 \otimes X_{1k} \oplus [0,5, 1,0] \otimes X_{2k} \oplus 0,1 \otimes U_{1k} \ominus 0,9 \otimes U_{2k} \end{cases}$$

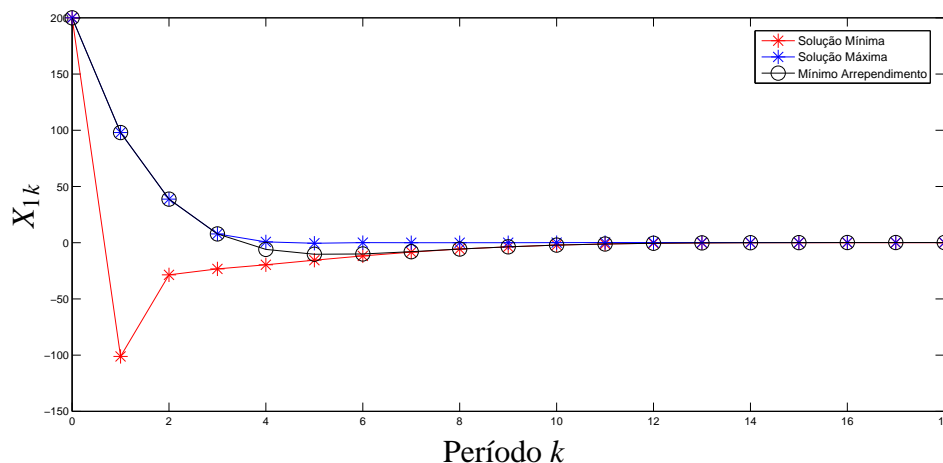
sendo que X_k é o estado intervalar e U_k é o controle intervalar para cada período analisado, $k = 0,1,\dots,N$. A condição inicial é $X_{10} = 200$ e $X_{20} = 140$ e $C(X,U)$ é o custo intervalar. Tomamos $G_N(X_N) = 0$ e $N = 18$ períodos.

Para esse exemplo implementamos e adaptamos o algoritmo de programação dinâmica no software MATLAB 7.4. Além disso resolvemos o problema em um micro-computador com processador Intel Core i5 e 8 GB de memória. Para o período considerado temos que o tempo de processamento é de aproximadamente 2,5 minutos.

As Figuras 7 e 8 representam o estado intervalar ótimo. O controle intervalar ótimo para o Exemplo numérico 2.4.2 é descrito nas Figuras 9 e 10. O custo intervalar ótimo para o problema é $[54151,2666, 103148,2230]$.

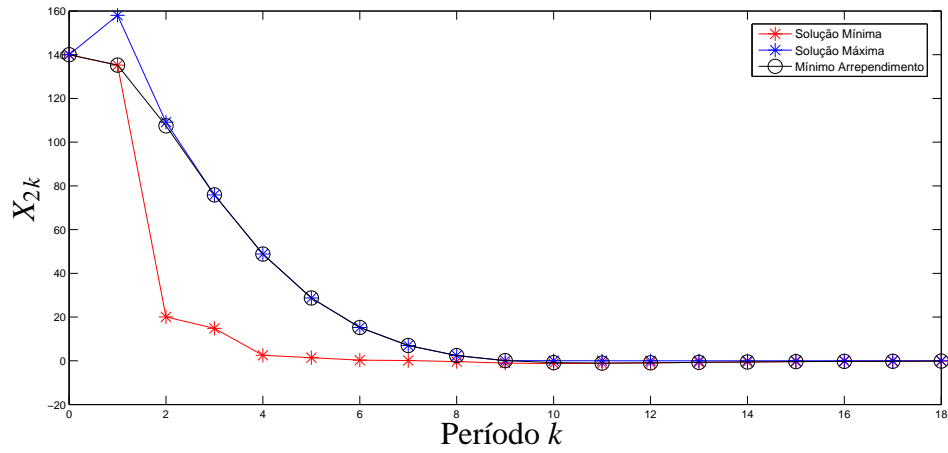
O método para encontrar a solução que minimiza o arrependimento máximo é análogo ao apresentado no Exemplo numérico 2.4.1. Assim, o valor que minimiza o arrependimento máximo é 48996,9563 e ele é obtido de acordo com as trajetórias descritas pelas Figuras 7, 8, 9 e 10. O custo dado pela solução que minimiza o arrependimento máximo é 103148,2230.

Figura 7 - Estado intervalar X_1 para o Exemplo numérico 2.4.2 com a solução que minimiza o arrependimento máximo.



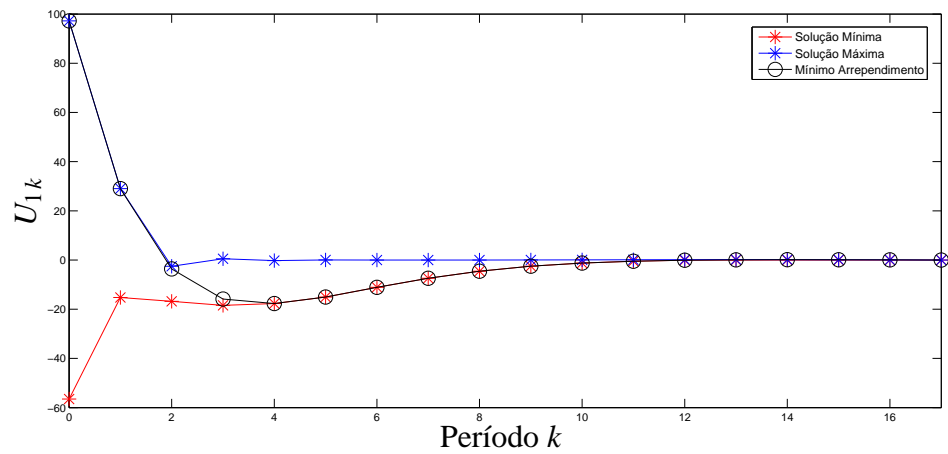
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 8 - Estado intervalar X_2 para o Exemplo numérico 2.4.2 com a solução que minimiza o arrependimento máximo.



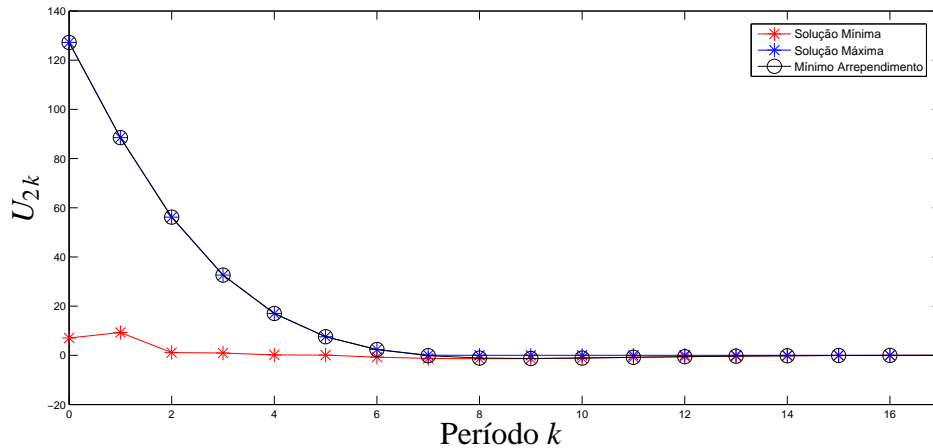
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 9 - Controle intervalar U_1 para o Exemplo numérico 2.4.2 com a solução que minimiza o arrependimento máximo.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 10 - Controle intervalar U_2 para o Exemplo numérico 2.4.2 com a solução que minimiza o arrependimento máximo.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Analisando a solução apresentada nas Figuras 7, 8, 9 e 10 percebemos que o estado e controle intervalares tendem a zero de acordo com a definição de distância entre intervalos apresentada em Chalco-Cano, Lodwick e Bede (2014). Além disso, os estados e os controles intervalares apresentam grandes variações nos períodos iniciais e tendem a zero por volta do décimo período.

As figuras também mostram a solução que minimiza o arrependimento máximo próxima aos extremos da solução intervalar. Ainda, a solução que minimiza o arrependimento máximo apresenta ao usuário uma implementação prática efetiva uma vez que encontra o melhor do pior arrependimento.

Observação 18. *O Exemplo numérico 2.4.2, reescrito de acordo com a aritmética intervalar restrita de níveis simples, é um problema clássico para todo $\lambda \in [0, 1]$ fixado. Então resolvemos o problema para todo $\lambda \in [0, 1]$ fixado e em seguida retornamos a solução para o espaço dos intervalos tomando os valores mínimos e máximos em cada estágio e variável do problema. Assim, para esse exemplo, dividimos o intervalo $[0, 1]$ em 20 partes iguais.*

2.5 COMENTÁRIOS

O problema de controle ótimo intervalar em tempo discreto foi proposto. O processo de solução foi formulado de acordo com a aritmética intervalar restrita de níveis simples e a programação dinâmica. Os conceitos necessários para o desenvolvimento desta teoria também foram apresentados. Desta forma, diferentemente de outras propostas para estudar problemas de controle com incerteza, essa nova abordagem fornece um custo intervalar assim como estado

e controle intervalares para cada período analisado. Além disso, essa nova abordagem apresenta resultados coerentes e os exemplos numéricos mostram a eficácia do método proposto. Para realizar uma implementação prática da solução propomos o uso da solução que minimiza o arrependimento máximo.

3 PROBLEMAS DE CONTROLE ÓTIMO INTERVALAR EM TEMPO DISCRETO USANDO A ARITMÉTICA INTERVALAR RESTRITA

No Capítulo 2 propusemos os problemas de controle ótimo intervalar em tempo discreto. Entretanto, a abordagem proposta no Capítulo 2 utiliza a aritmética intervalar restrita de níveis simples que considera sempre o mesmo nível para todos os intervalos envolvidos nas operações. Segundo Campos et al. (2018), esse fato restringe o uso da SLCIA pois em alguns problemas não temos todos os intervalos envolvidos nas operações variando de forma dependente. Desta forma, com o objetivo de estender o processo de solução para o problema de controle ótimo intervalar em tempo discreto propomos um método de solução utilizando a aritmética intervalar restrita. A aritmética intervalar restrita é mais geral do que a aritmética intervalar restrita de níveis simples pois não considera o mesmo nível quando realizamos operações intervalares. Mostraremos o processo de solução e construiremos exemplos numéricos.

3.1 CONCEITOS BÁSICOS

Nesta seção apresentamos os fundamentos necessários para o desenvolvimento desse capítulo. Em particular, descrevemos conceitos relacionados à aritmética intervalar restrita assim como estendemos alguns conceitos básicos da Análise Real para a Análise Intervalar.

3.1.1 Aritmética intervalar

Seguindo a Seção 2.1.1 definimos as operações da aritmética intervalar restrita da seguinte forma.

Definição 11 (CAMPOS et al., 2018). *Sejam $A = [\underline{a}, \bar{a}]$ e $B = [\underline{b}, \bar{b}]$ dois intervalos em $\mathbb{I}(\mathbb{R})$, $\circ \in \{\oplus, \ominus, \otimes, \oslash\}$ a operação aritmética em $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ e $*$ uma operação aritmética em \mathbb{R} . Então*

a) *Definimos a função restrita associada aos intervalos $A \circ B$ por $(A * B)(\lambda_a, \lambda_b) = A(\lambda_a) * B(\lambda_b)$, sendo que $A(\lambda_a)$ e $B(\lambda_b)$ são funções restritas convexas crescentes associadas a A e B , respectivamente;*

b) *O resultado das operações da aritmética intervalar restrita é dado pelo intervalo*

$$A \circ B = \left[\min_{0 \leq \lambda_a, \lambda_b \leq 1} (A(\lambda_a) * B(\lambda_b)), \max_{0 \leq \lambda_a, \lambda_b \leq 1} (A(\lambda_a) * B(\lambda_b)) \right],$$

desde que o mínimo e máximo existam.

Observação 19. Novamente definimos as operações aritméticas baseadas nas funções restritas convexas crescentes, mas a mesma construção poderia ser feita usando as funções restritas convexas decrescentes. Além disso, escrevemos simplesmente funções restritas convexas ao invés de funções restritas convexas crescentes.

Observação 20. Denotamos por \oplus, \ominus, \otimes e \oslash a soma, a subtração, a multiplicação e a divisão, respectivamente, para as operações aritméticas intervalares, porém enfatizamos sempre quando a operação aritmética é solucionada via SLCIA ou CIA.

Exemplo 7. Considere os intervalos $A = [2, 3]$ e $B = [4, 6]$. Usando a aritmética intervalar restrita segue que as funções restritas convexas associadas a A e B são, respectivamente, $A(\lambda_a) = 2 + \lambda_a$ e $B(\lambda_b) = 4 + 2\lambda_b$, para todo $\lambda_a, \lambda_b \in [0, 1]$. Para obter $C = B \ominus A$, sendo que $C = [\underline{c}, \bar{c}]$, resolvemos os seguintes problemas de otimização:

$$\underline{c} = \min\{(4 + 2\lambda_b) - (2 + \lambda_a), 0 \leq \lambda_a, \lambda_b \leq 1\} = 1;$$

$$\bar{c} = \max\{2 + 2\lambda_b - \lambda_a, 0 \leq \lambda_a, \lambda_b \leq 1\} = 4.$$

Logo, o intervalo C que representa a solução para o problema é $[1, 4]$.

Finalizamos esta subseção com algumas observações.

Observação 21. A existência de mínimo e máximo está condicionada a expressão $A(\lambda_a) * B(\lambda_b)$ ser contínua.

Observação 22 (CHALCO-CANO; LODWICK; BEDE, 2014). Ao realizar operações com intervalos via CIA, devemos realizar todas as operações no espaço das expressões e então retornar para o espaço intervalar. Logo, temos que $A \oplus (-A) = \{0\}$ para qualquer intervalo A .

A próxima seção ilustra o conceito de relação de ordem entre intervalos. Essa relação de ordem também é discutida em Bhurjee e Panda (2012).

3.1.2 Relação de ordem entre intervalos

A seguir apresentamos a relação de ordem entre intervalos para a CIA. Essa relação de ordem é restritiva uma vez que somente intervalos disjuntos satisfazem a desigualdade estrita. Entretanto, essa relação de ordem é adequada para os resultados propostos nesse capítulo.

Definição 12 (CAMPOS et al., 2018). Sejam $A = [\underline{a}, \bar{a}]$ e $B = [\underline{b}, \bar{b}]$ dois intervalos. A relação de ordem entre os intervalos A e B , segundo a aritmética intervalar restrita, denotada por \leq_{CIA} , é definida por

$$A \leq_{CIA} B \text{ se e somente se } A(\lambda_a) \leq B(\lambda_b) \text{ para todo } \lambda_a, \lambda_b \in [0, 1].$$

Além disso, $A <_{CIA} B$ se e somente se $A \leq_{CIA} B$ e $A \neq B$. Aqui $A(\lambda_a)$ e $B(\lambda_b)$ são as funções restritas convexas associadas a A e B , respectivamente.

A proposição abaixo mostra que a relação de ordem proposta na Definição 12 é reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

Proposição 2. *A relação de ordem \leq_{CIA} na Definição 12 é uma relação de ordem parcial.*

Prova 3. Sabemos que a relação é reflexiva pois $A \leq_{CIA} A$ implica em $A(\lambda_a) \leq A(\lambda_a)$ para todo $\lambda_a \in [0, 1]$. Por outro lado, sabemos também que a relação de ordem não é simétrica pois tomando $A = [2, 3]$ e $B = [5, 6]$ a relação $A \leq_{CIA} B$ é satisfeita mas $B \leq_{CIA} A$ não o é.

A relação de ordem \leq_{CIA} é transitiva pois $A \leq_{CIA} B$ e $B \leq_{CIA} C$ implica em $A \leq_{CIA} C$. De fato, por hipótese temos que

$$A \leq_{CIA} B \Leftrightarrow A(\lambda_a) \leq B(\lambda_b) \quad \forall \lambda_a, \lambda_b \in [0, 1]$$

e

$$B \leq_{CIA} C \Leftrightarrow B(\lambda_b) \leq C(\lambda_c) \quad \forall \lambda_b, \lambda_c \in [0, 1].$$

Logo, como $A(\lambda_a)$, $B(\lambda_b)$ e $C(\lambda_c)$ são números reais para todo $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c \in [0, 1]$ fixados, segue que

$$A(\lambda_a) \leq B(\lambda_b) \leq C(\lambda_c) \quad \text{para todo } \lambda_a, \lambda_b, \lambda_c \in [0, 1],$$

o que mostra que $A \leq_{CIA} C$.

Isso conclui a demonstração. □

3.1.3 Conjunto de incertezas

A seguir apresentamos a definição para problema intervalar e a notação para incertezas intervalares.

Definição 13 (CAMPOS et al., 2018). *Um problema intervalar é um problema proposto em linguagem matemática que apresenta intervalos em seus parâmetros ou em suas variáveis.*

Definição 14. *Denotamos por Λ os intervalos próprios presentes em um problema intervalar e que foram reescritos de acordo com a aritmética intervalar restrita; e denotamos por Λ_p se existem p intervalos próprios distintos presentes em um problema intervalar e que também foram reescritos conforme a aritmética intervalar restrita.*

A próxima subseção aborda conceitos de funções intervalares.

3.1.4 Funções intervalares via CIA

Abaixo relembremos a definição de função intervalar.

Definição 15. *Seja $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ o conjunto de todos os intervalos reais próprios. Uma função F é chamada de função intervalar se o seu domínio e o seu contradomínio são subconjuntos de $\mathbb{I}(\mathbb{R})$.*

A Definição 15 aplica-se a todas as aritméticas intervalares. Para a CIA, se queremos avaliar $F : \mathbb{I}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{I}(\mathbb{R})$ em $X \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$ temos que a expressão resultante é dada por

$$F(X) = \left[\min_{0 \leq \Lambda \leq 1} F(X(\Lambda)), \max_{0 \leq \Lambda \leq 1} F(X(\Lambda)) \right]$$

desde que o mínimo e máximo existam. Além disso, chamamos $F(X(\Lambda))$, $0 \leq \Lambda \leq 1$, de função restrita associada a função intervalar $F(X)$.

Observação 23. *Para simplificar a notação usamos $0 \leq \Lambda_p \leq 1$ para denotar $\Lambda_p = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in [0, 1]^p$.*

O exemplo a seguir ilustra a abordagem proposta.

Exemplo 8. Considere a função intervalar $F : \mathbb{I}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{I}(\mathbb{R})$ dada por

$$F(X) = 1 \ominus [1, 2]X \oplus [5, 8]X^2.$$

A função restrita associada a F é dada por $F(X(\Lambda_3))$ ou, mais especificamente, $F(X(\lambda_3)) = 1 - (1 + \lambda_1)X(\lambda_3) + (5 + 3\lambda_2)X^2(\lambda_3)$ para todo $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in [0, 1]$.

Logo, o valor de $F(X)$ é dado por

$$\begin{aligned} F(X) &= \left[\min_{0 \leq \Lambda_3 \leq 1} F(X(\Lambda_3)), \max_{0 \leq \Lambda_3 \leq 1} F(X(\Lambda_3)) \right] \\ &= \left[\min_{0 \leq \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \leq 1} 1 - (1 + \lambda_1)X(\lambda_3) + (5 + 3\lambda_2)X^2(\lambda_3), \right. \\ &\quad \left. \max_{0 \leq \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \leq 1} 1 - (1 + \lambda_1)X(\lambda_3) + (5 + 3\lambda_2)X^2(\lambda_3) \right] \end{aligned}$$

desde que o mínimo e máximo existam. Avaliando F em $X = [3, 4]$ obtemos

$$F([3, 4]) = [40, 125].$$

Seguindo os conceitos para cálculos de expressões intervalares (vide Seção 3.1.1), as operações com funções intervalares são dadas de acordo com a definição a seguir.

Definição 16 (CAMPOS et al., 2018). *Sejam F e G duas funções intervalares, $\circ \in \{\oplus, \ominus, \otimes, \oslash\}$ a operação aritmética em $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ e $*$ a operação aritmética em \mathbb{R} . As operações aritméticas entre as funções F e G são dadas por*

$$\begin{aligned} (F \circ G)(X) &= F(X) \circ G(X) \\ &= \left[\min_{0 \leq \Lambda \leq 1} F(X(\Lambda)) * G(X(\Lambda)), \max_{0 \leq \Lambda \leq 1} F(X(\Lambda)) * G(X(\Lambda)) \right] \end{aligned}$$

desde que o mínimo e máximo existam.

Abaixo seguem alguns exemplos.

Exemplo 9. Considere as funções intervalares $F_1, G_1 : \mathbb{I}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{I}(\mathbb{R})$ dadas por $F_1(X) = 1 \ominus [1, 2]X \oplus [5, 7]X^2$ e $G_1(X) = [3, 8]X$. Realizar a operação $(F_1 \oplus G_1)(X)$ implica em realizar as operações

$$(F_1 \oplus G_1)(X) = \left[\min_{0 \leq \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \leq 1} (1 - (1 + \lambda_1)X(\lambda_4) + (5 + 2\lambda_2)X^2(\lambda_4)) + (3 + 5\lambda_3)X(\lambda_4), \right. \\ \left. \max_{0 \leq \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \leq 1} (1 - (1 + \lambda_1)X(\lambda_4) + (5 + 2\lambda_2)X^2(\lambda_4)) + (3 + 5\lambda_3)X(\lambda_4) \right]$$

desde que o mínimo e máximo existam. Para $X = [2, 3]$ segue que

$$(F_1 \oplus G_1)([2, 3]) = [23, 85].$$

Exemplo 10. Considere as funções intervalares $F_2, G_2 : \mathbb{I}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{I}(\mathbb{R})$ dadas por $F_2(X) = [2, 4] \ominus X$ e $G_2(X) = X \oplus X^2$. Realizar a operação $(F_2 \otimes G_2)(X)$ acarreta em realizar as operações

$$\begin{aligned} (F_2 \otimes G_2)(X) &= \left[\min_{0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 1} ((2 + 2\lambda_1) - X(\lambda_2)) \times (X(\lambda_2) + X^2(\lambda_2)), \right. \\ &\quad \left. \max_{0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 1} ((2 + 2\lambda_1) - X(\lambda_2)) \times (X(\lambda_2) + X^2(\lambda_2)) \right] \\ &= \left[\min_{0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 1} (2 + 2\lambda_1)(X(\lambda_2) + X^2(\lambda_2)) - X^2(\lambda_2)(X(\lambda_2) + X^2(\lambda_2)), \right. \\ &\quad \left. \max_{0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 1} (2 + 2\lambda_1)(X(\lambda_2) + X^2(\lambda_2)) - X^2(\lambda_2)(X(\lambda_2) + X^2(\lambda_2)) \right] \end{aligned}$$

desde que o mínimo e máximo existam. Para $X = [-2, -1]$ segue que

$$(F_2 \otimes G_2)([-2, -1]) = [-4, 1,3827].$$

3.1.4.1 Funções intervalares $F : \mathbb{I}(\mathbb{R})^n \rightarrow \mathbb{I}(\mathbb{R})$

A seguir definimos funções intervalares de várias variáveis intervalares a valores intervalares. Em seguida analisamos alguns exemplos.

Definição 17. Uma função $F : \mathbb{I}(\mathbb{R})^n \rightarrow \mathbb{I}(\mathbb{R})$ é dita uma função intervalar de várias variáveis intervalares a valores intervalares se o seu domínio está em $\mathbb{I}(\mathbb{R})^n$ e o seu contradomínio está em $\mathbb{I}(\mathbb{R})$. Uma tal função associa, a cada $X \in \mathbb{I}(\mathbb{R})^n$, um intervalo $F(X) \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$.

Exemplo 11 (CAMPOS et al., 2018). Considere a função intervalar $F : \mathbb{I}(\mathbb{R})^3 \rightarrow \mathbb{I}(\mathbb{R})$ dada por

$$F(X_1, X_2, X_3) = 2 \otimes X_1 \oplus X_2 \otimes X_3^2.$$

Avaliar a função F em $X_1 = [0, 1]$, $X_2 = [1, 2]$ e $X_3 = [3, 5]$ consiste em resolver o seguinte problema de otimização de funções de várias variáveis:

$$\begin{aligned} F(X_1, X_2, X_3) &= \left[\begin{array}{l} \min_{0 \leq \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \leq 1} 2\lambda_1 + (1 + \lambda_2) \times (3 + 2\lambda_3)^2, \\ \max_{0 \leq \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \leq 1} 2\lambda_1 + (1 + \lambda_2) \times (3 + 2\lambda_3)^2 \end{array} \right] \\ &= [9, 52]. \end{aligned}$$

A partir da Definição 17 podemos considerar a definição para função intervalar linear de várias variáveis intervalares a valores intervalares.

Definição 18. Seja $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ o conjunto de todos os intervalos reais próprios e $X \in \mathbb{I}(\mathbb{R})^n$. Uma função $F : \mathbb{I}(\mathbb{R})^n \rightarrow \mathbb{I}(\mathbb{R})$ é chamada de função intervalar linear de várias variáveis intervalares a valores intervalares se possui a forma

$$F(X) = F(X_1, X_2, \dots, X_n) = A_1 X_1 + A_2 X_2 + \dots + A_n X_n,$$

sendo que $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$. Além disso, de acordo com a CIA, teríamos que o número de incertezas presentes nessa função intervalar linear é no máximo $2n$. Se todos os intervalos forem distintos, $F(X(\Lambda_{2n}))$ é a função restrita associada a função intervalar F .

Exemplo 12. Considere a função intervalar linear $F : \mathbb{I}(\mathbb{R})^2 \rightarrow \mathbb{I}(\mathbb{R})$ dada por $F(X_1, X_2) = 3 \ominus [5, 10] X_1 \oplus X_2$. Logo, usando a aritmética intervalar restrita, segue que a função restrita associada pode ser escrita como $F(X(\Lambda_3)) = F(X_1(\lambda_1), X_2(\lambda_2)) = 3 - (5 + 5\lambda_3) X_1(\lambda_1) + X_2(\lambda_2)$ para todo $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in [0, 1]$ e então

$$\begin{aligned} F(X_1, X_2) &= \left[\begin{array}{l} \min_{0 \leq \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \leq 1} 3 - (5 + 5\lambda_3) X_1(\lambda_1) + X_2(\lambda_2), \\ \max_{0 \leq \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \leq 1} 3 - (5 + 5\lambda_3) X_1(\lambda_1) + X_2(\lambda_2) \end{array} \right] \end{aligned}$$

desde que o mínimo e máximo existam. Para $X_1 = [1, 3]$ e $X_2 = [2, 5]$ segue que

$$F(X_1, X_2) = [-25, 3].$$

Avaliando F em $X_1 = [-2, 1]$ e $X_2 = [-5, -2]$ obtemos $F(X_1, X_2) = [-12, 21]$.

As operações com funções intervalares $F, G : \mathbb{I}(\mathbb{R})^n \rightarrow \mathbb{I}(\mathbb{R})$ seguem a mesma abordagem proposta na Seção 3.1.4. Neste caso, consideramos novamente a operação $\circ \in \{\oplus, \ominus, \otimes, \oslash\}$ em $\mathbb{I}(\mathbb{R})^n$ e a operação $*$ $\in \{+, -, \times, \div\}$ no espaço \mathbb{R}^n .

Os exemplos abaixo ilustram a situação.

Exemplo 13. Considere as funções intervalares lineares $F_1, G_1 : \mathbb{I}(\mathbb{R})^2 \rightarrow \mathbb{I}(\mathbb{R})$ dadas por $F_1(X_1, X_2) = [2, 3]X_1 \oplus X_2$ e $G_1(X_1, X_2) = X_1 \ominus X_2$.

Realizar a operação $(F_1 \oplus G_1)(X_1, X_2)$ implica em realizar as operações

$$\begin{aligned} (F_1 \oplus G_1)(X_1, X_2) &= \left[\min_{0 \leq \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \leq 1} ((2 + \lambda_3)X_1(\lambda_1) + X_2(\lambda_2)) + (X_1(\lambda_1) - X_2(\lambda_2)), \right. \\ &\quad \left. \max_{0 \leq \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \leq 1} ((2 + \lambda_3)X_1(\lambda_1) + X_2(\lambda_2)) + (X_1(\lambda_1) - X_2(\lambda_2)) \right] \\ &= \left[\min_{0 \leq \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \leq 1} (3 + \lambda_3)X_1(\lambda_1), \max_{0 \leq \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \leq 1} (3 + \lambda_3)X_1(\lambda_1) \right] \end{aligned}$$

desde que o mínimo e máximo existam.

Para $X_1 = [1, 2]$ e $X_2 = [1, 3]$ segue que

$$(F_1 \oplus G_1)([1, 2], [1, 3]) = [3, 8].$$

Exemplo 14. Considere as funções intervalares lineares $F_2, G_2 : \mathbb{I}(\mathbb{R})^2 \rightarrow \mathbb{I}(\mathbb{R})$ dadas por $F_2(X_1, X_2) = [-5, -3]X_1 \oplus [2, 3]X_2$ e $G_2(X_1, X_2) = X_2$.

Realizar a operação $(F_2 \otimes G_2)(X_1, X_2)$ acarreta em resolver o problema de otimização

$$\begin{aligned} (F_2 \otimes G_2)(X_1, X_2) &= \left[\min_{0 \leq \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \leq 1} ((-5 + 2\lambda_3)X_1(\lambda_1) + (2 + \lambda_4)X_2(\lambda_2)) \div X_2(\lambda_2), \right. \\ &\quad \left. \max_{0 \leq \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \leq 1} ((-5 + 2\lambda_3)X_1(\lambda_1) + (2 + \lambda_4)X_2(\lambda_2)) \div X_2(\lambda_2) \right] \end{aligned}$$

desde que o mínimo e máximo existam.

Avaliando a função $(F_2 \otimes G_2)(X_1, X_2)$ em $X_1 = [0, 3]$ e $X_2 = [-2, -1]$, $0 \notin X_2$, segue que

$$(F_2 \otimes G_2)([0, 3], [-2, -1]) = [2, 8].$$

3.1.5 Equações a diferenças intervalares via CIA

A Definição 6 é geral, porém, no Capítulo 2, desenvolvemos estudos relacionados à aritmética intervalar restrita de níveis simples. Com o objetivo de ilustrar e explorar o conceito de equação a diferença intervalar considerando a aritmética intervalar restrita (LODWICK, 1999; LODWICK, 2007), temos que a respectiva função restrita associada é representada por $X_{k+1}(\Lambda) = F_k(X_k(\Lambda))$ para todo $\Lambda \in [0, 1]$ e $k = 0, 1, \dots, N-1$ e a condição inicial fica $X_0(\Lambda) \in \mathbb{R}^n$ para todo $\Lambda \in [0, 1]$.

Os exemplos numéricos a seguir ilustram simulações de equações a diferenças intervalares.

Exemplo 15. Considere a equação a diferença intervalar descrita por

$$\begin{cases} X_{1k+1} = [0, 1, 0, 2] \otimes X_{1k} \oplus 0,04 \otimes X_{2k}^2 \\ X_{2k+1} = 0,1 \otimes X_{1k}^2 \oplus [-0,1, 0, 1] \otimes X_{2k} \end{cases}$$

para $k = 0, 1, \dots, 11$ e com condição inicial intervalar $X_{10} = 3$ e $X_{20} = 5$. O objetivo é simular a equação a diferença intervalar.

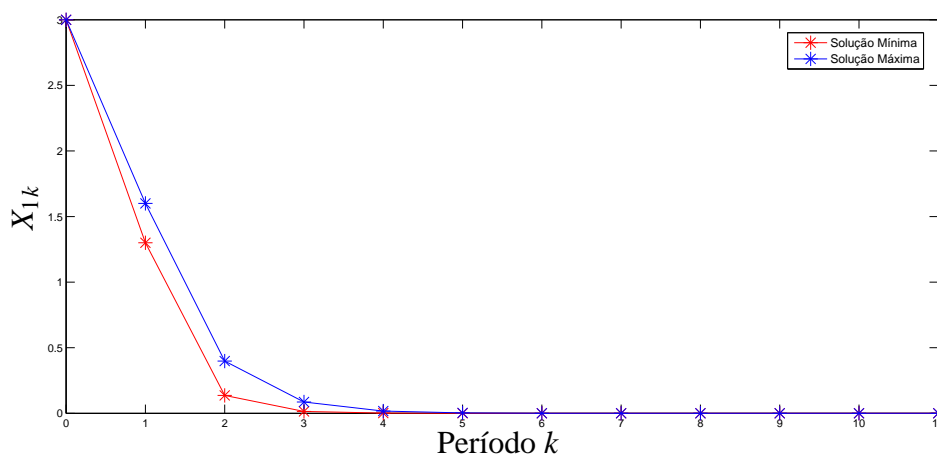
Desta forma, reescrevendo a equação a diferença intervalar conforme CIA obtemos o seguinte problema associado:

$$\begin{cases} X_{1k+1}(\lambda_1, \lambda_2) = (0,1 + 0,1\lambda_1)X_{1k}(\lambda_1, \lambda_2) + 0,04X_{2k}^2(\lambda_1, \lambda_2) \\ X_{2k+1}(\lambda_1, \lambda_2) = 0,1X_{1k}^2(\lambda_1, \lambda_2) + (-0,1 + 0,2\lambda_2)X_{2k}(\lambda_1, \lambda_2) \end{cases}$$

com condições iniciais $X_{10}(\lambda_1, \lambda_2) = 3$ e $X_{20}(\lambda_1, \lambda_2) = 5$ para todo $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$ e $k = 0, 1, \dots, 11$.

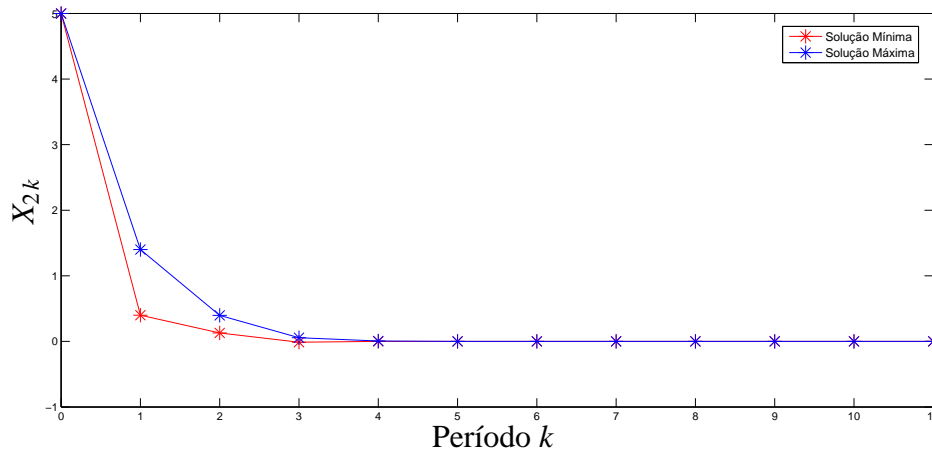
Assim, parametrizamos o sistema em λ_1 e λ_2 . Em seguida resolvemos o sistema parametrizado para todas as iterações e tomamos o valor mínimo e máximo para todo $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$ em todos os estágios analisados. Este é o processo de solução para resolver problemas intervalares descrito por Lodwick e Jenkins (2013) e permite simular a equação a diferença intervalar. Esse mesmo processo é desenvolvido por Chalco-Cano, Lodwick e Bede (2014) para resolver problemas intervalares usando a aritmética intervalar restrita de níveis simples. Nos gráficos representamos as soluções intervalares pela solução mínima e pela solução máxima; e novamente os pontos que representam a solução intervalar são ligados por segmentos apenas para facilitar a visualização da evolução temporal. A Figura 11 mostra a trajetória intervalar X_1 e a Figura 12 representa a trajetória intervalar X_2 para o Exemplo 15.

Figura 11 - Trajetória intervalar X_1 para o Exemplo 15.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 12 - Trajetória intervalar X_2 para o Exemplo 15.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Notemos que tanto a solução mínima quanto a solução máxima para X_1 e X_2 se aproximam de zero a partir do quinto período.

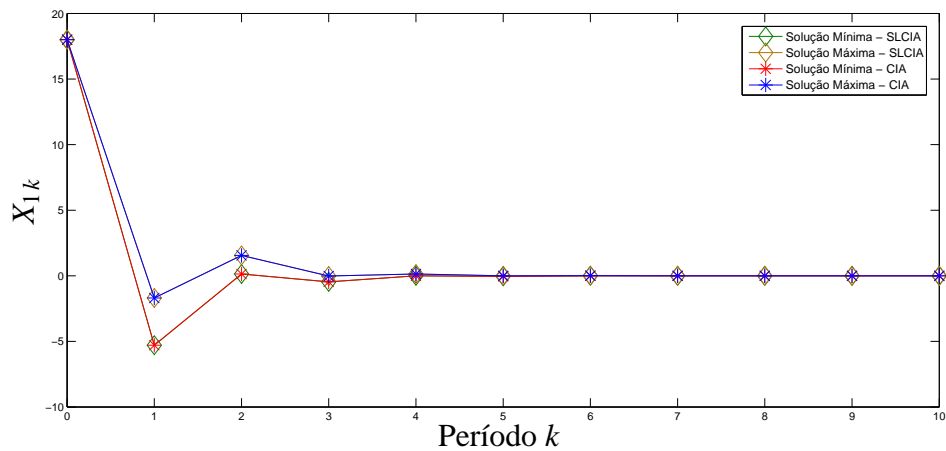
Exemplo 16. Considere a equação a diferença intervalar dada por

$$\begin{cases} X_{1k+1} = [-0,3, -0,1] \otimes X_{1k} \oplus 0,0002 \otimes X_{1k} \otimes X_{2k} \\ X_{2k+1} = [0,1, 0,3] \otimes X_{1k}^2 \oplus 0,01 \otimes X_{2k} \end{cases}$$

para $k = 0, 1, \dots, 10$ e com condição inicial intervalar $X_{10} = 18$ e $X_{20} = 30$.

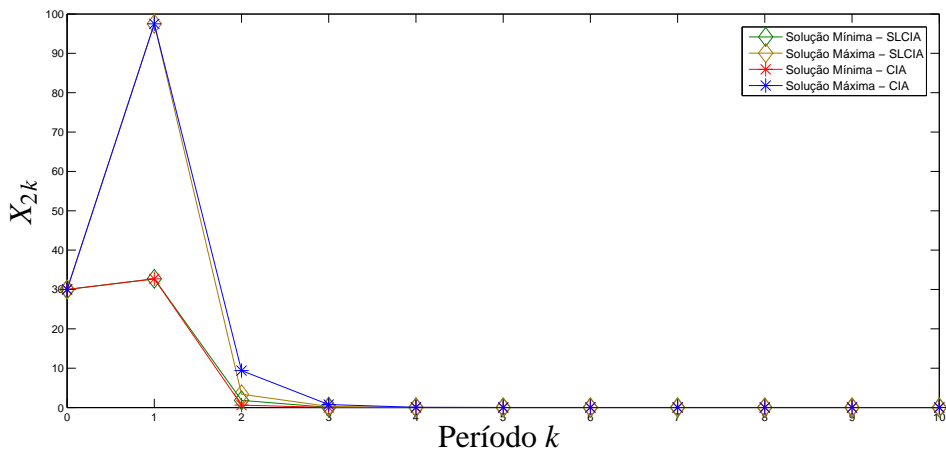
Conforme o processo de solução para problemas intervalares descrito anteriormente, a equação a diferença intervalar é simulada. Além disso, para efeito de comparação também simulamos a evolução temporal da equação a diferença intervalar utilizando SLCIA. As ilustrações gráficas que representam a simulação para o Exemplo 16 utilizando as duas aritméticas são dadas pelas Figuras 13 e 14.

Figura 13 - Trajetória intervalar X_1 para o Exemplo 16.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 14 - Trajetória intervalar X_2 para o Exemplo 16.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Analisando as Figuras 13 e 14 percebemos que a solução intervalar obtida pela CIA contém a solução dada pela SLCIA. Especificamente, a solução obtida via CIA contém mais possibilidades de soluções ao contrário da SLCIA que possui seus intervalos variando de forma dependente e isso acaba fornecendo um conjunto de solução com menos possibilidades. Por outro lado, ambas as soluções apresentam um comportamento qualitativo similar. Por fim, notemos que tanto a solução mínima quanto a solução máxima para X_1 e X_2 tendem a zero em torno do quinto período.

3.1.5.1 Equações a diferenças intervalares lineares

Abaixo analisamos o conceito de equações a diferenças intervalares lineares.

Considere a equação a diferença intervalar dada pela Definição 6, sendo F_k uma função intervalar linear de várias variáveis intervalares a valores intervalares conforme a Definição 18. A equação a diferença intervalar linear, reescrita conforme a aritmética intervalar restrita, é a equação a diferença representada por $X_{k+1}(\Lambda_{n \times n+n}) = F_k(X_k(\Lambda_{n \times n+n}))$ para todo $\Lambda_{n \times n+n} \in [0, 1]$ e $k = 0, 1, \dots, N - 1$ se todos os intervalos considerados forem distintos. A condição inicial fica $X_0(\Lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ para todo $\Lambda_n \in [0, 1]$.

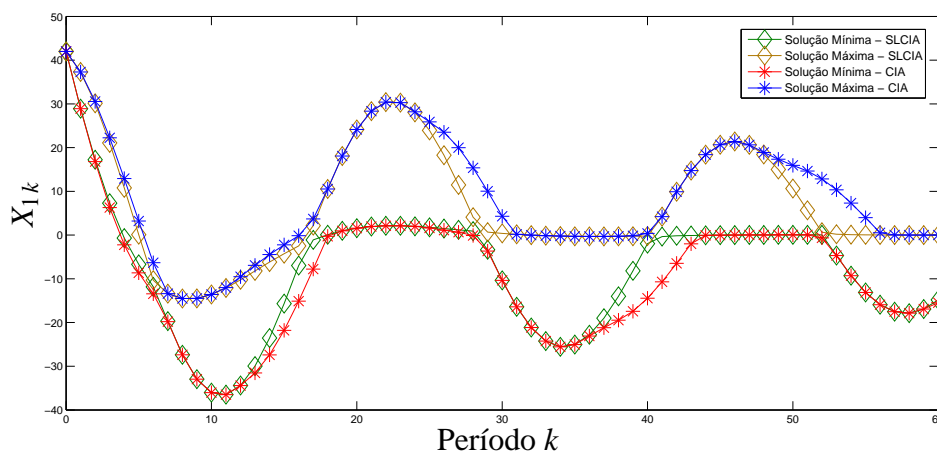
A simulação de equações a diferenças intervalares lineares corresponde à aplicação do raciocínio descrito por Lodwick e Jenkins (2013) e Chalco-Cano, Lodwick e Bede (2014) e que ilustramos no exemplo a seguir.

Exemplo 17. Considere a equação a diferença intervalar linear dada por

$$\begin{cases} X_{1k+1} = [0,7, 0,9] \otimes X_{1k} \ominus 0,1 \otimes X_{2k} \\ X_{2k+1} = [0,6, 0,7] \otimes X_{1k} \oplus 1 \otimes X_{2k} \end{cases}$$

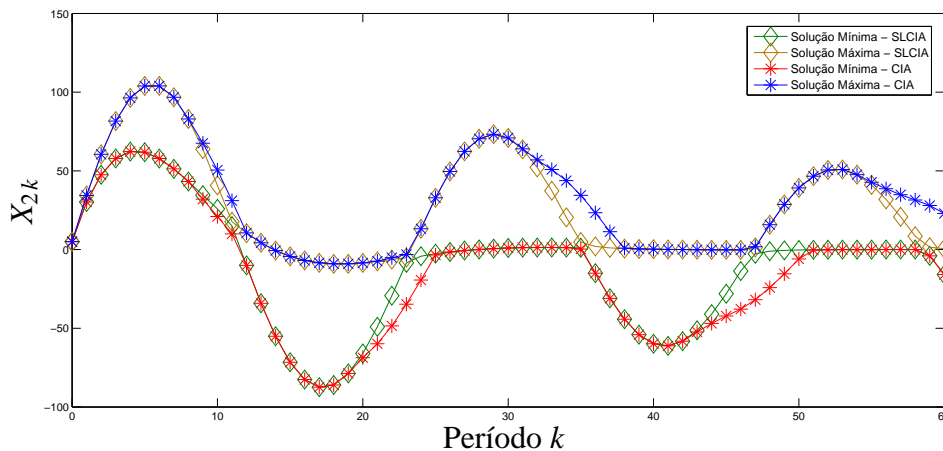
para $k = 0, 1, \dots, 60$ e com condição inicial intervalar $X_{10} = 42$ e $X_{20} = 5$. A ilustração gráfica da evolução temporal da equação a diferença intervalar linear para o Exemplo 17, juntamente com a evolução temporal da trajetória intervalar utilizando SLCIA, é representada pelas Figuras 15 e 16.

Figura 15 - Trajetória intervalar X_1 para o Exemplo 17.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

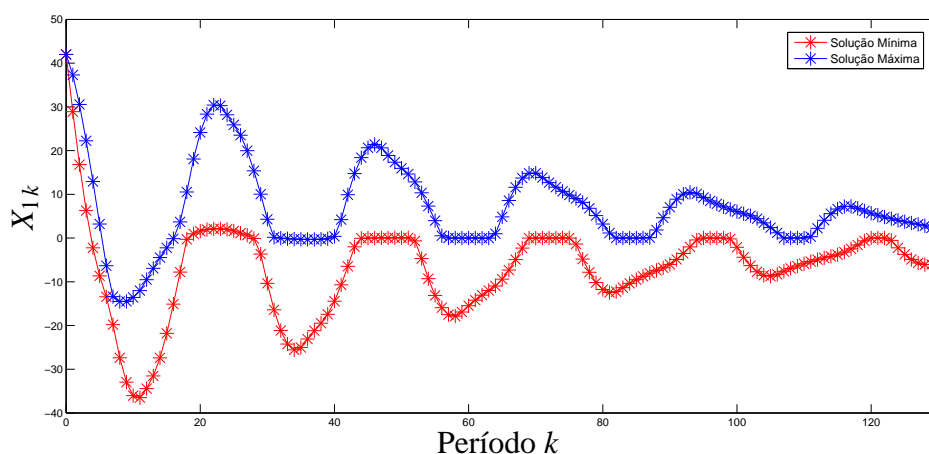
Figura 16 - Trajetória intervalar X_2 para o Exemplo 17.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

As Figuras 15 e 16 mostram que a solução intervalar obtida pela SLCIA é menos conservadora do que a solução apresentada pela CIA ainda que ambas apresentem um comportamento qualitativamente semelhante. Além disso, a solução obtida via CIA contém possibilidades de soluções que a SLCIA não possui. Ademais, analisando o Exemplo 17 para o período final igual a 130 temos que a trajetória intervalar X_1 é dada pela Figura 17 e sugere convergência para zero. Note, porém, que neste caso somente simulamos a trajetória intervalar X_1 usando CIA.

Figura 17 - Trajetória intervalar X_1 para o Exemplo 17: 130 períodos.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

A seguir apresentamos o conceito de conjuntos admissíveis que são fundamentais para a elaboração e a solução do problema de controle ótimo intervalar.

3.1.6 Conjuntos admissíveis via CIA

A definição de conjuntos admissíveis é fundamental em teoria de controle ótimo e, para o espaço dos números reais, ela foi definida na Seção 2.1.4.

Aqui mantemos o conceito de conjuntos intervalares admissíveis (ver Seção 2.1.4) porém, de acordo com a CIA, para todo $U_k \in U_{ad}$, U_{ad} controle intervalar admissível, a função restrita associada $U_k(\Lambda) \in \mathbb{R}^m$ para todo $\Lambda \in [0, 1]$.

O mesmo ocorre com os estados intervalares admissíveis, ou seja, do ponto de vista da aritmética intervalar restrita, $X_k \in X_{ad}$, X_{ad} estado intervalar admissível, implica que a equação $X_{k+1}(\Lambda) = F_k(X_k(\Lambda), U_k(\Lambda))$ com condição inicial $X_0(\Lambda)$ e $U_k(\Lambda) \in \mathbb{R}^m$ deva ser satisfeita para todo $\Lambda \in [0, 1]$ e $k = 0, 1, \dots, N-1$.

3.2 ABORDAGEM DO PROBLEMA DE CONTROLE ÓTIMO INTERVALAR EM TEMPO DISCRETO VIA CIA

O problema de controle ótimo intervalar em tempo discreto foi apresentado em Campos et al. (2017) e também inicialmente no Capítulo 2, Seção 2.2. Em Campos et al. (2017) e no Capítulo 2 foi utilizada SLCIA para a solução do problema. O objetivo desse capítulo é resolver o PCOID com CIA uma vez que essa aritmética é mais geral.

Assim o funcional intervalar $C(X, U)$ deve ser comparado de acordo com a relação de ordem para a CIA, relação de ordem esta apresentada na Seção 3.1.2. O conceito de solução intervalar ótima para o PCOID segue da definição a seguir.

Definição 19 (CAMPOS et al., 2018). *Seja $(X, U) \in X_{ad} \times U_{ad}$ um processo intervalar admissível. Dizemos que $(X^*, U^*) \in X_{ad} \times U_{ad}$, sendo $X^* = (X_0^*, X_1^*, \dots, X_N^*)$ e $U^* = (U_0^*, U_1^*, \dots, U_{N-1}^*)$, é solução intervalar ótima para o problema de controle ótimo intervalar em tempo discreto se não existem vetores intervalares admissíveis (X, U) de modo que*

$$C(X, U) <_{CIA} C(X^*, U^*).$$

O custo $C(X^, U^*)$ é chamado de custo intervalar ótimo para o problema de controle ótimo intervalar em tempo discreto.*

Resolver o PCOID usando CIA implica em resolver o problema de controle ótimo intervalar em tempo discreto associado, e que é denotado por PCOID2. Escrevendo as respectivas funções restritas associadas para cada expressão intervalar do PCOID, conforme CIA, temos que o PCOID2 é dado por

$$\min C(X(\Lambda), U(\Lambda)) := G_N(X_N(\Lambda)) + \sum_{k=0}^{N-1} G_k(X_k(\Lambda), U_k(\Lambda))$$

e que é regido pela equação a diferença

$$X_{k+1}(\Lambda) = F_k(X_k(\Lambda), U_k(\Lambda)), \quad (6)$$

sendo que $X_k(\Lambda) \in \mathbb{R}^n$ denota o estado e $U_k(\Lambda) \in \mathbb{R}^m$ o controle para $k = 0, 1, \dots, N-1$ e para todo $\Lambda \in [0, 1]$. Note que N corresponde ao número de vezes em que o controle é aplicado e a equação dinâmica (6) está sujeita à condição inicial, que poderá ser um número real ou um intervalo reescrito conforme CIA. Para todo $\Lambda \in [0, 1]$ fixado temos um problema clássico a ser resolvido; aqui utilizamos a programação dinâmica como técnica de solução.

O conceito de solução para o PCOID2, adaptado para a CIA, segue na definição abaixo.

Definição 20 (CAMPOS et al., 2018). *Seja $(X(\Lambda), U(\Lambda)) \in S_{ad} \times C_{ad}$ um processo admissível para todo $\Lambda \in [0, 1]$. Dizemos que $(X^*(\Lambda), U^*(\Lambda))$ é solução ótima para o PCOID2 se não existem $(X(\Lambda), U(\Lambda))$ admissíveis de modo que $C(X(\Lambda), U(\Lambda)) < C(X^*(\Lambda), U^*(\Lambda))$ para todo $\Lambda \in [0, 1]$. Desta forma, o custo ótimo é dado por $C(X^*(\Lambda), U^*(\Lambda))$.*

Abaixo enunciamos um resultado fundamental para esse capítulo. O resultado mostra a equivalência de solução do PCOID e PCOID2.

Proposição 3 (CAMPOS et al., 2018). *O processo intervalar ótimo admissível $(X^*, U^*) \in X_{ad} \times U_{ad}$ é solução do PCOID se, e somente se, $(X^*(\Lambda), U^*(\Lambda)) \in S_{ad} \times C_{ad}$, para todo $\Lambda \in [0, 1]$, for solução do PCOID2.*

Prova 4. De fato, seja (X^*, U^*) o processo intervalar ótimo admissível do PCOID e suponha que $(X^*(\Lambda), U^*(\Lambda))$ não seja ótima para o PCOID2. Então existe um processo admissível $(X(\Lambda), U(\Lambda))$ tal que

$$C(X(\Lambda), U(\Lambda)) < C(X^*(\Lambda), U^*(\Lambda))$$

para todo $\Lambda \in [0, 1]$ e que equivale a escrever $C(X, U) <_{CIA} C(X^*, U^*)$. Isto contradiz o fato de (X^*, U^*) ser o processo intervalar ótimo admissível para o PCOID.

Reciprocamente, seja $(X^*(\Lambda), U^*(\Lambda))$ o processo ótimo admissível para o PCOID2 e suponha que (X^*, U^*) não seja ótima para o PCOID. Logo, existe um processo intervalar admissível (X, U) tal que

$$C(X, U) <_{CIA} C(X^*, U^*)$$

o que implica em

$$C(X(\Lambda), U(\Lambda)) < C(X^*(\Lambda), U^*(\Lambda))$$

para todo $\Lambda \in [0, 1]$. Isto contradiz o fato de $(X^*(\Lambda), U^*(\Lambda))$ ser o processo ótimo admissível para o PCOID2.

□

Resolvendo o PCOID2 devemos retornar a solução para o espaço dos intervalos. Fazemos isso de acordo com a definição a seguir.

Definição 21 (CAMPOS et al., 2018). *O estado intervalar ótimo X^* é definido por*

$$X^* = \left[\min_{0 \leq \Lambda \leq 1} X^*(\Lambda), \max_{0 \leq \Lambda \leq 1} X^*(\Lambda) \right]$$

desde que o mínimo e máximo existam.

Da mesma forma, definimos o controle intervalar ótimo. Logo, o controle intervalar ótimo é

$$U^* = \left[\min_{0 \leq \Lambda \leq 1} U^*(\Lambda), \max_{0 \leq \Lambda \leq 1} U^*(\Lambda) \right]$$

desde que o mínimo e máximo existam.

O funcional intervalar ótimo é conseqüentemente definido como

$$C(X^*, U^*) = \left[\min_{0 \leq \Lambda \leq 1} C(X^*(\Lambda), U^*(\Lambda)), \max_{0 \leq \Lambda \leq 1} C(X^*(\Lambda), U^*(\Lambda)) \right]$$

desde que o mínimo e máximo existam.

Para concluir esta seção seguem algumas observações.

Observação 24. *De maneira análoga ao problema de minimização, temos os conceitos e as definições para o problema de maximização.*

Observação 25. *Se as funções a serem minimizadas a cada estágio k são parametrizadas em Λ e estritamente convexas para todo $\Lambda \in [0, 1]$, então a solução é ótima para o PCOID2 e conseqüentemente temos a solução ótima para o PCOID de acordo com a Proposição 3. Além disso, a convexidade da solução do PCOID2 garante a unicidade da solução do PCOID2 para todo $\Lambda \in [0, 1]$ fixado e conseqüentemente a unicidade da solução intervalar para o PCOID.*

Observação 26. *As expressões resultantes no PCOID2 a cada estágio, em função de Λ , devem ser contínuas para garantir a existência de mínimo e máximo e assim encontrar a solução intervalar para o PCOID.*

3.3 ABORDAGEM DA PROGRAMAÇÃO DINÂMICA INTERVALAR VIA CIA

O princípio de otimalidade intervalar que fundamenta a programação dinâmica intervalar foi apresentada em Campos et al. (2017). Na abordagem proposta naquele trabalho, Campos et al. (2017) utilizou a aritmética intervalar restrita de níveis simples. Neste capítulo, porém, ilustramos a abordagem conforme a aritmética intervalar restrita.

3.3.1 O princípio de otimalidade intervalar via CIA

A seguir demonstramos o princípio de otimalidade intervalar usando CIA.

De fato, para demonstrar o princípio de otimalidade intervalar usando a aritmética intervalar restrita consideramos o funcional intervalar $J_{X_0X_1\dots X_{N-1}X_N}$ reescrito como $J_{X_0X_1\dots X_{N-1}X_N}(\Lambda)$ para todo $\Lambda \in [0, 1]$. O mesmo pode ser feito com o funcional intervalar $J_{X_0X_1\dots X_{N-1}XX_N}$.

Suponhamos então que $X_{N-1}X_N$ não é a trajetória intervalar ótima de X_{N-1} a X_N . Logo, existe uma outra trajetória intervalar $X_{N-1}XX_N$ de modo que, escrita conforme CIA, obtemos

$$J_{X_{N-1}XX_N}(\Lambda) < J_{X_{N-1}X_N}(\Lambda), \Lambda \in [0, 1].$$

Utilizando a desigualdade acima obtemos

$$\begin{aligned} J_{X_0X_1\dots X_{N-1}X_N}(\Lambda) &= J_{X_0X_1\dots X_{N-1}}(\Lambda) + J_{X_{N-1}X_N}(\Lambda) > J_{X_0X_1\dots X_{N-1}}(\Lambda) + J_{X_{N-1}XX_N}(\Lambda) \\ &= J_{X_0X_1\dots X_{N-1}XX_N}(\Lambda) \end{aligned}$$

para todo $\Lambda \in [0, 1]$ fixado e, portanto, segue que

$$J_{X_0X_1\dots X_{N-1}XX_N} <_{CIA} J_{X_0X_1\dots X_{N-1}X_N}.$$

Isso contradiz a hipótese de $J_{X_0X_1\dots X_{N-1}X_N}$ ser a trajetória intervalar ótima de X_0 a X_N .

A seguir analisamos novamente o algoritmo de programação dinâmica intervalar via CIA.

3.3.2 O algoritmo de programação dinâmica intervalar via CIA

Aqui demonstramos o Teorema 1 utilizando CIA.

De fato, considere inicialmente o algoritmo de programação dinâmica intervalar reescrito de acordo com a CIA.

Agora, continuando a demonstração do Teorema 1 via CIA, denotamos o conjunto de controles admissíveis por $\{U_0(\Lambda), U_1(\Lambda), \dots, U_{N-1}(\Lambda)\}$ para todo $\Lambda \in [0, 1]$ e denotamos por $\{U_k(\Lambda), U_{k+1}(\Lambda), \dots, U_{N-1}(\Lambda)\}$, para todo $\Lambda \in [0, 1]$, o conjunto de controles admissíveis do instante k ao instante final $N - 1$.

Logo, para $k = 0, 1, \dots, N - 1$, seja $J_k^*(X_k(\Lambda))$, para todo $\Lambda \in [0, 1]$, o custo ótimo para os $(N - k)$ -estágios do problema que se inicia no estado $X_k(\Lambda)$ e período k e termina no período N . De outra forma, escrevemos

$$J_k^*(X_k(\Lambda)) = \min_{\{U_k(\Lambda), U_{k+1}(\Lambda), \dots, U_{N-1}(\Lambda)\}} \left(G_N(X_N(\Lambda)) + \sum_{i=k}^{N-1} G_i(X_i(\Lambda), U_i(\Lambda)) \right), \Lambda \in [0, 1].$$

Para $k = N$, definimos $J_N^*(X_N(\Lambda)) = G_N(X_N(\Lambda))$ para todo $\Lambda \in [0, 1]$.

Pelo princípio de indução o objetivo é mostrar que as funções de custo ótimo J_k^* são exatamente as funções J_k calculadas pelo algoritmo de programação dinâmica para todo k . É cabível

o uso do princípio de indução matemática nesta demonstração envolvendo a CIA uma vez que, para todo $\Lambda \in [0, 1]$ fixado, temos o problema clássico.

Assim, temos que $J_N^*(X_N(\Lambda)) = G_N(X_N(\Lambda)) = J_N(X_N(\Lambda))$ para todo $\Lambda \in [0, 1]$. Isto consequentemente acarreta $J_N^*(X_N) = G_N(X_N) = J_N(X_N)$.

Pelo princípio de indução, suponhamos que a hipótese de indução valha para $k + 1$, ou seja, suponhamos que a função custo ótimo J_{k+1}^* seja dada exatamente pela função J_{k+1} calculada pelo algoritmo de programação dinâmica, ou seja, temos

$$J_{k+1}^*(X_{k+1}(\Lambda)) = J_{k+1}(X_{k+1}(\Lambda)), \Lambda \in [0, 1].$$

Vamos mostrar que a hipótese é válida para k .

Para $X_k(\Lambda)$ fixo, $X_k(\Lambda) \in S_{ad}$, para todo $\Lambda \in [0, 1]$, temos pela definição que

$$\begin{aligned} J_k^*(X_k(\Lambda)) &= \min_{\{U_k(\Lambda), U_{k+1}(\Lambda), \dots, U_{N-1}(\Lambda)\}} \left(G_N(X_N(\Lambda)) + \sum_{i=k}^{N-1} G_i(X_i(\Lambda), U_i(\Lambda)) \right) \\ &= \min_{U_k(\Lambda), \{U_{k+1}(\Lambda), \dots, U_{N-1}(\Lambda)\}} \left(G_k(X_k(\Lambda), U_k(\Lambda)) + G_N(X_N(\Lambda)) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=k+1}^{N-1} G_i(X_i(\Lambda), U_i(\Lambda)) \right), \end{aligned}$$

para todo $\Lambda \in [0, 1]$.

Como o termo $G_k(X_k(\Lambda), U_k(\Lambda))$ não depende do conjunto de controle $\{U_{k+1}(\Lambda), \dots, U_{N-1}(\Lambda)\}$, segue que

$$\begin{aligned} J_k^*(X_k(\Lambda)) &= \min_{U_k(\Lambda) \in C_{ad}} G_k(X_k(\Lambda), U_k(\Lambda)) \\ &\quad + \min_{\{U_{k+1}(\Lambda), \dots, U_{N-1}(\Lambda)\}} \left(G_N(X_N(\Lambda)) + \sum_{i=k+1}^{N-1} G_i(X_i(\Lambda), U_i(\Lambda)) \right), \end{aligned}$$

para todo $\Lambda \in [0, 1]$.

Segue da definição de custo ótimo e do princípio de otimalidade, isto é, da própria definição de $J_{k+1}^*(X_{k+1}(\Lambda))$, que a partir do instante $k + 1$ obtemos

$$J_k^*(X_k(\Lambda)) = \min_{U_k(\Lambda) \in C_{ad}} \left(G_k(X_k(\Lambda), U_k(\Lambda)) + J_{k+1}^*(F_k(X_k(\Lambda), U_k(\Lambda))) \right),$$

para todo $\Lambda \in [0, 1]$. Isto nos mostra que

$$J_k^*(X_k) = \min_{U_k \in U_{ad}} \left(G_k(X_k, U_k) \oplus J_{k+1}^*(F_k(X_k, U_k)) \right).$$

Sendo válida a hipótese de indução para $k + 1$, obtemos

$$J_k^*(X_k(\Lambda)) = \min_{U_k(\Lambda) \in C_{ad}} (G_k(X_k(\Lambda), U_k(\Lambda)) + J_{k+1}(F_k(X_k(\Lambda), U_k(\Lambda)))) = J_k(X_k(\Lambda)),$$

para todo $\Lambda \in [0, 1]$. Assim obtemos $J_k^*(X_k) = J_k(X_k)$ e conclui a validade do Teorema 1 via CIA.

3.4 EXEMPLOS NUMÉRICOS

A seguir apresentamos alguns exemplos numéricos. No primeiro exemplo apresentamos algumas etapas do processo de solução e também realizamos comparações entre SLCIA e CIA. O segundo exemplo reinterpreta um problema do Capítulo 2 (vide Exemplo numérico 2.4.2) com duas equações dinâmicas e dois controles. Mostramos também a comparação da solução utilizando CIA e SLCIA. Finalizamos a seção com a apresentação de um exemplo com equação dinâmica intervalar não linear. Ilustramos também a solução que minimiza o arrependimento máximo, uma vez que essa solução permite ao usuário implementar uma solução prática para auxiliar na tomada de decisão desde que a solução intervalar fornece a solução mínima e a solução máxima (ou solução inferior e superior, respectivamente).

Os exemplos numéricos foram implementados no software MATLAB 7.4. Além disso, utilizamos um micro-computador com processador Intel Core i5 e 8 GB de memória.

3.4.1 Exemplo numérico 3.4.1

O exemplo a seguir apresenta duas incertezas intervalares, sendo que uma delas é inserida no funcional. Assim, o intervalo que representa a incerteza no funcional ilustra, por exemplo, variações de preços que surgem comumente em problemas reais.

Aqui resolvemos o problema de controle ótimo intervalar utilizando as seguintes aritméticas intervalares: SLCIA e CIA. A solução proposta via SLCIA e CIA são análogas. Também apresentamos algumas etapas do processo de solução para a CIA e posteriormente realizamos comparações entre as soluções dessas duas aritméticas.

3.4.1.1 O problema intervalar

Considere o problema de controle ótimo intervalar em tempo discreto, análogo ao Exemplo numérico 2.4.1, dado por

$$\min C(X, U) := 500 \otimes (X_5 \ominus 150)^2 \oplus \sum_{k=0}^4 [0,8, 1,2] \otimes U_k^2$$

sujeito a

$$X_{k+1} = [0,2, 0,8] \otimes X_k \oplus 0,5 \otimes U_k, k = 0, \dots, 4.$$

sendo X_k o estado intervalar e U_k o controle intervalar para cada período analisado, $k = 0, 1, \dots, 4$. A condição inicial intervalar é $X_0 = 40$ e $C(X, U)$ é o custo intervalar. Aqui $G_N(X_N) = 500 \otimes (X_5 \ominus 150)^2$ e $N = 4$ períodos.

A solução do problema intervalar proposto, conforme as duas aritméticas intervalares, é dada nos procedimentos descritos a seguir.

3.4.1.2 Solução via SLCIA

O processo de solução via SLCIA é análogo ao apresentado no Exemplo numérico 2.4.1, Capítulo 2. Desta maneira apresentamos a solução na Tabela 1.

Tabela 1 - Valores da variável de estado intervalar X e controle intervalar U via SLCIA.

Período	Solução intervalar X	Solução intervalar U
0	[40, 40]	[0,457947, 45,053173]
1	[8,228973, 54,526586]	[2,289735, 56,316464]
2	[2,790662, 71,779501]	[11,448677, 73,445398]
3	[6,282471, 92,621393]	[57,243386, 113,318213]
4	[29,878187, 118,094352]	[109,993026, 286,216931]
5	[149,058928, 149,471995]	–

Fonte: Elaboração do próprio autor.

O funcional intervalar ótimo é [36137,431899, 70517,940312].

3.4.1.3 Solução via CIA

A seguir detalhamos algumas etapas do processo de solução via CIA. Logo, o problema é inicialmente reescrito de acordo com a CIA:

$$\min C(X(\lambda_1, \lambda_2), U(\lambda_1, \lambda_2)) = 500(X_5(\lambda_1, \lambda_2) - 150)^2 + \sum_{k=0}^4 (0,8 + 0,4\lambda_1)U_k(\lambda_1, \lambda_2)^2$$

sujeito a

$$X_{k+1}(\lambda_1, \lambda_2) = (0,2 + 0,6\lambda_2)X_k(\lambda_1, \lambda_2) + 0,5U_k(\lambda_1, \lambda_2), k = 0, \dots, 4,$$

sendo que $X_k(\lambda_1, \lambda_2)$ é a variável de estado com condição inicial igual a $40^\circ C$ e para todo $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$. O controle é $U_k(\lambda_1, \lambda_2)$ e o custo é $C(X(\lambda_1, \lambda_2), U(\lambda_1, \lambda_2))$.

Em seguida realizamos a implementação e a adaptação do algoritmo de programação dinâmica para resolver o problema intervalar no software MATLAB 7.4. A seguir mostramos o cálculo das variáveis de controle intervalar U_0 e U_1 e o cálculo da variável de estado intervalar X_1 .

Para a condição inicial $X_0 = 40^\circ C$ temos que o valor $U_0(\lambda)$ é

$$\begin{aligned} U_0(\lambda) = & -4(3\lambda_1 + 1)^4(972\lambda_1^5 + 1620\lambda_1^4 + 1080\lambda_1^3 + 360\lambda_1^2 \\ & + 60\lambda_1 - 46871) \div (6561\lambda_1^8 + 17496\lambda_1^7 + 38637\lambda_1^6 + 50058\lambda_1^5 \\ & + 86670\lambda_1^4 + 82512\lambda_1^3 + 178002\lambda_1^2 + 101724\lambda_1 + 1250\lambda_2 + 409401). \end{aligned}$$

O valor intervalar U_0 , obtidos agora os valores mínimo e máximo de $U_0(\lambda)$ com o software MATLAB 7.4, corresponde aos valores 0,456553 e 45,111168; e então a solução intervalar ótima é dada por $[0,456553, 45,111168]$.

Para encontrar a variável de estado intervalar X_1 , substituímos a condição inicial igual a $40^\circ C$ e assim obtemos $X_1(\lambda)$ igual a

$$\begin{aligned} X_1(\lambda) = & 50(8748\lambda_1^7 + 20412\lambda_1^6 + 44712\lambda_1^5 + 203715\lambda_1^4 + 300780\lambda_1^3 + 178506\lambda_1^2 \\ & + 600\lambda_1\lambda_2 + 235284\lambda_1 + 200\lambda_2 + 67379) \div (6561\lambda_1^8 + 17496\lambda_1^7 + 38637\lambda_1^6 \\ & + 50058\lambda_1^5 + 86670\lambda_1^4 + 82512\lambda_1^3 + 178002\lambda_1^2 + 101724\lambda_1 + 1250\lambda_2 + 409401). \end{aligned}$$

Esta expressão $X_1(\lambda)$ deve ser minimizada e maximizada. Os valores mínimo e máximo de $X_1(\lambda)$ são 8,228276 e 54,555584, respectivamente.

Substituímos os valores de $X_1(\lambda)$ na expressão $U_1(\lambda)$. Assim, o valor de $U_1(\lambda)$ é

$$\begin{aligned} U_1(\lambda) = & -20(972\lambda_1^5 + 1620\lambda_1^4 + 1080\lambda_1^3 + 360\lambda_1^2 + 60\lambda_1 - 46871)(3\lambda_1 + 1)^3 \\ & \div (6561\lambda_1^8 + 17496\lambda_1^7 + 38637\lambda_1^6 + 50058\lambda_1^5 + 86670\lambda_1^4 + 82512\lambda_1^3 \\ & + 178002\lambda_1^2 + 101724\lambda_1 + 1250\lambda_2 + 409401). \end{aligned}$$

Devemos obter os valores mínimo e máximo para a expressão $U_1(\lambda)$. O valor mínimo para $U_1(\lambda)$ é 2,282765 e o valor máximo é 56,388957. Esse mesmo processo é realizado para encontrar os demais valores de estado e de controle intervalares.

A Tabela 2 ilustra a solução intervalar para o problema proposto via CIA.

Tabela 2 - Valores da variável de estado intervalar X e controle intervalar U via CIA.

Período	Solução intervalar X	Solução intervalar U
0	[40, 40]	[0,456553, 45,111168]
1	[8,228276, 54,555584]	[2,282765, 56,388957]
2	[2,787038, 71,838945]	[11,413828, 73,547463]
3	[6,264321, 92,714264]	[57,069141, 113,467367]
4	[29,787435, 118,225273]	[109,993026, 286,216931]
5	[148,630347, 149,647547]	–

Fonte: Elaboração do próprio autor.

O funcional intervalar é obtido realizando a minimização e maximização da função dada por

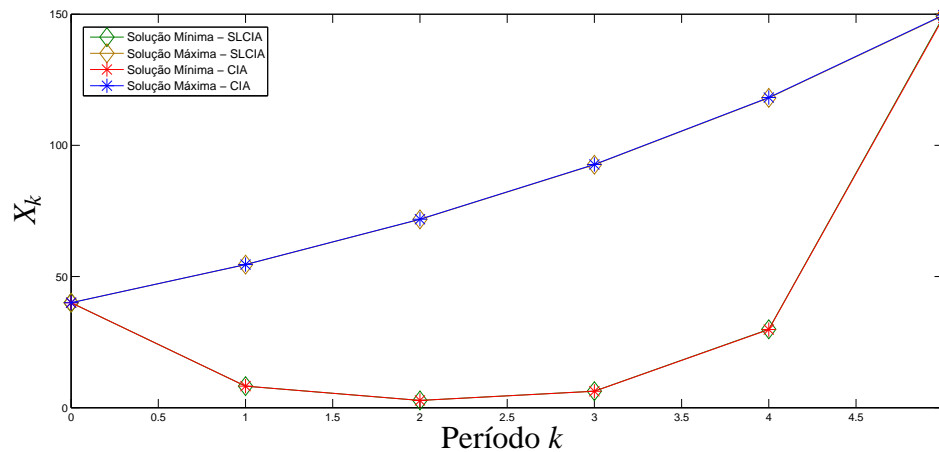
$$\begin{aligned}
C(\lambda_1, \lambda_2) = & (0,1415422452 \times 10^{16} \lambda_1 \lambda_2 + 0,4654023965 \times 10^{15} \lambda_1^5 + 0,1428139156 \times 10^{16} \lambda_1^4 \\
& + 0,1733190542 \times 10^{16} \lambda_1^3 + 0,4821301100 \times 10^{16} \lambda_1^2 - 0,1258814451 \times 10^{15} \lambda_1^8 \\
& + 0,1501031342 \times 10^{14} \lambda_1^7 + 0,4886062045 \times 10^{15} \lambda_1^6 + 0,2831024889 \times 10^{16} \lambda_1 \\
& + 0,5791369293 \times 10^{16} \lambda_2 + 0,3573405883 \times 10^{13} \lambda_1^{15} + 0,6548305462 \times 10^{13} \lambda_1^{14} \\
& + 0,2573119981 \times 10^{13} \lambda_1^{13} - 0,1829841325 \times 10^{14} \lambda_1^{12} - 0,6740908978 \times 10^{14} \lambda_1^{11} \\
& - 0,1312657735 \times 10^{15} \lambda_1^{10} - 0,2204120808 \times 10^{15} \lambda_1^9 + 0,1757512513 \times 10^{14} \lambda_2^2 \\
& + 0,7846211930 \times 10^{12} \lambda_1^{16} \lambda_2 + 0,2380311485 \times 10^{12} \lambda_1^{17} \lambda_2 + 0,3967185808 \times 10^{11} \lambda_1^{18} \lambda_2 \\
& + 0,1151243809 \times 10^{17} + 0,1786702942 \times 10^{13} \lambda_1^{15} \lambda_2 + 0,3274152730 \times 10^{13} \lambda_1^{14} \lambda_2 \\
& + 0,1286559989 \times 10^{13} \lambda_1^{13} \lambda_2 - 0,9149206627 \times 10^{13} \lambda_1^{12} \lambda_2 + 7558272000,0 \lambda_1^{10} \lambda_2^2 \\
& + 0,2519424000 \times 10^{11} \lambda_1^9 \lambda_2^2 + 0,3779136000 \times 10^{11} \lambda_1^8 \lambda_2^2 + 0,3359232000 \times 10^{11} \lambda_1^7 \lambda_2^2 \\
& + 0,1959552000 \times 10^{11} \lambda_1^6 \lambda_2^2 - 0,1212822720 \times 10^{13} \lambda_1^4 \lambda_2^2 + 0,7116439320 \times 10^{15} \lambda_1^4 \lambda_2 \\
& - 0,8095852800 \times 10^{12} \lambda_1^3 \lambda_2^2 + 0,8649761002 \times 10^{15} \lambda_1^3 \lambda_2 - 0,2699481600 \times 10^{12} \lambda_1^2 \lambda_2^2 \\
& + 0,2410110653 \times 10^{16} \lambda_1^2 \lambda_2 - 0,4499616000 \times 10^{11} \lambda_1 \lambda_2^2 - 0,3370454488 \times 10^{14} \lambda_1^{11} \lambda_2 \\
& - 0,6561777024 \times 10^{14} \lambda_1^{10} \lambda_2 - 0,1101556519 \times 10^{15} \lambda_1^9 \lambda_2 - 0,6286513990 \times 10^{14} \lambda_1^8 \lambda_2 \\
& + 0,7572341314 \times 10^{13} \lambda_1^7 \lambda_2 + 0,2443422931 \times 10^{15} \lambda_1^6 \lambda_2 - 0,7211617920 \times 10^{12} \lambda_1^5 \lambda_2^2 \\
& + 0,2312588744 \times 10^{15} \lambda_1^5 \lambda_2 + 0,7934371614 \times 10^{11} \lambda_1^{18} + 0,4760622968 \times 10^{12} \lambda_1^{17} \\
& + 0,1569242386 \times 10^{13} \lambda_1^{16}) \div (6561,0 \lambda_1^8 + 17496,0 \lambda_1^7 + 38637,0 \lambda_1^6 + 50058,0 \lambda_1^5 \\
& + 86670,0 \lambda_1^4 + 82512,0 \lambda_1^3 + 178002,0 \lambda_1^2 + 101724,0 \lambda_1 + 1250,0 \lambda_2 + 409401,0)^2.
\end{aligned}$$

Logo, o funcional intervalar ótimo é [24122,633248, 102715,688765].

3.4.1.4 Solução gráfica e comparações das soluções

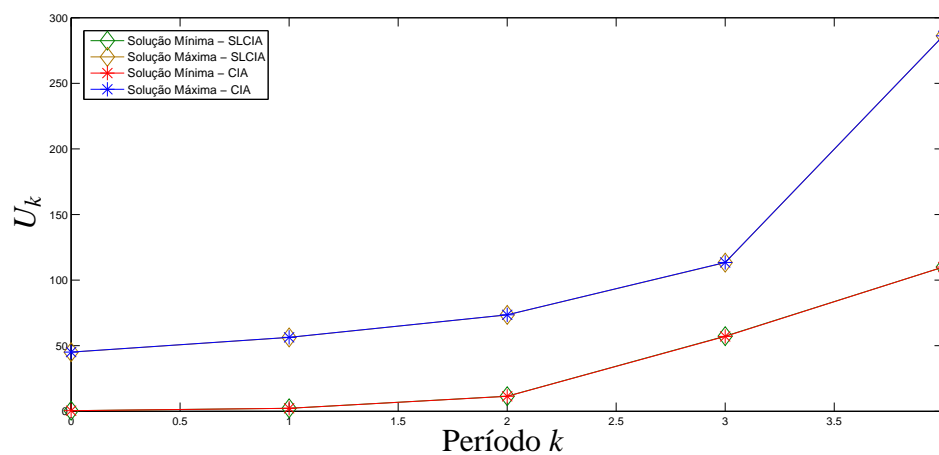
Segue abaixo a ilustração gráfica para a variável de estado intervalar X e controle intervalar U considerando as duas aritméticas intervalares propostas.

Figura 18 - Estado intervalar X para o Exemplo numérico 3.4.1.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 19 - Controle intervalar U para o Exemplo numérico 3.4.1.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Analisando os métodos de soluções propostos, tanto a SLCIA quanto a CIA seguem basicamente o mesmo processo. Entretanto, a complexidade computacional é maior quando resolvemos o problema utilizando CIA. Por outro lado, todas as possibilidades de soluções ótimas estão presentes na solução intervalar proposta com o uso da CIA. Além disso, como o fator custo é

muito importante para a tomada de decisão, a CIA ilustra com mais clareza a possibilidade de ter um valor pequeno ou grande no funcional intervalar.

Notemos ainda que a largura do funcional intervalar do problema resolvido utilizando CIA é muito maior quando comparada com o resultado utilizando SLCIA, e isso ocorre pois utilizamos um intervalo no funcional do problema. Tal fato corresponde ao esperado pois a SLCIA varia os intervalos de forma dependente. A trajetória do estado e controle intervalares praticamente são os mesmos para as duas situações propostas.

3.4.2 Exemplo numérico 3.4.2

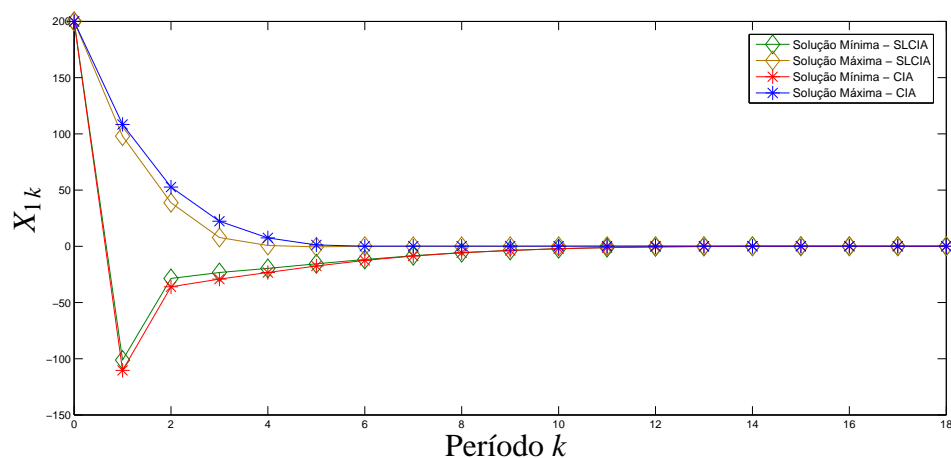
O Exemplo numérico 2.4.2 foi apresentado no Capítulo 2. Entretanto, no Capítulo 2 utilizamos SLCIA para a sua resolução. Aqui retornamos a este problema (vide Exemplo numérico 2.4.2) para ilustrar e comparar a solução utilizando SLCIA e CIA. Neste contexto destacamos alguns aspectos como o tempo computacional de processamento e esforço computacional.

Assim, para mesmo período considerado ($N = 18$) temos que o tempo de processamento para resolver o problema de controle ótimo intervalar via CIA é de aproximadamente 45,5 minutos. Além disso, consideramos λ_1 e λ_2 fixos e com 20 partições de tamanho iguais a 0,05 no intervalo $[0, 1]$ para os valores de λ_1 e λ_2 .

O custo intervalar ótimo para o problema é $[50719,1442, 103148,2230]$.

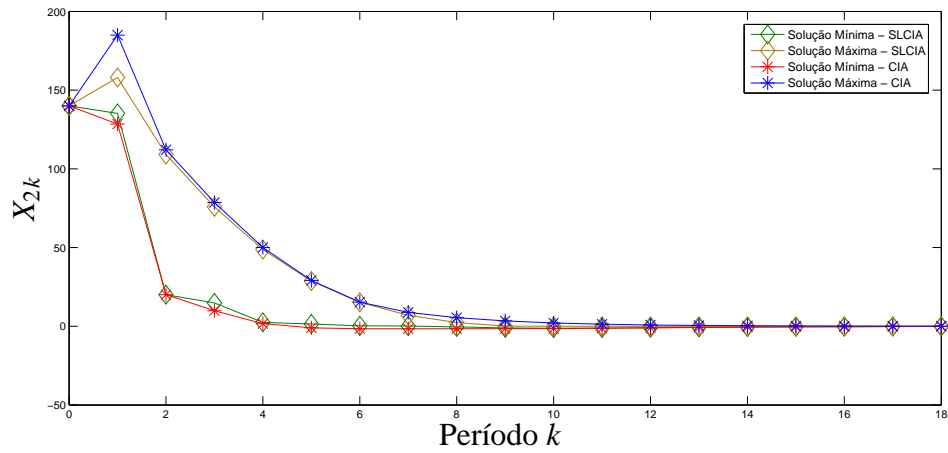
A solução gráfica para a SLCIA e CIA está exposta nas figuras a seguir. Assim, as Figuras 20 e 21 representam o estado intervalar ótimo. O controle intervalar ótimo é descrito nas Figuras 22 e 23.

Figura 20 - Estado intervalar X_1 para o Exemplo numérico 3.4.2.



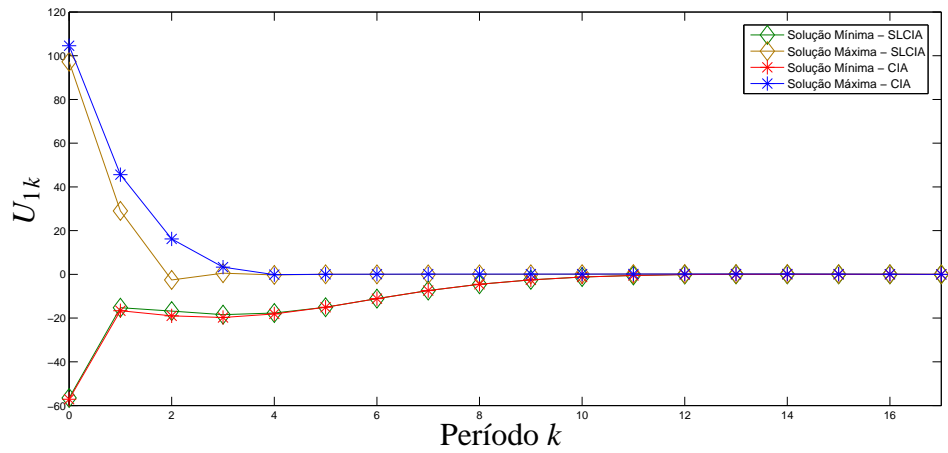
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 21 - Estado intervalar X_2 para o Exemplo numérico 3.4.2.



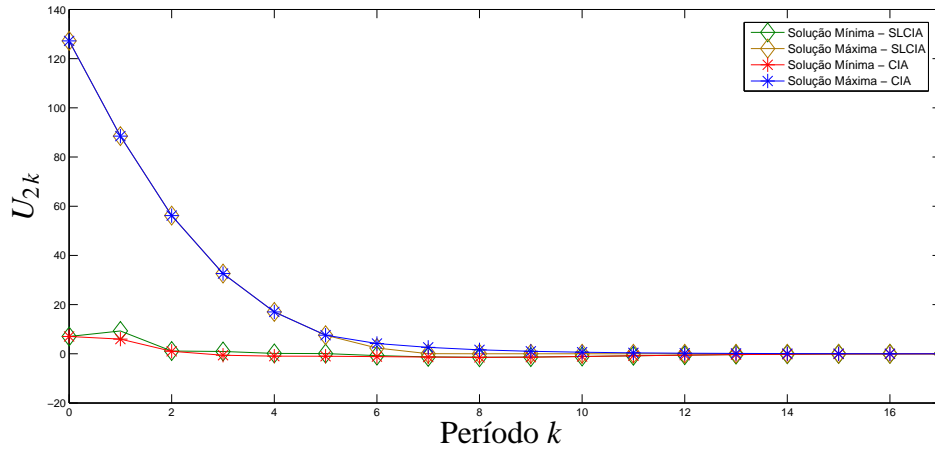
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 22 - Controle intervalar U_1 para o Exemplo numérico 3.4.2.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 23 - Controle intervalar U_2 para o Exemplo numérico 3.4.2.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Analisando a solução do Exemplo numérico 3.4.2 temos que o comportamento é qualitativamente similar para as duas abordagens. Além disso, os valores para o custo intervalar são aproximadamente iguais. Considerando o grande esforço computacional para a solução utilizando CIA, podemos inferir que a solução utilizando SLCIA se torna mais atraente para este problema e possivelmente viável se analisamos o tempo e o esforço computacional muito menores.

3.4.3 Exemplo numérico 3.4.3

Esse último exemplo apresenta um problema de controle ótimo intervalar em tempo discreto com equação dinâmica intervalar não linear (CAMPOS et al., 2018). Além disso, ilustramos a solução que minimiza o arrendimento máximo.

O problema de controle ótimo intervalar proposto é dado por

$$\min C(X,U) := \sum_{k=0}^N 1,4 \otimes X_{1k}^2 \oplus 0,7 \otimes U_k^2$$

sujeito a

$$\begin{cases} X_{1k+1} = [1,0, 1,4] \otimes X_{1k} \oplus 0,5 \otimes U_k \\ X_{2k+1} = -1,0 \otimes X_{1k} \oplus [0,6, 1,0] \otimes X_{1k} \otimes X_{2k} \end{cases}$$

sendo que X_k é o estado intervalar e U_k é o controle intervalar para cada período analisado, $k = 0, 1, \dots, N$. A condição inicial é $X_{10} = 8$ e $X_{20} = 6$. Tomamos $N = 12$ períodos.

O problema é resolvido em aproximadamente 81 minutos e consideramos λ_1 e λ_2 fixos com 20 partições de tamanho iguais a 0,05 no intervalo $[0, 1]$.

O custo intervalar ótimo para o problema é $[179,1999, 312,9398]$.

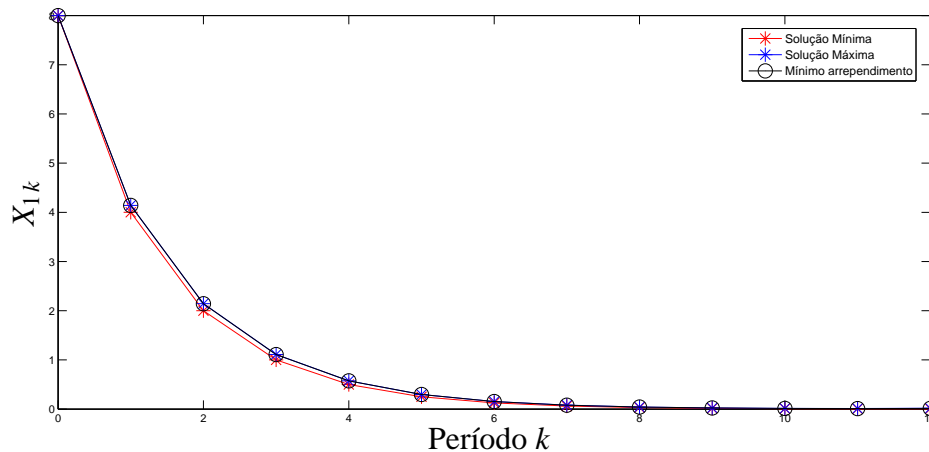
Nesse exemplo também obtemos a solução que minimiza o arrependimento máximo. O método para encontrar o mínimo arrependimento é novamente análogo ao apresentado em Thipwiwatpotjana (2010) e Campos et al. (2017).

O valor do mínimo arrependimento é 133,7399. Além disso, o valor do mínimo arrependimento é obtido de acordo com as trajetórias descritas nas Figuras 24, 25 e 26. O custo dado pela solução que minimiza o arrependimento máximo é 312,9398.

Uma análise interessante nesse exemplo é que o funcional do problema não apresenta a variável intervalar X_2 e a variável intervalar X_2 não depende de X_1 . Logo, variações de X_2 não interferem diretamente nem indiretamente no custo. Do ponto de vista da solução do problema de controle ótimo intervalar via CIA, variações no intervalo $[0,6, 1,0]$ na segunda equação dinâmica mantém o mesmo valor do funcional. Assim, temos mais de uma trajetória que nos leva ao valor que minimiza o arrependimento máximo e nas Figuras 24, 25 e 26 ilustramos apenas uma dessas trajetórias.

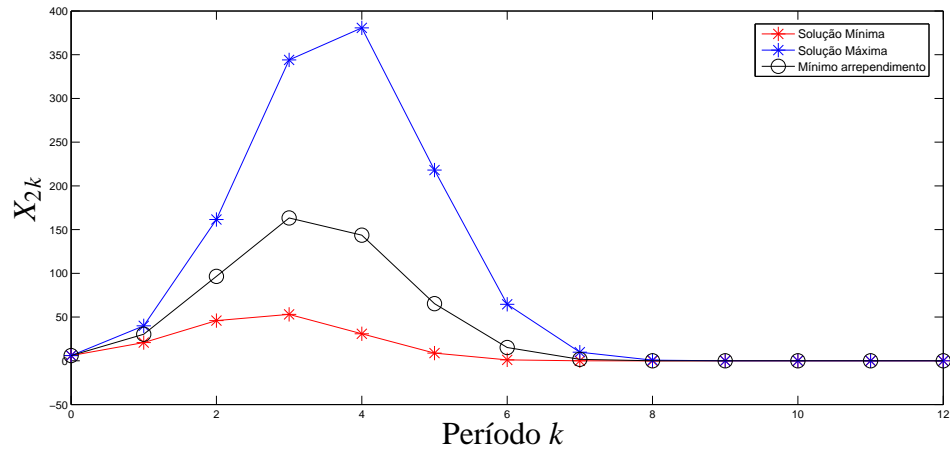
As Figuras 24, 25 e 26 também mostram a solução gráfica para a variável de estado intervalar X_1 e X_2 e variável de controle intervalar U , respectivamente.

Figura 24 - Estado intervalar X_1 para o Exemplo numérico 3.4.3 com a solução que minimiza o arrependimento máximo.



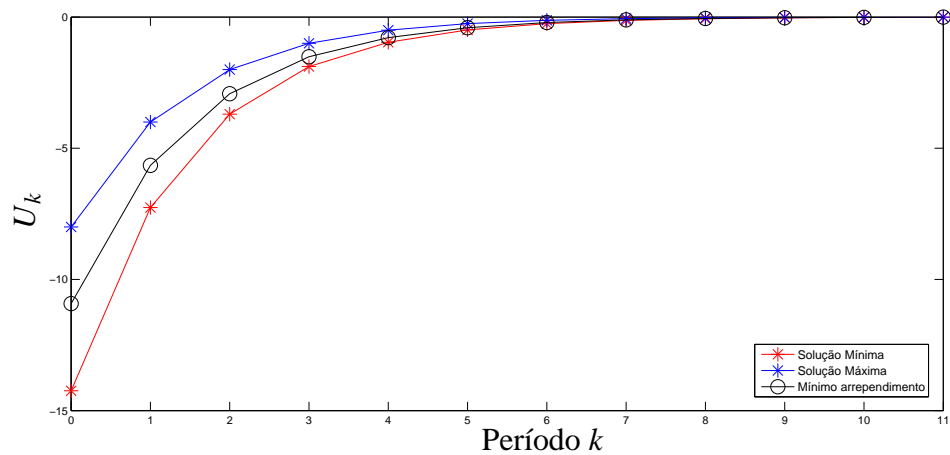
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 25 - Estado intervalar X_2 para o Exemplo numérico 3.4.3 com a solução que minimiza o arrependimento máximo.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 26 - Controle intervalar U para o Exemplo numérico 3.4.3 com a solução que minimiza o arrependimento máximo.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Analisando a solução mostrada nas Figuras 24, 25 e 26 percebemos que o estado e controle intervalares tendem a zero. Além disso, o estado intervalar X_1 e o controle intervalar U apresentam um comportamento sem grandes variações e tendem a zero por volta do oitavo período. Já o estado intervalar X_2 apresenta grandes variações por volta do quarto período e tende a zero também por volta do oitavo período.

As figuras também mostram uma trajetória que fornece o mínimo arrependimento. Nesta, o primeiro estado considerado (ver Figura 24) mostra que a trajetória que fornece o mínimo

arrependimento está próxima ao extremo superior da solução intervalar X_1 . Para o segundo estado considerado, a Figura 25 mostra que a trajetória que fornece o mínimo arrependimento não está próxima aos extremos da solução intervalar X_2 até o oitavo período. A trajetória que fornece o mínimo arrependimento para a variável de controle U também não está próxima aos extremos da solução intervalar (ver Figura 26) até o oitavo período.

3.5 COMENTÁRIOS

A proposta de solução para o problema de controle ótimo intervalar em tempo discreto utilizando a aritmética intervalar restrita foi bem sucedida. Embora tenhamos um processo de solução que demanda muito esforço computacional e isso se reflita no tempo de processamento da solução, métodos mais eficientes podem ser propostos para melhorar a eficácia do método desenvolvido nesse capítulo ou mesmo avanços computacionais podem surgir nos próximos anos o que viabilizaria o método proposto para problemas que possuem muitas variáveis. Além disso, ao contrário da solução do problema de controle ótimo intervalar em tempo discreto via SLCIA, a solução via CIA é importante pois ela abrange mais possibilidades de soluções ótimas para o problema de controle ótimo intervalar proposto no Capítulo 2.

Nos exemplos numéricos a comparação da solução do problema de controle ótimo intervalar usando as aritméticas intervalares (SLCIA e CIA) mostram que ambos possuem trajetórias próximas uma à outra. É interessante destacar que a solução proposta pela SLCIA está contida na solução realizada pela CIA; e isso inclui trajetórias intervalares e custo intervalar. Por outro lado, um comportamento semelhante para ambas as situações pode não ocorrer ou podemos ter a largura do funcional intervalar muito maior para a CIA do que para a SLCIA (vide Exemplo numérico 3.4.1), e isso sem dúvida torna a solução utilizando CIA mais interessante do ponto de vista da tomada de decisão sob incerteza por um usuário.

Também ilustramos a solução que minimiza o arrependimento máximo e que fornece ao usuário uma possibilidade de implementação prática. Isso foi feito para um exemplo numérico. Destacamos ainda que existem mais trajetórias que fornecem a solução que minimiza o arrependimento máximo para o Exemplo numérico 3.4.3.

Portanto, conseguimos estender o processo de solução de problemas de controle ótimo intervalar em tempo discreto para a CIA.

4 PROBLEMAS DE CONTROLE ÓTIMO INTERVALAR FUZZY EM TEMPO DISCRETO

Nesse capítulo propomos o problema de controle ótimo intervalar fuzzy em tempo discreto via aritmética fuzzy restrita de níveis simples. Assim, inicialmente definimos funções intervalares fuzzy para permitir lidar com a dinâmica de uma equação a diferença intervalar fuzzy. Além disso, desenvolvemos a programação dinâmica intervalar fuzzy para obter a solução intervalar fuzzy ótima. Alguns exemplos ilustram a teoria, sendo que a solução prática para o usuário é obtida por meio do método de defuzzificação chamado centro de gravidade.

4.1 CONCEITOS BÁSICOS

Nesta seção apresentamos os fundamentos necessários para o desenvolvimento desse capítulo. Particularmente, descrevemos conceitos relacionados à aritmética fuzzy restrita de níveis simples.

4.1.1 Aritmética fuzzy restrita de níveis simples

Conforme Bede (2013) números fuzzy generalizam os números clássicos reais. Segundo Chalco-Cano, Lodwick e Bede (2014), um número fuzzy ou intervalo fuzzy possui suporte compacto, é semi-contínuo superiormente, é convexo e é normal. Além disso, nessa tese o conjunto de todos os números fuzzy é denotado por $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. Enfatizamos ainda que, a partir dessa seção, os números fuzzy são representados por x enquanto que \bar{x} são elementos do espaço dos números reais.

Um número fuzzy triangular $x = (\bar{a}; \bar{b}; \bar{c})$ é definido via seus r -níveis $x_r = [\bar{a} + r(\bar{b} - \bar{a}), \bar{c} - r(\bar{c} - \bar{b})]$ para todo $r \in [0, 1]$. Esse número fuzzy triangular tem a forma de um triângulo, tendo como base o intervalo $[\bar{a}, \bar{c}]$ e, como único vértice fora dessa base, o ponto $(\bar{b}, 1)$. O ponto $(\bar{b}, 1)$ representa a normalidade do número fuzzy. Detalhes sobre lógica fuzzy podem ser encontrados em Barros e Bassanezi (2010) e Bede (2013).

Abaixo apresentamos o importante teorema da caracterização de Negoita-Ralescu. Esse resultado faz a conexão entre a aritmética fuzzy e a intervalar (BEDE, 2013).

Teorema 2 (CHALCO-CANO; LODWICK; BEDE, 2014). *Se $u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ é um número fuzzy e u_r são seus conjuntos r -níveis, então:*

- a) u_r é um intervalo fechado representado por $u_r = [\underline{u}_r, \bar{u}_r]$ para qualquer $r \in [0, 1]$;

b) Se $0 \leq r_1 \leq r_2 \leq 1$, então $u_{r_2} \subseteq u_{r_1}$;

c) Para qualquer sequência r_n que converge inferiormente para $r \in (0, 1]$, segue que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} u_{r_n} = u_r;$$

d) Para qualquer sequência r_n que converge superiormente para 0 segue que

$$cl \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} u_{r_n} \right) = u_0,$$

sendo que “cl” denota o fecho de um conjunto.

Reciprocamente, se uma família de intervalos u_r , $r \in [0, 1]$, satisfaz as condições a) – d) então u_r , $r \in [0, 1]$, determina unicamente um número fuzzy.

A demonstração pode ser encontrada em Bede (2013).

A definição a seguir relaciona números fuzzy e funções restritas convexas.

Definição 22 (CHALCO-CANO; LODWICK; BEDE, 2014). *Seja $u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ um número fuzzy. Então*

a) *Uma função contínua $u : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ denotada por $u(\lambda, r) = u_r(\lambda)$*

$$\min_{0 \leq \lambda \leq 1} u_r(\lambda) = \underline{u}_r, \quad \max_{0 \leq \lambda \leq 1} u_r(\lambda) = \bar{u}_r, \quad r \in [0, 1],$$

é chamada uma função restrita associada a u ;

b) *Uma função restrita convexa crescente é definida como uma função $u : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$u_r(\lambda) = (1 - \lambda)\underline{u}_r + \lambda\bar{u}_r, \quad 0 \leq \lambda, r \leq 1.$$

As definições e o teorema expostos a seguir fornecem a maneira correta de calcular expressões intervalares fuzzy.

Considere a definição abaixo.

Definição 23 (CHALCO-CANO; LODWICK; BEDE, 2014). *Seja $E(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ uma expressão real. O cálculo de uma expressão correta com operadores fuzzy $E(u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, gerados de E , é executado de acordo com a seguinte regra:*

$$\begin{aligned} E(u_1, u_2, \dots, u_n)_r &= E((u_1)_r, (u_2)_r, \dots, (u_n)_r) \\ &= \left[\min_{0 \leq \lambda \leq 1} E((u_1)_r(\lambda), (u_2)_r(\lambda), \dots, (u_n)_r(\lambda)), \max_{0 \leq \lambda \leq 1} E((u_1)_r(\lambda), (u_2)_r(\lambda), \dots, (u_n)_r(\lambda)) \right], \end{aligned}$$

$r \in [0, 1]$, sendo que $(u_1)_r(\lambda), (u_2)_r(\lambda), \dots, (u_n)_r(\lambda)$ são as funções restritas convexas crescentes para u_1, u_2, \dots, u_n . A família $\{E(u_1, u_2, \dots, u_n)_r\}_{r \in [0, 1]}$ satisfaz as condições do Teorema 2.

A Definição 23 nem sempre define um número fuzzy pois propriedades do Teorema 2 podem não ser satisfeitas (CHALCO-CANO; LODWICK; BEDE, 2014). Desta forma, para contornar esse problema, em Chalco-Cano, Lodwick e Bede (2014) também foi proposto uma generalização do cálculo da expressão fuzzy $E(u_1, u_2, \dots, u_n)_r$. Essa generalização segue na definição e no teorema a seguir.

Definição 24 (CHALCO-CANO; LODWICK; BEDE, 2014). *Considere uma expressão correta real $E(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$. O cálculo generalizado $\tilde{E}(u_1, u_2, \dots, u_n)$ de uma expressão correta com operadores fuzzy $u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ é executado de acordo com a seguinte regra:*

$$\begin{aligned} \tilde{E}(u_1, u_2, \dots, u_n)_r &= \text{co} \left(\text{cl} \bigcup_{\beta \geq r} E((u_1)_{\beta}, (u_2)_{\beta}, \dots, (u_n)_{\beta}) \right) \\ &= \text{co} \left(\text{cl} \bigcup_{\beta \geq r} \left[\min_{0 \leq \lambda \leq 1} E((u_1)_{\beta}(\lambda), (u_2)_{\beta}(\lambda), \dots, (u_n)_{\beta}(\lambda)), \max_{0 \leq \lambda \leq 1} E((u_1)_{\beta}(\lambda), (u_2)_{\beta}(\lambda), \dots, (u_n)_{\beta}(\lambda)) \right] \right), \end{aligned}$$

$r \in [0, 1]$, sendo que $(u_1)_{\beta}(\lambda), (u_2)_{\beta}(\lambda), \dots, (u_n)_{\beta}(\lambda)$ são as funções restritas convexas crescentes associadas a u_1, u_2, \dots, u_n , “co” denota o envoltório convexo e “cl” denota o fecho de um conjunto.

Uma expressão prática para $\tilde{E}(u_1, u_2, \dots, u_n)_r$ pode ser obtida de acordo com o seguinte teorema.

Teorema 3 (CHALCO-CANO; LODWICK; BEDE, 2014). *Seja $E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e considere uma expressão correta real $E(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$. O cálculo generalizado $\tilde{E}(u_1, u_2, \dots, u_n)$ pode ser escrito como*

$$\tilde{E}(u_1, u_2, \dots, u_n)_r = \left[\inf_{\beta \geq r} \min_{0 \leq \lambda \leq 1} E((u_1)_{\beta}(\lambda), (u_2)_{\beta}(\lambda), \dots, (u_n)_{\beta}(\lambda)), \sup_{\beta \geq r} \max_{0 \leq \lambda \leq 1} E((u_1)_{\beta}(\lambda), (u_2)_{\beta}(\lambda), \dots, (u_n)_{\beta}(\lambda)) \right],$$

para qualquer $r \in [0, 1]$.

A demonstração do Teorema 3 é encontrada em Chalco-Cano, Lodwick e Bede (2014); e o teorema a seguir finaliza esta subseção.

Teorema 4 (CHALCO-CANO; LODWICK; BEDE, 2014). *Considere uma expressão correta real $E(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ a qual é uniformemente contínua como uma função $E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Seja $\tilde{E}(u_1, u_2, \dots, u_n)$ como na Definição 24. Então os conjuntos de níveis $\tilde{E}(u_1, u_2, \dots, u_n)_r$ definem um número fuzzy.*

A demonstração do Teorema 4 é encontrada em Chalco-Cano, Lodwick e Bede (2014).

A seguir mostramos uma relação de ordem para comparar números fuzzy baseada em Fard e Ramezanzadeh (2017). Essa relação de ordem é apresentada no contexto da aritmética intervalar restrita de níveis simples.

4.1.2 Relação de ordem entre números fuzzy

A definição a seguir propõe uma relação de ordem entre números fuzzy. Usaremos essa relação para comparar o funcional do problema de controle ótimo intervalar fuzzy em tempo discreto.

Definição 25. A relação de ordem entre dois números fuzzy $a, b \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, segundo a aritmética fuzzy restrita de níveis simples, denotada por \leq_F , é definida por

$$a \leq_F b \text{ se e somente se } a_r \leq_{SL} b_r \text{ para todo } r \in [0, 1].$$

Além disso, $a <_F b$ se e somente se $a \leq_F b$ e $a \neq b$. Aqui \leq_{SL} denota a relação de ordem para intervalos conforme a aritmética intervalar restrita de níveis simples (LEAL, 2015). Ainda, a_r e b_r representam r -níveis dos números fuzzy a e b , respectivamente, para $r \in [0, 1]$.

A próxima subseção aborda conceitos de funções intervalares fuzzy.

4.1.3 Funções intervalares fuzzy

Abaixo segue a definição de uma função fuzzy de Barros e Bassanezi (2010).

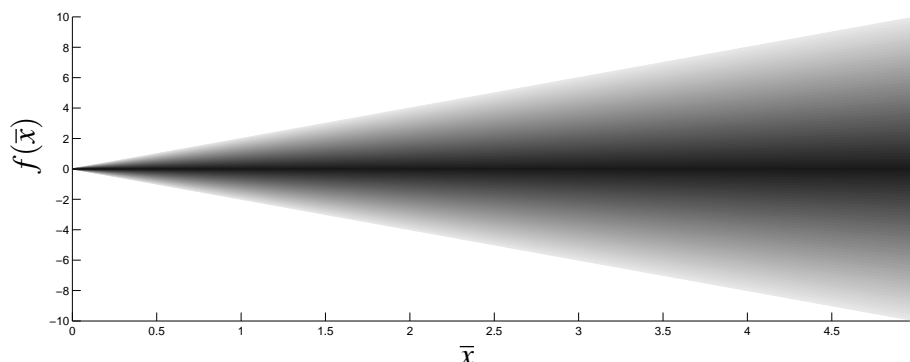
Definição 26 (BARROS; BASSANEZI, 2006). Considere a função definida em um intervalo da reta real I com valores no conjunto dos números fuzzy $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, isto é, considere a função fuzzy $f : I \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. Além disso, a função fuzzy $f : I \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ que associa um número real \bar{x} a um número fuzzy $f(\bar{x})$ está bem definida se, e somente se, para cada $r \in [0, 1]$, existem funções reais

$$f_r^1, f_r^2 : I \rightarrow \mathbb{R}$$

tais que os r -níveis de f são $[f_r^1, f_r^2]$.

Exemplo 18. A função $f : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ dada por $f(\bar{x}) = a\bar{x}$, sendo $a = (-2; 0; 2)$ um número fuzzy triangular e $\bar{x} \in [0, 5] \subset \mathbb{R}$, é uma função fuzzy cuja imagem são números fuzzy. O gráfico a seguir ilustra a situação.

Figura 27 - Gráfico fuzzy para o Exemplo 18.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

O gráfico é simulado no intervalo real $I = [0, 5]$ e a região mais escura do gráfico indica a pertinência próxima a 1. Conseqüentemente, a região mais clara indica pertinência de um ponto \bar{x} próxima a zero.

A Definição 26 aplica-se a funções fuzzy unidimensionais. Além disso, essa definição pode ser estendida para funções intervalares fuzzy de acordo com a definição abaixo.

Definição 27. Considere a função fuzzy $f : I \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. A função fuzzy f , reescrita conforme a definição de função restrita convexa crescente (Definição 22), é dada por $f(\bar{x})_r(\lambda)$, sendo que $0 \leq \lambda, r \leq 1$. Desta forma, segue que

$$f(\bar{x})_r = \left[\inf_{\beta \geq r} \min_{0 \leq \lambda \leq 1} f(\bar{x})_{\beta}(\lambda), \sup_{\beta \geq r} \max_{0 \leq \lambda \leq 1} f(\bar{x})_{\beta}(\lambda) \right]$$

para qualquer $r \in [0, 1]$. Essa é a maneira correta de se operar função intervalar fuzzy e a função $f(\bar{x})_r(\lambda)$ é chamada de função restrita convexa crescente associada a $f(\bar{x})_r$. A família $\{f(\bar{x})_r\}_{r \in [0, 1]}$ satisfaz as condições do Teorema 2.

Observação 27. A notação para as operações intervalares fuzzy corretas serão dadas por $\tilde{\oplus}, \tilde{\ominus}, \tilde{\otimes}$ e $\tilde{\oslash}$ para a soma, a subtração, a multiplicação e a divisão, respectivamente. Além disso, essas operações satisfazem as propriedades apresentadas em Chalco-Cano, Lodwick e Bede (2014).

Exemplo 19. Considere a função intervalar fuzzy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ dada por $f(\bar{x}) = a \tilde{\otimes} \bar{x}$, sendo $a = (-2; 0; 2)$ um número fuzzy triangular e $\bar{x} \in \mathbb{R}$. A função f , reescrita agora conforme a definição de função restrita convexa crescente associada, é dada por $f(\bar{x})_r(\lambda) = a_r(\lambda) \bar{x}$. Sabemos ainda que, para $a = (-2; 0; 2)$, $a_r = [2r - 2, 2 - 2r]$ e sua função restrita convexa crescente é $a_r(\lambda) = (2r - 2) + \lambda(4 - 4r)$ para todo $0 \leq \lambda, r \leq 1$.

Agora, segue que

$$f(\bar{x})_r = \left[\inf_{\beta \geq r} \min_{0 \leq \lambda \leq 1} ((2\beta - 2) + \lambda(4 - 4\beta))\bar{x}, \sup_{\beta \geq r} \max_{0 \leq \lambda \leq 1} ((2\beta - 2) + \lambda(4 - 4\beta))\bar{x} \right]$$

para qualquer $r \in [0, 1]$. Para $r = 0$ e $\bar{x} = 1$ segue que $f(1)_0 = [-2, 2]$; já para $r = 1$ e $\bar{x} = 1$ segue que $f(1)_1 = [0, 0] = 0$.

O exemplo a seguir também ilustra a abordagem proposta.

Exemplo 20. Considere a função intervalar fuzzy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ dada por

$$f(\bar{x}) = (0; 1; 2) \tilde{\otimes} \bar{x} \tilde{\oplus} \bar{x}^2.$$

Sabemos que $a = (0; 1; 2)$ implica em $a_r = [r, 2 - r]$. Assim obtemos a função restrita convexa crescente dada por $a_r(\lambda) = r + \lambda(2 - 2r)$ para todo $0 \leq \lambda, r \leq 1$.

O cálculo correto para se operar a função intervalar fuzzy f é dado por

$$f(\bar{x})_r = \left[\inf_{\beta \geq r} \min_{0 \leq \lambda \leq 1} (\beta + \lambda(2 - 2\beta))\bar{x} + \bar{x}^2, \sup_{\beta \geq r} \max_{0 \leq \lambda \leq 1} (\beta + \lambda(2 - 2\beta))\bar{x} + \bar{x}^2 \right]$$

para qualquer $r \in [0, 1]$. A família $\{f(\bar{x})_r\}_{r \in [0, 1]}$ satisfaz as condições do Teorema 2.

Abaixo apresentamos as definições de funções intervalares fuzzy $f : \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ e $f : \mathbb{R}_{\mathcal{F}}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. Essas definições são importantes pois permitem o cálculo de funções totalmente no contexto fuzzy ao contrário das operações aritméticas via r -níveis usando a aritmética intervalar padrão proposta por Moore (1966).

Definição 28. Uma função $f : \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ é dita função intervalar fuzzy se o seu domínio e seu contradomínio estão em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. Assim, a função intervalar fuzzy associa a cada $x \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ um número fuzzy $f(x) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.

Definição 29. Considere a função $f : \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. A função intervalar fuzzy f , reescrita conforme a definição de função restrita convexa crescente, é dada por $f(x)_r(\lambda)$, sendo que $0 \leq \lambda, r \leq 1$. Desta forma, segue que

$$f(x)_r = \left[\inf_{\beta \geq r} \min_{0 \leq \lambda \leq 1} f(x)_\beta(\lambda), \sup_{\beta \geq r} \max_{0 \leq \lambda \leq 1} f(x)_\beta(\lambda) \right]$$

para qualquer $r \in [0, 1]$. Essa é a maneira correta de se operar função intervalar fuzzy e a função $f(x)_r(\lambda)$ é chamada de função restrita convexa crescente associada a $f(x)_r$. Além disso, a família de intervalos $\{f(x)_r\}_{r \in [0, 1]}$ satisfaz as condições do Teorema 2.

Definição 30. Uma função $f : \mathbb{R}_{\mathcal{F}}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ é dita função intervalar fuzzy de várias variáveis fuzzy a valores fuzzy se o seu domínio está em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}^n$ e seu contradomínio está em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. Uma tal função associa, a cada $x \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}^n$, um número fuzzy $f(x) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.

Os exemplos a seguir ilustram a maneira correta de se operar funções intervalares fuzzy.

Exemplo 21. Considere a função intervalar fuzzy $f : \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ dada por

$$f(x) = 2 \oplus (1; 2; 3) \otimes x.$$

Sabemos que $a = (1; 2; 3)$ implica em $a_r = [r + 1, 3 - r]$. Logo obtemos a função restrita convexa crescente dada por $a_r(\lambda) = (r + 1) + \lambda(2 - 2r)$ para todo $0 \leq \lambda, r \leq 1$.

O cálculo correto para se operar a função intervalar fuzzy f é dado por

$$f(x)_r = \left[\inf_{\beta \geq r} \min_{0 \leq \lambda \leq 1} 2 + ((\beta + 1) + \lambda(2 - 2\beta))x_r(\lambda), \sup_{\beta \geq r} \max_{0 \leq \lambda \leq 1} 2 + ((\beta + 1) + \lambda(2 - 2\beta))x_r(\lambda) \right]$$

para qualquer $r \in [0, 1]$. A família $\{f(x)_r\}_{r \in [0, 1]}$ satisfaz as condições do Teorema 2. Além disso, segue que:

i) Para $r = 0$ e $x = (1; 2; 3)$, o cálculo correto da função é dado por

$$f(1; 2; 3)_0 = \left[\inf_{\beta \geq 0} \min_{0 \leq \lambda \leq 1} 2 + ((\beta + 1) + \lambda(2 - 2\beta))(1 + 2\lambda), \right. \\ \left. \sup_{\beta \geq 0} \max_{0 \leq \lambda \leq 1} 2 + ((\beta + 1) + \lambda(2 - 2\beta))(1 + 2\lambda) \right] = [3, 11];$$

ii) Para $r = 1$ e $x = (1; 2; 3)$, o cálculo correto da função é dado por

$$f(1; 2; 3)_1 = \left[\inf_{\beta \geq 1} \min_{0 \leq \lambda \leq 1} 2 + 2^2, \sup_{\beta \geq 1} \max_{0 \leq \lambda \leq 1} 2 + 2^2 \right] = [6, 6].$$

Exemplo 22. Considere a função intervalar fuzzy $f : \mathbb{R}_{\mathcal{F}}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ dada por

$$f(x, y) = x \oplus (-1; 0; 2) \otimes y.$$

Segue que $a = (-1; 0; 2)$ implica em $a_r = [r - 1, 2 - 2r]$ e conseqüentemente a função restrita convexa crescente é $a_r(\lambda) = (r - 1) + \lambda(3 - 3r)$ para todo $0 \leq \lambda, r \leq 1$.

Logo, o cálculo correto para se operar a função intervalar fuzzy f é dado por

$$f(x, y)_r = \left[\inf_{\beta \geq r} \min_{0 \leq \lambda \leq 1} x_r(\lambda) + ((\beta - 1) + \lambda(3 - 3\beta))y_r(\lambda), \sup_{\beta \geq r} \max_{0 \leq \lambda \leq 1} x_r(\lambda) + ((\beta - 1) + \lambda(3 - 3\beta))y_r(\lambda) \right]$$

para qualquer $r \in [0, 1]$.

Avaliando a função intervalar fuzzy f em $x = (-0,5; 0; 0,5)$ e $y = (2; 4; 5)$, segue que suas funções restritas convexas crescentes são dadas por $x_r(\lambda) = (0,5r - 0,5) + \lambda(1 - r)$ e $y_r(\lambda) = (2r + 2) + \lambda(3 - 3r)$, respectivamente, para todo $0 \leq \lambda, r \leq 1$. Agora, segue que para $r = 0$ e $x = (-0,5; 0; 0,5)$ e $y = (2; 4; 5)$, o cálculo correto da função é dado por

$$f((-0,5; 0; 0,5), (2; 4; 5))_0 = \left[\inf_{\beta \geq 0} \min_{0 \leq \lambda \leq 1} (-0,5 + \lambda) + ((\beta - 1) + \lambda(3 - 3\beta))(2 + 3\lambda), \right. \\ \left. \sup_{\beta \geq 0} \max_{0 \leq \lambda \leq 1} (-0,5 + \lambda) + ((\beta - 1) + \lambda(3 - 3\beta))(2 + 3\lambda) \right] \\ = [-2,5, 10,5].$$

Já para $r = 1$ e $x = (-0,5; 0; 0,5)$ e $y = (2; 4; 5)$, segue que o cálculo correto da função é

$$f((-0,5; 0; 0,5), (2; 4; 5))_1 = \left[\inf_{\beta \geq 1} \min_{0 \leq \lambda \leq 1} 0 + 0 \times 4, \sup_{\beta \geq 1} \max_{0 \leq \lambda \leq 1} 0 \right] = [0, 0].$$

4.1.4 Equações a diferenças intervalares fuzzy

A seguir propomos a definição de equações a diferenças intervalares fuzzy. A definição é geral, mas aqui ilustramos apenas exemplos de equações a diferenças intervalares fuzzy lineares. O conceito exposto segue a teoria apresentada em Barros (1997) e Campos et al. (2017).

Definição 31. *Seja $f_k : \mathbb{R}_{\mathcal{F}}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}^n$ uma função fuzzy. Uma equação a diferença intervalar fuzzy é um sistema iterativo que possui a forma $x_{k+1} = f_k(x_k)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, sendo que k é o índice em tempo discreto e x_k é a trajetória intervalar fuzzy do sistema que resume as informações no tempo k , informações estas relevantes para obter a sequência dos cálculos. Além disso, a equação a diferença intervalar fuzzy está sujeita à condição inicial intervalar fuzzy $x_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}^n$.*

A Definição 31 pode ser escrita conforme a aritmética fuzzy restrita de níveis simples. Assim, escrevendo a equação a diferença intervalar fuzzy de acordo com a sua função restrita convexa crescente associada, segue que $(x_{k+1})_r(\lambda) = (f_k)_r(\lambda)((x_k)_r(\lambda))$ para todo $0 \leq \lambda, r \leq 1$ e $k = 0, 1, \dots, N-1$ e a condição inicial é escrita como $(x_0)_r(\lambda) \in \mathbb{R}^n$ para todo $0 \leq \lambda, r \leq 1$.

Os exemplos numéricos apresentam a simulação da equação a diferença intervalar fuzzy.

Exemplo 23. Considere a equação a diferença intervalar fuzzy linear descrita por

$$\begin{cases} x_{1k+1} = (0,5;0,75;1) \tilde{\otimes} x_{1k} \tilde{\oplus} 0,04 \tilde{\otimes} x_{2k} \\ x_{2k+1} = 0,1 \tilde{\otimes} x_{1k} \tilde{\oplus} (-0,5;0;0,5) \tilde{\otimes} x_{2k} \end{cases}$$

para $k = 0, 1, \dots, 25$ e com condição inicial intervalar fuzzy $x_{10} = 5 = (5;5;5)$ e $x_{20} = 10$. O objetivo é simular a equação a diferença intervalar fuzzy.

Desta forma, os parâmetros fuzzy $a^{11} = (0,5;0,75;1)$ e $a^{22} = (-0,5;0;0,5)$ podem ser escritos de acordo com os seus respectivos r -níveis, isto é, obtemos $a_r^{11} = [0,5 + 0,25r, 1,0 - 0,25r]$ e $a_r^{22} = [-0,5 + 0,5r, 0,5 - 0,5r]$ respectivamente.

Em seguida, de acordo com a aritmética fuzzy restrita de níveis simples, os números fuzzy $a^{11} = (0,5;0,75;1)$ e $a^{22} = (-0,5;0;0,5)$ podem ser escritos conforme as suas respectivas funções restritas convexas crescentes associadas; isso fornece $(a^{11})_r(\lambda) = (0,5 + 0,25r) + \lambda(0,5 - 0,5r)$ e $(a^{22})_r(\lambda) = (-0,5 + 0,5r) + \lambda(1,0 - 1,0r)$.

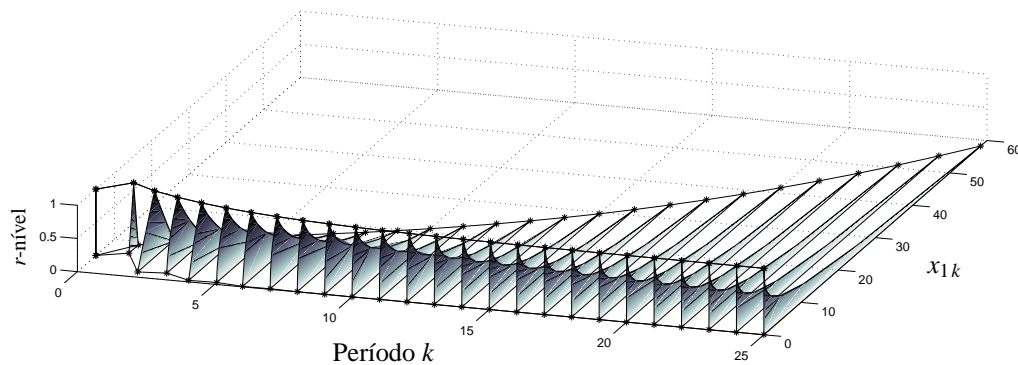
Logo, reescrevendo a equação a diferença intervalar fuzzy conforme a aritmética fuzzy restrita de níveis simples, o problema associado é dado por

$$\begin{cases} (x_{1k+1})_r(\lambda) = ((0,5 + 0,25r) + \lambda(0,5 - 0,5r))(x_{1k})_r(\lambda) + 0,04(x_{2k})_r(\lambda) \\ (x_{2k+1})_r(\lambda) = 0,1(x_{1k})_r(\lambda) + ((-0,5 + 0,5r) + \lambda(1 - 1,0r))(x_{2k})_r(\lambda) \end{cases}$$

com condições iniciais $(x_{10})_r(\lambda) = 5$ e $(x_{20})_r(\lambda) = 10$ para todo $0 \leq \lambda, r \leq 1$ e $k = 0, 1, \dots, 25$.

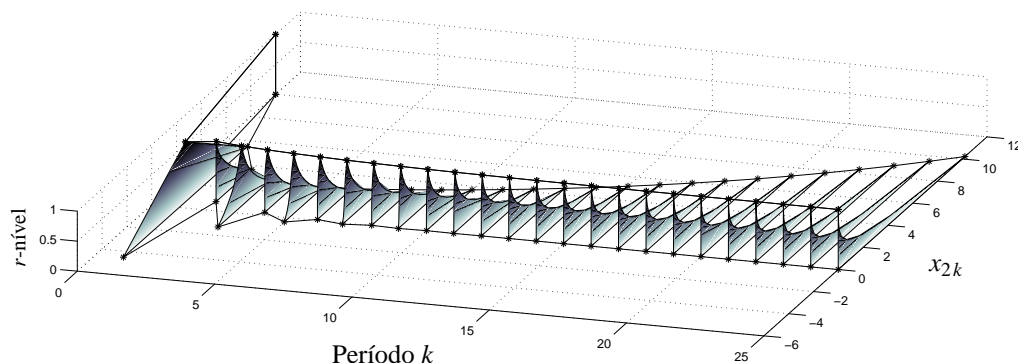
Assim, fixando r , o problema associado se torna igual ao problema associado apresentado em Campos et al. (2017). Portanto, a simulação da equação a diferença intervalar fuzzy segue de modo similar a Campos et al. (2017), porém observando a forma correta de se operar números fuzzy ou intervalos fuzzy (ver Teorema 4). É importante notar também que, para r e λ fixados, o problema está no espaço dos números reais. A Figura 28 mostra a trajetória intervalar fuzzy x_1 e a Figura 29 representa a trajetória intervalar fuzzy x_2 . Novamente a região mais escura do gráfico indica a pertinência próxima a 1 e a região mais clara indica a pertinência próxima a zero. Além disso, a cada iteração ligamos a trajetória intervalar fuzzy por segmentos para facilitar a visualização da evolução temporal.

Figura 28 - Trajetória intervalar fuzzy x_1 para o Exemplo 23.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 29 - Trajetória intervalar fuzzy x_2 para o Exemplo 23.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Analisando as Figuras 28 e 29 percebemos que as trajetórias inferiores de x_1 e x_2 se aproximam de 0 por volta do sexto período independente do r -nível considerado. Para o r -nível igual

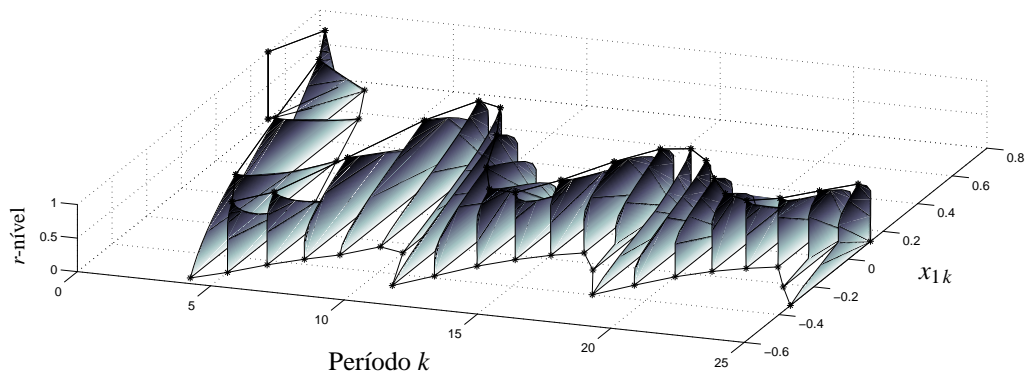
a 0 percebemos que tanto a trajetória superior x_1 quanto a trajetória superior x_2 se distanciam do valor 0 à medida que o período avança. O conceito de distância entre intervalos que utilizamos é encontrado em Chalco-Cano, Lodwick e Bede (2014).

Exemplo 24. Considere a equação a diferença intervalar fuzzy linear descrita por

$$\begin{cases} x_{1k+1} = (0,2;0,35;0,5) \tilde{\otimes} x_{1k} \tilde{\oplus} 0,5 \tilde{\otimes} x_{2k} \\ x_{2k+1} = (-1,5;-1,0;-0,5) \tilde{\otimes} x_{1k} \tilde{\oplus} 1,0 \tilde{\otimes} x_{2k} \end{cases}$$

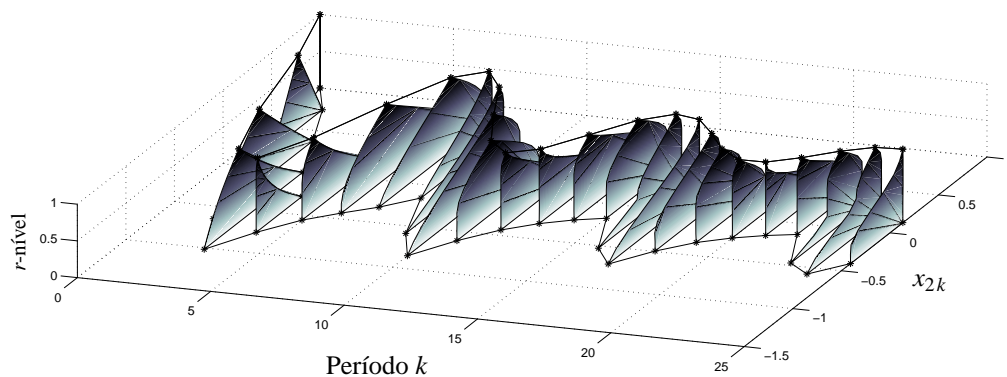
para $k = 0, 1, \dots, 25$ e com condição inicial intervalar fuzzy $x_{10} = 0,5$ e $x_{20} = 1$. Novamente simulamos a equação a diferença intervalar fuzzy, e isso é realizado de acordo com os passos citados no Exemplo 23. A Figura 30 representa a simulação da trajetória da equação a diferença intervalar fuzzy x_1 e a Figura 31 representa a trajetória da equação a diferença intervalar fuzzy x_2 .

Figura 30 - Trajetória intervalar fuzzy x_1 para o Exemplo 24.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 31 - Trajetória intervalar fuzzy x_2 para o Exemplo 24.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

As Figuras 30 e 31 mostram que as trajetórias x_1 e x_2 apresentam uma oscilação decrescente à medida que aumenta-se a quantidade de períodos analisados. Além disso, constatamos também que a trajetória intervalar fuzzy apresenta formas bastante variadas para cada período e isso ocorre com as duas trajetórias.

4.1.5 Conjuntos admissíveis fuzzy

Na Seção 2.1.4 definimos os conceitos de conjuntos admissíveis para o espaço dos números reais. Assim, relembremos que para problemas de controle ótimo no espaço dos números reais o conjunto denotado por $C_{ad} \subseteq \mathbb{R}^m$ é chamado de conjunto de controles admissíveis e o conjunto S_{ad} é chamado de conjunto de vetores de estado admissíveis.

A seguir apresentamos o conceito de conjunto de vetores intervalares fuzzy admissíveis no espaço intervalar fuzzy.

O conjunto $U_{ad}^{\mathcal{F}} \subseteq \mathbb{R}_{\mathcal{F}}^m$ é chamado de conjunto dos controles intervalares fuzzy admissíveis. Assim, de acordo com a aritmética fuzzy restrita de níveis simples, para todo $u_k \in U_{ad}^{\mathcal{F}}$, a função restrita associada é $(u_k)_r(\lambda) \in \mathbb{R}^m$ para todo $r, \lambda \in [0, 1]$.

Abaixo analisamos a definição de vetores de estado intervalares fuzzy admissíveis usando a aritmética fuzzy restrita de níveis simples.

Definição 32. *Seja $f_k : \mathbb{R}_{\mathcal{F}}^n \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}}^m \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}^n$ uma função fuzzy. O conjunto de estados intervalares fuzzy $X_{ad}^{\mathcal{F}}$ é admissível se $x_k \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}^n$ satisfaz a equação a diferença intervalar fuzzy $x_{k+1} = f_k(x_k, u_k)$ com condição inicial intervalar fuzzy x_0 e $u_k \in U_{ad}^{\mathcal{F}}$, para $k = 0, 1, \dots, N-1$.*

Do ponto de vista da aritmética fuzzy restrita de níveis simples, $x_k \in X_{ad}^{\mathcal{F}}$ implica que a equação $(x_{k+1})_r(\lambda) = (f_k)_r(\lambda)((x_k)_r(\lambda), (u_k)_r(\lambda))$ com condição inicial $(x_0)_r(\lambda)$ e $(u_k)_r(\lambda) \in \mathbb{R}^m$ deva ser satisfeita para todo $r, \lambda \in [0, 1]$ e $k = 0, 1, \dots, N-1$.

4.2 O PROBLEMA DE CONTROLE ÓTIMO INTERVALAR FUZZY EM TEMPO DISCRETO

Resolver o problema de controle ótimo intervalar fuzzy em tempo discreto implica em escolher qual a decisão que otimiza o funcional intervalar fuzzy e satisfaz a equação a diferença intervalar fuzzy com condição inicial intervalar fuzzy.

A seguir formulamos o problema de controle ótimo intervalar fuzzy em tempo discreto.

Sejam $g_N : \mathbb{R}_{\mathcal{F}}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, $g_k : \mathbb{R}_{\mathcal{F}}^n \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}}^m \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ e $f_k : \mathbb{R}_{\mathcal{F}}^n \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}}^m \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}^n$ funções intervalares fuzzy. O objetivo é minimizar o funcional intervalar fuzzy dado por

$$\min c(x,u) := g_N(x_N) \oplus \sum_{k=0}^{N-1} g_k(x_k, u_k)$$

e que é regido pela equação a diferença intervalar fuzzy

$$x_{k+1} = f_k(x_k, u_k), \quad (7)$$

sendo que $x_k \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}^n$ denota o estado intervalar fuzzy no período k e $u_k \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}^m$ o controle intervalar fuzzy no período k para $k = 0, 1, \dots, N-1$. Note que N corresponde ao número de vezes em que o controle intervalar fuzzy é aplicado e a equação a diferença intervalar fuzzy (7) está sujeita à condição inicial intervalar fuzzy $x_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}^n$. A função g_N é o custo intervalar fuzzy final do processo de controle.

Denominamos o problema proposto de problema de controle ótimo intervalar fuzzy em tempo discreto (PCOIFD). Os candidatos à solução do problema de controle ótimo intervalar fuzzy em tempo discreto são os vetores intervalares fuzzy admissíveis $(x, u) \in X_{ad}^{\mathcal{F}} \times U_{ad}^{\mathcal{F}}$, sendo que $x = (x_0, x_1, \dots, x_N)$ e $u = (u_0, u_1, \dots, u_{N-1})$. Além disso, $(x, u) \in X_{ad}^{\mathcal{F}} \times U_{ad}^{\mathcal{F}}$ é chamado de processo intervalar fuzzy admissível.

Aqui o funcional intervalar fuzzy $c(x, u)$ deve ser comparado de acordo com a relação de ordem apresentada na Seção 4.1.2. A seguir propomos a definição de solução intervalar fuzzy ótima para o PCOIFD.

Definição 33. *Seja $(x, u) \in X_{ad}^{\mathcal{F}} \times U_{ad}^{\mathcal{F}}$ um processo intervalar fuzzy admissível. O processo intervalar fuzzy admissível $(x^*, u^*) \in X_{ad}^{\mathcal{F}} \times U_{ad}^{\mathcal{F}}$, sendo $x^* = (x_0^*, x_1^*, \dots, x_N^*)$ e $u^* = (u_0^*, u_1^*, \dots, u_{N-1}^*)$, é uma solução intervalar fuzzy ótima para o problema de controle ótimo intervalar fuzzy em tempo discreto se não existem vetores intervalares fuzzy admissíveis (x, u) de modo que*

$$c(x, u) <_F c(x^*, u^*).$$

O custo $c(x^*, u^*)$ é chamado de custo intervalar fuzzy ótimo para o problema de controle ótimo intervalar fuzzy em tempo discreto.

O PCOIFD pode ser escrito na sua forma associada:

$$\min c_r(\lambda)(x_r(\lambda), u_r(\lambda)) := (g_N)_r(\lambda)((x_N)_r(\lambda)) + \sum_{k=0}^{N-1} (g_k)_r(\lambda)((x_k)_r(\lambda), (u_k)_r(\lambda))$$

sujeito à equação a diferença

$$(x_{k+1})_r(\lambda) = (f_k)_r(\lambda)((x_k)_r(\lambda), (u_k)_r(\lambda)), \quad (8)$$

sendo que $(x_k)_r(\lambda) \in \mathbb{R}^n$ denota o estado e $(u_k)_r(\lambda) \in \mathbb{R}^m$ o controle para $k = 0, 1, \dots, N-1$ e para todo $r, \lambda \in [0, 1]$. Note que N corresponde ao número de vezes em que o controle é aplicado e a equação dinâmica (8) está sujeita à condição inicial, que poderá ser um número real ou um número intervalar fuzzy reescrito conforme a aritmética fuzzy restrita de níveis simples.

Denotamos o problema de controle ótimo intervalar fuzzy em tempo discreto associado por PCOIFD1.

A definição de solução para o PCOIFD1 segue abaixo.

Definição 34. *Seja $(x_r(\lambda), u_r(\lambda)) \in S_{ad} \times C_{ad}$ um processo admissível para todo $r, \lambda \in [0, 1]$. O processo admissível $(x_r^*(\lambda), u_r^*(\lambda))$ é chamado de solução ótima para o PCOIFD1 se não existem $(x_r(\lambda), u_r(\lambda))$ admissíveis de modo que $c_r(\lambda)(x_r(\lambda), u_r(\lambda)) < c_r(\lambda)(x_r^*(\lambda), u_r^*(\lambda))$ para todo $r, \lambda \in [0, 1]$. Desta forma, o custo ótimo é dado por $c_r(\lambda)(x_r^*(\lambda), u_r^*(\lambda))$.*

É importante notar que, para todo $r, \lambda \in [0, 1]$ fixado, o problema analisado se torna um problema de otimização convencional. Assim resolvemos o PCOIFD1 usando a técnica programação dinâmica e conseqüentemente encontramos a solução do problema de controle ótimo intervalar fuzzy em tempo discreto.

A seguir propomos um resultado fundamental. Este resultado mostra a equivalência de solução do PCOIFD e PCOIFD1.

Proposição 4. *O processo intervalar fuzzy ótimo admissível $(x^*, u^*) \in X_{ad}^F \times U_{ad}^F$ é solução do PCOIFD se, e somente se, $(x_r^*(\lambda), u_r^*(\lambda)) \in S_{ad} \times C_{ad}$, para todo $r, \lambda \in [0, 1]$, for solução do PCOIFD1.*

Prova 5. De fato, seja (x^*, u^*) o processo intervalar fuzzy ótimo admissível do PCOIFD e suponha que $(x_r^*(\lambda), u_r^*(\lambda))$ não seja ótima para o PCOIFD1. Então existe um processo admissível $(x_r(\lambda), u_r(\lambda))$ tal que

$$c_r(\lambda)(x_r(\lambda), u_r(\lambda)) < c_r(\lambda)(x_r^*(\lambda), u_r^*(\lambda))$$

para todo $r, \lambda \in [0, 1]$.

A desigualdade acima pode ser reescrita conforme a relação de ordem dada pela aritmética intervalar restrita de níveis simples. Logo reescrevemos a desigualdade como

$$c_r(x_r, u_r) <_{SL} c_r(x_r^*, u_r^*)$$

para todo $r \in [0, 1]$ (para cada r fixado segue que o r -nível também é fixado). Conforme a Seção 4.1.2, a relação de ordem para a SLCIA exposta na desigualdade acima equivalente a escrever $c(x, u) <_F c(x^*, u^*)$. Isto contradiz o fato de (x^*, u^*) ser o processo intervalar fuzzy ótimo admissível para o PCOIFD.

Reciprocamente, seja $(x_r^*(\lambda), u_r^*(\lambda))$ o processo ótimo admissível para o PCOIFD1 e suponha que (x^*, u^*) não seja ótima para o PCOIFD. Logo, existe um processo intervalar fuzzy admissível (x, u) tal que

$$c(x, u) <_F c(x^*, u^*)$$

o que implica em

$$c_r(x_r, u_r) <_{SL} c_r(x_r^*, u_r^*)$$

para todo $r \in [0, 1]$. Consequentemente, segue da definição de relação de ordem para a SLCIA (LEAL, 2015) que a desigualdade acima equivale a escrever

$$c_r(\lambda)(x_r(\lambda), u_r(\lambda)) < c_r(\lambda)(x_r^*(\lambda), u_r^*(\lambda))$$

para todo $r, \lambda \in [0, 1]$. Isto contradiz o fato de $(x_r^*(\lambda), u_r^*(\lambda))$ ser o processo ótimo admissível para o PCOIFD1.

□

A expressão da solução é dada pela seguinte definição.

Definição 35. *O estado intervalar fuzzy ótimo x^* é obtido de acordo com a seguinte regra:*

$$x_r^* = \left[\inf_{\beta \geq r} \min_{0 \leq \lambda \leq 1} x_\beta^*(\lambda), \sup_{\beta \geq r} \max_{0 \leq \lambda \leq 1} x_\beta^*(\lambda) \right]$$

para todo $r \in [0, 1]$. Assim, o estado intervalar fuzzy ótimo x^* é obtido observando a forma correta de se operar números fuzzy ou intervalos fuzzy (ver Teorema 4). Além disso, a família $\{x_r^*\}_{r \in [0, 1]}$ satisfaz as condições do Teorema 2.

Da mesma forma, definimos o controle intervalar fuzzy ótimo. O controle intervalar fuzzy ótimo u^* é obtido pela expressão

$$u_r^* = \left[\inf_{\beta \geq r} \min_{0 \leq \lambda \leq 1} u_\beta^*(\lambda), \sup_{\beta \geq r} \max_{0 \leq \lambda \leq 1} u_\beta^*(\lambda) \right]$$

para todo $r \in [0, 1]$. A família $\{u_r^*\}_{r \in [0, 1]}$ satisfaz as condições do Teorema 2.

O funcional intervalar fuzzy ótimo $c(x^*, u^*)$ é consequentemente obtido de acordo com a seguinte regra:

$$c_r(x_r^*, u_r^*) = \left[\inf_{\beta \geq r} \min_{0 \leq \lambda \leq 1} c_\beta(\lambda)(x_\beta^*(\lambda), u_\beta^*(\lambda)), \sup_{\beta \geq r} \max_{0 \leq \lambda \leq 1} c_\beta(\lambda)(x_\beta^*(\lambda), u_\beta^*(\lambda)) \right]$$

para todo $r \in [0, 1]$. A família $\{c_r(x_r^*, u_r^*)\}_{r \in [0, 1]}$ satisfaz as condições do Teorema 2.

Para concluir esta seção seguem as observações abaixo.

Observação 28. *Os conceitos e as definições para o problema de maximização podem ser aplicados analogamente.*

Observação 29. *Se as funções a serem minimizadas em cada estágio k , parametrizadas em r e λ , são estritamente convexas para todo $r, \lambda \in [0, 1]$, então a solução é ótima para o PCOIFD1*

e conseqüentemente temos a solução intervalar fuzzy ótima para o PCOIFD. Assim, a convexidade estrita da solução do PCOIFD1 implica na unicidade da solução para o PCOIFD1 para todo $r, \lambda \in [0, 1]$ fixado e conseqüentemente na unicidade da solução intervalar fuzzy para o PCOIFD.

4.3 A PROGRAMAÇÃO DINÂMICA INTERVALAR FUZZY

A seguir apresentamos o princípio de otimalidade intervalar fuzzy que fundamenta a programação dinâmica intervalar fuzzy. Na abordagem proposta utilizamos a aritmética fuzzy restrita de níveis simples (CHALCO-CANO; LODWICK; BEDE, 2014).

4.3.1 O princípio de otimalidade intervalar fuzzy

A seguir propomos o princípio de otimalidade intervalar fuzzy. Em seguida provamos a proposição conforme a aritmética fuzzy restrita de níveis simples.

Proposição 5. *Sejam $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, x_N$ números intervalares fuzzy. Se $x_0 x_1 x_2 \dots x_{N-1} x_N$ é a trajetória intervalar fuzzy ótima de x_0 a x_N , então $x_{N-1} x_N$ é a trajetória intervalar fuzzy ótima de x_{N-1} a x_N .*

Prova 6. Para provar o princípio de otimalidade intervalar fuzzy usando a aritmética fuzzy restrita de níveis simples, considere o funcional intervalar fuzzy $J_{x_0 x_1 \dots x_{N-1} x_N}$ reescrito como $(J_{x_0 x_1 \dots x_{N-1} x_N})_r(\lambda)$ para todo $r, \lambda \in [0, 1]$. Assim, esse funcional está escrito conforme a aritmética fuzzy restrita de níveis simples. O mesmo pode ser feito com o funcional intervalar fuzzy $J_{x_0 x_1 \dots x_{N-1} x x_N}$.

Suponha então que $x_{N-1} x_N$ não é a trajetória intervalar fuzzy ótima de x_{N-1} a x_N conforme a relação de ordem apresentada na Seção 4.1.2. Logo, existe uma outra trajetória intervalar fuzzy $x_{N-1} x x_N$ de modo que, escrita conforme a aritmética fuzzy restrita de níveis simples, é obtido

$$(J_{x_{N-1} x x_N})_r(\lambda) < (J_{x_{N-1} x_N})_r(\lambda) \text{ para todo } r, \lambda \in [0, 1].$$

Utilizando a desigualdade acima segue que

$$\begin{aligned} (J_{x_0 x_1 \dots x_{N-1} x x_N})_r(\lambda) &= (J_{x_0 x_1 \dots x_{N-1}})_r(\lambda) + (J_{x_{N-1} x x_N})_r(\lambda) > (J_{x_0 x_1 \dots x_{N-1}})_r(\lambda) + (J_{x_{N-1} x_N})_r(\lambda) \\ &= (J_{x_0 x_1 \dots x_{N-1} x x_N})_r(\lambda) \end{aligned}$$

para todo $r, \lambda \in [0, 1]$ fixado e, conseqüentemente, pela relação de ordem para a aritmética intervalar restrita de níveis simples, segue que

$$(J_{x_0 x_1 \dots x_{N-1} x x_N})_r <_{SL} (J_{x_0 x_1 \dots x_{N-1} x_N})_r.$$

Portanto, pela relação de ordem apresentada na Seção 4.1.2, segue que

$$J_{x_0x_1\dots x_{N-1}x_N} <_F J_{x_0x_1\dots x_{N-1}x_N}.$$

Isso contradiz a hipótese de $J_{x_0x_1\dots x_{N-1}x_N}$ ser a trajetória intervalar fuzzy ótima de x_0 a x_N . □

A seguir expomos o algoritmo de programação dinâmica intervalar fuzzy para o problema de controle ótimo intervalar fuzzy em tempo discreto.

4.3.2 O algoritmo de programação dinâmica intervalar fuzzy

A seguir propomos o algoritmo de programação dinâmica intervalar fuzzy. Para a demonstração utilizamos a aritmética fuzzy restrita de níveis simples.

Teorema 5. *Seja $J_k : \mathbb{R}_{\mathcal{F}}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ um funcional intervalar fuzzy e $k = 0, 1, \dots, N$. Para cada condição inicial intervalar fuzzy x_0 , o custo intervalar fuzzy ótimo $J^*(x_0)$ do problema de controle ótimo intervalar fuzzy em tempo discreto é igual a $J_0(x_0)$, sendo que a função J_0 é dada pelo último passo do seguinte algoritmo, que evolui de modo reverso no tempo de $N - 1$ até 0:*

Passo N :

$$J_N(x_N) = g_N(x_N).$$

Passo k :

$$J_k(x_k) = \min_{u_k \in U_{ad}^{\mathcal{F}}} (g_k(x_k, u_k) \tilde{\oplus} J_{k+1}(f_k(x_k, u_k))),$$

para $k = N - 1, \dots, 1, 0$.

Passo 0:

$$J^*(x_0) = J_0(x_0).$$

Além disso, se u_k^* minimiza o lado direito da equação do passo k , o conjunto $\{u_0^*, u_1^*, \dots, u_{N-1}^*\}$ é o controle intervalar fuzzy ótimo para o problema dado.

Prova 7. Inicialmente o algoritmo de programação dinâmica intervalar fuzzy é reescrito de acordo com a aritmética fuzzy restrita de níveis simples.

Prosseguindo com a demonstração, o conjunto de controles admissíveis é denotado por $\{(u_0)_r(\lambda), (u_1)_r(\lambda), \dots, (u_{N-1})_r(\lambda)\}$ para todo $r, \lambda \in [0, 1]$ e é detonado por $\{(u_k)_r(\lambda), (u_{k+1})_r(\lambda), \dots, (u_{N-1})_r(\lambda)\}$, para todo $r, \lambda \in [0, 1]$, o conjunto de controles admissíveis do instante k ao instante final $N - 1$.

Logo, para $k = 0, 1, \dots, N-1$, seja $(J_k^*)_r(\lambda)((x_k)_r(\lambda))$, para todo $r, \lambda \in [0, 1]$, o custo ótimo para os $(N-k)$ -estágios do problema que se inicia no estado $(x_k)_r(\lambda)$ e período k e termina no período N . De outra forma, o custo ótimo é escrito como

$$(J_k^*)_r(\lambda)((x_k)_r(\lambda)) = \min_{\{(u_k)_r(\lambda), (u_{k+1})_r(\lambda), \dots, (u_{N-1})_r(\lambda)\}} \left((g_N)_r(\lambda)((x_N)_r(\lambda)) + \sum_{i=k}^{N-1} (g_i)_r(\lambda)((x_i)_r(\lambda), (u_i)_r(\lambda)) \right)$$

para todo $r, \lambda \in [0, 1]$.

Para $k = N$, é definido $(J_N^*)_r(\lambda)((x_N)_r(\lambda)) = (g_N)_r(\lambda)((x_N)_r(\lambda))$ para todo $r, \lambda \in [0, 1]$.

A continuação da demonstração segue pelo princípio de indução, cujo objetivo é mostrar que as funções de custo ótimo J_k^* são exatamente as funções J_k calculadas pelo algoritmo de programação dinâmica para todo k . É cabível o uso do princípio de indução matemática nesta demonstração envolvendo a aritmética fuzzy restrita de níveis simples uma vez que, para todo $r, \lambda \in [0, 1]$ fixado, o problema analisado se torna um problema clássico.

Assim, segue que $(J_N^*)_r(\lambda)((x_N)_r(\lambda)) = (g_N)_r(\lambda)((x_N)_r(\lambda)) = (J_N)_r(\lambda)((x_N)_r(\lambda))$ para todo $r, \lambda \in [0, 1]$. Isto conseqüentemente acarreta $J_N^*(x_N) = g_N(x_N) = J_N(x_N)$.

Pelo princípio de indução, suponhamos que a hipótese de indução valha para $k+1$, ou seja, suponhamos que a função custo ótimo J_{k+1}^* seja dada exatamente pela função J_{k+1} calculada pelo algoritmo de programação dinâmica, ou seja,

$$(J_{k+1}^*)_r(\lambda)((x_{k+1})_r(\lambda)) = (J_{k+1})_r(\lambda)((x_{k+1})_r(\lambda)), \quad r, \lambda \in [0, 1].$$

Agora resta mostrar que a hipótese é válida para k .

Para $(x_k)_r(\lambda)$ fixado, $(x_k)_r(\lambda) \in \mathcal{S}_{ad}$, para todo $r, \lambda \in [0, 1]$, segue pela definição que

$$\begin{aligned} (J_k^*)_r(\lambda)((x_k)_r(\lambda)) &= \min_{\{(u_k)_r(\lambda), (u_{k+1})_r(\lambda), \dots, (u_{N-1})_r(\lambda)\}} \left((g_N)_r(\lambda)((x_N)_r(\lambda)) + \sum_{i=k}^{N-1} (g_i)_r(\lambda)((x_i)_r(\lambda), (u_i)_r(\lambda)) \right) \\ &= \min_{(u_k)_r(\lambda), \{(u_{k+1})_r(\lambda), \dots, (u_{N-1})_r(\lambda)\}} \left((g_k)_r(\lambda)((x_k)_r(\lambda), (u_k)_r(\lambda)) + (g_N)_r(\lambda)((x_N)_r(\lambda)) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=k+1}^{N-1} (g_i)_r(\lambda)((x_i)_r(\lambda), (u_i)_r(\lambda)) \right), \end{aligned}$$

para todo $r, \lambda \in [0, 1]$.

Como o termo $(g_k)_r(\lambda)((x_k)_r(\lambda), (u_k)_r(\lambda))$ não depende do conjunto de controle $\{(u_{k+1})_r(\lambda), \dots, (u_{N-1})_r(\lambda)\}$, segue que

$$\begin{aligned} (J_k^*)_r(\lambda)((x_k)_r(\lambda)) &= \min_{(u_k)_r(\lambda) \in \mathcal{C}_{ad}} (g_k)_r(\lambda)((x_k)_r(\lambda), (u_k)_r(\lambda)) \\ &\quad + \min_{\{(u_{k+1})_r(\lambda), \dots, (u_{N-1})_r(\lambda)\}} \left((g_N)_r(\lambda)((x_N)_r(\lambda)) + \sum_{i=k+1}^{N-1} (g_i)_r(\lambda)((x_i)_r(\lambda), (u_i)_r(\lambda)) \right) \end{aligned}$$

para todo $r, \lambda \in [0, 1]$.

Segue da definição de custo ótimo e do princípio de otimalidade, isto é, da própria definição de $(J_{k+1}^*)_r(\lambda)((x_{k+1})_r(\lambda))$, que a partir do instante $k + 1$ é obtido

$$(J_k^*)_r(\lambda)((x_k)_r(\lambda)) = \min_{(u_k)_r(\lambda) \in C_{ad}} ((g_k)_r(\lambda)((x_k)_r(\lambda), (u_k)_r(\lambda)) + (J_{k+1}^*)_r(\lambda)((f_k)_r(\lambda)((x_k)_r(\lambda), (u_k)_r(\lambda))),$$

para todo $r, \lambda \in [0, 1]$. Isto mostra que

$$J_k^*(x_k) = \min_{u_k \in U_{ad}^{\mathcal{F}}} (g_k(x_k, u_k) \tilde{\oplus} J_{k+1}^*(f_k(x_k, u_k))).$$

Sendo válida a hipótese de indução para $k + 1$, segue que

$$\begin{aligned} (J_k^*)_r(\lambda)((x_k)_r(\lambda)) &= \min_{(u_k)_r(\lambda) \in C_{ad}} ((g_k)_r(\lambda)((x_k)_r(\lambda), (u_k)_r(\lambda)) + (J_{k+1}^*)_r(\lambda)((f_k)_r(\lambda)((x_k)_r(\lambda), (u_k)_r(\lambda))) \\ &= (J_k)_r(\lambda)((x_k)_r(\lambda)), \end{aligned}$$

para todo $r, \lambda \in [0, 1]$. Assim demonstramos que $J_k^*(x_k) = J_k(x_k)$. □

4.4 EXEMPLOS NUMÉRICOS

A seguir apresentamos dois exemplos numéricos. O primeiro exemplo aborda um problema de controle ótimo intervalar fuzzy em tempo discreto com apenas um parâmetro fuzzy na equação a diferença intervalar fuzzy e o segundo estuda um problema com dois parâmetros fuzzy na equação a diferença intervalar fuzzy linear. Os exemplos foram implementados no software MATLAB 7.4. Além disso, é utilizado um micro-computador com processador Intel Core i5 e 8 GB de memória.

4.4.1 Exemplo numérico 4.4.1

O exemplo a seguir apresenta um número fuzzy triangular como parâmetro da equação a diferença intervalar fuzzy linear. O problema de controle ótimo intervalar fuzzy em tempo discreto é dado por

$$\min c(x, u) := 200 \tilde{\otimes} (x_{10} \tilde{\ominus} 40)^2 \tilde{\oplus} \sum_{k=0}^N 1,5 \tilde{\otimes} x_k^2 \tilde{\oplus} 2,0 \tilde{\otimes} u_k^2$$

sujeito a

$$x_{k+1} = (0,2; 0,5; 0,8) \tilde{\otimes} x_k \tilde{\oplus} 0,8 \tilde{\otimes} u_k,$$

sendo que x_k é o estado intervalar fuzzy e u_k é o controle intervalar fuzzy para cada período analisado, $k = 0, 1, \dots, N$. A condição inicial intervalar fuzzy é $x_0 = 10 = (10; 10; 10)$ e $c(x, u)$ é o custo intervalar fuzzy. Escolhemos $g_N(x_N) = 200 \tilde{\otimes} (x_{10} \tilde{\ominus} 40)^2$ e $N = 9$ períodos. Note ainda que $(0,2; 0,5; 0,8)$ é um número fuzzy triangular simétrico.

Denotamos o problema associado por

$$\min c_r(\lambda)(x_r(\lambda), u_r(\lambda)) := 200((x_{10})_r(\lambda) - 40)^2 + \sum_{k=0}^N 1,5(x_k^2)_r(\lambda) + 2,0(u_k^2)_r(\lambda)$$

sujeito a

$$(x_{k+1})_r(\lambda) = ((0,2 + 0,3r) + \lambda(0,6 - 0,6r))(x_k)_r(\lambda) + 0,8(u_k)_r(\lambda)$$

sendo que $(x_k)_r(\lambda)$ é o estado, $(u_k)_r(\lambda)$ é o controle para cada período analisado, $k = 0, 1, \dots, 9$, e $r, \lambda \in [0, 1]$. A condição inicial é $(x_0)_r(\lambda) = 10$.

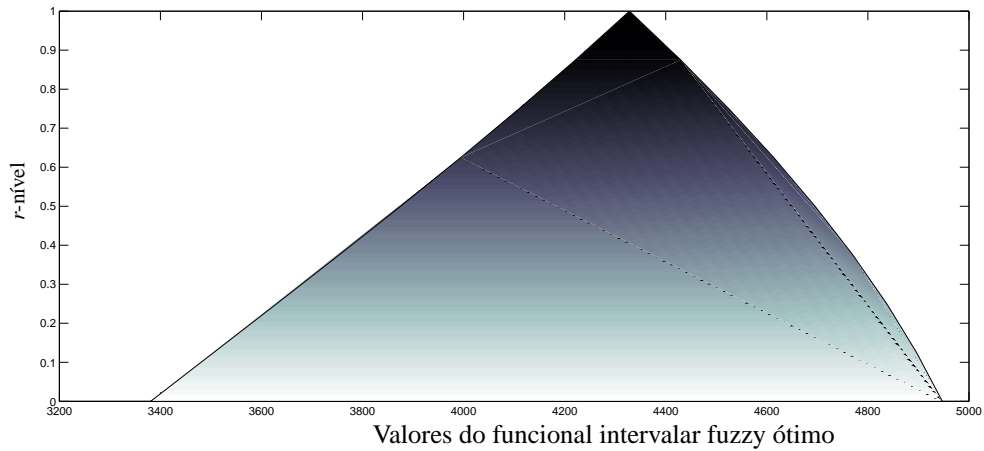
O problema de controle ótimo intervalar fuzzy em tempo discreto é resolvido utilizando a teoria proposta neste capítulo. Resolvemos o problema de controle ótimo associado conforme procedimento similar ao descrito em Campos et al. (2016a) e Campos et al. (2017), porém notando que as operações são realizadas de acordo com a forma correta de se operar números fuzzy ou intervalos fuzzy (ver Teoremas 3 e 4). Exemplificando, a seguir ilustramos o custo intervalar fuzzy ótimo para três r -níveis. Assim, o custo intervalar fuzzy ótimo para o r -nível igual a 0 ($r = 0$) é $[3380,5721, 4947,3022]$, o custo intervalar fuzzy ótimo para o r -nível igual a 0,5 ($r = 0,5$) é $[3875,2408, 4695,5813]$ e o custo intervalar fuzzy ótimo para o r -nível igual a 1 ($r = 1$) é 4328,0860. O tempo de processamento para esse problema é de aproximadamente 1 minuto para cada r -nível simulado. Além disso, resolvemos o problema para $r, \lambda \in [0, 1]$ fixado, isto é, inicialmente é fixado r e em seguida obtemos a solução do problema considerando uma partição de λ no intervalo $[0, 1]$. Especificamente, consideramos 20 partições de tamanho iguais a 0,05 no intervalo $[0, 1]$.

Para três r -níveis considerados ($r = 1; 0,5$ e 0), notamos que o custo intervalar fuzzy fornece

$$4328,0860 \subseteq [3875,2408, 4695,5813] \subseteq [3380,5721, 4947,3022]$$

e assim também satisfaz o Teorema 2. Graficamente, o funcional intervalar fuzzy ótimo é dado pela figura abaixo.

Figura 32 - Funcional intervalar fuzzy ótimo para o Exemplo numérico 4.4.1.

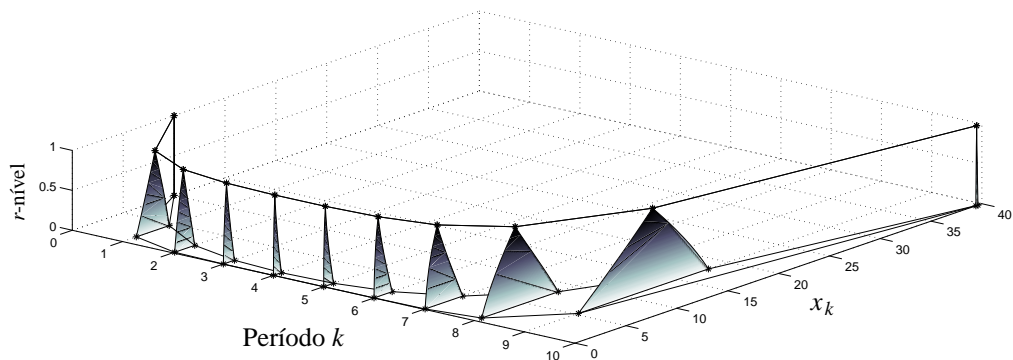


Fonte: Elaboração do próprio autor.

Usando o método de defuzzificação chamado centro de gravidade (BARROS; BASSANEZI, 2010), a resposta do funcional para o usuário é igual a 4245,2816. Este valor é próximo do valor obtido quando a função de pertinência é igual a 1. Em particular, o valor do funcional obtido com a função de pertinência igual a 1 coincide também com o valor obtido pelo método de defuzzificação chamado centro dos máximos (BARROS; BASSANEZI, 2010).

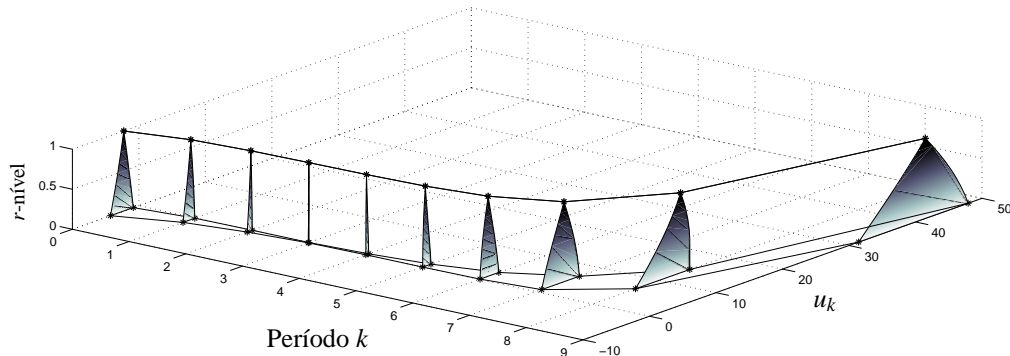
As Figuras 33 e 34 mostram a solução gráfica para a variável de estado intervalar fuzzy x e variável de controle intervalar fuzzy u , respectivamente.

Figura 33 - Estado intervalar fuzzy x para o Exemplo numérico 4.4.1.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 34 - Controle intervalar fuzzy u para o Exemplo numérico 4.4.1.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Analisando a solução mostrada na Figura 33 percebemos que o estado intervalar fuzzy x se aproxima do valor igual a 40 no décimo período. Além disso, o estado intervalar fuzzy x tem a sua solução intervalar fuzzy estreitada em torno do quarto período. Novamente o conceito de distância para cada r -nível fixado é dado de acordo com a definição de distância entre intervalos conforme a aritmética intervalar restrita de níveis simples (CHALCO-CANO; LODWICK; BEDE, 2014).

A Figura 34 apresenta o controle intervalar fuzzy u estreito no terceiro período. Nesse período, em particular, todos os r -níveis fornecem praticamente um mesmo valor para a solução intervalar fuzzy.

Usando o centro de gravidade como método de defuzzificação, segue que os controles a serem fornecidos para o usuário executar a tomada de decisão são: $-2,4097$ para o controle a ser aplicado no período inicial ($k = 0$), $-0,8626$ para o controle no período igual a 1, $-0,3039$ para a terceira decisão ($k = 2$), $-0,0444$ para a quarta decisão ($k = 3$), $0,1733$ para $k = 4$, $0,5443$ para $k = 5$, $1,4425$ para $k = 6$, $3,9417$ para $k = 7$, $11,7758$ para $k = 8$ e $40,5876$ seria o controle a ser aplicado no último período.

4.4.2 Exemplo numérico 4.4.2

Encontre o controle intervalar fuzzy que minimiza

$$c(x,u) := \sum_{k=0}^N 1,0 \tilde{\otimes} x_{1k}^2 \tilde{\oplus} 0,2 \tilde{\otimes} x_{2k}^2 \tilde{\oplus} 1,0 \tilde{\otimes} u_{1k}^2 \tilde{\oplus} 1,0 \tilde{\otimes} u_{2k}^2$$

sujeito a

$$\begin{cases} x_{1k+1} = (0,2;0,5;0,8) \tilde{\otimes} x_{1k} \tilde{\otimes} 0,2 \tilde{\otimes} x_{2k} \tilde{\otimes} 0,5 \tilde{\otimes} u_{1k} \tilde{\otimes} 0,2 \tilde{\otimes} u_{2k} \\ x_{2k+1} = 0,5 \tilde{\otimes} x_{1k} \tilde{\oplus} (-0,6;0;0,6) \tilde{\otimes} x_{2k} \tilde{\oplus} 0,1 \tilde{\otimes} u_{1k} \tilde{\otimes} 0,9 \tilde{\otimes} u_{2k} \end{cases}$$

sendo que x_k é o estado intervalar fuzzy e u_k é o controle intervalar fuzzy para cada período analisado, $k = 0, 1, \dots, N$. A condição inicial intervalar fuzzy é $x_{10} = 200$ e $x_{20} = 140$ e $c(x, u)$ é o custo intervalar fuzzy. Tomamos $g_N(x_N) = 0$ e $N = 9$ períodos. Note ainda que $(0, 2; 0, 5; 0, 8)$ e $(-0, 6; 0; 0, 6)$ são números fuzzy triangulares simétricos.

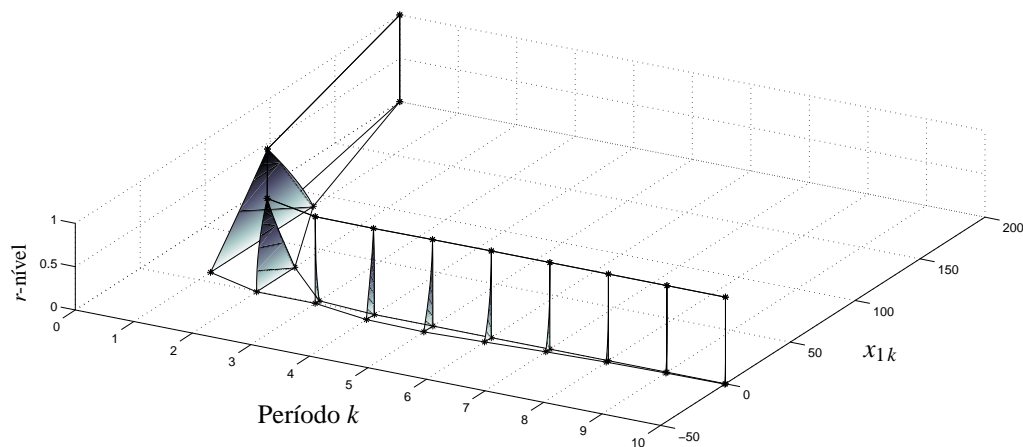
A solução se baseia na teoria apresentada. Logo, o problema de controle ótimo associado é resolvido conforme procedimento similar ao descrito em Campos et al. (2016a) e Campos et al. (2017), e de acordo com os Teoremas 3 e 4. A seguir apresentamos a ilustração de alguns custos intervalares fuzzy ótimos. Assim, o custo intervalar fuzzy ótimo é $[44071, 6046, 68658, 5663]$ para o r -nível igual a 0, $[45788, 2443, 56462, 7199]$ para o r -nível igual a 0,5 e 49627,1488 para o r -nível igual a 1. O tempo de processamento para esse problema é de aproximadamente 1 minuto e 15 segundos para cada r -nível considerado. Além disso resolvemos o problema para λ fixado e com 20 partições de tamanho iguais a 0,05 no intervalo $[0, 1]$. O custo intervalar fuzzy ótimo novamente satisfaz

$$49627,1488 \subseteq [45788, 2443, 56462, 7199] \subseteq [44071, 6046, 68658, 5663]$$

para três r -níveis considerados, isto é, para os r -níveis iguais a 1; 0,5 e 0, respectivamente.

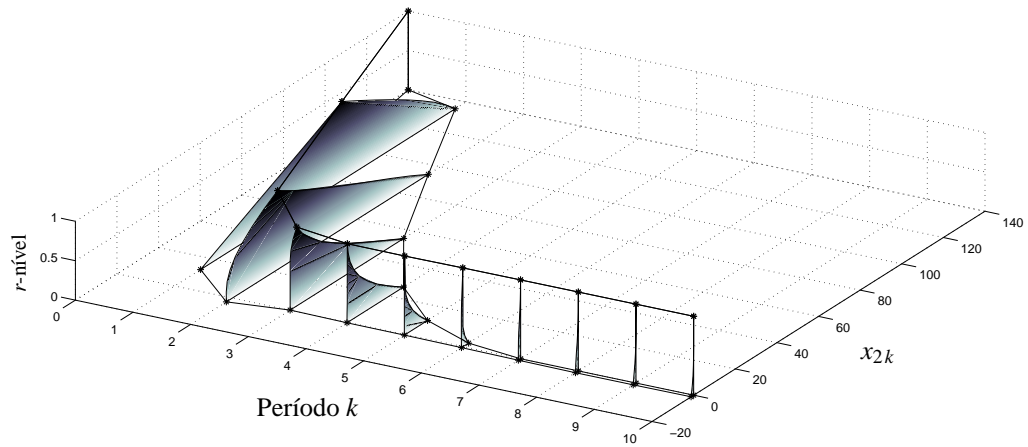
As Figuras 35 e 36 mostram a solução gráfica para a variável de estado intervalar fuzzy x_1 e x_2 ; e a variável de controle intervalar fuzzy u_1 e u_2 é representada pelas Figuras 37 e 38.

Figura 35 - Estado intervalar fuzzy x_1 para o Exemplo numérico 4.4.2.



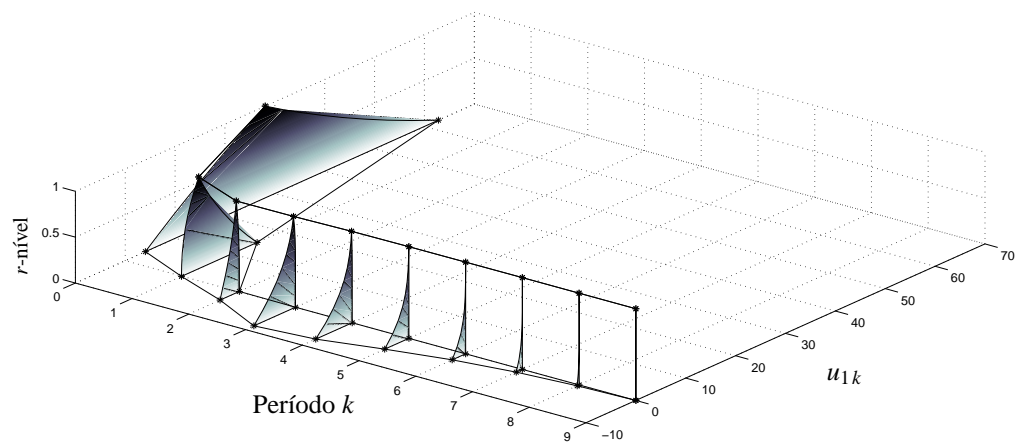
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 36 - Estado intervalar fuzzy x_2 para o Exemplo numérico 4.4.2.



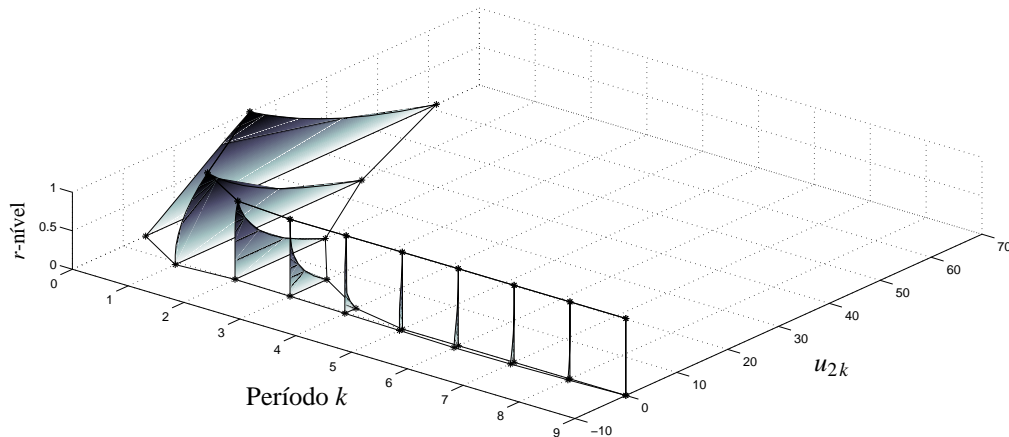
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 37 - Controle intervalar fuzzy u_1 para o Exemplo numérico 4.4.2.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 38 - Controle intervalar fuzzy u_2 para o Exemplo numérico 4.4.2.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

A Figura 35 mostra que o estado intervalar fuzzy x_1 se aproxima e permanece próximo do valor 0 no oitavo período; além disso, a solução intervalar fuzzy é praticamente a mesma para todos os r -níveis a partir do oitavo período. Nos períodos iniciais há um estreitamento da solução intervalar fuzzy no terceiro período. Novamente utilizamos o conceito de distância entre intervalos uma vez que para cada r -nível fixado obtemos um intervalo. A Figura 36 mostra que o estado intervalar fuzzy x_2 apresenta uma grande amplitude nos períodos iniciais e começa a se estreitar por volta do sétimo período. A partir do sétimo período a solução intervalar fuzzy também se aproxima de 0.

A Figura 37 mostra que o controle intervalar fuzzy u_1 se aproxima de 0 no oitavo período. Anteriormente, o controle apresenta grandes variações nos períodos iniciais e um estreitamento pontual da solução no segundo período uma vez que posteriormente a solução volta a ser ligeiramente ampliada. Interessante destacar que a solução intervalar fuzzy superior se aproxima de 0 a partir do segundo período para todos os r -níveis. A Figura 38 mostra que o controle intervalar fuzzy u_2 apresenta grandes variações nos períodos iniciais e se aproxima de 0 a partir do quinto período. Por outro lado, a solução intervalar fuzzy inferior do controle intervalar fuzzy u_2 se aproxima de 0 já a partir do segundo período.

4.5 COMENTÁRIOS

O problema de controle ótimo intervalar fuzzy foi proposto e o algoritmo de programação dinâmica foi aplicado para a teoria dos conjuntos fuzzy. Além disso contornamos a complexidade computacional para resolver o PCOIFD usando a aritmética fuzzy restrita de níveis simples. Os exemplos numéricos mostram que o procedimento para resolver problemas de controle

ótimo intervalar fuzzy é eficaz. Um método de defuzzificação ilustra uma solução prática para o tomador de decisão.

5 CONCLUSÕES

Problemas de controle ótimo intervalar e intervalar fuzzy foram propostos sendo que o problema de controle ótimo intervalar em tempo discreto foi resolvido usando a aritmética intervalar restrita de níveis simples e a aritmética intervalar restrita. Já o problema de controle ótimo intervalar fuzzy foi resolvido usando a aritmética fuzzy restrita de níveis simples. Para a solução de todos os problemas propostos utilizamos a técnica de programação dinâmica, e todos os resultados necessários foram construídos para as situações apresentadas. Nos exemplos numéricos a aplicação dos resultados por um usuário final foi realizada com o método denominado mínimo arrependimento para o problema de controle ótimo intervalar e utilizamos o processo de defuzzificação chamado centro de gravidade para o problema de controle ótimo intervalar fuzzy. Mesmo considerando a grande dificuldade computacional que os problemas estudados exigem, os resultados apresentados nesse trabalho mostram viabilidade prática. Portanto, mostramos através de teorias, exemplos e aplicações uma nova forma de estudar problemas de controle ótimo com incerteza. Além disso, cabe destacar que embora as técnicas para resolver os problemas de controle ótimo intervalar e intervalar fuzzy sejam relativamente próximas (fazemos uso da Análise Intervalar em ambas), a utilização ou implementação prática do problema de controle ótimo intervalar e do problema de controle ótimo intervalar fuzzy são distintas. No contexto de otimização esses problemas se referem à otimização com incerteza generalizada e à teoria de otimização flexível.

5.1 PERSPECTIVAS FUTURAS

Para trabalhos futuros pretendemos estudar os problemas de controle ótimo com incerteza usando a aritmética fuzzy restrita e também analisar a estabilidade de sistemas intervalares fuzzy e a estabilidade de sistemas de controle intervalares.

5.2 PARTICIPAÇÃO EM TRABALHOS

A seguir apresentamos uma relação dos trabalhos desenvolvidos pelo autor e colaboradores.

5.2.1 Artigos em periódicos

- Discrete-time interval optimal control problem. *International Journal of Control*, 2017, 7 Páginas. J. R. Campos, E. Assunção, G. N. Silva, W. A. Lodwick e M. C. M. Teixeira.
- Biological control of sugarcane caterpillar (*Diatraea saccharalis*) using interval mathematical models. *International Journal on Mathematical Methods and Models in Biosciences*, 2016, 11 Páginas. J. R. Campos, E. Assunção, G. N. Silva e W. A. Lodwick.
- A programação dinâmica na solução de problemas de controle ótimo com incerteza intervalar. *Biomatemática*, 2016, 13 Páginas. J. R. Campos, E. Assunção, G. N. Silva e W. A. Lodwick.

5.2.2 Artigos em congressos

- Constrained interval arithmetic to solve the discrete-time interval optimal control problem. *V Congresso Brasileiro de Sistemas Fuzzy*. CBSF, Fortaleza - CE, 2018. J. R. Campos, E. Assunção, G. N. Silva, W. A. Lodwick, M. C. M. Teixeira e U. A. S. Leal.
- Problemas de controle ótimo com incerteza intervalar: uma aplicação em Agricultura. *IX Congresso Latino Americano de Biomatemática*. SOLABIMA, Botucatu - SP, 2015. J. R. Campos, E. Assunção, G. N. Silva e W. A. Lodwick.

5.2.3 Apresentação em congresso

- Solution of interval optimal control problem in discrete time using the constrained interval arithmetic. *Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações*. DINCON, São José do Rio Preto - SP, 2017. J. R. Campos, E. Assunção, G. N. Silva, W. A. Lodwick, M. C. M. Teixeira e U. A. S. Leal.

5.2.4 Prêmio

- Prêmio Melhor Trabalho Estudante (2o. Colocado) no V Congresso Brasileiro de Sistemas Fuzzy (CBSF 2018) / 37th North American Fuzzy Information Processing Society Annual Conference (NAFIPS 2018).

REFERÊNCIAS

- ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; FARIA, F. A.; SILVA, N. A. P. D.; CARDIM, R. Robust state-derivative feedback lmi-based designs for multivariable linear systems. **International Journal of Control**, Oxfordshire, v. 80, n. 8, p. 1260–1270, 2007.
- BARROS, L. C. **Sobre sistemas dinâmicos fuzzy: teoria e aplicações**. 1997. 103 f. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) — Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1997.
- BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C. **Tópicos de lógica fuzzy e biomatemática**. Campinas: IMECC-UNICAMP, 2010. 404 p.
- BEDE, B. **Mathematics of fuzzy sets and fuzzy logic**. Berlin: Springer, 2013. 290 p.
- BELLMAN, R. E. **Dynamic programming**. Princeton: Princeton University Press, 1957. 339 p.
- BELLMAN, R. E.; DREYFUS, S. E. **Applied dynamic programming**. Princeton: Princeton University Press, 1962. 382 p.
- BELLMAN, R. E.; ZADEH, L. A. Decision-making in a fuzzy environment. **Management Science**, Catonsville, v. 17, n. 4, p. 141–164, 1970.
- BERTSEKAS, D. P. **Dynamic programming and stochastic control**. New York: Academic Press, 1976. 397 p.
- BERTSEKAS, D. P. **Dynamic programming and optimal control**. Belmont Massachusetts: Athena Scientific, 1995. v. 1, 387 p.
- BHURJEE, A. K.; PANDA, G. Efficient solution of interval optimization problem. **Mathematical Methods of Operations Research**, Heidelberg, v. 76, n. 3, p. 273–288, 2012.
- BOYD, S.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. **Linear matrix inequalities in system and control theory**. Philadelphia: SIAM, 1994. 193 p.
- BUZACHERO, L. F. S. **Otimização de controladores robustos de sistemas dinâmicos sujeitos a falhas estruturais**. 2010. 72 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Ilha Solteira, 2010.
- CAMPOS, J. R.; ASSUNÇÃO, E.; SILVA, G. N.; LODWICK, W. A. Problemas de controle ótimo com incerteza intervalar: uma aplicação em agricultura. In: CONGRESSO LATINO AMERICANO DE BIOMATEMÁTICA, 9., 2015, Botucatu. **Anais...** Botucatu: SOLABIMA, 2015. p. 1–4. Disponível em: <<http://www.inscricoes.fmb.unesp.br/upload/trabalhos-/2015410214735.pdf>>. Acesso em: 6 nov. 2018.

- CAMPOS, J. R.; ASSUNÇÃO, E.; SILVA, G. N.; LODWICK, W. A. Biological control of sugarcane caterpillar (*diatraea saccharalis*) using interval mathematical models. **International Journal on Mathematical Methods and Models in Biosciences**, Sofia, v. 5, n. 1, p. 1–11, 2016.
- CAMPOS, J. R.; ASSUNÇÃO, E.; SILVA, G. N.; LODWICK, W. A. A programação dinâmica na solução de problemas de controle ótimo com incerteza intervalar. **Biomatemática**, Campinas, v. 26, n. 1, p. 13–24, 2016.
- CAMPOS, J. R.; ASSUNÇÃO, E.; SILVA, G. N.; LODWICK, W. A.; TEIXEIRA, M. C. M. Discrete-time interval optimal control problem. **International Journal of Control**, Oxfordshire, v. 1, n. 1, p. 1–7, 2017.
- CAMPOS, J. R.; ASSUNÇÃO, E.; SILVA, G. N.; LODWICK, W. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; LEAL, U. A. S. Constrained interval arithmetic to solve the discrete-time interval optimal control problem. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE SISTEMAS FUZZY, 5., 2018, Fortaleza. **Anais...** Fortaleza: SBMAC, 2018. p. 1–12. Disponível em: <<https://sites.google.com/site/brazilianfuzzy/>>. Acesso em: 7 nov. 2018.
- CERDÁ, E. **Optimización dinámica**. Madri: Pearson Educación, 2001. 336 p.
- CHALCO-CANO, Y.; LODWICK, W. A.; BEDE, B. Single-level constraint interval arithmetic. **Fuzzy Sets and Systems**, Amsterdam, v. 257, n. 1, p. 146–168, 2014.
- COSTA, T. M.; BOUWMEESTER, H.; LODWICK, W. A.; LAVOR, C. Calculating the possible conformations arising from uncertainty in the molecular distance geometry problem using constraint interval analysis. **Information Sciences**, Amsterdam, v. 415–416, n. 1, p. 41–52, 2017.
- DINIZ, M. M.; BASSANEZI, R. C. Problema de controle ótimo com equações de estado p-fuzzy: programação dinâmica. **Biomatemática**, Campinas, v. 23, n. 1, p. 33–42, 2013.
- DRIANKOV, D.; HELLENDORRN, H.; REINFRANK, M. **An introduction to fuzzy control**. Berlin: Springer-Verlag, 1996. 316 p.
- FARD, O. S.; RAMEZANZADEH, M. On fuzzy portfolio selection problems: a parametric representation approach. **Complexity**, London, v. 2017, n. 1, p. 1–12, 2017.
- FARHADINIA, B. Pontryagin's minimum principle for fuzzy optimal control problems. **Iranian Journal of Fuzzy Systems**, Zahedan, v. 11, n. 2, p. 27–43, 2014.
- FILEV, D.; ANGELOV, P. Fuzzy optimal control. **Fuzzy Sets and Systems**, Amsterdam, v. 47, n. 2, p. 151–156, 1992.
- HANSEN, E. R. **Global optimization using interval arithmetic**. New York: Marcel Dekker, 1992. 230 p.
- HUAMÁN, G. G. M. **Introdução à análise intervalar em níveis simples e extensão de Zadeh**. 2014. 105 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, São José do Rio Preto, 2014.

- JAULIN, L.; KIEFFER, M.; DIDRIT, O.; WALTER, E. **Applied interval analysis**. New York: Springer, 2001. 379 p.
- KAUCHER, E. Interval analysis in the extended space $\mathbb{I}(\mathbb{R})$. **Computing**, Vienna, v. 2, n. 1, p. 33–49, 1980.
- KAUFMANN, A.; GUPTA, M. M. **Introduction to fuzzy arithmetic: theory and applications**. New York: Van Nostrand Reinhold Company, 1985. 351 p.
- KENNEDY, J. O. S. **Dynamic programming: applications to agriculture and natural resources**. New York: Elsevier Applied Science Publishers, 1986. 341 p.
- LEAL, U. A. S. **Incerteza intervalar em otimização e controle**. 2015. 162 f. Tese (Doutorado em Matemática) — Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, São José do Rio Preto, 2015.
- LI, J.; WANG, H. O.; BUSHNELL, L.; HONG, Y.; TANAKA, K. A fuzzy logic approach to optimal control of nonlinear systems. **International Journal of Fuzzy Systems**, Heidelberg, v. 2, n. 3, p. 153–163, 2000.
- LIU, B. **Uncertainty theory: an introduction to its axiomatic foundations**. Berlin: Springer-Verlag, 2004. 411 p.
- LIU, B.; LIU, Y. K. Expected value of fuzzy variable and fuzzy expected value models. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Piscataway, v. 10, n. 4, p. 445–450, 2002.
- LODWICK, W. A. **Constrained interval arithmetic**. Denver: University of Colorado, 1999. 11 p.
- LODWICK, W. A. Interval and fuzzy analysis: an unified approach. **Advances in Imaging and Electronic Physics**, Amsterdam, v. 148, n. 1, p. 75–192, 2007.
- LODWICK, W. A. An overview of flexibility and generalized uncertainty in optimization. **Computational & Applied Mathematics**, São Carlos, v. 31, n. 3, p. 569–589, 2012.
- LODWICK, W. A.; JENKINS, O. A. Constrained interval and interval spaces. **Soft Computing**, Heidelberg, v. 17, n. 8, p. 1393–1402, 2013.
- LODWICK, W. A.; THIPWIWATPOTJANA, P. **Flexible and generalized uncertainty optimization: theory and methods**. Cham: Springer, 2017. 190 p.
- LORDELO, A. D. S. **Análise e projeto de controladores robustos por alocação de pólos via análise intervalar**. 2004. 83 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2004.
- LORDELO, A. D. S.; FERREIRA, P. A. V. Análise intervalar e projeto de controladores robustos via programação alvo. **Revista Controle & Automação**, Campinas, v. 16, n. 2, p. 111–123, 2005.
- MARKOV, S. M. Extended interval arithmetic. **Compt. Rend. Acad. Bulg. Sci.**, Sofia, v. 30, n. 9, p. 1239–1242, 1977.

- MOORE, R. E. **Automatic error analysis in digital computation**. Sunnyvale: Missiles and Space Division, 1959. 59 p.
- MOORE, R. E. **Interval analysis**. New Jersey: Prentice Hall, 1966. 145 p.
- MOORE, R. E. **Methods and applications of interval analysis**. Philadelphia: SIAM, 1979. 190 p.
- MORRISON, T.; GREENBERG, H. J. Robust optimization. In: RAVINDRAN, A. R. (Ed.). **Operations Research and Management Science Handbook**. Boca Raton: CRC Press, 2008. p. 1–34.
- NAJARIYAN, M.; FARAH, M. H. Optimal control of fuzzy linear controlled system with fuzzy initial conditions. **Iranian Journal of Fuzzy Systems**, Zahedan, v. 10, n. 3, p. 21–35, 2013.
- NAJARIYAN, M.; FARAH, M. H. A new approach for solving a class of fuzzy optimal control systems under generalized hukuhara differentiability. **Journal of the Franklin Institute**, Amsterdam, v. 352, n. 5, p. 1836–1849, 2015.
- NÓBREGA, G. A. S. **Integrais de linha intervalares: fundamentos e aplicações**. 2010. 58 f. Dissertação (Mestrado em Sistemas e Computação) — Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2010.
- PASSINO, K. M.; YURKOVICH, S. **Fuzzy control**. California: Addison–Wesley, 1998. 502 p.
- PHILLIPS, G. M. Archimedes the numerical analyst. **The American Mathematical Monthly**, Oxfordshire, v. 88, n. 3, p. 165–169, 1981.
- PINCH, E. R. **Optimal control and the calculus of variations**. New York: Oxford University Press, 1997. 234 p.
- PONTRYAGIN, L. S. Optimal processes of regulation. In: INTERNATIONAL CONGRESSES OF MATHEMATICIANS, 1., 1958, Cambridge. **Proceedings...** Cambridge: Cambridge University Press, 1958. p. 182–202. Disponível em: <<https://www.mathunion.org/fileadmin/ICM/Proceedings/ICM1958/ICM1958.ocr.pdf>>. Acesso em: 6 nov. 2018.
- PONTRYAGIN, L. S.; BOLTYANSKY, V. G.; GAMKRELIDZE, P. V.; MISCHENKO, E. F. **The mathematical theory of optimal processes**. New York: Interscience Publishers, 1962. 360 p.
- PRADO, M. L. M. **Controle robusto por alocação de pólos via análise intervalar modal**. 2006. 102 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2006.
- ROHN, J. **Systems of linear interval equations**. New York: Elsevier Science Publishing, 1989. 40 p.
- STEFANINI, L.; BEDE, B. Generalized hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations. **Nonlinear Analysis**, Amsterdam, v. 71, n. 3–4, p. 1311–1328, 2009.

TAHA, H. A. **Pesquisa operacional**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008. 359 p.

TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; AVELLAR, R. G. On relaxed lmi-based designs for fuzzy regulators and fuzzy observers. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Piscataway, v. 11, n. 5, p. 613–623, 2003.

THIPWIWATPOTJANA, P. **Linear programming problems for generalized uncertainty**. 2010. 173 f. Tese (Doutorado em Matemática e Ciências Estatísticas) — Department of Mathematical and Statistical Sciences, University of Colorado, Denver, 2010.

ZHAO, Y.; ZHU, Y. Fuzzy optimal control of linear quadratic models. **Computers & Mathematics with Applications**, Amsterdam, v. 60, n. 1, p. 67–73, 2010.

ZIMMERMANN, H. J. Fuzzy mathematical programming. **Computers & Operations Research**, Amsterdam, v. 10, n. 4, p. 291–298, 1983.

APÊNDICE A - IMPLEMENTAÇÃO DO ALGORITMO DE PROGRAMAÇÃO DINÂMICA

Nesta seção mostramos a implementação do algoritmo de programação dinâmica que resolve o problema de controle ótimo intervalar em tempo discreto. A implementação será apresentada para ilustrar o Exemplo Numérico 2.4.1, mas pode também ser adaptada para os demais exemplos e, inclusive, para o problema de controle ótimo intervalar fuzzy em tempo discreto. Dividimos a obtenção da solução do Exemplo Numérico 2.4.1 em duas partes, sendo que a primeira parte apresenta a solução usando a programação dinâmica e a implementação foi realizada no MATLAB 7.4. A segunda parte mostra o procedimento de minimização e maximização construída no MAPLE 15.

Software MATLAB

Mostramos abaixo as linhas de comando que foram usadas para resolver o problema de controle ótimo intervalar. O código do programa segue a seguir:

```
% Implementação do algoritmo de programação dinâmica para o Exemplo Numérico 2.4.1.

clear all; format short;
t = 5;
syms J lambda u5 u4 u3 u2 u1 x6 x5 x4 x3 x2 x1;
u = []; x = [];
for j = 1 : 1 : t + 1
u = [u; sym(['u' num2str(j)])]; x = [x; sym(['x' num2str(j)])];
end
J(t + 1) = 500 * (x(t + 1) - 150) ^ 2;
for N = t : -1 : 1
sis1 = (0.2 + 0.6 * lambda) * x(N) + 0.5 * u(N); Func = u(N) ^ 2;
JJ(N) = subs(Func + J(N + 1), {x(N + 1)}, {sis1});
JJ1(N) = simplify(JJ(N));
b1(N) = diff(JJ1(N), u(N));
[p1(N)] = solve(b1(N), u(N));
[p(N)] = simplify(p1(N));
J1(N) = subs(JJ(N), {u(N)}, {p(N)});
```

```

J(N) = simplify(J1(N));
end
for N = 1 : 1 : t
x(N+1) = (0.2 + 0.6 * lambda) * x(N) + 0.5 * p(N);
end

```

Software MAPLE

A implementação do algoritmo de programação dinâmica no MATLAB fornece a solução para o problema de controle ótimo intervalar em função de λ conforme pode ser observado no Capítulo 2, Exemplo Numérico 2.4.1. Logo, o estado, o controle e o funcional estão em função de λ e podemos obter o seu valor mínimo e máximo para cada estágio. Ilustramos parte desse processo com o software MAPLE. Note que, em geral, temos expressões racionais polinomiais para executar o processo de minimização e maximização.

```

# Continuação da solução do Exemplo Numérico 2.4.1: minimização e maximização.
x1 := 40 :
u1 := -4 * (78732 * lambda ^ 9 + 236196 * lambda ^ 8 + 314928 * lambda ^ 7 + 244944 * lambda ^ 6
+ 122472 * lambda ^ 5 - 3756051 * lambda ^ 4 - 5053428 * lambda ^ 3 - 2529954 * lambda ^ 2
- 562392 * lambda - 46871) ÷ (6561 * lambda ^ 8 + 17496 * lambda ^ 7 + 38637 * lambda ^ 6
+ 50058 * lambda ^ 5 + 86670 * lambda ^ 4 + 82512 * lambda ^ 3
+ 178002 * lambda ^ 2 + 101724 * lambda + 410026) :
u11 := simplify(u1);
u111 := minimize(u11, lambda = 0..1) : u1_min := evalf(u111);
u112 := maximize(u11, lambda = 0..1) : u1_max := evalf(u112);

x2 := 150 * (2916 * lambda ^ 7 + 6804 * lambda ^ 6 + 14904 * lambda ^ 5 + 67905 * lambda ^ 4
+ 100260 * lambda ^ 3 + 59502 * lambda ^ 2 + 78528 * lambda + 22493)
÷ (6561 * lambda ^ 8 + 17496 * lambda ^ 7 + 38637 * lambda ^ 6 + 50058 * lambda ^ 5
+ 86670 * lambda ^ 4 + 82512 * lambda ^ 3 + 178002 * lambda ^ 2 + 101724 * lambda + 410026) :
x21 := simplify(x2);
x211 := minimize(x21, lambda = 0..1) : x2_min := evalf(x211);
x212 := maximize(x21, lambda = 0..1) : x2_max := evalf(x212);

```