



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Um estudo sobre tensores de segunda ordem

Tiago Domingues Palma

**Rio Claro
2018**



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Um estudo sobre tensores de segunda ordem

Tiago Domingues Palma

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, mestrado profissional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de Rio Claro.

Orientadora
Profa. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi

Rio Claro
2018

P171e	Palma, Tiago Domingues Um estudo sobre tensores de segunda ordem / Tiago Domingues Palma. -- Rio Claro, 2018 55 p. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro Orientadora: Alice Kimie Miwa Libardi 1. Álgebra. 2. Tensor. 3. Tensor de tensão. I. Título.
-------	---

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

TERMO DE APROVAÇÃO

Tiago Domingues Palma

UM ESTUDO SOBRE TENSORES DE SEGUNDA ORDEM

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Matemática, mestrado profissional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi
Orientadora

Prof. Dra. Renata Zotin Gomes de Oliveira
Departamento Matemática - UNESP

Prof. Dra. Elaine Cristina Catapani Poletti
Departamento Matemática - UNICAMP

Rio Claro, 18 de dezembro de 2018

A minha amorosa esposa, Thais, e aos meus pais, Nelson e Carmem, dedico.

Agradecimentos

A Deus por ter me guiado em meus caminhos e dado sabedoria.

À minha esposa amada, Thais, que mostrou muita compreensão, ajuda e apoio, principalmente na época que mais precisei, me encorajando a continuar e mostrando carinho, sempre confiando no meu trabalho.

À minha amada família por todo apoio e encorajamento.

À minha orientadora, Profa. Dra. Alice K. M. Libardi, pela paciência ao me orientar e dividir um pouco do seu grande conhecimento na área de atuação, me deixando um exemplo a seguir. Não posso esquecer dos outros professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática do IGCE-UNESP- Rio Claro-SP, por mostrarem grande habilidade tanto ao ensinar como ao aconselhar no decorrer do curso, em especial, Profa. Dra. Suzete M. Silva Afonso. Aos funcionários da Seção Técnica de Pós, em especial à Inajara, sempre pronta para esclarecer qualquer dúvida relacionada ao programa.

Aos meus colegas de curso por dividirem suas experiências e me motivarem durante todo período cursado, deixando o curso ainda mais agradável.

Ao IFSP por permitir me afastar para concluir a pós-graduação e possuir uma melhor qualificação profissional.

*Toda a educação científica que não se inicia com a Matemática,
é naturalmente, imperfeita na sua base.*
Auguste Conte

Resumo

O objetivo dessa dissertação é apresentar algumas observações sobre os tensores de segunda ordem, da forma como são vistos nas engenharias, usando conceitos de Álgebra Linear. Trata-se de um estudo introdutório, que pretende motivar os professores de matemática que atuam em cursos de engenharia a tornarem suas aulas com enfoque maior na área de atuação dos alunos.

Palavras-chave: Álgebra, Tensor, Tensor de tensão.

Abstract

The main goal of this dissertation is to present remarks on tensor, from the engineer's point of view by using Linear Algebra. Actually, the study is quite introductory but aims to motivate mathematics teachers in engineering courses to make their classes more focused on the area of their activity.

Keywords: Algebra, Tensor, Stres Tensor.

Lista de Figuras

1	Plano de corte em um corpo K	19
2	Tensor tensão. [3]	20
1.1	Orientação na reta	23
1.2	Orientação no plano	23
1.3	Bases E e F com mesma orientação.	24
1.4	Bases E e F com orientações opostas.	24
1.5	Orientação positiva	25
1.6	Orientação negativa.	26
1.7	Vetor A usando os eixos x_1, x_2, x_3 [3]	26
1.8	Vetor A usando os eixos x'_1, x'_2, x'_3 [3]	28
1.9	Cossenos diretores em relação aos eixos x'_q . [3]	28
1.10	Cossenos Diretores no plano. [3]	29
2.1	Exemplo de um uso para mudança de eixos. [3]	34
2.2	Área de cada face do tetraedro [3]	38
2.3	Componentes de tensão e mudança na orientação. [3]	38
3.1	Ação das componentes de tensão. [3]	41
3.2	Componentes de tensão em relação a um novo sistema de eixos.	42
3.3	Tensões principais. [3]	43
3.4	Direção das tensões nos eixos x'_1 e x'_2 . [3]	43
3.5	Análise das tensões usando o Círculo de Mohr. [3]	43
3.6	Círculos de Mohr. [3]	45
3.7	Análise de tensões e tensor isotrópico. [3]	45
3.8	Momento de inércia de uma barra cilíndrica [3]	46
3.9	Tensores Isotrópicos. [3]	46
4.1	Exemplos de produtos vetoriais. [3]	53

Sumário

Introdução	19
1 Conceitos básicos	21
1.1 Álgebra Linear	21
2 Tensores de segunda ordem	33
2.1 As relações entre os nove cossenos diretores que compõem a matriz . .	33
2.2 O Delta de Kronecker	35
2.3 O produto de dois tensores	36
3 Tensores simétricos de segunda ordem	41
3.1 Círculo de Mohr de Tensão	41
3.2 Eixos principais de um tensor simétrico	44
3.3 O Delta de Kronecker como um tensor de segunda ordem	47
4 Os invariantes de um tensor de segunda ordem	49
4.1 Os invariantes de um tensor de segunda ordem	50
4.2 Os autovetores de um tensor de segunda ordem	53
Referências	55

Introdução

A Teoria de Elasticidade é um ramo da Mecânica dos Sólidos que estuda os esforços internos, as deformações e deslocamentos produzidos em um corpo sólido deformável por um conjunto de esforços externos [5].

Em geral, usa-se métodos matemáticos para se chegar à distribuição dos esforços internos e das deformações e deslocamentos.

O objetivo desse trabalho é apresentar um dos tensores de segunda ordem: Tensor de Tensão, tendo como pré-requisitos conceitos de Álgebra Linear.

O que é tensão? Seja K um corpo submetido a esforços em equilíbrio os quais, podem ser de vários tipos. Considere um plano de corte passando por $A \in K$, dividindo o corpo K em duas partes. Alguns esforços iniciais, que restarem, aplicados em uma das partes não estarão em geral, em equilíbrio. Isso significa que antes do corte existiam esforços internos sendo transmitidos de uma parte para a outra do corpo que garantiam o equilíbrio de cada parte separadamente.

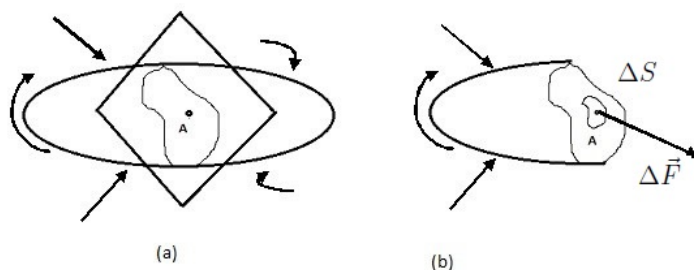


Figura 1: Plano de corte em um corpo K

Na Figura 1(b), tem-se:

ΔS : elemento de área contido no plano de corte e contendo o ponto A .

$\Delta \vec{F}$: resultante dos esforços internos na região de área ΔS .

A tensão no ponto A é definida no corte considerado por:

$$\vec{\sigma}_A = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta S},$$

desde que $\Delta S \subset A$.

Pode se observar que a tensão em um ponto tem 6 elementos:

- um escalar: 1 elemento, sendo ΔS ,
- um vetor: 3 elementos, sendo $\Delta \vec{F}$,
- direção de um plano no espaço: 2 elementos (exemplo: cossenos diretores da normal ao plano).

Sendo assim tensão não é uma grandeza vetorial. Será visto no capítulo 3 que ela constitui um tensor simétrico de segunda ordem, o qual para determinarmos precisamos de 6 elementos. Um estado de tensão em um ponto é o conjunto das tensões em três cortes ortogonais (adotaremos no caso), ou seja, se analisarmos as tensões em três cortes feitos em um ponto com o sistema de eixos adotados, conseguimos determinar a tensão em qualquer corte neste mesmo ponto.

O que seria um tensor de tensão? Para entender considere um tetraedro infinitesimal retirado de um corpo em estudo. Esse tetraedro possui três faces perpendiculares aos eixos adotados e uma quarta face definida pela normal externa de vetor unitário \vec{e} , além dos e o cossenos diretores $\lambda_{11}, \lambda_{12}$ e λ_{13} . Para que possamos considerar todos valores de tensões como referentes ao ponto A , consideremos a distância entre A e face do tetraedro dada pela normal, sendo a distância infinitesimal denotada por h .

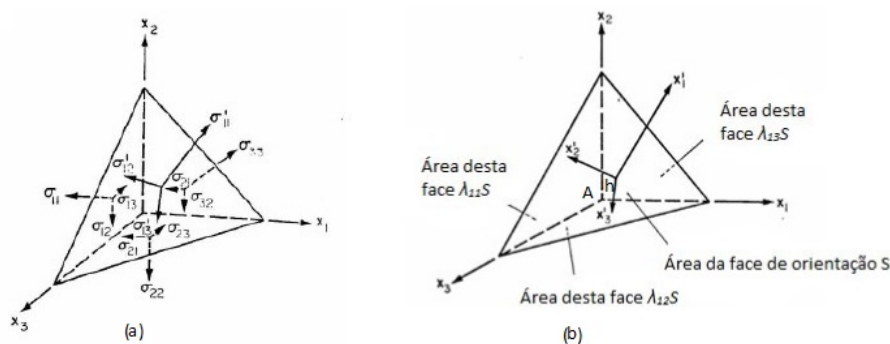


Figura 2: Tensor tensão. [3]

Sendo S a área da face inclinada, temos na Figura 2(b) a área de cada face. Na Figura 2(a) encontramos as tensões atuantes no tetraedro e no capítulo 2 iremos mostrar como determinamos as tensões na face inclinada.

Essa dissertação é constituída de 4 capítulos. Em todo trabalho, colocaremos as referências nas figuras utilizadas de outras fontes. As figuras sem referências foram confeccionadas pelo autor.

No capítulo 1 estão apresentados os conceitos de Álgebra Linear que são utilizados no desenvolvimento da dissertação.

No capítulo 2 definimos tensores de segunda ordem e suas propriedades.

No capítulo 3, apresentamos tensores simétricos de segunda ordem e tensor de tensão.

No capítulo 4 falaremos sobre os invariantes, definimos autovetores e autovalores de um tensor.

1 Conceitos básicos

Neste capítulo apresentamos alguns conceitos básicos de Álgebra Linear que serão necessários para o desenvolvimento do trabalho.

1.1 Álgebra Linear

Definição 1.1. *Espaços vetoriais*

Seja um conjunto V munido de duas operações: adição e multiplicação por elementos de um corpo K . V será dito um espaço vetorial sobre K , se satisfaz as seguintes condições:

A1) Associativa: $(u + v) + w = u + (v + w)$, para todos $u, v, w, \in V$.

A2) Comutativa: $u + v = v + u$, para todos $u, v \in V$.

A3) Elemento neutro: existe $0 \in V$, tal que $v + 0 = v$, para todo $v \in V$.

A4) Oposto: para todo $v \in V$, existe $-v \in V$ tal que $v + (-v) = 0$.

E além disso, a multiplicação dos elementos de V por elementos de K deve satisfazer:

ME1) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$, para todos $\alpha \in K$ e $u, v \in V$.

ME2) $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$, para todos $\alpha, \beta \in K$ e $v \in V$.

ME3) $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$ para todos $\alpha, \beta \in K$ e $v \in V$.

ME4) $1v = v$, para todo $v \in V$.

Os elementos de V serão denominados vetores e os elementos do corpo K de escalares. O elemento 0 de V será chamado de vetor nulo e o elemento $-v$ de vetor oposto de v .

Definição 1.2. *Subespaços vetoriais*

Sejam V um espaço vetorial sobre K e W um subconjunto **não vazio** de V . Dizemos que W é um subespaço vetorial de V se as seguintes condições são satisfeitas:

i) para todos $u, v \in W$, tem-se $u + v \in W$;

ii) para todos $\alpha \in K$ e $u \in W$, tem-se $\alpha u \in W$

Definição 1.3. *Bases*

Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K . Uma sequência $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de V que satisfaz as condições abaixo é uma base de V :

(i) B é um conjunto gerador de V ; ou seja, qualquer elemento v de V se escreve como combinação linear de elementos de B ou seja, $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$, onde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são escalares.

(ii) B é linearmente independente.

Se B é uma base de V e $v \in V$ for escrito como $v = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ então, chamamos (x_1, \dots, x_n) de coordenadas ou componentes de v em relação à base B e x_i a i -ésima coordenada.

No caso em que a base tem um número finito de elementos, diremos que o espaço vetorial tem dimensão finita n .

Neste trabalho, todos os espaços vetoriais serão considerados de dimensão finita.

Recordemos que os elementos v_1, v_2, \dots, v_n são linearmente dependentes se existirem escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, não todos nulos, tais que:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0.$$

Caso contrário, v_1, v_2, \dots, v_n são linearmente independentes.

Definição 1.4. *Produto interno*

Seja V um espaço vetorial real. Um produto interno em V é uma função

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

que satisfaz

P1) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$, para todos $u, v \in V$;

P2) $\langle u, w + v \rangle = \langle u, w \rangle + \langle u, v \rangle$, para todos $u, v, w \in V$;

P3) $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$, para todos $u, v \in V$ e todo $\alpha \in \mathbb{R}$;

P4) $\langle u, u \rangle \geq 0$ para todo $u \in V$ e $\langle u, u \rangle = 0$ se, e somente se, $u = 0$.

Dois vetores são ortogonais se o produto interno entre eles é zero. Se forem também unitários, diremos que são ortonormais.

O conceito de produto interno é necessário porque vamos trabalhar com um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, onde se tem uma representação mais simples.

Por exemplo se uma matriz M é ortogonal e I é a matriz identidade, temos:

$$M.M^{-1} = I = M^T.M, \text{ então, } M^{-1} = M^T.$$

Formalmente, temos:

Definição 1.5. *Sejam $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $B' = \{w_1, \dots, w_n\}$ duas bases de um espaço vetorial V de dimensão n .*

Chama-se matriz mudança de base B para B' a matriz M definida por $w_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} v_k$, onde a i -ésima coluna da M é formada pelas componentes do vetor w_i em relação a base B . Notação $M_B^{B'}$

Orientação na reta: Um ponto 0 em uma reta r determina duas regiões distintas, conforme vemos na Figura 1.1.

Não podemos tomar como referência direita ou esquerda pois isto depende de um referencial exterior à reta. Podemos dizer que a reta está orientada se tivermos uma base $E = \{\vec{e}_1\}$ para a reta, assim determinamos a região que contém $P = 0 + \vec{e}_1$ e a que não contém.

Uma outra base $F = \{\vec{u}_1\}$ determina a mesma orientação se os sentidos de \vec{e}_1 e \vec{u}_1 coincidem, ou seja, se $\vec{u}_1 = \alpha \vec{e}_1$ com $\alpha > 0$. Então, $M_E^F = (\alpha)$, portanto $\det M_E^F > 0$, onde M_E^F denota matriz mudança da base E para F .

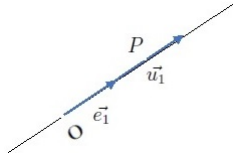


Figura 1.1: Orientação na reta

Orientação no plano: Dados uma base $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ e um ponto \mathbf{O} de um plano β , note que a reta passando por \mathbf{O} , direcionando o vetor \vec{e}_1 , divide o plano em duas regiões distintas: a que contém o ponto $P' = \mathbf{O} + \vec{e}_2$ e a que não contém. Se rotacionarmos o segmento OP na região que contém P' até definirmos a direção do vetor \vec{OP}' , encontramos o arco $\widehat{PAP''}$, indicado na Figura 1.2.

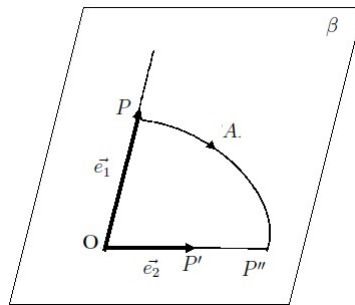


Figura 1.2: Orientação no plano

Assim a base $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ determina a orientação do plano, segundo o sentido de $\widehat{PAP''}$.

Considere uma outra base $F = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$ para o plano β seguindo o mesmo procedimento que foi feito para base E . Teremos:

- a) a mesma orientação nas bases E e F , se o sentido do arco descrito por essa rotação for o mesmo do arco $\widehat{PAP''}$.
- b) caso contrário, teremos orientações opostas nas bases E e F .

Proposição: Duas bases E e F possuem a mesma orientação se, e somente se, $\det M_E^F > 0$.

Demonstração. Considere $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ e $F = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$ bases ortonormais.

Se E e F são duas bases ortonormais de mesma orientação, podem ficar dispostas como na Figura 1.3.

Seja θ o ângulo entre \vec{f}_1 e \vec{e}_1 , então:

$$\vec{f}_1 = (\cos \theta) \vec{e}_1 + (\sin \theta) \vec{e}_2$$

Como as bases possuem mesma orientação, o ângulo entre \vec{f}_2 e \vec{e}_1 será $\theta + \frac{\pi}{2}$, então:

$$\vec{f}_2 = \cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \vec{e}_1 + \sin \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \vec{e}_2 = -\sin \theta \vec{e}_1 + \cos \theta \vec{e}_2.$$

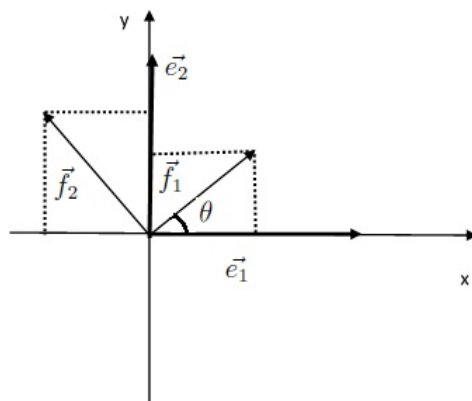


Figura 1.3: Bases E e F com mesma orientação.

Com isso obtemos:

$$M_E^F = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Portanto : $\det M_E^F = \cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1 > 0$

Agora demonstraremos a recíproca, ou seja, se E e F tem orientações opostas, então $\det M_E^F < 0$.

Se E e F são bases ortonormais com orientações opostas, como exemplo a Figura 1.4:

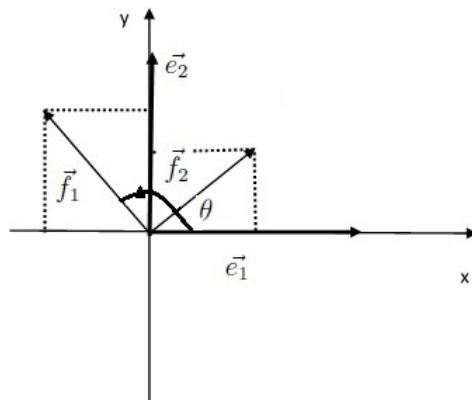


Figura 1.4: Bases E e F com orientações opostas.

Se θ é o ângulo entre \vec{f}_1 e \vec{e}_1 , logo o ângulo entre \vec{f}_2 e \vec{e}_1 é $\theta - \frac{\pi}{2}$. Assim temos:

$$\vec{f}_1 = \cos\theta\vec{e}_1 + \text{sen}\theta\vec{e}_2$$

$$\vec{f}_2 = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\vec{e}_1 + \text{sen}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\vec{e}_2 = \text{sen}\theta\vec{e}_1 - \cos\theta\vec{e}_2.$$

Com isso:

$$M_E^F = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

Portanto : $\det M_E^F = -\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = -1 < 0$

□

Orientação no espaço: Para saber como uma base determina uma orientação no espaço usaremos uma maneira geométrica.

Seja uma base $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ do espaço e β um plano que contém os vetores \vec{e}_1 e \vec{e}_2 da base e $\mathbf{0}$ um ponto no plano β . A reta que passa por $\mathbf{0}$ e determina a direção do vetor \vec{e}_1 , divide o plano em duas regiões, e também, esse plano divide o espaço em duas regiões, a que contém o ponto $\mathbf{0} + \vec{e}_3$ e a que não contém. Usando a mão direita com dedos abertos no sentido de \vec{e}_1 , com a palma da mão não voltada para a região do plano que contém o ponto $\mathbf{0} + \vec{e}_2$ e rotacionarmos de \vec{e}_1 para \vec{e}_2 , nesta região, tal como na Figura 1.5.

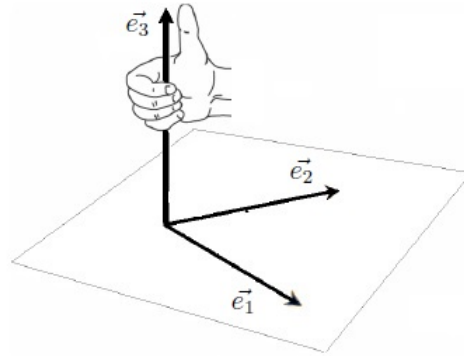


Figura 1.5: Orientação positiva

Suponhamos que na direção do polegar nesta região está o ponto $\mathbf{0} + \vec{e}_3$.

Considere agora uma outra base $F = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ para o espaço e da mesma maneira que consideramos a base E , fizéssemos com a base F , dizemos que E e F possuem mesma orientação se o ponto $\mathbf{0} + \vec{f}_3$ estiver na mesma direção do polegar, caso contrário E e F possuem direções opostas. Por convenção uma base $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ tem direção positiva se o ponto $\mathbf{0} + \vec{e}_3$ estiver na mesma região indicada pelo polegar. Caso contrário, dizemos que a direção é negativa, conforme a Figura 1.6.

Definição 1.6. Um sistema de coordenadas cartesianas ortogonal para um espaço é um conjunto S constituído de um ponto \mathbb{O} no espaço e uma base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ constituída por vetores dois a dois ortogonais. Será denotado por $S = (\mathbb{O}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

No nosso caso consideraremos uma base de vetores ortonormais.

Definição 1.7. Chamamos de cossenos diretores de um vetor $\vec{v} \neq 0$ aos cossenos dos ângulos que o vetor \vec{v} forma com os vetores da base. Se $v = (x, y, z)$ em relação à base canônica $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ e α, β, γ são os ângulos que o vetor v forma com os vetores da base, então:

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

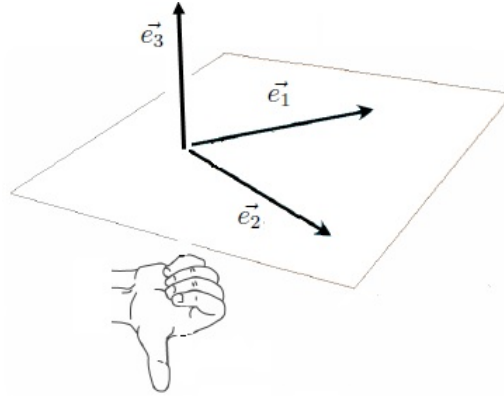


Figura 1.6: Orientação negativa.

Os cossenos diretores de v são exatamente as coordenadas do versor de v . Vale a relação $(\cos\alpha)^2 + (\cos\beta)^2 + (\cos\gamma)^2 = 1$

Neste trabalho, representaremos os eixos coordenados por $\{x_1, x_2, x_3\}$ e por $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ a base canônica, i.e., base formada por vetores ortonormais. Um vetor \mathbf{A} em relação ao sistema de coordenadas determinado por x_1, x_2, x_3 , será denotado por $A = (A_1, A_2, A_3)$, onde A_1, A_2, A_3 são as coordenadas, ou ainda $A = A_1\vec{e}_1 + A_2\vec{e}_2 + A_3\vec{e}_3$.

É de grande ajuda pensar em uma caixa com lados de comprimento A_1, A_2, A_3 , nas direções dos eixos coordenados. O vetor $A = (A_1, A_2, A_3)$ é representado pela classe de equivalência da diagonal de dentro da caixa.

Assim sendo, um mesmo vetor A pode constituir a diagonal de quantas caixas que se deseja criar. Para cada conjunto escolhido de eixos há uma tripla ordenada, mas todas essas triplas são formas diferentes de definir o mesmo vetor. Na realidade, um vetor é uma classe de equivalência.

Tomando a “diagonal de dentro de uma caixa”, as componentes de um vetor A em relação aos eixos x_1, x_2, x_3 são A_1, A_2, A_3 e adotando eixos x'_1, x'_2, x'_3 temos A'_1, A'_2, A'_3 . Queremos determinar a fórmula que liga as componentes de A em relação aos dois eixos coordenados.

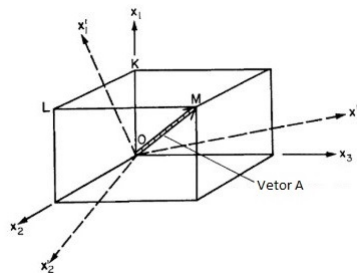


Figura 1.7: Vetor A usando os eixos x_1, x_2, x_3 [3]

O tamanho de A , em termos de A_1, A_2 e A_3 é encontrado da seguinte forma (ver Figura 1.7). Imagine o vetor sendo representado por OM , movendo-se de O para M tomando o caminho $OKLM$, onde $OK = A_1, KL = A_2, LM = A_3$. Suponha que

OK tem a componente $\lambda_{11}A_1$ na direção x'_1 ,
 KL tem a componente $\lambda_{12}A_2$ na direção x'_1 ,

LM tem a componente $\lambda_{13}A_3$ na direção x'_1 ,

e assim temos:

$$\begin{cases} A'_1 = \lambda_{11}A_1 + \lambda_{12}A_2 + \lambda_{13}A_3 \\ A'_2 = \lambda_{21}A_1 + \lambda_{22}A_2 + \lambda_{23}A_3 \\ A'_3 = \lambda_{31}A_1 + \lambda_{32}A_2 + \lambda_{33}A_3 \end{cases} \quad (1.1)$$

Podemos facilmente reconhecer um padrão na equação (1.1). Em cada equação notamos o mesmo índice λ para todos os três termos do lado direito, sendo o mesmo que o índice de A'_p no lado esquerdo. Isso permite que se escreva uma única expressão que represente a equação (1.1), da seguinte forma:

$$A'_p = \lambda_{p1}A_1 + \lambda_{p2}A_2 + \lambda_{p3}A_3 \quad p = 1, 2, 3. \quad (1.2)$$

Uma simplificação foi feita, e a notação continua exata e menos complicada. Podemos escrever da seguinte forma:

$$A'_p = \sum_{q=1}^3 \lambda_{pq}A_q \quad p = 1, 2, 3.$$

Outra economia muito marcante, que dá origem à chamada notação de Einstein, muito usada na Engenharia, é a eliminação da notação de somatória, quando um índice ocorre duas vezes no mesmo lado de uma equação e no mesmo termo. Deve ser entendido que a este índice repetido deve ser dado todos os valores possíveis e todos os termos resultantes devem ser adicionados em conjunto. Assim, na notação compactada, a equação (1.2) se escreve:

$$A'_p = \lambda_{pq}A_q \quad q = 1, 2, 3. \quad (1.3)$$

Se observarmos as equações (1.1) e (1.3) notaremos que ambas transmitem a mesma informação. O índice p é livre, e para cada possível valor de p existe uma equação do tipo considerada. O índice q é chamado de índice "dummy", pois tem como intuito mostrar a soma. Então a equação (1.3) poderia ser escrita da seguinte forma :

$$A'_p = \lambda_{pq}A_q. \quad (1.4)$$

Lembrando que a equação (1.4) determina três equações cada uma com três termos do lado direito.

Escrevendo os termos de A' em função de A , precisamos fazer o inverso, ou seja, escrever os termos de A em função de A' . Para isso podemos usar novamente a relação da diagonal de uma caixa, sendo a diagonal o vetor A , tomando como direção os eixo x'_1, x'_2, x'_3 , conforme mostrado na Figura 1.8 a trajetória de O para M , no caminho $OK'L'M$ (onde $OK' = A'_1, K'L' = A'_2, L'M = A'_3$).

Supondo que

OK' tem a componente $\lambda_{11}A'_1$ na direção x_1 ,

$K'L'$ tem a componente $\lambda_{12}A'_2$ na direção x_1 ,

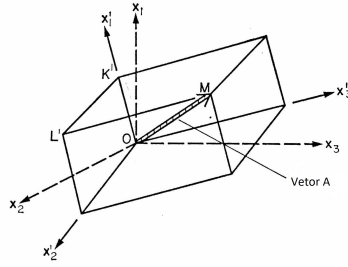


Figura 1.8: Vetor A usando os eixos x'_1, x'_2, x'_3 [3]

$L'M$ tem a componente $\lambda_{13}A'_3$ na direção x_1 ,
tem-se que:

$$\begin{aligned} A_1 &= \lambda_{11}A'_1 + \lambda_{21}A'_2 + \lambda_{31}A'_3 \\ A_2 &= \lambda_{12}A'_1 + \lambda_{22}A'_2 + \lambda_{32}A'_3 \\ A_3 &= \lambda_{13}A'_1 + \lambda_{23}A'_2 + \lambda_{33}A'_3. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Usando a notação compactada, equação (1.5) pode ser escrita

$$A_p = \lambda_{qp}A'_q. \quad (1.6)$$

Nesse ponto queremos já encontrar a equação (1.6) a partir da equação (1.4) sem usar o recurso da Figura 1.8. Tendo dois conjuntos de eixos definidos, como na Figura 1.9, uma questão de escolha o qual deles teremos como conjunto original ou tracejado. Assim as equação (1.3) A'_p torna se A_p , A_q torna se A'_q e λ_{pq} que é o cosseno do ângulo entre as duas linhas que são os eixos x_p e x'_q , sendo então λ_{qp} . Portanto a partir da equação (1.3) obtemos a equação (1.6).

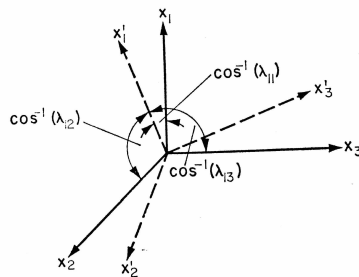


Figura 1.9: Cossenos diretores em relação aos eixos x'_q . [3]

A vantagem de usar as equações (1.3) e (1.6) é que elas podem ser obtidas independente da dimensão. Por exemplo, quando estamos resolvendo em duas dimensões temos :

$$\begin{aligned} A'_1 &= \lambda_{11}A_1 + \lambda_{12}A_2 \\ A'_2 &= \lambda_{21}A_1 + \lambda_{22}A_2 \end{aligned}$$

que podem ser escritos a partir da equação (1.3), assumindo que p e q podem ser 1 e 2. Quando usamos dimensão n a partir da equação (1.3), é claro que temos n associações

em relação à equação (1.6), com $p = 1, 2, 3, \dots, n$ e cada equação possui n termos no lado direito, que correspondem à soma com $q = 1, 2, 3, \dots, n$. As posições dos eixos tracejados em relação aos eixos são determinadas assim que determinarmos o cosseno de nove ângulos. Considere o eixo x'_1 na Figura 1.9, os cossenos dos ângulos entre este eixo e os eixos x_1, x_2, x_3 serão denotados por $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{13}$ respectivamente. De forma análoga, os cossenos dos ângulos determinados por x'_2 com x_1, x_2, x_3 são $\lambda_{21}, \lambda_{22}, \lambda_{23}$ e os determinados por x'_3 são $\lambda_{31}, \lambda_{32}, \lambda_{33}$.

Representaremos esses cossenos diretores pela matriz quadrada.

$$\begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

A matriz dos cossenos diretores, como mostrado acima, é denotada por $[\lambda]$.

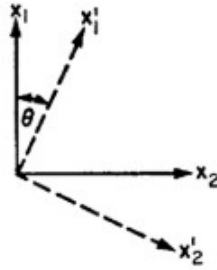


Figura 1.10: Cossenos Diretores no plano. [3]

A matriz dos cossenos diretores da Figura 1.10 será a seguinte:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

Quando estivermos considerando no plano, a matriz fica na forma:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}. \tag{1.9}$$

Essa matriz é conhecida como matriz de rotação e expressa a rotação no sentido positivo através de um ângulo θ em torno do eixo x_3 fazendo com que os eixos x_1, x_2 se movam para posição x'_1, x'_2 . Quando estivermos no plano, a matriz dos cossenos diretores sempre será considerada na forma da equação (1.9). A forma matricial da equação (1.1) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} A'_1 \\ A'_2 \\ A'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}$$

ou de maneira simplificada,

$$\{A'_p\} = [\lambda] \{A_q\}. \tag{1.10}$$

Similarmente, a equação (1.5) será:

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{21} & \lambda_{31} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \lambda_{32} \\ \lambda_{13} & \lambda_{23} & \lambda_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A'_1 \\ A'_2 \\ A'_3 \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$\{A_p\} = [\lambda]^T \{A'_q\}, \quad (1.11)$$

onde $[\lambda]^T$ é a transposta da matriz $[\lambda]$.

Formalmente temos:

Teorema 1.1. *A matriz $M = [\alpha_{ki}]$ de mudança de base de B para B' é invertível e sua inversa M^{-1} é matriz mudança de base de B' para B .*

Demonstração. Seja $[\beta_{ij}]$ a matriz mudança de base B' para B .

Então $v_j = \sum_{i=1}^n \beta_{ij} w_i$.

Logo $v_j = \sum_{i=1}^n \beta_{ij} (\sum_{k=1}^n \alpha_{ki} v_k) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n (\alpha_{ki} \beta_{ij}) v_k$. Portanto

$$\sum_{i=1}^n \alpha_{ki} \beta_{ij} = \delta_{kj}.$$

Logo a inversa da matriz M é a matriz $[\beta_{ki}]$.

□

Definição 1.8. *Transformações lineares*

Consideremos os espaços vetoriais V e W e um corpo K . Uma transformação linear de V em W é uma função $T : V \rightarrow W$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $T(v + w) = T(v) + T(w)$, para quaisquer $v, w \in V$;

(ii) $T(\alpha v) = \alpha T(v)$, para quaisquer $v \in V$ e $\alpha \in K$.

Podemos compactar as duas propriedades em uma única propriedade: $T(v + \alpha w) = T(v) + \alpha T(w)$; para todos $u, v, w \in V$ e para qualquer $\alpha \in K$.

Uma transformação linear de V em V é chamado um **operador linear** de V .

Quando $W = \mathbb{R}$, então a transformação linear $T : V \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de funcional linear. O espaço de todos os funcionais lineares definidos em V , é chamado espaço dual de V e denotado por V^* .

Definição 1.9. *A matriz associada a uma aplicação linear.*

Sejam V e W espaços vetoriais e $f : V \rightarrow W$ uma aplicação linear e $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $B' = \{w_1, \dots, w_m\}$ bases de V e W , respectivamente. Temos então:

$$F(v_1) = a_{11}w_1 + \dots + a_{m1}w_m$$

$$\vdots$$

$$F(v_n) = a_{1n}w_1 + \dots + a_{mn}w_m$$

Definimos a matriz associada à aplicação linear f por

$$M_B^{B'}(f) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Reciprocamente, dada uma matriz $A_{m \times n}$, podemos associar uma aplicação linear $f : V^n \rightarrow W^m$, cuja matriz associada é $A_{m \times n}$.

Definição 1.10. *Produto tensorial*

Sejam V e W espaços vetoriais sobre um corpo K . O produto tensorial de dois vetores $v \in V$ e $w \in W$ denotado por $v \otimes w$ é um vetor em $V \otimes W$ que satisfaz as seguintes relações:

1. Se $v_1, v_2 \in V$ e $w \in W$ então $(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w$
2. Se $w_1, w_2 \in W$ e $v \in V$ então $(w_1 + w_2) \otimes v = w_1 \otimes v + w_2 \otimes v$
3. Se $c \in K$ então $(cv) \otimes w = c(v \otimes w) = v \otimes cw$.

$V \otimes W$ é um espaço vetorial sobre K tal que junto com uma aplicação bilinear (linear em cada componente) de $V \times W \rightarrow V \otimes W$, indicada por $(v, w) \rightarrow v \otimes w$ satisfazendo:

Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base de V e $\{w_1, \dots, w_m\}$ é uma base de W , então os elementos $v_i \otimes w_j$, $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m$ formam uma base de $V \otimes W$.

Definição 1.11. *Sejam V um espaço vetorial de dimensão n e T um operador linear de V .*

Chama-se autovetor ou vetor próprio de T todo vetor $v \neq 0$ tal que $T(v) = \lambda v$, com $\lambda \in \mathbb{R}$.

Se $v \neq 0$ é autovetor de T e λ um número real tal que $T(v) = \lambda v$ é chamado autovalor ou valor próprio de T .

2 Tensores de segunda ordem

Neste capítulo apresentamos um breve estudo sobre os tensores de segunda ordem, e usando sua representação matricial, observamos as mudanças de coordenadas em sistemas de coordenadas diferentes.

Definição 2.1. *Sejam V um espaço vetorial e T operador linear de V . O conjunto de todos os operadores lineares de V será denotado por $\mathcal{L}(V)$, que é um espaço vetorial. Os elementos de $\mathcal{L}(V)$ são chamados de tensores (de segunda ordem).*

Observe que o tensor T associa a cada elemento $v \in V$ um único elemento Tv em V .

No caso particular do produto tensorial de dois vetores $u, v \in V$ representado por $u \otimes v$, o operador linear que a cada vetor $w \in V$ associa um vetor de V dado por:

$$(u \otimes v)w = \langle v, w \rangle u, \quad \forall w \in V$$

é um tensor de segunda ordem.

2.1 As relações entre os nove cossenos diretores que compõem a matriz

Recordemos da equação (1.10) que $\{A'_p\} = [\lambda] \{A_q\}$.

Ao substituirmos a matriz coluna $\{A\}$ dada em (1.11), temos:

$$\{A'_p\} = [\lambda] [\lambda]^T \{A'_q\} \quad (2.1)$$

Portanto,

$$[\lambda] [\lambda]^T = [I] \quad (2.2)$$

Usando o mesmo raciocínio, obtemos que $[\lambda]^T [\lambda] = [I]$, e portanto temos:

$$[\lambda]^T = [\lambda]^{-1}. \quad (2.3)$$

Isso facilita bastante o cálculo da matriz inversa de T , onde T é a matriz dos cossenos diretores.

Se escrevermos a equação (2.2) explicitamente, temos:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{21} & \lambda_{31} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \lambda_{32} \\ \lambda_{13} & \lambda_{23} & \lambda_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e multiplicando as duas matrizes, surgem as seguintes relações

$$\begin{cases} \lambda_{11}^2 + \lambda_{12}^2 + \lambda_{13}^2 = 1 \\ \lambda_{21}^2 + \lambda_{22}^2 + \lambda_{23}^2 = 1 \\ \lambda_{31}^2 + \lambda_{32}^2 + \lambda_{33}^2 = 1 \\ \lambda_{11}\lambda_{21} + \lambda_{12}\lambda_{22} + \lambda_{13}\lambda_{23} = 0 \\ \lambda_{21}\lambda_{31} + \lambda_{22}\lambda_{32} + \lambda_{23}\lambda_{33} = 0 \\ \lambda_{31}\lambda_{11} + \lambda_{32}\lambda_{12} + \lambda_{33}\lambda_{13} = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

As três primeiras equações de (2.4) são chamadas de condições normalizadoras e expressam o fato de que λ são cossenos diretores. As três últimas são chamadas de condições de ortogonalidade e expressam o fato de que os eixos x'_1, x'_2 e x'_3 são mutuamente perpendiculares.

Conclui-se que, dado que as nove direções dos cossenos diretores devem satisfazer as seis equações (2.4), apenas três das nove são independentes.

De fato, considere a Figura 2.1.

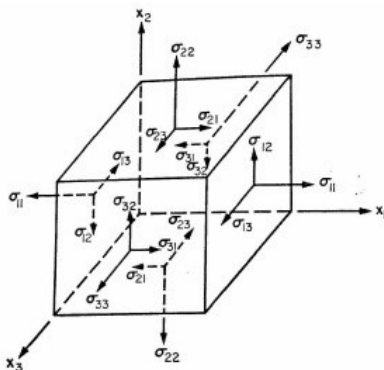


Figura 2.1: Exemplo de um uso para mudança de eixos. [3]

Suponha que exista um conjunto de eixos x_1, x_2, x_3 e que seja proposto que se escolha um outro conjunto x'_1, x'_2, x'_3 . A escolha do eixo x'_1 pode ser qualquer. Ao escolher λ_{11} e λ_{12} , o valor de λ_{13} é determinado (a menos de sinal) pelas primeiras equações (2.4). Indo agora para o eixo x'_2 apenas um dos cossenos diretores pode ser escolhido livremente e os outros dois devem ser escolhidos com a exigência de que a segunda e quarta equações (2.4) sejam satisfeitas. Finalmente para o eixo x'_3 , não podemos fazer nenhuma escolha, pois todos os seus três cossenos diretores são fixados pela exigência de que a terceira, quinta e sexta equações (2.4) devem ser satisfeitas.

Uma outra notação que é usada nos cursos de engenharias é a dos índices.

Da equação (1.2), temos $A'_1 = \lambda_{11}A_1 + \lambda_{12}A_2 + \lambda_{13}A_3$ e substituindo A_1, A_2 e A_3 das equações 1.5, temos

$$\begin{aligned} A'_1 = & \lambda_{11}(\lambda_{11}A'_1 + \lambda_{21}A'_2 + \lambda_{31}A'_3) + \lambda_{12}(\lambda_{12}A'_1 + \lambda_{22}A'_2 + \lambda_{32}A'_3) \\ & + \lambda_{13}(\lambda_{13}A'_1 + \lambda_{23}A'_2 + \lambda_{33}A'_3). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Decorre desta equação que:

$$\begin{aligned}\lambda_{11}^2 + \lambda_{12}^2 + \lambda_{13}^2 &= 1 \\ \lambda_{11}\lambda_{21} + \lambda_{12}\lambda_{22} + \lambda_{13}\lambda_{23} &= 0 \\ \lambda_{11}\lambda_{31} + \lambda_{12}\lambda_{32} + \lambda_{13}\lambda_{33} &= 0,\end{aligned}$$

que são, respectivamente, a primeira, quarta e sexta das equações (2.4). Fazendo o mesmo para A'_2 e A'_3 obtemos as equações restantes da equação (2.4), com cada equação de ortogonalidade aparecendo duas vezes. Na notação compactada, começamos com as equações (1.3)

$$A'_p = \lambda_{pq}A_q, \quad q = 1, 2, 3.$$

Agora, deve-se tomar cuidado com os índices porque eles devem refletir todas as equações. Usando-se o índice conveniente, fazemos a seguinte substituição na equação $A'_p = \lambda_{pq}A_q$ por $A_q = \lambda_{rq}A'_r$ e obtemos:

$$A'_p = \lambda_{pq}\lambda_{rq}A'_r, \quad p = 1, 2, 3. \quad (2.6)$$

Deve ser observado que, com a somatória em q e r há nove termos no lado direito para um dado valor de p . Há três equações dadas pela equação (2.6), uma para cada valor de p . A primeira delas, com $p = 1$, é escrita por completo como a equação (2.5).

Portanto, as equações (2.6) representam três equações do mesmo tipo da equação (2.5). Aplicando agora o argumento de que A'_1, A'_2, A'_3 são independentes e que as equações (2.6) devem ser identicamente verdadeiras, chegamos à seguinte conclusão:

$$\begin{cases} \lambda_{pq}\lambda_{rq} = 1, & p = r \\ \lambda_{pq}\lambda_{rq} = 0, & p \neq r \end{cases} \quad (2.7)$$

o que nos dá as seis equações.

2.2 O Delta de Kronecker

As formas das equações (2.7) sugerem a definição de uma grandeza que irá revelar-se muito valiosa na teoria dos tensores. Essa grandeza é chamada de Delta de Kronecker, e é definida conforme a seguir:

$$\delta_{pr} = \begin{cases} 1, & p = r \\ 0, & p \neq r \end{cases}$$

As condições de normalização e ortogonalidade (2.4) podem ser escritas como:

$$\lambda_{pq}\lambda_{rq} = \delta_{pr}. \quad (2.8)$$

Vimos anteriormente que a transposta da matriz dos cossenos diretores é a matriz inversa. Dessa forma, podemos obter as seis equações referidas e verificar que em notação compactada:

$$\lambda_{qp}\lambda_{qr} = \delta_{pr} \quad (2.9)$$

Conclui-se também que as equações de ortogonalidade da equação (2.8) expressam o fato de que os eixos x'_i são dois a dois perpendiculares, enquanto as equações correspondentes em (2.9) expressam o fato de que os eixos x_i são dois a dois perpendiculares.

As considerações serão feitas agora para certas grandezas que, em três dimensões, possuem nove componentes.

Considere dois vetores A e B tendo coordenadas $(A_1, A_2$ e $A_3)$ e $(B_1, B_2$ e $B_3)$ em relação a um dado sistema de coordenadas. Há então nove produtos de coordenadas que são convenientemente escritos em uma matriz quadrada, ou seja:

$$\begin{bmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 & A_1B_3 \\ A_2B_1 & A_2B_2 & A_2B_3 \\ A_3B_1 & A_3B_2 & A_3B_3 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

onde T_{pq} é definido como A_pB_q . Ao trocar o sistema de coordenadas, as coordenadas do vetor se tornam (A'_1, A'_2, A'_3) e (B'_1, B'_2, B'_3) e os produtos serão

$$\begin{bmatrix} A'_1B'_1 & A'_1B'_2 & A'_1B'_3 \\ A'_2B'_1 & A'_2B'_2 & A'_2B'_3 \\ A'_3B'_1 & A'_3B'_2 & A'_3B'_3 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} T'_{11} & T'_{12} & T'_{13} \\ T'_{21} & T'_{22} & T'_{23} \\ T'_{31} & T'_{32} & T'_{33} \end{bmatrix}$$

As relações entre os nove T_{pq} e os nove T'_{pq} são obtidas pela equação (1.6)

$$A'_s = \lambda_{sp}A_p$$

e

$$B'_t = \lambda_{tq}B_q.$$

Assim, $A'_sB'_t = (\lambda_{sp}A_p)(\lambda_{tq}B_q)$, onde os parênteses são inseridos temporariamente para lembrar que há três termos em cada parênteses, e assim, nove termos em todo o lado direito. Usando a notação T_{pq} a equação acima fica:

$$T'_{st} = \lambda_{sp}\lambda_{tq}T_{pq}. \quad (2.10)$$

Deve-se observar cuidadosamente que a equação (2.10) representam nove equações, dando $T'_{11}, T'_{12}, \dots, T'_{33}$ e que cada uma dessas nove equações possui nove termos do lado direito correspondentes à somatória sobre p e q .

2.3 O produto de dois tensores

Considere dois tensores de segunda ordem S_{pq} e T_{vw} . Cada tensor possui nove componentes, sendo assim é possível formar 81 produtos. Ao identificar esses produtos pela letra Q e seus subscritos associados, temos:

$$Q_{pqvw} = S_{pq}T_{vw}. \quad (2.11)$$

Ao trocarmos o sistema de coordenadas, as componentes de S e T se transformam de acordo com a lei e o lado direito se torna $(\lambda_{ip}\lambda_{jq}S_{pq})(\lambda_{mv}\lambda_{nw}T_{vw})$. Nessa expressão, os índices não repetidos i, j, m, n sobrevivem ao processo de somatória de forma que este seja Q'_{ijmn} , sendo os componentes entre parênteses respectivamente S'_{ij} e T'_{mn} .

Assim:

$$Q'_{ijmn} = \lambda_{ip}\lambda_{iq}\lambda_{mv}\lambda_{nw}S_{pq}T_{vw},$$

ou seja,

$$Q'_{ijmn} = \lambda_{ip}\lambda_{iq}\lambda_{mv}\lambda_{nw}Q_{pqvw}. \quad (2.12)$$

O produto de dois tensores é dada pela composição dos operadores lineares, que pode ser visto também como o produto das matrizes associadas aos operadores lineares.

Seja, V um espaço vetorial e $f, g : V \rightarrow V$ operadores lineares, e considere $g \circ f$, composta de f com g .

Teorema 2.1. *Sejam B, B' e B'' bases de V . Então*

$$M_{B''}^{B'}(g) M_{B'}^B(f) = M_{B''}^B(g \circ f)$$

Demonstração. Sejam A a matriz associada a f em relação às bases B, B' e A' a matriz associada a g em relação as bases B' e B''

Tome $v \in V$ e escreva v em relação à base B .

Então $f(v)$ em relação à base B' é dada por Av , mas $g(f(v))$ em relação à base B'' é dada por $A'(Av) = (A'A)v$

Isso implica que $A'A$ é a matriz associada a $g \circ f$. □

Corolário 2.1. *Sejam B e B' bases de um espaço vetorial V .*

Então

$$M_{B'}^B(id) M_B^{B'}(id) = I = M_B^{B'}(id) M_{B'}^B(id).$$

Em particular $M_B^{B'}(id)$ é invertível.

A convenção de notação e sinal está ilustrada na Figura 2.1, e é definida conforme a seguir: das seis faces do cubo exibido, três são faces positivas e três são faces negativas. As faces positivas são aquelas nas quais a normal emergente está na direção positiva de um dos eixos. Sendo assim, na Figura 2.1, as três faces das quais temos visão completa são positivas e as três faces escondidas são negativas. Uma componente de tensão é chamada de σ_{pq} , onde o primeiro índice se refere à face na qual a componente atua e o segundo índice se refere à direção da ação. Quando σ_{pq} atua em uma face positiva, ela é medida na direção q positiva e quando atua em uma face negativa, mede-se na direção q negativa.

Por exemplo, considere a componente de tensão σ_{13} . Há duas faces nas quais as normais estão na direção x_1 , sendo uma face positiva e uma face negativa; na face positiva σ_{13} está na direção x_3 positiva e na face negativa está na direção x_3 negativa.

Ao introduzir novos eixos x'_i , algumas componentes de tensão podem ser encontradas considerando o equilíbrio de um pequeno tetraedro, como mostrado na Figura 2.3. Considere o tetraedro tendo uma face em que a normal está na direção x'_1 em relação às direções x'_2 e x'_3 estando portanto no plano da face, e seja S a área desta face. Considerando a face triangular do tetraedro no plano x_2x_3 , temos uma normal emergente na direção negativa de x_1 , podendo verificar que a área dessa face é $\lambda_{11}S$ e que, da mesma forma, as outras duas faces, tendo normais paralelas a x_2 e x_3 , respectivamente, possuem áreas $\lambda_{12}S$ e $\lambda_{13}S$.

As componentes relevantes do tensor de tensão estão mostrados na Figura 2.4. Será observado que a face inclinada é uma face de orientação positiva no sistema x'_i ,

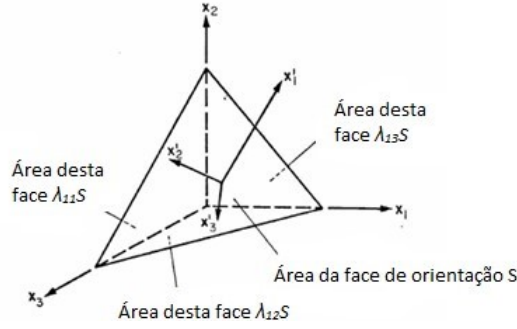


Figura 2.2: Área de cada face do tetraedro [3]

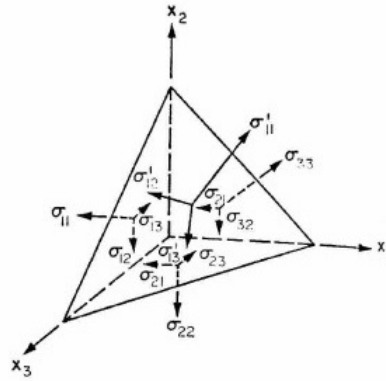


Figura 2.3: Componentes de tensão e mudança na orientação. [3]

enquanto as outras três faces são negativas no sistema x'_i . Isso fixa as direções das componentes de tensão.

Tendo em vista as Figuras 2.3 e 2.4, a força causada pelas componentes de tensão σ_{11} é $\sigma_{11}\lambda_{11}S$ e está direcionada na direção negativa do eixo x_1 . Se esta força está na direção negativa de x'_i , resulta $\sigma_{11}\lambda_{11}S\lambda_{11}$. Da mesma forma, a força causada pela componente σ_{12} é $\sigma_{12}\lambda_{12}S$ e essa força tem uma componente resultante na direção negativa de x'_1 o que resulta $\sigma_{12}\lambda_{11}S\lambda_{12}$. Ao repetir esse processo para todos os nove componentes de tensão $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \dots, \sigma_{33}$, e finalmente equacionando as forças nas direções positiva e negativa do x'_1 resulta que:

$$\begin{aligned} \sigma'_{11}S &= (\lambda_{11}\lambda_{11}\sigma_{11})S + (\lambda_{11}\lambda_{12}\sigma_{12})S + (\lambda_{11}\lambda_{13}\sigma_{13})S \\ &+ (\lambda_{12}\lambda_{11}\sigma_{21})S + (\lambda_{12}\lambda_{12}\sigma_{22})S + (\lambda_{12}\lambda_{13}\sigma_{23})S \\ &+ (\lambda_{13}\lambda_{11}\sigma_{31})S + (\lambda_{13}\lambda_{12}\sigma_{32})S + (\lambda_{13}\lambda_{13}\sigma_{33})S. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Simplificando a equação temos:

$$\sigma'_{11} = \lambda_{1p}\lambda_{1q}\sigma_{pq}. \quad (2.14a)$$

Da mesma forma, resultante na direção x'_2 e x'_3 respectivamente para o tetraedro mostrado na Fig.2.3, temos

$$\sigma'_{12} = \lambda_{1p}\lambda_{2q}\sigma_{pq} \quad (2.14b)$$

$$\sigma'_{13} = \lambda_{1p}\lambda_{3q}\sigma_{pq}. \quad (2.14c)$$

Todas as três equações acima (2.14a), (2.14b) e (2.14c) podem ser escritas da seguinte forma:

$$\sigma'_{1t} = \lambda_{1p}\lambda_{tq}\sigma_{pq}, \quad t = 1, 2, 3. \quad (2.15)$$

Ao tomarmos tetraedros com faces de orientação em que as normais estão nas direções de x'_1 e x'_3 respectivamente, as seis equações a seguir são obtidas da mesma forma:

$$\sigma'_{2t} = \lambda_{2p}\lambda_{tq}\sigma_{pq} \quad (2.16)$$

$$\sigma'_{3t} = \lambda_{3p}\lambda_{tq}\sigma_{pq}. \quad (2.17)$$

Por último, todas as nove equações dadas pelas equações (2.15), (2.16) e (2.17) podem ser escritas da seguinte forma:

$$\sigma'_{st} = \lambda_{sp}\lambda_{tq}\sigma_{pq}. \quad (2.18)$$

Enfatizamos, uma vez mais, que a Equação (2.18) representa nove equações separadas, cada uma das quais possui nove termos do lado direito. Comparando as Equações (2.12) e (2.18) podemos observar que a forma da transformação é idêntica nos dois casos.

Muitas vezes é interessante olhar a transformação linear $T'_{st} = \lambda_{sp}\lambda_{tq}T_{pq}$ na forma matricial, no lugar da notação indicial, conforme mencionado no capítulo 1. Por esse motivo vamos rearranjar os termos e escrever:

$$T'_{st} = \lambda_{sp}T_{pq}\lambda_{tq}. \quad (2.19a)$$

Considerando primeiro a somatória sobre p , que afeta o termo $\lambda_{sp}T_{pq}$, deixar que p assumira os valores 1, 2, 3 significa mover a s -ésima linha de $[\lambda]$ e baixar a q -ésima coluna de $[T]$ produzindo o (s,q) -ésimo componente de $[\lambda][T]$. Se agora o produto $[\lambda][T]$ for chamado $[K]$, então a equação acima pode ser escrita:

$$T'_{st} = K_{sp}\lambda_{tq}. \quad (2.19b)$$

Considerando agora a somatória sobre q e procurando expressar isso como uma operação de coluna, aparentemente, há uma dificuldade em que ambos os índices de q estão na segunda posição (ex. posição da 'coluna' na notação de matriz). Portanto, ao deixar que q assumira os valores 1, 2, 3 significa mover a s -ésima linha de $[K]$ e a t -ésima linha de $[\lambda]$. No entanto, essa dificuldade é prontamente superada, no entanto, ao perceber que a t -ésima linha de $[\lambda]$ é a t -ésima coluna de $[\lambda]^T$. Assim, a equação (2.19b) pode ser escrita como:

$$[T'] = [\lambda][T][\lambda]^T. \quad (2.19c)$$

A equação (2.19c) é a forma matricial da equação (2.10), que de forma explícita, é dada por:

$$\begin{bmatrix} T'_{11} & T'_{12} & T'_{13} \\ T'_{21} & T'_{22} & T'_{23} \\ T'_{31} & T'_{32} & T'_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{21} & \lambda_{31} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \lambda_{32} \\ \lambda_{13} & \lambda_{23} & \lambda_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Na realidade, vale o resultado mais geral:

Teorema 2.2. *Sejam $f : V \rightarrow V$ um operador linear e B e B' duas bases de V . Então existe uma matriz invertível N tal que*

$$M_{B'}^{B'}(f) = N^{-1}M_B^B(f)N.$$

Demonstração. Basta tomar $N = M_B^{B'}(id)$ e aplicar o Teorema 2.1. □

3 Tensores simétricos de segunda ordem

3.1 Círculo de Mohr de Tensão

No capítulo anterior comentamos que em um estado plano de tensões, podemos transformar as componentes do tensor de um sistema de eixo para um novo sistema, obtendo a equação (2.18). Usando esse resultado nessa seção iremos mostrar que podemos encontrar uma solução gráfica, que é chamado *Círculo de Mohr*, introduzindo assim a ideia de tensores simétricos.

Consideremos um estado plano de tensão e a Figura 3.1 que ilustra as quatro componentes do tensor tensão: as direções dessas componentes estão de acordo com a

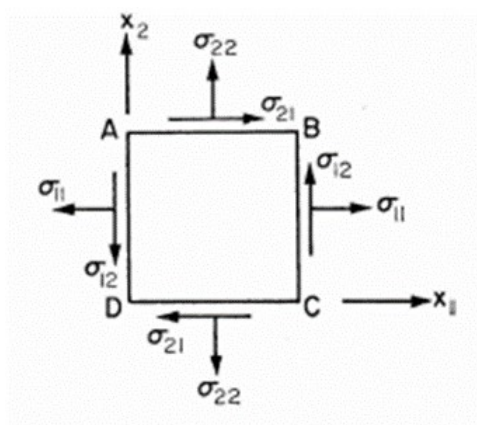


Figura 3.1: Ação das componentes de tensão. [3]

convenção descrita no Capítulo 2. Na Figura 3.1, AB e BC são faces positivas, CD e DA são faces negativas.

Ao tomar os momentos sobre um eixo perpendicular à página, verificamos que o equilíbrio de $ABCD$ resulta em:

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} \tag{3.1}$$

Essa é a conhecida relação complementar da tensão de cisalhamento. Devido à equação (3.1) temos que o tensor tensão em duas dimensões,

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

é simétrico.

Há uma extensão deste argumento para dimensão 3. Voltando à Figura 2.1, tomando os momentos sobre os eixos paralelos a x_1 e x_2 respectivamente, vemos que $\sigma_{23} = \sigma_{32}$ e $\sigma_{13} = \sigma_{31}$. Todos eles podem ser expressos em uma equação como $\sigma_{pq} = \sigma_{qp}$, ou seja, o tensor tensão é simétrico.

Voltando ao caso de dimensão 2 e definindo os eixos x'_1 e x'_2 por meio de rotação θ dos eixos x_1 e x_2 , as componentes de tensão σ'_{11} e σ'_{12} são encontradas ao considerar a estabilidade de um triângulo conforme mostrado na Figura 3.2.

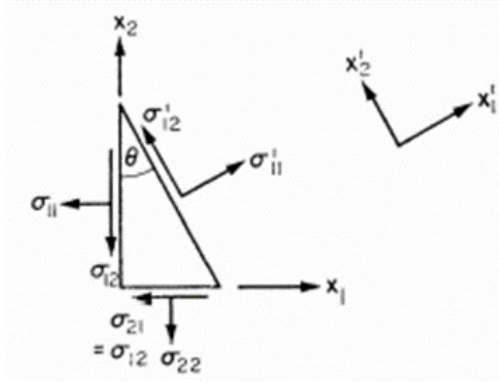


Figura 3.2: Componentes de tensão em relação a um novo sistema de eixos. [3]

A resolução apropriada das forças nos fornece:

$$\begin{aligned}\sigma'_{11} &= \sigma_{11}\cos^2\theta + \sigma_{22}\sin^2\theta + 2\sigma_{12}\sin\theta\cos\theta = \\ &\left(\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}\right) + \left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)\cos 2\theta + \sigma_{12}\sin 2\theta \\ \sigma'_{12} &= \sigma_{12}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - (\sigma_{11} - \sigma_{22})\sin\theta\cos\theta = \\ &\quad - \left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)\sin 2\theta + \sigma_{12}\cos 2\theta\end{aligned}\quad (3.2)$$

Nota-se que há dois valores de θ , que diferem por 90° , para o qual $\sigma'_{12} = 0$ e os dois valores são soluções da equação $\tan 2\theta = 2\sigma_{12}/(\sigma_{11} - \sigma_{22})$. Além disso, a derivação em relação a θ da equação para σ'_{11} mostra que nos planos dados por esses mesmos dois valores de θ a tensão σ'_{11} é a maior e, no outro caso, a menor tensão que ocorre. Esses dois valores de tensão são chamados de tensões principais, e as direções nas quais elas atuam são chamadas de direções principais. As tensões principais serão chamadas de σ'_1 e σ'_2 e o tensor tensão em duas dimensões, quando referido aos eixos principais são $\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}$.

Tendo estabelecida a existência de duas direções principais mutuamente perpendiculares, é conveniente (Figuras 3.3 e 3.4) tomar essas direções como eixos x_1x_2 . Este procedimento é um caso especial da situação geral, mostrada na Figura 3.2, e resolvendo nas direções x'_1 e x'_2 temos:

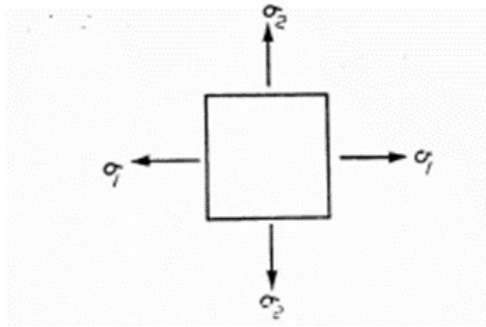
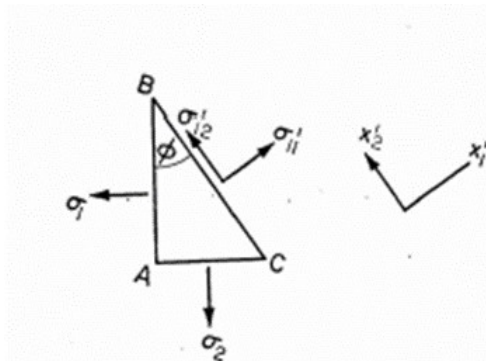


Figura 3.3: Tensões principais. [3]

Figura 3.4: Direção das tensões nos eixos x'_1 e x'_2 . [3]

$$\begin{aligned}\sigma'_{11} &= \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right) + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right) \cos 2\varphi \\ \sigma'_{12} &= -\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right) \operatorname{sen} 2\varphi.\end{aligned}\quad (3.3)$$

Se σ'_{11} e σ'_{12} são tomados em eixos cartesianos, então o que temos acima são equações paramétricas de um círculo, como dissemos no início desse capítulo, *Círculo de Mohr*, obtido eliminando-se o parâmetro φ entre elas. O Círculo de Mohr é mostrado na Figura 3.5. Será observado que a rotação dos eixos através de φ é acompanhada por uma rotação do vetor radial do círculo através de 2φ . O sinal negativo na segunda equação (3.3) também é importante para determinar a direção na qual σ'_{12} age.

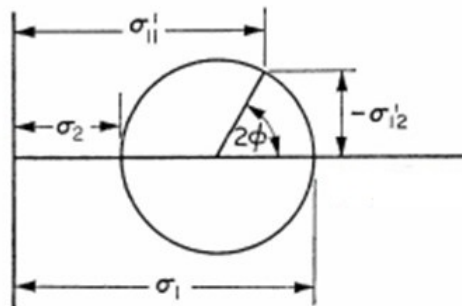


Figura 3.5: Análise das tensões usando o Círculo de Mohr. [3]

Observe que se um tensor de segunda ordem em dimensão 2 é simétrico, isto é, se $T_{12} = T_{21}$, então existe um par de eixos mutuamente perpendiculares chamados de eixos principais com relação ao qual $T_{12} = T_{21} = 0$, ou seja, a matriz do tensor é diagonal na forma quando se refere a esses eixos. Mostra-se que se as componentes de um tensor de segunda ordem em dimensão 2, são simétricos com respeito a um dado par de eixos, então eles são simétricos com relação a qualquer outro par de eixos. Assim, se um tensor é simétrico, essa propriedade de simetria não se altera por mudanças de coordenadas.

$$\begin{bmatrix} T'_{11} & T'_{12} \\ T'_{21} & T'_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

onde $T'_{12} = T'_{21} = -T_{11}\text{sen}\theta\cos\theta + T_{12}(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta) + T_{22}\text{sen}\theta\cos\theta$.

Estendendo essas ideias para dimensão 3, pode se verificar, utilizando a equação (2.19d), que se $T_{pq} = T_{qp}$, então $T'_{st} = T'_{ts}$, ou seja, a simetria com respeito a qualquer triáde de eixos dada implica simetria com respeito a qualquer outra triáde.

3.2 Eixos principais de um tensor simétrico

Dadas as componentes T_{pq} de um tensor simétrico, pode-se descobrir novos eixos x'_2 com respeito ao qual o tensor possui zero em elementos que não estão na diagonal de sua matriz, pois tem se que a matriz que representa o tensor é diagonalizável, ou seja, pode-se descobrir cossenos diretores tais como

$$\begin{bmatrix} T'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & T'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & T'_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{12} & T_{22} & T_{23} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{21} & \lambda_{31} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \lambda_{32} \\ \lambda_{13} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix}$$

Para vermos isso, consideremos os nove cossenos diretores desconhecidos. Então exigimos que T'_{12}, T'_{13} e T'_{23} devam ser zeros nas três equações entre os nove cossenos diretores. Posteriormente, as equações (2.4) nos dão mais seis equações e o total de nove equações podem ser resolvidas dando origem aos cossenos diretores necessários. Deve-se analisar que pelo fato das componentes T_{pq} serem simétricas, as componentes T'_{st} também o são, portanto, ao estabelecer que T'_{12}, T'_{13} e T'_{23} sejam zeros, automaticamente T'_{21}, T'_{31} e T'_{32} também são zeros. Em notação de índices, as equações que são utilizadas para descobrir os cossenos diretores são as seguintes:

$$\begin{aligned} \lambda_{1p}\lambda_{2q}T_{pq} &= 0 \text{ (isso faz } T'_{12} = 0), \\ \lambda_{1p}\lambda_{3q}T_{pq} &= 0 \text{ (isso faz } T'_{13} = 0), \\ \lambda_{2p}\lambda_{3q}T_{pq} &= 0 \text{ (isso faz } T'_{23} = 0), \\ \lambda_{sq}\lambda_{tq} &= \delta_{st}, \end{aligned}$$

essas são as seis equações (3.4). Pode-se concluir então, que um tensor simétrico sempre tem três direções mutuamente perpendiculares, chamadas de direções principais, para qual os elementos fora das diagonais da matriz do tensor são zero, de forma que a matriz do tensor assume a forma

$$\begin{bmatrix} T'_1 & 0 & 0 \\ 0 & T'_2 & 0 \\ 0 & 0 & T'_3 \end{bmatrix}$$

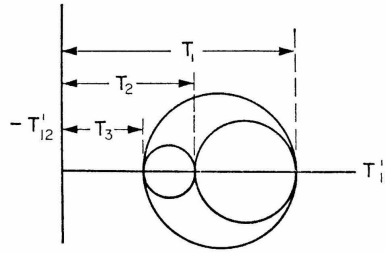


Figura 3.6: Círculos de Mohr. [3]

onde o uso de um único índice deixa claro que essas são as componentes principais.

A Figura 3.6 mostra três Círculos de Mohr, que representam a variação das componentes do tensor conforme os eixos são rotacionados em cada um dos planos x_1x_2 , x_2x_3 e x_3x_1 .

Um caso significativamente muito especial ocorre quando duas componentes principais de um tensor são iguais. Para fixar a ideia, vamos assumir que T_2 e T_3 sejam iguais, com T_1 sendo diferente. Então o círculo T_2/T_3 da Figura 3.6 se retraiem para um ponto e os círculos T_1/T_2 e T_1/T_3 coincidem.

Relembrando que $-T'_{23}$ é dado pelas coordenadas de um ponto no círculo de Mohr T_2/T_3 segue-se que, com o círculo de Mohr se retraindo a um ponto, quaisquer pares de eixos x'_2, x'_3 tomados no plano x_2x_3 são tais que $T'_{23} = T'_{32} = 0$, ou seja, quaisquer pares de eixos nesse plano são eixos principais. Assim, se T_1 é diferente de T_2 e de T_3 há uma direção principal x_1 unicamente definida e o plano do x_2 e x_3 é o plano que tem x_1 como normal, mas se T_2 e T_3 são iguais, então os eixos principais x_2 e x_3 não são unicamente definidos e quaisquer pares de eixos perpendiculares neste plano são eixos principais.

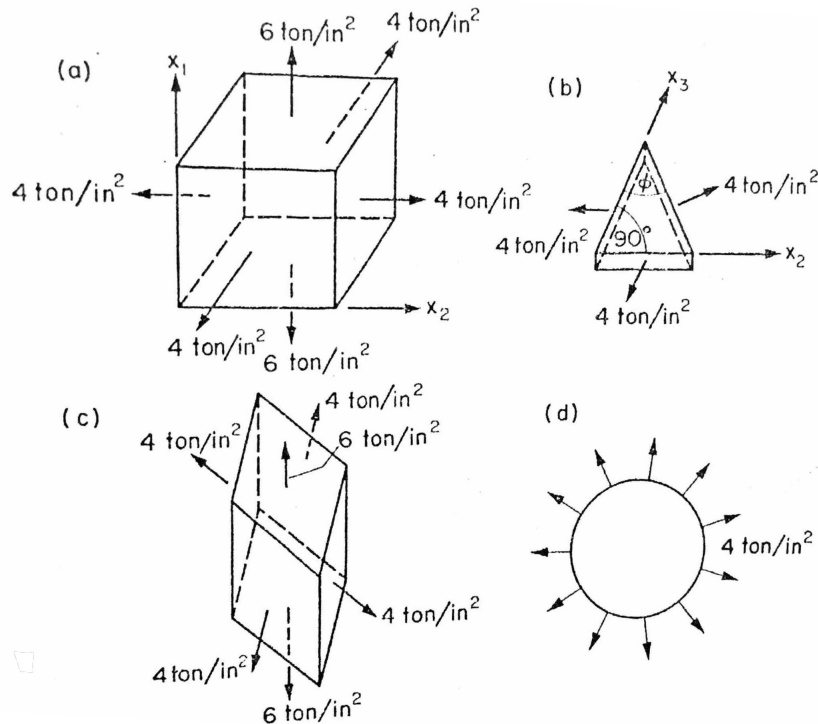


Figura 3.7: Análise de tensões e tensor isotrópico. [3]

Considere que o cubo de metal mostrado na Figura 3.7a foi submetido à uma tensão de $6\text{ton}/\text{in}^2$, $4\text{ton}/\text{in}^2$, $4\text{ton}/\text{in}^2$. Dado que não há tensão de cisalhamento, as arestas do cubo são os eixos principais. Ao tomarmos um prisma triangular como na Figura 3.7b e considerando sua estabilidade, verifica-se que, seja qual for o ângulo ϕ mostrado, a tensão na face oblíqua do prisma é $4\text{ton}/\text{in}^2$ e a tensão de cisalhamento é zero. Assim, o estado de tensão também pode ser representado pelo cubóide da Figura 3.7c. O tensor é isotrópico no plano x_2x_3 e, de fato, a melhor forma de mostrar o estado de tensão dada é considerar uma peça cilíndrica circular do metal como na Figura 3.7d quando a tensão na superfície curva é vista como $4\text{ton}/\text{in}^2$ radialmente de dentro para fora em todos os pontos.

Da mesma forma, se considerarmos os momentos de inércia da barra cilíndrica uniforme mostrada na Figura 3.8 e olharmos para os eixos principais através do centro de gravidade,

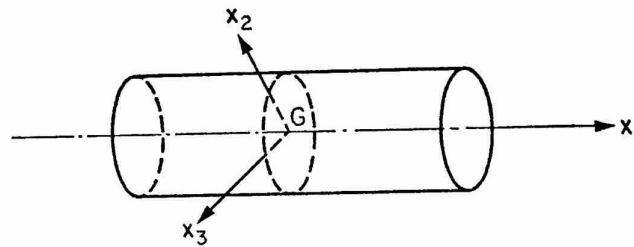


Figura 3.8: Momento de inércia de uma barra cilíndrica [3]

o eixo x_1 é definido unicamente (exceto em um caso especial), mas quaisquer pares de eixos x_2 e x_3 podem ser tomados no plano transversal através de G .

Voltando à Figura 3.6, ainda é preciso considerar o caso onde $T_1 = T_2 = T_3$. Nesse caso, todos os três círculos retraem a um ponto comum e, assim, não se pode encontrar nenhum plano no qual os elementos fora da diagonal da matriz do tensor sejam diferentes de zero. Assim, qualquer eixo é um eixo principal. Esse tipo de tensor é chamado de tensor isotrópico. Os exemplos de tensores isotrópicos são:

(i) o caso de as três tensões principais serem iguais como na Figura 3.9, geralmente chamado de estado de tensão hidrostático.

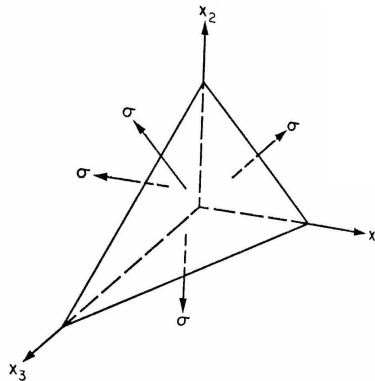


Figura 3.9: Tensores Isotrópicos. [3]

Seja qual for a orientação do plano inclinado da Figura 3.9, a tensão direta sobre ele é σ e a tensão de cisalhamento é zero,

(ii) Os momentos de inércia de uma esfera uniforme sobre os eixos através do seu centro. Qualquer eixo é um eixo principal.

A partir do que foi dito anteriormente temos que, se um tensor tem a forma

$$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

com respeito a uma dada tríade de eixos, ele tem a mesma forma com respeito à qualquer outra tríade. Usando matrizes, temos:

$$\begin{aligned} [T'] &= [\lambda] [T] [\lambda]^{-1} \\ &= k [\lambda] [I] [\lambda]^{-1} \text{ desde que } [T] = k [I] \\ &= k [\lambda] [\lambda]^{-1} \\ &= k [I] \\ \text{isto é, } [T'] &= [T]. \end{aligned} \tag{3.5}$$

3.3 O Delta de Kronecker como um tensor de segunda ordem

Mostremos que o Delta de Kronecker é um tensor de segunda ordem. Em notação de índice, considere a expressão $\lambda_{sp}\lambda_{tq}\delta_{pq}$. Fazendo a somatória para $q = 1, 2, 3$, temos

$$\lambda_{sp}\lambda_{tq}\delta_{pq} = \lambda_{sp}\lambda_{t1}\delta_{p1} + \lambda_{sp}\lambda_{t2}\delta_{p2} + \lambda_{sp}\lambda_{t3}\delta_{p3}. \tag{3.6}$$

Dos termos no lado direito, para um dado valor de p , dois são zero porque $\delta = 0$ e no outro termo $\delta = 1$. Adiante, o termo para o qual $\delta = 1$ é aquele para o qual $q = p$.

Assim,

$$\lambda_{sp}\lambda_{tq}\delta_{pq} = \lambda_{sp}\lambda_{tp} \tag{3.7}$$

A equação (3.7) é muito importante. O argumento utilizado para estabelecer-la é que $\delta_{pq} = 0$, a menos que $p = q$. A rotina de mudar q por p e retirar o δ_{pq} é comum para qualquer pessoa que utiliza tensores. Enfatizamos neste momento que o termo $\lambda_{sp}\lambda_{tq}\delta_{pq}$ pode ser pensado também em termos de somatória primeiramente sobre p ; nesse caso o λ_{sp} se torna λ_{sq} e δ_{pq} sai, nos dando

$$\lambda_{sp}\lambda_{tq}\delta_{pq} = \lambda_{sq}\lambda_{tq}. \tag{3.8}$$

O lado esquerdo das equações (3.7) e (3.8) são idênticos, e utilizando as equações (2.4) encontramos δ_{st} . Assim, temos a equação (3.9):

$$\delta_{st} = \lambda_{sp}\lambda_{tq}\delta_{pq}. \tag{3.9}$$

Isso mostra que δ é um tensor de segunda ordem. A matriz do Delta de Kronecker é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e δ é geralmente chamado tensor unitário. Ao observar que $[\lambda] [I] [\lambda]^{-1} = [I]$, temos que o Delta de Kronecker tem a matriz exibida acima não importando quais eixos sejam escolhidos.

O Delta de Kronecker é um tensor unitário isotrópico. Para qualquer outro tensor isotrópico os componentes são $T_{pq} = k\delta_{pq}$, onde k é um escalar.

Segue que temos uma invariância da forma proveniente de

$$T' = \lambda_{sp}\lambda_{tq}T_{pq} = \lambda_{sp}\lambda_{tq}(k\delta_{pq}) = k\lambda_{sp}\lambda_{tp} = k\delta_{st}.$$

Isso é o equivalente em notação de índice para o desenvolvimento da matriz que nos levou à equação (3.5).

4 Os invariantes de um tensor de segunda ordem

Considerando os tensores de segunda ordem como operadores lineares, lembramos que a operação entre eles é dada pela composição dos mesmos. Na notação matricial, essa operação se dá através do produto das matrizes que os representam.

Em engenharia, muitos preferem usar a notação de índices. Vamos destacar alguns produtos que são usados na Teoria de Elasticidade. É muito importante considerar o significado da expressão $S_{pq}T_{vw}\delta_{qw}$, obtido pela multiplicação do lado direito da equação (2.11) por δ_{qw} . Observando os índices q e w , pode-se concluir que há nove expressões como essa (uma para cada par de valores de p e v) e que cada expressão contém nove termos. Os índices não repetidos p e v são aqueles que sobreviveram ao processo de somatória de forma que a expressão citada é o (p, v) -ésimo componente de alguma entidade, nominalmente K_{pv} . Com $K_{pv} = S_{pq}T_{vw}\delta_{qw}$, provamos que K é um tensor de segunda ordem. A somatória sobre w é feita trocando w por q e eliminando δ_{qw} . Assim:

$$K_{pv} = S_{pq}T_{vq}. \quad (4.1)$$

Ao trocar os eixos, o lado direito se torna $(\lambda_{ap}\lambda_{bq}S'_{ab})X(\lambda_{cv}\lambda_{dq}T'_{ed})$. Aplicando $\lambda_{bq}\lambda_{dq} = \delta_{bd}$ isso se reduz a $\lambda_{ap}\lambda_{cv}\delta - bdS'_{ab}T'_{cd}$ e ao trocar b por d e eliminar δ_{bd} , acaba sendo reduzido para $\lambda_{ap}\lambda_{cv}S'_{ad}T'_{cd}$, que é $\lambda_{ap}\lambda_{cv}K'_{ac}$.

Portanto, $K_{pv} = \lambda_{ap}\lambda_{cv}K'_{ac}$ e K é um tensor de segunda ordem. Até este ponto, concluímos que há 81 termos do tipo $S_{pq}T_{vw}$, nove termos do tipo $S_{pq}T_{vq}$ e que esses são os termos de um tensor de quarta ordem e de segunda ordem, respectivamente. Posteriormente pode-se obter $S_{pq}T_{vq}$ de $S_{pq}T_{qw}$ através do Delta de Kronecker.

Esta forma de usar o Delta de Kronecker para fornecer a repetição de um dos índices é chamada de compactação e seu efeito é reduzir a ordem da grandeza do tensor resultante por dois.

É claro que a repetição da contração é possível. Se começarmos com $S_{pq}T_{vw}\delta_{qw}\delta_{pv}$, essa expressão é reduzida para $S_{pq}T_{vq}\delta_{pv}$ e então para $S_{pq}T_{pq}$. Assim, não sobra nenhum índice livre e a grandeza $S_{pq}T_{pq}$ é um tensor de ordem zero, ou seja, um escalar. Concluímos, portanto, que dos componentes de um tensor de m -ésima e n -ésima ordem pode se formar tensores de $(m+n)$ -ésima, $(m+n-2)$ -ésima, $(m+n-4)$ -ésima ordens e etc. Em particular é possível compactar a quantidade de vezes suficiente para chegar tanto a uma grandeza escalar como vetorial, assim como $(m+n)$ é ímpar ou par.

4.1 Os invariantes de um tensor de segunda ordem

A discussão sobre compactação dada anteriormente introduziu um dos invariantes de um tensor de segunda ordem. Buscaremos outros invariantes agora. Se S e T são ambos tensores de segunda ordem, então $(S + T)$ também o é. O caso particular em que $T = -k\delta_{pq}$ permite que encontremos grandezas invariantes do tensor S . $(S + T)$ é então $S - k\delta_{pq}$, ou seja:

$$\begin{bmatrix} S_{11} - k & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} - k & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} - k \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

Ao trocarmos os eixos, $(S + T)$ se torna $(S' + T')$, mas T' continua sendo $-k\delta_{pq}$ pois T é um tensor isotrópico que possui as mesmas componentes em relação a todos os conjuntos de eixos. Assim, no que diz respeito aos novos eixos, as componentes do tensor são:

$$\begin{bmatrix} S'_{11} - k & S'_{12} & S'_{13} \\ S'_{21} & S'_{22} - k & S'_{23} \\ S'_{31} & S'_{32} & S'_{33} - k \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Podemos agora utilizar a lei de transformação de um tensor equação (2.19c) junto ao fato conhecido de que os determinantes de $[\lambda]$ e de $[\lambda]^T$ são ambos iguais à 1. Assim, utilizando o teorema da multiplicação para determinantes concluímos que os determinantes das duas matrizes dadas por (4.2) e (4.3) são iguais, sendo

$$\begin{vmatrix} S_{11} - k & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} - k & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} - k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S'_{11} - k & S'_{12} & S'_{13} \\ S'_{21} & S'_{22} - k & S'_{23} \\ S'_{31} & S'_{32} & S'_{33} - k \end{vmatrix}. \quad (4.4)$$

Cada lado da equação (4.4) é k^3 . Dado que esta equação deve ser válida para cada valor de k temos que os coeficientes de cada potência de k devem ser os mesmos. Estas condições nos dão:

$$S_{11} + S_{22} + S_{33} = S'_{11} + S'_{22} + S'_{33}$$

$$\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S_{22} & S_{23} \\ S_{32} & S_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S_{11} & S_{13} \\ S_{31} & S_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S'_{11} & S'_{12} \\ S'_{21} & S'_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S'_{22} & S'_{23} \\ S'_{32} & S'_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S'_{11} & S'_{13} \\ S'_{31} & S'_{33} \end{vmatrix} \quad (4.5)$$

$$\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S'_{11} & S'_{12} & S'_{13} \\ S'_{21} & S'_{22} & S'_{23} \\ S'_{31} & S'_{32} & S'_{33} \end{vmatrix}.$$

Assim, os resultados encontrados na equação (4.4) são invariantes do tensor S .

Na forma de índices, a terceira delas é definida como uma nova grandeza.

O primeiro invariante é :

$$J_1 = S_{pp}. \quad (4.6)$$

O segundo invariante é:

$$J_2 = \frac{1}{2} [S_{pp}S_{qq} - S_{pq}S_{pq}]. \quad (4.7)$$

Para o terceiro invariante, o determinante pode ser escrito como:

$$J_3 = S_{11}S_{22}S_{33} - S_{11}S_{23}S_{32} + S_{12}S_{23}S_{31} - S_{12}S_{21}S_{33} + S_{13}S_{21}S_{32} - S_{13}S_{22}S_{31}.$$

Os padrões destes termos se dão conforme a seguir:

(i) Em um dado termo, os subscritos iniciais são todos diferentes e são 1, 2 e 3 nessa ordem.

(ii) Os segundos subscritos são todos diferentes.

(iii) Onde os segundos subscritos estão na ordem cíclica 1231231..., o termo é positivo.

(iv) Onde os segundos subscritos estão na ordem anticíclica 321321..., o termo é negativo.

Concluimos então que o valor do determinante pode ser expresso como $\varepsilon_{pqr}S_{1p}S_{2q}S_{3r}$ (realizando a somatória sobre p, q e r) dado que ε_{pqr} é definido conforme a seguir:

$$\varepsilon_{pqr} = \begin{cases} 1, & \text{se } p, q, r \text{ forem todos diferentes e na ordem cíclica } 12312\dots \\ -1, & \text{se } p, q, r \text{ forem todos diferentes e na ordem anticíclica } 32132\dots \\ 0, & \text{se entre } p, q, r \text{ dois deles (quaisquer que sejam) sejam iguais.} \end{cases}$$

Esta função é geralmente chamada densidade Levi-Civita. Em alguns livros o conjunto de ε_{pqr} é chamado símbolos de permutação.

Portanto, o terceiro invariante do tensor S é:

$$J_3 = \varepsilon_{pqr}S_{1p}S_{2q}S_{3r}. \quad (4.8)$$

Uma observação importante é que o produto vetorial pode ser visto como decorrente da equação $C_r = \varepsilon_{pqr}A_pB_q$. O termo da direita é formado por componentes de tensores de terceira e primeira ordem. Com duas simplificações (somando em p e q) o resultado é um vetor C do qual C_r é uma componente. O vetor C é chamado de produto vetorial de A com B . Denotamos $C = A \times B$. Em notação de índice

$$C = C_r i_r = \varepsilon_{pqr}A_pB_q i_r, \quad (4.9)$$

onde i_r é um vetor unitário na direção x_r .

É importante observar que a ordem na qual A e B são escritos é importante, pois se na equação (4.9) os lugares de A e B forem invertidos, o ε_{pqr} muda de sinal devido ao fato de que os subscritos p e q mudam de lugar.

Assim:

$$A \times B = -B \times A. \quad (4.10)$$

Exemplos particulares importantes da equação (4.9) são os produtos vetoriais de vetores ortonormais i_1, i_2 e i_3 . Utilizando a equação (4.9), sendo $A = i_1$ de forma que $A_1 = 1, A_2 = 0, A_3 = 0$ e $B = i_2$, de forma que $B_1 = 0, B_2 = 1, B_3 = 0$ descobrimos que $i_1 \times i_2 = i_3$. Existem mais cinco equações dessa, assim temos:

$$\begin{aligned}
i_1 \times i_2 &= i_3, & i_2 \times i_3 &= i_1 & i_3 \times i_1 &= i_2 \\
i_2 \times i_1 &= -i_3, & i_3 \times i_2 &= -i_1 & i_1 \times i_3 &= -i_2.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Também pode ser notado que o produto vetorial de um vetor com ele mesmo é zero, ou seja, $A \times A = 0$, pois este produto vetorial é $\varepsilon_{pqr} A_p A_q i_r$ os termos dos quais somem em pares idênticos (veja um exemplo parecido abaixo). Em particular,

$$i_1 \times i_1 = 0, \quad i_2 \times i_2 = 0 \quad i_3 \times i_3 = 0. \tag{4.12}$$

O produto vetorial C de dois vetores A e B é perpendicular a ambos A e B , ou seja, é perpendicular ao plano definido por A e B . Para confirmar isso é necessário apenas examinar o produto escalar do C com A e do C com B .

O produto escalar $C.A$ é:

$$C_r A_r = \varepsilon_{pqr} A_p B_q A_r. \tag{4.13}$$

O lado direito da equação (4.13) é zero, dado que os termos desaparecem em pares idênticos. Por exemplo, com $q = 2$ há dois termos, $\varepsilon_{321} A_1 B_2 A_3$ e $\varepsilon_{321} A_3 B_2 A_1$; esses nos dão $B_2 (A_1 A_3 - A_3 A_1)$, ou seja, zero. Isso ocorre da mesma forma para todas as outras contribuições. Dado que $C.A$ é igual a zero, concluímos que C é perpendicular a A . Da mesma forma, podemos mostrar que C é perpendicular a B . Ao examinarmos a forma da equação (4.9) e lembrando que a definição da densidade de Levi-Civita foi feita pela necessidade de expressar uma determinante em notação de índice, fica claro que

$$A \times B = \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \tag{4.14}$$

Pode-se verificar que $A \times B = (AB \sin \theta) \eta$, onde η é o vetor unitário perpendicular ao plano de A e B e em direção tal que a rotação do vetor A para o vetor B por um ângulo menor que 180° daria um regra da mão direita ao longo de η . A Figura 4.1 mostra alguns exemplos de produtos vetoriais.

Observa-se que $A \times B$ é perpendicular a A e B . Dessa forma, se A e B são eles próprios mutuamente perpendiculares, então A, B e $(A \times B)$ constituem uma tríade de eixos perpendiculares com a propriedade da regra da mão direita. Este fato nos fornece os meios para solucionar alguns problemas. Isso permite que completemos a matriz de cossenos diretores.

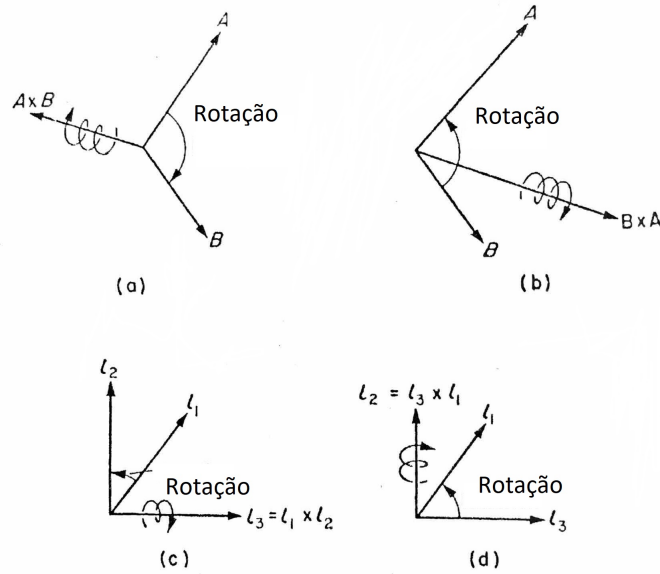


Figura 4.1: Exemplos de produtos vetoriais. [3]

4.2 Os autovetores de um tensor de segunda ordem

Já foi observado que uma equação $A_p = T_{pq}B_q$, que em notação de matriz é escrita $\{A\} = [T]\{B\}$ pode ser referida como o tensor T operando em um vetor B e surgindo um novo vetor A . Há um outro caso em particular de grande interesse no estudo das vibrações e também da estabilidade de estruturas, é o caso em que o vetor A dos quais os resultados estão na mesma direção do vetor B , de forma que A pode ser escrito $A = kB$, onde k é uma constante escalar. Qualquer vetor $B \neq 0$ que possui tal propriedade é chamado de autovetor do tensor T , e o valor associado a k é chamado autovalor. Algumas propriedades dos autovetores são desenvolvidos abaixo. A equação que deve ser satisfeita é $k\{B\} = [T]\{B\}$, ou seja,

$$\begin{cases} kB_1 = T_{11}B_1 + T_{12}B_2 + T_{13}B_3 \\ kB_2 = T_{21}B_1 + T_{22}B_2 + T_{23}B_3 \\ kB_3 = T_{31}B_1 + T_{32}B_2 + T_{33}B_3 \end{cases} \quad (4.15)$$

A condição necessária e suficiente para a existência de valores de B_1, B_2, B_3 , em que nem todos deles sejam zero, satisfazendo essas três equações é que o determinante seja zero, ou seja,

$$\begin{vmatrix} T_{11} - k & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - k & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - k \end{vmatrix} = 0.$$

Esta é uma equação cúbica em k . Uma condição suficiente, embora não necessária, para que as raízes dessa equação sejam reais é que a matriz T deve ser simétrica. Ao limitar a consideração a tensores simétricos é muito vantajoso já que há três eixos mutuamente perpendiculares, chamados eixos principais, com respeito aos quais matriz T é diagonal. Tomando os eixos principais como eixos coordenados x_1, x_2 e x_3 a equação para autovalores se torna

$$\begin{vmatrix} T_{11} - k & 0 & 0 \\ 0 & T_{22} - k & 0 \\ 0 & 0 & T_{33} - k \end{vmatrix} = 0$$

as três raízes das quais são $k_1 = T_1$, $k_2 = T_2$, $k_3 = T_3$, ou seja, os autovalores são os valores dos componentes principais do tensor. Para achar os autovetores B para cada um desses valores de k , suponhamos primeiro que os valores sejam todos diferentes. O vetor correspondente ao autovalor k_1 deve então satisfazer as equações (4.15) que agora aparecem como

$$\begin{cases} k_1 B_1 = k_1 B_1 \\ k_1 B_2 = k_2 B_2 \\ k_1 B_3 = k_3 B_3 \end{cases} \quad (4.16)$$

Então $B_2 = B_3 = 0$ e B_1 é arbitrário, onde

$$B = C_1 i_1. \quad (4.17)$$

Da mesma forma, os outros autovetores são $C_2 i_2$, $C_3 i_3$, onde os C_s são constantes arbitrárias. Podemos concluir que quando os eixos principais são definidos unicamente, estes eixos são os eixos dos três autovetores distintos.

Se dois valores do k são os mesmos, dizemos $k_1 = k_2$, com k_3 diferente, para encontrar um vetor correspondente com o autovalor k_1 devemos substituir na equação (4.15) e descobrir

$$\begin{cases} k_1 B_1 = k_1 B_1 \\ k_1 B_2 = k_2 B_2 \\ k_1 B_3 = k_3 B_3 \end{cases} \quad (4.18)$$

Então $B_3 = 0$ e B_1 e B_2 são arbitrários. Conclui-se então que qualquer vetor no plano de duas componentes principais iguais a do tensor é um autovetor. O autovetor na terceira direção possui uma direção definida unicamente.

Referências

- [1] Beer, F.P., Johnston, E.R. Dewolf, J.T. and Mazurek, D.F.(2001). *Mecânica dos Materiais*. McGraw Hill.
- [2] Hibbeler, R.C. (2011). *Mechanics of Materials*. Pearson Prentice Hall.
- [3] Jaeger, L.G. (1966) *Cartesian Tensors in Engineering Science*. Pergamon Press Ltd.
- [4] Lang, S. (1971) *Álgebra Linear*. Editora Edgar Blucher Ltda.
- [5] Rachid, M. e Libardi, W. (1992). *Introdução à Teoria de Elasticidade*. Universidade Federal de São Carlos.