

FACULDADE DE ENGENHARIA  
CÂMPUS DE ILHA SOLTEIRA

MAURO VIEGAS DA SILVA

DESENVOLVIMENTO DE UM MODELO DE PROGRAMAÇÃO  
CONVEXA PARA O PROBLEMA DE FLUXO DE POTÊNCIA  
ÓTIMO

Ilha Solteira

2018

MAURO VIEGAS DA SILVA

DESENVOLVIMENTO DE UM MODELO DE PROGRAMAÇÃO  
CONVEXA PARA O PROBLEMA DE FLUXO DE POTÊNCIA  
ÓTIMO

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia do Câmpus de Ilha Solteira – UNESP, como requisito para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Área de Conhecimento: Automação.

José Roberto Sanches Mantovani

Orientador

Mahdi Pourakbari Kasmaei

Colaborador

Ilha Solteira

2018

FICHA CATALOGRÁFICA  
Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

S586d Silva, Mauro Viegas da.  
Desenvolvimento de um modelo de programação convexa para o problema de fluxo de potência ótimo / Mauro Viegas da Silva. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2018  
148 f. : il.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia.  
Área de conhecimento: Automação, 2018

Orientador: José Roberto Sanches Mantovani  
Inclui bibliografia



1. Programação convexa. 2. Fluxo de potência ótimo. 3. Envelopes de McCormick. 4. Programação binível. 5. Dualidade.

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA TESE: Desenvolvimento de um Modelo de Programação Convexa para o Problema de Fluxo de Potência Ótimo

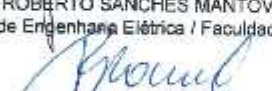
AUTOR: MAURO VIEGAS DA SILVA

ORIENTADOR: JOSE ROBERTO SANCHES MANTOVANI

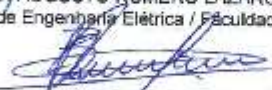
Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Doutor em ENGENHARIA ELÉTRICA, área: Automação pela Comissão Examinadora:



Prof. Dr. JOSE ROBERTO SANCHES MANTOVANI  
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira



Prof. Dr. RUBEN AUGUSTO ROMERO LAZARO  
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira



Prof. Dr. BENVIDIO RODRIGUES PEREIRA JÚNIOR  
Departamento de Engenharia Elétrica / Escola de Engenharia de São Carlos - USP



Prof. Dr. CLÁUDIO FABIANO MOTTA TOLEDO  
Departamento de Sistemas de Computação / Universidade de São Paulo - USP



Prof. Dr. MAHDI POURAKBARI KASMAEI  
Electrical and Computer Engineering Department / Aalto University - Finlandy

Ilha Solteira, 18 de dezembro de 2018

## DEDICATÓRIA

A minha mãe Antônia.

Meus filhos Mateus e Pedro.

Minha esposa Tatiana.

## AGRADECIMENTOS

A Deus, pela vida.

A minha família, pelo apoio.

Aos novos e velhos amigos, pela força.

Ao CCI Catatau, por cuidar tão bem do Pedro Viegas.

À Unesp, pela minha formação de Mestrado e Doutorado.

À Unemat, pela oportunidade de qualificar profissionalmente.

Aos funcionários da Unesp, pela disposição de ajudar sempre.

Ao pesquisador iraniano Mahdi, pelas dicas valiosas de otimização.

Ao professor Mantovani pela orientação desta tese, sempre com ética e dedicação.

## EPÍGRAFE

*“Pois minha imaginação não tem estrada. E eu não gosto mesmo da estrada. Gosto do desvio e do desver”.* Manoel de Barros

*“In fact the great watershed in optimization isn't between linearity and nonlinearity, but convexity and nonconvexity”.*

*R. Tyrrell Rockafellar, in SIAM Review, 1993*

## RESUMO

Neste trabalho, o modelo matemático do problema de fluxo de potência ótimo básico não linear é analisado e manipulado algebricamente para obter um modelo de programação convexa, do tipo cônico de segunda ordem. O conceito de envelopes convexos é apresentado para tratar a não linearidade e não convexidade da restrição trigonométrica inversa que surge ao escrever o modelo de FPO como um modelo cônico. Aplicando duas proposições apresentadas neste trabalho a restrição trigonométrica é resolvida em um pré-processamento por um *solver* de otimalidade local, neste caso o *KNITRO*, que enumera todas as possibilidades dos pontos de KKT para obter os envelopes convexos e tornar o modelo de FPO totalmente convexo. O modelo é implementado no AMPL e é resolvido com *solvers* de otimalidade global com sistemas testes da literatura, nesta tese usam-se os sistemas testes IEEE 14, 30, 57 e 118 barras. Os resultados obtidos são validados comparando-os com resultados fornecidos pelo *Matpower*, que é um simulador para FPO. Como contribuição desta tese, o modelo convexo de FPO obtido é utilizado como exemplo de aplicações no problema de despacho ótimo de potência ativa e reativa, considerando competições via programação binível. São apresentados dois modelos biníveis e dois modelos uníveis. O modelo iterativo convexo utiliza-se do modelo proposto de FPO convexo e as não linearidades são convexificadas fazendo uso dos envelopes de *McCormick*. O conceito de dualidade forte é empregado afim de obter um modelo unível convexo. Os modelos biníveis e uníveis são implementados em AMPL e resolvidos utilizando *solvers* de otimalidade local e global, utilizando os mesmos sistemas testes IEEE do modelo cônico e ainda acrescentando mais dois sistemas testes, um de 2 barras e outro de 8 barras. Os principais resultados obtidos com os quatro modelos de despacho ótimo de potência ativa e reativa propostos são apresentados e discutidos.

**Palavras-chave** – Programação convexa. Fluxo de potência ótimo. Envelopes de *McCormick*. Programação binível. Dualidade.



## ABSTRACT

In this work, the basic nonlinear mathematical model for the optimal power flow (OPF) problem is analyzed and manipulated algebraically in order to obtain a second-order conic convex programming model. The concept of convex envelopes is presented to deal with the nonlinearity and nonconvexity of the inverse trigonometric constraint that arises when transforming the nonconvex OPF model into an equivalent conic model. By applying two propositions presented in this work, the trigonometric constraint is solved in a pre-processing stage by a local optimization solver, in this case, the *KNITRO* solver, which considers all the possibilities of the KKT points to obtain the convex envelopes and find a completely convex OPF model, is used. The model is implemented in AMPL and is solved via global optimization solvers while to show the effectiveness of the model several IEEE systems such as the IEEE 14-, 30-, 57-, and 118-bus systems are used. The obtained results are validated by comparing them with the results provided by Matpower, which is an OPF solver. As a contribution of this thesis, the obtained convex OPF model is used as an application in the active and reactive optimal power dispatch problem, considering competition via bilevel programming. Two bilevel models and two single-level models are presented. The convex iterative model uses the proposed convex OPF model, and the nonlinearities are convexified using McCormick envelopes. The concept of strong duality is employed to obtain a single-level convex model. The bilevel and the single-level models are implemented in AMPL and solved using local and global optimization solvers for the 2-bus system, 8-bus system, and the aforementioned IEEE test systems. The main results obtained with the four proposed models for active and reactive optimal power dispatch are presented and discussed.

**Keywords** – Convex programming. Optimal power flow. McCormick envelopes. Bilevel programming. Duality.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Relaxação convexa a partir de um modelo não convexo.....	26
Figura 2 – Gráfico de uma função convexa.....	46
Figura 3 – Funções convexa e estritamente convexa. ....	46
Figura 4 – Aproximação de Taylor de primeira ordem.....	47
Figura 5 – O conjugado da função $f^*(y)$ . ....	49
Figura 6 – Curva da região factível função não convexo e a relaxação convexa	58
Figura 7 – Função não convexa 1, underestimators 3 e 4, e envelope convexo	259
Figura 8 – Partição termo bilinear via McCormick .....	72
Figura 9 – Casca Convexa para uma Partição.....	73
Figura 10 – Casca Convexa com $N = 14$ partições.....	74
Figura 11 – Partições univariantes e bivariantes. ....	75
Figura 12 – Sistema ortogonal de autovetores na álgebra de matriz simétrica. .	82
Figura 13 – Etapas de resolução modelo convexo proposto .....	91
Figura 14 – Etapas de resolução modelo convexo proposto iterativo .....	92
Figura 15 – Representação do processo iterativo binível. ....	111
Figura 16 – Modelos implementados.....	112

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Função objetivo 14 barras.....	94
Tabela 2 – Potência ativa fornecida pelas barras de geração 14 barras.....	94
Tabela 3 – Perdas nos ramos 14 barras .....	95
Tabela 4 – Função objetivo 30 barras.....	97
Tabela 5 – Potência ativa fornecidas pelas barras de geração 30 barras .....	97
Tabela 6 – Perdas nos ramos 30 barras .....	98
Tabela 7 – Função objetivo 57 barras.....	100
Tabela 8 – Resultados totais de geração e carga Matpower 57 barras .....	100
Tabela 9 – Resultados totais de geração e carga modelo proposto 57 barras ...	100
Tabela 10 – Magnitude de tensão e ângulo, máximos e mínimos 57 barras .....	101
Tabela 11 – Magnitude de tensão e ângulo, máximos e mínimos 57 barras .....	101
Tabela 12 – Perdas totais ativa e reativa no sistema 57 barras .....	101
Tabela 13 – Função objetivo 118 barras.....	102
Tabela 14 – Resultados totais de geração e carga Matpower 118 barras.....	102
Tabela 15 – Resultados totais de geração e carga modelo proposto 118 barras	102
Tabela 16 – Magnitude de tensão e ângulo, máximos e mínimos 118 barras ...	103
Tabela 17 – Magnitude de tensão e ângulo, máximos e mínimos 118 barras ...	103
Tabela 18 – Perdas totais ativa e reativa no sistema 118 barras.....	103
Tabela 19 – Coeficiente custo de geração.....	114
Tabela 20 – Variáveis ótimas obtidas .....	114
Tabela 21 – Dados de Geração.....	115
Tabela 22 – Coeficientes de custos e custo marginal .....	115
Tabela 23 – Lucros dos geradores e a função custo de oportunidade .....	115
Tabela 24 – Custo de oportunidade, função custo com e sem a rede CA.....	116

Tabela 25 – Variáveis ótimas obtidas .....	117
Tabela 26 – Dados de Geração.....	117
Tabela 27 – Coeficientes de custos e Custo Marginal .....	117
Tabela 28 – Lucros dos geradores e a função custo de oportunidade .....	118
Tabela 29 – Custo de oportunidade, função custo com e sem a rede CA.....	118
Tabela 30 – Custo de oportunidade, função com e sem rede CA modelo PNL	118
Tabela 31 – Dados do sistema de 14 barras.....	119
Tabela 32 – Magnitude de tensão, custo marginal e coeficientes de custos .....	120
Tabela 33 – Dados de Geração.....	120
Tabela 34 – Lucros dos geradores e a função custo de oportunidade .....	121
Tabela 35 – Custo de oportunidade, função custo com e sem a rede CA.....	121
Tabela 36 – Testes dos modelos iterativos PNL e convexo.....	122
Tabela 37 – Geração total considerando o modelo CA e o modelo DC .....	123
Tabela 38 – Variáveis ótimas obtidas .....	125
Tabela 39 – Dados de Geração.....	126
Tabela 40 – Coeficientes de custos e custo marginal .....	126
Tabela 41 – Lucros dos geradores e a função custo de oportunidade .....	126
Tabela 42 – Custo de oportunidade, função custo com e sem a rede CA.....	127
Tabela 43 – Variáveis ótimas – modelo PNL.....	127
Tabela 44 – Custos de oportunidades e preços marginais.....	128
Tabela 45 – Variáveis ótimas – modelo convexo.....	128
Tabela 46 – Custos de oportunidades e preços marginais.....	129
Tabela 47 – Comparando os quatro modelos propostos.....	129
Tabela 48 – Testes dos modelos unível PNL e unível convexo .....	130
Tabela 49 – Lucros dos geradores e a função custo de oportunidade .....	130
Tabela 50 – Custo marginal e potência gerada marginal.....	131
Tabela 51 – Lucros dos geradores e a função custo de oportunidade .....	132

Tabela 52 – Coeficientes de custos e custo marginal .....	132
Tabela 53 – Dados de geração.....	133
Tabela 54 – Custo de oportunidade total e função com e sem a rede CA.....	133

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Solvers utilizados para os testes.....	113
---	-----

## LISTA DE ABREVIATURAS

SEP	Sistemas Elétricos de Potência
FPO	Fluxo de Potência Ótimo
DE	Despacho Econômico
FPORS	Fluxo de Potência Ótimo com Restrição de Segurança
PNLIM	Problema Não-Linear Inteiro Misto
PNL	<i>Programação Não Linear</i>
PSD	Programação Semidefinida
KKT	<i>Karush-Kuhn-Tucker</i>
FPO – CA	Fluxo de Potência Ótimo com Corrente Alternada
PL	<i>Programação Linear</i>
PLIM	Problema Linear Inteiro Misto
PMCC	<i>Programa Matemático com Condições de Complementaridade</i>
OC	Otimização Convexa
TD	Teoria da Dualidade
UC	<i>Underestimator</i> Convexo
MATPOWER	Um <i>package of MATLAB® M-files</i> para resolver problemas de FPO
OS	Operador do Sistema
CA	<i>Corrente Alternada</i>
LI	Limitante inferior
LS	Limitante superior
PQ	Programação quadrática
OL	Otimização Linear
PQRQ	Programação Quadrática Restringido Quadraticamente
PCSO	Programação Cônica de Segunda Ordem
AEJ	Álgebra euclidiana de Jordan
AMPL	<i>A Mathematical Programming Language</i>
GAMS	<i>General Algebraic Modeling System</i>
CO	Custo de Oportunidade

## LISTA DE SÍMBOLOS

$f(x)$	Função Objetivo
$F_i(Pg_i)$	Produção Individual em Termos de Geração de Potência Ativa
$Pg_i$	Saída de Geração para Unidade $i$
$P_D$	Custo Total do Sistema Atual de Demanda de Carga
$P_L$	Total de Perdas na Linha de Transmissão do Sistema
$a_i, b_i, c_i$	Coefficientes de Custos do $i$ -ésimo gerador
$NB$	Conjuntos de Barras
$NL$	Conjuntos de Ramos
$i, j$	Índice das Barras
$V, \theta$	Magnitude e Ângulo das Tensões nas Barras do Sistema
$P, Q$	Potência Ativa e Potência Reativa
$Pg_i, Qg_i$	Potências Ativas e Reativas Geradas na Barra $i$
$Pd_i, Qd_i$	Demanda de Potência Ativa e Reativa na Barra $i$
$V_i^{min}, V_i^{max}$	Limite Inferior e Superior da Magnitude da Tensão na Barra $i$
$V_i$	Magnitude da Tensão na Barra $i$
$\theta$	Ângulo de Tensão
$P_{min}$	Potência Ativa Mínima
$P_{max}$	Potência Ativa Máxima
$Q_{min}$	Potência Reativa Mínima
$Q_{max}$	Potência Reativa Máxima
$ S_{ij} $	Magnitude do Fluxo de Potência Aparente na Linha de Transmissão $ij$
$S_{ij}^{max}$	Capacidade Máxima da Magnitude de Fluxo de Potência Aparente na Linha de Transmissão $ij$
$D$	Domínio de uma Função
$\mathbb{R}$	Conjunto dos Números Reais
$\mathbb{R}_+$	Conjunto dos Números Reais não Negativos
$\mathbb{R}_{++}$	Conjunto dos Números Reais Positivos
$S_+^k$	O conjunto de matrizes simétricas $k \times k$ semidefinidas
$S_{++}^k$	O conjunto de positivos simétricos definidos por $k \times k$
$\succ, \succcurlyeq$	Sucedê ou semidefinida



$\preceq, \prec$	Precede ou semidefinida
$S^n$	Conjunto das matrizes simétricas $n \times n$
$\text{epi } f$	Epígrafo
$f^*(y)$	Conjugado da função
$Q_i$	Potências de Transformações
$\mathcal{G}$	Conjunto de geradores
$\delta(i)$	Conjunto de barras adjacentes a $i$
$\lambda$	Multiplicador de Lagrange Custo Marginal
$\mathcal{AT}$	Conjunto Definido para a Restrição Arco Tangente
$\zeta$	Vértice no Espaço que corresponde $\mathcal{AT}$
$Pg_i^0$	Potência Ativa Ofertada
$O_i$	Oportunidade de Lucro Quando considera a Rede CA

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	22
1.1	CONTEXTUALIZAÇÃO E MOTIVAÇÃO	22
1.2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	25
1.2.1	Relaxação convexa do FPO	25
1.2.2	Relaxação McCormick para problemas bilineares	29
1.2.3	Programação binível	31
1.3	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	34
2	FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO E DESPACHO ECONÔMICO	37
2.1	HISTÓRIA DA OTIMIZAÇÃO DO SISTEMA ELÉTRICO DE POTÊNCIA	37
2.1.1	Avanços nos problemas de otimizações de sistemas elétricos de potências	39
2.2	FORMULAÇÃO DO DESPACHO ECONÔMICO	40
2.3	FORMULAÇÃO DO FPO – CA	42
3	FUNDAMENTOS TEÓRICOS: OTIMIZAÇÃO CONVEXA TEORIA DA DUALIDADE, RELAXAÇÃO <i>MCCORMICK</i>	45
3.1	PROPRIEDADES DE FUNÇÕES CONVEXAS E EXEMPLOS	45
3.1.1	Condições de otimalidade de primeira ordem	47
3.1.2	Condições de otimalidade de segunda ordem	48
3.1.3	Função conjugado	48
3.1.4	Monotonicidade, convexidade e inequação	49
3.2	PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO	50
3.2.1	Problemas equivalentes	52
3.2.2	Problema de otimização convexa na forma padrão	54

3.3	ÓTIMO LOCAL E GLOBAL	55
3.4	<i>UNDERESTIMATOR</i> CONVEXO	57
3.5	TEORIA DA DUALIDADE	59
3.5.1	A Função dual Lagrange	59
3.5.2	O problema dual lagrangeano	60
3.5.3	Dualidade fraca ou forte e qualificação da restrição de Slater	61
3.5.4	Caracterização de max-min da dualidade fraca e forte	62
3.5.5	Resolvendo o problema primal via o problema dual	63
3.6	ESTRATÉGIAS MISTAS PARA JOGOS MATRICIAIS	64
3.6.1	Interpretações de jogos, preços ou taxas	67
3.7	RELAXAÇÃO <i>MCCORMICK</i> PARA PROBLEMAS BILINEARES	70
3.7.1	Definição do problema não linear	71
3.7.2	Formulação do limitante inferior para envelopes <i>piecewise McCormick</i>	73
3.7.3	Melhorando a qualidade da relaxação <i>piecewise</i>	75
4	UMA RELAXAÇÃO FORTE DE PCSO PARA PROBLEMAS DE FPO	77
4.1	ELIMINAÇÕES DAS RESTRIÇÕES DE IGUALDADE E FORMULAÇÃO CÔNICA DO FPO	77
4.1.1	Propriedade algébrica dos cones de segunda ordem	79
4.2	A FORMULAÇÃO FPO – CA COMO UM MODELO CÔNICO DE SEGUNDA ORDEM	82
4.2.1	Uma formulação alternativa para o FPO	84
4.2.2	Envelope do arco tangente	88
4.2.3	FPO – CA modelo relaxado	89
4.3	TESTES E RESULTADOS	93
4.3.1	Sistema de 14 barras	94

4.3.2	Sistema de 30 barras	96
4.3.3	Sistemas de 57 barras	100
4.3.4	Sistemas de 118 barras	102
5	<b>EXEMPLO DE APLICAÇÃO DO MODELO CONVEXO:DESPACHO ÓTIMO DE POTÊNCIA VIA PROGRAMAÇÃO BINÍVEL</b>	<b>105</b>
5.1	O MERCADO DE POTÊNCIA ATIVA	105
5.2	DESPACHO ÓTIMO DE POTÊNCIA	107
5.2.1	O Despacho de potência para o mercado	107
5.2.2	Despacho de potência ativa e reativa	108
5.3	TÉCNICAS DE SOLUÇÕES DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO BINÍVEL	110
5.4	TESTES E RESULTADOS	112
5.4.1	<b>Problema de otimização binível</b>	<b>112</b>
5.4.1.1	<i>Modelo binível PNL e modelo binível convexo – 2 barras</i>	114
5.4.1.2	<i>Modelo binível PNL e modelo binível convexo – 8 barras</i>	116
5.4.1.3	<i>Modelo binível PNL e modelo binível convexo – 14 barras</i>	119
5.4.1.4	<i>Modelo binível PNL e modelo binível convexo – 30 barras</i>	121
5.4.2	<b>Problema de otimização unível</b>	<b>123</b>
5.4.2.1	<i>Modelo unível PNL e modelo unível convexo – 2 barras</i>	125
5.4.2.2	<i>Modelo unível PNL e modelo unível convexo – 8 barras</i>	127
5.4.2.3	<i>Modelo unível PNL e modelo unível convexo – 14 barras</i>	129
5.4.2.4	<i>Modelo unível PNL e modelo unível convexo – 30 barras</i>	131
6	<b>CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS</b>	<b>134</b>
6.1	CONCLUSÕES	134
6.2	TRABALHOS FUTUROS.	135

REFERÊNCIAS	137
APÊNDICE 1	147

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO E MOTIVAÇÃO

Uma das maiores conquistas da engenharia do século 20 segundo a “*The National Academy of Engineering*” seria a expansão generalizada do uso da eletricidade. A sociedade moderna é tão dependente da energia elétrica, de tal forma que qualquer tipo de interrupção do fornecimento de energia é extremamente oneroso social e economicamente. As incertezas no sistema elétrico de potência (SEP) devido ao comportamento incerto da demanda, incertezas nos parâmetros do sistema e interrupções inesperadas da geração, podem ocasionar a perda da margem de estabilidade e resultar em descontrole operacional, provocando um colapso de tensão em grande escala no sistema. Além da confiabilidade, a operação econômica do SEP é uma das maiores preocupações dos engenheiros. A operação otimizada do sistema para reduzir custos de operação deve ser acompanhada da análise de restrições de segurança.

Neste contexto, as melhorias da confiabilidade e eficiência operacional do SEP, são objetivos que devem ser buscados tanto em termos de pesquisas, como pelos

procedimentos de operação da rede. Assegurar a confiabilidade do SEP, otimização dos custos de geração e operação, bem como a prevenção contra “*blackouts*” requer ações adequadas de operação da rede para suprir a demanda exigida pelos consumidores, obedecendo as limitações físicas e restrições operacionais relacionadas à qualidade do produto e confiabilidade do sistema. A operação da rede exige capacidade de reserva de energia para contemplar condições de operações sob contingências que necessitam de uma operação segura do SEP para manter a confiabilidade.

As pesquisas sobre solução e formulação do problema de fluxo de potência ótimo iniciaram-se nos anos de 1920, com a proposta da ferramenta de despacho econômico (DE), que foi desenvolvida para tratar o problema da alocação econômica da geração, ou como dividir corretamente as cargas entre as unidades geradoras disponíveis (HAPP, 1977). O termo FPO, de modo geral, refere-se à otimização de um estado do sistema como o caso base Carpentier (1962), e o fluxo de potência ótimo com restrição de segurança (FPORS) está relacionado a um processo de otimização de um estado do sistema sujeito a um conjunto adicional de restrições de segurança, ou seja, restrições de contingências, assim o FPO é um caso especial de FPORS (ALSAC; STOTT, 1974).

Nos problemas de FPO determinísticos, as variáveis que representam o estado do sistema, referentes às magnitudes de tensões e ângulos nas barras são contínuas e as variáveis que representam os “*taps*” de transformadores defasadores e dos transformadores com regulação de tensão, bancos de capacitores e de reatores, topologia da rede, etc. são de natureza discreta, o que caracteriza o FPO como um problema real de grande porte não-linear inteiro misto (PNLIM) não convexo. Desta forma, o problema de FPO por ser um problema de otimização de grande porte e não convexo apresenta muitos desafios, devido às limitações em métodos de programações matemáticas e *solvers*<sup>1</sup> para sua solução e limites de memórias e processamento computacional.

---

<sup>1</sup> Um *solver* é um software matemático, sob a forma de um programa de computador autônomo ou como uma biblioteca de software, que "resolve" um problema matemático (IGNÁCIO; FERREIRA, 2004).

Nos últimos dez anos, o foco das pesquisas na formulação e solução do FPO tem mudado consideravelmente, visando a obtenção de modelos convexos eficientes computacionalmente e considerando a modelagem de incertezas inerentes às variáveis envolvidas no modelo de SEP reais. Neste trabalho, apresenta-se um estudo detalhado sobre a convexificação do modelo básico do FPO com ênfase para o despacho ótimo de potência ativa e como aplicação do modelo convexo de FPO apresenta-se uma metodologia do problema de despacho de potências ativa e reativa no contexto de mercado de energia.

Desta forma, como uma extensão deste estudo, o modelo do problema de FPO tradicional de programação não linear (PNL) é reformulado como um modelo cônico para otimização global que deve apresentar soluções ótimas globais e permitir que o problema de FPO possa ser resolvido usando *solver* comercial. Este modelo de programação matemática convexo contempla o despacho ótimo de potência das unidades geradoras, restrições físicas e operacionais e os ajustes dos controles de potência reativa existentes no sistema. Para avaliar o modelo convexo desenvolvido, apresenta-se uma aplicação do mesmo para a solução do problema de despacho ótimo de potências ativa e reativa que é formulado como um problema de otimização binível em que no nível superior é resolvido o subproblema de PNL convexo referente ao custo mínimo de oportunidade e no nível inferior um modelo de fluxo de potência DC que representa a oferta de potência ativa a preço mínimo. Apresentam-se resultados para os problemas testes da literatura de 2 barras proposto por Almeida e Senna (2011), 8 barras modificado de Rajput e Pandya (2016) e os sistemas testes de 14 barras, 30 barras 57 barras e 118 barras que estão disponíveis no site da *University of Washington* (WASHINGTON, c2018).



## 1.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 1.2.1 Relaxação convexa do FPO

A busca pela otimalidade global do FPO considerando certas hipóteses de um problema não-convexo como propostos por Bai et al. (2008) e Lavaei e Low (2012) deram início a um novo ramo de pesquisa que investiga várias relaxações convexas como em (LOW, 2014A; LOW; 2014B; PANCIATICI et al. 2014). Quando se trabalha com relaxações convexas, estas podem mostrar informações importantes a respeito do problema, por exemplo, seu limite inferior o que permite verificar o grau de subotimalidade de uma solução de otimização local, mostrando que a relaxação utilizada é de alta qualidade ou seja, *tight*<sup>2</sup>.

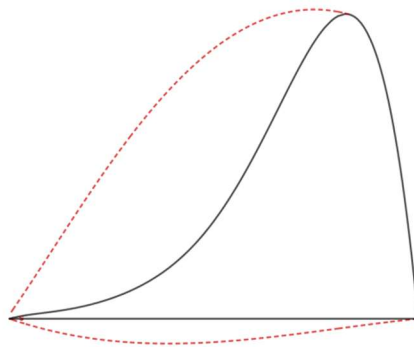
Segundo Ferreira (2017) quando o *gap* de dualidade do problema relaxado é zero tem-se que o resultado do problema relaxado convexo é também solução do problema original, sendo o ótimo global do problema original obtido. Se o *gap* de dualidade é diferente de zero, a solução do problema convexo relaxado não é solução do problema original (MOLZAHM; LESIEUTRE; DEMARCO, 2014). Outra característica da relaxação convexa está em certificar a infactibilidade do problema. Na Figura 1 ilustra-se a ideia intuitiva de uma relaxação convexa representada pela parte pontilhada.

A abordagem de relaxação convexa tem apresentado teoricamente algumas vantagens em termos de confiabilidade dos resultados e técnica de solução e esforço computacional, ou seja, a solução é fornecida em um tempo polinomial. Os trabalhos, partes I e II, de Low (2014), focam somente nas propriedades estruturais e condições de suficiências sobre as quais, relaxações convexas são exatas.

---

<sup>2</sup> Quando o valor da função objetivo do problema convexo relaxado e o ótimo do problema original coincidem pode-se afirmar que a relaxação é exata ou *tight*. Isso vale tanto para a função objetivo como para todas as inequações (TAYLOR, 2015)

Figura 1 – Relaxação convexa a partir de um modelo não convexo.



**Fonte:** Elaborado no Geogebra<sup>3</sup> pelo autor.

Muitas relaxações convexas são obtidas a partir de classes de programas de restrições quadráticas que conduzem a um problema de programação semidefinida, (PSD), relaxada (LAVAEI; LOW, 2012; MOLZAHN et al., 2013; MADANI; ASHRAPHIJUO; LAVAEI, 2015). Considera-se que a relaxação PSD é a menor primeira ordem *momento*<sup>4</sup>, as relaxações momentos são *desenvolvidas* a partir da hierarquia de Lasserre para a resolução de problemas momentos generalizados. Crescendo a ordem da relaxação nesta hierarquia resulta em relaxações “*tighter*” na computação do custo dos grandes programas semidefinidos (MOLZAHN; HISKENS, 2015).

Na literatura, existem alguns trabalhos que abordam a relaxação convexa como *framework*, por exemplo Phan e Kalagnanam (2014) que propõe um método exato para o problema de FPO baseado nos algoritmos de *branch-and-bound* em que exploram as estruturas quadráticas do problema e as equações que modelam o fluxo de potência na rede são representadas em coordenadas retangulares. Em Hijazi e Hentenryck (2015) é desenvolvida uma relaxação convexa quadrática para o problema de FPO em

<sup>3</sup> **GeoGebra** (aglutinação das palavras **Geometria** e **Álgebra**) é um aplicativo de matemática dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra em uma única. Sua distribuição é livre, nos termos da GNU General Public License, e é escrito em linguagem Java, o que lhe permite estar disponível em várias plataformas (GEOGEBRA, c2018).

<sup>4</sup> Seja  $t$  uma variável randômica em  $\mathbb{R}$ . O valor esperado  $Et^k$  (assumindo que eles existam) são chamados de potências momentos das distribuições de  $t$  (BOYD; VANDENBERGHE, 2004)

coordenadas polares. Como os trabalhos na literatura usando relaxações convexas ainda são recentes, os principais resultados obtidos usando este tipo de abordagem são sumarizados nos próximos parágrafos.

Diferentes trabalhos da literatura relatam que algumas soluções de FPO obtidas com otimização local são também ótimos globais. Nestes trabalhos, também pode-se verificar que algumas soluções são de boa qualidade como em Lopez et al. (2017) para o problema de FPO reativo e Phan e Kalagnanam (2014) bem como Hijazi e Hentenryck (2015) para o FPO convencional. Em Hijazi e Hentenryck (2015), mesmo fazendo muitos experimentos com diversos conjuntos de dados, o *gap de* dualidade obtido foi maior que 0% significando que o ótimo global não pode ser recuperado mesmo que um eficiente limitante inferior seja encontrado. Em todos os testes apresentados as relaxações não retornam uma solução factível para o problema não convexo subjacente.

O problema de FPO sem considerar contingências, tem sido resolvido em alguns trabalhos para sistemas superiores a 3000 barras. Entretanto, muito recentemente outras relaxações, por exemplo, relaxações convexas quadráticas e relaxações cônicas de segunda ordem, foram aplicadas para um sistema real de 9241 barras (COFFRIN; HIJAZI; VAN HENTENRYCK, 2016). A SDP foi aplicada para resolver o problema de FPO para um sistema com 7154 barras (CÉDRIC; MOLZAHN, 2015).

No trabalho de Cédric e Molzahn (2015) também se utiliza a representação na forma polar das variáveis complexas e as restrições da rede são representadas como relaxações não convexas, visto que isso pode melhorar a eficiência computacional e facilitar a solução do problema de FPO. Poucos trabalhos, como por exemplo Madani; Ashraphijuo e Lavaei (2015) e Liu e Ferris (2015) consideram restrições de contingências no modelo de FPO.

As soluções em tempos polinomiais apresentam vantagens teóricas, porém, estes trabalhos não provam sistematicamente a eficiência computacional das relaxações convexas para problemas de FPO aplicados na solução de sistemas de grande porte. Isto

está relacionado com uma característica da SDP, que trabalha com variáveis de matrizes quadradas, onde o número de variáveis escalares do problema varia quadraticamente com relação ao número de barras da rede (MADANI; ASHRAPHIJUO; LAVAEI, 2015). Além disso, o esforço computacional cresce significativamente quando são adotadas ordens superiores para as relaxações momentos (MOLZAHN; HISKENS, 2015).

A precisão na convergência é afetada por uma limitação da solução corrente da SDP conforme (MOLZAHN et al. 2013; MOLZAHN; HISKENS, 2015). A título de exemplo, enquanto para solução local de PNL é comum considerar que as restrições de balanço estão satisfeitas para uma tolerância abaixo de 0,01 MW/MVAr, a tolerância utilizada quando se utiliza SDP para solução do problema de FPO é um pouco maior, em torno de 0,5 MVA (MOLZAHN; HISKENS, 2015). Isto significa que se o *gap* de dualidade é zero, o programa SPD não fornece matematicamente o ótimo global, mas somente uma aproximação potencialmente “muito boa” dele. Desta forma, pesquisas ainda precisam ser desenvolvidas visando melhorar a precisão da convergência de um programa SDP, bem como da evolução das condições para o qual a solução ótima global possa ser obtida, visto que, problemas reais de FPO podem apresentar multiplicadores de *Lagrange* negativos para as restrições de igualdade na solução ótima.

Alguns autores entendem que estas relaxações não são destinadas a substituir um modelo de programação não convexo local bem estabelecido, mas em vez disso, elas complementam informações importantes com relação à qualidade da solução obtida. Para este fim, outros benefícios práticos que podem ser mencionados, tais como a habilidade para testar rapidamente (graças às flexíveis operações da álgebra linear) a otimalidade das soluções fornecidas por otimização local via verificações das condições de *Karush-Kuhn-Tucker* (KKT) para a relaxação PSD (MOLZAHN; LESIEUTRE; DEMARCO, 2014).

Devido às limitações no estado da arte de problemas PNL reais de grande porte do tipos fluxo de potência ótimo com corrente alternada (FPO – CA), que exige soluções

em tempos computacionais não proibitivos, se as soluções do problema mestre do FPO contínuo relaxado ou de seus subproblemas são ótimos globais ou não, torna-se de importância secundária comparado ao objetivo primário que é fornecer dentro do tempo computacional permitido uma boa solução (possivelmente subótimo) factível.

### 1.2.2 Relaxação McCormick para problemas bilineares

Diversos problemas, em engenharia, nas diferentes áreas de conhecimento apresentam restrições como o produto de duas variáveis. Esse produto forma termos bilineares que são não convexos e de difícil resolução. Logo, apresentam várias soluções locais. Exemplos de aplicações de variáveis bilineares estão nos problemas de refino de óleo cru, na diferença de diferentes frações de destilações tais como diesel e gasolina Jia e Ierapetritou (2003) ou no planejamento do sistema de tratamento de águas poluídas (MEYER; FLOUDAS, 2006).

Com o propósito de encontrar soluções ótimas globais para os problemas bilineares, que podem ser dos tipos PNL ou PNLIM, um algoritmo alternativo que tenha um modelo de programação linear (PL) ou programação linear inteiro misto (PLIM) em comum, pode ser usado na relaxação do problema original. Seja um problema de otimização, uma relaxação deste problema fornece um limitante inferior, qualquer solução factível fornece um limitante superior e a convergência global é alcançada quando o erro entre os limitantes fica dentro de uma tolerância especificada. Obter a relaxação *tight* é essencial para aperfeiçoar o limitante inferior, bem como melhorar indiretamente o ponto de inicialização de um problema de otimização o que conduz a melhores soluções.

Na relaxação padrão *McCormick* de McCormick (1976), cada termo bilinear é substituído por uma nova variável e quatro conjuntos de restrições de inequações lineares que são adicionados na formulação. A nova variável está ligada a duas variáveis formando

o termo bilinear e seus limites inferior e superior. A alta qualidade de uma relaxação é garantida enquanto a diferença entre os limites inferior e superior seja *tighter*.

Para reduzir o espaço de busca do problema relaxado muitos *solvers* de otimização global criam variáveis limitantes, como por exemplo o *solver* GloMIQO proposto por Misener e Floudas (2013) que usa diferentes técnicas tais como intervalos aritméticos, custo reduzido e otimalidade baseada em contração *bound*. Neste trabalho, uma sequência de problemas de minimizações e maximizações são resolvidos para cada não linearidade da variável particionada para encontrar os possíveis limites *tightest*.

Um algoritmo de otimização global mais completo baseado no procedimento de contração *bound* de otimalidade para uma das variáveis de cada termo bilinear foi proposto por (FARIA; BAGAJEWICZ, 2011). Este procedimento é efetuado construindo sucessivos passos, onde primeiro consiste em resolver o problema relaxado que calcula valores que são referências para as variáveis bilineares e, então, resolvem-se múltiplos modelos lineares auxiliares que atualizam os limites.

Uma redução no espaço factível do problema relaxado exige uma partição do domínio onde Tawarmalani e Sahinidis (2005) e Misener e Floudas (2013) propuseram sequenciar o problema como um *spatial branch-and-bound*. O termo bilinear que mais viola a região factível do problema pode ser particionado considerando o domínio de uma das variáveis. Também é possível particionar simultaneamente as variáveis, (RUIZ; GROSSMANN, 2011). Quando a resolução envolve partições simultâneas, uma delas pode depender do envelope de *McCormick* (KARUPPIA; GROSSMANN, 2006).

Como um avanço na técnica, uma nova concepção de desagregação multiparâmetro foi desenvolvida por (KOLODZIEJ; CASTRO; GROSSMANN, 2013). Desagregação multiparâmetro e *piecewise McCormick* fornecem otimalidade global para uma grande quantidade de partições. Estas técnicas podem ser integradas em um *spatial branch-and-bound frameworks*, como por exemplo GloMIQO. A vantagem desta técnica

está em poder substituir a relaxação padrão *McCormick* para fornecer limites fortes ao realizar contração de limite baseada em otimalidade (CASTRO; GROSSMANN, 2014).

Uma comparação entre *piecewise McCormick* uniforme e a desagregação multiparâmetro, Kolodziej; Castro e Grossmann (2013) mostram que o primeiro é *tighter* na presença de termos quadráticos, mas gera um PLIM muito grande para o mesmo número de partições. O número de variáveis binárias em *piecewise McCormick* cresce linearmente com o número de partições, enquanto que para desagregação multiparâmetro o crescimento é logarítmico.

Um efeito prático da desagregação multiparâmetro é a capacidade de alcançar os *gaps* das otimalidades inferiores devido à uma melhor performance computacional. *Piecewise McCormick* permite uma melhor liberdade quando escolhido o número de partições que podem ser importantes quando o número de partições é pouco. Esta propriedade é importante em problemas de grandes dimensões ou quando são integrados em *solver spatial branch-and-bound*.

### 1.2.3 Programação binível

A Otimização Binível é definida como um programa matemático, onde o problema de otimização contém um outro problema de otimização como restrição (MALO; DEB; SINHA, 2018). Muitos problemas envolvendo processos de tomadas de decisões estão hierarquizados no sentido em que a solução ou decisão tomada pelo nível superior autoritário (líder) para otimizar seus objetivos é afetada pela resposta da entidade nível inferior (seguidor). O seguidor buscará otimizar seus próprios resultados (DEMPE et al., 2015).

Qualquer dado do nível inferior ou superior do problema de otimização a ser resolvido que fornece o racional (ótimo) é a resposta do seguidor para o líder. Se o vetor de decisão do líder é representado por  $x_s$ , e  $x_f$  representa o vetor de decisão do seguidor

então um par  $(x_s, x_I^*)$  onde  $x_I^*$  é a resposta ótima para  $x_s$  representa a solução factível para o problema de otimização do nível superior fornecido e que também satisfaz as restrições do problema.

Cada nível tem seus próprios objetivos e restrições, um aspecto importante de problemas biníveis é que não são simétricos em termos dos dois níveis. A tomada de decisão do nível superior, geralmente, tem completo conhecimento do problema do nível inferior, enquanto a tomada de decisão do nível inferior somente observa a decisão do líder e, então, otimiza sua própria estratégia. Curiosamente, o conhecimento incompleto sobre o problema do seguidor para o líder poderia levar a incertezas no problema de otimização binível.

O alcance da programação binível é muito amplo segundo Floudas e Pardalos (2001), implementações em problemas da vida real tem aumentado ano após ano devido principalmente a melhora nos algoritmos para solução de problemas de grande porte. Desde sua primeira formulação feita por Strackelberg (1996) em sua monografia sobre economia de mercado em 1934 tem crescido as investigações e aplicações da otimização binível, como por exemplo o primeiro modelo matemático desenvolvido por Bracken e McGill (1973).

Sua formulação possui a estrutura de um jogo hierárquico (*the Stackelberg game*), onde dois tomadores de decisões agem neste problema. O líder minimiza sua função objetivo sujeito a condições (em parte) pela decisão ótima do seguidor. O conjunto factível e a função objetivo do problema do seguidor é influenciado pela seleção do líder, onde quem reage tem forte impacto na recompensa do líder. Nenhum dos jogadores pode dominar ou ser dominado completamente.



O problema de otimização binível é o problema do líder formulado matematicamente usando o *graph*<sup>5</sup> do conjunto solução do problema do seguidor. Uma característica importante do problema de otimização binível está em ser um problema *NP-hard*<sup>6</sup> segundo Hansen, Jaumard e Savard (1992), mesmo a verificação da otimalidade local para uma solução factível é ainda em geral *NP-hard* onde as qualificações de restrições são violadas em todos os pontos factíveis. Esta característica torna o cálculo de uma solução ótima uma tarefa desafiadora.

Em casos simples de programas lineares biníveis, onde o problema do nível inferior tenha uma única solução para todos os parâmetros, ainda não é provável encontrar um algoritmo polinomial que seja capaz de resolver o programa linear binível para otimalidade global. A prova para a não existência de um algoritmo de tempo polinomial para um problema linear binível pode ser encontrada em (DENG, 1998).

As pesquisas sobre os problemas de tomadas de decisões com uma estrutura hierárquica líder-seguidor (otimização binível) podem ser encontradas em duas linhas de pesquisa. A primeira linha está no domínio da teoria dos jogos, onde Stackelberg's (1996), usando programação binível para descrever modelo de comportamento de decisão estabelece o equilíbrio da teoria dos jogos. A segunda linha está no domínio da programação matemática, onde os problemas aparecem como problemas de otimizações biníveis contendo um problema de otimização que está alinhado com um outro problema inferior (BRACKEN; MCGILL, 1973).

Devido à falta de procedimentos bem estabelecidos para um problema complexo, geralmente, é modificado para simplificar a tarefa colocando-o em um único nível. Este problema de único nível é resolvido para chegar em um resultado satisfatório em vez de

---

<sup>5</sup> Em matemática, a teoria dos grafos é o estudo de gráficos, que são estruturas matemáticas usadas para modelar relações entre pares entre objetos. Um gráfico neste contexto é formado por vértices, nós ou pontos conectados por arestas, arcos ou linhas (PRESTES, c2018).

<sup>6</sup> Um problema  $X$  é *NP-hard* se todos os problemas em *NP* não são mais difíceis que  $X$ . Dito de maneira mais informal: um problema é *NP-hard* se for tão difícil quanto qualquer problema em *NP*. Um problema é *NP-completo* se for *NP-hard* e estiver em *NP* (FEOFILOFF, c2018).

um resultado ideal. O método clássico, para o problema complexo binível falha devido as dificuldades do mundo real tais como a não linearidade e variáveis discretas. A primeira abordagem para investigar o problema de otimização binível é substituir o problema do nível inferior pelas condições de otimalidades necessárias e suficientes, ou seja, as condições de KKT.

O problema binível equivalente passa a ser chamado de Programa Matemático com Condições de Complementaridade (PMCC). O PMCCs são também problemas de otimizações não convexas. O algoritmo que resolve o problema calcula pontos com soluções ótimas locais ou pontos estacionários. Recentes pesquisas têm mostrado que soluções ótimas locais de um PMCC não precisa estar necessariamente relacionada com a solução ótima do problema de otimização binível. Novas tentativas para o estabelecimento de abordagens de solução para o problema de dois níveis são necessárias.

### 1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho está organizado em capítulos. No segundo capítulo é apresentado uma breve descrição sobre o problema do DE e FPO, fazendo uma rápida retrospectiva histórica de otimização aplicada em SEP, bem como alguns avanços recentes nesta área de pesquisa. Logo em seguida é apresentada uma formulação do FPO – CA da rede. Trata-se de um modelo considerando as variáveis reais, não considerando variáveis binárias e discretas e outros aspectos de um modelo FPO – CA completo. Também é comentado sobre o modelo DE necessário para formular um problema binível de despacho ótimo de potência ativa e reativa. O uso do modelo de FPO sem considerar as variáveis inteiras e discretas se justifica porque o objetivo deste trabalho de pesquisa é estudar a não convexidade das restrições de problema, com vistas a obter com base em estudo da literatura um modelo convexo para o problema. Na segunda etapa deste trabalho, após desenvolver uma técnica de convexificação para o modelo de FPO, devem-se considerar

outros aspectos práticos do problema de FPO relacionados com a natureza discreta e inteira das variáveis envolvidas, tipo de função objetivo e restrições que devem ser consideradas no modelo.

O terceiro capítulo, é dedicado à otimização convexa (OC) e teoria da dualidade (TD), onde são discutidos apenas os aspectos necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Assim não é abordado o tema de otimização linear que é um tema consagrado na literatura com aplicações em problemas de FPO e em várias outras áreas de pesquisa. A não abordagem não tira os méritos desta teoria apenas busca-se focar nos problemas de PNLIM que é uma das principais características do problema de FPO. Neste capítulo, também não é discutido o conceito de programação quase convexa e programação geométrica, mas discutem-se as condições de otimalidade de primeira e de segunda ordem, a função conjugada e suas definições mais importantes. O conceito de problemas equivalentes é apresentado, pois, é necessário para aplicá-lo às mudanças de variáveis. O problema de OC é apresentado na sua forma padrão, bem como os conceitos de ótimo local e global. Logo em seguida são apresentados três teoremas que garantem as condições de otimalidades para um problema de otimização. O conceito de *underestimator* convexo (UC) é apresentado. Em seguida, são apresentados aspectos da TD em que se discute a função dual Lagrange e outros conceitos importantes para esta tese, como dualidade fraca e forte. Também é apresentado o caso em que é possível resolver um problema primal via sua formulação dual. Este capítulo termina apresentando a relaxação *McCormick* que é usada no Capítulo 5 para resolver problemas com variáveis bilineares do tipo  $w = xy$ , necessárias ao se propor o modelo binível como um problema convexo, bem como ao propor o problema binível convexo como um problema convexo em apenas um único nível, que de agora em diante é chamado simplesmente como “unível”.

No Capítulo 4, apresenta-se o modelo de FPO não convexo e uma proposta de convexificação deste modelo por meio de envelopes convexos. O FPO para redes malhadas é apresentado como uma relaxação convexa cônica de segunda ordem. Logo em seguida,

os resultados obtidos com a implementação são comparados com os resultados fornecidos pelo *Matpower* para o modelo de FPO-CA não linear e não convexo que fornece ótimos locais de boa qualidade.

O quinto capítulo, apresenta-se um exemplo de aplicação do FPO convexo aplicado aos problemas binível, relacionado com o despacho ótimo de potência ativa e reativa em um contexto de mercado, onde são apresentados resultados de testes para o modelo binível não linear e não convexo, o modelo binível convexo, o modelo unível não convexo e o modelo unível convexo obtido por meio de dualidade forte. No sexto capítulo, apresenta-se as conclusões e sugestões de trabalhos futuros.

## 2 FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO E DESPACHO ECONÔMICO

### 2.1 HISTÓRIA DA OTIMIZAÇÃO DO SISTEMA ELÉTRICO DE POTÊNCIA

O operador do sistema (OS) busca eficiência econômica e confiabilidade. Neste contexto, destaca-se o problema de FPO que está no centro da tomada de decisão da operação do OS, e é resolvido para programação da operação do SEP considerando diferentes cenários e horizontes de tempo como anos, dias, mercado do dia seguinte, bem como para cada hora e a cada 5 minutos.

O FPO – CA é um problema complexo pois envolve aspectos econômicos, físicos e computacionais. A complexidade computacional está relacionada com o elevado número de variáveis e restrições do problema para sistema de grande porte, como a não convexidade do modelo relativas às equações do fluxo de potência de corrente alternada (CA) e a algumas funções objetivo que podem fazer parte do modelo, em especial as que consideram aspectos de mercados eficientes e equilibrados onde os preços de compra e venda de energia são não lineares, além das restrições de capacidade térmica de alguns tipos de geradores.

A otimização de SEP tem evoluído com os avanços computacionais e com a teoria de otimização. Na primeira metade do século XX, o problema de FPO era resolvido por engenheiros e operadores usando experiência adquirida na operação do sistema, regras gerais e ferramentas simples que incluíam analisadores analógicos das redes e regras especializadas de desligamentos de geradores e linhas de transmissão. A primeira formulação de um problema de FPO ocorreu nos anos de 1960 devido a Carpentier (1962),

e desde então este problema tem-se mostrado de difícil solução com avanços de pesquisas na área.

Como o problema é complexo e apresenta restrições não lineares, pesquisas atuais têm se dedicado à solução de modelos de otimizações visando tanto o desenvolvimento de programas computacionais eficientes como o uso de *solvers* comerciais. Os *solvers* que utilizam técnicas de programação linear ou linear inteira mista podem ser usados amplamente na solução do FPO, mas empregando técnicas de linearizações.

Os *solvers* que utilizam técnicas de programação não linear também podem ser utilizados, mas dadas as características não convexas do FPO não é possível garantir que as soluções obtidas sejam o ótimo global. Estes *solvers* não são suficientemente rápidos e robustos e possuem ainda sérios problemas de convergências. Os *solvers* de otimização só podem garantir o ótimo global para problemas convexas.

Convexificar um problema de FPO é um grande desafio. A vantagem de formular um problema como um modelo de PL está em resolvê-lo com eficiência e garantir a obtenção da solução ótima global do problema original de PNL. Em PNL a formulação e solução do modelo obedecem a graus de dificuldade invertidos, ou seja, a arte e o desafio está na formulação do problema; uma vez que o problema esteja formulado como um problema convexo é relativamente simples resolvê-lo (PARDALOS; ROMEIJN, 1995).

Na literatura, os problemas de planejamento da operação de SEP podem ser classificados em três: fluxo de potência convencional, DE e FPO (CAIN; O'NEILL; CASTILLO, 2012).

As principais características do problema de FPO estão relacionadas em encontrar uma solução ótima para determinada função objetivo sujeita as restrições de fluxo de potência nas barras do sistema, e outras restrições físicas e operacionais, tais como restrições das capacidades de geradores, limites das magnitudes e estabilidades das tensões, limites térmicos das linhas de transmissão e limitações físicas dos equipamentos.

### 2.1.1 Avanços nos problemas de otimizações de sistemas elétricos de potências

Nos anos 1930 o problema de despacho econômico era resolvido usando planilhas ou régua de cálculos desenvolvidas especificamente para esse fim. Os cálculos para efetuar o despacho econômico eram primitivos e lentos, e na década de 1970 foi apresentada uma nova formulação para despacho econômico e diferentes meios para calcular as perdas na rede de transmissão e geração (HAPP, 1977). Atualmente problemas de despachos econômicos envolvendo milhares de geradores são resolvidos em poucos segundos.

O fluxo de potência era resolvido em 1929 analisando redes analógicas que simulavam os SEP. A primeira solução digital e automatizada de fluxo de potência ocorreu em 1956 (WARD; HALE, 1956). Uma nova pesquisa forneceu vários métodos iterativos baseados na matriz de admitância nodal (*matriz Y*), ou sua inversa, matriz de impedância nodal (*matriz Z*) (SASSON; JAIMES, 1967). Nos anos 1960 os métodos Gauss - Seidel e Newton-Raphson passaram por grandes desenvolvimentos e são utilizados na maioria dos *softwares* de análise de redes (PESCHON; PIERCY; TINNEY, 1968). Uma característica da matriz de admitância é ser esparsa, Tinney (1968) e outros desenvolveram técnicas de esparsidade para aproveitar essa vantagem da matriz *Y*, que possui muitos elementos zero, devido as redes de sistemas de potências não estarem densamente conectadas. A técnica de esparsidade pode ser usada para reduzir o armazenamento de dados e aumentar a velocidade computacional.

As primeiras pesquisas do problema de FPO para obtenção das condições de otimalidade usavam as técnicas lagrangianas clássicas. A primeira publicação com a formulação completa do FPO é atribuída a (CARPENTIER, 1962). Carpentier supõe que o modelo tenha convexidade para aplicar as condições de KKT e considera o modelo das equações dos fluxos de potências CA, ou seja, restrições de balanço de potências ativa e reativa nas barras aplica-se as duas leis de *Kirchhoff*, restrições das magnitudes das

tensões nas barras, ângulos das tensões nas barras e ainda restrições de fluxos nas linhas de transmissões.

A partir do trabalho de Carpentier (1962), inúmeros trabalhos com diferentes métodos de soluções e alterações no modelo foram propostos, tais como, várias formas de métodos do gradiente, programação linear, programação quadrática e métodos de penalidades juntamente com o método de Newton (CAPITANESCU, 2016). Todos esses métodos são algoritmos válidos para a solução dos modelos completos não lineares de fluxo de cargas com um conjunto completo de limites nas variáveis, embora a não convexidade do problema não garanta a otimalidade global ou a convergência dos algoritmos de solução utilizados. Desta forma, o FPO continua sendo um problema matematicamente difícil de resolver.

## 2.2 FORMULAÇÃO DO DESPACHO ECONÔMICO

O principal objetivo do despacho econômico é minimizar o custo de geração enquanto satisfaz várias restrições de igualdade e desigualdade. Tradicionalmente, em problemas de despacho econômico, a função custo para as unidades geradoras são aproximadas por uma função quadrática para representar o custo de geração de unidades térmicas. Uma variedade de técnicas de otimizações tem sido aplicada para resolver o DE. Algumas destas técnicas estão baseadas nos métodos clássicos de otimizações, tais como PL ou programação quadrática para resolver os problemas DE.

A geração de potência ativa de diferentes geradores são as variáveis de controle no DE. No problema DE o objetivo é a geração de potência ativa ótima das unidades geradoras de modo a garantir benefícios econômicos ao operador do sistema de potência e reduzir a emissão de gases poluentes. O alvo principal na obtenção de um esquema ótimo na geração de potência ativa pelas unidades geradoras está em encontrar o total da demanda enquanto satisfaz todas as restrições (PANIGRAHI et al., 2011).



Conseguir o mínimo custo enquanto satisfaz as restrições, faz o despacho econômico ser formulado como um PNL de grande porte. A formulação do DE é considerada como um problema de minimização sujeito a algumas restrições e pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s. a:} \quad & \\ & g(x) = 0 \\ & h(x) \leq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

onde,  $f(x)$  é a função objetivo,  $g(x)$  e  $h(x)$  são, respectivamente, o conjunto das restrições de igualdade e desigualdade,  $x$  são os vetores de controle e estado das variáveis. As variáveis de controles são as potências ativa e reativa, magnitude de tensão nas barras, capacitores *shunt* / reatores e configurações de *taps* de transformadores.

O objetivo do problema DE é minimizar o custo total de combustível nas usinas térmicas,

$$OBJ = \sum_{i=1}^n F_i(Pg_i), \tag{2}$$

sujeito a restrição de igualdade no balanço de potência ativa,

$$\sum_{i=1}^n Pg_i - P_L - P_D = 0. \tag{3}$$

As restrições de desigualdades são dadas pelos limites de potências ativas saídas dos geradores,

$$\underline{P}_i \leq Pg_i \leq \overline{P}_i, \tag{4}$$

onde  $F_i(Pg_i)$  é a produção individual em termos de geração de potência ativa,  $Pg_i$  saída de geração para a unidade  $i$ ,  $n$  números de geradores no sistema,  $P_D$  custo total do sistema atual de demanda de carga e  $P_L$  total das perdas na linha de transmissão do sistema. A função objetivo do DE reflete os custos associados com a geração de potência no sistema. O modelo com custo quadrático é usado, assim, a função objetivo completa para o sistema de potência pode, então ser escrita como o modelo da soma dos custos quadráticos para cada gerador:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{ng} a_i + b_i P g_i + c_i P g_i^2 \quad (5)$$

onde  $ng$  é o número de unidades de geração de energia,  $P g_i$  é geração de potência ativa na unidade  $i$  e  $a_i, b_i$  e  $c_i$  são os coeficientes de custos do  $i$ -ésimo gerador (POURAKBARI-KASMAEI; RIDER; MANTOVANI, 2016). Os coeficientes de custos da equação (5) são apresentados no Capítulo 5 em um problema binível como sendo parâmetros fornecidos pelo primeiro nível, ou seja, pelo líder.

### 2.3 FORMULAÇÃO DO FPO – CA

Neste trabalho, a formulação do problema de FPO – CA é desenvolvida utilizando o sistema de coordenadas polares. Considere um sistema elétrico composto por  $NB$  barras e  $NL$  ramos. Sejam  $i, j$  os índices das barras e  $i, j \in 1, 2, \dots, NB$  e seja  $k$  um ramo de transmissão trifásico com seus terminais nas barras  $i$  e  $j$ ,  $k \in 1, 2, \dots, NL$ .

Teoricamente o limite de estabilidade para transferir potência entre duas barras sem perdas de estabilidade é de até 90 graus. Entretanto, se esse limite for excedido, o sincronismo do sistema pode ser perdido, devido aos limites de estabilidade dos geradores. Além do mais, os limites de estabilidade transitória e os ajustes do sistema de proteção restringem os ângulos de operação das magnitudes de tensão em diferentes valores em função das condições operacionais da rede.

De modo geral, os sistemas de energia são projetados para operar com segurança sempre abaixo dos limites dos ângulos das tensões, o que permite um tempo de resposta adequado, quando ângulos das tensões de diferentes barras se aproximam dos seus limites. Quando se formula o problema de FPO – CA, dependendo do modelo pode-se ter diferentes funções objetivos, ou seja, minimização dos custos de geração, minimização das perdas, minimização de potência reativa, e maximização das transferências de potência entre áreas e/ou mercados vizinhos.

O FPO é uma formulação em que se considera o estado estacionário da rede, ou seja, é formulado para uma condição estática de componentes. Sob uma perspectiva de simulação, esta descrição de um sistema de potência físico é limitada pois não se consideram as condições dinâmicas, harmônicas e modelos de cargas, entre outros. Além disso, a formulação de (6)–(12) é relativamente simples comparada com outras formulações de FPO, pois nesta formulação estão omitidos os controles das posições dos *taps* transformadores e outras variáveis de controle de tensão do sistema físico. O problema clássico e básico de FPO utilizado neste trabalho pode ser formulado como:

$$\min f = \sum_{i \in G} a_i P g_i^2 + b_i P g_i + c_i \quad (\$/h) \quad (6)$$

sujeito a:

$$P g_i - P d_i - \sum_{j \in NB_i} V_i V_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij}) = 0, \quad \forall i \in NB \quad (7)$$

$$Q g_i - Q d_i - \sum_{j \in NB_i} V_i V_j (G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij}) = 0, \quad \forall i \in NB \quad (8)$$

$$V_i^{min} \leq V_i \leq V_i^{max}, \quad \forall i \in NB \quad (9)$$

$$P g_i^{min} \leq P g_i \leq P g_i^{max}, \quad \forall i \in NB \quad (10)$$

$$Q g_i^{min} \leq Q g_i \leq Q g_i^{max}, \quad \forall i \in NB \quad (11)$$

$$(| S_{ij} |)^2 \leq (S_{ij}^{max})^2, \quad \forall ij \in NL \quad (12)$$

Nesta formulação, as equações (7) e (8) representam  $2N$  restrições de igualdades não lineares com termos quadráticos e funções envolvendo senos e cossenos aplicados a todas as barras da rede. A equação (6) minimiza custos de geração, para geradores térmicos e para unidades de geração hidrelétrica faz-se  $c_i = 0$ . As variáveis e parâmetros envolvidos neste modelo são:

#### Parâmetros

$i, j$ :	Índice das barras.
$NB$ :	Conjunto das barras do sistema.
$NB_i$ :	Conjunto das barras conectados à barra $i$ .
$Pd_i, Qd_i$ :	Demanda de potência ativa e reativa na barra $i$ .
$V_i^{min}, V_i^{max}$ :	Limite inferior e superior da magnitude da tensão na barra $i$ .
$S_{ij}^{max}$ :	Capacidade máxima da magnitude de fluxo de potência aparente na linha de transmissão $ij$ .

$NL$ : Número de linhas de transmissão do sistema.

Variáveis

$V, \theta$ : Magnitude e ângulo das tensões nas barras do sistema.  
 $Pg_i, Qg_i$ : Potências ativas e reativas geradas na barra  $i$ .  
 $V_i$ : Magnitude da tensão na barra  $i$ .  
 $|S_{ij}|$ : Magnitude do fluxo de potência aparente na linha de transmissão  $ij$ .

### 3 FUNDAMENTOS TEÓRICOS: OTIMIZAÇÃO CONVEXA, TEORIA DA DUALIDADE, RELAXAÇÃO *MCCORMICK*

Os avanços computacionais e das técnicas de otimização nos últimos anos permitiram avanços no desenvolvimento de ferramentas para análise e planejamento dos SEP, que desta forma, melhoram os quesitos de eficiência, confiabilidade e versatilidade da operação. Dentre as técnicas de otimização convexa aplicadas e adaptadas para a solução de FPO destacam-se a programação semidefinida, Lesieutre e Demarco (2014) e programação cônica de segunda ordem (JABR, 2008). Neste capítulo, apresentam-se os conceitos básicos de otimização e programação convexa que são usados para desenvolver um modelo convexo de FPO no Capítulo 4. A teoria da dualidade é usada neste trabalho para resolver um problema binível relacionado ao despacho de potências ativa e reativa em um contexto de mercado competitivo. As propriedades, teoremas e definições apresentadas aqui podem ser encontradas com mais profundidade em (BOYD; VANDENBERGHE, 2004; PARDALOS; ROMELJN, 1995; CAMBINI; MARTEIN, 2009; JONATHAN; ADRIAN, 2006; SHELDON; KENNETH, 2013).

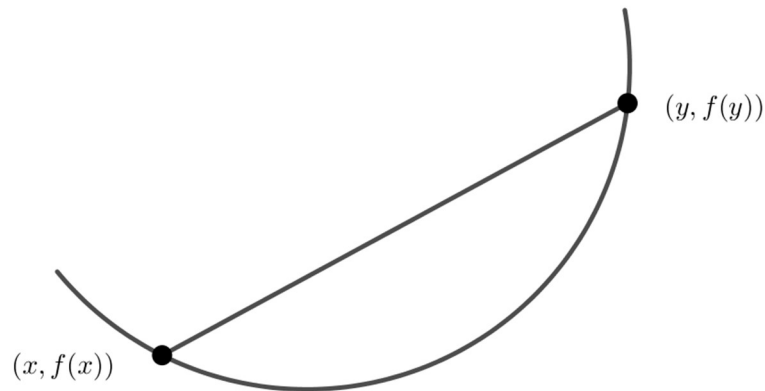
#### 3.1 PROPRIEDADES DE FUNÇÕES CONVEXAS E EXEMPLOS

**Teorema 1.** Uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é convexa se o domínio  $D$  de  $f$  é um conjunto convexo, e se para qualquer  $x, y \in D$  tem-se

$$f(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \theta f(x) + (1 - \theta)f(y) \quad \forall \theta \in [0,1]. \quad (13)$$

Na Figura 2 ilustra-se a interpretação geométrica desta inequação, ou seja, um segmento de reta entre  $(x, f(x))$  e  $(y, f(y))$  que está acima do gráfico de  $f$ .

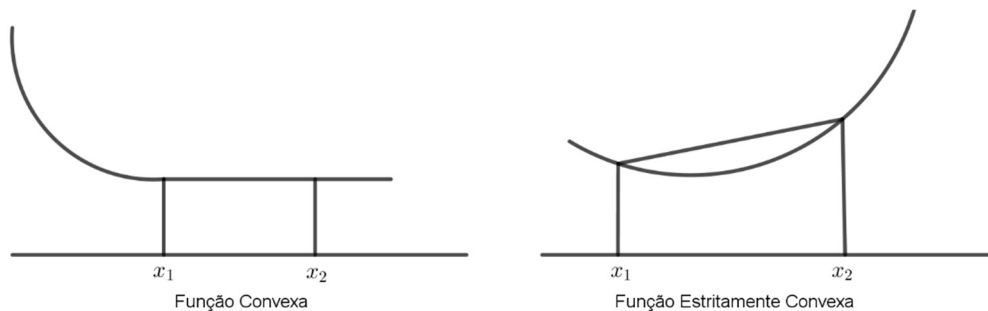
Figura 2 – Gráfico de uma função convexa.



**Fonte:** Elaborado no Geogebra pelo autor.

A função  $f$  é estritamente convexa se a inequação (13) é representada por  $<$  sempre que  $x \neq y$  e  $0 < \theta < 1$ . A função  $f$  será côncava se  $-f$  for convexa e estritamente côncava se  $-f$  for estritamente convexa. Uma função é convexa se, e somente se qualquer segmento que intersecta o domínio da função fica restrito a esse domínio. Em outras palavras,  $f$  é convexa se, e somente se para todo  $x \in D$ , e todo  $v$ , a função  $g(t) = f(x + tv)$  seja convexa sobre seu domínio,  $\{t \mid x + tv \in D\}$ . Na Figura 3 ilustra-se a diferença entre funções convexa e estritamente convexa.

Figura 3 – Funções convexa e estritamente convexa.



**Fonte:** Elaborado no Geogebra pelo autor.

Geralmente, a definição acima por conveniência é estendida para todo o  $\mathbb{R}^n$ . Ou seja,  $\tilde{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \infty$  para

$$\tilde{f} = \begin{cases} f(x) & \text{para } x \in D \\ \infty & \text{para } x \notin D. \end{cases}$$

A extensão  $\tilde{f}$  está definida para todo  $\mathbb{R}^n$  e assume valores em  $\mathbb{R} \cup \infty$ . O domínio da função original  $f$  pode ser recuperado da extensão  $\tilde{f}$ , ou seja,  $D = \{x \mid \tilde{f}(x) < \infty\}$ .

### 3.1.1 Condições de otimalidade de primeira ordem

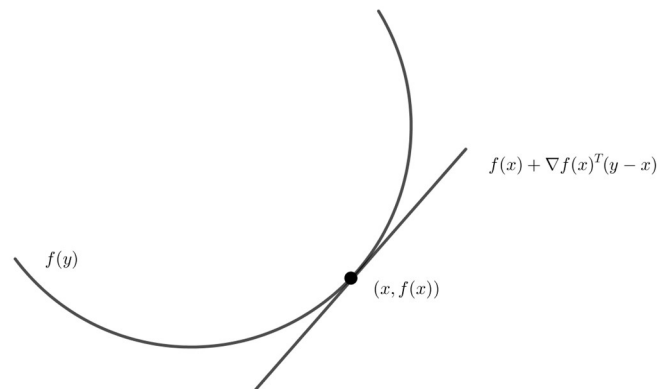
**Definição 1.** Suponha  $f$  diferenciável (ou seja, o gradiente  $\nabla f$  existe para cada ponto do domínio  $D$ , que é aberto). Então  $f$  é convexa se, e somente se o domínio  $D$  é convexo e

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x)$$

mantém-se para todo  $x, y \in D$ .

Na Figura 4 ilustra-se uma representação geométrica desta inequação.

Figura 4 – Aproximação de Taylor de primeira ordem.



**Fonte:** Elaborado no Geogebra pelo autor.

A função afim de  $y$  dada por  $f(x) + \nabla f(x)^T(y - x)$  é uma aproximação de Taylor de primeira ordem de  $f(x)$  próxima à  $x$ . A inequação dada na definição 1 garante que para uma função convexa, a aproximação de Taylor de primeira ordem é um *underestimator* global da função. Do mesmo modo, se a aproximação de Taylor de primeira ordem de uma função é sempre um *underestimator* global da função, logo, a função é convexa.

### 3.1.2 Condições de otimalidade de segunda ordem

**Teorema 2.** Seja  $f(x)$  duas vezes diferenciável, ou seja, sua *Hessiana* ou a segunda derivada  $\nabla^2 f(x)$  existe em cada ponto de  $D$  que é aberto. Então  $f(x)$  é convexa se, e somente se  $D$  é convexo e sua *Hessiana* é semidefinida positiva,  $\forall x \in D$ ,

$$\nabla^2 f(x) \succeq 0.$$

**Exemplo 1.** Considere a função quadrática  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $D = \mathbb{R}^n$ , dada por

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)x^T P x + q^T x + r,$$

com  $P \in S^n$  ( $S^n$  representa o conjunto das matrizes simétricas  $n \times n$ ),  $q \in \mathbb{R}^n$  e  $r \in \mathbb{R}$ . Como  $\nabla^2 f(x) = P$  para  $x$ , assim  $f$  convexa se, e somente se  $P \succeq 0$  e  $f$  é côncava se, e somente se  $P \preceq 0$ .

O elo que existe entre um conjunto convexo e uma função convexa é o epígrafo. Assim epígrafo refere-se ao conjunto acima do gráfico da função. Uma função é convexa se, e somente se o seu epígrafo é um conjunto convexo.

**Definição 2.** O gráfico de uma função  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é definido como

$$\{ (x, f(x)) \mid x \in D, \}$$

que é um subconjunto de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . O epígrafo de uma função  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida como

$$\text{epi } f = \{ (x, t) \mid x \in D, f(x) \leq t, \}$$

sendo um subconjunto do  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

### 3.1.3 Função conjugado

**Definição 3.** Seja  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . A função  $f^*: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , definida como

$$f^*(y) = \sup_{x \in D} (y^T x - f(x)),$$

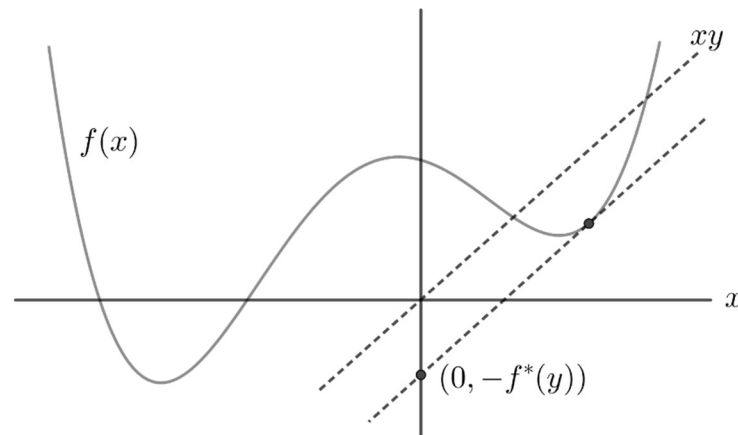
é chamada de conjugado da função.

O domínio da função conjugado consiste de  $y \in \mathbb{R}^n$  no qual o supremo é finito, ou seja, a diferença  $y^T x - f(x)$  é limitada superiormente em  $D$ . Na Figura 5 um exemplo



de uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , e um valor  $y \in \mathbb{R}$ . Uma função conjugado  $f^*(y)$  é o *gap* máximo entre a função linear  $yx$  e  $f(x)$ , como mostrado pela reta tracejada na figura. Se  $f$  é diferenciável isto ocorre em cada ponto  $x$  onde  $f'(x) = y$ .

Figura 5 – O conjugado da função  $f^*(y)$ .



**Fonte:** Elaborado no Geogebra pelo autor.

A desigualdade de *Fenchel* ou desigualdade *Young* ocorre quando a função diferenciável  $f$  é caracterizada por  $f(x) + f^*(y) \geq x^T y$ , para todo  $x, y$  e é obtida da definição de função conjugado. O conjugado de uma função diferenciável  $f$  é chamado de transformada de *Legendre* de  $f$ .

### 3.1.4 Monotonicidade, convexidade e inequação

**Definição 4.** Seja  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  um cone próprio associado com a inequação  $\preceq_K$ .<sup>7</sup> Uma função  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada de  $K$ - não decrescente se

$$x \preceq_K y \Rightarrow f(x) \leq f(y),$$

e  $K$ - crescente se

---

<sup>7</sup> Um cone  $K$  pode ser usado para definir uma inequação generalizada, que é uma ordenação parcial em  $\mathbb{R}^n$  que tem muitas propriedades da ordenação padrão em  $\mathbb{R}$  (BOYD; VANDENBERGHE, 2004).

$$x \preceq_K y, x \neq y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

**Definição 5.** Considere as funções monotônicas de um vetor. Uma função  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é não decrescente com relação ao  $\mathbb{R}_+^n$  se, e somente se

$$x_1 \leq y_1, \dots, x_n \leq y_n \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

para todo  $x, y$ .

**Definição 6.** Uma função  $S^n \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada de função monotônica (crescente, não decrescente) da matriz se, e somente se seja monotônica com relação ao cone semidefinido.

**Definição 7.** Uma função diferenciável  $f$ , com seu domínio convexo, será  $K$  – não decrescente se, e somente se

$$\nabla f(x) \succeq_K 0$$

para todo  $x \in D$ .

### 3.2 PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

Considere um ponto  $x_0 \in X$  de uma função  $f(x)$  no conjunto  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ . O ponto  $x_0$  é considerado um mínimo global se  $f(x_0) \leq f(x)$  para todo  $x \in X$ . A existência de  $x_0$  é garantida se  $f(x)$  é contínua e se  $X$  é fechado e limitado, ou seja, compacto. O ponto  $x_0$  é um mínimo local de  $f(x)$  se existe um  $\epsilon > 0$  tal que  $f(x_0) \leq f(x)$  para todo  $x \in X$  com  $\|x - x_0\| \leq \epsilon$ . De modo geral, uma função pode ter muitos mínimos locais e um mínimo global.

Em um mundo perfeito para encontrar o mínimo global de uma função convexa bastaria escolher um algoritmo de passos descendentes, deixando-o convergir livremente. No mundo real problemas de grandes dimensões, ou mesmo numericamente mal condicionado, podem impedir a convergência de qualquer algoritmo (BOYD; VANDENBERGHE, 2004). A simplicidade intuitiva da convexidade traduz-se por uma vantagem computacional genuína, que fica evidente por poderosos algoritmos que existem

para otimização convexa e de extrema dificuldade de convergência em garantia de ótimo para otimização não convexa (TAYLOR, 2015).

Problemas de otimizações apresentam as seguintes características

$$\begin{aligned} \min & f_0(x) \\ \text{s. a:} & f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & h_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (14)$$

A ideia é encontrar uma variável  $x \in \mathbb{R}^n$  que minimize a função objetivo ou função custo  $f_0: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e que satisfazem as restrições de desigualdade  $f_i(x) \leq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$  e as restrições de igualdade  $h_i(x) = 0$ ,  $i = 1, \dots, p$ . O problema acima também pode não apresentar restrições, ou seja,  $m = p = 0$ . Nesse caso diz que o problema é irrestrito.

O domínio do problema de otimização é dado pelo conjunto de pontos que a função objetivo e as funções restrições estão definidas, ou seja

$$\mathcal{D} = \left( \bigcap_{i=1}^m D f_i \right) \cap \left( \bigcap_{i=1}^p D h_i \right).$$

Um ponto  $x \in \mathcal{D}$  é factível se satisfaz as restrições do problema (14), e se existe pelo menos um ponto que satisfaz o problema, o problema é definido como factível, caso contrário o problema é infactível. O conjunto de todos os pontos factíveis é chamado de conjunto factível ou conjunto restrição. O valor ótimo  $p^*$  do problema (14) é definido como

$$p^* = \{ \inf f_0(x) \mid f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad h_i(x) = 0, i = 1, \dots, p \}$$

e permite  $p^*$  assumir valores estendidos a  $\pm\infty$ . Se o problema é infactível, tem-se que  $p^* = \infty$ , (segundo a convenção padrão que o ínfimo de um conjunto vazio é  $\infty$ ). Se existem pontos factíveis  $x_k$  com  $f_0(x_k) \rightarrow -\infty$  e como  $k \rightarrow \infty$ , então  $p^* = -\infty$ , o problema acima é ilimitado inferiormente.

**Definição 8.** Diz-se que  $x^*$  é um ponto ótimo, ou resolve o problema de otimização (14) se  $x^*$  é factível e  $f_0(x^*) = p^*$ . O conjunto de todos os pontos ótimos é chamado de conjunto ótimo, e denotado por

$$X_{opt} = \{ x \mid f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m \quad h_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, p, \quad f_0(x) = p \}.$$

**Definição 9.** Diz-se que um ponto factível  $x$  é um ótimo local se existe um  $\mathbb{R} > 0$ , tal que,

$$f_0(x) = \inf\{f_0(z) \mid f_i(z) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad h_i(z) = 0, \quad i = 1, \dots, p, \quad \|z - x\|_2 \leq \mathbb{R}\},$$

ou seja,  $x$  resolve o problema (15),

$$\begin{aligned} \min \quad & f_0(z) \\ \text{s. a.} \quad & f_i(z) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & h_i(z) = 0, \quad i = 1, \dots, p \\ & \|z - x\|_2 \leq \mathbb{R} \end{aligned} \tag{15}$$

na variável  $z$ .

Os problemas de otimizações, geralmente, são apresentados na sua forma padrão, ou seja, adota-se como convenção que o lado direito das restrições de igualdade e desigualdade sejam zero. As restrições de igualdade como  $h_i(x) = 0$  são representadas como  $h_i(x) = \tilde{g}_i(x)$  onde  $g_i(x) = h_i(x) - \tilde{g}_i(x)$ , do mesmo modo, inequações da forma  $f_i(x) \geq 0$  são representadas como  $-f_i(x) \leq 0$ . No problema de FPO, uma das características que tornam o problema como *NP-hard* é a presença de igualdade nas restrições de balanço de fluxo de potência.

### 3.2.1 Problemas equivalentes

Neste trabalho, utiliza-se o conceito de mudanças de variáveis. Desta forma, nesta seção apresenta-se o problema padrão (14) usando o conceito de substituição de variáveis. Suponha que  $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  seja bijetora, com imagem cobrindo o domínio do problema  $\mathcal{D}$ , isto é,  $\phi(\text{dom}\phi) \supseteq \mathcal{D}$ . Defina-se as funções  $\tilde{f}_i$  e  $\tilde{h}_i$  como

$$\tilde{f}_i(z) = f_i(\phi(z)), \quad i = 1, \dots, m$$

$$\tilde{h}_i(z) = h_i(\phi(z)), \quad i = 1, \dots, p.$$

Considere agora o problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & \tilde{f}_0(z) \\ \text{s. a.} \quad & \tilde{f}_i(z) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & \tilde{h}_i(z) = 0, \quad i = 1, \dots, p \end{aligned} \tag{16}$$

representado na variável  $z$ . O problema padrão (14) e o problema (16) estão ligados pela mudança de variável ou substituição de variável  $x = \phi(z)$ . Os problemas são equivalentes se  $x$  resolve o problema padrão (14), então  $z = \phi^{-1}(x)$  resolve o problema (16) e vice-versa. Este conceito é usado neste trabalho, sendo referenciado como transformações *McCormick*, que pode ser aplicado tanto na função objetivo como nas restrições.

Suponha que  $\psi_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  seja monótona crescente,  $\psi_1, \dots, \psi_m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz  $\psi_i \leq 0$  se, e somente se  $u \leq 0$ , e  $\psi_{m+1}, \dots, \psi_{m+p}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz  $\psi_i(u) = 0$  se, e somente se  $u = 0$ . Define-se  $\tilde{f}_i$  e  $\tilde{h}_i$  como composições de funções

$$\begin{aligned}\tilde{f}_i(x) &= \psi_i(f_i(x)), & i = 0, \dots, m \\ \tilde{h}_i(x) &= \psi_{m+i}(h_i(x)), & i = 0, \dots, p\end{aligned}$$

Assim, o problema padrão (14) é equivalente ao problema (17)

$$\begin{aligned}\min & \quad \tilde{f}_0(x) \\ \text{s. a.} & \quad \tilde{f}_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & \quad \tilde{h}_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, p\end{aligned} \tag{17}$$

e os conjuntos factíveis em ambos os problemas são idênticos, bem como os pontos de ótimos.

As variáveis de folgas são transformações, ou seja,  $f_i(x) \leq 0$  se, e somente se  $s_i \geq 0$  satisfaz  $f_i(x) + s_i = 0$ . Usando essa estratégia o problema (14) pode ser reformulado e o novo problema é equivalente, se  $(x, s)$  é factível para o problema modificado, então  $x$  é factível para o problema original.

$$\begin{aligned}\min & \quad f_0(x) \\ \text{s. a.} & \quad s_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & \quad f_i(x) + s_i = 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & \quad h_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, p.\end{aligned} \tag{18}$$

As restrições de igualdade algumas vezes podem tornar o problema de difícil solução.

Uma maneira de lidar com as dificuldades geradas pelas restrições de igualdade é tentar elimina-las, da seguinte maneira, primeiro deve-se parametrizar explicitamente todas as soluções das restrições de igualdade. Seja:

$$h_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, p, \quad (19)$$

usando o mesmo parâmetro  $z \in \mathbb{R}^k$ , pode-se eliminar as restrições de igualdade do problema da seguinte maneira: suponha que  $\phi: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $x$  satisfaz a equação (19) se, e somente se deve existir algum  $z \in \mathbb{R}^k$ , de modo que,  $x = \phi(z)$ . O problema de otimização:

$$\begin{aligned} \min \quad & \tilde{f}_0(x) = f_0(\phi(z)) \\ \text{s. a.} \quad & \tilde{f}_i(z) = f_i(\phi(z)) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (20)$$

é equivalente ao problema (14).

No problema reformulado aparecem novas variáveis e novas restrições de igualdade. Em, (21) tem-se um exemplo típico. Seja o problema

$$\begin{aligned} \min \quad & f_0(A_0x + b_0) \\ \text{s. a.} \quad & f_i(A_ix + b_i) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & h_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (21)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $A_i \in \mathbb{R}^{k_i+n}$  e  $f_i: \mathbb{R}^{k_i} \rightarrow \mathbb{R}$ . A função objetivo e as restrições são representadas como composições de funções  $f_i$ , a transformação afim é definida como  $A_ix + b_i$ . Uma nova variável  $y_i \in \mathbb{R}^{k_i}$  é introduzida, bem como uma nova restrição  $A_ix + b_i$ , para  $i = 0, \dots, m$  e o problema equivalente é escrito como em (22).

$$\begin{aligned} \min \quad & f_0(y_0) \\ \text{s. a.} \quad & f_i(y_i) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & y_i = A_ix + b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ & h_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, p. \end{aligned} \quad (22)$$

Em (22) tem-se  $k_0 + \dots + k_m$  novas variáveis,  $y_0 \in \mathbb{R}^{k_0}, \dots, y_m \in \mathbb{R}^{k_m}$  e  $k_0 + \dots + k_m$  restrições de igualdade,  $y_0 = A_0x + b_0, \dots, y_m = A_mx + b_m$ .

### 3.2.2 Problema de otimização convexa na forma padrão

Um problema de otimização convexa é da forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & f_0(x) \\ \text{s. a.} \quad & f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & a_i^T x = b_i, \quad i = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (23)$$

onde  $f_0, \dots, f_m$  são funções convexas. Comparando o problema padrão (14) com (23), verifica-se que o problema convexo tem três requisitos adicionais:

- A função objetivo deve ser convexa,
- As inequações das funções restrições devem ser convexas,
- A igualdade das funções restrições  $h_i(x) = a_i^T x - b_i$  necessitam ser afins.

Como a função objetivo e as restrições são convexas no problema (23) logo, o conjunto factível de um problema de otimização convexo também deve ser convexo. Observando o problema (23) e comparando-o com o problema de FPO, um grande desafio é manipular algebricamente as restrições de fluxos de potências, que são restrições de igualdade senoidais e não-lineares.

### 3.3 ÓTIMO LOCAL E GLOBAL

Decorre das propriedades da teoria de otimização convexa um importante conceito, sobre os ótimos locais de modelos convexas, de acordo com o Teorema 3.

**Teorema 3.** Qualquer ponto localmente ótimo é também globalmente ótimo.

Prova: suponha que  $x$  seja um ótimo localmente para um problema de otimização convexa, ou seja,  $x$  é factível e:

$$f_0(x) = \inf \{ f_0(z) \mid z \text{ factível}, \| z - x \|_2 \leq \mathbb{R} \}, \quad (24)$$

para algum  $\mathbb{R} > 0$ . Agora suponha que  $x$  não seja globalmente ótimo, isto é, existe um  $y$  factível tal que  $f_0(y) < f_0(x)$ . Óbvio que  $\| y - x \|_2 > \mathbb{R}$ , caso contrário  $f_0(x) \leq f_0(y)$ .

Considere o ponto  $z$  dado por

$$z = (1 - \theta)x + \theta y, \quad \theta = \frac{\mathbb{R}}{2 \| y - x \|_2}$$

Logo,  $\| z - x \|_2 = \frac{\mathbb{R}}{2} < \mathbb{R}$ , e pela convexidade do conjunto factível,  $z$  é factível. Pela convexidade de  $f_0$  tem-se:

$$f_0(z) \leq (1 - \theta)f_0(x) + \theta f_0(y) < f_0(x),$$

o que contradiz (24). Portanto, não existe  $y$  factível com  $f_0(y) < f_0(x)$ , assim  $x$  é ótimo globalmente ■.

**Teorema 4.** (Critério de otimalidade para  $f_0$  diferenciável de primeira ordem). Suponha que a função objetivo  $f_0$  em um problema de otimização convexa seja diferenciável, de modo que  $\forall x, y \in \text{dom} f_0$ ,

$$f_0(y) \geq f_0(x) + \nabla f_0(x)^T(y - x) \quad (25)$$

Seja  $X$  o conjunto factível, ou seja,

$$X = \{x \mid f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad h_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, p\}.$$

Então,  $x$  é ótimo se, e somente se  $x \in X$  e

$$\nabla f_0(x)^T(y - x) \geq 0 \quad \forall y \in X. \quad (26)$$

Prova: primeiro, suponha que  $x \in X$  e satisfaz (26). Então se  $y \in X$  tem-se por (25), que  $f_0(y) \geq f_0(x)$ . Isto mostra que  $x$  é um ponto ótimo para (14). Reciprocamente, suponha que  $x$  seja ótimo, mas a condição (26) não se mantém, ou seja, para algum  $y \in X$  tem-se:

$$\nabla f_0(x)^T(y - x) < 0.$$

Considere o ponto  $z(t) = ty + (1 - t)x$ , onde  $t \in [0, 1]$  seja um parâmetro. Já que  $z(t)$  está sobre um segmento de reta entre  $x$  e  $y$ , e o conjunto é factível,  $z(t)$  é factível. Afirma-se que para o menor  $t$  positivo tem-se  $f_0(z(t)) < f_0(x)$ , o que prova que  $x$  não é ótimo.

Para mostrar isso, note que:

$$\left. \frac{d}{dt} f_0(z(t)) \right|_{t=0} = \nabla f_0(x)^T(y - x) < 0,$$

logo para o menor  $t$  positivo, tem-se que  $f_0(z(t)) < f_0(x)$  ■.

**Teorema 5.** (Condição de convexidade de segunda ordem) Suponha que a função  $f$  seja duas vezes diferenciável sobre um conjunto aberto  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Então  $f(x)$  é convexa se, e somente se sua matriz Hessiana:



$$H(x) = \nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \quad (27)$$

for semidefinida positiva para todo  $x \in X$ , isto é, a matriz  $H(x)$  tem somente autovalores não negativos (BOYD; VANDENBERGHE, 2004).

Uma condição para que a matriz *Hessiana* seja semidefinida positiva é que todos os seus menores principais sejam não negativos. O  $k$ -ésimo menor principal de uma matriz é o determinante da submatriz  $k \times k$  consistindo das primeiras linhas e colunas  $k$  da matriz original.

**Teorema 6.** Se  $f_1, f_2, \dots, f_n$  são funções convexas e  $w_i$  com  $i = 1, \dots, n$  são coeficientes reais não negativos, então a soma ponderada:

$$f = w_1 f_1 + w_2 f_2 + \dots + w_n f_n \quad (28)$$

é uma função convexa (BOYD; VANDENBERGHE, 2004).

### 3.4 UNDERESTIMATOR CONVEXO

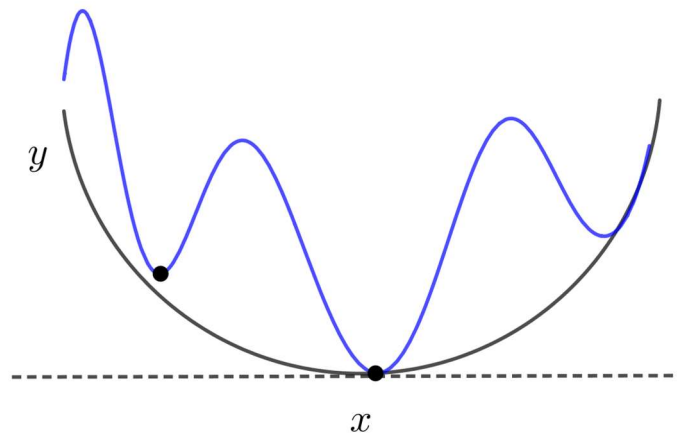
O *underestimator* convexo é uma técnica importante quando se trabalha com otimização global não convexa, uma vez que a relaxação do problema original ou a aproximação UC pode ser obtida. Quando se substitui uma função não convexa em um problema por um UC é possível usar todos os métodos disponíveis em otimização convexa para resolver a versão aproximada do problema não convexo. Neste trabalho, na seção 4.2.2 ao propor uma aproximação externa para problema do arco tangente teoricamente está se obtendo um *underestimator* convexo para função inversa.

**Definição 10.** A função  $g(x)$  é um *underestimator* convexo de uma função  $f(x)$  não convexa com  $x \in C$ , onde  $C$  é um conjunto convexo, se:

- i.  $g(x)$  convexo,
- ii.  $g(x) \leq f(x) \forall x \in C$

Para uma dada função, existe uma infinidade de *underestimators* que fornece diferentes níveis de erro de aproximação. O *underestimator* com menor erro ou *tightest*, é chamado de envelope convexo de uma função. A Figura 6 ilustra intuitivamente uma função não convexa com dois pontos de mínimos e uma relaxação UC representada pela função  $y$ , onde o ponto  $x$  é uma solução factível para a função não convexa e também para o UC.

Figura 6 – Curva da região factível função não convexa e a relaxação convexa



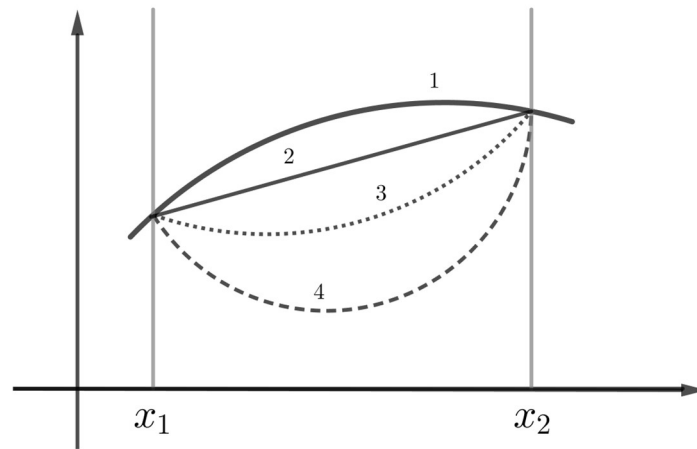
**Fonte:** Elaborado no Geogebra pelo autor.

**Definição 11.** A função  $g(x)$  é o envelope convexo de uma função não convexa  $f(x)$  com  $x \in C$ , onde  $C$  é um conjunto convexo, se

- i.  $g(x)$  é um *underestimator* convexo de  $f(x)$ ,
- ii.  $g(x) \geq h(x) \forall x$  e para todo *underestimators* convexas  $h(x)$  de  $f(x)$ .

Na Figura 7 está ilustrado os conceitos desta definição.

Figura 7 – Função não convexa 1, *underestimators* 3 e 4, e envelope convexo 2



**Fonte:** Elaborado no Geogebra pelo autor.

### 3.5 TEORIA DA DUALIDADE

Nesta seção é feita uma discussão sobre a teoria da dualidade e apresentado o conceito de multiplicadores de Lagrange que no Capítulo 5 é apresentado como custos marginais  $\lambda_i^0$  na técnica de solução de um problema binível relacionado com despacho ótimo de potência ativa e reativa. Nesta seção, também é apresentado o conceito de dualidade forte que também é usado no Capítulo 5 como uma estratégia para transformar o problema binível em um problema unível. Além disso, esta seção apresenta exemplos de aplicação em estratégia de jogos, preços ou taxas. Pode-se encontrar com mais detalhes sobre a teoria da dualidade em (JONATHAN; ADRIAN, 2006; BOYD; VANDENBERGHE, 2004; SHELDON; KENNETH, 2013).

#### 3.5.1 A Função dual Lagrange

Considere o problema não convexo (14) na sua forma padrão com  $x \in \mathbb{R}^n$  e o domínio  $\mathcal{D} = \bigcap_{i=0}^m \text{dom} f_i \cup_{i=1}^p h_i$  seja não vazio e  $p^*$  valor ótimo de (14). A dualidade

lagrangiana toma as restrições do problema (14) onde a função objetivo é composta pela soma ponderada das restrições, sendo a definição 12, sua apresentação formal:

**Definição 12.** O lagrangiano  $L: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{P}^p \rightarrow \mathbb{R}$  associado com o problema (14) é definido como

$$L(x, \lambda, v) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x) + \sum_{i=1}^p v_i h_i(x),$$

com  $\text{dom}L = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{P}^p$ .

O multiplicador de Lagrange associado com a  $i$ -ésima restrição de desigualdade  $f_i(x) \leq 0$  é dado por  $\lambda_i$ . Para as restrições de igualdade  $h_i(x) = 0$  o multiplicador de Lagrange é dado por  $v_i$ . Os vetores  $\lambda$  e  $v$  são chamados de variáveis duais ou multiplicadores de Lagrange associado com o problema (14).

**Definição 13.** A função dual Lagrange ou simplesmente função dual  $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{P}^p \rightarrow \mathbb{R}$  é definida como o mínimo valor do lagrangiano sobre  $x: \lambda \in \mathbb{R}^m, v \in \mathbb{P}^n$ ,

$$g(\lambda, v) = \inf_{x \in \mathcal{D}} L(x, \lambda, v) = \inf_{x \in \mathcal{D}} \left\{ f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x) + \sum_{i=1}^p v_i h_i(x) \right\}.$$

Quando o dual é ilimitado inferiormente em  $x$ , a função dual assume valores em  $-\infty$ . A função dual será o ínfimo pontual de uma família de funções afins de  $(\lambda, v)$ . E é côncava mesmo quando o problema (14) não é convexo.

**Teorema 8.** A função dual fornece um limite inferior para o problema (14) considerando o valor ótimo  $p^*$  para todo  $\lambda \succcurlyeq 0$  e todo  $v$ , tem-se

$$g(\lambda, v) \leq p^*. \tag{29}$$

A função dual fornece um limite inferior não trivial  $p^*$  somente quando  $\lambda \succcurlyeq 0$  e  $(\lambda, v) \in \text{dom}g$ , ou seja,  $g(\lambda, v) > -\infty$ . O par  $(\lambda, v)$  com  $\lambda \succcurlyeq 0$  e  $(\lambda, v) \in \text{dom}g$  é chamado de solução dual factível.

### 3.5.2 O problema dual lagrangeano

Considere o problema de otimização abaixo:

$$\begin{aligned} \max \quad & g(\lambda, v) \\ \text{s. a.} \quad & \lambda \succeq 0, v \text{ irrestrito.} \end{aligned} \tag{30}$$

O problema de otimização (30) é chamado de problema dual Lagrangeano associado com o problema primal (14). A função dual Lagrange fornece o limite inferior no valor ótimo  $p^*$  do problema (14) cada par  $(\lambda, v)$  com  $\lambda \succeq 0$ . Assim, o limite inferior depende apenas dos parâmetros  $\lambda, v$ . O termo dual factível implica que  $(\lambda, v)$  é factível para o problema (30).

O par  $(\lambda^*, v^*)$  é chamado de solução dual ótimo ou multiplicador ótimo de Lagrange se é ótimo para o problema (30). O problema dual Lagrangeano (30) é um problema de otimização convexo já que a função objetivo que está sendo maximizada é côncava e a restrição é convexa. O problema primal (14) neste caso pode ser convexo ou não.

### 3.5.3 Dualidade fraca ou forte e qualificação da restrição de Slater

**Definição 14.** O valor ótimo  $d^*$  do problema dual Lagrange é o melhor limite inferior sobre  $p^*$  que pode ser obtido a partir da função dual Lagrange. A inequação

$$d^* \leq p^*, \tag{31}$$

que se conserva ainda que o problema original não seja convexo é chamada de dualidade fraca.

A dualidade fraca da inequação (31) preserva-se quando  $d^*$  e  $p^*$  são infinitos. Por exemplo, se o problema primal é ilimitado inferiormente, isto é,  $p^* = -\infty$  deve-se ter  $d^* = -\infty$ , ou seja, o problema dual Lagrange é infactível. Do mesmo modo, se o problema dual Lagrangeano é ilimitado superiormente  $d^* = \infty$ , tem-se  $p^* = \infty$ , logo o problema primal é infactível. O *gap* de dualidade ótimo do problema original é dado pela diferença entre  $p^* - d^*$  que é sempre não negativa.

O limite (31) é usado algumas vezes para encontrar o limite inferior no valor ótimo de um problema que seja de difícil resolução. O problema dual é sempre convexo, e em muitos casos ele pode ser resolvido eficientemente para encontrar  $d^*$ .

**Definição 15.** Se a igualdade

$$d^* = p^*, \quad (32)$$

preserva-se, ou seja, o *gap* de dualidade ótimo é zero tem-se uma dualidade forte.

Em geral, a dualidade forte não se mantém. Mas se o problema primal (14) é convexo, ou seja, da forma

$$\begin{aligned} \min \quad & f_0(x) \\ \text{s. a.} \quad & f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & Ax = b \end{aligned} \quad (33)$$

com  $f_0, \dots, f_m$  convexos, eventualmente (mas não sempre) tem-se a dualidade forte.

Existem muitos resultados que estabelecem condições para que o problema que vão além da convexidade sobre o qual se mantém a dualidade forte. Essas condições são chamadas de qualificações de restrições. No APÊNDICE 1 são apresentados os modelos matemáticos primal, dual e *joint* do despacho econômico que são usados neste trabalho como técnica de solução para o problema binível e unível.

#### 3.5.4 Caracterização de max-min da dualidade fraca e forte

Os problemas dual e primal de otimização podem ser expressos em uma forma mais simétrica. Assume que não existam restrições de igualdade em (14):

$$\begin{aligned} \sup_{\lambda \geq 0} L(x, \lambda) &= \sup_{\lambda \geq 0} \left( f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x) \right) \\ &= \begin{cases} f_0(x) & f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ \infty & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

Agora suponha que  $x$  não seja factível, e  $f_i(x) > 0$  para algum  $i$ . Logo, o  $\sup_{\lambda \geq 0} L(x, \lambda) = \infty$ , pela escolha de  $\lambda_j = 0$ ,  $j \neq i$  e  $\lambda_i \rightarrow \infty$ . Assim, se  $f_i(x) \leq 0$ ,  $i, \dots, m$

então a escolha ótima de  $\lambda$  é  $\lambda = 0$  e  $\sup_{\lambda \succcurlyeq 0} L(x, \lambda) = f_0(x)$ . O valor ótimo do problema

primal pode ser expresso como

$$p^* = \inf_x \sup_{\lambda \succcurlyeq 0} L(x, \lambda).$$

Por definição de função dual, tem-se:

$$d^* = \sup_{\lambda \succcurlyeq 0} \inf_x L(x, \lambda).$$

Assim, a dualidade fraca pode ser expressa como uma inequação

$$\sup_{\lambda \succcurlyeq 0} \inf_x L(x, \lambda) \leq \inf_x \sup_{\lambda \succcurlyeq 0} L(x, \lambda), \quad (34)$$

enquanto a dualidade forte é expressa como

$$\sup_{\lambda \succcurlyeq 0} \inf_x L(x, \lambda) = \inf_x \sup_{\lambda \succcurlyeq 0} L(x, \lambda),$$

o significado da dualidade forte está no fato que as ordens de minimização sobre  $x$  e maximização sobre  $\lambda \succcurlyeq 0$  podem ser alteradas sem afetar o resultado. De fato, a inequação (34) não depende de quaisquer propriedades de  $L$ . Logo,

$$\sup_{z \in Z} \inf_{w \in W} f(w, z) \leq \inf_{w \in W} \sup_{z \in Z} f(w, z), \quad (35)$$

para qualquer  $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  (e qualquer  $W \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $Z \subseteq \mathbb{R}^m$ ). Esta inequação geral é chamada de inequação *max – min*. Quando a igualdade se mantém, ou seja,

$$\sup_{z \in Z} \inf_{w \in W} f(w, z) = \inf_{w \in W} \sup_{z \in Z} f(w, z), \quad (36)$$

Diz-se que  $f, W$  e  $Z$  satisfaz a propriedade *max – min* forte ou propriedade ponto de sela. Essa propriedade se mantém somente para casos especiais.

### 3.5.5 Resolvendo o problema primal via o problema dual

Se a dualidade forte mantém e existe uma solução ótimo dual  $(\lambda^*, v^*)$ , então qualquer ponto ótimo primal é também um minimizador de  $L(x, \lambda^*, v^*)$ . Isto permite calcular uma solução ótima primal a partir de uma solução ótima dual. Considere a dualidade forte e um ótimo conhecido  $(\lambda^*, v^*)$  que minimiza  $L(x, \lambda^*, v^*)$  e seja solução única de

$$\min f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* f_i(x) + \sum_{i=1}^p v_i^* h_i(x), \quad (37)$$

quando se tem um problema convexo isto acontece.

Se a solução de (37) é um primal factível ela deve ser o primal ótimo, agora se não é um primal factível então nenhum ponto primal ótimo pode existir, ou seja, pode-se concluir que o ótimo primal pode não ser alcançado. Uma observação bem interessante com relação a este fato é quando o problema dual é mais fácil resolver que o problema primal, tendo como exemplo, pode ser resolvido analiticamente, ou tenha uma estrutura especial que possa ser resolvida.

### 3.6 ESTRATÉGIAS MISTAS PARA JOGOS MATRICIAIS

Esta seção e a próxima são apresentadas como um motivador para mais adiante ser apresentado um problema binível, observar a importância desse problema ser convexo, a relevância e a dificuldade de trabalhar com dualidade forte que possibilita apresentar o mesmo problema binível como unível. Para um aprofundamento da teoria de jogos e seu uso em problemas biníveis em SEP consulte (DENG, 1998; DEMPE et al., 2015).

**Definição 16.** Se a dimensão afim de um conjunto  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  é menor que  $n$ , então o conjunto encontra-se no conjunto afim  $\text{af}C \neq \mathbb{R}^n$ . Define-se como relativo interior do conjunto  $C$ , denotado por  $\text{intr}C$ , como sendo o interior relativo a  $\text{af}C$ :

$$\text{intr}C \{x \in C: B(x, r) \cap \text{af}C \subseteq C \text{ para algum } r > 0\},$$

onde  $B(x, r) = \{y: \|y - x\| \leq r\}$ , a bola de raio  $r$  e centro  $x$  na norma  $\|\cdot\|$ .

**Definição 17.** Uma qualificação de restrição é chamada de condição de *Slater* se existe um  $x \in \text{intr}D$  tal que

$$f_i(x) < 0, \quad i, \dots, m, \quad Ax = b. \quad (38)$$

Tal ponto é algumas vezes chamado de estritamente factível, já que as restrições de inequações mantêm como inequações estritas. O estado do teorema de *Slater* da dualidade forte mantêm-se, se as condições de *Slater* se mantêm (e o problema for



convexo). A condição de *Slater* pode ser aprimorada quando algumas das restrições de desigualdade  $f_i$  são afins. Se as primeiras  $k$  funções restrições  $f_1, \dots, f_k$  são afins, então a dualidade forte conserva-se fornecendo as seguintes condições fracas que são mantidas: existe um  $x \in \text{intr } \mathcal{D}$  com

$$f_i(x) \leq 0, \quad 1, \dots, k, \quad f_i(x) < 0, \quad i = k + 1, \dots, m, \quad Ax = b.$$

O uso da dualidade forte para obter um resultado básico para a soma-zero de resultados matriciais pode ser usado. Considere um jogo com dois jogadores onde o jogador 1 faz uma escolha (ou move)  $k \in \{1, \dots, n\}$  e o jogador 2 faz uma escolha  $l \in \{1, \dots, m\}$ . O jogador 1 faz uma recompensa de  $P_{kl}$  ao jogador 2, onde  $P \in \mathbb{R}^{n \times m}$  é a matriz de retorno para o jogo. O objetivo do jogador 1 é tornar a recompensa a menor possível, enquanto o objetivo do jogador 2 é maximizar a recompensa.

Os jogadores usam estratégias mistas ou randomizadas, isto significa que cada jogador faz sua escolha de forma randômica e independente em relação a outro jogador, de acordo com a distribuição de probabilidade:

$$\text{prob}(k = i) = u_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad \text{prob}(l = i) = v_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

$u$  e  $v$  dão as distribuições probabilísticas das escolhas dos dois jogadores, ou seja, suas estratégias. O retorno esperado do jogador 1 em relação ao jogador 2 é dado por

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m u_k v_l P_{kl} u^T P v.$$

O jogador 1 deseja escolher  $u$  para minimizar  $u^T P v$ , enquanto o jogador 2 quer adotar  $v$  de modo a maximizar  $u^T P v$ .

Analisando o jogo do ponto de vista do jogador 1, assumindo que sua estratégia  $u$  seja conhecida pelo jogador 2 (que dá uma vantagem para o jogador 2), o jogador 2 escolhe  $v$  para maximizar  $u^T P v$ , o que resulta no retorno esperado

$$\sup\{u^T P v: v \succeq 0, \quad 1^T v = 1\} = \max_{i=1, \dots, m} (P^T u)_i.$$

A melhor estratégia que o jogador 1 pode fazer é escolher  $u$  que minimize o pior caso de retorno para o jogador 2, isto é, escolher uma estratégia  $u$  que resolva o problema

$$\begin{aligned} \min \quad & \max_{i=1,\dots,m} (P^T u)_i \\ \text{s. a.} \quad & u \succeq 0, \quad 1^T u = 1 \end{aligned} \quad (39)$$

que é um problema de otimização convexo linear *piecewise*. Seja  $p_1^*$  o valor ótimo deste problema que é o menor retorno esperado que o jogador 1 planejar ter. Assumindo que o jogador 2 conhece a estratégia do jogador 1 e joga para sua própria vantagem máxima. Da mesma maneira, pode-se considerar a estratégia  $v$  do jogador 2 seja conhecida pelo jogador 1 (que dá uma vantagem para 1). Neste caso, o jogador 1 escolhe  $u$  para minimizar  $u^T P v$ , que resulta no retorno esperado

$$\inf\{u^T P v: u \succeq 0, \quad 1^T u = 1\} = \min_{i=1,\dots,n} (P v)_i$$

o jogador 2 escolhe  $v$  para maximizar o problema

$$\begin{aligned} \max \quad & \min_{i=1,\dots,m} (P v)_i \\ \text{s. a.} \quad & v \succeq 0, \quad 1^T v = 1 \end{aligned} \quad (40)$$

que é outro problema de otimização convexo linear *piecewise* onde a função objetivo é côncava e  $p_2^*$  é seu valor ótimo. Este é o menor valor esperado de retorno que garante ter o jogador 2, claro, assumindo que o jogador 1 sabe a estratégia do jogador 2.

O problema dos dois jogadores apresentado aparece com frequência em problemas biníveis, onde nesta tese é apresentado um problema com dois competidores no despacho de potência ativa, onde se busca uma oportunidade na compra e venda de energia. O problema é resolvido usando dualidade forte que apresenta como vantagem a solução em apenas um nível, mas para isso algumas exigências são necessárias, que são apresentadas mais à frente neste trabalho.

Quando se conhece as estratégias do oponente têm-se uma pequena vantagem pelo menos em tese, ou seja,  $p_1^* \geq p_2^*$ . Uma interpretação que pode ser feita neste caso é que a diferença  $p_1^* - p_2^*$  é não negativa, pois a estratégia do oponente é conhecida o que lhe confere uma vantagem.

Considere  $p_1^* = p_2^*$ , este resultado é estabelecido usando dualidade forte, quando isso ocorre em jogos matriciais com estratégias mistas não existe vantagem em conhecer a tática do seu oponente. Para mostrar isso um resultado é estabelecido para os problemas

(39) e (40) que são problemas duais Lagrange, para os quais se obtém a condição de dualidade forte.

Comece por formular (39) como um problema linear PL,

$$\begin{array}{ll} \min & t \\ \text{s. a.} & u \succeq 0 \quad 1^T u = 1 \\ & P^T u \preceq t1, \end{array}$$

onde  $t \in \mathbb{R}$  é uma variável extra. Introdz-se o multiplicador  $\lambda$  para  $P^T u \preceq t1$ ,  $\mu$  para  $u \succeq 0$ , e  $\nu$  para  $1^T u = 1$ , o lagrangiano é apresentado abaixo,

$$t + \lambda^T (P^T u - t1) - \mu^T u + \nu(1 - 1^T \mu) = \nu + (1 - 1^T \lambda)t + (P\lambda - \nu1 - \mu)^T u,$$

então a função dual é:

$$g(\lambda, \mu, \nu) = \begin{cases} \nu & 1^T \lambda = 1 \quad P\lambda - \nu1 = \mu \\ -\infty & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

assim, o problema dual é:

$$\begin{array}{ll} \max & \nu \\ \text{s. a.} & \lambda \succeq 0 \quad 1^T \lambda = 1, \quad \mu \succeq 0 \\ & P\lambda - \nu1 = \mu, \end{array}$$

eliminado  $\mu$  obtém-se o seguinte dual Lagrange de (39):

$$\begin{array}{ll} \max & \nu \\ \text{s. a.} & \lambda \succeq 0 \quad 1^T \lambda = 1 \\ & P\lambda \succeq \nu1, \end{array}$$

com as variáveis  $\lambda, \nu$  que é, claramente, equivalente a (40). Como os problemas lineares são factíveis tem-se a dualidade forte; o valor ótimo de (39) e (40) são iguais.

### 3.6.1 Interpretações de jogos, preços ou taxas

A inequação *max* – *min* (35), igualdade (36) e propriedade de ponto de sela, podem ser interpretadas em termos de um jogo contínuo de soma zero. Analisando os jogadores e suas escolhas da seguinte forma, se o primeiro jogador escolhe  $w \in W$ , e o segundo adota  $z \in Z$ , logo o jogador 1 joga uma quantidade  $f(w, z)$  para o jogador 2. Ou seja, o jogador 1 quer minimizar  $f$  enquanto o jogador 2 quer maximizar  $f$ . Neste tipo de jogo as variáveis são contínuas.

Se o jogador 1 faz uma escolha primeiro, então o jogador 2 analisa a escolha do primeiro jogador e faz a sua. Em jogos desta forma, tem-se que o jogador 2 quer maximizar seus lucros  $f(w, z)$  e escolherá  $z \in Z$ . O seu rendimento será dado por  $\sup_{z \in Z} f(w, z)$  que depende da escolha  $w$  feita pelo primeiro oponente. Neste ponto, o jogador 1 conhece, ou supõe que o jogador 2 acompanhe sua estratégia e escolhe  $w \in W$  de modo que este seja o pior caso para o jogador 2. O jogador 1 escolhe argumento (arg)<sup>8</sup>

$$\operatorname{argmin}_{w \in W} \sup_{z \in Z} f(w, z)$$

que resulta no rendimento

$$\inf_{w \in W} \sup_{z \in Z} f(w, z)$$

do jogador 1 para o jogador 2.

Pode-se inverter a ordem dos oponentes, o jogador 2 primeiro escolhe  $z \in Z$ , depois o jogador 1 toma  $w \in W$  conhecendo  $z$ , a lógica é a mesma do problema anterior, que resulta no lucro de

$$\sup_{z \in Z} \inf_{w \in W} f(w, z)$$

do jogador 1 para o jogador 2.

Um caso especial pode ser analisado, onde a função lucro é o lagrangiano  $W = \mathbb{R}^n$  e  $Z = \mathbb{R}_+^m$ . Neste caso, o jogador 1 escolhe a variável primal  $x$ , enquanto o jogador 2 escolhe a variável dual  $\lambda \succcurlyeq 0$ . A escolha ótima para o jogador 2, onde ele escolhe primeiro  $\lambda^*$  que é o ótimo dual, que resulta em um lucro para o jogador 2 de  $d^*$ . Do mesmo modo, caso o jogador 1 faça sua escolha primeiro ela será o ótimo primal  $x^*$ , que tem como resultado o lucro  $p^*$ .

Assim, o *gap* de dualidade do problema é exatamente igual a vantagem oferecida ao jogador que jogou segundo, ou seja, o jogador que tinha a vantagem de conhecer a escolha de seu oponente antes da triagem. Se a dualidade forte se mantém, logo não

---

<sup>8</sup> Uma função  $f: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  significa que a função  $f$  toma como argumento (arg) um vetor- $p$  real e retorna um vetor- $q$  real, como em uma linguagem de computador (DEMPE et al., 2015).

existe a vantagem de conhecer a estratégia do oponente. Este conceito é usado nesta tese para justificar a mudança de um problema binível para unível. A proposta é resolver o segundo nível via dual.

Uma interessante interpretação econômica pode ser feita via dualidade lagrangiana. Suponha que  $x$  seja uma variável que represente o modo que uma empresa opera,  $f_0(x)$  denota o custo de operação em  $x$ , ou seja, o lucro ocorrido na condição operacional de  $x$  é dado por  $-f_0(x)$ . Os limites do problema são dados por  $f_i(x) \leq 0$ , o problema abaixo representa as condições de operação que maximiza o lucro e respeite os limites

$$\begin{array}{ll} \min & f_0(x) \\ \text{s. a.} & f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{array}$$

O lucro ótimo é dado por  $-p^*$ .

Em um segundo cenário os limites podem ser violados, pagando um custo adicional linear pela quantidade de restrições violadas  $f_i$ . Logo, o pagamento da empresa feito pela violação do limite ou restrição é dada por  $\lambda_i f_i(x)$ . O desembolso também pode ocorrer para as restrições que não sejam *tight*; se  $f_i(x) < 0$  então  $\lambda_i f_i(x)$  representa um pagamento para a empresa. O coeficiente  $\lambda_i$  tem a interpretação do preço por violar  $f_i(x) \leq 0$ .

As porções não usadas das restrições podem ser vendidas pela empresa pelo mesmo preço. Assume que  $\lambda_i \geq 0$ , isto é, a empresa deve pagar pelas violações e receber um rendimento se a restrição não seja *tight*. Um exemplo seria onde a primeira restrição no problema original  $f_1(x) \leq 0$ , representa um limite no espaço do depósito. Uma nova disposição é aberta, ou seja, a possibilidade de a empresa alugar parte do seu espaço a um custo de  $\lambda_1$  por metro quadrado e alugar espaço não utilizado à mesma taxa.

Para a condição de operação  $x$  e a restrição preço  $\lambda_i$ , tem-se que o custo total para a empresa é dado por  $L(x, \lambda) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x)$ . A empresa vai operar a minimizar seu custo total  $L(x, \lambda)$  que fornece um custo  $g(\lambda)$ . Assim, a função dual representa o custo ótimo para a empresa, como uma função da restrição preço do vetor

$\lambda$ . O valor ótimo dual  $d^*$  é o custo ótimo para a empresa sobre o menor conjunto favorável de preços.

No segundo cenário, o custo ótimo é menor que, ou igual ao custo no problema original, devido ao fato que existem restrições que não podem ser violadas, mesmo quando os preços são desfavoráveis. Agora, se  $x^*$  é o ótimo no primeiro cenário, então o custo de operação de  $x^*$  no segundo cenário será menor que  $f_0(x^*)$ , já que algum rendimento deriva das restrições que não sejam *tight*. Neste caso, o *gap* ótimo de dualidade é a vantagem mínima possível para a empresa sendo permitido pagar por restrições violadas e receber por restrições que não sejam *tight*. Para este problema a dualidade é fraca.

Suponha agora que a dualidade forte seja mantida e o ótimo dual alcançado. O ótimo dual  $\lambda^*$  pode ser interpretado como um conjunto de preços para o qual não exista vantagem para a empresa em ser permitido pagar por restrições violadas ou receber por restrições não *tight*. Algumas vezes o ótimo dual  $\lambda^*$  é chamado de (custos marginais) para o problema original.

### 3.7 RELAXAÇÃO *MCCORMICK* PARA PROBLEMAS BILINEARES

Nesta seção é apresentado a relaxação *McCormick* para problemas bilineares que é aplicada no Capítulo 5 para resolver o produto de variáveis bilineares  $\alpha_i(Pg_i)^2$  e  $\beta_i Pg_i$  que surgem ao resolver o problema binível convexo de despacho de potência ativa e reativa, e quando o problema binível é proposto como um problema unível através da dualidade forte, onde o segundo nível passa a ser uma restrição *primal = dual* e seu modelo matemático está no APÊNDICE 1. A equação (120) é rerepresentada aqui apenas para justificar o uso da relaxação *McCormick*:

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in \Omega_B} \frac{1}{2} (\alpha_{0i} P g_i^{02} + \beta_{0i} P g_i^0) - \sum_{i \in \Omega_B} \left( P d_i \pi_i + P g_i^{0Max} \bar{\kappa}_i - P g_i^{0Min} \underline{\kappa}_i + \sum_{y \in Y} \Delta_i^P \bar{\phi}_{y,i} \right) \\ & + \sum_{ij \in \Omega_L} \left( f_{ij}^{0Max} \bar{v}_{ij} + f_{ij}^{0Max} \underline{l}_{ij} + \bar{\delta}_i^0 \beta_{ij} - \underline{\delta}_i^0 \beta_{ij} + \sum_{y_1 \in Y_1} \Delta_{ij}^{\delta} \bar{w}_{y_1,i} \right) = 0 \end{aligned}$$

Nesta restrição, as variáveis  $\alpha_{0i} P g_i^{02}$  e  $\beta_{0i} P g_i^0$  são bilineares e é aplicado a relaxação de *McCormick* para obter um modelo convexo. Também a função oportunidade da seção 5.2.2 que é representada na equação (106) possui variáveis bilineares  $\lambda_i^0 P g_i^0$  e  $\lambda_i^0 P g_i^0$ . Problemas deste tipo são não convexos e conduzem a múltiplas soluções locais e *solvers* baseados em gradientes são incapazes de certificar a otimalidade. O PL usando envelopes de *McCormick* padrão de McCormick (1976), PLIM via envelopes piecewise *McCormick* Bergamini, Aguirre e Grossmann (2005) e Desagregação multiparâmetro Kolodziej, Castro e Grossmann (2013) resolvem problemas bilineares com resultados satisfatórios.

### 3.7.1 Definição do problema não linear

Relaxando um problema P e obtendo o limitante inferior (LI), resolvendo P com um rápido *solver* local obtêm-se o limitante superior (LS) usando o LI como ponto de partida. Nesta tese é usado o trabalho de Castro (2015) para lidar com as funções bilineares que surgem do problema binível quando é usado dualidade forte e tornar o problema unível. A solução é feita via relaxação *Tightening Piecewise McCormick*.

A vantagem desta técnica está na possibilidade de uma relaxação *tight* para garantir a convergência via *gap* de otimalidade relativa, ou seja,  $\frac{(LS-LI)}{LI} < \epsilon$ . Considere a classe de problemas não convexos, não lineares (41) onde todos os termos não lineares são do tipo bilinear, ou seja,  $x_i x_j$  e todas as variáveis são contínuas.

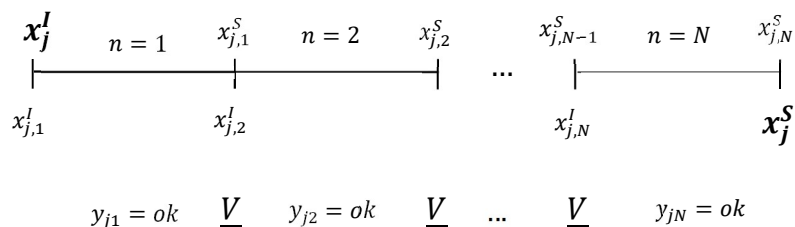
$$\begin{array}{l}
 \mathcal{P} \quad \boxed{\min} x = f_0(x) \\
 \text{s. a} \\
 f_q(x) \leq 0 \quad \forall q \in Q \setminus \{0\} \\
 f_q(x) = \sum_{(i,j) \in LI} a_{ijq} x_i x_j + h_q(x) \quad \forall q \in Q \\
 x^I \leq x \leq x^s \\
 x \in \mathbb{R}^m
 \end{array} \tag{41}$$

A Relaxação fornece um limitante

Em  $\mathcal{P}$ ,  $x$  é um vetor  $m$ -dimensional de variáveis não negativas que está entre o limitante inferior  $x^I$  e o limitante superior  $x^s$ . O conjunto  $Q$  inclui  $f_0$ , todas as funções  $f_q$  e todas as restrições. A função  $h_q(x)$  é linear em  $x$ ,  $LI$  está em um conjunto de índices  $(i, j)$  que definem os termos bilineares  $x_i x_j$ , e  $a_{ijq}$  é um escalar. Uma observação,  $i = j$  pode permitir acomodar problemas quadráticos.

Seja  $w_{ij} = x_i x_j$ , tanto o primeiro como o segundo termo bilinear pode ser particionado. Na Figura 8, é apresentado a partição do termo  $x_j$  onde seu domínio é dividido em  $N$  partições uniformes, e  $x_j^I$  e  $x_j^s$  representam o limite inferior e superior respectivamente. O elemento  $\underline{V}$  representa a posição da partição dos limitantes superiores e inferiores, a variável  $y_{j,N}$  é binária e indica se houve ou não partição.

Figura 8 – Partição termo bilinear via *McCormick*



**Fonte:** Elaborado pelo próprio autor.



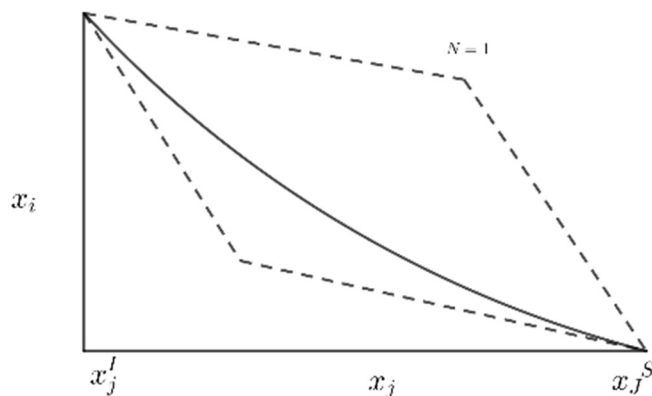
### 3.7.2 Formulação do limitante inferior para envelopes *piecewise McCormick*

Considere inicialmente o envelope de McCormick (1976), problemas do tipo  $\mathcal{P}$  podem ser usados para fornecer diferentes tipos de relaxações. Em uma relaxação PL o termo bilinear é substituído por uma nova variável  $w_{ij}$  e são adicionados quatro conjuntos de restrições. Agora para uma relaxação *tighter* PLIM Bergamini; Aguirre e Grossmann (2005) particiona-se uma das variáveis do termo bilinear por exemplo  $x_j$  em  $n$  regiões disjuntas, com novas variáveis binárias, sendo adicionadas na formulação para selecionar a partição ótimo de  $x_j$ .

Neste tipo de técnica as partições são geradas uniformemente e o problema tem crescimento linear com o número de partições. Sejam  $x_{jn}^I$  e  $x_{jn}^S$  limitantes inferior e superior da variável  $x_j$  para  $n$  partições. Se o valor de  $x_j$  pertence à partição e a variável binária  $y_{jn} = 1$ , então os envelopes de *McCormick* se mantêm.

Ao invés de um limitante global para  $x_{jn}^I$  e  $x_{jn}^S$ , veja Figura 9, Raman e Grossmann (1994) propõem uma nova formulação para  $\mathcal{P}$  como um Programa Disjuntivo Generalizado (PDG), onde o *tighter* ocorre devido ao uso de parâmetros de partições dependentes, isto é,  $x_{jn}^I$  e  $x_{jn}^S$  nas quatro restrições dentro da disjunção.

Figura 9 – Casca Convexa para uma Partição.



**Fonte:** Elaborado no Geogebra pelo autor.

$$\min z^R = f_0(x) = \sum_{(i,j) \in LI} a_{ij} w_{ij} + h_0(x) \quad (\text{PR} - \text{PDG})$$

sujeito a:

$$f_q(x) = \sum_{(i,j) \in LI} a_{ijq} w_{ij} + h_q(x) \leq 0 \quad \forall q \in Q \setminus \{0\}$$

$$\bigvee_{n=1}^N \left[ \begin{array}{l} y_{in} \\ w_{ij} \geq x_i \cdot x_{jn}^I + x_i^I \cdot x_j - x_i^I \cdot x_{jn}^I \\ w_{ij} \geq x_i \cdot x_{jn}^S + x_i^S \cdot x_j - x_i^S \cdot x_{jn}^S \\ w_{ij} \leq x_i \cdot x_{jn}^I + x_i^S \cdot x_j - x_i^S \cdot x_{jn}^I \\ w_{ij} \leq x_i \cdot x_{jn}^S + x_i^I \cdot x_j - x_i^I \cdot x_{jn}^S \\ x_{jn}^I \leq x_j \leq x_{jn}^S \end{array} \right] \forall \{i: (i,j) \in LI\} \quad \forall \{j: (i,j) \in LI\}$$

$$x_i^I \leq x_i \leq x_i^S \quad \forall \{i: (i,j) \in LI\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_{jn}^I = x_j^I + \frac{(x_j^S - x_j^I) \cdot (n-1)}{N} \\ x_{jn}^S = x_j^I + \frac{(x_j^S - x_j^I) \cdot n}{N} \end{array} \right\} \forall \{j: (i,j) \in LI\}, n \in \{1, \dots, N\}$$

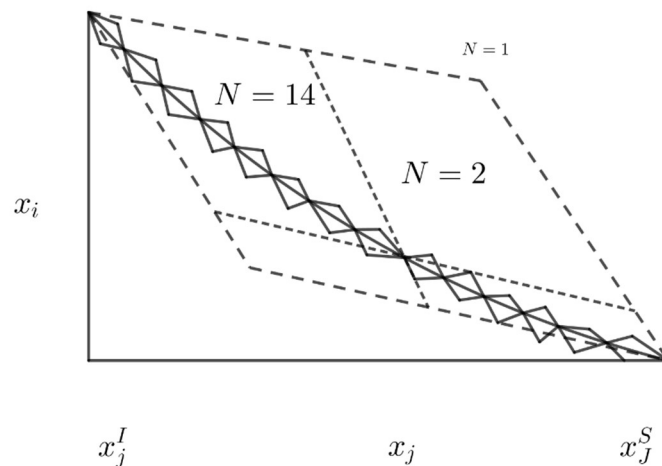
$$x^I \leq x \leq x^S$$

$$x \in \mathbb{R}^m$$

$$y_{jn} \in \{0,1\} \quad \forall \{j: (i,j) \in LI\}, n \in \{1, \dots, N\}$$

A formulação acima (PR-PLIM) é uma relaxação *piecewise McCormick* sua casca convexa para  $N$  partições é ilustrada na Figura 10:

Figura 10 – Casca Convexa com  $N=14$  partições.



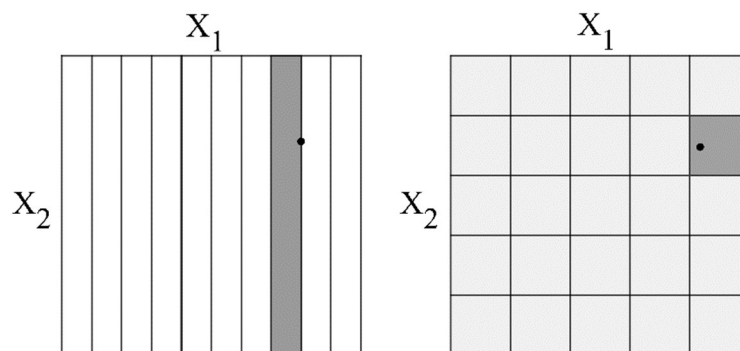
**Fonte:** Elaborado no Geogebra pelo autor.

### 3.7.3 Melhorando a qualidade da relaxação *piecewise*

Para melhorar a qualidade da relaxação *piecewise McCormick*, Castro (2015) propõe uma partição dependente para os limitantes inferior e superior também para a variável  $x_i$ . Neste caso, existe uma diferença em comparação com o problema (PR-PDG), ou seja, os limitantes *tighter* não são mais facilmente calculados usando as informações dos limitantes globais e dos números de partições  $N$ .

A melhora é determinada pela contração do limite baseado na otimalidade. Assume-se que os parâmetros  $x_{ijn}^I$  e  $x_{ijn}^s$  representam os limitantes inferior e superior da variável  $x_i$  quando a variável  $x_j$  é restringida para  $n$  partições. A mudança ocorre dentro da disjunção que agora caracteriza os limitantes das restrições da variável  $x_i$ . As duas variáveis podem ser particionadas, nesta tese foi particionada apenas um termo devido a sensibilidade de uma das variáveis. Na Figura 11 apresenta-se o resultado de uma partição univariante e bivariante quando se consideram 12 variáveis binárias para identificar a região ótima do problema relaxado.

Figura 11 – Partições univariantes e bivariantes.



**Fonte:** Elaborado no Geogebra pelo autor.

A relaxação *tighter piecewise* (PRT-PDG) é apresentada abaixo:

$$\min z^R = f_0(x) = \sum_{(i,j) \in LI} a_{ij0} w_{ij} + h_0(x) \quad (\text{PRT} - \text{PDG})$$

sujeito a:

$$f_q(x) = \sum_{(i,j) \in LI} a_{ijq} w_{ij} + h_q(x) \leq 0 \quad \forall q \in Q \setminus \{0\}$$

$$\begin{aligned}
& \bigvee_{n=1}^N \left[ \begin{array}{l} y_{in} \\ w_{ij} \geq x_i \cdot x_{jn}^I + x_{ijn}^I \cdot x_j - x_{ijn}^I \cdot x_{jn}^I \\ w_{ij} \geq x_i \cdot x_{jn}^S + x_{ijn}^S \cdot x_j - x_{ijn}^S \cdot x_{jn}^S \\ w_{ij} \leq x_i \cdot x_{jn}^I + x_{ijn}^S \cdot x_j - x_{ijn}^S \cdot x_{jn}^I \\ w_{ij} \leq x_i \cdot x_{jn}^S + x_{ijn}^I \cdot x_j - x_{ijn}^I \cdot x_{jn}^S \\ x_{ijn}^I \leq x_i \leq x_{ijn}^S \\ x_{jn}^I \leq x_j \leq x_{jn}^S \end{array} \right] \forall \{i: (i, j) \in LI\} \quad \forall \{j: (i, j) \in LI\} \\
& \left. \begin{array}{l} x_{jn}^I = x_j^I + \frac{(x_j^S - x_j^I) \cdot (n-1)}{N} \\ x_{jn}^S = x_j^S + \frac{(x_j^S - x_j^I) \cdot n}{N} \end{array} \right\} \forall \{j: (i, j) \in LI\}, n \in \{1, \dots, N\} \\
& x^I \leq x \leq x^S \\
& x \in \mathbb{R}^m \\
& y_{jn} \in \{0,1\} \quad \forall \{j: (i, j) \in LI\}, n \in \{1, \dots, N\}
\end{aligned}$$

Para  $N = 1$ , a desagregação adicionada e as variáveis binárias podem ser removidas da formulação, ou seja, (PRT–PILM) é reduzido à relaxação linear *McCormick* padrão do problema  $\mathcal{P}$ . Em (PRT–PILM) é assumido que o número de partições  $N$  é o mesmo para todas as variáveis particionadas  $x_j$ , mas é fácil considerar o contrário. De fato, enquanto começa com o mesmo número, o algoritmo do limitante contraído eliminará um número diferente de partições para cada variável particionada. Para explorar melhor esta propriedade, o número de partições na implementação real do (PRT–PILM) é de variáveis dependentes.

## 4 UMA RELAXAÇÃO FORTE DE PCSO PARA PROBLEMAS DE FPO

Neste capítulo é apresentada uma relaxação convexa do modelo de FPO – CA para redes malhadas. A formulação do FPO proposto por Jabr (2008), é considerada um modelo cônico de segunda ordem, que é exato para redes radiais como proposto em Jabr (2006) e confirmado por (LOW, 2014a). Para a rede malhada, obter uma relaxação convexa para o FPO é uma tarefa um pouco mais complicada. Em Jabr (2008) a formulação do problema como um modelo cônico, utiliza para resolver o cálculo da restrição de ângulo uma formulação denominada “*extended*”, devido ao fato da restrição ser não convexa pela existência de uma função trigonométrica inversa, o arco tangente. Neste capítulo é apresentado o modelo proposto por Kocuk; Dey e Sun (2017), que considera o modelo cônico como proposto por Jabr (2008), mas a questão do arco tangente não é resolvida como uma formulação “*extended*”, mas sim, via envelopes convexos. Essa formulação permite usar *solver* comercial (cônico, quadrático, linear) inteiro misto, tais como, CPLEX, XPRESS e GUROBI para sua solução. Nas próximas seções deste capítulo são apresentados a formulação e os testes com os sistemas IEEE 14, 30, 57 e 118 barras, bem como a comparação com os resultados fornecidos pelo MATPOWER Zimmerman; Sanchez e Thomas (2011) que utiliza modelos não lineares que fornece soluções locais de boa qualidade.

### 4.1 ELIMINAÇÕES DAS RESTRIÇÕES DE IGUALDADE E FORMULAÇÃO CÔNICA DO FPO

Como descrito no Capítulo 3, existe transformações que preservam a convexidade do modelo. No problema de FPO além da não-linearidade, outro fator que deixa o FPO

como *NP-hard* são as restrições de igualdade, pois, em um problema convexo as suas restrições de igualdade devem ser lineares, ou seja, na forma  $Ax = b$ . Neste caso, as restrições podem ser eliminadas ao encontrar uma solução particular  $x_0$  de  $Ax = b$ , e uma matriz  $F$  cujo alcance é o *nullspace*<sup>9</sup> de  $A$ , o que resulta no problema

$$\begin{aligned} \min \quad & f_0(Fz + x_0) \\ \text{s. a.} \quad & f_i(Fz + x_0) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

na variável  $z$ .

Considere que a composição da função convexa com uma função afim seja também convexa, assim, eliminando as restrições de igualdade preserva-se a convexidade do problema. Além do mais, o processo de eliminação de restrições igualdade e a reconstrução da solução do problema original a partir do problema transformado envolve operações padrões de álgebra linear. Pelo menos em princípio, isto significa que se pode restringir o estudo para os problemas de otimizações convexas que não possuem restrições de igualdade.

Em muitos casos é melhor manter as restrições de igualdade, uma vez que as eliminando o problema pode-se tornar mais difícil para análise e compreensão, ou destruir a eficiência do algoritmo que o resolve. De fato, isto é verdade, por exemplo, quando a variável  $x$  tem uma grande dimensão, eliminando as restrições de igualdade pode-se destruir a esparsidade, ou mesmo outra estrutura eficiente do problema.

Antes de ser apresentada a formulação proposta por Jabr (2008) para redes malhadas, apresenta-se a seguir o conceito de programação quadrática (PQ). O problema de otimização convexa (42) é chamado PQ se a função objetivo é quadrática convexa e as restrições são funções afim, escritos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & \left(\frac{1}{2}\right) x^T P x + q^T x + r \\ \text{s. a.} \quad & Gx \preceq h \\ & Ax = b, \end{aligned} \tag{42}$$

---

<sup>9</sup> O subespaço associado com o conjunto afim  $C$  é o *nullspace* de  $A$  (BOYD; VANDENBERGHE, 2004).

onde  $P \in S_+^n$ ,  $G \in R^{m \times n}$  e  $A \in R^{p \times n}$ . Em PQ, minimiza-se a função quadrática convexa sobre uma região factível, ou seja, um poliedro que é formado das intersecções de planos. Em (42), se a função objetivo e as restrições são funções quadráticas tem-se (43):

$$\begin{aligned} \min \quad & \left(\frac{1}{2}\right) x^T P_0 x + q_0^T x + r_0 \\ \text{s. a.} \quad & \left(\frac{1}{2}\right) x^T P_i x + q_i^T x + r_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & Ax = b \end{aligned} \tag{43}$$

onde  $P_i \in S_+^n$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$ , e é chamado de programação quadrática restrita quadraticamente (PQRQ). Em PQRQ, minimiza-se a função quadrática convexa sobre uma região factível, que são as intersecções de elipsoides, onde  $P_i \succ 0$ .

Um problema de programação quadrática com estrutura especial é a programação cônica de segunda ordem (PCSO):

$$\begin{aligned} \min \quad & f^T x \\ \text{s. a.} \quad & \|A_i x + b_i\|_2 \leq c_i^T x + d_i, \quad i = 1, \dots, m \\ & Fx = g, \end{aligned} \tag{44}$$

onde  $x \in R^n$  é a variável de otimização,  $A_i \in R^{n_i \times n}$  e  $F \in R^{p \times n}$ . A restrição da forma

$$\|Ax + b\|_2 \leq c^T x + d,$$

em que  $A \in R^{k \times n}$ , é chamada de restrição cônica de segunda ordem, uma vez que é o mesmo que exigir a função afim  $(Ax + b, c^T x + d)$  se posicione no cone de segunda ordem em  $R^{k+1}$  (ALIZADEH; GOLDFARB, 2003).

#### 4.1.1 Propriedade algébrica dos cones de segunda ordem

Existe uma álgebra associada a cones de segunda ordem. A compreensão dos aspectos do problema PCSO se faz por meio da dualidade e complementaridade. Esta álgebra é conhecida como álgebra euclidiana de Jordan (AEJ). Para um estudo mais aprofundado ver (FARAUT; KORÁNYI, 1994). A AEJ é um *framework*, onde as propriedades de matrizes simétricas são generalizadas. A álgebra de Jordan do cone simétrico semidefinido positivo (sobre a multiplicação  $X \circ Y = (XY + YX)/2$ ) e a

álgebra descrita abaixo são casos especiais de uma AEJ. As propriedades nesta seção são apresentadas de modo simplificado, pois não é o objetivo principal deste trabalho.

Todos os vetores podem ser considerados como consistindo de um único bloco:  $\mathbf{x} = (x_0; \bar{\mathbf{x}}) \in \mathbb{R}^n$ . Sejam  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  dois vetores e a multiplicação é definida como:

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{x}^T \mathbf{y} \\ x_0 y_1 + y_0 x_1 \\ \vdots \\ x_0 y_n + y_0 x_n \end{pmatrix} = \text{Arw}(\mathbf{x})\mathbf{y} = \text{Arw}(\mathbf{x})\text{Arw}(\mathbf{y})\mathbf{e}.$$

A matriz  $\text{Arw}(\mathbf{x})$  define-se como:

$$\text{Arw}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} x_0 & \bar{\mathbf{x}}^T \\ \bar{\mathbf{x}} & x_0 I \end{pmatrix}.$$

As propriedades da álgebra  $(\mathbb{R}^n, \circ)$  são as mesmas nas relações envolvendo a operação binária  $\circ$ .

1. No produto  $\mathbf{z} = \mathbf{x} \circ \mathbf{y}$  cada componente de  $\mathbf{z}$  é uma função bilinear de  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ , e a lei da distributiva se mantém:

$$\mathbf{x} \circ (\alpha \mathbf{y} + \beta \mathbf{z}) = \alpha \mathbf{x} \circ \mathbf{y} + \beta \mathbf{x} \circ \mathbf{z} \quad \text{e} \quad (\alpha \mathbf{y} + \beta \mathbf{z}) \circ \mathbf{x} = \alpha \mathbf{y} \circ \mathbf{x} + \beta \mathbf{z} \circ \mathbf{x}$$

para todos  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

2.  $\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = \mathbf{y} \circ \mathbf{x}$ .

3. O vetor  $\mathbf{e} = (1; \mathbf{0})$  é o único elemento identidade:  $\mathbf{x} \circ \mathbf{e} = \mathbf{x}$ .

4. Seja  $\mathbf{x}^2 = \mathbf{x} \circ \mathbf{x}$ , a matriz  $\text{Arw}(\mathbf{x})$  e  $\text{Arw}(\mathbf{x}^2)$  comuta. Logo, para todo  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{x} \circ (\mathbf{x}^2 \circ \mathbf{y}) = \mathbf{x}^2 \circ (\mathbf{x} \circ \mathbf{y}).$$

5.  $\circ$  não é associativa para  $n > 2$ . Porém, no produto de  $k$  número de um vetor  $\mathbf{x}$ :

$\mathbf{x} \circ \mathbf{x} \circ \dots \circ \mathbf{x}$ , a ordem na qual as multiplicações são realizadas não importa. Assim,  $\circ$  é potência associativa e pode-se escrever  $\mathbf{x}^p$  para o valor inteiro de  $p$ . Além do mais,  $x^p \circ x^q = x^{p+q}$ .

Considere a seguinte identidade:

$$x = \frac{1}{2}(x_0 + \|\bar{\mathbf{x}}\|) \begin{pmatrix} \frac{1}{\bar{\mathbf{x}}} \\ \frac{1}{\|\bar{\mathbf{x}}\|} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x_0 - \|\bar{\mathbf{x}}\|) \begin{pmatrix} -\frac{1}{\bar{\mathbf{x}}} \\ -\frac{1}{\|\bar{\mathbf{x}}\|} \end{pmatrix}, \quad (45)$$

definindo,



$$\mathbf{c}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\|\bar{\mathbf{x}}\|} \\ \frac{\bar{\mathbf{x}}}{\|\bar{\mathbf{x}}\|} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\|\bar{\mathbf{x}}\|} \\ -\frac{\bar{\mathbf{x}}}{\|\bar{\mathbf{x}}\|} \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = x_0 + \|\bar{\mathbf{x}}\|, \quad \lambda_2 = x_0 - \|\bar{\mathbf{x}}\|, \quad (46)$$

segue que (45) pode ser reescrito como:

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{c}_1 + \lambda_2 \mathbf{c}_2 \quad (47)$$

note que,

$$\mathbf{c}_1 \circ \mathbf{c}_2 = \mathbf{0}, \quad (48)$$

$$\mathbf{c}_1^2 = \mathbf{c}_1 \text{ e } \mathbf{c}_2^2 = \mathbf{c}_2, \quad (49)$$

$$\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 = \mathbf{e}, \quad (50)$$

$$\mathbf{c}_1 = R\mathbf{c}_2 \text{ e } \mathbf{c}_2 = R\mathbf{c}_1, \quad (51)$$

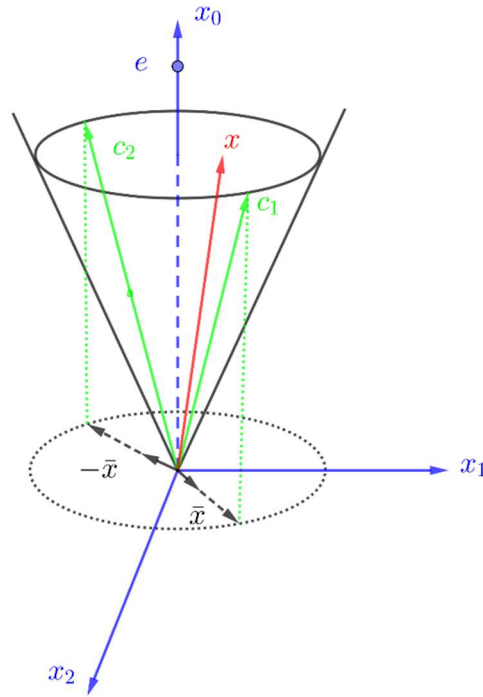
$$\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \in bd\mathcal{Q}, \quad (52)$$

onde  $\mathcal{Q} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{Q}_{n_1} \times \dots \times \mathcal{Q}_{n_r}$ ,  $bd\mathcal{Q} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{x} \in \mathcal{Q} : x_0 = \|\bar{\mathbf{x}}\| \text{ e } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}\}$ . A equação (47) é a decomposição espectral de  $\mathbf{x}$ , para um estudo mais detalhado do assunto ver (HOFFMANN; KUNZE, 1971). É análogo para a contrapartida na álgebra da matriz simétrica:

$$X = Q\Lambda Q^T = \lambda_1 \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_1^T + \dots + \lambda_n \mathbf{q}_n \mathbf{q}_n^T,$$

onde  $\Lambda$  é uma matriz diagonal com  $\lambda_i$ , a  $i$ -ésima entrada diagonal, e  $Q$  é a coluna ortogonal  $\mathbf{q}_i$ , como um correspondente autovetor para  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Qualquer par de vetores  $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$  que satisfaz as propriedades (50), (51) e (52) é chamado de *Jordan frame*. Cada *Jordan frame*  $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$  é da forma (46), *Jordan frame* são pares de vetores  $(\frac{1}{2}; \pm\bar{\mathbf{c}})$  com  $\|\bar{\mathbf{c}}\| = \frac{1}{2}$ . Na Figura 12 ilustra-se que um *Jordan frame* desempenha o papel dos conjuntos de matrizes de *rank* 1  $\mathbf{q}_i \mathbf{q}_i^T$  formado de um sistema ortogonal de autovetores na álgebra de matriz simétrica.

Figura 12 – Sistema ortogonal de autovetores na álgebra de matriz simétrica.



**Fonte:** Elaborado no Geogebra pelo autor.

O traço e o determinante de  $\mathbf{x}$  podem também ser definidos como:

$$\text{tr}(\mathbf{x}) = \lambda_1 + \lambda_2 = 2x_0$$

$$\det(\mathbf{x}) = \lambda_1\lambda_2 = x_0^2 - \|\bar{\mathbf{x}}\|^2.$$

## 4.2 A FORMULAÇÃO FPO – CA COMO UM MODELO CÔNICO DE SEGUNDA ORDEM

Em Jabr (2007), é apresentado um formato quadrático cônico para as equações de balanço de fluxo de potência para redes malhadas. Considere os balanços do fluxo potência ativa e reativa do nó  $i$  para  $j$ ; definidas anteriormente em (7) e (8):

$$P_{ij} = G_{ij}V_i^2 - G_{ij}V_iV_j \cos(\theta_{ij}) + B_{ij}V_iV_j \text{sen}(\theta_{ij}) \quad (53)$$

$$Q_{ij} = B_{ij}V_i^2 - B_{ij}V_iV_j \cos(\theta_{ij}) - G_{ij}V_iV_j \text{sen}(\theta_{ij}), \quad (54)$$

onde  $\theta_{ij} = \theta_i - \theta_j$  e, por definição,  $u_i = V_i^2/\sqrt{2}$ ,  $R_{ij} = V_i V_j \cos(\theta_{ij})$  e  $T_{ij} = V_i V_j \sin(\theta_{ij})$ .

A formulação cônica de segunda ordem proposta por Jabr (2008) para o problema de FPO é dada em (58)–(65). Para obter uma equação linear para a equação do balanço do fluxo de carga (53)–(54) é efetuada a seguinte substituição:

$$P_{ij} = \sqrt{2}G_{ij}u_i - G_{ij}R_{ij} + B_{ij}T_{ij} \quad (55)$$

$$Q_{ij} = \sqrt{2}B_{ij}u_i - B_{ij}R_{ij} - G_{ij}T_{ij} \quad (56)$$

a equação (57) representa a rotação cônica:

$$2u_i u_j = R_{ij}^2 + T_{ij}^2 \quad (57)$$

as equações (55)–(57) podem ser usadas para definir o problema radial de fluxo de carga. Para redes malhadas é necessário considerar os ângulos. Para isso, toma-se o quociente de,

$$\frac{T_{ij}}{R_{ij}} = \frac{V_i V_j \sin(\theta_{ij})}{V_i V_j \cos(\theta_{ij})} \implies \frac{T_{ij}}{R_{ij}} = \text{tg}(\theta_{ij}),$$

aplicando arco tangente dos dois lados da equação obtém-se a equação (65) que torna o problema não convexo.

Considere a função objetivo (58) como sendo o despacho ótimo de potência ativa, então o modelo de FPO pode ser escrito de (58) – (65):

$$\text{minimize } \sum_i c_{0i} + c_{1i}Pg_i + c_{2i}(Pg_i)^2 \quad (58)$$

sujeito a:

$$\sqrt{2}G_{ii}u_i + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq i}}^N [G_{in}R_{in} + B_{in}T_{in}] = Pg_i - Pd_i \quad (59)$$

$$-\sqrt{2}B_{ii}u_i - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq i}}^N [B_{in}R_{in} - G_{in}T_{in}] = Qg_i - Qd_i \quad (60)$$

$$Pg_i^{\min} \leq Pg_i \leq Pg_i^{\max} \quad (61)$$

$$Qg_i^{\min} \leq Qg_i \leq Qg_i^{\max} \quad (62)$$

$$\frac{(V_i^{\min})^2}{\sqrt{2}} \leq u_i \leq \frac{(V_i^{\max})^2}{\sqrt{2}} \quad (63)$$

$$2u_i u_n = R_{in}^2 + T_{in}^2 \quad (64)$$

$$\theta_i - \theta_n = \text{tg}^{-1} \left( \frac{T_{in}}{R_{in}} \right). \quad (65)$$

Low (2014) demonstra que a formulação proposta por Jabr (2008) apresenta uma inconsistência na equação (65), devido ao fato que, funções trigonométricas não são convexas e de difícil convexificação.

#### 4.2.1 Uma formulação alternativa para o FPO

A equação (65) mesmo usando programação cônica continua não convexa. Neste trabalho, é usada a técnica proposta por Kocuk (2016) e Kocuk, Dey e Sun (2017) para convexificar esta equação, ou seja, o arco tangente que é responsável pela não convexidade é aproximado por quatro planos formando um envelope no espaço. Para isso, é proposta uma caracterização para o rank-1 condição necessária para garantir a convexidade do problema, ver (KOCUK, 2016).

Esta análise começa considerando a formulação retangular usando o problema PSD com restrição *rank* com a matriz de variáveis complexas. Nesta formulação, as dificuldades aparecem em duas restrições, na semipositividade da matriz de variáveis e na condição *rank*. Embora, esta forma seja uma restrição convexa, resolver problemas PSD envolvendo grandes matrizes continua sendo um grande desafio. Logo, buscar uma alternativa para evitar o uso das restrições semipositivas na matriz original é uma linha de pesquisa importante.

Desta forma, uma alternativa é considerar as submatrizes, que podem corresponder a algum subgrafo, ou seja, ciclos da rede de energia elétrica original. Neste trabalho aborda-se apenas uma das propostas de Kocuk (2016), isto é, uma aproximação alternativa da função arco tangente, a qual é convexificada via envelopes lineares. Esta construção, depende fortemente da avaliação que as variáveis limites sejam *tights*.

O modelo FPO em coordenadas retangulares é apresentado em (66) – (71) apenas para fins de comparação, para mais detalhes sobre convexidade do FPO retangular ver

(LESIEUTRE; DEMARCO, 2014). Considere uma rede elétrica  $\mathcal{N} = (\mathcal{B}, \mathcal{L})$ , onde  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{L}$  denotam respectivamente o conjunto das barras e linhas de transmissão. As unidades de geração estão conectadas a um subconjunto de barras, denotado por,  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{B}$ . O objetivo principal do problema de FPO – CA é satisfazer a demanda em todas as barras com um custo mínimo de produção total de geração, de modo que, é preciso obedecer às leis físicas, por exemplo, as leis de Kirchhoff e Ohm bem como outras restrições de operação como por exemplo restrições no limite de fluxo de transmissão da linha. O modelo de FPO em coordenadas retangulares é apresentado de (66) – (71):

$$\min \sum_{i \in \mathcal{G}} C_i(p_i^g) \quad (66)$$

sujeito a:

$$p_i^g - p_i^d = G_{ii}(e_i^2 + f_i^2) + \sum_{j \in \delta(i)} [G_{ij}(e_i e_j + f_i f_j) - B_{ij}(e_i f_j - e_j f_i)] \quad i \in \mathcal{B} \quad (67)$$

$$q_i^g - q_i^d = -B_{ii}(e_i^2 + f_i^2) - \sum_{j \in \delta(i)} [B_{ij}(e_i e_j + f_i f_j) + G_{ij}(e_i f_j - e_j f_i)] \quad i \in \mathcal{B} \quad (68)$$

$$\underline{V}_i^2 \leq e_i^2 + f_i^2 \leq \overline{V}_i^2 \quad i \in \mathcal{B} \quad (69)$$

$$p_i^{min} \leq p_i^g \leq p_i^{max} \quad (70)$$

$$q_i^{min} \leq q_i^g \leq q_i^{max} \quad (71)$$

A matriz de admitância nodal definida como  $Y \in \mathbb{C}^{|\mathcal{B}| \times |\mathcal{B}|}$ , que tem os componentes  $Y_{ij} = G_{ij} + iB_{ij}$  para cada linha  $(i, j) \in \mathcal{L}$ . Sejam  $p_i^g, q_i^g$  as potências ativa e reativa que sai da barra  $i$  de geração,  $p_i^d, q_i^d$  as potências ativa e reativa que sai da barra  $i$  de carga, a tensão complexa  $V_i$  na barra  $i$  é expresso na forma retangular como  $V_i = e_i + if_i$  e na forma polar como  $V_i = |V_i|(\cos\theta_i + isen\theta_i)$ , onde  $|V_i| = \sqrt{e_i^2 + f_i^2}$  é magnitude de tensão e  $\theta_i$  é o ângulo de fase. A função objetivo é tipicamente linear ou convexa quadrática e  $\delta(i)$  denota o conjunto das barras vizinhas a barra  $i$ .

Note que a formulação de (66) – (71) é um problema de otimização não convexa, e que as não linearidades deste problema são:

- 1)  $e_i^2 + f_i^2$ ,

$$2) e_i e_j + f_i f_j,$$

$$3) e_i f_j - e_j f_i.$$

Em Expósito e Ramos (1999) é apresentada uma formulação alternativa para a formulação retangular, ou seja, uma formulação polar, onde são apresentados os equivalentes para 1), 2) e 3) que são respectivamente:

$$4) |V_i|^2.$$

$$5) |V_i||V_j|\cos(\theta_i - \theta_j).$$

$$6) -|V_i||V_j|\sin(\theta_i - \theta_j).$$

No trabalho de Jabr (2006) são definidas novas variáveis  $c_{ii}, c_{ij}$  e  $s_{ij}$  que correspondem a 4), 5) e 6), respectivamente. Em Kocuk, Dey e Sun (2017) considera o fato que a função cosseno é par e a função seno é ímpar, para definir,  $c_{ij} = c_{ji}$  e  $s_{ij} = -s_{ji}$ . Um fato importante que permite a formulação do FPO como um modelo cônico em Jabr (2008), Kocuk (2016) e Kocuk, Dey e Sun (2017) está na observação que em cada linha  $(i, j)$  da rede de transmissão estas grandezas são relacionadas pela identidade trigonométrica fundamental  $\cos^2(\theta_i - \theta_j) + \sin^2(\theta_i - \theta_j)$ , que na forma retangular é representada como:

$$(e_i e_j + f_i f_j)^2 + (e_i f_j - e_j f_i)^2 = (e_i^2 + f_i^2)(e_j^2 + f_j^2), \quad (72)$$

e na forma polar no espaço das novas variáveis, esta relação é representada como  $c_{ij}^2 + s_{ij}^2 = c_{ii}c_{jj}$ , que descreve o cone rotacionado de segunda ordem em quatro dimensões. Com a mudança de variáveis é apresentada de (73) – (80) uma formulação polar alternativa para o FPO como um modelo cônico:

$$\min \sum_{i \in \mathcal{G}} C_i(p_i^g) \quad (73)$$

sujeito a:

$$p_i^g - p_i^d = G_{ii}c_{ii} + \sum_{j \in \delta(i)} [G_{ij}c_{ij} - B_{ij}s_{ij}] \quad i \in \mathcal{B} \quad (74)$$

$$q_i^g - q_i^d = -B_{ii}c_{ii} \sum_{j \in \delta(i)} [-B_{ij}c_{ij} - G_{ij}s_{ij}] \quad i \in \mathcal{B} \quad (75)$$

$$\underline{V}_i^2 \leq c_{ii} \leq \overline{V}_i^2 \quad i \in \mathcal{B} \quad (76)$$

$$c_{ij} = c_{ji}, s_{ij} = -s_{ji} \quad (77)$$

$$c_{ij}^2 + s_{ij}^2 = c_{ii}c_{jj} \quad (78)$$

$$p_i^{min} \leq p_i^g \leq p_i^{max} \quad (79)$$

$$q_i^{min} \leq q_i^g \leq q_i^{max} \quad (80)$$

Esta formulação foi proposta por (JABR, 2006). E é uma formulação exata do FPO para redes radiais de modo que a solução ótima do problema (73)-(80) é também solução do problema (66)-(71), de modo que, sempre é possível recuperar os ângulos de tensões  $\theta_i$ 's, resolvendo o seguinte sistema linear de equações com a solução ótima  $c_{ij}, s_{ij}$ :

$$\theta_j - \theta_i = \text{tg}_2^{-1}(s_{ij}, c_{ij}) \quad (i, j) \in \mathcal{L}, \quad (81)$$

e que fornece a solução ótima dos fasores das tensões nas barras. Para recuperar o alcance de  $2\pi$  é usado  $\text{tg}_2^{-1}(y, x)$ , que assume os valores em  $(-\pi, \pi]$  ao invés de  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  ou seja:

$$\text{tg}_2^{-1} = \begin{cases} \arctg\left(\frac{y}{x}\right), & x > 0 \\ \arctg\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & y \geq 0, x < 0 \\ \arctg\left(\frac{y}{x}\right) - \pi, & y < 0, x < 0 \\ +\left(\frac{\pi}{2}\right), & y > 0, x = 0 \\ -\left(\frac{\pi}{2}\right), & y < 0, x = 0 \\ \text{indefinido}, & y = 0, x = 0 \end{cases} \quad (82)$$

Para redes malhadas a formulação (73) – (81) não é válida, isto ocorre devido ao fato que a solução ótima  $c_{ij}, s_{ij}$  para todas as linhas  $(i, j)$  de (81) não garante que a soma de  $\text{tg}_2^{-1}(c_{ij}, s_{ij})$  seja zero para todos os ciclos. Em outras palavras, a solução da formulação polar não é factível para a formulação retangular. Note que, colocando (81) como restrição tem-se uma formulação válida do FPO para redes malhadas, mas essa restrição é não convexa. A restrição (78) pode ser relaxada como  $c_{ij}^2 + s_{ij}^2 \leq c_{ii}c_{jj}$ . Essa relaxação é exata para redes radiais.

### 4.2.2 Envelope do arco tangente

Apresenta-se nesta seção, a técnica usada para resolver o problema gerado pela não convexidade de  $tg_2^{-1}(\frac{y}{x})$ . A ideia chave é incorporar uma aproximação convexa do ângulo da condição (81) para a relaxação do PCSO. A proposta são envelopes lineares para a função arco tangente sobre uma caixa  $\mathcal{C} := [\underline{c}, \bar{c}] \times [\underline{s}, \bar{s}]$ . Esta construção usa quatro inequações lineares para aproximar o envelope convexo. O conjunto definido para a restrição arco tangente para cada linha  $(i, j)$  do sistema de transmissão é dado por:

$$\mathcal{AT} := \left\{ (c, s, \theta) \in \mathbb{R}^3 : tg^{-1} \left( \frac{s}{c} \right), (c, s) \in [\underline{c}, \bar{c}] \times [\underline{s}, \bar{s}] \right\}.$$

Onde  $\theta = \theta_j - \theta_i$ , e por facilidade de notação o índice  $(i, j)$  não é mais adotado no desenvolvimento a seguir. Assume  $\underline{c} > 0$ , os quatro vértices correspondentes à caixa para os quatros pontos  $(c, s, \theta)$  no espaço são dados por:

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \left( \underline{c}, \bar{s}, tg^{-1} \left( \frac{\bar{s}}{\underline{c}} \right) \right) & \zeta_2 &= \left( \bar{c}, \bar{s}, tg^{-1} \left( \frac{\bar{s}}{\bar{c}} \right) \right) \\ \zeta_3 &= \left( \bar{c}, \underline{s}, tg^{-1} \left( \frac{\underline{s}}{\bar{c}} \right) \right) & \zeta_4 &= \left( \underline{c}, \underline{s}, tg^{-1} \left( \frac{\underline{s}}{\underline{c}} \right) \right). \end{aligned}$$

Na Proposição 1, são descritas as duas inequações que descrevem os envelopes superiores de  $\mathcal{AT}$ .

**Proposição 1:** sejam  $\theta = \gamma_1 + \alpha_1 c + \beta_1 s$  e  $\theta = \gamma_2 + \alpha_2 c + \beta_2 s$  os planos que passam pelos pontos  $\{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\}$  e  $\{\zeta_1, \zeta_3, \zeta_4\}$ , respectivamente. Então duas inequações válidas para  $\mathcal{AT}$  podem ser obtidas do seguinte modo:

$$\gamma'_k + \alpha_k c + \beta_k s \geq tg^{-1} \left( \frac{s}{c} \right),$$

para todo  $(c, s) \in [\underline{c}, \bar{c}] \times [\underline{s}, \bar{s}]$  com  $\gamma'_k = \gamma_k + \Delta\gamma_k$ , onde,

$$\Delta\gamma_k = \max \left\{ tg^{-1} \left( \frac{s}{c} \right) - \gamma'_k + \alpha_k c + \beta_k s : c \in [\underline{c}, \bar{c}], s \in [\underline{s}, \bar{s}] \right\} \quad (83)$$

para  $k = 1, 2$ .



Observe que pela construção de (83),  $\gamma'_k + \alpha_k c + \beta_k s$  domina o termo  $tg^{-1}\left(\frac{s}{c}\right)$  sobre a caixa  $\mathcal{C}$ . O problema de otimização não convexo (83) pode ser resolvido enumerando todas possibilidades dos pontos de KKT.

Na Proposição 2, são descritas as duas inequações que descrevem os envelopes inferiores de  $\mathcal{AT}$ .

**Proposição 2:** sejam  $\theta = \gamma_3 + \alpha_3 c + \beta_3 s$  e  $\theta = \gamma_4 + \alpha_4 c + \beta_4 s$  os planos que passam pelos pontos  $\{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_4\}$  e  $\{\zeta_2, \zeta_3, \zeta_4\}$ , respectivamente. Então duas inequações válidas para  $\mathcal{AT}$  podem ser obtidas do seguinte modo:

$$\gamma'_k + \alpha_k c + \beta_k s \leq tg^{-1}\left(\frac{s}{c}\right),$$

para todo  $(c, s) \in [\underline{c}, \bar{c}] \times [\underline{s}, \bar{s}]$  com  $\gamma'_k = \gamma_k - \Delta\gamma_k$ , onde,

$$\Delta\gamma_k = \max \left\{ tg^{-1}\left(\frac{s}{c}\right) - \gamma'_k + \alpha_k c + \beta_k s : c \in [\underline{c}, \bar{c}], s \in [\underline{s}, \bar{s}] \right\} \quad (84)$$

para  $k = 3, 4$ .

### 4.2.3 FPO – CA modelo relaxado

Considerando o modelo de FPO não convexo (73) – (81) e a técnica do envelopamento convexo apresentada na seção anterior, o modelo matemático convexo proposto apresenta a seguinte formulação:

$$\min \sum_{i \in \mathcal{G}} C_i(p_i^g) \quad (85)$$

sujeito a:

$$p_i^g - p_i^d = g_{ii}c_{ii} + \sum_{j \in \delta(i)} p_{ij} \quad i \in \mathcal{B} \quad (86)$$

$$q_i^g - q_i^d = -b_{ii}c_{ii} + \sum_{j \in \delta(i)} q_{ij} \quad i \in \mathcal{B} \quad (87)$$

$$p_{ij} = -G_{ij}c_{ii} + G_{ij}c_{ij} - B_{ij}s_{ij} \quad (i, j) \in \mathcal{L} \quad (88)$$

$$q_{ij} = B_{ij}c_{ii} - B_{ij}c_{ij} - G_{ij}s_{ij} \quad c \quad (89)$$

$$c_{ij} = c_{ji}, \quad s_{ij} = -s_{ji} \quad s_{ij} = -s_{ij} \quad (90)$$

$$c_{ij}^2 + s_{ij}^2 \leq c_{ii}c_{jj} \quad (91)$$

$$\underline{V}_i^2 \leq c_{ii} \leq \overline{V}_i^2 \quad i \in \mathcal{B} \quad (92)$$

$$p_{ij}^2 + q_{ij}^2 \leq (S_{ij}^{\max}) \quad (i, j) \in \mathcal{L} \quad (93)$$

$$\underline{p}_i \leq p_i^g \leq \overline{p}_i \quad i \in \mathcal{G} \quad (94)$$

$$\underline{q}_i \leq q_i^g \leq \overline{q}_i \quad i \in \mathcal{G} \quad (95)$$

$$\theta = \gamma_k + \alpha_k c + \beta_k s \quad k = 1, \dots, 4 \quad (96)$$

$$\gamma'_k + \alpha_k c + \beta_k s \geq tg^{-1} \left( \frac{s}{c} \right) \quad k = 1, 2. \quad (97)$$

$$\gamma'_k + \alpha_k c + \beta_k s \leq tg^{-1} \left( \frac{s}{c} \right) \quad k = 3, 4. \quad (98)$$

$$\gamma'_k = \gamma_k + \Delta\gamma_k \quad k = 1, \dots, 4 \quad (99)$$

$$\Delta\gamma_k = \max \left\{ tg^{-1} \left( \frac{s}{c} \right) - \gamma'_k + \alpha_k c + \beta_k s \right\} \quad k = 1, \dots, 4 \quad (100)$$

$$\approx \theta_j - \theta_i = tg2^{-1}(s_{ij}, c_{ij}) \quad (i, j) \in \mathcal{L},$$

As equações de (96) – (100) substituem a equação (81) do arco tangente que tornava o problema não convexo. Os coeficientes das equações (96) – (100) são obtidos em um pré-processo por um *solver* não linear local, neste caso, é utilizado o *solver* KNITRO. Os valores obtidos são fixados como parâmetros do problema de FPO.

Neste trabalho é usado o *solver* CPLEX para resolver o modelo proposto (85) – (100). Para melhor compressão do método de convexificação utilizado, as equações (96) – (100) são nomeadas simplesmente como envelope, as equações de (85) – (95) são nomeadas como FPO modelo cônico e as equações de (85) – (100) são nomeadas como FPO – CA modelo relaxado. O modelo de FPO – CA relaxado é resolvido em apenas uma iteração, em Kocuk (2016) é sugerido que o modelo de FPO – CA relaxado seja resolvido por algoritmo em um processo iterativo.

Na seção 4.3 observa-se que sistemas testes maiores, por exemplo, 118 barras IEEE, aparecem diferenças significativas, principalmente na parte reativa pelo fato de não ter usado o processo iterativo. No processo iterativo são avaliados a cada iteração os limitantes superiores e inferiores das variáveis  $c$  e  $s$ , de modo que, os limitantes superior e inferior das variáveis sejam *tight*. Observe que na formulação de (86) – (95) as variáveis

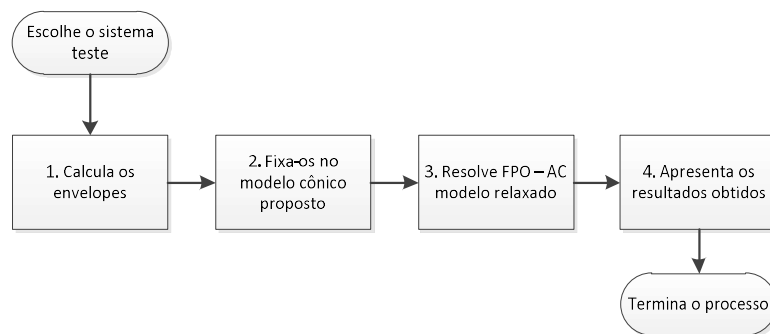
$c_{ij}$  e  $s_{ij}$  não têm limites explícitos, embora tenha limites implícitos devido a (91) – (92) como por exemplo:

$$-\bar{V}_i \bar{V}_j \leq c_{ij}, \quad s_{ij} \leq \bar{V}_i \bar{V}_j \quad (i, j) \in \mathcal{L} \quad (101)$$

Porém, esses limites são muito fracos, pelo fato que as diferenças  $\theta_j - \theta_i$  dos ângulos serem geralmente pequenas, implicando que  $c_{ij} \approx 1$  e  $s_{ij} \approx 0$  quando o modelo é resolvido em uma iteração. Logo, em mais iterações deve-se buscar melhorar esses limites, para um estudo mais aprofundado sobre a melhoria dos limitantes ver (KOCUK, 2016). A seguir apresenta-se de forma bem simples o modelo proposto com uma iteração, na Figura 13 representa o resumo das etapas:

1. O *solver* de otimização local KNITRO resolve as equações (96) – (100) em um pré-processo e encontra os envelopes que são parâmetros necessários para resolver o modelo convexo proposto.
2. Ao modelo cônico é adicionado os envelopes encontrados no processo de otimização anterior para obter o FPO – CA modelo relaxado.
3. Usando o *solver* de otimização CPLEX resolve o FPO – CA modelo relaxado proposto.
4. O processo termina e são apresentados os resultados do FPO – CA modelo relaxado que é global para relaxação proposta.

Figura 13 – Etapas de resolução modelo convexo proposto

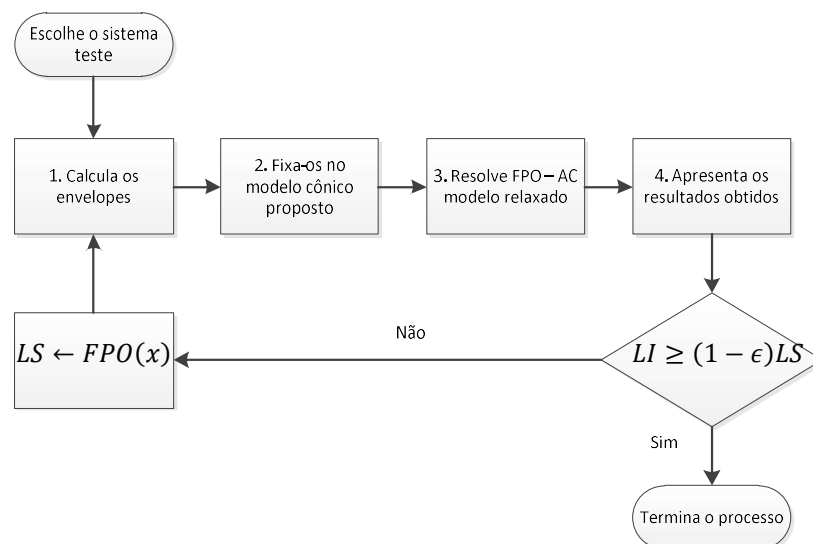


**Fonte:** próprio autor.

Em um modelo iterativo de FPO – CA modelo relaxado é acrescentado mais uma etapa que aqui é chamado de melhora dos limites ( $c, s$ ), na Figura 14 é apresentado um resumo do processo iterativo. Considere as nomenclaturas limite inferior  $LI$ , limite superior  $LS$  e erro  $\epsilon$ :

1. O *solver* de otimização local KNITRO resolve as equações (96) – (100) em um pré-processo e encontra os envelopes que são parâmetros necessários para resolver o modelo convexo proposto.
2. Ao modelo cônico é adicionado os envelopes encontrados no processo de otimização anterior para obter o FPO – CA modelo relaxado.
3. Usando o *solver* de otimização CPLEX resolve o FPO – CA modelo relaxado proposto.
4. Apresenta-se os resultados do FPO – CA modelo relaxado que agora é denominado como  $FPO(x)$ , se  $LI \geq (1 - \epsilon)LS$  então, termina-se o processo, senão ir para a etapa 5.
5.  $LS \leftarrow FPO(x)$  para melhora dos limites. E retorne a etapa 1.

Figura 14 – Etapas de resolução modelo convexo proposto iterativo



Fonte: próprio autor.

### 4.3 TESTES E RESULTADOS

O modelo convexo proposto (85) – (100) é implementado em *A Mathematical Programming Language* (AMPL). O AMPL é uma linguagem de modelagem para programação matemática, que permite trabalhar com diversos *solvers* tais como KNITRO, BARON, CPLEX, *Ipopt* entre outros, conforme (FOURER; GAY; KERNIGHAN, 2003). Assim como o *General Algebraic Modeling System* (GAMS) o AMPL é uma excelente linguagem para modelagem matemática (LIBERTI; MACULAN, 2006). Utilizam-se os *solvers* KNITRO e CPLEX. para otimizar o modelo convexo proposto.

Os resultados obtidos da implementação do modelo convexo proposto pelo AMPL são utilizados para compara-los com o *Matpower* Zimmerman, Sanchez e Thomas (2011) e Sánchez et al. (2013) que é uma ótima ferramenta para estabelecer alguns parâmetros para o problema de FPO, haja vista que, apresenta uma programação de alta qualidade com resultados satisfatórios.

Os testes foram executados em um computador Dell PowerEdge t430, sistema operacional: *Linux*, 2x Processadores *Intel* E5-2650 v4 2.2GHz, 30M Cache, HT. 12Cores/24Threads. Todos os testes foram realizados nos seguintes sistemas testes do IEEE 14 barras, 30 barras, 57 barras e 118 barras. Para melhor comparação dos resultados, o modelo proposto usa os mesmos dados do *Matpower* que por sua vez utiliza os mesmos dados dos sistemas testes IEEE, ou seja, os mesmos limites máximos e mínimos de magnitude de tensões, as mesmas cargas, os mesmos coeficientes de custos de geração entre outros parâmetros. As diferenças de alguns valores entre os dois modelos está no fato que o processo de otimização para obter os parâmetros das equações (96) – (100) são calculados uma única vez, ou seja, para melhorar os resultados do modelo proposto convexo do FPO deve-se atualizar os limites de  $(c, s)$  em um processo iterativo entre o FPO e a obtenção ótima destes parâmetros. Nesta tese, optou-se por não

considerar o modelo iterativo. O *Matpower* considera os *taps* fixos. O *Matpower* usa o método de pontos interiores para resolver o modelo, como o modelo proposto é um modelo relaxado convexo é usado o AMPL/CPLEX. O valor da função objetivo é dado em dólares / horas (\$/h) do mesmo modo usado pelo *Matpower*.

#### 4.3.1 Sistema de 14 barras

Nesta seção, são apresentados os principais resultados do sistema teste IEEE de 14 barras. O *Matpower* considera neste sistema teste, 14 barras sendo 11 barras de cargas, 1 capacitor *shunt*, 20 ramos e 3 transformadores. Comparando o resultado do *Matpower* com o modelo convexo proposto a função objetivo apresenta uma precisão de 99,92%, Tabela 1.

Tabela 1 – Função objetivo 14 barras

	<i>MATPOWER</i>	MODELO PROPOSTO
FUNÇÃO OBJETIVO	8.081,53 \$/h	8074,71 \$/h
TEMPO	2,19s	0,30s

**Fonte:** próprio autor.

Na Tabela 2 são comparados as magnitudes de tensões nas barras, os limites da magnitude de tensão são os mesmos para todas as barras, ou seja, limite máximo igual à 1,06 p.u. e limite mínimo igual à 0,94 p.u., sendo que neste teste nenhum limite de tensão é violado. A barra de referência do sistema teste 14 barras é a barra 1, que a partir de agora é reconhecida com um (\*) ao lado do número da barra. Os principais resultados obtidos encontram-se nas Tabela 2 e Tabela 3.

Tabela 2 – Potência ativa fornecida pelas barras de geração 14 barras

**(continua)**

nº da barra	<i>MATPOWER</i>		MODELO PROPOSTO		<i>MATPOWER</i>	MODELO PROPOSTO
	Geração		Geração			
	P (MW)	Q (MVar)	P (MW)	Q (MVar)	Tensão (p.u.)	Tensão (p.u.)
1*	194,330	0,000	194,751	0,008	1,060	1,060

**Fonte:** próprio autor.

Tabela 2 – Potência ativa fornecida pelas barras de geração 14 barras

n° da barra	<i>MATPOWER</i>		MODELO PROPOSTO		<i>MATPOWER</i>		(conclusão)	
	Geração		Geração				MODELO PROPOSTO	
	P (MW)	Q (MVar)	P (MW)	Q (MVar)	Tensão (p.u.)		Tensão (p.u.)	
2	36,720	23,690	36,770	22,718	1,041	1,041		
3	28,740	24,130	27,425	23,246	1,016	1,017		
4	–	–	–	–	1,014	1,016		
5	–	–	–	–	1,016	1,017		
6	0,000	11,550	0,001	10,501	1,060	1,060		
7	–	–	–	–	1,046	1,047		
8	8,490	8,270	9,221	8,013	1,060	1,060		
9	–	–	–	–	1,044	1,044		
10	–	–	–	–	1,039	1,039		
11	–	–	–	–	1,046	1,046		
12	–	–	–	–	1,045	1,045		
13	–	–	–	–	1,040	1,040		
14	–	–	–	–	1,024	1,024		
TOTAL	268,290	67,630	268,168	64,486	–	–		

Fonte: próprio autor.

De acordo com a Tabela 2 os valores totais de geração de potência ativa e reativa entre o modelo proposto e o *Matpower* apresentam valores próximos, mostrando que o modelo convexo, embora não tenha sido simulado de forma iterativa, apresenta resultados de qualidade. A magnitude de tensão em cada barra nos dois modelos é quase a mesma.

Na Tabela 3, apresenta-se as perdas nos ramos, comparando os modelos a diferença das perdas por ramo apresenta algumas diferenças, mas os valores totais ficaram próximos das perdas totais fornecidas pelo *Matpower*. Deve-se enfatizar que o *Matpower* resolve um modelo de PNL para o FPO que é um problema que apresenta múltiplos ótimos locais.

Tabela 3 – Perdas nos ramos 14 barras

			Perdas ( $I^2 \times Z$ )			
Ramos	de	para	<i>Matpower</i>		Modelo Proposto	
#	barra	barra	P (MW)	Q (MVar)	P (MW)	Q (MVar)
1	1	2	2,902	8,860	2,507	7,654

Fonte: próprio autor.

Tabela 3 – Perdas nos ramos 14 barras

**(conclusão)**

			Perdas ( $I^2 \times Z$ )			
Ramos	de	para	<i>Matpower</i>		Modelo Proposto	
#	barra	barra	P (MW)	Q (MVar)	P (MW)	Q (MVar)
2	1	5	2,051	8,470	2,677	11,049
3	2	3	1,344	5,660	1,656	6,975
4	2	4	1,285	3,900	0,920	2,792
5	2	5	0,737	2,250	0,486	1,483
6	3	4	0,099	0,250	0,035	0,089
7	4	5	0,331	1,040	0,339	1,069
8	4	7	0,000	1,050	0,000	1,448
9	4	9	0,000	1,120	0,000	0,980
10	5	6	0,000	4,230	0,000	4,924
11	6	11	0,049	0,100	0,058	0,121
12	6	12	0,072	0,150	0,070	0,146
13	6	13	0,208	0,410	0,216	0,426
14	7	8	0,000	0,220	0,000	0,244
15	7	9	-0,000	1,000	0,000	1,032
16	9	10	0,015	0,040	0,013	0,033
17	9	14	0,131	0,280	0,123	0,261
18	10	11	0,010	0,020	0,013	0,031
19	12	13	0,006	0,010	0,006	0,005
20	13	14	0,047	-2,090	0,052	0,106
Total:	–	–	9,287	39,160	9,170	40,870

**Fonte:** próprio autor.

#### 4.3.2 Sistema de 30 barras

Nesta seção, são apresentados os principais resultados do sistema de 30 barras, sendo que o tempo de processamento é dado em segundos, a diferença dos tempos de processamento entre os modelos se justifica devido ao fato que o *Matpower* usa o *Matlab* para processar o programa do FPO e a implementação do modelo proposto foi executada em um servidor e a mesma não segue os padrões de programação profissional. Neste modelo de 30 barras, o *Matpower* considera 6 geradores, 21 barras de cargas, 2 capacitores *shunts* e 4 transformadores. Na Tabela 4 o tempo de processamento e a função objetivo



apresentam valores na mesma ordem de grandeza, ressaltando-se que o modelo convexo proposto é um modelo relaxado.

Tabela 4 – Função objetivo 30 barras

	<i>MATPOWER</i>	MODELO PROPOSTO
FUNÇÃO OBJETIVO	8906,14 \$/h	8902,38 \$/h
convergiu em (s)	0,58 s	0,51 s

**Fonte:** próprio autor.

Tabela 5 – Potência ativa fornecidas pelas barras de geração 30 barras

**(continua)**

n° da barra	<i>MATPOWER</i>		MODELO PROPOSTO		<i>MATPOWER</i>	MODELO PROPOSTO
	GERAÇÃO		GERAÇÃO			
	P (MW)	Q (MVAR)	P (MW)	Q (MVAR)	TENSÃO P.u.	TENSÃO P.u.
1*	212,230	0,000	212,507	0,000	1,060	1,060
2	36,230	27,170	36,274	27,285	1,039	1,040
3	0,000	0,000	0,000	0,000	1,021	1,021
4	0,000	0,000	0,000	0,000	1,012	1,012
5	29,350	29,950	28,246	30,614	1,013	1,014
6	0,000	0,000	0,000	0,000	1,011	1,011
7	0,000	0,000	0,000	0,000	1,004	1,004
8	12,940	40,000	13,016	40,000	1,013	1,013
9	0,000	0,000	0,000	0,000	1,042	1,042
10	0,000	0,000	0,000	0,000	1,038	1,039
11	4,400	9,090	5,047	9,017	1,060	1,060
12	0,000	0,000	0,000	0,000	1,050	1,050
13	0,000	7,730	0,000	7,449	1,060	1,060
14	0,000	0,000	0,000	0,000	1,035	1,035
15	0,000	0,000	0,000	0,000	1,031	1,031
16	0,000	0,000	0,000	0,000	1,038	1,038
17	0,000	0,000	0,000	0,000	1,033	1,033
18	0,000	0,000	0,000	0,000	1,021	1,021
19	0,000	0,000	0,000	0,000	1,019	1,019
20	0,000	0,000	0,000	0,000	1,023	1,023
21	0,000	0,000	0,000	0,000	1,026	1,026
22	0,000	0,000	0,000	0,000	1,027	1,027
23	0,000	0,000	0,000	0,000	1,021	1,021

**Fonte:** próprio autor.

Tabela 5 – Potência ativa fornecidas pelas barras de geração 30 barras

(conclusão)

n° da barra	MATPOWER		MODELO PROPOSTO		MATPOWER	MODELO PROPOSTO
	GERAÇÃO		GERAÇÃO			
	P (MW)	Q (MVAR)	P (MW)	Q (MVAR)	TENSÃO P.u.	TENSÃO P.u.
24	0,000	0,000	0,000	0,000	1,016	1,016
25	0,000	0,000	0,000	0,000	1,014	1,014
26	0,000	0,000	0,000	0,000	0,996	0,996
27	0,000	0,000	0,000	0,000	1,022	1,021
28	0,000	0,000	0,000	0,000	1,008	1,008
29	0,000	0,000	0,000	0,000	1,002	1,002
30	0,000	0,000	0,000	0,000	0,990	0,990
TOTAL	295,140	113,940	295,090	114,365	–	–

**Fonte:** próprio autor.

Na Tabela 5, a geração total de potência ativa, apresentou valores na mesma ordem de grandeza, bem como as magnitudes de tensões em cada barra. Para nenhum dos dois modelos a magnitude tensão foi violada os limites mínimos e máximos de tensões são os mesmos para todas as barras, ou seja 1,06 p.u. e 0,94 p.u.

Tabela 6 – Perdas nos ramos 30 barras

(continua)

			Perdas ( $I^2 \times Z$ )			
Ramos	de	para	Matpower		Modelo Proposto	
#	barra	barra	P (MW)	Q (MVAR)	P (MW)	Q (MVAR)
1	1	2	3,309	9,91	3,126	9,361
2	1	3	2,181	7,97	2,429	8,876
3	2	4	0,770	2,35	0,616	1,876
4	3	4	0,595	1,71	0,664	1,908
5	2	5	1,679	7,05	2,062	8,664
6	2	6	1,376	4,18	1,066	3,236
7	4	6	0,375	1,30	0,351	1,222
8	5	7	0,053	0,13	0,028	0,070
9	6	7	0,200	0,61	0,130	0,400
10	6	8	0,052	0,18	0,051	0,178
11	6	9	0,000	1,29	0,000	1,730
12	6	10	0,000	1,23	0,000	1,088
13	9	11	0,000	0,19	0,000	0,198
14	9	10	0,000	0,92	0,000	0,964
15	4	12	-0,000	4,50	0,000	4,915
16	12	13	0,000	0,07	0,000	0,069

**Fonte:** próprio autor.

Tabela 6 – Perdas nos ramos 30 barras

(conclusão)

			Perdas ( $I^2 \times Z$ )			
Ramos	de	para	<i>Matpower</i>		Modelo Convexo	
#	barra	barra	P (MW)	Q (MVAr)	P (MW)	Q (MVAr)
17	12	14	0,072	0,15	0,071	0,148
18	12	15	0,203	0,40	0,214	0,422
19	12	16	0,044	0,09	0,055	0,115
20	14	15	0,005	0,00	0,005	0,004
21	16	17	0,005	0,02	0,008	0,028
22	15	18	0,034	0,07	0,033	0,068
23	18	19	0,004	0,01	0,003	0,007
24	19	20	0,019	0,04	0,019	0,039
25	10	20	0,090	0,20	0,090	0,202
26	10	17	0,017	0,05	0,015	0,038
27	10	21	0,112	0,24	0,113	0,243
28	10	22	0,053	0,11	0,051	0,106
29	21	22	0,001	21	22	0,001
30	15	23	0,027	0,05	0,031	0,063
31	22	24	0,046	0,07	0,044	0,069
32	23	24	0,004	0,01	0,006	0,012
33	24	25	0,008	0,01	0,004	0,008
35	25	27	0,028	0,050	0,024	0,045
36	28	27	-0,000	1,350	0,000	1,236
37	27	29	0,087	0,160	0,087	0,164
38	27	30	0,163	0,310	0,163	0,306
39	29	30	0,034	0,060	0,034	0,064
40	8	28	0,004	0,010	0,004	0,013
41	6	28	0,048	0,170	0,047	0,166
Total:	–	–	11,742	47,310	11,689	48,388

**Fonte:** próprio autor.

No teste com o sistema de 30 barras usando o *Matpower* para o modelo convexo proposto as perdas totais de potência ativa e reativa apresentam resultados semelhantes. Analisando linha a linha alguns resultados estão próximos entre os modelos, mas em outras linhas, por exemplo observa-se alguns valores de fluxos um pouco distantes entre os modelos. Este comportamento pode ser atribuído a não convexidade do problema de FPO, pois no modelo convexo proposto os parâmetros são calculados uma única vez e ele depende muito da qualidade dos seus limitantes.

### 4.3.3 Sistemas de 57 barras

Nesta seção, apresentam-se os principais resultados obtidos para o sistema teste de 57 barras. Nas seções 4.3.1 e 4.3.2, os resultados dos dois modelos são apresentados para todas as barras e ramos. Nesta seção e na próxima, eles não são apresentados para todas as barras e linhas. Como os dois sistemas são maiores, são apresentados aspectos relacionados com o comportamento das soluções ótimas fornecidas pelos dois modelos. O sistema de 57 barras de acordo com os dados do *Matpower* possui, 57 barras, 7 geradores, 42 barras de cargas, 3 capacitores *shunts*, 80 ramos e 17 transformadores. No sistema de 57 barras a barra de referência é a barra 1\*.

Tabela 7 – Função objetivo 57 barras

	<i>MATPOWER</i>	MODELO PROPOSTO
FUNÇÃO OBJETIVO	41737,79 \$/h	41721,90 \$/h
convergiu em (s)	0,08 s	0,30 s

**Fonte:** próprio autor.

O valor da função objetivo na Tabela 7, nos dois modelos ficaram próximos, mostrando que a consistência e a validade do modelo convexo proposto.

Tabela 8 – Resultados totais de geração e carga *Matpower* 57 barras

	<i>MATPOWER</i>			
	Geração		Carga	
	P (MW)	Q (MVar)	P (MW)	Q (MVar)
TOTAL	1267,31	270,56	1250,80	336,40

**Fonte:** próprio autor.

Tabela 9 – Resultados totais de geração e carga modelo proposto 57 barras

	<i>MODELO CONVEXO</i>			
	Geração		Carga	
	P (MW)	Q (MVar)	P (MW)	Q (MVar)
TOTAL	1266,97	276,97	1250,80	336,40

**Fonte:** próprio autor.

Nas Tabela 8 e 9 os valores das cargas utilizadas nos dois modelos têm que coincidir, os resultados são apresentados apenas para certificar o uso correto desses dados.

Quanto a geração total de potência ativa e reativa os resultados ficaram próximos entre os modelos, mostrando que o modelo convexo proposto está correto. Os limites máximos e mínimos das magnitudes de tensões nas barras são iguais à 1,06 p.u. e 0,94 p.u. sendo que, neste teste nenhum limite foi violado.

Tabela 10 – Magnitude de tensão e ângulo, máximos e mínimos 57 barras

<i>MATPOWER</i>				
	mínimo		máximo	
	Valor (p.u.)	barra	Valor (p.u.)	barra
MAGNITUDE DE TENSÃO	0,951	31	1,060	46
ÂNGULO	-12,16°	31	4,72°	8

**Fonte:** próprio autor.

Tabela 11 – Magnitude de tensão e ângulo, máximos e mínimos 57 barras

MODELO PROPOSTO				
	mínimo		máximo	
	Valor (p.u.)	barra	Valor (p.u.)	barra
MAGNITUDE DE TENSÃO	0,954	31	1,06	55
ÂNGULO	-8,190	31	3,163°	8

**Fonte:** próprio autor.

Nas Tabela 10 e 11 são apresentados a magnitude de tensão e ângulo obtidos através do *Matpower* e do modelo convexo. O valor mínimo foi encontrado na barra 31 para ambos os modelos e o valor máximo da magnitude de tensão foi encontrado em barras diferentes, ou seja, barra 46 no *Matpower* e barra 55 no modelo convexo. O valor máximo da magnitude do ângulo coincidiu na barra 8.

Tabela 12 – Perdas totais ativa e reativa no sistema 57 barras

	<i>Matpower</i>		Modelo Convexo	
	P (MW)	Q (MVar)	P (MW)	Q (MVar)
Total	16,513	72,97	16,179	112,709

**Fonte:** próprio autor.

Diferente dos sistemas de 14 e 30 barras para o sistema 57 barras foi observado que as perdas reativas obtidas entre os dois modelos não ficaram dentro do desejado. Este mesmo comportamento entre os modelos ocorre com o sistema de 118 barras apresentado na próxima seção. Este comportamento pode ser atribuído à não convexidade

no modelo simulado no *Matpower* e o fato dos ajustes dos parâmetros das equações (96) – (100) ser efetuado uma única vez.

#### 4.3.4 Sistemas de 118 barras

Os dados do sistema de 118 barras utilizados pelo *Matpower* consideram, 118 barras, 54 geradores, 99 barras de cargas, 14 capacitores *shunts*, 186 ramos e 9 transformadores. A barra de referência para o sistema de 118 barras é a barra 69\*. Os limites da magnitude de tensão são os mesmos para todas as barras, ou seja, limite máximo igual à 1,06 e limite mínimo igual à 0,94, sendo que, neste teste nenhum limite foi violado.

Tabela 13 – Função objetivo 118 barras

	<i>MATPOWER</i>	MODELO PROPOSTO
FUNÇÃO OBJETIVO	129660,70 \$/h	129341,46 \$/h
convergiu em (s)	1,59 s	0,62 s

**Fonte:** próprio autor.

O valor da função objetivo na Tabela 13, nos dois modelos praticamente são iguais apresentando pequena diferença. O tempo computacional consumido pelo modelo convexo é menor o tempo de CPU do *Matpower*.

Tabela 14 – Resultados totais de geração e carga *Matpower* 118 barras

	<i>MATPOWER</i>			
	Geração		Carga	
	P (MW)	Q (MVar)	P (MW)	Q (MVar)
TOTAL	4319,40	388,26	4242,00	1438,00

**Fonte:** próprio autor.

Tabela 15 – Resultados totais de geração e carga modelo proposto 118 barras

	MODELO PROPOSTO			
	Geração		Carga	
	P (MW)	Q (MVar)	P (MW)	Q (MVar)
TOTAL	4313,29	1169,67	4242,00	1438,00

**Fonte:** próprio autor.

Nas Tabela 14 e 15 os valores das cargas têm que coincidir, os resultados são apresentados apenas para certificar o uso correto desses dados. Quanto a geração total de potência ativa e reativa os resultados obtidos pelos dois modelos ficaram próximos, mostrando que o modelo convexo proposto está desenvolvido corretamente.

Tabela 16 – Magnitude de tensão e ângulo, máximos e mínimos 118 barras

<i>MATPOWER</i>				
	mínimo		máximo	
	Valor (p.u.)	barra	Valor (p.u.)	barra
<b>MAGNITUDE DE TENSÃO</b>	1,01	81	1,060	66
<b>ÂNGULO</b>	15,40°	41	37,65°	10

**Fonte:** próprio autor.

Tabela 17 – Magnitude de tensão e ângulo, máximos e mínimos 118 barras

MODELO PROPOSTO				
	mínimo		máximo	
	Valor (p.u.)	barra	Valor (p.u.)	barra
<b>MAGNITUDE DE TENSÃO</b>	1,015	76	1,060	59
<b>ÂNGULO</b>	22,81°	41	35,09°	26

**Fonte:** próprio autor.

Nas Tabela 16 e 17 são apresentados a magnitude de tensão e o ângulo obtidos pelo *Matpower* e pelo modelo convexo, onde o valor mínimo da magnitude de tensão encontrada pelo *Matpower* é a barra 81 enquanto que no modelo convexo é a barra 76. O valor mínimo para a magnitude de ângulo são encontradas para a mesma barra, ou seja, barra 4. A magnitude de tensão máxima foi encontrada em barras diferentes, ou seja, na barra 66 para o *Matpower* e na barra 59 para o modelo convexo. O valor máximo da magnitude do ângulo também foi obtido para barras distintas, no *Matpower* a barra 10 e no modelo proposto a barra 26.

Tabela 18 – Perdas totais ativa e reativa no sistema 118 barras

	<i>Matpower</i>		Modelo Proposto	
	P (MW)	Q (MVar)	P (MW)	Q (MVar)
<b>Total</b>	77,401	483,520	84,474	1336,275

**Fonte:** próprio autor.

O modelo proposto para o sistema de 118 barras apresenta resultados diferentes do *Matpower* para as perdas reativas, isto porque a medida que o sistema cresce aumenta a dificuldade em manter os limites das magnitudes das tensões como bordo *tight* que acarreta em um comportamento diferente do *Matpower* para o subproblema no reativo.

Neste trabalho, optou-se por deixar as tensões dentro de seus limites máximos e mínimos como no *Matpower*, não fazendo o "improve". Ou seja, buscar limitantes para  $(c, s)$  de modo a melhorá-los, isto implica no modelo trabalhar em um algoritmo com um *Spatial branch-and-cut*. Os resultados até este ponto são satisfatórios para o propósito desta tese, mas, pode ser explorado a melhoria deste modelo convexo, considerando os ciclos bases, que não foi explorado neste trabalho, mas se revela como um campo promissor no problema do FPO, onde alternativas de convexificá-lo tem-se mostrado desafiador.



## 5 EXEMPLO DE APLICAÇÃO DO MODELO CONVEXO: DESPACHO ÓTIMO DE POTÊNCIA VIA PROGRAMAÇÃO BINÍVEL

Neste capítulo, apresenta-se um problema binível para despacho ótimo de potência ativa e reativa. O objetivo deste capítulo é explorar o modelo de programação convexo do FPO proposto no Capítulo 4. No nível superior, minimiza-se a função custo de oportunidade e no nível inferior, minimiza-se o preço ofertado de potência ativa. Os modelos propostos neste capítulo, são baseados no trabalho de Almeida e Senna (2011) que propõe um problema binível, em que no primeiro nível resolve-se um problema de FPO não linear considerando minimizar a função custo de oportunidade e no segundo nível resolve-se um modelo de despacho DC. Nesta tese, propõe-se para solução deste problema binível um procedimento heurístico iterativo não linear e não convexo, usando diversos *solvers* comerciais, e apresenta como contribuição um processo iterativo linear e convexo. Outra contribuição, é propor o modelo binível de Almeida e Senna (2011) como um modelo unível totalmente convexo.

### 5.1 O MERCADO DE POTÊNCIA ATIVA

A participação de geradores no mercado de potência ativa é afetada enormemente no componente custo para produzir potência reativa, o que do ponto de vista de mercado, gera perdas de oportunidades. Se um gerador particular fornece potência reativa, o custo de oportunidade (CO) pelo fornecimento de reativo pode ser afetado. Pode-se oferecer um benefício a esse gerador de uma maneira mais rentável, ou seja, pela não participação no mercado de potência ativa.

A imposição do operador do sistema para gerar potência reativa, entretanto diminui a capacidade de geração de potência ativa. O custo de operação não depende apenas da oferta feita por um único gerador, mas das ofertas realizadas por outros geradores, e isso depende do preço de energia de mercado. O modelo proposto por Almeida e Senna (2011) usa a definição de custo de oportunidade e propõe um procedimento para o despacho de potência ativa e reativa que pode ser considerado uma extensão adaptada do mecanismo para o cálculo da quantidade de MWh de venda de cada gerador no mercado de potência ativa.

O problema binível de despacho de potência ativa é apresentado em três estágios e tem início com a necessidade de potência ativa do mercado. No segundo estágio, considerando as restrições nas linhas de transmissão, nas capacidades de geração e nas ofertas dos geradores, o despacho de potência ativa é realizado. Uma observação a ser feita a respeito deste estágio está em considerar este modelo como um modelo DC.

Na sequência, considera-se o modelo de FPO – CA factível, realiza-se o despacho de potência ativa e reativa pela minimização de custo total de oportunidade em termos de preços marginais obtidos no segundo estágio. Como mencionado, o custo de oportunidade depende das ofertas dos geradores, que permite uma redução do preço final quando são consideradas as restrições relativas às potências ativa e reativa, ou seja, o modelo CA do sistema. Os preços de potência ativa podem sofrer modificações, desde que, sejam respeitados os limites pré-especificados dos geradores, isto é, às restrições físicas e operacionais relacionadas com as capacidades máximas de geração de potência ativa e reativa.

As ofertas dos geradores são variáveis de decisões e os dois estágios devem interagir até que não sejam mais observadas modificações nos coeficientes dos custos marginais. No nível inferior do problema binível, calcula-se a quantidade de potência ativa que cada gerador fornece ao mercado.

## 5.2 DESPACHO ÓTIMO DE POTÊNCIA

A quantidade de potência ativa que cada gerador está disposto a vender respeitando seus limites de geração são dados por  $(\underline{Pg}_i^0, \overline{Pg}_i^0)$ , é dada pela equação (102). O processo começa quando o operador do sistema recebe uma oferta de compra de potência ativa pelo mercado. A função linear  $o_i$  representa o preço em MWh, onde  $Pg_i^0$  é a potência ofertada;

$$o_i(Pg_i^0) = \alpha_i Pg_i^0 + \beta_i \quad (102)$$

em que  $\alpha_i$  (\$/MW<sup>2</sup>h) e  $\beta_i$  (\$/MWh) são coeficientes constantes lineares da função representada por  $o_i$ .

### 5.2.1 O Despacho de potência para o mercado

Considere inicialmente o problema de minimização (103):

$$\begin{aligned} \min_{Pg^0, \delta^0} f &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \alpha_i (Pg_i^0)^2 + \beta_i Pg_i^0 \\ \text{s. a} \quad &Pg_i^0 - Pd_i - P_i^0(\delta^0) = 0 \\ &\underline{Pg}_i^0 \leq Pg_i^0 \leq \overline{Pg}_i^0 \\ &|fl_{ik}^0(\delta^0)| \leq \overline{fl}_{ik} \end{aligned} \quad (103) \quad i, k = 1, \dots, n$$

onde:

$n$	Número de barras do sistema.
$Pg^0$	Vetor de geração de potência ativa.
$\delta^0$	Vetor ângulo de tensão.
$Pd_i$	Demanda de potência ativa.
$P_i^0(\cdot)$	Potência ativa injetada na barra $i$ modelo DC.
$fl_{ik}^0(\cdot)$	Fluxo de potência ativa sobre a linha $(i, k)$ , modelo DC.
$\overline{fl}_{ik}$	Valor máximo permitido para o fluxo na linha de transmissão $(ik)$ .

A função objetivo e as equações de balanço de potência em (103) são representadas para todas as barras, se a barra for de carga  $Pg_i^0 = 0$ . O critério de preço mínimo é usado para calcular a quantidade de potência ativa que cada gerador vende para o mercado.

Quando é resolvido (103) os multiplicadores de Lagrange das equações de balanço de potência são os custos marginais de geração em cada barra  $i$ , representado por  $\lambda_i^0$ .

A receita é formada pelo produto entre o preço marginal e a geração de potência ativa, ou seja,  $\lambda_i^0 P g_i^0$ . O preço total de potência ativa por hora, usa integralmente as ofertas dos geradores. O lucro do gerador é obtido após resolver o problema (103) e encontrar  $(\lambda_i^0, P g_i^0)$ , e é dado pela equação (104):

$$\text{Pr}_i^0 = \lambda_i^0 P g_i^0 - \left( \frac{1}{2} a_i (P g_i^0)^2 + b_i P g_i^0 \right) \quad (104)$$

o segundo termo descreve o custo de geração em que  $a_i$  (\$/MW<sup>2</sup>h) e  $b_i$  (\$/MWh) são os coeficientes da curva custos de geração. Para evitar confusão entre termos utilizados os valores de  $(a_i, b_i)$  na equação (104) e  $(\alpha_i, \beta_i)$  da equação (103), são parâmetros onde  $(a_i = \alpha_i, b_i = \beta_i)$

Para uma compreensão melhor deste trabalho, o lucro do gerador dado pela equação (104) é afetado fortemente com a necessidade de potência reativa pelo o sistema elétrico. A potência reativa interfere diretamente na capacidade de geração de potência ativa. Assim, conhecer a necessidade ou não de potência reativa no sistema, afeta positivamente o gerador, suscitando uma **oportunidade**.

### 5.2.2 Despacho de potência ativa e reativa

A resolução do problema (103) considera apenas o despacho de potência ativa, mas quando os geradores fornecem potência reativa como suporte, isso pode levar a um custo de oportunidade elevado para os geradores, tendo um impacto negativo no preço da energia. Para reduzir o impacto na geração de potência reativa sobre o preço da potência ativa, o despacho necessita ser factível para uma rede CA considerando suas restrições físicas e operacionais.

Deste modo, o despacho de potência ativa e reativa é realizado em processo iterativo com o objetivo de minimizar o custo total de oportunidade, denotado por  $O$ .

Seja  $Pr_i$  o lucro do gerador  $i$  quando é suprida a potência reativa, e  $Pg_i$  é a potência ativa que sai do gerador  $i$ , e que seja factível para as restrições da rede CA, a equação (105) expressa essa condição:

$$Pr_i = \lambda_i^0 Pg_i - \left( \frac{1}{2} \alpha_i (Pg_i)^2 + \beta_i Pg_i \right) \quad (105)$$

Na equação (105)  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  são variáveis do primeiro nível de um problema binível. A equação (106) representa a oportunidade  $O_i$ , que é igual ao somatório da diferença entre o lucro do gerador  $i$  quando se considera o modelo da rede DC e quando a potência reativa é necessária.

$$O = \sum_{i=0}^n O_i = \sum_{i=0}^n (Pr_i^0 - Pr_i) \quad (106)$$

onde,

$$(Pr_i^0 - Pr_i) = \left[ \lambda_i^0 Pg_i^0 - \left( \frac{1}{2} a_i (Pg_i^0)^2 + b_i Pg_i^0 \right) - \left[ \lambda_i^0 Pg_i - \left( \frac{1}{2} \alpha_i (Pg_i)^2 + \beta_i Pg_i \right) \right] \right]$$

As equações de (107) – (116) representam o problema de otimização binível proposto por (ALMEIDA; SENNA, 2011). Este modelo é modificado nas próximas seções não considerando as restrições (110) e (112), de modo que, possa ser apresentado como um modelo convexo binível, bem como um modelo unível convexo via dualidade forte.

$$\min_x O = \sum_{i=1}^n [Pr_i^0 - Pr_i] \quad (107)$$

sujeito a:

$$Pg_i - Pd_i - P_i(V, \delta, t) = 0 \quad (108)$$

$$Qg_i - Qd_i - Q_i(V, \delta, t) = 0 \quad (109)$$

$$|fl_{ik}(V, \delta, t)| \leq fl_{ik}^{max} \quad (110)$$

$$\underline{V}_i \leq V_i \leq \overline{V}_i \quad (111)$$

$$0 \leq Pg_i \leq Pg_i^M(Qg_i) \quad (112)$$

$$\underline{Qg}_i \leq Qg_i \leq \overline{Qg}_i \quad (113)$$

$$\underline{\alpha}_i \leq \alpha_i \leq \overline{\alpha}_i \quad (114)$$

$$\underline{\beta}_i \leq \beta_i \leq \overline{\beta}_i \quad (115)$$

os valores de  $(\lambda_i^0, Pg_i^0)$  são determinados por:

$$\begin{aligned} \min_{Pg^0, \delta^0} f &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \alpha_i (Pg_i^0)^2 + \beta_i Pg_i^0 \\ \text{s. a.} \quad &Pg_i^0 - Pd_i - P_i^0(\delta^0) = 0 \\ &\underline{Pg_i^0} \leq Pg_i^0 \leq \overline{Pg_i^0} \\ &|fl_{ik}^0(\delta^0)| \leq \overline{fl_{ik}}, \end{aligned} \quad i, k = 1, \dots, n \quad (116)$$

onde  $i, k = 1, \dots, n$  e  $\delta, V$  são as magnitudes de tensão e ângulo,  $t_{ik}$  é um vetor da posição do *tap* do transformador,  $P_i(\cdot)$  e  $Q_i(\cdot)$  são as injeções de potência ativa e reativa,  $Pg_i$  e  $Qg_i$  são as potências ativa e reativa geradas,  $Pd_i$  e  $Qd_i$  são as demandas de potência ativa e reativa na barra  $i$ .

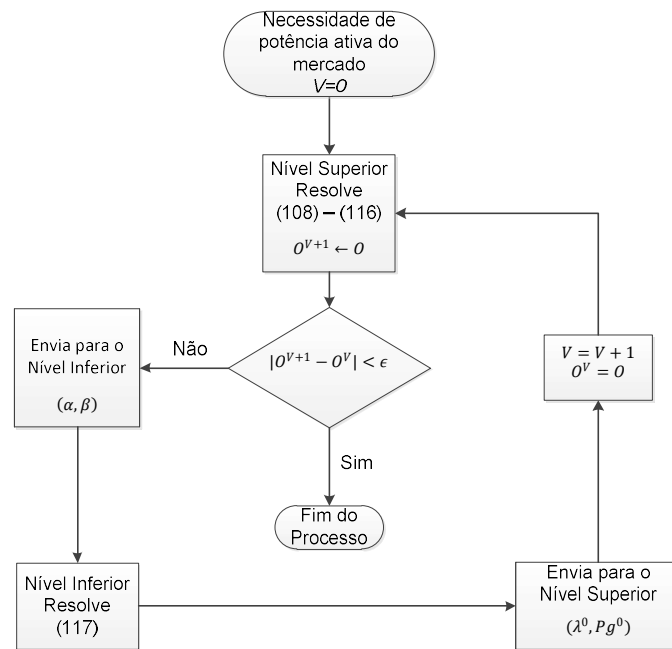
### 5.3 TÉCNICAS DE SOLUÇÕES DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO BINÍVEL

A competição entre os geradores ocorre em três estágios, ou seja, o primeiro estágio tem início com a necessidade do mercado de potência ativa. Logo em seguida, começa o segundo estágio e neste momento a oferta de reativo não é considerada, e o despacho de potência ativa é realizada levando em consideração a oferta de cada gerador e as restrições das linhas de transmissão usando o modelo DC. No terceiro estágio é realizado o despacho de potência ativa e reativa de modo a minimizar o custo de oportunidade dos geradores que são definidos em termos dos custos marginais obtidos no estágio anterior. O custo de oportunidade depende da oferta de geração de potência ativa de cada gerador.

O despacho de potência ativa e reativa é realizado resolvendo um problema binível. A seguir, apresenta-se a formulação do problema binível e as técnicas para resolvê-lo, bem como, os resultados obtidos para alguns sistemas testes da literatura. Apresenta-se uma outra técnica de solução, onde o problema binível é transformado em um problema unível via dualidade forte, e os testes e resultados para sistemas da literatura são apresentados.

A interação entre o problema do primeiro e segundo nível do problema (107) – (116) ilustrada na Figura 15 pode ser descrita da seguinte forma: no início do processo os valores de  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  são dados para o nível inferior que minimiza o padrão de geração, considerando a quantidade disponível de potência ativa no gerador, a restrição de balanço de potência e os limites físicos de operação para o modelo de fluxo de potência DC.

Figura 15 – Representação do processo iterativo binível.



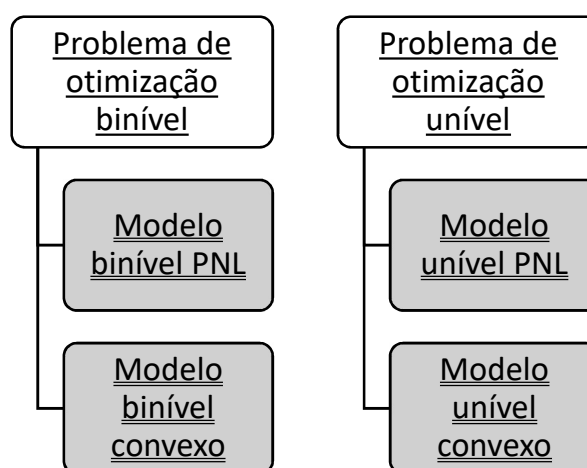
**Fonte:** próprio autor.

Resolvido o problema de (107) – (115) o nível inferior (116) obtém-se os valores ótimos de  $(\lambda^0, Pg^0)$  que alimentam o problema do nível superior (107) – (115), que leva em consideração as restrições da rede real do modelo CA, modifica o preço de potência ativa bem como a geração de potência ativa e reativa, e o sistema restante de variáveis de modo a minimizar o custo de oportunidade. Assim, todos os estágios descritos acima são executados de forma iterativa durante a solução do problema binível, o processo para quando a função que minimiza o custo de oportunidade deixa de melhorar com as variáveis  $(\lambda^0, Pg^0)$  enviadas pelo nível inferior. Desta forma, o critério de parada para a heurística é quando  $|O^{V+1} - O^V| < \epsilon$ , sendo  $V$  o número de iterações e  $O^V$  o custo de oportunidade na iteração  $V$ , e  $\epsilon$  uma tolerância preestabelecida.

## 5.4 TESTES E RESULTADOS

Nesta seção, são apresentados os principais testes e resultados do problema de otimização binível como aplicações do modelo convexo proposto no capítulo 4. O problema proposto por Almeida e Senna (2011) é apresentado nesta seção de duas formas. A primeira forma é um processo iterativo entre o nível superior e o nível inferior, que a partir de agora é referenciado como problema de otimização binível, que por sua vez são apresentadas de duas maneiras, a saber, como um modelo binível de PNL ou como um modelo binível convexo. Na segunda forma, o problema de otimização binível é formulado usando a dualidade forte como um problema de otimização unível que também é apresentado de duas maneiras, a saber, modelo unível PNL e modelo unível convexo. Na Figura 16 resume as quatro formas de representação dos modelos implementados.

Figura 16 – Modelos implementados.



Fonte: próprio autor.

### 5.4.1 Problema de otimização binível

A proposta deste trabalho é apresentar técnicas que conduzem a um ótimo global. Mas nenhuma proposta de otimalidade global pode ser discutida sem antes ter a certeza que existem ótimos locais, pois algoritmos de otimização global são técnicas que procuram



encontrar ótimos globais, mas essas técnicas globais são muito mais lentas comparadas às locais, por isso só devem ser usadas para problemas onde os ótimos locais podem existir (BUKSHS et al., 2013).

Nesta seção, são apresentados os principais resultados e testes para o modelo iterativo binível PNL, que é o modelo proposto por Almeida e Senna (2011) e modelado matematicamente através das equações de (107) – (116). O processo para resolver este problema é descrito na Figura 15, o modelo é não linear e não convexo e são utilizados *solvers* de programação não linear local. Como contribuição desta tese, é apresentado o modelo iterativo convexo que usa o modelo cônico convexo proposto Kocuk; Dey e Sun (2017) e apresentado no Capítulo 4, bem como os envelopes de *McCormick* propostos por Castro (2015) e apresentada na seção 3.7 que são usados para contornar as não linearidades do tipo bilinear na função objetivo, bem como na restrição de igualdade do problema unível convexo.

Os resultados são dados em p.u., e de agora em diante o preço total de potência ativa considerando a geração de potência reativa é definido como  $f^* = \sum_i (\frac{1}{2})\alpha_i P g_i^2 + \beta_i P g_i$ . Considerando apenas a potência ativa o preço total será dado por  $f = \sum_i \frac{1}{2}\alpha_i (P g_i^0)^2 + \beta_i P g_i^0$ . Como os testes são feitos utilizando diversos *solvers*, no Quadro 1 especifica-se em qual nível é usado cada *solver*. A partir de agora, os *solvers* serão chamados simples pelo nome, por exemplo XPRESS. Para todos os testes são utilizadas as configurações “padrão” dos *solvers*, ou seja, *gap*, tempo limite de processamento, algoritmos e entre outros.

Quadro 1 – *Solvers* utilizados para os testes

Otimização Não Linear Local	Otimização Convexa Global
SNOPT 7.5-1.2	CPLEX 12.8.0.0
IPOPT 3.12.8	XPRESS 8.4 (32.01.08)
KNITRO 11.0.1	BARON 18.5.8
MINOS 5.51	GUROBI 8.0.1:
LGO 2015-01-17	

**Fonte:** próprio autor.

### 5.4.1.1 Modelo binível PNL e modelo binível convexo – 2 barras

O sistema teste utilizado para 2 barras é o mesmo proposto por Almeida e Senna (2011), e considera 2 barras, 2 geradores, 1 barra de carga com demanda de 220 MW de potência ativa e 110 MVar de potência reativa, as magnitudes de tensão são as mesmas para as duas barras com máxima de 1,05 p.u. e mínima de 0,95 p.u., na Tabela 19 são apresentados os custos de geração em cada barra. Considere  $\alpha = 0$ ,  $1000 \leq \beta_1 \leq 1000$  e  $1000 \leq \beta_2 \leq 1250$ .

Tabela 19 – Coeficiente custo de geração

Barras	$\mathbf{a}$ (\$/pu <sup>2</sup> h)	$\mathbf{b}$ (\$/pu <sup>2</sup> h)
1	0	1000
2	0	1000

**Fonte:** próprio autor.

Na Tabela 20, são apresentados os resultados obtidos para o modelo binível PNL e o modelo binível convexo, onde  $\delta$  representa o ângulo,  $V$  a magnitude de tensão e  $\delta^0$  representa o ângulo da equação (116) do nível inferior. Para o modelo binível PNL, utiliza-se para resolver o primeiro nível o *solver* SNOPT e para resolver o segundo nível é utilizado o *solver* CPLEX, pois o problema (116) é um modelo linearizado DC, sendo que para todos os testes neste Capítulo o nível inferior é considerado dessa forma. No APÊNDICE 1, é apresentada a formulação matemática completa da equação (116) com o primal, dual e *Joint*<sup>10</sup>. Para o modelo binível convexo é utilizado o CPLEX nos dois níveis.

Tabela 20 – Variáveis ótimas obtidas

Barras	Modelo Binível PNL			Modelo Binível Convexo		
	$\delta$ (rad)	$V$	$\delta^0$ (rad)	$\delta$ (rad)	$V$	$\delta^0$ (rad)
1	0,00	1,02	0,00	0,00	1,05	0,00
2	-0,34	0,97	-0,10	-0,13	0,95	-0,10

**Fonte:** próprio autor

<sup>10</sup> Termo utilizado para definir o primal mais o dual no modelo matemático do segundo nível, necessário para a restrição da dualidade forte.

Nos dois modelos os valores obtidos para as variáveis ótimas ficaram próximos, mostrando a consistência e a validade do modelo binível convexo proposto.

Na Tabela 21, a potência ativa gerada  $Pg^0$ , considerando o modelo DC é a mesma para os dois modelos, as potências ativa e reativa quando considera o modelo CA, apresenta algumas diferenças, lembrando que, embora o problema seja o mesmo o comportamento dos dois modelos, podem ser diferentes, em função do modelo não linear ser multimodal, do comportamento Q -V do problema.

Tabela 21 – Dados de Geração

Barras	Modelo Binível PNL			Modelo Binível Convexo		
	$Pg$	$Qg$	$Pg^0$	$Pg$	$Qg$	$Pg^0$
1	0,77	0,45	0,51	0,68	0,22	0,51
2	1,53	1,21	1,70	1,53	0,51	1,70

**Fonte:** próprio autor

Na Tabela 22, os coeficientes de custos e os custos marginais são iguais para os dois modelos.

Tabela 22 – Coeficientes de custos e custo marginal

Barras	Modelo Binível PNL			Modelo Binível Convexo		
	$\alpha$ (rad)	$\beta$ (rad)	$\lambda^0$ (\$/pu h)	$\alpha$ (rad)	$\beta$ (rad)	$\lambda^0$ (\$/pu h)
1	0.00	1000,00	1000,00	0.00	1000,00	1000,00
2	0.00	1000,00	1019,69	0.00	1000,00	1019,69

**Fonte:** próprio autor

Na Tabela 23, os valores dos lucros  $\overset{0}{Pr}$  dos geradores sem considerar o modelo CA e o lucro  $Pr$  considerando o modelo CA são os mesmos para os dois modelos.

Tabela 23 – Lucros dos geradores e a função custo de oportunidade

Barras	Modelo Binível PNL			Modelo Binível Convexo		
	$\overset{0}{Pr}$ (\$/h)	$Pr$ (\$/h)	$O$	$\overset{0}{Pr}$ (\$/h)	$Pr$ (\$/h)	$O$
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
2	33,48	30,13	3,35	33,48	30,13	3,35

**Fonte:** próprio autor

Na Tabela 24, quando considerado a rede CA o modelo convexo proposto apresenta uma diferença do modelo binível PNL, mas a oportunidade mostrou o mesmo valor.

Tabela 24 – Custo de oportunidade, função custo com e sem a rede CA

	Modelo Binível PNL	Modelo Binível Convexo
Oportunidade	3,34764	3,34764
$f^*$	2212.93716	2204.84519
$f$	2205.62164	2205.62164

**Fonte:** próprio autor

Outros testes foram realizados, por exemplo, a combinação dos *solvers* SNOPT e XPRESS, IPOPT e CPLEX, KNITRO e CPLEX, obtendo os mesmos valores dos testes desta seção. Também é utilizado o *solver* de otimização global BARON para testar a convexidade do nível 2 onde obtive os mesmos valores do teste desta seção, mostrando que o segundo nível é convexo.

#### 5.4.1.2 Modelo binível PNL e modelo binível convexo – 8 barras

Nesta subseção, são apresentados os principais resultados obtidos para o sistema teste 8 barras, que é um sistema teste modificado do trabalho de (RAJPUT; PANDYA, 2016). Este sistema possui 3 geradores, 4 barras de cargas e 1 barra de passagem, os coeficientes de custos de geração  $\alpha$  são fixados para a barra 1 em  $\alpha = 0,03$ , barras 2 em  $\alpha = 0,04$  e barra 8 em  $\alpha = 0,045$ , os coeficientes de custos  $\beta$  estão entre os limites mínimos e máximos e são os seguintes: a barra 1 está entre  $500 \leq \beta \leq 800$ , barra 2 está entre  $500.5 \leq \beta \leq 800.5$  e barra 8 está entre  $600 \leq \beta \leq 800$ . A barra de referência é a barra 8\*, as magnitudes de tensão estão fixadas no valor mínimo 0,95 p.u. e valor máximo é 1,05 p.u.

O modelo binível PNL, utiliza para resolver o primeiro nível o *solver* KNITRO e no segundo nível é utilizado o *solver* CPLEX, no modelo binível convexo é utilizado no primeiro nível o *solver* XPRESS e no segundo nível o *solver* CPLEX, esta combinação de *solver* pode ser alterada, por exemplo, utilizar o XPRESS nos dois níveis ou o CPLEX nos dois nível. Nos dois modelos os valores das variáveis ótimas ficaram próximas,

mostrando a consistência e a validade do modelo binível convexo proposto, de acordo com a Tabela 25.

Tabela 25 – Variáveis ótimas obtidas

Barras	Modelo Binível PNL			Modelo Binível Convexo		
	$\delta$ (rad)	$V$	$\delta^0$ (rad)	$\delta$ (rad)	$V$	$\delta^0$ (rad)
1	-0,01	1,04	-0,01	-0,01	1,04	-0,01
2	-0,09	1,01	-0,07	-0,08	1,01	-0,07
3	-0,09	0,99	-0,09	-0,13	0,99	-0,09
4	-0,18	0,95	-0,16	-0,15	0,95	-0,16
5	-0,16	0,95	-0,15	-0,16	0,95	-0,15
6	-0,03	1,04	-0,03	-0,02	1,03	-0,03
7	-0,09	1,01	-0,08	-0,07	1,00	-0,08
8	0,00	1,05	0,00	0,00	1,05	0,00

**Fonte:** próprio autor

Na Tabela 26, são utilizados os mesmos solvers usados para obter os resultados da Tabela 25. Os valores de  $Pg^0$  são os mesmos para os dois modelos, os valores de  $Pg$  e  $Pg$  ficam próximos o que mostra a qualidade do modelo binível convexo proposto.

Tabela 26 – Dados de Geração

Barras	Modelo Binível PNL			Modelo Binível Convexo		
	$Pg$	$Qg$	$Pg^0$	$Pg$	$Qg$	$Pg^0$
1	1,80	1,07	2,00	1,80	1,18	2,00
2	2,70	2,39	3,00	2,70	2,39	3,00
8	2,50	1,40	2,00	2,50	1,46	2,00

**Fonte:** próprio autor

Na Tabela 27, os resultados apresentados são idênticos para os dois modelos.

Tabela 27 – Coeficientes de custos e Custo Marginal

Barras	Modelo Binível PNL			Modelo Binível Convexo		
	$\alpha$ (rad)	$\beta$ (rad)	$\lambda^0$ (\$/pu h)	$\alpha$ (rad)	$\beta$ (rad)	$\lambda^0$ (\$/pu h)
1	0,03	500,00	600,09	0,03	500,00	600,09
2	0,04	500,50	600,09	0,04	500,50	600,09
8	0,04	600,00	600,09	0,04	600,00	600,09

**Fonte:** próprio autor

Na Tabela 28, os valores obtidos ficaram próximos para os dois modelos, apenas na barra 8 o custo de oportunidade ficou ligeiramente diferente.

Tabela 28 – Lucros dos geradores e a função custo de oportunidade

Barras	Modelo Binível PNL			Modelo Binível Convexo		
	$\overset{\circ}{Pr}$ (\$/h)	$Pr$ (\$/h)	$O$	$\overset{\circ}{Pr}$ (\$/h)	$Pr$ (\$/h)	$O$
1	200,06	180,06	20,00	200,12	180,11	20,01
2	298,41	268,60	29,81	298,59	268,75	29,84
8	-0,00	-0,06	0,06	0,09	0,08	0,01

**Fonte:** próprio autor

Na Tabela 29, a função oportunidade ficou próximo para os dois modelos, mostrando que o modelo convexo está trabalhando corretamente dentro dos padrões estabelecidos.

Tabela 29 – Custo de oportunidade, função custo com e sem a rede CA

	Modelo Binível PNL	Modelo Binível Convexo
Oportunidade	49,86005	49,85412
$f^*$	3751,68502	3751,68534
$f$	3701,83000	3701,83000

**Fonte:** próprio autor

Na Tabela 30, são apresentados testes com diversos *solvers* para o problema iterativo binível PNL utilizados no primeiro nível e no segundo foi repetido o *solver* CPLEX. Os valores obtidos são idênticos para os *solvers* testados, outra observação é quanto aos limites custos marginais  $\lambda^0$ , a princípio, essa variável é irrestrita teoricamente e seus limites podem ser encontrados usando análise de sensibilidade. Neste trabalho são utilizados os resultados do modelo não linear para fixar os limitantes máximos  $\overline{\lambda^0}$  e mínimos  $\underline{\lambda^0}$ . Este procedimento é usado no restante deste capítulo.

Tabela 30 – Custo de oportunidade, função com e sem rede CA modelo PNL

	Oportunidade	$f^*$	$f$	$\underline{\lambda^0}$	$\overline{\lambda^0}$
SNOPT	49,86005	3751,68503	3701,83000	600,09	600,09
IPOPT	49,86005	3751,68500	3701,83000	600,09	600,09
MINOS	49,86005	3751,68502	3701,83000	600,09	600,09
KNITRO	49,86005	3751,68502	3701,83000	600,09	600,09
LGO	49,86005	3751,68502	3701,83000	600,09	600,09
CONOPT	49,86005	3751,68503	3701,83000	600,09	600,09

**Fonte:** próprio autor

### 5.4.1.3 Modelo binível PNL e modelo binível convexo – 14 barras

Nesta subseção, apresentam os resultados obtidos para o sistema teste 14 barras IEEE, o mesmo utilizado no Capítulo 4, e são acrescentados alguns parâmetros necessários, tais como, a potência ativa máxima gerada (Pmax) e potência ativa mínima gerada (Pmin) para os cinco geradores. Para os limites mínimos e máximos de  $(\alpha, \beta)$  são adotados os seguintes critérios, ou seja, os valores de  $(\alpha, \beta)$  fornecidos pelo *Matpower* são fixados como limites mínimos e os valores máximos ficam estabelecidos como o dobro do valor mínimo. Na Tabela 31, são apresentados os parâmetros usados.

Tabela 31 – Dados do sistema de 14 barras

Gerador	<b>Pmin</b>	<b>Pmax</b>	<b><math>\underline{\alpha}</math></b>	<b><math>\bar{\alpha}</math></b>	<b><math>\underline{\beta}</math></b>	<b><math>\bar{\beta}</math></b>
1*	0	332,4	0,0430293	0,0860586	20	40
2	0	140	0,25	0,5	20	40
3	0	100	0,01	0,02	40	80
6	0	100	0,01	0,02	40	80
8	0	100	0,01	0,02	40	80

**Fonte:** próprio autor

Na Tabela 32, são apresentadas as magnitudes de tensão, custos marginais e os coeficientes de custos entre os modelos PNL e convexo. Neste teste, para o modelo binível PNL no primeiro nível é utilizado o *solver Lipschitz-continuous Global Optimizer (LGO)* e no segundo nível é utilizado o *solver CPLEX*. Como o objetivo desta tese é apresentar modelos convexos o LGO atende a este propósito para este teste de 14 barras. O LGO não é um *solver* de otimização convexa, porém sua arquitetura é capaz de determinar soluções de alta qualidade para problemas de otimização global que têm (muitas possíveis) soluções ótimas locais. Isto ocorre, porque o LGO faz somente hipóteses com relação aos limitantes e diferenciabilidade. Para o modelo binível convexo é utilizado o CPLEX para os dois níveis. Os valores ficaram próximos entre os dois modelos, a diferença maior ficou em  $\beta_i$  nas barras 3,6 e 8. Esse fato, é devido que o problema binível convexo é um modelo relaxado do problema binível PNL, sendo que à medida que o

sistema cresce aumentam-se as dificuldades de encontrar uma solução ótima global com ajustes das variáveis reativas que estejam de acordo com o modelo convexo que possui solução única.

Tabela 32 – Magnitude de tensão, custo marginal e coeficientes de custos

Gera dor	Modelo Binível PNL				Modelo Binível Convexo			
	$V_i$	$\lambda_i^0$	$\alpha_i$	$\beta_i$	$V_i$	$\lambda_i^0$	$\alpha_i$	$\beta_i$
1*	1,05	20,06	0,04	20,00	1,060	20,06	0,04	20,00
2	1,04	20,85	0,25	20,00	1,049	20,85	0,25	20,00
3	0,99	22,63	0,01	40,79	1,017	22,63	0,01	59,94
6	1,01	21,97	0,01	41,97	1,054	21,97	0,01	59,94
8	1,06	22,42	0,01	40,12	1,060	22,42	0,01	59,94

**Fonte:** próprio autor

Na Tabela 33, os dados de geração para os dois modelos ficaram próximos, a pequena diferença entre os modelos está no fato que o modelo binível convexo é um modelo relaxado que obteve uma solução ótima. Outra característica do modelo convexo está no fato de utilizar as partições de *McCormick*, sendo que para este teste são utilizadas 1000 partições, no segundo nível são utilizadas para linearizar a potência de geração 500 *breakpoints* e para linearizar o ângulo são utilizados 1000 *breakpoints* pois o segundo nível é linearizado. À medida que o sistema cresce é importante ressaltar que para obter uma solução ótima é desejável, mas o processo vai tornando-se caro comparativamente. Para obter os resultados da Tabela 32, o *solver* utilizado é LGO, o mesmo teste foi realizado usando o KNITRO obtendo resultados semelhantes, e os apresentados nas Tabela 33, 34 e 35 são obtidos utilizando o KNITRO.

Tabela 33 – Dados de Geração

Barras	Modelo Binível PNL			Modelo Binível Convexo		
	$Pg$	$Qg$	$Pg^0$	$Pg$	$Qg$	$Pg^0$
1	143,107	0,000	1,31	142,876	0,000	1,31
2	126,000	27,946	1,40	126,000	28,158	1,40
3	0,000	30,916	0,000	0,000	31,612	0,000
6	0,000	14,775	0,000	0,000	14,792	0,000
8	0,000	15,719	0,000	0,000	15,390	0,000
Total	269,11	89,36	-	268,88	89,95	-

**Fonte:** próprio autor



Na Tabela 34, as oportunidades estão nas barras 1 e 2, entre os modelos, observa-se que os resultados do modelo convexo apresenta um resultado um pouco diferente do modelo PNL.

Tabela 34 – Lucros dos geradores e a função custo de oportunidade

Barras	Modelo Binível PNL			Modelo Binível Convexo		
	$\overset{\circ}{Pr}$ (\$/h)	$Pr$ (\$/h)	$O$	$\overset{\circ}{Pr}$ (\$/h)	$Pr$ (\$/h)	$O$
1	0,00	-0,01	0,01	0,04	0,04	0,00
2	0,70	0,68	0,03	0,95	0,88	0,07
3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
6	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
8	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

**Fonte:** próprio autor

Na Tabela 35, o modelo binível convexo apresentam algumas diferenças do modelo binível PNL, essa diferença é percebida também na função  $f^*$  quando considera o modelo CA da rede.

Tabela 35 – Custo de oportunidade, função custo com e sem a rede CA

	Modelo Binível PNL	Modelo Binível Convexo
Oportunidade	0.03346	0.07306
$f^*$	54.06392	54.01761
$f$	54.55372	54.55372

**Fonte:** próprio autor

#### 5.4.1.4 Modelo binível PNL e modelo binível convexo – 30 barras

Nesta subseção, são apresentados os resultados obtidos com o sistema teste IEEE 30 barras, que é o mesmo utilizado na seção 4.3.2. Os testes para o modelo iterativo binível PNL são realizados com diversos *solvers* e são apresentados os principais resultados obtidos. O *solver* utilizado para o modelo iterativo convexo são CPLEX, GUROBI e XPRESS.

Na Tabela 36, são apresentados os resultados obtidos com os testes utilizando diversos *solvers* para simular o modelo iterativo binível PNL e o modelo iterativo binível

convexo. Os resultados são quase idênticos, o tempo de processamento são satisfatórios levando em conta que o modelo convexo utiliza as partições de *McCormick*.

Tabela 36 – Testes dos modelos iterativos PNL e convexo

Nível 1	Nível 2	$f^*$	$f$	$O$	Proces.	<i>McCormick</i>
SNOPT	CPLEX	0,89267	0,73730	0,26942	0,50 s	–
MINOS	CPLEX	0,89267	0,73730	0,26942	0,65 s	–
KNITRO	CPLEX	0,89267	0,73730	0,26942	0,53 s	–
IPOPT	CPLEX	0,89267	0,73730	0,26942	0,77 s	–
CPLEX	CPLEX	0,88490	0,73730	0,27051	2,31 s	1000
GUROBI	GUROBI	0,88968	0,73730	0,27051	6,45 s	1000
XPRESS	XPRESS	0,88599	0,73730	0,27051	2,71 s	1000

**Fonte:** próprio autor

Na Tabela 37, são apresentados os resultados de geração total de potência ativa e reativa quando considerado o modelo CA no primeiro nível e o modelo DC no segundo nível para os dois modelos propostos nesta seção. A primeira consideração a ser feita é que os *solvers* de otimização local apresentam resultados idênticos entre eles para o modelo iterativo binível PNL, sendo esses resultados são ótimos locais de boa qualidade. Para o modelo iterativo convexo os resultados ficaram próximos para a geração de potência ativa, mas a reativa apresenta resultados diferentes dos *solvers* de otimização local e diverge entre os *solvers* de otimização global. Uma consideração a ser feita é que para todos os testes são utilizadas as configurações “padrão” dos *solvers*. Para os modelos convexos esse fato é afetado devido às diferentes heurísticas utilizadas internamente nos *solvers*. Na subseção 4.3.2 foi apresentado os resultados do sistema teste de 30 barras, que são os mesmos envelopes utilizados nesta seção, sendo que nesta seção para o modelo cônico não é utilizado no processo iterativo que melhore os limitantes de  $(c, s)$ , Desta forma, pode-se afirmar que o ótimo global encontrado nesta seção é o ótimo para a relaxação proposta.

Tabela 37 – Geração total considerando o modelo CA e o modelo DC

Nível 1	Nível 2	P(MW)	Q(MVAr)	$Pg^0$
SNOPT	CPLEX	195,90	98,51	203
MINOS	CPLEX	195,90	98,51	203
KNITRO	CPLEX	195,90	98,51	203
IPOPT	CPLEX	195,90	98,51	203
CPLEX	CPLEX	195,46	121,52	203
GUROBI	GUROBI	195,73	146,63	203
XPRESS	XPRESS	195,52	141,37	203

**Fonte:** próprio autor

#### 5.4.2 Problema de otimização unível

Nesta subseção, são apresentados os testes e resultados do problema de otimização unível. O modelo iterativo convexo apresentado na seção 5.4.1, como um problema de competição é apresentado em apenas um nível, sendo que a vantagem desta técnica em comparação ao problema de otimização binível está no fato que agora os competidores, neste caso, os geradores e o mercado comprador não precisam esconder suas apostas (ofertas), as oportunidades ocorrem baseadas na necessidade do mercado e nas ofertas.

O modelo deixa de ser iterativo para ser resolvido uma única vez, da seguinte forma, o segundo nível é resolvido via dualidade forte e incorporado ao primeiro nível como uma nova restrição. Devido a esse acoplamento com a nova restrição os parâmetros  $(\lambda^0, Pg^0)$  que no modelo binível são fornecidos pelo nível inferior ao nível superior agora são variáveis bilineares no modelo unível, ou seja  $\lambda^0 Pg^0$ . Este fato, traz uma dificuldade adicional ao problema, porque o FPO e as variáveis bilineares são *NP-hard*, e a dificuldade é aumentada devido ao fato que manter a dualidade forte é uma tarefa desafiadora.

O modelo de otimização unível é apresentado de duas maneiras, a primeira consiste em usar a teoria da dualidade como uma nova restrição, teoricamente, esta nova restrição deve ser totalmente convexa. Antes para fins de comparações entre o modelo é apresentado um modelo unível totalmente PNL e não convexo, onde é utilizado o *joint*

do APÊNDICE 1. O segundo modelo apresentado totalmente convexo. Para isso é utilizada a formulação cônica apresentada no capítulo 4, bem como são utilizados os envelopes de *McCormick*. Para uma melhor compreensão deste trabalho do modelo unível convexo considere inicialmente equação (120) que aparece no APÊNDICE 1 e é reapresentada a seguir:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|} \hline \text{Bilinear Não} \\ \hline \text{Convexo} \\ \hline \end{array} & & \begin{array}{|c|} \hline \text{Linear} \\ \hline \text{Convexo} \\ \hline \end{array} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \sum_{i \in \Omega_B} \frac{1}{2} (\alpha_{0i} P g_i^{02} + \beta_{0i} P g_i^0) - \sum_{i \in \Omega_B} \left( P d_i \pi_i + P g_i^{0Max} \bar{\kappa}_i - P g_i^{0Min} \underline{\kappa}_i + \sum_{y \in Y} \Delta_i^P \bar{\phi}_{y,i} \right) & & \\
 + \sum_{ij \in \Omega_L} \left( f_{ij}^{0Max} \bar{v}_{ij} + f_{ij}^{0Max} \underline{l}_{ij} + \bar{\delta}_i^0 \bar{\beta}_{ij} - \underline{\delta}_i^0 \underline{\beta}_{ij} + \sum_{y_1 \in Y_1} \Delta_{ij}^\delta \bar{w}_{y_1,i} \right) = 0 & & \\
 \underbrace{\hspace{15em}} & & \\
 \begin{array}{|c|} \hline \text{Linear} \\ \hline \text{Convexo} \\ \hline \end{array} & & 
 \end{array}$$

Duas considerações importantes sobre a nova restrição do problema unível proposto, a primeira está no fato que o uso da dualidade forte possibilita o problema binível ser apresentado como unível, mas manter essa dualidade forte é uma tarefa desafiadora. Outro fato é que agora o modelo primal DC que foi utilizado no problema de otimização binível na seção 5.4.1 apresenta variáveis bilineares, devido a dualidade forte utilizada. Ou seja, agora nesta seção  $(\alpha, \beta)$  tornam-se variáveis. Por esse motivo, a partir de agora são estabelecidos limites para as variáveis  $(\alpha, \beta)$ , os limites são arbitrados, podendo ser utilizados outros. Neste trabalho, os limites são fixados da seguinte maneira,  $\underline{\alpha} \leq \alpha \leq \bar{\alpha}$  e  $\underline{\beta} \leq \beta \leq \bar{\beta}$  em que  $\bar{\alpha} = 2\underline{\alpha}$  e  $\bar{\beta} = 2\underline{\beta}$ . Uma consideração a ser feita sobre os limites mínimos e máximos é que eles representam os preços que o operador está disposto a pagar, mas poderiam ser outros, em todos os testes foi adotado esse padrão. Para contornar o problema com variáveis bilineares que aparecem no modelo foi utilizado os envelopes de *McCormick* proposto por (CASTRO, 2015).

Outra dificuldade a ser destacada é o custo marginal (multiplicador de Lagrange)  $\lambda_0$ , que teoricamente é uma variável irrestrita, mas  $\lambda_0$  apresenta alta sensibilidade. Uma possibilidade seria o uso de análise de sensibilidade associado às restrições de igualdade, neste trabalho utilizam-se os resultados obtidos na seção 5.4.1 das variáveis  $\lambda_i^0$  para fixá-las como parâmetros em seus valores máximos e mínimos,  $\underline{\lambda}_i^0 \leq \lambda_i^0 \leq \overline{\lambda}_i^0$ . Escolhas impróprias destes multiplicadores podem levar à infactibilidade do problema ou a resultados incorretos. Para os testes nas próximas seções são utilizados os mesmos sistemas testes propostos na seção 5.4.1.

#### 5.4.2.1 Modelo unível PNL e modelo unível convexo – 2 barras

Na Tabela 38, são apresentados os primeiros resultados para os testes com o sistema de duas barras. Apesar da solução modelo com este sistema ser aparentemente simples alguns *solvers* considerados bons tiveram dificuldades em resolver o modelo unível PNL, devido a sua complexidade e ser apresentado como um modelo totalmente não linear e não convexo. Os testes com duas barras para o modelo unível PNL foram infactíveis com os *solvers* IPOPT, MINOS, SNOPT e CONOPT. O modelo PNL é resolvido usando o KNITRO e para o modelo convexo utiliza-se o CPLEX. Os valores obtidos dos modelos estão próximos a maior diferença está no valor do ângulo  $\delta$ , comparando também os resultados do modelo iterativo binível da Tabela 20 com a Tabela 38, observa-se que os resultados ficaram próximos.

Tabela 38 – Variáveis ótimas obtidas

Barras	Modelo Unível PNL			Modelo Unível Convexo		
	$\delta$ (rad)	$V$	$\delta^0$ (rad)	$\delta$ (rad)	$V$	$\delta^0$ (rad)
1	0,00	1,01	0,00	0,00	1,03	0,00
2	-0,13	0,99	-0,10	-0,34	0,97	-0,10

**Fonte:** próprio autor

Na Tabela 39, a diferença maior ficou no  $Qg$  entre os dois modelos, o resultado do modelo unível convexo está mais próximo dos resultados dos modelos iterativos. Uma

consideração a ser feita até aqui, é o fato que entre os quatro modelos propostos o que apresentou maior grau de incerteza e pouca confiabilidade é o modelo unível PNL.

Tabela 39 – Dados de Geração

Barras	Modelo Unível PNL			Modelo Unível Convexo		
	$Pg$	$Qg$	$Pg^0$	$Pg$	$Qg$	$Pg^0$
1	0,68	-0,16	0,51	0,79	0,58	0,51
2	1,53	0,85	1,70	1,53	1,23	1,70

**Fonte:** próprio autor

Na Tabela 40, os coeficientes de custos apresentaram resultados quase idênticos.

Tabela 40 – Coeficientes de custos e custo marginal

Barras	Modelo Unível PNL			Modelo Unível Convexo		
	$\alpha$ (rad)	$\beta$ (rad)	$\lambda^0$ (\$/pu h)	$\alpha$ (rad)	$\beta$ (rad)	$\lambda^0$ (\$/pu h)
1	0.00	1000,00	1000,00	0.00	1000,00	1000,00
2	0.00	1000,00	1020,31	0.00	1000,00	1019,10

**Fonte:** próprio autor

Na Tabela 41, os resultados obtidos entre os dois modelos mostraram pequenas diferenças, mas o resultado do modelo iterativo convexo foi mais próximo do modelo unível convexo.

Tabela 41 – Lucros dos geradores e a função custo de oportunidade

Barras	Modelo Unível PNL			Modelo Unível Convexo		
	$\overset{\circ}{Pr}$ (\$/h)	$Pr$ (\$/h)	$O$	$\overset{\circ}{Pr}$ (\$/h)	$Pr$ (\$/h)	$O$
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
2	34,54	31,08	3,45	32,46	29,21	3,25

**Fonte:** próprio autor

Na Tabela 42, são apresentadas as funções de oportunidade em que o modelo convexo apresenta melhor precisão. Uma pequena observação para mostrar como este modelo com apenas duas barras torna-se trabalhoso. Os parâmetros utilizados são apresentados a seguir:

Parâmetros	Números máximos
Partições de McCormick	500
Linearização da potência do gerador	400
Linearização da barra ângulo	1000

Tabela 42 – Custo de oportunidade, função custo com e sem a rede CA

	Modelo Unível PNL	Modelo Unível Convexo
Oportunidade	3,45427	3,25874141
$f^*$	2209.19555	2321.38947
$f$	2205.6	2205.07064

**Fonte:** próprio autor

#### 5.4.2.2 Modelo unível PNL e modelo unível convexo – 8 barras

Os principais resultados obtidos para o sistema teste de 8 barras, são apresentados a seguir, em que o sistema teste utilizado é o mesmo da subseção 5.4.1.2 para o problema iterativo binível. Na Tabela 43 e Tabela 44, são apresentados os principais resultados para o modelo unível PNL o *solver* utilizado é o KNITRO onde o tempo de processamento é de 2,26s. Na Tabelas 45 e 46 são apresentados os principais resultados do modelo unível convexo, o *solver* utilizado é o GUROBI com tempo de processamento de 3,71s e com  $gap = 0,001\%$ .

Na Tabela 43, são apresentadas as variáveis ótimas do problema unível PNL. Os valores são coerentes com os resultados dos modelos iterativos biníveis e com a Tabela 45 do modelo unível convexo.

Tabela 43 – Variáveis ótimas – modelo PNL

Barras	$\delta$ (rad)	$V$	$Pg$	$Qg$	$Pg^0$	$\delta^0$ (rad)
1	-0,01	1,04	1,80	1,16	2,00	-0,01
2	-0,09	1,01	2,70	2,38	3,00	-0,07
3	-0,09	0,99	0,00	0,00	0,00	-0,09
4	-0,18	0,95	0,00	0,00	0,00	-0,16
5	-0,16	0,95	0,00	0,00	0,00	-0,15
6	-0,03	1,03	0,00	0,00	0,00	-0,03
7	-0,09	1,01	0,00	0,00	0,00	-0,08
8	0,00	1,05	2,50	1,32	2,00	0,00

**Fonte:** próprio autor

Na Tabela 44, apresentam-se resultados para o modelo unível PNL que se demonstram coerentes, não ficando distantes dos modelos iterativos biníveis, bem como do modelo unível convexo da Tabela 46.

Tabela 44 – Custos de oportunidades e preços marginais

Barras	$\alpha$ (rad)	$\beta$ (rad)	$\lambda^0$ (\$/pu h)	$\overset{\circ}{Pr}$ (\$/h)	$Pr$ (\$/h)	$O$
1	0,030	500,000	600,176	200,167	180,268	19,899
2	0,040	500,500	600,176	298,736	268,979	29,757
3	0,000	0,000	600,176	0,000	0,000	0,000
4	0,000	0,000	600,176	0,000	0,000	0,000
5	0,000	0,000	600,176	0,000	0,000	0,000
6	0,000	0,000	600,176	0,000	0,000	0,000
7	0,000	0,000	600,176	0,000	0,000	0,000
8	0,045	600,000	600,176	-0,001	0,299	-0,300

**Fonte:** próprio autor

Na Tabela 45, são apresentados os principais resultados do modelo unível convexo, como o modelo é totalmente convexo os resultados são satisfatórios para este teste.

Tabela 45 – Variáveis ótimas – modelo convexo

Barras	$\delta$ (rad)	$V$	$Pg$	$Qg$	$Pg^0$	$\delta^0$ (rad)
1	-0,06	1,04	1,80	1,22	2,00	-0,01
2	-0,32	1,01	2,70	2,40	3,00	-0,07
3	-0,33	0,99	0,00	0,00	0,00	-0,09
4	-0,53	0,95	0,00	0,00	0,00	-0,16
5	-0,54	0,95	0,00	0,00	0,00	-0,15
6	-0,07	1,03	0,00	0,00	0,00	-0,03
7	-0,21	1,01	0,00	0,00	0,00	-0,08
8	0,00	1,05	2,50	1,76	2,00	0,00

**Fonte:** próprio autor

Na Tabela 46, os custos de oportunidade do modelo convexo fiaram próximos para os modelos iterativos biníveis e o modelo unível PNL. As diferenças são bem pequenas, mas considerando que sistemas reais os números de geradores são muito maiores, e a quantidade de potência ativa necessária para manter o sistema funcionando é alta, conseguir cálculos precisos de custo de oportunidade pode significar lucros bem expressivos. Pelo menos, em tese, o modelo convexo garante o ótimo global, possibilitando



melhores escolhas. Mas, alguns esforços de implementações são necessários, veja que para este modelo convexo foram necessárias 1000 partições de *McCormick*, 400 linearizações da potência dos geradores e 1000 linearizações das barras ângulos.

Tabela 46 – Custos de oportunidades e preços marginais

Barras	$\alpha$	$\beta$	$\lambda^0$ (\$/ h)	$\overset{\circ}{Pr}$ (\$/ h)	$Pr$ (\$/ h)	$O$
1	0,03	500,00	600,09	200,12	180,11	20,01
2	0,04	500,50	600,09	298,59	268,75	29,84
3	0,00	0,00	600,09	0,00	0,00	0,00
4	0,00	0,00	600,09	0,00	0,00	0,00
5	0,00	0,00	600,09	0,00	0,00	0,00
6	0,00	0,00	600,09	0,00	0,00	0,00
7	0,00	0,00	600,09	0,00	0,00	0,00
8	0,04	600,00	600,09	0,09	0,09	0,01

**Fonte:** próprio autor

Na Tabela 47, são comparados alguns resultados dos quatro modelos propostos, e os resultados obtidos até aqui são satisfatórios. Os valores de  $\lambda_i^0$  ficaram fixos para cada um dos testes:

Tabela 47 – Comparando os quatro modelos propostos

Modelos	$O$	$f^*$	$f$	$\lambda^0$	$\overline{\lambda^0}$
Binível não convexo	49,86005	3751,68502	3701,83000	600,09	600,09
Binível convexo	49,85412	3751,68534	3701,83000	600,09	600,09
Unível não convexo	49,35673	3751,68502	3702,06523	600,17	600,17
Unível convexo	49,35673	3751,68503	3701,83000	600,09	600,09

**Fonte:** próprio autor

#### 5.4.2.3 Modelo unível PNL e modelo unível convexo – 14 barras

Na Tabela 48, são apresentados os principais resultados obtidos para o sistema testes IEEE 14 barras, onde os dados dos parâmetros são os mesmos da subseção 4.3.1. Como ressaltados anteriormente nesta seção, o modelo unível PNL é o menos eficiente e confiável, o custo de oportunidade ficou diferente do modelo unível convexo e dos testes com os modelos iterativos biníveis. O modelo unível PNL é apresentado apenas para

compará-lo com o modelo unível convexo. Uma observação a fazer até este ponto do trabalho é que os valores do modelo unível convexo que usa dualidade forte, ficam sempre bem próximos do modelo iterativo PNL, como proposto por Almeida e Senna (2011). Uma hipótese que pode ser levantada é que o modelo unível convexo é o melhor entre os quatro modelos propostos, pois, mesmo sendo convexo o modelo iterativo teoricamente é difícil algumas garantir o ótimo local. Na Tabela 48, o *solver* de otimização global XPRESS é utilizado, sendo que, o valor da oportunidade fica próximo dos valores apresentados na seção 5.4.1.3 para o sistema de 14 barras.

Tabela 48 – Testes dos modelos unível PNL e unível convexo

Modelo	Nível 1	$f^*$	$f$	$O$
PNL	SNOPT	54.37264	54.44155	-0.312
PNL	MINOS	54.41766	54.44155	-0.312
PNL	KNITRO	54.41763	54.44165	-0.312
PNL	IPOPT	54.41765	54.44018	-0.317
CONVEXO	XPRESS	54.12169	54.29195	0,0367474

**Fonte:** próprio autor

Na Tabela 49, são rerepresentados dados da Tabela 34 seção 5.4.1.3 para fins de comparações com os modelos unível PNL e o modelo unível convexo. O modelo unível PNL neste caso é testado com *solver* IPOPT, e para o modelo unível convexo é utilizado o *solver* XPRESS. Os dois modelos convexos apresentam resultados satisfatórios. Mesmo para um sistema pequeno problemas de competições binível é uma tarefa um tanto desafiadora.

Tabela 49 – Lucros dos geradores e a função custo de oportunidade

	Modelo Binível PNL			Modelo Binível Convexo			Modelo Unível PNL			Modelo Unível Convexo		
	$\overset{\circ}{Pr}$	$Pr$	$O$	$\overset{\circ}{Pr}$	$Pr$	$O$	$\overset{\circ}{Pr}$	$Pr$	$O$	$\overset{\circ}{Pr}$	$Pr$	$O$
1	0,00	-0,01	0,01	0,04	0,04	0,00	-0,01	0,109	-0,11	0,04	0,04	0,00
2	0,70	0,68	0,03	0,95	0,88	0,07	0,63	0,837	-0,204	0,60	0,56	0,04
3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-0,01	0,00	-0,01	0,00	0,00	0,00
6	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-0,01	0,00	-0,01	0,00	0,00	0,00
8	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-0,01	0,00	-0,01	0,00	0,00	0,00

**Fonte:** próprio autor

Na Tabela 50, são apresentados os custos marginais  $\lambda_i^0$  e potência gerada marginal  $Pg_i^0$ . No modelo iterativo,  $\lambda_i^0, Pg_i^0$  são parâmetros gerados no segundo nível e enviados

para o primeiro nível. No modelo unível, esses parâmetros tornam-se variáveis com uso da dualidade forte. Para o modelo unível PNL são apresentados os testes realizados com os *solvers* de otimalidade local IPOPT, KNITRO e MINOS, para o modelo unível convexo é o utilizado o *solver* XPRESS. Os resultados estão dentro de tolerâncias aceitáveis.

Tabela 50 – Custo marginal e potência gerada marginal

	IPOPT		KNITRO		MINOS		XPRESS	
	$\lambda^0$	$Pg^0$	$\lambda^0$	$Pg^0$	$\lambda^0$	$Pg^0$	$\lambda^0$	$Pg^0$
1	20,107	1,66	20,107	1,65	20,107	1,65	20,06	1,30
2	20,822	1,05	20,818	1,06	20,820	1,06	20,60	1,40
3	22,703	0,00	22,699	0,00	22,701	0,00	22,48	0,00
6	21,868	0,00	21,863	0,00	21,865	0,00	21,69	0,00
8	22,221	0,00	22,216	0,00	22,218	0,00	22,03	0,00

**Fonte:** próprio autor

#### 5.4.2.4 Modelo unível PNL e modelo unível convexo – 30 barras

Os principais resultados obtidos usando os modelos unível PNL e convexo, são apresentados e o sistema utilizado nesta seção é o IEEE 30 barras, o mesmo utilizado nos testes do modelo cônico proposto na subseção 4.3.2, com o mesmo número de geradores, mesmas cargas, ou seja os dados são idênticos. Para o modelo de 30 barras o modelo unível convexo apresenta resultados satisfatórios mostrando a consistência do modelo proposto convexo. Para o modelo unível PNL é utilizado o *solver* SNOPT e o modelo unível convexo utiliza o *solver* XPRESS.

Na Tabela 51, são apresentados o lucro  $Pr$  de geração considerando a rede CA e o lucro  $\overset{0}{Pr}$  quando é considerado apenas o despacho de potência ativa, ou seja o modelo DC, onde  $O$  representa a oportunidade de cada gerador. A oportunidade total do modelo unível PNL e modelo unível convexo, considera-se que o PNL é um modelo totalmente não linear e não convexo. O modelo unível convexo apresenta resultados próximos aos dos modelos biníveis para 30 barras.

Tabela 51 – Lucros dos geradores e a função custo de oportunidade

	Modelo Unível PNL			Modelo Unível Convexo		
	$\overset{\circ}{Pr}$	$Pr$	$O$	$\overset{\circ}{Pr}$	$Pr$	$O$
1	0,000	0,000	0,000	-0,00	0,00	-0,00
2	-0,001	0,000	-0,001	-0,00	-0,00	0,00
5	2,259	2,037	0,222	2,28	2,05	0,23
8	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00	0,00
11	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00	0,00
13	0,373	0,336	0,037	0,37	0,34	0,04
Total	–	–	0,258	–	–	0,264

**Fonte:** próprio autor

Na Tabela 52, são apresentados os coeficientes de custos ( $\alpha, \beta$ ) e o custo marginal  $\lambda^0$  em cada barra, uma observação a fazer sobre estes valores está no seguinte fato, no problema binível esses valores são parâmetros trocados entre os níveis, já para o problema unível esses parâmetros tornam-se variáveis, devido a dualidade forte utilizada. O valor que apresenta diferença significativa é  $\lambda^0$ , esse valor é o custo marginal que influencia significativamente o custo de oportunidade.

Tabela 52 – Coeficientes de custos e custo marginal

	Modelo Unível PNL			Modelo Unível Convexo		
	$\alpha$	$\beta$	$\lambda^0$	$\alpha$	$\beta$	$\lambda^0$
1	2,68	2,68	2,68	2,68	2,68	1,76
2	1,75	1,75	1,75	1,75	1,75	1,75
5	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,63
8	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,82
11	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,81
13	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,76

**Fonte:** próprio autor

Na Tabela 53, são apresentados os dados de geração de potência ativa e reativa bem com as magnitudes de tensão e ângulo em cada. A geração de potência reativa é o dado que apresenta maior diferença. Esse fato, é importante destacar, devido que essa componente afeta diretamente o custo de oportunidade. O modelo convexo unível apresenta valores próximos ao problema binível.

Tabela 53 – Dados de geração

	Modelo Unível PNL				Modelo Unível Convexo			
	Tensão p.u.	Ângulo grau	P(MW)	Q(MVAr)	Tensão p.u.	Ângulo grau	P(MW)	Q(MVAr)
1	1,050	0,000*	0,000	53,677	1,023	0,000*	0,062	24,401
2	1,030	0,808	25,624	-13,906	1,021	-2,113	28,716	56,551
5	1,044	6,181	126,000	0,000	1,019	2,609	126,00	0,000
8	0,990	-1,525	0,000	0,000	0,952	-2,699	0,000	0,000
11	1,037	-3,354	0,000	0,000	0,979	-4,400	0,000	0,000
13	1,053	1,177	45,000	4,153	1,044	-1,195	45,000	55,370

**Fonte:** próprio autor

Na Tabela 54, são apresentados os valores quando considera a rede CA  $f^*$  e quando não considera  $f$  e o custo de oportunidade total  $O$ . A oportunidade apresenta valores próximos aos modelos biníveis, já os valores de  $f^*$  e  $f$  apresentam valores diferentes.

Tabela 54 – Custo de oportunidade total e função com e sem a rede CA

Nível 1	$f^*$	$f$	$O$
SNOPT	0,90533	0,64228	0,264391
XPRESS	0,96126	0,63784	0,264391

**Fonte:** próprio autor

## 6 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

### 6.1 CONCLUSÕES

Neste trabalho, é proposta a resolução do problema de FPO para redes malhadas como um modelo convexo. Como o problema de FPO é um problema não linear e não convexo classificado como *NP-hard*, abordá-lo como um modelo convexo é desejável, pois permite a utilização de *solvers* de otimalidade global, afim de obter o ótimo global. O que torna o FPO um problema de difícil solução são as equações de balanço de potência que apresentam algumas características especiais, tais como, a presença de senos e cossenos em sua estrutura, o produto de magnitude de tensões que são termos bilineares e a presença de duas restrições de igualdade. Quando se trabalha com problema de otimização convexa a restrição de igualdade somente é permitida quando a função é linear.

No problema de FPO apresentado de forma equivalente, como um problema cônico de segunda ordem, elimina-se de forma satisfatória boa parte dos obstáculos que tornam o FPO *NP-hard*. Como uma penalidade de usar o modelo equivalente cônico, surge uma nova restrição de igualdade com termo trigonométrico. Esse problema é contornado utilizando o conceito de envelopes, em que, o termo não linear e não convexo é aproximado por quatro planos no espaço. Assim, o modelo proposto é resolvido utilizando *solvers* comerciais com resultados satisfatórios para os sistemas testes da literatura, neste caso, IEEE 14,30, 57 e 118 barras.

A não convexidade do problema de FPO removida do modelo torna possível utilizá-lo em diversos problemas do sistema elétrico de potência. A opção deste trabalho em utilizar o modelo convexo de FPO proposto em um problema de competição binível se justifica, pois, problemas deste tipo também são *NP-hard*. Quando o problema

proposto binível é um modelo convexo os resultados obtidos são confiáveis devido ao fato de atender todas as condições matemáticas necessárias e suficientes KKT.

Os resultados obtidos com os sistemas testes de 2, 8, 14 e 30 barras da literatura para os quatro modelos propostos para o problema de competição via programação binível no despacho de potência ativa e reativa são satisfatórios mesmo que os sistemas testes sejam ainda pequenos. A justificativa se dá pelo fato que, este trabalho lidou com três problemas *NP-hard*, a saber, FPO – CA, programação binível e variáveis bilineares. O problema unível convexo junta-se as três dificuldades *NP-hard* e adiciona mais uma com o conceito matemático de dualidade forte, tornando-o um problema complexo em que é resolvido obtendo resultados satisfatórios.

## 6.2 TRABALHOS FUTUROS.

Os trabalhos realizados até este momento e os resultados obtidos são satisfatórios, mas outros temas podem ser incorporados ao FPO – CA convexo proposto nesta tese. Como, por exemplo, em problemas de restauração onde o modelo geralmente é proposto como radial, mas em redes de distribuição modernas o modelo é fracamente malhado, podendo então ser utilizado o FPO – CA convexo, devido ao fato de aumentar a confiabilidade do sistema (CHEN et al., 2004).

Propor o modelo de FPO convexo de forma mais completa e realista, ou seja, considerar as curvas de capacidade térmica dos diferentes tipos de geradores. Adaptar e utilizar o modelo convexo para simulação de sistemas de sistemas elétricos reais de grande porte. Como recentes pesquisas propõem problemas de restauração ótima de redes de transmissão CA, e desta forma desenvolver modelos convexos para reduzir os custos operacionais (KOCUK; DEY; SUN, 2017).

Problemas de planejamento na expansão da rede transmissão elétrica onde a solução é usada para guiar investimentos em equipamentos de transmissões requer

resultados de boa qualidade. Uma abordagem é encontrar uma solução ótima global, e comparar o modelo convexo proposto nesta tese com trabalhos recentes usando *branch-and-bound* como uma abordagem semidefinida com em (GHADDAR; JABR, 2018).



## REFERÊNCIAS

- ALIZADEH, F.; GOLDFARB, D. Second-order cone programming. *Mathematical Programming*, Heidelberg, v. 95, n. 1, p. 3-51, 2003.
- ALMEIDA, K. C.; SENNA, F. S. Optimal active-reactive power dispatch under competition via bilevel programming. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, v. 26, n. 4, p. 2345-2354, 2011.
- ALSAC, O.; STOTT, B. Optimal load flow with steady-state security. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, Piscataway, v. PAS-93, n. 3, p. 745-751, 1974. Disponível em: <http://ieeexplore.ieee.org.ez87.periodicos.capes.gov.br/abstract/document/4075418/?reload=true>. Acesso em: 26 out. 2017.
- BAI, X. et al. Semidefinite programming for optimal power flow problems. *International Journal of Electrical Power and Energy Systems*, London, v. 30, n. 6-7, p. 383-392, 2008.
- BERGAMINI, M. L.; AGUIRRE, P.; GROSSMANN, I. Logic-based outer approximation for globally optimal synthesis of process networks. *Computers & Chemical Engineering*, Shannon, v. 29, n. 9, p. 1914-1933, 2005.
- BOYD, S.; VANDENBERGHE, L. *Convex optimization*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- BRACKEN, J.; MCGILL, J. T. Mathematical programs with optimization problems in the constraints. *Operations Research*, Catonsville, v. 21, p. 37-44, 1973. Disponível em: <https://doi-org.ez87.periodicos.capes.gov.br/10.1287/inte.2017.090610.1287/opre.21.1.37>. Acesso em: 13 set. 2018.
- BUKSHSH, W. A. et al. Local solutions of the optimal power flow problem. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, v. 28, n. 4, p. 4780-4788, 2013.

- CAIN, M. B.; O'NEILL, R. P.; CASTILLO, A. *History of optimal power flow and formulations*. Washington: Federal Energy Regulatory Commission, p. 1-36, 2012. Disponivel em: <http://www.ferc.gov/industries/electric/indus-act/market-planning/opf-papers/acopf-1-history-formulation-testing.pdf>. Acesso em: 14 mar. 2016.
- CAMBINI, A.; MARTEIN, L. *Generalized and optimization generalized convexity: theory and applications*. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 2009. v. 1.
- CAPITANESCU, F. Critical review of recent advances and further developments needed in AC optimal power flow. *Electric Power Systems Research*, Amsterdam, v. 136, p. 57-68, 2016. Disponivel em: <https://ac.els-cdn.com/S0378779616300141/1-s2.0-S0378779616300141>. Acesso em: 26 out. 2017.
- CARPENTIER, J. Contribution à l'étude du dispatching économique. *Bulletin de la Société Française des Électriciens*, Paris, v. 3, n. 8, p. 431-447, 1962.
- CASTRO, P. M. Tightening piecewise McCormick relaxations for bilinear problems. *Computers and Chemical Engineering*, Shannon, v. 72, p. 300-311, 2015.
- CASTRO, P. M.; GROSSMANN, I. E. Optimality-based bound contraction with multiparametric disaggregation for the global optimization of mixed-integer bilinear problems. *Journal of Global Optimization*, New York, v. 59, n. 2-3, p. 277-306, 2014.
- CÉDRIC, J.; MOLZAHN, D. K. Moment/Sum-of-squares hierarchy for complex polynomial optimization. *Mathematics - Optimization and Control*, Ithaca, p. 1-32, 2015. Disponivel em: <https://arxiv.org/pdf/1508.02068.pdf>. Acesso em: 15 jan. 2017
- CHEN, T.-H. et al. Feasibility study of upgrading primary feeders from radial and open-loop to normally. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, v. 19, n. 3, p. 1308-1316, 2004.
- COFFRIN, C.; HIJAZI, H.; VAN HENTENRYCK, H. P. The qc relaxation: theoretical and computational results on optimal power flow. *IEEE Transactions on Power System*, Piscataway, v. 31, n. 4, p. 3008-3018, 2016.

- DEMPE, S. et al. *Bilevel programming problems: theory, algorithms and applications to energy networks*. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 2015.
- DENG, X. Complexity issues in bilevel linear programming. In: MIGDALAS; PARDALOS, P. M.; VÄRBRAND, P. *Multilevel optimization: algorithms and applications*. Boston: Springer, 1998. v. 20. Disponível em: [https://doi.org.ez87.periodicos.capes.gov.br/10.1007/978-1-4613-0307-7\\_6](https://doi.org.ez87.periodicos.capes.gov.br/10.1007/978-1-4613-0307-7_6). Acesso em: 01 set. 2018.
- EXPÓSITO, A. G.; RAMOS, E. R. Reliable load flow technique for radial distribution networks. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, v. 14, n. 3, p. 1063-1069, 1999.
- FARAUT, J.; KORÁNYI,... *Analysis on symmetric cones*. New York: Oxford University Press, 1994.
- FARIA, D. C.; BAGAJEWICZ, M. J. Novel bound contraction procedure for global optimization of bilinear MINLP problems with applications to water management problems. *Computers & Chemical Engineering*, Shannon, v. 35, n. 3, p. 446-455, 2011.
- FEOFILOFF, P. *Departamento de Ciência da Computação Instituto de Matemática e Estatística da USP*. [S.1.]: USP, c2018. Disponível em: [https://www.ime.usp.br/~pf/analise\\_de\\_algoritmos/aulas/NPcompleto.html](https://www.ime.usp.br/~pf/analise_de_algoritmos/aulas/NPcompleto.html). Acesso em: 2 fev. 2018.
- FERREIRA, P. A. V. *Otimização não-linear*. [S.1.]: Portal Unicamp, 2017. Disponível em: [http://www.dt.fee.unicamp.br/~tiago/courses/otimizacao\\_ao\\_linear/Cap7-Otimalidade%20e%20Dualidade.pdf](http://www.dt.fee.unicamp.br/~tiago/courses/otimizacao_ao_linear/Cap7-Otimalidade%20e%20Dualidade.pdf). Acesso em: 2 mar. 2017.
- FLOUDAS, C. A.; MARANAS, C. D. Finding all solutions of nonlinearly constrained systems of equations. *Journal of Global Optimization*, New York, v. 7, p. 143-182, 1995.
- FLOUDAS, C. A.; PARDALOS, P. M. *Encyclopedia of optimization*. London: Kluwer Academic, 2001. v. 6.

- FOURER, R.; GAY, D. M.; KERNIGHAN, B. W. *A modeling language for mathematical programming*. [S.l.: s.n.], 2003. Disponível em: <http://ampl.com/BOOK/CHAPTERS/24-refman.pdf>. Acesso em: 31 out. 2017.
- GEOGEBRA. Geogebra. *About Geogebra*, [S.l.:s.n], Local de Edição, 2018. Disponível em: <https://www.geogebra.org/about>. Acesso em: 2 fev. 2018.
- GHADDAR, B.; JABR, R. A. Power transmission network expansion planning : a semidefinite programming branch-and-bound approach. *European Journal of Operational Research*, Amsterdam, v. 274, n. 3, p. 837-844, 2019.
- HANSEN, P.; JAUMARD, ; SAVARD, G. New branch-and-bound rules for linear bilevel programming. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, Philadelphia, v. 13, p. 1194 1217, 1992. ISSN 5. Disponível em: <<https://doi.org/10.1137/0913069>>. Acesso em: 15 ago. 2018.
- HAPP, H. H. Optimal power dispatch – a comprehensive survey. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, Piscataway, v. PAS 96, n. 3, p. 841-844, 1977.
- HOFFMANN, K.; KUNZE, R. *Álgebra linear*. São Paulo: Editora Polígono, 1971.
- IGNÁCIO, A. A. V.; FERREIRA , V. J. M. F. *O uso de software de modelagem AIMMS na solução de problemas de programação matemática*. Rio de Janeiro: [s.n.], jan. 2004. p. 197-210.
- JABR, R. A. Radial distribution load flow using conic programming. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, v. 21, n. 3, p. 1458-1459, 2006.
- JABR, R. A. A conic quadratic format for the load flow equations of meshed networks. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, v. 22, n. 4, p. 2285-2286, 2007.
- JABR, R. A. Optimal power flow using an extended conic quadratic formulation. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, v. 23, n. 3, p. 1000-1008, 2008.

JIA, Z.; IERAPETRITOU, M. Mixed-Integer linear programming model for gasoline blending and distribution scheduling. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, Washington, v. 42, n. 4, p. 825–835, 2003. Disponível em: [http://link.periodicos.capes.gov.br/sfxlcl41/?ctx\\_ver=Z39.88-2004&ctx\\_enc=info:ofi/enc:UTF-8&ctx\\_tim=20180924T12%3A43%3A07IST&url\\_ver=Z39.88-2004&url\\_ctx\\_fmt=info:ofi/fmt:kev:mtx:ctx&rft\\_id=info:sid/primo.exlibrisgroup.com:primo3-Article-crossref&rft\\_val](http://link.periodicos.capes.gov.br/sfxlcl41/?ctx_ver=Z39.88-2004&ctx_enc=info:ofi/enc:UTF-8&ctx_tim=20180924T12%3A43%3A07IST&url_ver=Z39.88-2004&url_ctx_fmt=info:ofi/fmt:kev:mtx:ctx&rft_id=info:sid/primo.exlibrisgroup.com:primo3-Article-crossref&rft_val). Acesso em: 24 set. 2018.

JONATHAN, B. M.; ADRIAN, L. S. *Convex analysis and nonlinear optimization*. 2. ed. New York: Springer Science-Business Media, 2006.

KARUPPIA, R.; GROSSMANN, I. E. Global optimization for the synthesis of integrated water systems in chemical processes. *Computers & Chemical Engineering*, Shannon, v. 30, n. 4, p. 650–673, 2006. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0098135405002991>. Acesso em: 25 set. 2018.

KOCUK, B. *Global optimization methods for optimal power flow and transmission switching problems in electric power systems global optimization methods for optimal power flow and transmission switching*. Georgia: Institute of Technology, 2016.

KOCUK, B.; DEY, S. S.; SUN, X. A. New formulation and strong MISOCP relaxations for AC optimal transmission switching problem. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, v. 32, n. 6, p. 4161–4170, 2017. Disponível em: <https://ieeexplore-ieee.org.ez87.periodicos.capes.gov.br/document/7849135/>. Acesso em: 2 jan. 2018.

KOŁODZIEJ, S.; CASTRO, P. M.; GROSSMANN, I. E. Global optimization of bilinear programs with a multiparametric disaggregation technique. *Journal of Global Optimization*, New York, v. 57, n. 4, p. 1039–1063, 2013.

LAVAEI, J.; LOW, S. H. Zero duality gap in optimal power flow problem. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, v. 27, n. 1, p. 92–107, 2012.

- LIBERTI, L.; MACULAN, N. *Handbook global optimization from theory to implementation*. New York: Springer, 2006. v. 84, 429 p.
- LIU, Y.; FERRIS, M. *Security-constrained economic dispatch using semidefinite programming*. In: POWER & ENERGY SOCIETY GENERAL MEETING, 2015, Denver. *Proceedings...* Piscataway: IEEE. 2015. p. 1-5.
- LOPEZ, J. et al. A multiobjective minimax regret robust VAR planning model. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, v. 32, n. 3, p. 1761-1771, 2017.
- LOW, S. H. Convex relaxation of optimal power flow-part I: formulations and equivalence. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, Piscataway, v. 1, n. 1, p. 15-27, 2014a.
- LOW, S. H. Convex relaxation of optimal power flow-part II: exactness. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, Piscataway, v. 1, n. 2, p. 177 - 189, 2014b.
- Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org.ez87.periodicos.capes.gov.br/stamp/stamp.jsp?arnumber=6815671>>. Acesso em: 26 out. 2017.
- MADANI, R.; ASHRAPHIJUO, M.; LAVAEI, J. Promises of conic relaxation for contingency- constrained optimal power flow problem. *Fifty-second Annual Allerton Conference*, Illinois, Litchfield, v. 31, n. 2, p. 1-11, 2015.
- MALO, P.; DEB, K.; SINHA, A. A review on bilevel optimization: from classical to evolutionary approaches and applications. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, Piscataway, n. 22, p. 276-295, ago. 2018. Acesso em: 15 ago. 2018.
- MCCORMICK, G. P. Computability of global solutions to factorable nonconvex programs: part I — convex underestimating problems. *Mathematical programming*, Berlin, v. 10, n. 1, p. 147-175, 1976.
- MEYER, C. A.; FLOUDAS, C. A. Global optimization of a combinatorially complex generalized pooling problem. *AIChE American Institute of Chemical Engineers*, Washington, v. 52, n. 3, p. 1027-1037, 2006.

- MISENER, R.; FLOUDAS, C. A. GloMIQO: Global mixed-integer quadratic optimizer. *Journal of Global Optimization*, New York, v. 57, n. 1, p. 3–50, 2013.
- MISENER, R.; FLOUDAS, C. A. *Mixed-integer quadratically-constrained quadratic programs*. Princeton: University, 2013. p. 1-40.
- MOLZAHM, D.; LESIEUTRE, B.; DEMARCO, C. Investigation of non-zero duality gap solutions to a semidefinite relaxation of the optimal power flow problem. In: ANNUAL HAWAII INTERNATIONAL CONFERENCE ON SYSTEM SCIENCES, 2014, Waikoloa. *Proceedings...* Piscataway: IEEE, 2014. p. 2325-2334.
- MOLZAHN, D. K. et al. Implementation of a large-scale optimal power flow solver based on semidefinite programming. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, v. 28, n. 4, p. 3987-3998, 2013.
- MOLZAHN, D. K.; HISKENS, I. A. Sparsity-exploiting moment-based relaxations of the optimal power flow problem. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, v. 30, n. 6, p. 3168-3180, 2015. Disponível em:  
<http://ieeexplore.ieee.org.ez87.periodicos.capes.gov.br/stamp/stamp.jsp?arnumber=6980142>. Acesso em: 30 out. 2017.
- MOLZAHN, D. K.; HISKENS, I. A. Sparsity-Exploiting moment-based relaxations of the optimal power flow problem. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, v. 30, n. 6, p. 3168-3180, 2015.
- MOLZAHN, D. K.; LESIEUTRE, B. C.; DEMARCO, C. L. A sufficient condition for global optimality of solutions to the optimal power flow problem. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, v. 29, n. 2, p. 978-979, 2014. Disponível em:  
<http://ieeexplore.ieee.org.ez87.periodicos.capes.gov.br/stamp/stamp.jsp?arnumber=6655990>. Acesso em: 30 out. 2017.

- MURILLO-SÁNCHEZ, C. E. et al. Secure planning and operations of systems with stochastic sources, energy storage, and active demand. *IEEE Transactions on Smart Grid*, Piscataway, v. 4, n. 4, p. 2220-2229, 2013. Disponível em: <http://ieeexplore.ieee.org.ez87.periodicos.capes.gov.br/stamp/stamp.jsp?arnumber=6670209>. Acesso em: 31 out. 2017.
- PANCIATICI, P. et al. *Advanced optimization methods for power systems*. Wrocław: [s.n.], 2014. p. 1-18.
- PANIGRAHI, B. K. et al. Economic load dispatch using hybrid swarm intelligence based harmony search algorithm. *Electric Power Components and Systems*, London, v. 39, n. 8, p. 751-767, 2011. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/15325008.2010.541411>. Acesso em: 17 set. 2018.
- PARDALOS, P. M.; ROMEIJN, E. H. *Handbook of global optimization*. Boston: Springer, 1995. v. 2.
- PESCHON, J.; PIERCY, D. S.; TINNEY, W. F. Optimum control of reactive power flow. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, Piscataway, v. DAS-87, n. 1, p. 40-48, 1968.
- PHAN, D.; KALAGNANAM, J. Some efficient optimization methods for solving the security-constrained optimal power flow problem. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, v. 29, n. 2, p. 863-872, 2014.
- POURAKBARI-KASMAEI, M.; RIDER, M. J.; MANTOVANI, J. R. An unequivocal normalization-based paradigm to solve dynamic economic and emission active-reactive OPF (optimal power flow). *Energy*, London, v. 73, p. 554-566, 2014. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com.ez87.periodicos.capes.gov.br/science/article/pii/S0360544214007567>. Acesso em: 26 out. 2017.



POURAKBARI-KASMAEI, M.; RIDER, M. J.; MANTOVANI, J. R. S. An unambiguous distance-based MIQP model to solve economic dispatch problems with disjoint operating zones. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, v. 31, n. 1, p. 825-826, 2016.

PRESTES, E. *Preste*. [S.l.]: UFRGS, c2018. Disponível em:

<http://www.inf.ufrgs.br/~prestes/Courses/Graph%20Theory/GrafosA6.pdf>. Acesso em: 02 fev. 2018.

RAJPUT, V. N.; PANDYA, K. S. On 8-bus test system for solving challenges in relay coordination. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON POWER SYSTEMS-ICPS, 6, 2016, 2016, New Delhi. *Proceedings...* Piscataway: IEEE, 2016. p. 17-19.

RAMAN, R.; GROSSMANN, I. E. Modelling and computational techniques for logic based integer programming. *Computers & Chemical Engineering*, Shannon, v. 18, n. 7, p. 563-578, 1994.

RUIZ, J. P.; GROSSMANN, I. E. Exploiting vector space properties to strengthen the relaxation of bilinear programs arising in the global optimization of process networks. *Optimization Letters*, Berlin, v. 5, n. 1, p. 1-11, 2011.

SASSON, A. M.; JAIMES, F. J. Digital methods applied to power flow studies. *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, Piscataway, v. 86, n. 7, p. 860-867, 1967.

SHELDON, A.; KENNETH, R. *Real and convex analysis*. New York: Springer, 2013.

STACKELBERG'S, H. V. Marktform und Gleichgewicht. *Journal of Economic Studies*, London, v. 23, p. 58-70, 1996. Disponível em: <https://doi-org.ez87.periodicos.capes.gov.br/10.1108/EUM0000000004272>. Acesso em: 13 set. 2018.

TAWARMALANI, M.; SAHINIDIS, N. V. A polyhedral branch-and-cut approach to global optimization. *Mathematical Programming*, Berlin, v. 103, n. 2, p. 225-249, 2005.

TAYLOR, J. A. *Convex optimization of power systems*. Cambridge: Cambridge University Press, 2015.

TSAI, J. F.; LIN, M.H. Global optimization of signomial mixed-integer nonlinear programming problems with free variables. *Journal of Global Optimization*, New York, v. 42, n. 1, p. 39-49, 2008.

WARD, J. B.; HALE, H. W. Digital computer solution of power flow problems. *Trans. AIEE Power Apparatus and Systems*, Piscataway, v. 75, p. 398-404, 1956.

WASHINGTON, U. O. Research. [SI.]: University of Washington, c2018. Disponivel em: <<https://labs.ece.uw.edu/>. Acesso em: 2 jan. 2018.

ZIMMERMAN, R. D.; SANCHEZ, C. M.; THOMAS, R. J. MATPOWER: Steady-state operations, planning, and analysis tools for power systems research and education. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, v. 26, n. 1, p. 12-19, 2011. Disponivel em: <http://ieeexplore.ieee.org.ez87.periodicos.capes.gov.br/stamp/stamp.jsp?arnumber=5491276>. Acesso em: 31 out. 2017.

## APÊNDICE 1

Neste apêndice, são apresentadas as formulações dos modelos matemáticos primal e dual do despacho econômico de potência ativa. As equações de (117)–(118) e (121)–(140) é a formulação primal completa da equação (103) apresentada no capítulo 5. As equações (119), (141)–(155) representam o modelo dual da equação (103) apresentada no capítulo 5. A equação (120) representa a relação primal igual à dual da função objetivo, condição necessária para garantir o uso da dualidade forte e apresentar o problema de despacho ótimo de potência ativa e reativa apresentado no capítulo 5 como um problema de competição via programação binível em apenas um nível.

$$\min_{\substack{Pg_i^0, Pg_i^{02}, r_{ij}^0, \delta_i^0 \\ \Delta_{y,i}^P, \delta_{ij}^{02}, \Delta_{y,ij}^\delta, \delta_{ij}^+, \delta_{ij}^-}} \sum_{i \in \Omega_B} \frac{1}{2} \alpha_{0i} Pg_i^{02} + \beta_{0i} Pg_i^0 \quad (117)$$

$$Pg_i^0 - \sum_{ij \in \Omega_L} \left( f_{ij}^0 + \frac{1}{2} r_{ij}^0 \right) + \sum_{ji \in \Omega_L} \left( f_{ji}^0 - \frac{1}{2} r_{ji}^0 \right) = Pd_i, \forall i \in \Omega_B: \pi_i \quad (118)$$

Modelo matemático Dual do Despacho Econômico

$$\begin{aligned} \max_{\substack{\pi, \lambda, \alpha, \phi, \theta \\ \eta, \tau, \sigma, \bar{\kappa} \\ \underline{\kappa}, \bar{l}, \underline{l}, \bar{v}, \underline{v} \\ \bar{\varphi}, \underline{\varphi}, \bar{\beta}, \underline{\beta}}} \sum_{i \in \Omega_B} \left( Pd_i \pi_i + Pg_i^{0Max} \bar{\kappa}_i - Pg_i^{0Min} \underline{\kappa}_i + \sum_{y \in Y} \Delta_i^P \bar{\varphi}_{y,i} \right) \\ + \sum_{ij \in \Omega_L} \left( f_{ij}^{0max} \bar{l}_{ij} + f_{ij}^{0max} \underline{l}_{ij} + \bar{\delta}_i^0 \bar{\delta}_{ij} - \underline{\delta}_i^0 \underline{\delta}_{ij} \right) \end{aligned} \quad (119)$$

Nova restrição que surge do *joint*, funções objetivos do primal menos a do dual:

$$\sum_{i \in \Omega_B} \frac{1}{2} (\alpha_{0i} P g_i^{02} + \beta_{0i} P g_i^0) - \sum_{i \in \Omega_B} \left( P d_i \pi_i + P g_i^{0Max} \bar{\kappa}_i - P g_i^{0Min} \underline{\kappa}_i + \sum_{y \in Y} \Delta_i^P \bar{\phi}_i \right) \quad (120)$$

$$+ \sum_{ij \in \Omega_L} \left( f_{ij}^{0Max} \bar{v}_{ij} + f_{ij}^{0Max} \underline{l}_{ij} + \bar{\delta}_i^0 \beta_{ij} - \underline{\delta}_i^0 \beta_{ij} + \sum_{y_1 \in Y_1} \Delta_{ij}^\delta \bar{w}_{y_1, i} \right) = 0$$

$$f_{ij}^0 + B_{ij} (\delta_i^0 - \delta_j^0) = 0, \forall ij \in \Omega_L: \lambda_{ij} \quad (121)$$

$$\delta_i^0 = 0, \forall i \in \Omega_B / Slack: \alpha_i \quad (122)$$

$$P g_i^{02} - \sum_{y=1}^Y m_{y,i}^P \Delta_{y,i}^P = 0, \forall i \in \Omega_B: \varphi_{i,j} \quad (123)$$

$$P g_i^0 - \sum_{y=1}^Y \Delta_{y,i}^P = 0, \forall i \in \Omega_B: \theta_i \quad (124)$$

$$r_{ij}^0 - G_{ij} (\delta_{ij}^{02}) = 0, \forall ij \in \Omega_L: \eta_{ij} \quad (125)$$

$$\delta_{ij}^{02} - \sum_{y=1}^Y m_{y,ij}^\delta \Delta_{y,ij}^\delta = 0, \forall ij \in \Omega_L: \tau_{ij} \quad (126)$$

$$\delta_{ij}^+ + \delta_{ij}^- - \sum_{y=1}^Y \Delta_{y,ij}^\delta = 0, \forall ij \in \Omega_L: \varepsilon_{ij} \quad (127)$$

$$(\delta_i^0 - \delta_j^0) - \delta_{ij}^+ + \delta_{ij}^- = 0, \forall ij \in \Omega_L: \sigma_{ij} \quad (128)$$

$$P g_i^0 \leq P g_i^{0Max}, \forall i \in \Omega_B: \bar{\kappa}_i \quad (129)$$

$$-P g_i^0 \leq -P g_i^{0Min}, \forall i \in \Omega_B: \underline{\kappa}_i \quad (130)$$

$$f_{ij}^0 + \frac{1}{2} r_{ij}^0 \leq f_{ij}^{0Max}, \forall ij \in \Omega_L: \bar{i}_{ij} \quad (131)$$

$$-f_{ij}^0 + \frac{1}{2}r_{ij}^0 \leq f_{ij}^{0Max}, \forall ij \in \Omega_L: \underline{L}_{ij} \quad (132)$$

$$-\delta_{ij}^+ \leq 0, \forall ij \in \Omega_L: \bar{v}_{ij} \quad (133)$$

$$-\delta_{ij}^- \leq 0, \forall ij \in \Omega_L: \underline{v}_{ij} \quad (134)$$

$$\Delta_{y,i}^P \leq \bar{\Delta}_i^P, \forall i \in \Omega_B, y \in 1 \dots Y: \bar{\phi}_{y,i} \quad (135)$$

$$-\Delta_{y,i}^P \leq \bar{\Delta}_i^P, \forall i \in \Omega_B, y \in 1 \dots Y: \underline{\phi}_{y,i} \quad (136)$$

$$\Delta_{y_1,i}^\delta \leq \bar{\Delta}_i^\delta, \forall i \in \Omega_B, y_1 \dots Y_1: \bar{\omega}_{y,i} \quad (137)$$

$$-\Delta_{y_1,i}^\delta \leq 0, \forall i \in \Omega_B, y_1 \dots Y_1: \underline{\omega}_{y,i} \quad (138)$$

$$\delta_i^0 - \delta_j^0 \leq \bar{\delta}_i^0, \forall ij \in \Omega_L: \bar{\beta}_{ij} \quad (139)$$

$$-\delta_i^0 + \delta_j^0 \leq \underline{\delta}_i^0, \forall ij \in \Omega_L: \underline{\beta}_{ij} \quad (140)$$

$$\pi_i + \theta_i + \bar{\kappa}_i - \underline{\kappa}_i = \beta_i, \forall i \in \Omega_B: Pg_i^0 \quad (141)$$

$$\phi_i = \frac{1}{2}\alpha_{0i}, \forall i \in \Omega_B: Pg_i^{02} \quad (142)$$

$$-\pi_i + \pi_j + \lambda_{ij} + \bar{t}_{ij} - \underline{t}_{ij} \in \Omega_L: f_{ij}^0 \quad (143)$$

$$-\frac{1}{2}\pi_i - \frac{1}{2}\pi_j + \eta_{ij} + \frac{1}{2}\bar{t}_{ij} + \frac{1}{2}\underline{t}_{ij} \in 0, ij \in \Omega_L: r_{ij}^0 \quad (144)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{ij \in \Omega_L} (+B_{ij}\lambda_{ij} + \sigma_{ij} + \overline{\beta_{ij}} - \underline{\beta_{ij}}) + \\
& + \sum_{ji \in \Omega_L} (-B_{ji}\lambda_{ji} - \sigma_{ji} - \overline{\beta_{ji}} + \underline{\beta_{ji}}) = 0, \forall i \in \Omega_B \quad / \quad i \neq \text{slack}: \delta_i^0
\end{aligned} \tag{145}$$

$$\begin{aligned}
& \alpha_{0i} + \sum_{ij \in \Omega_L} (+B_{ij}\lambda_{ij} + \sigma_{ij} + \overline{\beta_{ij}} - \underline{\beta_{ij}}) + \\
& + \sum_{ji \in \Omega_L} (-B_{ji}\lambda_{ji} - \sigma_{ji} - \overline{\beta_{ji}} + \underline{\beta_{ji}}) = 0, \forall i \in \Omega_B \quad / \quad i = \text{slack}: \delta_i^0
\end{aligned} \tag{146}$$

$$-m_{y,i}^P \phi_i - \theta_i + \overline{\varphi}_{y,i} - \underline{\varphi}_{y,i} = 0, \forall i \in \Omega_B, y \in 1 \dots Y: \Delta_{y,i}^p \tag{147}$$

$$-G_{ij}\eta_{ij} + \tau_{ij} = 0, \forall ij \in \Omega_L: \delta_{ij}^{02} \tag{148}$$

$$-m_{y,ij}^\delta \tau_{ij} - \varepsilon_{ij} + \overline{\omega}_{y,ij} - \underline{\omega}_{y,ij} = 0, \forall ij \in \Omega_L, y_1 \in 1 \dots Y_1: \Delta_{y,ij}^\delta \tag{149}$$

$$\varepsilon_{ij} - \sigma_{ij} - \overline{v}_{ij} = 0, \forall ij \in \Omega_L: \delta_{ij}^+ \tag{150}$$

$$\varepsilon_{ij} + \sigma_{ij} - \underline{v}_{ij} = 0, \forall ij \in \Omega_L: \delta_{ij}^- \tag{151}$$

$$\overline{\kappa}_i, \underline{\kappa}_i \leq 0, \forall i \in \Omega_B \tag{152}$$

$$\overline{l}_{ij}, \underline{l}_{ij}, \overline{v}_{ij}, \underline{v}_{ij}, \overline{\beta}_{ij}, \underline{\beta}_{ij} \leq 0, \forall ij \in \Omega_L \tag{153}$$

$$\overline{\varphi}_{y,i}, \underline{\varphi}_{y,i} \leq 0, \forall i \in \Omega_B, \forall y \in Y \tag{154}$$

$$\overline{\omega}_{y_1,ij}, \underline{\omega}_{y_1,ij} \leq 0, \forall ij \in \Omega_L, y_1 \in Y \tag{155}$$